Библиотека СОК

К. С. Басниев
И. Н. Кочина
В. М. Максимов

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА



К.С. Басниев
И.Н. Кочина
В.М. Максимов

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Рекомендовано
Государственным комитетом
Российской Федерации
по высшему образованию
в качестве учебника для студентов
высших учебных заведений;
обучающихся по направлению
«Горное дело», специальности
«Разработка и эксплуатация
нефтяных и газовых месторождений»



МОСКВА "НЕДРА" 1993

ББК 26.325.31
Б 27
УДК 622.276.031 : 53 (075)

Рецензенты:
Кафедра гидравлики Ухтинского индустриального института; д-р техн. наук. *В. Н. Николаевский*

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная
Б 27 гидромеханика: Учебник для вузов.– М.: Недра, 1993.
416 с.: ил
ISBN 5-247-02323-4

Изложена гидродинамическая теория одно- и многофазной фильтрации жидкостей и газов в однородных и неоднородных пористых и трещиноватых средах. Рассмотрены задачи стационарной и нестационарной фильтрации и способы расчета интерференции скважин. Описаны гидродинамические методы повышения нефтегазоотдачи, неизотермическая фильтрация при тепловых методах воздействия на пласт и в естественных термобарических условиях.

Для студентов нефтяных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений».

Б $\frac{2503010400-089}{043(01)-93}$ 115–93 **ББК 26.325.31**

ISBN 5-247-02323-4

© К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов, 1993

ББК 26.325.31
Б 27
УДК 622.276.031 : 53 (075)

Рецензенты:
Кафедра гидравлики Ухтинского индустриального института; д-р техн. наук. *В. Н. Николаевский*

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная
Б 27 гидромеханика: Учебник для вузов.– М.: Недра, 1993.–
416 с.: ил
ISBN 5-247-02323-4

Изложена гидродинамическая теория одно- и многофазной фильтрации жидкостей и газов в однородных и неоднородных пористых и трещиноватых средах. Рассмотрены задачи стационарной и нестационарной фильтрации и способы расчета интерференции скважин. Описаны гидродинамические методы повышения нефтегазоотдачи, неизотермическая фильтрация при тепловых методах воздействия на пласт и в естественных термобарических условиях.

Для студентов нефтяных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений».

Б $\frac{2503010400-089}{043(01)-93}$ 115-93 **ББК 26.325.31**

ISBN 5-247-02323-4

© К. С. Басниев, И. Н. Кочина, В. М. Максимов, 1993

ность фиктивного грунта зависят не от диаметра частиц, а лишь от плотности их укладки.

Основоположниками отечественной школы теории фильтрации являются профессор Н. Е. Жуковский, академики Н. Н. Павловский, Л. С. Лейбензон. Исследования этих выдающихся ученых, их многочисленных учеников и последователей стали фундаментальной основой развития теории фильтрации в нашей стране.

Н. Е. Жуковский (1847–1921 гг.) в 1889 г. опубликовал первую работу по теории фильтрации «Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод». Им впервые выведены общие дифференциальные уравнения теории фильтрации, показано, что напор как функция координат удовлетворяет уравнению Лапласа, указано на математическую аналогию теплопроводности и фильтрации. Им исследованы также вопросы капиллярного поднятия воды в пористой среде, решен ряд задач о притоке воды к скважинам.

Н. Н. Павловскому (1884–1937 гг.) принадлежит определяющая роль в развитии теории фильтрации в гидротехническом направлении.. В опубликованной монографии «Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения» изложена разработанная им строгая математическая теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Им впервые многие задачи фильтрации воды были сформулированы как краевые задачи математической физики. Н. Н. Павловский впервые обосновал и прдложил применение метода электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) для решения фильтрационных задач, что в последующем нашло широкое применение для решения задач фильтрации воды, нефти и газа в неоднородных коллекторах.

Н. Н. Павловский впервые предложил использовать параметр Рейнольдса в качестве критерия существования закона Дерси, что имеет важное значение для исследования законов сопротивления при фильтрации. Фундаментальные результаты в развитии теории движения грунтовых вод получены академиком П. Я. Полубариновой-Кочиной.

Л. С. Лейбензон (1879–1951 гг.)–основатель советской школы ученых и специалистов, занимающихся развитием теории фильтрации применительно к проблемам разработки нефтяных и газовых месторождений.

Теоретические и экспериментальные исследования Л. С. Лейбензона начались в 1921 г. в Баку. Ему принадлежит приоритет в постановке и решении ряда задач нефтегазовой и подземной гидромеханики. Им проведены первые исследования по фильтрации газированных жидкостей, сформулированы задачи нестационарной фильтрации при расчетах стягивания контуров нефтеносности при вытеснении нефти водой, получены фундаментальные результаты в развитии теории фильтрации природного газа.

Обобщение этих исследований приведено в обширной монографии «Нефтепромысловая механика», в которой, по существу, впервые изложены основы нефтегазовой подземной гидромеханики.

Трудами учеников и последователей академика Л. С. Лейбензона сложилась школа, которая по праву называется школой Л. С. Лейбензона.

Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоводоносных пластах внесли академик С. А. Христианович, профессоры Б. Б. Лапук, И. А. Чарный, В. Н. Щелкачев. Написанные ими монографии и учебники стали классическими, основополагающими. Они имеют большое научно-методическое значение, способствуя успешной подготовке в вузах инженерных и научных кадров.

В послевоенный период теория фильтрации нефти, газа и воды развивается трудами советских ученых, среди которых следует отметить работы М. Т. Абасова, М. Г. Алишаева, И. М. Аметова, Е. Ф. Афанасьева, Г. И. Баренблатта, Ю. П. Борисова, С. Н. Бузинова, В. Я. Булыгина, Г. Г. Вахитова, М. М. Глоговского, Г. Л. Говоровой, А. Т. Горбунова, М. А. Гусейн-Заде, В. Л. Данилова, Ю. В. Желтова, Ю. П. Желтова, С. Н. Закирова, Г. А. Зотова, В. М. Ентова, Р. Г. Исаева, Ю. П. Коротаева, А. К. Курбанова, Е. М. Минского, Ю. М. Молоковича, А. Х. Мирзаджанзаде, Н. Н. Непримерова, В. Н. Николаевского, А. М. Пирвердяна, Г. Б. Пыхачева, Г. В. Рассохина, М. Д. Розенберга, Е. С. Ромма, Э. В. Соколовского, М. Л. Сургучева, М. М. Саттарова, Ф. А. Требина, Э. Б. Чекалюка, М. В. Филинова, М. И. Швидлера, И. Д. Умрихина, А. Л. Хейна, Д. А. Эфроса и др. Работы этих ученых и их учеников обеспечили успешное развитие подземной гидромеханики – теоретической основы теории и практики разработки нефтяных и газовых месторождений, что способствовало ускоренному развитию нефтегазодобывающей промышленности нашей страны.

В последние годы ведутся интенсивные исследования в области гидрогазодинамического обоснования повышения степени извлечения углеводородов из недр. Это обусловлено исчерпанием легкодоступных запасов нефти и газа, усложнением горно-геологических и термобарических условий разработки месторождений. Наступает новый этап развития нефтегазовой подземной гидромеханики, в течение которого главным направлением исследований будет достижение достаточно высоких коэффициентов нефтегазоотдачи пластов.

Следует отметить, что фундаментальные гидродинамические аспекты этой проблемы успешно развиваются работами исследователей, которые широко привлекают методы термодинамики, физики, химии, а также современный аппарат математического описания сложных фильтрационных процессов.

Широкие исследования в области нефтегазовой подземной гидромеханики проводятся за рубежом. Большое значение для развития технологии нефтеотдачи имеют работы по теории фильтрации крупнейшего американского специалиста М. Маскета, хорошо известные советскому читателю благодаря переводу на русский язык двух его капитальных монографий. Основы теории двухфазной фильтрации, предложенные С. Бакли и М. Леверетом, получили широкое распространение и представляют собой основное содержание модели двухфазной

фильтрации. Работа А. Ван Эвердингена и У. Херста о притоке упругой жидкости к скважине и полученные в ней решения позволили существенно усовершенствовать гидродинамические расчеты продвижения воды в пределы нефтяной или газовой залежи.

Большое значение имеет работа Р. Коллинза, посвященная теории течения жидкостей через пористые материалы. Известный французский гидромеханик А. Упер выпустил несколько монографий, посвященных теории фильтрации жидкостей и газов при нелинейном законе, применению вероятностно-статистических методов для решения фильтрационных задач. Нашим специалистам хорошо известны переведенные на русский язык книги А. Э. Шейдеггера (Канада), Х. Азиза и Э. Сеттари (США), Н. Кристеа (Румыния) и др.

Работы зарубежных авторов последних лет, так же как и советских специалистов, посвящены гидродинамическому моделированию процессов разработки нефтяных и газовых месторождений применительно к все усложняющимся условиям их эксплуатации.

В последние годы обмен информацией о достижениях в области нефтегазовой подземной гидромеханики заметно улучшился. Большое значение для этого имеют регулярно проводимые Европейские симпозиумы по нефтеотдаче пластов, Мировые нефтяные и газовые конгрессы, другие международные конференции. Актуальные проблемы нефтегазовой подземной гидромеханики регулярно обсуждаются на научном семинаре в Государственной академии нефти и газа им. И. М. Губкина, почетным председателем которого является профессор В. Н. Щелкачев.

В списке литературы, помещенном в конце книги, указываются не только учебники и учебные пособия по подземной гидромеханике, но и монографии по механике жидкости и газа, физике нефтяного пласта, разработке нефтяных и газовых месторождений и другим вопросам нефтегазовой науки и техники, содержащие изложение отдельных специальных вопросов подземной гидромеханики.

Предлагаемый учебник синтезирует, в основном, опыт преподавания курса в Государственной академии нефти и газа им. И. М. Губкина. При этом преимущественно используется аппарат для постановки и решения краевых задач математической физики.

Необходимо отметить, что в последние годы для решения сложных фильтрационных задач создано несколько новых направлений, в частности, развитие исследований показало, что традиционные задачи гидродинамической теории фильтрации можно сформулировать как стохастические в средах со случайными неоднородностями. В связи с этим активно развивается специфическое направление в теории фильтрации, которое можно назвать стохастической теорией фильтрационных процессов.

Развиваются также и другие новые математические методы исследования характеристик природных систем и протекающих в них процессов, эффективные для построения и обоснования моделей подземной гидромеханики. Речь идет о методах перколяции (протекания) и фракталов.

Перколяционные модели позволяют достаточно полно описывать

сложные процессы капиллярного гистерезиса и неравновесности. Для построения фильтрационных моделей на макроуровне в хаотически неоднородных пластах, при неустойчивом продвижении границ фаз применяются теории фракталов.

В некоторых случаях традиционных методов подземной гидромеханики становится недостаточно для адекватного описания всего периода жизни месторождения, связанного с необходимостью непрерывного корректирования принимаемых решений по мере уточнения исходной информации.

Тогда для принятия обоснованных решений необходимо применение вероятностно-статистических и адаптационных методов. Под руководством академика АН республики Азербайджан А.Х. Мирзаджанзаде создано такое направление оптимизации принимаемых решений в фильтрационных задачах применительно к широкому кругу вопросов разработки нефтяных и газовых месторождений. Перечисленные методы в данном учебнике не рассматриваются. С ними можно ознакомиться в специальной литературе.

Современное состояние и перспективы дальнейшего развития нефтяной и газовой промышленности характеризуются переходом на интенсивные методы разработки месторождений, существенным усложнением горно-геологических и термобарических условий их эксплуатации. В связи с этим применяются новые методы повышения нефтеотдачи пластов, основанные на дальнейшем совершенствовании методов гидродинамического воздействия на пласты, более широким применением термических, физико-химических и газовых методов воздействия на природные резервуары и насыщающие их флюиды.

Нефтегазовая подземная гидромеханика получает дальнейшее развитие под влиянием новых актуальных задач, выдвигаемых практикой разработки нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений. В связи с этим, наряду с изложением традиционных вопросов, гораздо большее внимание уделяется задачам взаимного вытеснения жидкостей и газов в пористых средах, задачам с подвижной границей и эффективным приближенным методам их решения. Эти последние разделы составляют теоретическую базу при моделировании многих технологических процессов, связанных с повышением нефте- и газоотдачи пластов. Рассмотрены основные типы моделей физических процессов, происходящих при фильтрации пластовых флюидов в процессе разработки и эксплуатации природных залежей; при этом основное внимание уделяется численному моделированию. Дается анализ численных схем и алгоритмов, апробированных и хорошо зарекомендовавших себя в подземной гидродинамике и ее приложениях.

При рассмотрении гидродинамических задач, связанных с разработкой газоконденсатных месторождений, авторы исходили из понимания того, что эти месторождения насыщены углеводородами парафинового ряда, в составе которых имеется достаточно большое количество углеводородов от пентана и тяжелее, конденсирующихся и испаряющихся при снижении пластового давления. Кроме газа, продукция

газоконденсатного месторождения – сырой и стабильный углеводородный конденсат – результат ретроградных явлений, происходящих при изменении давления и температуры.

Стабильный конденсат при стандартных условиях (0,1 МПа и 20 °С) состоит только из жидких углеводородов (C_5 + высшие) и используется как сырье для переработки на топливо или получения химических продуктов. Отметим, что в учебнике не представляется возможным изложить достаточно полно теорию фильтрации газоконденсатных смесей в пористых средах с учетом происходящих при этом фазовых превращений. Однако рассмотренные случаи многофазной многокомпонентной фильтрации в большинстве случаев описывают и этот процесс.

Ряд новых и важных проблем подземной гидродинамики, поставленных практикой (фильтрация неньютоновских жидкостей, термодинамика фильтрационного потока, физико-химическая подземная гидродинамика, законы фильтрации в анизотропных средах), излагается, в основном, по оригинальным статьям и монографиям с единых методических позиций, причем отобраны подходы и методы, прошедшие тщательную аппробацию в учебном процессе и практических приложениях.

Данная книга является, прежде всего, базовым учебником, предназначенным для студентов специальности 09.07 «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений», но может быть использована и студентами других специальностей вузов нефтегазового профиля и, прежде всего, при подготовке инженеров-исследователей по специальности 09.06 «Физические процессы нефтегазового производства» и инженеров-математиков по специальности 01.02 «Прикладная математика». Она может быть полезной также для изучения основ нефтегазовой подземной гидромеханики студентами других нефтегазовых специальностей.

Отдельные разделы книги ориентированы и представляют интерес для аспирантов и стажеров соответствующих специальностей, инженерно-технических и научных работников нефтяной и газовой промышленности.

Рукопись учебника подготовлена на кафедре нефтегазовой и подземной гидромеханики ГАНГ им. И. М. Губкина. Некоторые результаты, изложенные в учебнике, получены совместно с П. Г. Бедриковецким, Н. М. Дмитриевым, Г. П. Цыбульским, Г. И. Баренблаттом. Авторы признательны В. М. Ентову и А. К. Курбанову за ценные советы по улучшению содержания учебника, рецензентам В. Н. Николаевскому, Г. В. Рассохину и А. И. Бэру – за внимательное рассмотрение рукописи, способствовавшее улучшению ее содержания.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ НЕФТИ, ГАЗА И ВОДЫ

§ 1. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ФЛЮИДОВ В ПРИРОДНЫХ ПЛАСТАХ

Нефть и природные газы заключены в недрах Земли. Их скопления связаны с вмещающими горными породами – пористыми и проницаемыми образованиями, имеющими непроницаемые кровлю и подошву. Горные породы, которые могут служить вместилищами нефти и газа и в то же время отдавать их при разработке, называются породами – коллекторами.

Природные жидкости (нефть, газ, подземные воды) находятся, в основном, в пустотах – порах и трещинах осадочных горных пород. Их движение происходит либо вследствие естественных процессов (миграция углеводородов), либо в результате деятельности человека, связанной с извлечением полезных ископаемых, строительством и эксплуатацией гидротехнических сооружений. Движение жидкостей, газов и их смесей через твердые (вообще говоря, деформируемые) тела, содержащие связанные между собой поры или трещины, называется фильтрацией. Теория фильтрации, являющаяся разделом механики сплошной среды, получила большое развитие в связи с потребностями гидротехники, гидромелиорации, гидрогеологии, горного дела, нефтегазодобычи, химической технологии и т. д. Теоретической основой разработки нефтегазоводоносных пластов служит нефтегазовая подземная гидромеханика, изучающая фильтрацию нефти, газа и воды в пористых и (или) трещиноватых горных породах.

Движение флюидов в малопроницаемых толщах осадочных горных пород имеет особенности, существенно отличающие нефтегазовую подземную гидромеханику не только от обычной гидродинамики (движение жидкостей в открытом пространстве), но и от процессов фильтрации в химической технологии или гидромелиорации.

Поровое пространство осадочных горных пород – сложная нерегулярная система сообщающихся межзернистых пустот, в которой трудно выделить отдельные поровые каналы (рис. 1.1). Размеры пор в песчаных породах составляют обычно единицы или десятки микрометров (мкм).

Строение нефтяных и газовых залежей осложняется значительной неоднородностью пород, их слоистостью, наличием тектонических и стратиграфических нарушений (разрывов сплошности породы). Разведка месторождений, исследование пластов, извлечение нефти и газа осуществляются через отдельные скважины диаметром 10–20 см, отстоящие друг от друга на сотни, а иногда и тысячи метров.

Теорию фильтрации нефти и газа в природных пластах характеризуют следующие особенности.

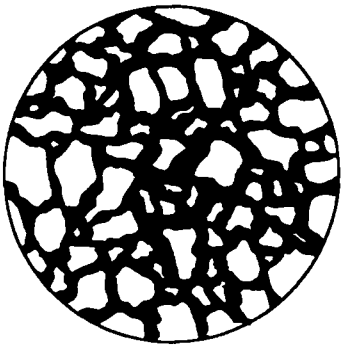


Рис. 1.1. Шлиф нефтяного песчаника

1. Невозможность изучать движение флюидов в пластах прямым применением обычных методов гидродинамики, т. е. решением уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор.

2. Сочетание очень разных масштабов фильтрационных процессов, определяемых различными характерными размерами, отличающимися по величине на многие порядки: размер пор (единицы и десятки микрометров), диаметр скважин (десятки сантиметров), расстояние между скважинами (сотни метров), протяженность месторождений (десятки километров). Масштаб неоднородности пластов вдоль и поперек их простирания может иметь практически любые значения.

3. Ограниченность и неточность сведений о строении и свойствах пласта и пластовых флюидов, не позволяющих построить однозначную модель пластовой залежи.

Эти особенности приводят к формулировке основных модельных представлений и разработке методов подземной гидромеханики, направленных, прежде всего, на установление качественных закономерностей процессов и на создание расчетных схем, мало чувствительных к точности исходных данных. При этом познавательная и практическая ценность получаемых результатов в значительной степени определяется четкостью поставновки расчетной задачи и глубиной предварительного анализа имеющихся данных.

§ 2. ПОРИСТАЯ СРЕДА. ИСХОДНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Под пористой средой понимается множество твердых частиц, тесно прилегающих друг к другу, сцементированных или несцементированных, пространство между которыми (поры, трещины) может быть заполнено жидкостью или газом.

Поровое пространство природного пласта, ввиду сложности и нерегулярности его структуры, можно рассматривать как систему с большим

числом однородных элементов, слабо связанных между собой. Из статистической физики известно, что такие системы могут быть описаны как некоторые сплошные среды, свойства которых не выражаются через свойства составляющих элементов, а являются усредненными характеристиками достаточно больших объемов среды.

Макроскопическое фильтрационное течение пластовых флюидов проявляется как совокупность множества отдельных микродвижений в неупорядоченной системе поровых «каналов». С возрастанием числа таких микродвижений начинают проявляться статистические закономерности, характерные для движения в целом, но не для одного порового канала или нескольких каналов.

Это позволяет в качестве исходного допущения теории фильтрации, так же как и в гидродинамике принять, что пористая среда и насыщающие ее флюиды образуют сплошную среду, т. е. заполняют любой выделенный элементарный объем непрерывно. Это накладывает определенные ограничения на понятие «элементарного объема» порового пространства. Под «элементарным объемом» в теории фильтрации понимают такой физически бесконечно малый объем, в котором заключено большое число пор и зерен, так что он достаточно велик по сравнению с размерами пор и зерен породы. Для такого элементарного объема вводятся локальные усредненные характеристики системы флюид–пористая среда. В применении к меньшим объемам выводы теории фильтрации становятся несправедливыми.

В случае если объем пор при изменении давления жидкости в них не изменяется, то такая пористая среда считается *недеформируемой*. Если же изменением объема порового пространства пренебречь нельзя, то такую пористую среду следует рассматривать как *деформируемую*. Песчаники или известняки, пронизанные трещинами различного размера, образуют трещиновато-пористую среду. Плотные породы, пронизанные трещинами, образуют трещиноватую среду. В последнем случае нефтегазонасыщенными являются лишь трещины, служащие одновременно каналами движения при наличии градиента давления.

Рассмотрим *основные характеристики пористой среды*. Если не учитывать силовое взаимодействие между твердым скелетом породы и прилегающими к нему частицами флюида, то пористую среду можно рассматривать как границы области, в которой движется жидкость. Тогда свойства пористой среды можно описать некоторыми средними геометрическими характеристиками.

Важнейшая из них – *коэффициент пористости* (или просто пористость) m, определенный для некоторого элемента пористой среды как отношение объема $V_п$, занятого порами в этом элементе, к его общему объему V:

$$m = V_п/V. \tag{1.1}$$

Равенство (1.1) определяет *среднюю пористость* рассматриваемого элемента. Если свойства этого элемента изменяются от точки

к точке[1], то можно ввести понятие локальной пористости. Для этого, выбрав некоторую точку пористой среды, мысленно окружим ее элементом объема и найдем среднюю пористость этого элемента. Локальная пористость определяется как предел этой средней пористости при стягивании объема элемента к элементарному объему.

Обычно различают полную и эффективную пористости. При определении последней учитываются лишь соединенные между собой поры, которые могут быть заполнены жидкостью извне. При изучении процессов фильтрации важна именно эффективная пористость. Поэтому в дальнейшем под пористостью будем понимать активную или эффективную пористость.

Наряду с пористостью m иногда вводится понятие «просветности» n, определяемой для каждого сечения, проходящего через данную точку, как отношение площади $\omega_п$ активных пор в сечении ко всей площади сечения ω:

$$n = \omega_п/\omega. \tag{1.2}$$

При определенных допущениях можно доказать, что в данной точке пласта просветность не зависит от выбора направления сечения и равна пористости: $n = m$.

Коэффициент пористости одинаков для геометрически подобных сред; он не характеризует размеры пор и структуру порового пространства. Поэтому для описания пористой среды необходимо ввести также некоторый характерный размер порового пространства. Существуют различные способы определения этого размера. Естественно, например, за характерный размер принять некоторый средний размер порового канала d или отдельного зерна пористого скелета.

Первые теоретические исследования порового пространства проводили при помощи идеализированных моделей грунта, называемых идеальным и фиктивным грунтом. Под идеальным грунтом понимается модель пористой среды, поровые каналы которой представляют пучок тонких цилиндрических трубок (капилляров) с параллельными осями. Фиктивным грунтом называется модель пористой среды, состоящей из шариков одинакового диаметра. В конце прошлого столетия американский гидрогеолог Ч. Слихтер развил упрощенную теорию фильтрации, позволяющую сравнивать движение жидкости по поровым каналам с течением жидкости по цилиндрическим трубкам. Основываясь на модели фиктивного грунта, он рассмотрел также геометрическую задачу, позволяющую связать пористость с углами, образованными радиусами соприкасающихся шаров, моделирующих пористую среду, при их различной упаковке.

Простейший геометрический параметр, характеризующий размер порового пространства,– эффективный диаметр $d_{эф}$ частиц грунта. Он

[1] Под «точкой» понимается введенный выше элементарный объем порового пространства.

определяется в результате механического анализа грунта. Эффективным диаметром частиц, слагающих реальную пористую среду, называется такой диаметр шаров, образующих фиктивный грунт, при котором гидравлическое сопротивление, оказываемое фильтрующейся жидкости в реальном и эквивалентном фиктивном грунте, одинаково. Однако на практике эффективный диаметр зерен $d_{эф}$ является трудно определяемой величиной (особенно для сцементированных песчаников). Поэтому теория Слихтера не нашла широкого практического применения.

Для определения геометрической структуры пористой среды, существенно влияющей на фильтрационные параметры, кроме пористости и эффективного диаметра нужны дополнительные объективные характеристики. Определенную информацию о микроструктуре порового пространства дают кривые распределения размеров пор и зерен. Поэтому предпринимались многочисленные попытки определения геометрических и гидродинамических характеристик пористой среды на основе кривых распределения. Однако зависимости характеристик пористой среды от параметров кривых распределения не могут быть универсальными. Основные представления о свойствах пористой среды и насыщающих ее жидкостей рассматриваются подробно в курсе «Физика нефтяного и газового пласта».

§ 3. СКОРОСТЬ ФИЛЬТРАЦИИ. ЗАКОН ДАРСИ – ЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ

Основной характеристикой фильтрационного движения служит вектор скорости фильтрации $\vec{w}$, который определяется следующим образом. Выберем произвольную точку M пористого пласта, через который фильтруется жидкость, и выделим в нем элементарную площадку $\Delta\omega$ (рис. 1.2). Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости ΔQ_m (элементарный массовый расход). Проекция вектора $\vec{w}$ на нормаль $\vec{n}$ к выделенной площадке равна

$$w_n = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta Q_m}{\rho \Delta \omega}, \tag{1.3}$$

где ρ – плотность жидкости[1]. Почеркнем, что массовый расход в определении (1.3) делится на полную площадь $\Delta\omega$, а не на ее часть, занятую порами. Поэтому, очевидно, что скорость фильтрации не является действительной средней скоростью движения в живом сечении фильтра-

[1] Как и все величины (давление и пр.), плотность жидкости предполагается усредненной по элементарному макрообъему, окружающему точку пористой среды.

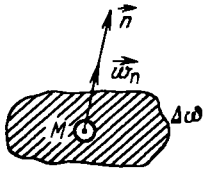


Рис. 1.2. Схема к определению скорости фильтрации

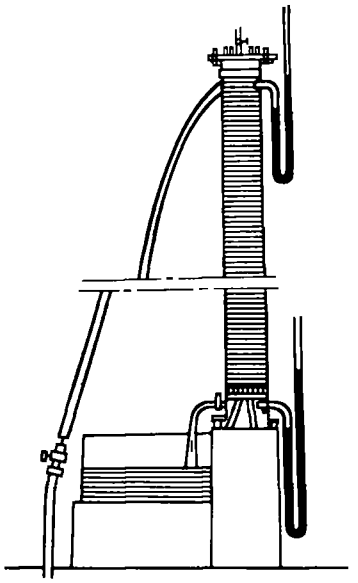


Рис. 1.3. Установка А. Дарси для исследования течения воды через вертикальные песчаные фильтры

ционного потока. Согласно (1.3), величина w имеет размерность скорости (м/с в СИ) и обладает свойствами вектора.

Установим связь между скоростью фильтрации w и действительной средней скоростью v движения. Действительное (физическое) течение флюида в каждом живом сечении пласта $\Delta\omega$ осуществляется через суммарную площадь активных пор $\Delta\omega_п$. Поэтому имеем

$$v_п = \lim_{\Delta\omega_п \to 0} \frac{\Delta Q_m}{\rho \Delta \omega_п}.$$

Сравнив последнее равенство с (1.3), использовав (1.2), а также условие равенства пористости m и просветности n, найдем

$$w_п = m v_п. \tag{1.4}$$

Поскольку $0 < m < 1$, из (1.4) следует, что скорость фильтрации w меньше действительной средней скорости v течения флюида.

Таким образом, при введении скорости фильтрации w рассматривается некоторый фиктивный фильтрационный поток, в котором расходы через любое сечение равны реальному расходу флюида, поля давлений фиктивного и реального потока идентичны, а сила сопротивления фиктивного потока равна реальной силе сопротивления. При этом принимается, что скорость фильтрации непрерывно распределена по объему и связана со средней скоростью действительного движения равенством (1.4).

Основное соотношение теории фильтрации – закон фильтрации – устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное течение. Первые экспериментальные наблюдения за движением воды в трубах, заполненных песком, провели французские инженеры А. Дарси (1856 г.) и Ж. Дюпюи (1848–1863 гг.). Этими работами было положено начало теории фильтрации. Именем Дарси назван линейный закон фильтрации, который он установил, создавая первую совершенную систему водоснабжения в Европе.

Анри Дарси исследовал течение воды через вертикальные песчаные фильтры (рис. 1.3), что требовалось для нужд водоснабжения г. Дижона. В результате тщательно проведенных экспериментов он установил получившую широкую известность экспериментальную формулу

$$Q = k_{\Phi} \frac{H_1 - H_2}{L} \Omega = k_{\Phi} \frac{\Delta H}{L} \Omega, \tag{1.5}$$

где Q – объемный расход жидкости через песчаный фильтр, длина которого L, а площадь поперечного сечения Ω; $\Delta H = H_1 - H_2$ – разность напоров воды над фильтром и у его основания; k_{Φ} – коэффициент пропорциональности в формуле (1.5), названный первоначально коэффициентом водопроницаемости, а затем коэффициентом фильтрации, который зависит как от природы пористой среды, так и от свойств фильтрующейся жидкости. Этот коэффициент k_{Φ}, как следует из (1.5), имеет размерность скорости и характеризует скорость потока через единицу площади сечения, перпендикулярного к потоку, под действием единичного градиента напора.

Коэффициент фильтрации k_{Φ} используется обычно в гидротехнических расчетах, где приходится иметь дело с одной жидкостью – водой. При исследовании фильтрации нефти, газа и их смесей необходимо разделить влияние свойств пористой среды и жидкости. В этом случае формула Дарси (1.5) записывается обычно в несколько ином виде, а именно:

$$Q = \frac{k}{\eta} \rho g \frac{\Delta H}{L} \Omega \tag{1.6}$$

или

$$w = \frac{k}{\eta} \frac{\Delta p^*}{L}, \tag{1.7}$$

где η – динамический коэффициент вязкости, $p^* = \rho g H = p + \rho g z$ – приведенное давление[1]; k – коэффициент проницаемости, который не зависит от свойств жидкости и является динамической характеристикой только пористой среды. Из (1.6) следует, что коэффициент проницаемости имеет размерность площади, так что в СИ $[k] = м^2$. При этом проницаемость большинства горных пород выражается весьма малыми числами. Так, проницаемость крупнозернистых песчаников составляет $10^{-12} \div 10^{-13}$ м^2 (1 – 0,1 мкм^2), проницаемость плотных песчаников – около 10^{-14} м^2 (0,01 мкм^2). Ввиду этого в нефтепромысловой практике получила распространение единица проницаемости 1 Д (Дарси)[2] $= 1{,}02 \cdot 10^{-12}$ м^2.

Из сравнения (1.6) и (1.5) находим связь между коэффициентами фильтрации $k_ф$ и проницаемости k:

$$k_ф = \frac{k}{\eta} \rho g. \tag{1.8}$$

Большинство фильтрационных течений, встречающихся на практике, имеют скорости порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$ м/с и менее. Поэтому, пренебрегая величиной скоростного напора $w^2/(2g)$, под напором можно понимать величину $H = z + p/(\rho g)$. Тогда закон Дарси в форме (1.5) или (1.6) можно истолковать как выражение закона сопротивления при фильтрации, который показывает, что между потерей напора ΔH и расходом Q существует линейная зависимость. При этом, поскольку скорость фильтрационного потока мала, силы инерции не существенны.

Коэффициент фильтрации $k_ф$ или коэффициент проницаемости k определяют экспериментально в специальном приборе – пермеаметре, содержащем образец исследуемого грунта (рис. 1.4). Общий расход Q фильтрационного потока при этом поддерживается постоянным. Напоры H_1 и H_2 измеряются двумя пьезометрами, соединенными с пористой средой в сечениях *1* и *2*. Превышения центров сечений над плоскостью сравнения равны z_1 и z_2, а давления – p_1 и p_2; расстояние между этими сечениями по оси цилиндра составляет L.

В соответствии с формулой (1.5) или (1.6)

$$k_ф = \frac{Q}{\Omega(\Delta H/L)} \quad \text{или} \quad k = \frac{Q\eta}{\Omega \rho g (\Delta H/L)},$$

где градиент напора можно представить в следующем виде:

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g L} = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g L}.$$

---

[1] Очевидно, приведенное давление p^* совпадает с истинным средним давлением p при $z = 0$.

[2] Это – внесистемная единица измерения, которая в настоящее время вытесняется практически эквивалентной единицей 1 мкм^2.

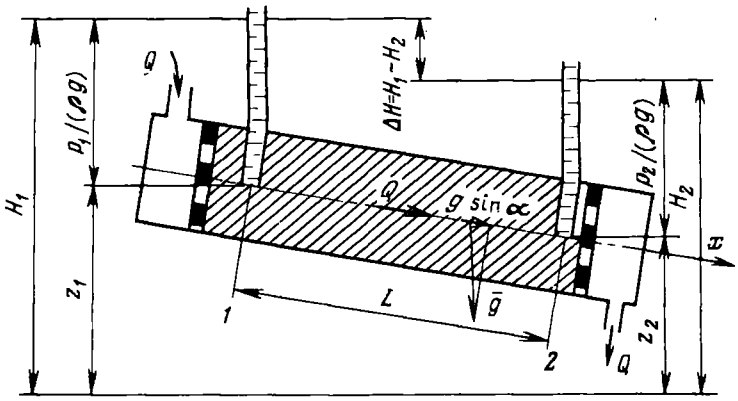


Рис. 1.4. Схема пермеаметра

В промысловых условиях коэффициент проницаемости определяется в результате специального исследования скважин, в котором также используется устанавливаемая в опыте связь между изменением давления в скважинах и их дебитом.

В заключение этого параграфа покажем, что закон Дарси (1.5) или (1.6) в теории фильтрации заменяет собой уравнение движения. Следуя выводу, данному Н. Е. Жуковским, покажем, что его можно получить из уравнений движения идеальной жидкости, и выясним характер сделанных при этом допущений. Рассмотрим для простоты одномерное прямолинейно-параллельное течение жидкости (см. рис. 1.4) в направлении оси x. Как известно из курса технической гидромеханики, уравнение движения идеальной жидкости в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=F, \tag{1.9}$$

где F – проекция на ось x напряженности массовой силы (таковой является, например, сила тяжести).

При течении жидкости в пористой среде возникает сила трения на границе раздела «среда – жидкость». Поскольку поверхность поровых каналов достаточно велика, то силу трения можно считать распределенной по всему объему течения и в первом приближении рассматривать как объемную. Таков смысл первого допущения. Учтем теперь, что среда является пористой и пусть $m = \text{const}$. Тогда, перейдя к скорости фильтрации и использовав (1.4), из (1.9) получим:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{m^2}w\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=F. \tag{1.10}$$

В силу первого допущения

$$F=F_1+F_2,$$

где F_1 - проекция напряженности силы тяжести ($F_1 = 0$ для горизонтального потока; $F_1 = g \sin \alpha = (z_1 - z_2) g/L$, если ось потока x наклонена к горизонтали под углом α (см. рис. 1.4); F_2 - проекция массовой силы трения, обусловленной течением в пористой среде. Поскольку скорость фильтрации w очень мала, то конвективный член $w\partial w/\partial x$ в уравнении (1.10) пренебрежимо мал. Дальнейший анализ показывает, что и первый член в левой части (1.10) имеет тот же порядок малости. В этом состоит смысл второго допущения.

Третье допущение заключается в том, что сила трения пропорциональна скорости фильтрации w с некоторым коэффициентом пропорциональности λ, так что $F_2 = \lambda w$. С учетом всех сделанных предположений из уравнения (1.10) находим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{z_1 - z_2}{L} + \rho \lambda w.$$

Достаточно теперь положить $\lambda = -\eta/(\rho k)$ и заменить $\partial p/\partial x = -\Delta p/L$, чтобы прийти к обычной записи закона Дарси (1.7), полученной экспериментально. Вывод закона Дарси из достаточно общих соображений теории размерности приведен в конце главы[1].

Следует отметить, что впоследствии закон Дарси был распространен (порой без достаточно тщательной экспериментальной проверки) на различные грунты, трещиноватые породы, бетоны и другие пористые материалы. Поэтому установление границ применимости этого соотношения имеет принципиальное значение для теории и практики нефтегазодобычи.

§ 4. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ДАРСИ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ

Проверке и исследованию пределов применимости закона Дарси посвящено значительное число работ отечественных и зарубежных специалистов. В процессе этих исследований показано, что можно выделить верхнюю и нижнюю границы применимости закона Дарси и соответствующие им две основные группы причин.

Верхняя граница определяется группой причин, связанных с проявлением инерционных сил при достаточно высоких скоростях фильтрации.

Нижняя граница определяется проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости, ее взаимодействием с твердым скелетом пористой среды при достаточно малых скоростях фильтрации.

Рассмотрим каждый из этих предельных случаев, которые приводят к нелинейным законам фильтрации.

---

[1] Заметим, что закон Дарси следует, по существу, из принципа Онзагера термодинамики необратимых процессов в приложении к силе межфазового взаимодействия твердой матрицы и флюида [30].

Верхняя граница применимости закона Дарси. Наиболее полно изучены отклонения от закона Дарси, вызванные проявлением инерционных сил при увеличении скорости фильтрации. Верхнюю границу применимости закона Дарси связывают обычно с некоторым критическим (предельным) значением $\mathrm{Re}_{кр}$ числа Рейнольдса[1]

$$\mathrm{Re} = wd/\nu,$$

где d – некоторый характерный линейный размер пористой среды; ν – кинематический коэффициент вязкости флюида ($\nu = \eta/\rho$).

Многочисленные экспериментальные исследования и, в частности, опыты Дж. Фэнчера, Дж. Льюиса и К. Бернса, Линдквиста, Г. Ф. Требина, Н. М. Жаворонкова, М. Э. Аэрова и других были направлены на построение универсальной зависимости (по аналогии с трубной гидравликой) коэффициента гидравлического сопротивления λ от числа Рейнольдса. Однако вследствие различной структуры и состава пористых сред получить такую универсальную зависимость не удается.

При обработке результатов экспериментов значительное внимание обращалось на такой выбор характерного размера поровой структуры, чтобы отклонения от закона Дарси возникали при одинаковых значениях числа Рейнольдса, и закон фильтрации в нелинейной области допускал универсальное представление.

Первая количественная оценка верхней границы применимости закона Дарси была дана более 60 лет назад Н. Н. Павловским, который, опираясь на результаты Ч. Слихтера, полученные для модели идеального грунта, и полагая характерный размер d равным эффективному диаметру $d_{эф}$, вывел следующую формулу для числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{w d_{эф}}{(0{,}75\, m + 0{,}23)\,\nu}. \tag{1.11}$$

Использовав эту формулу и данные экспериментов, Н. Н. Павловский установил, что критическое значение числа Рейнольдса находится в пределах

$$7{,}5 < \mathrm{Re}_{кр} < 9.$$

Достаточно узкий диапазон изменения значений $\mathrm{Re}_{кр}$ объясняется тем, что в опытах использовались не слишком разнообразные образцы пористых сред.

Для удобства обработки результатов многочисленных экспериментов различных авторов В. Н. Щелкачев предложил использовать безразмерный параметр, названный им параметром Дарси и определяемый равенством

$$\mathrm{Da} = \frac{w\eta/k}{\Delta p/L} = \frac{w\eta L}{k\Delta p}. \tag{1.12}$$

[1] Напомним, что по физическому смыслу число Рейнольдса представляет собой отношение сил инерции к силам вязкого трения.

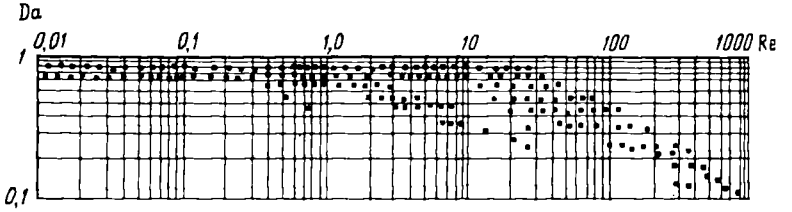


Рис. 1.5. Зависимость параметра Дарси от числа Рейнольдса

Отсюда видно, что параметр Дарси представляет собой отношение силы вязкого трения к силе давления. Сравнивая равенство (1.12) и закон Дарси (1.7) (для случая горизонтального пласта, когда $p^* = p$), можно утверждать, что если справедлив закон Дарси, то

$$\mathrm{Da} = 1. \tag{1.13}$$

Таким образом, равенство (1.13) должно выполняться при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$.

Введение параметра Da упрощает исследование границы применимости линейного закона фильтрации. Действительно, если на оси абсцисс откладывать $\lg \mathrm{Re}$, а по оси ординат $-\lg \mathrm{Da}$, то поскольку $\lg \mathrm{Da} = 0$, при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ графиком зависимости $\lg \mathrm{Da}$ от $\lg \mathrm{Re}$ будет прямая линия, совпадающая с осью абсцисс до тех пор, пока $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$. Как только на этом графике линия начнет отделяться от оси абсцисс, сразу же обнаружится нарушение закона Дарси (это соответствует значениям $\mathrm{Da} < 1$, $\lg \mathrm{Da} < 0$). Значение Re, при котором станет заметно отклонение упомянутой линии от оси абсцисс, и будет критическим значением. Для иллюстрации сказанного на рис. 1.5 на логарифмической сетке приведены зависимости $\lg \mathrm{Da}$ от $\lg \mathrm{Re}$, представляющие результат обработки опытов по формулам В. Н. Щелкачева (табл. 1.1). Данные на этом графике соответствуют области нелинейной фильтрации ($\lg \mathrm{Da} < 0$) для различных образцов пористых сред.

Основываясь на этих соображениях, В. Н. Щелкачев провел критический анализ и сравнение формул, полученных разными исследователями, для определения Re в подземной гидромеханике и оценки возможных критических значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$, соответствующих верхней границе применимости закона Дарси. Результаты такого сопоставления приведены в табл. 1.1. В первых двух строках таблицы даны соответственно формулы для Re и коэффициента гидравлического сопротивления λ, полученные разными авторами. В четвертой и пятой строках приведены соответственно критические значения Re, полученные самими авторами, и их уточненные значения.

Наличие третьей строки табл. 1.1, в которой дано произведение $\mathrm{Re}\lambda$, объясняется следующим. В области линейного закона фильтрации ($\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$) справедливо равенство (1.13). Поэтому если произведение $\mathrm{Re}\lambda$ зависит только от параметра Da (см. графы 5–8 табл. 1.1), то оно имеет постоянное значение (не зависящее от свойств пористой среды)

в случае, если $Re < Re_{кр}$. И только в этом случае можно получить «универсальный» прямолинейный график в координатах ($\lg Re$, $\lg \lambda$), соответствующий фильтрации различных флюидов через различные по свойствам пористые среды. Результаты обработки опытов подтверждают этот вывод.

На основе анализа данных, приведенных в табл. 1.1, можно сделать следующие выводы.

1. Несмотря на отмеченные недостатки результатов Н. Н. Павловского, есть основания для их сопоставления с соответствующими результатами трубной гидравлики. Важно подчеркнуть, что критические значения числа Рейнольдса, подсчитанные по формуле (1.11), намного меньше тех, которые в трубной гидравлике соответствуют переходу ламинарного течения в турбулентное. Это служит одним из доводов в пользу того, что причины нарушения закона Дарси при высоких скоростях фильтрации (увеличение влияния сил инерции по мере увеличения Re) не следует связывать с турбулизацией течения. Отсутствие турбулентности при нарушении закона Дарси было доказано также прямыми опытами, изложенными Г. Шнебели.

Формулы Фэнчера, Льюиса и Бернса получены формальным введением в выражение для числа Рейнольдса эффективного диаметра $d_{эф}$ в качестве характерного размера пористой среды, они не сопоставимы с результатами трубной гидравлики, дают слишком узкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ (см. графу 4 табл. 1.1), мало обоснованы.

2. Во все другие формулы табл. 1.1 (графы 5–9) в качестве характерного размера входят величины, пропорциональные $\sqrt{k}$ (где k – коэффициент проницаемости породы), методы определения которых хорошо известны. Формулы этой группы не имеют принципиальных преимуществ и одинаково удобны для практического использования. Для этих формул характерно то, что все они приводят к очень широким диапазонам изменения $Re_{кр}$ для различных пористых сред. И это представляется вполне естественным ввиду разнообразия свойств испытанных пористых сред. Кроме того, это свидетельствует о том, что ни в одну из предложенных формул для определения Re не входит полный набор параметров, позволяющий характеризовать сложную структуру пористых сред, использования для этой цели коэффициентов пористости и проницаемости явно недостаточно.

Вместе с тем, широкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ можно разбить на сравнительно узкие интервалы, соответствующие различным группам образцов пористых сред. Это облегчает указание возможной верхней границы справедливости закона Дарси при движении флюида в какой-либо пористой среде.

Результаты такого разбиения для формулы В. Н. Щелкачева (см. табл. 1.1, первая строка, пятая графа) приведены в табл. 1.2.

Итак, при значениях числа Рейнольдса $Re > Re_{кр}$ линейный закон Дарси перестает быть справедливым. Первое обобщение закона Дарси на случай больших Re, основанное на опытных данных, было выполнено Дюпюи, который сформулировал двучленный закон

Таблица 1.1

Определение верхней границы применимости закона Дарси по данным различных исследований

№ п/п	Параметры	Н. Н. Павловский	Фэнчер, Льюис, Бернс	В. Н. Щелкачев	М. Д. Миллионщиков	Ф. И. Котяхов (Г. Ф. Требин)	Е. М. Минский	А. И. Абдулвагабов
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Re	$\frac{wd_{эф}}{(0{,}75m+0{,}23)\nu}$	$\frac{wd_{эф}}{\nu}$	$\frac{10}{m^{2,3}}\frac{w\sqrt{k}}{\nu}$	$\frac{m\sqrt{k}}{m^{3/2}\nu}$	$\frac{4\sqrt{2}\,w\sqrt{k}}{m^{3/2}\nu}$	$\frac{w\sqrt{k}}{\nu}$	$\frac{12(1-m)w\sqrt{k}}{m^2\nu}$
2	λ	—	$\frac{d_{эф}\Delta p}{2L\rho w^2}$	$\frac{2m^{2,3}\sqrt{k}\Delta p}{L\rho w^2}$	$\frac{m^{3/2}\sqrt{k}\Delta p}{2L\rho w^2}$	$\frac{2m^{3/2}\sqrt{k}\Delta p}{L\rho w^2}$	$\frac{\sqrt{k}\Delta p}{2L\rho w^2}$	$\frac{4{,}6(1-m)m^2\sqrt{k}\Delta p}{L\rho w^2}$
3	$\mathrm{Re}\lambda$	—	$\frac{0{,}5}{f(m)\,\mathrm{Da}}$	$\frac{20}{\mathrm{Da}}$	$\frac{0{,}5}{\mathrm{Da}}$	$\frac{8\sqrt{2}}{\mathrm{Da}}$	$\frac{0{,}5}{\mathrm{Da}}$	$\frac{55{,}2(1-m)^2}{\mathrm{Da}}$
4	$\mathrm{Re}_{кр}$ авторов (по данным формул)	7,5–9	1–4	1–12	0,022–0,29	0,3	—	0,019–8,1
5	$\mathrm{Re}_{кр}$ (уточненные значения)	—	—	0,032–14	0,0015–0,60	0,0085–3,4	—	0,019–8,1

Таблица 1.2

Интервалы критических значений Re для различных образцов пористых сред

№ п/п	Образец пористой среды	Диапазон критических значений
1	Однородная дробь	13–14
2	Однородный крупнозернистый песок	3–10
3	Неоднородный мелкозернистый песок с преобладанием фракций диаметром менее 0,1 мм	0,34–0,24
4	Сцементированный песчаник	0,05–1,4

фильтрации, носящий имя австрийского исследователя Ф. Форхгеймера, независимо установившего его несколько позднее. В принятых сейчас обозначениях это соотношение можно представить (для простейшего случая прямолинейно-параллельного течения без учета силы тяжести) в следующем виде:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\eta}{k} w + \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} w^2, \qquad (1.14)$$

где β – дополнительная константа пористой среды, определяемая экспериментально.

Первое слагаемое в правой части (1.14) учитывает потери давления вследствие вязкости жидкости, второе – инерционную составляющую сопротивления движению жидкости, связанную с криволинейностью и извилистостью поровых каналов. Из (1.14) следует, что при малых скоростях фильтрации квадратом скорости w^2 можно пренебречь, и градиент давления будет зависеть только от первого слагаемого, т.е. движение будет безынерционным, соответствующим закону Дарси. При больших скоростях фильтрации силы инерции становятся существенными и будут сопоставимы или даже преобладать над силами вязкости.

Хорошая согласованность соотношения (1.14) с данными промысловых и экспериментальных наблюдений была установлена в многочисленных работах советских и зарубежных исследователей. Это свидетельствует о том, что данное соотношение представляет нечто большее, чем простую эмпирическую формулу, поскольку оно хорошо выполняется даже для весьма больших значений скорости фильтрации. Физический смысл этого заключается в том, что при больших скоростях быстропеременное движение в порах вследствие «извилистости» поровых каналов сопряжено с появлением значительных инерционных составляющих гидравлического сопротивления. С увеличением числа Рейнольдса квадратичный член в выражении (1.14) оказывается преобладающим, силы вязкости пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции, и (1.14) сводится тогда к квадратичному закону фильтрации, предложенному А. А. Краснопольским. Он справедлив в средах, состоящих из частиц достаточно крупных размеров.

Таблица 1.1

Определение верхней границы применимости закона Дарси по данным различных исследований

№ п/п	Параметры	Н. Н. Павловский	Фэнчер, Льюис, Бернс	В. Н. Щелкачев	М. Д. Миллионщиков	Ф. И. Котяхов (Г. Ф. Требин)	Е. М. Минский	А. И. Абдулвагабов
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Re	$\frac{wd_{эф}}{(0{,}75m+0{,}23)\nu}$	$\frac{wd_{эф}}{\nu}$	$\frac{10}{m^{2.3}}\frac{w\sqrt{k}}{\nu}$	$\frac{m\sqrt{k}}{m^{3/2}\nu}$	$\frac{4\sqrt{2}\,w\sqrt{k}}{m^{3/2}\nu}$	$\frac{w\sqrt{k}}{\nu}$	$\frac{12(1-m)w\sqrt{k}}{m^2\nu}$
2	λ	—	$\frac{d_{эф}\Delta p}{2L\rho w^2}$	$\frac{2m^{2.3}\sqrt{k}\Delta p}{L\rho w^2}$	$\frac{m^{3/2}\sqrt{k}\Delta p}{2L\rho w^2}$	$\frac{2m^{3/2}\sqrt{k}\Delta p}{L\rho w^2}$	$\frac{\sqrt{k}\Delta p}{2L\rho w^2}$	$\frac{4{,}6(1-m)m^2\sqrt{k}\Delta p}{L\rho w^2}$
3	$Re\lambda$	—	$\frac{0{,}5}{f(m)\,Da}$	$\frac{20}{Da}$	$\frac{0{,}5}{Da}$	$\frac{8\sqrt{2}}{Da}$	$\frac{0{,}5}{Da}$	$\frac{55{,}2(1-m)^2}{Da}$
4	$Re_{кр}$ авторов (по данным формул)	7,5–9	1–4	1–12	0,022–0,29	0,3	—	0,019–8,1
5	$Re_{кр}$ (уточненные значения)	—	—	0,032–14	0,0015–0,60	0,0085–3,4	—	0,019–8,1

Таблица 1.2

Интервалы критических значений Re для различных образцов пористых сред

№ п/п	Образец пористой среды	Диапазон критических значений
1	Однородная дробь	13–14
2	Однородный крупнозернистый песок	3–10
3	Неоднородный мелкозернистый песок с преобладанием фракций диаметром менее 0,1 мм	0,34–0,24
4	Сцементированный песчаник	0,05–1,4

фильтрации, носящий имя австрийского исследователя Ф. Форхгеймера, независимо установившего его несколько позднее. В принятых сейчас обозначениях это соотношение можно представить (для простейшего случая прямолинейно-параллельного течения без учета силы тяжести) в следующем виде:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\eta}{k} w + \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} w^2, \qquad (1.14)$$

где β – дополнительная константа пористой среды, определяемая экспериментально.

Первое слагаемое в правой части (1.14) учитывает потери давления вследствие вязкости жидкости, второе – инерционную составляющую сопротивления движению жидкости, связанную с криволинейностью и извилистостью поровых каналов. Из (1.14) следует, что при малых скоростях фильтрации квадратом скорости w^2 можно пренебречь, и градиент давления будет зависеть только от первого слагаемого, т.е. движение будет безынерционным, соответствующим закону Дарси. При больших скоростях фильтрации силы инерции становятся существенными и будут сопоставимы или даже преобладать над силами вязкости.

Хорошая согласованность соотношения (1.14) с данными промысловых и экспериментальных наблюдений была установлена в многочисленных работах советских и зарубежных исследователей. Это свидетельствует о том, что данное соотношение представляет нечто большее, чем простую эмпирическую формулу, поскольку оно хорошо выполняется даже для весьма больших значений скорости фильтрации. Физический смысл этого заключается в том, что при больших скоростях быстропеременное движение в порах вследствие «извилистости» поровых каналов сопряжено с появлением значительных инерционных составляющих гидравлического сопротивления. С увеличением числа Рейнольдса квадратичный член в выражении (1.14) оказывается преобладающим, силы вязкости пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции, и (1.14) сводится тогда к квадратичному закону фильтрации, предложенному А. А. Краснопольским. Он справедлив в средах, состоящих из частиц достаточно крупных размеров.

§ 5. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ДАРСИ

Закон Дарси для течения в пористой среде однородной жидкости можно распространить на случай совместного течения двух несмешивающихся жидкостей (например, нефти и воды), обобщив понятие проницаемости.

Для этого прежде всего введем понятие скорости фильтрации данной фазы $\vec{w}$. Аналогично скорости фильтрации однородной жидкости, $\vec{w}_i$ определяется как вектор, проекция которого на некоторое направление l равна отношению объемного расхода данной фазы к площадке Ω_l, перпендикулярной к указанному направлению.

$$(\vec{w}_i)_l = Q_i/\Omega_l. \tag{1.17}$$

Площадка Ω_l пересекает твердую и обе подвижные фазы.

При фильтрации двух несмешивающихся жидкостей рассматривают понятие насыщенности порового пространства каждой фазой. Насыщенность элемента пористой среды данной фазой s_i определяется как относительная часть объема активных пор среды, занятая этой фазой:

$$s_i = \Delta V_i/\Delta V_п, \tag{1.18}$$

где i принимает значения 1 и 2 (s_1, s_2 – насыщенность соответственно смачивающей и несмачивающей фазами); ΔV_i – объем среды, занятой жидкостью i; $\Delta V_п$ – общий объем активных пор в данном элементе.

Очевидно, справедливо равенство

$$s_1 + s_2 = 1, \tag{1.19}$$

поэтому из двух насыщенностей независима только одна, и обычно характеристики движения в потоке двухфазной жидкости представляются в функции от насыщенности первой (смачивающей) фазой и вводится обозначение $s = s_1$.

Экспериментально установлено, что расход каждой фазы растет с увеличением перепада давления и насыщенности данной фазой, а закон фильтрации каждой из фаз по аналогии с законом Дарси можно записать в виде

$$w_1 = \frac{k_1^* \Delta p_1}{\eta_1 L}, \quad w_2 = \frac{k_2^* \Delta p_2}{\eta_2 L}, \tag{1.20}$$

где w_1 и w_2 – скорости фильтрации фаз; η_1 и η_2 – динамические коэффициенты вязкости жидкостей; Δp_1 и Δp_2 – разности давлений в соответствующих фазах; k_1^* и k_2^* – фазовые проницаемости. Величины k_i^* ($i = 1, 2$) являются для i-й жидкости проницаемостями в обычном смысле в условиях совместной фильтрации. Эти величины зависят от свойств пористой среды и, прежде всего, от ее абсолютной проницаемости k, определяемой по данным о фильтрации однородной жидкости, а также от насыщенности пористой среды каждой фазой. При описании двухфазных течений обычно вместо фазовых проницаемостей k_i^* вводят

так называемые относительные проницаемости k_i фаз, определяемые из отношений

$$k_1 = k_1^*/k, \quad k_2 = k_2^*/k. \tag{1.21}$$

В большинстве опытов показано, что для данной структуры пористой среды относительные проницаемости k_i являются в основном функциями насыщенности, а если и наблюдается влияние иных параметров (например, отношения коэффициентов вязкости η_0 фаз), то ими обычно пренебрегают. Тогда с учетом (1.21) закон Дарси (1.20) для каждой из фаз записывается в виде

$$w_i = k\frac{k_i(s)}{\eta_i}\frac{\Delta p_i}{L}, \quad i = 1, 2. \tag{1.22}$$

В общем случае давления p_1 и p_2 в фазах не совпадают из-за действия поверхностного натяжения и связаны равенством

$$p_2 - p_1 = p_k, \tag{1.23}$$

где p_k – капиллярное давление.

Типичные экспериментальные кривые фазовых проницаемостей приведены на рис. 1.6 (кривая *1* относится к более смачивающей жидкости – воде, кривая *2* – к менее смачивающей – нефти; кривая *1'* относится к случаю, когда первая фаза является газом; s – газонасыщенность). Отметим некоторые характерные особенности этих кривых. Для каждой фазы существует предельная насыщенность (s_* и $1 - s^*$), такая, что при меньших значениях насыщенности эта фаза неподвижна. Движение первой фазы может происходить только в том случае, если $s > s_*$ (для водонефтяной системы s_* называют насыщенностью связанной водой). Для второй фазы связанная насыщенность равна $1 - s^*$ и называется остаточной нефтенасыщенностью. Таким образом, совместное течение двух фаз имеет место лишь в следующем интервале изменения насыщенности водой *1*:

$$s_* \leqslant s \leqslant s^*.$$

Сумма относительных проницаемостей для каждого фиксированного значения s меньше 1:

$$k_1(s) + k_2(s) < 1, \quad 0 < s < 1.$$

Графики $k_i(s)$ представляют собой асимметричные кривые (см. рис. 1.6). Относительная проницаемость $k_1(s)$ смачивающей фазы при $s = s^*$ имеет значение, меньше 1, тогда как величина $k_2(s)$ при $s = s_*$ близка к единице. Это означает, что присутствие связанной смачивающей фазы мало влияет на течение несмачивающей жидкости, тогда как присутствие остаточной несмачивающей фазы значительно «стесняет» движение смачивающей фазы.

Заметим вместе с тем, что некоторые эксперименты (С. Т. Юстер, А. Е. Евгеньев) по вытеснению воды маслами, моделирующими нефть,

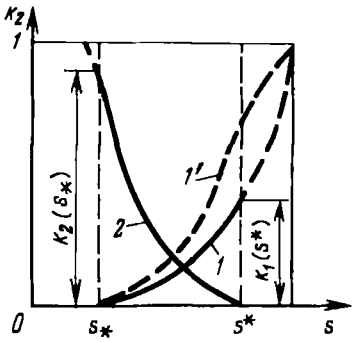


Рис. 1.6. Кривые зависимости относительных фазовых проницаемостей от насыщенности

с использованием ПАВ указывают на возможность получения относительных фазовых проницаемостей, превышающих единицу, при определенных условиях смачиваемости на границе порода – жидкость. Этот эффект, видимо, связан с уменьшением фильтрационного сопротивления в исследованном двухфазном потоке (по сравнению с однофазным) вследствие образования кольцевой области течения, когда вода с добавками ПАВ движется в виде пленки по стенкам поровых каналов, а несмачивающая фаза (масло) перемещается в центре канала (скользит по пленке, как по «смазке»). Аналогичные явления замечены в экспериментах по фильтрации газоконденсатных смесей.

Как показывают опыты и анализ размерностей, относительные проницаемости $k_i(s)$ не зависят от размеров пор, но могут зависеть от их формы и распределения. Поэтому кривые одинаковы для определенных групп, сходных по структуре пористых сред.

В гидродинамических расчетах часто удобно пользоваться эмпирическими зависимостями значений относительной фазовой проницаемости от насыщенности, полученными из экспериментальных данных. Рассмотрим эмпирические формулы, полученные Чень-Чжун-Сяном, которые можно применять при оценочных расчетах.

1. Для воды и нефти (s – водонасыщенность):

$$k_1(s) = \begin{cases} 0 & \text{или} \quad 0 \leqslant s \leqslant 0{,}2, \\ [(s - 0{,}2)/0{,}8]^{3.5} & \text{при} \quad 0{,}2 \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

$$k_2(s) = \begin{cases} [(0{,}85 - s)/0{,}85]^{2.8}(1 + 2{,}4s) & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant 0{,}85, \\ 0 & \text{при} \quad 0{,}85 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Для газа и воды (s – газонасыщенность):

$$k_1(s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant 0{,}1, \\ [(s - 0{,}1)/0{,}9]^{3.5}(4 + 3s) & \text{при} \quad 0{,}1 \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

$$k_2(s) = \begin{cases} [(0{,}8 - s)/0{,}8]^{3.5} & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant 0{,}8, \\ 0 & \text{при} \quad 0{,}8 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Введенные понятия можно обобщить на случай совместного движе-

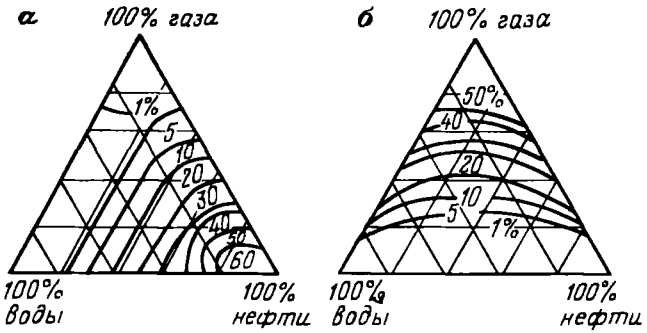


Рис. 1.7. Диаграммы фазовых проницаемостей для трехфазной смеси (вода–нефть–газ)

ния трех несмешивающихся флюидов: нефти, газа и воды. Если обозначить эти флюиды соответственно индексами «н», «г», и «в», то можно ввести относительные проницаемости $k_н$, $k_г$ и $k_в$ точно так же, как это было сделано для двух жидкостей. При этом фазовые проницаемости являются уже функциями двух независимых насыщенностей $s_н$ и $s_в$ (газонасыщенность $s_г = 1 - s_н - s_в$).

$$k_н = k_н(s_н, s_в), \quad k_в = k_в(s_н, s_в), \quad k_г = k_г(s_н, s_в). \tag{1.24}$$

и определяются при помощи треугольных диаграмм (рис. 1,7, а – для нефти $k_н$ и рис. 1.7, *б* – для газа $k_г$). Принцип построения этих диаграмм следующий. Параллельно каждой стороне треугольника проводятся прямые, вдоль которых насыщенность одной из фаз постоянна. Каждая насыщенность изменяется вдоль стороны треугольника от нуля до 100% на противолежащей вершине. Каждая точка внутри треугольника, находящаяся на пересечении двух прямых, параллельных двум сторонам, соответствует определенным значениям $s_н$, $s_в$ и $s_г = 1 - s_н - s_в$. На треугольники наносятся линии одинаковых относительных проницаемостей фаз. На рис. 1.7, *а* проведены линии равных значений относительной проницаемости для нефти $k_н$, на рис. 1.7, *б* – для газа $k_г$.

Характер зависимостей (1.24) определяется различной степенью смачивания твердых зерен породы фазами, причем оказывается, что относительная проницаемость наиболее смачивающей фазы – воды – зависит практически только от водонасыщенности $s_в$ и почти не зависит от нефте- и газонасыщенности $s_н$ и $s_г$.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ В ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

Методы теории размерностей находят широкое применение в подземной гидромеханике. Напомним лишь основное положение анализа размерностей – П-теорему: физическая закономерность, выраженная в виде зависимости размерной величины от размерных и безразмерных определяющих параметров, может быть представлена в виде зависимости некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров, количество которых меньше общего числа параметров n на число определяющих параметров с независимыми размерностями k, т. е. $n - k$.

Используя теорию размерностей и П-теорему, выведем некоторые законы фильтрации и, в первую очередь,– основной закон Дарси.

Основное предположение при выводе этого закона заключается в том, что вектор скорости фильтрации в данной точке пористой среды $\vec{w}$ определяется вектором градиента давления grad p и характеристиками пористой среды и жидкости. При этом пористая среда считается однородной и изотропной, характеризуется средним размером пор d, безразмерной пористостью m и, вообще говоря, некоторыми другими характеристиками, которые также можно считать безразмерными, например кривой распределения пор по размерам.

Фильтрующаяся жидкость, которую принимаем однокомпонентной и ньютоновской, характеризуется только вязкостью η и плотностью ρ.

Таким образом, считаем, что скорость фильтрации $\vec{w}$ зависит от параметров grad p, d, m, ρ, η, а также от других безразмерных характеристик пористой среды, влияние которых здесь обсуждать не будем.

Среди перечисленных параметров только одна величина является вектором. Отсюда следует, что направления векторов скорости фильтрации и градиента давления должны совпадать[1]. Если бы вектор скорости фильтрации составлял конечный угол с вектором градиента давления, то при повороте малого элемента пористой среды вокруг направления вектора градиента давления он тоже должен был бы повернуться вместе с элементом. Но поскольку при таком повороте свойства течения не должны меняться, так как среда изотропна, вектор скорости фильтрации должен остаться неизменным. Это может быть только, если вектор скорости направлен вдоль вектора градиента давления. Таким образом, получаем:

$$\text{grad}\, p = -C\vec{w}, \tag{1.25}$$

где C – скаляр, зависящий только от модуля вектора скорости, а также от d, m, η, ρ.

[1] Отметим еще раз, что это утверждение справедливо для изотропных фаз. В анизотропных средах векторы скорости фильтрации и градиента давления могут не совпадать (см. гл. 2).

Закон Дарси справедлив для медленных фильтрационных движений, для которых силы инерции несущественны. Поэтому для таких движений несущественна плотность жидкости, определяющая свойство ее инерции. Таким образом, для медленных безынерционных движений ньютоновской жидкости в изотропной пористой среде справедлив закон фильтрации (1.25), причем коэффициент пропорциональности C может зависеть только от определяющих параметров w, d, η, m. Размерности определяемого и определяющих параметров, как нетрудно определить, записываются в следующем виде:

$$[C] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3\mathrm{T}}, \quad [w] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \quad [d] = \mathrm{L}, \quad [\eta] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}\,\mathrm{T}}, \quad [m] = 1.$$

Размерность C следует из того, что размерности обеих частей уравнения (1.23) должны быть одинаковыми. Как видно, в данном случае $n = 4$, $k = 3$, так что $n - k = 1$. Размерности параметров w, d и η, как легко убедиться, независимы; безразмерный параметр подобия здесь – четвертый определяющий параметр – m. Таким образом, если привести коэффициент C к безразмерному виду, то параметр Π является функцией от $\Pi_1 = m$. Составим комплекс $C/(w^\alpha d^\beta \eta^\gamma)$ и подберем α, β, γ так, чтобы Π был безразмерным. Очевидно, что $\alpha = 0$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$:

$$[C] = [w]^0 [d]^{-2} [\eta],$$

так что

$$\Pi = C/(\eta d^{-2}) = \Phi(m),$$

и анализ размерностей дает окончательно:

$$C = \eta \Phi(m)/d^2.$$

Заметим, что в данном случае независимость C от скорости получилась из одного анализа размерностей. Обозначим $d^2/\Phi(m)$ через k, эта величина называется коэффициентом проницаемости. Закон фильтрации (1.25) приводится при этом к виду

$$\vec{w} = -\frac{k}{\eta} \operatorname{grad} p. \tag{1.26}$$

Именно в такой форме закон Дарси представлен в гл. 2.

Если свойство инерции жидкости существенно, а это обязательно будет при больших скоростях фильтрации, например в призабойной зоне скважины, то к числу определяющих параметров добавится плотность жидкости ρ, а к числу безразмерных параметров подобия – параметр $\Pi_2 = wd\rho/\eta$ – число Рейнольдса фильтрационного движения в порах.

Соотношение (1.26), согласно анализу размерностей, переписывается в более сложном виде

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\eta}{k} \vec{w} \Phi_1\left(\frac{wd\rho}{\eta}, m\right). \tag{1.27}$$

При малых значениях параметра Π_2 функцию Φ_1 согласно формуле конечных приращений Лагранжа можно представить в виде

$$\Phi_1\left(\frac{wd\rho}{\eta}, m\right) = \Phi_1(0, m) + \frac{wd\rho}{\eta}\theta(m). \tag{1.28}$$

Согласно сказанному ранее, величина $\Phi(0, m)$ должна быть равной единице. Подставив (1.28) в (1.27) и учтя, что $k = d^2/[\Phi(m)]$, найдем:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\eta}{k}\vec{w} - \beta\frac{\rho w}{\sqrt{k}}\vec{w}, \tag{1.29}$$

где β – также некоторая функция пористости m.

Выражение (1.29) представляет собой двучленный закон фильтрации. Впервые закон такого вида был предложен Форхгеймером в прошлом веке.

Вернемся к безынерционным движениям, однако теперь мы будем рассматривать фильтрацию неньютоновской жидкости, характеризующейся предельным напряжением сдвига τ_0, до достижения которого жидкость ведет себя как твердое тело, а после достижения напряжением сдвига τ предельного сдвигового напряжения τ_0 – как вязкая жидкость под действием избыточного напряжения сдвига $\tau - \tau_0$. Таково поведение многих нефтей, в частности, нефтей на месторождениях Прикаспия. Тогда к определяющим параметрам добавляется параметр τ_0 и появляется новый безразмерный параметр подобия:

$$\Pi_2 = \frac{\tau_0 d}{\eta w},$$

так что соотношение (1.26) записывается для таких жидкостей в виде

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\eta}{k}\vec{w}\Phi_2\left(\frac{\tau_0 d}{\eta w}, m\right). \tag{1.30}$$

Перейдя в соотношении (1.30) к абсолютным величинам, найдем:

$$|\operatorname{grad} p| = \frac{\eta w}{k}\Phi_2\left(\frac{\tau_0 d}{\eta w}, m\right).$$

Заметим теперь, что если мы будем устремлять скорость фильтрации к нулю, то в пределе должна получиться величина градиента давления, не равная нулю, как в случае ньютоновской жидкости, а конечная. Эта величина называется предельным градиентом давления γ. Поскольку предельный градиент давления от скорости w не зависит, ясно, что при $w \to 0$, т. е. при больших значениях параметра $\tau_0 d/(\eta w)$, функция Φ_2 должна быть пропорциональна этому параметру:

$$\Phi_2 \approx \delta(m)\frac{\tau_0 d}{\eta w}.$$

Отсюда следует что предельный градиент давления представляется в виде

$$\gamma = \frac{\tau_0}{\sqrt{k}} \Phi_3(m), \tag{1.31}$$

а закон фильтрации рассматриваемой неньютоновской жидкости (такие жидкости называются вязкопластическими) принимает вид

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\eta}{k}\vec{w} - \gamma\frac{\vec{w}}{w}, \quad w > 0;$$

$$|\operatorname{grad} p| \leqslant \gamma, \qquad w = 0. \tag{1.32}$$

В нефтяной подземной гидродинамике этот закон был сформулирован и впервые применен А. Х. Мирзаджанзаде.

В последующих главах (см. гл. 5, 6) теория размерностей используется при выводе законов распределения давления для неустановившейся фильтрации упругой жидкости и газа.

§ 7. ПОНЯТИЕ О РЕЖИМАХ НЕФТЕГАЗОВОДОНОСНЫХ ПЛАСТОВ

Постановка и решение газогидродинамических задач разработки месторождений в значительной степени определяются природой движущих сил, обеспечивающих фильтрацию нефти или газа в пласте. В связи с этим важное значение имеет знание режимов нефтегазоносных пластов.

Режим продуктивных пластов в процессе их разработки зависит как от многих естественных факторов, так и от системы разработки.

К естественным факторам, влияющим на режим разрабатываемого пласта, относятся геологические особенности строения пласта, фильтрационные характеристики пород пласта и насыщающих его жидкостей и газов, физические условия в пласте – давление, температура и т. д.

Системой разработки пласта определяются число и способ расположения добывающих и нагнетательных скважин, последовательность их ввода в эксплуатацию, темпы отбора и закачки жидкости или газа в них, способы вскрытия продуктивного пласта, размеры и оборудование забоев скважин, методы воздействия на призабойную зону и т. д.

Движение жидкости и газа в пласте в процессе его разработки происходит как за счет использования потенциальной энергии пласта и насыщающих его жидкостей, так и за счет дополнительных внешних источников энергии.

Потенциальная энергия пласта выражается в следующих формах: энергии напора краевых вод; потенциальной энергии упругой деформации жидкости и породы пласта; потенциальной энергии сжатия свободного и выделяющегося из жидкости при снижении давления газа; энергии, обусловленной силой тяжести пластовых жидкостей.

Дополнительные внешние источники энергии связаны с закачкой в пласт жидкости или газа для поддержания пластового давления или повышения эффективности вытеснения. Современные интенсивные методы разработки нефтяных месторождений основаны на использовании

в качестве внешних источников энергии различных жидкостей и газов. Наибольшее распространение при этом получили такие рабочие агенты, как вода, углеводородные и неуглеводородные газы, а также различные растворители.

Режимом нефтегазоводоносного пласта называется проявление доминирующей формы пластовой энергии в процессе разработки залежи нефти или газа.

В зависимости от формы пластовой энергии, за счет которой в основном происходит движение жидкости или газа в пласте, различают следующие режимы нефтегазоводоносных пластов:

1) водонапорный режим, когда нефть вытесняется в добывающие скважины под действием напора краевой или подошвенной воды;

2) газонапорный режим, если нефть или вода вытесняются в скважины в основном под действием напора сжатого газа, находящегося в виде газовой шапки над нефтью или водой; иногда этот режим называют режимом газовой шапки;

3) режим растворенного газа, когда давление в нефтяной залежи ниже давления насыщения нефти газом, и пузырьки окклюдированного газа, расширяясь, вытесняют нефть к забоям скважин; такой режим правильней было бы назвать «режимом газированной жидкости» или режимом «окклюдированного газа» (ведь растворенный в нефти газ существует в условиях и водонапорного, и газонапорного режимов);

4) упругий режим, при котором нефть поступает в скважины за счет упругих свойств жидкости и породы пласта (подробнее об этом режиме см. в гл. 5);

5) гравитационный режим, когда нефть или вода добываются из пласта только за счет силы тяжести самой нефти или воды.

При разработке конкретного нефтяного или газового месторождения могут проявляться различные виды энергии пласта и насыщающих его жидкостей и в разных соотношениях.

В промысловой практике нефтяная залежь редко эксплуатируется на каком-либо режиме весь период ее разработки. Так, месторождения с водонапорным режимом в начале разработки могут, вследствие высоких отборов нефти, перейти на режим растворенного газа. Иногда различные участки одного и того же нефтяного месторождения могут эксплуатироваться при различных режимах: в приконтурные добывающие скважины нефть поступает за счет напора краевых вод, а в скважины, расположенные ближе к своду,– за счет энергии газовой шапки или, возможно, за счет расширения выделившегося из нефти газа.

Для практики разработки газовых и газоконденсатных месторождений характерны два режима – газовый и водонапорный. При газовом режиме приток газа к добывающим скважинам происходит за счет потенциальной энергии расширения газа при снижении давления в залежи по мере его отбора. При этом контурные или подошвенные воды практически не вторгаются в газовую залежь и, следовательно, объем порового пространства газовой залежи практически не изменяется по времени.

При водонапорном режиме в процессе разработки в газовую залежь поступает контурная или подошвенная вода, что приводит к уменьшению объема порового пространства газовой залежи. При этом приток газа к забоям добывающих скважин осуществляется за счет напора поступающей в газовую залежь воды.

Комплекс гидродинамических задач разработки нефтяных и газовых месторождений в значительной мере определяется естественными и искусствеными режимами нефтегазоводносных пластов и создающимися при этом механизмом и характером фильтрационных течений пластовых флюидов.

Контрольные вопросы и задачи

1. Каковы особенности теории фильтрации по сравнению с гидромеханикой в открытом пространстве?

2. При фильтрации жидкости с постоянным расходом через несцементированную пористую среду произошло вымывание мелких фракций песка. Изменилась ли при этом скорость фильтрации и средняя скорость движения жидкости?

3. Куб с ребром 1 м наполнили шарами диаметром 10 см каждый, а куб с ребром 1 см точно так же уложили шарами диаметром 1 мм каждый. Пористость какой засыпки больше?

4. Показать, что если образец пористого материала, имеющий объем V и пористость m, разбить на n частей объемом $V_i (i = \overline{1, n})$, то

$$m = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i,$$

где m_i – пористость i-й части. Рассмотреть также случай, когда все V_i одинаковы.

5. Определите пористость фиктивного грунта, сложенного шарами диаметром D, центры которых находятся в вершинах кубической решетки с периодом D. Ответ: $1 - \frac{\pi}{6} \approx 0{,}476$.

6. Каковы физические причины нарушения закона Дарси и при каких условиях он выполняется?

7. Дайте формулировку П-теоремы теории размерностей. Какой вид будет иметь безразмерная зависимость $\Pi = f(\Pi_1, \Pi_2, ...)$, если все параметры $a_i (i = 1, ..., n)$ имеют независимые размерности, т. е. $n = k$?

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В НЕФТЕГАЗОНОСНЫХ ПЛАСТАХ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Фильтрация в нефтяных и газовых пластах чаще всего происходит в неустановившихся (нестационарных) условиях. Это означает, что характеристики движения – скорость фильтрации, давление, плотность изменяются с течением времени. Кроме того, они изменяются от точки к точке, поэтому говорят, что они образуют фильтрационное поле.

Задачи неустановившегося движения жидкости и газа в пласте решаются методами математической физики. Для этого составляются и затем интегрируются дифференциальные уравнения. Чтобы вывести дифференциальные уравнения фильтрации в пористой среде, заключающей в себе движущийся флюид (жидкость, газ), выделяется бесконечно малый элемент пласта и рассматриваются изменения массы, импульса и энергии, происходящие в этом элементе за бесконечно малый промежуток времени. При этом используются законы сохранения массы, импульса и энергии, а также результаты лабораторного или промыслового экспериментального изучения свойств и поведения флюидов и свойств пористой среды с изменением термобарических условий.

Число уравнений в системе (дифференциальных и конечных) должно равняться числу неизвестных функций, характеризующих рассматриваемый фильтрационный процесс, и подлежащих определению. Такая система является замкнутой.

В этой главе ограничимся рассмотрением процессов, для которых температура флюида равна температуре среды и остается неизменной. Действительно, вследствие того, что фильтрация представляет собой очень медленный процесс, изменение температуры, возникающее в ходе движения вследствие наличия сопротивления стенок поровых каналов и трещин, а также из-за расширения флюида при уменьшении давления, успевает компенсироваться теплообменом с окружающими горными породами. Для таких изотермических процессов, как показано Б. Б. Лапуком, уравнения энергии рассматривать уже не нужно.

Однако, в некоторых случаях при разработке нефтяных и газовых месторождений неизотермичность фильтрации проявляется локально в призабойной зоне скважин вследствие значительных перепадов давления. Изучение неизотермических процессов имеет особо важное значение в связи с повышением нефтеотдачи при закачке в пласт теплоносителей (горячей воды, пара), при применении внутрипластового горения, и в некоторых других случаях.

В число дифференциальных уравнений фильтрации обязательно

входит уравнение баланса массы в элементе пористой среды – уравнение неразрывности, а также дифференциальные уравнения движения. Для замыкания системы дополнительно вводятся уравнения состояния рассматриваемого флюида и пористой среды. Для получения решения системы уравнений надо еще задать условия на границах пласта и в начальный момент времени.

В результате интегрирования прежде всего определяется распределение давления и скорости фильтрации по всему пласту в любой момент времени, т. е.

$$p = p(x, y, z, t), \quad w_x = w_x(x, y, z, t),$$

$$w_y = w_y(x, y, z, t), \quad w_z = w_z(x, y, z, t).$$

Если рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$) в недеформируемой пористой среде ($m = \text{const}$, $k = \text{const}$), то число искомых функций ограничивается этими четырьмя функциями (p, w_x, w_y, w_z); для фильтрации сжимаемого флюида в сжимаемой пористой среде кроме упомянутых функций нужно определить плотность ρ, вязкость η, пористость m, проницаемость k как функции координат и времени. В этом случае нужно иметь восемь уравнений – дифференциальных и конечных – для определения восьми характеристик фильтрационного потока, жидкости и пористой среды.

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений удается получить лишь в ограниченном числе простейших очень сильно идеализированных случаев, например в задаче о притоке упругой жидкости к скважине в пласте бесконечной протяженности с постоянным дебитом.

В более сложных случаях система уравнений решается численными методами с применением ЭВМ. Достаточно хорошо разработаны численные методы решения самых разнообразных и очень сложных задач подземной гидромеханики. При этом упомянутые аналитические решения играют очень важную роль: на них опробуются численные методы.

Систему дифференциальных уравнений можно использовать также для качественного исследования процесса. Если полученные уравнения привести к безразмерному виду, то в качестве коэффициентов будут фигурировать безразмерные параметры подобия. Анализируя их строение и численные значения, можно судить о том, какие силы играют решающую роль в процессе, какие члены уравнения можно отбросить и т. д.

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Выведем уравнение неразрывности (сплошности) фильтрационного потока для однородного сжимаемого флюида в деформируемой пористой среде. Это уравнение представляет собой уравнение баланса массы в элементарном объеме пористой среды. Выделим мысленно в пористой среде, в которой происходит движение флюида, элементарный объем ΔV

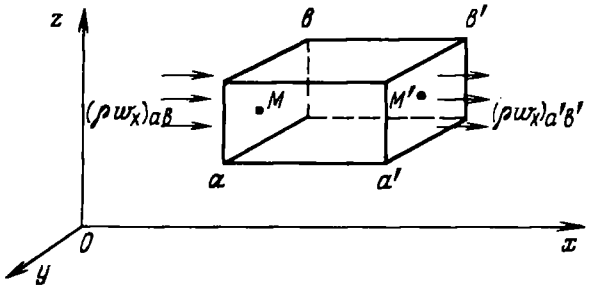


Рис. 2.1. Схема элемента пласта (к выводу уравнения неразрывности)

в форме параллелепипеда с ребрами Δx, Δy, Δz (рис. 2.1), тогда $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. Пусть центр этого параллелепипеда имеет координаты x, y, z. Тогда точка M, совпадающая с центром левой грани ab, имеет координаты $x - \dfrac{\Delta x}{2}$, y, z, а точка M' – центр правой грани $a'b'$ – $x + \dfrac{\Delta x}{2}$, y, z. Обозначим через $\vec{q} = \rho\vec{w}$ вектор массовой скорости фильтрации флюида. Тогда масса флюида, втекающего в объем через левую грань ab, имеющую площадь $\Delta y\, \Delta z$, за малый промежуток времени Δt записывается в следующем виде:

$$(\rho w_x)_{ab}\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t = q_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y\, \Delta z\, \Delta t.$$

Отметим, что в силу малости выделенного объема ΔV и его граней, можно считать, что плотность и скорость фильтрации распределены на гранях ab и $a'b'$ равномерно и равны значениям их в точках M и M' соответственно.

Масса флюида, вытекающая из объема через грань $a'b'$, равна

$$(\rho w_x)_{a'b'}\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t = q_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y\, \Delta z\, \Delta t.$$

Изменение массы флюида в объеме ΔV за промежуток времени Δt за счет потока вдоль оси x равно

$$q_x\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y\, \Delta z\, \Delta t - q_x\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \Delta y\, \Delta z\, \Delta t =$$

$$= -\frac{q_x\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) - q_x\left(x - \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t. \qquad (2.1)$$

Рассмотрев фильтрацию флюида в направлениях вдоль осей y и z, получим аналогичные выражения для изменения массы в объеме ΔV за счет потока вдоль этих осей в виде:

$$-\frac{q_y\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)-q_y\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t; \tag{2.2}$$

$$-\frac{q_z\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)-q_z\left(z-\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t. \tag{2.3}$$

Сумма этих трех выражений определяет общее изменение (накопление) массы в объеме ΔV за время Δt как следствие потока флюида через грани.

С другой стороны, масса флюида в объеме ΔV в момент t составляет

$$(\rho m)\Big|_t \Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

в момент $t+\Delta t$ $-(\rho m)\Big|_{t+\Delta t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, и ее изменение равно

$$\left[(\rho m)\Big|_{t+\Delta t}-(\rho m)\Big|_t\right]\Delta x\,\Delta y\,\Delta z=\frac{(\rho m)\Big|_{t+\Delta t}-(\rho m)|_t}{\Delta t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t. \tag{2.4}$$

Приравняв сумму выражений (2.1)–(2.3) к выражению (2.4) и сократив на $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$, получим:

$$-\left[\frac{q_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)-q_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}+\frac{q_y\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)-q_y\left(y-\frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}+\right.$$

$$\left.+\frac{q_z\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)-q_z\left(z-\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}\right]=\frac{(\rho m)|_{t+\Delta t}-(\rho m)|_t}{\Delta t}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, $\Delta t\to 0$, получим окончательно:

$$-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right]=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}$$

или

$$-\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right]=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Сумма в скобке в левой части уравнения (2.5) представляет собой дивергенцию вектора массовой скорости фильтрации $\vec{q}=\rho\vec{w}$ и кратко записывается следующим образом:

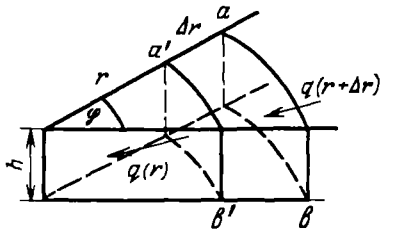


Рис. 2.2. Схема элемента пласта, в котором происходит плоскорадиальная фильтрация к скважине

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=\operatorname{div}(\rho\vec{w}),$$

поэтому уравнение (2.5) можно записать также в следующем виде:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{w})+\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}=0. \tag{2.6}$$

Отметим, что уравнение (2.5) (или 2.6) справедливо только в том случае, если внутри объема ΔV нет источников или стоков, выделяющих или поглощающих флюид, не происходит химических реакций, фазовых превращений и т. д.

Если в рассматриваемый элементарный объем поступает извне флюид, то в правую часть уравнения (2.5) надо добавить значение q_1, равное массе флюида, поступающего в единицу времени в единицу объема:

$$-\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right]=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}+q_1. \tag{2.7}$$

Так как одной из наиболее интересных и важных для практики является задача о притоке флюида к скважине, то мы выведем отдельно уравнение неразрывности для этого случая. Рассмотрим плоский фильтрационный поток, в котором все частицы движутся по горизонтальным радиальным траекториям, сходящимся к центру скважины[1]. Возьмем элемент такого потока (рис. 2.2) и выделим объем между фильтрационными поверхностями $a'b'$ и ab, площади которых равны соответственно φrh и $\varphi(r+\Delta r)h$, а объем равен $\Delta V=\varphi rh\Delta r$, где h – толщина пласта, $h=\text{const}$ (можно принять $h=1$).

Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (2.5), найдем изменение массы флюида как разность между втекающей массой за промежуток времени Δt через поверхность ab, равной $q(r+\Delta r)\varphi h(r+\Delta r)\Delta t$, и вытекающей массой через $a'b'-q(r)\varphi hr\Delta t$, $(q=\rho w_r)$.

Затем приравняем ее к изменению массы $[(\rho m)|_{t+\Delta t}-(\rho m)|_t]\times\varphi rh\Delta r$:

$$q(r+\Delta r)\varphi h(r+\Delta r)\Delta t-q(r)\varphi hr\Delta t=[(\rho m)\Big|_{t+\Delta t}-(\rho m)\Big|_t]\varphi rh\Delta r.$$

[1] Подробнее см. в гл. 3, § 1.

Сократив на φh и разделив на $\Delta r\,\Delta t$, получим:

$$\frac{q(r+\Delta r)(r+\Delta r)-q(r)r}{\Delta r}=\frac{(\rho m)\Big|_{t+\Delta t}-(\rho m)\Big|_{t}}{\Delta t}r. \tag{2.8}$$

Перейдем к пределу при $\Delta r\to 0$, $\Delta t\to 0$, тогда

$$\frac{\partial(qr)}{\partial r}=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}r$$

или

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho w_r)=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}, \tag{2.9}$$

что можно представить также в следующем виде:

$$\frac{\rho w_r}{r}+\frac{\partial(\rho w_r)}{\partial r}=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \tag{2.10}$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим фильтрацию флюидов в пористых средах, принимая в качестве закона движения линейный закон фильтрации Дарси (1.7).

Закон Дарси (1.6) или (1.7) записан в конечном виде, т.е. для пласта или образца с постоянной площадью сечения, где Δp^* – разность приведенных давлений на конечной длине L. Для трубки тока с переменной площадью сечения по длине трубки закон Дарси записывается в дифференциальной форме.

Выделим два сечения – первое на расстоянии s от начала отсчета вдоль линии тока, второе – на расстоянии Δs от первого (рис. 2.3). Пусть движение флюида происходит в направлении возрастания координаты s. В сечении с координатой s обозначим приведенное давление через $p^*(s, t)$, в сечении с координатой $s+\Delta s$ – через $p^*(s+\Delta s, t)$. Использовав формулу (1.7), получим:

$$w=\frac{k}{\eta}\frac{p^*(s, t)-p^*(s+\Delta s, t)}{\Delta s}$$

или, перейдя к пределу при $\Delta s\to 0$,

$$w=-\frac{k}{\eta}\frac{\partial p^*}{\partial s}. \tag{2.11}$$

Знак минус появился в правой части формулы (2.11) потому, что приведенное давление падает по движению жидкости, т.е. градиент приведенного давления отрицателен $\partial p^*/\partial s<0$.

Формула (2.11) справедлива только для изотропной среды, для которой характерно постоянство проницаемости k по всем направле-

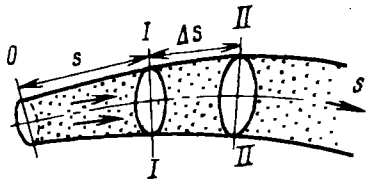


Рис. 2.3. Трубка тока

ниям в окрестности рассматриваемой точки. Однако с переходом от точки к точке пласта проницаемость, вообще говоря, может изменяться, так что $k = k(x, y, z)$ (модель изотропного неоднородного пласта).

Запишем уравнение (2.11) в проекциях на оси координат x, y, z. Если обозначить через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ единичные векторы вдоль осей координат, то вектор скорости фильтрации можно записать в виде

$$\vec{w} = \vec{i}\, w_x + \vec{j}\, w_y + \vec{k} w_z. \tag{2.12}$$

В правой части (2.11) $\partial p^*/\partial s$ представляет собой градиент приведенного давления, т.е. вектор с составляющими $\partial p^*/\partial x$, $\partial p^*/\partial y$, $\partial p^*/\partial z$:

$$\operatorname{grad} p^* = \vec{i}\,\frac{\partial p^*}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial p^*}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial p^*}{\partial z}, \tag{2.13}$$

тогда

$$\vec{w} = -\frac{k}{\eta}\operatorname{grad} p^* \tag{2.14}$$

или, в проекциях на оси координат

$$w_x = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad w_y = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad w_z = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p^*}{\partial z}. \tag{2.15}$$

Если ось z направлена вертикально вверх, то $p^* = p + \rho g z$ и дифференциальные уравнения движения примут вид

$$w_x = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_z = -\frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) \tag{2.16}$$

или, в векторной форме

$$\vec{w} = -\frac{k}{\eta}(\operatorname{grad} p - \rho\vec{g}). \tag{2.17}$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения движения при выполнении двучленного закона фильтрации (1.12). В дифференциальной форме он записывается в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\eta}{k} w + \frac{\rho\beta}{\sqrt{k}} w^2, \tag{2.18}$$

где s – координата, взятая вдоль линии тока по движению жидкости.

В векторной форме двучленный закон выведен из теории размерностей в гл. 1 § 7, в виде

$$-\operatorname{grad} p = \frac{\eta}{k}\vec{w} + \frac{\beta\rho}{\sqrt{k}}|w|\vec{w}. \tag{2.19}$$

В проекциях на оси координат имеем:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\eta}{k}w_x + \beta\frac{\rho|w|}{\sqrt{k}}w_x;\\
-\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\eta}{k}w_y + \beta\frac{\rho|w|}{\sqrt{k}}w_y;\\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\eta}{k}w_z + \beta\frac{\rho|w|}{\sqrt{k}}w_z.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

При фильтрации неньютоновских вязкопластичных жидкостей, а также при фильтрации с очень малыми скоростями имеет место закон фильтрации (1.14), который отличается от закона Дарси наличием предельного градиента γ, по достижении которого начинается движение. В векторной форме закон фильтрации с предельным градиентом выведен из теории размерностей и имеет вид (1.56)

$$-\operatorname{grad} p = \frac{\eta}{k}\vec{w} + \gamma\frac{\vec{w}}{|w|}; \tag{2.21}$$

в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\eta}{k}w_x + \gamma\frac{w_x}{|w|};\\
-\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\eta}{k}w_y + \gamma\frac{w_y}{|w|};\\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\eta}{k}w_z + \gamma\frac{w_z}{|w|}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

§ 4. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ДАРСИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Рассмотрим особенности фильтрационных течений в средах, обладающих сложной геометрией порового пространства.

В зависимости от структурных особенностей и геометрии порового пространства различают однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные среды. Анизотропия означает неодинаковость физических или геометрических свойств по различным направлениям (термин происходит от двух древнегреческих слов: anisos – неравный и tropos –

свойство). В реальных коллекторах нефти и газа анизотропия может быть обусловлена трещиноватостью, слоистостью, наличием различного рода включений, которые приводят к неодинаковости свойств по различным направлениям, например в слоистых средах фильтрационные свойства в плоскости слоев отличаются от фильтрационных свойств в направлении, перпендикулярном к слоям, в трещиновато-пористых фильтрационные потоки по трещинам значительно превосходят потоки в других направлениях и т. д.

Для описания фильтрационных течений в анизотропных средах постулируется обобщенный закон Дарси, справедливость которого подтверждена как многочисленными экспериментальными, так и теоретическими исследованиями. Обобщенный закон Дарси имеет следующий вид:

$$w_x = -\frac{1}{\eta}\left(k_{11}\frac{\partial p}{\partial x} + k_{12}\frac{\partial p}{\partial y} + k_{13}\frac{\partial p}{\partial z}\right);$$

$$w_y = -\frac{1}{\eta}\left(k_{12}\frac{\partial p}{\partial x} + k_{22}\frac{\partial p}{\partial y} + k_{23}\frac{\partial p}{\partial z}\right);$$

$$w_z = -\frac{1}{\eta}\left(k_{13}\frac{\partial p}{\partial x} + k_{23}\frac{\partial p}{\partial y} + k_{33}\frac{\partial p}{\partial z}\right), \qquad (2.23)$$

где w_x, w_y, w_z – компоненты вектора скорости фильтрации; $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, $\partial p/\partial z$ – компоненты вектора градиента давления; $k_{ij}(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$ – компоненты симметричной матрицы (тензора[1]), которая называется матрицей (тензором) коэффициентов проницаемости. Явный вид этой матрицы зависит от типа анизотропии и системы координат, в которой записан обобщенный закон Дарси. Всегда можно выбрать хотя бы одну систему координат $x_1 y_1 z_1$, в которой запись обобщенного закона Дарси имеет наиболее простой вид

$$w_{x1} = -\frac{k_1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad w_{y1} = -\frac{k_2}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y_1}, \quad w_{z1} = -\frac{k_3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z_1}. \qquad (2.24)$$

Система координат $x_1 y_1 z_1$, в которой обобщенный закон Дарси имеет вид (2.24), называется главной системой координат, а значения k_1, k_2, k_3 – главными значениями тензора проницаемости. Используя запись обобщенного закона Дарси в главной системе координат, можно дать

[1] Для того, чтобы описание физического процесса не зависело от выбора системы координат, необходимо, чтобы при переходе от одной системы координат к другой, физические величины, входящие в закон (2.23), преобразовывались по определенным законам. Компоненты тензора k_{ij} изменяются по закону $k'_{ij} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \alpha_{in}\alpha_{jm}k_{nm}$, где α_{in} – косинусы углов между i-й осью новой системы координат и n-й осью исходной системы координат, и образуют тензор второго ранга.

простейшую классификацию эффективной геометрии порового пространства анизотропных сред.

Среды, тензор проницаемости которых в главной системе координат имеет три различных главных значения проницаемости $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, называются ортотропными. Для таких сред компоненты тензора проницаемости можно выразить в следующем виде:

$$k_{ij} = k_1 \delta_{i1} \delta_{j1} + k_2 \delta_{i2} \delta_{j2} + k_3 \delta_{i3} \delta_{j3},$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера или единичный тензор, компоненты которого равны единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$, т. е.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Ортотропными свойствами обладают, например, трещиноватые коллектора, образованные тремя взаимно перпендикулярными системами трещин с различной проницаемостью. В этом случае оси главной системы координат перпендикулярны плоскостям трещин.

Если два из трех главных значений тензора проницаемости совпадают, например $k_1 = k_2$, но $k_1 \neq k_3$, то среда называется поперечно-изотропной или трансверсально-изотропной.

Тензор проницаемости для трансверсально-изотропной среды можно записать в виде:

$$k_{ij} = k_1 \delta_{ij} + k\delta_{i3} \delta_{j3}$$

и получить при помощи тождественных преобразований из формулы для ортотропного тензора:

$$k_{ij} = k_1 \delta_{i1} \delta_{j1} + k_1 \delta_{i2} \delta_{j2} + k_3 \delta_{i3} \delta_{j3} = k_1 (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2} + \delta_{i3} \delta_{j3}) +$$
$$+ (k_3 - k_1) \delta_{i3} \delta_{j3} = k_1 \delta_{ij} + k\delta_{i3} \delta_{j3},$$

где $k = k_3 - k_1$. В качестве примера трансверсально-изотропной среды можно рассмотреть слоистые коллекторы, у которых проницаемость в плоскости слоев для всех направлений одинакова, но не равна значению проницаемости в направлении, перпендикулярном к слоям.

Очевидно, что если потребовать равенства всех трех главных значений проницаемости $k_1 = k_2 = k_3$, то получим закон Дарси для изотропных сред. В этом случае

$$k_{ij} = k_1 (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2} + \delta_{i3} \delta_{j3}) = k_1 \delta_{ij}.$$

Таким образом, закон Дарси является частным случаем более общего соотношения (2.23). Это обстоятельство и доказывает, что соотношение (2.23) является естественным обобщением закона Дарси на случай анизотропных сред.

В обобщенном законе, как и в законе Дарси, значения компонент тензора проницаемости не могут быть произвольными и подчиняются некоторым ограничениям. В частности, в классическом законе Дарси

значение проницаемости должно быть положительным, а в обобщенном законе положительными должны быть все три главных значения тензора проницаемости.

Обобщенный закон Дарси, представленный соотношениями (2.23), может быть разрешен относительно компонент вектора градиента давления и представлен в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\eta (r_{11} w_x + r_{12} w_y + r_{13} w_z),$$

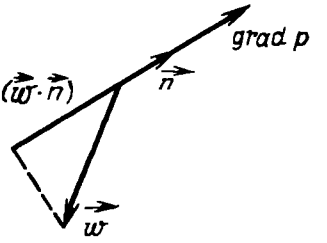
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\eta (r_{21} w_x + r_{22} w_y + r_{23} w_z),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\eta (r_{31} w_x + r_{32} w_y + r_{33} w_z), \qquad (2.25)$$

где r_{ij} – компоненты симметричной матрицы (тензора), которая называется матрицей фильтрационных сопротивлений. Компоненты r_{ij} имеют размерность, обратную размерности площади, а вид матрицы определяется только геометрическими свойствами порового пространства. Представления закона Дарси в виде (2.23) и (2.25) эквивалентны и, взяв за основу соотношение (2.25), можно совершенно аналогично определить ортотропные и трансверсально-изотропные среды, заменив лишь главные значения тензора проницаемости на главные значения тензора фильтрационных сопротивлений. Например, для ортотропных сред компоненты тензора фильтрационных сопротивлений имеют следующий вид: $r_{ij} = r_1 \delta_{i1} \delta_{j1} + r_2 \delta_{i2} \delta_{j2} + r_3 \delta_{i3} \delta_{j3}$.

В обобщенном законе Дарси фильтрационные свойства среды определяются и задаются не одной константой, а в общем случае тремя главными значениями тензора проницаемости или тензора фильтрационных сопротивлений. Это обстоятельство является отражением того факта, что в анизотропных средах векторы скорости фильтрации и градиента давления в общем случае не направлены по одной прямой, а значения проницаемости и фильтрационного сопротивления могут изменяться для различных направлений. Поэтому понятия проницаемости и фильтрационного сопротивления, как скалярных характеристик среды, нуждаются в обобщении на случай анизотропных сред. Проницаемость для анизотропных сред определяется как тензорное свойство в заданном направлении. Понятие тензорного свойства в заданном направлении для тензора k_{ij} определяется следующим образом: если физические свойства среды задаются тензором второго ранга k_{ij} и справедливы уравнения (2.23), то под величиной K, характеризующей тензорное свойство в заданном направлении, понимают отношение проекции вектора $-\eta\vec{w}$ на это направление к длине вектора $\mathrm{grad}\, p$, направление которого совмещено с заданным (рис. 2.4). Из данного определения величины K непосредственно следует и вид его аналитического выражения:

Рис. 2.4. Схема к определению направленной проницаемости



$$K = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} k_{ij}\,\alpha_{in}\,\alpha_{jn}, \tag{2.26}$$

где α_{in}, α_{jn} – направляющие косинусы единичного вектора, определяющего заданное направление.

В самом деле, согласно определению

$$K = \frac{-\eta\,(\vec{w}\cdot\vec{n})}{|\operatorname{grad} p|} = \frac{-\eta\,(w_x\,\alpha_{1n} + w_y\,\alpha_{2n} + w_z\,\alpha_{3n})}{|\operatorname{grad} p|},$$

подставляя в последнюю формулу выражения для w_x, w_y, w_z из (2.23) и учитывая, что $\partial p/\partial x = \alpha_{1n}|\operatorname{grad} p|$ (так как направление вектора $\operatorname{grad} p$ совмещено с вектором $\vec{n}$), $\partial p/\partial y = \alpha_{2n}|\operatorname{grad} p|$, $\partial p/\partial z = \alpha_{3n}|\operatorname{grad} p|$, получим (2.26).

Аналогично доказывается, что

$$R = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} r_{ij}\,\alpha_{in}\,\alpha_{jn}.$$

Величина K называется направленной проницаемостью, а величина R – направленным фильтрационным сопротивлением. В качестве характеристик проницаемости в анизотропных средах можно использовать как направленную проницаемость K, так и величину, обратную направленному фильтрационному сопротивлению, т. е. $1/R$.

Согласно данному определению направленной проницаемости для ортотропных сред

$$K = k_1\,\alpha_{1n}^2 + k_2\,\alpha_{2n}^2 + k_3\,\alpha_{3n}^2,$$

а для трансверсально-изотропных

$$K = k_1 + k_2\,\alpha_{3n}^2,$$

в частности для направлений в плоскости $x_1 y_1$, т. е. при $\alpha_{3n} = 0$ имеем $K = k_1$, и значит в плоскости значение проницаемости равно k_1 и одинаково для всех направлений.

§ 5. ЗАВИСИМОСТЬ ПАРАМЕТРОВ ФЛЮИДОВ И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ОТ ДАВЛЕНИЯ

Выведенные дифференциальные уравнения неразрывности и движения содержат, кроме скорости фильтрации и давления, плотность флюида ρ, коэффициент пористости m, коэффициент проницаемости k (для изотропной среды) и вязкость флюида η.

Для дальнейших расчетов надо знать зависимости этих коэффициентов от давления и температуры.

При изотермическом процессе зависимость плотности однородного флюида от давления представляет собой уравнение состояния.

При установившейся фильтрации капельной жидкости можно считать ее плотность не зависящей от давления, т. е. рассматривать жидкость как несжимаемую, тогда $\rho = \text{const}$.

В неустановившихся процессах часто большое количество нефти можно отобрать за счет расширения ее объема при снижении давления. В этих процессах необходим учет сжимаемости жидкости. Считая капельную жидкость упругой, можно записать закон ее сжимаемости в виде

$$\beta_{ж} = -\frac{1}{V_{ж}}\frac{dV_{ж}}{dp}, \tag{2.27}$$

где $V_{ж}$ – начальный объем жидкости; $dV_{ж}$ – изменение объема при изменении давления на dp; $\beta_{ж}$ – коэффициент объемного сжатия жидкости, который обычно считают постоянным для данной жидкости (не зависящим от давления и температуры). В. Н. Щелкачев приводит следующие значения коэффициента объемного сжатия ($Па^{-1}$):

для различных нефтей отечественных месторождений

$$\beta_{н} = (7 \div 30)\,10^{-10};$$

для пластовых вод

$$\beta_{в} = (2{,}7 \div 5)\,10^{-10}$$

В формуле (2.27) перейдем от объемов к плотности; подставив $V_{ж} = M/\rho$ и $dV_{ж} = -M d\rho/\rho^2$, получим:

$$\beta_{ж} = \frac{M d\rho/\rho^2}{(M/\rho)\,dp} = \frac{d\rho}{\rho dp},$$

откуда

$$d\rho/\rho = \beta_{ж}\,dp.$$

Проинтегрируем последнее равенство от фиксированных значений p_0 и ρ_0 до текущих значений p и ρ соответственно:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \beta_ж \int_{p_0}^{p} dp, \quad \text{отсюда} \quad \ln\frac{\rho}{\rho_0} = \beta_ж (p - p_0)$$

или

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_ж (p - p_0)}. \tag{2.28}$$

Показатель степени $\beta_ж (p - p_0)$ обычно много меньше единицы. Действительно, если $\beta_ж = 10^{-9}$ Па$^{-1}$, а $p - p_0 = 10$ МПа, то $\beta_ж (p - p_0) = 0{,}01$. В этом случае можно, разложив функцию $e^{\beta_ж (p - p_0)}$ в ряд Тейлора, ограничиться двумя первыми членами ряда:

$$e^{\beta_ж (p - p_0)} \approx 1 + \beta_ж (p - p_0).$$

При этом получаем линейную зависимость плотности упругой слабосжимаемой жидкости от давления:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_ж (p - p_0)]. \tag{2.29}$$

Для больших перепадов давления $p - p_0$ надо использовать уравнение состояния упругой жидкости в виде (2.28).

Иногда вместо коэффициента объемного сжатия вводят модуль упругости жидкости $K_ж = 1/\beta_ж$. Формулы (2.28) и (2.29), выраженные через модуль упругости $K_ж$, примут следующий вид:

$$\rho = \rho_0 e^{(p - p_0)/K_ж};$$

$$\rho = \rho_0 [1 + (p - p_0)/K_ж].$$

Природные газы можно считать идеальными (совершенными), если пластовые давления газовых месторождений невелики (до 6–9 МПа), и газ отбирают при депрессии до 1 МПа. Уравнением состояния идеального газа служит уравнение Клайперона–Менделеева:

$$p/\rho = RT, \tag{2.30}$$

где R – газовая постоянная для газа с молекулярной массой $\bar{\mu}$, связанная с универсальной газовой постоянной $\bar{R}$ зависимостью $R = \bar{R}/\bar{\mu}$.

Если $T = T_{пл} = \text{cosnt}$, а $\rho_{ат}$ – плотность газа при атмосферном давлении $p_{ат}$ и пластовой температуре $T_{пл}$, то

$$p_{ат}/\rho_{ат} = RT. \tag{2.31}$$

Приравняв левые части соотношений (2.30) и (2.31), получим уравнение состояния идеального (совершенного) газа, которым будем пользоваться в дальнейшем:

$$\rho = \rho_{ат} p/p_{ат}. \tag{2.32}$$

В практике все чаще встречаются газовые месторождения с высокими пластовыми давлениями (до 40–60 МПа), которые иногда эксплуатируются с большими депрессиями (порядка 15–30 МПа). В этих условиях

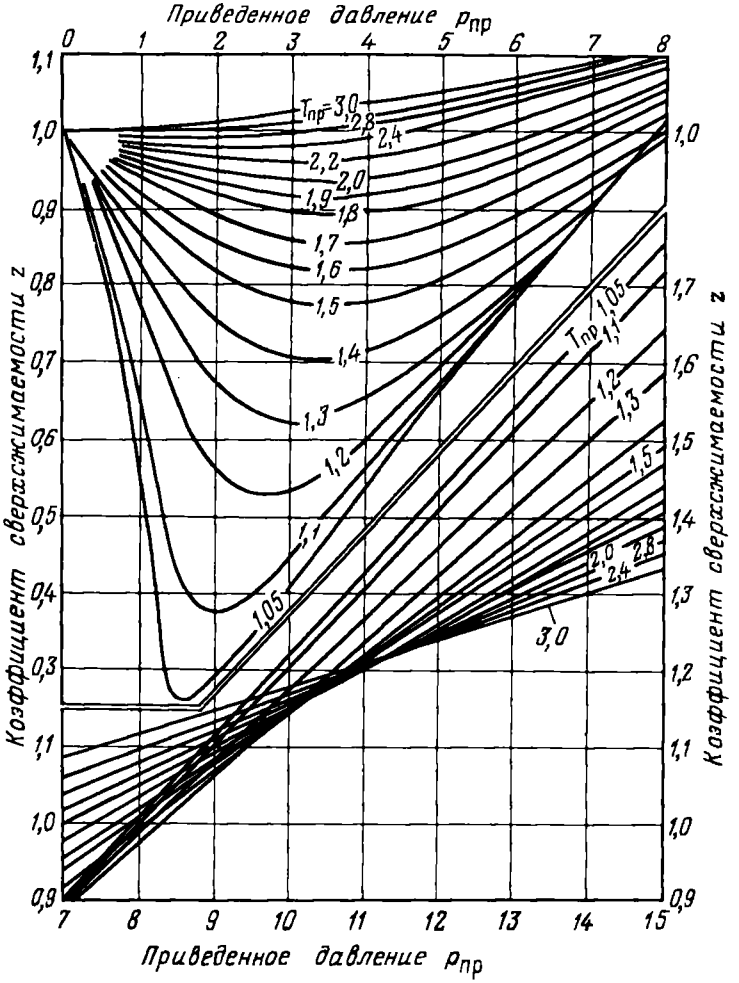


Рис. 2.5. Зависимости коэффициента сверхсжимаемости z от приведенных давления и температуры для природных газов

следует использовать уравнение состояния реального газа, которое, в отличие от уравнения (2.30), запишется в виде

$$p/\rho = zRT, \tag{2.33}$$

где z – коэффициент, характеризующий степень отклонения состояния реального газа от закона идеальных газов (коэффициент сверхсжимаемости) и зависящий от давления и температуры $z = z(p, T)$. Значения коэффициента сверхсжимаемости z определяются по графикам Д. Брауна в зависимости от приведенных величин абсолютного давле-

ния $p_{пр} = p/p_{кр.\,см}$ и температуры $T_{пр} = T/T_{кр.\,см}$, где $p_{кр.\,см}$ и $T_{кр.\,см}$ – соответственно критические давление и температура для природного газа, представляющего собой смесь различных компонентов. Зависимости $z = z(p_{пр}, T_{пр})$ приведены на рис. 2.5.

Для изотермической фильтрации реального газа зависимость плотности от давления принимает вид

$$\rho = \frac{\rho_{ат} z(p_{ат}) p}{p_{ат} z(p)}. \tag{2.34}$$

Зависимость $z(p)$ при постоянной температуре можно считать линейной при малых изменениях давления:

$$z = z_0 [1 - a_z (p_0 - p)], \tag{2.35}$$

где z_0 – коэффициент сверхсжимаемости при $p = p_0$; и экспоненциальной при больших изменениях давления:

$$z = z_0 e^{-a_z (p_0 - p)}, \tag{2.36}$$

причем константа a_z должна быть подобрана так, чтобы кривая (2.35) или (2.36) как можно ближе подходила к соответствующей эмпирической кривой на графиках Д. Брауна.

Здесь приводится простейший способ учета изменения свойств реального газа при изменении давления и температуры. В сложных термобарических условиях, при фильтрации многокомпонентных газов следует пользоваться более усовершенствованными уравнениями состояния.

Эксперименты показывают, что коэффициенты вязкости нефти (при давлениях выше давления насыщения) и газа увеличиваются с повышением давления. При изменении давления в значительных пределах (до 100 МПа) зависимость вязкости пластовых нефтей и природных газов от давления можно принять экспоненциальной:

$$\eta = \eta_0 e^{-a_\eta (p_0 - p)}. \tag{2.37}$$

При малых изменениях давления эта зависимость имеет линейный характер:

$$\eta = \eta_0 [1 - a_\eta (p_0 - p)], \tag{2.38}$$

где η_0 – вязкость при фиксированном давлении p_0; a_η – коэффициент, определяемый экспериментально и зависящий от состава нефти или газа.

Чтобы выяснить, как зависит от давления коэффициент пористости, рассмотрим вопрос о напряжениях, действующих в пористой среде, заполненной жидкостью.

Масса горных пород, расположенных над кровлей продуктивного пласта, создает, так называемое, горное давление $p_{горн}$, которое обычно можно считать неизменным в процессе разработки пласта. Горное давление определяется по формуле $p_{горн} = \rho_{горн} gH$, где $\rho_{горн}$ – средняя плотность горных пород, слагающих вышележащие пласты; H – глубина залегания пласта. Если предположить, что кровля и подошва пласта

абсолютно непроницаемы и полностью воспринимают нагрузку вышележащих пород, то горное давление уравновешивается напряжением в скелете пласта σ и давлением p в жидкости:

$$p_{\text{горн}} = (1 - m)\sigma + mp. \tag{2.39}$$

Здесь σ – истинное напряжение в скелете пористой среды, рассчитанное на единицу горизонтальной площади, мысленно выделенной в любой точке пласта; оно действует на части площади $(1 - m)$; поровое давление p действует на остальной части площади m. Удобнее ввести, так называемое, эффективное напряжение $\sigma_{\text{эф}}$, определяемое как разность напряжений в твердом скелете и жидкой фазе и связанное с истинным напряжением соотношением

$$\sigma_{\text{эф}} = (1 - m)(\sigma - p). \tag{2.40}$$

Тогда из (2.39) следует, что

$$p_{\text{горн}} = \sigma_{\text{эф}} + p. \tag{2.41}$$

Эффективное напряжение физически интерпретируется как та часть истинного напряжения σ в твердой фазе, которая передается по контакту между зернами скелета, не зависит от жидкости и будет иметь место также в сухой пористой среде. Понятие эффективного напряжения удобно еще и потому, что его можно определить из опыта: можно измерить нагрузку Г, моделирующую горное давление $p_{\text{горн}}$ и поровое давление p, и найти $\sigma_{\text{эф}} = \Gamma - p$.

При разработке залежи пластовое давление p падает, и напряжение в скелете $\sigma_{\text{эф}}$ возрастает.

Изменение пористости обусловлено как изменением внутрипорового давления p, так и изменением эффективного напряжения $\sigma_{\text{эф}}$: $m = m(p, \sigma_{\text{эф}})$. При падении давления уменьшаются усилия, сжимающие каждое из зерен породы, поэтому увеличивается объем зерен и уменьшается объем пор. Увеличение $\sigma_{\text{эф}}$ приводит к тому, что зерна породы испытывают дополнительную деформацию – поверхность контактов между зернами увеличивается, происходит уплотнение упаковки зерен (схематично этот процесс показан на рис. 2.6), возможна также перегруппировка зерен, разрушение цементирующего вещества и самих зерен, дробление зерен и т. д.

В тех случаях, когда $p_{\text{горн}} = \text{const}$, обычно принимают, что пористость зависит только от давления: $m = m(p)$.

Вследствие малой деформации твердой фазы считают обычно, что изменение пористости зависит от изменения давления линейно. Закон сжимаемости породы записывают следующим образом, вводя коэффициент упругости пласта β_c:

$$\beta_c = \frac{dV_{\text{п}}}{Vdp}, \tag{2.42}$$

где $dV_{\text{п}}$ – изменение объема пор в элементе пласта, имеющем объем V,

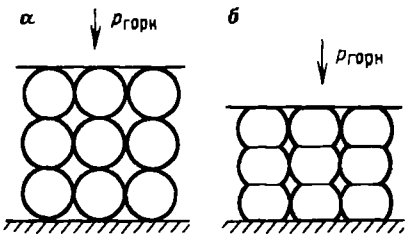


Рис. 2.6. Упрощенная схема деформации зерен пористой среды:
а — до деформации: *б* — после деформации

при изменении давления на величину dp. Если объем элемента пласта считается неизменным, то $dV_п/V = dm$, и закон сжимаемости породы примет вид

$$dm = \beta_c\, dp \tag{2.43}$$

или, в конечной форме,

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0), \tag{2.44}$$

где m_0 – коэффициент пористости при $p = p_0$.

Лабораторные эксперименты для разных зернистых пород и промысловые исследования показывают, что коэффициент объемной упругости пласта составляет: $\beta_c = (0{,}3 \div 2)\,10^{-10}$ Па$^{-1}$.

При значительных изменениях давления изменение пористости описывается уравнением

$$m = m_0\, e^{-\beta c (p_0 - p)/m_0}. \tag{2.45}$$

Экспериментально показано, что не только пористость, но и проницаемость существенно меняется с изменением пластового давления, причем часто проницаемость изменяется в более сильной степени, чем пористость. При малых изменениях давления эта зависимость может быть принята линейной:

$$k = k_0 [1 - a_к (p_0 - p)], \tag{2.46}$$

а при больших – экспоненциальной

$$k = k_0\, e^{-a_к (p_0 - p)}. \tag{2.47}$$

В трещиноватых пластах проницаемость изменяется в зависимости от давления интенсивнее, чем в пористых. Поэтому в трещиноватых пластах учет зависимости $k(p)$ более необходим, чем в гранулярных (подробнее см. гл. 12).

Уравнения состояния флюидов, насыщающих пласт, и пористой среды замыкают систему дифференциальных уравнений.

Таким образом, в наиболее общем случае, когда плотность, вязкость флюида, пористость и проницаемость среды зависят от давления, задача заключается в определении восьми неизвестных функций от координат и времени: давления p, скорости фильтрации $\vec{w}(w_x, w_y, w_z)$; плотности ρ; вязкости η; пористости m; проницаемости k. Для этого нужно решить

систему из восьми уравнений, включающих в себя уравнение неразрывности, три уравнения движения, уравнение состояния флюида и соотношения, определяющие зависимость вязкости, пористости, проницаемости от давления.

§ 6. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОГО ФЛЮИДА ПО ЗАКОНУ ДАРСИ. ФУНКЦИЯ Л.С. ЛЕЙБЕНЗОНА

Для вывода дифференциального уравнения неустановившейся фильтрации используем уравнение неразрывности (2.5) и уравнения движения (2.15), в которых не будем учитывать силу тяжести.

Введем функцию $\mathscr{P}$ следующим образом. Примем, что ее дифференциал равен

$$d\mathscr{P} = \frac{k(p)\rho(p)}{\eta(p)}dp, \tag{2.48}$$

тогда

$$\mathscr{P} = \int \frac{k(p)\rho(p)}{\eta(p)}dp + C. \tag{2.49}$$

Функция $\mathscr{P}$ названа функцией Лейбензона. Так как функция Лейбензона и давление зависят от координат x, y, z и времени t, то равенство (2.48) можно записать в следующем развернутом виде, используя понятие полного дифференциала функции от многих переменных:

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial z}dz + \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial t}dt = \frac{k(p)\rho(p)}{\eta(p)}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial t}dt\right).$$

Из сравнения коэффициентов при x, y, z получим:

$$\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x} = \frac{k(p)\rho(p)}{\eta(p)}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y} = \frac{k(p)\rho(p)}{\eta(p)}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial\mathscr{P}}{\partial z} = \frac{k(p)\rho(p)}{\eta(p)}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.50}$$

Напишем выражения для составляющих массовой скорости фильтрации, умножив правую и левую части (2.15) на плотность и используя соотношения (2.50):

$$\rho w_x = -\rho\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}; \quad \rho w_y = -\rho\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial y};$$

$$\rho w_z = -\rho\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial z}. \tag{2.51}$$

Подставив выражения (2.51) в уравнение неразрывности (2.5), получим:

$$\frac{\partial^2\mathscr{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathscr{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathscr{P}}{\partial z^2} = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} \tag{2.52}$$

или

$$\nabla^2 \mathscr{P} = \frac{\partial (\rho m)}{\partial t}, \tag{2.53}$$

где $\nabla^2 \mathscr{P}$ – оператор Лапласа от функции Лейбензона (2.49).

Уравнение (2.52) справедливо для неустановившегося движения однородного флюида в однородной пористой среде по закону Дарси.

В случае установившейся фильтрации $\partial(\rho m)/\partial t = 0$ и будет удовлетворяться уравнение Лапласа для функции Лейбензона:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial z^2} = 0. \tag{2.54}$$

Если проницаемость среды и динамический коэффициент вязкости флюида постоянны, т. е. $k = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, а плотность $\rho = \rho(p)$, то можно ввести функцию Лейбензона в виде

$$\mathscr{P} = \int \rho(p)\, dp + C. \tag{2.55}$$

Тогда дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации примет вид

$$\frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathscr{P}}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial (\rho m)}{\partial t}. \tag{2.56}$$

Выразим функцию Лейбензона (2.55) через давление для различных флюидов – несжимаемой жидкости, упругой жидкости, совершенного газа и реального газа. Для этого в (2.55) подставим соответствующие выражения для плотности и возьмем интеграл.

Для несжимаемой жидкости $\rho_0 = \text{const}$, тогда

$$\mathscr{P} = \int \rho_0\, dp + C = \rho_0 p + C, \tag{2.57}$$

т. е. функция Лейбензона пропорциональна давлению.

Для упругой жидкости с уравнением состояния (2.26)

$$\mathscr{P} = \int \rho_0 e^{\beta_ж (p - p_0)}\, dp + C = \frac{\rho_0}{\beta_ж} e^{\beta_ж (p - p_0)} + C = \frac{\rho}{\beta_ж} + C. \tag{2.58}$$

Если же $\beta_ж (p - p_0) \ll 1$, то

$$\mathscr{P} = \frac{\rho_0}{\beta_ж}[1 + \beta_ж (p - p_0)] + C \approx \rho_0 p + C, \tag{2.59}$$

т. е. имеет тот же вид, что и для несжимаемой жидкости.

Для совершенного газа с уравнением состояния (2.32)

$$\mathscr{P} = \int \frac{\rho_{ат} p}{p_{ат}}\, dp + C = \frac{\rho_{ат} p^2}{2 p_{ат}} + C, \tag{2.60}$$

т. е. функция Лейбензона пропорциональна квадрату давления.

Для реального газа с уравнением состояния (2.34)

$$\mathscr{P} = \frac{\rho_{ат}\, z(p_{ат})}{p_{ат}} \int \frac{p}{z(p)}\, dp + C, \tag{2.61}$$

т. е. функция Лейбензона записывается в виде интеграла. Так как реальные свойства газа проявляются при высоких пластовых давлениях, то в этом случае оказывается существенной зависимость вязкости от давления и нужно использовать функцию Лейбензона в виде (2.49).

§ 7. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Продуктивный пласт или выделенную из него часть можно рассматривать как некоторую область пространства, ограниченную поверхностями – границами. Границы могут быть непроницаемыми для флюидов, например кровля и подошва пласта, сбросы и поверхности выклинивания. Граничной поверхностью является также поверхность, по которой пласт сообщается с областью питания (с дневной поверхностью, с естественным водоемом), это так называемый контур питания; стенка скважины служит внутренней границей пласта.

Чтобы получить решение системы уравнений, к ним необходимо добавить начальные и граничные условия.

Начальное условие заключается в задании искомой функции во всей области в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Например, если искомой функцией является пластовое давление, то начальное условие может иметь вид

$$p = p_0(x, y, z) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{2.62}$$

т. е. в начальный момент задается распределение давления во всем пласте.

Если в начальный момент пласт невозмущен, то начальное условие примет вид

$$p = p_н = \text{const} \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{2.63}$$

Граничные (краевые) условия задаются на границах пласта. Число граничных условий должно быть равно порядку дифференциального уравнения по координатам.

Возможны следующие граничные условия.

I. На внешней границе Г:

1) постоянное давление

$$p(\Gamma, t) = p_к = \text{const}, \tag{2.64}$$

т. е. граница является контуром питания;

2) постоянный переток через границу при выполнении закона Дарси

$$w_n = -\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial n} = \text{const},$$

где n – нормаль к границе Г, откуда следует, что

$$\partial p/\partial n = \text{const}; \tag{2.65}$$

3) переменный переток через границу

$$\partial p/\partial n = f_1(t); \tag{2.66}$$

4) замкнутая внешняя граница

$$\partial p/\partial n = 0; \tag{2.67}$$

5) бесконечный по простиранию пласт

$$\lim_{x \to \infty,\, y \to \infty} p(x, y, z, t) = p_k = \text{const}. \tag{2.68}$$

II. На внутренней границе:

6) постоянное давление на забое скважины радиусом r_c

$$p(r_c, t) = p_c = \text{const} \quad \text{при} \quad r = r_c; \tag{2.69}$$

7) переменное давление на забое скважины

$$p(r_c, t) = f_2(t) \quad \text{при} \quad r = r_c; \tag{2.70}$$

8) постоянный дебит; это условие при выполнении закона Дарси можно представить следующим образом:

$$Q = w_r \omega = \frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r_c h = \text{const}$$

или

$$r\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\eta}{2\pi r h} \quad \text{при} \quad r = r_c, \tag{2.71}$$

где $\omega = 2\pi r_c h$ – площадь боковой поверхности скважины; h – толщина пласта;

9) переменный дебит

$$r\frac{\partial p}{\partial r} = f_3(t) \quad \text{при} \quad r = r_c; \tag{2.72}$$

10) отключение скважины

$$r\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_c. \tag{2.73}$$

В последующих главах будут рассмотрены задачи, которые решаются с использованием граничных условий (2.64)–(2.73), причем основными условиями, которые встретятся в курсе, будут условия постоянства давления на конечном и бесконечно удаленном контуре питания (2.64) и (2.68), а также постоянства давления и дебита на стенке скважины (2.69) и (2.71).

Контрольные вопросы и задачи

1. Запишите уравнение неразрывности в общем случае, а также для фильтрации несжимаемой жидкости в недеформируемой пористой среде. Каков физический смысл уравнения неразрывности?

2. Запишите полную систему дифференциальных уравнений для решения задачи о фильтрации несжимаемой жидкости по линейному закону в недеформируемом пласте.

3. Во сколько раз изменится плотность упругой жидкости и совершенного газа при изменении давления в 100 раз, от атмосферного ($p_{ат} = 0{,}1$ МПа), до $p = 10$ МПа? Принять $\beta_ж = 10^{-8}$ Па$^{-1}$.

4. Какая функция называется функцией Лейбензона?

5. Какой вид примет функция Лейбензона для сжимаемой жидкости с уравнением состояния (2.28), если зависимости вязкости жидкости и проницаемости пласта от давления определяются соотношениями (2.37) и (2.47)?

6. Какой вид примет функция Лейбензона для реального газа, если $k = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, а коэффициент сверхсжимаемости z зависит от давления линейно (формула (2.35))?

7. Как запишется дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации однородного флюида при $k = \text{cosnt}$, $\eta = \text{const}$? Какой вид примет это уравнение в случае установившейся фильтрации?

8. Как запишется дифференциальное уравнение установившейся фильтрации совершенного газа относительно давления ($k = \text{const}$, $\eta = \text{const}$)?

9. Какие граничные условия для давления должны быть поставлены на внешней и внутренней границах нефтяного пласта, в котором работает одна скважина радиусом r_c, если дебит скважины постоянный, а внешняя граница служит контуром питания?

Глава 3
ОДНОМЕРНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ПОТОКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. СХЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

Ввиду чрезвычайной сложности реальных процессов фильтрации пластовых флюидов построить полностью подобные физические или геометрические модели невозможно. Поэтому в большинстве случаев ограничиваются приближенным моделированием фильтрационных течений, позволяющим обеспечить адекватное математическое описание процесса разработки нефтяных и газовых месторождений. Изучение

этого процесса может проводиться на упрощенных (идеализированных) моделях – схемах одномерных и неодномерных фильтрационных потоков при установившихся или неустановившихся режимах.

При изучении фильтрационных потоков жидкости и газа в природных пластах должна быть проведена такая схематизация геометрической формы движения, которая позволяет создать расчетные схемы, учитывающие основные эффекты и позволяющие определить параметры течения.

При изучении элементарных фильтрационных потоков в подземной гидромеханике основными являются модели установившейся и неустановившейся фильтрации однофазных флюидов (несжимаемых или сжимаемых) в однородной (изотропной) пористой среде. Эти модели являются классическими и позволяют изучать фильтрационные течения методами математической физики.

Однако необходимость решения более сложных неодномерных задач фильтрации жидкостей, газов и их смесей в природных пластах потребовала создания более совершенных математических моделей, основанных на лучшем знании и понимании гидродинамических и физико-химических процессов, происходящих в залежи при ее разработке. Использование этих моделей, как правило, связано с применением численных методов и современной вычислительной техники. Данная глава посвящена изучению простейших одномерных установившихся потоков жидкости и газа в пористой среде по линейному и нелинейному закону фильтрации.

Одномерным называется фильтрационный поток жидкости или газа, в котором скорость фильтрации, давление и другие характеристики течения являются функциями только одной координаты, отсчитываемой вдоль линии тока. Наиболее характерными, применительно к процессам фильтрации нефти, воды и газа, одномерными потоками являются:

прямолинейно-параллельный фильтрационный поток;

плоскорадиальный фильтрационный поток;

радиально-сферический фильтрационный поток.

Приведем краткое описание этих потоков.

Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток. Предположим, что при фильтрации флюида траектории[1] всех частиц параллельны, а скорости фильтрации во всех точках любого поперечного (перпендикулярного линиям тока) сечения равны друг другу. Законы движения вдоль всех траекторий такого фильтрационного потока одинаковы, а поэтому достаточно изучить движение вдоль одной из траекторий, которую можно принять за ось координат – ось x (рис. 3.1).

Прямолинейно-параллельный поток имеет место в лабораторных условиях при движении жидкости или газа через цилиндрический керн

[1] Напомним, что при установившемся движении жидкости траектории совпадают с линиями тока.

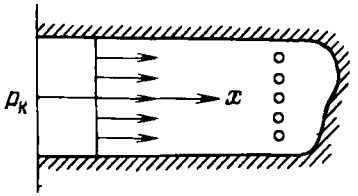


Рис. 3.1. Схема прямолинейно-параллельного потока к батарее скважин

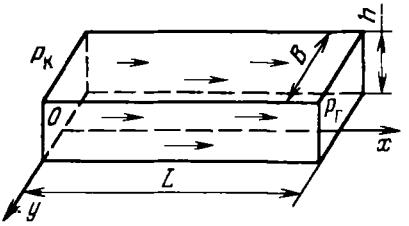


Рис. 3.2. Схема прямолинейно-параллельного течения в пласте

или через прямую трубу постоянного диаметра, заполненную пористой средой; на отдельных участках продуктивного пласта при движении жидкости к батарее скважин, если пласт постоянной толщины имеет в плане форму прямоугольника (см. рис. 3.1). Линии тока будут искривляться только вблизи скважин. Если уплотнить сетку скважин в батарее – заменить батарею сплошной прямолинейной выработкой – галереей, то движение к галерее будет строго прямолинейно-параллельным. Поток можно считать прямолинейно-параллельным на некотором участке между нагнетательной и добывающей батареями скважин.

Пласт, в котором имеет место прямолинейно-параллельный поток, удобно схематизировать в виде прямоугольного параллелепипеда высотой h (толщина пласта), шириной B и длиной L (рис. 3.2). Левая грань является контуром питания, здесь давление постоянно и равно $p_к$, правая грань – поверхность стока (галерея) с давлением $p_г$. Все остальные грани непроницаемы.

Плоскорадиальный фильтрационный поток. Предположим, что имеется горизонтальный пласт постоянной толщины h и неограниченной или ограниченной протяженности. В пласте пробурена одна скважина, вскрывшая его на всю толщину и имеющая открытый забой[1]. При отборе жидкости или газа их частицы будут двигаться по горизонтальным траекториям, радиально сходящимся к скважине. Такой фильтрационный поток называется плоскорадиальным. Картина линий тока в любой горизонтальной плоскости будет одинакова, и для полной

[1] Такая скважина называется гидродинамически совершенной. Подробнее о совершенстве скважин см. гл. 4, § 7.

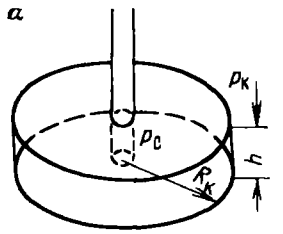


Рис. 3.3. Схема плоскорадиального потока в круговом пласте:
а – общий вид; *б* – план

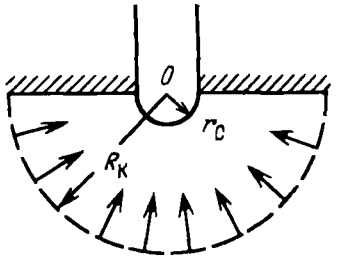


Рис. 3.4. Вертикальное сечение радиально-сферического фильтрационного потока

характеристики потока достаточно изучить движение флюида в одной горизонтальной плоскости. В плоскорадиальном одномерном потоке давление и скорость фильтрации в любой точке зависят только от расстояния r данной точки от оси скважины. На рис. 3.3, *а, б* приведена схема плоскорадиального фильтрационного потока. Схематизируемый пласт ограничен цилиндрической поверхностью радиусом $R_к$ (контуром питания), на которой давление постоянно и равно $p_к$; на цилиндрической поверхности скважины радиусом r_c (забой скважины) давление равно p_c. Кровля и подошва пласта непроницаемы. На рис. 3.3, *б* приведены сечение пласта горизонтальной плоскостью и радиальные линии тока, направленные к скважине. Если скважина не добывающая, а нагнетательная, то направление линий тока надо изменить на противоположное.

Радиально-сферический фильтрационный поток. Рассмотрим схему пласта неограниченной толщины с плоской горизонтальной непроницаемой кровлей. Скважина сообщается с пластом, имеющим форму полусферы радиусом $R_к$ (рис. 3.4). При эксплуатации такой

скважины траектории движения всех частиц жидкости или газа в пласте будут прямолинейными в пространстве и радиально сходящимися в центре полусферического забоя, в точке O. В таком установившемся потоке давление и скорость в любой его точке будут функцией только расстояния r этой точки от центра полусферы. Следовательно, этот фильтрационный поток является также одномерным и называется радиально-сферическим. Такой поток может реализовываться вблизи забоя, когда скважина вскрывает только самую кровлю пласта или глубина вскрытия h значительно меньше толщины пласта.

Описанные схемы одномерных фильтрационных потоков позволяют создавать простейшие модели реальных течений, возникающих при разработке нефтегазовых месторождений и решать практические задачи.

Задача исследования установившегося фильтрационного потока заключается в определении следующих характеристик: дебита (или расхода), давления, скорости фильтрации в любой точке потока, а также установление закона движения частиц жидкости или газа вдоль их траекторий и определение средневзвешенного по объему порового пространства пластового давления.

§ 2. РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Для расчета перечисленных характеристик одномерных фильтрационных потоков жидкости и газа можно использовать два подхода. Первый из них – вывод дифференциальных уравнений и их решение отдельно для прямолинейно-параллельного, плоскорадиального и радиально-сферического потоков жидкости и газа[1]. Второй – вывод обобщенного уравнения одномерного течения флюида в недеформируемой трубке тока переменного сечения с использованием функции Лейбензона и получение из него конкретных формул применительно к различным схемам фильтрационных потоков. Второй подход более эффективен, позволяет исходить из обобщенных характеристик течения. Он используется в настоящем учебнике.

В случае одномерного течения флюида в недеформируемой трубке тока переменного сечения (см. рис. 2.3) массовый расход по всей длине струйки сохраняется постоянным:

$$Q_m = \rho Q = \rho w \omega(s) = \text{const}, \tag{3.1}$$

где s – координата, взятая вдоль линии тока, возрастающая по течению флюида.

Запишем закон Дарси (2.11) через функцию Лейбензона (2.55). Для этого умножим правую и левую части уравнения (2.11) на плотность флюида $\rho(p)$ и на площадь сечения $\omega(s)$:

[1] Подземная гидравлика / К. С. Басниев и др. М., Недра, 1986.

$$\rho Q = -\frac{k}{\eta}\frac{\rho dp}{ds}\omega(s).$$

На основании формулы (2.55) можно заменить $\rho dp = d\mathscr{P}$
Тогда

$$Q_m = -\frac{k}{\eta}\frac{d\mathscr{P}}{ds}\omega(s). \tag{3.2}$$

Это дифференциальное уравнение является основным при расчете одномерных потоков.

Найдем из него распределение функции Лейбензона по длине струйки $\mathscr{P}(s)$ и выведем формулу для расчета дебита. В уравнении (3.2) разделим переменные

$$d\mathscr{P} = -\frac{Q_m \eta ds}{k\omega(s)} \tag{3.3}$$

и проинтегрируем в пределах от $s = s_1$, где известно значение функции Лейбензона $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1$ до текущего значения s и соответствующего ему $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P} - \mathscr{P}_1 = -\frac{Q_m \eta}{k}\int_{s_1}^{s}\frac{ds}{\omega(s)}. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$R_{1s}(s) = \int_{s_1}^{s}\frac{ds}{\omega(s)}, \tag{3.5}$$

тогда

$$\mathscr{P}(s) = \mathscr{P}_1 - \frac{Q_m \eta}{k}R_{1s}(s). \tag{3.6}$$

Интегрируя (3.3) по s в пределах от s_1 до s_2 и по $\mathscr{P}$ от $\mathscr{P}_1$ до $\mathscr{P}_2$, получим:

$$\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2 = \frac{Q_m \eta}{k}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{\omega(s)}. \tag{3.7}$$

Из последнего равенства найдем массовый расход:

$$Q_m = \frac{k}{\eta}\frac{(\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2)}{R_{12}}, \tag{3.8}$$

где

$$R_{12} = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\omega(s)}. \tag{3.9}$$

Формула (3.8) является аналогом закона Ома: силе тока соответствует дебит, электрическому потенциалу – функция Лейбензона, и по аналогии с электрическим сопротивлением знаменатель формулы (3.8) R_{12}, т. е. выражение (3.9), называют фильтрационным сопротивлением.

Подставив выражение для массового расхода из (3.8) в (3.6), получим окончательно:

$$\mathscr{P}(s) = \mathscr{P}_1 - \frac{\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2}{R_{12}} R_{1s}(s). \tag{3.10}$$

Массовая скорость фильтрации определяется равенством

$$\rho w = -\frac{k}{\eta}\frac{d\mathscr{P}}{ds}. \tag{3.11}$$

Из соотношения (3.10)

$$\frac{d\mathscr{P}}{ds} = -\frac{\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2}{R_{12}}\frac{dR_{1s}}{ds} = -\frac{\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2}{R_{12}}\frac{1}{\omega(s)},$$

тогда

$$\rho w = \frac{k(\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2)}{\eta R_{12}\,\omega(s)}. \tag{3.12}$$

Зная конкретные зависимости плотности ρ и функции Лейбензона $\mathscr{P}$ от давления для различных флюидов (см. формулы (2.57), (2.60)), а также выражения R_{1s}, R_{12}, $\omega(s)$ для разных одномерных потоков, можно рассчитать распределение давления $p(s)$, скорости фильтрации $w(s)$, получить формулы для массового и объемного расходов.

По распределению давления в дальнейшем найдем средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление, определяемое по формуле

$$\tilde{p} = \frac{1}{V_п}\int_{V_п} p(s)\,dV_п, \tag{3.13}$$

где $V_п$ – общий объем порового пространства пласта.

Время движения отдельных частиц флюида определяется решением уравнения:

$$v(s) = \frac{ds}{dt} = \frac{w(s)}{m}.$$

При условии, что в начальный момент $t = 0$ частица имела координату $s = s_0$, получим:

$$t = m \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{w(s)}. \tag{3.14}$$

Запишем теперь полученные в общем виде формулы (3.8), (3.10), (3.12) в конкретном виде для каждого из одномерных потоков жидкости и газа.

2.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток

Площадь поперечного сечения $\omega = Bh = \text{const}$; на контуре питания $x_1 = 0$, $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_к$, на галерее $x_2 = L$, $\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_г$; из (3.5) $R_{1s} = x/(Bh)$, из (3.9) $R_{12} = L/(Bh)$ (см. рис. 3.2).

Тогда

$$Q_m = \frac{k(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta L} Bh, \tag{3.15}$$

$$\mathscr{P}(x) = \mathscr{P}_к - \frac{\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г}{Lx}, \tag{3.16}$$

$$\rho w = \frac{k(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta L}. \tag{3.17}$$

2.2. Плоскорадиальный фильтрационный поток

Перейдем от координаты s к координате r, отсчитываемой от центра скважины. Для добывающей скважины $s = R_к - r$ (см. рис. 3.3, *б*), так что $ds = -dr$; площадь фильтрационной поверхности $\omega(s) = 2\pi rh$ – боковая поверхность цилиндра; на контуре питания $r_1 = R_к$, $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_к$ на забое скважины $r_2 = r_c$, $\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_c$. Тогда

$$R_{1s} = \int_{R_к}^{r} \frac{-dr}{2\pi rh} = \frac{1}{2\pi h} \int_{r}^{R_к} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{R_к}{r},$$

$$R_{12} = \int_{R_к}^{} \frac{-dr}{2\pi rh} = \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{R_к}{r_c}.$$

Из (3.8)

$$Q_m = 2\pi h \frac{k(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)}. \tag{3.18}$$

Из (3.10)

$$\mathscr{P}(r) = \mathscr{P}_к - (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)\frac{\ln(R_к/r)}{\ln(R_к/r_c)}. \tag{3.19}$$

Из (3.12)

$$\rho w = \frac{k(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)}\frac{1}{r}. \tag{3.20}$$

2.3. Радиально-сферический фильтрационный поток

В этом случае для добывающей скважины с полусферическим забоем имеем: $s = R_к - r$, $ds = -dr$, $\omega(s) = 2\pi r^2$ – площадь поверхности полусферы с радиусом r; $r_1 = R_к$, $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_к$, $r_2 = r_c$, $\mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_c$ (см. рис. 3.4).

Вычисляем фильтрационные сопротивления по формулам (3.5) и (3.9):

$$R_{1s} = -\int_{R_к}^{r}\frac{dr}{2\pi r^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{R_к}^{r}\frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{R_к}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_к}\right);$$

$$R_{12} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_к}\right) \approx \frac{1}{2\pi r_c}, \quad \text{так как} \quad r_c \ll R_к.$$

Далее из (3.8), (3.10), (3.12) находим:

$$Q_m = 2\pi r_c \frac{k}{\eta}(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c); \tag{3.21}$$

$$\mathscr{P}(r) = \mathscr{P}_к - (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c) r_c\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_к}\right); \tag{3.22}$$

$$\rho w = \frac{k}{\eta}(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)\frac{r_c}{r^2}. \tag{3.23}$$

§ 3. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ ПОТОКОВ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Рассмотрим конкретные модели флюидов – несжимаемую жидкость и совершенный газ. Выпишем для них формулы для расчета основных характеристик одномерных фильтрационных потоков. Сопоставление этих формул позволит оценить эффект сжимаемости при прочих одинаковых условиях.

В соответствии с (2.57) и (2.60) функция Лейбензона имеет следующий вид:

для несжимаемой жидкости

$$\mathscr{P} = \rho_0 p + C; \tag{3.24}$$

для совершенного газа

$$\mathscr{P} = \rho_{ат} p^2/(2p_{ат}) + C. \tag{3.25}$$

3.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и совершенного газа

Подставив в основные расчетные формулы (3.15), (3.16), (3.17) выражение функции Лейбензона (3.24), а также на контуре $\mathscr{P}_к = \rho_0 p_к + C$ и на галерее $\mathscr{P}_г = \rho_0 p_г + C$, получим основные характеристики для несжимаемой жидкости:

массовый расход

$$Q_m = \frac{k}{\eta}\rho_0 \frac{p_к - p_г}{L} Bh; \tag{3.26}$$

распределение давления

$$p(x) = p_к - \frac{p_к - p_г}{L} x; \tag{3.27}$$

массовую скорость фильтрации

$$\rho_0 w = \frac{k}{\eta}\rho_0 \frac{p_к - p_г}{L} = \text{const}. \tag{3.28}$$

Из (3.26) и (3.28) следуют формулы для объемного расхода

$$Q = \frac{k}{\eta}\frac{p_к - p_г}{L} Bh = \text{const} \tag{3.29}$$

и объемной скорости фильтрации

$$w = \frac{k}{\eta}\frac{p_к - p_г}{L} = \text{const}. \tag{3.30}$$

Для совершенного газа из (3.25) следует

$$\mathscr{P}_к = \rho_{ат} p_к^2/(2p_{ат}) + C, \quad \mathscr{P}_г = \rho_{ат} p_г^2/(2p_{ат}) + C$$

и основные соотношения принимают вид

$$Q_m = \frac{k}{\eta}\frac{\rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2)}{2p_{ат} L} Bh = \text{const}, \tag{3.31}$$

$$p(x) = \sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_г^2}{L} x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \tag{3.32}$$

$$\rho w = \frac{k}{\eta}\frac{\rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2)}{2p_{ат} L} = \text{const}. \tag{3.33}$$

Объемный расход газа в пластовых условиях найдем, используя формулу $Q = Q_m/\rho$, где $\rho = \rho_{ат} p/p_{ат}$, в виде

$$Q(x) = \frac{k(p_к^2 - p_г^2)Bh}{\eta\, 2Lp(x)}. \tag{3.34}$$

При изучении фильтрации газа вводят понятие объемного расхода, приведенного к атмосферному давлению и пластовой температуре.

$$Q_{ат} = Q_m/\rho_{ат}. \tag{3.35}$$

Формула для него имеет вид

$$Q_{ат} = \frac{k(p_к^2 - p_г^2)Bh}{\eta\, 2p_{ат}L} = \text{const}. \tag{3.36}$$

Объемная скорость фильтрации газа:

$$w = \frac{k(p_к^2 - p_г^2)}{\eta\, 2Lp(x)}. \tag{3.37}$$

Для сравнения основных характеристик прямолинейно-параллельного потока несжимаемой жидкости и газа следует обратиться к табл. 3.1.

Для определения средневзвешенного по объему порового пространства пластового давления $\tilde{p}$ используем общую формулу (3.13); для прямолинейно-параллельного потока общий объем порового пространства $V_п = BhLm$, элементарный объем $dV_п = Bhmdx$.

Для несжимаемой жидкости подставим под интеграл выражение (3.27), тогда

$$\tilde{p} = \frac{1}{BhLm}\int_0^L \left(p_к - \frac{p_к - p_г}{L}x\right) Bhmdx =$$

$$= \frac{1}{L}\left(p_к\int_0^L dx - \frac{p_к - p_г}{L}\int_0^L xdx\right) = \frac{p_к + p_г}{2}. \tag{3.38}$$

Для газа, подставив (3.32), получим:

$$\tilde{p} = \frac{1}{L}\int_0^L \sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_г^2}{L}x}\quad dx = -\frac{p_к}{L}\frac{2L}{1 - p_г^2/p_к^2}\int_1^{p_г/p_к} y^2\, dy =$$

$$= \frac{2p_к^2}{p_к^2 - p_г^2}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{p_г/p_к}^{1} = \frac{2}{3}\frac{p_к^3 - p_г^3}{p_к^2 - p_г^2}. \tag{3.39}$$

Здесь введено обозначение

$$y = \sqrt{1 - \frac{p_к^2 - p_г^2}{p_к^2 L}x}. \tag{3.40}$$

Таблица 3.1

Расчетные формулы для прямолинейно-параллельного потока несжимаемой жидкости и совершенного газа

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
1. Функция Лейбензона	$\mathscr{R} = \rho_0 p + C$ (3.24)	$\mathscr{R} = \rho_{ат} p^2/(2p_{ат}) + C$ (3.25)
2. Распределение давления по пласту $p(x)$, $0 \leqslant x \leqslant L$	$p(x) = p_к - \dfrac{p_к - p_г}{L} x$ (3.27)	$p(x) = \sqrt{p_к^2 - \dfrac{p_к^2 - p_г^2}{L} x}$ (3.32)
3. Массовый расход Q_m	$Q_m = \dfrac{k}{\eta} \rho_0 \dfrac{p_к - p_г}{L} Bh = \text{const}$ (3.26)	$Q_m = \dfrac{k}{\eta} \dfrac{\rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2)}{2p_{ат} L} Bh = \text{const}$ (3.31)
4. Массовая скорость фильтрации ρw	$\rho_0 w = \dfrac{k}{\eta} \rho_0 \dfrac{p_к - p_г}{L} = \text{const}$ (3.28)	$\rho w = \dfrac{k}{\eta} \dfrac{\rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2)}{2p_{ат} L} = \text{const}$ (3.33)
5. Объемный расход Q	$Q = \dfrac{k}{\eta} \dfrac{p_к - p_г}{L} Bh = \text{const}$ (3.29)	$Q(x) = \dfrac{k}{\eta} \dfrac{(p_к^2 - p_г^2)}{2Lp(x)} Bh$ (3.34) $Q_{ат} = k\eta \dfrac{(p_к^2 - p_г^2) Bh}{2p_{ат} L}$ (3.36)
6. Скорость фильтрации (объемная) w	$w = \dfrac{k(p_к - p_г)}{\eta L} = \text{const}$ (3.30)	$w = \dfrac{k(p_к^2 - p_г^2)}{\eta 2Lp(x)}$ (3.37)
7. Средневзвешенное давление $\tilde{p}$	$\tilde{p} = (p_к + p_г)/2$ (3.38)	$\tilde{p} = \dfrac{2(p_к^3 - p_г^3)}{3(p_к^2 - p_г^2)}$ (3.39)
8. Время движения отмеченных частиц t	$t = \dfrac{m\eta x L}{k(p_к - p_г)}$ (3.41)	$t = \dfrac{4m\eta L^2 [p_к^3 - p^3(x)]}{3k(p_к^2 - p_г^2)^2}$ (3.43)
9. Время продвижения до галереи T	$T = \dfrac{m\eta L^2}{k(p_к - p_г)} = \dfrac{2m\eta L^2 \tilde{p}}{k(p_к^2 - p_г^2)}$ (3.42)	$T = \dfrac{4m\eta^2 (p_к^3 - p_г^3)}{3k(p_к^2 - p_г^2)^2} = \dfrac{2m\eta L^2 \tilde{p}}{k(p_к^2 - p_г^2)}$ (3.44)

Для нахождения закона движения отдельных частиц $t(x)$ используем равенство (3.14), полагая $s_0 = 0$.

Для несжимаемой жидкости подставив (3.30), найдем

$$t = \frac{mx}{w} = \frac{m\eta xL}{k(p_к - p_г)}. \tag{3.41}$$

Время продвижения частицы от контура питания до галереи получим, полагая $x = L$:

$$T = \frac{m\eta L^2}{k(p_к - p_г)} = \frac{2m\eta L^2}{k(p_к^2 - p_г^2)}\tilde{p}. \tag{3.42}$$

Для газа, используя формулу (3.37), получим:

$$t = m\int_0^x \frac{dx}{w(x)} = \frac{2m\eta L}{k(p_к^2 - p_г^2)}\int_0^x p(x)\,dx =$$

$$= \frac{2m\eta L p_к}{k(p_к^2 - p_г^2)}\int_0^x \sqrt{1 - \frac{p_к^2 - p_г^2}{p_к^2}\frac{x}{L}}\,dx.$$

Применив подстановку (3.40) и проведя необходимые преобразования, получим:

$$t = \frac{4m\eta L^2 p_к^3}{3k(p_к^2 - p_г^2)^2}\left[1 - \left(1 - \frac{p_к^2 - p_г^2}{p_к^2}\frac{x}{L}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{4m\eta L^2[p_к^3 - p^3(x)]}{3k(p_к^2 - p_г^2)^2}. \tag{3.43}$$

При $x = L$

$$T = \frac{4m\eta L^2(p_к^2 - p_г^2)}{3k(p_к^2 - p_г^2)^2} = \frac{2m\eta L^2\tilde{p}}{k(p_к^2 - p_г^2)}. \tag{3.44}$$

Выражения (3.38)–(3.44) также приведены в табл. 1.

Сравнивая формулы, полученные для прямолинейно-параллельного течения жидкости и газа (см. табл. 1), можно сделать следующие выводы: давление в потоке жидкости меняется вдоль координаты по линейному закону (рис. 3.5, кривая *1*), а в потоке газа – по параболическому (рис. 3.5, кривая *2*). Градиент давления в потоке газа увеличивается по мере продвижения по пласту и принимает наибольшее значение на галерее.

Массовый расход жидкости пропорционален перепаду давлений $p_к - p_г$, в соответствии с законом Дарси, массовый расход газа пропорционален разности квадратов давлений.

Массовые расходы и массовые скорости фильтрации для обоих флюидов постоянны вдоль пласта; объемный расход и объемная

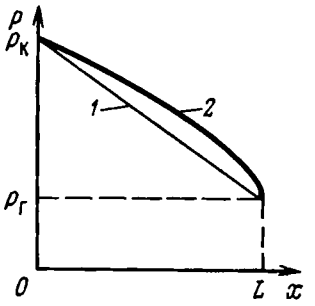


Рис. 3.5. Кривые распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке:
1 – для жидкости; *2* – для газа

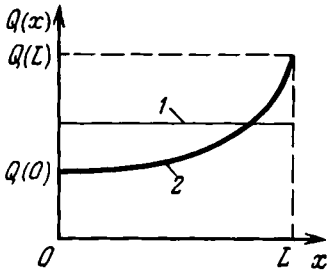


Рис. 3.6. Зависимости $Q = Q(x)$:
1 — для жидкости; *2* – для газа

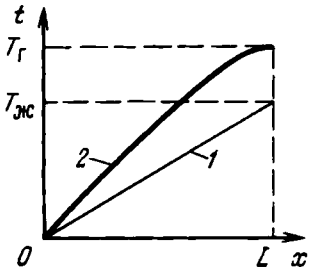


Рис. 3.7. Зависимости $t = t(x)$ частицы в прямолинейно-параллельном потоке:
1 – для жидкости; *2* – для газа

скорость фильтрации жидкости вдоль пласта не меняются, однако для газа эти характеристики зависят от координаты, возрастая от входа к выходу, что является следствием расширения газа при снижении давления. На рис. 3.6 приведены зависимости $Q = Q(x)$ для жидкости (*1*) и газа (*2*). Такой же вид имеет зависимость $w(x)$.

Поскольку кривая $p(x)$ для газа располагается выше, чем для жидкости (см. рис. 3.5), то средневзвешенное давление для газа больше, чем для жидкости, для любых значений $p_к$ и $p_г$.

Время продвижения частицы для несжимаемой жидкости пропорционально пройденному частицей пути x (рис. 3.7, кривая *1*), так как

скорость движения частицы, $v = w/m$, постоянна. Для газа зависимость $t(x)$ сложнее (рис. 3.7, кривая *2*). При приближении к значению $x = L$ кривая выполаживается.

3.2. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и совершенного газа

Основными расчетными формулами в этом случае являются (3.18), (3.19), (3.20).

Для несжимаемой жидкости по формуле (3.24) $\mathscr{P} = \rho_0 p + C$; на контуре $\mathscr{P}_к = \rho_0 p_к + C$, на забое скважины $\mathscr{P}_с = \rho_0 p_с + C$. Тогда получим:

массовый расход

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\eta}\rho_0 \frac{p_к - p_с}{\ln(R_к/r_с)}; \tag{3.45}$$

распределение давления

$$p(r) = p_к - \frac{p_к - p_с}{\ln(R_к/r_с)}\ln(R_к/r),$$

$$r_с \leqslant r \leqslant R_к; \tag{3.46}$$

массовая скорость фильтрации

$$\rho_0 w = \frac{k\rho_0(p_к - p_с)}{\eta \ln(R_к/r_с)}\frac{1}{r}. \tag{3.47}$$

Найдем объемный расход $Q = Q_m/\rho_0$

$$Q = \frac{2\pi kh(p_к - p_с)}{\eta \ln(R_к/r_с)} \quad \text{(формула Дюпюи)} \tag{3.48}$$

и объемную скорость фильтрации

$$w = \frac{k(p_к - p_с)}{\eta \ln(R_к/r_с)}\frac{1}{r}. \tag{3.49}$$

Для газа $\mathscr{P} = \rho_{ат}p^2/(2p_{ат}) + C$, $\mathscr{P}_к = \rho_{ат}p_к^2/(2p_{ат}) + C$, $\mathscr{P}_с = \rho_{ат}p_с^2/(2p_{ат}) + C$. Подставив эти выражения в формулы (3.18), (3.19) и (3.20), получим:

массовый расход газа

$$Q_m = \frac{\pi kh\rho_{ат}(p_к^2 - p_с^2)}{\eta p_{ат}\ln(R_к/r_с)} = \text{const}; \tag{3.50}$$

распределение давления в потоке газа

$$p = \sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln(R_к/r_с)}\ln(R_к/r)}, \quad r_с \leqslant r \leqslant R_к; \tag{3.51}$$

массовая скорость фильтрации газа

$$\rho w = \frac{k\rho_{ат}(p_к^2 - p_c^2)}{\eta\, 2p_{ат}\ln(R_к/r_c)}\frac{1}{r}. \tag{3.52}$$

Объемный расход газа в пластовых условиях и объемная скорость фильтрации определяются по формулам

$$Q(r) = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{Q_m p_{ат}}{\rho_{ат} p} = \frac{\pi kh(p_к^2 - p_c^2)}{\eta \ln(R_к/r_c)\, p(r)}, \tag{3.53}$$

$$w = \frac{Q(r)}{2\pi rh} = \frac{k(p_к^2 - p_c^2)}{\eta\, 2\ln(R_к/r_c)\, p(r)\, r}. \tag{3.54}$$

Объемный расход при атмосферном давлении

$$Q_{ат} = \frac{Q_m}{\rho_{ат}} = \frac{\pi kh(p_к^2 - p_c^2)}{\eta\, p_{ат}\ln(R_к/r_c)} = \text{const}. \tag{3.55}$$

Формулы (3.45)–(3.55) для сравнения сведены в табл. 3.2.

Найдем средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление по формуле (3.13). Для кругового пласта общий объем порового пространства $V_п = \pi(R_к^2 - r_c^2)hm$, элементарный объем $dV_п = 2\pi rhmdr$, тогда для жидкости, с учетом (3.46)

$$\tilde{p} = \frac{1}{\pi(R_к^2 - r_c^2)hm}\int_{rc}^{Rк}\left[p_к - \frac{p_к - p_c}{\ln(R_к/r_c)}\ln(R_к/r)\right]2\pi rhmdr =$$

$$= \frac{2p_к}{R_к^2 - r_0^2}\left[\left(1 - \frac{1 - p_c/p_к}{\ln(R_к/r_c)}\ln R_к\right)\int_{rc}^{Rк} rdr + \frac{1 - p_c/p_к}{\ln(R_к/r_c)}\int_{rc}^{Rк} \times\right.$$

$$\left.\times\, r\ln r dr\right] = p_к\left[1 - \frac{1 - p_c/p_к}{2\ln(R_к/r_c)}\right]. \tag{3.56}$$

Здесь при вычислении интеграла были отброшены члены, содержащие r_c^2, как малые по сравнению с $R_к^2$.

Вычисляя средневзвешенное давление для газа, в формулу (3.13) подставим выражение (3.51):

$$\tilde{p} = \frac{2}{R_к^2 - r_c^2}\int_{rc}^{Rк}\sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_c^2}{\ln(R_к/r_c)}\ln(R_к/r)}\, rdr =$$

$$= \frac{2p_к}{R_к^2 - r_c^2}\int_{rc}^{Rк}\sqrt{1 - \frac{1 - p_c^2/p_к^2}{\ln(R_к/r_c)}\ln(R_к/r)}\, rdr. \tag{3.57}$$

Таблица 3.2. **Расчетные формулы для плоскорадиального потока несжимаемой жидкости и совершенного газа**

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
1. Функция Лейбензона	$\mathscr{R} = \rho_0 p + C$	$\mathscr{R} = \rho_{ат} p^2/(2p_{ат}) + C$
2. Распределение давления по пласту	$p(r) = p_к - \frac{p_к - p_c}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r)$ или $p(r) = p_c + \frac{p_к - p_c}{\ln(R_к/r_c)} \ln(r/r_c)$ (3.46)	$p(r) = \sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_c^2}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r)}$ или $p(r) = \sqrt{p_c^2 + \frac{p_к^2 - p_c^2}{\ln(R_к/r_c)} \ln(r/r_c)}$ (3.51)
3. Массовый расход Q_m	$Q_m = \rho_0 \frac{2\pi kh(p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} = \text{const}$ (3.45)	$Q_m = \frac{\pi kh \rho_{ат}(p_к^2 - p_c^2)}{\eta p_{ат} \ln(R_к/r_c)} = \text{const}$ (3.50)
4. Массовая скорость фильтрации ρw	$\rho_0 w = \rho_0 \frac{k(p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} \frac{1}{r}$ (3.47)	$\rho w = \frac{k(p_к^2 - p_c^2)\rho_{ат}}{2\eta p_{ат} \ln(R_к/r_c)} \frac{1}{r}$ (3.52)
5. Объемный расход Q	$Q = \frac{2\pi kh(p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} = \text{const}$ (формула Дюпюи) (3.48)	$Q = \frac{\pi kh(p_к^2 - p_c^2)}{\eta \ln(R_к/r_c) p(r)}$ (3.53) $Q_{ат} = \frac{\pi kh(p_к^2 - p_c^2)}{\eta p_{ат} \ln(R_к/r_c)} = \text{const}$ (3.55)
6. Объемная скорость фильтрации w	$w = \frac{k(p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} \frac{1}{r}$ (3.49)	$w = \frac{k(p_к^2 - p_c^2)}{2\eta \ln(R_к/r_c)} \frac{1}{r p(r)}$ (3.54)
7. Средневзвешенное давление $\tilde{p}$	$\tilde{p} = p_к - \frac{p_к - p_c}{2\ln(R_к/r_c)}$ (3.56)	$\tilde{p} = p_к - \frac{p_к^2 - p_c^2}{4p_к \ln(R_к/r_c)}$ (3.58)
8. Время движения отмеченных частиц t	$t = \frac{m\eta \ln(R_к/r_c)(r_0^2 - r^2)}{2k(p_к - p_c)} =$ $= \frac{\pi mh(r_0^2 - r^2)}{Q}$ (3.59)	—
9 Время движения частицы от контура до забоя T	$T = \frac{m\eta \ln(R_к/r_c)(R_к^2 - r_c^2)}{2k(p_к - p_c)}$ (3.60)	$T = \frac{m\eta(R_к/r_c)(R_к^2 - r_c^2)\tilde{p}}{k(p_к^2 - p_c^2)}$ (3.61)

Полученный интеграл не берется в конечном виде. Поэтому расчет ведется приближенно. Обозначим

$$x = \frac{1 - p_c^2/p_к^2}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r), \quad 0 \leqslant x < 1 \quad \text{при} \quad r_c \leqslant r \leqslant R_к,$$

тогда подынтегральное выражение (3.57) равно $\sqrt{1-x}$ при $t < 1$; его можно разложить в ряд:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \ldots$$

Удержав два первых члена ряда, получим:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1 - p_c^2/p_к^2}{2\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r),$$

тогда, приближенно

$$\tilde{p} = \frac{2p_к}{R_к^2 - r_c^2} \int_{rc}^{Rк} \left[1 - \frac{1 - p_c^2/p_к^2}{2\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r) \right] r dr.$$

Интегрируя так же, как для случая фильтрации жидкости, и пренебрегая членами, содержащими r_c^2, получим для газа

$$\tilde{p} = p_к \left[1 - \frac{1 - p_c^2/p_к^2}{4\ln(R_к/r_c)} \right]. \tag{3.58}$$

Найдем закон движения частицы жидкости вдоль траектории. В формулу (3.14) подставляем $ds = -dr$, скорость фильтрации из (3.49) и интеграл берем в пределах от $r = r_0$, где частица находится в начальный момент времени, до текущего значения r:

$$t = m \int_{r_0}^{r} \frac{(-dr)\eta \ln(R_к/r_c) r}{k(p_к - p_c)} = \frac{m\eta \ln(R_к/r_c)}{k(p_к - p_c)} \int_{r}^{r_0} r dr =$$

$$= \frac{m\eta \ln(R_к/r_c)(r_0^2 - r^2)}{2k(p_к - p_c)} = \frac{\pi h m}{Q}(r_0^2 - r^2). \tag{3.59}$$

Время движения частицы жидкости от контура питания ($r = R_к$) до забоя скважины ($r = r_c$)

$$T = \frac{m\eta \ln(R_к/r_c)(R_к^2 - r_c^2)}{2k(p_к - p_c)}. \tag{3.60}$$

Рассматривая фильтрацию газа, выведем только приближенную формулу для времени продвижения частицы до скважины. Подставив в (3.14) выражение (3.54), и интегрируя от r_c до $R_к$, получим:

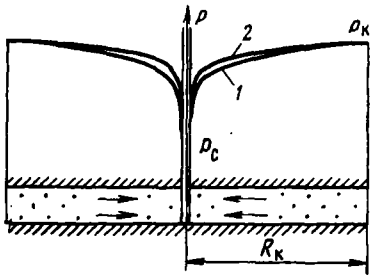


Рис. 3.8. Кривые распределения давления в плоскорадиальном потоке:
1 – для жидкости; *2* – для газа

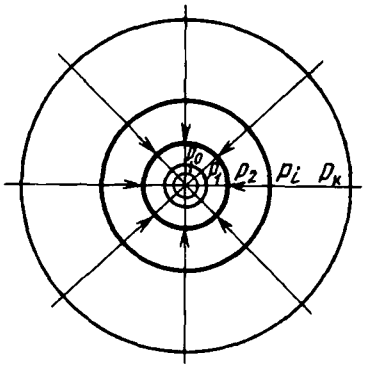


Рис. 3.9. Гидродинамическое поле плоскорадиального фильтрационного потока

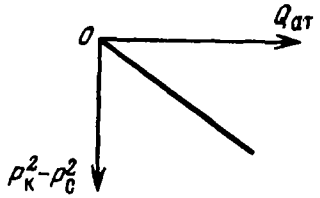


Рис. 3.10. Индикаторная линия для потока несжимаемой жидкости по закону Дарси

$$T = m\int_{rc}^{Rк}\frac{2\eta\ln(R_к/r_c)\,p(r)\,r}{k(p_к^2-p_c^2)}dr =$$

$$= m\frac{2\eta\ln(R_к/r_c)}{k(p_к^2-p_c^2)}\int_{rc}^{Rк}\sqrt{p_к^2-\frac{p_к^2-p_c^2}{\ln(R_к/r_c)}\ln(R_к/r)}\,rdr.$$

Так как под интегралом то же выражение, что при вычислении

средневзвешенного давления для газа (см. формулу (3.57)), то время T легко записывается через $\tilde{p}$:

$$T = \frac{m\eta \ln(R_к/r_с)(R_к^2 - r_с^2)}{k(p_к^2 - p_с^2)}\tilde{p}. \tag{3.61}$$

Формулы (3.56)–(3.61) тоже приведены в табл. 3.2.

Проанализируем полученные соотношения для плоскорадиальной фильтрации.

Для несжимаемой жидкости давление меняется вдоль координаты r по логарифмическому закону (рис. 3.8, кривая *1*). Вращение кривой $p(r)$ в пространстве вокруг оси скважины образует поверхность, называемую воронкой депрессии. В точке $r = R_к$ – на контуре питания – кривая не касается горизонтальной линии, а пересекает ее под некоторым углом. Воронка депрессии вследствие логарифмического закона распределения давления имеет большую кривизну вблизи скважины. Следовательно, основная часть депрессии на пласт $(p_к - p_с)$ сосредоточена в призабойной зоне скважины, параметры которой сильно влияют на дебит скважины.

Из формулы (3.46) следует, что давление одинаково в тех точках пласта, в которых $r = \text{const}$ или, в декартовых координатах $x^2 + y^2 = r^2 = \text{const}$. Это означает, что изобарами (линиями равного давления) являются окружности, концентричные оси скважины (рис. 3.9). Траектории частиц – радиальные прямые – вместе с изобарами образуют фильтрационное поле течения к скважине. Семейства линий тока (траекторий) и изобар всегда ортогональны друг другу.

Сравнение кривых распределения давления в круговом пласте для несжимаемой жидкости и газа (формулы (3.46) и (3.50)) при одинаковых граничных условиях показывает, что в газовом потоке имеет место более резкое падение давления вблизи скважины и весьма малое вдали от нее, так что кривая $p(r)$ для газа располагается выше, чем для жидкости (см. рис. 3.8, кривая *2*).

Формулу (3.48), определяющую дебит скважины при притоке к ней несжимаемой жидкости, называют формулой Дюпюи, по имени ее автора – французского гидравлика XIX в. Из формул (3.45) и (3.48) следует, что дебит прямо пропорционален перепаду давления $\Delta p = p_к - p_с$. Зависимость дебита от перепада давления $Q = f(\Delta p)$ называется индикаторной линией. В потоке жидкости по закону Дарси индикаторная линия – прямая (рис. 3.10). Отметим попутно, что вид индикаторной линии не зависит от геометрии потока и определяется только законом фильтрации. Отношение массового дебита скважины Q_m к перепаду давления Δp называется коэффициентом продуктивности скважины K. Из (3.45) следует, что для жидкости

$$K = \frac{Q_m}{\Delta p} = \frac{2\pi k h \rho_0}{\eta \ln(R_к/r_с)}. \tag{3.62}$$

На практике коэффициент продуктивности определяется в результате исследования скважины при установившихся отборах.

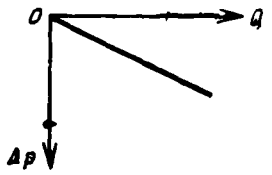


Рис. 3.11. Индикаторная линия при фильтрации газа по закону Дарси

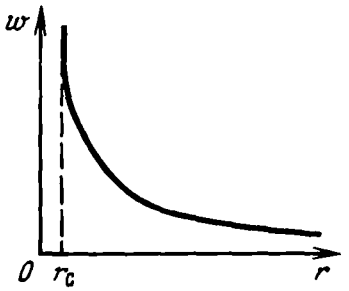


Рис. 3.12. График зависимости скорости фильтрации жидкости в плоскорадиальном потоке от радиуса

При фильтрации газа массовый и объемный приведенный дебиты (формулы (3.50) и (3.55)) прямо пропорциональны разности квадратов давления $p_к^2 - p_c^2$, индикаторная линия строится в координатах $Q_{ат}$ и $p_к^2 - p_c^2$ и имеет прямолинейный характер (рис. 3.11).

Важной характерной особенностью формул, определяющих дебит жидкости и газа, является слабая зависимость дебита от радиуса контура питания $R_к$ и от радиуса скважины r_c, так как эти радиусы входят в формулы под знаком логарифма.

Массовая и объемная скорости фильтрации для жидкости (формулы (3.47) и (3.49)) возрастают по мере приближения к скважине по гиперболическому закону (рис. 3.12), такой же закон справедлив для массовой скорости фильтрации газа (3.52). Объемная же скорость фильтрации газа возрастает вблизи скважины еще более резко, так как в знаменателе формулы (4.54) появляется давление $p(r)$, которое тоже уменьшается вблизи скважины.

Средневзвешенное давление имеет особое значение для расчетов, связанных с фильтрацией газа, так как оно определяет запасы газа в пласте. Если по формуле (3.58) провести расчеты для различных значений $p_к$, p_c, $R_к$, r_c, то можно убедиться, что средневзвешенное пластовое давление газа в круговом пласте $\tilde{p}$ близко к контурному: $\tilde{p} \approx p_к$. Физически это объясняется значительной крутизной воронки депрессии при притоке газа к скважине. Средневзвешенное давление используется для приближенного расчета гидродинамических характеристик; замена его контурным значительно упрощает расчеты.

3.3. Радиально-сферический фильтрационный поток несжимаемой жидкости и совершенного газа

Таблица 3.3

Расчетные формулы для радиально-сферического потока несжимаемой жидкости и совершенного газа

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
1. Функция Лейбензона	$\mathscr{Я} = \rho_0 p + C$	$\mathscr{Я} = \rho_{ат} p^2/(2p_{ат}) + C$
2. Распределение давления $p(r)$, $r_c \leqslant r \leqslant R_к$	$p(r) = p_к - (p_к - p_c) r_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_к}\right)$ (3.63)	$p(r) = \sqrt{p_к^2 - (p_к^2 - p_c^2) r_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_к}\right)}$ (3.68)
3. Массовый расход Q_m	$Q_m = 2\pi r_c \frac{k}{\eta} \rho_0 (p_к - p_c) = \text{const}$ (3.64)	$Q_m = \pi r_c \frac{k}{\eta} \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} (p_к^2 - p_c^2) = \text{const}$ (3.69)
4. Массовая скорость фильтрации ρw	$\rho_0 w = \frac{k}{\eta} \rho_0 (p_к - p_c) \frac{r_c}{r^2}$ (3.65)	$\rho w = \frac{k}{\eta} \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} (p_к^2 - p_c^2) \frac{r_c}{2r^2}$ (3.70)
5. Объемный расход Q	$Q = 2\pi r_c \frac{k}{\eta} (p_к - p_c) = \text{const}$ (3.66)	$Q = \pi r_c \frac{k}{\eta} \frac{(p_к^2 - p_c^2)}{p(r)}$ (3.71)
6. Объемная скорость фильтрации w	$w = \frac{k}{\eta} (p_к - p_c) \frac{r_c}{r^2}$ (3.67)	$w = \frac{k}{\eta} (p_к^2 - p_c^2) \frac{r_c}{2r^2 p(r)}$ (3.72)
7. Время движения частиц t	$t = \frac{m\eta (r_0^3 - r^3)}{3k (p_к - p_c) r_c}$ (3.73)	
8. Время движения частицы от контура до забоя (время полного отбора)	$T = \frac{m\eta R_к^3}{3k (p_к - p_c) r_c}$ (3.74)	$T = \frac{2}{3} \frac{m\eta R_к^2 \tilde{p}}{k (p_к^2 - p_c^2)}$, где $\tilde{p} \approx p_к$ (3.75)

Для определения основных характеристик используем формулы (3.21), (3.22), (3.23). Подставив, как и в предыдущих случаях, выражения для функции Лейбензона (3.24) и (3.25) для жидкости и газа соответственно, получим основные формулы, которые сведены в табл. 3.3.

Как следует из формулы (3.63), давление в любой точке пласта, в котором происходит радиально-сферическая фильтрация жидкости, $p(r)$ обратно пропорционально координате этой точки. Значит, $p(r)$ – гиперболическая кривая, причем очень крутая вблизи значения $r = r_c$. Семейством изобар являются концентрические полусферы $r = \text{const}$.

Надо учесть, что под давлением в формуле (3.63) понимается приведенное давление, отсчитываемое, например, от кровли пласта; чтобы найти истинное давление в каждой точке, надо к приведенному давлению прибавить выражение $\rho_0 g z$, где z – глубина точки пласта, отсчитываемая от кровли.

Для газа кривая $p(r)$ (формула (3.68)) будет более крутой вблизи забоя, чем для жидкости.

Скорость фильтрации для жидкости обратно пропорциональна r^2. Если построить для радиально-сферического потока жидкости график зависимости $w(r)$, то крутизна кривой у стенки скважины при малых значениях r будет еще больше, чем в плоскорадиальном потоке. То же относится к газу, так как в формуле (3.72) в знаменателе добавляется значение $p(r)$.

Средневзвешенное давление практически совпадает с контурным $\tilde{p} \approx p_к$, поэтому его расчет не представляет особого интереса и не приводится.

3.4. Плоскорадиальный фильтрационный поток реального газа по закону Дарси

Если пластовое давление выше 10 МПа и депрессия не слишком мала ($p_c/p_к \leqslant 0{,}9$), то уравнение состояния природного газа значительно отклоняется от уравнения Клапейрона и его плотность определяется по формуле (2.34). Кроме того, для этих условий нужно учитывать зависимость вязкости газа от давления. Эта зависимость определяется по формулам (2.37), (2.38) или по графикам, приведенным в [16], [25]. Проницаемость будем считать постоянной и функцию Лейбензона примем по формуле (2.48):

$$\mathscr{P} = \int \frac{k\rho(p)}{\eta(p)} dp + C = \frac{k\rho_{ат}}{p_{ат}} \int \frac{p dp}{\eta(p) z(p)} + C. \tag{3.76}$$

Найдем дебит скважины при плоскорадиальной фильтрации реального газа. Из формулы (3.18) имеем формулу для массового дебита, если k/η входят в функцию Лейбензона, в виде

$$Q_m = 2\pi h \frac{\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c}{\ln(R_к/r_c)}. \tag{3.77}$$

Подставив (3.76) в (3.77), получим:

$$Q_m = \frac{2\pi hk\rho_{ат}}{p_{ат}\ln(R_к/r_с)}\int\limits_{pc}^{pк}\frac{pdp}{\eta(p)z(p)}. \tag{3.78}$$

Перейдем к дебиту, приведенному к атмосферному давлению:

$$Q_{ат} = \frac{2\pi kh}{p_{ат}\ln(R_к/r_с)}\int\limits_{pc}^{pк}\frac{pdp}{\eta(p)z(p)}. \tag{3.79}$$

Можно предложить несколько способов вычисления интеграла в формуле (3.79); наиболее употребляем следующий: по графикам зависимости $z(p)$ и $\eta(p)$ определяются значения $z(p_с) = z_с$, $z(p_к) = z_к$, $\eta(p_с) = \eta_с$, $\eta(p_к) = \eta_к$. Переменные η и z под знаком интеграла заменяются постоянными, равными

$$\tilde{z} = (z_с + z_к)/2, \qquad \tilde{\eta} = (\eta_с + \eta_к)/2.$$

Тогда интеграл в формуле (3.79) вычисляется, и формула принимает следующий вид:

$$Q_{ат} = \frac{2\pi kh}{p_{ат}\tilde{z}\tilde{\eta}\ln(R_к/r_с)}\int\limits_{pc}^{pк} pdp =$$

$$= \frac{\pi kh(p_к^2 - p_с^2)}{p_{ат}\tilde{z}\tilde{\eta}\ln(R_к/r_с)}. \tag{3.80}$$

Выражение (3.80), определяющее дебит реального газа, отличается от выражения (3.55) для совершенного газа множителем $\tilde{z}$ в знаменателе и среднепластовым значением вязкости $\tilde{\eta}$.

Можно вычислить приведенный дебит по формуле (3.79), подставляя под интеграл эмпирические выражения (2.37) и (2.36) для коэффициентов вязкости и сверхсжимаемости и проводя интегрирование. Учет отклонений свойств реального газа от законов совершенного газа приводит к уточнению дебита до 30%.

§ 4. ПЛОСКОРАДИАЛЬНЫЙ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНАХ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим способы определения основных характеристик потока при плоскорадиальном движении жидкости и газа с большими скоростями, когда причиной отклонения от закона Дарси становятся значительные инерционные составляющие общего фильтрационного сопротивления.

4.1. Фильтрация по степенному закону

В условиях плоскорадиального движения он имеет вид

$$w = \frac{Q}{\omega} = c\left(\frac{dp}{dr}\right)^{1/n}, \quad 1 < n \leqslant 2, \quad \omega = 2\pi rh, \tag{3.81}$$

где c и n–константы, определяемые из опыта или по результатам исследования скважин.

Найдем из (3.81) выражение для массового расхода:

$$Q_m = w\rho\omega = 2\pi rhc\rho(p)\left(\frac{dp}{dr}\right)^{1/n}.$$

Отсюда

$$\frac{Q_m}{2\pi hc} = r\rho(p)\left(\frac{dp}{dr}\right)^{1/n}.$$

Возведем правую и левую часть последнего равенства в степень и обозначим

$$(Q_m/(2\pi hc))^n = A = \text{const},$$

тогда

$$A = r^n\rho^n(p)\frac{dp}{dr}. \tag{3.82}$$

Введем функцию давления следующим образом:

$$\mathscr{P}_1 = \int \rho^n(p)\,dp + C_1, \tag{3.83}$$

так что

$$d\mathscr{P}_1 = \rho^n(p)\,dp. \tag{3.84}$$

Разделив в (3.82) переменные и заменив $\rho^n dp$ через $d\mathscr{P}_1$ по формуле (3.84), получим:

$$d\mathscr{P}_1 = A\frac{dr}{r^n}. \tag{3.85}$$

После интегрирования от забоя ($r = r_c$, $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_{1c}$) до контура питания ($r = R_к$, $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_{1к}$) будем иметь:

$$\mathscr{P}_{1к} - \mathscr{P}_{1c} = A\int_{r_c}^{R_к}\frac{dr}{r^n} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{n}-1}\left(\frac{1}{r_c^{n-1}} - \frac{1}{R_к^{n-1}}\right) \approx \frac{A}{(n-1)r_c^{n-1}}. \tag{3.86}$$

Окончательно

$$Q_m = 2\pi hcr_c\sqrt[n]{\left[(n-1)(\mathscr{P}_{1к} - \mathscr{P}_{1c})\right]^{1/n}}. \tag{3.87}$$

Проинтегрируем (3.85) от произвольной точки $(r, \mathscr{P}_1)$ до контура питания $(R_к, \mathscr{P}_{1к})$:

$$\mathscr{P}_{1к} - \mathscr{P}_1 = \frac{A}{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_к^{n-1}}\right) \tag{3.88}$$

и из (3.88) и (3.86) исключим A, тогда

$$\mathscr{P}_1(r) = \mathscr{P}_{1к} - (\mathscr{P}_{1к} - \mathscr{P}_{1c}) r_c^{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_к^{n-1}}\right), \quad r_c \leqslant r \leqslant R_к. \tag{3.89}$$

Функция, определенная по формуле (3.83), имеет следующий вид: для несжимаемой жидкости

$$\mathscr{P}_1 = \rho_0^n p + C; \tag{3.90}$$

для совершенного газа

$$\mathscr{P}_1 = \int\left(\frac{\rho_{ат} p}{p_{ат}}\right)^n dp + C_1 = \left(\frac{\rho_{ат}}{p_{ат}}\right)^n \frac{p^{n+1}}{n+1} + C_1. \tag{3.91}$$

Подставив (3.90) и (3.91) в (3.87) и (3.89), получим формулы для расхода и распределения давления для жидкости и совершенного газа соответственно, внесенные в табл. 3.4. Там же приведены формулы для $p(r)$ и Q_m в случае закона Краснопольского ($n = 2$).

Как следует из формулы (3.92) (см. табл. 3.4) кривая распределения давления для несжимаемой жидкости имеет форму гиперболы степени $n - 1$, т. е. воронка депрессии будет гиперболоидом вращения. Крутизна воронки депрессии у стенок скважины больше, чем у логарифмической кривой (3.46). Кривая $p(r)$ для газа (формула (3.93)) располагается еще выше, чем для жидкости (при тех же значениях $p_к$ и p_c). Расчеты показывают, что для любых значений p_c, $p_к$, r_c, $R_к$ на расстоянии от $r = 1$ м до стенки скважины теряется более 80% от общей депрессии $(p_к - p_c)$.

Массовый расход для жидкости (формула (3.94)) пропорционален депрессии в степени $1/n$, поэтому индикаторная линия $Q = f(\Delta p)$ при $1 < n < 2$ будет иметь вид выпуклой к оси дебитов степенной кривой с дробным показателем меньшем 2. В случае фильтрации по закону Краснопольского, как показывает формула (3.101), индикаторная линия является параболой второго порядка. На рис. 3.13 приведены индикаторные линии для течения несжимаемой жидкости при линейном законе фильтрации ($n = 1$) и при нелинейных законах: $1 < n < 2$ и $n = 2$. Все сказанное относится также к индикаторным линиям для газа, если строить их в координатах Q_m (или $Q_{ат}$) и $p_к^{n+1} - p_c^{n+1}$. Отметим, что и для жидкости, и для газа величина расхода пропорциональна радиусу скважины в степени $(n-1)/n$ (для закона Краснопольского $\sqrt{r_c}$), т. е. эта зависимость гораздо более сильная, чем в случае выполнения закона Дарси.

Скорость фильтрации вдоль линии тока изменяется при нелинейном

Таблица 3.4

Расчетные формулы для плоскорадиального течения несжимаемой жидкости и газа по степенному закону

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
1. Функция, определяемая по формуле (3.83) $\mathscr{R}_1$	$\mathscr{R}_1 = \rho_0^n p + C$ (3.90)	$\mathscr{R}_1 = \left(\frac{\rho_{ат}}{p_{ат}}\right)^n \frac{p^{n+1}}{n+1} + C_1$ (3.91)
2. Распределение давления $p(r)$, $r_c \leqslant r \leqslant R_к$	$p(r) = p_к - (p_к - p_c) \times$ $\times r_c^{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_к^{n-1}}\right)$ (3.92)	$p(r) = \left[p_к^{n+1} + (p_к^{n+1} - p_c^{n+1}) \times \right.$ $\left. \times r_c^{n-1} \times \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_к^{n-1}}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$ (3.93)
3. Массовый расход Q_m	$Q_m = 2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}} \rho_0 [(n-1) \times$ $\times (p_к - p_c)]^{\frac{1}{n}} = \text{const}$ (3.94)	$Q_m = 2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}} \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}}\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \times \right.$ $\left. \times \left(p_к^{n+1} - p_c^{n+1}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \text{const}$ (3.95) $Q_{ат} = \frac{2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{p_{ат}}\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \times \right.$ $\left. \left(p_к^{n+1} - p_c^{n+1}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \text{const}$ (3.96)
4. Скорость фильтрации w	$w = \frac{c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{r}[(n-1)(p_к - p_c)]^{\frac{1}{n}}$ (3.97)	$w = \frac{c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{r p(r)}\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \times \right.$ $\left. \times \left(p_к^{n+1} - p_c^{n+1}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$ (3.98)
5. Распределение давления $p(r)$, $r_c \leqslant r \leqslant R_к$	$p = p_к - (p_к - p_c) r_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_к}\right)$ (3.99) ($n = 2$, модель Краснопольского)	$p = \left[p_к^3 - (p_к^3 - p_c^3) r_c \left(\frac{1}{r} - \right.\right.$ $\left.\left. - \frac{1}{R_к}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$ (3.100)
Массовый расход Q_m	$Q_m = 2\pi h c \rho_0 \sqrt{(p_к - p_c) r_c}$ (3.101)	$Q_m = 2\pi h c \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} \sqrt{\frac{1}{3}(p_к^3 - p_c^3) r_c}$ (3.102)

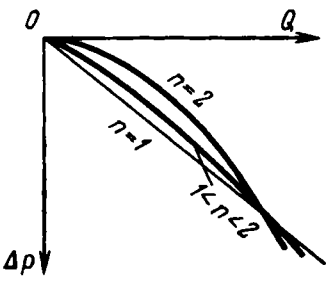


Рис. 3.13. Индикаторные линии, соответствующие различным законам фильтрации жидкости

законе так же, как при линейном, для жидкости w обратно пропорциональна r, для газа – обратно пропорциональна $rp(r)$.

4.2. Фильтрация по двучленному закону

Двучленный закон для плоскорадиальной фильтрации имеет вид

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\eta}{k} w + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \rho w^2. \tag{3.103}$$

Выразим скорость фильтрации через массовый расход

$$w = Q_m/(2\pi r h \rho)$$

и подставим в формулу (3.103):

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\eta}{k} \frac{Q_m}{2\pi h r \rho} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \frac{Q_m^2}{4\pi^2 r^2 h^2 \rho}.$$

Разделив переменные и введя функцию Лейбензона (2.55) $\mathscr{P} = \int \rho dp + C$, получим:

$$d\mathscr{P} = \frac{\eta}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{dr}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \frac{Q_m^2}{4\pi^2 h^2} \frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от r до $R_к$, от p до $p_к$ и от r_c до $R_к$, от p_c до $p_к$, найдем соответственно:

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_к - \frac{Q_m \eta}{2\pi k h} ln \frac{R_к}{r} - \frac{\beta Q_m^2}{\sqrt{k}(2\pi h)^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_к} \right); \tag{3.104}$$

$$\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c = \frac{Q_m \eta}{2\pi k h} \ln \frac{R_к}{r_c} + \frac{\beta Q_m^2}{\sqrt{k}(2\pi h)^2 r_c}. \tag{3.105}$$

Переходя от функции Лейбензона к давлению по формулам (3.24) для несжимаемой жидкости и (3.25) для газа, найдем из (3.104) и (3.105) распределение давления и расход флюида (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Расчетные формулы для плоскорадиального течения несжимаемой жидкости и газа по двучленному закону

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
1. Функция Лейбензона	$\mathscr{R} = \rho_0 p + C$	$\mathscr{R} = \rho_{ат} p^2/(2p_{ат}) + C$
2. Распределение давления $p(r)$, $r_c \leqslant r \leqslant R_к$	$p = p_к - \frac{Q\eta}{2\pi kh}\ln\frac{R_к}{r} - \frac{\beta\rho_0 Q^2}{\sqrt{k}(2\pi h)^2}\times\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_к}\right)$ (3.106)	$p = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат}p_{ат}\eta}{\pi kh}\ln\frac{R_к}{r} - \frac{\beta\rho_{ат}p_{ат}Q_{ат}^2}{\sqrt{k}2\pi^2h^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_к}\right)}$ (3.107)
3. Уравнение притока к скважине	$p_к - p_c = \frac{Q\eta}{2\pi kh}\ln\frac{R_к}{r_c} + \frac{\beta\rho_0 Q^2}{\sqrt{k}(2\pi h)^2 r_c}$ (3.108)	$p_к^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат}p_{ат}\eta}{\pi kh}\ln\frac{R_к}{r_c} + \frac{\beta\rho_{ат}p_{ат}Q_{ат}^2}{\sqrt{k}2\pi^2h^2 r_c}$ (3.109)

Из формул (3.108) и (3.109) видно, что индикаторная линия, построенная в координатах $Q - \Delta p$ для жидкости и $Q_{ат} - (p_к^2 - p_c^2)$ для газа, является параболой (рис. 3.14, 3.15). Запишем уравнения притока к скважине:

для несжимаемой жидкости

$$p_к - p_c = AQ + BQ^2; \tag{3.110}$$

для газа

$$p_к^2 - p_c^2 = A_1 Q_{ат} + B_1 Q_{ат}^2, \tag{3.111}$$

где

$$A = \frac{\eta}{2\pi kh}\ln\frac{R_к}{r_c}, \quad B = \frac{\beta\rho_0}{\sqrt{k}(2\pi h)^2 r_c}; \tag{3.112}$$

$$A_1 = \frac{p_{ат}\eta}{\pi kh}\ln\frac{R_к}{r_c}, \quad B_1 = \frac{\beta\rho_{ат}p_{ат}}{\sqrt{k}2\pi^2h^2 r_c}. \tag{3.113}$$

Здесь A, B, A_1, B_1 – коэффициенты фильтрационных сопротивлений, постоянные для данной скважины. Они определяются опытным путем по данным исследования скважины при установившихся режимах.

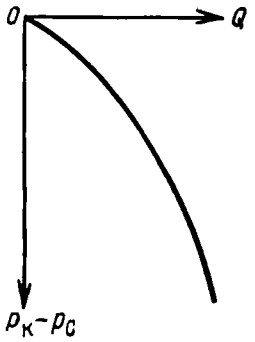


Рис. 3.14. Индикаторная линия при фильтрации жидкости по двучленному закону

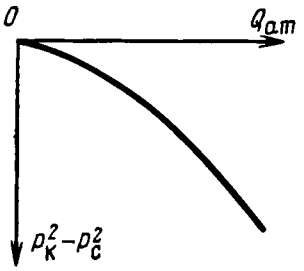


Рис. 3.15. Индикаторная линия при фильтрации газа по двучленному закону

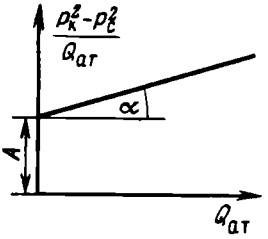


Рис. 3.16. График зависимости $(p_к^2 - p_с^2)/Q_{ат}$ от $Q_{ат}$ при фильтрации газа по двучленному закону

Скважины исследуются на пяти-шести режимах; на каждом режиме измеряется дебит и определяется забойное давление. Затем скважину закрывают, и давление на забое остановленной скважины принимают за контурное давление $p_к$. Для интерпретации результатов исследований скважин уравнения (3.110) и (3.111) делением на Q и $Q_{ат}$ соответственно приводят к уравнению прямой:

$$\frac{p_к - p_с}{Q} = A + BQ; \tag{3.114}$$

$$\frac{p_к^2 - p_с^2}{Q_{ат}} = A_1 + B_1 Q_{ат}. \tag{3.115}$$

Графики в координатах $Q-(p_к-p_с)/Q$ и $Q_{ат}-(p_к^2-p_с^2)/Q_{ат}$ соответственно представляют собой прямые линии, для которых $A(A_1)$ – отрезок, отсекаемый на оси ординат, $B(B_1)$ – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс (рис. 3.16).

Уравнения притока (3.110) и (3.111) с экспериментально определенными коэффициентами широко используются в расчетах при проектировании разработки месторождений. Кроме того, по значению $A(A_1)$, найденному в результате исследования скважины, можно определить коллекторские свойства пласта, например коэффициент гидропроводности:

для нефтяной скважины

$$\frac{kh}{\eta}=\frac{1}{2\pi A}\ln\frac{R_к}{r_с};$$

для газовой скважины

$$\frac{kh}{\eta}=\frac{p_{ат}}{\pi A_1}\ln\frac{R_к}{r_с}.$$

Уравнение притока реального газа к скважине по двучленному закону фильтрации имеет вид

$$p_к^2-p_с^2=\frac{\tilde{\eta}\tilde{z}p_{ат}}{\pi kh}\ln\frac{R_к}{r_с}Q_{ат}+\frac{\rho_{ат}\tilde{z}p_{ат}\beta}{2\pi^2h^2r_с\sqrt{k}}Q_{ат}^2. \qquad (3.116)$$

В заключение этого параграфа отметим, что в реальных условиях нельзя считать, что во всем пласте – от стенки скважины до контура питания – справедлив единый нелинейный закон фильтрации.

При значительных дебитах закон Дарси нарушается в некоторой области вблизи забоя скважины, в то время как в остальной части пласта по-прежнему соблюдается линейный закон. При увеличении дебита область, в которой нарушен закон Дарси, расширяется. В этих случаях удобно использовать двучленный закон фильтрации, а не степенной (подробнее об этом в гл. 4, § 7).

§ 5. ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ ПО ЗАКОНУ ДАРСИ

В природных условиях продуктивные нефтегазосодержащие пласты редко бывают однородными. Если проницаемость и пористость пласта неодинаковы в различных точках, то пласт называется неоднородным.

Однако часто изменение проницаемости по пласту носит столь хаотичный характер, что значительные области пласта можно считать в среднем однородно проницаемыми. Характеристики фильтрационных потоков в таких пластах с большой точностью отвечают характерис-

тикам потоков, установленных в предыдущих параграфах для однородных пластов.

Но нередко встречаются такие пласты, значительные области которых сильно отличаются друг от друга по фильтрационным характеристикам. Это, так называемые, макронеоднородные пласты, параметры которых существенно влияют на характеристики фильтрационных потоков. При расчетах элементарных фильтрационных потоков в макронеоднородных пластах также удобно прибегнуть к схематизации геометрии движения и найти такие эквивалентные значения коэффициентов фильтрационного сопротивления, применив которые, можно использовать полученные в предыдущем параграфе формулы для однородного пласта.

В пластах–коллекторах нефти и газа выделяют следующие основные виды макронеоднородности.

1. Слоистая неоднородность, когда пласт разделяется по толщине на несколько слоев, в каждом из которых проницаемость в среднем постоянна, но отлична от проницаемости соседних слоев. Такие пласты называют также неоднородными по толщине. Границы раздела между слоями с различными проницаемостями считают обычно плоскими. Таким образом, в модели слоистой пористой среды предполагается, что проницаемость меняется только по толщине пласта и является кусочно-постоянной функцией вертикальной координаты. При этом можно считать, что пропластки разделены непроницаемыми границами (случай гидравлически изолированных слоев), либо учитывать перетоки между слоями с различными проницаемостями (случай гидродинамически сообщающихся пропластков).

В первом случае возможен расчет фильтрационных характеристик по одномерным моделям течения. Во втором случае точный учет перетоков флюида между пропластками требует, вообще говоря, решения двумерных задач фильтрации.

2. Зональная неоднородность, при которой пласт по площади состоит из нескольких зон (областей пласта) различной проницаемости. В пределах одной и той же зоны проницаемость в среднем одинакова, но на границе двух зон скачкообразно изменяется. Здесь, таким образом, имеет место неоднородность по площади пласта.

3. Неоднородные пласты, в которых проницаемость является известной непрерывной или случайной функцией координат точек области фильтрации.

Таким образом, в результате схематизации фильтрационных потоков можно выделить:

1) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в слоисто-неоднородном пласте;

2) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в зонально-неоднородном пласте;

3) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальнй и радиально-сферический потоки в пластах, где проницаемость является непрерывной или случайной функцией координат точек области фильтрации.

При этом для полноты изучения, очевидно, необходимо рассматривать фильтрацию в этих условиях различных флюидов: несжимаемой и сжимаемой жидкости и газа, а также неньютоновской жидкости по линейному (закон Дарси) и нелинейному законам фильтрации. Однако рамки учебника не позволяют обеспечить столь детальное рассмотрение, поэтому ограничимся изучением наиболее характерных случаев, указав, что методологический подход при этом остается единым.

Рассмотрим одномерные потоки несжимаемой жидкости и газа в неоднородных пластах по закону Дарси.

5.1. Прямолинейно-параллельный поток в неоднородных пластах

А. Слоисто-неоднородный пласт.

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщины h и ширины B состоит из n пропластков толщиной $h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots, h_n$ с проницаемостью $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$ и пористостью $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ (рис. 3.17). Пласт насыщен жидкостью или газом. Если на контуре питания пласта поддерживать постоянное давление $p_к$, а на другой его границе – галерее, отстоящей от контура питания на расстоянии L, поддерживать также постоянное давление $p_г$ (при этом $p_г < p_к$), то в каждом пропластке при отсутствии перетоков между ними будет иметь место установившийся прямолинейно-параллельный поток. Тогда для расчета характеристик течения можно использовать формулы, полученные в § 3 данной главы.

В каждом пропластке будут выполняться соотношения (3.15), (3.16), (3.17). Распределение функции Лейбензона, а следовательно и распределение давления во всех пропластках, будет одинаково: для жидкости – линейное по формуле (3.27), для газа – параболическое – по формуле (3.32). Скорость фильтрации в каждом пропластке будет своя, соответствующая проницаемости пропластка k_i. Массовый расход всего пласта можно вычислить как сумму расходов в отдельных пропластках.

$$Q_m = \sum Q_{mi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta L} Bh_i = \frac{B(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta L} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i.$$

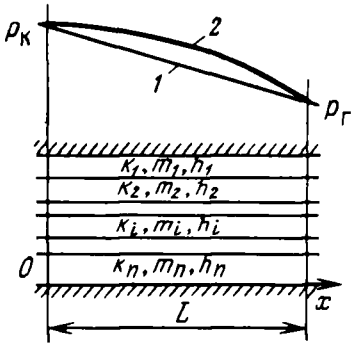


Рис. 3.17. Прямолинейно-параллельный поток в слоисто-неоднородном пласте:
1 – $p(x)$ для жидкости; 2 – $p(x)$ – для газа

Таблица 3.6

Расчетные формулы для прямолинейно-параллельного потока несжимаемой жидкости и совершенного газа в неоднородных пластах

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
	Слоисто-неоднородный пласт	
1. Распределение давления в пропластках	$p(x) = p_к - \frac{p_к - p_г}{L}x,$ $0 \leqslant x \leqslant L$	$p(x) = \sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_г^2}{L}x},$ $0 \leqslant x \leqslant L$
2. Массовый расход i-го пропластка	$Q_{mi} = \frac{k_i}{\eta}\rho_0 \frac{p_к - p_г}{L} Bh_i$	$Q_{mi} = \frac{k_i \rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2) Bh_i}{\eta 2 p_{ат} L}$
3. Массовый расход пласта	$Q_m = \frac{\rho_0 B(p_к - p_г)}{\eta L}\sum_{i=1}^{n} k_i h_i$	$Q_m = \frac{\rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2) B}{\eta 2 p_{ат} L}\sum_{i=1}^{n} k_i h_i$
4. Скорость фильтрации в пропластке	$w_i = \frac{k_i(p_к - p_г)}{\eta L}$	$w_i = \frac{k_i(p_к^2 - p_г^2)}{\eta^2 L p(x)}$
5. Время движения частиц в i-м пропластке	$t_i = \frac{m_i \eta x L}{k_i(p_к - p_г)}$	$t_i = \frac{4 m_i \eta L^2 [p_к^3 - p^3(x)]}{3 k_i (p_к^2 - p_г^2)^2}$
	Зонально-неоднородный пласт	
1. Распределение давления в i-й зоне	$p_i(x) = p_{i-1} - \frac{p_{i-1} - p_i}{l_i}x,$ $0 \leqslant x \leqslant l_i$	$p_i(x) = \sqrt{p_{i-1}^2 - \frac{p_{i-1}^2 - p_i^2}{l_i}x},$ $0 \leqslant x \leqslant l_i$
2. Массовый расход i-й зоны	$Q_{mi} = \rho_0 \frac{k_i(p_{i-1} - p_i)}{\eta l_i} Bh = \text{const}$	$Q_{mi} = \frac{k_i \rho_{ат}(p_{i-1}^2 - p_i^2)}{\eta 2 p_{ат} l_i} Bh = \text{const}$
3. Массовый расход пласта	$Q_m = \rho_0 \frac{Bh(p_к - p_г)}{\eta \sum_{i=1}^{n} l_i/k_i}$	$Q_m = \frac{Bh\rho_{ат}(p_к^2 - p_г^2)}{\eta 2 p_{ат} \sum_{i=1}^{n} l_i/k_i}$
4. Скорость фильтрации i-й зоны	$w_i = \frac{k_i(p_{i-1} - p_i)}{\eta l_i} = \text{const}$	$w_i = \frac{k_i(p_{i-1}^2 - p_i^2)}{\eta 2 l_i p_i(x)}$
5. Время движения частицы вдоль i-й зоны	$t_i = \frac{m_i \eta x l_i}{k_i(p_{i-1} - p_i)} = \frac{m_i x}{w_i},$ $0 \leqslant x \leqslant l_i$	$t_i = \frac{4 m_i \eta l_i^2 [p_{i-1}^3 - p_i^3(x)]}{3 k_i (p_{i-1}^2 - p_i^2)^2},$ $0 \leqslant x \leqslant l_i$

Для гидродинамических расчетов удобно заменить поток флюида в неоднородном пласте потоком в однородном пласте тех же размеров h, B, L со средней проницаемостью $k_{ср}$, величину которой можно определить из равенства дебитов этих двух потоков, т.е.

$$Q_m = \frac{B(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta L} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i = \frac{k_{ср}(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta L} Bh,$$

откуда

$$k_{ср} = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i / h.$$

Движение частиц жидкости в каждом пропластке будет определяться по формулам (3.41) для жидкости и (3.43) для газа, в которые подставляются значения пористости m_i и проницаемости k_i для соответствующего пропластка. Основные фильтрационные характеристики приведены в табл. 3.6.

Б. Зонально-неоднородный пласт.

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщины h и ширины B состоит из n зон различной проницаемости $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_n$, пористости $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ и длины $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$. На границах пласта поддерживаются постоянные давления $p_к$ и $p_г (p_к > p_г)$ (рис. 3.18). Границы каждой зоны пласта перпендикулярны направлению фильтрационного потока вдоль оси x.

В пласте происходит установившееся прямолинейно-параллельное движение однородного флюида.

Характеристики такого потока в пределах каждой однородной зоны будут рассчитываться по формулам (3.15)–(3.17), (3.26)–(3.44). В соответствии с формулой (3.16) распределение функции Лейбензона в каждой зоне линейное и определяется выражением:

$$\mathscr{P}_i(x) = \mathscr{P}_{i-1} - \frac{\mathscr{P}_{i-1} - \mathscr{P}_i}{l_i} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_i,$$

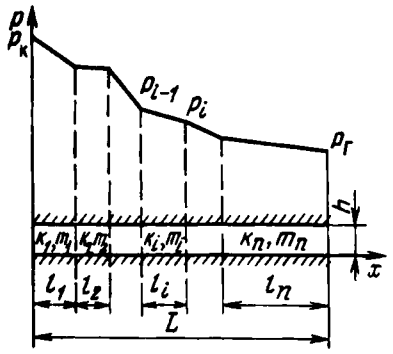


Рис. 3.18. Прямолинейно-параллельный поток в зонально-неоднородном пласте
Показана кривая $p(x)$ для жидкости

где $\mathscr{P}_{i-1}$ и $\mathscr{P}_i$ – функции Лейбензона соответственно в начале и конце i-й зоны, координата x берется только в пределах этой зоны.

Массовый расход вследствие неразрывности потока будет одним и тем же во всех зонах:

$$Q_m = \frac{k_1(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_1)}{\eta l_1} Bh = \ldots, = \frac{k_i(\mathscr{P}_{i-1} - \mathscr{P}_i)}{\eta l_i} Bh = ,\ldots, = \frac{k_n(\mathscr{P}_{n-1} - \mathscr{P}_г)}{\eta l_n} Bh.$$

Применив к последним равенствам правило производных пропорций, получим:

$$Q_m = \frac{Bh}{\eta} \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathscr{P}_{i-1} - \mathscr{P}_i)}{\sum_{i=1}^{n} l_i/k_i} = \frac{Bh}{\eta} \frac{\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г}{\sum_{i=1}^{n} l_i/k_i}.$$

Массовая скорость фильтрации, как и расход, будет также постоянной в любом сечении потока.

Среднее значение проницаемости $k_{ср}$ такого неоднородного пласта можно определить из равенства расходов в неоднородном и эквивалентном однородном пластах:

$$Q_m = \frac{Bh(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г)}{\eta \sum_{i=1}^{n} l_i/k_i} = \frac{k_{ср}(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г) Bh}{\eta L},$$

откуда

$$k_{ср} = L/\left(\sum_{i=1}^{n} l_i/k_i\right), \quad \text{где} \quad L = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

Фильтрационные характеристики приведены в табл. 6.

В. Если установившееся прямолинейное движение флюида происходит в пласте, проницаемость которого вдоль пласта изменяется непрерывно, т. е. $k = k(x)$, то массовый расход такого фильтрационного потока:

$$Q_m = -\frac{k(x)}{\eta} \frac{d\mathscr{P}}{dx} Bh.$$

Разделив переменные и проинтегрировав последнее уравнение по всему пласту, получим:

$$\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_г = \frac{Q_m \eta}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)}.$$

Таким образом, и в этом случае все характеристики течения можно определить, если известен характер функциональной зависимости проницаемости k от координаты x.

5.2. Плоскорадиальный поток в неоднородных пластах

А. Слоисто-неоднородный пласт.

Установившийся плоскорадиальный поток по закону Дарси направлен к гидродинамически совершенной скважине радиусом r_c в слоисто-неоднородном пласте, состоящем из n пропластков с разными коллекторскими свойствами (рис. 3.19). При этом на контуре питания $\bar{R}_к$ и на забое скважины r_c поддерживаются постоянные давления $p_к$ и p_c.

В каждом пропластке при его постоянных толщине h_i и проницаемости k_i будет плоскорадиальное движение, и справедливы формулы (3.18)–(3.20), (3.45)–(3.61).

Логарифмическая кривая распределения функции Лейбензона (3.19) будет общей для всех пропластков. Это означает, что для жидкости в каждом пропластке распределение давления описывается уравнением (3.46), а для газа – уравнением (3.51). Скорость фильтрации, пропорциональная проницаемости k_i, будет в каждом пропластке иметь свое значение.

Массовый дебит потока Q_m можно определить как сумму дебитов в отдельных пропластках Q_{mi}:

$$Q_m = \sum_{i=1}^{n} Q_{mi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi k_i h_i (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} = \frac{2\pi(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i.$$

Среднее значение проницаемости пласта $k_{ср}$ можно определить из равенства дебитов в реальном неоднородном и эквивалентном однородном пластах:

$$Q_m = \frac{2\pi(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} \sum_{i=1}^{n} k_i h_i = \frac{2\pi k_{ср} h (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)},$$

откуда

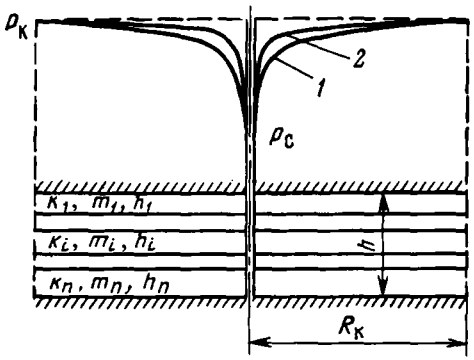


Рис. 3.19. Кривые распределения давления для жидкости (*1*) и для газа (*2*) в плоскорадиальном потоке в слоисто-неоднородном пласте

Таблица 3.7

Расчетные формулы для плоскорадиального потока несжимаемой жидкости и совершенного газа в неоднородных пластах

Характеристика	Модель флюида	
	Несжимаемая жидкость	Совершенный газ
	Слоисто-неоднородный пласт	
1. Распределение давления в пропластках, $r_c \leqslant r \leqslant R_к$	$p(r) = p_к - \dfrac{p_к - p_c}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r)$	$p(r) = \sqrt{p_к^2 - \dfrac{p_к^2 - p_c^2}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r)}$
2. Массовый расход i-го пропластка	$Q_{mi} = \rho_0 \dfrac{2\pi k_i h_i (p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)}$	$Q_{mi} = \dfrac{\pi k_i h_i \rho_{ат} (p_к^2 - p_c^2)}{\eta p_{ат} \ln(R_к/r_c)}$
3. Скорость фильтрации i-го пропластка	$w_i = \dfrac{k_i (p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} \dfrac{1}{r}$	$w_i = \dfrac{k_i (p_к^2 - p_c^2)}{2\eta \ln(R_к/r_c)} \dfrac{1}{rp(r)}$
	Зонально-неоднородный пласт	
1. Распределение давления в i-й зоне, $r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i$	$p_i(r) = p_i - \dfrac{p_i - p_{i-1}}{\ln(r_i/r_{i-1})} \ln(r_i/r)$	$p_i(r) = \sqrt{p_i^2 - \dfrac{p_i^2 - p_{i-1}^2}{\ln(r_i/r_{i-1})} \ln(r_i/r)}$
2. Массовый расход i-й зоны	$Q_m = \rho_0 \dfrac{2\pi k_i h (p_i - p_{i-1})}{\eta \ln(r_i/r_{i-1})}$	$Q_m = \dfrac{\pi k_i h \rho_{ат} (p_i^2 - p_{i-1}^2)}{\eta p_{ат} \ln(r_i/r_{i-1})}$
3. Скорость фильтрации i-й зоны	$w_i = \dfrac{k_i (p_i - p_{i-1})}{\eta \ln(r_i/r_{i-1})} \dfrac{1}{r}$	$w_i = \dfrac{k_i (p_i^2 - p_{i-1}^2)}{2\eta \ln(r_i/r_{i-1})} \dfrac{1}{rp_i(r)}$

$$k_{ср} = \sum_{i=1}^{n} k_i h_i / h,$$

что полностью совпадает с соответствующей формулой для прямолинейно-параллельного потока. Характеристики описанного потока приведены в табл. 3.7.

Б. Зонально-неоднородный пласт

Пусть имеется горизонтальный пласт толщиной h, состоящий из

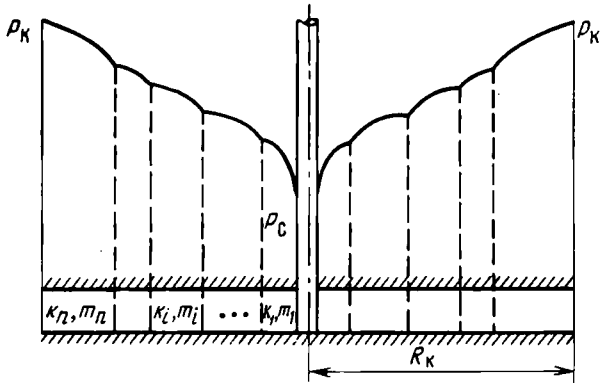


Рис. 3.20. Распределение давления в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте

n кольцеобразных зон с различной проницаемостью k_i и пористостью m_i, при этом граница каждой зоны имеет форму боковой поверхности цилиндра, соосного скважине. На внешней границе n-й зоны, являющейся контуром питания пласта ($r = R_к$), поддерживается постоянное давление $p_к$, на внутренней границе пласта ($r = r_с$), т. е. на забое совершенной скважины, поддерживается постоянное давление $p_с$. В пласте имеет место установившийся плоскорадиальный поток однородного флюида по закону Дарси.

Распределение функции Лейбензона в каждой i-й зоне подчиняется логарифмическому закону (3.19):

$$\mathscr{P}_i(r) = \mathscr{P}_i - \frac{\mathscr{P}_i - \mathscr{P}_{i-1}}{\ln(r_i/r_{i-1})}\ln(r_i/r), \qquad r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

где $\mathscr{P}_i(r)$ – функция Лейбензона в любой точке i-й зоны с координатой r; r_i; r_{i-1} – соответственно внешний и внутренний радиусы i-й зоны ($r_0 = r_с$, $r_n = R_к$); $\mathscr{P}_i$ и $\mathscr{P}_{i-1}$ – значения функции Лейбензона на внешней и внутренней границах i-й зоны соответственно.

Переходя от функции Лейбензона к давлению, найдем, что для несжимаемой жидкости давление в каждой зоне подчинено логарифмическому закону, а для газа – корню квадратному из логарифма радиуса (формулы приведены в табл. 3.7).

На рис. 3.20 приведено распределение давления вдоль линии тока в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте.

Массовый дебит потока будет одним и тем же во всех зонах в силу установившегося движения:

$$Q_м = \frac{2\pi k_1 h(\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_с)}{\eta \ln(r_1/r_с)} = \ldots = \frac{2\pi k_i h(\mathscr{P}_i - \mathscr{P}_{i-1})}{\eta \ln(r_i/r_{i-1})} = \ldots = \frac{2\pi k_n h(\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_{n-1})}{\eta \ln(R_к/r_{n-1})}.$$

Используя свойство производных пропорций, найдем, перенеся k_i в знаменатели и сложив отдельно числители и знаменатели,

$$Q_m = \frac{2\pi h \sum_{i=1}^{n} (\mathscr{P}_i - \mathscr{P}_{i-1})}{\eta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} = \frac{2\pi h (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_с)}{\eta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}.$$

Среднее значение проницаемости зонально-неоднородного пласта можно определить из равенства дебитов в неоднородном и однородном пластах:

$$Q_m = \frac{2\pi h (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_с)}{\eta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} = \frac{2\pi k_{ср} h (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_с)}{\eta \ln (R_к / r_с)},$$

откуда

$$k_{ср} = \ln (R_к / r_с) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \ln (r_i / r_{i-1}) \right),$$

где $r_0 = r_с$, $r_n = R_к$.

В практике разработки нефтяных и газовых месторождений значительный интерес представляет задача о притоке к скважине при наличии вокруг забоя скважины кольцевой зоны с проницаемостью, отличной от проницаемости остальной части пласта, т. е. пласт состоит из двух зон различной проницаемости. Такая задача возникает, например, при торпедировании или кислотной обработке призабойной зоны, при установке гравийного фильтра, при глинизации или парафинизации призабойной зоны, выносе мелких фракций породы из этой зоны и т. д.

Очень важной при этом бывает необходимость установления влияния различия проницаемостей кольцевой призабойной зоны k_1 и остальной части пласта k_2 на продуктивность скважины.

Дебит скважины в таком двухзональном пласте определяется по следующей формуле:

$$Q_m = \frac{2\pi k_2 h (\mathscr{P}_к - \mathscr{P}_с)}{\eta \left[\ln (R_к / r_1) + \frac{k_2}{k_1} \ln (r_1 / r_с) \right]}.$$

Последняя формула совместно с (3.18) позволяют выяснить, как влияет изменение проницаемости призабойной зоны на дебит скважины. Таким обазом, установлено, что при рассмотрении фильтрационных потоков в неоднородных пластах по закону Дарси могут применяться основные расчетные формулы, полученные для однородных пластов. При этом для расчета усредненных характеристик неоднородного пласта следует воспользоваться средними значениями коэффициентов фильтрационного сопротивления, определяемыми в зависимости от геометрии

движения. Это позволяет рассматривать фильтрационный поток в неоднородном пласте как эквивалентный ему поток в однородном пласте. Не рассмотренные здесь случаи радиально-сферического пласта, а также фильтрация в неоднородных пластах по нелинейному закону могут быть изучены студентами самостоятельно.

§ 6. ОДНОМЕРНЫЕ БЕЗНАПОРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ ЖИДКОСТИ

Безнапорное движение жидкости – это такое движение, в котором пьезометрическая поверхность совпадает со свободной поверхностью фильтрующейся жидкости, над которой давление постоянно.

При неподвижном состоянии жидкости ее свободная поверхность горизонтальна, в процессе движения она искривляется, понижаясь вдоль потока.

Безнапорное движение в добыче нефти встречается при шахтной и карьерной разработке нефтяных месторождений. Задачи безнапорного движения интересуют в большей степени гидротехников, например при фильтрации воды через земляные плотины, притоке грунтовой воды к скважинам и колодцам и др. Кроме того, задачи безнапорной фильтрации представляют большой теоретический интерес. Они значительно труднее, чем аналогичные задачи напорного движения. Главная трудность точного решения задач безнапорной фильтрации заключается в том, что неизвестна форма области, занятой грунтовым потоком. В напорной фильтрации форма области потока известна, так как непроницаемые кровля и подошва пласта фиксированы.

В книге П. Я. Полубариновой-Кочиной приведены некоторые точные решения задачи о движении через прямоугольную перемычку и дается подробная библиография по этому вопросу.

Рассмотрим приближенную теорию безнапорного установившегося движения жидкости по закону Дарси, которая известна под названием гидравлической теории Дюпюи–Форхгеймера.

Рассмотрим прямоугольную перемычку (плотину), через которую происходит фильтрация жидкости (рис. 3.21).

Уровень жидкости H_1 называется верхним бьефом, уровень H_2 – нижним бьефом. Свободная поверхность жидкости, фильтрующейся через тело плотины, называется депрессионной (пьезометрической) поверхностью (кривая ABC). Свободная поверхность выходит на правую грань всегда выше нижнего бьефа. Величина BC называется промежутком высачивания.

Гидравлическая теория безнапорного движения основывается на следующих допущениях:

1) горизонтальные компоненты скорости фильтрации распределены равномерно в любом поперечном сечении потока;

2) давление вдоль вертикали распределено по гидростатическому закону, т. е. напор

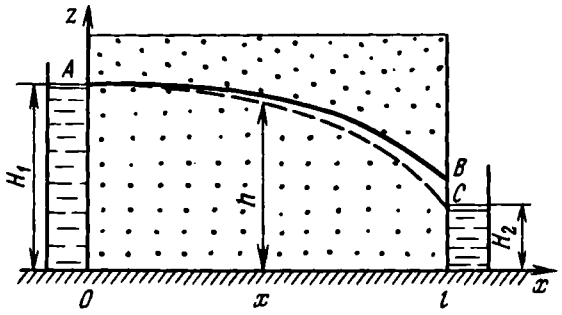


Рис. 3.21. Схема безнапорного течения через прямоугольную перемычку

$$H = z + \frac{p}{\rho g} = H(x, y). \tag{3.117}$$

Таким образом, напор вдоль каждой вертикали предполагается постоянным.

Считая давление на свободной поверхности атмосферным (т. е. избыточное давление равно нулю), из (3.117), получим, что напор равен глубине потока h:

$$H = h.$$

Горизонтальная компонента скорости фильтрации постоянна вдоль вертикали и равна:

$$w_x = -k_\Phi dh/dx,$$

где $k_\Phi = k\rho g/\eta$ – коэффициент фильтрации.

Вертикальная компонента скорости фильтрации равна нулю.

Расход жидкости на единицу ширины потока q, т. е. через прямоугольник высотой h и единичной шириной равен:

$$q = w_x/h \cdot 1 = k_\Phi h dh/dx. \tag{3.118}$$

Из формулы (3.118) найдем уравнение свободной поверхности. Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$qx = -\frac{k_\Phi h^2}{2} + C.$$

Здесь постоянная интегрирования C находится из граничного условия $h = H_1$ при $x = 0$ и равна $k_\Phi H_1^2/2$.

Тогда уравнение свободной поверхности принимает вид

$$qx = k_\Phi (H_1^2 - h^2)/2. \tag{3.119}$$

Отсюда легко найти глубину потока h в любом сечении x. Предварительно найдем расход жидкости q. Подставив в (3.119) второе граничное условие $h = H_2$ при $x = l$, получим:

$$q = k_\phi (H_1^2 - H_2^2)/(2l), \tag{3.120}$$

и расход жидкости Q через плотину шириной B будет равен:

$$Q = Bk_\phi (H_1^2 - H_2^2)/(2l) = Bk\rho g \cdot (H_1^2 - H_2^2)/(2\eta l). \tag{3.121}$$

Форму депрессионной поверхности (пьезометрической линии AC) найдем из формулы (3.119). Подставив в нее выражение (3.120) для расхода q, получим:

$$h = \sqrt{H_1^2 - \frac{H_1^2 - H_2^2}{l} x}. \tag{3.122}$$

Таким образом, согласно гидравлической теории безнапорного движения, пьезометрическая линия AC является параболой, что, строго говоря, не отражает реальную картину течения.

Это ясно из следующих соображений. Из формулы (3.122) при $H_2 = 0$ у выхода в нижний бьеф (при $x = l$) получим $h = 0$ и, следовательно, бесконечную скорость фильтрации $w_x = q/h$, что физически невозможно. Следовательно, в действительности должно быть $h(l) > H_2$, т. е. должен существовать промежуток высачивания BC, и пьезометрическая кривая будет иметь вид ABC, а не AC.

Формула же для дебита (3.121), хотя и выведена на основании приближенных допущений, тем не менее является точной, как было доказано И. А. Чарным.

Рассмотрим теперь схему установившегося безнапорного притока жидкости к совершенной скважине (или колодцу) (рис. 3.22).

Пусть на расстоянии $R_к$ уровень грунтовых вод постоянен и равен $H_к$, в скважине установлен постоянный уровень H_c.

Скорость фильтрации на расстоянии r от оси скважины:

$$w_r = -k_\phi dh/dr,$$

а расход жидкости через боковую поверхность цилиндра:

$$Q = |w| 2\pi r h = k_\phi 2\pi r h dh/dr. \tag{3.123}$$

Разделив в (3.123) переменные и проинтегрировав, получим:

$$Q \ln r = \pi k_\phi h^2 + C,$$

где постоянная интегрирования C находится из граничного условия на контуре питания: $H = H_к$ или $r = R_к$.

Тогда имеем:

$$Q \ln (R_к/r) = \pi k_\phi (H_к^2 - h^2), \tag{3.124}$$

откуда найдем дебит жидкости подставив второе граничное условие на забое скважины: $H = H_c$ при $r = r_c$.

В результате получим:

$$Q = \frac{\pi k_\phi (H_к^2 - H_c^2)}{\ln (R_к/r_c)} = \frac{\pi k \rho g (H_к^2 - H_c^2)}{\eta \ln (R_к/r_c)}. \tag{3.125}$$

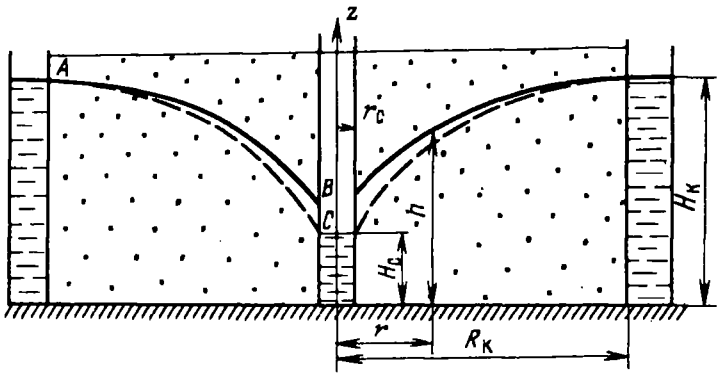


Рис. 3.22. Схема безнапорного притока к совершенной скважине

Разрешив уравнение (3.124) относительно h, найдем уравнение депрессионной кривой AC:

$$h = \sqrt{H_к^2 - \frac{Q\ln(R_к/r)}{\pi k_ф}} = \sqrt{H_к^2 - \frac{(H_к^2 - H_c^2)}{\ln(R_к/r_c)}\ln(R_к/r)}. \qquad (3.126)$$

Формулы (3.121) и (3.125) называются формулами Дюпюи.

Если сравнить формулы (3.31) с (3.121), (3.32) с (3.122), (3.50) с (3.125) и (3.51) с (3.126), то можно убедиться, что имеет место аналогия теории безнапорного движения с задачей фильтрации газа.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какой фильтрационный поток называется одномерным?
2. Какие одномерные фильтрационные потоки рассматриваются в подземной гидромеханике?
3. При прямолинейно-параллельной фильтрации по закону Дарси давление в сечении 1 с координатой $x_1 = 200$ м составляет $p_1 = 3$ МПа, а в сечении 2 ($x_2 = 400$ м) $p_2 = 1$ МПа. Чему равно отношение скоростей фильтрации и градиентов давления в этих сечениях, если фильтруется: а) несжимаемая жидкость; б) совершенный газ?
4. В двух пластах – нефтяном и газовом – длиной $L = 1200$ м давление на контуре питания $p_к = 10$ МПа, на галерее $p_г = 7$ МПа. Сравнить давления в обоих пластах в сечении на расстоянии $x = 800$ м от контура питания.
5. В круговом пласте происходит фильтрация нефти. Какую долю от общей депрессии составляет потеря давления на участке от точки с координатой r до забоя? Радиус пласта $R_к = 1000$ м, $r_c = 0{,}1$ м. Принять следующие значения r: 100 м, 10 м, 1 м.

Указание. Определить в процентах отношение $(p - p_c)/(p_к - p_c)$.

6. В газовом пласте происходит установившаяся плоскорадиальная фильтрация совершенного газа к скважине по закону Дарси. Найти скорость фильтрации и среднюю скорость движения газа на расстоянии $r = 10$ м от центра скважины, если известны объемный приведенный дебит $Q_{ат} = 8 \cdot 10^5$ м^3/сут, толщина пласта $h = 12$ м, давление на контуре питания $p_к = 12$ МПа и на забое скважины $p_c = 9$ МПа; расстояние до контура питания $R_к = 500$ м, радиус скважины $r_c = 0{,}1$ м, пористость пласта $m = 20\%$.

7. Сравнить средневзвешенные давления в круговых нефтяном и газовом пластах, если $p_c/p_к = 0{,}5$, $R_к/r_c = 500$.

8. На месторождении Карачаганак толщина продуктивного пласта так велика (≈ 1500 м), что весь интервал перфорации на скважине можно моделировать одним стоком, и приток к скважине считать радиально-сферическим. Определить эффективный радиус такого стока для скважины с дебитом $Q_m = 700$ т/сут, забойным давлением $p_c = 35$ МПа, если пластовое давление $p_к = 50$ МПа, проницаемость $k = 10$ мД; из-за высоких давлений флюид можно считать несжимаемым плотностью $\rho = 500$ кг/м^3, вязкостью $\eta = 5 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Гравитационными силами пренебречь.

9. Во сколько раз надо изменить радиус скважины, чтобы дебит при плоскорадиальной фильтрации нефти удвоился? Рассмотреть фильтрацию: а) по закону Дарси; б) по степенному закону при $n = 4/3$; в) по закону Краснопольского. Принять $R_к = 800$ м, $r_c = 0{,}1$ м.

10. Построить (качественно) график изменения давления $p(x)$ вдоль полосообразного пласта, в котором движется нефть. Пласт состоит из трех зон одинаковой длины с проницаемостями $k_1 > k_2 > k_3$.

11. Круговой пласт состоит из двух кольцевых зон с различной проницаемостью: 1) $k = k_1$ при $r_c \leqslant r \leqslant r_1$; 2) $k = k_2$ при $r_1 < r \leqslant R_к$. Вывести формулу для определения давления p_1 на границе зон. Давления на контуре питания $p_к$ и на забое p_c заданы.

12. Как различаются между собой градиенты давлений и скорости фильтрации на границе двух зон ($r = r_1$) кругового пласта с разными проницаемостями? В зоне I ($r_c \leqslant r \leqslant r_1$) $k_1 = 0{,}9$ Д; в зоне II ($r_1 < r \leqslant R_к$) $k_2 = 0{,}3$ Д.

13. Круговой пласт состоит из двух слоев с соотношением проницаемостей $k_1 : k_2 = 1 : 2$ и толщин $h_1 : h_2 = 2 : 3$. Как различаются между собой скорости фильтрации $w_1 : w_2$ в точке с одной и той же координатой r?

14. В круговом нефтяном пласте проницаемость меняется следующим образом: в призабойной зоне радиусом r_0 она увеличивается линейно от значения k_1 на забое (при $r = r_c$) до значения k_2 (при $r = r_0$); в остальной части пласта (от r_0 до $R_к$) проницаемость постоянна и равна k_2. Вывести формулу дебита. Толщина пласта h, вязкость жидкости η и депрессия $p_к - p_c$, известны.

Глава 4

ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ

§ 1. ПОТЕНЦИАЛ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА И СТОКА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ

Разработка нефтяных и газовых месторождений осуществляется не единичными скважинами. Для обеспечения необходимого уровня добычи жидкости или газа нужно определенное количество скважин. Сумма дебитов этих скважин должна обеспечить заданный отбор из месторождения. Поэтому в фильтрационных расчетах, связанных с разработкой месторождний, необходимо рассматривать множество скважин, размещенных определенным образом на площади нефтегазоносности, в зависимости от параметров пластов и свойств насыщающих их флюидов. При этом возникают гидродинамические задачи определения давлений на забоях скважин при заданных дебитах или определения дебитов скважин при заданных из технических или технологических соображений забойных давлениях. Аналогичные задачи возникают при рассмотрении системы нагнетательных скважин, используемых для поддержания пластового давления. В этих случаях также целесообразно схематизировать геометрию движения. При этом рассматриваются наиболее характерные плоские нерадиальные потоки. Проанализировать все возможные геометрии фильтрационных течений на представляется возможным, да в этом и нет необходимости, так как владея общей методологией расчета, можно определить основные характеристики таких потоков.

При решении этих задач нужно учитывать, что при работе скважин наблюдается их взаимное влияние друг на друга – интерференция скважин. Это влияние выражается в том, что при вводе в эксплуатацию новых скважин суммарная добыча из месторождения растет медленнее, чем число скважин (рис. 4.1).

Прежде чем перейти к исследованию задач интерференции скважин, введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего.

Назовем точечным стоком на плоскости точку, поглощающую жидкость. Сток можно рассматривать как гидродинамически совершенную скважину бесконечно малого радиуса в пласте единичной толщины. На плоскости вокруг точечного стока будет радиальная картина движения. Точечный источник – это точка, выделяющая жидкость (модель нагнетательной скважины).

Определим потенциал течения как функцию, производная которой с обратным знаком вдоль линии тока равна скорости фильтрации, т. е.

$$w = -\frac{d\Phi}{ds}. \tag{4.1}$$

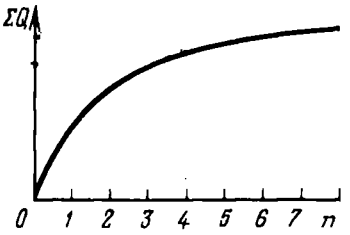


Рис. 4.1. Зависимость суммарного дебита от числа скважин

Из сравнения (4.1) с законом Дарси (2.11) видно, что потенциал для несжимаемой жидкости связан с давлением формулой

$$\Phi = kp/\eta. \tag{4.2}$$

Найдем потенциал точечного стока на плоскости. Так как точечный сток является моделью добывающей скважины и течение вокруг него плоскорадиальное, то можно воспользоваться формулой скорости фильтрации для такого потока (3.49):

$$w = \frac{k(p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/r_c)} \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi hr} = \frac{q}{2\pi r}, \tag{4.3}$$

где $q = Q/h$ – дебит скважины-стока, приходящийся на единицу толщины пласта.

Но для плоскорадиального потока

$$w = -\frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{dr},$$

откуда

$$d\Phi = wdr = qdr/(2\pi r).$$

После интегрирования получим выражение потенциала для точечного стока на плоскости:

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + C, \tag{4.4}$$

где C – постоянная интегрирования.

Таким образом, потенциал в окрестности скважины-стока пропорционален логарифму расстояния r от стока (центра скважины). При $r = 0$ и $r = \infty$ функция $\ln r$ обращается в бесконечность, поэтому потенциал в этих точках теряет смысл.

Для точечного источника справедливы все приведенные формулы, но дебит q считается отрицательным ($q < 0$).

Из формулы (4.4) следует, что линиями равного потенциала (эквипотенциалами) являются окружности $r = \text{const}$.

Найдем теперь потенциал точечного стока в пространстве. Движение

вблизи такого стока будет радиально-сферическим. Поэтому скорость фильтрации

$$w = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{d\Phi}{dr},$$

откуда

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi}\frac{dr}{r^2},$$

и потенциал точечного стока в пространстве

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} + C. \tag{4.5}$$

Для потенциала точечного источника знак дебита в формуле (4.5) меняется на противоположный.

Как следует из формулы (4.5), потенциал точечного стока в пространстве обращается в бесконечность при $r = 0$, а при $r = \infty$ остается конечным (и равным C).

Модель точечного стока в пространстве будет использована в дальнейшем для решения задач о притоке жидкости к гидродинамически несовершенным скважинам.

Отметим, что метод источников и стоков очень удобен, он широко используется при решении не только задач фильтрации, но и задач, связанных с обтеканием различных тел в потоке жидкости. Применяется этот метод и в задачах теории теплопроводности, электричества и магнетизма.

Распределение давления и потенциала в установившихся потоках несжимаемой жидкости описывается уравнением Лапласа, которое для плоских течений имеет вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0. \tag{4.6}$$

Поскольку уравнение Лапласа линейное и однородное, его решения обладают следующими свойствами: сумма частных решений есть также решение этого уравнения; произведение частного решения на произвольную постоянную есть также решение этого уравнения. На основании этих свойств в подземной гидромеханике разработан метод решения сложных задач, названный методом суперпозиции (методом наложения решений).

Математический смысл метода суперпозиции заключается в том, что если имеется несколько фильтрационных потоков с потенциалами $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y), \ldots, \Phi_n(x, y)$, каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е.

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

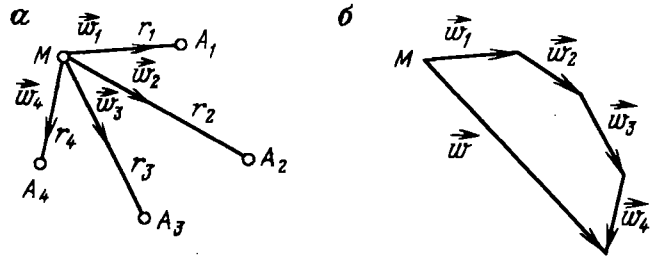


Рис. 4.2. Схема скоростей фильтрации в точке M при работе скважин-стоков на неограниченной плоскости (*а*) и результирующий вектор скорости фильтрации в точке M (*б*)

то и сумма $\Phi = \sum_{i=1}^{n} C_i \Phi_i$ (где C_i – произвольные постоянные) также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Гидродинамический смысл метода суперпозиции состоит в том, что изменение пластового давления и потенциала в любой точке пласта, вызванное работой каждой скважины (нагнетательной или добывающей), подсчитывается так, как если бы данная скважина работала в пласте одна, совершенно независимо от других скважин; затем эти независимо определенные для каждой скважины изменения давления и потенциала в каждой точке пласта алгебраически суммируются. Суммарная скорость фильтрации находится как сумма векторов скоростей фильтрации, вызванных работой каждой скважины, по правилам сложения векторов.

Пусть на неограниченной плоскости расположено n источников и стоков (рис. 4.2, *а*). Потенциал каждого из них в точке M определяется по формуле (4.4):

$$\Phi_1 = \frac{q_1}{2\pi} \ln r_1 + C_1; \quad \Phi_2 = \frac{q_2}{2\pi} \ln r_2 + C_2, \ldots, \Phi_n = \frac{q_n}{2\pi} \ln r_n + C_n,$$

где $r_1, r_2, \ldots r_n$ – расстояния от первого, второго, ... n-го стоков до точки M; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – постоянные.

Каждая из функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Тогда сумма потенциалов

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln r_i + C, \tag{4.7}$$

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

также удовлетворяют уравнению Лапласа. Физически это означает, что

фильтрационные потоки от работы каждого источника или стока накладываются друг на друга. В этом и заключается принцип суперпозиции, или сложения течений.

Вектор скорости фильтрации $\vec{w}$ в точке M равен (рис. 4.2, *б*):

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \ldots + \vec{w}_n, \tag{4.8}$$

где

$$w_1 = \frac{q_1}{2\pi r_1}; \quad w_2 = \frac{q_2}{2\pi r_2}; \quad \ldots; \quad w_n = \frac{q_n}{2\pi r_n}.$$

Метод суперпозиции можно использовать не только в бесконечных пластах, но и в пластах, имеющих контур питания или непроницаемую границу той или иной формы. В этом случае для выполнения тех или иных условий на границах приходится вводить фиктивные скважины-стоки или скважины-источники за пределами пласта. Фиктивные скважины в совокупности с реальными обеспечивают необходимые условия на границах. При этом задача сводится к рассмотрению одновременной работы реальных и фиктивных скважин в неограниченном пласте. Этот метод называется методом отображения источников и стоков.

Рассмотрим здесь использование методов суперпозиции и отображения источников и стоков на некоторых задачах, имеющих практическое значение в теории разработки нефтяных и газовых месторождений.

§ 2. ПРИТОК ЖИДКОСТИ К ГРУППЕ СКВАЖИН В ПЛАСТЕ С УДАЛЕННЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ

Пусть в горизонтальном пласте толщиной h расположена группа скважин A_1, $A_2, \ldots, A_n$ с радиусами r_{ci}, работающих с различными забойными потенциалами Φ_{ci}, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 4.3).

Расстояния между центрами i-й и j-й скважин r_{ij} известны ($r_{ij} = r_{ji}$). Так как контур питания находится далеко от всех скважин, то можно приближенно считать, что расстояние от всех скважин до всех точек контура одно и то же и равно $R_к$. Потенциал $\Phi_к$ на контуре питания считается заданным. Требуется определить дебит каждой скважины и скорость фильтрации в любой точке пласта.

Потенциал в любой точке пласта M определяется по формуле (4.7). Поместив мысленно точку M последовательно на забой каждой скважины, получим выражения забойного потенциала на них в виде

$$\Phi_{c1} = \frac{1}{2\pi}(q_1 \ln r_{c1} + q_2 \ln r_{12} + q_3 \ln r_{13} + \ldots + q_n \ln r_{1n}) + C,$$

$$\Phi_{c2} = \frac{1}{2\pi}(q_1 \ln r_{21} + q_2 \ln r_{c2} + q_3 \ln r_{23} + \ldots + q_n \ln r_{2n}) + C,$$

$$\Phi_{cn} = \frac{1}{2\pi}(q_1 \ln r_{n1} + q_2 \ln r_{n2} + q_3 \ln r_{n3} + \ldots + q_n \ln r_{cn}) + C. \tag{4.7.}$$

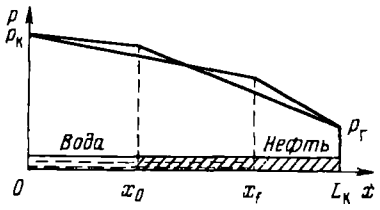


Рис. 7.3. Кривые распределения давления в пласте при вытеснении нефти водой

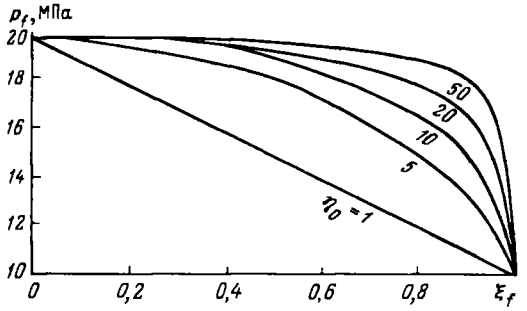


Рис. 7.4. Изменение давления на границе раздела жидкостей ($p_к = 20$ МПа, $p_г = 10$ МПа)

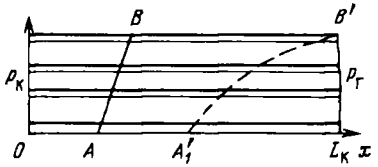


Рис. 7.5. Схема использования метода «полосок»

4. Кривая падения давления p_f на границе раздела в зависимости от ее безразмерных значений $\xi_f = x_f/L$ при различных отношениях вязкостей $\eta_0 = \eta_н/\eta_в$ приведены на рис. 7.4. Расчеты проводились по формуле (7.9) при давлении на контуре питания $p_к = 20$ МПа и на галерее $-p_1 = 10$ МПа.

В случае, если первоначальное положение водонефтяного контакта *AB* в пласте не параллельно галерее (рис. 7.5), то решить задачу можно приближенно, используя, например, метод «полосок», предложенный В. Н. Щелкачевым. В потоке выделяются узкие полоски, в пределах каждой из которых водонефтяной контакт считается параллельным галерее, и движение в каждой полоске описывается выведенными в этом параграфе формулами. При этом, как видно из формулы (7.17), чем больше значение x_0, тем больше скорость фильтрации w. Отсюда

вытекает, что граница раздела в точке B будет двигаться гораздо быстрее, чем в точке A, и обводнение галереи начнется именно по линии BB', в то время как контур нефтеносности по другим линиям будет еще значительно удален от галереи. Из этого примера следует важное заключение о характере продвижения контура нефтеносности. Если на границе раздела вода – нефть при разработке нефтяной залежи образовался «водяной язык», то он в дальнейшем не только не исчезает, а быстро вытягивается, продвигаясь с большей скоростью, чем остальная часть водонефтяного контакта.

§ 3. ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ

Рассмотрим задачу о вытеснении нефти водой в условиях плоскорадиального движения по закону Дарси в пласте, изображенном на рис. 7.6. На контуре питания радиусом $R_к$ поддерживается постоянное давление $p_к$, на забое добывающей скважины радиусом $r_с$ – постоянное давление $p_с$, толщина пласта h и его проницаемость k также постоянны. Обозначим через R_0, r_f соответственно начальное и текущее положения контура нефтеносности, концентричные скважине и контуру питания; через $p_в$ и $p_н$ – давление в любой точке водоносной и нефтеносной области соответственно, через $p(t)$ – давление на границе раздела жидкостей.

В случае установившегося плоскорадиального движения однородной жидкости (§ 2, гл. 3) распределение давления в потоке и скорость фильтрации описываются следующими уравнениями:

$$p = p_к - \frac{p_к - p_с}{\ln\dfrac{R_к}{r_с}} \ln\frac{R_к}{r} = p_с + \frac{p_к - p_с}{\ln\dfrac{R_к}{r_с}} \ln\frac{r}{r_с};$$

$$u = \frac{k}{\eta} \frac{p_к - p_с}{\ln\dfrac{R_к}{r_с}} \frac{1}{r}.$$

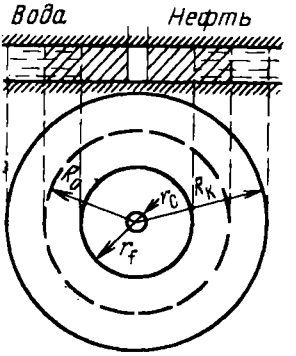


Рис. 7.6. Схема пласта при плоскорадиальном вытеснении нефти водой.

§ 3. ПРИТОК ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ В ПЛАСТЕ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ

Пусть в полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания, на котором потенциал равен $\Phi_к$, работает одна добывающая скважина A с забойным потенциалом $\Phi_с$ (рис. 4.4). Необходимо найти дебит скважины q, потенциал и скорость фильтрации в любой точке пласта.

Отметим, что потенциал в любой точке при осесимметричном потоке в круговом или бесконечном пласте определяется по формуле (4.4). В рассматриваемом же случае это условие постоянства потенциала на прямолинейном контуре питания не выполняется, так как расстояние r разных точек контура питания от скважины A неодинаково.

Для решения этой задачи используем метод отображения источников и стоков. Зеркально отобразим скважину-сток A относительно контура питания и дебиту скважины-изображения A' припишем противоположный знак, т. е. будем считать ее скважиной-источником. Теперь рассмотрим в бесконечном пласте совместную работу двух скважин: скважины-стока A с дебитом q и скважины-источника A' с дебитом $-q$. Потенциал в любой точке M, находящейся на расстоянии r_1 от скважины A и r_2 – от скважины A':

$$\Phi_м = \frac{q}{2\pi}\ln r_1 - \frac{q}{2\pi}\ln r_2 + C = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + C. \tag{4.12}$$

Потенциал на контуре питания можно выразить, подставив в (4.12) $r_1 = r_2$, в результате чего получим:

$$\Phi = C = \Phi_к, \tag{4.13}$$

т. е. потенциал на контуре питания действительно постоянен.

Тогда из (4.12) с учетом (4.13) потенциал на забое скважины A ($r_1 = r_с$, $r_2 \approx 2a$) можно выразить следующим образом:

$$\Phi_с = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_с}{2a} + \Phi_к = \Phi_к - \frac{q}{2\pi}\ln\frac{2a}{r_с}. \tag{4.14}$$

Из (4.14) выражение для дебита скважины A, приходящегося на единицу толщины пласта, получим в следующем виде:

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln(2a/r_с)}. \tag{4.15}$$

Если бы контур питания был окружностью радиуса a, то дебит скважины был бы равен (по формуле Дюпюи):

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln(a/r_с)}.$$

В реальных условиях форма контура питания MN (рис. 4.5) часто бывает неизвестна, но она заключена между окружностью и прямой

Рис. 4.4. Схема притока жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания

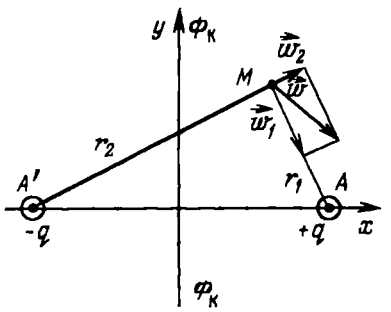
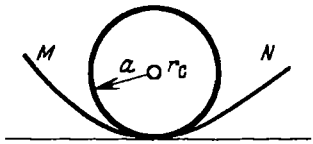


Рис. 4.5. Схема пласта с контурами питания различной формы



линией. Следовательно, дебит скважины в этих условиях будет находиться в следующих пределах:

$$\frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln(a/r_c)} \geqslant q \geqslant \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln(2a/r_c)}.$$

Для определения потенциала в любой точке M (см. рис. 4.4) воспользуемся формулой (4.12) с учетом (4.13):

$$\Phi_м = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + \Phi_к. \qquad (4.16)$$

Скорость фильтрации равна геометрической сумме скоростей фильтрации, вызванных работой реальной скважины-стока A и фиктивной скважины-источника A' (см. рис. 4.4) т. е.

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2,$$

где $w_1 = q/(2\pi r_1)$ и направлена к скважине A; $w_2 = q/(2\pi r_2)$ и направлена от скважины A'.

На контуре питания, где $r_1 = r_2$, очевидно, вектор скорости фильтрации перпендикулярен линии контура питания.

Из формулы (4.16) следует, что уравнение эквипотенциалей имеет вид

$$r_1/r_2 = \text{const} \quad \text{или} \quad r_1^2/r_2^2 = c. \qquad (4.17)$$

Выразив r_1^2 и r_2^2 через координаты точки $M(x, y)$ и координаты центров скважин $A(a, 0)$ и $A'(-a, 0)$, получим: $r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$ и

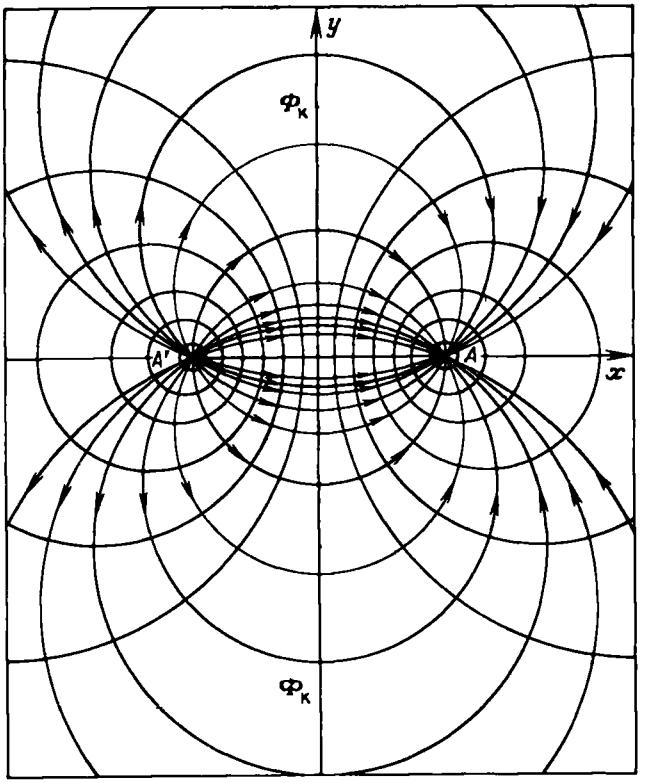


Рис. 4.6. Семейства линий тока и эквипотенциалей в потоке жидкости к скважине-стоку в пласте с прямолинейным контуром питания (или в бесконечном пласте к источнику и стоку)

$r_2^2 = (x + a)^2 + y^2$. Подставив эти выражения в (4.17) и проведя алгебраические преобразования. получим:

$$\left(x - a\frac{1+c}{1-c}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2c}{(1-c)^2}-$$

уравнение окружности с центром в точке $x_0 = a\dfrac{1+c}{1-c}$, $y_0 = 0$ и с радиусом $R = 2a\sqrt{c}/(1-c)$.

Меняя значение константы c, получим семейство эквипотенциалей – окружностей с разными радиусами и с центрами, расположенными в разных точках оси x. Контур питания является эквипотенциалью, т.е. окружностью с $R = \infty$. Семейство линий тока представляет собой окружности, проходящие через центры обеих скважин, центры которых

лежат на прямолинейном контуре питания. При этом эквипотенциали (изобары) всегда ортогональны линиям тока (рис. 4.6).

§ 4. ПРИТОК ЖИДКОСТИ К БЕСКОНЕЧНЫМ ЦЕПОЧКАМ И КОЛЬЦЕВЫМ БАТАРЕЯМ СКВАЖИН

На примере притока жидкости к нескольким рядам или кольцевым батареям скважин ознакомимся с широко применяемым при проектировании разработки нефтяных месторождений методом эквивалентных фильтрационных сопротивлений, предложенным Ю. П. Борисовым и основанным на аналогии движения жидкости в пористой среде с течением электрического тока в проводниках (см. гл. 13).

Рассмотрим без вывода задачу о притоке жидкости к одной бесконечной цепочке скважин, расположенных на расстояниях 2σ друг от друга и на расстоянии L от прямолинейного контура питания. Пусть на контуре питания задан постоянный потенциал $\Phi_к$, на забоях скважин – потенциал $\Phi_с$ (рис. 4.7). Требуется определить дебит каждой скважины и суммарный дебит n скважин в цепочке.

Решение задачи заключается в следующем. Цепочка скважин-стоков отображается зеркально относительно контура питания в скважины-источники, и рассматривается интерференция двух цепочек скважин в неограниченном пласте.

Вдоль прямой AB, проходящей через скважину (как говорят, вдоль главной линии тока), частицы жидкости будут двигаться наиболее быстро. Прямые $A'B'$, делящие расстояние между скважинами пополам, в силу симметрии потока, можно рассматривать как непроницаемые границы, вдоль которых движение будет наиболее медленным; они называются нейтральными линиями тока.

Задача решается методом суперпозиции. Результаты решения показывают, что на расстоянии от контура до половины расстояния между скважинами движение жидкости практически прямолинейное и падение потенциала на этом участке происходит по закону прямолинейной

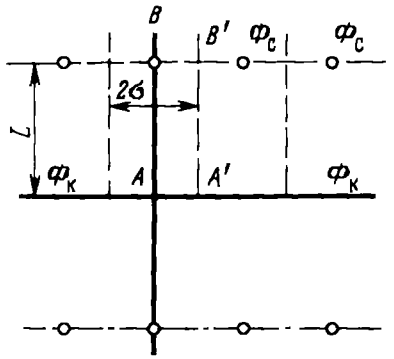


Рис. 4.7. Схема прямолинейной цепочки скважин

фильтрации. Основное падение потенциала происходит вблизи скважины, где характер движения близок к радиальному. При этом дебит каждой скважины цепочки выражается следующей формулой:

$$q = \frac{Q}{h} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln 2\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi h}{\sigma} + \ln\dfrac{\sigma}{\pi r_с}},$$

где $sh\dfrac{\pi L}{\sigma} = \dfrac{1}{2}(e^{\pi L/\sigma} - e^{-\pi L/\sigma})$ – гиперболический синус.

В случае, когда $L > \sigma$, величина $e^{-\pi L/\sigma}$ очень мала и тогда

$\ln 2\,\mathrm{sh}(\pi L/\sigma) \approx \ln e^{\pi L/\sigma} = \pi L/\sigma$.

Отсюда следует, что при $L > \sigma$ дебит скважины

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\dfrac{\pi L}{\sigma} + \ln\dfrac{\sigma}{\pi r_с}} = \frac{\Phi_к - \Phi_с}{\dfrac{L}{2\sigma} + \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{\sigma}{\pi r_с}}. \tag{4.18}$$

Введя обозначения

$$\frac{L}{2\sigma} = \rho, \quad \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sigma}{\pi r_с} = \rho',$$

формулу (4.18) представим в виде

$$q = \frac{\Phi_к - \Phi_с}{\rho + \rho'}, \tag{4.19}$$

аналогичном закону Ома.

Величина ρ, по терминологии Ю. П. Борисова, называется внешним фильтрационным сопротивлением батареи, ρ' – внутренним. Таким образом, приток жидкости к цепочке скважин можно представить схемой эквивалентных фильтрационных сопротивлений, показанной на рис. 4.8.

Аналогом объемного расхода q служит сила тока, а аналогом разности фильтрационных потенциалов – разность электрических потенциалов. Суммарный дебит прямолинейной цепочки из n скважин

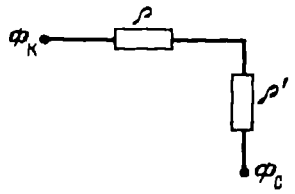
$$Q' = Qn = qhn = \frac{\Phi_к - \Phi_с}{\dfrac{L}{2\sigma nh} + \dfrac{1}{2\pi nh}\ln\dfrac{\sigma}{\pi r_с}} = \frac{p_к - p_с}{\dfrac{\eta L}{kh2\sigma n} + \dfrac{\eta\ln(\sigma/(\pi r_с))}{2\pi khn}}. \tag{4.20}$$

Из формулы (4.20) следует выражение для внешнего фильтрационного сопротивления цепочки:

$\rho = \eta L/(kh2\sigma n) = \eta L/(khB)$,

которое представляет собой сопротивление потоку жидкости от контура

Рис. 4.8. Схема фильтрационных сопротивлений при притоке к цепочке скважин



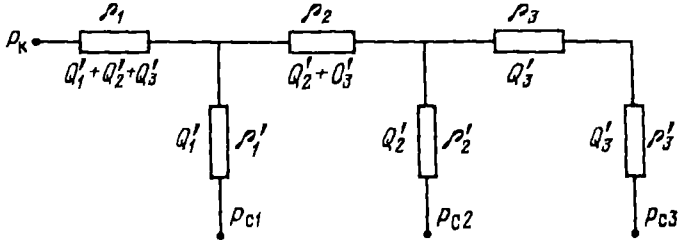


Рис. 4.9. Схема фильтрационных сопротивлений при притоке к трем цепочкам скважин

питания до галереи длиной $B = 2\sigma n$, расположенной на расстоянии L от контура питания, а внутреннее сопротивление

$$\rho' = \eta \ln(\sigma/(\pi r_c))/(2\pi khn)$$

выражает сопротивление, возникающее при подходе жидкости к скважинам в зоне радиусом $r = \sigma/\pi$, где фильтрация практически плоскорадиальная.

Пусть теперь полубесконечный пласт с прямолинейным контуром питания разрабатывается тремя параллельными цепочками скважин с числом скважин в каждой n_1, n_2, n_3. Пусть скважины в каждой цепочке имеют одинаковые радиусы $r_{с1}$, $r_{с2}$, $r_{с3}$ и забойные давления $p_{с1}$, $p_{с2}$, $p_{с3}$, суммарные дебиты цепочек составляют Q_1', Q_2', Q_3'.

Схема соответствующих эквивалентных фильтрационных сопротивлений будет теперь разветвленной (рис. 4.9).

Расчет схемы проводится аналогично расчету электрических разветвленных цепей по законам Ома и Крихгофа. Составляются алгебраические линейные уравнения по числу неизвестных (либо дебитов Q_1', Q_2', Q_3', либо забойных давлений $p_{с1}$, $p_{с2}$, $p_{с3}$). При этом, очевидно, внешние сопротивления будут равны:

$$\rho_1 = \eta L^1/(khB), \quad \rho_2 = \eta L_2/(khB),$$

$$\rho_3 = \eta L_3/(khB), \tag{4.21}$$

где L_1, L_2, L_3 – расстояния соответственно от контура питания до первой цепочки, между первой и второй цепочками, между второй и третьей цепочками.

Внутренние сопротивления определяются по формулам

$$\rho'_1 = \frac{\eta}{2\pi khn_1}\ln\frac{\sigma}{\pi r_{c1}}, \quad \rho'_2 = \frac{\eta}{2\pi khn_2}\cdot\ln\frac{\sigma}{\pi r_{c2}},$$

$$\rho'_3 = \frac{\eta}{2\pi khn_3}\ln\frac{\sigma}{\pi r_{c3}}. \tag{4.22}$$

Отметим, что приток жидкости к трем кольцевым батареям скважин, соосным круговому контуру питания, рассчитывается по той же схеме эквивалентных фильтрационных сопротивлений (см. рис. 4.9), что и для цепочек скважин. При этом внешние фильтрационные сопротивления будут выражаться следующим образом:

$$\rho_1 = \frac{\eta}{2\pi kh}\ln\frac{R_к}{R_1}; \quad \rho_2 = \frac{\eta}{2\pi kh}\ln\frac{R_1}{R_2};$$

$$\rho_3 = \frac{\eta}{2\pi kh}\ln\frac{R_2}{R_3}, \tag{4.23}$$

где R_1, R_2, R_3 – радиусы батарей.

Внутренние фильтрационные сопротивления определяются по формулам (4.22).

Задачи интерференции скважин имеют важнейшее значение при рассмотрении естественного или искусственно создаваемого (нагнетанием воды) водонапорного режима.

Результат интерференции сказывается в том, что при введении в эксплуатацию ряда скважин (работающих в одинаковых условиях) прирост суммарного дебита уменьшается. Кривая зависимости суммарного дебита от числа скважин n с ростом n становится все более пологой (см. рис. 4.1). Чем ближе расположены скважины друг к другу, тем сильнее сказывается эффект интерференции и тем меньшим оказывается суммарный дебит.

При разработке нефтяных месторождений плотность сетки скважин, а также их взаимное расположение (в виде рядов, круговых батарей, прямоугольной сетки и т. д.) играет первостепенную роль для определения суммарной добычи.

Большое влияние оказывает на суммарную добычу расстояние от действующих скважин до контура области питания или до цепочки нагнетательных скважин. При приближении нагнетательных скважин к добывающим эффект взаимодействия между ними уменьшается, и их дебиты увеличиваются.

Покажем это на примере [87]. Рассмотрим пласт с односторонним притоком нефти, эксплуатируемый тремя параллельно расположенными цепочками скважин. Расстояние от прямолинейного контура питания (отождествляемого с рядом нагнетательных скважин) до первой цепочки добывающих скважин равно L_1. Меняя расстояние L_1, а также плотность размещения скважин (т. е. L_2, L_3 и σ), посмотрим, как будет меняться суммарный дебит всех скважин. Система уравнений, соответствующая схеме на рис. 4.9 в соответствии с законом Кирхгофа имеет вид:

$$p_к - p_с = \rho_1 (Q'_1 + Q'_2 + Q'_3) + \rho'_1 Q'_1;$$

$$0 = -\rho'_1 Q'_1 + \rho_2 (Q'_2 + Q'_3) + \rho'_2 Q'_2;$$

$$0 = -\rho'_2 Q'_2 + (\rho_3 + \rho'_3) Q'_3,$$

где внешние и внутренние сопротивления определяются по формулам (4.21) и (4.22); Q'_1 Q'_2, Q'_3 – суммарные дебиты цепочек добывающих скважин.

Принято $p_{с1} = p_{с2} = p_{с3} = p_с$. Рассмотрены четыре варианта; во всех вариантах число скважин неизменно: $n_1 = n_2 = n_3 = 5$, т. е. всего работает 15 скважин. Данные и результаты расчетов приведены ниже.

Вариант	1	2	3	4
L_1, км	1,5	1	1	1
$L_2 = L_3$, км	1	0,5	0,5	0,5
B, км	3	3	2,5	1,875
2σ, км	0,6	0,6	0.5	0,375
Q_1, м³/сут	61.8	73,2	67	57,8
Q_2, м³/сут	20,8	34,8	29	21,2
Q_3, м³/сут	8.7	20,6	15,7	9,7
$Q'_1 + Q'_2 + Q'_3$, м³/сут	456	643	559	443

Значения остальных параметров следующие: $\eta = 3$ мПа·с; $k = 0{,}5$ мкм²; $h = 3$; $p_к = 17$ МПа; $p_с = 10$ МПа; $r_с = 0{,}1$ м.

Из приведенных данных следует, что в первом варианте суммарный дебит наиболее редко расположенных скважин меньше, чем во втором и третьем при более плотно расположенных скважинах. Наибольший дебит оказывается во втором варианте.

Таким образом, приближая нагнетательные скважины к добывающим, можно добиться увеличения добычи при более тесном расположении скважин.

§ 5. ПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

5.1. Виды несовершенства скважин

Скважина называется гидродинамически совершенной, если она вскрывает продуктивный пласт на всю толщину и забой скважины открытый, т. е. вся вскрытая поверхность забоя является фильтрующей.

Если скважина с открытым забоем вскрывает пласт не на всю толщину h, а только на некоторую глубину b, то ее называют гидродинамически несовершенной по степени вскрытия пласта. При этом $\bar{h} = b/h$ называется относительным вскрытием пласта.

Если скважина вскрывает пласт до подошвы, но сообщение с пластом происходит только через специальные отверстия в обсадной колонне и цементном камне или через специальные фильтры, то такую скважину называют гидродинамически несовершенной по характеру вскрытия пласта.

Нередко встречаются скважины с двойным видом несовершенства – как по степени, так и по характеру вскрытия пласта (см. рис. 4.14).

Степень и характер вскрытия пласта имеют важное значение при разработке месторождений нефти и газа, так как они определяют фильтрационные сопротивления, возникающие в призабойной зоне, и, в конечном итоге, производительность скважин. Выбор степени и характера вскрытия осуществляется в зависимости от физических свойств пластов, их толщины, степени неоднородности, способа разработки и т. д. Несовершенство скважин по степени и характеру вскрытия приводит к таким деформациям линий тока, которые приводят к возникновению в призабойной зоне сложных неодномерных течений. В связи с этим рассмотрение особенностей притока к гидродинамически несовершенным скважинам имеет большое практическое значение.

5.2. Приток жидкости к несовершенным скважинам при выполнении закона Дарси

Приток жидкости к несовершенной скважине даже в горизонтальном однородном пласте постоянной толщины перестает быть плоскорадиальным. Строгое математическое решение задачи о притоке жидкости к несовершенной скважине в пластах конечной толщины представляет большие (а в некоторых случаях непреодолимые) трудности.

Приведем здесь без выводов и доказательств наиболее распространенные окончательные расчетные формулы притока жидкости к различного типа несовершенным скважинам.

Прежде всего допустим, что скважина вскрыла кровлю пласта неограниченной толщины ($h \to \infty$) и при этом ее забой имеет форму полусферы. В этом случае можно считать, что поток – радиально-сферический, при условии $R_к \to \infty$, и тогда дебит определяется по формуле (3.66).

$$Q = \frac{2\pi k r_c (p_к^* - p_c^*)}{\eta}$$

где $p_к^*$ и p_c^* – приведенные давления.

Если скважина вскрыла пласт неограниченной толщины на глубину b, то ее дебит можно найти по формуле Н. К. Гиринского:

$$Q = \frac{2\pi k b (p_к^* - p_c^*)}{\eta \ln \dfrac{1{,}6b}{r_c}}.$$

Задача о притоке жидкости к несовершенной по степени вскрытия пласта скважине в пласте конечной толщины h исследовалась М. Маскетом. Вдоль оси скважины на вскрытой части длиной b он располагал воображаемую линию, поглощающую жидкость, каждый элемент которой dz является стоком. Интенсивность расходов q, т. е. дебитов, приходящихся на единицу длины поглощающей линии, подбиралась различной в разных ее точках для выполнения нужных граничных условий.

Необходимо получить решение, удовлетворяющее следующим граничным условиям: кровля и подошва пласта непроницаемы; цилиндрическая поверхность радиусом $r = R_к$ является эквипотенциалью $\Phi = \Phi_к$; поверхность забоя скважины также является эквипотенциалью $\Phi = \Phi_с$.

Выполнение указанных граничных условий потребовало отображения элементарных стоков qdz относительно кровли и подошвы пласта бесчисленное множество раз.

Подбирая интенсивность расходов q и используя метод суперпозиции действительных и отображенных стоков, М. Маскет получил следующую формулу для дебита гидродинамически несовершенной по степени вскрытия пласта скважины:

$$Q = \frac{2\pi kh(p_к - p_с)}{\eta\zeta}, \tag{4.24}$$

где

$$\zeta = \frac{1}{2\bar{h}}\left[2\ln\frac{4h}{r_с} - \varphi(\bar{h})\right] - \ln\frac{4h}{R_к},$$

а функция $\varphi(\bar{h})$ имеет следующее аналитическое выражение:

$$\varphi(\bar{h}) = \ln\frac{\Gamma(0{,}875\bar{h})\,\Gamma(0{,}125\bar{h})}{\Gamma(1 - 0{,}875\bar{h})\,\Gamma(1 - 0{,}125\bar{h})}. \tag{4.25}$$

Здесь $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ – интеграл Эйлера второго рода, называемый гамма-функцией, для которой имеются таблицы в математических справочниках.

График функции $\varphi(\bar{h})$ приведен на рис. 4.10.

Нетрудно заметить, что если $\bar{h} = 1$, т.е. пласт вскрыт на всю толщину, формула (4.24) переходит в формулу Дюпюи для плоскорадиального потока.

Иногда для расчета дебита несовершенной по степени вскрытия пласта скважины используется более простая формула, чем (4.24) М. Маскета, предложенная И. Козени:

$$Q = \frac{2\pi k\bar{h}h(p_к - p_с)}{\eta\ln(R_к/r_с)}\left(1 + 7\sqrt{\frac{r_с}{2h\bar{h}}}\cos\frac{\pi\bar{h}}{2}\right).$$

Дебит несовершенной скважины удобно изучать, сравнивая ее дебит Q с дебитом совершенной скважины $Q_{сов}$, находящейся в тех же условиях, что и данная несовершенная скважина. Гидродинамическое несовершенство скважины характеризуется коэффициентом совершенства скважины $\delta = Q/Q_{сов}$.

Широкое распространение получил метод расчета дебитов несовершенных скважин, основанный на электрогидродинамической аналогии фильтрационных процессов.

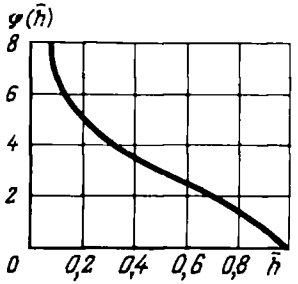


Рис. 4.10. График функции $\varphi(\bar{h})$, определенной по формуле (4.25)

Электрическое моделирование осуществляется следующим образом. Ванна заполняется электролитом. В электролит погружается один кольцевой электрод, моделирующий контур питания. В центре ванны погружается электрод на заданную глубину, соответствующую степени вскрытия пласта скважиной. К обоим электродам подводится разность потенциалов, являющаяся аналогом перепада давления, сила тока служит аналогом дебита скважины.

Дебит гидродинамически несовершенной скважины подсчитывается по формуле

$$Q = \frac{2\pi kh(p_к - p_c)}{\eta\left(\ln\frac{P_к}{r_c} + C\right)}, \tag{4.26}$$

где $C = C_1 + C_2$ – дополнительное фильтрационное сопротивление, вызванное несовершенством скважины по степени вскрытия пласта (C_1) и характеру вскрытия (C_2).

Измеряя разность потенциалов и силу тока, можно подсчитать сопротивление по закону Ома, сделать пересчет на фильтрационное сопротивление и определить дополнительное фильтрационное сопротивление.

Такие экспериментальные исследования были проведены В. И. Щуровым. Им определены дополнительные фильтрационные сопротивления C_1 и C_2 для различных видов несовершенства скважин и построены графики зависимости C_1 от параметров $a = h/D_c$ и $\bar{h} = b/h$ (рис. 4.11), а также C_2 от трех параметров nD_c, $l = l'/D_c$ и $\alpha = d_0/D_c$ (рис. 4.12), где n – число перфорационных отверстий на 1 м вскрытия толщины пласта; D_c – диаметр скважины; l' – глубина проникновения пуль в породу; d_0 – диаметр отверстий.

Выражение дополнительного фильтрационного сопротивления получено И. А. Чарным с использованием формулы Маскета (4.24) в виде

$$C_1 = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right)\ln(4h/r_c) - \frac{1}{2\bar{h}}\varphi(\bar{h}),$$

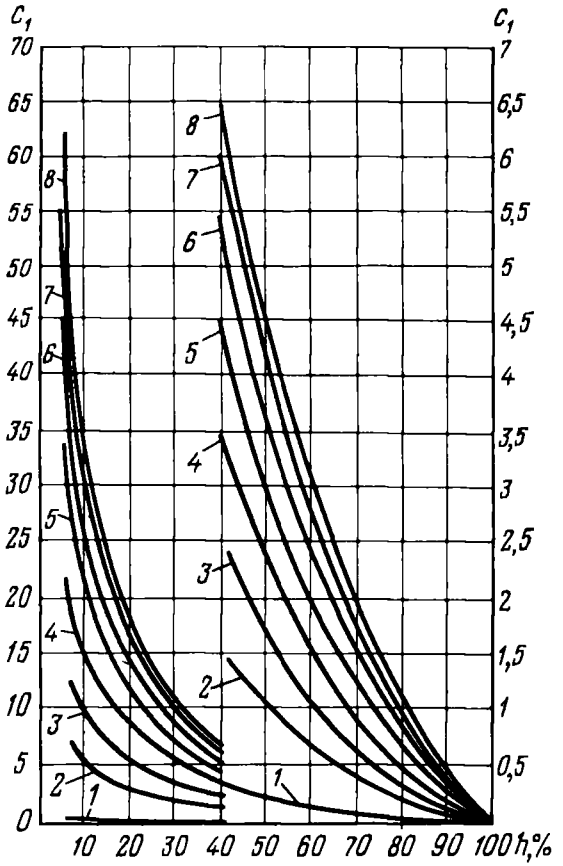


Рис. 4.11. Графики В. И. Щурова для определения коэффициента C_1.
Номерам кривых соответствуют значения a: *1*–1; *2* 5; *3*–10; *4*–20; *5*–40; *6*–80; *7*–160; *8*–300

где $\varphi(\bar{h})$ определяется по формуле (4.25) или по графику (см. рис. 4.10).

А. М. Пирвердян получил для коэффициента C_1 следующее выражение:

$$C_1 = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right)\left(\frac{1}{1 - \dfrac{r_c}{b}} \ln \frac{b}{r_c} - 1\right).$$

Сравнив дебиты совершенной скважины (формула Дюпюи) и несовершенной скважины (4.26), получим выражение коэффициента совершенной скважины в следующем виде:

$$\delta = \frac{\ln(R_к/r_c)}{\ln(R_к/r_c) + C}.$$

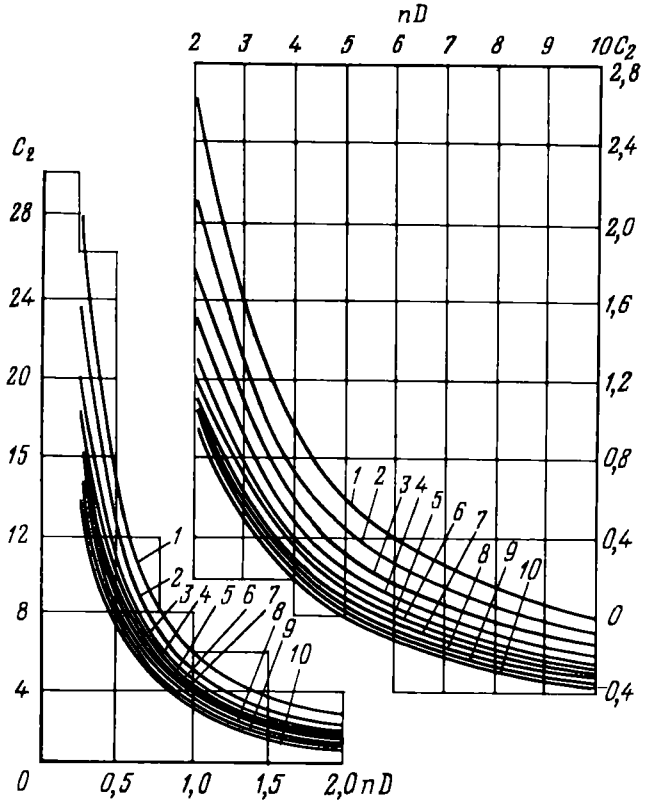


Рис. 4.12. Графики В. И. Щурова для определения коэффициента C_2 при $l = 0{,}5$. Номерам кривых соответствуют значения α: *1*–0,02; *2*–0,04; *3*–0,06; *4*–0,08; *5*–0,1; *6*–0,12; *7*–0,14; *8*–0,16; *9*–0,18; *10*–0,2

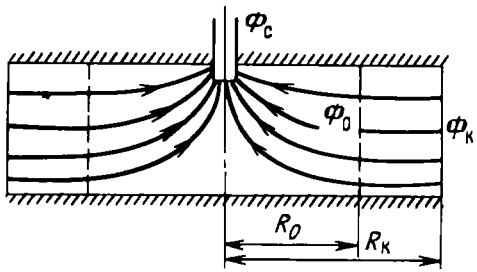


Рис. 4.13. Схема притока к несовершенной скважине, вскрывшей пласт на малую глубину ($b \ll h$)

Иногда бывает удобно ввести понятие о приведенном радиусе скважин $\bar{r}_c$, т.е. радиусе такой совершенной скважины, дебит которой равен дебиту данной несовершенной скважины:

$$\bar{r}_c = r_c e^{-C}.$$

Тогда (4.26) можно заменить следующей формулой:

$$Q = \frac{2\pi kh(p_к - p_c)}{\eta \ln(R_к/\bar{r}_c)}.$$

И. А. Чарный предложил следующий способ определения дебита скважины, несовершенной по степени вскрытия, если величина вскрытия пласта b мала ($b \ll h$). Область движения условно разбивается на две зоны (рис. 4.13). Первая – между контуром питания и радиусом R_0, равным или большим толщины пласта $R_0 \geqslant h$, в этой зоне движение можно считать плоскорадиальным. Вторая – между стенкой скважины и цилиндрической поверхностью R_0, где движение будет существенно пространственным. Обозначим потенциал при $r = R_0$ через Φ_0. Тогда для зоны $R_0 \leqslant r \leqslant R_к$ можно записать формулу Дюпюи:

$$Q = \frac{2\pi h(\Phi_к - \Phi_0)}{\ln(R_к/R_0)}. \tag{4.27}$$

Для зоны $r_c \leqslant r \leqslant R_0$, считая здесь приближенно движение радиально-сферическим между полусферами радиусами r_c и R_0, имеем:

$$Q = \frac{2\pi(\Phi_0 - \Phi_c)}{\frac{1}{r_c} - \frac{1}{R_0}} \approx 2\pi r_c(\Phi_0 - \Phi_c). \tag{4.28}$$

Из формул (4.27) и (4.28) по правилу производных пропорций получается формула для дебита скважины:

$$Q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\frac{1}{h}\ln\frac{R_к}{R_0} + \frac{1}{r_c}}.$$

Приняв $R_0 = 1{,}5h$, получим окончательно формулу для дебита несовершенной скважины, вскрывшей пласт на малую глубину:

$$Q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\frac{1}{h}\ln\frac{R_к}{1{,}5h} + \frac{1}{r_c}}. \tag{4.29}$$

Задачи притока жидкости к скважинам, гидродинамически несовершенным по характеру вскрытия пласта, и к скважинам с двойным видом несовершенства, еще более сложны для исследования, чем приток к несовершенным по степени вскрытия пласта скважинам. Такого рода

задачи решались теоретически М. М. Глоговским, А. Л. Хейном, М. Маскетом и другими исследователями. Все полученные ими решения весьма сложны. Наибольшее распространение в практике расчетов дебитов несовершенных скважин по характеру вскрытия пласта и с двойным несовершенством получили результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных В. И. Щуровым, Г. Г. Поляковым, М. Н. Тиховым и М. С. Ватсоном.

5.3. Приток газа к несовершенным скважинам при двучленном законе фильтрации

Несовершенство газовых скважин при выполнении закона Дарси учитывается так же, как несовершенство нефтяных скважин, т. е. радиус скважины в формуле дебита заменяется приведенным радиусом:

$\bar{r}_c = r_c e^{-(C_1 + C_2)}$.

Для расчета дебитов газовых скважин несовершенных по степени и по характеру вскрытия при нарушении закона Дарси может быть предложена следующая схема. Круговой пласт, в центре которого находится скважина, делится на три области (рис. 4.14). Первая область имеет радиус $R_1 = (2 \div 3) r_c$, здесь из-за больших скоростей вблизи перфорационных отверстий происходит нарушение закона Дарси, т. е. в основном проявляется несовершенство по характеру вскрытия. Линии тока показаны на рис. 4.14. Вторая область представляет собой кольцевое пространство $R_1 < r < R_2$, $R_2 \approx h$; здесь линии тока искривляются из-за несовершенства скважины по степени вскрытия, имеет место двучленный закон фильтрации.

В третьей области $R_2 < r < R_к$ действует закон Дарси, течение можно считать плоскорадиальным. Обозначив давления на границах областей через p_1 и p_2, запишем для третьей области в соответствии с формулой (3.80):

$$p_к^2 - p_2^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{\eta} \tilde{z}}{\pi k h} \ln \frac{R_к}{R_2}. \qquad (4.30)$$

Во второй области примем, что толщина пласта переменна и изменяется по линейному закону от значения b при $r = R_1$, до значения h при $r = R_2$, т. е.

$$z(r) = \alpha + \beta r, \qquad (4.31)$$

где α и β определяются из условий $z = b$ при $r = R_1$, $z = h$ при $r = R_2$.

Чтобы получить закон движения в этой области, надо проинтегрировать уравнение (3.103), предварительно подставив вместо постоянной толщины h переменную толщину по формуле (4.31).

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{\eta} \tilde{z}}{\pi k h} \left(\ln \frac{R_2}{R_1} + C_1 \right) +$$

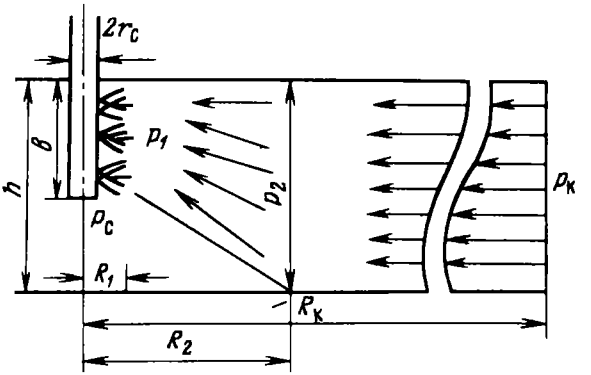


Рис. 4.14. Схема притока газа к несовершенной по степени и характеру вскрытия скважине

$$+\frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z} Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+C_1'\right). \tag{4.32}$$

Здесь C_1 и C_1' – коэффициенты, характеризующие несовершенство скважины по степени вскрытия.

$$C_1=\frac{1}{\bar{h}}\ln\bar{h}+\frac{1-\bar{h}}{\bar{h}}\ln(h/R_1),$$

$$C_1'\approx\left(\frac{1}{\bar{h}^2}-1\right)\frac{1}{R_1},\quad \bar{h}=b/h. \tag{4.33}$$

Обе последние формулы – приближенные, они имеют место при значениях $b \gg R_1$.

В первой области фильтрация происходит по двучленному закону, плоскорадиальное течение нарушается из-за перфорационных отверстий; несовершенство по характеру вскрытия учитывается коэффициентами C_2 и C_1':

$$p_1^2-p_2^2=\frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{\eta} \tilde{z}}{\pi k h}\left(\ln\frac{R_1}{r_c}+C_2\right)+$$

$$+\frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z} Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k}}\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{R_1}+C_2'\right). \tag{4.34}$$

Здесь C_2 определяется по графикам В. И. Щурова, для C_2' предлагается приближенная формула

$$C_2'=h^2/3N^2 l'^3, \tag{4.35}$$

где N – суммарное число перфорационных отверстий; l' – глубина проникновения перфорационной пули в пласт.

Складывая почленно уравнения (4.30), (4.32) и (4.34) и пренебрегая величиной $1/R_2$, получим уравнение притока газа к несовершенной скважине в виде

$$p_к^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \tilde{\eta} \tilde{z}}{\pi k h}\left(\ln\frac{R_к}{r_c} + C_1 + C_2\right) +$$

$$+ \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z} Q_{ат}^2}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k r_c}}(1 + r_c C_1' + r_c C_2'). \qquad (4.36)$$

Если записать уравнение (4.36) через коэффициенты фильтрационных сопротивлений A_1 и B_1 в виде (3.111), то для несовершенной скважины получим:

$$A_1 = \frac{p_{ат} \tilde{\eta} \tilde{z}}{\pi k h}\left(\ln\frac{R_к}{r_c} + C_1 + C_2\right); \quad B_1 = \frac{\rho_{ат} p_{ат} \beta \tilde{z}}{2\pi^2 h^2 \sqrt{k r_c}}(1 + r_c C_1' + r_c C_2'),$$

где C_1 и C_1' определяются по формулам (4.33), C_2' – по формуле (4.35), а C_2 – по графикам В. И. Щурова (см. рис. 4.12).

§ 6. ПРИТОК НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ

Традиционные методы разработки месторождений системой вертикально пробуренных скважин не всегда эффективны. В 50-е годы в нашей стране группа специалистов начала разрабатывать и применять специальную технику и технологию бурения многозабойных наклонных и горизонтальных скважин. Большой вклад в этом направлении был сделан А. М. Григоряном. В эти же годы были выполнены первые теоретические работы по расчету притока нефти к горизонтальным скважинам (П. Я. Полубаринова-Кочина, Ю. П. Борисов, В. П. Пилатовский, В. П. Меркулов, В. П. Табаков). Однако отсутствие необходимой техники в то время не позволило найти широкое практическое применение этому методу.

В последнее десятилетие в нашей стране и за рубежом ведутся интенсивные практические и теоретические работы в области применения технологии наклонно горизонтального бурения. Преимущества горизонтальных скважин в ряде случаев очевидны. Горизонтальная скважина имеет значительно бóльшую область дренирования, чем вертикальная. Особенно сильно проявляется этот эффект в пластах малой продуктивной толщины. Область дренирования горизонтальной скважины можно аппроксимировать объемом достаточно протяженного вдоль напластования эллипсоида, тогда как вертикальная скважина дренирует объем кругового цилиндра. Продуктивность горизонтальной скважины растет с ее длиной. Выигрыш в производительности может быть в 3–5 раз.

Горизонтальные скважины особенно эффективны в месторождениях, содержащих вертикальные трещины. В сильно неоднородных по проницаемости пластах (таких, например, как карстовые залежи) горизонтальные скважины имеют бóльшую вероятность встретить продуктивную зону, чем вертикальные. В плане борьбы с обводнением горизонтальная скважина также имеет преимущества.

Гидродинамические расчеты технологических показателей процесса разработки месторождений горизонтальными и наклонными скважинами не могут быть выполнены при помощи обычных формул, применяемых для расчета взаимодействия вертикальных скважин. Поэтому развитие гидродинамических методов подобных расчетов является в настоящее время крайне актуальной задачей. Приведем здесь идею некоторых приближенных подходов к определению дебита горизонтальной скважины, не останавливаясь на выкладках и преобразованиях.

Рассмотрим стационарный приток несжимаемой жидкости (нефти) к горизонтальной скважине длины $2l$ в однородном изотропном пласте проницаемости k с продуктивной толщиной h и непроницаемой кровлей и подошвой. Для простоты предполагаем, что скважина раположена на оси пласта. Учет несимметричности ее расположения (эксцентрисета) связан лишь с некоторыми дополнительными техническими трудностями. Будем считать справедливым закон Дарси. Пусть на забойной поверхности скважины поддерживается постоянное рабочее давление p_0, а на удаленном круговом «контуре питания» с радиусом $R_к$ (эффективный радиус дренажа) – постоянное давление $p_к (p_к > p_c)$. Требуется определить суммарный дебит такой скважины.

Такая задача сводится к решению трехмерного уравнения Лапласа для давления (см. § 1 этой главы) с соответствующими краевыми условиями и не имеет простого аналитического решения. Для получения простой расчетной формулы для дебита может быть использован следующий приближенный прием. Будем моделировать горизонтальную скважину в горизонтальном (А–А) и вертикальном (В–В) сечениях, соответственно: а) линейным стоком длины $2l$ с постоянной плотностью $q = Q/(2l)$ (Q – общий объемный расход жидкости в стоке) или б) «точечным» стоком радиуса r_c, расположенным посередине между двумя плоскостями.

Тогда исходную пространственную задачу можно свести к решению двух плоских задач: течению нефти в горизонтальной плоскости к линейному стоку (очень тонкой пластине) и притоку нефти в вертикальной плоскости к точечному стоку в полосе шириной h. Суммарная производительность горизонтальной скважины рассчитывается как суперпозиция соответствующих решений этих двух плоских задач. Для решения каждой из плоских задач может быть использован метод отображения источников и стоков (см. § 3), метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений (§ 4) или часто более удобный метод комплексного потенциала (гл. 4, § 8).

Гидродинамическое поле течения представляет семейство взаимно ортогональных линий тока – гиперболы и эквипотенциалей – эллипсы

для первой плоской задачи. Дебит линейного стока определяется по формуле

$$q_1 = \frac{2\pi kh\Delta p/\eta}{\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-l^2}}{l}\right)},$$

где $\Delta p = p_к - p_c$, a – большая полуось удаленного эллипса, на котором поддерживается постоянное давление $p_к$.

При расчетах обычно используют эффективный радиус $R_к$ кругового контура питания, который определяется из двух соотношений:

1) $R_к = \sqrt{ab}$ (равенство площадей дренажа: круговой и эллиптической);

2) условия того, что точки $-l$ и l являются фокусами эллипса дренажа, так что $b = \sqrt{a^2 - l^2}$.

Эти условия приводят к равенству

$$R_к = a\left[1 - \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]^{1/4}. \tag{4.37}$$

В случае притока жидкости к «точечному» стоку в полосе дебит находится по формуле

$$q_2 = \frac{2\pi kh\Delta p/\eta}{\dfrac{h}{2l}\ln\left(\dfrac{h}{2r_c}\right)}.$$

Результирующий дебит Q скважины находится суммированием фильтрационных сопротивлений, соответствующих каждой из задач. Соответствующая формула имеет вид:

$$Q = \frac{2\pi kh\Delta p/\eta}{\ln\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-l^2}}{l}\right) + \dfrac{h}{2l}\ln\left(\dfrac{h}{2r_c}\right)}. \tag{4.38}$$

Эта расчетная формула была получена S. D. Joshi (1988 г.).

Приведем два других соотношения для определения дебита Q:

Ю. П. Борисов (1964 г.)

$$Q = \frac{2\pi kh\Delta p/\eta}{\ln\left(\dfrac{2R_к}{l}\right) + \dfrac{h}{2l}\ln\left(\dfrac{h}{2\pi r_c}\right)}, \tag{4.39}$$

В. П. Пилатовский (1964 г.)

$$2\pi h\frac{k}{\eta}\frac{\Delta p}{Q} = 1 + \ln\frac{R_к}{l} - \frac{h}{2l}\ln\left(\frac{2\pi r_c}{h}\right) - \frac{r_c}{l}\operatorname{arctg}\frac{l}{r_c}. \tag{4.40}$$

Таблица 4.1

Половина длины скважины, l, м	Коэффициент продуктивности J^*					
	$R_к = 200$ м			$R_к = 500$ м		
	Метод расчета (формула)					
	(4.38)	(4.39)	(4.40)	(4.38)	(4.39)	(4.40)
5	0,121	0,142	0,135	0,110	0,125	0,120
10	0,177	0,195	0,185	0,155	0,165	0,160
20	0,252	0,270	0,253	0,204	0,220	0,210
30	0,308	0,325	0,300	0,241	0,250	0,235
40	0,358	0,375	0,340	0,270	0,280	0,260
50	0,400	0,420	0,375	0,295	0,310	0,285
60	0,450	0,470	0,415	0,318	0,330	0,300

Интересно отметить, что максимальное различие в величинах дебита Q, рассчитанного по формулам (4.38)–(4.40), полученным различными методами, не превышает 11%. В табл. 4.1 приведены сравнительные результаты расчетов безразмерного коэффициента продуктивности $J^* = Q\eta/(2\pi kh\Delta p)$ в зависимости от половины длины скважины l при различных значениях эффективного радиуса контура питания $R_к$. При этом было принято $h = 10$ м, $r_c = 0{,}1$ м, а величина a в соотношении (4.38) вычислялась по следующей формуле, получающейся из (4.37):

$$a = l(0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + R_к^4/l^4})^{1/2}.$$

Постройте графики зависимости $J^*(l)$ и проанализируйте взаимное расположение этих кривых, построенных по различным формулам.

В заключение заметим, что при определенных условиях формулы (4.38)–(4.40) можно упростить. Например, если длина горизонтальной скважины $2l$ значительно больше продуктивной толщины пласта h, т. е. $2l \gg h$, то вторым слагаемым в знаменателе формулы (4.39) можно пренебречь, и она сводится к виду, эквивалентному формуле Дюпюи:

$$Q = 2\pi h \frac{k}{\eta} \frac{\Delta p}{\ln \dfrac{R_к}{l/2}}. \qquad (4.41)$$

Таким образом, дебит достаточно протяженной горизонтальной скважины можно приближенно вычислять по формуле (4.41), т. е. так же, как для эквивалентной совершенной вертикальной скважины с приведенным радиусом r_c', равным одной четверти длины L горизонтальной скважины: $r_c' = l/2 = L/4$.

Контрольные вопросы и задачи

1. Как определяется потенциал скорости фильтрации? Как записывается выражение для потенциала источника или стока на плоскости при фильтрации жидкости?

2. В чем заключается метод суперпозиции? При каких условиях он имеет место?

3. Вывести формулу для потенциала источника и стока на плоскости при фильтрации газа.

Указание. Потенциал при фильтрации газа определяется из соотношения $\rho w = -d\Phi/ds$.

4. В чем заключается метод отображения источников и стоков? Как отобразить скважину, расположенную вблизи непроницаемой границы, относительно этой границы? Какое условие должно выполняться на этой границе?

5. В полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания работает добывающая скважина, расположенная на расстоянии a от контура, с дебитом на единицу толщины пласта, равным q. Найти скорость фильтрации в точке пласта с координатами $x = a$, $y = a$ (см. рис. 4.4).

6. Вывести формулу для дебита скважины, расположенной в пласте, ограниченном двумя прямолинейными непроницаемыми границами под углом 90° друг к другу. Расстояния от центра скважины до границ равны a и b, расстояние до контура питания $R_к$; $R_к \gg a$, $R_к \gg b$. Известны потенциалы на контуре $-\Phi_к$ и на забое $-\Phi_с$.

7. В круговом пласте на расстоянии 2σ друг от друга работают две одинаковые скважины с забойными давлениями $p_с$. Давление на контуре питания, удаленном на расстояние $R_к$ от скважин, равно $p_к (R_к \gg \sigma)$. Найти распределение скоростей фильтрации вдоль срединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему центры скважин.

8. Вывести формулу дебита одной скважины круговой батареи радиуса R, состоящей из n скважин, расположенной в круговом пласте радиуса $R_к$. Считать, что $R_к \gg R$. Радиус всех скважин $r_с$.

Указание. При выводе использовать соотношение $\prod_{i=1}^{n-1} \sin\frac{\pi i}{n} = n2^{1-n}$.

9. Укажите виды несовершенства скважин. Как записывается формула дебита гидродинамически несовершенной скважины? Что называется дополнительным фильтрационным сопротивлением?

10. Определить приведенный радиус гидродинамически несовершенной скважины с двойным видом несовершенства, если по графикам Щурова установлено, что $C_1 = 3$, $C_2 = 5$. Известно, что $r_с = 0{,}1$ м.

Глава 5

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ (ДЕФОРМИРУЕМОЙ) ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. УПРУГИЙ РЕЖИМ ПЛАСТА И ЕГО ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

В практике разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений в пластах часто возникают неустановившиеся процессы, связанные с пуском плп остановкой скважин, с изменением темпов отбора флюида из скважин. Характер этих процессов проявляется в перераспределении пластового давления, в изменениях во времени скоростей фильтрационных потоков, дебитов скважин и т. д. Особенности этих неустановившихся процессов зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их жидкостей. Это означает, что основной формой пластовой энергии, обеспечивающей приток жидкости к скважинам в этих процессах, является энергия упругой деформации жидкостей (нефти и воды) и материала пласта.

При этом, для проявления упругих сил необходимо, чтобы фильтрационный поток был однофазным, т. е. давление в любой точке потока должно быть выше давления насыщения жидкости газом.

При пуске скважины в эксплуатацию в условиях упругого режима движение жидкости начинается за счет использования потенциальной энергии упругой деформации пласта и жидкости сначала в ближайших окрестностях забоя, затем во все более удаленных областях пласта.

При снижении пластового давления объем сжатой жидкости увеличивается, а объем порового пространства сокращается за счет расширения материала пласта. Все это способствует вытеснению жидкости из пласта в скважину. Хотя коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и породы пласта очень малы, но зато очень велики бывают объемы пласта и насыщающих его флюидов, поэтому объемы жидкости, извлекаемой из пласта за счет упругости пласта и жидкости, могут быть весьма значительными.

В некоторых случаях приток жидкости к забоям скважин поддерживается и напором воды, поступающей в пласт из области питания. Тогда режим пласта следует называть упруговодонапорным. Различают и вторую разновидность упругого режима – замкнуто-упругий режим. Встречаются залежи нефти в закрытых со всех сторон пластовых «ловушках», когда на небольших расстояниях от нефтяной залежи продуктивный пласт либо выклинивается, либо экранирован сбросом. В начальной стадии разработки такой залежи, до тех пор пока пластовое давление не снизилось до давления насыщения, имеет место замкнуто-упругий режим фильтрации.

Характерная особенность проявления упругого режима в процессе

разработки нефтяных месторождений – длительность процесса перераспределения пластового давления после начала работы скважины или изменения темпа отбора жидкости из скважины. Это связано с тем, что при фильтрации вязкой жидкости в пласте возникают очень большие силы сопротивления. Неустановившиеся процессы протекают тем быстрее, чем больше коэффициент проницаемости k, и тем медленнее, чем больше вязкость жидкости η и коэффициенты объемной упругости жидкости $\beta_ж$ и пласта β_c.

Первыми исследователями, разрабатывавшими теорию упругого режима в 30-х годах, были Маскет, Шилсуиз, Херст, Тсейс и Джекоб. Однако они не учитывали объемную упругость пласта. Наиболее полно теория упругого режима с учетом упругих свойств пласта и насыщающих жидкостей разработана В. Н. Щелкачевым.

§ 2. ПОДСЧЕТ УПРУГОГО ЗАПАСА ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

Под упругим запасом жидкости в пласте понимается количество жидкости, которое можно извлечь из пласта при снижении давления в нем за счет объемной упругости пласта и насыщающих его жидкостей.

Хотя коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и пласта очень малы (см. гл. 2), зато очень велики объемы пласта. Поэтому упругий запас жидкости в пласте может быть весьма существенным.

При снижении давления в пласте упругий запас жидкости естественно убывает, а при повышении давления происходит накопление упругого запаса жидкости в нем.

Упругий запас жидкости в пласте можно подсчитать следующим образом.

Выделим мысленно элемент объема пласта V_0. Пусть $V_{0ж}$ есть объем жидкости, насыщающей этот элемент объема пласта V_0 при начальном давлении p_0. Упругий запас жидкости будем определять по ее объему, замеряемому при начальном пластовом давлении. Обозначим через $\Delta V_э$ изменение упругого запаса жидкости внутри объема пласта V_0 при изменении давления во всех его точках на величину Δp. Тогда, в соответствии с формулами (2.25) и (2.24), получим:

$$\Delta V_э = \beta_ж V_{0ж} \Delta p + \beta_c V_0 \Delta p. \tag{5.1}$$

Учтем, что начальный объем жидкости, насыщающей элемент объема пласта V_0, равен полному объему пор в этом элементе:

$$V_{0ж} = mV_0, \tag{5.2}$$

где m – пористость пласта.

Тогда формулу (5.1) с учетом равенства (5.2) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta V_э = (m\beta_ж + \beta_c) V_0 \Delta p \tag{5.3}$$

или

$$\Delta V_{\text{у}} = \beta^* V_0 \Delta p, \tag{5.4}$$

где

$$\beta^* = m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}}. \tag{5.5}$$

Коэффициент β^* называется коэффициентом упругоемкости пласта. На основании формулы (5.4) коэффициент упругоемкости пласта β^* численно равен изменению упругого запаса жидкости в единице объема пласта при изменении пластового давления в нем на единицу.

Если формулы (5.3) или (5.4) относить к разрабатываемому в условиях замкнуто-упругого режима нефтяному месторождению, то под V_0 следует понимать объем пласта, в котором к данному моменту времени произошло изменение давления на величину Δp, при этом

$$\Delta p = p_{\text{к}} - \tilde{p}, \tag{5.6}$$

где $p_{\text{к}}$ – начальное пластовое давление; $\tilde{p}$ – средневзвешенное по объему возмущенной части пласта V_0 давление.

Вычислить средневзвешенное пластовое давление $\tilde{p}$ можно, если известна геометрия возмущенной части пласта и конкретное распределение давления в ней.

Дифференцируя равенство (5.4), получим:

$$d(\Delta V_{\text{у}}) = \beta^* d[V_0(t)\Delta p].$$

С другой стороны, изменение упругого запаса жидкости в пласте за время dt равное объему отобранной жидкости:

$$d(\Delta V_{\text{у}}) = Q(t)\,dt,$$

где $Q(t)$ – дебит всех скважин, эксплуатирующих данную нефтяную залежь.

Приняв правые части двух последних равенств, получим дифференциальное уравнение истощения нефтяной залежи в условиях замкнуто-упругого режима

$$\beta^* d[V_0(t)\Delta p] = Q(t)\,dt \tag{5.7}$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Изучение гидродинамических основ упругого режима фильтрации имеет важнейшее значение для теории и практики разработки нефтяных и газовых месторождений. Знание этих основ позволяет в наиболее полной мере использовать упругий запас пластовых флюидов для обеспечения притока к скважинам, правильно определять потенциальные возможности упругой водонапорной системы для вытеснения флюидов, ставить и решать так называемые обратные задачи опре-

деления коллекторских свойств пластов по наблюдениям за изменением дебитов или давлений и т. д. Как правило, при естественном упругом режиме добывается незначительная часть извлекаемых запасов (до 2–5%). Однако известны случаи, когда упругий запас настолько велик, что позволяет отобрать гораздо больше. Так, например, на крупнейшем месторождении Тенгиз при упругом режиме будет отобрано около 20% запасов нефти.

Для вывода основных дифференциальных уравнений фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде необходимо воспользоваться уравнением неразрывности потока, уравнениями состояния пористой среды и насыщающей ее жидкости и уравнениями движения. При этом используем подход, развитый в гл. 2, в соответствии с которым в качестве уравнения состояния среды и жидкости используются упрощенные эмпирические соотношения. Как показывают результаты лабораторных экспериментов на образцах пород-коллекторов, а также опыт разработки месторождений, в ряде случаев наряду с изменением пористости вследствие происходящих деформаций существенны изменения проницаемости пластов. Особенно это относится к глубокозалегающим нефтяным и газовым месторождениям. Это вызывает необходимость учета в фильтрационных расчетах как при упругом, так и при других режимах фильтрации изменений проницаемости с изменением пластового давления (см. гл. 2). Развитию теории упругого режима с учетом этого фактора посвящено большое число исследований. Однако изложение этого раздела в более общей постановке, предусматривающей также введение в уравнения фильтрации зависимости проницаемости от давления, заметно усложнит изложение, поэтому авторы считают целесообразным, сохранив традиционный подход, рекомендовать читателям обратиться к монографиям, посвященным этому вопросу.

В качестве уравнения движения используем линейный (закон Дарси) и нелинейный (двучленный) закон фильтрации.

3.1. Вывод дифференциального уравнения фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде по закону Дарси

Обратимся к общему дифференциальному уравнению (2.56) неустановившегося движения сжимаемого флюида по закону Дарси в деформируемой пористой среде, выведенному в гл. 2 при $k = \text{const}$, $\eta = \text{const}$:

$$\frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = \frac{k}{\eta} \nabla^2 P, \tag{5.8}$$

где функция Лейбензона P определена формулой (2.55).

Используем уравнения состояния упругой жидкости и упругой пористой среды в ранее полученной форме (2.27) и (2.44):

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_ж (p - p_0)]; \tag{5.9}$$

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0). \tag{5.10}$$

Произведение $m\rho$ можно получить, умножив (5.10) на (5.9):

$$m\rho = m_0\rho_0 + (m_0\rho_0\beta_ж + \rho_0\beta_c)(p - p_0) + \rho_0\beta_c\beta_ж(p - p_0)^2.$$

Последним слагаемым в правой части этого равенства ввиду его малости по сравнению с двумя другими слагаемыми можно пренебречь.

Тогда, с учетом (5.5), получим:

$$m\rho = m_0\rho_0 [1 + \beta^* (p - p_0)/m_0],$$

откуда после дифференцирования по времени t находим:

$$\frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = \rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5.11}$$

Выражение функции Лейбензона P для упругой жидкости имеет вид с учетом (2.59):

$$P = \frac{\rho_0}{\beta_ж} + \rho_0 (p - p_0) + C = \rho_0 p + C_1. \tag{5.12}$$

Продифференцировав дважды выражение (5.12) по координатам и сложив, получим:

$$\nabla^2 P = \rho_0 \nabla^2 p. \tag{5.13}$$

Подставив (5.11) и (5.13) в исходное дифференциальное уравнение (5.8), получим:

$$\rho_0 \beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\eta} \rho_0 \nabla^2 p$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \tag{5.14}$$

где введено обозначение

$$\varkappa = k/(\eta \beta^*). \tag{5.15}$$

Отметим, что при выводе уравнения (5.14) не учитываются силы инерции и гравитации.

Уравнение (5.14) – основное дифференциальное уравнение упругого режима фильтрации. По предложению В. Н. Щелкачева оно названо уравнением пьезопроводности. Оно относится к уравнениям типа уравнения теплопроводности (уравнения Фурье), которое является одним из основных уравнений математической физики.

Коэффициент $\varkappa$, характеризующий скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде, В. Н. Щелкачев назвал коэффициентом

пьезопроводности пласта по аналогии с коэффициентом температуропроводности в уравнении теплопроводности.

Размерность коэффициента пьезопроводности $\varkappa$ можно установить из (5.15):

$$[\varkappa] = \frac{[k]}{[\eta][\beta^*]} = \frac{L^2}{L^{-1}MT^{-1}LM^{-1}T^2} = \frac{L^2}{T},$$

где L, M, T – соответственно размерности длины, массы и времени.

Наиболее часто встречающиеся в нефтепромысловой практике значения коэффициента пьезопроводности заключены в пределах от 0,1 до 5 м^2/с.

Отметим, что уравнение пьезопроводности (5.14) имеет место только для слабосжимаемой упругой жидкости, для которой $\beta_ж(p - p_0) \ll 1$. Если же это условие не выполняется, то функцию Лейбензона нельзя определять по формуле (5.12), необходимо сохранить слагаемое $\beta_ж(p - p_0)$ под интегралом. При этом дифференциальное уравнение значительно усложнится и примет нелинейный вид.

3.2. Вывод дифференциального уравнения фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде по двучленному закону фильтрации

Прямолинейно-параллельный поток упругой жидкости. Как обычно, вывод дифференциального уравнения фильтрации основывается на уравнении неразрывности (2.5), которое для неустановившегося прямолинейно-параллельного фильтрационного потока сжимаемого флюида имеет вид

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho_m)}{\partial t}. \tag{5.16}$$

Двучленный закон фильтрации (2.21) будем использовать в форме

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{k} w_x + \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} w_x^2 \operatorname{sgn} w_x, \tag{5.17}$$

где sgn – символ знака функции.

В дальнейшем будем считать, что $k = \text{const}$, $\eta = \text{const}$. Умножим обе части равенства (5.17) на плотность ρ и найдем, решая квадратное уравнение, выражение для массовой скорости фильтрации:

$$\rho w_x = -\frac{\eta}{2\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w_x}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k\sqrt{k}\,\beta\rho \operatorname{sgn} w_x}{\eta^2}\frac{\partial p}{\partial x}}\right).$$

Исходя из физического смысла, перед корнем следует взять знак минус, поэтому окончательное выражение для массовой скорости следующее:

$$\rho w_x = -\frac{\eta}{2\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w_x}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k\sqrt{k}\,\beta\rho \operatorname{sgn} w_x}{\eta^2}}\,\frac{\partial p}{\partial x}\right). \tag{5.18}$$

Вычислим левую часть уравнения неразрывности (5.16) с учетом формулы (5.18):

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} = -\frac{k}{\eta}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4k\sqrt{k}\,\beta\rho \operatorname{sgn} w_x}{\eta^2}\,\frac{\partial p}{\partial x}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Для упругой жидкости правая часть уравнения (5.16) записывается по формуле (5.11); тогда уравнение фильтрации примет вид:

$$\frac{k}{\eta}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w_x}{\eta^2}\,\rho\frac{\partial p}{\partial x}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \rho_0\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Использовав уравнение состояния упругой жидкости (5.9) и введя в рассмотрение функцию давления

$$u(x,t) = 1 + \beta_ж(p - p_0), \tag{5.19}$$

получим окончательно уравнение неустановившейся прямолинейно-параллельной фильтрации упругой жидкости при двучленном законе фильтрации:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 - \frac{4k\sqrt{k}\,\beta\rho_0 \operatorname{sgn} w_x}{\beta_ж\eta^2}\,u\frac{\partial u}{\partial x}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{5.20}$$

Если $\beta = 0$, т.е. имеет место закон Дарси, и $\beta_ж(p - p_0) \ll 1$, то в уравнении (5.20) подкоренное выражение обращается в единицу и можно считать функцию u, входящую множителем, равной единице; кроме того, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta_ж\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_ж\frac{\partial p}{\partial x}$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{5.21}$$

которое является одномерным вариантом уравнения пьезопроводности (5.14).

Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости. Для плоскорадиального фильтрационного потока уравнение неразрывности (2.10) было выведено в гл. 2:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial r} + \frac{\rho w}{r} = \frac{\partial(\rho m)}{\partial t}. \tag{5.22}$$

Двучленный закон фильтрации в этом случае можно записать в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\eta}{k} w + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \operatorname{sgn} w \rho w^2,$$

где w – радиальная составляющая скорости фильтрации, которая считается положительной при движении к скважине.

Умножим обе части этого соотношения на ρ и найдем выражение для массовой скорости:

$$\rho w = -\frac{\eta}{2\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}{\eta^2}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}}\right).$$

Здесь, как и ранее, взят знак минус перед корнем квадратным.

Последовательно вычисляем каждое слагаемое в левой части уравнения неразрывности (5.22).

Первое слагаемое:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial r} = \frac{k}{\eta\sqrt{1 + \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}{\eta^2}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial r}\right). \tag{5.23}$$

Второе слагаемое:

$$\frac{\rho w}{r} = -\frac{\eta}{2\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w} \frac{1}{r}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}{\eta^2}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}}\right).$$

Умножим и разделим правую часть последнего соотношения на выражение

$$1 + \sqrt{1 + \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}{\eta^2}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}},$$

при этом после упрощения получим:

$$\frac{\rho w}{r} = \frac{k}{\eta}\frac{2}{r} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}{\eta^2}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}}}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{5.24}$$

Подставив выражения (5.23), (5.24), (5.11) в уравнение (5.22), получим:

$$\frac{k}{\eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w}{\eta^2}\,\rho \frac{\partial p}{\partial r}}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \right.$$

$$+\frac{2}{r}\frac{}{1+\sqrt{1+\frac{4k\sqrt{k}\,\beta\,\mathrm{sgn}\,w}{\eta^2}\rho\frac{\partial p}{\partial r}}}\rho\frac{\partial p}{\partial r}\Bigg\}=\rho_0\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5.25}$$

Введя в рассмотрение функцию $u(r, t)$, определенную равенством (5.19), уравнению (5.24) можно придать вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4k\sqrt{k}\,\beta\rho_0\,\mathrm{sgn}\,w}{\beta_ж\eta^2}u\frac{\partial u}{\partial r}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(u\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{4k\sqrt{k}\,\beta\rho_0\,\mathrm{sgn}\,w}{\beta_ж\eta^2}u\frac{\partial u}{\partial r}}}u\frac{\partial u}{\partial r}\right]. \tag{5.26}$$

Это и есть основное уравнение для плоскорадиального фильтрационного потока упругой жидкости при двучленном законе фильтрации.

Для линейного закона фильтрации ($\beta=0$) и слабосжимаемой жидкости ($\beta_ж(p-p_0)\ll 1$) можно заменить функцию u, входящую множителем, на единицу, и учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial r}=\beta_ж\frac{\partial p}{\partial r}$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\beta_ж\frac{\partial p}{\partial t}$ получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right). \tag{5.27}$$

Приведенные здесь линейные уравнения неустановившейся фильтрации упругой жидкости (5.14), (5.21), (5.27), полученные при использовании линейного закона фильтрации, просты и для них существуют точные решения. Они рассматриваются в следующем параграфе.

Уравнения (5.20) и (5.27), выведенные при использовании двучленного закона фильтрации, довольно сложны и даже приближенное аналитическое решение этих уравнений представляется проблематичным. В то же время, решение этих уравнений с использованием ЭВМ достаточно просто.

§ 4. ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА

Рассмотрим наиболее простые точные решения уравнения пьезопроводности (5.14) для одномерных потоков.

4.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток упругой жидкости

Случай 1. Пусть в полубесконечном горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B начальное пластовое давление всюду постоянно и равно $p_к$. На галерее (при $x = 0$) давление мгновенно снижено до $p_г$ и в дальнейшем поддерживается постоянным (т. е. $p_г = \text{const}$). В удаленных точках ($x \to \infty$) давление в любой момент времени остается равным $p_к$.

В пласте образуется неустановившийся прямолинейно-параллельный поток упругой жидкости. Давление в любой точке потока x и в любой момент времени t можно определить, интегрируя уравнение Фурье (5.21):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty. \tag{5.28}$$

Начальные и граничные условия при этом будут следующие:

$$p(x, t) = p_к \quad \text{при } t = 0;$$
$$p(x, t) = p_г \quad \text{при } x = 0,\ t > 0;$$
$$p(x, t) = p_к \quad \text{при } x = \infty,\ t \geqslant 0. \tag{5.29}$$

Задача заключается в определении дебита галереи $Q(t)$ и давления в любой точке потока и в любой момент времени $p(x, t)$.

Используя анализ размерностей, покажем, что поставленная задача автомодельна, т. е. из аргументов, от которых зависит давление, можно составить один (безразмерный) комплекс.

Обозначим через $P = (p - p_г)/(p_к - p_г)$ безразмерное давление, которое, как следует из соотношений (5.28) и (5.29), зависит от времени t, координаты x и коэффициента пьезопроводности $\varkappa$, т. е.

$$P = f(x, t, \varkappa).$$

Размерности этих аргументов следующие: $[x] = \text{L}$, $[t] = \text{T}$, $[\varkappa] = \text{L}^2\text{T}^{-1}$, и из них можно составить один безразмерный комплекс $x/\sqrt{\varkappa t}$. Приняв за новую переменную величину $u = x/(2\sqrt{\varkappa t})$, сведем задачу к нахождению безразмерного давления P, зависящего только от u: $P = f(u)$. При этом условия (5.29) переходят в следующие:

$$P = 0 \quad \text{при } u = 0;$$
$$P = 1 \quad \text{при } u = \infty \tag{5.30}$$

В силу линейности дифференциального уравнения (5.28) для функции P имеем такое же уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \tag{5.31}$$

По правилу дифференцирования сложных функций находим:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dP}{du}\frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}, \quad \text{где } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}};$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dP}{du}\frac{x}{2\sqrt{\varkappa}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}\right) = \frac{dP}{du}\left(-\frac{u}{2t}\right);$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dP}{du}\frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\frac{d^2P}{du^2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\varkappa t}\frac{d^2P}{du^2}.$$

Подставляя найденные значения производных в уравнение (5.31), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2P}{du^2} + 2u\frac{dP}{du} = 0, \tag{5.32}$$

которое должно быть решено при условиях (5.30).

Для решения уравнения (5.32) обозначим:

$dP/du = \xi$

тогда уравнение (5.32) принимает вид

$$\frac{d\xi}{du} + 2u\xi = 0 \tag{5.33}$$

Разделив переменные в (5.33) и проинтегрировав, получим:

$$\xi = \frac{dP}{du} = C_1 e^{-u^2}, \tag{5.34}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Проинтегрировав (5.34), получим:

$$P = C_1 \int_0^u e^{-u^2}\, du.$$

Здесь использовано первое из условий (5.30).

Второе условие (5.30) дает: $C_1 = 1/\int_0^\infty e^{-u^2}\, du$, но из интегрального исчисления известно, что $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}/2$, поэтому

$C_1 = 2/\sqrt{\pi}$ и

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\, du. \tag{5.35}$$

Интеграл (5.35) называется интегралом вероятности и является табулированной функцией, изменяющейся в пределах от 0 до 1:

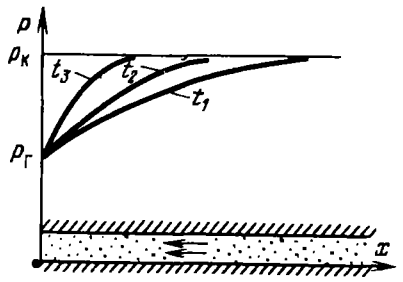


Рис. 5.1. Кривые распределения давления в различные моменты времени в неустановившемся прямолинейно-параллельном потоке упругой жидкости при условии $p_г = \text{const}$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\, du = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right).$$

Таким образом

$$P = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right).$$

Тогда закон распределения давления в неустановившемся прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости имеет вид

$$p = p_г + (p_к - p_г)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \tag{5.36}$$

Типичные кривые распределения давления в различные моменты времени в неустановившемся прямолинейно-параллельном потоке упругой жидкости в галерее, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_г = \text{const}$, приведены на рис. 5.1. Найдем дебит галереи Q. Будем считать положительным дебит, отбираемый из галереи ($x = 0$), когда поток движется против оси x и $\partial p/\partial x > 0$. Согласно закону Дарси

$$Q = \frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0}, \quad \omega = \frac{k}{\eta} Bh \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0}, \tag{5.37}$$

где B, h – соответственно ширина и толщина пласта.

Продифференцировав выражение (5.36), получим:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = (p_к - p_г)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)_{x=0} = \frac{p_к - p_г}{\sqrt{\pi \varkappa t}}. \tag{5.38}$$

Дебит галереи в любой момент времени найдем, подставив значение градиента давления $\partial p/\partial x$ из (5.38) в выражение (5.37):

$$Q = \frac{k}{\eta} \frac{p_к - p_г}{\sqrt{\pi \varkappa t}} Bh. \tag{5.39}$$

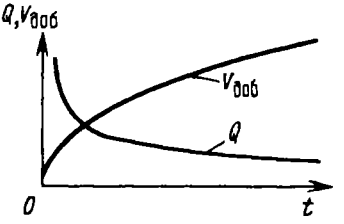


Рис. 5.2. Зависимости дебита и добычи жидкости от времени после пуска галереи при условии $p_г = \text{const}$

Из формулы (5.39) следует, что дебит галереи убывает с течением времени как $1/\sqrt{t}$ и при $t \to \infty$ стремится к нулю. В начальный момент времени формула (5.39) дает бесконечное значение, что является следствием скачка давления на галерее (от $p_к$ до $p_г$) в этот момент времени.

Накопленная к моменту t добыча $V_{доб}$ определяется по формуле:

$$V_{доб} = \int_0^t Q(t)\,dt = \frac{k(p_к - p_г)\,Bh}{\eta\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2k(p_к - p_г)\,Bh}{\eta\sqrt{\pi\varkappa}}\sqrt{t},$$

т. е. сразу после начала отбора из галереи она быстро возрастает, а в дальнейшем растет очень медленно (рис. 5.2).

Случай 2. В таком же полубесконечном пласте, что и в случае 1, в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию галерея с постоянным объемным дебитом Q. Требуется найти давление в любой точке пласта в любой момент времени.

Математически задача заключается в интегрировании уравнения (5.21) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned}
&p(x, t) = p_к \quad \text{при } t = 0;\\
&w(x, t) = \frac{Q}{\omega} = \frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = w_1 = \text{const} \quad \text{при } x = 0;\\
&p(x, t) = p_к \quad \text{при } x \to \infty.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Умножив обе части уравнения (5.21) на k/η и продифференцировав по x, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\eta}\varkappa\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)$$

или

$$\frac{k}{\eta}\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t} = \frac{k}{\eta}\varkappa\frac{\partial^3 p}{\partial x^3},$$

откуда, меняя порядок дифференцирования, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \varkappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right). \tag{5.41}$$

Так как

$$\frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = w(x, t),$$

то уравнение (5.41) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \tag{5.42}$$

Полученное уравнение (5.42) по форме совпадает с уравнением теплопроводности (5.21). Следовательно, решением уравнения (5.42) будет решение, аналогичное (5.36), с заменой давления p на скорость фильтрации w:

$$w = C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + C_2. \tag{5.43}$$

При этом следует иметь в виду, что начальное и граничное условия для w имеют вид:

$w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = w_1$.

Отсюда $C_2 = w_1$, $C_1 = -w_1$ и, следовательно,

$$w(x, t) = w_1\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right] = \frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5.44}$$

Для того, чтобы найти распределение давления в потоке, необходимо проинтегрировать уравнение (5.44) по x, полагая, что время t фиксировано.

$$\frac{k}{\eta}\int_0^x \frac{\partial p}{\partial x}\,dx = w_1 \int_0^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\,du\right) dx,$$

откуда

$$p(x, t) - p(0, t) = \frac{\eta}{k} w_1 x - \frac{\eta}{k}\frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \int_0^x \left(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\,du\right) dx. \tag{5.45}$$

Последнее слагаемое в (5.45) интегрируется по частям, в результате чего находим:

$$\frac{\eta}{k}\frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \int_0^x \left(\int_0^{x/2\sqrt{\varkappa t}} e^{-u^2}\,du\right) dx =$$

$$= \frac{\eta}{k}\frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \left[x \times \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du \Bigg|_0^x - \int_0^x x\, e^{-x^2/4\varkappa t} \frac{dx}{2\sqrt{\varkappa t}} \right] =$$

$$= \frac{2\eta w_1}{k\sqrt{\pi}} \left[x \int_0^{x/2\sqrt{\varkappa t}} e^{-u^2} du - \sqrt{\varkappa t}\left(1 - e^{-x^2/4\varkappa t}\right) \right].$$

Тогда уравнение (5.45) можно записать следующим образом:

$$p(x, t) - p(0, t) = \frac{\eta w_1}{k} x \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) + \frac{1 - e^{-x^2/4\varkappa t}}{\frac{\sqrt{\pi} x}{2\sqrt{\varkappa t}}} \right]. \qquad (5.46)$$

С учетом того, что $p(0, t)$ есть давление на галерее, т. е. $p(0, t) = p_г(t)$, из (5.46) запишем выражение для давления в любой точке потока:

$$p(x, t) = p_г + \frac{\eta w_1}{k}\left[x\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right) + \frac{2\sqrt{\varkappa t}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - e^{-x^2/4\varkappa t}\right)\right]. \qquad (5.47)$$

Для того, чтобы найти закон изменения давления на галерее $p_г(t)$, подставим в (5.47) граничное условие $p(x, t) = p_к$ при $x \to \infty$. Так как при $x \to \infty$ $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) \to 1$, то произведение $x\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right]$ дает неопределенность вида ∞. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, можно показать, что это произведение стремится к нулю; учитывая также, что $e^{-x^2/4\varkappa t} \to 0$ при $x \to \infty$, получаем:

$$p_г(t) = p_к - \frac{2\eta w_1}{k\sqrt{\pi}}\sqrt{\varkappa t}$$

или

$$p_г(t) = p_к - \frac{Q\eta}{Bh}\frac{2}{k}\frac{\sqrt{\varkappa t}}{\sqrt{\pi}}. \qquad (5.48)$$

4.2. Плоскорадиальный фильтрационный поток упругой жидкости. Основная формула теории упругого режима фильтрации

Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h имеется добывающая скважина нулевого радиуса (точечный сток). Начальное пластовое давление во всем пласте одинаково и равно $p_к$.

В момент времени $t = 0$ скважина пущена в эксплуатацию с постоянным объемным дебитом Q_0. В пласте образуется неустановившийся плоскорадиальный поток упругой жидкости. Распределение давления в пласте (в любой его точке в любой момент времени) $p(r, t)$ определяется интегрированием уравнения (5.27):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \tag{5.49}$$

Начальные и граничные условия задачи следующие (см. гл. 2, § 7):

$p(r, t) = p_к$ при $t = 0$;

$p(r, t) = p_к$ при $r \to \infty$;

$$Q = \frac{2\pi k h}{\eta} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = Q_0 = \text{const} \quad \text{при } r = 0,\ t > 0. \tag{5.50}$$

Последнее условие запишем в виде

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{Q_0 \eta}{2\pi k h}. \tag{5.51}$$

Так же, как в предыдущем случае, проведем анализ размерностей. Искомое распределение давления в пласте зависит от пяти определяющих параметров: r, t, $\varkappa$, $p_к$, $Q_0\eta/(2\pi kh)$, размерности которых следующие:

$[r] = \mathrm{L}$; $[t] = \mathrm{T}$; $[\varkappa] = \mathrm{L}^2\,\mathrm{T}^{-1}$; $[p_к] = [\mathrm{p}]$,

$$\left[\frac{Q_0 \eta}{2\pi k h} \right] = [\mathrm{p}],$$

где $[p]$ – размерность давления. Тогда давление, приведенное к безразмерному виду, $P = p/p_к$, зависит от двух безразмерных параметров (так как из пяти параметров три имеют независимые размерности (r, t, $p_к$): $n = 5$, $k = 3$, $n - k = 2$.

$$P = \mathrm{f}\left(\xi, \frac{Q_0 \eta}{2\pi k h p_к} \right), \tag{5.52}$$

где

$$\xi = \frac{r}{2\sqrt{\varkappa t}}.$$

Таким образом задача автомодельна и уравнение (5.49) можно свести к обыкновенному. Продифференцировав (5.52), найдем аналогично предыдущему:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{dP}{d\xi} \frac{\xi}{2t}; \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{dP}{d\xi} \frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{4\varkappa t} \frac{d^2 P}{d\xi^2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (5.49), получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2P}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi\right)\frac{dP}{d\xi} = 0, \tag{5.53}$$

которое нужно проинтегрировать при условиях, полученных из (5.50): $P = 1$ при $\xi \to \infty$.

$$\left(\xi \frac{dP}{d\xi}\right)_{\xi = 0} = \frac{Q_0 \eta}{2\pi khp_{\text{к}}}. \tag{5.54}$$

Воспользуемся подстановкой

$$\frac{dP}{d\xi} = v,$$

тогда вместо уравнения (5.53) будем иметь

$$\frac{dv}{d\xi} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi\right) v = 0$$

или

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{dv}{v} = -2\xi\, d\xi. \tag{5.55}$$

Проинтегрировав (5.55), получим:

$$\ln \xi + \ln v = -\xi^2 + \ln C_1, \tag{5.56}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Потенцируя (5.56), получим:

$$v = \frac{dP}{d\xi} = C_1 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}. \tag{5.57}$$

Проинтегрировав (5.57), и учтя первое из условий (5.54), получим:

$$P(\xi) = -C_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}\, d\xi + 1. \tag{5.58}$$

Умножая равенство (5.57) на ξ, устремляя $\xi \to 0$ и используя второе условие (5.54), найдем, что

$$C_1 = \frac{Q_0 \eta}{2\pi khp_{\text{к}}}.$$

Тогда из (5.58) получим:

$$P(\xi) = -\frac{Q_0 \eta}{2\pi khp_{\text{к}}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}\, d\xi + 1. \tag{5.59}$$

Интеграл в последней формуле легко свести к табличному следующей подстановкой:

$$u = \xi^2 = \frac{r^2}{4\varkappa t},$$

тогда

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{du}{2u}.$$

Перейдя также от безразмерного давления P к размерному $p = P p_к$, получим:

$$p(r, t) = p_к - \frac{Q_0 \eta}{4\pi kh} \int\limits_{r^2/(4\varkappa t)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \tag{5.60}$$

Интеграл в формуле (5.60) называется интегральной показательной функцией, которая табулирована и обозначается

$$-\operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) = \int\limits_{r^2/(4\varkappa t)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Следовательно, давление в любой точке плоскорадиального потока в условиях упругого режима фильтрации определяется по формуле

$$p(r, t) = p_к - \frac{Q_0 \eta}{4\pi kh}\left[-\operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right]. \tag{5.61}$$

Формула (5.61) получила название основной формулы теории упругого режима фильтрации. Она имеет широкое практическое применение и, в частности, используется при интерпретации результатов исследования скважин, в расчетах распределения давления при фильтрации упругой жидкости и т. д.

Интегральную показательную функцию можно представить в виде ряда

$$-\operatorname{Ei}(-x) = \ln\frac{1}{x} - 0{,}5772 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nn!} x^n,$$

который сходится при всех значениях x $0 < x < \infty$. При изменении аргумента x от 0 до ∞ функция $-\operatorname{Ei}(-x)$ быстро убывает от ∞ до 0. График этой функции приведен на рис. 5.3. При малых значениях x суммой ряда можно пренебречь, тогда

$$-\operatorname{Ei}(-x) \approx \ln\frac{1}{x} - 0{,}5772.$$

При этом погрешность не превосходит:

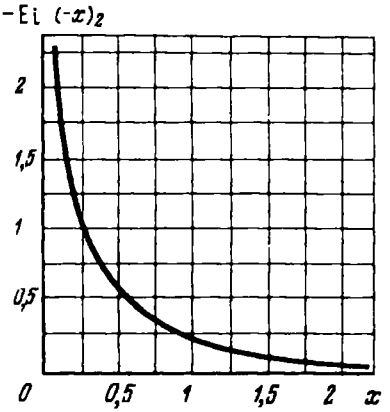


Рис. 5.3. График интегральной показательной функции

0,25% если $x = \dfrac{r^2}{4\varkappa t} \leqslant 0{,}01$;

1% если $x \leqslant 0{,}03$;

5,7% если $x \leqslant 0{,}1$;

9,7% если $x \leqslant 0{,}14$.

Следовательно, для значений $r^2/(4\varkappa t) \leqslant 1$ давление можно определять по формуле

$$p(r,\ t) = p_к - \frac{Q_0\eta}{4\pi kh}\left(\ln\frac{4\varkappa t}{r^2} - 0{,}5772\right). \tag{5.62}$$

Из (5.61) находим, что расход жидкости через любую цилиндрическую поверхность радиусом r и скорость фильтрации определяются соответственно по формулам

$$Q(r,\ t) = \frac{k}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}2\pi r h = Q_0 e^{-r^2/4\varkappa t}, \tag{5.63}$$

$$w = \frac{Q_0}{2\pi rh} e^{-r^2/4\varkappa t} \tag{5.64}$$

Из последней формулы следует, что стационарная скорость $w_{стац} = Q_0/(2\pi r h)$ достигается очень быстро на небольших расстояниях от скважины, так как значение коэффициента пьезопроводности обычно велико.

При теоретическом исследовании неустановившихся процессов перераспределения пластового давления удобно пользоваться безразмерными параметрами Фурье fo и Fo, играющими роль безразмерного времени и определяемыми по следующим равенствам:

$$\text{fo} = \frac{\varkappa t}{r_c^2};\quad \text{Fo} = \frac{\varkappa t}{R_к^2}, \tag{5.65}$$

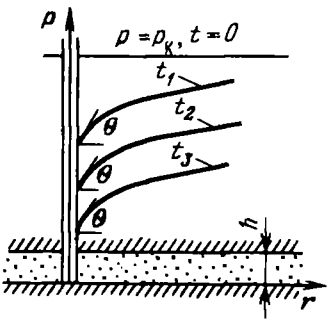


Рис. 5.4. Пьезометрические кривые при пуске скважины с постоянным дебитом Q_0

где r_c – радиус скважины; $R_к$ – радиус кругового контура питания или радиус круговой непроницаемой границы пласта.

В зависимости от специфики решаемой задачи удобно пользоваться тем или другим из указанных параметров Фурье.

Строго говоря, основная формула теории упругого режима (5.61) справедлива лишь для случая точечного стока (при $r_c = 0$) в неограниченном пласте ($R_к = \infty$).

Для оценки влияния конечного радиуса возмущающей скважины r_c на результаты расчетов давления В. Н. Щелкачев сравнил результаты расчетов давления по формуле (5.61) с точной формулой Ван-Эвердингена и Херста (см. § 8), учитывающей конечный радиус скважины r_c. При этом В. Н. Щелкачев установил, что погрешность подсчетов давления по формуле (5.61) составляет:

0,6% при fo = 100;

2,3% при fo = 25;

5% при fo = 10;

9,4% при fo = 5.

Оценим практическое значение этой погрешности. Допустим, что $\varkappa = 1$ м^2/с, $r_c = 0{,}1$ м; тогда полагая fo = 100, найдем:

$$t = \text{fo}\frac{r_c^2}{\varkappa} = 100\,\frac{0{,}1^2}{1} = 1 \text{ с}.$$

Следовательно, уже через 1 с после пуска скважины расчеты забойного давления, выполненные по формуле (5.61), будут иметь погрешность, не превышающую 0,6%. Отсюда следует, что для скважин обычных размеров формула (5.61) обеспечивает высокую степень точности уже на самой ранней (а тем более на поздней) стадии процесса перераспределения давления.

Непосредственными расчетами В. Н. Щелкачевым было установлено, что в громадном большинстве практически интересных случаев изменение давления при работе скважины в конечном открытом пласте можно в течение достаточно длительного времени изучать при помощи простой

формулы (5.61) для бесконечного пласта. При этом погрешность в подсчетах забойного давления не превзойдет:

0,08% при $Fo \leqslant 0{,}2$;

1% при $Fo \leqslant 0{,}35$;

1,9% при $Fo \leqslant 0{,}5$.

Для расчетов пластового давления в любой точке открытого кругового пласта в случае $r \leqslant 0{,}1\, R_к$ можно с высокой степенью точности (до 0,2%) пользоваться формулой (5.61) для бесконечного пласта, если при этом $R_к \geqslant 10^5 r_c$, $Fo \leqslant 0{,}2$.

В дополнение к указанным оценкам можно еще отметить, что различие в величинах забойных давлений в условиях конечного (открытого и закрытого) и бесконечного пластов не превзойдет 1%, если $Fo \leqslant 0{,}33$, $R_к \geqslant 50\, r_c$ или если $Fo \leqslant 0{,}35$, $R_к \geqslant 1000\, r_c$.

Решение дифференциального уравнения Фурье (5.49) для различных случаев фильтрации упругой жидкости в ограниченных открытых и закрытых пластах представляются бесконечными рядами по функциям Бесселя (см. § 8).

В заключение покажем, как ведут себя пьезометрические кривые вблизи скважины, которая эксплуатируется с постоянным дебитом Q_0 (рис. 5.4). Для точек вблизи забоя можно пользоваться формулой (5.62); продифференцировав ее по координате r, найдем градиент давления:

$$\partial p / \partial r = Q_0 \eta / (2\pi k r).$$

Из этой формулы следует, что градиент давления для значений r, удовлетворяющих неравенству $r^2 \leqslant 0{,}03 \cdot 4\varkappa t$, практически не зависит от времени и определяется по той же формуле, что для установившейся плоскорадиальной фильтрации несжимаемой жидкости. Для указанных значений r пьезометрические кривые представляют собой логарифмические линии (см. рис. 5.4). Давление на забое скважины падает с течением времени, углы наклона касательных θ на забое одинаковы для всех кривых.

§ 5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СКВАЖИН В УСЛОВИЯХ УПРУГОГО РЕЖИМА

Поскольку дифференциальное уравнение упругого режима (5.14) является линейным, то к его решению приложим метод суперпозиции, позволяющий исследовать интерференцию скважин и в условиях упругого режима.

Суть метода суперпозиции (метода наложения) состоит в том, что при совместной работе в пласте нескольких добывающих и нагнетательных скважин изменение пластового давления, вызванное работой каждой из скважин, подсчитывается так, как если бы данная скважина работала одна; затем изменения давления, вызванные работой каждой скважины, алгебраически суммируются по всем скважинам. При этом

скорости фильтрации в любой данной точке пласта вызванные работой каждой скважины, суммируются геометрически.

Наличие прямолинейных границ пласта учитывается методом отображения источников и стоков, как и в случае установившейся фильтрации несжимаемой жидкости (см. гл. 4).

При помощи метода суперпозиции можно исследовать перераспределение пластового давления, вызванное пуском, остановкой или изменением темпов отбора жидкости из скважин.

Для расчета изменения пластового давления используется основная формула упругого режима фильтрации (5.61). Как было показано, этой формулой, выведенной для точечного стока в бесконечном пласте, можно с высокой степенью точности пользоваться и в расчетах притока упругой жидкости к скважине конечного радиуса в открытом или закрытом конечном пласте. Поэтому результаты расчетов, основанные на методе суперпозиции и использовании формулы (5.61) для бесконечного пласта, оказываются справедливыми с соответствующей степенью точности и в условиях конечного пласта.

Рассмотрим несколько примеров использования метода суперпозиции при интерференции скважин в условиях упругого режима фильтрации.

Пример 1. Пусть в бесконечном пласте одновременно работают n скважин с постоянными дебитами. Начальное пластовое давление в невозмущенном пласте всюду одинаково и равно $p_к$. Требуется найти снижение давления $\Delta p = p_к - p(r, t)$ в любой точке пласта M в любой момент времени t.

На основе метода суперпозиции снижение пластового давления в точке M будет равно алгебраической сумме снижений давления в этой точке, вызванных независимой работой каждой скважины; т. е.

$$\Delta p \equiv p_к - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \ldots + \Delta p_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i.$$

Снижение давления в точке M при работе одной i-й скважины по формуле (5.61) составит:

$$\Delta p_i = \frac{Q_i \eta}{4\pi k h}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4\varkappa t_i}\right)\right].$$

Следовательно, при работе всех n скважин снижение давления в точке M определяется из равенства

$$\Delta p = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i \eta}{4\pi k h}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4\varkappa t_i}\right)\right] = \frac{\eta}{4\pi k h}\sum_{i=1}^{n} Q_i\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_i^2}{4\varkappa t_i}\right)\right], \qquad (5.66)$$

где Q_i – дебит i-й скважины (при этом дебит добывающей скважины считается положительным, дебит нагнетательной – отрицательным); r_i – расстояние от центра i-й скважины до точки M, где определяется

понижение пластового давления; t_i – время с начала работы i-й скважины до момента времени t, в который определяется понижение давления.

Пример 2. Пусть в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t = 0$), в невозмущенном пласте с давлением $p_к$ пущена в эксплуатацию скважина с постоянным дебитом Q и через промежуток времени t_1 остановлена. Под остановкой ее подразумевается мгновенное прекращение притока жидкости к забою скважины. Требуется определить давление в любой точке пласта в любой момент времени как при работе скважины, так и после ее остановки. До момента времени t_1 скважина работала одна, следовательно, пластовое давление в любой точке пласта определяется по формуле

$$p(r, t) = p_к - \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right], \tag{5.67}$$

где t изменяется в интервале от 0 до t_1.

Начиная с момента времени t_1 (скважина уже остановлена), следуя методу суперпозиции, мысленно допустим, что вместе с продолжающей работать добывающей скважиной в той же точке начала работать нагнетательная скважина с таким же расходом Q. Следовательно, с момента t_1 в пласт в одной и той же точке закачивается столько же жидкости, сколько из него и отбирается, значит суммарный фактический отбор жидкости из пласта оказывается равным нулю, что свидетельствует об остановке добывающей скважины по условию задачи.

К моменту времени t после остановки скважины ($t > t_1$) понижение давления в любой точке пласта определяется по методу суперпозиции:

$$\Delta p \equiv p_к - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right] -$$

$$-\frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t_1)}\right)\right] = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left\{\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right] -\right.$$

$$\left.-\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t_1)}\right)\right]\right\}.$$

График изменения забойного давления при работе и остановке добывающей скважины приведен на рис. 5.5.

Следует отметить, что подъем давления на забое возмущающей скважины начинается сразу же после ее остановки, с момента t_1. В любой другой точке пласта после момента времени t_1 будет еще некоторое время продолжаться снижение пластового давления, причем, чем дальше находится эта точка пласта от возмущающей скважины, тем дольше в ней будет продолжаться процесс понижения давления после остановки скважины. Затем и в этой точке пласта начинается повышение давления.

Пример 3. Пусть сохраняются условия примера 2, но только в момент времени $t = t_1$ добывающая скважина не останавливается, а ее дебит изменяется от Q до Q_1.

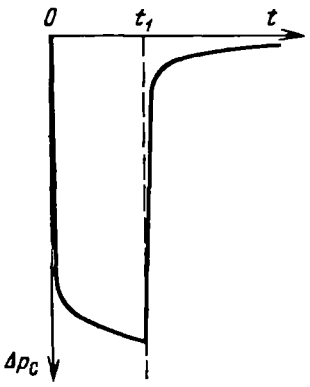


Рис. 5.5. График изменения забойного давления при остановке добывающей скважины в момент t_1

Требуется исследовать процесс перераспределения пластового давления после пуска скважины и изменения режима ее работы.

После пуска скважины с постоянным дебитом Q и до момента t_1 изменение пластового давления определяется по формуле (5.67).

После изменения дебита скважины, т.е. после момента t_1, будем мысленно считать, что дебит этой скважины Q сохраняется, а на месте этой же скважины включена нагнетательная скважина с расходом $Q - Q_1$. Тогда результирующий дебит этих двух скважин после момента времени t_1 будет равен $Q - (Q - Q_1) = Q_1$, т.е. соответствует условию задачи.

Изменение давления после времени t_1 будет слагаться из понижения давления Δp_1, вызванного продолжающей работать с тем же дебитом Q добывающей скважиной, и из повышения давления Δp_2, вызванного работой воображаемой нагнетательной скважины, т.е.

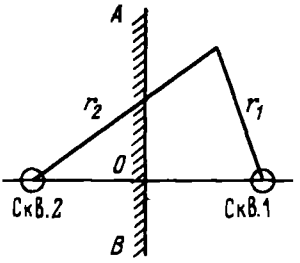
$$\Delta p \equiv p_к - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right] +$$

$$+\frac{-(Q - Q_1)\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa(t - t_1)}\right)\right]. \qquad (5.68)$$

При этом предполагалось, что дебит возмущающей скважины в момент t_1 снизился с Q до Q_1. Если бы изменение дебита было связано с увеличением его, то воображаемую скважину следовало бы считать добывающей, а ее дебит $Q_1 - Q$ – положительным.

Если бы в другой момент времени $t_2 > t_1$ дебит скважины был бы вторично снижен и установлен равным Q_2, то основываясь на методе суперпозиции, следовало бы принять, что с момента t_2 продолжают работать реальная скважина с дебитом Q, воображаемая нагнетательная скважина с дебитом $-(Q - Q_1)$ и, кроме того, начала работать в том же месте вторая воображаемая нагнетательная скважина с дебитом $-(Q_1 - Q_2)$.

Рис. 5.6. Схема полубесконечного пласта с прямолинейной непроницаемой границей



Результирующее понижение давления Δp в момент $t > t_2$ в любой точке пласта определяется из равенства:

$$\Delta p \equiv p_к - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3,$$

где

$$\Delta p_3 = \frac{-(Q_1 - Q_2)\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa(t - t_2)}\right)\right],$$

а Δp_1 и Δp_2 определяются по формуле (5.68).

Аналогично подсчитывается понижение давления в любой точке пласта при многократном изменении дебита добывающей скважины.

Пример 4. Допустим, что однородный пласт имеет бесконечную прямолинейную непроницаемую границу A O B (рис. 5.6). В этом полубесконечном закрытом пласте в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом Q одна скважина, например скв. 1. Требуется изучить процесс перераспределения давления в таком пласте после пуска скважины.

Используя метод отображения источников и стоков (см. гл. 4), зеркально отобразим скв. 1 относительно непроницаемой границы *A O B*, и дебиту отображенной скважины (скв. 2) припишем тот же знак, что и у реальной скв. 1, т. е. будем считать скв. 2 добывающей с дебитом Q.

Условия работы скв. 1 в полубесконечном пласте будут точно такими же, как при работе двух скважин – скв. 1 и скв. 2 – в бесконечном пласте.

Используя метод суперпозиции, понижение пластового давления в точке M найдем как сумму понижений давления, вызванных работой указанных скважин в воображаемом бесконечном пласте, т. е.

$$\Delta p \equiv p_к - p(r, t) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_1^2}{4\varkappa t}\right)\right] +$$

$$+\frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_2^2}{4\varkappa t}\right)\right],$$

где r_1 и r_2 – расстояния до точки M от скв. 1 и скв. 2 соответственно.

При наличии в полубесконечном пласте нескольких скважин, каждую из них следует зеркально отобразить относительно прямолинейной непроницаемой границы.

Применение метода отображения источников и стоков совместно с методом суперпозиции позволяет выяснить влияние прямолинейного контура питания на процесс перераспределения пластового давления. В этом случае все реальные скважины отображаются симметрично относительно этого контура, и дебитам отображенных скважин приписываются противоположные знаки по отношению к дебитам реальных скважин (т. е. добывающие скважины отображаются нагнетательными, и наоборот). Методом суперпозиции реальных и отображенных скважин исследуется процесс изменения пластового давления в любой точке.

§ 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЛЕКТОРСКИХ СВОЙСТВ ПЛАСТА ПО ДАННЫМ ИССЛЕДОВАНИЯ СКВАЖИН ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ

Проектирование и контроль за разработкой нефтяных и газовых месторождений, создание и эксплуатация подземных хранилищ газа связаны с определением коллекторских свойств пластов и изучением их фильтрационных характеристик (однородность пласта по толщине и площади, наличие литологических и тектонических экранов и их расположение и т. д.).

В литературе имеется большое количество работ, посвященных этой важной проблеме. Методы определения параметров пласта весьма разнообразны и зависят от тех конкретных задач, которые ставят перед собой исследователи.

Гидродинамические методы исследования пластов и скважин, связанные с замерами пластовых и забойных давлений в возмущающих и реагирующих скважинах, называют пьезометрическими методами. Различают две группы пьезометрических методов – при установившихся и неустановившихся режимах.

Методы исследования пластов и скважин, основанные на изучении неустановившихся процессов изменения забойного давления в возмущающих и реагирующих скважинах, тесно связаны с теорией упругого режима. После пуска или остановки скважины на ее забое и в окружающих скважинах возникают (в условиях упругого режима) длительные процессы перераспределения давления. При помощи самопищущих скважинных манометров можно записать повышение или понижение давления и построить график изменения забойного давления с течением времени – кривую восстановления давления (КВД).

Чаще всего при гидродинамическом исследовании скважины наблюдают (измеряют) восстановление забойного давления после остановки скважины, ранее продолжительное время работавшей с постоянным дебитом Q.

Очевидно, что коллекторские свойства пласта влияют на форму графиков восстановления забойного давления, поэтому по форме КВД стали определять коллекторские свойства пласта – его проницаемость и пьезопроводность.

Для упрощения обработки КВД прибегают к преобразованию

графиков восстановления давления, изменяя их криволинейную форму в прямолинейную.

Наиболее распространенный метод определения коллекторских свойств пласта по данным о восстановлении забойного давления в остановленных скважинах – метод построения преобразованного графика восстановления забойного давления в полулогарифмических координатах Δp, $\lg t$, имеющего форму прямой линии.

Прямолинейную зависимость Δp от $\lg t$ установить несложно.

На основании основной формулы теории упругого режима (5.61) можно получить следующую функциональную зависимость между изменением забойного давления Δp_c и временем t с момента пуска скважины в эксплуатацию с постоянным дебитом:

$$\Delta p_c \equiv p_к - p_c = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_c^2}{4\varkappa t}\right)\right] \approx \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left(\ln\frac{4\varkappa t}{r_c^2} - 0{,}5772\right) =$$

$$= \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left(\ln\frac{4\varkappa t}{r_c^2} - \ln 1{,}781\right) = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left(2{,}3\lg\frac{4\varkappa t}{1{,}781\, r_c^2}\right) =$$

$$= 0{,}1832\,\frac{Q\eta}{kh}\lg\frac{2{,}246\,\varkappa t}{r_c^2}.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$\Delta p_c = 0{,}1832\,\frac{Q\eta}{k\,h}\lg\frac{2{,}246\,\varkappa}{r_c^2} + 0{,}1832\,\frac{Q\eta}{kh}\lg t \qquad (5.69)$$

или

$$\Delta p_c = A + i\lg t, \qquad (5.70)$$

где

$$A = i\lg\frac{2{,}246\,\varkappa}{r_c^2};$$

$$i = 0{,}1832\,Q\eta/(kh). \qquad (5.71)$$

Действительно, из формул (5.69) и (5.70) видно, что изменение (снижение) забойного давления в пущенной с постоянным дебитом Q скважине оказывается линейной функцией логарифма времени. Следовательно, эти формулы можно рассматривать как уравнение графика изменения забойного давления после пуска скважины в эксплуатацию.

Рассмотрим теперь кривую восстановления забойного давления, т. е. рост забойного давления после мгновенной остановки скважины. Будем считать, что до остановки скважина весьма длительно работала с постоянным дебитом Q и вокруг нее в пласте имело место установившееся распределение пластового давления в соответствии с формулой (3.46), т. е. пьезометрическая линия является кривой логарифмического типа.

Изменение забойного давления после мгновенной остановки скважины можно определить, используя метод суперпозиции:

$$\Delta p_c \equiv p_к - p_c = \Delta p_{c.\,уст} - \Delta p_{c.\,неуст}, \tag{5.72}$$

где

$$\Delta p_{c.\,уст} \equiv p_к - p_{c.\,уст} = \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{R_к}{r_c} - \tag{5.73}$$

депрессия на пласт при установившейся работе добывающей скважины с дебитом Q;

$$\Delta p_{c.\,неуст} \equiv p_к - p_{c.\,неуст} = \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_c^2}{4\varkappa t}\right)\right] \tag{5.74}$$

изменение давления на забое воображаемой нагнетательной скважины, пущенной в момент $t = 0$ с расходом Q.

Так как $\Delta p_{c.\,уст}$ – величина постоянная (от времени не зависит), то изменение забойного давления Δp_c будет определяться формулой (5.74), которая совпадает с формулами (5.69) и (5.70).

Обработка кривых восстановления забойного давления и определение по ним коллекторских свойств пласта производится следующим образом.

Снятую скважинным манометром кривую роста забойного давления после остановки скважины перестраивают в координатах Δp_c, $\lg t$ (рис. 5.7). По прямому участку этой кривой находится отрезок, отсекаемый ее продолжением на оси Δp_c (отрезок A), и тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс ($i = \operatorname{tg}\varphi$). Затем при помощи второго равенства (5.71) определяется параметр kh/η, называемый гидропроводностью пласта:

$$\frac{kh}{\eta} = 0{,}1832\,\frac{Q}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Если известны вязкость жидкости в пластовых условиях η и толщина пласта h, то по последней формуле находится значение коэффициента проницаемости пласта:

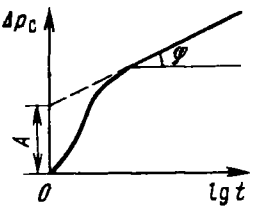
$$k = 0{,}1832\,Q\eta/(h\operatorname{tg}\varphi).$$

Далее по известному угловому коэффициенту $i = \operatorname{tg}\varphi$ и радиусу скважины r_c из первого равенства (5.71) можно определить коэффициент пьезопроводности пласта:

$$\varkappa = 10^{\frac{A}{\operatorname{tg}\varphi}} r_c^2/2{,}246.$$

Отметим, что область применения указанных простых приемов интерпретации результатов исследования нефтяных скважин ограничивается условиями, при которых справедлива формула (5.61), а именно: скважина рассматривается как источник постоянной интенсивности в

Рис. 5.7. Преобразованный график восстановления забойного давления



бесконечном однородном пласте, и возможна мгновенная остановка притока флюида в скважину.

В случае ограниченного пласта, когда изменение давления, вызванное закрытием скважины, доходит до его границы, КВД в скважине начинает искажаться, а через достаточно большое время выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую стационарному распределению давления. Поэтому длина прямолинейного участка на кривой *1* (рис. 5.7) ограничена.

Кроме того, в реальных условиях скважину нельзя остановить мгновенно. После ее закрытия на устье приток флюида из пласта продолжается еще некоторое время из-за упругости жидкостей и газов, заполняющих скважину. Время выхода на асимптоту должно, очевидно, превышать время дополнительного притока. Поэтому возможны условия, при которых прямолинейный участок на КВД появляется через значительный промежуток времени либо даже вовсе не существует.

Поскольку длительная остановка скважины нежелательна, были развиты методы определения параметров пласта по наблюдениям неустановившихся режимов, лишенные указанных недостатков и учитывающие, в частности, время работы скважины до ее остановки (метод Хорнера), а также приток флюида в скважину после ее остановки.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА

Решения различных краевых задач неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде в условиях как бесконечного, так и конечного пластов можно получить при помощи хорошо известных методов интегрирования линейного дифференциального уравнения в частных производных – уравнения теплопроводности (5.14).

Однако во многих случаях эти решения представляются громоздкими формулами в виде бесконечного медленно сходящегося ряда или несобственного интеграла, содержащего специальные функции.

В связи с этим были предприняты поиски приближенных эффективных решений задач неустановившейся фильтрации.

Рассмотрим здесь некоторые из разработанных приближенных методов, получивших широкое применение при решении задач теории упругого режима.

7.1. Метод последовательной смены стационарных состояний

Одним из наиболее простых по идее приближенных методов решения задач неустановившейся фильтрации является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС), развитый И. А. Чарным и широко применяющийся в практических расчетах.

Метод основан на предположении, что давление в пласте меняется во времени значительно медленнее, чем по координатам. Поэтому производную по времени можно в первом приближении отбросить, в результате чего для давления получается уравнение Лапласа, описывающее стационарный процесс.

В каждый момент времени вся область движения жидкости, в действительности охватывающая весь пласт, условно разделяется на две области – возмущенную и невозмущенную. При этом предполагается, что в возмущенной области, начинающейся от стенки скважины, давление распределяется так, как будто бы движение жидкости в ней установившееся: внешняя граница этой области служит в данный момент контуром питания. В невозмущенной области пласта давление всюду постоянно и равно начальному статическому. Закон движения подвижной границы раздела возмущенной и невозмущенной областей определяется при помощи уравнения материального баланса и граничных условий.

Разделение фильтрационного потока на две области – возмущенную и невозмущенную – вызывает необходимость рассматривать процесс перераспределения пластового давления протекающим в две фазы. В течение первой фазы граница возмущенной области непрерывно растет. И в тот момент, когда она достигнет естественной границы пласта, начинается вторая фаза.

При теоретическом исследовании процесса в условиях бесконечного пласта приходится, естественно, иметь дело только с первой фазой, продолжительность которой не ограничивается.

Рассмотрим теперь расчет неустановившихся одномерных потоков упругой жидкости при помощи метода ПССС.

Прямолинейно-параллельный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости

Случай 1. В момент времени $t = 0$ в горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B пущена в эксплуатацию прямолинейная галерея с постоянным дебитом Q. До пуска галереи давление во всем пласте было одинаковым и равным $p_к$.

К моменту времени t после пуска галереи граница возмущенной области распространится на длину $l(t)$ (рис. 5.8). Распределение давления в этой области считается установившимся (см. гл. 3, § 2), т. е. имеет линейный характер:

$$p(x, t) = p_к - \frac{Q\eta}{kBh}(l(t) - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l(t). \tag{5.75}$$

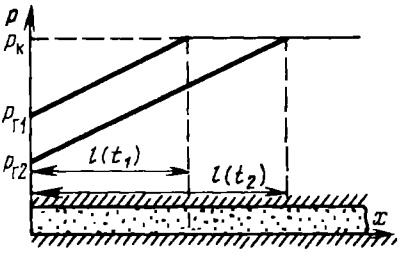


Рис. 5.8. Кривые распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке по методу ПССС

Требуется найти закон перемещения во времени внешней границы возмущенной области $l(t)$.

Воспользуемся соотношением (5.7), которое состоит в том, что количество добытой продукции за время dt равно изменению упругого запаса жидкости в возмущенной зоне пласта за тот же промежуток времени:

$$Q\,dt = \beta^* d[V(t)\Delta p], \tag{5.76}$$

где $V(t)$ – объем возмущенной зоны пласта,

$$V(t) = Bhl(t); \tag{5.77}$$

$$\Delta p = p_к - \tilde{p} = p_к - \frac{p_к + p_г}{2} = \frac{p_к - p_г}{2}. \tag{5.78}$$

Приняв во внимание, что $p(x, t) = p_г(t)$ при $x = 0$, из (5.75) найдем:

$$Q = \frac{k}{\eta}\frac{p_к - p_г}{l(t)}Bh. \tag{5.79}$$

Подставив равенства (5.77) – (5.79) в соотношение (5.76), получим:

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt}\left(Bhl\frac{Q\eta\, l}{2kBh}\right)$$

или

$$2\varkappa\, dt = dl^2 \qquad (\varkappa = k/(\eta\beta^*)),$$

откуда после интегрирования найдем:

$$l(t) = \sqrt{2\varkappa t}. \tag{5.80}$$

Тогда распределение давления в пласте (5.75) будет иметь следующий вид:

$$p(x, t) = p_к - \frac{Q\eta}{kBh}(\sqrt{2\varkappa t} - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2\varkappa t};$$

$$p(x, t) = p_к, \quad x > \sqrt{2\varkappa t}. \tag{5.81}$$

Значения депрессии $p_к - p_г$ по приближенной формуле (5.81) значи-

тельно отличаются от данных расчета по точной формуле (5.48); погрешность составляет 25%.

Случай 2. В таком же пласте, как и в случае 1, в момент времени $t = 0$ пущена эксплуатационная галерея с постоянным забойным давлением $p_г = \text{const}$. Требуется найти распределение давления, закон перемещения границы возмущенной области $l(t)$ и изменение дебита галереи во времени $Q(t)$.

Дебит галереи в условиях установившегося движения, очевидно, можно выразить следующим образом:

$$Q(t) = \frac{k(p_к - p_г)}{\eta l(t)} Bh = \frac{k}{\eta} Bh \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Задача решается аналогично предыдущему случаю. В результате находим:

закон движения границы возмущенной области

$$l(t) = 2\sqrt{\varkappa t};$$

распределение давления в возмущенной зоне пласта

$$p(x, t) = p_к - (p_к - p_г)\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right), \quad 0 < x \leqslant 2\sqrt{\varkappa t};$$

$$p(x, t) = p_к, \quad x > 2\sqrt{\varkappa t}; \tag{5.82}$$

дебит галереи

$$Q(t) = \frac{k(p_к - p_г)}{\eta 2\sqrt{\varkappa t}} Bh. \tag{5.83}$$

Погрешность расчета дебита галереи по приближенной формуле (5.83) по сравнению с расчетами по точной формуле (5.39) составляет 11%.

Следовательно, методом последовательной смены стационарных состояний лучше пользоваться в случае неустановившихся прямолинейно-параллельных потоков при заданной постоянной депрессии.

Плоскорадиальный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости

Случай 1. Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h в момент времени $t = 0$ пущена добывающая скважина радиусом $r_с$ с постоянным дебитом Q. До пуска скважины давление во всем пласте было одинаковым и равным $p_к$.

В соответствии с методом ПССС принимаем, что через время t после пуска скважины вокруг нее образуется возмущенная область радиусом $R(t)$, где давление будет распределяться по стационарному закону:

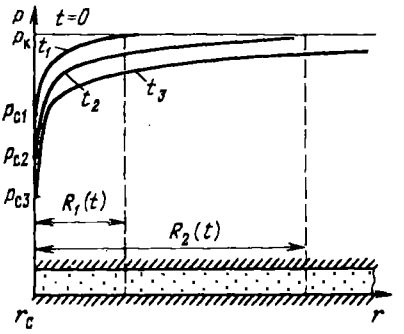


Рис. 5.9. Кривые распределения давления в плоскорадиальном потоке в разные моменты времени по методу ПССС (отбор осуществляется при условии $Q = \text{const}$)

$$p(r,\ t) = p_к - \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{R(t)}{r}. \tag{5.84}$$

В остальной части пласта сохраняется начальное пластовое давление $p_к$.

Требуется найти закон движения границы возмущенной области $R(t)$.

Кривые распределения давления в разные моменты времени в таком потоке приведены на рис. 5.9. Дебит скважины, очевидно, будет описываться формулой, аналогичной формуле Дюпюи:

$$Q = \frac{2\pi kh(p_к - p_c(t))}{\eta \ln(R(t)/r_c)}. \tag{5.85}$$

Размеры возмущенной области найдем из уравнения материального баланса (5.76) при

$$V(t) = \pi(R^2(t) - r_c^2), \quad \Delta p = p_к - \tilde{p}. \tag{5.86}$$

Средневзвешенное пластовое давление $\tilde{p}$ в установившемся плоскорадиальном потоке (см. гл. 3, § 3, п. В):

$$\tilde{p} = p_к - \frac{p_к - p_c}{2\ln(R(t)/r_c)},$$

откуда, учитывая (5.85), находим:

$$\Delta p = p_к - \tilde{p} = \frac{p_к - p_c}{2\ln(R(t)/r_c)} = \frac{Q\eta}{4\pi kh} \tag{5.87}$$

Закон движения границы возмущенной области $R(t)$ найдем, подставив выражения (5.86) и (5.87) в уравнение материального баланса (5.76):

$$4\varkappa dt = d(R^2(t) - r_c^2),$$

откуда после интегрирования в пределах от 0 до t и от r_c до $R(t)$, найдем:

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 4\varkappa t}. \tag{5.88}$$

Тогда из равенства (5.84) можно определить давление в любой точке пласта в момент времени t:

$$p(r,\ t) = p_к - \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 4\varkappa t}}{r},\quad r_c \leqslant r \leqslant \sqrt{r_c^2 + 4\varkappa t};$$

$$p(r,\ t) = p_к,\quad r > \sqrt{r_c^2 + 4\varkappa t}. \tag{5.89}$$

Депрессия в момент времени t:

$$\Delta p_c \equiv p_к - p_c(t) = \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 4\varkappa t}}{r_c} \tag{5.90}$$

Сравнивая (5.90) с депрессией, определенной по точной формуле (5.62), можно убедиться, что относительная погрешность уменьшается с течением времени и составляет 10,6%, если $\mathrm{fo} = \varkappa t/r_c^2 = 100$; 7,5%, если $\mathrm{fo} = 10^3$; 5,7%, если $\mathrm{fo} = 10^4$.

Случай 2. В случае плоскорадиального потока жидкости к скважине, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_c = \mathrm{const}$, закон движения границы возмущенной области выражается интегралом, представляемым в виде медленно сходящегося ряда, поэтому решение здесь не приводится.

Расчет движения границы возмущенной области в этом случае можно определить по графику (рис. 5.10).

Дебит скважины определяется по формуле Дюпюи (5.85) при $p_c = \mathrm{const}$.

Сравнение с точными расчетами, выполненными К. А. Царевичем и И. Ф. Курановым, показывает, что погрешность определения дебита по методу ПССС составляет около 5%.

Заметим, что как в случае линейной, так и радиальной фильтрации в точке перехода от возмущенной к невозмущенной области градиент давления претерпевает разрыв, что служит одной из причин расхождения

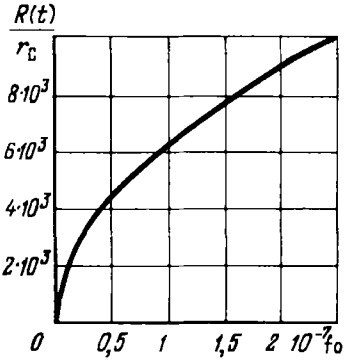


Рис. 5.10. Зависимость безразмерного радиуса возмущенной области $R(t)/r_c$ от безразмерного времени fo при отборе жидкости с постоянным забойным давлением $p_c = \mathrm{const}$

между результатами расчетов по методу ПССС и точным решением. Однако этот метод служит достаточно эффективным расчетным приемом, позволяющим найти решение в простом виде, чем и объясняется его применение в некоторых случаях не только для задач фильтрации однофазного флюида, но и для задач о движении газированной жидкости и о перемещении границы раздела жидкостей и газов.

Распределение давления в области фильтрации, получаемое по методу ПССС, является довольно грубым приближением; гораздо точнее этим методом дается связь между дебитом и депрессией, особенно в случае радиальной фильтрации.

7.2. Метод А. М. Пирвердяна

Этот метод аналогичен методу ПССС и уточняет его. В методе А. М. Пирвердяна, как и в методе ПССС, неустановившийся фильтрационный поток в каждый момент времени мысленно разбивается на две области – возмущенную и невозмущенную. Граница между этими областями также определяется из уравнения материального баланса.

Но в отличие от метода ПССС распределение давления в возмущенной области по методу А. М. Пирвердяна задается в виде квадратичной параболы так, чтобы пьезометрическая кривая на границе областей касалась горизонтальной линии, представляющей давление в невозмущенной области. Распределение давления уже не будет стационарным, а градиент давления на границе областей становится равным нулю, что обеспечивает плавное смыкание профиля давления в возмущенной и невозмущенной областях.

Рассмотрим прямолинейно-параллельный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости.

Случай 1. В горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B пущена в эксплуатацию галерея с постоянным дебитом Q.

К моменту времени t после пуска граница возмущенной области продвинется на длину $l(t)$, при этом кривая распределения давления в этой области будет иметь вид параболы.

На рис. 5.11 приведена кривая распределения давления в пласте ко времени t после пуска галереи.

Уравнение пьезометрической кривой в возмущенной области задается в виде параболы:

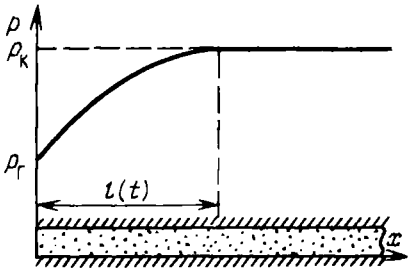


Рис. 5.11. Кривая распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке по методу А. М. Пирвердяна

$$p(x,\ t) = p_к - (p_к - p_г)\left(1 - \frac{x}{l(t)}\right)^2, \quad 0 < x \leqslant l(t). \tag{5.91}$$

Дебит галереи определяется по закону Дарси:

$$Q = \frac{k}{\eta} Bh \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{5.92}$$

Значение градиента давления на галерее $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0}$ найдем по формуле (5.91):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2(p_к - p_г)}{l(t)}. \tag{5.93}$$

Подставив равенство (5.93) в (5.92), найдем формулу для дебита галереи:

$$Q = 2\frac{k}{\eta}\frac{p_к - p_г}{l(t)} Bh. \tag{5.94}$$

Закон движения внешней границы возмущенной области определяется из уравнения материального баланса (5.76) с учетом (5.77), где $\Delta p = p_к - \tilde{p}$.

Определим значение средневзвешенного пластового давления в возмущенной области к моменту времени t, используя распределение (5.91):

$$\tilde{p} = \frac{1}{V(t)} \int\limits_{V(t)} p(x,\ t)\, dV = \frac{1}{l(t)} \int\limits_0^{l(t)} \left[p_к - (p_к - p_г)\left(1 - \frac{x}{l(t)}\right)^2\right] dx =$$

$$= p - \frac{p_к - p_г}{3}.$$

Тогда, с учетом (5.94), найдем:

$$\Delta p \equiv p_к - \tilde{p} = \frac{p_к - p_г}{3} = \frac{Q\eta l(t)}{6kBh}. \tag{5.95}$$

Подставив (5.77) и (5.95) в уравнение материального баланса (5.76), получим:

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt}\left[Bhl^2(t)\frac{Q\eta}{6kBh}\right],$$

откуда

$$6\varkappa dt = dl^2(t),$$

и после интегрирования в пределах от 0 до t и от 0 до l найдем:

$$l(t) = \sqrt{6\varkappa t}. \tag{5.96}$$

Распределение давления (5.91) в возмущенной области пласта теперь принимает вид

$$p(x, t) = p_к - \frac{Q\eta}{2kBh}\sqrt{6\varkappa t}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{6\varkappa t}}\right)^2, \quad 0 < x \leqslant \sqrt{6\varkappa t};$$

$$p(x, t) = p_к, \quad x > \sqrt{6\varkappa t}. \tag{5.97}$$

Расчет депрессии $p_к - p_г$ по формуле (5.97) дает погрешность по сравнению с точным решением примерно 9%, т. е. в 2,5 раза меньше, чем метод ПССС.

Случай 2. В прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости к галерее, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_г = \text{const}$, используя ту же методику, что и для случая 1, закон движения границы возмущенной области найдем в виде:

$$l(t) = \sqrt{12\varkappa t}.$$

Распределение давления в возмущенной области пласта в этом случае будет описываться следующим соотношением:

$$p(x, t) = p_к - (p_к - p_г)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{12\varkappa t}}\right)^2,$$

а дебит галереи определяется по формуле

$$Q = 2\frac{k}{\eta}\frac{p_к - p_г}{l(t)}Bh = 2\frac{k}{\eta}\frac{p_к - p_г}{\sqrt{12\varkappa t}}Bh. \tag{5.98}$$

Погрешность расчета дебита галереи по приближенной формуле (5.98) по сравнению с точным решением составляет около 2,5%, т. е. в этом случае расчет по методу А. М. Пирвердяна более чем в 2 раза точнее, чем по методу ПССС.

7.3. Метод интегральных соотношений

Метод интегральных соотношений, предложенный Г. И. Баренблаттом, по аналогии с методами пограничного слоя в потоке вязкой жидкости позволяет получить приближенные решения некоторых задач нестационарной фильтрации упругой жидкости с нужной точностью.

Метод основан на следующих предпосылках.

1. В каждый момент времени пласт делится на конечную возмущенную область и невозмущенную область, где движение отсутствует.

2. В возмущенной области распределение давления представляется в виде многочлена по степеням координаты x или r (в случае радиального потока добавляется еще логарифмический член) с коэффициентами, зависящими от времени, так что:

для прямолинейно-параллельного потока

$$p(x, t) = a_0(t) + a_1(t)\frac{x}{l(t)} + \ldots + a_n(t)\frac{x^n}{l^n(t)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l(t); \tag{5.99}$$

для плоскорадиальной фильтрации

$$p(r, t) = a_0(t)\ln\frac{r}{R(t)} + a_1(t) + a_2(t)\frac{r}{R(t)} +$$

$$+ \ldots + a_{n+1}(t)\frac{r^n}{R^n(t)}, \quad r_c \leqslant r \leqslant R(t), \tag{5.100}$$

где число членов n выбирается в зависимости от желаемой точности решения.

3. Коэффициенты многочлена $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, а также размер области возмущения $l(t)$ (или $R(t)$) находятся из условий на галерее (или на забое скважины), из условий непрерывности давления и гладкости кривой давления на границе области возмущения, а также из особых интегральных соотношений, которые получаются следующим образом.

В случае притока к галерее правая и левая части уравнения пьезопроводности (5.21) умножаются на x^k (где $k = 0, 1, 2, \ldots$) и интегрируются по всей возмущенной области:

$$\int_0^{l(t)} x^k \frac{\partial p}{\partial t}\,dx = \varkappa \int_0^{l(t)} x^k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\,dx. \tag{5.101}$$

Для случая притока к скважине берется дифференциальное уравнение (5.49), его правая и левая части умножаются на r^k (где $k = 1, 2, \ldots$) и проводится интегрирование по всей возмущенной области:

$$\int_{r_c}^{R(t)} r^k \frac{\partial p}{\partial t}\,dr = \varkappa \int_{r_c}^{R(t)} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) r^k\,dr. \tag{5.102}$$

Если в уравнения (5.101) и (5.102) подставить соответственно выражения (5.99) и (5.100) и проинтегрировать, то получатся недостающие соотношения для определения коэффициентов $a_0(t)$, $a_1(t)$ ... и $l(t)$ (или $R(t)$).

Первое из этих интегральных соотношений (при $k = 0$, если рассматривается приток к галерее, и при $k = 1$ для притока к скважине) представляет собой уравнение материального баланса и из него находится координата границы возмущенной области $l(t)$ или $R(t)$.

Если принять в формуле (5.99) $n = 1$, а в формуле (5.100) $n = 0$, то получатся решения, соответствующие методу ПССС (5.81), (5.82), (5.89) – в зависимости от условий на галерее или на забое скважины; если же $n = 2$ в (5.99), то из метода интегральных соотношений вытекает, как частный случай, метод А. М. Пирвердяна.

В качестве примера решим методом интегральных соотношений задачу о плоскорадиальной неустановившейся фильтрации упругой жидкости к скважине радиусом r_c, пущенной в эксплуатацию в момент $t = 0$ с постоянным дебитом Q. В начальный момент давление во всем пласте постоянно и равно $p_к$.

Распределение давления в возмущенной области пласта $r_c \leqslant r \leqslant R(t)$ зададим в виде

$$p(r, t) = a_0 \ln \frac{r}{R(t)} + a_1 + a_2 \frac{r}{R(t)}, \tag{5.103}$$

т. е. возьмем многочлен первой степени.

Коэффициенты a_0, a_1 и a_2 определяются из условий на забое скважины и на границе возмущенной области.

Условие на забое согласно (5.50) имеет вид:

$$Q = \frac{2\pi kh}{\eta} r \frac{dp}{dr} \quad \text{при} \quad r = r_c. \tag{5.104}$$

На границе возмущенной области имеем:

$$p = p_к \quad \text{при} \quad r = R(t),;$$
$$\partial p/\partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = R(t), \tag{5.105}$$

где второе условие представляет собой условие гладкости кривой.

Определенные из этих условий коэффициенты имеют вид:

$$a_0 = \frac{Q\eta}{2\pi kh}, \quad a_1 = p_к + \frac{Q\eta}{2\pi kh}, \quad a_2 = -\frac{Q\eta}{2\pi kh} \tag{5.106}$$

(слагаемые, пропорциональные r_c или r_c^2, отброшены вследствие их малости).

Подставив выражения (5.106) в правую часть формулы (5.103), получим:

$$p(r, t) = p_к + \frac{Q\eta}{2\pi kh}\left[\ln \frac{r}{R(t)} + 1 - \frac{r}{R(t)}\right]. \tag{5.107}$$

Закон движения границы возмущенной области $R(t)$ находится из уравнения материального баланса (5.76) с учетом (5.86) (это уравнение можно получить из интегрального соотношения (5.102) при $k = 1$).

Значение средневзвешенного пластового давления $\tilde{p}$ в возмущенной области определяется при использовании распределения давления (5.103):

$$\tilde{p} = \frac{1}{V(t)} \int_{V(t)} p(r, t)\, dV = \frac{1}{\pi(R^2(t) - r_c^2)} \int_{r_c}^{R(t)} \left[p_к - \right.$$
$$\left. - \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{R(t)}{r} + \frac{Q\eta}{2\pi kh}\left(1 - \frac{r}{R(t)}\right)\right] 2\pi hr\, dr.$$

Проведя интегрирование и пренебрегая в полученном выражении членами, содержащими r_c^2 (вследствие их малости), получим:

$$\tilde{p} = p_к - \frac{Q\eta}{12\pi kh},$$

а тогда согласно (5.86)

$$\Delta p = p_к - \tilde{p} = \frac{Q\eta}{12\pi kh}. \tag{5.108}$$

Подставив выражения (5.86) для $V(t)$ и (5.108) в уравнение материального баланса (5.76), после несложных преобразований найдем:

$$12\varkappa\, dt = d(R^2(t) - r_c^2),$$

откуда после интегрирования получим:

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 12\varkappa t}.$$

Следовательно, распределение давления (5.103) в возмущенной области будет иметь вид

$$p(r,\ t) = p_к - \frac{Q\eta}{2\pi kh}\left[\ln\frac{\sqrt{r_c^2 + 12\varkappa t}}{r} - 1 + \frac{r}{\sqrt{r_c^2 + 12\varkappa t}}\right],$$

$$r_c \leqslant r \leqslant \sqrt{r_c^2 + 12\varkappa t}, \quad p(r,\ t) = p_к, \quad r > \sqrt{r_c^2 + 12\varkappa t}. \tag{5.109}$$

Относительная погрешность δ при расчетах депрессии $p_к - p_c(t)$ по формуле (5.109) для различных значений параметра Фурье $\mathrm{fo} = \varkappa t/r_c^2$ составляет: $\delta = -4{,}9\%$ при $\mathrm{fo} = 100$; $\delta = -4\%$ при $\mathrm{fo} = 10^3$; $\delta = -3{,}2\%$ при $\mathrm{fo} = 10^4$.

Таким образом, приближенное значение депрессии Δp_c по методу интегральных соотношений занижено по сравнению с точным.

7.4. Метод «усреднения»

Суть метода «усреднения», предложенного для решения задач фильтрации Ю. Д. Соколовым и Г. И. Гусейновым заключается в том, что в дифференциальном уравнении упругого режима (5.49) производная от давления по времени $\partial p/\partial t$ усредняется по всей возмущенной области и заменяется некоторой функцией времени

$$F(t) = \frac{2}{R^2(t) - r_c^2}\int_{r_c}^{R(t)} \frac{\partial p}{\partial t}\, r\, dr, \tag{5.110}$$

значение которой определяется из начальных и граничных условий.

Тогда уравнение (5.49) принимает вид

$$F(t) = \varkappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right). \tag{5.111}$$

Эта замена упрощает дифференциальное уравнение и облегчает его интегрирование.

Будем определять распределение давления при неустановившемся притоке упругой жидкости к скважине при постоянном дебите Q. При этом условия на забое и на границе возмущенной области имеют вид (5.104) и (5.105). Интегрируя уравнение (5.111) по r и учитывая условия (5.104) и (5.105), можно получить:

$$p = p_к + \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{F(t)}{2\varkappa}\left[\frac{1}{2}\left(r^2 - R^2(t)\right) - r_c^2 \ln \frac{r}{R(t)}\right]. \tag{5.112}$$

Из второго условия (5.105) определяется функция $F(t)$ в виде

$$F(t) = -\frac{Q\eta\varkappa}{\pi kh(R^2(t) - r_c^2)}. \tag{5.113}$$

Подставляя выражение (5.113) в (5.112) и пренебрегая членами с r_c^2, найдем:

$$p = p_к + \frac{Q\eta}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{Q\eta}{4\pi kh}\left(1 - \frac{r^2}{R^2(t)}\right),$$

$$r_c \leqslant r \leqslant R(t). \tag{5.114}$$

Для определения координаты возмущенной области $R(t)$ надо продифференцировать по t равенство (5.114), результат подставить в (5.110) и учесть выражение (5.113) для $F(t)$.

Тогда получим:

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 8\varkappa t}. \tag{5.115}$$

Сопоставление формулы (5.114) с учетом (5.115) с точным решением (5.62) показывает, что относительная погрешность определения депрессии $p_к - p_c$ не превосходит 5%.

В заключение отметим приближенный результат, полученный Э. Б. Чекалюком. Для скважины, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением, он предлагает определять дебит по формуле Дюпюи (5,85), в которой радиус возмущенной области

$$R(t) = r_c + \sqrt{\pi\varkappa t}.$$

Эта формула очень важна для практики, поскольку простого точного решения задачи об отборе упругой жидкости при условии $p_c = \text{const}$ не существует. Расчетами показано, что формула Э. Б. Чекалюка очень точна, относительная погрешность при определении дебита не превышает 1%.

§ 8. ПРИТОК УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ К УКРУПНЕННОЙ СКВАЖИНЕ

Большое число нефтяных и газовых месторождений приурочено к водоносным пластам и разрабатываются в условиях водонапорного режима. В процессе разработки таких месторождений давление в нефтяной или газовой залежи снижается, и подошвенная или краевая вода вторгается в залежь. При этом площадь нефтеносной (или газоносной) залежи уменьшается. При проектировании разработки месторождений такого типа важным показателем является количество воды, внедрившейся в залежь, а также давление в залежи в каждый момент времени (обычно считают, что давление во всей залежи в каждый момент одинаково, т.е. расчет ведется по средневзвешенному давлению). Такая задача, учитывающая продвижение водонефтяного (или газоводяного) контакта, очень сложна. Однако в начале разработки месторождения, когда информация о пласте и его особенностях мала, можно провести оценочные расчеты, не учитывая обводнения залежи. Нефтяную или газовую залежь моделируют в виде круговой и рассматривают как укрупненную скважину постоянного радиуса $R_з$. Водоносный пласт, окружающий скважину, рассматривается либо простирающимся до бесконечности, либо имеющим конечный размер $R_к$.

Поставим задачу следующим образом. Газовая или нефтяная залежь площадью S рассматривается как укрупненная скважина радиусом $R_з = \sqrt{S/\pi}$. Законтурная вода, окружающая залежь, простирается до бесконечности. До начала отбора давление во всем водоносном пласте равно $R_к$; в момент, принимаемый за начальный, $t = 0$, давление на забое снижается до значения p_c и поддерживается постоянным в течение всего периода эксплуатации. Требуется определить объем воды, поступившей в укрупненную скважину за время t. Считая, что водоносный пласт имеет постоянную толщину h, коэффициент проницаемости k и обозначая через $\eta_в$ вязкость воды и через β^* упругоемкость водоносного пласта, можем написать дифференциальное уравнение упругого режима для плоскорадиального течения воды к укрупненной скважине (5.49)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \tag{5.116}$$

которое должно быть решено при следующих условиях:

$$p = p_к \quad \text{при} \quad t = 0, \quad R_з \leqslant r < \infty; \tag{5.117}$$

$$p = p_c \quad \text{при} \quad r = R_з, \quad t > 0; \tag{5.118}$$

$$p = p_к \quad \text{при} \quad r = \infty. \tag{5.119}$$

В результате интегрирования уравнения (5.116) с условиями (5.117)–(5.119) определяется распределение давления в водоносном пласте $p(r, t)$. Дебит воды находится по формуле

$$Q_в = \frac{k}{\eta_в}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R_з} 2\pi R_з h, \tag{5.120}$$

а отобранное количество воды – по формуле

$$\int_0^t Q_в(t)\,dt = \frac{2\pi k h R_з}{\eta_в}\int_0^t \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R_з} dt. \tag{5.121}$$

Решение этой задачи было получено американскими учеными Ван Эвердингеном и Херстом методом преобразования Лапласа. Предварительно выражение для отобранного объема воды приведено к безразмерному виду

$$\bar{Q}(\text{fo}) = \frac{\eta_в \varkappa}{2\pi k h R_з^2 (p_к - p_c)}\int_0^t Q_в(t)\,dt, \tag{5.122}$$

где $\text{fo} = \varkappa t/R_з^2$ – параметр Фурье, т. е. безразмерное время.

Для $\bar{Q}$ получено выражение

$$\bar{Q}(\text{fo}) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2\,\text{fo}})\,du}{u^3\,[J_0^2(u) + Y_0^2(u)]}. \tag{5.123}$$

Здесь $J_0(u)$ и $Y_0(u)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка. Для функции $\bar{Q}(\text{fo})$ составлены таблицы и построен график (рис. 5.12, табл. 1 в прил. 1).

Задача усложняется, если заданное давление на забое укрупненной скважины переменно, т. е. $p_c(t)$. В этом случае можно использовать принцип суперпозиции (см. § 5). Пусть давление p_c падает с течением времени так, как на рис. 5.13. Обозначим рассматриваемый момент времени через t_n, и весь интервал $0 \leqslant t \leqslant t_n$ разобьем на n участков с шагом, равным Δt; тогда $t_n = \Delta t \cdot n$. Кривую $p_c(t)$ заменяем ступенчатой зависимостью и считаем, что в пределах одного шага давление постоянно. По принципу суперпозиции из формулы (5.122) получим:

$$\int_0^t Q_в(t)\,dt = \frac{2\pi k h R_з^2}{\eta_в \varkappa}\Big[\Delta p_0\,\bar{Q}(\text{fo}) + \Delta p_1\,\bar{Q}(\text{fo} - \text{fo}_1) +$$

$$+ \Delta p_2\,\bar{Q}(\text{fo} - \text{fo}_2) + \ldots + \Delta p_{n-1}\,\bar{Q}(\text{fo} - \text{fo}_{n-1})\Big], \tag{5.124}$$

где

$$\text{fo} - \text{fo}_i = \frac{\varkappa t}{R_з^2} - \frac{\varkappa t_i}{R_з^2} = \frac{\varkappa (t - t_i)}{R_з^2},$$

т. е. снижение давления на забое укрупненной скважины дает такой же

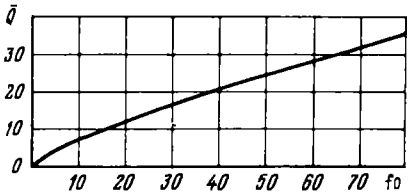


Рис. 5.12. Зависимость безразмерного объема воды $\bar{Q}$, отобранного из укрупненной скважины, от параметра Фурье fo для бесконечного пласта (p_c = const)

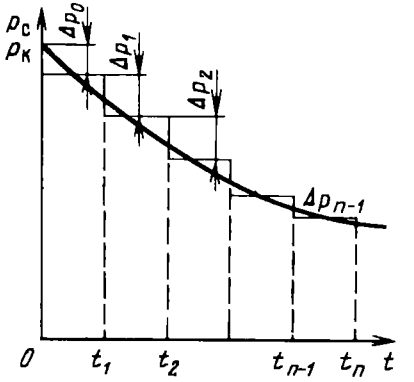


Рис. 5.13. Динамика давления на забое укрупненной скважины

эффект, как если бы в момент $t_1 = \Delta t$ в дополнение к работающей с депрессией Δp_0 скважине в этом же месте начала работать вторая скважина с депрессией Δp_1. Эта вторая скважина к моменту t_n проработает в течение промежутка времени $t_n - t_1$, поэтому аргументом для нее будет $\text{fo} - \text{fo}_1 = \varkappa(t_n - t_1)/R_3^2$ и т. д.

Формула (5.124) решает поставленную задачу, если забойное давление переменно во времени.

Для разработки месторождений интересной представляется задача определения давления на забое укрупненной скважины $p_c(t)$, если задан дебит $Q_в$. Эта задача решается интегрированием уравнения (5.116) с условиями (5.117) и (5.119), а условие (5.118) должно быть заменено следующим:

$$r\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q_в \eta_в}{2\pi kh} \quad \text{при} \quad r = R_3. \tag{5.125}$$

Обозначим безразмерную депрессию через

$$\bar{p}(\text{fo}) = \frac{2\pi kh}{Q_в \eta_в}\left[p_к - p_c(\text{fo})\right]. \tag{5.126}$$

Решение Ван Эвердингена и Херста имеет следующий вид:

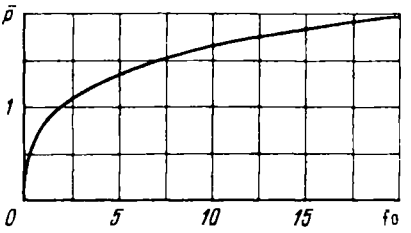


Рис. 5.14. Зависимость безразмерной депрессии p от параметра Фурье fo для укрупненной скважины в бесконечном пласте при условии $Q_в = \text{const}$

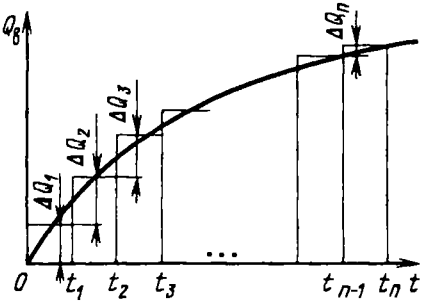


Рис. 5.15. Динамика дебита укрупненной скважины

$$\bar{p}(\text{fo}) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-u^2 \text{fo}})\, du}{u^3 [J_1^2(u) + Y_1^2(u)]}, \tag{5.127}$$

где $J_1(u)$ и $Y_1(u)$ – функции Бесселя соответственно первого и второго рода первого порядка. График функции $\bar{p}(\text{fo})$ приведен на рис. 5.14 (прил. 1, табл. 1).

Если дебит $Q_в$ переменный, то непрерывную зависимость $Q_в(t)$ заменяем ступенчатой функцией, как показано на рис. 5.15, разбивая отрезок времени $t = t_n$ на n шагов: $t_n = n\Delta t$, где $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$ и т. д. Далее применяем принцип суперпозиции, считая, что в моменты времени t_1, t_2 и т. д. в работу включаются новые скважины, расположенные в том же месте, с дебитами ΔQ_2, ΔQ_3 и т. д.

$$p_к - p_c(R_э, t) = \frac{\eta_в}{2\pi kh} \Big[\Delta Q_1 \bar{p}(\text{fo}) + \Delta Q_2 \bar{p}(\text{fo} - \text{fo}_1) + \ldots + \\ + \Delta Q_n \bar{p}(\text{fo} - \text{fo}_{n-1}) \Big]. \tag{5.128}$$

Если рассматривается конечный закрытый водоносный пласт радиусом $R_к$, то на границе выполняется условие

$$\partial p / \partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_к. \tag{5.129}$$

Решение при $p_c = \text{const}$ в безразмерной форме как функция fo и $R = R_к/R_з$ записывается в виде бесконечного ряда:

$$\bar{Q}(\text{fo}) = \frac{R^2 - 1}{2} - 2 \sum_{a_1, a_2, \ldots}^{\infty} \frac{e^{-a_n^2 fo} J_1^2(a_n R)}{a_n^2 [J_0^2(a_n) - J_1^2(a_n R)]}, \tag{5.130}$$

где a_1, a_2, ... – корни уравнения;

$$J_1(a_n R)\, Y_0(a_n) - Y_1(a_n R)\, J_0(a_n) = 0. \tag{5.131}$$

Зависимости $\bar{Q}(\text{fo})$ для различных значений безразмерного радиуса пласта R приведены на рис. 5.16 и в прил. 2. Чем меньше размеры пласта, тем меньше упругий запас и тем меньшее время нужно для отбора всего объема жидкости, которую можно извлечь из пласта за счет ее упругости при заданной депрессии $p_к - p_c$. Так, для $R = 1{,}5$, начиная с $\text{fo} = 0{,}8$, $\bar{Q} = 0{,}625$ и продолжает оставаться постоянным, что означает отсутствие отбора; для $R = 2$ отбор заканчивается при $\text{fo} = 3$, и т. д.

Если закрытый конечный пласт эксплуатируется при заданном постоянном дебите $Q_в$, то безразмерная депрессия представляется в виде следующего выражения:

$$\bar{p}(\text{fo}) = \frac{2}{R^2 - 1}\left(\frac{1}{4} + \text{fo}\right) - \frac{(3R^4 - 4R^4 \ln R - 2R^2 - 1)}{4(R^2 - 1)^2} +$$

$$+ 2 \sum_{\beta_1, \beta_2, \ldots}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n^2 fo} J_1^2(\beta_n R)}{\beta_n^2 [J_1^2(\beta_n R) - J_1^2 \beta_n)]}, \tag{5.132}$$

где β_1, β_2, ... – корни уравнения

$$J_1(\beta_n R)\, Y_1(\beta_n) - J_1(\beta_n)\, Y_1(\beta_n R) = 0. \tag{5.133}$$

Из рис. 5.17 и прил. 3 видно, что чем меньше размер пласта, тем более резко возрастает депрессия при отборе воды с постоянным дебитом; при малых значениях времени влияние границы не сказывается (например, для $R = 6$ до значения $\text{fo} = 6$ значения $\bar{p}$ такие же, как для бесконечного пласта. Поэтому таблица для каждого R начинается с того значения fo, для которого $\bar{p}$ отличается от $\bar{p}$ для бесконечного пласта.

Приведем графики и таблицы безразмерной депрессии $\bar{p}(\text{fo})$ для конечного открытого пласта, на границе которого давление постоянно ($p = p_к$ при $r = R_к$), если отбор постоянный ($Q_в = \text{const}$) (рис. 5.18, прил. 4). Чем меньше размер пласта, тем быстрее устанавливается постоянная депрессия, т. е. тем быстрее заканчивается первая фаза упругого режима и начинается вторая – стационарная фильтрация.

Задачу о притоке упругой жидкости к укрупненной скважине в бесконечном пласте при отборе ее с дебитом $Q_в(t)$ можно решить также приближенно – методом интегральных соотношений. Постановка задачи описывается соотношениями (5.116), (5.117), (5.119), (5.125). Найдем

Рис. 5.16. Зависимость безразмерного объема $\bar{Q}$, отобранного из укрупненной скважины, от параметра Фурье fo для закрытого пласта конечного размера (p_c = const, $R = R_к/R_с$)

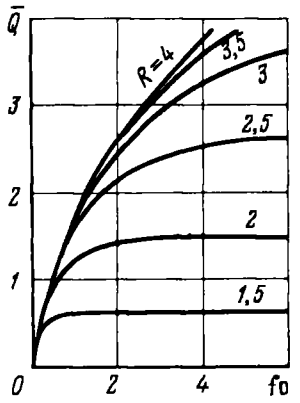


Рис. 5.17. Зависимость безразмерной депрессии $\bar{p}$ от параметра Фурье fo для укрупненной скважины, работающей в закрытом пласте конечного размера ($Q_в$ = const, $R = R_к/R_с$)

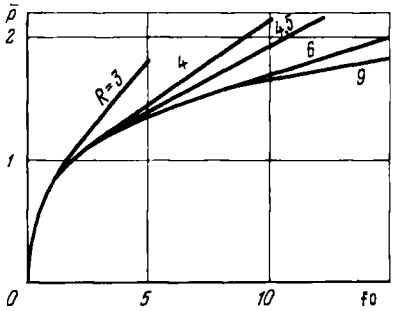
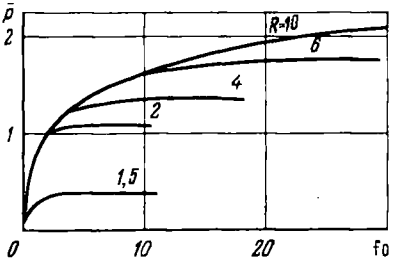


Рис. 5.18. Зависимость безразмерной депрессии $\bar{p}$ от параметра Фурье fo для укрупненной скважины, расположенной в открытом пласте конечного размера ($Q_в$ = const, $R = R_к/R_с$)



распределение давления в пласте и давление на забое укрупненной скважины.

В соответствии с методом интегральных соотношений (см. § 7, п. 7.3) решение ищется в виде многочлена по степени r с добавлением логарифмического члена для плоскорадиального течения (см. формулу (5.100)), где $R(t)$ – радиус возмущенной области, a_0, a_1, a_2, ... – функции времени. Распределение давления (5.110) справедливо для возмущенной

области, т.е. для значений $R_з \leqslant r \leqslant R(t)$; для значений $R(t) \leqslant r \leqslant \infty$ давление равно начальному $p_к$. Ограничимся многочленом первой степени:

$$p(r, t) = a_1 \ln \frac{r}{R(t)} + a_0 + a_2 \frac{r}{R(t)}. \tag{5.134}$$

Для определения коэффициентов a_1, a_0, a_2 используются условия на забое укрупненной скважины (5.125), а также на границе возмущенной области:

$$p = p_к \quad \text{при} \quad r = R(t); \tag{5.135}$$

$$\partial p/\partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = R(t). \tag{5.136}$$

Последнее выражение представляет собой условие гладкости кривой $p(r, t)$. Исходя из этих условий получаем:

$$a_1 = a_2 = \frac{Q_в(t)\eta_в}{2\pi kh} \frac{R(t)}{R(t) - R_з};$$

$$a_0 = p_к + \frac{Q_в(t)\eta_в}{2\pi kh} \frac{R(t)}{R(t) - R_з}. \tag{5.137}$$

Подставив выражения (5.137) в (5.134), найдем распределение давления:

$$p(r, t) = p_к - \frac{Q_в(t)\eta_в}{2\pi kh[R(t) - R_з]} \left[R(t) \ln \frac{R(t)}{r} - R(t) + r \right]. \tag{5.138}$$

Отметим, что в формуле (5.138) и во всех последующих соотношениях нельзя пренебрегать радиусом скважины $R_з$ по сравнению с радиусом возмущенной области $R(t)$, как это было сделано в § 7, п. 7.3 где рассматривался приток к обычной скважине с $r_c \approx 0{,}1$ м, так как отношение $R(t)/R_з$ в первые годы после начала разработки залежи будет равняться нескольким единицам. Поэтому все соотношения настоящего параграфа значительно сложнее, чем в § 7, и вопрос о притоке к укрупненной скважине рассматривается отдельно.

Радиус возмущенной области определяется из уравнения материального баланса (5.76), которое приводится к виду

$$\frac{\int_0^t Q_в(t)\, dt}{Q_в(t)} = \frac{R_з}{\varkappa[R(t) - R_з]} \left[\frac{R^3(t)}{12 R_з^2} + \frac{R(t)}{4} - \frac{R_з}{3} - \frac{R(t)}{2} \ln \frac{R(t)}{R_з} \right]. \tag{5.139}$$

Если $Q_в = \text{const}$, то $\int_0^t Q_в\, dt = Q_в t$ и уравнение (5.139) примет вид

$$\frac{\varkappa t}{R_з^2} = \text{fo} = \frac{1}{R(t) - R_з} \left[\frac{R^3(t)}{12 R_з^2} + \frac{R(t)}{4} + \frac{R_з}{3} - \frac{R(t)}{2} \ln \frac{R(t)}{R_з} \right]. \tag{5.140}$$

Уравнения (5.139) и (5.140) представляют собой трансцендентные

уравнения относительно $R(t)$. Решая их графически или при помощи ЭВМ для разных моментов времени и подставляя полученные значения $R(t)$ в формулу (5.138), найдем распределение давления по пласту в любой момент времени. В частности, при $r = R_3$ из формулы (5.138) получаем давление на забое укрупненной скважины:

$$p(R_3, t) = p_c(t) = p_к - \frac{Q_в(t)\eta_в}{2\pi kh[R(t) - R_3]}\left[R(t)\ln\frac{R(t)}{R_3} - R(t) + R_3\right]. \quad (5.141)$$

При проведении расчетов по приближенным соотношениям (5.138), (5.141), (5.139) или (5.140) нужно прежде всего по заданной зависимости дебита воды от времени $Q_в(t)$ найти отбор $\int_0^t Q(t)\,dt$ к рассматриваемому моменту времени; затем вычислить отношение $\int_0^t Q_в(t)\,dt/Q_в(t)$; из формул (5.139) или (5.140) найти $R(t)$ для этого же момента; подставить найденное значение $R(t)$ в формулы (5.138) и (5.141) и тем самым найти распределение давления $p(r, t)$ и давление на забое $p_c(t)$.

Читателю предоставляется возможность оценить погрешность, которую дает формула (5.141), сравнив ее значения (после приведения ее к безразмерному виду) со значениями, приведенными в прил. 1. Отметим еще, что для больших значений времени, когда $R(t) \gg R_3$, в уравнениях (5.139) или (5.140) справа можно оставить только первый член и в знаменателе пренебречь значением R_3 по сравнению с $R(t)$. В этом случае получим:

$$\int_0^t Q_в(t)\,dt/Q_в(t) = R^2(t)/(12\varkappa t). \quad (5.142)$$

Обозначив

$$\frac{\varkappa}{R_3^2}\int_0^t Q_в(t)\,dt/Q_в(t) = \text{fo}', \quad (5.143)$$

где fo′ – известная безразмерная функция времени, найдем:

$$R(t) = \sqrt{12\,\text{fo}'}\,R_3. \quad (5.144)$$

Если же $Q_в = \text{const}$, то

$$R(t) = \sqrt{12\varkappa t}. \quad (5.145)$$

С использованием формул (5.144) и (5.145) расчеты давления существенно упрощаются.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какой режим работы нефтяного или водяного пласта называется упругим? При каких условиях он имеет место? Какие разновидности упругого режима существуют?

2. Что называется упругим запасом жидкости в пласте и как он подсчитывается?

3. Как записывается уравнение пьезопроводности?

4. Какая формула называется основной формулой упругого режима? Какую задачу она решает?

5. Показать, что при отборе упругой жидкости из скважины, расположенной в бесконечном пласте, с постоянным дебитом Q_0 забойное давление p_c (при $r = r_c$) является линейной функцией от $\ln t$.

6. В нефтяном пласте с пьезопроводностью $\varkappa = 0{,}1$ м^2/с в момент $t = 0$ начала работать скважина с постоянным дебитом Q. Через 5 ч скважину закрыли. Что происходит на расстоянии $r = 120$ м от скважины в момент $t = 10$ ч (повышение или понижение давления)?

Указание. Построить график зависимости $\partial p/\partial t$ от t при фиксированном r.

7. Скважина расположена между двумя непроницаемыми границами (оси x и y), на расстоянии $a = 50$ м от оси x и на расстоянии $b = 100$ м от оси y. С момента $t = 0$ из нее отбирают нефть с постоянным дебитом Q_0. Вывести формулу для падения давления на забое скважины $\Delta p_c = p_к - p_c$. Коэффициент пьезопроводности $\varkappa = 1{,}25$ м^2/с. Как запишется эта формула для моментов времени $t \geqslant 8{,}3 \cdot 10^4$ с $[(a^2 + b^2)/(4\varkappa t) \leqslant 0{,}03]$?

8. Рассматривается неустановившаяся фильтрация упругой жидкости в полосообразном полубесконечном пласте. При отборе жидкости давление на галерее ($x = 0$) $p_г$ сохраняется постоянным. Сопоставить формулы для определения дебитов, полученные: а) по точному решению; б) по методу последовательной смены стационарных состояний; в) по методу А. М. Пирвердяна. Найти относительные погрешности, которые дают приближенные методы.

9. Рассматривается неустановившаяся фильтрация упругой жидкости к совершенной скважине с постоянным дебитом Q. Коэффициент пьезопроводности $\varkappa = 0{,}5$ м^2/с. Сравнить значения депрессии $p_к - p_c$, определенные по точной формуле, по методу последовательной смены стационарных состояний и по методу интегральных соотношений в момент $t = 1$ сут; принять $r_c = 0{,}1$ м и найти относительную погрешность. Пласт считать бесконечным.

Глава 6

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

1.1. Вывод дифференциального уравнения Лейбензона

Основы теории движения газа в пористой среде были разработаны основателем советской школы нефтегазовой гидромеханики академиком Л. С. Лейбензоном. Он впервые получил дифференциальные уравнения неустановившейся фильтрации совершенного газа в пласте по закону Дарси. Полученное им нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа впоследствии было названо уравнением Лейбензона.

При выводе указанного уравнения предполагалось, что коэффициенты пористости и проницаемости не изменяются с давлением, т. е. пласт недеформируем, вязкость газа также не зависит от давления, газ совершенный. Принимается также, что фильтрация газа в пласте происходит по изотермическому закону, т. е. температура газа и пласта остается неизменной по времени. Впоследствии один из учеников Л. С. Лейбензона – Б. Б. Лапук в работах, посвященных теоретическим основам разработки месторождений природных газов, показал, что неустановившуюся фильтрацию газа можно приближенно рассматривать как изотермическую, так как изменения температуры газа, возникающие при изменении давления, в значительной мере компенсируются теплообменом со скелетом пористой среды, поверхность контакта газа с которой огромна. Однако при рассмотрении фильтрации газа в призабойной зоне неизотермичность процесса фильтрации сказывается существенно вследствие локализации основного перепада давления вблизи стенки скважины. Кстати, на этом эффекте основано использование глубинных термограмм действующих скважин для уточнения профиля притока газа по толщине пласта (глубинная дебитометрия). При рассмотрении процесса фильтрации в пласте в целом этими локальными эффектами допустимо пренебрегать.

Для вывода дифференциального уравнения неустановившейся фильтрации совершенного газа воспользуемся уравнением (2.56), которое справедливо для любого сжимаемого флюида:

$$\frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial(\rho m)}{\partial t}, \tag{6.1}$$

где коэффициенты проницаемости и вязкости постоянны.

Функция Лейбензона для совершенного газа определяется по формуле (2.60):

$$P=\rho_{ат}p^2/(2p_{ат})+C. \tag{6.2}$$

Продифференцируем выражение (6.2) по координатам 2 раза

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\rho_{ат}}{2p_{ат}} \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\rho_{ат}}{2p_{ат}} \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\rho_{ат}}{2p_{ат}} \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}. \tag{6.3}$$

Преобразуем правую часть уравнения (6.1). Считая пористость m_0 постоянной и учитывая, что для совершенного газа

$$\rho = \rho_{ат} p / p_{ат}, \tag{6.4}$$

получим:

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} = \frac{\rho_{ат} m_0}{p_{ат}} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{6.5}$$

Подставив выражения (6.3) и (6.5) в уравнение (6.1), получим

$$\frac{k}{2\eta m_0}\left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{6.6}$$

Выражение в скобке представляет собой оператор Лапласа относительно p^2, поэтому уравнение (6.6) можно кратко записать в виде

$$\frac{k}{2\eta m_0} \nabla^2 p^2 = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{6.7}$$

Полученное дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации совершенного газа (6.6) называется уравнением Л. С. Лейбензона и представляет собой нелинейное уравнение параболического типа. Подчеркнем, что оно справедливо для совершенного газа при выполнении закона Дарси. Изменением коэффициента пористости пренебрегают потому, что он входит в уравнение (6.1) в виде произведения ρm, в котором плотность газа меняется в гораздо большей степени, чем пористость.

Уравнение Лейбензона (6.6) можно записать по-другому, умножив правую и левую части на давление p и заменив

$$p \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial t};$$

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{kp}{\eta m_0}\left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}\right). \tag{6.8}$$

В такой записи под знаками производных по координатам и по времени находится одна и та же функция p^2, но коэффициент в правой части $kp/(\eta m_0)$ – переменный, в него входит искомая функция $p(x, y, z, t)$.

Нетрудно показать, что неустановившаяся фильтрация реального газа с уравнением состояния $\rho = \rho_{ат} p/[p_{ат} z(p)]$ и с учетом зависимости

коэффициента вязкости от давления $\eta = \eta(p)$ и недеформируемости пористой среды ($m_0 = \text{const}$, $k = \text{const}$) описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением параболического типа:

$$\frac{k}{2m_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\eta(p)\,z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\eta(p)\,z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\eta(p)\,z(p)}\frac{\partial p^2}{\partial z}\right]\right\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{z(p)}\right]. \qquad (6.9)$$

Для решения конкретных задач, связанных с неустановившейся фильтрацией газа, дифференциальное уравнение в форме (6.6) или (6.8) должно быть проинтегрировано по всей области газовой залежи при заданных начальных и граничных условиях. Простейшие виды этих условий были рассмотрены в § 7, гл. 2.

Так как уравнение (6.6) или (6.8) представляет собой сложное нелинейное уравнение в частных производных, оно в большинстве случаев не имеет точных аналитических решений. Его можно проинтегрировать численно с помощью ЭВМ или решить приближенным способом. Приближенные способы хорошо разработаны. Некоторые из них уже были рассмотрены применительно к задачам упругого режима (метод последовательной смены стационарных состояний, метод интегральных соотношений, метод усреднения).

Численные методы решения различных задач фильтрации газа на основе уравнения Л. С. Лейбензона также достаточно хорошо обоснованы в приложениях к проблемам разработки месторождений природных газов. При этом наибольшее распространение получили методы конечных разностей и конечных элементов. Вместе с тем, развитие теории фильтрации газов, вызванное требованиями практики разработки газовых месторождений, и, в частности, изменением горно-геологических условий их залегания (большие глубины, высокие давления и температуры, многокомпонентность газа и т. д.) потребовало учета в основном уравнении, предложенном Л. С. Лейбензоном, многих дополнительных факторов. Так, оказалось, что использование функции Лейбензона в форме (6.2) допустимо при небольших давлениях, в условиях недеформируемых пластов. При достаточно больших давлениях в условиях деформируемых коллекторов под знак интеграла в формуле (6.2) необходимо внести зависимости изменения проницаемости, вязкости и коэффициента сверхсжимаемости газа от давления. При неизотермической фильтрации во многих случаях необходимо учитывать также изменение свойств газа от температуры.

Уравнение (6.6) получено с использованием в качестве уравнения движения закона Дарси. Вместе с тем, последующие исследования И. А. Чарного, Е. М. Минского и других показали, что при фильтрации газов в природных пластах в большинстве случаев следует пользоваться нелинейным (двучленным) законом фильтрации. Математические трудности в решении получающегося при этом дифференциального уравнения еще более возрастают.

Отметим, что одним из эффективных путей решения уравнения Лейбензона является линеаризация, т.е., сведение его к линейному уравнению Фурье. Как покажем при дальнейшем рассмотрении, в некоторых практических случаях использование различных способов линеаризации уравнения (6.6) позволяет получать приближенные решения, удовлетворяющие требованиям практики.

1.2. Вывод дифференциального уравнения неустановившейся фильтрации совершенного газа по двучленному закону

Будем считать пласт недеформируемым, фильтрацию изотермической и происходящей по двучленному закону. Рассмотрим плоскорадиальный поток к осесимметрично расположенной скважине.

Воспользуемся уравнением неразрывности для плоскорадиального движения, полученным ранее (2.10):

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial r} + \frac{\rho w}{r} = \frac{\partial(\rho m_0)}{\partial t}. \tag{6.10}$$

Воспользовавшись выражением для массовой скорости ρw, полученным из двучленного закона фильтрации (5.22), и формулами (5.23) и (5.24), после подстановки в них значений плотности из уравнения состояния (6.4) получим:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial r} = \frac{k\rho_{ат}}{\eta p_{ат}} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4k\sqrt{k\beta \operatorname{sgn} w \rho_{ат}}}{p_{ат}\eta^2} p \dfrac{\partial p}{\partial r}}} \frac{\partial}{\partial r}\left(p \frac{\partial p}{\partial r}\right); \tag{6.11}$$

$$\frac{\rho w}{r} = \frac{2k\rho_{ат}}{\eta p_{ат}} \frac{1}{r} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{4k\sqrt{k}\,\beta \operatorname{sgn} w \rho_{ат}}{p_{ат}\eta^2} p \dfrac{\partial p}{\partial r}}} p \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{6.12}$$

Подставив выражения (6.11), (6.12) и (6.5) в уравнение неразрывности (6.10) и сократив на $\rho_{ат}/p_{ат}$, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\eta m_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \operatorname{sgn} w p \dfrac{\partial p}{\partial r}}} \frac{\partial}{\partial r}\left(p \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \alpha \operatorname{sgn} w p \dfrac{\partial p}{\partial r}}} p \frac{\partial p}{\partial r}\right], \tag{6.13}$$

где

$$\alpha = 4k\sqrt{k}\beta\rho_{ат}/(\eta^2 p_{ат}).$$

Если сделать замену $p\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial r}$, то дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации газа по двучленному закону примет следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{2\eta m_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}\operatorname{sgn} w\frac{\partial p^2}{\partial r}}}\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{r}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{\alpha}{2}\operatorname{sgn} w\frac{\partial p^2}{\partial r}}}\frac{\partial p^2}{\partial r}\right]. \qquad (6.14)$$

Аналитическое решение уравнения (6.14) наталкивается на значительные трудности, однако численное решение для обычных в подземной гидромеханике начальных и граничных условий не представляет затруднений.

§ 2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЕЙБЕНЗОНА И ОСНОВНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

Если заменить нелинейное дифференциальное уравнение (6.8) линейным, т. е. линеаризовать его, то оно упростится – для линейного уравнения существуют точные аналитические решения. Ясно, что эти точные решения линеаризованного уравнения будут приближенными для нелинейного. Оценить погрешность решения, которая возникает при замене точного уравнения линеаризованным, можно, например, сравнивая приближенное решение с решением на ЭВМ точного уравнения.

Были предложены различные способы линеаризации уравнения (6.8). Если рассматривается плоскорадиальный приток к скважине, то, как известно из теории установившейся фильтрации газа (см. гл. 3), воронка депрессии очень крутая, и в большей части пласта давление мало отличается от контурного. На этом основании Лейбензон предложил заменить переменное давление p в коэффициенте уравнения (6.8) на постоянное давление $p_к$, равное начальному давлению в пласте. Тогда, обозначив $\bar{\varkappa}=\frac{kp_к}{\eta m_0}$, получим вместо уравнения (6.8) уравнение

$$\frac{\partial p^2}{\partial t}=\bar{\varkappa}\left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2}\right), \qquad (6.15)$$

которое является линейным уравнением пьезопроводности относительно функции p^2 (сравните с уравнением (5.14), где $\bar{\varkappa}$ – константа, аналогичная коэффициенту пьезопроводности. Такой способ линеаризации, когда

переменный коэффициент $\bar{\varkappa}$ в уравнении (6.15) при различных значениях давления принимается константой, называется линеаризацией по Лейбензону. В дальнейшем различными авторами были предложены уточнения к линеаризации по Лейбензону. Так, И. А. Чарный предложил свести уравнение (6.8) к линейному заменой переменного давления в коэффициенте на значение

$$p_{\text{ср}} = p_{\min} + 0{,}7\,(p_{\max} - p_{\min}),$$

где $p_{\max}$ и $p_{\min}$ – максимальное и минимальное давления в газовой залежи на расчетный период.

Используем линеаризованное уравнение (6.15) для решения конкретной задачи о притоке газа в скважину бесконечно малого радиуса (точечный сток), расположенную в пласте бесконечной протяженности с постоянной толщиной h. В начальный момент времени пласт невозмущен, т. е. давление во всем пласте постоянно и равно $p_{\text{к}}$. С этого момента начинается отбор газа с постоянным дебитом $Q_{\text{ат}}$. Нужно найти изменение давления по пласту с течением времени $p(r, t)$.

Для плоскорадиальной фильтрации газа (6.15) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \bar{\varkappa}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial p^2}{\partial r}\right). \tag{6.16}$$

Здесь выражение $\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial p^2}{\partial r}\right)$ представляет собой оператор Лапласа в полярных координатах относительно квадрата давления для плоскорадиального движения.

Уравнение (6.16) надо проинтегрировать при начальном условии

$$p^2 = p_{\text{к}}^2 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad 0 < r < \infty \tag{6.17}$$

и при граничном условии в удаленных точках

$$p^2 = p_{\text{к}}^2 \quad \text{при} \quad r = \infty, \quad t > 0. \tag{6.18}$$

Выведем условие для давления на забое скважины. Для этого запишем выражение для массового дебита исходя из закона Дарси в дифференциальной форме для плоскорадиальной фильтрации:

$$Q_m = \rho\, w\, \omega = \frac{\rho_{\text{ат}}}{p_{\text{ат}}}\, p\, \frac{k}{\eta}\,\frac{\partial p}{\partial r}\, 2\pi r h.$$

Использовав равенства $Q_m = \rho_{\text{ат}} Q_{\text{ат}}$,

$$2p\,\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p^2}{\partial r}$$

и сократив на $\rho_{\text{ат}}$, получим:

$$Q_{\text{ат}} = \frac{\pi k h}{p_{\text{ат}}\,\eta}\, r\,\frac{\partial p^2}{\partial r}.$$

Из этого соотношения выразим условие на стенке газовой скважины бесконечно малого радиуса:

$$r\frac{\partial p^2}{\partial r}=\frac{Q_{ат}p_{ат}\eta}{\pi k h} \quad \text{при} \quad r=0. \tag{6.19}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи уравнение (6.16) должно быть проинтегрировано при условиях (6.17), (6.18) и (6.19).

В гл. 5 была рассмотрена аналогичная задача об отборе через скважину упругой жидкости с постоянным дебитом Q из бесконечного первоначально невозмущенного пласта. Математическая постановка этой задачи представлена уравнением (5.49) с условиями (5.50)–(5.51).

Приведем здесь еще раз эти соотношения для упругой жидкости и сравним их с соотношениями (6.16)–(6.19) для газа.

Упругая жидкость	Совершенный газ
$\frac{\partial p}{\partial t}=\varkappa\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)$	$\frac{\partial p^2}{\partial t}=\bar{\varkappa}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p^2}{\partial r}\right)$
$p=p_к$ при $t=0$	$p^2=p_к^2$ при $t=0$
$p=p_к$ при $r=\infty$, $t>0$	$p^2=p_к^2$ при $r=\infty$, $t>0$
$r\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{Q\eta}{2\pi kh}$ при $r=0$	$r\frac{\partial p^2}{\partial r}=\frac{Q_{ат}p_{ат}\eta}{\pi kh}$ при $r=0$

Из приведенных данных видно, что во все соотношения для совершенного газа давление входит в квадрате, в то время как для упругой жидкости – в первой степени, коэффициент пьезопроводности $\varkappa$ для жидкости заменяется на $\bar{\varkappa}=kp_к/(\eta m_0)$ для газа; коэффициент $Q\eta/(2\pi kh)$ – на $Q_{ат}p_{ат}\eta/(\pi kh)$. В остальном все соотношения аналогичны.

Как было показано в предыдущей главе, решением поставленной задачи для упругой жидкости является основная формула упругого режима (5.61):

$$p_к-p(r,\ t)=\frac{1}{2}\frac{Q\eta}{2\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right]. \tag{6.20}$$

Аналогия между фильтрацией упругой жидкости и газа свидетельствует о том, что, заменив в формуле (6.20) давление на p^2, $\varkappa$ – на $\bar{\varkappa}$, $Q\eta/(2\pi kh)$ – на $Q_{ат}p_{ат}\eta/(\pi kh)$, получим решение поставленной задачи для газа:

$$p_к^2-p^2(r,\ t)=\frac{1}{2}\frac{Q_{ат}p_{ат}\eta}{\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\bar{\varkappa}t}\right)\right] \tag{6.21}$$

или

$$p(r,\ t)=\sqrt{p_к^2-\frac{Q_{ат}p_{ат}\eta}{2\pi kh}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\bar{\varkappa}t}\right)\right]}. \tag{6.22}$$

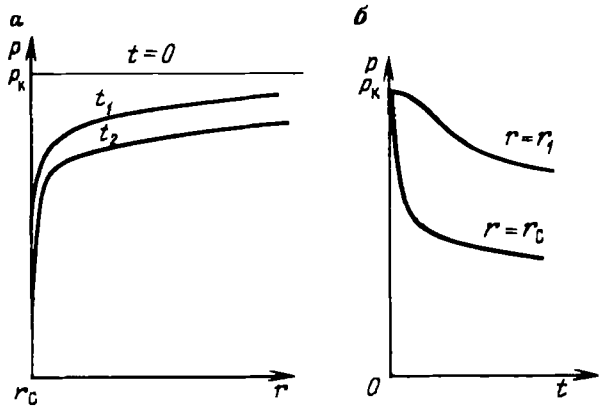


Рис. 6.1. Кривые распределения давления по пласту при неустановившемся притоке газа к скважине в разные моменты времени (*а*) и динамика давления в фиксированных точках пласта (*б*)

Это и есть основное решение линеаризованного уравнения Лейбензона.

Для малых значений аргумента $r^2/(4\varkappa t)$ в соответствии с формулой (5.62) можно заменить интегральную показательную функцию логарифмической

$$p_к^2 - p^2(r, t) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r^2} \tag{6.23}$$

или

$$p(r, t) = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r^2}}. \tag{6.24}$$

Подчеркнем, что решения (6.21)–(6.24) являются приближенными, так как получены в результате интегрирования линеаризованного уравнения (6.16), а не точного (6.6).

Формулы (6.22) и (6.24) определяют (при фиксированных значениях времени t) распределение давления вокруг газовой скважины, работающей с постоянным дебитом с момента $t = 0$. Эти депрессионные кривые имеют такой же характер, как при установившейся фильтрации – они очень крутые вблизи скважины (рис. 6.1,*а*). Если задать значение r, то можно найти изменение давления в данной точке с течением времени. В частности, можно найти изменение давления на забое (при $r = r_с$) после начала работы скважины (рис. 6.1,*б*):

$$p_с(t) = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r_с^2}}. \tag{6.25}$$

§ 3. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ПРИТОКЕ ГАЗА К СКВАЖИНЕ С ПОСТОЯННЫМ ДЕБИТОМ

В § 2 приведено решение задачи о нестационарном притоке совершенного газа к скважине бесконечно малого радиуса с постоянным дебитом. Решение получено в результате интегрирования линеаризованного дифференциального уравнения.

Г. И. Баренблатт, применяя анализ размерностей, показал, что нелинейное уравнение Лейбензона при определенных начальных и граничных условиях имеет точное решение. Это имеет важное значение, так как полученное точное решение может служить эталоном для сравнения с ним приближенных решений.

Как и в § 2, рассматривается задача о нестационарном плоскорадиальном притоке газа с постоянным дебитом к скважине в бесконечном пласте. В этом случае необходимо проинтегрировать нелинейное уравнение Лейбензона

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2\eta m_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p^2}{\partial r}\right) \tag{6.26}$$

при тех же начальных и граничных условиях (6.17); (6.18); (6.19).

Г. И. Баренблаттом показано, что в такой постановке задача автомодельна, т. е. давление зависит от некоторого единого комплекса, включающего в себя обе переменные – r и t, а дифференциальное уравнение в частных производных (6.26) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое легко интегрируется. Чтобы установить, от каких аргументов будет зависеть давление, проведем анализ размерностей. Распределение давления в пласте зависит, как следует из постановки задачи, от пяти определяющих параметров ($n = 5$): r, t, $p_к$, $k/(2\eta m_0)$, $Q_{ат} p_{ат} \eta/(\pi kh)$.

Если обозначить размерность длины через L, размерность времени T, размерность давления [p], то размерности этих параметров выразятся следующим образом:

$$[r] = \mathrm{L}, \quad [t] = \mathrm{T}, \quad [p_к] = [\mathrm{p}], \quad [k/(2\eta m_0)] =$$
$$= \mathrm{L}^2 [\mathrm{p}]^{-1} \mathrm{T}^{-1}, \quad [Q_{ат} p_{ат} \eta/(\pi kh)] = [\mathrm{p}]^2.$$

Среди этих параметров – три с независимыми размерностями: r, t, $p_к$ ($k = 3$). Как следует из П-теоремы (см. § 6 гл. 1), искомая функция – давление, приведенное к безразмерному виду $F = p/p_к$, будет зависеть от двух безразмерных комплексов ($n - k = 5 - 3 = 2$). Легко проверить, что такими безразмерными комплексами являются следующие:

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{\dfrac{k}{2\eta m_0} p_к t}} = \frac{r}{\sqrt{\bar{\varkappa} t}} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi kh p_к^2},$$

т. е.

Таблица 6.1

Результаты численного расчета автомодельного решения

$\lambda = 0{,}01$		$\lambda = 0{,}004994$	
ξ	$F(\xi, \lambda)$	ξ	$F(\xi, \lambda)$
$\xi^* = 0{,}005787$	0,9701	$\xi^* = 0{,}003886$	0,9842
0,01157	0,9737	0,01555	0,9877
0,01923	0,9763	0,03109	0,9894
0,03472	0,9793	0,06218	0,9912
0,06553	0,9825	0,2487	0,9947
0,09645	0,9845	0,4974	0,9964
0,1582	0,9870	0,9949	0,9980
0,2816	0,9899	1,492	0,9988
0,5285	0,9930	2,487	0,9996
0,7754	0,9948	3,482	0,9999
1,269	0,9970		
1,763	0,9982		
2,751	0,9994		
3,738	0,9999		

$F = p/p_к = F(\xi, \lambda)$.

Дифференцируя функцию F по t и по r как сложную функцию и подставляя производные в уравнение (6.26), получим, что функция F удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2F^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dF^2}{d\xi} + \frac{\xi}{2}\frac{dF}{d\xi} = 0. \tag{6.27}$$

При этом начальные и граничные условия (6.17)–(6.19) сводятся к следующим:

$$\xi\frac{dF^2}{d\xi} = \lambda \quad \text{при} \quad \xi = 0; \quad F(\xi, \lambda) = 1 \quad \text{при} \quad \xi = \infty. \tag{6.28}$$

Уравнение (6.27) при условиях (6.28) было проинтегрировано численно. Результаты расчетов приведены в табл. 6.1 для значений $\lambda = 0{,}01$ и $\lambda = 0{,}004994$. Через ξ^* в табл. 6.1 обозначено такое значение аргумента ξ, что для $\xi < \xi^*$ значения $\xi\, dF^2/d\xi$ отличаются от λ меньше, чем на 0,01%. Значит, для $\xi < \xi^*$ можно считать, что $\xi\, dF^2/d\xi = \lambda$. Проинтегрировав это равенство, получим:

$$F^2 = F^2(\xi^*, \lambda) + \lambda \ln(\xi/\xi^*)$$

или

$$F = (\xi, \lambda) = \sqrt{F^2(\xi^*, \lambda) - \lambda \ln(\xi^*/\xi)} \quad \text{для} \quad \xi < \xi^*. \tag{6.29}$$

Поэтому значения $F(\xi, \lambda)$ для $\xi < \xi^*$ в табл. 6.1 не приведены.

Сравнивая значения безразмерного давления $F(\xi, \lambda) = p/p_к$, приведен-

ные в табл. 6.1, со значениями, подсчитанными по формуле (6.23), можно найти погрешность, которую дает линеаризация уравнения Лейбензона, и убедиться в том, что она составляет доли процента.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРИТОКЕ ГАЗА К СКВАЖИНЕ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СМЕНЫ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Как указывалось в предыдущей главе, этот метод основан на следующих предпосылках: в каждый момент времени существует конечная возмущенная область, в которой происходит движение газа к скважине; движение внутри возмущенной области стационарно; размер возмущенной области определяется из условия материального баланса.

Решим этим методом ту же задачу, которая была рассмотрена в §§ 2, 3 данной главы, т.е. задачу о неустановившемся притоке газа к скважине с постоянным заданным дебитом $Q_{ат}$, но в отличие от § 2 будем считать радиус скважины конечным и равным $r_с$.

В любой момент времени возмущенной областью является круговая область радиусом $R(t)$, внутри которой давление распределено по стационарному закону (3.51).

$$p(r,\ t) = \sqrt{p_к^2 - \frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln(R/t)/r_с} \ln(R(t)/r)}, \quad r_с \leqslant r \leqslant R(t). \tag{6.30}$$

Вне возмущенной области давление равно начальному (невозмущенное состояние):

$$p = p_к, \quad r > R(t). \tag{6.31}$$

В возмущенной области можно написать также выражение для дебита по формуле (3.55) для стационарной фильтрации:

$$Q_{ат} = \frac{\pi k h (p_к^2 - p_с^2)}{\eta\, p_{ат} \ln(R_к/r_с)}. \tag{6.32}$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче забойное давление является функцией времени.

Для удобства последующего изложения найдем из формулы (6.32) отношение

$$\frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln(R(t)/r_с)} = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi k h}$$

и подставим его в формулу для давления в возмущенной области (6.30).

В результате получим:

$$p(r,\ t) = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi k h} \ln(R(t)/r)}, \tag{6.33}$$

т.е. распределение давления, выраженное через заданный дебит и параметры пласта.

Для нахождения $R(t)$ составим уравнение материального баланса. Начальный запас газа (при $p = p_к$) в зоне пласта радиусом $R(t)$:

$$M_0 = \pi (R^2(t) - r_c^2) h m_0 \rho_к = \pi (R^2(t) - r_c^2) h m_0 \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} p_к. \tag{6.34}$$

Текущий запас газа выразим через средневзвешенное давление $\tilde{p}$:

$$M_t = \pi (R^2(t) - r_c^2) h m_0 \tilde{\rho} = \pi (R^2(t) - r_c^2) h m_0 \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} \tilde{p}, \tag{6.35}$$

где $\tilde{p}$ определяется по формуле установившейся фильтрации (3.58)

$$\tilde{p} = p_к - \frac{p_к^2 - p_c^2}{4 p_к \ln (R(t)/r_c)}. \tag{6.36}$$

Так как отбор газа происходит с постоянным дебитом $Q_{ат}$, то отобранная масса газа к моменту t равна $\rho_{ат} Q_{ат} t$. Таким образом,

$$M_0 - M_t = \rho_{ат} Q_{ат} t$$

или, с использованием (6.34)–(6.35), найдем:

$$\pi \left(R^2(t) - r_c^2 \right) h m_0 \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} \left(p_к - \tilde{p} \right) = \rho_{ат} Q_{ат} t. \tag{6.37}$$

Подставив в последнее соотношение выражение (6.36) для средневзвешенного давления $\tilde{p}$ и (6.32) для $Q_{ат}$, получим:

$$\pi \left(R^2(t) - r_c^2 \right) h m_0 \frac{\rho_{ат} p_к^2 - p_c^2}{p_{ат} 4 p_к \ln (R/r_c)} = \rho_{ат} \frac{\pi k h (p_к^2 - p_c^2) t}{\eta p_{ат} \ln (R/r_c)},$$

откуда

$$R^2(t) - r_c^2 = \frac{4 k p_к}{\eta m_0} t = 4 \bar{\varkappa} t$$

или

$$R(t) = \sqrt{4 \bar{\varkappa} t + r_c^2}. \tag{6.38}$$

Для значений времени, для которых $4 \bar{\varkappa} t \gg r_c^2$, имеем:

$$R(t) = 2 \sqrt{\bar{\varkappa} t}. \tag{6.39}$$

Теперь, зная закон движения границы возмущенной области в виде (6.38) или (6.39), можно найти давление в любой точке пласта в любой момент времени по формуле (6.33), а также изменение давления на забое скважины в любой момент времени

$$p(r, t) = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi k h} \ln \frac{\sqrt{4 \bar{\varkappa} t + r_c^2}}{r}},$$

$$r_c \leqslant r \leqslant \sqrt{4 \bar{\varkappa} t + r_c^2}, \quad p = p_к, \quad r > \sqrt{4 \bar{\varkappa} t + r_c^2}, \tag{6.40}$$

$$p_c(t) = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi k h} \ln \frac{\sqrt{4\bar{\varkappa} t + r_c^2}}{r_c}}. \qquad (6.41)$$

Формулы (6.40) пригодны как для бесконечного пласта, так и для конечного открытого и закрытого пласта радиусом $R_к$. В последнем случае они справедливы только для первой фазы движения, пока воронка депрессии не достигнет границы пласта, т. е. для

$$R(t) = 2\sqrt{\bar{\varkappa} t} \leqslant R_к.$$

Изменение давления во второй фазе зависит от граничных условий пласта. Если пласт закрыт, то давление будет продолжать снижаться во всем пласте, включая границу. Этот случай будет рассмотрен в последующих параграфах. Если пласт открытый ($p = p_к$ или $r = R_к$), т. е. режим водонапорный, то во второй фазе установится стационарный режим с постоянной депрессией $p_к - p_c$, где

$$p_c = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi k h} \ln \frac{R_к}{r_c}}.$$

§ 5. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим еще один приближенный метод применительно к задачам неустановившейся фильтрации газа – метод усреднения временной производной по пространству.

В качестве примера рассмотрим прямолинейно-параллельную фильтрацию реального газа. Соответствующее этому случаю точное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{k}{\eta m_0} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p}{z(p)} \frac{\partial p}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{z(p)}\right]. \qquad (6.42)$$

Сделаем допущение, что коэффициент сверхсжимаемости $z(p)$ можно заменить на $\bar{z} = z(p_{ср})$, где $p_{ср}$ – некоторое среднее давление в области фильтрации. Введем обозначение $p_1 = p/z(p)$. Тогда уравнение (6.42) примет вид

$$\frac{k\bar{z}}{\eta m_0} \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1 \frac{\partial p_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial t}. \qquad (6.43)$$

Пусть имеется первоначально невозмущенный газонасыщенный пласт шириной B, толщиной h, длиной L. С трех сторон пласт ограничен непроницаемыми поверхностями, а с четвертой стороны ($x = 0$) вскрыт галереей. В момент $t = 0$ через галерею начинает отбираться газ с постоянным массовым дебитом, который в соответствии с законом Дарси можно записать в виде:

$$Q_m = \rho |w| Bh = \frac{\rho_{ат} pk}{p_{ат} \bar{z} \eta} \frac{\partial p}{\partial x} Bh = Bh\bar{z} \frac{\rho_{ат} k}{2p_{ат} \eta} \frac{\partial p_1^2}{\partial x}.$$

Требуется определить давление в пласте в любой момент времени $t > 0$. Для этого нужно найти решение уравнения (6.43) в области изменения $0 \leqslant x \leqslant h$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному и граничным условиям:

$$p_1 = p_{10} \quad \text{при} \quad t = 0; \tag{6.44}$$

$$\partial p_1^2/\partial x = \eta Q/k \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{где} \quad Q = \frac{2Q_m p_{ат}}{Bh\tilde{z}\rho_{ат}}; \tag{6.45}$$

$$\partial p_1^2/\partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = L. \tag{6.46}$$

Как и в методе последовательной смены стационарных состояний, принимаем, что в каждый момент времени существует конечная возмущенная область $l(t)$, на границе которой выполняются условия

$$p_1^2 = p_{10}^2, \quad \partial p_1^2/\partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = l(t). \tag{6.47}$$

Центральным моментом в рассматриваемом методе усреднения является принятие условия

$$\partial p_1/\partial t = F(t), \tag{6.48}$$

равносильного предположению, что во всей части пласта, охваченной возмущением, давление изменяется с одинаковой скоростью; тогда уравнение (6.43) принимает вид

$$\tilde{z}\frac{\partial^2 p_1^2}{\partial x^2} = \frac{2m_0\eta}{k}F(t). \tag{6.49}$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по x, получим:

$$p_1^2 = \frac{m_0\eta}{k}\frac{F(t)}{\tilde{z}}x^2 + bx + c. \tag{6.50}$$

Использовав граничные условия на галерее (6.45) и на границе возмущенной области (6.47), найдем константы интегрирования b и c, а также функцию F:

$$b = \frac{\eta Q}{k}, \quad c = p_{10}^2 - \frac{Q\eta l(t)}{2k}, \quad F(t) = -\frac{Q\tilde{z}}{2m_0 l(t)}.$$

В результате получим:

$$p_1^2 = p_{10}^2 - \frac{Q\eta l(t)}{2k}\left(1 - \frac{x}{l(t)}\right)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant l(t). \tag{6.51}$$

Найдем зависимость $l(t)$. Для этого проделаем следующие преобразования: дважды проинтегрируем исходное уравнение (6.43) по координате и по времени

$$\tilde{z}\int_0^t\int_0^{l(t)}\frac{\partial^2 p_1^2}{\partial x^2}\,dx\,dt = \frac{2m_0\eta}{k}\int_0^{l(t)}\int_0^t\frac{\partial p_1}{\partial t}\,dt\,dx,$$

в результате, используя граничные условия (6.45) и (6.47), получим выражение для средневзвешенного давления

$$\tilde{p}_1 = p_{10} - \frac{\tilde{z} Q t}{2 m_0 l(t)}. \tag{6.52}$$

Примем гипотезу, что средневзвешенное давление, которое находится по формуле

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{l} \int_0^l p_1(x, t)\, dx,$$

для данного случая определяется из соотношения:

$$\tilde{p}_1 = \sqrt{\frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} p_1^2(x, t)\, dx} = \sqrt{\frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} \left[p_{10}^2 - \frac{Q \eta\, l(t)}{2k} \left(1 - \frac{x}{l(t)}\right)^2 \right] dx} =$$

$$= \sqrt{p_{10}^2 - \frac{Q \eta l(t)}{6k}}. \tag{6.53}$$

Приведем выражения для $\tilde{p}_1$ (6.52) и (6.53) к безразмерному виду и приравняем их:

$$1 - \frac{\tilde{z} Q t}{2 m_0 p_{10} l(t)} = \sqrt{1 - \frac{Q \eta\, l(t)}{6k p_{10}^2}}. \tag{6.54}$$

Уравнение (6.54) служит для определения функции $l(t)$. Однако можно получить очень простую приближенную искомую зависимость. Обозначим $Q\eta l/(6k p_{10}^2) = u$ и разложим в ряд правую часть (6.54):

$$\sqrt{1 - u} = 1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} - \frac{u^3}{16} - \ldots.$$

Удержав два первых члена ряда, получим:

$$\sqrt{1 - \frac{Q \eta l}{6k p_{10}^2}} \approx 1 - \frac{Q \eta l}{12k p_{10}^2}.$$

Тогда (6.54) примет вид

$$1 - \frac{\tilde{z} Q t}{2 m_0 p_{10} l(t)} = 1 - \frac{Q \eta\, l(t)}{12k p_{10}^2},$$

откуда

$$l = \sqrt{6 \frac{k}{\eta} \frac{\tilde{z} p_{10}}{m_0}}\, t. \tag{6.55}$$

Подставив полученное выражение в формулу (6.51), получим явную зависимость давления от координаты и времени.

В момент T, когда возмущенная зона достигнет непроницаемой границы пласта ($l = L$), закончится первая фаза.

Для определения ее продолжительности положим в уравнении (6.54) $l = L$ и выразим время T:

$$T = \frac{2m_0 p_{10} L}{\tilde{z} Q}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q\eta L}{6k p_{10}^2}}\right). \tag{6.56}$$

Можно найти приближенное значение T из формулы (6.55) и убедиться, что погрешность не превышает 3–4%.

В течение второй фазы давление на границе $x = L$ падает и выполняется условие (6.46). Соотношения для второй фазы истощения газового пласта строятся аналогичным образом. Проделав аналогичные выкладки, получим закон распределения давления по пласту

$$p_1^2 - p_{1\text{г}}^1 = \frac{Q\eta}{k} x\left(1 - \frac{x}{2L}\right) \tag{6.57}$$

и закон изменения давления на галерее

$$p_{1\text{г}}^2 = \left(p_{10} - \frac{Q\tilde{z}}{2m_0 L} t\right)^2 - \frac{Q\eta L}{3k}. \tag{6.58}$$

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ К ЗАДАЧАМ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

Для решения линеаризованного уравнения неустановившейся фильтрации (6.15) используется метод суперпозиции (метод наложения потоков). Это уравнение – линейное и однородное относительно p^2, поэтому если $p_1(x, y, z, t)$, $p_2(x, y, z, t)$, ..., $p_n(x, y, z, t)$ определяют распределения давления, вызванные работой первой, второй ... , n-й скважин, и являются решениями уравнения (6.15), то линейная комбинация их квадратов $p^2 = c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + \ldots + c_n p_n^2$ тоже будет решением уравнения (6.15).

При помощи метода суперпозиции можно решать различные задачи, которые используются при проектировании разработки газовых месторождений.

Используя этот метод, выведем формулу для восстановления забойного давления после остановки газовой скважины, и покажем, как по кривой восстановления давления определяются коллекторские свойства пласта.

Предположим, что газовая скважина в бесконечном пласте эксплуатировалась в течение длительного промежутка времени T с постоянным дебитом $Q_{\text{ат}}$ и в момент T внезапно остановлена, т. е. приток газа к забою мгновенно прекратился.

Используя принцип суперпозиции, будем считать, что в момент $t = T$

в дополнение к добывающей скважине, работающей с дебитом $Q_{ат}$, начала работать нагнетательная скважина с тем же дебитом.

Тогда

$$p_к^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \left[\ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa} t}{r_c^2} - \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}(t-T)}{r_c^2} \right]. \tag{6.59}$$

Кроме того, в момент остановки скважины T выполняется равенство

$$p_к^2 - p_c^2(T) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa} T}{r_c^2}. \tag{6.60}$$

Вычитая почленно (6.59) из (6.60), получим:

$$p_c^2(t) - p_c^2(T) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \left[\ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa} T}{r_c^2} - \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa} t}{r_c^2} + \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}(t-T)}{r_c^2} \right] =$$

$$= \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \left[\ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}(t-T)}{r_c^2} - \ln \frac{t}{T} \right].$$

Если скважина работала до остановки в течение длительного времени T и $t - T \ll T$, то

$$\ln \frac{t}{T} \ll \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}(t-T)}{r_c^2}$$

и членом $\ln(t/T)$ можно пренебречь. Тогда имеем:

$$p_c^2(t) - p_c^2(T) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}(t-T)}{r_c^2}. \tag{6.61}$$

Примем момент остановки T за новое начало отсчета времени: $t' = t - T$, тогда формула (6.61) запишется в виде:

$$p_c^2(t') - p_c^2(0) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa} t'}{r_c^2}. \tag{6.62}$$

Кривая восстановления забойного давления приведена на рис. 6.2. Легко видеть из последней формулы, что зависимость $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ от $\ln t'$ – линейная (рис. 6.3). Выделим в правой части формулы (6.62) член, содержащий $\ln t'$:

$$p_c^2(t') - p_c^2(0) = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln t' + \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}}{r_c^2}. \tag{6.63}$$

Очевидно, что $i = Q_{ат} p_{ат} \eta/(2\pi kh)$ представляет собой тангенс угла наклона прямой AB к оси абсцисс, а OA – отрезок, отсекаемый прямой AB на оси ординат, равен

$$OA = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}}{r_c^2} = i \ln \frac{2{,}25\bar{\varkappa}}{r_c^2}. \tag{6.64}$$

При исследовании газовых скважин на неустановившихся режимах,

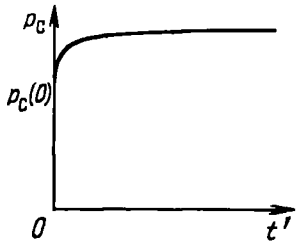


Рис. 6.2. Кривая восстановления забойного давления после остановки скважины

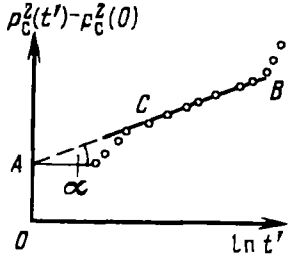


Рис. 6.3. Зависимость $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ от $\ln t'$

которые проводятся с целью определения коллекторских свойств пластов, получают значения p_c в разные моменты времени t' после остановки скважины. Эти данные обрабатывают в координатах $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ и $\ln t'$ (или $\lg t'$).

Экспериментальные точки показаны на рис. 6.3. Обычно на опытной кривой можно выделить прямолинейный участок, по которому определяют значения $i = \operatorname{tg}\alpha$ и OA. Зная эти величины, а также дебит скважины до остановки $Q_{ат}$, можно определить коэффициент гидропроводности пласта

$$\frac{kh}{\eta} = \frac{Q_{ат} p_{ат}}{2\pi i} \tag{6.65}$$

и комплексный параметр

$$\frac{\varkappa}{r_c^2} = \frac{1}{2{,}25} e^{OA/i}. \tag{6.66}$$

Отметим, что на участке AC опытные точки отклоняются от прямой за счет притока газа в скважину после ее закрытия, который не учитывается в соотношениях (6.59)–(6.61), а также за счет некоторых других факторов.

Зависимость (6.59) можно записать также в виде

$$p_к^2 - p_c^2 = \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{2\pi kh} \ln \frac{t}{t - T}$$

или

$$p_c^2(t') = p_к^2 - i \ln \frac{t' + T}{t'}. \qquad (6.67)$$

Кривые восстановления давления после остановки газовых скважин обрабатывают также по методу Хорнера в координатах $p_c^2(t')$, $\ln[(t' + T)/t']$. Уравнение (6.67) в этих координатах представляет собой прямую. По углу наклона прямой можно определить коэффициент гидропроводности по формуле (6.65); экстраполируя ее до оси ординат ($\ln[(t' + T)/t'] = 0$), получают пластовое давление $p_к$, которое, как правило, неизвестно.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ОТБОРЕ ГАЗА ИЗ ЗАМКНУТОГО ПЛАСТА ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОГО БАЛАНСА

Рассмотрим несколько задач об отборе газа из замкнутой круговой газовой залежи радиусом $R_к$. В центре залежи находится скважина радиусом r_c. До вскрытия пласта скважиной давление по всей залежи постоянно и равно $p_н$.

Будет рассмотрено два простейших случая: а) отбор производится с постоянным дебитом $Q_{ат}$; б) забойное давление p_c сохраняется постоянным.

В случае а) нас будет интересовать падение давления на границе пласта $p_к(t)$ и на забое скважины $p_c(t)$, в случае б) – падение давления на границе $p_к(t)$ и падения дебита $Q_{ат}(t)$.

Обе задачи решаются методом последовательной смены стационарных состояний, т. е. с использованием законов стационарной фильтрации газа и уравнения истощения газовой залежи. Это последнее уравнение – уравнение материального баланса – заключается в том, что количество газа, извлеченного из пласта за некоторый промежуток времени, равно уменьшению запасов газа в пласте. Так как пласт замкнут, то запасы ограничены и не пополняются извне.

Если $\tilde{\rho}$ – плотность газа, соответствующая средневзвешенному давлению в пласте $\tilde{p}$, а $V_п$ – объем порового пространства, принимаемый постоянным, то уменьшение запасов газа за бесконечно малый промежуток времени dt запишется в виде

$$-V_п d\tilde{\rho} = -V_п d\left(\frac{\rho_{ат}\tilde{p}}{p_{ат}}\right) = -\frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} V_п d\tilde{p}. \qquad (6.68)$$

Отобранная масса газа за тот же промежуток времени

$$Q_m(t)\,dt = \rho_{ат} Q_{ат}(t)\,dt. \qquad (6.69)$$

Приравняв выражения (6.68) и (6.69), получим дифференциальное уравнение истощения газовой залежи

$$-V_п d\tilde{p} = p_{ат} Q_{ат}(t)\,dt. \qquad (6.70)$$

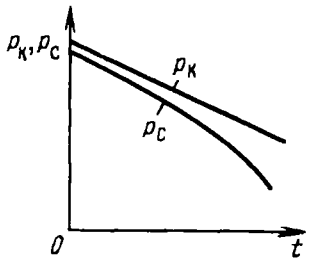


Рис. 6.4. Динамика давления на границе замкнутого газового пласта $p_к(t)$ и забойного давления $p_с(t)$ при отборе газа с постоянным дебитом

В гл. 3, где рассматривалась установившаяся плоскорадиальная фильтрация газа, было показано (формула (3.58)), что средневзвешенное давление $\tilde{p}$ очень мало отличается от контурного $p_к$ (в нашем случае $p_к$ – давление на границе замкнутого пласта). Б. Б. Лапуком было установлено, что при одинаковых граничных условиях кривая распределения давления в пласте в случае неустановившейся фильтрации располагается несколько выше соответствующей кривой для установившейся фильтрации. Поэтому мы примем условие $\tilde{p} = p_к$ и заменим в уравнении (6.70) величину $\tilde{p}$ на $p_к$.

$$-V_п dp_к = p_{ат} Q_{ат}(t)\, dt. \tag{6.71}$$

Рассмотрим случай а), когда $Q_{ат} = \text{const}$. При этом

$$dp_к = -\frac{p_{ат} Q_{ат}}{V_п} dt. \tag{6.72}$$

Проинтегрировав это уравнение, учтя, что $p = p_н$ при $t = 0$, получим:

$$p_к = p_н - \frac{p_{ат} Q_{ат}}{V_п} t, \tag{6.73}$$

т. е. давление на границе пласта падает по линейному закону с течением времени (рис. 6.4). Чтобы найти закон изменения забойного давления с течением времени, запишем формулу для дебита скважины

$$Q_{ат} = \frac{\pi kh(p_к^2 - p_с^2)}{p_{ат}\eta \ln(R_к/r_с)} \tag{6.74}$$

и выразим из нее забойное давление

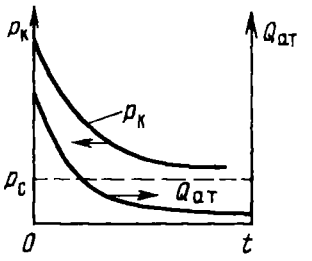
$$p_с = \sqrt{p_к^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат}}{\pi kh} \ln \frac{R_к}{r_с}}. \tag{6.75}$$

Отсюда с учетом выражения (6.73) для $p_к$ найдем:

$$p_с = \sqrt{\left(p_н - \frac{p_{ат} Q_{ат}}{V_п} t\right)^2 - \frac{Q_{ат} p_{ат} \eta}{\pi kh} \ln \frac{R_к}{r_с}}. \tag{6.76}$$

График изменения $p_с(t)$ приведен на рис. 6.4.

Рис. 6.5. Динамика давления на границе замкнутого газового пласта $p_к(t)$ и дебита $Q_{ат}(t)$ при постоянном забойном давлении



В случае б), когда $p_с = \text{const}$, для определения зависимости $p_к$ от t подставим выражение для дебита (6.74) в уравнение (6.72) и разделим переменные:

$$-V_п \frac{dp_к}{p_к^2 - p_с^2} = \frac{\pi kh}{\eta \ln(R_к/r_с)} dt. \tag{6.77}$$

Введя обозначение $A = \pi kh/[\eta \ln(R_к/r_с)]$ и проинтегрировав (6.77) от 0 до t и от $p_н$ до $p_к$, получим:

$$\int_0^t dt = -\frac{V_п}{A} \int_{p_н}^{p_к} \frac{dp_к}{p_к^2 - p_с^2},$$

откуда

$$t = \frac{V_п}{2Ap_с} \ln \frac{(p_н - p_с)(p_к + p_с)}{(p_н + p_с)(p_к - p_с)}. \tag{6.78}$$

Задаваясь различными значениями давления $p_к$ на границе залежи, начиная от $p_н$ и меньшими, можно найти соответствующие значения времени t разработки залежи. Подставляя эти же значения $p_к$ в формулу (6.74), определяем дебиты в те же моменты t. Динамика $p_к(t)$ и $Q_{ат}(t)$ для этого случая приведена на рис. 6.5.

Контрольные вопросы и задачи

1. Как записывается уравнение Лейбензона? Какого типа это уравнение?
2. Покажите, что для неустановившейся фильтрации газа принцип суперпозиции относительно давления не имеет места.
3. Как записывается дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации газа, линеаризованное по Лейбензону?
4. Почему для плоскорадиальной фильтрации газа линеаризация дает очень маленькую погрешность при определении давления?
5. Какой вид имеет решение линеаризованного уравнения для плоскорадиального притока газа к скважине с постоянным дебитом?
6. Каковы предпосылки метода последовательной смены стационар-

ных состояний? Как изменяется радиус возмущенной области с течением времени?

7. Как применяется принцип суперпозиции к задачам неустановившейся фильтрации газа?

8. Какие условия должны выполняться, чтобы при восстановлении давления в скважине зависимость $p_c^2(t') - p_c^2(0)$ от $\ln t'$ была линейной?

9. Какой вид имеет уравнение материального баланса для замкнутой газовой залежи (уравнение истощения газовой залежи)?

10. Каким будет закон изменения давления на границе замкнутой газовой залежи, если отбор происходит: а) при условии $Q_{ат} = \text{const}$; б) при условии $p_c = \text{const}$?

Глава 7

ДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ПРИ ВЗАИМНОМ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Задачи о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде представляют большой теоретический и практический интерес.

При разработке нефтяных месторождений в условиях водонапорного режима происходит стягивание контура нефтеносности под напором контурных вод. Перемещение границы двух флюидов – газа и нефти – происходит также при газонапорном режиме под действием газовой шапки, объем которой может увеличиваться или уменьшаться.

В точной постановке задача о продвижении водонефтяного контакта – одна из наиболее сложных в теории фильтрации. Первые исследования ее были выполнены Л. С. Лейбензоном [42]. Дальнейшее развитие эта задача получила в работах М. Маскета [7], В. Н. Щелкачева [87], П. Я. Полубариновой-Кочиной [60], И. А. Чарного [81], А. М. Пирвердяна [57], Н. Н. Веригина, Г. С. Салехова и других.

Аналогичная задача о движении границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами – вязкостью и плотностью – возникает во многих случаях и при разработке газовых месторождений с активной краевой или подошвенной водой, а также при создании и эксплуатации подземных газохранилищ в водоносных пластах и истощенных обводненных месторождениях. Знание в этом случае темпа продвижения контурных вод весьма важно, так как от него зависит темп падения пластового давления в газовой залежи или ПХГ, дебит газовых скважин и их размещение на газоносной площади, продолжительность бескомпрессорной эксплуатации газового месторождения и другие важные показатели.

Для решения практических задач разработки нефтяных и газовых

месторождений важное значение имеет прогнозирование продвижения контактов пластовых флюидов, а также контроль и регулирование динамики их перемещения. Это позволяет оптимизировать систему разработки месторождения, правильно определить число и размещение добывающих и нагнетательных скважин на месторождениях при естественных и искусственных режимах их эксплуатации. В основе этого подхода – правильное понимание механизма и методов гидродинамического расчета продвижения водонефтяного, газонефтяного и газоводяного контактов.

§ 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПРИ ВЗАИМНОМ ВЫТЕСНЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ

Основная трудность точного решения задачи о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде заключается в том, что линии тока на границе раздела жидкостей преломляются.

Пусть кривая $I-I$ (рис. 7.1) служит границей раздела двух жидостей с вязкостями η_1 и η_2 и пусть, например, $\eta_2 > \eta_1$ (нефть вытесняется водой).

Рассмотрим произвольную точку M границы $I-I$ и проведем через нее касательную $\vec{\tau}$ и нормаль $\vec{n}$ к границе раздела жидкостей $I-I$.

Найдем проекции скоростей фильтрации воды и нефти, находящихся в данный момент в точке M, на касательную $\vec{\tau}$ и нормаль $\vec{n}$, считая проницаемость пористой среды k постоянной по обе стороны границы раздела.

Согласно неразрывности потока массы элементарные расходы обеих несжимаемых жидкостей через элемент границы раздела, включающий точку M, должны быть равны между собой. Отсюда следует, что нормальные составляющие скоростей фильтрации обеих жидкостей будут равны, т. е. $w_{1n} = w_{2n}$.

Давление в пласте в точке M также должно быть одинаково для обеих жидкостей, так как при малых скоростях (ниже звуковых) разрыва давления в сплошном потоке быть не может.

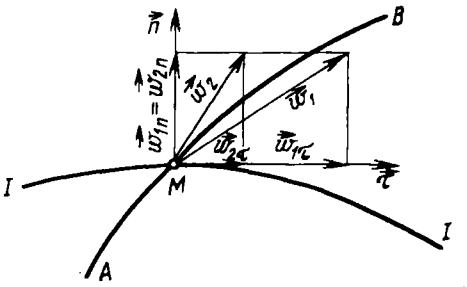


Рис. 7.1. Преломление линий тока на границе раздела жидкостей

Касательные же составляющие скоростей фильтрации обеих жидкостей будут определяться по закону Дарси:

$$w_{1\tau} = -\frac{k}{\eta_1}\frac{\partial p}{\partial \tau}; \tag{7.1}$$

$$w_{2\tau} = -\frac{k}{\eta_2}\frac{\partial p}{\partial \tau}. \tag{7.2}$$

Так как $\eta_2 > \eta_1$, то из (7.1) и (7.2) получаем, что $w_{1\tau} > w_{2\tau}$. Отсюда следует, что результирующий вектор скорости фильтрации $\vec{w}_1 = \vec{w}_{1\tau} + \vec{w}_{1n}$, касательный к линии тока MA, будет больше вектора $\vec{w}_2 = \vec{w}_{2\tau} + \vec{w}_{2n}$, касательного к линии тока MB. Следовательно, линии тока AM и MB, проходящие через точку M, будут иметь излом в точке M.

Учет этого преломления линий тока на границе раздела жидкостей и составляет главную трудность в точном решении задачи продвижения границы раздела.

Линии тока не будут преломляться только в двух случаях – при прямолинейно-параллельном и плоскорадиальном движениях границы раздела, когда $w_{1\tau} = w_{2\tau} = 0$. Эти задачи, прежде всего, и будут рассмотрены в данной главе. При этом разновязкие жидкости (нефть и вода) считаются несмешивающимися, взаимно нерастворимыми и химически не реагирующими одна с другой и с пористой средой.

Вытеснение нефти водой предполагается происходящим полностью – так называемое «поршневое» вытеснение.

Задачи, в которых учитывается неполнота вытеснения, рассматриваются в гл. 8, 9.

§ 2. ПРЯМОЛИНЕЙНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ

При поршневом вытеснении нефти водой в пористой среде плотность нефти и воды будем считать одинаковыми. Это позволит рассматривать плоскость контакта нефти и воды вертикальной. Различие в вязкостях нефти $\eta_н$ и воды $\eta_в$ будем учитывать.

В случае прямолинейно-параллельного движения схема вытеснения приведена на рис. 7.2.

На контуре питания и на галерее поддерживаются соответственно постоянные давления $p_к$ и $p_г$. Начальное положение контура нефтеносности x_0 параллельно галерее и контуру питания.

Обозначим x_f текущее расстояние до контура нефтеносности в момент времени t после начала вытеснения, L – расстояние от контура питания до галереи, $p_в$, $p_н$ – давления в любой точке водоносной и нефтеносной части пласта соответственно, $p(t)$ – давление на границе раздела вода – нефть, отстоящей от контура питания на расстоянии x_f.

Вспомним, что в случае установившегося прямолинейно-параллельного фильтрационного потока одной жидкости (см. § 2 гл. 3) распреде-

ление давления и скорость фильтрации описываются следующими уравнениями:

$$p = p_к - \frac{p_к - p_г}{L} x = p_г + \frac{p_к - p_г}{L}(L - x); \tag{7.3}$$

$$w = \frac{k}{\eta} \frac{p_к - p_г}{L}. \tag{7.4}$$

При этом изобарами являются линии, параллельные галерее, и каждую изобару можно рассматривать как контур питания или как галерею.

На основании формул (7.3) и (7.4) распределение давления и скорость фильтрации в водоносной области можно записать в виде

$$p_в = p_к - \frac{p_к - p(t)}{x_f(t)} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_f(t), \tag{7.5}$$

$$w_в = \frac{k}{\eta_в} \frac{p_к - p(t)}{x_f(t)}. \tag{7.6}$$

Приняв за контур питания изобару, совпадающую с границей раздела жидкостей, распределение давления и скорость фильтрации в нефтеносной области можно записать следующим образом:

$$p_н = p_г + \frac{p(t) - p_г}{L - x_f(t)}(L - x), \quad x_f(t) \leqslant x \leqslant L; \tag{7.7}$$

$$w_н = \frac{k}{\eta_н} \frac{p(t) - p_г}{L - x_f(t)}. \tag{7.8}$$

Найдем давление $p(t)$ на границе раздела. Вследствие несжимаемости жидкостей и неразрывности потока линии тока будут иметь вид прямых, параллельных оси Ox (на границе раздела преломления их не будет), а скорость фильтрации во всех точках пласта будет одинаковой, т. е. $w_в = w_н$.

Тогда из уравнений (7.6) и (7.8) получим:

$$\frac{k}{\eta_в} \frac{p_к - p(t)}{x_f(t)} = \frac{k}{\eta_н} \frac{p(t) - p_г}{L - x_f(t)},$$

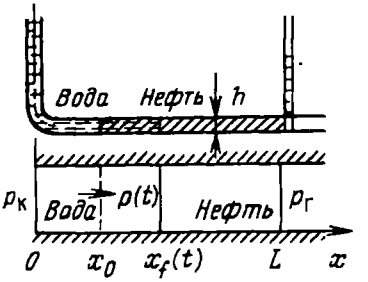


Рис. 7.2. Схема прямолинейно-параллельного движения границы раздела «вода – нефть»

откуда давление на границе раздела жидкостей будет равно:

$$p(t) = \frac{p_к \eta_0 (L - x_f(t)) + p_г x_f(t)}{x_f(t) + \eta_0 (L - x_f(t))}, \tag{7.9}$$

где введено обозначение $\eta_0 = \eta_н / \eta_в$ – отношение вязкостей жидкостей.

Определим теперь следующие характеристики фильтрационного потока нефти и воды.

1. Распределение давления в водоносной и нефтеносной областях. Для этого подставим (7.9) в (7.5) и (7.7):

$$p_в = p_к - \Delta p \frac{x}{x_f(t) + \eta_0 (L - x_f(t))}, \tag{7.10}$$

$$p_н = p_г + \eta_0 \Delta p \frac{L - x}{x_f(t) + \eta_0 (L - x_f(t))}, \tag{7.11}$$

где $\Delta p = p_к - p_г$ – депрессия на пласт.

2. Скорость фильтрации. Подставив (7.9) в (7.6) и (7.8), получим:

$$w = w_в = w_н = \frac{k}{\eta_в} \frac{\Delta p}{x_f(t) + \eta_0 (L - x_f(t))}. \tag{7.12}$$

3. Расход жидкости (дебит галереи) Q получается из (7.12) умножением на площадь сечения потока Bh.

4. Градиент давления. Продифференцируем (7.10) и (7.11) по x:

$$\frac{\partial p_в}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{x_f(t) + \eta_0 (L - x_f(t))}; \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial p_н}{\partial x} = -\frac{\eta_0 \Delta p}{x_f(t) + \eta_0 (L - x_f(t))}. \tag{7.14}$$

5. Закон движения границы раздела $x_f = x_f(t)$ находим из соотношения скорости фильтрации и средней скорости движения:

$$w = mv = m \frac{dx_f}{dt},$$

откуда, использовав (7.12), разделив переменные и проинтегрировав в пределах от 0 до t и от x_0 до x_f, получим:

$$t = \frac{m \eta_в}{k \Delta p} \left[\eta_0 L (x_f - x_0) - \frac{1}{2} (\eta_0 - 1)(x_f^2 - x_0^2) \right]. \tag{7.15}$$

Для того, чтобы найти время полного вытеснения нефти, нужно в формуле (7.15) положить $x_f = L$. Тогда получим:

$$T = \frac{m \eta_в}{2k \Delta p} \left[L^2 - x_0^2 + \eta_0 (L - x_0^2) \right].$$

В частности, если в начальный момент времени пласт был полностью насыщен нефтью ($x_0 = 0$), то отсюда находим:

$$T = m\eta_в(\eta_0 + 1)L^2/(2k\Delta p).$$

Для определения зависимости координаты границы раздела x_f от времени t решим квадратное уравнение (7.15) относительно x_f:

$$x_f = \frac{\eta_0 L}{\eta_0 - 1} - \sqrt{\left(\frac{\eta_0 L}{\eta_0 - 1} - x_0\right)^2 - \frac{2k\Delta p t}{m\eta_в(\eta_0 - 1)}}. \qquad (7.16)$$

Подставив это значение x_f в формулу (7.12), найдем закон изменения во времени скорости фильтрации (а значит, и дебита галереи):

$$w = \frac{k}{\eta_в}\Delta p\left[(\eta_0 L - (\eta_0 - 1)x_0)^2 - \frac{2k\Delta p}{m\eta_в}(\eta_0 - 1)t\right]^{-1/2} \qquad (7.17)$$

Проанализируем полученные характеристики потока.

1. Из уравнений (7.10) и (7.11) видно, что давление в пласте зависит не только от координаты x, но и от положения границы раздела x_f, а следовательно, от времени. Но x_f, как следует из формулы (7.16), со временем увеличивается, следовательно, пластовое давление во времени в водоносной области падает, а в нефтеносной растет. На рис. 7.3 приведены кривые распределения давления в пласте в начальный момент вытеснения, когда граница раздела занимает положение x_0, и некоторое время t спустя, когда граница раздела продвинулась до положения x_f. Из рисунка видно, что пьезометрическая линия на границе раздела имеет излом.

2. Скорость фильтрации w (7.17) и расход жидкости Q также изменяются во времени. Следовательно, несмотря на постоянство депрессии $\Delta p = p_к - p_г$ движение жидкостей в пласте будет неустановившимся.

При $\eta_0 > 1$ ($\eta_н > \eta_в$), как видно из (7.17), скорость фильтрации и дебит галереи увеличиваются с течением времени, т.е. по мере продвижения контура нефтеносности.

Это легко объяснимо и из физических соображений. Движение жидкостей в пласте происходит под действием постоянного перепада давления Δp. Сопротивление, оказываемое обеими жидкостями, зависит от размеров их областей. С течением времени увеличивается область водоносности, сопротивление которой по сравнению с областью нефтеносности тех же размеров значительно меньше. Следовательно, общее сопротивление обеих областей во времени уменьшается, что при постоянной депрессии Δp ведет к росту скорости фильтрации и дебита галереи.

3. Градиенты давления в водоносной и нефтеносной областях, как это следует из формул (7.13) и (7.14) с учетом формулы (7.16), во времени растут. Это же показано и на рис. 7.3. В нефтеносной области градиент давления больше, чем в водоносной, во столько раз, во сколько вязкость нефти больше вязкости воды.

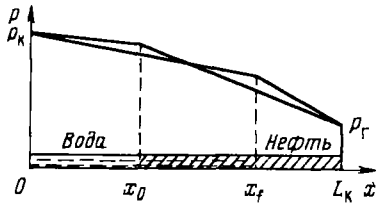


Рис. 7.3. Кривые распределения давления в пласте при вытеснении нефти водой

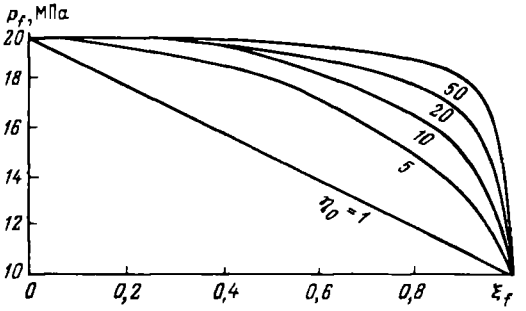


Рис. 7.4. Изменение давления на границе раздела жидкостей ($p_к = 20$ МПа, $p_г = 10$ МПа)

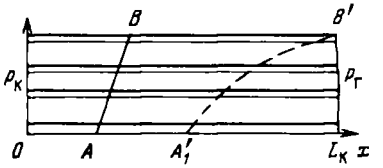


Рис. 7.5. Схема использования метода «полосок»

4. Кривая падения давления p_f на границе раздела в зависимости от ее безразмерных значений $\xi_f = x_f/L$ при различных отношениях вязкостей $\eta_0 = \eta_н/\eta_в$ приведены на рис. 7.4. Расчеты проводились по формуле (7.9) при давлении на контуре питания $p_к = 20$ МПа и на галерее – $p_г = 10$ МПа.

В случае, если первоначальное положение водонефтяного контакта AB в пласте не параллельно галерее (рис. 7.5), то решить задачу можно приближенно, используя, например, метод «полосок», предложенный В. Н. Щелкачевым. В потоке выделяются узкие полоски, в пределах каждой из которых водонефтяной контакт считается параллельным галерее, и движение в каждой полоске описывается выведенными в этом параграфе формулами. При этом, как видно из формулы (7.17), чем больше значение x_0, тем больше скорость фильтрации w. Отсюда

вытекает, что граница раздела в точке B будет двигаться гораздо быстрее, чем в точке A, и обводнение галереи начнется именно по линии BB', в то время как контур нефтеносности по другим линиям будет еще значительно удален от галереи. Из этого примера следует важное заключение о характере продвижения контура нефтеносности. Если на границе раздела вода – нефть при разработке нефтяной залежи образовался «водяной язык», то он в дальнейшем не только не исчезает, а быстро вытягивается, продвигаясь с большей скоростью, чем остальная часть водонефтяного контакта.

§ 3. ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ

Рассмотрим задачу о вытеснении нефти водой в условиях плоскорадиального движения по закону Дарси в пласте, изображенном на рис. 7.6. На контуре питания радиусом $R_к$ поддерживается постоянное давление $p_к$, на забое добывающей скважины радиусом $r_с$ – постоянное давление $p_с$, толщина пласта h и его проницаемость k также постоянны. Обозначим через R_0, r_f соответственно начальное и текущее положения контура нефтеносности, концентричные скважине и контуру питания; через $p_в$ и $p_н$ – давление в любой точке водоносной и нефтеносной области соответственно, через $p(t)$ – давление на границе раздела жидкостей.

В случае установившегося плоскорадиального движения однородной жидкости (§ 2, гл. 3) распределение давления в потоке и скорость фильтрации описываются следующими уравнениями:

$$p = p_к - \frac{p_к - p_с}{\ln \frac{R_к}{r_с}} \ln \frac{R_к}{r} = p_с + \frac{p_к - p_с}{\ln \frac{R_к}{r_с}} \ln \frac{r}{r_с};$$

$$w = \frac{k}{\eta} \frac{p_к - p_с}{\ln \frac{R_к}{r_с}} \frac{1}{r}.$$

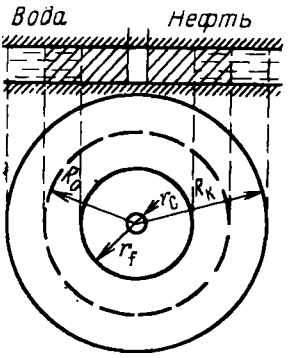


Рис. 7.6. Схема пласта при плоскорадиальном вытеснении нефти водой.

Если изобару, совпадающую в данный момент с контуром нефтеносности, принять за скважину, то распределение давления и скорость фильтрации в водоносной области можно выразить следующим образом:

$$p_в = p_к - \frac{p_к - p(t)}{\ln \frac{R_к}{r_f}} \ln \frac{R_к}{r}; \tag{7.18}$$

$$w_в = \frac{k}{\eta_в} \frac{p_к - p(t)}{\ln \frac{R_к}{r_f}} \frac{1}{r}. \tag{7.19}$$

В случае, если эту же изобару, совпадающую с r_f, принять за контур питания, то распределение давления и скорость фильтрации в нефтеносной области можно записать следующим образом:

$$p_н = p_с + \frac{p(t) - p_с}{\ln \frac{r_f}{r_с}} \ln \frac{r}{r_с}; \tag{7.20}$$

$$w_н = \frac{k}{\eta_н} \frac{p(t) - p_с}{\ln \frac{r_f}{r_с}}. \tag{7.21}$$

Давление на границе раздела жидкостей p найдем из условия равенства скоростей фильтрации нефти и воды на этой границе, для чего приравняем (7.19) и (7.21) при $r = r_f$. В результате получим:

$$p(t) = \frac{p_к \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_с} + p_с \ln \frac{R_к}{r_f}}{\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_с}}, \tag{7.22}$$

где, как и ранее, $\eta_0 = \eta_н / \eta_в$.

Определим характеристики рассматриваемого плоскорадиального фильтрационного потока нефти и воды.

1. Распределение давления в водоносной и нефтеносной областях найдем из уравнений (7.18) и (7.20), подставив в них значения давления на границе раздела $p(t)$ из (7.22). В результате получим:

$$p_в = p_к - \frac{\Delta p \ln \frac{R_к}{r}}{\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_с}}, \quad r_f \leqslant r \leqslant R_к; \tag{7.23}$$

$$p_{н} = p_{c} + \frac{\eta_0 \Delta p \ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_c}}, \quad r_c \leqslant r \leqslant r_f, \tag{7.24}$$

где $\Delta p = p_к - p_c$.

Из этих формул видно, что закон распределения давления вдоль радиуса-вектора в обеих зонах – логарифмический.

В случае, если знаменатель в формулах (7.23) и (7.24) представить в виде

$$\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_c} = \ln \left(\frac{r_f^{\eta_0 - 1} R_к}{r_c^{\eta_0}} \right), \quad \eta_0 > 1,$$

то нетрудно заметить, что при r_f, уменьшающемся во времени (при стягивании контура нефтеносности), этот знаменатель также уменьшается. Тогда из формул (7.23) и (7.24) следует, что давление в водоносной части пласта во времени падает, а в нефтеносной растет. Таким образом, здесь наблюдается такая же картина, как и в прямолинейно-параллельном потоке.

2. Градиенты давления в обеих областях течения найдем, продифференцировав уравнения (7.23) и (7.24):

$$\frac{\partial p_в}{\partial r} = \frac{\Delta p}{\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_c}} \frac{1}{r}; \tag{7.25}$$

$$\frac{\partial p_н}{\partial r} = \frac{\eta_0 \Delta p}{\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_c}} \frac{1}{r}. \tag{7.26}$$

Из полученных формул следует, что градиенты давления во времени растут как в водоносной, так и в нефтеносной областях (так как знаменатели в этих формулах уменьшаются во времени).

На границе раздела жидкостей (при $r = r_f$) градиент давления в нефтеносной области больше, чем в водоносной, в η_0 раз. Это говорит о том, что на фронте пьезометрическая линия имеет излом.

3. Скорости фильтрации жидкостей определим из закона Дарси:

$$w_в = \frac{k}{\eta_в} \frac{\partial p_в}{\partial r}, \quad w_н = \frac{k}{\eta_н} \frac{\partial p_н}{\partial r},$$

используя выражения (7.25) и (7.26) соответственно.

В результате получим:

$$w_в = \frac{k \Delta p}{\eta_н \left(\ln \frac{R_к}{r_f} + \eta_0 \ln \frac{r_f}{r_c} \right)} \frac{1}{r}, \quad R_к \leqslant r \leqslant r_f;$$

$$w_{\text{н}} = \frac{k\Delta p}{\eta_{\text{н}}\left(\ln\frac{R_{\text{к}}}{r_f} + \eta_0 \ln\frac{r_f}{r_{\text{c}}}\right)} \frac{1}{r}, \quad r_f \leqslant r \leqslant r_{\text{c}}.$$

Из этих формул видно, что скорости фильтрации как воды, так и нефти во времени растут (так как знаменатель в указанных формулах уменьшается во времени).

4. Дебит скважины Q найдем, умножив скорость фильтрации w на площадь $\Omega = 2\pi hr$:

$$Q = \frac{2\pi kh\Delta p}{\eta_{\text{н}}\left(\ln\frac{R_{\text{к}}}{r_f} + \eta_0 \ln\frac{r_f}{r_{\text{c}}}\right)}. \tag{7.27}$$

При постоянной депрессии $\Delta p = p_{\text{к}} - p_{\text{c}}$ дебит скважины увеличивается во времени, т. е. с приближением к ней контура нефтеносности. Такое самопроизвольное увеличение дебита нефти перед прорывом воды в скважину подтверждается и промысловыми наблюдениями. При $\eta_{\text{н}} = \eta_{\text{в}}$ формула (7.27) превращается в формулу Дюпюи.

5. Закон движения границы раздела жидкостей r_f определим из соотношения между скоростью фильтрации и средней скоростью движения:

$$w_f = mv_f = -m\frac{dr_f}{dt},$$

откуда

$$dt = -\frac{m}{w_f}dr_f = -\frac{m\eta_{\text{н}}}{k\Delta p}\left(\ln\frac{R_{\text{к}}}{r_f} + \eta_0 \ln\frac{r_f}{r_{\text{c}}}\right) r_f\, dr_f.$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах от 0 до t и от R_0 до r_f, получим неявное выражение для закона движения границы раздела $r_f(t)$:

$$t = \frac{m\eta_{\text{н}}}{k\Delta p}\int_{r_f}^{R_0} [(\eta_0 - 1)z \ln z - (\eta_0 \ln r_{\text{c}} - \ln R_{\text{к}})z]\, dz =$$

$$= \frac{m\eta_{\text{н}}}{2k\Delta p}\left[\eta_0\left(R_0^2 \ln\frac{R_0}{r_{\text{c}}} - r_f^2 \ln\frac{r_f}{r_{\text{c}}}\right) + R_0^2 \ln\frac{R_{\text{к}}}{R_0} - r_f^2 \ln\frac{R_{\text{к}}}{r_f} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}(\eta_0 - 1)(R_0^2 - r_f^2)\right]. \tag{7.28}$$

Здесь через z обозначена переменная интегрирования.

Время вытеснения T всей нефти водой найдем, подставив в уравнение (7.28) $r_f = r_{\text{c}}$. В результате получим (пренебрегая r_{c}^2 по сравнению с R_0^2):

$$T=\frac{m\eta_в R_0^2}{2k\Delta p}\left[\eta_0\left(\ln\frac{R_0}{r_c}-\frac{1}{2}\right)+\ln\frac{R_к}{R_c}+\frac{1}{2}\right].$$

Это равенство, очевидно, дает оценку времени прорыва воды в скважину.

Заметим, что полученные простые расчетные формулы «поршневого» вытеснения нефти водой допускают обобщение, учитывающее неполноту вытеснения. Оставаясь в рамках модели вытеснения с неизвестной подвижной границей, вводят постоянную остаточную нефтенасыщенность $s_{он}$ и насыщенность защемленной водой $s_{ов}$, при которых соответствующие фазы неподвижны (см. гл. 1). Предполагается, что каждая из фаз перемещается по занимаемой ею области со своей фазовой проницаемостью ($k_н$ или $k_в$), а среда имеет соответствующую пористость:

$$m_н = m(1 - s_{ов}), \qquad m_в = m(1 - s_{ов} - s_{он}).$$

Тогда в формулы, полученные в §§ 2, 3, нетрудно внести соответствующие изменения; при этом роль отношения вязкостей η_0 будет играть параметр $M = k_н\eta_в/(\eta_н k_в)$, представляющий собой отношение подвижностей фаз.

§ 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ

В реальных условиях движение границы раздела жидкостей выглядит, естественно, сложнее, чем по рассмотренным схемам, так как водонефтяной или газоводяной контакт совершает сложное пространственное движение.

В реальных условиях продуктивные пласты наклонны, и граница раздела жидкостей, имеющая горизонтальное начальное положение, в процессе разработки залежи нефти деформируется.

Пусть нефтяная залежь в наклонном пласте (рис. 7.7) имеет горизонтальное начальное положение водонефтяного контакта A_0B_0.

При отборе нефти граница раздела вода – нефть будет перемещаться, занимая последовательно положения A_1B_1, A_2B_2 и т. д. Рассмотрим вопрос об устойчивости движения границы раздела. Скорости фильтрации каждой жидкости согласно закону Дарси определяются при учете силы тяжести по формулам:

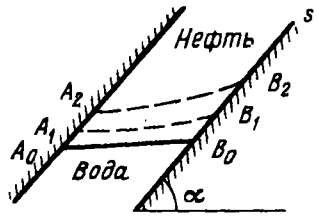


Рис. 7.7. Схема движения водонефтяного контакта в наклонном пласте

$$w_в = -\frac{k_в}{\eta_в}\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho_в g \frac{\partial z}{\partial s}\right); \qquad w_н = -\frac{k_н}{\eta_н}\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho_н \breve{g} \frac{\partial z}{\partial s}\right), \tag{7.29}$$

где ось z направлена вертикально вверх, а координата s – в направлении потока.

Вследствие неизбежных возмущений на границе раздела частицы воды попадают в область, занятую нефтью, и при этом их дальнейшее движение может либо ускоряться, либо замедляться.

В первом случае, при ускорении движения частиц воды движение границы раздела будет неустойчивым; во втором, при замедлении движения частиц воды – устойчивым.

Условия устойчивости движения границы раздела можно установить из следующих элементарных соображений. Обозначим через $w_{вн}$ скорость фильтрации частиц воды, попавших в поток нефти с градиентом давления $(\partial p/\partial s)_н$, $k_{вн}$ – проницаемость пласта для воды в зоне движения нефти. Тогда из первого соотношения (7.29) получим:

$$w_{вн} = -\frac{k_{вн}}{\eta_в}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_н + \rho_в g \frac{\partial z}{\partial s}\right]. \tag{7.30}$$

Для скорости фильтрации основных частиц нефти, соприкасающихся с проникшими туда частицами воды, согласно второму уравнению (7.28), можно записать

$$w_н = -\frac{k_н}{\eta_н}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_н + \rho_н g \frac{\partial z}{\partial s}\right]. \tag{7.31}$$

Из уравнений (7.30) и (7.31) получаем связь между скоростями фильтрации $w_{вн}$ и $w_н$:

$$\frac{\eta_в}{k_{вн}} w_{вн} + \rho_в g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\eta_н}{k_н} w_н + \rho_н g \frac{\partial z}{\partial s} = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_н,$$

откуда

$$w_{вн} = \frac{\eta_н}{\eta_в}\frac{k_{вн}}{k_н} w_н - \frac{k_{вн}}{\eta_в}(\rho_в - \rho_н) g \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Об устойчивости движения границы раздела можно судить по разности скоростей фильтрации:

$$\Delta w = w_{вн} - w_н = \left(\frac{\eta_н}{\eta_в}\frac{k_{вн}}{k_н} - 1\right) w_н - \frac{k_{вн}}{\eta_в}(\rho_в - \rho_н) g \sin\alpha, \tag{7.32}$$

где α – угол наклона пласта к горизонту, так что $\partial z/\partial s = \sin\alpha$ (см. рис. 7.7).

При $\Delta w \leqslant 0$ движение границы раздела жидкостей будет устойчивым, при $\Delta w > 0$ движение неустойчиво.

Величина $k_{вн}$ близка к проницаемости так называемой переходной зоны – зоны, оставленной нефтью и занятой водой. Обычно $k_{вн}$ меньше

$k_н$. Считая в первом приближении, что $k_{вн} \approx k_н$, преобразуем соотношение (7.32) к виду

$$\Delta w = \left(\frac{\eta_н}{\eta_в} - 1 \right) w_н - \frac{k_н}{\eta_в} (\rho_в - \rho_н) g \sin \alpha. \tag{7.33}$$

Так как при устойчивом движении границы $\Delta w \leqslant 0$, то из (7.33) найдем условие устойчивости в виде

$$w_н \leqslant \frac{k_н}{\eta_н - \eta_в} (\rho_в - \rho_н) g \sin \alpha, \tag{7.34}$$

накладывающее ограничение на скорость фильтрации нефти $w_н$ на границе раздела.

Из (7.34) следует, что при очень малых скоростях при $\rho_в > \rho_н$ и при вытеснении снизу вверх ($\alpha > 0$) движение устойчиво, даже если вязкость нефти $\eta_н$ существенно превышает вязкость воды $\eta_в$. Поэтому, например, когда водонефтяной контакт (ВНК) далек от добывающих скважин и $w_н$ мала, граница раздела движется устойчиво. С приближением ВНК и с увеличением $w_н$ согласно (7.33) разность Δw увеличивается. Когда $\Delta w > 0$, движение неустойчиво, и язык подошвенной воды будет двигаться гораздо быстрее.

Более строгое исследование рассмотренной задачи проводится методами теории возмущений и гидродинамической устойчивости.

§ 5.* ДВИЖЕНИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ [1]

Рассмотрим прямолинейное вытеснение одной жидкости другой с учетом силы тяжести в наклонном пласте толщиной h; угол наклона пласта к горизонту α (рис. 7.8). Пусть жидкость *1* (вода) вытесняет жидкость *2* (нефть). Закон движения границы раздела между ними будем искать в виде

$$y = y_1(x, t). \tag{7.35}$$

Будем предполагать, что компоненты скорости, перпендикулярные напластованию, равны нулю, а параллельные распределены равномерно по сечению потока. Это соответствует предположению, что давление в каждом поперечном сечении потока распределено по законам гидростатики.

[1] Знаком * в тексте и оглавлении отмечены трудные разделы (не для первого чтения).

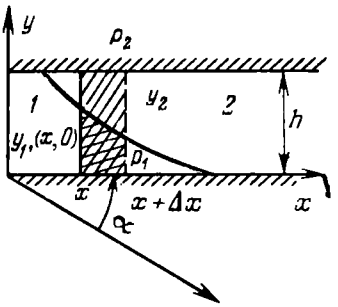


Рис. 7.8. Деформация границы раздела под действием силы тяжести

5.1. Дифференциальное уравнение границы раздела

Выведем дифференциальные уравнения для определения формы границы раздела (7.35). Составим баланс массы каждой из фаз с учетом их сжимаемости. Пусть $q_{1m}(x, t) = \rho_1 w_1$ – массовый расход первой фазы через единицу площади сечения потока вдоль оси x. Тогда приток массы воды через поверхность $ay_1(x, t)$, где a – ширина пласта элементарного объема с координатой x, за время Δt составит (см. рис. 7.8):

$$M^{(+)} = q_{1m}(x, t)\, a y_1(x, t)\, \Delta t,$$

а отток массы через поверхность с координатой $x + \Delta x$ за время Δt будет равен

$$M^{(-)} = q_{1m}(x + \Delta x, t)\, a y_1(x + \Delta x, t)\, \Delta t.$$

Разница между поступающей $M^{(+)}$ и отбираемой $M^{(-)}$ массами воды должна быть равна приращению массы в элементарном объеме, которое в свою очередь составляет за время Δt (с учетом сжимаемости фазы):

$$m[\rho_1(x, t + \Delta t) y_1(x, t + \Delta t) - \rho_1(x, t) y_1(x, t)]\, a \Delta x.$$

Запишем баланс массы первой фазы, получим после деления на $a \Delta x \Delta t$ обеих частей равенства

$$-\frac{(\rho_1 w_1 y_1)|_{x+\Delta x} - (\rho_1 w_1 y_1)|_x}{\Delta x} = \frac{(m\rho_1 y_1)|_{t+\Delta t} - (m\rho_1 y_1)|_t}{\Delta t},$$

откуда в результате предельного перехода $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ найдем уравнение неразрывности для первой фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t} m\rho_1 y_1 + \frac{\partial}{\partial x} \rho_1 w_1 y_1 = 0. \tag{7.36}$$

Совершенно аналогично выводится уравнение баланса массы второй фазы, которое имеет тот же вид, что и (7.36) после замены в последнем индекса «1» на «2».

Ведем относительную долю толщины пласта, занятой каждой из фаз:

$$\sigma_1 = \frac{y_1}{h}, \quad \sigma_2 = \frac{y_2}{h} = \frac{h - y_1}{h} = 1 - \sigma_1. \tag{7.37}$$

Тогда уравнения неразрывности флюидов примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t} m \rho_i \sigma_i + \frac{\partial}{\partial x} \rho_i w_i \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 1. \tag{7.38}$$

Если обе фазы – однородные несжимаемые жидкости ($\rho_i = \text{const}$), то уравнения (7.38) упрощаются и могут быть записаны в виде

$$m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} w_1 \sigma = 0,$$

$$-m \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} w_2 (1 - \sigma) = 0, \tag{7.39}$$

где считается, что пористость m – постоянна, и введено обозначение $\sigma = \sigma_1$. В дальнейшем мы и будем использовать это предположение.

Согласно закону Дарси, для скоростей фильтрации фаз имеем:

$$w_i = -\frac{k_i}{\eta_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_i g \sin \alpha \right), \quad i = 1, 2. \tag{7.40}$$

Здесь p_1 и p_2 – давления соответственно на подошве и кровле пласта (см. рис. 7.8), которые в соответствии с законом гидростатики связаны между собой соотношением:

$$p_1 = p_2 + (\rho_1 y_1 + \rho_2 y_2) g \cos \alpha.$$

Используя (7.37), это равенство можно представить в следующем виде:

$$p_2 = p_1 - (\Delta \rho h \sigma + \rho_2 h) g \cos \alpha,$$

откуда, дифференцируя, найдем:

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} - \Delta \rho g h \cos \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \tag{7.41}$$

где $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_2$.

Сложив уравнения (7.39), получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} [w_1 \sigma + w_2 (1 - \sigma)] = 0,$$

откуда следует, что суммарный удельный расход q зависит только от времени:

$$q = q_1 + q_2 \equiv w_1 \sigma + w_2 (1 - \sigma) = q(t). \tag{7.42}$$

Будем считать эту величину известной.

Теперь можно исключить градиенты давления $\partial p_i / \partial x$, выразив их

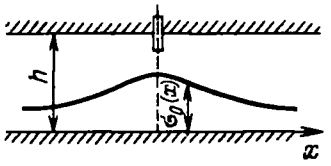


Рис. 7.9. Схема растекания возмущенной границы раздела жидкости под действием силы тяжести

через $q(t)$ и искомую функцию $\sigma(x, t)$. Для этого нужно выполнить последовательно следующие операции: подставить (7.41) в выражение (7.40) при $i = 2$; сложить почленно равенства (7.40), умножив их предварительно на σ и $(1 - \sigma)$ соответственно и используя (7.42). Полученное в результате выражение, разрешенное относительно $\partial p_1/\partial x$, дает:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{-q(t)/M_2 + [M\rho_1\sigma + \rho_2(1-\sigma)]g\sin\alpha - \Delta\rho gh\cos\alpha(1-\sigma)\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}}{(M-1)\sigma + 1}, \qquad (7.43)$$

где $M_i = k_i/\eta_i$ $(i = 1, 2)$; $M = M_1/M_2$ – отношение подвижностей жидкостей.

Подставив (7.43) в (7.40) (при $i = 1$) и затем полученное выражение для w_1 – в первое равенство (7.39), найдем уравнение для определения формы границы раздела $\sigma(x, t)$ в процессе вытеснения жидкостей:

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sigma\frac{Mq(t) + M_1[M\rho_1\sigma + \rho_2(1-\sigma)]g\sin\alpha - M_1\Delta\rho gh\times}{(M-1)\sigma+1}\right.$$

$$\left.\times\frac{\cos\alpha(1-\sigma)\partial\sigma/\partial x}{} - M_1\rho_1 g\sin\alpha\sigma\right\} = 0. \qquad (7.44)$$

При $\Delta\rho \neq 0$ (7.44) – нелинейное уравнение параболического типа, если $\Delta\rho = 0$, то (7.44) превращается в уравнение первого порядка.

Рассмотрим случай горизонтального пласта, когда угол $\alpha = 0$. В этом случае уравнение (7.44) упрощается и принимает вид

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t} + M_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\frac{q(t) - M_2\Delta\rho gh(1-\sigma)\partial\sigma/\partial x}{(M_1 - M_2)\sigma + M_2}\right] = 0. \qquad (7.45)$$

Для этого уравнения рассмотрим задачу о выравнивании возмущенной границы раздела жидкостей под действием силы тяжести в бесконечном пласте (рис. 7.9). При этом предполагается, что суммарный расход отсутствует, т.е. $q(t) = 0$; в начальный момент времени форма границы раздела известна:

$$\sigma(x, 0) = \sigma_0(x), \qquad (7.46)$$

а на бесконечности она – невозмущенная горизонтальная.

Тогда уравнение (7.45) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = M_1 \frac{\Delta \rho g h}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\sigma(1-\sigma)\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}{(M-1)\sigma + 1} \right]. \tag{7.47}$$

Для дальнейшего удобно представить это уравнение в безразмерной форме, введя переменные

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{m \eta_1 L^2}{k_1 \Delta \rho g h},$$

где L–характерный линейный размер пласта; T–характерное время, которое задано как время продвижения воды на расстояние L под действием гидростатического перепада давлений $\Delta p = \Delta \rho g h$.

Тогда (7.47) примет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\sigma(1-\sigma)\dfrac{\partial \sigma}{\partial \xi}}{(M-1)\sigma + 1} \right]. \tag{7.48}$$

Для решения задачи (7.48), (7.46) введем функцию $\omega(\sigma)$, аналогичную функции Лейбензона:

$$\omega(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{\sigma(1-\sigma)}{(M-1)\sigma + 1} d\sigma. \tag{7.49}$$

Явное выражение этой функции можно получить, выполнив интегрирование в (7.49). После вычислений интеграла получим:

а) при отношении подвижностей жидкостей $M = 1$

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - \frac{2}{3}\sigma \right);$$

б) при $M \neq 1$

$$\omega(\sigma) = \frac{M}{M-1} \left\{ \frac{\sigma}{M-1} - \frac{\sigma^2}{2M} - \frac{\ln[(M-1)\sigma + 1]}{(M-1)^2} \right\}. \tag{7.50}$$

Эти равенства устанавливают соответствие между ω и σ: для заданного σ из (7.50) можно найти ω и наоборот. Последнюю операцию проще выполнить графически по заранее построенному графику правой части (7.50).

Покажем теперь, как свести нашу задачу к определению функции ω. Из (7.49) следует:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{d\omega}{d\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{\sigma(1-\sigma)}{(M-1)\sigma + 1} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \frac{d\omega}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\sigma(1-\sigma)}{(M-1)\sigma+1}\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}.$$

Тогда уравнение (7.48) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \varkappa(\sigma)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2}, \tag{7.51}$$

где введено обозначение

$$\varkappa(\sigma) = \varkappa[\sigma(\omega)] = \frac{\sigma(1-\sigma)}{(M-1)\sigma+1}. \tag{7.52}$$

Таким образом, для определения ω мы получили уравнение теплопроводности (7.51) с коэффициентом $\varkappa$, зависящим от искомой функции. Исследуем характер зависимости (7.52). Функция $\varkappa(\sigma)$ обращается в нуль при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$. Стандартная процедура исследования (7.52) на экстремум приводит к выводу, что эта функция имеет максимум:

а) $\varkappa_{max} = 1/4$ при $\sigma = 1/2$, если $M = 1$;

б) $\varkappa_{max} = (\sqrt{M}+1)^{-2}$ при $\sigma = (\sqrt{M}+1)^{-1}$, если $M \neq 1$.

График зависимости $\varkappa(\sigma)$ приведен на рис. 7.10 для $M \neq 1$. Если в уравнении (7.51) заменить $\varkappa(\sigma)$ на его максимальное значение $\varkappa_{max} = \varkappa$ и толковать ω как температуру, то, очевидно, это будет соответствовать более быстрому выравниванию температуры. Такая линеаризация уравнения сильно упростит задачу, а полученный результат представит оценку сверху для истинного решения[1].

Теперь задача свелась к решению уравнения теплопроводности (7.51) при $\varkappa(\sigma) = \varkappa_{max} = \varkappa = \text{const}$ при начальном условии

$$\omega(\xi, 0) = f(\xi), \tag{7.53}$$

которое находится из (7.46) и (7.50).

Таким задачи изучаются в курсе уравнений математической физики и теории теплопроводности. Решение нашей задачи (7.51) (при $\varkappa = \text{const}$), (7.53) имеет следующий вид:

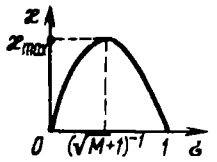


Рис. 7.10. График зависимости $\varkappa(\sigma)$ для $M \neq 1$

[1] Эта процедура оправдывается в математике «теоремой сравнения» для уравнений данного типа.

$$\omega(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-(u-\xi)^2/4\varkappa\tau}\, du, \tag{7.54}$$

где u – переменная интегрирования.

После замены переменных

$$\frac{u-\xi}{2\sqrt{\varkappa\tau}} = z, \quad u = \xi + 2z\sqrt{\varkappa\tau}, \quad du = 2\sqrt{\varkappa\tau}\, dz$$

решение (7.54) можно переписать в виде

$$\omega(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + 2z\sqrt{\varkappa t}) e^{-z^2}\, dz. \tag{7.55}$$

Для конкретного вида начальной функции $f(\xi)$ интеграл в (7.55) может быть вычислен. Некоторые примеры таких вычислений, а также случай радиального растекания возмущенной границы раздела приведены в работах И. А. Чарного.

При малом различии в плотностях флюидов ($\Delta\rho \approx 0$) или при вертикальном вытеснении в трубке тока постоянного сечения ($\alpha = \pi/2$) уравнение (7.44) превращается в уравнение первого порядка. После преобразований и дифференцирования по x из (7.44) получим:

1) при $\Delta\rho = 0$

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{Mq(t)}{[(M+1)\sigma + 1]^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0; \tag{7.56}$$

2) при вертикальном вытеснении

$$m\frac{\partial\sigma}{\partial t} + F(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0, \tag{7.57}$$

где

$$F(\sigma) = \frac{Mq - 2b}{[(M-1)\sigma + 1]^2} + b; \qquad b = M_1 \Delta\rho g.$$

При заданном суммарном расходе $q(t)$ и начальной форме границы раздела (7.46) решения квазилинейных уравнений (7.56) и (7.57) могут быть построены методом характеристик (см. прил. 7) аналогично решению задачи о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей (см. гл. 8, 9).

§ 6.* ОБРАЗОВАНИЕ КОНУСА ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ

При разработке нефтяных месторождений наблюдается явление, известное как образование водяных конусов. Это явление обычно на-

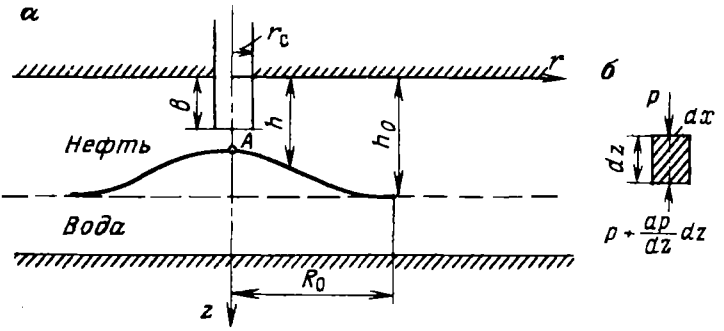


Рис. 7.11. Схема конуса подошвенной воды

блюдается в монолитных пластах, в которых возможно движение жидкости поперек напластований. При создании на скважине определенной депрессии первоначально горизонтальная граница раздела между нефтью и подошвенной водой (водонефтяной контакт) искривляется, образуется водяной холм, который называется конусом.

Точной теории водяного конуса до сего времени не имеется ввиду чрезвычайной сложности задачи. Приближенная теория, позволяющая рассчитать предельный безводный дебит скважины и форму стационарного конуса, была предложена М. Маскетом и И. А. Чарным.

Так как добыча нефти в данном случае сопровождается непрерывным замещением нефти подошвенной водой, конус, вообще говоря, не является стационарным. Однако при достаточно малых депрессиях, характерных для безводного притока нефти, и существенном влиянии силы тяжести образовавшийся конус поднимается медленно и устойчиво. Вертикальные компоненты скорости значительно меньше горизонтальных. Процесс имеет квазистационарный характер. Поэтому для приближенного расчета нестационарного конуса в этих условиях можно применять метод последовательной смены стационарных состояний, при котором конус в каждый момент времени считается стационарным.

Рассмотрим задачу о притоке нефти к несовершенной скважине (по степени вскрытия пласта) при устойчивом неподвижном конусе подошвенной воды. Будем считать пласт изотропным, кровлю и подошву пласта горизонтальными, начальное положение водонефтяного контакта также горизонтальным. Предположим, что водяной конус неподвижен и устойчив и к скважине притекает чистая нефть. Направим оси координат так, как показано на рис. 7.11, *а*. Обозначим нефтеносную толщину h, глубину вскрытия – b, радиус скважины – r_c.

В точной постановке требуется решить уравнение Лапласа для потенциала $\nabla^2 \Phi = 0$ при следующих граничных условиях: кровля пласта непроницаема; поверхность водонефтяного контакта, форма которой

неизвестна и сама подлежит определению, также непроницаема для нефти. Основная сложность такой задачи заключается в том, что форма границы раздела воды и нефти, т. е. форма конуса, неизвестна. Таким образом, помимо трудностей, связанных с решением уравнения Лапласа, неизвестна область, в которой это решение должно быть найдено.

Выясним условия, при которых водяной конус будет неподвижным. Предположим, что распределение давления в любой точке пласта известно, т. е. известна функция $p = p(r, z)$. Выделим на вершине конуса ($r = 0$) элементарный вертикальный цилиндрик пористой среды площадью df, высотой dz, заполненный водой, и рассмотрим силы, которые на него действуют (см. рис. 7.11, *б*), предполагая, что этот цилиндрик попал в нефтяную часть.

Пусть давление на верхнюю грань будет $p(0, z) = p$, давление на нижнюю грань p'. Очевидно,

$$p' = p(0, z + dz) = p + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Сила, которая влечет эту частицу вверх, равняется

$$m(p' - p)\, df = m \frac{\partial p}{\partial z} dz\, df,$$

где m – пористость.

Вниз частицу воды влечет ее собственный вес, равный $\rho_в g m\, dz\, df$, где $\rho_в$ – плотность воды.

Условие устойчивости частицы воды, таким образом, имеет вид:

$$\rho_в g m\, df\, dz \geqslant m \frac{\partial p}{\partial z} dz\, df \text{ или}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \leqslant \rho_в g. \tag{7.58}$$

Условие (7.58) можно упростить, перейдя от давления к потенциалу Φ. Для наших условий, когда ось z направлена вниз, имеем:

$$\Phi = \frac{k}{\eta}(p - \rho_н g z), \tag{7.59}$$

где k – проницаемость; η – вязкость нефти; $\rho_н$ – плотность нефти.

Из формулы (7.59) находим:

$$p = \frac{\eta}{k}(\Phi + \rho_н g z), \tag{7.60}$$

после чего условие устойчивости конуса (7.58) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=0} \leqslant \frac{kg\Delta\rho}{\eta}, \quad \Delta\rho = \rho_в - \rho_н. \tag{7.61}$$

Используем теперь условие, что вода неподвижна и, следовательно, давление в ней распределено гидростатически.

Пусть на некотором расстоянии от скважины R_0 толщина нефтяного пласта равна h_0 и известно давление p_0 на границе раздела. Тогда, так как вода неподвижна, давление в произвольной точке границы раздела:

$$p = p_0 - \rho_в g(h_0 - z). \tag{7.62}$$

Подставив этот значение p в выражение (7.59), получим:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{k\Delta\rho g}{\eta}(h_0 - z), \tag{7.63}$$

где Φ_0 – потенциал точки с давлением p_0.

Это означает, что вдоль границы раздела текущей нефти и неподвижной воды потенциал изменяется линейно в зависимости от координаты z.

На рис. 7.12 приведены кривые распределения потенциала вдоль оси скважины и вдоль цилиндрической поверхности радиусом R_0. Вдоль поверхности R_0 потенциал будем считать постоянным: $\Phi = \Phi_0$ (прямая DN).

Уравнение (7.63) изображается прямой DC, наклоненной к вертикали под углом β, с угловым коэффициентом, равным $\operatorname{tg}\beta = k\Delta\rho g/\eta$. Где-то на этой прямой лежит потенциал вершины конуса C. Если бы была известна высота подъема конуса, то сразу можно было бы найти этот потенциал.

Теперь посмотрим, какой вид будет иметь распределение потенциала вдоль стенки скважины и ниже в нефтяной части пласта. Наименьшее давление, а следовательно, и наименьший потенциал будут на стенках скважины, причем вдоль стенок скважины потенциал считается распределенным равномерно, так как на стенке скважины давление можно считать гидростатическим. Обозначим потенциал на стенке скважины Φ_c. Ниже донышка скважины потенциал будет возрастать так, как показано на рис. 7.12, т. е. выпуклостью вправо. Действительно, вертикальная составляющая скорости фильтрации определяется по формуле $w_z = -\partial\Phi/\partial z$. Вершина конуса по условию неподвижна. Следовательно, скорость нефти на этой вершине обращается в нуль, откуда вытекает.

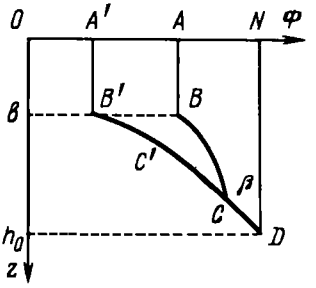


Рис. 7.12. Кривые распределения потенциала вдоль стенки скважины и поверхности водяного конуса

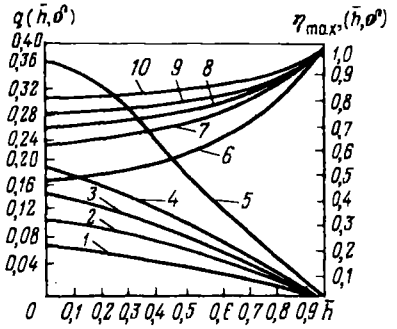


Рис. 7.13. Графики для расчета предельных безразмерных дебитов и предельной высоты подъема конуса.
Кривые *1–5* – для $q(\bar{h})$; *6–10* – для η_{max}; δ: *1, 6* – 1000; *2, 7* – 100; *3, 8* – 10; *4, 9* – 4; *5, 10* – 1

что касательная в этой точке должна быть вертикальной. К оси скважины подтекают струйки. Поэтому скорость вдоль оси скважины монотонно возрастает от нуля до максимального значения на донышке. Таким образом, $|\partial\Phi/\partial z|$ вдоль оси z скважины монотонно возрастает, и кривая распределения потенциала $\Phi = \Phi(0, z)$ должна быть обращена выпуклостью вправо, как показано на рис. 7.12 (кривая BC).

Очевидно, высота конуса определяется положением точки пересечения C прямой DC и кривой $\Phi = \Phi(0, z)$.

Предположим теперь, что при сохранении потенциала Φ_0 дебит скважины начал увеличиваться. Это достигается соответствующим уменьшением забойного потенциала Φ_c на стенке скважины. Условие устойчивости водяного конуса выражается формулой (7.61).

Отсюда следует, что перед началом прорыва воды распределение потенциала в нефтяной части $\Phi(0, z)$ ниже дна скважины будет изображаться кривой $C'B'$, касательная к которой в вершине конуса составит с вертикалью угол $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{kg\Delta\rho}{\eta}$. Дебит скважины $Q_{\text{пред}}$, соответствующий предельному состоянию конуса, называется предельным безводным дебитом.

Однако точный вид распределения потенциала при наличии конуса обводнения неизвестен. Поэтому нужно исходить из каких-то других предпосылок, которые позволят оценить приближенно величину подъема конуса и наиболее интересную для практики величину – предельного безводного дебита.

Теория конусообразования Маскета – Чарного исходит из допущения, что стеснение потока нефти образующимся водяным конусом мало влияет на распределение потенциала в нефтяной части пласта, и поэтому для приближенной оценки предельных значений дебита и высоты подъема конуса можно воспользоваться известным выражением для потенциала напорного (невозмущенного) течения нефти в однофазно-анизотропном пласте с горизонтальной проницаемостью k_r и вертикальной проницаемостью k_z.

Анализируя распределение потенциала вдоль оси скважины при невозмущенном и возмущенном движении нефти, И. А. Чарный устано-

вил верхний и нижний пределы, между которыми находится предельный безводный дебит:

$$Q_1 > Q_{\text{пред}} > Q_2. \tag{7.64}$$

При этом верхний предел Q_1 находится в результате сопоставления движения нефти при наличии конуса воды с плоскорадиальным стационарным напорным потоком нефти в пласте с постоянной толщиной h_0; нижний предел Q_2 определяется из решения задачи о напорном притоке нефти к несовершенной скважине в пласте толщиной h_0 (см. § 6 гл. 3).

Расчеты показывают, что Q_1 и Q_2 различаются на 25–30%, причем $Q_{\text{пред}}$ ближе к Q_1, чем к Q_2.

Результаты расчетов приведены в виде графиков зависимости предельных безразмерных дебитов $q(\bar{h}, \delta)$ и предельной высоты подъема конуса $\eta_{\max}(\bar{h}, \delta)$ на рис. 7.13, где введены безразмерные переменные и параметры:

$$q(\bar{h}, \delta) = Q_1/Q_0, \quad h = b/h_0, \quad \delta = R_0/(\varkappa h_0),$$

$$\eta_{\max} = y_{\max}/(h_0 - b), \quad \varkappa = \sqrt{k_r/k_z}.$$

Здесь $y_{\max}$ – предельная высота подъема конуса перед прорывом;

$$Q_0 = 2\pi k_r h_0^2 \Delta\rho g/\eta, \quad \Delta\rho = \rho_в - \rho_н.$$

Все сказанное, очевидно, полностью распространяется на случай прорыва верхнего газа при наличии газовой шапки. Под $\Delta\rho$ при этом следует понимать разность плотностей нефти и газа. Приведенные графики можно также использовать для расчетов в пластовых условиях предельных безводных дебитов несовершенных газовых скважин в пластах с подошвенной водой.

Расчеты показывают, что безводный дебит в однородных маломощных пластах очень мал. Однако на практике скважины дают иногда довольно большой нефтяной дебит без воды, хотя известно, что под ними имеется подошвенная вода. Это объясняется наличием непроницаемых или малопроницаемых пропластков, которые затрудняют вертикальное движение воды.

Обширный цикл экспериментальных исследований, связанных с конусообразованием, выполнен Д. А. Эфросом и его сотрудниками на щелевых моделях. В результате этих исследований было подтверждено неравенство (7.64) для предельного безводного дебита. Экспериментальное исследование нестационарного газового конуса на физической модели проведено А. К. Курбановым.

Контрольные вопросы и задачи

1. Каким условиям должны удовлетворять скорости жидкостей и давления на границе раздела между ними?

2. Найти дебит добывающей скважины при радиальном поршневом

вытеснении нефти водой в горизонтальном неоднородном пласте, проницаемость которого меняется по закону $k(r) = ar + b$.

3. Как меняется давление на границе раздела при увеличении отношения коэффициентов вязкости нефти и воды $\eta_н/\eta_в$?

4. В каком случае более вероятно устойчивое продвижение водонефтяного контакта: вдали от добывающих скважин или в призабойной зоне?

5. Нефть с плотностью, мало отличающейся от плотности воды, вытесняется снизу вверх в наклонном пласте (см. рис. 7.7). При каком условии движение границы раздела неустойчиво? Как в этом случае соотносятся скорости перемещения точек A границы вдоль кровли и точек B вдоль подошвы пласта?

Глава 8

ТЕОРИЯ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. ПРАКТИЧЕСКАЯ ВАЖНОСТЬ ИЗУЧЕНИЯ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

В связи с проектированием и анализом разработки нефтяных и газовых месторождений приходится исследовать совместное течение в пористой среде нескольких жидкостей, чаще всего воды, нефти и газа, представляющих собой обособленные фазы, не смешивающиеся между собой.

Формирование залежей происходит в результате оттеснения из пластов-коллекторов первоначально находившейся там воды. Поэтому вместе с нефтью и газом в коллекторах содержится некоторое количество (обычно 10–30% порового объема) так называемой погребенной воды. Кроме того, многие продуктивные пласты заполнены нефтью и газом лишь в верхней купольной части, а нижележащие зоны заполнены краевой водой. Самые верхние части нефтяных залежей содержат газ, образующий так называемые газовые шапки, которые могут как существовать изначально, так и появиться в процессе разработки залежи. Таким образом, даже в неразбуренном природном пласте может находиться несколько отдельных подвижных фаз. Двух- или трехфазное течение возникает практически всегда при разработке нефтяных месторождений, поскольку силы, движущие нефть, являются следствием упругости или гидродинамического напора газа или воды.

Рассмотрим здесь наиболее простое двухфазное течение, соответствующее вытеснению жидкости, первоначально заполнявшей поры, другой жидкостью, не смешивающейся с первой. Конкретно речь будет идти в основном о вытеснении нефти из пласта водой или газом.

На вытеснении нефти водой или газом основана технология ее извлечения из недр при разработке месторождений. Этот процесс является основным как при естественном водонапорном режиме (при вторжении в пласт краевой воды или газа газовой шапки, продвигающих нефть к забоям добывающих скважин), так и при так называемых вторичных методах добычи нефти – закачка вытесняющей жидкости или газа через систему нагнетательных скважин для поддержания давления в пласте и продвижения нефти к добывающим скважинам.

В случае одномерного течения несжимаемых несмешивающихся жидкостей в условиях, когда поверхностное натяжение между фазами невелико и можно пренебречь капиллярным давлением, а также влиянием силы тяжести, процесс вытеснения допускает простое математическое описание, впервые предложенное американскими исследователями С. Бакли и М. Леверетом (1942 г.). Это описание основано на введении понятия насыщенности, относительных фазовых проницаемостей и использовании обобщенного закона Дарси (см. гл. 1). Анализ одномерных течений позволяет выявить основные эффекты и характерные особенности совместной фильтрации двух жидкостей и сопоставить их с результатами лабораторных экспериментов.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ

Рассмотрим процесс вытеснения, происходящий в прямолинейном тонком горизонтальном образце (рис. 8.1), представленном однородной и изотропной пористой средой, т. е. его пористость m и проницаемость k постоянны. Координата x отсчитывается вдоль образца, направление течения – горизонтальное. Поперечное сечение образца (площадь сечения обозначим ω) предположим достаточно малым, так что давление и насыщенность можно считать постоянными по сечениям. Давление p в водяной и нефтяной фазах считаем одинаковым в силу пренебрежения капиллярным давлением, обе фазы несжимаемы, температура постоянна.

В рассматриваемый образец, первоначально заполненный нефтью, через сечение $x = 0$ закачивается вода. В процессе вытеснения образуется зона совместного движения воды и нефти. При совместном течении двух фаз в пористой среде по крайней мере одна из них образует связную систему, граничащую со скелетом породы и частично с другой жид-

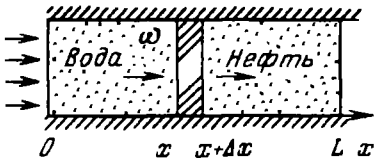


Рис. 8.1. Схема прямолинейно-параллельного вытеснения нефти водой

костью. Из-за избирательного смачивания твердой породы водой площадь контакта каждой из фаз со скелетом пористой среды значительно превышает площадь контакта фаз между собой. Это позволяет считать, что основной вклад в сопротивление движению дает взаимодействие каждого флюида с твердым скелетом пласта, и в первом приближении пренебречь эффектом увлечения одной жидкостью другой. При этом, естественно, сопротивление, испытываемое каждой фазой при совместной фильтрации, отлично от того, которое было бы при течении только одной из них. Опыты показывают, что расход каждой фазы растет с увеличением насыщенности и градиента давления.

Тогда закон фильтрации каждой фазы можно представить в виде обобщенного закона Дарси (1.20) в дифференциальной форме:

$$w_в = \frac{Q_в}{\omega} = -k\frac{k_в(s)\partial p}{\eta_в \partial x};$$

$$w_н = \frac{Q_н}{\omega} = -k\frac{k_н(s)}{\eta_н}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (8.1)$$

Здесь $w_в$, $Q_в$ и $w_н$, $Q_н$ – скорости фильтрации и объемные расходы соответственно воды и нефти; $\eta_в$, $\eta_н$ – коэффициенты динамической вязкости фаз; $k_в(s)$ и $k_н(s)$ – относительные фазовые проницаемости; $s \equiv s_в$ – водонасыщенность.

Для рассматриваемого двухфазного течения водо- и нефтенасыщенность $s_н$ связаны очевидным соотношением

$$s_в + s_н = 1. \qquad (8.2)$$

Для вывода уравнения неразрывности рассмотрим баланс каждой фазы как однородной жидкости (см. гл. 3), примененный к фиксированному элементарному макрообъему $\Delta V = \omega \Delta x$ (см. рис. 8.1), содержащему обе фазы. Если за некоторый промежуток времени Δt в объем ΔV втекает большее количество жидкости, чем вытекает, то она должна накапливаться в этом объеме, и ее насыщенность увеличивается (и наоборот). Исходя из этого и сформулируем закон сохранения массы каждой фазы.

Так, для воды изменение массы находим в направлении течения по оси x, помня, что ее плотность $\rho_в$ постоянна в силу предположения о несжимаемости. Через сечение с координатой x (см. рис. 8.1) за промежуток Δt втекает в объем ΔV масса воды $\rho_в \omega w_в(x, t)\Delta t$, а вытекает через сечение $x + \Delta x$ масса, равная $\rho_в \omega w_в(x + \Delta x, t)\Delta t$, так что изменение массы воды в объеме ΔV за время Δt равно:

$$\rho_в [w_в(x, t) - w_в(x + \Delta x, t)] \frac{\Delta V}{\Delta x} \Delta t,$$

где

$$\Delta V / \Delta x = \omega.$$

С другой стороны, это изменение массы должно быть сбаланси-

ровано за счет изменения во времени водонасыщенности в поровом объеме $m\Delta V$:

$$m\rho_в[s(x, t+\Delta t) - s(x, t)]\Delta V.$$

Приравняв два последних выражения, разделив обе части полученного равенства на $\rho_в \Delta V \Delta t$ и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, получим:

$$-\frac{\partial w_в}{\partial x} = m\frac{\partial s}{\partial t} \text{ или } m\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w_в}{\partial x} = 0. \tag{8.3}$$

Аналогично выводится уравнение сохранения массы нефти:

$$m\frac{\partial s_н}{\partial t} + \frac{\partial w_н}{\partial x} = 0, \tag{8.4}$$

которое в силу (8.2) можно представить в виде

$$-m\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial w_н}{\partial x} = 0. \tag{8.5}$$

Сложив уравнения неразрывности (8.3) и (8.5) для обеих фаз, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_в + w_н) = 0, \tag{8.6}$$

откуда найдем первый интеграл:

$$w_в + w_н = w(t) \text{ или } Q_в + Q_н = Q(t). \tag{8.7}$$

Равенства (8.6) или (8.7) показывают, что суммарная скорость w двухфазного потока (а значит, и суммарный расход фаз $Q(t)$ не зависит от координаты x, т.е. является либо постоянной величиной, либо известной функцией времени. Это – следствие предположения о несжимаемости фаз.

Уравнения (8.1), (8.3), (8.5) или (8.7) полностью описывают процесс вытеснения и позволяют определить неизвестные функции $s(x, t)$, $w_в(x, t)$, $w_н(x, t)$ и $p(x, t)$. Покажем, что, исключив другие зависимые переменные, можно вывести уравнение, которое содержит только водонасыщенность s.

Исключим градиент давления $\partial p/\partial x$, поделив почленно одно на другое уравнения (8.1):

$$\frac{w_в}{w_н} = \frac{Q_в}{Q_н} = \frac{k_в(s)}{\eta_0 k_н(s)}, \tag{8.8}$$

где введено обозначение $\eta_0 = \eta_в/\eta_н$.

Применив к (8.8) правило производных пропорций и использовав (8.7), получим

$$\frac{w_в}{w(t)} = \frac{Q_в}{Q(t)} = \frac{k_в(s)}{k_в(s) + \eta_0 k_н(s)}.$$

Обозначив

$$f(s) = \frac{k_в(s)}{k_в(s) + \eta_0 k_н(s)}, \tag{8.9}$$

из предыдущего равенства найдем:

$$w_в = f(s)w(t) \text{ и } w_н = [1 - f(s)]w(t). \tag{8.10}$$

Введенная здесь функция насыщенности $f(s)$, называемая функцией распределения потоков фаз или функцией Бакли–Леверетта, имеет простой физический смысл. Из (8.10) следует, что $f(s)$, представляющая отношение скорости фильтрации (или расхода) вытесняющей фазы (воды) и суммарной скорости w (или расхода Q), равна объемной доле воды в суммарном потоке двух фаз. Функция $f(s)$, как мы убедимся в дальнейшем, играет важную роль при гидродинамических расчетах двухфазных потоков, определяет полноту вытеснения и характер распределения насыщенности по пласту. Задача повышения нефте- и газоконденсатоотдачи в значительной степени сводится к применению таких воздействий на пласт, которые в конечном счете изменяют вид $f(s)$ в направлении увеличения полноты вытеснения.

Как видно из (8.9), функция $f(s)$ полностью определяется относительными фазовыми проницаемостями (см. гл. 1). Типичные графики $f(s)$ и ее производной $f'(s)$ приведены на рис. 8.2. С ростом водонасыщенности $f(s)$ монотонно возрастает от 0 до 1. Характерная особенность графика $f(s)$ – наличие точки перегиба $П$ с насыщенностью $s_п$, участков вогнутости и выпуклости, где вторая производная $f''(s)$ соответственно больше и меньше нуля. Эта особенность в большой степени определяет специфику фильтрационных задач вытеснения в рамках модели Бакли–Леверетта (по сравнению, например, с задачами распространения ударных волн в газовой динамике). Графики функций $f(s)$ и $f'(s)$ для различных отношений коэффициентов вязкости фаз $\eta_0 = \eta_в/\eta_н$ приведены на рис. 8.3.

Подставив теперь равенство (8.10) для $w_в$ в уравнение (8.3), получим

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + w(t)\frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0. \tag{8.11}$$

Поскольку насыщенность есть функция двух переменных $s = s(x, t)$, то, применяя правило дифференцирования сложной функции к слагаемому $\frac{\partial}{\partial t} f[s(x,t)]$, что дает

$$\frac{\partial f(s)}{\partial x} = \frac{df(s)}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = f'(s)\frac{\partial s}{\partial x},$$

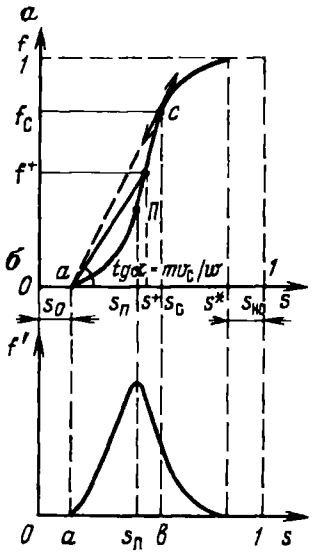


Рис. 8.2. Зависимость объемной доли вытесняющей фазы (воды) в потоке f (*а*) и ее производной (*б*) от насыщенности

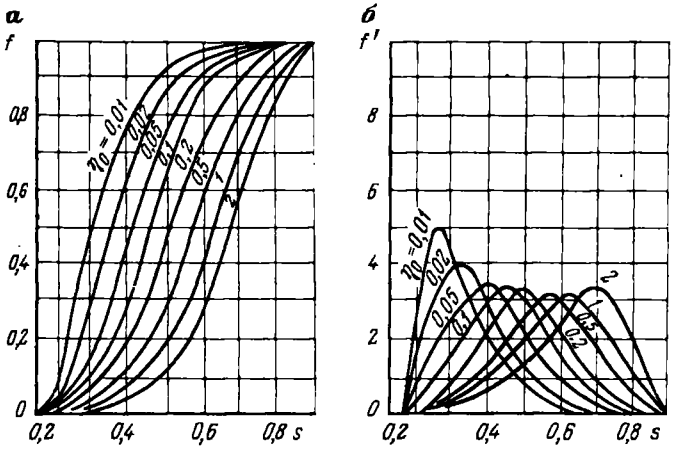


Рис. 8.3. Графики функции Бакли—Леверетта (*а*) и ее производной (*б*) для различных отношений коэффициентов вязкости $\eta_0 = \eta_в/\eta_н$

приведем окончательно (8.11) к уравнению

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + w(t)f'(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \tag{8.12}$$

которое является дифференциальным уравнением только относительно насыщенности. Изменение насыщенности во времени по пласту можно получить в результате решения уравнения (8.12) независимо от распределения давления $p(x,t)$. Это уравнение известно в литературе как уравнение Бакли–Леверетта по имени авторов, впервые его получивших.

Для нахождения распределения насыщенности к уравнению (8.12) нужно добавить начальное и граничное условия:

при $t = 0$ $s(x,0) = \varphi(x)$, $x > 0$;

при $x = 0$ $s(0,t) = \psi(t)$, $t > 0$. (8.13)

Первое из условий (8.13) означает, что в момент времени $t = 0$ (до начала процесса вытеснения) в пласте имеется некоторое известное распределение насыщенности s вытесняющей фазы, определяемое функцией $\varphi(x)$. Согласно второму условию (8.13), при $t > 0$ в пласт через нагнетательную галерею, расположенную на «линии» $x = 0$, закачивается вытесняющая жидкость (вода), насыщенность которой при $x = 0$ меняется со временем по заданному закону $\psi(t)$. В некоторых случаях можно считать, что

$\varphi(x) = s_0 = \text{const}$ при $t = 0$,

$\psi(t) = s_0 = \text{const}$ при $x = 0$. (8.14)

Это – случай кусочно-постоянных начальных данных, имеющий важное значение для практических приложений. Величина начальной водонасыщенности s_0 влияет на процесс заводнения и определяет структуру зоны вытеснения.

В дальнейшем для простоты будем считать суммарную скорость фильтрации $w(t)$ (а значит, и суммарный расход Q) постоянной величиной:

$w(t) = w = \text{const}$; $Q(t) = Q = \text{const}$.

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА

В процессе нагнетания воды в пласт ее насыщенность будет меняться со временем вдоль направления движения x. Связь между s, x и t можно записать в функциональной форме $s = s(x,t)$ или, что эквивалентно, в дифференциальной форме

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial t}dt. \tag{8.15}$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) такие линии $x(t)$, вдоль которых

насыщенность принимает заданное постоянное значение. Эти линии называют изосатами[1]. Тогда для любого заданного значения можно установить такую связь между x и t, что удовлетворяется уравнение $s = s(x, t) = \text{const}$ или эквивалентное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial t}dt = 0.$$

Таким образом, линия распространения заданной насыщенности, т. е. связь между x и t при фиксированном s, получается совместным решением уравнений (8.12) и (8.15) при $ds = 0$. Другими словами, следует совместно решить следующие два уравнения:

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + wf'(s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial s}{\partial t}dt + \frac{\partial s}{\partial x}dx = 0. \tag{8.16}$$

Решение системы уравнений (8.16) дает соотношение между x и t в дифференциальной форме.

Чтобы система однородных, линейных относительно $\partial s/dt$ и $\partial s/\partial x$ уравнений (8.16) имела отличное от нуля (или, как говорят, нетривиальное) решение, нужно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} m & wf'(s) \\ dt & dx \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{m}f'(s). \tag{8.17}$$

Напомним, что производная dx/dt вычисляется при постоянном значении s, т. е. $dx/dt = (\partial x/\partial t)_s$. Уравнение (8.17) можно проинтерпретировать следующим образом:

точка с постоянной насыщенностью s (на кривой $s(x)$) движется с постоянной скоростью, пропорциональной w/m, и является функцией самой насыщенности.

Поскольку правая часть (8.17) постоянна, то уравнение (8.17) можно проинтегрировать и найти положение x заданного значения насыщенности как функцию времени:

$$x(s) = \frac{w}{m}f'(s)t + x_0, \tag{8.18}$$

где x_0 – значения координат с начальной водонасыщенностью s_0 при $t = 0$. Поскольку f' и x_0 являются функциями s, то при помощи (8.18) можно построить полный профиль насыщенности в любой момент

[1] От английского saturation – насыщенность, т. е. линии постоянной насыщенности.

времени t, вычисляя x для различных значений x. Будем предполагать, что первоначально пласт был насыщен нефтью и содержал лишь связанную (неподвижную) воду, так что в условиях (8.14) имеем: $s^* \leqslant s^0 \leqslant 1$, а начальная водонасыщенность (s_0) такова, что $0 < s_0 \leqslant s_*$ и сосредоточена в момент $t = 0$ в сечении $x = 0$, т. е. $x_0 = 0$ в формуле (8.18).

При $t = 0$ все точки кривой $s(x)$, для которых s имеет значения, бóльшие s_* и меньшие $s^* = 1 - s_{но}$, где $s_{но}$ – остаточная нефтенасыщенность, начнут перемещаться в пласте, как следует из (8.17), со скоростями, пропорциональными $f'(s)$. Поэтому если известно $f'(s)$ для каждого значения s, то известна и скорость каждой точки движущейся кривой $s(x)$. Как видно из рис. 8.2, *б*, кривая $f'(s)$ – не монотонная функция, а имеет максимум в точке $П$. Это означает в соответствии с (8.17), что на движущейся кривой $s(x)$ некоторые промежуточные значения насыщенности будут перемещаться быстрее, чем значения насыщенности бóльшие или меньшие. И спустя определенный промежуток времени после начала вытеснения форма профиля насыщенности будет иметь вид, подобный графику $f'(s)$ на рис. 8.4. Из рисунка видно, что для любого значения x насыщенность становится неоднозначной (имеет три различных значения). Такое положение физически невозможно и, следовательно, начиная с этого момента времени, невозможно непосредственное применение уравнения (8.18). Это заставляет нас вспомнить, что уравнения, описывающие совместное течение воды и нефти, были получены при подразумеваемом предположении, что решение для профиля насыщенности – непрерывная и гладкая функция x и t. Поэтому дифференциальное уравнение (8.12) не применимо в области, где профиль насыщенности или тангенс угла его наклона (т. е. $\partial s/\partial x$) терпит разрыв или имеет скачок.

Введение скачка (или фронта) насыщенности (прямая AB на рис. 8.4) позволяет устранить многозначность решения. Положение скачка насыщенности определяется из условия материального баланса на скачке, так что площади сегментов, заштрихованные на рис. 8.4, равны.

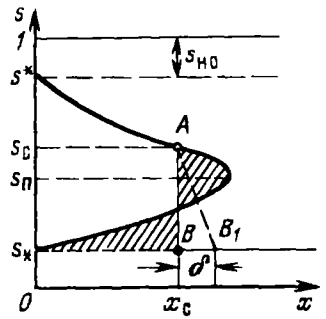


Рис. 8.4. Схематичный профиль насыщенности

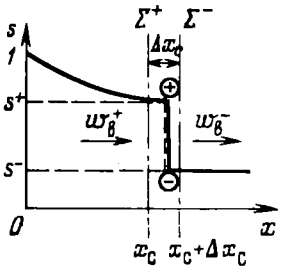


Рис. 8.5. Схема для составления материального баланса на фронте (скачке) насыщенности

Заметим, что в действительности введенный математический скачок насыщенности не имеет места, а возникает вследствие пренебрежения капиллярными силами. На самом деле существует некоторая конечная зона длиной δ (см. рис. 8.4), в которой насыщенность резко падает от значения s_c до s_* (вдоль кривой AB_1). Размеры этой зоны зависят от капиллярного давления и обычно малы по сравнению с возрастающей со временем зоной смеси x_c в пределах всего разрабатываемого пласта.

Несмотря на то, что дифференциальные уравнения (8.3) и (8.4), выражающие баланс массы каждой фазы, в точках введенного разрыва не имеют смысла, сам баланс, естественно, должен выполняться.

Условие на скачке насыщенности. Рассмотрим условия сохранения массы каждой из фаз при прохождении разрыва через некоторый элемент объема пористой среды (рис. 8.5), ограниченный двумя поверхностями Σ^+ и Σ^- по обе стороны от разрыва насыщенности (фронт).

Пусть в некоторый момент времени t фронт имел координату x_c, а через малый промежуток времени Δt переместился в положение $x_c + \Delta x_c$. При этом в элемент пласта длиной Δx_c войдет слева объем воды, равный $w_в^+ \omega \Delta t$, а выйдет объем $w_в^- \omega \Delta t$, т. е. объем воды увеличится на $(w_в^+ - w_в^-)\omega \Delta t$, где ω – площадь поперечного сечения пласта. Вследствие этого насыщенность увеличится от значения s^- до s^+, т. е. объем воды возрастет на величину

$$(s^+ - s^-) m \omega \Delta x_c .$$

Тогда закон сохранения массы воды (в предположении, что она несжимаема) дает:

$$(w_в^+ - w_в^-)\omega \Delta t = (s^+ - s^-) m \omega \Delta x_c ,$$

откуда следует

$$\frac{\Delta x_c}{\Delta t} = \frac{w_в^+ - w_в^-}{m(s^+ - s^-)}, \tag{8.19}$$

где знаки «–» и «+» соответствуют условиям непосредственно перед и после разрыва.

Уравнение сохранения массы для нефти приводит к тому же ра-

венству (8.19), поскольку суммарная скорость фильтрации (см. (8.7)) сохраняется:

$$w_в^+ + w_н^+ = w_в^- + w_н^-.$$

Перейдя в (8.19) к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ и использовав равенство (8.10), получим[1]:

$$\frac{dx_c}{dt} = v_c = \frac{w_в^+ - w_в^-}{m(s^+ - s^-)} = \frac{w}{m}\frac{f^+ - f^-}{s^+ - s^-}. \tag{8.20}$$

Здесь и далее индексом «с» обозначены величины, относящиеся к фронту (скачку) насыщенности, а $f^\pm = f(s^\pm)$. Выражение (8.20) задает скорость v_c распространения фронта насыщенности и известно как условие на скачке.

Равенство (8.20) имеет простой геометрический смысл: скорость скачка v_c пропорциональная тангенсу угла наклона к оси s секущей, соединяющей точки кривой $f(s)$, имеющие абсциссы s^+ и s^- (см. рис. 8.3, *а*; $s^- = s_*$), с коэффициентом пропорциональности w/m.

Если насыщенности по обе стороны фронта постоянны (в нашем случае $s^- = s_0$, $s^+ = s_c$, скачок насыщенности $\Delta s = s^+ - s^- = \text{const}$), то уравнение (8.20) можно проинтегрировать и найти положение фронта как функцию времени:

$$x_c = \frac{w}{m}\left(\frac{f^+ - f^-}{s^+ - s^-}\right)t + x_{c0}, \tag{8.21}$$

где x_{c0} – положение скачка при $t = 0$ (в нашем случае при постоянном начальном распределении насыщенности $x_{c0} = 0$).

Для фронтальной насыщенности s_c, как и для любого значения s, выполняется равенство (8.18). Если s_c не меняется со временем, то из (8.18) следует, что

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{w}{m}f'(s_c). \tag{8.22}$$

Кроме того, скорость скачка определяется равенством (8.20), в котором $s^+ = s_c$ и $s^- = s_0$. Приравняв правые части (8.20) и (8.22), получим уравнение для определения фронтальной насыщенности s_c:

$$f'(s_c) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}. \tag{8.23}$$

---

[1] При наличии разрыва можно осуществлять процедуру предельного перехода для Δx и Δt. Несмотря на то, что когда $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ $w_в^+$ не стремится к $w_в^-$, так же как и s^+ не стремится к s^-, предел правой части (8.19) существует и конечен.

Заметим, что $f(s_0) = 0$ при $0 < s_0 \leqslant s_*$.

Уравнение (8.23) означает, что в задаче Бакли–Леверетта скорость распространения скачка v_c равна скорости распространения фронтальной насыщенности $f'(s_c)$.

Это уравнение имеет простую геометрическую интерпретацию (см. рис. 8.2, *а*): оно представляет собой уравнение касательной, проведенной из точки $(s_0, f(s_0))$ к кривой $f(s)$, где s_c – абсцисса точки касания. Это дает простой графический способ определения фронтальной насыщенности по известной функции Бакли–Леверетта $f(s)$.

Таким образом, мы имеем две группы выражений: уравнения (8.17) и (8.18), которые можно использовать для расчета скорости и координаты данного значения насыщенности в области непрерывного профиля, и уравнения (8.20) и (8.21), при помощи которых можно найти скорость и положение скачка насыщенности.

Резюмируя сказанное, приведем простой способ графического построения профиля насыщенности, который состоит в следующем (см. рис. 8.2):

1) в соответствии с данными о фазовых проницаемостях флюидов по формуле (8.7) строится кривая Бакли–Леверетта $f(s)$;

2) из точки a на кривой $f(s)$, соответствующей начальной водонасыщенности s_0 в пласте $(0 < s_0 \leqslant s_*)$, проводится касательная к $f(s)$;

3) насыщенность в точке касания s_c есть насыщенность, которая устанавливается в пласте непосредственно за фронтом (т. е. s^+);

4) отрезок ab на рис. 8.2, *б* представляет величину скачка насыщенности $s_c - s_0$, которая не меняется со временем (стационарный скачок);

5) скорость перемещения постоянных насыщенностей, больших s_c, пропорциональна наклону касательной к $f(s)$ в соответствующей точке.

Расчет распределения насыщенности выполняется следующим образом.

1. Определяют насыщенность s_c на скачке (фронтальную насыщенность) из уравнения (8.23).

При численных расчетах s_c вместо решения уравнения (8.23) удобнее использовать другой (эквивалентный) способ, не требующий дифференцирования экспериментальной функции $f(s)$. За фронтальную насыщенность следует принять те значения s, которые обеспечивают максимум дроби:

$$\frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} = \max. \tag{8.24}$$

Условие (8.24) означает, что на скачке реализуется то значение насыщенности, которое обеспечивает ей наибольшую скорость. При расчетах на ЭВМ определить точку максимума проще, чем решать уравнение (8.23), где потребуется численное дифференцирование.

2. Зная s_c, из (8.21) ($s^+ = s_c$, $s^- = s_0$) определяют положение x_c скачка насыщенности.

3. По формуле (8.18) рассчитывают непрерывную ветвь профиля насыщенности при $s_c < s < s^*$ и $0 < x < x_c$.

§ 4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЯ БАКЛИ – ЛЕВЕРЕТТА

Решением Бакли – Леверетта широко пользуются в нефтяной и газовой промышленности для расчета эффективных фильтрационных характеристик вытеснения нефти водой или газом. Рассмотрим здесь некоторые примеры таких расчетов. При этом будем использовать полученный профиль насыщенности Бакли – Леверетта (рис. 8.6) для прямолинейно-параллельного вытеснения, предполагая, что постоянная начальная водонасыщенность s_0 мала и меняется в интервале $0 \leqslant s_0 \leqslant s_*$, так что $f(s_0) = 0$ и пласт имеет конечную протяженность L. При $t > 0$ через сечение $x = 0$ в пласт закачивается вода с известным расходом $Q_в$, которая вытесняет нефть с образованием зоны смеси. Фронт вытеснения x_c (скачок) продвигается с течением времени.

Тогда непрерывная ветвь профиля насыщенности в зоне смеси определяется соотношением (8.18) при $x_0 = 0$:

$$x(s) = \frac{w}{m} f'(s)\, t, \tag{8.25}$$

где насыщенность меняется монотонно от максимального значения s^+ на входе воды в пласт ($x = 0$) до минимального значения s_c на фронте вытеснения x_c (см. рис. 8.6). Положив в равенстве (8.25) $x = x_c$ и $s = s_c$, найдем положение фронта вытеснения x_c в любой момент времени t:

$$x_c = \frac{w}{m} f'(s_c)\, t. \tag{8.26}$$

Фронтальную насыщенность s_c находим из (8.23) при $f(s_0) = 0$:

$$(s_c - s_0) f'(s_c) = f(s_c). \tag{8.27}$$

В нефтяной зоне (перед скачком) водонасыщенность имеет постоян-

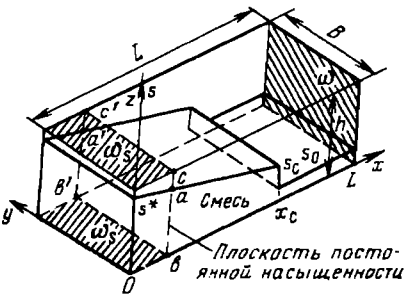


Рис. 8.6. Профили насыщенности при прямолинейно-параллельном вытеснении

ное значение s_0 (см. рис. 8.6). Постоянная $s^* = s_{max}$ определяется заданными функциями относительных фазовых проницаемостей; при этом $k_н(s^*) = 0$ (см. гл. 1).

Решения (8.25), (8.26) легко обобщить на случай, когда суммарная скорость фильтрации зависит от времени, т.е. $w = w(t)$. С этой целью, вспомнив, что равенство (8.17) справедливо и в этом случае, запишем его в виде

$$m\omega dx = f'(s)\,Q(t)\,dt = f'(s)\,dV, \tag{8.28}$$

где $\omega = Bh$; $Q(t)$ – суммарный расход фаз; $V(t)$ – объем закачанной воды к моменту времени t, так что

$$Q(t) = w(t)\omega = dV/dt. \tag{8.29}$$

Проинтегрировав (8.28) при условии $V(0) = 0$, найдем:

$$x(s) = \frac{V(t)}{m\omega} f'(s). \tag{8.30}$$

При этом равенство (8.26) принимает вид

$$x_c = \frac{V(t)}{m\omega} f'(s_c), \tag{8.31}$$

а соотношение (8.27) остается в силе и в этом случае.

4.1. Определение фронтальной насыщенности

Для простоты зададим относительные фазовые проницаемости в наиболее простом («модельном») виде

$$k_в(s) = s^2, \quad k_н(s) = (1 - s)^2, \tag{8.32}$$

соответствующем предположению, что $s_0 = 0$, $s^* = 1$. Этим фазовым проницаемостям отвечает, согласно (8.9), следующая функция Бакли–Леверетта:

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + \eta_0(1 - s)^2}, \tag{8.33}$$

а ее производная равна

$$f'(s) = \frac{2\eta_0 s(1 - s)}{[s^2 + \eta_0(1 - s)^2]^2}.$$

Подставив значения $f(s)$ и $f'(s)$ при $s = s_c$ в равенство (8.27) (при $s_0 = 0$), получим уравнение:

$$s_c^2 + \eta_0(1 - s_c)^2 = 2\eta_0(1 - s_c),$$

откуда находим:

$$s_c = \sqrt{\frac{\eta_0}{1+\eta_0}} = \sqrt{\frac{\eta_в}{\eta_в+\eta_н}},$$

$$\eta_0 = \eta_в/\eta_н. \qquad (8.34)$$

Формула (8.34) указывает на возрастание фронтальной насыщенности s_c с ростом отношения коэффициентов вязкости η_0. Полученный качественный результат остается справедливым и для любых эмпирических зависимостей $k_в(s)$ и $k_н(s)$.

Таким образом, эффективность вытеснения возрастает с ростом вязкости $\eta_в$ вытесняющей жидкости и уменьшением вязкости $\eta_н$ вытесняемой нефти. Например, применение пен и загустителей, повышающих вязкость воды, нагнетаемой в нефтяной пласт, может значительно повысить полноту вытеснения и увеличить нефтеотдачу.

4.2. Определение средней насыщенности в безводный период добычи

Важный показатель разработки месторождений – средняя водонасыщенность $\bar{s}$ в зоне смеси, определяемая как отношение объема воды, содержащейся в пласте к моменту времени t, к объему порового пространства в зоне смеси:

$$\bar{s} = s_0 + \frac{m\omega \int_0^{x_c} [s(x,t) - s_0]\,dx}{m\omega x_c} =$$

$$= s_0 + \frac{\int_0^{x_c} (s - s_0)\,dx}{x_c}, \qquad (8.35)$$

где $\omega = Bh$ (см. рис. 8.6).

Для вычисления интеграла в числителе правой части равенства (8.35) перейдем от интегрирования по переменной x к интегрированию по s, используя решение (8.25):

$$dx = \frac{W}{m} t f''(s)\,ds; \quad s = s^* \text{ при } x = 0,$$

$s = s_c$ при $x = x_c$

и тогда

$$\int_0^{x_c} (s - s_0)\,dx = \frac{W}{m} t \int_{s^*}^{s_c} (s - s_0) f''(s)\,ds.$$

Проинтегрировав теперь по частям и использовав условие (8.27), найдем:

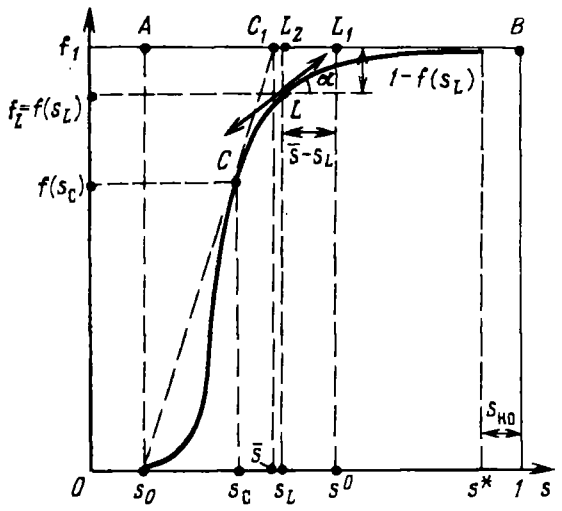


Рис. 8.7. Графическое определение средней насыщенности и коэффициента конечной нефтеотдачи

$$\int_0^{x_c}(s-s_0)\,dx=\frac{w}{m}t\left[(s-s_0)f'(s)\Big|_{s^*}^{s_c}-\int_{s^*}^{s_c}f'(s)\,ds\right]=\frac{w}{m}t\left[(s_c-s_0)f'(s_c)-\right.$$

$$\left.-f(s_c)+1\right]=\frac{w}{m}t,$$

где было учтено, что $f'(s^*)=0$ и $f(s^*)=1$ (см. рис. 8.2).

Подставив полученный результат в (8.35) и заменив x_c соотношением (8.26), окончательно найдем выражение для средней водонасыщенности в зоне смеси:

$$\bar{s}=s_0-\frac{1}{f'(s_c)}. \tag{8.36}$$

Равенство (8.36) имеет простой геометрический смысл: средняя насыщенность $\bar{s}$ есть абсцисса точки пересечения C_1 касательной к кривой $f(s)$, определяющей фронтальную насыщенность (рис. 8.7), с прямой $f=1$. Это дает способ графического определения s.

Для известных экспериментальных кривых относительных фазовых проницаемостей средняя насыщенность $\bar{s}$ обычно значительно меньше единицы. Поэтому, например в процессах вытеснения нефти водой, для достаточно полного извлечения нефти из пласта на единицу объема добытой нефти нужно затратить в несколько раз больше объемов воды.

Во многих случаях значения s_c и $\bar{s}$ достаточно близки (см. рис. 8.7). Это позволяет проводить приближенные расчеты, считая насыщенность в зоне смеси постоянной величиной, равной $\bar{s}$, и полагая функцию Бакли–Леверетта $f(s)$ равной $f(\bar{s})$. И. А. Чарным показано [81], что расчеты по теории двухфазной фильтрации и указанному упрощенному способу удовлетворительно согласуются между собой для случая прямолинейно-параллельного вытеснения. Введение эквивалентной насыщенности, часто применяемое в практических расчетах, позволяет свести расчет вытеснения с учетом фазовых проницаемостей к более простой схеме, приближающейся к схеме поршневого вытеснения (М. Д. Розенберг, А. А. Боксерман, А. К. Курбанов) [69].

4.3. Расчет средней насыщенности после прорыва воды

Формулы для расчета показателей вытеснения предопределяются особенностями распределения водонасыщенности по пласту и имеют различный вид для разных стадий вытеснения (до и после прорыва воды в добывающую галерею $x = L$, см. рис. 8.6). Выше была рассмотрена первая стадия вытеснения (до прорыва воды), когда в выходное сечение пласта поступает безводная нефть.

В момент прорыва воды t^0, т.е. подхода фронта к добывающей галерее, согласно (8.30) имеем (при $x = L$, $s = s_c$):

$$L = \frac{V(t^0)}{m\omega} f'(s_c), \tag{8.37}$$

откуда объем добытой нефти за безводный период

$$V(t^0) = \frac{m\omega L}{f'(s_c)}. \tag{8.38}$$

После прорыва воды (при $t > t^0$) вся область течения будет представлять собой зону смеси ($0 < x < L$), в которой водонасыщенность меняется от максимального значения s^* на входе до s_L ($s_L > s_c$) на выходной границе пласта. Величина s_L меняется со временем и находится из (8.30) при $x = L$ и $s = s_c$ как решение уравнения

$$f'(s_L) = \frac{m\omega L}{V(t)}, \quad t > t^0. \tag{8.39}$$

При этом через выходное сечение пласта поступает водонефтяная смесь в соотношении

$$F_{вн} = \frac{w_в(t)\omega}{w_н(t)\omega} = \frac{f(s_1)}{1 - f(s_1)}.$$

В этом случае средняя водонасыщенность определяется равенством (сравните с (8.35)!):

$$\bar{s}^0 = s_0 + \frac{\int_0^L (s - s_0)\,dx}{L}. \tag{8.40}$$

Выполнив вычисления, аналогичные приведенным в разд. 4.2, получим:

$$\bar{s}_0 = s_L + \frac{1 - f(s_L)}{f'(s_L)}, \quad t > t^0, \tag{8.41}$$

где s_L определяется из (8.39).

Равенство (8.41) допускает простое графическое толкование на плоскости (s, f), если вспомнить уравнение касательной к кривой в точке с заданными координатами. Действительно, представив (8.41) в виде

$$1 - f(s_L) = f'(s_L)(\bar{s}^0 - s_L),$$

можно видеть (см. рис. 8.7), что последнее равенство представляет собой уравнение прямой, касательной к кривой Бакли–Леверетта в точке L с координатами (s_L, f_L) и имеющей известный угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha = f'(s_L)$. А средняя насыщенность $\bar{s}^0$ после прорыва воды есть абсцисса точки пересечения L_1 этой касательной с прямой $f = 1$ (см. рис. 8.7).

4.4. Расчет коэффициента нефтеотдачи

Другая важная характеристика вытеснения – коэффициент газо- или нефтеотдачи, связанный со средней насыщенностью. На первой стадии вытеснения коэффициент безводной нефтеотдачи $E_н$ определяется как отношение вытесненного водой объема нефти от нагнетательной галереи до фронта к общему объему пор, занятых нефтью до начала вытеснения. Поскольку, в силу предположения о несжимаемости фаз, объем закачанной воды равен обему вытесненной нефти, то можно записать

$$E_н = \frac{m\omega \int_0^{x_c} (s - s_0)\,dx}{m\omega(1 - s_0)x_0}, \tag{8.42}$$

откуда после вычислений, аналогичных приведенным в разд. 4.2, получим:

$$E_н = [(1 - s_0)f'(s_c)]^{-1}. \tag{8.43}$$

Используя выражение (8.36) для средней насыщенности $\bar{s}$ в безводный период, равенство (8.43) можно представить в виде:

$$E_н = \frac{\bar{s} - s_0}{1 - s_0}. \tag{8.44}$$

Этот результат нетрудно получить и не проводя вычислений, а используя лишь определения (8.35) и (8.42).

Для модельных относительных фазовых проницаемостей (8.32) и соответствующей функции распределения фаз (8.33) формула (8.43) (при $s_0 = 0$) принимает особенно простой вид с учетом равенства (8.34):

$$E_н = 2\sqrt{\eta_0}(\sqrt{\eta_0 + 1} - \sqrt{\eta_0}),$$
$$\eta_0 = \eta_в/\eta_н. \qquad (8.45)$$

Из (8.45) следует, что коэффициент безводной нефтеотдачи увеличивается при увеличении вязкости вытесняющей фазы $\eta_в$ или при уменьшении вязкости вытесняемой фазы $\eta_н$.

После прорыва воды через добывающую галерею вводят понятие коэффициента конечной нефтеотдачи $E_н^0$ при заданной обводненности на выходе из пласта или после прокачки известного количества поровых объемов воды. Если процесс добычи прекращается, когда обводненность продукции на добывающей галерее равна f_L (например, $f_L = 0{,}95$), то соответствующая насыщенность s_L на выходе из пласта определится как абсцисса точки пересечения прямой $f = f_L$ с кривой $f(s)$ (см. рис. 8.7). А сама величина находится, очевидно, из следующего равенства:

$$E_н^0 = \frac{m\omega\int_0^L (s - s_0)\,dx}{m(1 - s_0)\omega L} = \frac{t_к\int_{s^*}^{s_L}(s - s_0)f''(s)\,ds}{(1 - s_0)L},$$

где время окончания добычи $t_к = mL/[wf'(s_L)]$.

Отсюда после вычислений получим результат

$$E_н^0 = \frac{s_L - s_0}{1 - s_0} + \frac{1 - f(s_L)}{(1 - s_0)f'(s_L)}, \qquad (8.46)$$

который в силу равенства (8.41) можно представить в виде, аналогичном (8.44):

$$E_н^0 = \frac{\bar{s}_0 - s_0}{1 - s_0}. \qquad (8.47)$$

Графический способ определения коэффициента конечной нефтеотдачи (8.46) понятен из рис. 8.7:

$$L_1L_2 = \frac{LL_2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - f(s_L)}{f'(s_L)},$$
$$AL_2 = s_L - s_0, \quad AB = 1 - s_0,$$
$$E_н^0 = \frac{AL_1}{AB}.$$

Если начальная водонасыщенность $s_0 = 0$, то $AB = 1$, и коэффициент конечной нефтеотдачи изображается отрезком AL_1 на рис. 8.7.

Полученные здесь простые формулы, вытекающие из точного решения задачи о вытеснении нефти (или газа) водой, применяются при оценочных инженерных расчетах основных технологических параметров разработки нефтегазовых месторождений с использованием процесса заводнения. Кроме того, они могут служить тестами при оценке точности численных методов решения более сложных задач двухфазной фильтрации с использованием ЭВМ.

§ 5.* РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ВЫТЕСНЕНИЯ ПРИ ЗАДАННОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦАХ ПЛАСТА

До сих пор рассматривались задачи вытеснения в предположении, что известна суммарная скорость фильтрации $w(t)$ (или расход) фаз. Технология процесса заводнения такова, что чаще бывает известен перепад давления Δp, под действием которого вода вытесняет нефть. Поэтому представляет интерес обобщить полученные результаты на этот случай и исследовать динамику обводнения продукции на примере прямолинейно-параллельного вытеснения (см. рис. 8.6).

Пусть в начальном сечении $x = 0$ и на выходе из пласта $x = L$ заданы давления $p_0(t)$ и $p_L(t)$, так что движущий перепад давления $\Delta p(t) = p_0(t) - p_L(t)$. Складывая почленно равенства (8.1) и используя (8.7), выразим градиент давления в зоне смеси:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\eta_в w(t)}{k\varphi(s)}, \tag{8.48}$$

где введено обозначение

$$\varphi(s) = k_в(s) + \eta_0 k_н(s), \quad \text{а} \quad \eta_0 = \eta_в/\eta_н. \tag{8.49}$$

Рассмотрим первую фазу вытеснения, когда фронт x_c не достиг входного сечения пласта ($x < L$, см. рис. 8.6). Тогда перепад давления в области, занятой смесью, после интегрирования уравнения (8.48) по зоне смеси, определится по формуле

$$\Delta p_{вн} = -\int_0^{x_c} \frac{\partial p}{\partial x} dx = p_0(t) - p_c(t) = \frac{\eta_в w}{k} \int_0^{x_c} \frac{dx}{\varphi(s)} = \frac{\eta_в w V(t)}{km\omega} \psi_c, \tag{8.50}$$

где ψ_c – постоянная величина, выражаемая интегралом:

$$\psi_c = \int_{s^*}^{s_c} \frac{f''(s)\,ds}{\varphi(s)}, \tag{8.51}$$

а техника преобразования второго интеграла в (8.50) к виду (8.51) такая же, как в разд. 4.2.

Перепад давления между фронтом и добывающей галереей $\Delta p_н$ находится в результате интегрирования уравнения (8.48) по области, занятой нефтью ($x_c < x < L$). При этом следует иметь в виду, что в этой области $k_в(s) = 0$, $\varphi(s) = \eta_0 k_н(s_0)$, где s_0 – постоянная начальная водонасыщенность. Тогда из (8.48) получаем

$$\Delta p_{н} = p_{c}(t) - p_{L}(t) = \frac{\eta_{н} w(L - x_{c})}{k k_{н}(s_{0})} = \frac{\eta_{н} w}{k k_{н}(s_{0})}\left[L - \frac{V}{m\omega} f'(s_{c})\right], \tag{8.52}$$

где было использовано равенство (8.31), заменившее x_{c}.

Складывая почленно соотношения (8.50) и (8.52) и учитывая (8.29), получаем:

$$\Delta p(t) = p_{0}(t) - p_{L}(t) = \frac{\eta_{в}}{k\omega}\frac{dV}{dt}\left[\psi_{c} - \frac{f'(s_{c})}{\eta_{0} k_{н}(s_{0})}\frac{V}{m\omega} + \frac{L}{\eta_{0} k_{н}(s_{0})}\right].$$

Разделив здесь переменные и проинтегрировав, окончательно найдем:

$$\frac{k}{\eta_{н}} k_{н}(s_{0})\omega \int_{0}^{t} \Delta p(t')\,dt' = LV + \frac{1}{2}\left[\eta_{0} k_{н}(s_{0})\psi_{c} - f'(s_{0})\right]\frac{V^{2}}{m\omega}, \tag{8.53}$$

где t^{0} – время прорыва воды, определяемое из (8.53) после подстановки $V = V(t^{0})$ согласно (8.38); t' – переменная интегрирования по времени.

Левая часть уравнения (8.53) известна, поскольку задан перепад давления. Тогда положительный корень этого квадратного уравнения определяет $V(t)$, а затем находят дебит $Q = dV/dt$ как функцию времени. Этими формулами можно пользоваться до момента прихода фронта x_{c} к конечному сечению пласта. На этой стадии в добывающую галерею поступает безводная нефть ($V = V_{н}$, $Q = Q_{н}$).

После прорыва воды ($x_{c} > L$, $t > t^{0}$) – вторая фаза вытеснения – следует интегрировать уравнение (8.48) по зоне смеси в интервале $0 < x < L$. В результате получится соотношение, аналогичное (8.50), где верхним пределом интегрирования в функции ψ (см. 8.51) нужно принять значение s_{L}, определяемое из (8.39). После замены $w(t)$ согласно (8.29) находим:

$$-\int_{0}^{L}\frac{\partial p}{\partial x}dx = p_{0}(t) - p_{L}(t) = \Delta p(t) = \frac{\eta_{в}}{km\omega^{2}}\frac{dV}{dt} V\psi_{L}, \tag{8.54}$$

где

$$\psi_{L} = \int_{s^{*}}^{s_{L}} \frac{f''(s)\,ds}{\varphi(s)}. \tag{8.55}$$

Заметим, что в отличие от (8.51) ψ_{L} не постоянна, а зависит от времени, поскольку насыщенность на выходе из пласта $s_{L} = s_{L}(t)$. Поэтому уравнение (8.54) нельзя сразу проинтегрировать, разделив переменные, как это было сделано раньше.

Чтобы обойти эту трудность, сделаем замену переменных, перейдя в (8.55) от s к новой переменной F:

$$F = f'(s),$$

так что $f''(s)\,ds = dF$, $\varphi(s) = \bar{\varphi}(F)$, $F = 0$ при $F = f''(s_{L}) = F_{L}(t)$.

Тогда (8.55) принимает вид

$$\psi_L = \psi(F_L) = \int_0^{F_L} \frac{dF}{\bar{\varphi}(F)}. \tag{8.56}$$

Из равенства (8.39) находим:

$$V(t) = \frac{m\omega L}{f'(s_L)} = \frac{m\omega L}{F_L(t)}, \tag{8.57}$$

тогда

$$V\frac{dV}{dt} = -\frac{(m\omega L)^2}{F_L^3}\frac{dF_L}{dt}. \tag{8.58}$$

Подставив (8.56) и (8.58) в уравнение (8.54), получим:

$$\Delta p(t) = -\frac{m\eta_в L^2}{k}\frac{\psi(F_L)}{F_L^3}\frac{dF_L}{dt}. \tag{8.59}$$

Полученное уравнение интегрируется при начальном условии

$F_L = F_c = f'(s_c)$ при $t = t^0$,

которое следует из (8.37). В результате интегрирования получим зависимость $F_L(t)$ в неявном виде:

$$\int_{t^0}^{t} \Delta p(t')\,dt' = -\frac{m\eta_в L^2}{k}\int_{F_c}^{F_L}\frac{\psi(F)}{F^3}dF, \quad t > t^0. \tag{8.60}$$

По зависимости $F_L(t)$ можно рассчитать все необходимые показатели процесса вытеснения во второй стадии. Объем закачанной в пласт воды находится из (8.57), а из (8.59) и (8.56) получаем расчетную формулу суммарного дебита галереи:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{k}{\eta_в}\omega\frac{\Delta p(t)}{L}\frac{F_L}{\psi(F_L)}. \tag{8.61}$$

Расчеты по формулам (8.53) и (8.60) не вызывают принципиальных затруднений и связаны только с численным или графическим выполнением квадратур (8.51), (8.56) и вычислением интеграла $\int_0^t \Delta p(t')\,dt'$.

§ 6. ЛАБОРАТОРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРОЦЕСС ВЫТЕСНЕНИЯ

Решения, рассмотренные в предыдущих параграфах, позволяют рассчитать показатели процесса вытеснения, если известны функция Бакли–Леверетта $f(s)$ и ее производная $f'(s)$, которые, в свою очередь, определяются относительными фазовыми проницаемостями $k_в(s)$ и $k_н(s)$.

Можно поставить и обратную задачу: используя те же решения, определить вид функции $f(s)$ или относительных фа-

зовых проницаемостей по экспериментальным данным, полученным при вытеснении нефти водой в линейном образце пористой среды. Методика таких экспериментов и соответствующие расчетные формулы были предложены Г. Уэлджем [33], Д. А. Эфросом [90] и другими исследователями.

6.1. Нахождение вида функции $f(s)$ по интегральным характеристикам, измеренным в экспериментах

Для решения этой задачи ставится лабораторный эксперимент по вытеснению нефти водой из образца пористой среды длиной L, насыщенного нефтью с начальной постоянной водонасыщенностью s_0 ($0 \leqslant s_0 \leqslant s_*$). Базисными формулами для обработки результатов эксперимента служат соотношения (8.41) и (8.47). Последовательность измерений и вычислений следующая.

1. В каждый момент времени (с определенным интервалом) измеряются расходы нефти и воды ($Q_н$ и $Q_в$). По ним определяется текущее значение функции f, соответствующее насыщенности s_L в выходном сечении:

$$f(s_L) = \frac{Q_в}{Q_в + Q_н} = \frac{Q_в}{Q(t)}.$$

2. Измеряют текущий коэффициент нефтеотдачи $E_н^0$ как долю вытесненной нефти от первоначального ее содержания в пористой среде. А затем по формуле (8.47) определяют среднюю насыщенность $\bar{s}^0$ в любой момент времени:

$$\bar{s}^0 = (1 - s_0) E_н^0 + s_0.$$

3. После этого по формуле (8.41) с учетом (8.39) находят значение s_L, соответствующее данному f:

$$s_L = \bar{s}^0 - \frac{V(t)}{m\omega L}[1 - f(s_L)], \tag{8.62}$$

где $V(t)$ – объем воды, закачанной в образец к моменту времени t.

По формуле (8.62) получают таблицу значений s, $f(s)$, при помощи которой и строится функция распределения фаз $f(s)$.

6.2.* Определение относительных фазовых проницаемостей

Метод Уэлджа нахождения отношения фазовых проницаемостей $k_н(s)/k_в(s)$ по экспериментальной зависимости объема вытесненной нефти от общего объема закачанной воды изложен в книге Р. Коллинза [33].

Рассмотрим здесь идею методики Д. А. Эфроса [90], позволяющей находить сами относительные фазовые проницаемости по данным о вытеснении, используя формулы, полученные в § 5.

При прямолинейно-параллельном вытеснении после прорыва воды перепад давления Δp выражается формулой (8.54), которую можно переписать в виде

$$\frac{km\omega}{\eta_в}\Delta p(t) = w(t)V(t)\psi_L. \tag{8.63}$$

Здесь было использовано равенство (8.29) для dV/dt, а функция ψ_L, определяемая соотношениями (8.55) и (8.56), после использования определений (8.9) и (8.49) может быть представлена в виде

$$\psi_L = \int_0^{F_L} \frac{f}{k_в} dF, \tag{8.64}$$

где $F = f'(s)$; $F_L = f'(s_L)$; f – функция Бакли Леверетта; $k_в$ – относительная проницаемость для воды.

Введя теперь безразмерный параметр

$$\Pi(t) = \frac{k\Delta p(t)}{\eta_в w(t) L}$$

и используя (8.39), представим формулу (8.63) с учетом (8.64) в виде

$$m\omega L = \frac{\Pi(t)}{V(t)} = \int_0^{m\omega L/V(t)} \frac{f}{k_в} dF. \tag{8.65}$$

Продифференцировав обе части равенства (8.65) по V, получим[1]:

$$m\omega L = \frac{V\dfrac{d\Pi}{dV} - \Pi}{V^2} = \frac{f(s_L)}{k_в(s_L)}\left(-\frac{m\omega L}{V^2}\right),$$

откуда находим для $k_в(s_L)$:

$$k_в(s_L) = \frac{f(s_L)}{\Pi - V\dfrac{d\Pi}{dV}}. \tag{8.66}$$

Все величины, входящие в правую часть (8.66), можно вычислить по результатам измерений перепада давлений и интегральных характеристик вытеснения в каждый момент времени (суммарной скорости w или расхода Q фаз, объема закачанной воды V).

Формула (8.66) ставит в соответствие каждому значению насыщенности s_L на выходе из образца значения относительной фазовой проницаемости для воды.

---

[1] Внимание! Производная правой части равенства (8.65) вычисляется по формуле производной от интеграла с переменным верхним пределом.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какой физический смысл имеет функция распределения потоков фаз $f(s)$?

2. Каковы причины возникновения скачка насыщенности при вытеснении нефти водой?

3. Как определяются фронтальная насыщенность и положение скачка?

4. Дайте геометрическую интерпретацию средней водонасыщенности.

5. Что такое коэффициенты безводной и текущей нефтеотдачи и как они определяются?

6.* Как по данным лабораторного эксперимента можно определить относительные фазовые проницаемости и функцию Бакли – Леверетта?

7. Определить время безводной эксплуатации пласта при прямолинейно-параллельном вытеснении нефти водой.

8.* Используя решение задачи Бакли – Леверетта, построить график зависимости $V_н = f(V)$, где $V_н$ – общее количество нефти, вытесненной к данному моменту из пласта; V – общее количество закачанной жидкости к этому моменту времени.

Исследовать наклон этой кривой после прорыва воды в зависимости от отношения вязкостей $\eta_в/\eta_н$.

9.* Доказать, что уравнение (8.23) для определения фронтальной насыщенности s_c эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{f(s)}{s-s_0}\right]_{s=s_c} = 0.$$

Вывести зависимость s_c от отношения вязкостей

$\eta_0 = \eta_в/\eta_н$.

10.* Задав относительные фазовые проницаемости в виде $k_в = s^2$, $k_н = (1-s)^2$,

определить, какой должна быть вязкость пластовой нефти, чтобы при вытеснении ее водой коэффициент безводной нефтеотдачи был не ниже чем 66,7% (это почти вдвое больше, чем в среднем по стране).

Вязкость воды принять равной $\eta_в = 10^{-3}$ Па·с.

11. Вывести уравнение Бакли – Леверетта для плоскорадиального вытеснения нефти водой. Показать, что непрерывная ветвь профиля насыщенности находится в этом случае из уравнения

$$r^2(s) = \frac{Qt}{\pi m h} f'(s) + r_0^2$$

(сравните с формулой (8.18)!).

Глава 9

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ

§ 1. СВЯЗЬ С ПРОБЛЕМОЙ НЕФТЕГАЗОКОНДЕНСАТОТДАЧИ ПЛАСТОВ

Необходимость решения проблем совершенствования методов заводнения, изыскания и применения новых высокоэффективных вытесняющих агентов, рациональной разработки нефтегазоконденсатных залежей и залежей летучих нефтей и т. д. ставит новые газогидродинамические задачи, связанные с прогнозированием показателей разработки месторождений в этих условиях.

Жидкости и газы, насыщающие нефтегазоконденсатные пласты, представляют собой смеси углеводородных, а также неуглеводородных компонентов, некоторые из которых способны растворяться в углеводородных смесях. При определенных режимах разработки нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений в пласте возникает многофазное течение сложной многокомпонентной смеси, при котором между движущимися с различными скоростями фазами осуществляется интенсивный массообмен. Переход отдельных компонентов из одной фазы в другую влечет за собой изменение составов и физических свойств фильтрующихся фаз. Такие процессы происходят, например, при движении газированной нефти и вытеснении ее водой или газом, при разработке месторождений сложного компонентного состава (в частности, с большим содержанием неуглеводородных компонентов), при вытеснении нефти оторочками активной примеси (полимерными, щелочными и мицеллярными растворами; различными жидкими и газообразными растворителями). Основой для расчета таких процессов служит теория многофазной многокомпонентной фильтрации, интенсивно развивающаяся в последние годы. Вместе с тем заметим, что область ее применения шире, чем здесь указано, и эта теория имеет важное общенаучное значение.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Углеводородные системы могут быть гомо- и гетерогенными. В гомогенной системе все ее части имеют одинаковые физические и химические свойства. Составляющие гомогенной системы (называемые компонентами) «размазаны» по всему пространству и взаимодействуют на молекулярном уровне. Для гетерогенной системы физические и химические свойства в разных точках различны. Гетерогенные системы состоят из фаз. Фаза – это часть системы, которая является гомогенной и отделена от других фаз отчетливыми границами. Смесь воды, нефти и газа в пласте – типичный пример гетерогенной среды.

При изучении сложных фильтрационных процессов возникает необходимость построения моделей многофазных (гетерогенных) систем, в которых каждая фаза, в свою очередь, моделируется многокомпонентной гомогенной смесью. При этом между компонентами возможны химические реакции, переход компонентов из одной фазы в другую, процессы адсорбции, диффузии и др.

Разделение движущейся смеси на фазы или объединение компонентов в фазы производится разными способами в зависимости от конкретной задачи и целей исследования.

Эффективный способ описания таких систем – макроскопический подход, основанный на физических законах сохранения для каждой отдельной фазы с учетом дополнительных членов, описывающих межфазные взаимодействия. Для их задания привлекаются различные соображения, почерпнутые из опыта.

При определении характеристик многофазного течения будем предполагать, что существует элементарный макрообъем ΔV, по которому проводится усреднение, такой, что его линейный размер достаточно велик по сравнению с характерным размером частиц данной формы в порах и намного меньше характерного масштаба исследуемого процесса (например, расстояния между скважинами или между нагнетательной и добывающей галереей).

Для каждого элементарного макрообъема, отождествляемого с точкой насыщенной пористой среды, определяются характеристики фильтрации многофазной жидкости как средние по рассматриваемому объему.

Средняя приведенная плотность ρ_i i-й фазы вводится равенством

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M_i}{\Delta V} \qquad (i = \overline{0, n}), \tag{9.1}$$

так что плотность смеси

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} \rho_i,$$

где ΔM_i – масса i-й фазы в элементарном объеме ΔV смеси (включающем и твердый скелет) в присутствии других фаз; индекс $i = 0$ соответствует твердому скелету породы.

Главными характеристиками многофазного течения служат насыщенность s_i и скорость фильтрации $\vec{w}_i$ каждой фазы (см. гл. 1).

Помимо средних плотностей ρ_i при описании гетерогенных систем необходимо вводить также истинные плотности фазы ρ_i^0, определяемые как масса i-й фазы в единице порового объема, занятого этой фазой:

$$\rho_i^0 = \Delta M_i / \Delta V_i,$$

откуда с учетом (9.1), определений насыщенности s_i и пористости m (см. гл. 1) получаем соотношение

$$\rho_i^0 = \rho_i / (m s_i). \tag{9.2}$$

Истинные плотности ρ_i^0 входят в термодинамические соотношения и, в частности, в уравнение состояния.

Скорость фильтрации $\vec{w}_i$ связана с действительной средней скоростью $\vec{v}_i$ фазы очевидным соотношением: $w_i = ms_i \vec{v}_i$, $i = 1, n$.

Характерные особенности многофазной фильтрации связаны также с влиянием поверхностного натяжения на границе раздела фаз. Граница двух соседних фаз в пористой среде разбивается на множество искривленных участков, радиус кривизны которых сопоставим с размером пор. Как отмечалось в гл. 1, на межфазной границе возникает капиллярный скачок давления $p_к$, определяемый по формуле Лапласа,

$$p_к = p_2 - p_1 = \alpha_п(1/R_1 + 1/R_2), \tag{9.3}$$

где $\alpha_п$ – коэффициент межфазного натяжения; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности раздела фаз в данной точке; давление p_i ($i = 1, 2$) в каждой фазе, образующей связную область, понимается как величина, усредненная по элементарному макрообъему.

Капиллярное давление, пропорциональное кривизне межфазной границы, согласно (9.3) зависит от структуры порового пространства и от преимущественной смачиваемости скелета породы каждой из фаз. Капиллярные силы, способные создать в поровых каналах достаточно большие градиенты давления по сравнению с внешним перепадом, полностью определяют распределение фаз в поровых каналах. Давление в фазе, менее смачивающей породу (p_2), в формуле (9.3) будет больше на значение капиллярного давления.

При медленной совместной фильтрации можно предположить [7], что при данной насыщенности жидкости распределены так же, как и в условиях гидростатического равновесия. Это – один из постулатов теории многофазной фильтрации.

Он означает, что при совместном течении жидкостей:

1) разность давлений в двух фазах $p_2 - p_1$ равна капиллярному давлению $p_к$, которое считается известной экспериментальной функцией насыщенности, т. е.

$$p_2 - p_1 = p_к(s) = \alpha_п \cos\theta \sqrt{m/k}\, J(s), \tag{9.4}$$

где θ – статический краевой угол смачивания между жидкостями и породой (интегральная характеристика смачиваемости в системе жидкость – пористая среда); $J(s)$ – безразмерная функция Леверетта, характерный вид которой показан ниже (см. рис. 9.18);

2) капиллярные и гидромеханические силы влияют на распределение фаз в порах;

3) гидравлические сопротивления, а следовательно, относительные проницаемости каждой из фаз являются однозначно определенными функциями насыщенности;

4) закон движения каждой из фаз формулируется как обобщенный закон Дарси (см. разд. 8.1).

Процессы многофазной фильтрации идут по-разному, в зависимости от характерного времени фильтрационного процесса и от размеров области течения. Капиллярные силы создают в пористой среде перепад давления, величина которого ограничена и не зависит от размеров области фильтрации. Вместе с тем, перепад внешнего давления, создающего фильтрационный поток между двумя точками, пропорционален скорости фильтрации и расстоянию между этими точками. Если размеры области малы, то при достаточно малых скоростях фильтрации капиллярные силы могут превзойти внешний перепад давления.

Напротив, если рассчитывается движение в очень большой области (например, в целой нефтяной или газовой залежи), то влияние капиллярных сил на распределение давления незначительно и их действия сказываются через локальные процессы перераспределения фаз. Взаимное торможение фаз, благодаря которому относительные фазовые проницаемости не равны соответствующим насыщенностям, обусловлено, прежде всего, капиллярными эффектами. В тех случаях, когда можно пренебречь капиллярным скачком $p_к(s)$, капиллярность косвенно учитывается самим видом опытных кривых относительных фазовых проницаемостей $k_i(s)$.

Количественные оценки влияния поверхностного натяжения, а также силы тяжести на процесс вытеснения будут приведены в дальнейшем.

Таким образом, при описании многофазной фильтрации увеличивается число параметров, подлежащих определению. Наряду с неизвестными давлениями p_i в фазах и скоростями фильтрации фаз $\vec{w}_i$ появляются новые неизвестные – насыщенности s_i. Это соответственно усложняет теоретическое исследование.

§ 3. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим совместное изотермическое течение нескольких фаз в однородной недеформируемой пористой среде без фазовых переходов и химических реакций. Математическое описание такой системы опирается на представления, введенные в § 2, и строится на основе уравнений неразрывности для каждой фазы, уравнений движения (закона фильтрации) и соответствующих замыкающих соотношений.

Уравнения сохранения массы для каждой i-й фазы выводятся аналогично тому, как уравнение неразрывности для однофазного течения (см. также § 2 гл. 8), и имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_i^0 s_i) + \operatorname{div}(\rho_i^0 \vec{w}_i) = 0, \tag{9.5}$$

где ρ_i^0 – истинные плотности фаз, определяемые по (9.2).

В дальнейшем мы ограничимся, в основном, исследованием двухфазной фильтрации как наиболее разработанной области и имеющей важные практические приложения. В этом случае, обозначив $s_1 \equiv s$ – насыщенность более смачивающей фазы, так что $s_2 = 1 - s$, из (9.5) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1^0 s) + \operatorname{div}(\rho_1^0 \vec{w}_1) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[m\rho_2^0(1-s)] + \operatorname{div}(\rho_2^0 \vec{w}_2) = 0. \tag{9.6}$$

В случае, если вытесняемая и вытесняющая фазы – упругие жидкости, то влиянием сжимаемости на распределение насыщенности часто можно пренебречь [7]. Действительно, характерное время нестационарного перераспределения давления за счет сжимаемости имеет порядок $t_1 = L^2/\varkappa$, где $\varkappa$ – коэффициент пьезопроводности; L – характерный размер пласта. Характерное время вытеснения имеет порядок $t_2 = L/w$, где w – средняя скорость фильтрации. Обычно скорость фильтрации $w \sim 10^{-5}$ м/с, $L \sim 10^2 \div 10^3$ м, а $\varkappa \sim 1$ м^2/с. Поэтому отношение времен $t_1/t_2 = wL/\varkappa \sim 10^{-2}$, откуда следует, что нестационарные процессы упругого перераспределения давления заканчиваются в начале процесса вытеснения. В некоторых случаях можно считать несжимаемым и газ в пластовых условиях.

Если жидкости и пористую среду можно предполагать несжимаемыми, то вместо уравнений (9.6) имеем соотношения

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0,$$

$$-m\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0, \tag{9.7}$$

обобщающие (8.3)–(8.4) на случай пространственных течений.

Для каждой фазы считается справедливым обобщенный закон Дарси

$$\vec{w}_i = -\frac{k}{\eta_i} k_i(s)(\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \tag{9.8}$$

где k – абсолютная проницаемость пласта; η_i – коэффициент динамической вязкости фаз; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения; связь между давлениями в фазах p_1 и p_2 определяется равенством (9.4).

Для замыкания полученной системы уравнений необходимо задать связи параметров, характеризующих свойства фаз и пористой среды, с давлением. При изотермических условиях фильтрации средняя истинная плотность и коэффициент вязкости каждой из фаз определяются давлением в данной фазе:

$$\rho_i^0 = \rho_i^0(p_i);\ \eta_i = \eta_i(p_i),\ i = 1, 2. \tag{9.9}$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (9.4), (9.6), (9.8), (9.9) для определения всех неизвестных функций: насыщенности s, давлений p_i, скоростей фильтрации $\vec{w}_i$, а также плотностей ρ_i^0 и вязкостей η_i фаз. В случае несжимаемых жидкостей и твердого скелета эта система состоит из (9.4), (9.7), (9.8).

При изучении трехфазной фильтрации (см. § 9) уравнения нераз-

рывности в форме (9.5) (где $i = 1, 2, 3$) дополняются законом фильтрации (9.8), в котором относительные фазовые проницаемости зависят от насыщенностей двух фаз, т. е. $k_i = k_i\ (s_1,\ s_2)$, а соотношение (9.4) записывается в виде

$$p_i - p_j = p_к^{ij}(s_1,\ s_2),\ i \neq j = 1,\ 2,\ 3.$$

Подробнее об этом изложено в § 9.

В полученных системах уравнений учтены сжимаемость флюидов, неполнота вытеснения, капиллярные и гравитационные эффекты. В практических расчетах одновременный учет всех этих эффектов почти никогда не является необходимым. Влияние и значимость некоторых из них проанализируем в дальнейшем на примере одномерных двухфазных потоков.

Ограничения в применении полученной системы уравнений связаны, в основном, с влиянием неоднородности и анизотропии пористой среды и неравновесными процессами.

§ 4.* ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим одномерные течения двух несжимаемых жидкостей в недеформируемой однородной пористой среде. Остальные предположения остаются прежними. Покажем, что в этом случае выведенная в § 3 система уравнений может быть сведена к одному уравнению для насыщенности и является обобщением (8.11). Знание распределения насыщенности в пласте позволит проанализировать эффективность вытеснения нефти (или газа) несмешивающейся с ней жидкостью.

4.1. Прямолинейно-параллельное течение

Пусть совместное течение двух жидкостей происходит в направлении оси x, наклоненной к горизонту под углом α (рис. 9.1). Тогда уравнения неразрывности для фаз (9.7) имеют вид (8.3)–(8.5):

$$-m\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial x};\ m\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \tag{9.10}$$

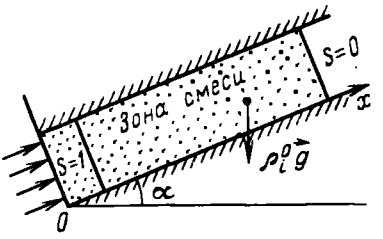


Рис. 9.1. Одномерная схема двухфазной фильтрации с учетом силы тяжести

а обобщенный закон Дарси (9.8) сводится к соотношениям

$$w_i = -M_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial x} + \rho_i^0 g \sin\alpha\right),\ i = 1, 2, \tag{9.11}$$

где для удобства введена функция насыщенности

$$M_i = \frac{k}{\eta_i} k_i(s),\ i = 1, 2, \tag{9.12}$$

называемая подвижностью фазы.

Неизвестные характеристики течения s, w_1, w_2, p_1 и p_2 зависят от координаты x и времени t.

Из (9.10), как и ранее (см. 8.7), находим:

$$w_1 + w_2 = w(t). \tag{9.13}$$

Подставив в (9.13) значения скоростей фаз w_1 и w_2, из (9.11) получим:

$$-w(t) = M_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} +$$
$$+ (M_1\rho_1^0 + M_2\rho_2^0) g \sin\alpha.$$

Исключив отсюда градиент давления $\partial p_2/\partial x$ при помощи равенства (9.4), продифференцированного по x,

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_к(s)}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + p_к' \frac{\partial s}{\partial x},$$
$$p_к' = dp_к/ds,$$

получим после преобразований:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{w(t) + M_2 p_к' \dfrac{\partial s}{\partial x} + (M_1\rho_1^0 + M_2\rho_2^0) g \sin\alpha}{M_1 + M_2}.$$

Подставив это равенство в уравнение (9.11) при $i = 1$, получим

$$w_1 = \left[w(t) + M_2\left(p_к' \frac{\partial s}{\partial x} + \Delta\rho g \sin\alpha\right)\right] f(s), \tag{9.14}$$

где $\Delta\rho = \rho_2^0 - \rho_1^0$; $f(s)$ – известная функция Бакли – Леверетта, определенная равенством (8.9).

Использовав теперь выражение (9.14) и уравнение неразрывности (9.10) для первой фазы, окончательно получим уравнение для определения насыщенности

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + w(t) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[M_2(s)\left(p_к' \frac{\partial s}{\partial x} + \Delta\rho\, g \sin\alpha\right) f(s)\right] = 0. \tag{9.15}$$

Это уравнение известно в литературе как уравнение Рапопор-

та – Лиса по именам американских исследователей, получивших его в 1953 г.

Будем считать для простоты, что суммарная скорость фильтрации w не зависит от времени, т. е. $w(t) = w = \text{const}$. Тогда, введя для удобства дальнейшего анализа безразмерные независимые переменные по формулам [1]

$$\xi = x/L, \ \tau = wt/(mL) \tag{9.16}$$

и использовав выражение (9.4) для капиллярного давления $p_к(s)$ и равенства (9.12), приведем уравнение (9.15) к безразмерной форме:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + [f'(s) + N_g G'(s)]\frac{\partial s}{\partial \xi} + N_c \frac{\partial}{\partial \xi}\left[C(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\right] = 0. \tag{9.17}$$

Здесь штрихом обозначена производная соответствующих функций по s и введены следующие обозначения:

$$G(s) = k_2(s)f(s), \ C(s) = G(s)J'(s) \tag{9.18}$$

– гравитационная и капиллярная функции соответственно;

$$N_g = \frac{k\Delta\rho g \sin\alpha}{\eta_2 w}, \ N_c = \frac{\alpha_п \cos\theta\sqrt{mk}}{\eta_2 wL} \tag{9.19}$$

– безразмерные параметры, характеризующие влияние силы тяжести и капиллярного давления соответственно.

4.2. Плоскорадиальное вытеснение

При закачке в пласт вытесняющей жидкости (фаза 1) через одиночную скважину задача становится осесимметричной. В этом случае, представив операторы «дивергенции» и «градиента» в полярных координатах (см. прил. 6), из уравнений (9.7) и (9.8) получим соответственно:

$$-m\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_1); \ m\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_2); \tag{9.20}$$

$$w_1 = -M_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial r} + \rho_1^0 g \sin\alpha\right);$$

$$w_2 = -M_2\left(\frac{\partial p_2}{\partial r} + \rho_2^0 g \sin\alpha\right), \tag{9.21}$$

где r – текущее расстояние от центра скважины до произвольной точки пласта; в данном случае искомые функции зависят от r и t.

[1] Физический смысл этих переменных очевиден: «координата» ξ представляет собой объем пласта между начальным сечением и сечением x, выраженный в долях порового объема, а «время» τ – безразмерный объем жидкости, закачанной в пласт к моменту времени t.

Аналогично предыдущему, исходя из уравнений (9.20) и (9.21), получим последовательно:

$$w = w_1 + w_2 = q(t)/r, \tag{9.22}$$

где $q(t) = Q(t)/(2\pi h)$ (здесь h – толщина пласта) – «удельный» суммарный расход фаз;

$$w_1 = \left[\frac{q(t)}{r} + M_2(s)\left(p'_к \frac{\partial s}{\partial r} + \Delta\rho g \sin\alpha\right)\right] f(s) \tag{9.23}$$

и окончательное уравнение для насыщенности

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{q(t)}{r} f'(s)\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rM_2(s)\left(p'_к \frac{\partial s}{\partial r} + \Delta\rho g \sin\alpha\right) f(s)\right] = 0. \tag{9.24}$$

Заметим, что согласно (9.22) суммарная скорость фаз w в этом случае не сохраняется, но сохраняется суммарный объемный расход $Q(t)$.

Введя безразмерные переменные при $q(t) = q = \text{const}$

$$\xi = r^2/(2R_к^2),\ \tau = qt/(mR_к^2) \tag{9.25}$$

(где $R_к$ – расстояние от нагнетательной до добывающей скважины), имеющие физический смысл, аналогичный (9.16), приведем уравнение (9.24) к следующему виду:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + f'(s)\frac{\partial s}{\partial \xi} + \overline{N}_g \frac{\partial}{\partial \xi}[G(s)\sqrt{\xi}] + \overline{N}_c \frac{\partial}{\partial \xi}\left[C(s)\xi\frac{\partial s}{\partial \xi}\right] = 0. \tag{9.26}$$

Здесь

$$\overline{N}_g = \frac{\sqrt{2}\,k\Delta\rho g \sin\alpha\, R_к}{\eta_2 q};$$

$$\overline{N}_c = \frac{2a_п \cos\theta\sqrt{mk}}{\eta_2 q}, \tag{9.27}$$

а функции $G(s)$ и $C(s)$ определяются равенствами (9.18).

Уравнения (9.17) и (9.26), описывающие одномерные процессы совместного течения двух несжимаемых фаз и известные как уравнения Рапопорта – Лиса, представляют собой нелинейные уравнения параболического типа второго порядка. Точные решения этих уравнений получены лишь для некоторых сравнительно простых частных случаев [7]. Получены инвариантные решения (типа волны, движущейся с постоянной скоростью, и автомодельные), а также численные решения на ЭВМ [3, 33, 34, 51, 77].

4.3. Начальные и граничные условия

При решении конкретных задач для уравнений (9.17) или (9.26) должны быть сформулированы соответствующие граничные и начальные условия. В качестве начального условия задаются значения неизвестной функции s в зависимости от пространственных координат (x или r) при $t = 0$. Можно считать, что при $t = 0$ насыщенность всюду постоянна (например, $s = s_*$).

В случае вытеснения нефти водой естественно задать на входе в пласт (нагнетательная скважина или галерея) расход закачиваемой воды и равенство нулю скорости фильтрации нефти; из последнего условия вытекает (см. формулу (9.11)), что $k_2 = 0$, следовательно, на этой поверхности $s = s^*$.

Заметим, что это условие – приближенное. Действительно, для случая прямолинейно-параллельного вытеснения из (9.13) и (9.14) с учетом (9.16), (9.18) имеем:

$$w_2 = w - w_1 = w[1 - f(s_0) - N_g G(s_0) - N_c C(s_0)],$$

откуда точное условие имеет вид:

$$1 - f(s_0) - N_g G(s_0) - N_c C(s_0) = 0,$$

где $s_0 = s(0, t)$. (9.28)

В нулевом приближении при $N_g \to 0$ и $N_c = 0$ отсюда получаем: $f(s_0) = 1$, т.е. $s_0 = s^*$

На выходе из пласта ($\xi = 1$) возможны два варианта граничных условий.

1. Можно пренебречь градиентом капиллярного давления по сравнению с градиентом давления в фазах, т.е. считать, что $dp_к/d\xi = 0$ при $\xi = 1$, откуда следует, что

$$\partial s/\partial \xi = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Можно показать, что при этом условии в случае горизонтального пласта ($\sin\alpha = 0$) отбор каждой из фаз пропорционален ее подвижности $M_i = kk_i(s)/\eta_i$, так что отношение отборов фаз на выходе равно отношению их подвижностей.

2. Экспериментально установлено, что вода не вытекает из гидрофильного пласта, а накапливается в выходном сечении, пока ее насыщенность не достигнет значения s^*. В момент достижения значения s^* вода прорывается из пласта с сохранением на выходе этого значения насыщенности. Это явление получило название концевого эффекта. Математически оно приводится к сложному нелинейному граничному условию на выходе.

Точная формулировка условия на выходе зависит от состояния среды вне рассматриваемого образца (или коллектора) и может быть различной [1].

[1] Заметим, что этот вопрос до сих пор нельзя считать до конца исследованным.

4.4. Оценка влияния гравитационных и капиллярных сил

Безразмерные параметры (9.19) и (9.27) характеризуют, соответственно, отношение силы тяжести (параметры N_g и $\overline{N}_g$) и капиллярных сил (N_c и $\overline{N}_c$) к силам вязкости. Значимость гравитационных и капиллярных эффектов нетрудно оценить при рассмотрении конкретных процессов.

Так, силой тяжести можно пренебречь, если параметры N_g и $\overline{N}_g$ малы по сравнению с единицей, что имеет место при следующих условиях:

для прямолинейно-параллельного течения

$$\Delta\rho g \sin\alpha \ll w\eta_2/k = \Delta p/L;$$

для радиального вытеснения

$$\Delta\rho g \sin\alpha \ll Q\eta_2/(2\sqrt{2}\pi khR_к).$$

Эти условия означают, что разность статических градиентов давления фаз $\Delta\rho g \sin\alpha$ должна быть намного меньше гидродинамического градиента давления. Для конкретных условий течения всегда можно определить, на каких расстояниях от добывающей скважины это выполняется.

Для оценки влияния капиллярных сил заметим, что в задачах нефтегазовой подземной гидромеханики размер области течения L достигает сотен метров, перепад давления Δp на границах залежи достаточно велик (составляет несколько десятков или единиц мегапаскалей), тогда как капиллярное давление в нефтяных пластах имеет порядок 10^{-3} МПа. Поэтому если рассматривается вытеснение в пределах всего пласта и темпы вытеснения достаточно велики, то значения капиллярных параметров N_c и $\overline{N}_c$ будут малы, т.е. $N_c \ll 1$, и капиллярными силами можно пренебречь. Такое приближение называют крупномасштабным.

Для иллюстрации сделаем простую оценку. Межфазное натяжение $\alpha_п$ на границе большинства углеводородных жидкостей и газов с водой находится в пределах от 0,03 до 0,005 Н/м; скорость фильтрации составляет $10^{-6}-10^{-5}$ м/с. Положив во втором равенстве (9.19) $\alpha_п = 0{,}03$ Н/м, $\cos\theta \approx 1$, $m = 0{,}1$, $k = 10^{-13}$ м^2, $\eta_2 = 3$ сП $= 3\cdot 10^{-3}$ Па·с, $w = 10^{-5}$ м/с, $L = 10^3$ м, для капиллярного параметра N_c найдем оценку $N_c \approx 10^{-4}$, которая дает характерный порядок малости этой величины.

4.5. Модель Баклн – Леверетта

В крупномасштабном приближении, когда капиллярными силами можно пренебречь, давления в фазах одинаковы: $p_1 = p_2 = p$. Тогда, положив в уравнениях (9.17) и (9.26) $N_c = \overline{N}_c = 0$, представим их в следующей обобщенной форме, объединяющей оба типа одномерных потоков:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + f'(s)\frac{\partial s}{\partial \xi} + N_{gn}\frac{\partial}{\partial \xi}[G(s)\xi^n] = 0, \qquad (9.29)$$

где показатель степени $n = 0$ и $1/2$ соответственно для случаев прямолинейно-параллельного и радиального вытеснения; коэффициент N_{gn} равен соответственно величинам N_g и $\overline{N}_g$ в соотношениях (9.19) и (9.27). Уравнение (9.29) принадлежит к классу квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка, которые обычно решаются методом характеристик (см. прил. 6) и имеют свои существенные особенности по сравнению с параболическими уравнениями (9.17) и (9.26).

С простейшим случаем двухфазной фильтрации без учета силы тяжести ($N_{gn} = 0$ в (9.29)), приводящим к разрывному профилю насыщенности, Вы познакомились в гл 8.

Задачи двухфазной фильтрации без учета капиллярных сил, основанные на решении уравнений типа (9.29) при соответствующих начальном и граничном условиях, известны как задачи (модель) Бакли–Леверетта. Задачи вытеснения такого типа в одномерной постановке изучены достаточно полно.

§ 5*. ЗАДАЧА БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

5.1. Одномерные течения несжимаемых жидкостей

В случае одномерного течения несжимаемых жидкостей в условиях, когда можно пренебречь капиллярным давлением, а также влиянием силы тяжести, процесс вытеснения допускает простое математическое описание.

Для обоих случаев одномерного потока (прямолинейно-параллельного и плоскорадиального) это приводит к классической модели Бакли–Леверетта (см. гл. 8), описываемой однотипным уравнением для насыщенности s вытесняющей фазы 1, которое получается из (9.29) при гравитационном параметре $N_{gn} = 0$ и имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + f'(s)\frac{\partial s}{\partial \xi} = 0 \qquad (9.30)$$

Безразмерные независимые переменные ξ и τ, определяемые из равенств (9.17) и (9.26), можно представить в единой форме для обоих одномерных потоков и обобщить на случай, когда суммарный «удельный» расход q фаз зависит от времени. В результате получим:

$$\xi = \frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{L}\right)^{\nu}; \quad \tau = \int_0^t \frac{q(t')}{mL^{\nu}}\,dt',$$

где L – характерный линейный размер; $\nu = 1$, 2 – соответственно для линейного и радиального течений, причем в последнем случае пространственная координата $x = r$ (r – расстояние от точки пласта до скважины),

а $L = R_к$; $q(t) = w(t)$ или $q(t) = Q(t)/(2\pi h)$ соответственно для линейного и радиального вытеснения; $w(t)$ – суммарная скорость фильтрации фаз; $Q(t)$ – суммарный объемный расход; m и h – соответственно коэффициент пористости и толщина пласта.

Для расчета процесса вытеснения к уравнению (9.30) нужно добавить начальные и граничные условия в виде (8.13) или (8.14).

Простейший случай этой задачи был рассмотрен в гл. 8.

5.2. Построение решения

Для построения решения сформулированной задачи используем метод характеристик (см. прил. 7). Рассмотрим функцию $s(\xi, \tau)$, определенную на плоскости (ξ, τ). Пусть начальное распределение насыщенности при $\tau = 0$ представлено монотонно убывающей кривой $s(\xi, 0) = \varphi(\xi)$ (рис. 9.2). Задача состоит в построении функции $s(\xi, \tau)$ для последующих моментов времени $\tau > 0$, т.е. требуется рассчитать деформацию во времени начального распределения насыщенности в соответствии с уравнением (9.30) в бесконечном по протяженности пласте.

Уравнение характеристик для (9.30) можно представить в виде

$$d\xi/d\tau = f'(s);$$
$$ds/d\tau = 0. \qquad (9.31)$$

Из (9.31) следует, что семейство характеристик состоит из линий $\xi = \xi(\tau)$ на плоскости переменных (ξ, τ), вдоль каждой из которых насыщенность s имеет постоянное значение в силу второго уравнения системы (9.31). Следовательно, характеристики $\xi(\tau)$ являются траекториями распространения постоянных значений насыщенности. В рассматриваемом случае эти траектории легко определяются. Действительно, поскольку $s = \text{const}$ вдоль каждой характеристики, то остается постоянной вдоль этой кривой и $f'(s)$. Тогда, проинтегрировав первое уравнение (9.31), найдем:

$$\xi = f'(s)\tau + \xi_0, \qquad (9.32)$$

где ξ_0 – константа интегрирования, определяемая при $\tau = 0$.

Таким образом, в данном случае характеристики являются прямыми, тангенс угла наклона которых к оси τ равен $f'(s)$, т.е. зависит от насыщенности в точке (ξ, τ).

Теперь можно построить решение уравнения (9.30) при начальном условии (8.13). Пусть $M(\xi, \tau)$ – произвольная точка плоскости (ξ, τ) (см. рис. 9.2). Если характеристика (9.32) выходит из начальной точки $(\xi_0, 0)$, то значение s на ней остается равным начальному значению $s(\xi, 0) = \varphi(\xi_0)$. Тогда получим:

$$s_M = s(\xi, \tau) = s(\xi_0, 0) = \varphi(\xi_0),$$

где ξ, ξ_0 и τ связаны уравнением (9.32).

Исключив отсюда ξ_0, найдем:

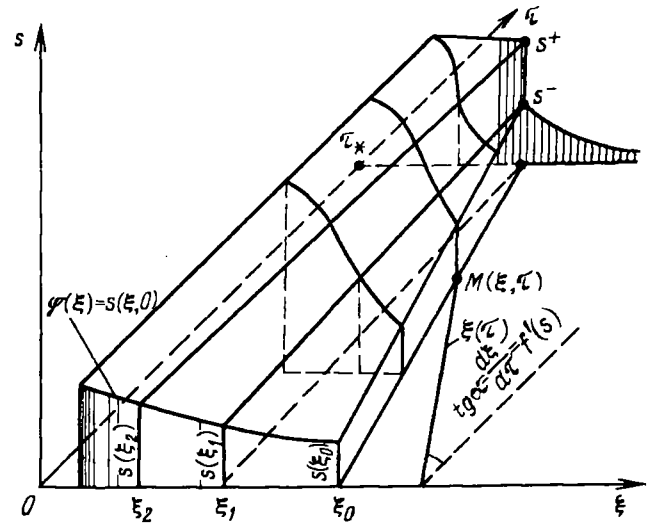


Рис. 9.2. Схема к построению решения задачи двухфазной фильтрации

$$s(\xi, \tau) = \varphi[\xi - f'(s)\tau]. \tag{9.33}$$

Формула (9.33) дает неявное выражение насыщенности s через переменные ξ и τ.

Это выражение можно представить в другой форме, если считать, что в равенстве (9.32) $\xi_0 = \xi_0(s,\ 0) = \xi_0(s)$ есть начальное распределение насыщенности в неявной форме, т. е. первое равенство (8.13), разрешенное относительно ξ. Тогда вместо (9.33) можно записать

$$\xi = f'(s)\tau + \xi_0(s). \tag{9.34}$$

Полученное решение можно интерпретировать как процесс распространения «волн насыщенности». Физическая особенность решения – зависимость скорости $v = d\xi/d\tau$ распространения того или иного значения насыщенности от величины этой насыщенности, которая равна $f'(s)$, как следует из (9.31). Это явление называется дисперсией волн. Поэтому дальнейший анализ решения зависит от вида функции $f'(s)$.

5.3. Случай смешивающегося вытеснения

Рассмотрим случай, когда относительные фазовые проницаемости можно считать равными соответствующим насыщенностям, т. е.

$$k_1(s) = s,\ k_2(s) = 1 - s.$$

Физически это соответствует совместному течению взаимно смешивающихся жидкостей, когда распределение фаз в порах полностью

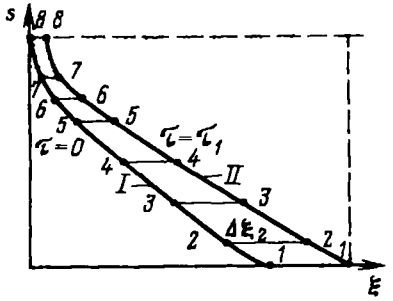


Рис. 9.3. Деформация профиля насыщенности при смешивающемся вытеснении

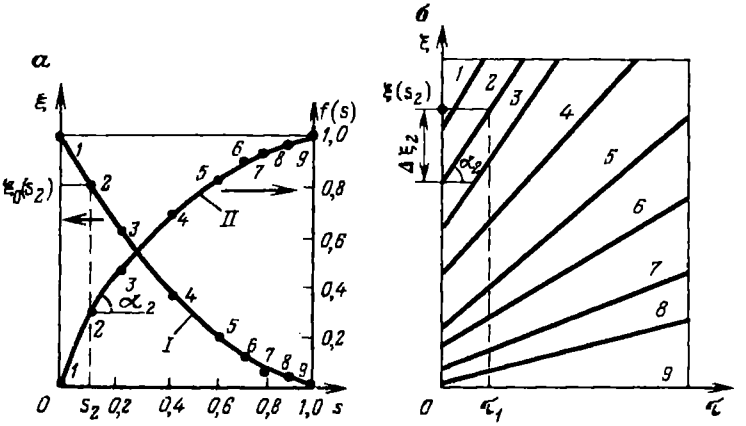


Рис. 9.4. Графическое построение непрерывного профиля насыщенности методом характеристик.

а – начальное распределение насыщенности (кривая *I*) и зависимость $f(s)$ (кривая *II*); *б* – поле характеристик

случайно и не связано с капиллярными силами, и каждая из фаз сохраняет подвижность при любой насыщенности. Такая схематизация была введена В. Н. Николаевским [22, 98] для критических условий вытеснения. Тогда в соответствии с определением (8.9) функции $f(s)$ найдем:

$$f(s) = \frac{s}{s + \eta_0(1-s)} = \frac{s}{\eta_0 + (1-\eta_0)s}, \text{ где } \eta_0 = \frac{\eta_1}{\eta_2};$$

$$f'(s) = \frac{\eta_0}{[\eta_0 + (1-\eta_0)s]^2}; \; f''(s) = -\frac{2\eta_0(1-\eta_0)}{[\eta_0 + (1-\eta_0)s]^3}. \tag{9.35}$$

Из (9.35) следует, что функция $f''(s)$ сохраняет знак при любых значениях s, причем, если $0 < \eta_0 < 1$, то $f''(s) < 0$, и наоборот $f''(s) > 0$

при $\eta_0 > 1$. В случае, когда $\eta_0 < 1$, т. е. вязкость вытесняющей жидкости меньше, чем вытесняемой, это означает, что $f'(s)$ монотонно убывает, оставаясь положительной величиной, а функция $f(s)$ монотонно возрастает и выпукла к оси ординат при любых s.

Пусть начальное распределение насыщенности (8.13) – монотонно убывающая функция: $s'(\xi, 0) = \varphi'(\xi) \leqslant 0$ (рис. 9.3, кривая *I*). Тогда в этом случае ($\eta_0 < 1$) по формуле (9.33) или (9.34) находим непрерывное решение $s(\xi)$ при любом значении τ.

Приведем графический метод получения данного решения (9.34) с использованием характеристик. С этой целью выполним следующие построения.

1. Строим график функции $f(s)$ (первая формула (9.35)) и на том же чертеже изображаем начальное распределение насыщенности $s(\xi, 0)$ или, что то же самое, $\xi_0(s)$ (кривые *II* и *I* соответственно на рис. 9.4, *а*), используя ξ как ординату и s как абсциссу. При этом можно выбрать независимо любой удобный масштаб для ξ и f. Но тогда масштаб τ (абсцисса на рис. 9.4, *б*) будет определяться.

2. Строится поле характеристик (рис. 9.4, *б*) следующим образом:

на кривой *I* начального распределения берут произвольную точку (*1*, *2* ... или *8* на рис. 9.4, *а*) и отмечают ее значение ξ на ординате ($\tau = 0$) рис. 9,4 *б*, т. е. соответствующее значение $\xi_0(s)$;

в точке с тем же значением s проводят касательную к кривой $f(s)$, определяют тангенс угла ее наклона $f'(s)$ (см. рис. 9.4, *а*) и с тем же углом наклона проводят прямую (характеристику) через начальную точку $\xi_0(s)$ на характеристической диаграмме (на рис. 9.4, *б*, приведены характеристики, соответствующие точкам *1*, *2*, ..., *8*, отмеченным на кривой начального распределения). Характеристики имеют вид «расходящегося веера» и нигде не пересекаются.

3. Далее, если хотят найти $s(\xi)$ в произвольный момент времени $\tau = \tau_1$, считывают с рис. 9.4, *б* значения ξ при $\tau = \tau_1$, находят соответствующее смещение точек $\Delta\xi$, переносят эти значения на рис. 9.3 и, соединив новые положения точек *1*, *2*, ..., *8* гладкой кривой, находят распределение насыщенности $s(\xi)$ в момент $\tau = \tau_1$ (кривая *II* на рис. 9.3).

В случае, когда отношение коэффициентов вязкости фаз $\eta_0 \geqslant 1$, функция $f''(s)$, как следует из (9.35), нигде не отрицательна: $f''(s) \geqslant 0$, и непрерывного решения не существует. Анализ этого случая станет понятным из дальнейшего изложения.

5.4. Образование скачка насыщенности

При совместном течении несмешивающихся жидкостей функция распределения фаз $f(s)$ имеет характерные особенности (см. гл. 8), влияющие на решение: $f(s)$ тождественно равна нулю при $s \leqslant s_*$ и единице при $s \geqslant s^*$, имеет точку перегиба $s_п$, а функция $f'(s)$ – немонотонна и имеет максимум (см. рис. 8.3). Отсюда в соответствии с первым равенством (9.31) следует, что при $0 \leqslant s \leqslant s_п$ бо́льшие насыщенности распространяются с бо́льшими скоростями ($f'(s)$ возрастает), а при $s_п < s \leqslant 1$

скорость распространения постоянного значения насыщенности начинает уменьшаться ($f'(s)$ убывает). Поэтому с течением времени τ наклон профиля распределения насыщенности (9.34) становится круче (см. рис. 9.2), так как бóльшие значения насыщенности «догоняют» меньшие значения, и характеристики (9.32), несущие различные значения насыщенности, могут в некоторый момент τ_* пересечься, а решение (9.34) становится неоднозначным. Такая неоднозначность устраняется введением скачка насыщенности (разрыва), при переходе через который насыщенность меняется на конечную величину.

Итак, условием образования разрыва является пересечение характеристик (9.32). В этот момент τ_*, касательная к кривой $s(\xi)$, становится вертикальной, т.е. производная $\partial s/\partial \xi$ обращается в бесконечность, и дифференциальное уравнение (9.30) больше не имеет смысла.

В областях, где характеристики не пересекаются, решение непрерывно и определяется по формуле (9.33) или (9.34).

Прежде чем изучать распространение скачков насыщенности, выведем соотношения, выражающие условия сохранения массы на них.

5.5. Условие на скачках насыщенности

Это условие было получено в гл. 8. Дадим здесь более общий вывод, применимый не только для одномерных потоков.

Пусть $\xi_c(\tau)$ – закон движения скачка насыщенности, так что $D = d\xi_c/d\tau$ – скорость движения разрыва. И пусть скачок проходит через элемент пористой среды, выделенный по нормали к поверхности разрыва и ограниченный участками поверхностей, параллельных плоскости скачка и находящихся на малом расстоянии Δh от нее (четырехугольник $ABCD$ в проекции на плоскость (ξ, τ) на рис. 9.5). Поскольку интегральный баланс массы в элементе $ABCD$ ($\sum$) выполняется, то, проинтегрировав уравнение (9.30) по площади $\sum$, получим:

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{\partial s}{\partial \tau}+f'(s)\frac{\partial s}{\partial \xi}\right]d\xi d\tau = 0.$$

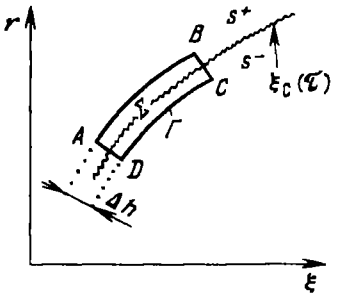


Рис. 9.5. Схема к выводу условий на скачке

Отсюда, преобразовав поверхностный интеграл в интеграл по контуру $ABCD$ (Γ) по формуле Грина (см. (п. 6) из прил. 6), получим:

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{\partial s}{\partial \tau}+\frac{\partial f(s)}{\partial \xi}\right]d\xi d\tau=\oint\limits_{\Gamma}-s\,d\xi+f(s)\,d\tau=0. \tag{9.36}$$

В случае, если ширина четырехугольника $ABCD$ мала ($\Delta h\to 0$), то можно пренебречь интегралами по участкам DA и BC. Тогда из (9.36) получим с точностью до малых высшего порядка

$$\oint\limits_{\Gamma}s\,d\xi-f(s)\,d\tau=\oint\limits_{\Gamma}\left[s\frac{d\xi_c}{d\tau}-f(s)\right]d\tau=\oint\limits_{\Gamma}[sD-f(s)]\,d\tau\approx$$

$$\approx\int\limits_{AB}[sD-f(s)]\,d\tau-\int\limits_{DC}[sD-f(s)]\,d\tau\approx\cdot$$

$$\approx(s^{+}D-f^{+})\Delta\tau-(s^{-}D-f^{-})\Delta\tau=0,$$

откуда при $\Delta\tau\to 0$ находим известное (см. гл. 8) условие на скачке

$$D=\frac{d\xi_c}{d\tau}=\frac{f^{+}-f^{-}}{s^{+}-s^{-}}. \tag{9.37}$$

Здесь $f^{+}=f(s^{+})$; $f^{-}=f(s^{-})$; s^{-} и s^{+} – насыщенности до и после разрыва, которые, как следует из (9.37), не могут быть произвольными, а связаны друг с другом и скоростью разрыва D. По аналогии с газовой динамикой равенство (9.37) известно в литературе как соотношение Гюгонио.

5.6. Определение положения скачка и насыщенности на скачке

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее изменение насыщенности на скачке в зависимости от «времени» τ. Для насыщенности $s_c=s^{+}$ на скачке (ее называют фронтальной насыщенностью), как и для любого значения s, выполняется соотношение (9.34):

$$\xi_c=f'(s_c)\tau+\xi_0(s_c), \tag{9.38}$$

откуда следует, что s_c, вообще говоря, изменяется с изменением времени τ, т. е. $s_c=s_c(\tau)$.

Продифференцировав (9.38) по τ, получим:

$$\frac{d\xi_c}{d\tau}=f'(s_c)+\tau f''(s_c)\frac{ds_c}{d\tau}+\xi_0'(s_c)\frac{ds_c}{d\tau}=$$

$$=f'(s_c)+[f''(s_c)\tau+\xi_0'(s_c)]\frac{ds_c}{d\tau}. \tag{9.39}$$

Приравняв выражения (9.37) и (9.39) для скорости D скачка насыщенности, получим дифференциальное уравнение для определения s_c:

$$\frac{ds_c}{d\tau} = \frac{f(s_c) - f(s^-) - f'(s_c)(s_c - s^-)}{(s_c - s^-)[f''(s_c)\tau + \xi_0'(s_c)]}. \tag{9.40}$$

Здесь еще осталось неизвестным значение насыщенности s^- перед разрывом. Оно определяется из условия пересечения характеристик (9.32) на разрыве: $\xi(s^-) = \xi(s_c) = \xi_c$, так что в соответствии с равенством (9.34):

$$f'(s_c)\tau + \xi_0(s_c) = f'(s^-)\tau + \xi_0(s^-). \tag{9.41}$$

Теперь уравнение (9.40) можно проинтегрировать и определить насыщенность на скачке $s_c(\tau)$, если задать ее начальное значение. Начальные значения s_c и τ_* определяются в той точке ξ_* (см. рис. 9.2), где впервые возникает скачок (вертикальная касательная к кривой $s(\xi)$), т. е. производная $d\xi/ds$, вычисленная по формуле (9.32) впервые обращается в нуль. Определив $s_c = s_c(\tau)$, из равенства (9.38) находим закон движения скачка насыщенности $\xi_c = \xi_c(\tau)$.

Рассмотрим так называемый стационарный скачок, по обе стороны которого значения $s_c = s^+$ и $s_0 = s^-$ постоянны. Тогда $ds_c/d\tau = 0$, и из (9.40) получим

$$\frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0} = f'(s_c). \tag{9.42}$$

Равенство (9.42) представляет собой известное соотношение Бакли–Леверетта (см. гл. 8), означающее, что скорость распространения стационарного скачка равна скорости распространения насыщенности на скачке.

5.7. Построение разрывного решения

Сформулируем теперь задачу об отыскании решения квазилинейного дифференциального уравнения (9.30) в общем случае. Требуется найти функцию $s(\xi, t)$, удовлетворяющую начальному и граничному условиям (8.11) или (8.14), непрерывную и удовлетворяющую уравнению (9.30) в каждой из областей *I* и *II* (рис. 9.6), заполненных непересекающимися характеристиками, и условию (9.37) на разрыве $\xi_c = \xi_c(\tau)$, связывающему предельные значения s^+ и s^- насыщенности и скорости D этого разрыва.

Графическая иллюстрация построения разрывного решения приведена на рис. 9.7. В качестве начального распределения $\varphi(\xi) = s(\xi, 0)$ берется по-прежнему монотонно убывающая кривая, а $f(s)$ – функция распределения фаз, характерная для движения несмешивающихся жидкостей (соответственно кривые *I* и *II* на рис. 9.7, *а*). В точке *A* (см. рис. 9.7, *б*), соответствующей $\tau = \tau^*$, две бесконечно близкие характеристики впервые пересекаются. Тогда при $\tau < \tau^*$ (например, $\tau = \tau_1$ на рис. 9.7, *б*) решение строится так же, как в разд. 5.3. В точке *A* образуется и начинает распространяться разрыв. Траекторию разрыва (кривая *III* на рис. 9.7, *б*) можно построить приближенно при помощи уравнения

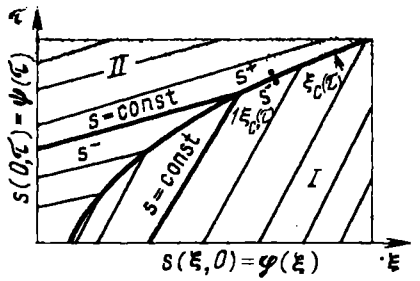


Рис. 9.6. Схема к построению решения обобщенной задачи Бакли–Леверетта

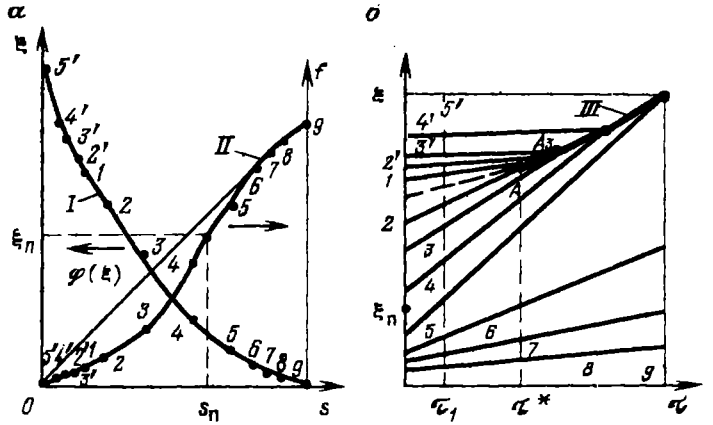


Рис. 9.7. Графическое построение разрывного решения

(9.37), геометрический смысл которого состоит в том, что скорость разрыва равна тангенсу угла наклона секущей, соединяющей точки s^+ и s^- на кривой $f(s)$. Первоначальный наклон траектории разрыва (в точке A) совпадает с наклоном характеристики, проходящей через точку A. Таким образом, начальное положение и наклон разрыва известны. Далее из (9.37), идя малыми шагами $\Delta\tau$ по «времени» и аппроксимируя на этом интервале траекторию прямой линией, методом итераций находится новый наклон разрыва в момент τ как наклон секущей, соединяющей соответствующие точки s^+ и s^- на кривой $f(s)$.

На рис. 9.7, *б* приведены пары характеристик s^+, s^- (*2'–2*, *3'–3*, *4'–4* и *5'–5*), встречающиеся на разрыве. Например, наклон траектории разрыва в точке пересечения A_3 см. рис. 9.7, *б*) равен наклону секущей *3'–3* на кривой $f(s)$ (см. рис. 9.7, *а*). Характеристика *6* на рис. 9.7, *б* – единственная, имеющая тот же угловой коэффициент, что и касательная к f-кривой в точке *6*, которая проходит через начало координат 0 (см. рис. 9.7, *а*).

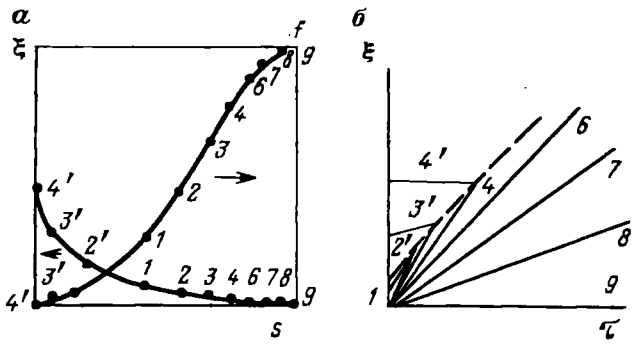


Рис. 9.8. Схема к построению разрывного решения при крутом начальном профиле насыщенности

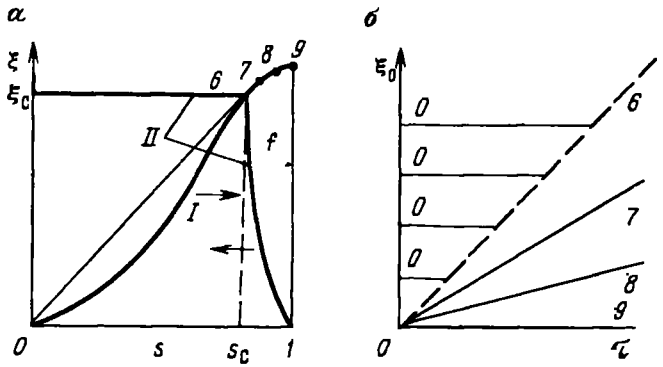


Рис. 9.9. Графическая иллюстрация решения классической задачи Бакли–Леверетта

Можно показать, что при больших временах τ секущая, представляющая наклон траектории разрыва, приближается к наклону касательной 0–*6* (см. рис. 9.7, *а*), и траектория разрыва (кривая *III* на рис. 9.7, *б*) становится параллельной характеристике *6*. В этом предельном случае величина и скорость скачка становятся постоянными (стационарный разрыв).

При заданном монотонно убывающем начальном профиле насыщенности $\varphi(\xi)$ (см. рис. 9.7, *а*) нетрудно сформулировать аналитическое условие образования разрыва. Как следует из уравнения характеристик (9.31), при значениях насыщенности $s_п < s < 1$ ($s_п$ – точка перегиба f-кривой), где $f'(s)$ убывает, т. е. $f''(s) < 0$, характеристики расходятся, и разрыва не наступает. Это соответствует участку $(0, \xi_п)$ оси ξ (см. рис. 9.7, *б*). На участке $\xi > \xi_п$ характеристики сходятся, значения насыщенности, соответствующие этому участку, таковы, что $f''(s) > 0$, и в решении

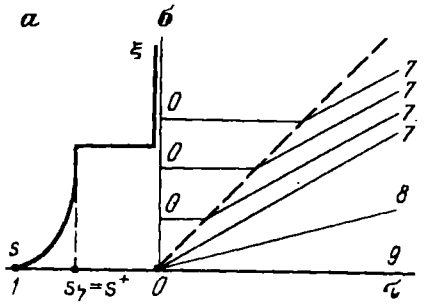


Рис. 9.10. Иллюстрация неединственности предельного решения

задачи (9.30), (8.13) образуется разрыв. Следовательно, условие образования разрыва в данном случае, когда $\varphi'(\xi) < 0$, можно записать следующим образом:

$$f''(s) > 0. \tag{9.43}$$

И наоборот, при $f''(s) \leqslant 0$ разрыв не образуется. Условие (9.43) объясняет также и отсутствие непрерывного решения при смешивающемся вытеснении при условии, что отношение коэффициентов вязкости фаз $\eta_0 \geqslant 1$ (см. разд. 5.3).

Рассмотрим теперь более крутой начальный профиль насыщенности (рис. 9.8, *а*). В этом случае, как видно из аналогичных построений (рис. 9.8, *б*), асимптотическая траектория разрыва (пунктирная линия) лежит ближе к характеристике *6*, чем на рис. 9.7. Характеристики *6*–*9* на рис. 9.8 имеют те же значения насыщенности, что и на рис. 9.7. Для *1*–*4* на этих рисунках характерны различные значения насыщенности.

В предельном случае, когда начальное распределение насыщенности имеет разрыв от 0 до 1, траектория разрыва совпадает с характеристикой *6*. Характеристическая диаграмма для этого случая приведена на рис. 9.9, иллюстрирующем решение классической задачи Бакли–Леверетта о нагнетании фазы 1 в бесконечную среду, первоначально насыщенную фазой 2 (см. гл. 8). Здесь мы имеем прямолинейный разрыв насыщенности и «веер» характеристик, исходящих из точки $\xi = 0$, $\tau = 0$. Само же предельное решение представлено кривой *II* на рис. 9.9, *а*.

5.8. О единственности и устойчивости разрывного решения

Оказывается, что сформулированных условий (см. разд. 5.7) недостаточно для построения единственного разрывного решения. Покажем это на примере предельного решения. Действительно, в этом случае траектория разрыва могла бы быть представлена любой секущей *f*-кривой, проходящей через точки $s^- = 0$ и s^+, находящейся между точками *6* и *9* этой кривой (см. рис. 9.9). При этом интегральный закон сохранения (9.36) и условие на разрыве (9.37) будут выполняться. Возьмем, например, s^+ равным значению насыщенности в точке *7* на *f*-кривой. Соответствующее поле характеристик и профиль насыщен-

ности приведены на рис. 9.10. В этом случае характеристики 7 уходят от разрыва вдоль его траектории.

Можно построить и другие решения, совместимые с соотношениями (9.36), (9.37). При этом возникает естественный вопрос: какому же из этих решений отдать предпочтение? Какое из них является «истинным»? Правила, позволяющие выделить единственное «истинное» решение задачи (9.30), (8.42) в классе разрывных решений, получены в теории квазилинейных уравнений (О.А. Олейник, И.М. Гельфанд). Эти правила известны как условия устойчивости разрыва, которые для рассматриваемого случая двояковыпуклой функции $f(s)$ можно представить в виде неравенств

$$\frac{f(\tilde{s})-f(s^+)}{\tilde{s}-s^+} \leqslant D \leqslant \frac{f(\tilde{s})-f(s^-)}{\tilde{s}-s^-}, \tag{9.44}$$

выполненных для любого значения $\tilde{s} \in (s^-, s^+)$. На участке вогнутости кривой $f(s)$, где $f''(s) > 0$ (что характерно для задач газовой динамики), это условие упрощается и принимает вид

$$f'(s^+) \leqslant D \leqslant f'(s^-). \tag{9.45}$$

Здесь скорость разрыва D связана с насыщенностями до (s^-) и после (s^+) разрыва соотношением Гюгонио (9.37). Если соотношения (9.44) или (9.45) не выполняются, то разрыв неустойчив. Отсюда следует, что предельное решение задачи Бакли–Леверетта (см. рис. 9.9) является устойчивым и единственным. Все другие разрывные решения – посторонние (неустойчивые).

Можно показать, что условия (9.44), (9.45) соответствуют формулировке условия устойчивости разрывов в газовой динамике (теория ударных волн) [26].

На линии разрыва должны пересекаться две приходящие характеристики, несущие начальные значения насыщенности. В нашем случае ввиду наличия участка выпуклости кривой $f(s)$, где $f''(s) < 0$, приходящими считаются также те характеристики, скорость которых равна скорости разрыва D.

§ 6. ВЛИЯНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ДВУХФАЗНУЮ ФИЛЬТРАЦИЮ ФЛЮИДОВ

Исследуем влияние силы тяжести на процесс вытеснения в рамках допущений теории двухфазной фильтрации (см. § 4). Рассмотрим для определенности случай прямолинейно-параллельного вытеснения[1] в однородном пласте, угол наклона которого к горизонту равен α (см. рис. 9.1). При этом $\alpha > 0$ соответствует процессу вытеснения снизу вверх, а $\alpha < 0$ – вытеснению сверху вниз. Будем считать, что суммарная

[1] Случай плоскорадиальной фильтрации исследуется аналогично.

скорость w фильтрации фаз постоянна: $w(t) = \text{const}$. В этом случае уравнение (9.17) для определения насыщенности представим в виде ($N_\tau = 0$, т. е. капиллярное давление не учитывается):

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} F^{\pm}(s) = 0, \tag{9.46}$$

где безразмерные аргументы ξ и τ определяются по формулам (9.16);

$$F^{\pm}(s) = [1 \mp |N_g| k_2(s)] f(s); \tag{9.47}$$

$$N_g = \frac{k \Delta \rho g \sin \alpha}{\eta_2 w} = \text{const}, \quad \Delta \rho > 0. \tag{9.48}$$

В левой части соотношения (9.47) знак «+» соответствует значениям $\alpha > 0$, знак «−» соответствует $\alpha < 0$.

Будем решать задачу с предельными кусочно-постоянными начальными и граничными условиями вида

$$s(\xi, 0) = s_*, \; s(0, \tau) = 1, \tag{9.49}$$

считая, что жидкость 1 закачивается через нагнетательную галерею ($\xi = 0$) в пласт, первоначально насыщенный жидкостью 2 с постоянной насыщенностью s_* связанной фазы 1.

При не слишком больших углах α наклона пласта, таких, что $|\alpha| < 15°$, безразмерный комплекс N_g в широком диапазоне встречающихся на практике параметров имеет порядок $|N_g| \approx 10^{-3} - 10^{-2}$, т. е. является малым параметром. Тогда, имея в виду, что относительная проницаемость $k_2(s)$ монотонно убывает, легко доказать справедливость следующих неравенств:

$$0 \leqslant F^{(+)}(s) \leqslant f(s); \; f(s) \leqslant F^{(-)}(s) \leqslant 1.$$

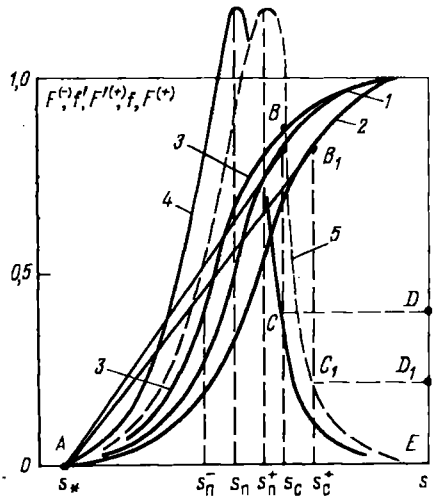


Рис. 9.11. Характеристические функции:
1 – $f(s)$; *2* – $F^{(+)}(s)$; *3* – $F^{(-)}(s)$; *4* – $f'(s)$; *5* – $F'^{(+)}(s)$

Отсюда следует, что, так же как и $f(s)$, функции $F^{(\pm)}(s)$ являются монотонно-возрастающими и имеют два участка – выпуклости и вогнутости, разделяемые соответствующими точками перегиба $s_п$ и $s_п^{(\pm)}$ (рис. 9.11), причем можно показать, что $s_п^{(-)} < s_п < s_п^{(+)}$.

Таким образом, при учете силы тяжести задача сводится к решению уравнения (9.46) при условиях (9.49), т. е. полностью аналогична соответствующей задаче Бакли–Леверетта (9.30), (8.14). Поэтому решение рассматриваемой задачи получают из соответствующих формул гл. 8 (§§ 3, 4) в результате замены функции распределения фаз $f(s)$ на характеристические функции $F^{(\pm)}(s)$, соответствующие исследуемому процессу. Решение имеет разрыв насыщенности, строится в области $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и состоит из:

1) центрированной волны

$$\frac{\xi}{\tau} = F^{(\pm)}(s) \text{ при } s_c^{(\pm)} \leqslant s \leqslant 1, \tag{9.50}$$

где $s_c^{(\pm)}$ – фронтовая насыщенность, определяемая абсциссой точки касания прямой, проведенной через точку $A(0, s_*)$ к графику одной из функций $F^{(\pm)}(s)$ (см. рис. 9.11);

2) невозмущенной области $s = s_*$, расположенной с другой стороны от разрыва.

Пусть вытеснение происходит снизу вверх ($\alpha > 0$, $N_g > 0$), что соответствует характеристической функции $F^{(+)}(s)$ из соотношения (9.47). Из точки $A(0, s_*)$ проведем касательные к графикам функций $f(s)$ и $F^{(+)}(s)$. Тогда абсциссы точек касания B и B_1 (см. рис. 9.11) определяют соответственно фронтовые насыщенности s_c и $s_c^{(+)}$ для горизонтального и наклонного пласта (вытеснение снизу вверх).

Определим на фронте вытеснения значения производных функций $f(s)$ и $F^{(+)}(s)$, представленных на рис. 9.11 соответственно кривыми *4* и *5*. Для этого из точек B и B_1 опустим перпендикуляры до пересечения с кривыми $f'(s)$ и $F'^{(+)}(s)$ в точках C и C_1 соответственно. Из рис. 9.11, иллюстрирующего предшествующий анализ, видно, что

$$F'^{(+)}(s_c^+) < f'(s_c), \; D_1E < DE. \tag{9.51}$$

Запишем теперь выражения для безводной добычи $V = wt$ в случаях горизонтального и наклонного пласта (см. (8.38)). В результате получим соответственно:

$$V(t^0) = \frac{mL}{f'(s_c)} \text{ при } N_g = 0;$$

$$V^{(+)}(t'^0) = \frac{mL}{F'^{(+)}(s_c^+)} \text{ при } N_g > 0.$$

В силу неравенства (9.51) находим, что $V^{(+)}(t'^0) > V(t^0)$.

При вытеснении снизу вверх с учетом силы тяжести создаются более благоприятные условия для получения боль-

шего суммарного дебита вытесняемого флюида за безводный период, чем в случае горизонтального пласта.

Из решения рассмотренной задачи следует, что в отличие от модели Бакли–Леверетта распределение насыщенности (9.50) зависит здесь от параметра N_g, определяемого равенством (9.48), с возрастанием которого условия вытеснения улучшаются: кривая $F^{(+)}(s)$ смещается вправо от кривой $f(s)$. Отсюда следует, что для получения высоких коэффициентов нефте- и газоотдачи за безводный период необходимо поддерживать малые скорости вытеснения. Вместе с тем значительное уменьшение скорости приводит к удлинению сроков разработки месторождения. Поэтому на практике возникает необходимость определения оптимальных режимов разработки.

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что при вытеснении сверху вниз ($\alpha < 0$, $N_g < 0$, $F^{(-)}(s)$ – характеристическая кривая) процесс будет менее эффективным, чем без учета эффекта гравитации ($\alpha = 0$).

Расчеты показывают, что при малых углах α наклона пласта и достаточных темпах нагнетания отличие фронтальной насыщенности $s_c^{(+)}$ от ее значения s_c, даваемого моделью Бакли – Леверетта, незначительно и его в первом приближении можно не учитывать. Если же темп нагнетания мал, то это отличие становится существенным, и учет силы тяжести может сильно влиять на количественные характеристики процессов вытеснения.

Задачи вытеснения несмешивающихся жидкостей с учетом силы тяжести при различных начальных и граничных условиях, в том числе и с применением численных методов и ЭВМ, рассматривались И. А. Чарным и Чэнь-Чжун-сяном [81], В. М. Рыжиком [7], А. М. Пирвердяном [57], М. И. Швидлером, Б. И. Леви и другими исследователями.

Сила тяжести играет значительную роль в процессах гравитационной сегрегации, связанных с разделением фаз в соответствии с их плотностью. При определенных условиях это разделение может оказаться настолько глубоким, что станет существенно влиять на эффективность процесса вытеснения.

В процессе разработки залежи нефти, охваченной заводнением, могут быть периоды прекращения отбора и закачки, что, однако, не означает прекращения перемещения флюидов в пласте. В частности, продолжается процесс сегрегации, который в определенной ситуации за сравнительно небольшое время может привести к образованию водоплавающей залежи в равномерно обводненных частях месторождения.

Учет гравитационных, а также капиллярных сил имеет большое значение при гидродинамических расчетах подземных газохранилищ в водоносных пластах и истощенных обводненных месторождениях. Особенно сильно эти эффекты проявляются при исследовании периода простоя ПХГ.

По существующим представлениям гравитационные силы (совместно с капиллярными) играют важную роль в процессе миграции углеводородов, образовании месторождений природных флюидов. Они полностью определяют распределение фаз в пластах, разработка которых

еще не начата. Знание закономерностей распределения фаз позволяет научно обосновать подсчет запасов углеводородов, правильно использовать методы промысловой геофизики.

Указанные приложения гравитационного эффекта, перечень которых можно было бы продолжить, говорят о его важности в некоторых процессах разработки нефтегазовых месторождений и подземного хранения газа.

§ 7. ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНОГО ДАВЛЕНИЯ

Учет капиллярного скачка давления $p_к$, который задается в виде известной эмпирической функции насыщенностей равенством (9.4), приводит к модели следующего приближения, описываемой уравнениями Рапопорта–Лиса.

Рассмотрим особенности одномерной двухфазной фильтрации несжимаемых флюидов с учетом капиллярного давления в предположении, что силой тяжести можно пренебречь. Тогда процесс двухфазного течения описывается уравнениями (9.17) и (9.26) при $N_g = \overline{N}_g = 0$, которые приводятся к виду

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial f(s)}{\partial \xi} + N_c^{(n)} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[k_2(s) f(s) J'(s) \xi^n \frac{\partial s}{\partial \xi} \right] = 0, \tag{9.52}$$

где $n = 0$, 1 соответственно для случаев прямолинейно-параллельного и радиального вытеснения; $N_c^{(0)} = N_c$, $N_c^{(1)} = \overline{N}_c$ находятся из (9.19) и (9.27) соответственно; безразмерные переменные ξ и τ определяются соответственно из равенств (9.16) и (9.25).

Вопрос о формулировке начального и граничных условий для уравнения (9.52) рассматривался в § 4.

Одним из главных путей изучения механизма вытеснения остается метод физического моделирования как в силу трудностей аналитического и численного исследования, так и из-за отсутствия достаточных сведений об эмпирических функциях $k_1(s)$ и $J(s)$, определяющих процесс двухфазной фильтрации.

Основные критерии подобия, которые необходимо соблюдать при моделировании, можно получить в результате анализа размерностей (см. § 6, гл. 1) или же исследования соответствующих дифференциальных уравнений (9.17), (9.26) или (9.52). Вывод и анализ условий подобия при моделировании процессов двухфазной фильтрации изложен в соответствующих работах [33, 90].

Здесь мы остановимся на некоторых известных решениях уравнения (9.52), позволяющих оценить влияние капиллярных сил на двухфазное течение флюидов.

Стабилизированная зона. Исследования [7, 33] показали, что при постоянной скорости вытеснения $w = \text{const}$ вблизи фронта вытеснения всем значениям насыщенности соответствует одна и та же скорость D распространения скачка насыщенности (стационарный скачок).

Переходная зона, в которой (приближенно) соблюдается указанное свойство течения, была названа стабилизированной. Из этого свойства вытекает неизменность ее размера. Следовательно, в системе координат, связанной с движущимся фронтом, распределение насыщенности не должно зависеть от времени. В. М. Рыжиком, И. А. Чарным и Чэнь-Чжун-сяном было показано, что течение в стабилизированной зоне соответствует предельному решению уравнения (9.52), получаемому при длительном протекании процесса, когда распределение насыщенности не зависит от граничных условий.

Рассмотрим случай прямолинейно-параллельного вытеснения ($n = 0$ в уравнении (9.52)). Пусть D – скорость движения фронта (скачка насыщенности).

Сделаем замену переменных

$$\zeta = \xi - D\tau$$

и будем искать решение уравнения (9.52) (при $n = 0$) в виде

$$s = s(\xi - D\tau) = s(\zeta). \tag{9.53}$$

Из (9.53) найдем

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = -\frac{ds}{d\zeta} D, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{ds}{d\zeta},$$

и уравнение (9.52) имеет следующий вид:

$$-D\frac{ds}{d\zeta} + f'(s)\frac{ds}{d\zeta} + N_c \frac{d}{d\zeta}\left[k_2(s) f(s) J'(s) \frac{ds}{d\zeta}\right] = 0.$$

Проинтегрировав последнее уравнение по ζ, получим:

$$-Ds + f(s) + N_c k_2(s) f(s) J'(s) \frac{ds}{d\zeta} = C. \tag{9.54}$$

где C – постоянная интегрирования.

Требование смыкания искомого решения с решением Бакли – Леверетта, а также стационарность течения в системе координат, связанной со скачком, приводят к следующим граничным условиям [7]:

$$s(-\infty) = s^+ = s_c; \; s(+\infty) = s^- = s_0, \tag{9.55}$$

где s^+ и s^- – насыщенности соответственно за и перед скачком, связанные соотношением (9.42).

Тогда, подставив первое условие (9.55) в соотношение (9.54) и учтя, что при этом $ds/d\xi = 0$, определим константу интегрирования:

$$C = -Ds_c + f(s_c). \tag{9.56}$$

При этом второе условие (9.55) выполняется автоматически, поскольку значение скорости D скачка насыщенности определяется из равенства (9.37). Подставив теперь значение константы C из (9.56) в уравнение (9.54) и разрешив полученное соотношение относительно $d\xi/ds$, найдем:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{N_c k_2(s) f(s) J'(s)}{D(s - s_c)[f(s) - f(s_c)]}. \qquad (9.57)$$

Если проинтегрировать уравнение (9.57) по s, приняв начало отсчета так, чтобы $s = s_1$ при $\xi = \xi_1$, где $s_0 < s_1 < s_c$, то, использовав формулы (9.37) и (9.42), найдем:

$$\zeta - \zeta_1 = N_c \int_{s_1}^{s} \frac{k_2(s) f(s) J'(s)\, ds}{f'(s_c)(s - s_c) - f(s) + f(s_c)}. \qquad (9.58)$$

Формула (9.58) описывает переходную зону бесконечной протяженности, что является следствием принятых допущений. Другими словами, размер стабилизированной зоны бесконечен, и точки смыкания полученного решения с распределением Бакли–Леверетта нет. Фактически для определения ширины зоны по формуле (9.58) приходится брать расстояние между точками, насыщенности в которых близки к значениям s_c и s_0, но не равны этим величинам точно. При этом ширина переходной зоны оказывается пропорциональной величине $l = p_к L/\Delta p$ или $N_c L/m = \alpha_п \cos\theta \sqrt{k}/(\eta_2 w \sqrt{m})$, где параметр N_c определяется из второго равенства (9.20). Типичная кривая распределения насыщенности в переходной (стабилизированной) зоне приведена на рис. 9.12.

Существование решений уравнения (9.52) вида (9.58) показывает, что при постоянной скорости вытеснения распределение насыщенности в стабилизированной зоне является стационарным. Экспериментально такая стабилизированная зона была обнаружена П. Л. Терриллигером и другими [33, 66] при вытеснении нефти водой в заполненных песком трубах и впоследствии подробно исследована в работах Л. Рапопорта и В. Лиса, Д. А. Эфроса и В. П. Оноприенко, Д. Джонс-Парра и Д. Колхауна и других исследователей. В частности, формула (9.58) послужила основой для приближенного моделирования двухфазных течений и его последующих уточнений.

Распределение насыщенности в стабилизированной зоне устанавливается в результате совместного действия сил вязкого сопротивления, капиллярных сил, а также сил тяжести. Все эти силы находятся в равновесии при постоянной скорости вытеснения. Оценивая грубо величину сил, действующих на флюиды в стабилизированной зоне, можно сказать, что капиллярное давление, вызывающее «размывание» фронтов, имеет порядок $\alpha_п\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_m}\right)$, где r_0 и r_m – соответственно минимальный и максимальный «радиусы пор» среды.



Рис. 9.12. Кривая распределения насыщенности в стабилизированной зоне

Перепад давления, необходимый для преодоления вязкого сопротивления в зоне длиной l, пропорционален l. Поэтому при постоянной скорости w размер зоны, в которой существенно влияет капиллярный скачок давления $p_к$, остается постоянным. Возможность крупномасштабного описания процесса вытеснения при помощи модели Бакли – Леверетта связана только с малостью параметра $\varepsilon = p_к/\Delta p$. В схеме Бакли – Леверетта стабилизированная зона моделируется скачком насыщенности.

Из формулы (9.58) можно получить также выражения для $J'(s)$ или $dp_к/ds$, которые позволяют, зная из эксперимента распределение насыщенности, найти «динамическую» зависимость капиллярного давления от насыщенности. Оказалось, что при малых скоростях w динамические кривые совпадают со статической кривой (9.4), а при больших лежат тем ниже нее, чем больше скорость.

Отметим, что уравнение (9.52) имеет также, кроме решения (9.58), зависящего от $\zeta = \xi - D\tau$, точные автомодельные решения, зависящие от величины $\zeta = \xi(N_c\tau/m)^{1/2}$. Автомодельные решения существуют при специальном выборе суммарной скорости $w(t)$ или суммарного расхода $q(t)$ фаз, в частности, при $q = C/\sqrt{t}$ для прямолинейно-параллельной фильтрации и при $q = \text{const}$ для радиального вытеснения.

Заметим, что более полные сведения о влиянии капиллярных сил на процесс двухфазного течения можно получить на пути численного интегрирования уравнения (9.52) [33, 7].

§ 8. ПРОЦЕСС ВЫТЕСНЕНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

В неоднородном пласте процесс вытеснения значительно усложняется. В этом случае капиллярные силы могут играть определенную роль при извлечении пластовых флюидов. Явления, при которых капиллярные силы сами по себе вызывают вытеснение одного флюида другим, называют «капиллярной пропиткой». Эти явления, помимо своей важности для технологии добычи нефти и газа, имеют определенное значение и для почвоведения, некоторых процессов химической технологии и др.

Пусть в неоднородной среде (рис. 9.13) несмачивающая жидкость 2 (например, нефть) вытесняется смачивающей жидкостью 1 (например, водой). Очевидно, что жидкость 1 стремится вытеснить жидкость 2 прежде всего из хорошо проницаемых зон пласта. Водонасыщенность s достигает в этих зонах некоторого значения s_{II}, тогда как в малопроницаемых зонах она имеет меньшее значение s_I. Для одного и того же значения насыщенности капиллярное давление в среде с меньшей проницаемостью больше, чем в более проницаемой среде (рис. 9.14). Но равновесие между двумя рассматриваемыми средами различной проницаемости осуществляется при равенстве капиллярных давлений. Это может реализоваться только при условии, что насыщенность s в малопроницаемой зоне I возрастает, одновременно убывая в хорошо проницаемой зоне II до тех пор, пока капиллярные давления не уравняются. Таким образом, жидкость 1 впитывается в плохо проницаемую среду из

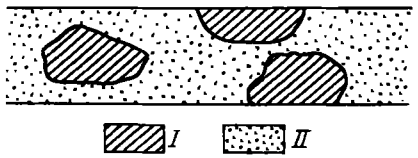


Рис. 9.13. Схематизация неоднородного пласта.
Зона: *I* – малой проницаемости; *II* – хорошо проницаемая

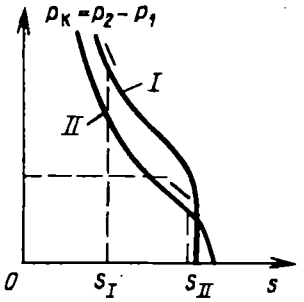


Рис. 9.14. Зависимости капиллярного давления от насыщенности для зон *I* и *II* (см. рис. 9.13)

хорошо проницаемых зон и оттесняет в них жидкость 2. Можно предполагать, что вода впитывается в породу через мелкие поры, а нефть вытесняется в хорошо проницаемые зоны через крупные. Очевидно, что этот механизм увеличивает степень извлечения нефти. Экспериментальные исследования, а также анализ разработки нескольких залежей, сложенных неоднородными гидрофильными породами показывают возможность такого механизма.

Вместе с тем, если жидкость 1 является несмачивающей, роль пропитки очень ограничена: насыщенность жидкостью 1 в зонах *I* остается значительно меньше ее значений в зонах *II*.

Результаты исследования пропитки изолированных образцов имеют практическое значение и применяются при моделировании вытеснения в трещиновато-пористых и неоднородных по проницаемости средах (см. гл. 12).

Характерные особенности вытеснения несмешивающихся жидкостей в неоднородных пористых средах можно выявить в результате исследования процесса в пласте, состоящем из пропластков различной толщины, пористости и проницаемости.

Большая серия экспериментальных исследований по физическому моделированию таких процессов была выполнена В. Г. Оганджанянцем с сотрудниками [66]. Эксперименты проводились на прозрачных моделях пористых сред. Результаты этих работ были позднее проанализированы и теоретически описаны. Приведем здесь качественное описание явлений, происходящих при вытеснении несмешивающихся жидкостей в двухслойном пласте с различными характеристиками.

1. Если пропластки гидродинамически изолированы и перетоки

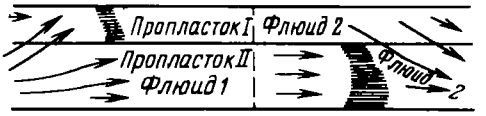


Рис. 9.15. Схема капиллярной стабилизации разбега фронтов

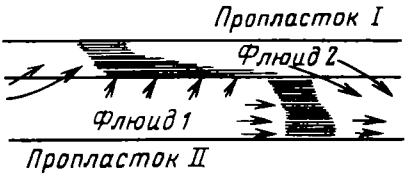


Рис. 9.16. Схема течения при слабом влиянии капиллярных сил

между слоями с различными проницаемостями отсутствуют, то вытеснение, очевидно, происходит в каждом из них независимо. Расчет такого процесса осуществляется так же, как и в случае однородных пластов.

2. Если пропластки гидравлически связаны, но процесс вытеснения происходит достаточно быстро, то капиллярная пропитка играет незначительную роль до тех пор, пока разбег фронтов вытеснения в пропластках не станет достаточно большим. В этом случае вытеснение происходит с постоянными скоростями в каждом из пропластков, причем скорость вытеснения больше в более проницаемом слое. Но эти скорости не совпадают со скоростями вытеснения в случае изолированных пропластков. Вследствие перетоков флюидов между пропластками с различной проницаемостью (рис. 9.15) скорости фронтов вытеснения в каждом слое меньше отличаются друг от друга, чем в случае изолированных слоев. Вместе с тем, относительное опережение фронтов вытеснения в пропластках увеличивается со временем по линейному закону.

3. Если влияние капиллярных сил на перетоки флюидов становится значительным, то, как установлено в экспериментах, при небольшой толщине пласта в гидрофильных средах (т. е. средах, лучше смачиваемых вытесняющей фазой) фронт вытеснения устойчиво распространяется в пропластках различной проницаемости (рис. 9.16); разбег «фронтов» в слоях стабилизируется и не меняется со временем. Это объясняется тем, что в рассматриваемом случае перетоки, вызванные капиллярными силами, еще более значительны, чем в предыдущем случае.

Использование при обработке экспериментов анализа размерностей позволило установить, что устойчивое перемещение фронта вытеснения происходит в некотором оптимальном диапазоне значений параметров, определяющих соотношения гидродинамических и капиллярных сил при вытеснении. При определенных допущениях о кинетике перетоков флюидов было установлено, что при малой скорости вытеснения длина стабилизированной зоны в слоистой среде убывает с ростом скорости, а при больших скоростях возрастает. Отсюда следует, что существует некоторая критическая скорость, при которой длина стабилизированной зоны минимальна.

§ 9*. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ТРЕХФАЗНОЙ СМЕСИ

Исследование фильтрации трехфазной смеси имеет большое практическое значение, так как в нефтегазоносных пластах при определенных условиях происходит совместное движение нефти, воды и свободного газа. Так, в случае, если нефть находится в пласте в смеси со свободной водой, при снижении давления ниже давления насыщения начинается выделение газа из раствора, и в пласте образуется подвижная трехфазная смесь нефть – вода – газ. Давление насыщения является физической константой нефти того или иного месторождения.

Система уравнений трехфазной фильтрации состоит из обобщенного закона Дарси для каждой из фаз (9.8), уравнений неразрывности фаз в потоке (9.5) и условий капиллярного равновесия. Для случая прямолинейно-параллельного потока вдоль оси x несжимаемых фаз при отсутствии силы тяжести эту систему можно представить в виде

$$w_i = -kM_i\frac{\partial p_i}{\partial x},\quad M_i = \frac{k_i(s_1, s_2)}{\eta_i},$$

$$m\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0,\quad i = 1, 2, 3,\quad s_1 + s_2 + s_3 = 1,$$

$$p_3 - p_1 = P_1(s_1, s_2),\ p_2 - p_3 = P_2(s_1, s_2). \tag{9.59}$$

Здесь приняты ранее используемые обозначения: P_j – капиллярное давление, $j = 1, 2$.

Система (9.59) содержит пять эмпирических функций двух переменных k_i, P_j ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$). В качестве их аргументов можно выбрать любые две насыщенности из трех, в сумме составляющих единицу. Однако в силу несимметричности уравнений капиллярного равновесия относительно номеров фаз удобно зафиксировать аргументы s_1 и s_2, придерживаясь правила нумерации фаз, учитывающего их различия по смачиваемости породы пласта. Будем считать, что индекс $i = 1$ всегда отвечает наиболее смачивающей фазе, $i = 2$ – наименее смачивающей (или несмачивающей) фазе, а $i = 3$ – жидкости с промежуточной смачиваемостью. Кроме того, считаем, что краевые углы смачивания в каждой точке одинаковы. Тогда для системы «вода – нефть – газ» такой способ упорядочивания фаз будет зависеть от того, какой является пористая среда – гидрофильной (лучше смачиваемой водой) или гидрофобной (лучше смачиваемой нефтью). В гидрофильной среде индексы 1, 2 и 3 будут отвечать воде, газу и нефти, а в гидрофобной – нефти, газу и воде соответственно. Будем считать для определенности, что пористая среда – гидрофильна; при этом s_1 и s_2 – насыщенности водой и газом соответственно.

Аналогично случаю двухфазной фильтрации (см. § 4) из системы (9.59) можно исключить давления p_i, после чего она сводится к системе двух уравнений относительно насыщенностей s_1 и s_2

$$m\frac{\partial s_1}{\partial t} + w\frac{\partial f_1}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x}\left\{M_1\left[(f_1 - 1)\frac{\partial P_1}{\partial x} - f_2\frac{\partial P_2}{\partial x}\right]\right\};$$

$$m\frac{\partial s_2}{\partial t} + w\frac{\partial f_2}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x}\left\{M_2\left[f_1\frac{\partial P_1}{\partial x} - (f_2 - 1)\frac{\partial P_2}{\partial x}\right]\right\};$$

$$w = \sum_{i=1}^{3} w_i;\ \partial w/\partial x = 0;\ f_i(s_1, s_2) = M_i/(M_1 + M_2 + M_3),\ i = 1, 2. \qquad (9.60))$$

Функции $f_i(s_1, s_2)$ по аналогии с двухфазной фильтрацией можно назвать функциями распределения потоков фаз (аналог функции Бакли–Леверетта). Суммарная скорость фильтрации $w = w(t)$. Для простоты будем считать ее постоянной.

Функциям распределения потоков $f_i(s_1, s_2)$ удобно дать геометрическую интерпретацию при помощи треугольной диаграммы (см. гл. 1 § 5). Легко видеть, что функции f_i определены на треугольнике насыщенностей $\Delta s = \{(s_1, s_2): s_1 \geqslant 0, s_2 \geqslant 0, s_1 + s_2 \leqslant 1\}$ плоскости s и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$f_1 \geqslant 0;\ f_2 \geqslant 0;\ f_1 + f_2 \leqslant 1;$$

кроме того, $f_i = 0$ при $s_i = 0$ и $f_i = 1$ при $s_i = 1$ (рис. 9.17).

Поэтому преобразование $s \to f(s)$, задаваемое этими функциями, переводит треугольник Δ_s в треугольник Δ_f на плоскости f (рис. 9.17, *б*), причем стороны переходят в стороны, а вершины – в вершины.

Одно из важных свойств этого преобразования иллюстрируется на рис. 9.17. Здесь треугольник Δ_s штриховыми линиями разбит на области однофазных (1Φ), двухфазных (2Φ) и трехфазного (3Φ) течений. Потеря сплошности i-й фазой означает обращение в нуль для нее относительной проницаемости k_i, а значит и соответствующей функции f_i. Пунктирные линии на рис. 9.17 представляют собой границы подобластей треугольника Δ_s, в которых $k_i = f_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Таким образом, преобразова-

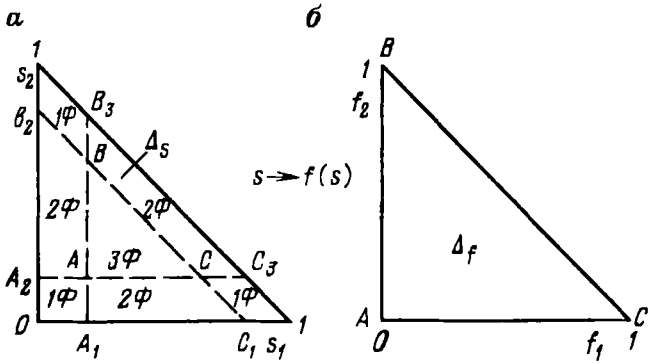


Рис. 9.17. Треугольники насыщенностей (*а*) и функций распределения потоков (*б*)

ние $s \to f(s)$ отображает области 1Φ в вершины, а области 2Φ – в стороны треугольника $\triangle_f$; область трехфазного течения ABC переходит во внутренность треугольника $\triangle_f$.

Если продифференцировать по x капиллярные давления $P_j(s_1, s_2)$ как сложные функции в правых частях системы (9.60), то она примет вид

$$m\frac{\partial s_1}{\partial t} + w\frac{\partial f_1}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(B_{11}\frac{\partial s_1}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial s_2}{\partial x}\right),$$

$$m\frac{\partial s_2}{\partial t} + w\frac{\partial f_2}{\partial x} = k\frac{\partial}{\partial x}\left(B_{21}\frac{\partial s_1}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial s_2}{\partial x}\right), \tag{9.61}$$

где введены следующие обозначения:

$B_{11} = M_1[(f_1 - 1)p_{11} - f_2 p_{21}]$; $B_{12} = M_1[(f_1 - 1)p_{12} - f_2 p_{22}]$;

$B_{21} = M_2[f_1 p_{11} - (1 - f_2)p_{21}]$; $B_{22} = M_2[f_1 p_{12} - (1 - f_2)p_{22}]$;

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial s_j},\ i, j = 1, 2.$$

Перейдем теперь к безразмерным переменным. Для этого введем характерный масштаб длины L и представим капиллярные давления в виде

$$P_j = \pi_j J_j(s_1, s_2);\ \pi_j = \frac{\alpha_{nj}\cos\theta_j}{\sqrt{k/m}},\ j = 1, 2, \tag{9.62}$$

где α_{nj} – межфазное натяжение на границе фазы 3 с j-й фазой; θ_j – краевой угол смачивания породы j-й фазой; $J_j(s_1, s_2)$ – безразмерные капиллярные давления или обобщенные функции Леверетта.

Тогда из (9.61) получим:

$$\frac{\partial s_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = N_c\frac{\partial}{\partial \xi}\left(A_{11}\frac{\partial s_1}{\partial \xi} + A_{12}\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right);$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi} = N_c\frac{\partial}{\partial \xi}\left(A_{21}\frac{\partial s_1}{\partial \xi} + A_{22}\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right). \tag{9.63}$$

Здесь введены безразмерные переменные и параметры

$\xi = x/L$, $\tau = wt/(mL)$, $N_c = k\pi_1/(\eta_1 wL)$,

$\psi_i = \eta_1\pi_1 k_1/(\eta_i\pi_i)$; $J_{ij} = \partial J_i/\partial s_j$

и обозначения

$$A_{11} = -\psi_1[(1 - f_1)J_{11} + f_2 J_{21}],\ A_{12} = -\psi_1[(1 - f_1)J_{12} + f_2 J_{22}],$$
$$A_{21} = \psi_2[f_1 J_{11} + (1 - f_2)J_{21}],\ A_{22} = \psi_2[f_1 J_{12} + (1 - f_2)J_{22}]. \tag{9.64}$$

Очевидно, параметр N_c равен безразмерному капиллярному числу N_{c1} (см. (9.19)) и имеет тот же физический смысл.

Нетрудно убедиться, что так же, как и для двухфазных течений, в крупномасштабном приближении параметр N_c при старших производ-

ных системы (9.63) мал. Действительно, простая оценка дает: при $L = 100$ м, $\theta = 0$, $\alpha_{n1} = 30$ мН/м, $\eta_1 = 1$ мПа·с, $k = 1$ мкм^2, $m = 0{,}2$ и $w = 1$ м/сут получаем $N_c \approx 0{,}01$. Поэтому всюду, где насыщенности s_i меняются плавно, правыми частями системы (9.63) можно пренебречь. Получаемая при этом усеченная система уравнений трехфазной фильтрации, обобщающая модель Бакли–Леверетта, принимает вид

$$\frac{\partial s_i}{\partial \tau} + \frac{\partial f_i}{\partial \xi} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{9.65}$$

или в развернутом виде после дифференцирования по ξ:

$$\frac{\partial s_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_1}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_1}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial \xi} = 0;$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial \tau} + \frac{\partial f_2}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial s_2}\frac{\partial s_2}{\partial \xi} = 0. \tag{9.66}$$

Решения системы (9.66) представляют наибольший интерес с точки зрения приложений. Эта система уравнений описывает вытеснение неоднородной жидкости из полубесконечного пласта ($\xi \geqslant 0$) при нагнетании в него другой жидкости, которая может находиться в одно-, двух- и трехфазном состояниях. Простейший вариант начально-краевых условий для системы (9.66) состоит в задании кусочно-постоянных значений насыщенностей. Если состав закачиваемой жидкости считать неизменным во времени, то задача о вытеснении сведется к решению системы (9.66) при условиях

$$s_i = s_{i0} \text{ при } \tau = 0, \ \xi > 0;$$
$$s_i = s_i^0 \text{ при } \xi = 0, \ \tau > 0, \ i = 1, 2, \tag{9.67}$$

где s_{i0} – начальные значения насыщенностей в пласте; s_i^0 – насыщенности во входном сечении пласта.

Если пласт насыщен трехфазной жидкостью, то точка $D_0(s_{10}, s_{20})$ находится в области ABC треугольника насыщенностей $\triangle s$ (см. рис. 9.17, *а*). При вытеснении ее одно-, двух- и трехфазными системами точка $D^0(s_1^0, s_2^0)$ будет находиться соответственно в областях 1Φ, 2Φ и 3Φ (см. рис. 9.17, *а*).

Решение задачи (9.66), (9.67) было исследовано (А. Н. Варченко, А. Ф. Зазовский с сотрудниками, 1989 г.) методом характеристик. Построены разрывные решения, являющиеся комбинацией центрированных волн и невозмущенных областей. Показано, что система не является строго гиперболической, как это считалось ранее (И. А. Чарный) [81]. Более того, она может быть смешанного типа – гиперболической при одних насыщенностях и эллиптической при других (Белл, Шубин, Холден). Это порождает своеобразные гидродинамические эффекты, не встречающиеся в двухфазной фильтрации.

Не останавливаясь здесь на математических трудностях исследования трехфазной фильтрации, обратим внимание на не менее важную и принципиальную проблему: оснащение исходными дан-

ными систем уравнений (9.63) и (9.66). В эти системы входят пять эмпирических функций двух переменных: функции распределения потоков $f_1(s_1, s_2)$ и $f_2(s_1, s_2)$, выражающиеся через вязкости фаз η_i, относительные фазовые проницаемости $k_i(s_1, s_2)$, и капиллярные давления $J_1(s_1, s_2)$ и $J_2(s_1, s_2)$. Весьма существенно, что эти функции должны быть известны с довольно высокой точностью, так как в системы уравнений входят их производные.

Общие свойства этих функций вытекают из простых физических соображений:

с увеличением насыщенности i-й фазой от 0 до 1 относительная фазовая проницаемость для нее также возрастает от 0 до 1;

давления в фазах упорядочены характером смачиваемости породы этими фазами ($p_1 < p_3 < p_2$);

капиллярные давления J_j убывают с увеличением насыщенности более смачивающей фазой.

Последнее представляется естественным по той причине, что при постоянстве насыщенности одной из фаз мениски межфазной границы двух других фаз должны смещаться в более крупные поры при увеличении насыщенности более смачивающей фазой и в более мелкие – при ее уменьшении. Математическое выражение этих свойств таково:

$k_i = 0$ при $s_i = 0$; $k_i = 1$ при $s_i = 1$; $J_j \geqslant 0$, $j = 1, 2$; $\partial k_i / \partial s_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3$; $\partial J_1 / \partial s_1 < 0$; $\partial J_2 / \partial s_2 > 0$.

Но для решения конкретных задач и их практического использования этого недостаточно; необходимы явные и достаточно точные выражения для материальных функций трехфазного потока. Методы экспериментального определения относительных фазовых проницаемостей k_i при трехфазной фильтрации идейно остаются такими же, как при двухфазной фильтрации [90], но только резко возрастает количество экспериментов. В настоящее время имеется считанное число примеров определения функций k_i и $f_i(s_1, s_2)$ для трехфазных систем, укажем на результаты: Чарного – Чэнь-Чжун-сяна и американских авторов (А. Корей с соавторами, М. Дельшад с соавторами, Р. Ленард и Т. Паркер, Д. Сераф и И. Фэтт, А. Сарем, Ф. Шейдер и В. Оунс, Р. Снелл, 1987 г.). Примеры определения капиллярных давлений при трехфазной фильтрации как функций двух насыщенностей авторам не известны.

Имеются физические предпосылки и некоторые экспериментальные данные, показывающие, что относительные проницаемости k_i для некоторых из фаз зависят, в основном, от «своих» насыщенностей и слабо зависят от насыщенностей другими фазами. Это было замечено еще М. Левереттом и В. Левисом (1941 г.) для конкретной системы. Но этот результат не является постоянным правилом и в каждом случае требует специальной проверки.

На основе анализа экспериментов Н. Стоун (1965 г.) предложил полуэмпирический метод аппроксимации материальных функций модели трехфазной фильтрации. Он заключается в замене реального трехфазного течения двумя как бы вложенными друг в друга двухфазными потоками.

Предполагается, что по мелким порам движутся смачивающая фаза и жидкость промежуточной смачиваемости (т. е. вода и нефть), а по более крупным порам – жидкость промежуточной смачиваемости (нефть) и несмачивающая фаза (газ). Отсюда следует, что фазовые проницаемости для воды и газа зависят только от их насыщенностей, т. е. являются функциями одной переменной, соответственно s_1 и s_2. По этим же причинам капиллярные давления на контактах вода – нефть и нефть – газ также можно считать функциями только одной насыщенности – соответственно водной (s_1) и газовой (s_2) фазами. Физически это означает неподвижность менисков водной фазы, граничащей с нефтью, при замене части нефти газом и неподвижность менисков газовой фазы, граничащей с нефтью, при замене части нефти водой. Очевидно, эти допущения являются лишь приближенными.

Относительная фазовая проницаемость k_3 для жидкости промежуточной смачиваемости пересчитывается через фазовые проницаемости, отвечающие двум двухфазным течениям, происходящим в отсутствие либо несмачивающей (k_{31}), либо смачивающей (k_{32}) жидкостей. Способы пересчета k_3 по известным k_{31} и k_{32} разработаны (М. Алеман, Т. Слеттэри; Ф. Файерс и Т. Мэтьюс).

Таким образом, в модели Стоуна вместо пяти функций двух переменных требуется определить шесть функций одной переменной:

$$k_1 = k_1(s_1);\ k_2 = k_2(s_2);\ k_{31} = k_{31}(s_1);\ k_{32} = k_{32}(s_2);\ J_i = J_i(s_i),$$
$$i = 1, 2. \qquad (9.68)$$

Структура фазовых проницаемостей обычно имеет следующий вид:

$$k_i(s_i) = a_i s_i^{\alpha_i} + b_i s_i^{\beta_i};$$
$$k_{3i}(s_i) = c_i(1 - s_i)^{\gamma_i} + d_i(1 - s_i)^{\delta_i},\ i = 1, 2;$$
$$k_3(s_1, s_2) = \frac{(1 - s_1 - s_2)k_{31}k_{32}}{(1 - s_1)(1 - s_2)},$$

где параметры a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i, γ_i, δ_i находятся экспериментально.

Представление в виде (9.68) материальных функций трехфазного потока находит сейчас широкое применение при теоретических исследованиях и расчетах.

Другой разрабатываемый подход к построению эмпирических функций модели трехфазной фильтрации связан с использованием теории перколяции. Но практические результаты на этом перспективном пути еще не достигнуты.

§ 10. МОДЕЛЬ МАСКЕТА – МИРЕСА ТРЕХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Задача исследования трехфазного потока еще более осложняется, если хотя бы одна из фаз – сжимаема. В этом случае уже не удается исключить фазовые давления p_i и свести задачу к системе уравнений для насыщенности s_i.

Большим шагом в упрощенном математическом моделировании

совместной фильтрации нефти, газа и воды явилась предложенная М. Маскетом и М. Миресом (1936 г.) [47] модель течения, позволившая достаточно удовлетворительно решать ряд инженерных задач разработки месторождений природных флюидов. В основу этой модели было положено предположение, что углеводородная система состоит из двух фаз: жидкой нефтяной (тяжелые фракции нефти) и газовой фазы. При этом фаза «нефть», как было принято М. Маскетом, является нелетучей жидкостью и не может растворяться в газовой фазе; газ же может находиться как в свободном состоянии, так и быть растворенным в нефти. Растворимостью углеводородных компонентов в пластовой воде и капиллярным скачком давления пренебрегают. Движение предполагается изотермическим.

Будем считать, что растворение газа в нефти подчиняется линейному закону Генри:

$$V_{гр0} = rV_{н0}. \tag{9.69}$$

Здесь (и далее в этом параграфе) индексом «0» отмечены параметры при нормальных атмосферных условиях; $V_{гр0}$, $V_{н0}$ – соответственно объем растворенного газа и объем нефти при нормальных условиях; индексы «н» («в») и «гр» относятся соответственно к нефти (воде) и газу; r – коэффициент объемной растворимости газа, являющийся экспериментальной функцией давления p.

При описании фильтрации газированной жидкости М. Маскет использовал понятие объемного коэффициента β жидкости, определяемого для нефтяной и водной фазы соответственно из отношений

$$\beta_н = V_н/V_{н0},\ \beta_в = V_в/V_{в0}, \tag{9.70}$$

где $V_н$ и $V_в$ – соответственно объемы нефти с растворенным в ней газом и воды в пластовых условиях [1].

Из (9.70) вытекает следующее соотношение между плотностями нефти (и воды) при нормальных $\rho_{н0}$ ($\rho_{в0}$) и пластовых $\rho_н$ ($\rho_в$) условиях:

$$\rho_{н0} = \beta_н\rho_н;\ \rho_{в0} = \beta_в\rho_в. \tag{9.71}$$

С учетом принятых допущений о составах газа и жидкой углеводородной фазы, а также кинетики растворения газа, дифференциальные уравнения совместной фильтрации газированной жидкости, соответствующие модели Маскета – Мireса, можно получить из общих уравнений многофазной фильтрации так же, как и системы (9.59). Для простоты ограничимся случаем прямолинейно-параллельного течения вдоль оси x. Обобщения на случай трехмерного фильтрационного потока можно сделать аналогично § 3.

Уравнение неразрывности (9.5) для каждой из фаз в рассматриваемом одномерном случае принимает вид

[1] Можно показать, что величины $\beta_н$ и $\beta_в$, а также коэффициент растворимости r выражаются через параметры (плотность, насыщенность и концентрация), общепринятые при описании многокомпонентных смесей (см. § 2).

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_i s_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i w_i) = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{9.72}$$

Заменив плотности нефти $\rho_н$ и воды в пластовых условиях их выражениями из (9.71) и использовав закон Дарси (9.59), из (9.72) найдем для этих фаз соответственно (m и k – постоянны):

$$\frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_н}{\beta_н}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_н}{\eta_н\beta_н}\frac{\partial p}{\partial x}\right);$$
$$\frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_в}{\beta_в}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_в}{\eta_в\beta_в}\frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{9.73}$$

где относительные фазовые проницаемости $k_н$ и $k_в$ являются эмпирическими функциями насыщенностей, а объемные коэффициенты и коэффициенты вязкости зависят известным образом от давления: $\beta_н(p)$, $\beta_в(p)$ и $\eta_н(p)$, $\eta_в(p)$.

При составлении уравнения неразрывности для газа необходимо учесть, что газ движется как в свободном, так и в растворенном (жидком) состоянии. При этом газ в жидком виде переносится со скоростью $w_н$ фильтрации «нефти», а плотность $\rho_{гр}$ растворенного газа, как следует из (9.69) и (9.70), равна:

$$\rho_{гр} = \frac{M_{гр}}{V_н} = \frac{\rho_{г0}}{\beta_н}\frac{V_{гр0}}{V_{н0}} = \frac{\rho_{г0} r V_{н0}}{\beta_н V_{н0}} = \frac{\rho_{г0} r}{\beta_н}.$$

Тогда суммарная массовая скорость газа $(\rho_г w_г)_с$ определяется из соотношения

$$(\rho_г w_г)_с = \rho_г w_г + \rho_{гр} w_н = \rho_г w_г + \frac{\rho_{г0} r}{\beta_н} w_н. \tag{9.74}$$

Подсчитаем теперь суммарную массу газа в единице порового объема.

Массовое содержание нефти в единице объема с учетом (9.71):

$$M_н = m\rho_н s_н = m\frac{\rho_{н0}}{\beta_н} s_н.$$

Отсюда найдем удельный объем нефти при нормальных условиях:

$$V_{н0} = M_н/\rho_{н0} = ms_н/\beta_н,$$

а затем при помощи (9.69) – объем растворенного газа:

$$V_{гр0} = r\frac{ms_н}{\beta_н}.$$

Тогда масса газа $M_{гр}$, растворенного в нефти, и масса свободного газа $M_{гс}$ в единице объема равны соответственно:

$$M_{гр} = \rho_{г0} V_{гр0} = \frac{mrs_н\rho_{г0}}{\beta_н};\ M_{гс} = m\rho_г s_г.$$

Просуммировав эти величины, найдем полную массу газообразной фазы в единице порового объема:

$$(m\rho_г s_г)_с = M_{гс} + M_{гр} = m\rho_г s_г + mrs_н\rho_{г0}/\beta_н. \tag{9.75}$$

Подставив выражения (9.74) и (9.75) в (9.72) ($i \to$ газ) и учтя (9.59), получим дифференциальное уравнение для газовой фазы:

$$\frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_г s_г + \frac{r(p)\rho_{г0}s_н}{\beta_н(p)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{k_г\rho_г}{\eta_г(p)} + \frac{k_н r(p)\rho_{г0}}{\eta_н(p)\beta_н(p)}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]. \tag{9.76}$$

Дифференциальные уравнения (9.73), (9.76) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения насыщенностей $s_н$, $s_в (s_г = 1 - s_н - s_в)$ и давления p и известны как уравнения Маскета – Мереса. Несмотря на ряд принятых упрощающих допущений, это – сложная система уравнений, нелинейная как по давлению, так и по насыщенности и требующая для своего решения использования ЭВМ.

Различные преобразования и представления этой системы уравнений, удобные для проведения численных расчетов, приведены в работах [3, 33, 38]. Использовались различные приближенные методы решения уравнений (9.73), (9.76), дающие связь между давлением и насыщенностью на контуре залежи, а также метод последовательных приближений, МПССС, метод усреднения и др. С приближенными подходами к исследованию нестационарной фильтрации трехфазной смеси можно познакомиться по работам [57, 66, 69].

§ 11. ДВИЖЕНИЕ ГАЗИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Большинство практических методов расчета движения газированной нефти базируется на результатах исследования установившегося течения. Проблема установившейся фильтрации газированной нефти была рассмотрена С. А. Христиановичем. Им была показана возможность сведения нелинейных задач установившейся фильтрации газожидкостных систем к хорошо изученным задачам движения однородной несжимаемой жидкости в пористой среде. Другими словами, задача приводилась к уравнению Лапласа для некоторой вспомогательной функции H, которая в дальнейшем получила название функции Христиановича.

Рассмотрим прямолинейно-параллельное стационарное течение трехфазной системы с учетом реальных свойств пластовых флюидов. В этом случае система уравнений (9.73), (9.76) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_н(s_н, s_в)}{\eta_н(p)\beta_н(p)}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0, \tag{9.77}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_в(s_н, s_в)}{\eta_в(p)\beta_в(p)}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0, \tag{9.78}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{k_г(s_н, s_в)}{\eta_г(p)}\rho_г(p) + \frac{k_н(s_н, s_в)r(p)\rho_{г0}}{\eta_н(p)\beta_н(p)}\right]\frac{\partial p}{\partial x}\right\} = 0. \tag{9.79}$$

Введем понятия газового $\Gamma_г$ и водонефтяного $\Gamma_в$ факторов; по определению, имеем:

$$\Gamma_г = Q_{г0}/Q_{н0};\ \Gamma_в = Q_{в0}/Q_{н0}. \tag{9.80}$$

При помощи равенств (9.74) и (9.71) находим:

$$Q_{г0} = \frac{(\rho_г w_г)_с}{\rho_{г0}}\omega = \left(\frac{\rho_г}{\rho_{г0}} w_г + \frac{r}{\beta_н} w_н\right)\omega;$$

$$Q_{н0} = \frac{\rho_н w_н}{\rho_{н0}}\omega = \frac{w_н}{\beta_н}\omega;\ Q_{в0} = \frac{\rho_в w_в}{\rho_{в0}}\omega = \frac{w_в}{\beta_в}\omega,$$

где ω – площадь сечения пласта.

Тогда выражения (9.80) примут следующий вид:

$$\Gamma_г = \frac{\rho_г(p) w_г \beta_н(p)}{\rho_{г0} w_н} + r(p);\ \Gamma_в = \frac{w_в \beta_н(p)}{w_н \beta_в(p)},$$

откуда, используя выражения (9.59) для скоростей фильтрации фаз, окончательно найдем:

$$\Gamma_г = \frac{\rho_г(p)\lambda_1(s_н, s_в)\beta_н(p)}{\rho_{г0}\eta_{01}(p)} + r(p); \tag{9.81}$$

$$\Gamma_в = \frac{\lambda_2(s_н, s_в)\rho_н(p)}{\eta_{02}(p)\beta_в(p)}, \tag{9.82}$$

где введены следующие обозначения:

$$\lambda_1(s_н, s_в) = \frac{k_г(s_н, s_в)}{k_н(s_н, s_в)};\ \eta_{01} = \frac{\eta_г(p)}{\eta_н(p)}; \tag{9.83}$$

$$\lambda_2(s_н, s_в) = \frac{k_в(s_н, s_в)}{k_н(s_н, s_в)};\ \eta_{02} = \frac{\eta_в(p)}{\eta_н(p)}. \tag{9.84}$$

Следуя С. А. Христиановичу, покажем, что при установившемся течении трехфазной смеси газовый $\Gamma_г$ и водонефтяной $\Gamma_в$ факторы остаются постоянными.

Для этого сделаем сначала некоторые вспомогательные преобразования. С учетом (9.81) и (9.82) преобразуем сумму, стоящую в квадратной скобке в левой части уравнения (9.79), к следующему виду:

$$\frac{k_г}{\eta_г}\rho_г + \frac{k_н r \rho_{г0}}{\eta_н \beta_н} = \frac{k_н \rho_{г0}}{\eta_н \beta_н}\left(\frac{k_г}{k_н}\frac{\eta_н \rho_г}{\eta_г \rho_{г0}}\beta_н + r\right) = \frac{k_н \rho_{г0}}{\eta_н \beta_н}\Gamma_г.$$

Тогда уравнение (9.79) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_н(p)}{\eta_н(p)\beta_н(p)}\frac{\partial p}{\partial x}(\rho_{г0}\Gamma_г)\right] = 0.$$

Продифференцировав последнее равенство как произведение и учтя уравнение неразрывности (9.77) для нефти, найдем ($\rho_{г0} = \text{const}$):

$$\frac{k_н}{\eta_н}\frac{\rho_{г0}}{\beta_н}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Gamma_г}{\partial x}=0,$$

откуда, поскольку $\partial p/\partial x \neq 0$, получим $\partial \Gamma_г/\partial x = 0$, следовательно, газовый фактор постоянен вдоль линии тока:

$$\Gamma_г = \text{const}. \tag{9.85}$$

Совершенно аналогично преобразуется уравнение (9.78). С учетом (9.82) и (9.84) получим:

$$\frac{k_в}{\eta_в\beta_в}=\frac{k_н}{\eta_н\beta_н}\frac{k_в}{k_н}\frac{\eta_н\beta_н}{\eta_в\beta_в}=\frac{k_н}{\eta_н\beta_н}\Gamma_в,$$

и уравнение (9.78) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_н}{\eta_н\beta_н}\frac{\partial p}{\partial x}\Gamma_в\right)=0,$$

откуда, в силу уравнения (9.77), найдем:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Gamma_в}{\partial x}=0$$

и, следовательно, вдоль линии тока водонефтяной фактор также постоянен:

$$\Gamma_в = \text{const}. \tag{9.86}$$

Константы в соотношениях (9.85) и (9.86) определяются значениями давления и насыщенностей $s_н$ и $s_в$ в какой-либо точке линии тока (например, на контуре пласта или в невозмущенной области движения, где значения насыщенностей и давления постоянны). Обозначим эти константы соответственно через $\Gamma_{г0}$ и $\Gamma_{в0}$. Тогда соотношения (9.85) и (9.86) с учетом (9.81) и (9.82) принимают вид

$$\frac{\rho_г(p)\lambda_1(s_н, s_в)\beta_н(p)}{\rho_{г0}\eta_{01}(p)}+r(p)=\Gamma_{г0};$$

$$\frac{\lambda_2(s_н, s_в)\beta_н(p)}{\eta_{02}(p)\beta_в(p)}=\Gamma_{в0}. \tag{9.87}$$

Равенства (9.87) дают два дополнительных соотношения, позволяющие связать между собой насыщенности $s_н$ и $s_в$ порового пространства нефтью и водой в какой-либо точке пористой среды и давление p в этой точке. Это дает возможность выразить $s_н$ и $s_в$ из уравнений (9.87) как функции давления.

Учитывая это, введем обобщенную функцию Христиановича в виде

$$H(p)=\int k\frac{k_н(s_н, s_в)}{\beta_н(p)\eta_н(p)}dp+\text{cosnt}. \tag{9.88}$$

Тогда $dH = (kk_{н}/\beta_{н}\eta_{н})dp$, и уравнение (9.77) принимает вид

$$d^2H/dx^2 = 0, \tag{9.89}$$

т.е. приводится к одномерному уравнению Лапласа для функции H, определяемой из равенства (9.88). При этом уравнение для скорости фильтрации нефти, как следует из (9.59), получаем в следующем виде:

$$w_{н} = -\beta_{н}(p)\frac{dH}{dx},$$

а приведенный объемный расход нефти

$$Q_{н0} = \frac{w_{н}}{\beta_{н}}\omega = -\frac{dH}{dx}\omega. \tag{9.90}$$

Отметим, что аналогичные результаты получают и для плоского и пространственного стационарного фильтрационного потока [69].

Система уравнений (9.89) и (9.90) полностью совпадает с обычными уравнениями движения несжимаемой жидкости по закону Дарси (см. гл. 3). Таким образом, каждому случаю движения однородной жидкости отвечает случай движения газированной жидкости. Разница будет заключаться в том, что одному и тому же полю скоростей однородной и газированной жидкости будут отвечать разные перепады давления. При этом семейство изобар в однородной жидкости будет являться семейством изобар и для газированной жидкости. Абсолютные значения давлений на этих линиях будут различны. Зная распределение давления и скорость фильтрации нефти, из уравнений (9.87) и (9.59) можно найти распределение свободного газа и воды в области движения и скорости фильтрации этих фаз.

Таким образом, в общем случае изучение установившегося течения трехфазной смеси сводится к интегрированию уравнений Лапласа для обобщенной функции Христиановича $H(p)$. Следовательно, для однотипных постановок задач результаты, известные для фильтрации однородной несжимаемой жидкости (см. гл. 3), могут быть использованы для расчета фильтрации трехфазной системы при замене давления p на функцию $H(p)$.

При отсутствии воды в пласте, полагая водонасыщенность $s_{в} = 0$ и $\Gamma_{в} = 0$, получим частный случай установившегося течения газированной нефти. В этом случае расчеты существенно упрощаются. Для фазовых проницаемостей можно использовать стандартные зависимости $k_{г}(s)$, $k_{н}(s)$, $(s \equiv s_{н})$, известные для газожидкостной системы (см. гл. 1). Кроме того, будем считать, что коэффициенты вязкостей $\eta_{г}$, $\eta_{н}$ не зависят от давления, нефть слабо сжимаема, так что $\beta_{н} \approx 1$, а газ – совершенный (см. гл. 2), для которого справедливо следующее равенство:

$$\frac{\rho_{г}}{\rho_{г0}} = \frac{p}{p_0}.$$

Вместо коэффициента растворимости $r(p)$, входящего в закон Генри

(9.69), введем размерный объемный коэффициент растворимости R [м^3/(м^3 · Па)], используемый обычно при расчетах и определяемый как объем газа, который растворяется в единице объема нефти при повышении давления на 1 Па. Тогда, очевидно,

$$r(p) = Rp,$$

и коэффициент R будем считать постоянным.

С учетом этих дополнительных допущений, выражение (9.81) для газового фактора принимает в этом случае вид

$$\zeta \equiv \eta_{01}\Gamma_г = \frac{\rho_г(p)\lambda_1(s)}{\rho_{г0}} + \eta_{01}r(p) =$$

$$= \frac{p}{p_0}\lambda_1(s) + \eta_{01}R_p = \frac{p}{p_0}[\lambda_1(s) + \alpha]. \qquad (9.91)$$

Здесь $\lambda_1(s) = k_г(s)/k_н(s)$, как следует из равенства (9.83), и введено обозначение $\alpha = Rp_0\eta_{01}$ – безразмерная константа. При постоянном газовом факторе (9.85) величина ζ также постоянна.

Тогда из (9.91) найдем:

$$p^*(s) \equiv \frac{p}{p_0\zeta} = \frac{1}{\lambda_1(s) + \alpha}, \qquad (9.92)$$

где через $p^*(s)$ обозначена известная безразмерная функция насыщенности.

По известным фазовым проницаемостям $k_г(s)$ и $k_н(s)$ можно построить график $p^* = p^*(s)$ по формуле (9.92). Для относительных проницаемостей Викова и Ботсета [33, 81] он приведен на рис. 9.18 (для несцементированных песков).

Исключив из зависимостей $k_н = k_н(s)$ и $p^* = p^*(s)$ насыщенность s как параметр, можно связать фазовую проницаемость с давлением:

$$k_н(s) = k_н[s(p^*)] = k_н(p^*).$$

Зависимость $k_н(p^*)$ приведена на рис. 9.19. Теперь функцию Христиановича (9.88) можно вычислить явным образом. Для этого представим ее в безразмерном виде. Из равенств (9.88) и (9.92) имеем:

$$dH = \frac{k}{\eta_н}k_н(s)\,dp = \frac{k}{\eta_н}k_н(p^*)\,d(p_0\zeta p^*) = \frac{k}{\eta_н}p_0\zeta\,dH^*, \qquad (9.93)$$

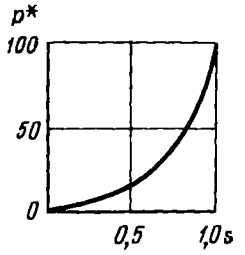
где безразмерный аналог функции $H(p)$ определен из равенства

$$H^* = H^*(p^*) = \int_0^{p^*} k_н(p^*)\,dp^*. \qquad (9.94)$$

Зависимость (9.94) определяется численным или графическим интегрированием с использованием рис. 9.19 и приведена на рис. 9.20 для трех значений $\alpha = Rp_0\eta_г/\eta_н$.

Этот метод расчета был предложен Б. Б. Лапуком [40]. На примере

Рис. 9.18. Зависимость безразмерного давления от насыщенности



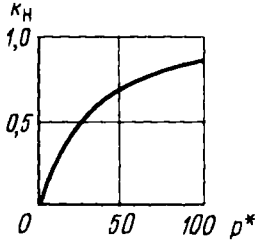


Рис. 9.19. Зависимость относительной фазовой проницаемости от p^*

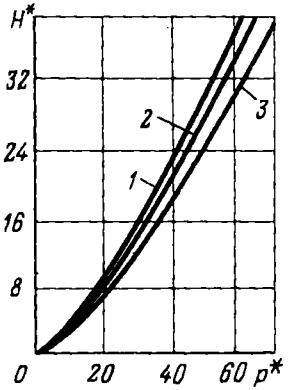


Рис. 9.20. Зависимости безразмерной функции Христиановича от безразмерного давления.
α: *1* – 0,02; *2* – 0,015; *3* – 0,01

одномерных течений сформулируем последовательность этих расчетов.

По известным для данной залежи газовому фактору $\Gamma_г$ и давлениям на границах – $p_к$ на контуре питания и $p_g(p_c)$ на галерее (или забое центральной скважины) – определяют из (9.91) и (9.92) величины

$\zeta = \eta_{01}\Gamma_г$, $p_к^* = p_к/(p_0\zeta)$ и $p_g^* = p_g/(p_0\zeta)$.

Зная $p_к^*$ и p_g^*, по графику $H^*(p^*)$ (см. рис. 9.20) находят $H_к^*$ и H_g^*, а затем $H_к$ и H_g из равенства (9.93).

Затем, используя аналогию (9.90) с движением несжимаемой жидкости, вычисляют дебит жидкой и газовой фазы.

В результате получим:

для прямолинейно-параллельного потока

$$Q_{н0} = \frac{k}{\eta_н} \frac{H_к - H_в}{L} \omega;$$

для радиального течения

$$Q_{н0} = 2\pi h \frac{k}{\eta_н} \frac{H_к - H_с}{\ln(R_к/r_с)};$$

$$Q_{г0} = \Gamma_г Q_{н0}$$

Функция H здесь будет распределена так же, как и давление при фильтрации однородной несжимаемой жидкости – по линейному закону для прямолинейного движения, по закону логарифмической кривой – для радиального потока.

И. А. Чарный обратил внимание на возможность упрощения этих расчетов [81], заметив, что в широком диапазоне изменения p^* зависимость $H^*(p^*)$ изображается почти прямой линией (см. рис. 9.20). С достаточной точностью можно принять

$$H^* = Ap^* + B, \tag{9.95}$$

так что разность $H_к - H_с$, входящая в выражение для дебитов, легко выражается через депрессию $p_к - p_с$. Согласно (9.95), (9.93) и (9.91) получим:

$$H_г - H_с = \frac{k}{\eta_н} p_0 \zeta (H^*_к - H^*_с) = A \frac{k}{\eta_н} p_0 \zeta (p^*_к - p^*_с) = A \frac{k}{\eta_н} (p_к - p_с).$$

Это равенство показывает, что для приближенных расчетов газированную жидкость можно рассматривать как фиктивную однородную несжимаемую жидкость, движущуюся в пласте, в котором параметр $k/\eta_н$ следует заменить величиной $A_к/\eta_н$. Показано (М. М. Глаговский, М. Д. Розенберг, 1961 г.), что параметр A удовлетворительно описывается следующей формулой:

$$A \approx 0{,}944 - 21{,}43\alpha,$$

где $\alpha \approx Rp_0\eta_г/\eta_н$ и предполагается выполнение условия $0{,}2 \leqslant p_с/p_к \leqslant 1$.

Соотношения, определяющие характеристики установившегося течения реальной газированной нефти, широко используются для построения приближенных методов расчета нестационарной фильтрации газожидкостных смесей и для обработки результатов исследования скважин.

При расчетах притока газированной жидкости к скважинам часто используют метод последовательной смены стационарных состояний. В основе этого метода и некоторых других приближенных методов расчета неустановившейся фильтрации газированной нефти лежит допущение о постоянстве в каждый момент времени газового фактора

вдоль линии тока. Использование этого условия, справедливого, как мы видели, при установившемся движении, для расчета неустановившихся течений газированной нефти является приближенным приемом. Показано [69], что при нестационарном движении газированной жидкости газовый фактор в каждый момент времени не остается строго постоянным вдоль линии тока.

Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулируйте основные допущения теории многофазной фильтрации.

2. Какой физический смысл имеют безразмерные капиллярный и гравитационный параметры (9.19)? В каких случаях влиянием капиллярных сил можно пренебречь?

3. Какой физический смысл имеет функция Бакли–Леверетта? Каковы ее особенности?

4. Что является условием образования разрыва насыщенности и когда разрыв не возникает?

5*. Показать, что задача (9.30), (8.14) автомодельна. Свести ее к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения и построить предельное решение ($s_0 = 0$, $s^0 = 1$).

6*. Почему задача о смешивающемся вытеснении двух жидкостей (см. разд. 5.3) имеет разрывное решение при отношении коэффициентов вязкостей $\eta_0 \geqslant 1$? Постройте это решение.

7. Какова геометрическая интерпретация условий устойчивости разрыва (9.44), (9.45)?

8. В каком из двух случаев – слабо или сильно обводненного пласта – эксплуатация нефтяных залежей при помощи заводнения эффективнее? Дайте качественную и количественную оценку.

9. Используя решение (9.50) и фазовые проницаемости в виде (8.28), постройте график распределения насыщенности по пласту $s(x)$ для заданного момента времени t_0 при вытеснении нефти в наклонном пласте ($\alpha = -45°$). Как он будет меняться при изменении скорости w нагнетания воды? Сравните со случаем горизонтального пласта.

10. Что называют стабилизированной зоной и каков характер распределения насыщенности в ней?

11*. В чем состоят принципиальные трудности и отличия математического описания трехфазной фильтрации от двухфазных течений?

12. Каковы методы определения относительных фазовых проницаемостей и капиллярных давлений для трехфазных фильтрационных течений?

13. Каковы допущения, на которых построена модель Маскета–Мареса?

14. В чем состоит аналогия между фильтрацией газированной и несжимаемой однофазной жидкостей?

15. Нефтяная залежь эксплуатируется центральной скважиной при пластовом давлении ниже давления насыщения. Известны: $p_c =$

$= 8{,}82$ МПа – давление на забое скважины; $p_к = 13{,}2$ МПа – давление на контуре питания; $p_{ат} = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $k = 0{,}1$ мкм^2; $h = 10$ м – абсолютная проницаемость и толщина пласта; $R = 1{,}53 \cdot 10^{-5}$ м^3/(м$^3 \cdot$ Па) – коэффициент растворимости газа в нефти; $Г = 400$ м^3/м^3 – газовый фактор; $\eta_н = 1{,}2$ мПа·с; $\eta_г = 0{,}012$ мПа·с – коэффициенты вязкости нефти и газа.

1. Определить дебиты нефти и газа. 2. Найти и изобразить графически распределение давления в пласте. 3. Построить индикаторную кривую $Q_н(\Delta p)$.

Глава 10

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ НЕФТЕ- И ГАЗОКОНДЕНСАТООТДАЧИ ПЛАСТОВ

§ 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НОВЫХ МЕТОДОВ УВЕЛИЧЕНИЯ НЕФТЕ- И ГАЗОКОНДЕНСАТООТДАЧИ ПЛАСТОВ

Наша страна занимает ведущее положение в развитии эффективных методов разработки нефтяных месторождений с поддержанием пластового давления закачкой воды. Комплексный подход к разработке нефтяных месторождений, обоснованный группой ученых Российской академии нефти и газа им. Губкина под руководством академика А. П. Крылова (А. П. Крылов, М. М. Глоговский, М. Ф. Мирчинк, Н. М. Николаевский, И. А. Чарный), нашел широкое распространение в нашей и других странах [53]. Достаточно указать, что более 90% ежегодной добычи нефти в нашей стране обеспечивается месторождениями, на которых осуществляется закачка воды. Объемы закачки воды примерно в 3 раза превышают объемы добычи нефти. Средний коэффициент нефтеотдачи превышает 0,4. При этом по существу в полной мере используются все возможности гидродинамики для обеспечения эффективности процесса: законтурное, внутриконтурное, приконтурное, барьерное, очаговое и другие заводнения, изменение направлений фильтрационных потоков, волновое и циклическое воздействие на призабойную зону и т. д. Однако в связи с постепенным изменением структуры извлекаемых запасов нефти, связанным с ухудшением горно-геологических условий их залегания, открытием месторождений, приуроченных к глубокозалегающим низкопроницаемым коллекторам (пористым или трещиновато-пористым), обладающим значительной неоднородностью, насыщенных к тому же высоковязкими (малотекучими) нефтями возможности чисто гидродинамических методов воздействия оказались недостаточными для обеспечения высокой нефтеотдачи пластов.

При вытеснении нефти водой значительная часть нефти остается в пласте неизвлеченной. Низкая нефтеотдача при заводнении, наряду с горно-геологическими условиями, связана с особенностями гидродинамики водонефтяной системы в пористой среде.

Капиллярные силы, действующие на границе между водой и нефтью, защемляют нефть, препятствуя ее вытеснению. Большая остаточная нефтенасыщенность служит причиной низкого коэффициента вытеснения.

Поскольку вязкость нефти в большинстве случаев значительно больше вязкости воды, подвижность вытесняющей фазы значительно выше, чем у вытесняемой. Более подвижная вода стремится не вытеснять нефть, а прорваться сквозь нее к добывающим скважинам. В результате значительная часть пласта не охвачена заводнением, площадной коэффициент охвата низок.

Неоднородность пласта по площади залегания приводит к тому, что вытеснение происходит в основном из высокопроницаемых зон. В низкопроницаемых зонах остаются значительные количества нефти. Слоистая неоднородность пласта приводит к преждевременному обводнению добывающих скважин по более дренируемым высокопроницаемым пропласткам, остаточная нефтенасыщенность в низкопроницаемых пропластках велика.

Кроме того, стоит важная проблема последующей более полной добычи нефти из истощенных месторождений, остаточная нефтенасыщенность в которых составляет 60–70% от начальных запасов. Мировая тенденция такова, что идет поиск новых высокоэффективных методов увеличения степени извлечения нефти из пластов, что позволит продлить сроки исчерпания природных запасов нефти. Кроме уже хорошо изученного и широко применяющегося метода заводнения, наметились и начинают находить практическое применение физико-химические, термические, газовые, микробиологические и другие специальные методы увеличения нефтеотдачи пластов. Иногда их называют новыми или третичными методами.

Зарождение и развитие этих методов неразрывно связано с необходимостью совершенствования имеющихся или создания новых гидродинамических моделей.

Рассмотрим гидродинамические модели физико-химических и термических методов увеличения нефтеотдачи пластов. Моделирование газовых методов (вытеснение углеводородными или неуглеводородными газами) достаточно хорошо изучено и, по существу, проблема состоит в основном в технико-экономической целесообразности процесса в условиях различных месторождений. Что касается микробиологических процессов, основой которых является воздействие на пластовый флюид специально закачиваемыми микроорганизмами, то гидродинамические модели начинают лишь создаваться. Большое внимание уделяется механизму этого процесса.

Суть физико-химических методов состоит в добавлении в вытесняющую воду химреагентов, улучшающих гидродинамические условия вы-

теснения. При заводнении нефтяных пластов используют полимеры, поверхностно-активные вещества (ПАВ), углекислый газ, минеральные соли, спирты, мицеллярные растворы. Однако несмотря на разнообразие применяемых при вытеснении нефти химреагентов по своему влиянию на гидродинамику водонефтяной системы в пористой среде они близки друг к другу.

При добавке полимеров в закачиваемую воду происходит увеличение ее вязкости и уменьшение фазовой проницаемости. Снижение подвижности вытесняющей фазы приводит к повышению устойчивости процесса вытеснения и тем самым к увеличению охвата пласта. Остаточная нефтенасыщенность при вытеснении нефти полимерным раствором несколько ниже, чем при вытеснении водой. Это приводит к увеличению коэффициента вытеснения.

В качестве вытесняющего агента, увеличивающего нефтеотдачу, применяют карбонизированную воду – водный раствор углекислого газа. Углекислый газ хорошо растворяется в нефти. При растворении CO_2 в воде и в нефти уменьшается поверхностное натяжение на границе раздела фаз. За счет этого снижается остаточная нефтенасыщенность и увеличивается коэффициент вытеснения. Растворение CO_2 в воде увеличивает ее вязкость, растворение CO_2 в нефти снижает вязкость нефти и увеличивает фазовую проницаемость. Этим достигается контроль за подвижностью фаз и, тем самым, увеличение коэффициента охвата.

При добавлении ПАВ в нагнетаемую воду даже в небольших количествах происходит изменение характеристик капиллярной системы. Уменьшаются силы поверхностного натяжения на границе раздела фаз, увеличивается коэффициент вытеснения.

Таким образом, механизм эффективного вытеснения нефти различными химреагентами в значительной степени состоит в изменении вязкостей фаз и фазовых проницаемостей. Относительные фазовые проницаемости k_i зависят при этом не только от водонасыщенности s, но и от концентрации c химреагента в водном растворе; коэффициенты вязкости фаз также зависят от c:

$$k_в = k_в(s, c);\ k_н = k_н(s, c);\ \eta_в = \eta_в(c);\ \eta_н = \eta_н(c).$$

Такая унифицированность действия различных химреагентов на механизм вытеснения позволяет объединить их под названием «активная примесь». Многие процессы физико-химического заводнения рассматриваются в рамках математической модели вытеснения нефти раствором активной примеси. В последние годы в гидродинамической теории процессов повышения нефтегазоотдачи пластов физико-химическими методами достигнут существенный прогресс, связанный, прежде всего, с работами В. М. Ентова [26], Б. И. Леви [77], Р. И. Нигматулина [54], Ф. Файерса, Г. Уэльджа, К. Вахмана.

Термические методы увеличения нефтеотдачи пластов основаны на изменении свойств нефти и повышении эффективности ее вытеснения воздействием различными теплоносителями или созданием условий для

внутрипластового горения. В качестве теплоносителей могут использоваться горячая вода, пар, пароводяная смесь. Могут создаваться также различные эндотермические реакции в пласте. Основы этих методов известны давно. Важное место в обосновании гидродинамической теории этого метода занимают работы Б. Б. Лапука [40], И. А. Чарного [81], Э. Б. Чекалюка [82], Ю. П. Желтова [27], А. А. Боксермана, М. Д. Розенберга, М. Г. Алишаева, Е. В. Теслюка [4], П. П. Золотарева [48] и др.

§ 2. ВЫВОД СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С АКТИВНОЙ ПРИМЕСЬЮ

При вытеснении нефти раствором активной примеси происходит процесс двухфазного течения. Примесь может быть растворена в воде и в нефти. Будем считать, что концентрации примеси в воде c и в нефти φ малы и не изменяют удельных объемов фаз. Предположим, что фазы несжимаемы. Тогда уравнения неразрывности для воды и для нефти при плоскорадиальной фильтрации имеют вид (9.10)

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial w_{в}}{\partial x}=0;\quad -m\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial w_{н}}{\partial x}=0. \tag{10.1}$$

При описании крупномасштабных медленных процессов пренебрегаем капиллярным скачком давления между фазами; предполагается, что давления в фазах равны.

Для каждой из фаз выполняется обобщенный закон Дарси:

$$w_{в}=-k\frac{k_{в}(s,c)}{\eta_{в}(c)}\frac{\partial p}{\partial x};\quad w_{н}=-k\frac{k_{н}(s,c)}{\eta_{н}(c)}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{10.2}$$

В процессе вытеснения примесь, находящаяся в данном элементе пористой среды, вообще говоря, может быть растворена в воде, в нефти и быть сорбирована пористым скелетом [1]. Рассматривая медленные фильтрационные процессы, будем предполагать, что распределение примеси между фазами является термодинамически равновесным.

Для простоты ограничимся случаем, когда концентрация примеси в нефти φ и количество примеси a, сорбированное пористой средой, пропорциональны концентрации c примеси в воде:

$$a=\Gamma c;\ \varphi=Kc, \tag{10.3}$$

где Γ и K — постоянные коэффициенты.

Уравнение баланса массы примеси в воде, нефти и в сорбированном состоянии получается аналогично выводу уравнений неразрывности

---

[1] В данном случае под сорбцией подразумевается процесс адсорбции активной примеси (т.е. ее концентрирования) по поверхности пористого скелета породы в результате самопроизвольного перехода ее из объема фазы.

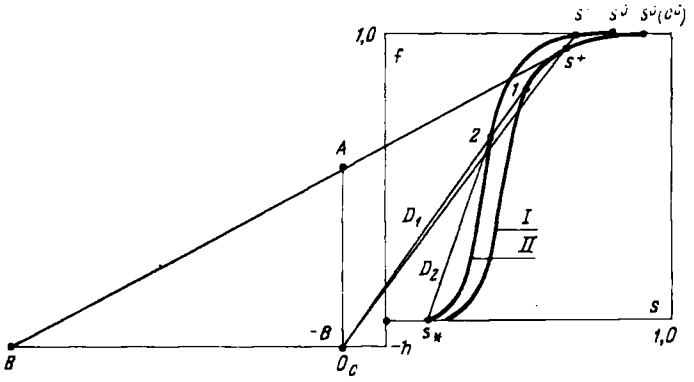


Рис. 10.1. Характеристические функции при вытеснении нефти раствором активной примеси:
I – $c = c^0$; *II* – $c = 0$

(10.1) (см. гл. 2). Количество примеси в единице объема пористой среды равно $m[cs + \varphi(1 - s) + a]$, а плотность потока примеси $-(cw_в + \varphi w_н)$. Пренебрегая диффузией примеси в обеих фазах, представим уравнение баланса в виде

$$m\frac{\partial}{\partial t}[cs + \varphi(1 - s) + a] + \frac{\partial}{\partial x}(cw_в + \varphi w_н) = 0. \tag{10.4}$$

Сложив уравнения неразрывности (10.1) для воды и нефти, получим, как и ранее (см. гл. 9), что суммарная скорость фильтрации w зависит только от времени:

$$w_в + w_н = w(t). \tag{10.5}$$

Подставим в полученное выражение скорости фильтрации обеих фаз (10.2):

$$w(t) = -k\left(\frac{k_в}{\eta_в} + \frac{k_н}{\eta_н}\right)\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{10.6}$$

Из уравнений (10.2) и (10.6) получим следующие выражения для скоростей фильтрации фаз:

$$w_в = f(s, c)\,w(t),\ w_н = (1 - f)\,w(t); \tag{10.7}$$

$$f(s, c) = (1 + \eta_0 k_н/k_в)^{-1},\ \eta_0 = \eta_в/\eta_н. \tag{10.8}$$

Как и при вытеснении нефти водой функция Бакли – Леверетта (см. (8.9)), как видно из (10.7), равна доле воды в потоке. Но при вытеснении нефти раствором активной примеси f зависит не только от насыщенности, но и от концентрации примеси c. Из (10.8) видно, что при увеличении вязкости воды и фазовой проницаемости нефти, уменьшении вязкости нефти и фазовой проницаемости воды с ростом концентрации

c функция Бакли – Леверетта уменьшается. На рис. 10.1 приведены характеристические функции f для системы нефть – вода ($c = 0$) и нефть – раствор примеси ($c = c^0$). Предельные водонасыщенности обозначены через s_* и $s^*(c^0)$.

Подставив в первое уравнение (10.1) выражение для скорости фильтрации воды (10.7), получим:

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + w(t)\frac{\partial f(s, c)}{\partial x} = 0. \tag{10.9}$$

Подставив в уравнение баланса массы примеси (10.4) выражения для скоростей фаз (10.7) и для концентраций φ и a (10.3), преобразуем его к виду

$$m\frac{\partial}{\partial t}[cs + Kc(1 - s) + \Gamma c] + w\frac{\partial}{\partial x}[cf + Kc(1 - f)] = 0. \tag{10.10}$$

Уравнения (10.6), (10.9) и (10.10) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую процесс двухфазной фильтрации с активной примесью для определения s, c, p.

Перейдя к безразмерным переменным ξ и τ по формулам (9.25) (при $w = \text{const}$), перепишем уравнения (10.9), (10.10) в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial f(s, c)}{\partial \xi} = 0, \tag{10.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}[c(s + b)] + \frac{\partial}{\partial \xi}[c + (f + h)] = 0, \tag{10.12}$$

где введены следующие обозначения:

$h = K(1 - K)^{-1}$; $h = (K + \Gamma)(1 - K)^{-1}$.

Отметим, что в случае радиального вытеснения динамика водонасыщенности и концентрации примеси также описывается системой уравнений (10.11), (10.12). При этом переменные ξ и τ вводятся по формулам (9.34).

Уравнения (10.11), (10.12) отделяются от уравнения (10.6), они образуют независимую систему уравнений. Решив ее и определив значения насыщенности s и концентрации c, найдем значения давления p из (10.6).

В силу зависимости $f = f(s, c)$ от величин s и c, в качестве неизвестных в системе (10.11), (10.12) можно рассматривать как пару переменных (s, c), так и пару (s, f). Решение этих уравнений можно получить графически – решению в точке (ξ, τ) ставится в соответствие точка на плоскости (s, f) с координатами $[s(\xi, \tau), f(\xi, \tau)]$ (см. рис. 10.1).

Уравнения (10.11), (10.12) образуют гиперболическую систему квазилинейных уравнений. Уравнение (10.11) является уравнением баланса массы водной фазы, уравнение (10.12) – уравнением баланса массы активной примеси. Эти уравнения допускают разрывные решения; в распределениях насыщености $s(\xi, \tau)$ и концентраций $c(\xi, \tau)$ возможны скачки. На скачках должны выполняться условия баланса массы водной фазы и баланса массы примеси, которые выводятся аналогично случаю модели Бакли – Леверетта (см. гл. 9, 25, п. 5.5).

Условие баланса массы воды на разрыве приводит к соотношению (9.49) и может быть представлено в рассматриваемом случае в виде

$$D = \frac{d\xi_c}{d\tau} = \frac{m}{w}\frac{dx_c}{dt} = \frac{f(s^+, c^+) - f(s^-, c^-)}{s^+ - s^-}. \tag{10.13}$$

Выведем условия баланса массы активной примеси на разрыве. В единичном объеме пористой среды масса примеси, растворенная в воде, равна mcs, растворенная в нефти – $mKc(1-s)$, сорбированная – $m\Gamma c$. Примесь переносится в водной и нефтяной фазах, сорбированная примесь неподвижна. В подвижной системе отсчета, связанной с разрывом, физическая скорость примеси в воде составляет $wf(s, c)/(ms) - D'$, физическая скорость примеси в нефти – $\dfrac{w(1-f)}{m(1-s)} - D'$, сорбированной примеси – D'

Массовый поток примеси перед разрывом равен массовому потоку примеси за ним:

$$mc^+s\left[\frac{wf(s^+, c^+)}{ms^+} - D'\right] + mKc^+(1-s^+)\left[\frac{w(1-f(s^+, c^+))}{m(1-s^+)} - D'\right] -$$

$$- ms^+\Gamma c^+ D' = mc^-s^-\left(\frac{wf^-}{ms^-} - D'\right) + mKc^-(1-s^-)\left[\frac{w(1-f^-)}{m(1-s^-)} - D'\right] -$$

$$- ms^-\Gamma c^- D',$$

где $f^\pm = f(s^\pm, c^\pm)$.

Преобразовав полученное равенство, получим:

$$D' = \frac{w}{m}\frac{c^+(f^+ + h) - c^-(f^- + h)}{c^+(s^+ + b) - c^-(s^- + b)}.$$

Перейдя к безразмерным переменным ξ и τ, получим:

$$D = \frac{d\xi_c}{d\tau} = \frac{c^+(f^+ + h) - c^-(f^- + h)}{c^+(s^+ + b) - c^-(s^- + b)}. \tag{10.14}$$

Условия баланса масс (10.13) и (10.14), представляющие соотношения на разрыве, суть условия Гюгонио для рассматриваемого процесса. Они связывают скорость разрыва D, значения неизвестных перед разрывом s^+, c^+ и за ним s^-, c^-.

Перепишем условие (10.14) в следующем виде:

$$(c^+ - c^-)(s^+ + b)D + c^-(s^+ - s^-)D = (c^+ - c^-)(f^+ + h) + c^-(f^+ - f^-).$$

В силу уравнения (10.13) вторые слагаемые в левой и правой частях сокращаются. Далее возможны два случая.

1. Если $c^+ - c^- \neq 0$, то из полученного равенства имеем:

$$D = \frac{f^+ + h}{s^+ + b}. \tag{10.15}$$

Использовав свойство производных пропорций, из (10.15) и (10.13) получим:

$$D = \frac{f^+ + h}{s^+ + b} = \frac{f^- + h}{s^- + b}. \tag{10.16}$$

2. Если $c^+ - c^- = 0$, то условие (10.13) можно переписать в виде

$$D = \frac{f(s^+, c) - f(s^-, s)}{s^+ - s^-}, \quad c^+ = c^- = c. \tag{10.17}$$

Скачки, на которых $c^+ - c^- \neq 0$, называют c-скачками.

Условие (10.16) означает, что на плоскости (s, f) точки с координатами (s^-, f^-), (s^+, f^+) и $(-b, -h)$ лежат на одной прямой. Тангенс угла наклона этой прямой равен D.

Скачки, на которых $c^+ - c^- = 0$, называют s-скачками. Условия (10.17) означают, что на плоскости (s, f) точки за разрывом и перед ним лежат на одной кривой Бакли – Леверетта $c = \text{const}$. Тангенс угла наклона прямой, соединяющей эти точки, равен D.

При построении разрывных решений системы (10.11), (10.12), кроме условий Гюгонио (10.13), (10.14), необходимо еще удовлетворить условию устойчивости (см. гл. 9, § 5). Оно состоит в том, что разрывное решение устойчиво относительно наложения малых возмущений на само решение. Для s-скачков это условие сводится к выполнению неравенств

$$f'_s(s^+, c) \leqslant D \leqslant f'_s(s^-, c). \tag{10.18}$$

Для c-скачков условие устойчивости сводится к выполнению только одного из неравенства (10.18).

Далее при построении разрывных решений задач фронтального вытеснения нефти раствором активной примеси требуем выполнения на скачках условий Гюгонио и условия устойчивости разрывных решений.

§ 4*. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ

Рассмотрим задачу о непрерывном нагнетании в полубесконечный пласт водного раствора активной примеси с концентрацией c^0. В начальный момент водонасыщенность в пласте равна насыщенности связанной воды s_*. Процесс вытеснения описывается решением системы уравнений (10.11), (10.12) со следующими начальными и граничными условиями:

при $\tau = 0$ $s = s_*$, $c = 0$; (10.19)

при $\xi = 0$ $s = 1$ $c = c^0$. (10.20)

Если $[s(\xi, \tau), c(\xi, \tau)]$ – решение рассматриваемой задачи, то при любом значении $\alpha \neq 0$ величины $[s(\alpha\xi, \alpha\tau), c(\alpha\xi, \alpha\tau)]$ тоже являются решением этой задачи. В этом легко убедиться прямой подстановкой в систему уравнений и краевые условия. Задача (10.11), (10.12), (10.19), (10.20), описывающая реальный физический процесс, имеет единственное решение. Поэтому для любого $\alpha \neq 0$ выполняются следующие равенства:

$s(\xi, \tau) = s(\alpha\xi, \alpha\tau)$; $c(\xi, \tau) = c(\alpha\xi, \alpha\tau)$.

Положив $\alpha = 1/\tau$, получим:

$s(\xi, \tau) = s(\xi/\tau, 1)$; $c(\xi, \tau) = c(\xi/\tau, 1)$.

Отсюда видно, что решение задачи автомодельно; оно зависит от одного безразмерного комплекса $\zeta = \xi/\tau$, так, что

$s = s(\xi)$, $c = c(\xi)$. (10.21)

Выполним в уравнении (10.12) дифференцирование по частям. После подстановки в полученное равенство уравнения (10.11) получим:

$$(s + b)\frac{\partial c}{\partial \tau} + (f + h)\frac{\partial c}{\partial \xi} = 0. \quad (10.22)$$

Подставив автомодельные зависимости (10.21) в систему уравнений (10.11), (10.12), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(f'_s - \zeta)\frac{ds}{d\zeta} + f'_c\frac{dc}{d\zeta} = 0; \quad (10.23)$$

$$\left(\frac{f + h}{s + b} - \zeta\right)\frac{dc}{d\zeta} = 0. \quad (10.24)$$

После подстановки автомодельной зависимости (10.21) в начальные и граничные условия (10.19), (10.20) формулируется краевая задача для системы (10.23), (10.24):

при $\zeta \to \infty$ $s = s_*$, $c = 0$; (10.25)

при $\zeta = 0$ $s = 1$ $c = c^0$. (10.26)

Систему (10.23), (10.24) можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $ds/d\zeta$ и $dc/d\zeta$. Ее тривиальные решения

$s(\zeta) = \text{const}$, $c(\zeta) = \text{const}$

будем называть точками покоя.

Нетривиальные решения этой системы соответствуют равенству нулю ее определителя:

$$(f'_s - \zeta)\left(\frac{f+h}{s+b} - \zeta\right) = 0.$$

Определитель равен нулю в следующих двух случаях:

$$\zeta = f'_s;\ \zeta = (f+h)/(s+b). \tag{10.27}$$

В первом случае, как следует из уравнения (10.23), $dc/d\zeta = 0$. Решение такого типа будем называть простыми s-волнами. Они задаются формулами

$$c = \text{const},\ \zeta = f'_s(s, c). \tag{10.28}$$

Докажем, что второй случай невозможен. Для этого продифференцируем обе части второго равенства (10.27) по ζ:

$$1 = \frac{df}{d\zeta}/(s+b) - (f+h)\frac{ds}{d\zeta}/(s+b)^2 = \frac{1}{s+b}\frac{ds}{d\zeta}\left(\zeta - \frac{f+h}{s+b}\right) = 0.$$

Полученное противоречие ($1 = 0$!) показывает, что других нетривиальных решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10.23), (10.24) нет.

Если к кривой $c = \text{const}$ на плоскости (s, f) провести касательную, то тангенс угла ее наклона, как следует из (10.28), равен ζ. Изменению ζ в простой s-волне соответствует движение вдоль кривой $c = \text{const}$ на плоскости (s, f) (см. рис. 10.1).

Если автомодельное решение разрывно при некотором значении автомодельной переменной $\zeta = \xi/\tau$, то это значение равно скорости разрыва.

Таким образом, автомодельное решение задачи вытеснения нефти раствором активной примеси может состоять из простых s-волн (10.28), точек покоя, устойчивых s-скачков (10.17), устойчивых c-скачков (10.16). Последовательность этих элементов на плоскости (s, f) будем называть «путем». Путь начинается в точке $\zeta = 0$ (10.26) и заканчивается в точке $\zeta \to \infty$ (10.25). Решение задачи вытеснения сводится к построению пути, вдоль которого величина ζ монотонно возрастает от нуля до бесконечности.

Как видно из рис. 10.1, из точки $\zeta = 0$ на плоскости (s, f) можно выйти только при помощи s-волны; вдоль кривой $c = c^0$ в точку $\zeta \to \infty$ можно попасть только s-скачком с кривой $c = 0$. Переход с кривой $c = c^0$ осуществляется при помощи c-скачка. Найдем значения насыщенности перед скачком и за ним. Проведем из точки O_c касательную к кривой $c = c^0$. 1 – точка касания, 2 – точка пересечения касательной с кривой $c = 0$, (s_1, f_1), (s_2, f_2) – координаты этих точек. Если точка за разрывом s^+ лежит выше точки 1 $(s^+ > s_1)$, то для скорости разрыва D выполняются следующие неравенства:

$$f'_s(s^+, c^0) < D = \frac{f^+ + h}{s^+ + b} < f'_s(s^-, 0). \tag{10.29}$$

Как следует из (10.18), такой разрыв неустойчив. Если точка за разрывом лежит ниже точки *1* ($s^+ < s_1$), то для скорости разрыва справедливо неравенство

$$D = \frac{f^+ + h}{s^+ + b} < f'_s(s^-, c^0). \tag{10.30}$$

Оно означает, что значение автомодельной переменной ζ в s-волне, предшествующей c-скачку, больше скорости скачка, т.е. величина ζ вдоль пути немонотонна. Отсюда следует, что переход с кривой $c = c^0$ на кривую $c = 0$ осуществляется скачком из точки *1* в точку *2*.

Рассмотрим случай, когда точка *2* лежит на кривой $c = 0$ ниже, чем точка фронтовой насыщенности при вытеснении нефти водой $s_2 < s_f$ [1]. Как видно из рис. 10.1, это соответствует случаю слабой сорбции, т.е. малых значений константы Г.

Переход из точки *2* в точку s_* осуществляется s-скачком; при $s_2 < s_f$ этот скачок устойчив.

Путь, соответствующий автомодельному решению задачи (10.25), (10.26), состоит из s-волны, соответствующей движению вдоль кривой $c = c^0$ от точки $s^0(c^0)$ до точки *1*, c-скачка из точки *1* в точку *2*, точки покоя *2* и s-скачка в точку s_*. Решение имеет вид

$$\zeta = f'_s(s, c^0),\ c = c^0,\ 0 < \zeta < D_1 = \frac{f_1 + h}{s_1 + b} = f'_s(s_1, c^0), \tag{10.31}$$

$$s = s_2,\ c = 0,\ D_1 = \frac{f_2 + h}{s_2 + b} < \zeta < D_2 = \frac{f_2}{s_2 - s_*}, \tag{10.32}$$

$$s = s_*,\ c = 0,\ D_2 < \zeta < \infty. \tag{10.33}$$

Здесь D_1 – скорость c-скачка; D_2 – скорость s-скачка.

На рис. 10.2 в координатах (ξ, τ) приведена динамика фронтов вытеснения, распределение насыщенности и концентрации активной примеси в процессе вытеснения.

Обычно растворы химреагентов закачивают в пласты в виде конечных объемов – оторочек, продвигаемых по пласту водой. В качестве характерного размера задачи, который используется при введении безразмерных переменных ξ и τ, выбираем объем оторочки. Тогда при $\tau < 1$ в пласт закачивают раствор химреагента, при $\tau > 1$ – воду, проталкивающую оторочку по пласту. На рис. 10.2 приведены профили насыщенности при $\tau < 1$ при вытеснении нефти раствором активной примеси. Перед фронтом вытеснения, скорость которого равна D_2, находится зона *1* невозмущенного течения; в ней $s = s_*$, $c = 0$. Затем следует водонефтяной вал *II*, в котором примесь отсутствует, а водонасыщенность постоянна, $c = 0$, $s = s_2$. Затем следует зона *III* течения водонефтяной смеси в присутствии химреагента; скорость фронта химреагента

[1] Ранее (см. гл. 8, 9) фронтовая насыщенность обозначалась s_c.

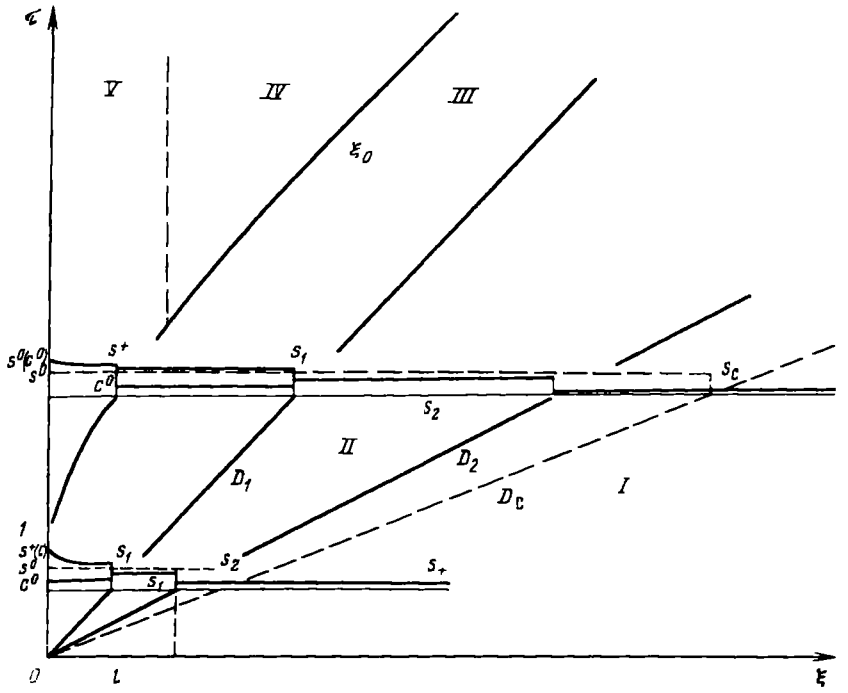


Рис. 10.2. Построение s-скачков и c-скачков и структура решения

равна D_1. В этой зоне $c = c^0$, насыщенность за фронтом концентрации равна s_1.

При сильной сорбции точка *2* на кривой $c = 0$ лежит выше точки, соответствующей фронтовой насыщенности s_f при вытеснении нефти водой. В этом случае переход из точки *2* в точку s_* осуществляется простой s-волной до точки s_f, а затем s-скачком в точку s_*.

Характерная особенность течения, описываемого решением (10.31)–(10.33),– отставание фронта химреагента от фронта вытеснения ($D_1 < D_2$). Это связано с собируемостью химреагента, с растворимостью его в нефти, а также с наличием в пласте воды до начала вытеснения. Из рис. 10.1 видно, что с увеличением сорбируемости точка O_c смещается влево, и наклон касательной D_1 уменьшается. С увеличением растворимости примеси в нефти точка O_c смещается вниз параллельно биссектрисе третьего координатного угла, и скорость D_1 также уменьшается. С увеличением начальной насыщенности наклон отрезка D_2, соединяющего точки *2* и s_*, увеличивается. Это приводит к увеличению отставания фронта вытеснения от фронта химреагента.

В заключение этого параграфа отметим, что аналогичные гидроди-

намические задачи возникают и при расчете процессов повышения конденсатоотдачи пластов: вытеснение выпавшего в пласте газового конденсата углеводородными растворителями, продвигаемыми по пласту сухим газом; последовательная закачка в пласт и отбор растворителей и др. [9].

§ 5*. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ОТОРОЧКОЙ РАСТВОРА АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ, ПРОДВИГАЕМОЙ ПО ПЛАСТУ ВОДОЙ

Процессу вытеснения нефти из необводненного пласта с остаточной водонасыщенностью s_* оторочкой раствора активной примеси объемом Ω с концентрацией c^0 соответствуют следующие начальные и граничные условия для системы уравнений (10.11), (10.12):

$$s = s_*,\ c = 0 \text{ при } \tau = 0;$$

$$f = 1,\ c = \begin{cases} c^0, & 0 < \tau < 1 \\ 0, & \tau > 1 \end{cases} \text{ при } \xi = 0. \tag{10.34}$$

До момента $\tau = 1$ в период нагнетания в пласт раствора активной примеси решение задачи об оторочке (10.34) совпадает с автомодельным решением задачи о вытеснении нефти раствором активной примеси. В случае слабой сорбции оно имеет вид (10.31)–(10.33).

В момент $\tau = 1$ начинается закачка воды, на оси $\xi = 0$ происходит скачок концентрации. Этот скачок будет распространяться вдоль линии разрыва $\xi = \xi_0(\tau)$. Линия разрыва ξ_0 является тылом оторочки, вдоль нее происходит полный c-скачок концентрации:

$$c^+(\xi_0) = c^0;\ c^-(\xi_0) = 0.$$

Из условий баланса масс (10.14) на c-скачке получим выражение для скорости тыла оторочки:

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \frac{f(s^+(\xi_0), c^0) + h}{s^+(\xi_0) + b} = \frac{f(s^-(\xi_0), 0) + h}{s^-(\xi_0) + b}. \tag{10.35}$$

На плоскости (s, f) точки s^+ и s^- лежат на кривых $c = c^0$ и $c = 0$ соответственно. Прямая, соединяющая эти точки, проходит через точку O_c, наклон ее равен скорости тыла (см. рис. 10.1).

Распределение насыщенности перед тылом описывается простой s-волной (10.31). Наклон касательной к кривой $c = c^0$ в точке s^+ меньше, чем скорость разрыва. Это обеспечивает его устойчивость (10.18). Отсюда имеем:

$$\xi_0(\tau)/\tau = f_s'(s^+(\xi_0)\, c^0). \tag{10.36}$$

Из рис. 10.1 видно, что с ростом τ по мере движения разрыва $\xi_0(\tau)$ за простой s-волной величины s^+ и s^- убывают. Скорость тыла возрастает. При $\tau \to \infty$ скорость тыла возрастает до величины D_1, s^+ уменьшается до s_1. Поскольку в любой момент τ скорость тыла меньше, чем скорость

фронта оторочки D_1, то объем оторочки $\Omega(\tau) = D_1\tau - \xi_0(\tau)$ по мере движения по пласту возрастает. Тыл оторочки не догонит ее фронта.

Движение тыла оторочки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (10.35). Найдем его первый интеграл, используя закон сохранения массы активной примеси. Проинтегрируем уравнение баланса массы примеси (10.14) по области Λ плоскости (ξ, τ), ограниченной контуром Γ: $(0, 0) \to (0, 1) \to (\xi_0(\tau), \tau) \to (0, 0)$ (см. рис. 10.2). Контур Γ состоит из двух прямолинейных отрезков $(0, 0) \to (0,1)$ и $(0, 0) \to$ $\to (\xi_0(\tau), \tau)$, а также криволинейного участка траектории тыла оторочки. Согласно формуле Грина (см. прил. 6) имеем:

$$\iint\limits_{\Lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau}[c(s+b)] + \frac{\partial}{\partial \xi}[c(f+h)] \right\} d\xi d\tau = \oint\limits_{\Gamma} c(f+h)\,d\tau - c(s+b)\,d\xi = 0\,.$$

Форма $c(f+h)\,d\tau - c(s+b)\,d\xi$ имеет смысл массового потока примеси. Подставим в интеграл от этой формы вдоль траектории тыла оторочки, входящей в контур Γ, условие баланса (10.35) на тыле. Получим, что этот интеграл равен нулю. Физический смысл этого фактора состоит в том, что через тыл оторочки не происходит перетока активной примеси. Поэтому интеграл от формулы по отрезку $(0, 0) \to (\xi_0(\tau), \tau)$ равен интегралу по отрезку $(0, 0) \to (0, 1)$, не зависит от времени и является первым интегралом движения $\xi = \xi_0(\tau)$:

$$1 + h = [f(s^+(\xi_0), c^0) + h - (s^+(\xi_0) + b) f'_3(s^+(\xi_0), c^0)]\,\tau\,. \qquad (10.37)$$

Выражение $f(s, c) + h - (s + b) f'_s(s, c) = \Delta(s, c)$ имеет следующую геометрическую интерпретацию на плоскости (s, f) (см. рис. 10.1). Проведем к кривой $c = c^0$ касательную в точке $s^+(\xi_0)$ до пересечения с прямыми $s = -b$ и $f = -h$ в точках A и B соответственно. Тогда $AO_c = \Delta(s^+(\xi_0), c^0)$. Из формул (10.36), (10.37) получим закон движения тыла оторочки в параметрическом виде:

$$\frac{1+h}{\tau} = \Delta(s^+(\xi_0), c^0); \quad \frac{1+h}{\xi_0(\tau)} = \frac{\Delta(s^+(\xi_0), c^0)}{f'_s(s^+(\xi_0), c^0)}. \qquad (10.38)$$

Параметром является насыщенность перед тылом оторочки $s^+(\xi_0)$. Из рис. 10.1 видно, что $BO_c = \Delta(s^+(\xi_0), c^0)/f'_s(s^+(\xi_0), c^0)$. Отсюда следует геометрический способ определения положения тыла оторочки в момент τ. Как видно из (10.38), для этого необходимо отложить отрезок $AO_c = (1 + h)/\tau$ и провести касательную к кривой $c = c^0$ из точки A. Тогда точка касания определит величину $s^+(\xi_0)$, а длина отрезка $BO_c = (1 + h)/\xi_0(\tau)$ – величину $\xi_0(\tau)$. Величина $s^-(\xi_0)$ определяется пересечением прямой, проведенной через точку O_c и $s^+(\xi_0)$ с кривой $c = 0$.

В зоне проталкивающей воды за тылом оторочки $0 < \xi < \xi_0(\tau)$ примесь отсутствует, $c(\xi, \tau) = 0$. Распределение водонасыщенности описывается уравнением Бакли – Леверетта (10.11) при $c = 0$. Значения водонасыщенности постоянны вдоль характеристик. Наклон характеристик равен $f'_s(s^-(\xi_0), 0)$ – наклону касательной к кривой $c = 0$ в точке $s^-(\xi_0)$. Решение задачи вытеснения в зоне проталкивающей воды имеет вид

$$s(\xi, \tau') = s^-(\xi_0(\tau)); \quad \frac{\xi - \xi_0(\tau)}{\tau' - \tau} = f_s'(s^-(\xi_0), 0). \tag{10.39}$$

Таким образом, перед тылом оторочки $\xi > \xi_0(\tau)$ решение задачи об оторочке описывается автомодельными формулами (10.31)–(10.33). Уравнение движения тыла оторочки $\xi_0(\tau)$ дано в параметрическом виде (10.38). За тылом оторочки распределение водонасыщенности описывается формулой (10.39).

Особо отметим, что при построении решения задачи о вытеснении нефти оторочкой раствора активной примеси были использованы только две кривые Бакли–Леверетта: $c = 0$ и $c = c^0$, от промежуточных значений $0 < c < c^0$ решение задачи не зависит. Это позволяет существенно сократить объем экспериментов по определению исходной информации к конкретным технологическим расчетам; необходимо измерять фазовые проницаемости и вязкость фаз только для значений $c = 0$ и $c = c^0$, а также константы Генри Г и распределения примеси K.

При уменьшении насыщенности перед тылом оторочки s^+ от величин $s^0(c^0)$ насыщенность за тылом $s^-(\xi_0)$ также уменьшается от величины $s^0(c^0)$. Это соответствует течению проталкивающей воды в зоне, уже промытой раствором активной примеси. При уменьшении $s^-(\xi_0)$ до величины s^0 нефтяная фаза неподвижна. Зона проталкивающей воды с неподвижной нефтяной фазой примыкает к нагнетательной галерее. Размер l этой зоны определяется условиями $\xi_0 = l$, $s^-(\xi_0) = s^0$.

Записывая условия баланса массы примеси в оторочке и устремляя $\tau \to \infty$, получим предельный объем оторочки $\Omega(\infty) = (1 + h)/(s_1 + b)$. Таким образом, в процессе движения в пористой среде объем оторочки растет и стабилизируется. Это приводит к разным следствиям при галерейном вскрытии пласта (плоскопараллельная фильтрация) и при нагнетании через одиночную скважину (радиальная фильтрация). Поскольку при плоскопараллельном вытеснении расстояние между фронтом и тылом оторочки пропорционально объему оторочки, со временем оно растет и стабилизируется. При радиальном вытеснении ξ пропорционально $r^2/2$, поэтому при $\tau \to \infty$ линейный размер оторочки асимптотически уменьшается с порядком $\tau^{-1/2}$.

На рис. 10.2 приведена структура зоны вытеснения:

I. $\xi > D_2\tau$ – невозмущенная зона вытесняемой нефти;

II. $D_1\tau < \xi < D_2\tau$ – водонефтяной вал без примеси, формирующийся из пластовой воды перед фронтом оторочки $s = s_2$, $c = 0$;

III. $\xi_0(\tau) < \xi < D_1\tau$ – оторочка $c = c^0$, насыщенность меняется в пределах $s_1 < s < s^+(\xi_0)$;

IV. $l < \xi < \xi_0(\tau)$ – зона проталкивающей воды с подвижной нефтяной фазой, $c = 0$, $s^-(\xi_0) < s < s^0$;

V. $0 < \xi < 1$ – зона проталкивающей воды с неподвижной нефтяной фазой, $c = 0$, $s^0 < s < s^0(c^0)$.

Объемы *I*, *II* и *IV* зон со временем неограниченно возрастают, объем *III* зоны стабилизируется при $\tau \to \infty$, объем *V* зоны стабилизируется в момент, когда $s^-(\xi_0) = s^0$

Для сравнения на рис. 10.2 приведены распределения водонасыщенности по пласту при вытеснении нефти оторочкой раствора слабосорбируемого химреагента (сплошная линия) и водой (пунктир). Скорость фронта вытеснения нефти водой D_f больше скорости D_1. Отсюда следует, что применение химреагента при заводнении приводит к продлению периода безводной эксплуатации. На стадии водонефтяного вала водонасыщенность при вытеснении оторочкой раствора химреагента ниже, чем при вытеснении водой. Поэтому применение химреагента снижает обводненность добываемой продукции на ранней стадии водного периода разработки. На заключительной стадии разработки применение химреагента приводит к увеличению полноты вытеснения нефти.

При сильной сорбции химреагента решение задачи о вытеснении нефти оторочкой отличается от рассмотренного случая слабой сорбции только на стадии водонефтяного вала: на начальной стадии вала распределение водонасыщенности такое же, как и при вытеснении нефти водой, $D_2 = D_f$. Применение химреагента приводит к снижению обводненности продукции на промежуточной стадии водного периода разработки и к увеличению степени вытеснения на заключительной стадии.

§ 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

При разработке нефтегазоносных пластов содержащиеся в них флюиды могут приобрести температуру, отличную от естественной температуры пластов. Изменение температуры в продуктивных пластах может быть вызвано различными причинами, в зависимости от характера фильтрации природных флюидов и вида искусственного теплового воздействия на продуктивные коллекторы в процессе применения той или иной технологии разработки.

Можно выделить три основные группы причин, приводящих к неизотермическим условиям фильтрации.

1. Действие термодинамических эффектов при движении пластовых флюидов в пористой среде:

баротермический эффект (эффекты Джоуля–Томсона и адиабатического расширения);

геотермический градиент;

эффект фазовых превращений (при выделении растворенного газа, выпадении парафина и др.);

гравитационный эффект.

2. Нагнетание в пласты различных рабочих агентов – теплоносителей с температурой, отличной от начальной пластовой, с целью поддержания пластового давления и повышения степени извлечения нефти:

холодной воды с температурой ниже начальной пластовой;

горячей воды с температурой выше пластовой;

пара или пароводяной смеси, температура которой существенно превышает пластовую.

3. Осуществление различных термохимических окислительных про-

цессов, в результате которых происходит генерация теплоты в коллекторах и призабойных зонах скважин:

внутрипластовое горение;

различные экзотермические реакции при обработке пластов и др.

При разработке месторождений возникают различные сочетания и комбинации указанных процессов, что приводит к неизотермическому характеру фильтрации. Тепловое воздействие на пласт изменяет основные фильтрационные параметры: вязкость флюидов, капиллярные силы, реологические свойства движущихся агентов и др. При этом изменяются коэффициенты вытеснения, фазовые проницаемости и т. д., вследствие чего температурный фактор существенно влияет как на текущие фильтрационные характеристики, так и на конечную нефтеотдачу.

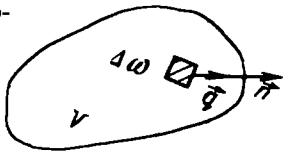
При рассмотрении гидродинамики процессов неизотермической фильтрации использование дифференциальных уравнений, полученных в гл. 2 (для однофазного потока) и в гл. 9 (для многофазной фильтрации) оказывается уже недостаточным. В этом случае появляется новая неизвестная переменная – температура T, а характеристики флюида (его плотность ρ и коэффициент вязкости η) меняются вместе с T: $\rho = \rho(p, T)$, $\eta = \eta(p, T)$.

Для замыкания системы уравнений необходимо дополнительно привлекать уравнение, определяющее изменение температуры флюида во времени и пространстве. Это уравнение можно получить, записав закон сохранения энергии (первый закон термодинамики) для пластовой системы. Но породы – коллекторы и насыщающие их флюиды обладают различными термодинамическими и реологическими свойствами. Поэтому при записи этого закона приходится вводить две температуры: температуру жидкости T и температуру скелета $T_{ск}$.

Общие соображения показывают, что разность между температурами жидкой и твердой фаз в процессе фильтрации должна быстро исчезать из-за огромной поверхности теплообмена между флюидами и скелетом, так что температуры допустимо считать одинаковыми. Более точный ответ может дать следующая оценка. Характерный размер поры l имеет порядок 10^{-3} м или менее, температуропроводность насыщенной пористой среды $\varkappa$ обычно порядка 10^{-6} м^2/с. Тогда выравнивание температуры между флюидом и скелетом должно происходить за время $t = l^2/\varkappa = 10$ с. Если нас интересуют фильтрационные процессы с характерными временами такого порядка, то разницу температур флюида и скелета необходимо учитывать. В противном случае можно считать, что $T_{ск} = T$. Мы так и будем делать, поскольку для технологических процессов разработки месторождений время 10 с ничтожно мало.

Запишем теперь соотношение, выражающее баланс энергии для системы жидкость – пористая среда. Пористую среду будем считать недеформируемой. Вследствие малости скоростей фильтрации пренебрежем изменением кинетической энергии флюида. Тогда, если U – внутренняя энергия некоторого объема флюида и скелета, Π – энергия флюида в поле потенциальных сил (в нашем случае – поле силы тяжести), то согласно первому началу термодинамики имеем:

Рис. 10.3. Схема к определению вектора потока теплоты



$$d(U + \Pi) = \delta A^{(e)} + \delta Q^{(e)}, \tag{10.40}$$

где $\delta Q^{(e)}$ – количество теплоты, получаемое рассматриваемым объемом извне; $\delta A^{(e)}$ – совершенная над ним работа внешних сил.

Поскольку пористая среда неподвижна, то под П понимается лишь потенциальная энергия флюида в поле силы тяжести.

Количество теплоты, получаемое объемом ΔV среды в единицу времени через единицу площадки $\Delta\omega$, окружающей этот объем в направлении $\vec{n}$, перпендикулярном к площадке, называется вектором потока теплоты $\vec{q}$; его проекция на направление внешней нормали $\vec{n}$ определяется равенством (рис. 10.3):

$$q_n = -\frac{\delta Q^{(e)}}{dt\Delta\omega}.$$

Тогда количество теплоты, поступающее в объем ΔV в направлении $\vec{n}$ за время dt, равно:

$$\delta Q^{(e)} = -\frac{\partial q_n}{\partial n}\Delta V dt. \tag{10.41}$$

При фильтрации однофазного флюида есть два механизма переноса теплоты: конвективный (т. е. как поток внутренней энергии $\rho u\vec{w}$ вместе с движущейся жидкостью) и за счет теплопроводности (кондукции) $q_т$, связанной с неравномерностью распределения температуры в среде. Для определения $\vec{q}_т$ обычно используется закон Фурье:

$$\vec{q}_т = -\lambda\nabla T,$$

так что вектор потока теплоты имеет следующий вид:

$$\vec{q} = -\lambda\nabla T + \rho u\vec{w}. \tag{10.42}$$

Здесь $\vec{w}$ – скорость фильтрации; u – внутренняя энергия единицы массы флюида; λ – коэффициент теплопроводности [Вт/(м·К)]. Знак «минус» в (10.42) означает, что вектор потока теплоты направлен в сторону уменьшения температуры, т. е. противоположно grad T, а $\lambda > 0$.

Из термодинамики известно, что внутренняя энергия U является функцией переменных p, $v = 1/\rho$, T (давление, удельный объем, абсолютная температура), из которых любые две можно считать независимыми. Задание этой функции определяет модель процесса.

На основе уравнений состояния среды, представленных в виде $p =$

$= p(V, T)$ или $v = v(p, T)$ или $T = T(p, v)$ и второго закона термодинамики можно получить различные формулы для определения взаимосвязей между параметрами, характеризующими тепловые процессы в насыщенной пористой среде [56].

При помощи универсального соотношения (10.40), задав внутреннюю энергию системы и использовав (10.41), (10.42), можно вывести уравнение энергии для фильтрационного потока.

§ 7. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ ОДНОФАЗНОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Уравнение баланса энергии в пластах с учетом различных факторов рассматривалось И. А. Чарным, Э. Б. Чекалюком, М. Д. Розенбергом. П. П. Золотаревым, Е. В. Теслюком и др. [81, 82, 4, 48, 63].

Составим уравнение энергетического баланса для систем жидкость – пористая среда, рассматривая для простоты одномерный поток жидкости в направлении оси x. Выделим в пористой среде цилиндрический элемент длиной dx и площадью сечения ω. Если u и $u_{ск}$ – соответственно внутренняя энергия единицы массы жидкости и скелета, то левую часть соотношения (10.40) можно записать в виде

$$d(U + \Pi) = \frac{\partial}{\partial t}[m\rho u + (1 - m)\rho_{ск}u_{ск} + m\rho gz]\,\omega dx dt, \tag{10.43}$$

где m – пористость; $\rho_{ск}$ – плотность зерен породы; z – отметка высоты.

Вектор потока теплоты в нашем случае, как следует из (10.42), можно выразить в виде

$$q = \rho u w - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{10.44}$$

Теплота поступает через сечения x и уходит через сечение $x + dx$. Поэтому, в соответствии с (10.41) и (10.44), находим:

$$\delta Q^{(e)} = -\frac{\partial q}{\partial x} dx\omega dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \rho u w\right)\omega dx dt. \tag{10.45}$$

Работа внешних сил $\delta A^{(e)}$, совершаемая при перемещении из сечения x в положение $x + dx$, складывается из работы сил давления $\delta A_p^{(e)}$ и силы тяжести $\delta A_g^{(e)}$, которые соответственно равны:

$$\delta A_p^{(e)} = [p(x)\,w(x) - p(x + dx)\,w(x + dx)]\,\omega dt = -\frac{\partial (pw)}{\partial x} dx\omega dt;$$

$$\delta A_g^{(e)} = [\rho(x)\,gz(x)\,w(x) - \rho(x + dx)\,gz(x + dx)\,w(x + dx)]\,\omega dt =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z w)\,dx\omega dt.$$

Отсюда находим:

$$\delta A^{(e)} = -\frac{t}{\partial x}(pw + \rho gzw)\omega dxdt. \qquad (10.46)$$

Подставив (10.43), (10.45) и (10.46) в равенство (10.40) и сократив на $\omega dxdt$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}[m\rho u + (1-m)\rho_{ск}u_{ск} + m\rho gz] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x} - \rho uw - pw - \rho gzw\right). \qquad (10.47)$$

Использовав уравнение неразрывности для одномерного потока (см. гл. 2) в виде

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial x} = 0,$$

преобразуем уравнение (10.47):

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uw) = u\left(\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial x}\right) + m\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho w\frac{\partial u}{\partial x} = \rho\left(m\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(pw) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\rho w\right) = \frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho w) + \rho w\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho}\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \rho w\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho gz) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho gzw) = \rho gw\frac{\partial z}{\partial x}.$$

В последнем равенстве учтено, кроме того, условие стационарности и однородности гравитационного поля:

$\partial(gz)/\partial t = 0$, $g = \text{const}$.

После этих преобразований уравнение (10.47) принимает вид

$$m\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}[(1-m)\rho_{ск}u_{ск}] + \rho gw\frac{\partial z}{\partial x} + \rho w\frac{\partial}{\partial x}\left(u + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{p}{\rho}\frac{\partial m\rho}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right). \qquad (10.48)$$

С учетом того, что

$$m\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{p}{\rho}\frac{\partial m\rho}{\partial t} = m\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(mp),$$

введем термодинамическую функцию

$$i = u + \frac{p}{\rho}, \qquad (10.49)$$

называемую энтальпией[1], а внутреннюю энергию единицы объема твердого скелета породы выразим пропорционально его температуре

[1] Или теплосодержанием — от enthálpō — нагревать.

$$(1-m)\rho_{ск}u_{ск} = c_{ск}T, \tag{10.50}$$

где $c_{ск}$ – объемная теплоемкость скелета [Дж/(м^3·К)], и представим (10.48) в виде

$$m\rho\frac{\partial i}{\partial t} + c_{ск}\frac{\partial T}{\partial t} + \rho g w\frac{\partial z}{\partial x} + \rho w\frac{\partial i}{\partial x} - \frac{\partial mp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{10.51}$$

Из термодинамики известно [14, 48], что полный дифференциал энтальпии в переменных p и T записывается в виде

$$di = c_p(dT + \varepsilon_i dp), \tag{10.52}$$

где c_p – изобарная теплоемкость флюида $\left(c_p = \left.\frac{\partial i}{\partial T}\right|_p\right)$; ε_i — коэффициент Джоуля – Томсона (дифференциальный коэффициент дросселирования), смысл которого состоит в следующем: если флюид адиабатически[1] (без теплообмена с окружающей средой) преодолевает гидравлическое сопротивление и из области с давлением p перетекает в область с давлением $p - \delta p$, то температура в нем увеличивается на $\delta T = \varepsilon_i \delta p$. Такой процесс называется идеальным дроссельным, энтальпия при этом сохраняется. Таким образом, по определению

$$\varepsilon_i = \left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_{i=\text{const}}$$

Из равенства (10.52) находим:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon_i\frac{\partial p}{\partial t}\right); \quad \frac{\partial i}{\partial x} = c_p\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Подставив эти выражения в (10.51), получим после преобразований искомое уравнение энергии для одномерного фильтрационного потока:

$$c_п\frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{c_p}\frac{\partial z}{\partial x}\right) - m\rho c_p\eta_s\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{10.53}$$

Здесь учтено, что пористая среда недеформируема, т. е. $\partial m/\partial t = 0$ и введены обозначения: $c_п = mc_p + c_{ск}$ – теплоемкость насыщенной пористой среды; $\eta_s = 1/(\rho c_p) - \varepsilon_i$ — коэффициент адиабатического охлаждения. Этот коэффициент имеет следующий физический смысл: при адиабатическом расширении массы флюида от давления p до величины $p - \delta p$ температура в нем снижается на величину $\delta T = \eta_s \delta p$.

Уравнение (10.53) выражает тот факт, что изменение температуры системы скелет – флюид ($c_п \partial T/\partial t$) определяется следующими факторами:

1) конвективным переносом теплоты $\rho w c_p \partial T/\partial x$;

2) дроссельным эффектом $\rho w c_p \varepsilon_i \dfrac{\partial p}{\partial x}$;

[1] От adiabatos – непереходящий.

3) превращением потенциальной энергии поля силы тяжести в тепловую $\rho w g \partial z/\partial x$;

4) эффектом адиабатического охлаждения $\left(-m\rho c_p \eta_s \frac{\partial p}{\partial t}\right)$;

5) теплопроводностью $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)$.

Уравнение (10.53) можно обобщить и на случай трехмерного течения:

$$c_n \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{w}\left(\nabla T + \varepsilon_i \nabla p - \frac{\vec{g}}{c_p}\right) - m\rho c_p \eta_s \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \nabla T).$$

Отметим, что решение уравнения энергии в трехмерной постановке встречает пока значительные математические трудности, в том числе из-за сложности расчета поля давлений и трудностей определения соответствующих эмпирических коэффициентов.

§ 8. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим несколько важных частных случаев уравнения энергии для одномерного фильтрационного потока (10.53).

8.1. Уравнение энергии при стационарном поле давлений

Поскольку поле давлений устанавливается гораздо быстрее поля температур, то задачу о распределении температуры в пласте обычно решают в предположении о том, что давление в каждой точке пласта не зависит от времени, т.е. $\partial p/\partial t = 0$. Тогда в уравнении (10.53) пропадает член, характеризующий адиабатическое охлаждение, и оно принимает вид

$$c_n \frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g}{c_p}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{10.54}$$

В дальнейшем будет использоваться именно такое уравнение.

8.2. Уравнение энергии без учета потенциальной энергии поля силы тяжести

В случае, если рассматривается уравнение энергии для нефтегазоносного пласта незначительной толщины, то может оказаться, что потенциальная энергия поля силы тяжести пренебрежимо мала. Тогда уравнение (10.54) записывается в следующем виде:

$$c_n \frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i \frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{10.55}$$

т.е. отсутствует соответствующее слагаемое в левой части уравнения.

8.3. Уравнение энергии при фильтрации совершенного газа

Уравнение (10.55) можно упростить в случае рассмотрения фильтрации совершенного газа, удовлетворяющего уравнению Клапейрона–Менделеева (см. гл. 2). В этом случае, как известно, коэффициент Джоуля–Томсона $\varepsilon_i = 0$, поэтому дроссельный эффект не учитывается:

$$c_{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

8.4. Уравнение энергии при фильтрации несжимаемой жидкости

В случае, если фильтруется несжимаемая жидкость, то $\varepsilon_i = 1/(\rho c_p)$. и уравнение (10.55) приобретает следующий вид:

$$c_{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

Слагаемое $w\partial p/\partial x$ имеет здесь ясный смысл: это диссипируемая в теплоту работа жидкости по преодолению гидравлического сопротивления пористой среды.

8.5. Уравнение энергии при конвективном теплопереносе

Часто при расчетах процессов неизотермической фильтрации пренебрегают теплопроводностью вдоль направления течения, поскольку ее эффект мал по сравнению с конвективным переносом.

В самом деле

$$\frac{\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\right)\right|}{|\rho w c_p \partial T/\partial x|} \sim \frac{\lambda \Delta T/L^2}{\rho w c_p \Delta T/L} = \frac{\lambda}{\rho w c_p L},$$

где L – характерная длина, на которой заметно меняется температура на величину ΔT, имеющую порядок масштаба изменения температуры. Например, принимая для газа в пластовых условиях $\rho = 100$ кг/м^3, $c_p = 2400$ Дж/(кг·К) и считая $w = 20$ м/год $= 6 \cdot 10^{-7}$ м/с, $L = 50$ м, $\lambda \approx$ ≈ 1 Дж/(м·с·К), получим $\lambda/(\rho w c_p L) = 0{,}13$. При больших скоростях фильтрации этот параметр становится еще меньшим. Поэтому в призабойной зоне работающей скважины правой частью уравнения (10.55) уверенно пренебрегают. При этом уравнение (10.55), переписанное для одномерного плоскорадиального потока, приобретает следующий вид:

$$c_{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Q_m c_p}{2\pi r h}\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_i \frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0, \qquad (10.56)$$

где $Q_m = \rho w 2\pi r h$ – массовый дебит; r – расстояние от оси скважины; h – толщина пласта.

В уравнении (10.56) знак «–» соответствует добывающей скважине, знак «+» нагнетательной скважине.

Это уравнение существенно проще предыдущих, поскольку оно имеет первый порядок.

8.6. Уравнение энергии для стационарного поля температур

В призабойной зоне скважины при длительной ее работе поле температур становится стационарным. Тогда уравнение (10.56) еще более упрощается:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_i \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Отсюда, считая r параметром и используя определение коэффициента Джоуля–Томсона, получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T/\partial r}{\partial p/\partial r} = -\varepsilon_i,$$

т. е. в призабойной зоне скважины при установившемся тепловом режиме температура меняется вместе с давлением так же, как при дроссельном процессе. Этот факт впервые был обнаружен Б. Б. Лапуком в 1940 г.

Обычно для нефтей коэффициент Джоуля–Томсона $\varepsilon_i = 0{,}3$–$0{,}5$ К/МПа, а для природных газов $\varepsilon_i = 2$–4 К/МПа, поэтому забойные температуры работающих скважин на газовых месторождениях ниже пластовых, а на нефтяных немного выше.

Интересно, что коэффициент Джоуля–Томсона, будучи функцией термодинамического состояния, существенно зависит от давления. На рис. 10.4 приведена зависимость ε_i от p для газоконденсатной смеси Карачаганакского месторождения для пластового диапазона температур. На графике видна точка инверсии $p_н$, в которой ε_i меняет знак. Таким образом, газообразная пластовая смесь на пути к скважине сначала немного разогревается, а потом начинает охлаждаться.

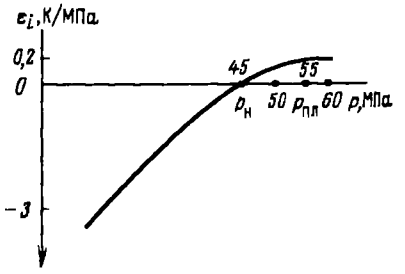


Рис. 10.4. Зависимость коэффициента Джоуля–Томсона от давления (для газоконденсатной смеси) Карачаганакского газоконденсатного месторождения

8.7. Использование уравнения энергии при конвективном теплопереносе для термозондирования пласта

На использовании уравнения (10.56) основан предложенный Э. Б. Чекалюком [82] метод «термозондирования» пласта. Чтобы понять идею метода, рассмотрим задачу о пуске совершенной скважины с постоянным дебитом. Будем считать ε_i постоянным. Вместо r введем переменную $V = \pi r^2 h$, имеющую смысл объема пласта, отсчитываемого от скважины. Тогда из (10.56) для добывающей скважины находим:

$$c_{\text{п}} \frac{\partial T}{\partial t} - c_p Q_m \left(\frac{\partial T}{\partial V} + \varepsilon_i \frac{\partial p}{\partial V} \right) = 0 . \tag{10.57}$$

Уравнение (10.57) – линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Пусть в момент времени $t = 0$ скважину пускают с постоянным дебитом. Это значит, что $T(V, 0) = T_0$, где T_0 – начальная температура пласта. Согласно методу характеристик (см. прил. 7), с учетом стационарности распределения давления находим:

$$T(V, t) + \varepsilon_i p(V) = \varphi\left(V + \frac{c_p Q_m}{c_{\text{п}}} t \right),$$

где φ – некоторая функция.

Использовав начальное условие, получим:

$$\varphi(V) = T_0 + \varepsilon_i p(V);$$

$$T(V, t) + \varepsilon_i p(V) = T_0 + \varepsilon_i p\left(V + \frac{c_p}{c_{\text{п}}} Q_m t \right)$$

Рассмотрим, как изменяется со временем температура на скважине $T_{\text{с}}(t)$.

Положив $V = V_{\text{с}}$, получим:

$$T_{\text{с}}(t) + \varepsilon_i p(V_{\text{с}}) = T_0 + \varepsilon_i p\left(V_{\text{с}} + \frac{c_p Q_m}{c_{\text{п}}} t \right).$$

Поэтому, вернувшись к переменной r, получим:

$$p = \left(\sqrt{\pi r_{\text{с}}^2 h} + \frac{c_p Q_m}{c_{\text{п}}} t \right) - p_{\text{с}} = \frac{T_{\text{с}}(t) - T_0}{\varepsilon_i}.$$

Таким образом, измеряя температуру на забое скважины в различные моменты времени t после пуска ее с постоянным дебитом, можно получить давления в пласте на расстояниях $r(t) = \sqrt{r_{\text{с}}^2 + \frac{c_p Q_m t}{c_{\text{п}}}}$ от оси скважины. А по кривой $p(r)$, по крутизне различных ее участков, можно судить о распределении проницаемости в призабойной зоне скважины.

§ 9. НАГРЕВАНИЕ ПРИЗАБОЙНОЙ ЗОНЫ ПЛАСТА ПРИ ЗАКАЧКЕ ГОРЯЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Пусть в пласт толщиной h с теплоемкостью $c_п$ через скважину закачивается горячая (или холодная) вода с температурой $T_с(t)$, отличной от начальной пластовой T_0, и постоянным расходом Q. Если считать кровлю и подошву пласта теплоизолированными и пренебречь оттоком теплоты через кровлю и подошву, а также не учитывать теплопроводность в самом пласте и эффект Джоуля–Томсона, то задача об определении поля температуры пласта упрощается. В этом случае уравнение (10.56) для рассматриваемого плоскорадиального течения принимает следующий вид:

$$c_п \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{c_p \rho Q}{2\pi r h} \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

т. е. сводится к решению линейного гиперболического уравнения. Общее решение этого уравнения, как и ранее, находится методом характеристик и имеет следующий вид:

$$T(r, t) = \Phi\left(t - \frac{c_п V}{c_p \rho Q}\right), \tag{10.58}$$

где $V = \pi r^2 h$, а Φ – произвольная функция своего аргумента.

Использовав условие, что на скважине ($r = 0$) задана температура $T_с(t)$ нагнетания воды, из (10.58) найдем:

$$T(0, t) = T_с(t) = \Phi(t),$$

а тогда

$$T(r, t) = T_с\left(t - \frac{c_п V}{c_p \rho Q}\right). \tag{10.59}$$

Из (10.59) следует, что температурный профиль в этих условиях сохраняется (распространяется без искажений). К моменту времени t он достигает сечения пласта V, положение $r_т$ которого определяется из равенства

$$V = \pi r_т^2 h = \frac{c_p \rho Q t}{c_п}, \tag{10.60}$$

а «объемная скорость» распространения тепловой волны постоянна и равна $c_p \rho Q / c_п$. Учитывая выражение для теплоемкости $c_п$ насыщенного пласта (см. § 7), эту скорость можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{c_p \rho Q}{c_п} = \frac{c_p \rho Q}{m \rho c_p + c_{ск}} = \frac{Q}{m} \frac{1}{1 + \dfrac{c_{ск}}{m c_p \rho}}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{c_p \rho Q}{c_п} < \frac{Q}{m},$$

т. е. «объемная скорость» тепловой волны оказывается меньше «объемной скорости» Q/m фронта нагнетаемой жидкости, перемещающегося в области с начальной пластовой температурой T_0. Это означает, что фронт тепловой волны всегда отстает от фронта нагнетаемой жидкости.

Из равенства (10.60) определяется радиус прогретой зоны пласта:

$$r_т = \sqrt{\frac{\rho c_p Q t}{\pi h c_п}}. \tag{10.61}$$

Рассмотренное решение было получено И. А. Чарным [81]. Формула (10.61) не учитывает потерь теплоты через кровлю и подошву, но очень проста и удобна для оценочных расчетов. Учет этих потерь приводит к еще меньшим значениям радиуса $r_т$ прогрева.

Сопоставим формулу (10.61) с формулой для расчета движения фронта воды $r_с$ при двухфазном течении. В соответствии с теорией двухфазной фильтрации, изложенной в гл. 8, 9, находим:

$$r_с = \sqrt{f'(s_с)\frac{Qt}{\pi m h}}, \tag{10.62}$$

где $s_с$ – фронтовая водонасыщенность.

Тогда из (10.61) и (10.62) получим:

$$\frac{r_т}{r_с} = \sqrt{\frac{m \rho c_p}{f'(s_с) c_п}}. \tag{10.63}$$

Найдем это отношение при следующих данных: объемные теплоемкости – воды $\rho c_p = c_в = 4{,}19$ Дж/(см$^3 \cdot$°С), водонасыщенного песчаника $c_п = 1{,}93$ Дж/(см$^3 \cdot$°С); $m = 0{,}2$; отношение вязкостей $\eta_0 = \eta_в/\eta_н = 0{,}1$; $s_с = 0{,}55$; $f'(s_с) = 2{,}2$ (примерные значения из графика на рис. 8.3). Тогда из (10.63) находим, что $r_т/r_с = 0{,}467$, т. е. тепловой фронт отстает от водяного фронта примерно в 2 раза при заданных значениях параметров.

Указанные обстоятельства говорят о малой эффективности воздействия горячей водой при вытеснении нефти в однородном пласте. Горячая вода в основном снижает вязкость флюидов, благодаря чему уменьшает сопротивление движению в призабойной зоне. Эффект может быть достигнут лишь на поздних этапах разработки залежи, после прокачки нескольких поровых объемов. Однако в слоистых пластах этот эффект может оказаться значительным, так как воздействие теплотой от хорошо проницаемого пропластка на малопроницаемый возможно и до прохождения в нем фронта вытеснения воды.

Вместе с тем, лабораторные и промысловые исследования показали, что для хорошо проницаемых пластов, насыщенных высоковязкой

нефтью, закачка горячей воды для увеличения нефтеотдачи экономически оправдана.

Рост нефтеотдачи при закачке горячей воды обусловлен рядом факторов. При повышении температуры:

уменьшается вязкость нефти, растет отношение вязкостей и значение фронтовых насыщенностей (см. рис. 8.3);

уменьшается остаточная нефтенасыщенность, увеличивается коэффициент вытеснения;

растет относительная проницаемость нефти (по данным некоторых экспериментов);

улучшаются свойства смачиваемости скелета породы;

уменьшается поверхностное натяжение на границе нефть - вода;

уменьшается влияние неньютоновских свойств нефтей.

Закачка горячей воды благотворно влияет на сроки разработки. С ростом температуры уменьшается вязкость закачиваемой воды, что увеличивает приемистость нагнетательных скважин и позволяет интенсифицировать процесс извлечения нефти.

При расчете неизотермического вытеснения нефти горячей водой используют модель двухфазного течения (см. гл. 9, § 4), в которой вязкости флюидов и функция Бакли - Леверетта зависят от температуры: $\eta_в = \eta_в(T)$; $\eta_н = \eta_н(T)$; $f = f(s, T)$.

С особенностями постановок таких задач, аналитического и численного расчета характеристик вытеснения можно познакомиться по специальной литературе [3, 4, 26, 77].

§ 10*. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ЗАЛЕЖАХ БОЛЬШОЙ ТОЛЩИНЫ

Один из эффективных способов разработки газоконденсатных залежей большой толщины - вертикальное вытеснение пластовой смеси. При этом в верхнюю часть залежи закачивается вытесняющий агент (более легкий, чем пластовая смесь, «сухой» отсепарированный газ, неуглеводородные газы), а из нижней отбирается более тяжелая пластовая смесь. Представляет значительный интерес рассмотреть задачу о вертикальном течении в пласте и проанализировать изменение температуры в пластовом флюиде.

Для одномерного вертикального нисходящего фильтрационного потока (ось x направлена вниз) уравнение энергии (10.54) перепишется в виде

$$c_п \frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{c_p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \qquad (10.64)$$

Для простоты анализа будем считать параметры $c_п$, ρ, c_p, ε_i и λ постоянными.

Будем рассматривать приведенное давление p^*, избыточное над гидростатическим, $p^* = p + \rho g x$. Тогда, с учетом термодинамического тождества $\varepsilon_i = (1 - \alpha T)/(\rho c_p)$, где α - коэффициент температурного рас-

ширения флюида $\left(\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_p\right)$, уравнение (10.64) перепишется в виде

$$c_{\text{п}}\frac{\partial T}{\partial t} + \rho w c_p\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i\frac{\partial p^*}{\partial x} - \frac{\alpha g}{c_p}T\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{10.65}$$

Пусть $\partial p^*/\partial x$ и $w = -\frac{K}{\eta}\partial p^*/\partial x$ постоянны.

Рассмотрим стационарный тепловой режим

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon_i\frac{\partial p^*}{\partial x} - \frac{\alpha g}{c_p}T = \frac{\lambda}{\rho w c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{10.66}$$

при следующих краевых условиях:

$$T = T_{\text{с}} \text{ при } x = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \Gamma \text{ при } x = H, \tag{10.67}$$

где H — толщина залежи.

Первое краевое условие – равенство температуры флюида на кровле температуре закачки. Второе – стационарность притока теплоты из недр Земли. В такой постановке считается, что флюид, отбираемый на подошве залежи ($x = H$), очень быстро выносится на дневную поверхность и в дальнейшем теплообмене участвовать не успевает.

Введем безразмерную переменную $\xi = x/H$. Краевая задача (10.66), (10.67) приобретает следующий вид:

$$\frac{dT}{\partial\xi} + \varepsilon_i\frac{dp^*}{\partial\xi} - \omega T = \varepsilon\frac{d^2T}{d\xi^2};\ T(0) = T_{\text{с}},\ \frac{\partial T}{\partial\xi}\Big|_{\xi=1} = \Gamma H.$$

Здесь ε и ω – безразмерные параметры:

$$\varepsilon = \lambda/(\rho w c_p H);\ \omega = \alpha g H/c_p.$$

Параметр ω обычно мал. В случае месторождения Карачаганак ($H \approx 1500$ м, $\alpha \approx 2\cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$) имеем $\omega \approx 0{,}02$. Что касается параметра ε, то при $w \to 0$ величина $\varepsilon \to \infty$, однако даже для очень медленных фильтрационных течений (со скоростями фильтрации порядка нескольких метров в год) этот параметр также мал ($\varepsilon \approx 10^{-3}$).

Обозначив $\varepsilon_i dp^*/d\xi = -\gamma$, получим уравнение

$$\varepsilon\frac{d^2T}{\partial\xi^2} - \frac{dT}{d\xi} + \omega T + \gamma = 0, \tag{10.68}$$

которому соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$\varepsilon d^2 - d + \omega = 0. \tag{10.69}$$

Дискриминант квадратного уравнения (10.69) $D = 1 - 4\varepsilon\omega$ положителен, поскольку $\omega\varepsilon \ll 1$. Поэтому корни характеристического уравнения

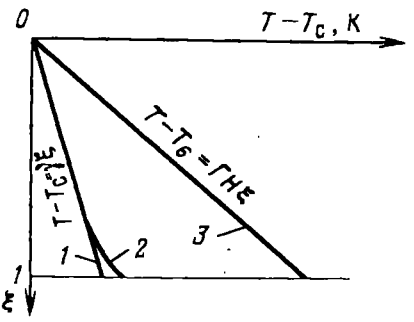


Рис. 10.5. Распределение температуры по глубине залежи:
1 – $\varepsilon \to 0$; *2* – $\varepsilon = 0.1$; *3* – $\varepsilon \to \infty$

вещественны. Они положительны ($d_1 > d_2 > 0$) и приближенно равны:

$$d_1 \approx \frac{1}{\varepsilon} - \omega;\ d_2 \approx \omega.$$

Тогда решение уравнения (10.68) имеет вид:

$$T = c_1 e^{d_1 \xi} + C_2 e^{d_2 \xi} - \gamma/\omega,$$

где константы C_1 и C_2 можно определить из краевых условий.

Если пренебречь потенциальной энергией гравитационного поля ($\omega \to 0$), решение примет вид:

$$T = T_c + \gamma\xi + (\Gamma H - \gamma)\varepsilon e^{-1/\varepsilon}(e^{\xi/\varepsilon} - 1). \qquad (10.70)$$

При $\varepsilon \to \infty$ (отсутствие фильтрационного течения) решение превращается в геотермы:

$$T_{\text{геот}} = T_c + \Gamma H \xi,$$

а при $\varepsilon \to 0$ (отсутствие теплопроводности) решение стремится к линейному распределению температуры, соответствующему дроссельному процессу:

$$T_{\text{дрос}} = T_0 + \gamma\xi.$$

При малых $\varepsilon \neq 0$ решение (10.70) близко к $T_{\text{дрос}}$ всюду вне ε-окрестности точки $\xi = 1$. В окрестности точки $\xi = 1$ график изменения температуры резко изгибается, чтобы наклон $dT/d\xi = \gamma$ сменился на величину $dT/d\xi = \Gamma H$, соответствующую краевому условию (рис. 10.5). Такое поведение решения объясняется образованием у подошвы залежи теплопроводного пограничного слоя и характерно для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной (как в уравнении (10.68)).

Поскольку влияние теплопроводности носит характер пограничного слоя и слабо сказывается на распределении температур, то рассмотрение нестационарной задачи упростим за счет пренебрежения теплопроводными эффектами. Следует отметить, что здесь пренебрегается теплопроводностью по оси течения. Теплопроводность в перпендикулярном

направлении вообще не вошла в уравнения (10.64), (10.65). Это допустимо, когда залежь имеет очень большие размеры по толщине и по простиранию.

Рассмотрим нестационарную задачу без учета теплопроводности

$$C_{\text{п}}\frac{\partial T}{\partial t}+\rho w c_p\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\varepsilon_i\frac{\partial p^*}{\partial x}-\frac{\alpha g}{c_p}T\right)=0$$

с начальным условием, соответствующим геотермическому распределению

$$T(x,\,0)=\mathrm{T}_0+\Gamma x$$

и граничным условием

$$T(0,\,t)=T_{\text{c}}.$$

Возвратясь к прежним обозначениям и введя безразмерное время $\tau=\rho c_p w t/(c_{\text{п}}H)$, перепишем эту задачу в виде

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}+\frac{\partial T}{\partial\xi}-\omega T=\gamma, \tag{10.71}$$

$$T(\xi,\,0)=T_0+\Gamma H\xi, \tag{10.72}$$

$$T(0,\,\tau)=T_{\text{c}}. \tag{10.73}$$

Задача (10.71)–(10.73) легко решается методом характеристик (см. прил. 7). Уравнения характеристик, соответствующих уравнению (10.71), имеют следующий вид:

$$d\xi/d\tau=1;\ dT/d\tau=\gamma+\omega T.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим (с учетом малости параметра ω):

$$\xi=\tau+C_1: \tag{10.74}$$

$$\gamma+\omega T=C_2e^{\omega\tau}\approx C_2(1+\omega\tau);$$

$$\gamma+\omega T=C_3e^{\omega\xi}=C_3(1+\omega\xi). \tag{10.75}$$

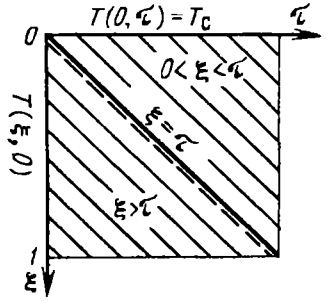


Рис. 10.6. Характеристики, соответствующие уравнению (10.71)

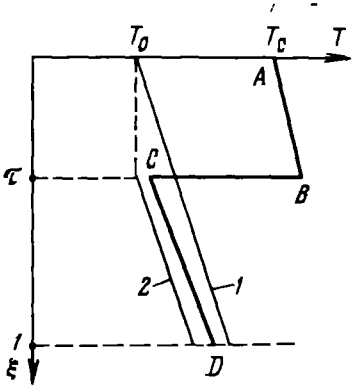


Рис. 10.7. Распределение температуры по глубине залежи при вертикальном вытеснении пластовой смеси газом:
1 – начальная геотерма; *2* – смещенная геотерма; *ABCD* – профиль температуры

Отсюда следует, что характеристики (10.74) представляют собой семейство прямых, параллельных биссектрисе координатного угла (рис. 10.6), вдоль каждой из которых переносятся начальные значения температуры (10.72) и (10.73) по законам (10.75). Очевидно, что если $T_c \neq T_0$, то на «особой» характеристике $\xi = \tau$ происходит разрыв температуры, на котором в каждый момент времени имеется тепловой фронт закачки. А общее решение уравнения (10.71) имеет вид:

$$F_1\left(\xi - \tau, \ \frac{\gamma + \omega T}{1 + \omega\tau}\right) = 0 \quad \text{в области } \xi > \tau;$$

$$F_2\left(\xi - \tau, \ \frac{\gamma + \omega T}{1 + \omega\xi}\right) = 0 \quad \text{в области } 0 < \xi < \tau,$$

где F_1 и F_2 – произвольные функции своих аргументов; вид этих функций находится из условий (10.72), (10.73) с использованием (10.75).

После простых преобразований решение рассматриваемой задачи окончательно можно представить в виде

$$T(\xi, \tau) = \begin{cases} T_c(1 + \omega\xi) + \gamma\xi \ \text{ при } \ 0 < \xi < \tau, \\ [T_0 + \Gamma H(\xi - \tau)](1 + \omega\tau) + \gamma\tau \ \text{ при } \ \tau < \xi < 1. \end{cases} \tag{10.76}$$

Распределение температуры по ξ для некоторого фиксированного значения τ приведено на рис. 10.7. Структура решения (10.76) такова: на тепловом фронте ($\xi = \tau$) температура имеет разрыв (при $T_c \neq T_0$); в области выше фронта ($\xi < \tau$) температура близка к температуре закачки T_c, в области ниже фронта ($\xi > \tau$) – близка к сдвинутой вниз геотерме. Поправки к этим значениям определяются дроссельным и гравитационным эффектами. Скорость движения теплового фронта $\rho c_p w / c_п$ на порядок меньше скорости гидродинамического фронта w/m. Например, для Карачаганакского месторождения их отношение равно 1 : 24.

В заключение оценим максимально возможные величины вкладов дроссельного и гравитационного эффектов для условий того же месторождения:

$$\Delta T_{\text{дрос}} = \varepsilon_i \Delta p^* \approx 0{,}2 \frac{\text{К}}{\text{МПа}} \cdot 6 \text{ МПа} = 1{,}2 \text{ К};$$

$$\Delta T_{\text{грав}} = \frac{\alpha g T}{c_p} H = \frac{9{,}8 \text{ м/см}^2 \cdot 0{,}002 \text{ 1/К} \cdot 350 \text{ К}}{2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}} \cdot 1500 \text{ м} = 5 \text{ К}.$$

Таким образом, суммарное повышение температуры в результате реализации дроссельного и гравитационного эффекта превышает 6 °С. Такое, казалось бы, незначительное повышение температуры в нисходящем фильтрационном потоке приводит к весьма важным последствиям, так как оно способствует удержанию пластовой газоконденсатной системы в однофазном газообразном состоянии, повышению давления начала конденсации смеси, а значит предотвращению выпадения жидкой фазы и обеспечению более высоких значений конденсатоотдачи пласта.

§ 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ТЕПЛОТЫ ЧЕРЕЗ КРОВЛЮ И ПОДОШВУ ПЛАСТА

При расчете температурного поля пласта на входе в пласт (или на забое скважины) обычно задают постоянную температуру или полное количество теплоты, вносимой в пласт. Вопрос же об условиях на кровле и подошве пласта требует специального рассмотрения.

Наиболее простое условие – теплоизолированность кровли и подошвы: поток теплоты равен нулю на этих границах пласта. Это довольно грубое приближение; его можно принять для пластов большой толщины, когда время закачки горячей жидкости невелико. Во многих практических случаях потери теплоты через кровлю и подошву пласта могут быть значительными и их следует учитывать.

При определении потока теплоты через кровлю и подошву пласта принимают дополнительные упрощения. Наиболее известное упрощение состоит в том, что поток теплоты с каждого элемента кровли и подошвы пласта считают происходящим только в направлении, перпендикулярном напластованию. При этом используют обычно два подхода при описании оттока теплоты q_0 через кровлю и подошву. Первый из них основан на предположении о квазистационарности теплового потока, что приводит к следующей формуле:

$$q_0 = a(T - T_0),$$

где a – коэффициент теплопередачи, зависящий от термических свойств пород; T – температура пласта; T_0 – начальная температура окружающих пород.

Второй подход – наиболее распространенный – предложил Ловерье. Схема Ловерье основана на допущении, что теплопроводность продуктивного пласта и окружающих пород в направлении простирания пласта равна нулю, а в вертикальном направлении теплопроводность окружающих пород равна их среднему значению, а теплопроводность пласта бесконечно велика. Она пригодна в тех случаях, когда прогревание

пласта происходит довольно быстро, так что окружающие породы прогреваются в основном от ближайших точек кровли или подошвы пласта за счет вертикальной теплопроводности пород.

В соответствии со схемой Ловерье для температуры окружающей пласт горной породы имеем уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_0 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\ z > 0,\ t > 0, \tag{10.77}$$

где $\varkappa_0$ – коэффициент температуропроводности окружающих пород.

Пусть в начальный момент времени температура породы постоянна и равна T_0, а на границе с пластом при $z = 0$ температура меняется с течением времени по известному закону, так что

$$T(z, 0) = T_0,\ T(0, t) = T_{\text{п}}(t). \tag{10.78}$$

В случае, если температура кровли $T_{\text{п}}(t) = T_{\text{п}} = \text{const}$, то задача (10.77), (10.78) полностью аналогична задаче о прямолинейно-параллельной фильтрации упругой жидкости при постоянном давлении на галерее (см. гл. 5, § 4).

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$\frac{T - T_0}{T_{\text{п}} - T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\varkappa_0 t}}\right), \tag{10.79}$$

где $\operatorname{erfc} x$ – табулированная функция;

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Проинтегрировав (10.79), получим в соответствии с законом Фурье выражение для потока теплоты q_0 на единицу площади кровли $z = 0$:

$$q_0 = -\lambda_0 \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\lambda_0 (T_{\text{п}} - T_0)}{\sqrt{\pi \varkappa_0 t}}, \tag{10.80}$$

т. е. отток теплоты в окружающие породы убывает во времени обратно пропорционально $\sqrt{t}$.

В случае, если $T_{\text{п}} = \text{const}$, то решение уравнения (10.77) при условиях (10.78) можно получить при помощи преобразования Лапласа. В этом случае вместо (10.80) для оттока теплоты по схеме Ловерье имеем:

$$q_0 = \lambda_0 \int_0^t \frac{dT_{\text{п}}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \varkappa_0 (t - \tau)}}.$$

Здесь приняли, что температура на кровле в начальный момент совпадает с температурой горных пород, так что $T_{\text{п}}(0) = T_0$. Существуют и другие приближенные приемы определения величины q_0.

Контрольные вопросы и задачи

1. Каков механизм физико-химических методов воздействия на пласт?

2. В каких предположениях выводится система уравнений для описания вытеснения нефти раствором активной примеси?

3. Какое влияние на фильтрационные параметры оказывает применение оторочки химического реагента по сравнению с обычным заводнением?

4. Какими факторами определяется изменение температуры в насыщенной пористой среде?

5. Доказать, что коэффициент Джоуля–Томсона: а) $\varepsilon_i = 0$ для совершенного газа; б) $\varepsilon_i = 1/(\rho c_p)$ для несжимаемой жидкости.

6. Как соотносятся температуры на забое работающих скважин с пластовыми температурами на газовых и нефтяных месторождениях?

7*. Система уравнений неизотермической стационарной фильтрации совершенного газа имеет вид:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{w}) = 0,\ \vec{w} = -\frac{k}{\eta}\nabla p;$$

$$\rho c_p \vec{w}\nabla T = \lambda\Delta T;\ p = \rho RT.$$

Коэффициенты η, c_p, λ и k – постоянны.

Доказать, что существует постоянная β такая, что функция $\Phi = \beta p^2 + \lambda T$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$.

8*. Стационарный неизотермический приток несжимаемой жидкости к совершенной скважине без учета теплопроводности описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dr}(\rho w) = 0,\quad w = \frac{k}{\eta}\frac{dp}{dr};$$

$$\frac{dT}{dr} + \varepsilon_i \frac{dp}{dr} = 0.$$

Определить давление и температуру на скважине, считая, что $k = \text{const}$, $\varepsilon_i = \text{const}$, $\eta = \eta_0 e^{-\theta(T-T_0)}$, $p(R_к) = p_к$, $T(R_к) = T_к$ (где $R_к$ – радиус контура питания) и известен массовый дебит скважины Q_m.

Глава 11

ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

В гл. 1 в связи с исследованием нижней границы применимости закона Дарси (при очень малых числах Рейнольдса) было рассмотрено аномальное (неньютоновское) поведение флюидов в пластовых условиях, не проявляющих этих свойств вне контакта с пористой средой. Это объяснялось тем, что при очень малых скоростях фильтрации наряду с силами вязкого сопротивления становятся существенными силы сопротивления, не зависящие от скорости фильтрации и связанные физико-химическим взаимодействием фильтрующихся жидкостей с материалом пористой среды. Учет этих сил приводит к нелинейным законам фильтрации.

Из практики разработки многих нефтяных месторождений (Азербайджана, Башкирии, Татарии, Казахстана и др.) известны факты необычного поведения пластовых систем, которые можно объяснить проявлением неньютоновских свойств флюидов при их фильтрации. Особенности фильтрации таких, как называемых, аномальных нефтей связаны в основном с повышенным содержанием в них высокомолекулярных компонентов – смол, асфальтенов, парафина и наличием предельного напряжения сдвига.

Развитие методов воздействия на природные залежи с целью увеличения нефте- и газоконденсатоотдачи привело к значительному расширению ассортимента веществ, закачиваемых в продуктивные пласты. Многие из этих веществ (высокомолекулярные соединения, полимеры) не обладают свойствами ньютоновских жидкостей. Поэтому рассмотрение особенностей фильтрации неньютоновских систем приобретает самостоятельное значение.

В этой главе будем рассматривать нелинейные законы фильтрации, описывающие только безынерционные движения, при условии, что фильтрующиеся жидкости обладают неньютоновскими свойствами.

§ 1. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ФИЛЬТРУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЛЬТРАЦИИ

Для ньютоновской жидкости единственным параметром, характеризующим ее течение, служит коэффициент динамической вязкости – коэффициент пропорциональности в законе вязкого трения Ньютона:

$$\tau = \eta \frac{dw}{dy}, \tag{11.1}$$

где τ – касательное напряжение сдвига; dw/dy – градиент скорости в направлении, перпендикулярном направлению течения x.

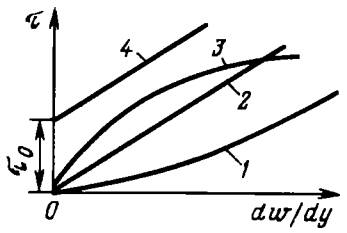


Рис. 11.1. Зависимость касательного напряжения от градиента скорости для различных моделей жидкости:
1 – дилатантная; *2* – ньютоновская; *3* – псевдопластичная; *4* – вязкопластичная

Зависимость τ от dw/dy выражается в этом случае прямой линией, проходящей через начало координат (рис. 11.1, кривая *2*).

Жидкости, не подчиняющиеся закону трения (11.1), называются аномальными или неньютоновскими. Неньютоновские жидкости подразделяются на три класса.

1. Неньютоновские вязкие жидкости, для которых касательное напряжение зависит только от градиента скорости (стационарно реологические жидкости):

$$\tau = f\left(\frac{dw}{dy}\right). \tag{11.2}$$

2. Жидкости, для которых связь между τ и dw/dy зависит от времени действия напряжений (нестационарно реологические жидкости):

$$\tau = \varphi\left(\frac{dw}{\partial y}, t\right).$$

3. Вязкоупругие жидкости, т.е. среды, обладающие свойствами как твердого тела, так и жидкости, а также способные к частичному восстановлению формы после снятия напряжений. Для таких сред зависимость между касательными напряжениями и градиентом скорости значительно сложнее – она включает производные по времени как напряжений, так и градиента скорости.

Среди неньютоновских жидкостей первого класса, описываемых уравнением (11.2), можно выделить три типа.

А. Вязкопластичные жидкости, для которых уравнение (11.2) имеет следующий вид:

$$\tau = \tau_0 + \eta\frac{dw}{dy}, \quad \text{если } dw/dy > 0;$$

$$\tau \leqslant \tau_0, \quad \text{если } dw/dy = 0. \tag{11.3}$$

Графическое представление этой зависимости, называемое реологической кривой (или кривой течения), приведено на рис. 11.1 (кривая *4*). В равенство (11.3), кроме коэффициента вязкости η входит также постоянная τ_0, называемая начальным (или предельным) напряжением сдвига. Считается, что при $\tau \leqslant \tau_0$ жидкость ведет себя как твердое тело,

и течение отсутствует. Это объясняется наличием у покоящейся вязкопластичной жидкости пространственной жесткой структуры, сопротивляющейся любому напряжению τ, меньшему τ_0. Когда τ становится больше τ_0, структура полностью разрушается, и жидкость ведет себя как ньютоновская среда (при этом «пластические» τ_0 и «вязкие» напряжения складываются). Если τ уменьшается до значения τ_0, то структура опять восстанавливается.

Б. Псевдопластичные жидкости. Эксперименты показали, что для таких сред связь между напряжением сдвига и градиентом скорости в логарифмических координатах оказывается на некотором участке линейной. Угловой коэффициент соответствующей прямой заключен между 0 и 1. Поэтому для описания таких сред предложена степенная зависимость:

$$\tau = k\left(\frac{dw}{dy}\right)^n, \quad n < 1, \tag{11.4}$$

где k и n – постоянные для данной жидкости: коэффициент k – мера консистенции жидкости, которая увеличивается с возрастанием вязкости; показатель n характеризует степень отклонения данной жидкости от ньютоновской.

Типичная реологическая кривая (11.4) псевдопластичной жидкости приведена на рис. 11.1 (кривая *3*). Модель псевдопластичной жидкости применяется, в частности, для описания растворов и расплавов полимеров.

Введем понятия кажущейся вязкости η_* как отношение касательного напряжения к градиенту скорости:

$$\eta_* = \tau / \frac{dw}{dy}.$$

Для псевдопластичной жидкости, как следует из (11.4),

$$\eta_* = k\left(\frac{dw}{dy}\right)^{n-1},$$

и так как $n < 1$, то η_* убывает с возрастанием градиента скорости.

В. Дилатантные жидкости описываются степенным уравнением (11.4), но при $n > 1$. Кривая течения приведена на рис. 11.1 (кривая *1*). У этих жидкостей кажущаяся вязкость η_* увеличивается с возрастанием градиента скорости. Модель дилатантной жидкости хорошо описывает поведение суспензий с большим содержанием твердой фазы.

Рассмотрим наиболее простой случай течения среды с неньютоновскими свойствами, стационарное движение вязкопластичной жидкости (11.3) в одной поре как в капиллярной трубке постоянного радиуса. Распределение скоростей в некотором сечении трубки приведено на рис. 11.2. На некотором расстоянии r_0 от оси трубки касательное напряжение $\tau = \tau_0$, что выражается равенством (11.3), где $dw/dy = dw/dr$,

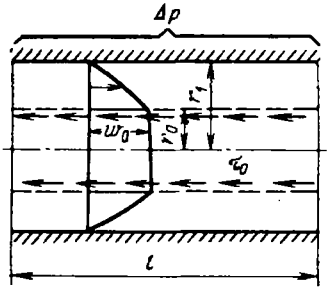


Рис. 11.2. Эпюра скоростей вязкопластичной жидкости при движении в капилляре

причем $dw/dr = 0$ при $r = r_0$. Расстояние r_0 определяется из условия равновесия жидкого цилиндрического слоя (рис. 11.2):

$$2\pi r_0 l\tau_0 = \pi r_0^2 \Delta p,$$

откуда

$$d_0 = 2r_0 = 4l\tau_0/\Delta p. \tag{11.5}$$

Предположим, что в (11.5) $d_0 = 2r_1 = d$; при этом найдем наибольший перепад давления $(\Delta p)_0$, при котором вязкопластичная жидкость находится в предельном равновесии, отвечающем полному прекращению движения в данной поре. Тогда из (11.5)

$$\gamma = \left(\frac{\Delta p}{l}\right)_0 = \frac{4\tau_0}{d}. \tag{11.6}$$

Это предельное значение γ определяет ту величину градиента давления $(\Delta p/l)_0$, по достижении которой начинается движение жидкости. При меньших значениях градиента движение отсутствует. С учетом того, что характерный размер пор пористой среды $d \sim \sqrt{k}$ (где k — проницаемость, см. гл. 1 § 7), то из (11.6)

$$\gamma \sim \tau_0/\sqrt{k}. \tag{11.7}$$

Данное соотношение нашло экспериментальное подтверждение. Величина γ называется предельным (начальным) градиентом. Если для исследуемого фильтрационного течения такое предельное значение существует, то говорят о фильтрации с предельным (начальным) градиентом.

Соответствующий закон фильтрации вязкопластичной жидкости в пористой среде был сформулирован в гл. 1 и получен из соображений размерности:

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} p = -\frac{\eta}{k}\vec{w} - \gamma\frac{\vec{w}}{|w|}, && w > 0; \\ &|\operatorname{grad}| \leqslant \gamma, && w = 0. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Данные соотношения для описания фильтрации вязкопластичных жидкостей были предложены А. Х. Мирзаджанзаде [50].

В соответствии с (11.8) скорость фильтрации w отлична от нуля только в тех областях, где $|\operatorname{grad} p| > \gamma$ (рис. 11.3, кривая *1*). Модель фильтрации с предельным градиентом следует рассматривать как некоторую идеализацию реальных течений аномальных нефтей в пластовых условиях, для которых реологическая кривая имеет вид кривой *2* (см. рис. 11.3). Для сравнения на рис. 11.3 приведена зависимость по закону Дарси (кривая *3*).

В пористой среде, состоящей из множества микрокапилляров различных диаметров, при снижении перепада давления начинается постепенное «закупоривание» капилляров. В соответствии с формулой (11.6) вначале движение прекращается в наиболее мелких капиллярах (порах), а по мере снижения давления происходит закупоривание все больших и больших капилляров. Чем сильнее разброс размеров пор, тем больше растянут переход к полному прекращению движения и тем сильнее отличается истинный закон фильтрации от соотношения (11.8).

В основе проявления неньютоновских свойств пластовых систем лежат различные физические механизмы. Важно, однако, что аномальные эффекты проявляются при малых скоростях фильтрации и в средах с малым размером пор, т. е. с малой проницаемостью. Это определяет особенности неньютоновской фильтрации в неоднородных пластах. Области малой проницаемости оказываются областями наибольшего проявления неньютоновских эффектов.

Рассмотрим это на примере пласта со слоистой неоднородностью. В слоистых пластах предельные градиенты различны для разных пропластков. Как следует из (11.7), чем больше проницаемость, тем меньше предельный градиент γ, и наоборот.

Предположим, что для каждого пропластка справедлив закон фильтрации типа (11.7) с предельным градиентом:

$$\vec{w}_i = -\frac{k_i}{\eta}\left(\operatorname{grad} p - \gamma_i \frac{\operatorname{grad} p}{|\operatorname{grad} p|}\right), \quad \text{если } |\operatorname{grad} p| > \gamma_i;$$
$$\vec{w}_i = 0, \quad \text{если } |\operatorname{grad} p| < \gamma_i. \tag{11.9}$$

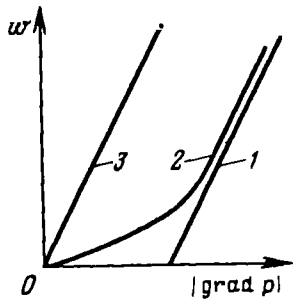


Рис. 11.3. Индикаторные линии:
1 – для ВПЖ с предельным градиентом; *2* – для реальных неньютоновских нефтей; *3* – зависимость по закону Дарси

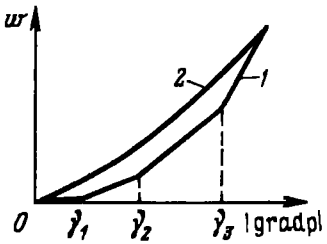


Рис. 11.4. Зависимости скорости фильтрации от модуля градиента давления:
1 – кусочно-линейная (в слоистом пласте); *2* – при непрерывном изменении проницаемости

Здесь индекс «*i*» соответствует характеристикам *i*-го пропластка.

Для определения рассмотрим пласт, состоящий из трех пропластков различной проницаемости: $k_1 > k_2 > k_3$, тогда $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$. Будем предполагать, что пропластки идеально сообщаются между собой, т.е. можно пренебречь изменением давления по толщине. Это эквивалентно допущению, что возникающие между отдельными пропластками разности давлений быстро выравниваются за счет обмена жидкостью между слоями. Усреднив в этом предположении скорость фильтрации по суммарной толщине H слоистого пласта и использовав (11.9), найдем среднюю скорость фильтрации:

$$\vec{w} = \frac{1}{H}\int_0^H \vec{w}_i dz = -\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k_i h_i}{\eta} - \frac{\gamma_i}{|\operatorname{grad} p|}\right)\operatorname{grad} p. \qquad (11.10)$$

Здесь номер пропластка j ($0 \leqslant j \leqslant 3$), до которого ведется суммирование, определяется из условия

$$\gamma_j < |\operatorname{grad} p| \leqslant \gamma_{j+1}. \qquad (11.11)$$

Отсюда следует, что пропластки будут последовательно включаться в работу. Если $|\operatorname{grad} p| < \gamma_1$, то движение отсутствует во всем пласте ($w = 0$). Если $\gamma_1 < |\operatorname{grad} p| < \gamma_2$, то фильтрация будет только в первом пропластке и т.д. Следовательно, соотношение (11.10) представляет кусочно-линейный закон фильтрации, описываемый выпуклой к оси абсцисс ломаной линией (рис. 11.4, ломаная 1). Отсюда легко перейти к случаю непрерывно изменяющейся проницаемости по толщине пласта (рис. 11.4, кривая *2*). В обоих случаях закон фильтрации имеет прямолинейный асимптотический участок в области больших скоростей.

В соответствии с кусочно-линейным законом (11.10) фильтрацию жидкости с предельным градиентом в слоистом пласте можно рассматривать как движение в однородном пласте со средней скоростью фильтрации w.

Наряду с рассмотренными законами фильтрации (11.8) и (11.10), описывающими течение вязкопластичной жидкости в пористой среде, рассмотрим степенной закон фильтрации:

$$\vec{w} = -C|\operatorname{grad} p|^n \operatorname{grad} p, \qquad (11.12)$$

где C – экспериментальная константа; $n > 0$.

Степенной закон (11.12), соответствующий псевдопластическому поведению флюида (11.4), хорошо описывает движение растворов полимеров в пористой среде и используется при расчете «полимерного» заводнения пластов с целью повышения их нефтеотдачи.

§ 2. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Движение аномальных нефтей в пластах по закону (11.8) приводит к существенным особенностям разработки этих пластов не встречающихся в случае фильтрации по закону Дарси.

2.1. Установившееся течение

Рассмотрим плоскорадиальный приток несжимаемой вязкопластичной жидкости (ВПЖ) к скважине при условии выполнения соотношения (11.8), которое в этом случае принимает вид

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\eta}{k} w + \gamma, \quad w > 0,$$

$$\frac{dp}{dr} \leqslant \gamma, \qquad w = 0. \tag{11.13}$$

Выведем формулу для дебита скважины в круговом пласте, обобщающую формулу Дюпюи. Из (11.13) имеем:

$$w = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{k}{\eta}\left(\frac{dp}{dr} - \gamma\right), \text{ если } \frac{dp}{dr} > \gamma,$$

$$w = 0, \qquad \text{если } \frac{dp}{dr} \leqslant \gamma. \tag{11.14}$$

Считая заданными постоянные давления на забое скважины и на границе пласта

$$p(r_c) = p_c, \quad p(R_к) = p_к$$

($p_к > p_c$) для рассматриваемого случая притока и $p_к < p_c$ при закачке жидкости в пласт), после интегрирования (11.14) находим:

$$dp = \frac{\eta}{k}\frac{Q}{2\pi h}\frac{dr}{r} + \gamma dr,$$

откуда

$$p(r) = p_c + \gamma(r - r_c) + \frac{\eta Q}{2\pi k h}\ln\frac{r}{r_c};$$

$$(r_c \leqslant r \leqslant R_к) \tag{11.15}$$

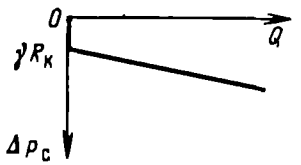


Рис. 11.5. Индикаторная линия при плоскорадиальной фильтрации ВПЖ

$$Q = \frac{2\pi kh}{\eta \ln(R_к/r_c)}(\Delta p_c - \gamma R_к) \text{ при } \Delta p_c > \gamma R_к$$

$$Q = 0 \text{ при } \Delta p_c \leqslant \gamma R_к \quad (\Delta p_c = p_к - p_c). \tag{11.16}$$

Формулами (11.15), (11.16) представлены соответственно распределение давления в пласте и дебит скважины. Из формулы (11.15) видно, что часть разности давлений в виде линейного слагаемого с угловым коэффициентом γ теряется на преодоление градиента давления сдвига. При $Q \to 0$, как следует из (11.15), давление не постоянно (как в случае фильтрации по закону Дарси), а меняется по линейному закону. Как видно из (11.15) наличие предельного градиента давления в пласте ведет к уменьшению дебита скважины при тех же условиях по сравнению с фильтрацией по закону Дарси (формула Дюпюи). В рассматриваемом случае индикаторная линия скважины, т. е. зависимость $Q(\Delta p_c)$ прямолинейна, но не проходит через начало координат, а отсекает на оси депрессий отрезок, равный $\gamma R_к$ (рис. 11.5).

Обобщим полученные результаты на случай слоистого пласта. Пусть пропластки гидродинамически изолированы, т. е. отсутствуют перетоки между слоями с разными проницаемостями. Тогда для дебита в каждом пропластке справедлива формула (11.16):

$$Q_i = \frac{2\pi kh_i}{\eta \ln(R_к/r_c)}(\Delta p_c - \gamma_i R_к) \text{ при } \Delta p_c > \gamma_i R_к;$$

$$Q_i = 0 \text{ при } \Delta p_i \leqslant \gamma_i R_к \ (i = \overline{1, n}), \tag{11.17}$$

а суммарный дебит Q равен

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i. \tag{11.18}$$

В случае, если как и ранее, проницаемости пропластков пронумерованы так, что $k_1 > k_2 > k_3 \ldots$ и, следовательно, $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots$, то индекс «$j$» в (11.18) определяется условием (11.11). Пусть $0 < \Delta p_c < \gamma_1 R_к$, тогда во всем пласте движение отсутствует и $Q = 0$. На индикаторной линии (рис. 11.6) это представлено вертикальным отрезком. Если $\gamma_1 R_к < \Delta p_c < \gamma_2 R_к$, то движение будет только в первом пропластке; формулы (11.16), (11.18) выполняются при $j = 1$. Пусть теперь $\gamma_2 R_к < \Delta p_c < \gamma_3 R_к$, тогда движение будет в пропластках с проницаемостями k_1 и k_2 ($j = 2$) в (11.18), и суммарный дебит равен:

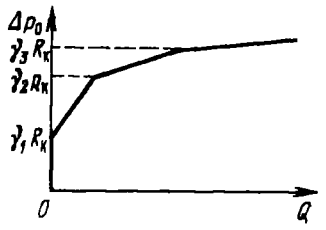


Рис. 11.6. Индикаторная линия для трехслойного пласта

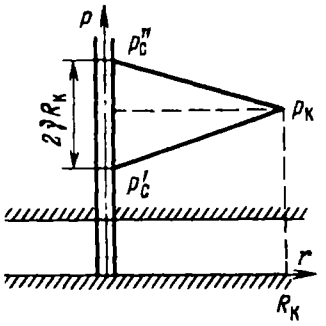


Рис. 11.7. Схема для определения предельного градиента давления

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{2\pi}{\eta \ln(R_к/r_c)}[(k_1h_1 + k_2h_2)\Delta p_c - (k_1h_1\gamma_1 + k_2h_2\gamma_2)R_к].$$

Наконец, при $\Delta p_c > \gamma_3 R_к$ включается и третий пропласток, и т. д. Индикаторная линия представляется ломаной, выпуклой к оси депрессии (см. рис. 11.6) для случая трехслойного пласта.

При определении количественных показателей разработки месторождений аномальных нефтей существенное значение имеет величина предельного градиента γ. Начальный градиент давления связан с характеристиками пласта. Поэтому его определение важно проводить непосредственно на месторождении на основе промысловых исследований, учитывающих реальные геологические условия. Приведем один из способов определения усредненного значения γ из промыслового эксперимента. Пусть добывающая нефтяная скважина, работающая на стационарном режиме с давлением $p_к$ на контуре питания, мгновенно остановлена. Через некоторое время (теоретически при $t \to \infty$) в пласте установится предельное стационарное распределение давления, имеющее вид линейной зависимости (рис. 11.7)

$$p = p_к - \gamma(R_к - r). \qquad (11.19)$$

При этом, как следует из (11.19), давление на забое скважины поднимается не до $p_к$ (как в случае фильтрации по закону Дарси), а до значения

$$p_c' = p_к - \gamma R_к. \qquad (11.20)$$

Если теперь закачать в пласт некоторое количество той же нефти (обычно меньше, чем отобрано первоначально), то начнется движение от скважины. После окончания закачки движение прекратится и через некоторое время распределение давления станет

$$p = p_к + \gamma(R_к - r),$$

откуда определим давление на забое скважины (см. рис. 11.7):

$$p_c'' = p_к + \gamma R_к \tag{11.21}$$

Вычтя (11.20) из (11.21) найдем

$$\gamma = \frac{p_c'' - p_c'}{2R_к}.$$

Время проведения эксперимента согласно имеющимся оценкам может составить не более нескольких часов. Например, для месторождения Грязевая Сопка в Азербайджане при данном способе определения $\gamma = 0{,}007$ МПа/м.

2.2. Неустановившаяся фильтрация

Рассмотрим нестационарное течение упругой ВПЖ в упругой пористой среде. Дифференциальные уравнения для определения давления при упругом режиме пласта можно получить, дополняя закон фильтрации с предельным градиентом (11.8) (или другую аппроксимацию нелинейного закона) уравнением неразрывности и уравнением состояния флюида и пористой среды. Уравнение неразрывности рассматриваемого фильтрационного потока (см. гл. 6, § 3) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\rho) + \operatorname{div}(\rho\vec{w}) = 0.$$

Использовав (11.21) и (11.8), получим искомое дифференциальное уравнение для определения давления p:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \operatorname{div}\left[\left(1 - \frac{\gamma}{|\nabla p|}\right)\nabla p\right], \quad |\nabla p| > \gamma, \tag{11.22}$$

где $\varkappa$ – коэффициент пьезопроводности.

Уравнение (11.22) служит основой для построения нелинейной теории упругого режима фильтрации. При решении конкретных задач фильтрации для уравнения (11.22) формулируются обычные начальные и граничные условия (см. гл. 3 и 6), вытекающие из условий задачи. Вместе с тем следует иметь в виду, что при решении нестационарных задач на основе модели фильтрации с предельным градиентом в пласте образуется переменная область фильтрации, на границе которой (пока она не достигнет границы пласта) модуль градиента давления должен равняться предельному градиенту γ, а давление – начальному пластовому.

Рассмотрим одномерные задачи такого типа.

А. Прямолинейно-параллельная фильтрация упругой ВПЖ, обладающей предельным градиентом, в однородном полубесконечном пласте. В начальный момент времени $t = 0$ на границе пласта $x = 0$ начинает работать добывающая галерея, на которой поддерживается постоянное давление $p_г$. При этом в пласте образуются две зоны: зона фильтрации и зона, где течение отсутствует, граница раздела между которыми перемещается со временем по закону $l = l(t)$, причем $l(0) = 0$. Считается, что жидкость, перемещаясь, приобретает те структурно-механические свойства, которые характерны для данной точки пласта. Предполагается, что зона отсутствия фильтрации представляет собой невозмущенную область, в которой давление остается первоначальным пластовым, а предельный градиент постоянен.

В этом случае соотношение (11.8) принимает вид

$$w = \begin{cases} 0, & \text{если } \left|\dfrac{\partial p}{\partial x}\right| \leqslant \gamma, \\ -\dfrac{k}{\eta}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x} - \gamma\right), & \text{если } \left|\dfrac{\partial p}{\partial x}\right| > \gamma. \end{cases} \tag{11.23}$$

Давление в области фильтрации удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\right), \quad 0 < x < l, \tag{11.24}$$

которое получается из (11.22).

Вне области фильтрации давление равно начальному пластовому

$p(x, t) = p_0$ при $x > l(t)$.

На границе $x = l(t)$ выполняются условия:

$$p(l, t) = p_0; \tag{11.25}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(l, t) = \gamma. \tag{11.26}$$

В области $0 < x < l$ требуется найти решение уравнения (11.24), определить дебит $Q = Q(t)$ и закон изменения $l(t)$ при условиях (11.25) и (11.26) на границе зон и начальном и граничном условиях

$$p(x, 0) = p_0, \quad p(0, t) = p_г. \tag{11.27}$$

Найдем приближенное решение этой задачи методом интегральных соотношений (см. гл. 6, § 7). Ограничиваясь одним интегральным соотношением, согласно этому методу, ищем решение в виде

$$p(x, t) = \gamma x + a_0(t) + a_1(t)\frac{x}{l} + a_2(t)\left(\frac{x}{l}\right)^2, \tag{11.28}$$

где a_0, a_1 и a_2 – неизвестные коэффициенты.

Тогда, учитывая условия (11.25), (11.26) и второе условие (11.27), находим из (11.28) распределение давления:

$$p(x, t) = p_0 - \gamma(l - x) - (\Delta p_0 - \gamma l)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \tag{11.29}$$

где $\Delta p_0 = p_0 - p_r = \text{const}$. При этом дебит галереи запишется так:

$$Q(t) = 2\frac{k}{\eta}\left(\frac{\Delta p_0}{l(t)} - \gamma\right)\omega, \tag{11.30}$$

где ω – площадь сечения пласта.

Для определения $l(t)$ воспользуемся интегральным соотношением, характеризующим условие материального баланса:

$$\int_0^{l(t)} \frac{\partial p}{\partial t} dx = \varkappa\left[\frac{\partial p}{\partial x}(x, t) - \gamma\right]_0^l.$$

Из этого равенства с учетом (11.29) находим:

$$6\varkappa\frac{\partial t}{\partial l} = l + \frac{2\gamma l^2}{\Delta p_0 - \gamma l}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение при условии $l(0) = 0$, получим неявное алгебраическое уравнение для нахождения закона перемещения границы зон $l(t)$:

$$3\varkappa t = \left(\frac{\Delta p_0}{\gamma}\right)^2 \ln\frac{\Delta p_0}{\Delta p_0 - \gamma l} - \left(\frac{\Delta p_0}{\gamma} + \frac{l}{4}\right) l. \tag{11.31}$$

Исследование выражения (11.31) показывает, что $l(t)$ имеет асимптоту:

$$l = l^* = \Delta p_0/\gamma.$$

Предельное ($t \to \infty$) распределение давления и дебит соответственно примут вид:

$$p = p(x) = \begin{cases} p_r + \gamma x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l^*, \\ p_0 & \text{при } x > l^*, \end{cases}$$
$$Q(\infty) = 0. \tag{11.32}$$

Анализ простых соотношений (11.29)–(11.32), который мы предоставляем читателю, позволяет глубже понять основные особенности, характеризующие нестационарную фильтрацию с предельным градиентом.

Б. Рассмотрим теперь важную для практики задачу о пуске скважины с постоянным дебитом при фильтрации в пласте вязкопластичной жидкости с предельным градиентом – случаи плоскорадиальной фильтрации. В этом случае соотношение (11.8) принимает вид (11.13), а давление удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial p}{\partial r} - \gamma\right)\right]. \tag{11.33}$$

В начальный момент пласт невозмущен:

$$p = p_к \text{ при } t = 0. \tag{11.34}$$

Условие на стенке скважины получается из соотношения (11.14):

$$Q = \frac{k}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial r} - \gamma\right) 2\pi r h,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\eta}{2\pi k h r_c} + \gamma \text{ при } r = r_c. \tag{11.35}$$

Будем искать приближенное решение поставленной задачи по методу интегральных соотношений. Возьмем распределение давления в возмущенной зоне радиусом $R(t)$ в виде

$$p(r, t) = a_0 \ln \frac{r}{R(t)} + a_1 + a_2 \frac{r}{R(t)} \text{ при } r \leqslant R(t);$$
$$p(r, t) = p_к \text{ при } r > R(t), \tag{11.36}$$

где a_0, a_1, a_2 – коэффициенты, подлежащие определению; $R(t)$ – радиус возмущенной зоны, в которой происходит фильтрация, вне этой зоны фильтрация отсутствует; с течением времени граница возмущенной области перемещается по закону $R = R(t)$, причем $R(0) = r_c$.

На границе возмущенной области выполняются условия:

$$p = p_к, \ \partial p/\partial r = \gamma \text{ при } r = R(t). \tag{11.37}$$

Из соотношений (11.35) и (11.37) найдем коэффициенты a_0, a_1 и a_2; тогда формула (11.36) примет вид:

$$p(r, t) = p_к + \frac{Q\eta}{2\pi k h}\left(\ln \frac{r}{R(t)} - \frac{r}{R(t)} + 1\right) - \gamma [R(t) - r]. \tag{11.38}$$

Радиус возмущенной области находится из уравнения материального баланса (5.4), которое для случая $Q = \text{const}$ можно записать в виде

$$Q(t) = \beta^* \pi R^2(t) h (p_к - \tilde{p}), \tag{11.39}$$

где $\tilde{p}$ – средневзвешенное давление в возмущенной области, определяемое из равенства (3.13), подставив в которое выражение (11.38) и проинтегрировав, получим:

$$\tilde{p} = p_к - \frac{Q\eta}{12\pi k h} - \frac{\gamma}{3} R(t). \tag{11.40}$$

Из равенства (11.39) с учетом (11.40) найдем закон перемещения границы возмущенной области:

$$R^2(t)\left[1+\frac{4\pi kh\gamma}{Qh}R(t)\right]=12\varkappa t. \tag{11.41}$$

Определив из последнего соотношения значения $R(t)$ в различные моменты времени и подставив в формулу (11.38), можно найти значения давления $p(r, t)$.

Наибольший интерес представляет исследование изменения давления на забое скважины (при $r = r_c$):

$$p_c(t)=p_k+\frac{Q\eta}{2\pi kh}\left(\ln\frac{r_c}{R(t)}+1\right)-\gamma R(t). \tag{11.42}$$

Здесь учтено, что практически сразу после пуска скважины $r_c \ll R$.

Чтобы исследовать изменение давления в скважине при фильтрации с предельным градиентом, проанализируем соотношение (11.41).

Для значений $R(t) \ll Q\eta/(4\pi kh\gamma)$ второе слагаемое в скобке много меньше единицы и его можно отбросить; тогда получается соотношение

$$R^2(t)=12\varkappa t, \tag{11.43}$$

характерное для упругого режима (см. гл. 5). Это соотношение выполняется для малых времен:

$$t \ll \frac{1}{12\varkappa}\left(\frac{Q\eta}{4\pi kh\gamma}\right)^2,$$

при этом $\gamma R \ll Q\eta/(4\pi kh)$ и основную роль в формуле (11.42) играет логарифмический член

$$p_c(t)\approx p_k-\frac{Q\eta}{4\pi kh}\ln\frac{12\varkappa t}{r_c^2}. \tag{11.44}$$

При больших значениях времени, когда в скобках формулы (11.41) можно отбросить единицу по сравнению со вторым слагаемым, т. е. $R \gg Q\eta/(4\pi kh\gamma)$, закон движения границы возмущенной области имеет вид

$$R=\left(\frac{3Q\eta\varkappa t}{\pi kh\gamma}\right)^{1/3}, \tag{11.45}$$

и зависимость забойного давления от времени следующая:

$$p_c(t)=p_k-\frac{Q\eta}{6\pi kh}\ln\frac{3Q\eta\varkappa t}{\pi kh\gamma r_c^3}-\gamma\left(\frac{3Q\eta\varkappa t}{\pi kh\gamma}\right)^{1/3}+\frac{Q\eta}{2\pi kh}. \tag{11.46}$$

При некоторых значениях параметров оказывается, что основное значение имеет степенной член, так что закон падения давления на забое скважины изменяется с логарифмического на степенной. Следовательно, при больших временах вид кривых изменения забойного давления $p_c(t)$ при фильтрации с предельным градиентом существенно изменяется по

сравнению с фильтрацией упругой жидкости. В принципе это позволяет обнаружить в пластовых условиях проявление предельного градиента давления.

§ 3. ОБРАЗОВАНИЕ ЗАСТОЙНЫХ ЗОН ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ВОДОЙ

Важный эффект фильтрации с предельным градиентом давления – возможность образования в пласте застойных зон, где движение жидкости или газа отсутствует. Эти зоны образуются в тех участках пласта, где градиент давления меньше предельного. Возникновение застойных зон ведет к уменьшению нефтеотдачи пластов. На рис. 11.8, *а* застойная зона *3*, расположенная между двумя добывающими скважинами с равными дебитами, заштрихована.

Рассмотрим вытеснение нефти водой из пласта с пятиточечной системой расположения скважин (рис. 11.8, *б*). Пусть через нагнетательную скважину *1* закачивается вода, а через добывающие скважины *2* отбирается нефть. Анализ возникающего при этом двумерного течения (В. М. Ентов [7, 10]) показывает, что в зонах *3* (см. рис. 11.8, *б*) скорость течения будет мала по сравнению со скоростями течения в областях, прилегающих к прямым, соединяющим нагнетательную и добывающую скважины. Поэтому эти зоны и окажутся застойными. Отношение незаштрихованных областей на рис. 11.8, *б*, ко всей площади пятиточечной ячейки можно считать площадным коэффициентом охвата пласта заводнением. Показано, что величина застойной зоны и коэффициент охвата пласта зависят от параметра

$$\lambda = Q\eta/(k\gamma L),$$

где Q – дебит добывающей скважины; L – характерный размер (например, половина расстояния между соседними скважинами).

Оказывается, что коэффициент охвата пласта увеличивается с увеличением параметра λ.

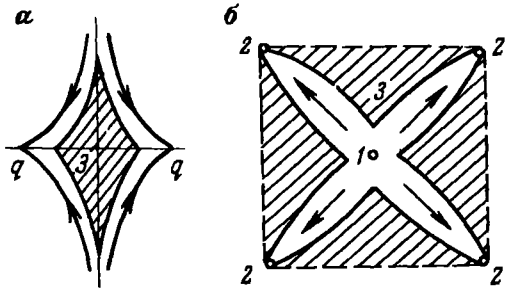


Рис. 11.8. Схема образования застойных зон (*3*):
а – между двумя добывающими скважинами; *б* – при пятиточечной расстановке скважин; скважина: *1* – нагнетательная; *2* – добывающая

Вместе с тем следует отметить, что для установления чистого эффекта изменения коэффициента охвата из-за предельного градиента давления применительно к реальному месторождению необходимы дополнительные тщательные исследования, позволяющие исключить влияние других причин, связанных с деформацией горных пород, неоднородностью пласта, физико-химическими явлениями и т. п.

Контрольные вопросы и задачи

1. Каков физический смысл предельного градиента давления и от каких параметров он зависит?
2. Опишите метод определения предельного градиента давления из промыслового эксперимента.
3. Почему области пласта с малой проницаемостью оказываются областями наибольшего проявления неньютоновских свойств флюидов?
4. В случае стационарной плоскорадиальной фильтрации оцените, на сколько снижается дебит вязкопластичной жидкости по сравнению с дебитом ньютоновской жидкости при прочих равных условиях.
5. Построить индикаторную кривую для четырехслойного пласта (проницаемости пропластков $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$) при стационарном плоскорадиальном притоке вязкопластичной жидкости к скважине. Считать, что пропластки гидродинамически изолированы: нет перетоков между слоями.
6. Постройте типичную кривую изменения забойного давления $p_c(t)$ при фильтрации с предельным градиентом. Как ее можно использовать для обнаружения проявлений предельного градиента в пластовых условиях? Сравните с соответствующей кривой при нестационарной фильтрации упругой жидкости.
7. Как можно объяснить образование застойных зон при эксплуатации нефтяных залежей и оценить размеры зон?

Глава 12

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

§ 1. ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

По мере развития нефтяной и газовой промышленности в мире происходит развитие геолого-разведочных работ с целью обеспечения все возрастающей добычи необходимыми запасами углеводородов.

Поиск новых месторождений связан с ростом глубин, выходом на неизвестные ранее нефтегазоносные районы, усложнением геологического строения и физических параметров продуктивных коллекторов. В частности, были открыты значительные запасы нефти и газа, приуроченные к карбонатным коллекторам, которые отличаются трещиноватым строением. Большое число таких крупных месторождений открыто на Ближнем Востоке (Иран, Ирак, Саудовская Аравия и др.), в Северной Америке (США, Мексика, Канада), в Европе (Венгрия, Болгария, Франция, ФРГ и др.) и других регионах. Месторождения нефти в карбонатных трещиноватых породах открыты и разрабатываются на Северном Кавказе, в Среднем Поволжье, Прикаспийской низменности.

Первоначально было замечено, что на некоторых месторождениях наблюдаются следующие аномалии: при бурении скважин происходит интенсивное поглощение промывочной жидкости, хотя проницаемость породы очень мала; при работе скважин на установившихся режимах наблюдаются высокие дебиты при очень малой проницаемости породы. Эти и им подобные явления говорили о том, что пласт пронизан системой сообщающихся между собой трещин, по которым в основном и происходит приток флюидов в скважину или уходит промывочная жидкость.

Промысловые данные, а также данные исследования кернов и шлифов свидетельствуют о том, что трещиноватые породы имеют сложное строение, а движение в них жидкости и газа отличается некоторыми особенностями по сравнению с движением в пористой среде. В трещиноватой породе имеются микро- и макротрещины, мелкие и крупные каверны, полости; сама порода – матрица (пространство между трещинами) может быть абсолютно непроницаемой или представлять собой обычную пористую среду. Раскрытия макротрещин имеют порядок 1 мм, а в отдельных случаях и больше, микротрещин – 1–100 мкм. Исходя из того, что сопротивление движению жидкости в трещиноватых породах достаточно велико, считается, что макротрещины не имеют значительной протяженности и в большинстве случаев соединяются между собой микротрещинами, которые и создают большие сопротивления.

Оказалось, что созданные к тому времени модели фильтрации жидкости и газа в обычных терригенных гранулярных коллекторах не описывают в полной мере особенностей фильтрации в карбонатных коллекторах, главная особенность которых – различный характер трещиноватости.

Создание новых моделей фильтрации в трещиноватых породах вызвало необходимость более детального изучения геологического строения и физических свойств этих пород. Одновременно началось углубленное экспериментальное и теоретическое изучение фильтрационных процессов в глубокозалегающих трещиноватых породах в нашей стране и за рубежом.

Фундаментальные фильтрационные исследования в этом направлении выполнены Г. И. Баренблаттом, Ю. П. Желтовым, И. Н. Кочиной,

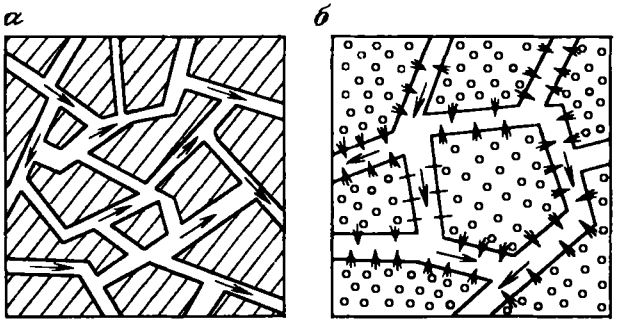


Рис. 12.1. Схемы чисто трещиноватой (*а*) и трещиновато-пористой (*б*) сред; *1*, *3* – трещины; *2* – пористые блоки

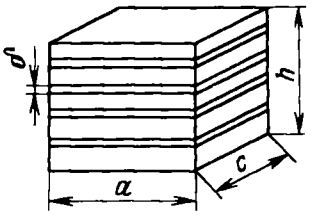
Е. С. Роммом, А. А. Боксерманом, В. Н. Николаевским, Г. О. Оганджанянцем, П. Г. Бедриковецким, Э. А. Бондаревым, В. С. Кутляровым, Э. А. Авакян, Е. М. Смеховым, Э. В. Скворцовым, В. Л. Даниловым, А. А. Кочешковым и др. Вопросы разработки этих месторождений изучались в работах А. Т. Горбунова, С. Н. Закирова, В. Н. Майдебора, Э. В. Соколовского, Н. П. Лебединца и многих других.

Изложенное в данной главе не охватывает всего многообразия гидродинамических моделей фильтрации жидких и газообразных углеводородов в трещиноватых породах. Со многими из них можно познакомиться в специальной литературе. Изложение данной главы основано на модельных представлениях, получивших достаточно широкое применение.

Для понимания особенностей фильтрации жидкости и газа в трещиноватых породах в нефтегазовой подземной гидромеханике рассматривают две модели пород – чисто трещиноватые и трещиновато-пористые (рис. 12.1). В чисто трещиноватых породах (см. рис. 12.1, *а*) блоки породы, расположенные между трещинами, практически непроницаемы, движение жидкости и газа происходит только по трещинам (на рисунке показано стрелками), т. е. трещины служат и коллекторами, и проводниками жидкости к скважинам. К таким породам относятся сланцы, кристаллические породы, доломиты, мергели и некоторые известняки. Рассматривая трещиноватую породу с жидкостью как сплошную среду, нужно за элемент породы принимать объем, содержащий большое количество блоков, и усреднение фильтрационных характеристик проводить в пределах этого элемента, т. е. масштаб должен быть гораздо бо́льшим, чем в пористой среде. Если представить себе блок в виде куба со стороной $a = 0{,}1$ м, то в качестве элементарного объема надо взять куб со стороной порядка 1 м.

Трещиновато-пористая среда представляет собой совокупность пористых блоков, отделенных один от другого развитой системой трещин (см. рис. 12.1, *б*). Жидкость и газ насыщают и проницаемые блоки,

Рис. 12.2. Модель трещиноватой среды с упорядоченной системой трещин



и трещины. При этом размеры трещин значительно превосходят характерные размеры пор, так что проницаемость системы трещин k_1 значительно больше, чем проницаемость системы пор в блоках k_2. В то же время трещины занимают гораздо меньший объем, чем поры, так что коэффициент трещиноватости m_1 – отношение объема, занятого трещинами, к общему объему породы – существенно меньше пористости отдельных блоков m_2.

Трещиновато-пористые коллекторы – это в основном известняки, иногда песчаники, алевролиты, доломиты.

Рассмотрим характеристики чисто трещиноватой породы. Трещина представляет собой узкую щель, два измерения которой во много раз больше третьего. Коэффициент трещиноватости составляет обычно доли процента (в то время, как коэффициент пористости зернистой породы составляет 10–20%). Коэффициент трещиноватости m_1 так же, как и коэффициент проницаемости k_1, определяется густотой и раскрытием трещин. Густотой трещин Г называется число трещин n, отнесенное к длине нормали L, проведенной к поверхностям, образующим трещины. Для простоты представим себе модель трещиноватой среды с упорядоченной системой параллельных и равноотстоящих трещин с раскрытием δ (рис. 12.2). Густота трещин $\Gamma = n/h$, а коэффициент трещиноватости

$$m_1 = acn\delta/(ach) = \Gamma\delta .$$

Если в пласте имеются две взаимноперпендикулярные системы трещин с одинаковыми густотой и раскрытием, то $m_1 = 2\Gamma\delta$, если три, то $m_1 = 3\Gamma\delta$; в общем случае можно считать, что

$$m_1 = \theta\Gamma\delta , \qquad (12.1)$$

где θ – безразмерный коэффициент, зависящий от геометрии систем трещин в породе.

Движение жидкости или газа в трещине можно представить себе как движение в узкой щели между двумя параллельными плоскими стенками с расстоянием между ними δ; для такого движения справедлива формула Буссинеска, согласно которой средняя скорость движения жидкости в щели составляет:

$$v = -\frac{\delta^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}, \qquad (12.2)$$

где η – динамический коэффициент вязкости; dp/dx – градиент давления.

Перейдя к скорости фильтрации $w = m_1 v$, получим:

$$w = -\frac{m_1 \delta^2}{12\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{12.3}$$

Сопоставив формулу (12.3) с законом Дарси и использовав соотношение (12.1), найдем выражение для коэффициента проницаемости трещиноватой породы:

$$k_1 = m_1\delta^2/12 = \theta\Gamma\delta^3/12. \tag{12.4}$$

Экспериментами на образцах горных пород установлена зависимость проницаемости трещиноватых пород от пластового давления, более существенная, чем зависимость от давления проницаемости пористых сред. Из формулы (12.4) зависимость $k_1(p)$ можно получить следующим образом. Горное давление, которое можно считать постоянным, уравновешивается напряжениями в скелете породы и давлением жидкости в трещинах. При снижении пластового давления увеличивается нагрузка на скелет породы и уменьшается раскрытие трещин (с ростом давления раскрытие трещин увеличивается). Если считать, что деформации в трещиноватом пласте упругие и малы по величине, то зависимость раскрытия трещины от давления можно считать линейной:

$$\delta = \delta_0[1 - \beta(p_0 - p)], \tag{12.5}$$

где β – параметр трещиноватой среды, зависящий от упругих свойств и геометрии трещин.

Исходя из формул (12.4) и (12.5), можно записать зависимость коэффициента проницаемости k_1 от давления следующим образом:

$$k_1 = k_1^0[1 - \beta(p_0 - p)]^3, \tag{12.6}$$

где k_1^0 – коэффициент проницаемости трещиноватой породы при давлении p_0.

Как уже указывалось в гл. 2, хорошо подтверждается экспериментом экспоненциальная зависимость проницаемости от давления:

$$k_1 = k_1^0 e^{-\alpha(p_0 - p)}, \tag{12.7}$$

а при малых изменениях давления зависимость $k_1(p)$ можно считать линейной:

$$k_1 = k_1^0[1 - \alpha(p_0 - p)], \tag{12.8}$$

где $\alpha = 3\beta$.

При рассмотрении установившейся фильтрации в трещиновато-пористом пласте обычно считают, что коэффициент проницаемости трещин k_1 существенно зависит от давления и определяется одной из формул (12.6) – (12.8), а коэффициент проницаемости пористых блоков k_2 не зависит от давления и принимается постоянным. Соотношения для

установившихся фильтрационных потоков в трещиновато-пористой среде получаются суммированием потоков в трещинах и пористых блоках.

В трещиноватых породах, где истинное сечение потока сравнительно мало, а дебиты обычно велики, особенно вероятно отклонение от закона Дарси за счет проявления инерционных сил. При этом обычно используют двучленный закон фильтрации (1.12).

Наиболее ярко особенности фильтрации в трещиновато-пористой среде проявляются в неустановившихся процессах. Система трещин и система пор представляют собой две среды с разными масштабами (см. рис. 12.1, *б*). Средний размер пор составляет 1–100 мкм, протяженность трещин – от нескольких сантиметров до десятков метров. Так как коэффициент пористости блоков m_2 на один-два порядка выше, чем коэффициент трещиноватости m_1, то большая часть жидкости находится в порах. Чаще всего пористые блоки малопроницаемые ($k_2 \ll k_1$) и жидкость, фильтруясь из них в трещины, движется в скважины в основном по трещинам, проводимость которых значительно выше, чем пористых блоков (см. рис. 12.1, *б*).

Рассмотрим этот процесс подробнее. Пусть происходит резкое изменение давления на забое скважины. Если блоки считать непроницаемыми, то можно использовать обычную теорию упругого режима, причем коэффициент пьезопроводности $\varkappa = k_1/[(\beta_ж m_1 + \beta_{c1})\eta]$, определенный через характеристики систем трещин, может оказаться очень большим, так как k_1 велик а, m_1 мал. Это значит, что процесс распределения давления в трещинах будет происходить с большой скоростью и в трещинах за сравнительно большое время установится новое распределение давления. Из-за малой проницаемости блоков жидкость из них выходит медленно и давление в блоках длительное время сохраняет свое начальное значение. Тем самым между жидкостью, находящейся в блоке, и жидкостью, его окружающей, создается разность давлений. В результате перетока части жидкости из блока в трещины происходит постепенное выравнивание давлений. Этот процесс будет тем длительнее, чем меньше проницаемость блока k_2, больше его размеры, больше пористость m_2 и сжимаемость жидкости $\beta_ж$ и порового пространства β_{c2}.

Таким образом, характеристики движения в блоках и трещинах оказываются различными: давление в блоках p_2 больше, чем давление в трещинах p_1, скорость фильтрации в блоках w_2 значительно меньше, чем в трещинах w_1. Поэтому трещиновато-пористую среду рассматривают как совмещение двух пористых сред с порами разных масштабов: среда 1 – укрупненная среда, в которой роль зерен играют пористые блоки, которые рассматриваются как непроницаемые, а роль поровых каналов – трещины, давление в этой среде p_1, скорость фильтрации w_1; среда 2 – система пористых блоков, состоящих из зерен, разделенных мелкими порами, давление в ней p_2, скорость фильтрации w_2. Таким образом, p_1 – среднее давление в трещинах в окрестности данной точки, p_2 – среднее давление в блоках и аналогично для скоростей фильтрации.

Важная особенность неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористой среде – интенсивный обмен жидкостью между обеими средами,

т. е. между пористыми блоками и трещинами, обусловленный различием давлений в этих средах p_2 и p_1. Обмен жидкостью происходит при достаточно медленном изменении давлений с течением времени, поэтому этот процесс можно считать квазистационарным, т. е. не зависящим явно от времени. Очевидно, что при движении слабосжимаемой жидкости масса жидкости, вытекающей из блоков в трещины за единицу времени в единице объема породы (интенсивность перетока q), пропорциональна разности давлений $p_2 - p_1$, плотности ρ_0 (считая, что плотность мало меняется в интервале давлений от p_1 до p_2) и обратно пропорциональна вязкости η, т. е.

$$q = \alpha_0 \frac{\rho_0}{\eta}(p_2 - p_1), \tag{12.9}$$

где α_0 – безразмерный коэффициент, зависящий от геометрических характеристик блоков – проницаемости k_2, среднего размера блоков l и безразмерных величин, характеризующих форму блоков; $\alpha_0 = \bar{\alpha} k_2 / l^2$.

Соотношение (12.9) должно быть уточнено для случая, если плотность сильно зависит от давления. Например, при фильтрации совершенного газа интенсивность перетоков из блоков в трещины представляется в виде

$$q = \alpha_0 \frac{\rho_0 (p_2^2 - p_1^2)}{\eta^2 p_0}, \tag{12.10}$$

где p_0 – фиксированное давление, соответствующее плотности ρ_0.

§ 2. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Выведем дифференциальные уравнения движения жидкости и газа в деформируемой трещиновато-пористой среде, считая, что в каждой точке имеются два давления (p_1 – в системе трещины, p_2 – в пористых блоках) и две скорости фильтрации – w_1 и w_2 соответственно. Перетоки между средами определяются формулами (12.9) или (12.10).

При составлении дифференциальных уравнений записывают два уравнения неразрывности – одно для фильтрации в трещинах (среда 1), другое для фильтрации в пористых блоках (среда 2). Уравнение баланса жидкости в трещинах, т. е. уравнение неразрывности, отличается от уравнения (2.3), выведенного в гл. 2, только наличием в правой части добавочного члена, представляющего собой массу жидкости (или газа) q, перетекающей за единицу времени из блоков в трещины в единице объема среды.

$$-\left[\frac{\partial(\rho w_{1x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_{1y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_{1z})}{\partial z}\right] = \frac{\partial(\rho m_1)}{\partial t} - q, \tag{12.11}$$

где ρ – плотность жидкости или газа при давлении p_1.

Для фильтрации в пористых блоках уравнение неразрывности принимает вид

$$-\left[\frac{\partial(\rho w_{2x})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_{2y})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_{2z})}{\partial z}\right]=\frac{\partial(\rho m_2)}{\partial t}+q, \tag{12.12}$$

где ρ – плотность жидкости или газа при давлении p_2.

Для чисто трещиноватого пласта $q=0$ и остается только уравнение (12.11), так как в блоках не содержится жидкости.

Введем функции Лейбензона для системы трещин P_1 и для пористых блоков P_2 по формуле (2.49):

$$P_1=\int\frac{\rho(p_1)k_1(p_1)}{\eta(p_1)}dp_1+C; \tag{12.13}$$

$$P_2=\int\frac{\rho(p_2)k_2(p_2)}{\eta(p_2)}dp_2+C. \tag{12.14}$$

Будем считать, что выполняется линейный закон Дарси. Тогда дифференциальные уравнения движения записываются в виде (2.15); выразим их через функции Лейбензона:

$$\rho w_{1x}=-\frac{\partial P_1}{\partial x},\quad \rho w_{1y}=-\frac{\partial P_1}{\partial y},\quad \rho w_{1z}=-\frac{\partial P_1}{\partial z}; \tag{12.15}$$

$$\rho w_{2x}=-\frac{\partial P_2}{\partial x},\quad \rho w_{2y}=-\frac{\partial P_2}{\partial y},\quad \rho w_{2z}=-\frac{\partial P_2}{\partial z}. \tag{2.16}$$

Подставив выражения (12.15) и (12.16), а также (12.9) для упругой жидкости или (12.10) для газа в уравнения неразрывности (12.11) и (12.12), получим систему уравнений неустановившейся фильтрации любого однородного флюида в трещиновато-пористой среде в общем виде:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial t}[\rho(p_1)m_1(p_1)]-\frac{\alpha_0}{\eta}[f(p_2)-f(p_1)]; \tag{12.17}$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial t}[\rho(p_2)m_2(p_2)]+\frac{\alpha_0}{\eta}[f(p_2)-f(p_1)], \tag{12.18}$$

где $f(p)=\rho_0 p$ – для упругой жидкости; $f(p)=\rho_0 p^2/(2P_0)$ – для газа.

Для получения единственного решения при интегрировании этой системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно давлений p_1 и p_2 к ней необходимо добавить начальные и граничные условия (см. гл. 2, § 7).

§ 3. УСТАНОВИВШАЯСЯ ОДНОМЕРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТОМ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Рассмотрим установившуюся фильтрацию жидкости и газа в деформируемом чисто трещиноватом пласте, в котором проницаемость изменяется в зависимости от давления по одному из законов – (12.6) – (12.8). В этом случае правая часть уравнения (12.17) обращается в нуль и дифференциальное уравнение сводится к уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = 0$$

Рассмотрим фильтрацию несжимаемой жидкости ($\rho_0 = \text{const}$) с постоянной вязкостью ($\eta = \text{const}$). Найдем выражение функции Лейбензона (12.13) для экспоненциальной зависимости проницаемости от давления (12.7):

$$P_1 = \int \frac{\rho_0}{\eta} k_1^0 e^{-\alpha(p_0 - p)}\, dp + C = \frac{\rho_0 k_1^0 e^{-\alpha(p_0 - p)}}{\eta\alpha} + C \tag{12.19}$$

и выведем формулы дебита и распределения давления для плоскорадиальной фильтрации несжимаемой жидкости в круговом пласте к скважине. Дебит определится по формуле (3.18), в которой

$$P_к = \frac{\rho_0 k_1^0}{\eta} \frac{e^{-\alpha(p_0 - p_к)}}{\alpha} + C, \quad P_c = \frac{\rho_0 k_1^0}{\eta} \frac{e^{-\alpha(p_0 - p_c)}}{\alpha} + C. \tag{12.20}$$

При этом, если принять, что $p_0 = p_к$, то

$$Q_m = \frac{2\pi k_1^0 h \rho_0 [1 - e^{-\alpha(p_к - p_c)}]}{\eta\alpha \ln(R_к/r_c)}, \tag{12.21}$$

а объемный дебит выразится формулой

$$Q = \frac{2\pi k_1^0 h [1 - e^{-\alpha(p_к - p_c)}]}{\eta\alpha \ln(R_к/r_c)}. \tag{12.22}$$

Индикаторная диаграмма, описываемая формулой (12.22), криволинейна, причем для добывающих скважин она имеет выпуклость к оси дебитов (рис. 12.3, кривая *1*), а для нагнетательных ($p_c > p_к$) – к оси депрессий (кривая *2*).

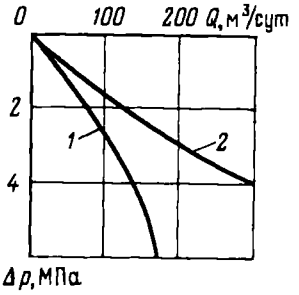
Подставив в формулу (3.19) выражения функции Лейбензона (12.19) и (12.20), получим:

$$e^{-\alpha(p_0 - p)} = e^{-\alpha(p_0 - p_к)} - \frac{e^{-\alpha(p_0 - p_к)} - e^{-\alpha(p_0 - p_c)}}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r).$$

В случае, если $p_0 = p_к$

$$e^{-\alpha(p_к - p)} = 1 - \frac{1 - e^{-\alpha(p_к - p_c)}}{\ln(R_к/r_c)} \ln(R_к/r),$$

Рис. 12.3. Индикаторная линия для добывающей (*1*) и нагнетательной (*2*) скважин в деформируемом трещиноватом пласте



и распределение давления определяется формулой

$$p = p_к + \frac{1}{\alpha}\ln\left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha(p_к - p_c)}}{\ln(R_к/r_c)}\ln(R_к/r)\right]. \qquad (12.23)$$

На рис. 12.4 приведены кривые распределения давления, построенные по зависимостям (12.23) и (3.46) для недеформируемого пласта. Из сравнения кривых следует, что в деформируемом трещиноватом пласте за счет уменьшения раскрытия трещин при снижении пластового давления сопротивления увеличиваются и давление падает более резко, чем в недеформируемом пласте.

Качественные особенности, характеризующие соотношения (12.22) и (12.23), имеют место также и для зависимостей проницаемости от давления, выраженных формулами (12.6) и (12.8).

Большое практическое значение имеет определение параметров трещиноватого пласта – проницаемости k_1 и коэффициента α.

А. Т. Горбуновым и В. Н. Николаевским предложен метод обработки индикаторных диаграмм, выпуклых к оси дебитов, для добывающих скважин, вскрывающих трещиноватые пласты. Рассмотрим этот метод применительно к формуле (12.22). На индикаторной диаграмме (рис. 12.5) определяются две площади: $f_1 = \int_0^{\Delta P_i} Qd(\Delta p)$ – между кривой $Q(\Delta p)$ и осью ординат (заштрихована на рис. 12.5) и $f_2 = Q_i\Delta p_i$ – площадь прямоугольника для соответствующей точки индикаторной линии. Отношение этих площадей $z_{теор} = f_1/f_2$ подсчитывается теоретически с использованием формулы (12.22) и оказывается, что z зависит только от одной безразмерной величины $\alpha\Delta p$:

$$z = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha\Delta p_i}} - \frac{1}{\alpha\Delta p_i}. \qquad (12.24)$$

Задаются различные значения $\alpha\Delta p_i$ и по формуле (12.24) подсчитываются соответствующие значения z, которые заносятся в таблицу. Кроме того, отношение $z = f_1/f_2$ определяется по фактической индикаторной диаграмме (площадь подсчитывается численно, например, по формуле трапеций) для разных точек индикаторной линии; затем для

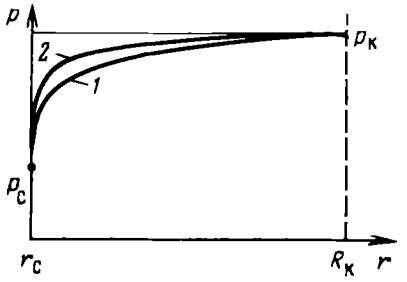


Рис. 12.4. Кривые распределения давления:
1 – в недеформируемом пласте ($k = \text{const}$);
2 – в трещиноватом пласте ($k = k^0 e^{-\alpha(p_0 - p)}$)

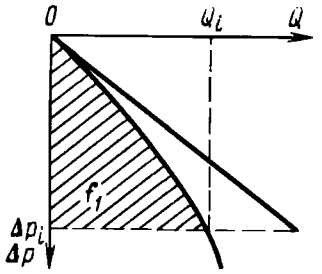


Рис. 12.5. Индикаторная линия в трещиноватом пласте (к определению параметров трещиноватого пласта)

найденного значения z по таблице определяется произведение $\alpha\Delta p$ и так как фактические перепады Δp_i известны, то можно найти α. Находят значение α для нескольких перепадов Δp_i и берут среднее. Из формулы для дебита (12.22), зная α, можно найти коэффициент гидропроводности $k_1^0 h/\eta$ и затем проницаемость k_1^0, если известны толщина пласта h и вязкость жидкости η.

Проведенная обработка индикаторных кривых на различных месторождениях показала, что коэффициент α принимает значения $\alpha = (0{,}1 \div 20)\,10^{-17}$ Па$^{-1}$.

Следует иметь в виду, что искривление индикаторных линий с ростом депрессии может быть вызвано не только зависимостью проницаемости от давления, но и другими причинами (отклонением от закона Дарси, наличием начального градиента давления в пласте, изменением работающей толщины пласта и т. д.), так что при расшифровке их надо учитывать возможное влияние и других факторов.

В трещиновато-пористом пласте дебит скважины складывается из дебита жидкости, притекающей из трещин, и из дебита жидкости, поступающей из пористых блоков. Например, в случае выполнения соотношения (12.7) формула суммарного дебита добывающей скважины принимает вид

$$Q = \frac{2\pi k_2 h (p_к - p_с)}{\eta \ln(R_к/r_с)} + \frac{2\pi k_1^0 h [1 - e^{-\alpha(p_к - p_с)}]}{\eta\alpha \ln(R_к/r_с)}, \qquad (12.25)$$

где принято, что $k_2 = \text{const}$. Однако обычно проницаемость пористых блоков k_2 много меньше, чем проницаемость трещин k_1^0, поэтому основной вклад составляет приток жидкости из трещин и отбрасывание первого слагаемого не даст большой погрешности при определении дебита.

Рассмотрим установившуюся изотермическую фильтрацию идеального газа в чисто трещиноватом деформируемом пласте, в котором зависимость коэффициента проницаемости от давления линейная (12.8). Эта зависимость представляется естественной для газа, так как при фильтрации газа перепады давления обычно малы. В этом случае функция Лейбензона (12.13) получает следующее выражение (здесь принято $p_0 = p_к$):

$$P_1 = \int \frac{\rho(p) k_1(p)}{\eta} dp + C = \int \frac{\rho_{ат} p k_1^0 [1 - \alpha(p_к - p)]}{p_{ат}\eta} dp + C =$$

$$= \frac{\rho_{ат} k_1^0}{p_{ат}\eta} [(1 - \alpha p_к) \int p dp + \alpha \int p^2 dp] + C = \frac{\rho_{ат} k_1^0}{p_{ат}\eta} \times$$

$$\times \left[(1 - \alpha p_к) \frac{p^2}{2} + \alpha \frac{p^3}{3} \right] + C. \qquad (12.26)$$

Массовый дебит газа при плоскорадиальной фильтрации в круговом пласте можно получить, подставив в формулу Дюпюи (3.48) выражение (12.26) при значениях $p = p_к$ и $p = p_с$:

$$Q_m = \frac{2\pi k_1^0 h \rho_{ат} \left\{ \left[(1 - \alpha p_к) \frac{p_к^2}{2} + \alpha \frac{p_к^3}{3} \right] - \left[(1 - \alpha p_к) \frac{p_с^2}{2} + \alpha \frac{p_с^3}{3} \right] \right\}}{p_{ат}\eta \ln(R_к / r_с)}. \qquad (12.27)$$

Перейдем к объемному приведенному дебиту по-иному представив выражение в фигурной скобке:

$$Q_{ат} = \frac{\pi k_1^0 h (p_к^2 - p_с^2)}{p_{ат}\eta \ln(R_к / r_с)} \left(1 - \frac{\alpha}{3} p_к + \frac{2}{3} \alpha \frac{p_с^2}{p_к + p_с} \right). \qquad (12.28)$$

Здесь выражение перед скобкой представляет собой дебит газа в недеформируемой среде, и можно оценить влияние параметра α на поток газа в круговом пласте.

Если обозначить через Q^* дебит газа в недеформируемой среде (т.е. при $\alpha = 0$), то из отношения

$$\frac{Q_{ат}}{Q^*} = 1 - \frac{\alpha}{3} p_к + \frac{2}{3} \alpha \frac{p_с^2}{p_к + p_с}$$

можно определить отклонение дебита газа в сжимаемой среде от дебита газа в среде с постоянной проницаемостью. Если, например, $\alpha = 2 \cdot 10^{-7}$ Па$^{-1}$, $p_с = 7$ МПа, $p_к = 10$ МПа, то $Q_{ат}/Q^* = 0{,}72$, т.е. дебит уменьшается на 28%.

Аналогичным методом можно вывести формулы для дебита и рас-

пределения давления для жидкости и газа при прямолинейно-параллельной фильтрации к галерее в трещиноватом деформируемом пласте.

§ 4. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Для определения характеристик неустановившегося фильтрационного потока в трещиновато-пористой среде нужно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (12.17) и (12.18) при заданных начальных и граничных условиях.

Сделаем следующие предположения: жидкость слабосжимаемая, упругая, т. е. $\rho = \rho_0[1 + \beta_ж(p - p_0)]$; вязкость постоянна $\eta = \text{const}$; обе среды – трещины и пористые блоки – упругие, т. е. $m_i = m_{0i} + \beta_{ci}(p - p_0)$, $i = 1, 2$; проницаемости обеих сред постоянны: $k_1 = \text{const}$, $k_2 = \text{const}$; происходит обмен жидкостью между трещинами и блоками, масса перетекающей из блоков в трещины жидкости подчиняется соотношению (12.9).

При этих предпосылках выражения функций Лейбензона, определяемых равенствами (11.13) и (11.14), с точностью до малых величин, имеют вид:

$$P_1 = \frac{\rho_0 k_1}{\eta}\int[1 + \beta_ж(p_1 - p_0)]\,dp_1 + C \approx \frac{\rho_0 k_1}{\eta}p_1 + C; \tag{12.29}$$

$$P_2 = \frac{\rho_0 k_2}{\eta}\int[1 + \beta_ж(p_2 - p_0)]\,dp_2 + C \approx \frac{\rho_0 k_2}{\eta}p_2 + C. \tag{12.30}$$

Преобразуем правые части уравнений (12.17) и (12,18):

$$\rho(p_i)m_i(p_i) = \rho_0[m_{0i} + \beta_i^*(p_i - p_0) + \beta_ж\beta_c(p_i - p_0)^2] \approx$$
$$\approx \rho_0[m_{0i} + \beta_i^*(p_i - p_0)] \quad i = 1, 2,$$

где последнее слагаемое отброшено вследствие его малости; β_i^* (где $i = 1, 2$) – коэффициенты упругоемкости обеих сред;

$$\beta_i^* = \beta_{ci} + m_{0i}\beta_ж.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(p_i)m_i(p_i)] = \rho_0\beta_i^*\frac{\partial p_i}{\partial t}. \tag{12.31}$$

Подставив выражения (12.29), (12.30), (12.31), (12.9) в систему (12.17) – (12.18), получим:

$$\frac{k_1}{\eta}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}\right) = \beta_1^*\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\alpha_0}{\eta}(p_2 - p_1); \tag{12.32}$$

$$\frac{k_2}{\eta}\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2}\right) = \beta_2^*\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\alpha_0}{\eta}(p_2 - p_1), \tag{12.33}$$

где p_1 и p_2 – давления в трещинах и пористых блоках соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\varkappa = \frac{k_1}{\eta\beta_2^*}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*}; \quad \varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_1}; \quad \tau = \frac{\eta\beta_2^*}{\alpha_0}. \tag{12.34}$$

Через параметры $\varkappa$, ε_1, ε_2, τ уравнения (12.32) и (12.33) запишутся следующим образом:

$$\varkappa\nabla^2 p_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau}; \tag{12.35}$$

$$\varkappa\varepsilon_2\nabla^2 p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau}, \tag{12.36}$$

где $\nabla^2 p_i$ – оператор Лапласа.

Отметим, что коэффициент пьезопроводности $\varkappa$ определен здесь через проницаемость системы трещин k_1 и упругоемкость блоков β_2^*; параметр τ имеет размерность времени и называется временем запаздывания. Этот параметр имеет большое значение в теории неустановившегося движения жидкости в трещиновато-пористой среде; он характеризует отставание процесса перераспределения давления в трещиновато-пористой среде по сравнению с пористым пластом с пьезопроводностью $\varkappa$. Это отставание объясняется наличием обмена жидкостью между системой пористых блоков и системой трещин. Время запаздывания τ можно записать по-другому: $\tau = \eta\beta_2^* l^2/\alpha_0 = \eta\beta_2^* l^2/(\bar{\alpha}k_2) = l^2/(\bar{\alpha}\varkappa_2)$. Из последнего выражения следует, что большие значения τ соответствуют малым значениям пьезопроводности блоков $\varkappa_2$ и большим размерам блоков l (и то, и другое затрудняет перетоки из блоков в трещины).

Анализируя систему уравнений (12.35)–(12.36), можно сделать следующие выводы. При $\tau = 0$ имеем $p_1 = p_2$, т. е. давления в трещинах и блоках одинаковы и среда ведет себя как однородная. При $\tau = \infty$ система разделяется на два уравнения фильтрации в трещинах и блоках, т. е. блоки оказываются изолированными, непроницаемыми и среда ведет себя как чисто трещиноватая. Промежуточные значения τ соответствуют трещиновато-пористой среде, причем, независимо от конкретного вида решения той или иной задачи, с ростом времени t решение стремится к решению задачи упругого режима, сближаясь с ним по истечении периода времени порядка нескольких τ.

Систему уравнений (12.35)–(12.36) можно упростить, если использовать то обстоятельство, что трещинная пористость m_1 и проницаемость блоков k_2 малы, т. е. $m_1 \ll m_2$, $k_2 \ll k_1$, следовательно, $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$ и можно отбросить слагаемые $\varepsilon_1 \partial p_1/\partial t$ и $\varkappa\varepsilon_2\nabla^2 p^2$. В результате получим:

$$\varkappa\nabla^2 p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\tau} = 0; \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau} = 0. \tag{12.37}$$

Сделанное предположение ($m_1 = k_2 = 0$) означает, что жидкость «хранится» только в блоках, а перемещается только по трещинам (так как

пренебрегли изменением массы жидкости в системе трещин и потоком жидкости в блоках).

Существуют различные решения как полной системы (12.35), (12.36), так и «усеченной» (12.37), полученные интегрированием дифференциальных уравнений, а также приближенными методами (интегральных соотношений, усреднения и т. д.). Все эти решения достаточно сложны и громоздки.

Приведем графики, построенные в результате решения плоскорадиальной задачи об отборе упругой жидкости с постоянным дебитом Q из скважины радиусом r_c, расположенной в бесконечном трещиновато-пористом пласте.

Задача ставится следующим образом.

Для плоскорадиального течения уравнения (12.35) и (12.36) записываются следующим образом:

$$\varkappa \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau}; \tag{12.38}$$

$$\varkappa\varepsilon_2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) = \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau}. \tag{12.39}$$

В начальный момент давления в трещинах $p_1(r, 0)$ и в блоках $p_2(r, 0)$ одинаковы и равны p_0:

$$p_1(r, 0) = p_2(r, 0) = p_0. \tag{12.40}$$

Такое же давление сохраняется все время в удаленных точках:

$$p_1(r, t) = p_2(r, t) = p_0 \text{ при } r \to \infty,\ t > 0. \tag{12.41}$$

Условие на стенке скважины имеет вид

$$r\frac{\partial p_1}{\partial r} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{Q\eta}{2\pi k_1 h} \text{ при } r = r_c. \tag{12.42}$$

На рис. 12.6 приведены графики, соответствующие решению поставленной задачи. По вертикали вниз отложены значения безразмерных перепадов давлений $u_1 = 2\pi k_1 h(p_0 - p_1)/(Q\eta)$ и $u_2 = 2\pi k_1 h(p_0 - p_2)/(Q\eta)$, а по горизонтали – безразмерная радиальная координата $r\sqrt{\varkappa\tau}$; кривые построены для разных значений t/τ. Из рисунка видно, что перераспределение давления в блоках происходит значительно медленнее, чем в трещинах. Для $t/\tau = 3$ кривая $u_1(r\sqrt{\varkappa\tau})$ почти совпадает с кривой $u = -\frac{1}{2}\mathrm{Ei}(-r^2/(4\varkappa t))$, которая соответствует обычной пористой среде с пьезопроводностью $\varkappa$. Для значений $t/\tau = 3$ кривые u_1 и u_2 практически совпадают, т. е. для времен, значительно превышающих время запаздывания τ, давления в трещинах и порах одинаковы ($p_1 = p_2$) и можно пользоваться уравнениями фильтрации в обычной пористой среде.

Американские ученые Уоррен и Рут, рассматривая приток упругой жидкости к скважине в трещиновато-пористом пласте, пренебрегли

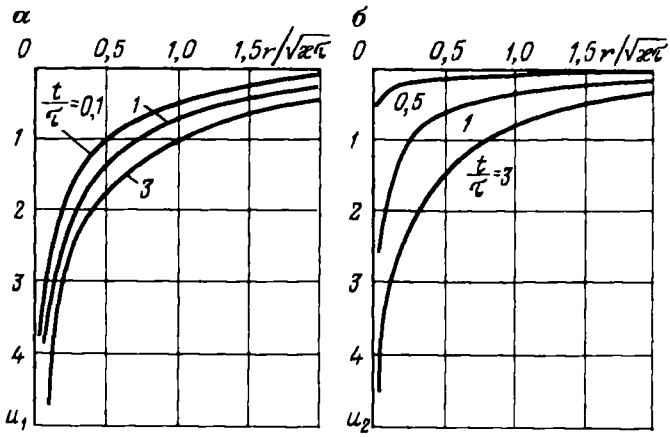


Рис. 12.6. Кривые распределения безразмерного давления в разные моменты времени в трещинах (*а*) и блоках (*б*)

течением жидкости в блоках, считая $\varepsilon_2 \ll 1$, т. е. отбросили левую часть уравнения (12.39). При помощи преобразования Лапласа они получили приближенное решение для давления в трещинах на забое скважины, имеющее довольно простой вид. Оно представлено в безразмерной форме:

$$u_{1c} = \frac{1}{2}\left\{0{,}80908 + \ln \bar{t} + \mathrm{Ei}\left(-\frac{\lambda \bar{t}}{\omega(1-\omega)}\right) - \mathrm{Ei}\left(-\frac{\lambda \bar{t}}{1-\omega}\right)\right\}, \qquad (12.43)$$

где

$$u_{1c} = 2\pi k_1 h(p_0 - p_{1c})/(Q\eta);\ \bar{t} = k_1 t/(\beta_1^* + \beta_2^*)\,\eta r_c^2;$$

$$\omega = \frac{\beta_1^*}{\beta_1^* + \beta_2^*} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 1};\quad \lambda = \tilde{\alpha}\frac{k_2}{k_1}\frac{r_c^2}{l^2} = \tilde{\alpha}\varepsilon_2\frac{r_c^2}{l_2}. \qquad (12.44)$$

Как следует из формулы (12.43), падение давления на забое скважины зависит от двух безразмерных параметров ω и λ, определяемых по формулам (12.44), характеризующих трещиновато-пористый пласт: ω определяет отношение упругого запаса трещин к общему запасу, λ – интенсивность перетока из блоков в трещины.

Графики, построенные по формуле (12.43) для разных значений параметров ω и λ, приведены на рис. 12.7. Видно, что каждая кривая может быть разделена на три участка. При малых значениях времени $\bar{t}$, когда жидкость поступает в скважину главным образом из трещин, основную роль играет параметр ω. Для этих значений времени можно применить асимптотическое выражение интегральной показательной функции:

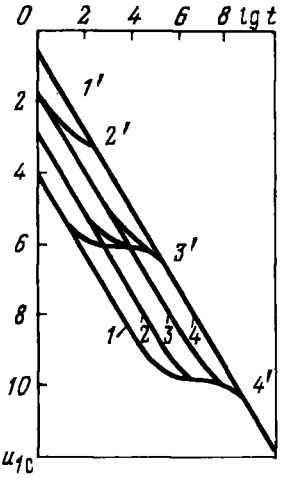


Рис. 12.7. Динамика давления в трещинах на забое скважины для разных значений параметров ω и λ.
ω: *1* – 0,001; *2* – 0,01; *3* — 0,1; *4* – 1;
λ: 1^1 – 0; $2^1 - 5 \cdot 10^3$; $3^1 - 5 \cdot 10^6$; $4^1 - 5 \cdot 10^9$

$$-\mathrm{Ei}(-x) \approx \ln\frac{1}{x} - 0{,}5772 \text{ при } x \ll 1;$$

тогда

$$\mathrm{Ei}\left(-\frac{\lambda\bar{t}}{\omega(1-\omega)}\right) \approx \ln\frac{\omega(1-\omega)}{\lambda\bar{t}} + 0{,}5772;$$

$$-\mathrm{Ei}\left(-\frac{\lambda\bar{t}}{1-\omega}\right) \approx \ln\frac{1-\omega}{\lambda\bar{t}} - 0{,}5772.$$

Подставив эти выражения в формулу (12.43), получим:

$$u_{1c} = \frac{1}{2}\left(0{,}80908 + \ln\bar{t} + \ln\frac{1}{\omega}\right), \tag{12.45}$$

т. е. первый участок в координатах $u_{1c} - \lg t$ – прямая линия с наклоном 1,15. Эта прямая отсекает на оси ординат отрезок, равный $\left(0{,}80908 + \ln\frac{1}{\omega}\right)/2$.

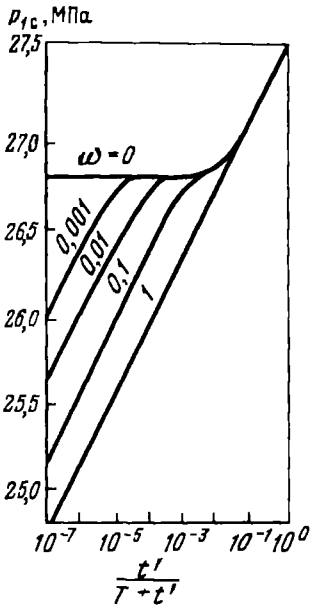
На втором участке давление в трещинах u_{1c} остается почти постоянным, здесь жидкость поступает в скважину и из трещин, и из блоков.

Третий участок имеет место для больших значений времени, когда значениями интегральных показательных функций в (12.43) можно пренебречь; тогда

$$u_{1c} = (0{,}80908 + \ln\bar{t})/2. \tag{12.46}$$

Это прямая, параллельная первой прямой, соответствующая течению

Рис.12.8. Кривые восстановления давления для различных значений ω ($\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$, $Q = 18{,}3$ м^3/сут)



в однородном пласте. Расстояние между прямыми зависит от значений параметров ω и t (см. рис. 12.7).

Такой же характер имеют кривые восстановления давления, приведенные на рис. 12.8 в координатах $p_{1c} - \lg\frac{t}{T+t}$, где T – время работы добывающей скважины до остановки; t – время после остановки; кривые построены для значения $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$ и различных значений ω.

Параметры ω и λ можно определить в результате исследования скважин при падении или восстановлении давления.

§ 5. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕФТИ ВОДОЙ ИЗ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ И НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

При вытеснении нефти водой из трещиновато-пористого пласта и из неоднородной среды, содержащей малопроницаемые включения, принимается следующая схема, которая была развита в работах В. М. Рыжика, А. А. Боксермана, Ю. П. Желтова, А. А. Кочешкова, В. Л. Данилова. Нагнетаемая в пласт вода под действием гидродинамических сил стремится вытеснить нефть из хорошо проницаемых зон, она прорывается по высокопроницаемой среде (или по трещинам), а малопроницаемые блоки, насыщенные нефтью, оказываются окруженными со всех сторон водой. Извлечение нефти из блоков возможно лишь за счет капиллярной пропитки. Вода (смачивающая фаза) будет впитываться в блок за счет капиллярных сил, а нефть (несмачивающая фаза) будет вытесняться в высокопроницаемую среду (или трещины). Очевидно,

вода будет впитываться через мелкие, а нефть будет выходить через крупные поры.

Рассмотрим отдельный малопроницаемый блок, у которого только один торец открыт и соприкасается с водой, а остальная поверхность непроницаема для жидкости. Вода под действием капиллярных сил начнет впитываться в блок, а нефть будет двигаться в противоположном направлении. Этот процесс носит название противоточной капиллярной пропитки. Дифференциальное уравнение одномерной противоточной капиллярной пропитки можно получить из общего уравнения (9.52) при $\Delta\rho = 0$ и при условии, что суммарная скорость фильтрации $w = w_в + w_н = 0$. Из решения этого уравнения следует, что при начальной водонасыщенности блока $s_0 = s_*$ (s_* – насыщенность связанной водой) средняя по длине блока насыщенность $\tilde{s}$ определяется из соотношения

$$\tilde{s} = s_0 + K\sqrt{t}, \tag{12.47}$$

где K – константа, зависящая от значений насыщенности на границах, а скорость впитывания воды – из соотношения

$$w_в = B\sqrt{t}. \tag{12.48}$$

После подхода фронта вытеснения к закрытому концу блока средняя насыщенность стремится к постоянному значению s_1, а скорость впитывания воды уменьшается с течением времени по закону

$$w_в = Ae^{-\beta t}. \tag{12.49}$$

Вернемся к рассмотрению вытеснения нефти водой из трещиновато-пористого или неоднородного пласта. Как и для описания фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде, нужно ввести в каждой точке два значения давления и две скорости фильтрации – для каждой среды. Кроме того, в каждой среде имеются две жидкости, для которых скорости фильтрации и насыщенности различны, а давления отличаются друг от друга на значение капиллярного давления. Нужно также ввести функцию, учитывающую перетоки между высокопроницаемой средой и малопроницаемыми включениями (трещинами и блоками).

Запишем систему уравнений для одномерного вытеснения нефти водой из такой среды при условии, что поток обеих жидкостей в блоках отсутствует, т. е. $w_в^{(2)} = 0$, $w_н^{(2)} = 0$ (верхние индексы 1 и 2 относятся соответственно к трещинам и блокам, $s^{(1)}$ – водонасыщенность в трещинах, $s^{(2)}$ – водонасыщенность в блоках);

уравнения движения в трещинах

$$w_в^{(1)} = -\frac{k_1 k_в(s^{(1)})}{\eta_в}\frac{\partial p_в^{(1)}}{\partial x}, \quad w_н^{(1)} = \frac{k_1 k_н(s^{(1)})}{\eta_н}\frac{\partial p_н}{\partial x}; \tag{12.50}$$

уравнения неразрывности в трещинах с учетом перетоков

$$m_1\frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial w_в^{(1)}}{\partial x} + q = 0, \quad -m_1\frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial w_н^{(1)}}{\partial x} - q = 0; \tag{12.51}$$

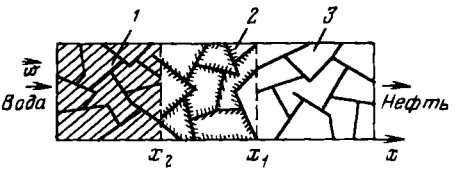


Рис. 12.9. Схема вытеснения нефти водой из трещиновато-пористого пласта:
1 – полностью обводненные блоки; *2* – частично обводненные блоки; *3* – необводненные блоки; x_1 – передний фронт; x_2 – задний фронт; $x_1 - x_2$ – стабилизированная зона

уравнение неразрывности в блоках

$$m_2 \partial s^{(2)}/\partial t = q\,. \tag{12.52}$$

Здесь q – объемная интенсивность перетоков.

Будем рассматривать обмен жидкостью между средами как противоточную капиллярную пропитку. Капиллярная пропитка водой блоков начинается в тот момент, когда фронт вытеснения (в трещинах) достигает положения данного блока (рис. 12.9). Количество впитавшейся воды за единицу времени или интенсивность q зависит только от времени нахождения данного блока (или малопроницаемого элемента) в обводненной зоне. Если через $t_0(x)$ обозначить время подхода фронта вытеснения в трещинах (или в высокопроницаемой зоне) к данному блоку, то интенсивность перетоков будет функцией от $\tau = t - t_0(x)$. Вид функции $q(\tau)$ можно выбрать исходя из выражений для скорости пропитки одного блока (элемента) (12.48). (12.49). Удобной аппроксимацией для $q(\tau)$ является функция, выражение для которой предложено Э. В. Скворцовым:

$$q(\tau) = a e^{-\beta\tau}/\sqrt{\tau}\,. \tag{12.53}$$

Теоретические соображения и экспериментальные данные по капиллярной пропитке образцов пород показали, что можно принять следующие значения для коэффициентов:

$$a = \sqrt{\beta} m_2 s^{*(2)}/\sqrt{\pi};\quad \beta = \frac{\sigma\cos\theta}{l^2\eta_н}\sqrt{\frac{k_2}{m_2}},$$

где $s^{*(2)}$ – конечная водонасыщенность блоков; σ – поверхностное натяжение между нефтью и водой; θ – угол смачивания породы водой; l – характерный размер блока.

Из системы уравнений в трещинах (12.50) – (12.51) можно получить уравнение, сходное с уравнением Бакли – Леверетта (9.30), но с дополнительным слагаемым, учитывающим переток:

$$m_1 \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + w\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + \frac{a e^{-\beta[t - t_0(x)]}}{\sqrt{t - t_0(x)}} = 0\,, \tag{12.54}$$

где $w = w_в^{(1)} + w_н^{(1)}$ – закачиваемый расход воды на единицу площади поперечного сечения пласта; $f^{(1)}$ – функция Бакли – Леверетта, определяемая по формуле (8.9). Уравнение (12.52) примет вид

$$m_2 \frac{\partial s^{(2)}}{\partial t} = \frac{a e^{-\beta [t - t_0(x)]}}{\sqrt{t - t_0(x)}}. \qquad (12.55)$$

Выпишем еще одно уравнение, которое служит для определения закона движения фронта вытеснения. Так как объем трещин мал по сравнению с емкостью блоков, будем считать, что весь расход воды $w'Bh$, поступающей в пласт, затрачивается на пропитку блоков. Количество воды, поступающей в блоки в единицу времени в элементарном объеме $Bhdx$ за счет капиллярной пропитки, равно $q[t - t_0(x)]\,Bhdx$; проинтегрируем это выражение по всему обводнившемуся объему, т. е. от 0 до x_Φ, где x_Φ — координата фронта, и приравняем к расходу закачиваемой воды:

$$\int_0^{x_\Phi} q[t - t_0(x)]\,Bhdx = w'Bh.$$

Использовав формулу (12.53), получим:

$$a \int_0^{x_\Phi} \frac{e^{-\beta [t - t_0(x)}}{\sqrt{t - t_0(x)}} dx = w.$$

С учетом того, что $dx/dt = v_\Phi$ – скорость движения фронта вытеснения, перейдем к интегрированию по времени:

$$a \int_0^t \frac{e^{-\beta (t - t_0)}}{\sqrt{t - t_0}} v_\Phi(t_0)\,dt_0 = w'. \qquad (12.56)$$

Соотношение (12.56) представляет собой интегральное уравнение для определения скорости движения фронта v_Φ. После определения $v_\Phi(t)$ можно найти интегрированием закон движения фронта $x_\Phi = x_\Phi(t)$. После этого интегрирование уравнений (12.54) и (12.55) даст возможность определить водонасыщенность в трещинах $s^{(1)}$ и блоках $s^{(2)}$.

Как показывают приближенные расчеты, при закачке воды с постоянным расходом спустя некоторое время после начала процесса скорость движения фронта становится постоянной; кроме того, образуется задний фронт, за которым пропитка блоков практически отсутствует, и оба фронта будут двигаться с одинаковой скоростью, образуя стабилизированную зону, перемещающуюся равномерно (см. рис. 12.9).

Изложенный выше подход применим также к задачам о вытеснении нефти водой из слоистых пластов, состоящих из пропластков различной толщины, пористости и проницаемости, которые рассмотрены в гл. 9.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какие модели трещиноватых пород рассматриваются в теории фильтрации?

2. От какого параметра зависит проницаемость трещиноватых по-

род? Какие виды зависимости проницаемости от давления рассматриваются?

3. Объясните как происходит процесс снижения давления при неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористой среде. Как происходит выравнивание давлений в средах с зернами разного масштаба? Как определяются перетоки из пористых блоков в трещины?

4. Какой вид имеют индикаторные диаграммы при установившейся фильтрации жидкости в трещиноватом пласте? Как влияет численное значение параметра трещиноватой среды β на форму индикаторной диаграммы?

5. Какой вид примет система дифференциальных уравнений неустановившейся фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде, если считать, что проницаемость блоков k_2 много меньше, чем проницаемость трещин k_1, а пористости блоков и трещин одного порядка?

6. Какой вид имеют кривые восстановления давления (КВД) в трещиновато-пористом пласте в координатах $(p_к - p_{1c}) - \lg t$? Как физически объяснить такое поведение КВД?

Глава 13

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЦЕЛИ И ЭТАПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Слова «модель», «моделирование» знакомы многим и часто употребляются в повседневной жизни и практической деятельности. Широкое распространение этих понятий свидетельствует о превращении их в рабочий инструмент практического и исследовательского труда. Не всегда, однако, в эти понятия вкладывается одинаковый смысл и обоснованно оцениваются их действительная роль и значение в каждом конкретном случае.

Будем использовать классический подход (инженера или математика) к решению проблемы моделирования, который заключается в том, чтобы сформулировать исходную задачу, описывающую физический процесс и затем постараться ввести необходимое количество упрощающих предположений для формулировки новой задачи, которая поддается решению теми или иными средствами. Под моделью будем понимать образ, описание объекта исследования, отражение его характеристик. Моделирование — метод исследования, научного познания объектов разной природы при помощи моделей.

К моделированию обычно обращаются в случаях, когда объект исследования:

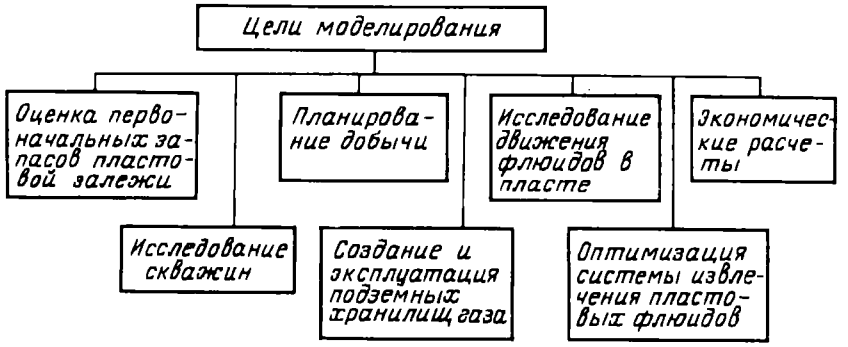


Рис. 13.1. Схема некоторых направлений применения моделирования

не доступен непосредственному изучению (например, пласт–коллектор, находящийся в недрах Земли);

очень сложен (например, многофазная многокомпонентная фильтрация в пластах со случайными неоднородностями);

реально не существует (например, проектируемый процесс внутрипластового горения или другой технологии для повышения нефтеотдачи пласта).

Все эти случаи (каждый в отдельности или в сочетании) типичны для подземной гидромеханики. Поэтому в ней широко используются методы моделирования.

В применении к исследованию нефтегазовых месторождений это означает:

моделирование гидродинамики потоков флюидов в пласте (в узком смысле);

моделирование полного процесса нефтегазодобычи и связанную с этим деятельность человека и коллективов (в более широком смысле).

Моделирование можно применять для изучения характеристик пластов, содержащих одиночные скважины или группы скважин, для исследования движения и взаимодействия флюидов в пористой среде и т. д. Различные направления применения моделирования пластовых систем приведены на рис. 13.1.

Сформулируем некоторые общие вопросы, весьма важные для специалиста, ответы на которые можно получить при помощи моделирования пластовых систем.

Как нужно разрабатывать и эксплуатировать месторождение, чтобы обеспечить оптимальную добычу пластовых флюидов (углеводородных и неуглеводородных)?

Какой наилучший проект увеличения нефтегазоотдачи для данного пласта? Как он должен быть осуществлен?

Какова экономически целесообразная конечная нефтегазоотдача для данного месторождения?

Какие лабораторные и промысловые данные требуются для получения надежных прогнозных результатов?

Как пересчитать результаты лабораторного эксперимента на натурные пластовые условия?

Какова наилучшая схема вскрытия пласта скважиной?

Из какой части пласта следует осуществлять добычу? и т. д.

Определение цели проводимого исследования и точная постановка более узких (специальных) задач — весьма важный этап при выполнении любого исследования на модели. В зависимости от цели исследователь строит соответствующую модель объекта. При этом учитываются следующие общие свойства моделей и требования, предъявляемые к ним.

Модель не является точной копией объекта исследования и поэтому отражает его не по всем характеристикам.

Адекватность (совпадение) модели и объекта исследования по тем характеристикам и в том диапазоне изменения параметров, которые соответствуют цели исследования. По всем другим характеристикам или в другом диапазоне изменения параметров модель и объект сопоставлять неправомерно.

Модель должна быть проще и доступнее объекта.

В случае, если объект оказывается очень сложным, то приходится строить несколько моделей, каждая из которых будет отражать только некоторые свойства одного и того же объекта.

Построение модели – всегда процедура неформальная и, конечно, она сильно зависит от исследователя, его опыта, квалификации и всегда опирается на экспериментальный материал. Модель должна достаточно правильно отражать явления, однако одного этого еще мало. Она должна быть практичной и удобной для использования; степень ее детализации и форма представления определяются целями исследования.

Отметим основные этапы моделирования:

определение целей моделирования;

предварительное изучение объекта;

построение моделей (с соблюдением соответствующих условий моделирования);

собственно моделирование;

сравнение результатов моделирования с фактическими данными о поведении объекта;

совершенствование и уточнение моделей.

Классификация моделей может быть проведена по тому или иному признаку. Для целей исследования фильтрации пластовых флюидов введем следующие основные типы моделей:

1) естественные физические модели;

2) аналоговые модели;

3) математические модели;

4) графические и текстовые модели.

Под последними понимаются чертежи, схемы (структурные схемы,

сетевые модели и т. д.), карты, графики, диаграммы, текстовые документы, описывающие объект. Графическое и текстовое описания объектов исследования обладают достаточной простотой и наглядностью, но не решают все задачи моделирования.

На первых трех типах моделей остановимся подробнее.

§ 2. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ

К физическому моделированию будем относить исследование процессов фильтрации на естественных и аналоговых моделях.

2.1. Естественные физические модели

Естественное физическое моделирование – это замена изучения интересующего нас явления в натуре экспериментальным изучением аналогичного явления на модели меньшего (или большего) масштаба, обычно в специальных лабораторных условиях. Основной смысл такого моделирования заключается в том, чтобы по результатам опытов с моделями можно было давать необходимые ответы о характере эффектов и о различных характеристиках, связанных с явлением в натурных условиях. При этом должны выполняться определенные условия (критерии) подобия (геометрического и физического) модельных и натурных процессов. Для этого размеры модели, свойства пласта и флюидов выбирают в лабораторных условиях таким образом, чтобы были выполнены условия геометрического подобия и чтобы соотношения различных сил в пласте и физической модели были одинаковыми. Большое значение при физическом моделировании фильтрационных процессов имеет теория размерностей и подобия.

Результаты моделирования, выполненные на правильно сконструированной модели, в точности повторяют – но только в измененном пространственном и временном масштабе – процессы, протекающие в натурных пластах. Кроме того, модель позволяет исследовать относительную роль какого-либо параметра в результате изменения его значения в последовательной серии экспериментов, при фиксированных значениях остальных параметров.

К сожалению, ввиду чрезвычайной сложности реальных процессов фильтрации пластовых флюидов, полностью подобные физические модели построить очень трудно или невозможно. Поэтому в большинстве случаев ограничиваются приближенным моделированием фильтрационных процессов.

Естественные физические модели имеют ту же материальную природу, что и объект исследования. Так, например, естественная модель пласта должна представлять собой некоторую емкость (лоток), заполненный пористой средой и насыщенный соответствующей жидкостью (или газом). В качестве материала, образующего пористую среду, можно

использовать песок, металлические или пластмассовые шарики, битое стекло. При необходимости может быть обеспечен требуемый гранулометрический состав материала.

Важную роль в подземной гидромеханике играют элементарные естественные модели. Классический пример элементарной модели – труба, набитая песком. В такой модели фильтрационный поток имеет простейшую одномерную линейную геометрию, что и служит основанием для их наименования.

Элементарные модели могут быть установлены под любым углом. В них можно моделировать однофазные, многофазные, многокомпонентные, (не) изотермические, (не) равновесные и всевозможные другие процессы фильтрации.

Элементарные естественные модели достаточно трудоемки в изготовлении и проведении экспериментов на них. Но они – основополагающие, так как только на них устанавливаются и проверяются основные законы фильтрации. На элементарной модели, в частности, Дарси экспериментально установил закон фильтрации (1.5), впоследствии названный его именем.

На элементарных естественных моделях изучаются закономерности протекания сложных процессов фильтрации, которые происходят в пластах при внедрении различных методов повышения нефте- и газоотдачи. При этом следует иметь в виду, что поскольку геометрические формы потоков в элементарных моделях являются простейшими, установленные на них закономерности должны рассматриваться только как принципиальные, качественные – на уровне законов в дифференциальной форме. Интегральные же закономерности, установленные при помощи элементарных моделей (например, такие как коэффициенты нефте- и газоотдачи), переносить на реальные пласты, в которых геометрия фильтрационных потоков оказывается исключительно сложной, непосредственно нельзя.

В некоторых случаях роль модели может выполнять сам объект. Процесс моделирования при этом равнозначен натурному эксперименту на объекте, промысловому исследованию.

Для подземной гидромеханики все промысловые термогидродинамические исследования скважин и пластов можно рассматривать как эксперименты на естественных (натурных) моделях месторождений. Если исследования состоят в повседневных измерениях давлений, температур, дебитов и составов добываемой продукции по скважинам, то эксперимент будет пассивным. В активном эксперименте режимы работы одной или нескольких скважин задаются принудительно.

Месторождения, рассматриваемые как собственные модели, обладают принципиальной особенностью: параметры их заранее неизвестны и, кроме того, часть из них необратимо изменяется после каждого эксперимента в результате известных искусственных и не всегда известных природных воздействий. Вследствие этого натурные промысловые эксперименты, строго говоря, не могут быть повторены в чистом виде, а результаты их не могут быть во всех случаях однозначно проинтер-

претированы. Практические возможности моделирования непосредственно на месторождениях, таким образом, ограничены.

Тем не менее, данные натурного моделирования промысловых исследований имеют первостепенное значение, поскольку они содержат информацию о фактических процессах в реальных пластах и только сравнение с ними, в конечном счете, может быть критерием ценности и справедливости выводов, полученных при помощи всех других методов моделирования.

Кроме того, натурные эксперименты незаменимы при исследовании явлений, которые могут заметно проявиться только на моделях больших размеров. В первую очередь к таким явлениям относятся эффекты сжимаемости жидкостей и породы, неравновесность термогидродинамических процессов.

2.2. Аналоговое физическое моделирование

Аналоговое моделирование основано на аналогиях, существующих в описании некоторых фильтрационных процессов с другими физическими явлениями (диффузией, процессом переноса тепла, электрического тока и т. д.). Основная причина существования аналогий – это однотипность уравнений, описывающих физические процессы различной природы. Аналогия устанавливается на основании того факта, что характеристические уравнения (например, закон Дарси и закон Ома) выражают одни и те же принципы сохранения (массы, импульса, энергии, электричества и т. п.), лежащие в основе многих физических явлений. Существующие аналогии позволяют разрабатывать аналоговые модели.

Рассмотрим уравнение

$$\vec{\psi} = -\varkappa \operatorname{grad} \varphi.$$

Оказывается, что уравнение этого типа описывает различные физические процессы, если величинам φ, ψ поставить в соответствие определенные физические параметры (табл. 13.1).

Однотипными являются и уравнения баланса ряда физических величин «a» (массы, заряда, импульса и т. п.):

$$m\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0,$$

где $\vec{J}$ – плотность потока величины a; m – параметр «емкости» системы.

В результате однотипности уравнений решение одного из них с точностью до масштабов может рассматриваться как решение всех других.

Благодаря этому решение задачи для некоторого физического процесса иногда бывает удобным выполнять при помощи аналоговой модели, реализующей другой физический процесс. Рассмотрим некоторые употребляемые аналоговые модели.

Электрические модели. Наибольшее распространение получила электрогидродинамическая аналогия (ЭГДА), предложенная акад.

Таблица 13.1

Аналогии между различными физическими процессами

№ п/п	Физический процесс	φ	$\vec{\psi}$	$\varkappa$	Название уравнения процесса
1	Электропроводность	U — электрический потенциал	$\vec{I}$ – сила тока	I/R, где R – электрическое сопротивление	Закон Ома
2	Теплопроводность	T – температура	$\vec{J}_q$ – поток теплоты	λ – коэффициент теплопроводности	Закон Фурье
3	Диффузия	c – концентрация	$\vec{J}$ – поток вещества	D – коэффициент диффузии	Закон Фика
4	Течение вязкой жидкости в тонком капилляре или узкой щели	p – давление	$\vec{v}$ – скорость жидкости	$d^2/(2\eta)$ – для капилляра; $d^2/(12\eta)$ – для щели, где η – вязкость жидкости, d – диаметр капилляра (ширина щели)	Формула Пуазейля
5	Фильтрация однородной жидкости	То же	$\vec{w}$ – скорость фильтрации	k/η, где k – проницаемость, η – вязкость жидкости	Закон Дарси

Н. Н. Павловским. Этот метод состоит в использовании аналогии между стационарной фильтрацией и расчетом электрических цепей (см. табл. 13.1 пп. 1, 5). Чтобы получить аналог процесса фильтрации в пласте, достаточно взять специальную электропроводную бумагу, вырезать «выкройку», повторяющую форму месторождения в плане, «подключить» скважины и «задать» необходимые граничные условия. Тогда по бумаге будет протекать электрический ток, вдоль нее установится соответствующее условиям задачи распределение потенциала, которое можно замерить при помощи щупа и тем самым найти (после соответствующего пересчета) распределение давления. Очевидны большие преимущества этого метода по сравнению с моделированием на самом пласте. При помощи метода ЭГДА можно моделировать двумерные задачи однофазной установившейся фильтрации.

В случае, если вместо электропроводной бумаги использовать раствор электролита, то можно смоделировать пространственную задачу фильтрации. При помоши электролитических моделей решались гидротехнические задачи (модели ГЭС), а также задачи разработки нефтяных месторождений. Большую известность получили опыты В. И. Шурова по моделированию притока к несовершенным скважинам (см. гл. 4). Вариант подобных моделей – электролитические гелевые модели (желе на растворе электролита). На этих моделях возможно моделирование задач поршневого вытеснения одной жидкости («нефти») другой жидкостью («водой»).

Общий недостаток рассмотренных вариантов электрических моделей – их «индивидуальный» характер: для каждой новой задачи приходится заново строить «область фильтрации». Этого недостатка лишены сеточные электроинтеграторы с регулируемыми параметрами, при помощи которых можно решать задачи о неустановившейся фильтрации упругой жидкости в неоднородных пластах. Но сейчас электроинтеграторы почти полностью вытеснены ЭВМ.

Гидравлические аналоговые модели. Среди них широко распространены щелевые лотки: между двумя плоскостями (в узкой щели) вязкое течение Пуазейля моделирует фильтрационный поток. На щелевых лотках можно смоделировать вытеснение жидкостей с различными вязкостями и плотностями.

Имеется множество примеров использования щелевых лотков для решения гидротехнических задач. На щелевых лотках удобно моделировать стягивание контура нефтеносности, образование конуса подошвенной воды.

Неудобство этих моделей состоит в том, что под каждую задачу нужно заново перестраивать модели.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Математические модели представляют собой совокупность математических объектов и отношений (уравнений), описывающих изучаемый физический процесс на основе некоторых абстракций и допущений, опирающихся на эксперимент и необходимых с практической точки зрения для того, чтобы сделать задачу разрешимой. При моделировании процессов разработки нефтегазовых месторождений эти соотношения в общем виде представляют собой сложные (обычно нелинейные) дифференциальные уравнения в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями (см. гл. 2, 8, 10).

Цель исследователя – расчет движений, описывающих физический процесс, и составление на этой основе практических рекомендаций и прогнозов.

Любая математическая модель основана на упрощении (идеализации) реального процесса, что позволяет создавать расчетные схемы, учитывающие только основные эффекты. В подземной гидромеханике моделируют: 1) флюиды (жидкости и газы); 2) породы-коллекторы; 3) геометрическую форму движения; 4) вид процессов, в том числе физико-химических.

Долгое время в подземной гидромеханике основными «рабочими» математическими моделями были модели, описывающие установившуюся и неустановившуюся фильтрацию однофазного флюида (несжимаемого и сжимаемого) в однородной пористой среде (см. гл. 3–6). Это – классические модели, не утратившие своего практического значения и по сей день.

Однако необходимость более полного извлечения нефти, газа и конденсата из пласта, а также проектирование разработки месторождений в осложненных условиях залегания потребовали создания новых, более совершенных математических моделей, учитывающих многофазность и многокомпонентность потока пластовых флюидов и сложную геометрию коллектора (гл. 8–10). Здесь всюду использовались макроскопические модели, которые оперируют с усредненными параметрами фильтрационного потока. Они нашли наибольшее применение для решения многих задач разработки месторождений.

Математическое моделирование включает в себя несколько основных этапов.

1. Формулирование содержательной постановки задачи. На этом этапе определяются цели исследования, уточняется состав исходных зависимостей между параметрами объекта в соответствии с результатами физического моделирования, оговариваются законы, допущения и предположения о механизме и условиях протекания процессов, конкретизируются состав и диапазон изменения исходных параметров.

2. На втором этапе формулируется математическая постановка задачи. Здесь все исходные зависимости и принятые законы

записываются в математических символах. В достаточно общем случае математическая постановка задач подземной гидромеханики представляется в форме начально-краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии.

3. Качественное исследование сформулированных задач. Типичное содержание данного этапа для начально-краевых задач включает в себя доказательство теорем существования и единственности, выявление сильных и слабых разрывов решений и т. д. По результатам качественных исследований в первоначальные математические постановки задач могут быть внесены изменения и уточнения.

4. Четвертый этап – решение поставленной задачи, т. е. нахождение искомых величин (функций) по заданным входным данным (аргументам, коэффициентам в уравнениях). Во всех случаях принципиальный интерес представляет получение точных аналитических решений, устанавливающих определенный вид функциональной зависимости между искомыми величинами, аргументами и параметрами математической модели. Однако получить аналитическое решение удается далеко не всегда. В этих случаях строятся приближенные решения.

Все приближенные решения и методы их получения можно разделить на два основных класса: аналитические и численные. Приближенные аналитические решения, так же как и точные, получаются в форме определенных функциональных зависимостей входных и выходных величин. Полученные аналитические выражения представляют большую ценность как удобный инструмент для анализа математической модели и изучаемого объекта. Однако при практическом использовании аналитического решения необходимо выполнять определенный объем нередко чрезвычайно трудоемких вычислительных процедур. Численные методы, в отличие от аналитических, с самого начала ориентированы только на получение численных значений искомых величин для конкретных значений входных данных без установления вида их функциональных зависимостей.

5. Пятый этап – проверка адекватности математической модели исследуемому объекту сравнением расчетного и фактического поведения последнего в различных ситуациях. Если поведения обоих объектов согласуются в пределах заданной погрешности, то результаты проверки считаются удовлетворительными, и математическую модель можно использовать в практических целях.

6. На шестом этапе математическая модель уточняется (или строится заново) с учетом опыта ее использования, новых данных физического моделирования, изменения целей исследования. При этом все перечисленные этапы моделирования повторяются.

Разновидность математического моделирования, четвертый этап которого (решение поставленной задачи) выполняется с использованием численных методов, будем называть численным моделированием. Решающим фактором, способствующим интенсивному развитию и широ-

кому внедрению численного моделирования в последние годы, служит постоянное совершенствование ЭВМ и их математического обеспечения. Высокая производительность современных ЭВМ, обусловленная их быстродействием, значительным объемом оперативной памяти и развитой системой внешних устройств, позволяет в короткие сроки выполнять большие объемы расчетов.

Важный фактор эффективного использования численного моделирования — специально разрабатываемые методы вычислений. Наиболее широкое применение для решения краевых задач подземной гидромеханики получили метод конечных разностей и метод конечных элементов.

Чтобы представить дифференциальные уравнения в форме, пригодной для решения на цифровых вычислительных машинах, следует их аппроксимировать и заменить конечно-разностными алгебраическими уравнениями. Численная модель состоит из полученной системы уравнений и построения численного алгоритма их решения. Численные модели основных процессов фильтрации пластовых флюидов обсуждаются в следующих параграфах.

При построении численных моделей и численных алгоритмов используют дискретное представление переменных и дифференциальных операторов уравнений, а также области течения.

Для решения уравнений численной модели разрабатывается машинная модель пластовой системы, состоящая из программы или системы программ для ЭВМ. Практические аспекты создания машинных моделей рассматриваются в работе [3].

В последние годы математическим моделированием (в том числе и численным) стали пользоваться как важнейшим инструментом при проектировании и контроле за разработкой нефтегазовых месторождений [34, 21, 38, 45, 51, 77]. Применение современных ЭВМ позволяет решать гидродинамические задачи, связанные с разработкой, в очень широкой и полной постановке.

Вместе с тем, для понимания сложных пластовых процессов обычно требуется разумное сочетание физического и математического моделирования. Но при этом всегда следует помнить, что *модель – это приближенное описание объекта*, отражающее не все, а только определенные его свойства, характеристики, что результаты математического (как и любого другого) моделирования нельзя использовать за пределами условий адекватности модели объекту.

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОБЛАСТИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Пусть некоторый фильтрационный процесс описывается дифференциальным уравнением, которое можно представить в обобщенном виде:

$$L\vec{u} = f,$$

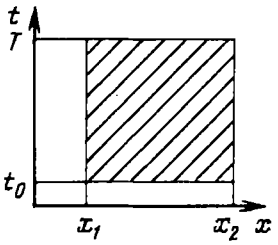


Рис. 13.2. Схема одномерной области фильтрации

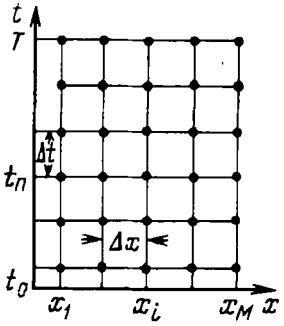


Рис. 13.3. Схема дискретного аналога непрерывной области фильтрации

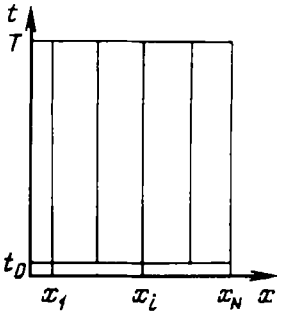


Рис. 13.4. Схема полудискретного аналога непрерывной области фильтрации

где L – дифференциальный оператор; $\vec{u}$ – вектор искомых функций; f – заданная векторная функция.

Решения отыскиваются в некоторой заданной области непрерывного изменения аргументов

$$D\{x, y, z, t\} = D_l\{x, y, z\} \times D_t\{t\},$$

представляющей собой декартово произведение области изменения пространственных координат D_l и области изменения времени D_t.

В том случае, когда область D_l является одномерной и представляет собой отрезок $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, а область D_t является отрезком $t_0 \leqslant t \leqslant T$, область $D = D_l \times D_t$ может быть наглядно изображена прямоугольным

участком плоскости (рис. 13.2). Если D_i является двумерной (или трехмерной), то область D будет представлять собой трехмерный (или четырехмерный) цилиндр с образующими, параллельными оси времени.

При использовании численных методов решения ищутся в дискретных точках, совокупность которых будет составлять дискретный аналог области D, который обозначим D_R. Можно построить несколько дискретных аналогов непрерывной области. Один из возможных – сеточный – приведен на рис. 13.3. Промежуточное положение занимают полудискретные аналоги, которые получаются, если один из аргументов, например время, оставить изменяющимся непрерывно (рис. 13.4).

§ 5. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, АППРОКСИМИРУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Из математического анализа известно, что дифференциальные операторы при дискретном изменении аргументов не определены. Для отыскания решений в этом случае необходимо исходные дифференциальные уравнения заменить на их дискретные аналоги.

В качестве примера рассмотрим построение дискретных аналогов краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad X_1 < x < X_2; \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ при } t = 0, \; u(X_1, t) = \psi_1(t) \text{ при } x = X_1,$$

$$u(X_2, t) = \psi_2(t) \text{ при } x = X_2. \tag{13.1}$$

Напомним, что уравнение этого типа описывает распределение давления в однородном пласте при упругом режиме фильтрации слабосжимаемой жидкости. Разделим отрезок $[X_1, X_2]$ на M одинаковых частей точками $x_i (i = 0, 1, 2, \ldots, M)$, отстоящими одна от другой на расстоянии $\Delta x = (X_2 - X_1)/M$ (рис. 13.5). Выразим производную $\partial^2 u/\partial x^2$ через значения функции u в дискретных точках x_i; при этом будем использовать обозначения $u(x_i) = u_i$.

Известно несколько способов построения дискретных аналогов (разностной аппроксимации) производных. Наиболее распространенный способ основан на использовании метода разложения функций в ряд Тейлора.

Запишем выражение ряда Тейлора для функции $u(x)$ в окрестности точки x_i при положительном приращении аргумента:

$$u(x_i + \Delta x) = u(x_i) + u'_x(x_i)\Delta x + u''_{xx}(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots + u^{(n+1)}_{x \ldots x}(x_i^*)\frac{\Delta x^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

То же выражение в индексном обозначении записывается следующим образом:

$$u_{i+1} = u_i + u'_i \Delta x + u''_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots + u_i^{*(n+1)} \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!},$$

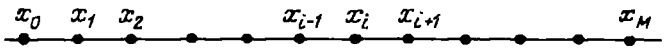


Рис. 13.5. Схема деления отрезка на равные интервалы

где

$$u_i^{(n)} = \frac{\partial^n u(x_i)}{\partial x^n}; \quad u_i^{*(n+1)} = \frac{\partial^{(n+1)} u(x_i^*)}{\partial x^{n+1}}; \quad x_i \leqslant x_i^* \leqslant x_{i+1}.$$

Аналогично записывается разложение при отрицательном приращении аргумента:

$$u_{i-1} = u_i - u_i' \Delta x + u_i'' \frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n+1} u_i^{**(n+1)} \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Напомним, что ряд Тейлора может содержать столько членов, сколько производных имеет функция $u(x)$.

Из первого разложения можем получить выражение для первой производной – правую разность:

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - u_i'' \frac{\Delta x}{2!} - u_i''' \frac{\Delta x^2}{3!} - \ldots = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Из второго разложения получим левую разность:

$$u_i' = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_i'' \frac{\Delta x}{2!} - u_i''' \frac{\Delta x^2}{3!} + \ldots = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Наконец, вычтя второе разложение из первого, получим центральную разность:

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - u_i''' \frac{\Delta x^2}{3!} + \ldots = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2).$$

Как видно из приведенных выражений, односторонние разности (левая и правая) при малых приращениях аппроксимируют первую производную с погрешностью $O(\Delta x)$, пропорциональной первой степени Δx («порядка Δx»). Центральная разность аппроксимирует производную с погрешностью $O(\Delta x^2)$, т. е. более точно.

Просуммировав оба исходных разложения, после несложных преобразований получим аппроксимацию второй производной:

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - u_i^{(IV)} \frac{2\Delta x^2}{4!} - \ldots = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \tag{13.2}$$

Использовав полученную аппроксимацию второй производной, построим полудискретный аналог краевой задачи (13.1). Для этого область решения $D\{[X_1 \leqslant x \leqslant X_2] \times [0 \leqslant t]\}$ заменим совокупностью равноотстоящих прямых $x = x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, M)$ (см. рис. 13.3), сос-

тавляющих полудискретный аналог области: $D_h(t)\{x_i \times [0 \leqslant i]\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, M$. Заменим в исходном уравнении вторую производную ее дискретным аналогом (13.2). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_i}{dt} - \frac{1}{h^2}[u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M-1, h = \Delta x.$$

Дискретный аналог начального условия принимает вид:

$\varphi(x_i) = \varphi_1$ при $t = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, M$.

Дополним полученные соотношения граничными условиями:

$u_0 = \psi_1(t)$ $(\psi_1(0) = \varphi_0)$ при $x = X_1 = x_0$;

$u_M = \psi_2(t)$ $(\psi_2(0) = \varphi_M$ при $x = X_2 \equiv x_M$.

Исходная задача для уравнения в частных производных, заданного в непрерывной области D с начальными и граничными условиями, заменяется задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, определенных на прямых $x = x_i$, где $i = 1, 2, \ldots, M-1$ с начальными условиями.

В этом состоит сущность метода прямых, который мы фактически только что рассмотрели. Преимущество его заключается в том, что решать обыкновенные дифференциальные уравнения, в принципе, значительно проще, чем уравнения в частных производных. Эти преимущества особенно проявляются в том случае, когда область решения имеет прямоугольную форму, а уравнения являются линейными с постоянными коэффициентами. Если же форма области решения оказывается достаточно сложной, а уравнения имеют переменные коэффициенты или являются нелинейными, использование метода прямых вызывает серьезные затруднения.

В этих случаях для решения задач целесообразно использовать метод конечных разностей. Дискретный аналог области, в которой ищется решение, представляется в виде сетки (см. рис. 13.2), поэтому метод конечных разностей иногда называют методом сеток. Отдельные точки сетки называются узлами. Если шаги сетки Δx и Δt постоянны, то сеточная область (сетка) называется регулярной. В общем случае использование регулярной сетки предпочтительно, но иногда целесообразно использовать и нерегулярные сетки с переменными шагами.

Рассмотрим ту же краевую задачу (13.1), описывающую фильтрацию упругой жидкости. Для получения дискретного (конечно-разностного) аналога краевой задачи нужно представить в конечно-разностной форме уравнения, начальные и граничные условия.

Частная производная по времени обычно заменяется односторонней разностью:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

В случае если для удобства ввести обозначения

$$u(x_i, t_n) = u_i^n, \quad \Delta t = \tau,$$

то можно записать

$$\partial u/\partial t \approx (u_i^{n+1} - u_i^n)/\tau.$$

С учетом дискретного аналога второй частной производной по пространственной координате (13.2) рассматриваемое дифференциальное уравнение упругого режима в конечно-разностной форме сводится к системе уравнений:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^* - 2u_i^* + u_{i-1}^*) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13.3}$$

Дискретный аналог начального условия строится достаточно просто и записывается в виде

$$n = 0: \quad u_i^0 = \varphi(x_i) \equiv \varphi_1 \quad (i = \overline{0, M}). \tag{13.4}$$

По аналогичной схеме строятся дискретные аналоги граничных условий первого рода:

$$u_0^n = \psi_1(t_n) \equiv \psi_1^n \quad \text{при } i = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$u_M^n = \psi_2(t_n) \equiv \psi_2^n \quad \text{при } i = M, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13.5}$$

Сложнее вопрос о построении дискретных аналогов граничных условий, в состав которых входят производные. Пусть, например, одно из граничных условий задано в виде

$$\partial u/\partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = X_2, \tag{13.6}$$

что физически означает непроницаемость границы $x = X_2$. Дискретный аналог условия (13.6) можно построить несколькими способами. Наиболее удобный основан на использовании метода отражения. При его реализации в рассмотрение вводится дополнительно фиктивная точка за пределами области решения $x_{M+1} = (M+1)\Delta x$ (см. рис. 13.4). Подставив дискретный аналог первой производной по схеме центральных разностей, получим:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x = X_2} \approx \frac{u_{M+1} - u_{M-1}}{2\Delta x}.$$

На этом основании дискретный аналог условия (13.6) можно представить в виде

$$u_{M+1}^n = u_{M-1}^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13.7}$$

Как видно из приведенной записи, исходная краевая задача для дифференциального уравнения в конечно-разностной постановке сводится к системе алгебраических уравнений и тем

самым существенно упрощается. В таком упрощении заключаются все преимущества метода конечных разностей. Наибольшую эффективность использование метода конечных разностей дает при численном решении нелинейных уравнений в областях сложной формы, когда точные или приближенные аналитические решения получить не удается или вообще невозможно.

Не следует думать, однако, что построение конечно-разностных решений любых задач не вызывает никаких затруднений. В действительности это достаточно сложный процесс, который не всегда приводит к удовлетворительному результату.

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

После дискретизации области и построения дискретного аналога краевой задачи необходимо оценить сходимость конечно-разностного решения к точному решению исходной задачи, а также получить конечно-разностное решение, т. е. решить систему конечно-разностных уравнений. Реализация этих двух этапов представляет основные принципиальные трудности при практическом использовании метода конечных разностей.

Говорят, что разностное решение u_h сходится к решению исходной задачи u, если норма разности этих решений в узлах сетки стремится к нулю при стремлении к нулю шагов дискретизации:

$$\left\| u_i^n - (u_i^n)_h \right\| \to 0 \text{ при } \{h, \tau\} \to 0.$$

В зависимости от свойств искомых функций и решаемых задач в качестве норм могут приниматься различные величины (максимум абсолютных величин разностей, средняя квадратическая разность и т. д.).

Конечно-разностное решение представляет практический интерес только в том случае, если имеет место его сходимость к точному решению. Непосредственная проверка сходимости разностных схем вызывает большие затруднения. В теории разностных схем доказывается, что схема, которая аппроксимирует исходную задачу (погрешность аппроксимации стремится к нулю, если стремится к нулю шаг дискретизации) и устойчива (т. е. малым возмущениям начальных данных и разностного оператора соответствуют малые отклонения решений), является сходящейся. Исследования аппроксимации и устойчивости оказываются относительно более простыми. В соответствующих разделах теории разностных схем они описаны достаточно подробно.

Трудности решения системы конечно-разностных уравнений в первую очередь обусловлены ее большой размерностью, равной числу дискретных точек, в которых ищутся значения функций. Размерность

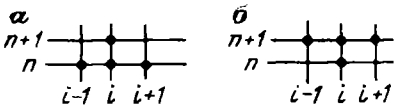


Рис. 13.6. Шаблоны для явной (*а*) и неявной (*б*) схем

системы можно уменьшить, увеличив шаг дискретизации. Однако этот путь приводит к потере точности и им нельзя пользоваться без достаточного обоснования.

При фиксированной размерности трудоемкость решения системы конечно-разностных уравнений зависит от типа разностной схемы. Поясним это на примере системы уравнений (13.3), где во втором слагаемом вместо индекса, указывающего номер временного шага, пока проставлены звездочки. Рассмотрим два варианта:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0;$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{13.8}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = 0. \tag{13.9}$$

Совокупности узлов, участвующих в разностных схемах, можно изобразить схематично в виде так называемых шаблонов. Для первой и второй схем соответственно шаблоны приведены на рис. 13.6, *а*, *б*.

Первая схема называется явной. Как наглядно видно из шаблона, в этой схеме каждое значение искомой функции на $(n+1)$-м временном слое индивидуально определяется через три значения функции на предыдущем n-м слое.

Разрешив (13.8) относительно u_i^{n+1}, получим:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n).$$

Используя начальные условия, т.е. значения функции на нулевом слое, мы довольно просто можем вычислить последовательно значения функции на любом последующем временном слое. Но явная схема имеет очень существенный недостаток: она оказывается сходящейся только при соблюдении ограничительного условия

$$\tau/h^2 \leqslant 1/2,$$

т.е. условно устойчива.

Вторая схема называется неявной. Она сходится при любом отношении шагов. Но, как видно из шаблона, непосредственно вычислить индивидуальное значение функции на $(n+1)$-м слое по известным значениям на n-м слое нельзя. На каждом слое нужно полностью решать всю систему уравнений.

Как уже подчеркивалось ранее, система конечно-разностных уравнений является алгебраической и поэтому к ней применимы известные методы решения алгебраических уравнений. В то же время отметим, что каждое неявное конечно-разностное уравнение содержит только три значения искомой функции в соседних узлах. Вследствие этого матрица коэффициентов системы конечно-разностных уравнений имеет специальный, так называемый, трехдиагональный вид. Для системы (13.9) матрицей является

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & & & & \\ b & a & b & 0 & 0 & & \\ 0 & b & a & b & 0 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 & b & a & b & \\ & & & 0 & b & a & \end{bmatrix},$$

где $a = 1 + 2\tau/h^2$; $b = -\tau/h^2$, а все элементы, не лежащие на трех выделенных диагоналях, равны нулю. Для решения систем уравнений подобного вида разработаны специальные методы, среди которых одним из наиболее популярных является метод прогонки. Рассмотрим его на примере решения системы (13.9) с начальными и граничными условиями (13.4), (13.5), (13.7). Для удобства перепишем уравнение в развернутом виде:

$$u_{i-1}^{n+1} - (2+s)\,u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} = -su_i^n, \quad s = h^2/\tau. \tag{13.10}$$

Будем считать, что значения функции в соседних узлах связаны между собой соотношениями:

$$u_i^{n+1} = a_i^{n+1}(b_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}), \tag{13.11}$$

$$u_{i-1}^{n+1} = a_{i-1}^{n+1}(b_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1}). \tag{13.12}$$

Подставив (13.12) в уравнение (13.10), получим:

$$a_{i-1}^{n+1}(b_{i-1}^{n+1} + u_i^{n+1}) - (2+s)\,u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1} = -su_i^n,$$

откуда следует, что

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2 + s - a_{i-1}^{n+1}}\left[(a_{i-1}^{n+1} b_{i-1}^{n+1} + su_i^n) + u_{i+1}^{n+1}\right]. \tag{13.13}$$

Сравнив (13.13) с (13.11), получим соотношения

$$a_i^{n+1} = (2 + s - a_{i-1}^{n+1})^{-1}, \; b_i^{n+1} = a_{i-1}^{n+1} b_{i-1}^{n+1} + su_i^n, \tag{13.14}$$

которые по известным значениям a_{i-1}^{n+1}, b_{i-1}^{n+1} позволяют вычислить a_i^{n+1}, b_i^{n+1}

Для узла $i = 1$ уравнение (13.10) и соотношения (13.11) имеют следующий вид:

$$u_0^{n+1} - (2+s)u_1^{n+1} + u_2^{n+2} = -su_1^n; \tag{13.15}$$

$$u_1^{n+1} = a_1^{n+1}(b_1^{n+1} + u_2^{n+1}). \tag{13.16}$$

Использовав граничное условие (13.15), из (13.15) получим:

$$u_1^{n+1} = \frac{1}{2+s}\left[(\psi_1^{n+1} + su_1^n) + u_2^{n+1}\right] \tag{13.17}$$

и далее в результате сопоставления равенств (13.17) и (13.16)

$$a_1^{n+1} = (2+s)^{-1}, \quad b_1^{n+1} = \psi_1^{n+1} + su_1^n. \tag{13.18}$$

Соотношения (13.18) и (13.14) позволяют последовательно рассчитать пары коэффициентов (a_1^{n+1}, b_1^{n+1}), (a_2^{n+1}, b_2^{n+1}), ..., $(a_{M-1}^{n+1}, b_{M-1}^{n+1})$. Эта процедура известна как «прямой ход».

Используя найденные значения пар коэффициентов и второе из граничных условий (13.5), при помощи (13.11) можем вычислить искомые значения функции во всех узлах, начиная с $i = M-1$:

$$u_{M-1}^{n+1} = a_{M-1}^{n+1}(b_{M-1}^{n+1} + \psi_2^{n+1}); \quad u_{M-2}^{n+1} = a_{M-2}^{n+1}(b_{M-2}^{n+1} + u_{M-1}^{n+1}), \ldots$$

В этом состоит операция «обратный ход». Повторяя «прямой» и «обратный» ходы на каждом последующем временном шаге, найдем численное решение задачи в любом заданном интервале изменения времени.

Метод прогонки удобен тем, что требует относительно небольших объемов оперативной памяти и затрат времени на проведение расчетов.

§ 7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Пусть в горизонтальной плоскости (x, y) имеется область D_l, занятая нефтью и содержащая скважины – точечные источники или стоки. Будем считать, что пласт – неоднородный по проницаемости: $k_0 = k_0(x, y)$, а разработка залежи ведется при упругом режиме фильтрации. Для простоты будем предполагать, что область фильтрации D_l имеет форму прямоугольника: $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$, $Y_1 \leqslant y \leqslant Y_2$ (рис. 13.7). На границах области фильтрации $x = X_1$, $x = X_2$ и $y = Y_2$ задано, соответственно, распределение давлений

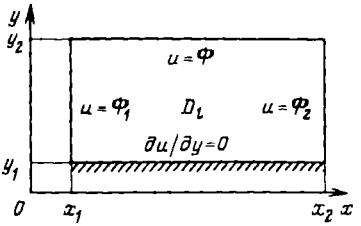
$$p = p_1(y, t), \quad p = p_2(y, t), \quad p = p_3(x, t).$$

Подошва пласта $y = Y_1$ считается непроницаемой, т. е. на этой границе нормальная составляющая скорости фильтрации (или $\partial p/\partial y$) равна нулю.

Пусть в начальный момент времени t_0 в пласте (область D_l) задано распределение давления по координатам, т. е. $p = p_0(x, y)$ при $t = t_0$.

Тогда задача о нахождении распределения давления $p(x, y, t)$ в процессе эксплуатации залежи сводится к решению (интегрированию) диф-

Рис. 13.7. Схема области фильтрации упругой жидкости



ференциального уравнения параболического типа (типа теплопроводности) с переменными коэффициентами (см. гл. 2 и 5), которое можно представить в обобщенном виде

$$b\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)+f,$$

$$b=b(x,y),\quad k=k(x,y),\quad f=f(x,y,t) \tag{13.19}$$

в области

$$D=D_l\times D_T,\quad D_T=\{t\geqslant t_0\}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$p=\varphi(x,y)\ \text{при}\ t=t_0; \tag{13.20}$$

$$p=\phi_1(y,t)\ \text{при}\ x=X_1; \tag{13.21}$$

$$p=\phi_2(y,t)\ \text{при}\ x=X_2; \tag{13.22}$$

$$\partial p/\partial y=0\ \text{при}\ y=Y_1; \tag{13.23}$$

$$p=\psi(x,t)\ \text{при}\ y=Y_2. \tag{13.24}$$

Здесь искомая функция $p(x,y,t)$ соответствует давлению; $k=k_0(x,y)/\eta$, $b\equiv\beta^*=m\beta_ж+\beta_c$ – коэффициент упругости пласта; f – плотность источников и стоков, моделирующих работу добывающих и нагнетательных скважин. Со способами моделирования скважин можно познакомиться по книге [45].

Будем решать задачу приближенно с использованием метода конечных разностей. Для этого заменим непрерывную область ее дискретным аналогом – квадратной сеточной областью (рис. 13.8):

$$D_{ih}\{x_i,y_i\};\quad x_i=ih;\quad y_j=jh\ \ (i=\overline{0,M},j=\overline{0,N}).$$

Построим далее конечно-разностный аналог уравнения (13.19), используя интегро-интерполяционный метод.

Выделим в области D_l квадрат с центром в точке (x_i,y_j) и сторонами, образованными отрезками линий $x=x_i\pm h/2$, $y=y_j\pm h/2$ (см. рис. 13.8). Рассмотрим тройной интеграл от обеих частей уравнения (13.19):

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} b\frac{\partial p}{\partial t}\,dy\,dx\,dt=\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial p}{\partial x}+\right.$$

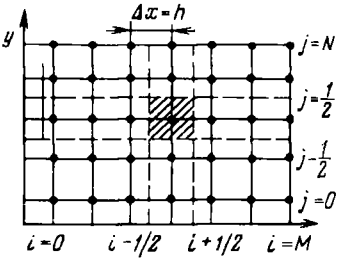


Рис. 13.8. Дискретный аналог непрерывной области фильтрации

$$+\frac{\partial}{\partial y}k\frac{\partial p}{\partial y}+f\Big)dydxdt.$$

Выполнив интегрирование по каждому слагаемому в порядке, соответствующем типу производной, получим:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} b\,(p^{n+1}-p^n)\,dydx =$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\left[\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2}-\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2}\right]dydt +$$

$$+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\left[\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{j+1/2}-\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{j-1/2}\right]dxdt +$$

$$+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f\,dydxdt.$$

Это соотношение – точное. Использовав формулы приближенного интегрирования, представим его в следующем виде

$$\left[b(p^{n+1}-p^n)\right]_{\substack{x=x_i^{(1)}\\ y=y_i^{(1)}}}\Delta x\,\Delta y=\left[\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2}-\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2}\right]_{\substack{y=y_j^{(2)}\\ t=t_n^{(2)}}}\Delta y\,\Delta t +$$

$$+\left[\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{j+1/2}-\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{j-1/2}\right]_{\substack{x=x_i^{(3)}\\ t=t_n^{(3)}}}\Delta x\,\Delta t+f(x_i^{(4)},y_j^{(4)},t_n^{(4)})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta t,$$

$$x_i\leqslant\{x_i^{(\alpha)}\}\leqslant x_{i+1};\quad y_j\leqslant\{y_j^{(\beta)}\}\leqslant y_{j+1};\quad t_n\leqslant\{t_n^{(\gamma)}\}\leqslant t_{n+1};$$

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}=1,2,3,4. \qquad (13.25)$$

Произведения $k\partial p/\partial x$ и $k\partial p/\partial y$ в точках с полуцелыми индексами заменим дискретными аналогами:

$$\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+1/2} \approx k_{i+1/2}\frac{p_{i+1}-p_i}{\Delta x};\quad \left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-1/2} \approx k_{i-1/2}\frac{p_i-p_{i-1}}{\Delta x};$$

$$\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{j+1/2} \approx k_{j+1/2}\frac{p_{j+1}-p_j}{\Delta y};\quad \left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{j-1/2} \approx k_{j-1/2}\frac{p_j-p_{j-1}}{\Delta y},$$

где

$$k_{i\pm 1/2}=\frac{2k_ik_{i\pm 1}}{k_i+k_{i\pm 1}};\quad k_{j\pm 1/2}=\frac{2k_jk_{j\pm 1}}{k_j+k_{j\pm 1}}.$$

Подставим полученные выражения в (13.25), предварительно разделив все слагаемые на $\Delta x\Delta y\Delta t$ и положив приближенно $x_i^{(\alpha)}=x_i$, $y_j^{(\beta)}=y_j$, $t_n^{(\gamma)}=t_{n+1}$ (т.е. отнеся все средние величины в интегралах к узлу x_i, y_i, t_{n+1}). В результате получим конечно-разностный аналог двумерного уравнения (13.19)

$$b_{i,j}\frac{p_{i,j}^{n+1}-p_{i,j}^n}{\tau}=k_{i+1/2,j}\frac{p_{i+1,j}^{n+1}-p_{i,j}^{n+1}}{h^2}-k_{i-1/2,j}\frac{p_{i,j}^{n+1}-p_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}+$$

$$k_{i,j+1/2}\frac{p_{i,j+1}^{n+1}-p_{i,j}^{n+1}}{h^2}-k_{i,j-1/2}\frac{p_{i,j}^{n+1}-p_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}+f_{i,j}^{n+1},$$

$$i=\overline{1,M-1},\quad j=\overline{1,N-1}. \tag{13.26}$$

Дискретные аналоги начального и граничных условий строятся по ранее рассмотренным схемам:

при $n=0$ $p_{i,j}^0=\varphi_{i,j}(i=\overline{0,M},\quad j=\overline{0,N})$; (13.27)

при $i=0$ $p_{0,j}^n=\phi_{1,j}^n(j=\overline{1,N-1},n=1,2,\ldots)$; (13.28)

при $i=M$ $p_{M,j}^n=\phi_{2,j}^n(j=\overline{1,N-1},n=1,2,\ldots)$; (13.29)

при $j=0$ $p_{i,-1}^n=p_{i,1}^n(i=\overline{1,M-1},n=1,2,\ldots)$; (13.30)

при $j=N$ $p_{i,N}^n=\psi_i^n(i=\overline{1,M-1},n=1,2,\ldots)$. (13.31)

Таким путем вместо исходной краевой задачи (13.19)–(13.24) получим конечно-разностную задачу (13.26)–(13.31).

Для решения алгебраической системы уравнений (13.26)–(13.31) можно использовать различные общие и специальные методы. Из числа последних большое распространение получил метод смены направлений. Сущность его заключается в следующем.

Шаг по времени $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ разбивается на два половинных шага $t_{n+1} - t_{n+1/2} = t_{n+1/2} - t_n = \Delta t/2$. На каждом полушаге вместо системы (13.26)–(13.31) решается все модификация, явная по одному направлению и неявная по другому (направления чередуются).

Решаемые системы имеют следующий вид:

на первом полушаге

$$b_{i,j}\frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^{n}}{\tau/2} = k_{i+1/2,j}\frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{h^2} - k_{i-1/2,j}\frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} +$$

$$+ k_{i,j+1/2}\frac{p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j}^{n}}{h^2} - k_{i,j-1/2}\frac{p_{i,j}^{n} - p_{i,j-1}^{n}}{h^2} + f_{i,j}^{n+1/2};$$

при $i = 0 \quad p_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\phi_{1,j}^{+} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2 \Phi_{1,j}^{-} \; (j = \overline{1, N-1})$;

при $i = M \; p_{M,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\Phi_{2,j}^{+} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2 \Phi_{2,j}^{-} (j = \overline{1, N-1})$,

где

$$\Phi^{+} = \frac{1}{2}(\Phi^{n+1} + \Phi^{n}); \quad \Phi^{-} = \Phi^{n+1} - \Phi^{n-1};$$

$$\Lambda_2 \Phi_j^{-} = k_{i,j+1/2}\frac{\Phi_{j+1}^{-} - \Phi_j^{-}}{h^2} - k_{i,j-1/2}\frac{\Phi_j^{-} - \Phi_{j-1}^{-}}{h^2};$$

на втором полушаге

$$b_{i,j}\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1/2}}{\tau/2} = k_{i+1/2}\frac{p_{i+1,j}^{n+1/2} - p_{i,j}^{n+1/2}}{h^2} - k_{i-1/2,j}\frac{p_{i,j}^{n+1/2} - p_{i-1,j}^{n+1/2}}{h^2} +$$

$$+ k_{i,j+1/2}\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h^2} - k_{i,j-1/2}\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} + f_{i,j}^{n+1/2};$$

при $j = 0 \quad p_{i,-1}^{n+1} = p_{i,1}^{n+1} \quad (i = \overline{1, M-1})$;
при $j = N \quad p_{i,N}^{n+1} = \psi_i^{n+1} \quad (i = \overline{1, M-1})$.

Поскольку на каждом полушаге задача оказывается фактически одномерной (неявной), то для ее решения можно использовать метод прогонки.

Решив системы дважды, в результате получим решение на очередном шаге $t = t_{n+1}$.

§ 8. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим плоскую задачу фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости в однородном пласте без учета капиллярных и гравитационных сил (см. гл. 9). Пусть область нефтеводоносного пласта D_t имеет прямоугольную форму $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant l$ (рис. 13.9). Требуется определить в области $D_t (t \geqslant 0)$ давление $p(x, y, t)$, насыщенность $s(x, y, t)$ вытесняемой фазой 2 (нефтенасыщенность), удовлетворяющие системе уравнений (9.15), (9.16). Считаем, что в начальный момент времени ($t = 0$) задано распределение насыщенности $s = s_0(x, y)$, а подошва $y = 0$ и кровля $y = l$ пласта непроницаемы (т. е. $\partial p/\partial y = 0$) на этих границах области фильтрации). На нагнетательной галерее $x = 0$ задано $s = s^0(y, t)$, $p = p^0(y, t)$; на эксплуатационной галерее $x = L$ задается распределение давления $p = p_L(y, t)$ (см. рис. 13.9). Соответствующая система уравнений, описывающая процесс, а также начальное и граничные условия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(\frac{k_1}{\eta_1}+\frac{k_2}{\eta_2}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[k\left(\frac{k_1}{\eta_1}+\frac{k_2}{\eta_2}\right)\frac{\partial p}{\partial y}\right]=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f w_x)+\frac{\partial}{\partial y}(f w_y)-m\frac{\partial s}{\partial t}=0; \tag{13.32}$$

при $t = 0 \quad s = s_0(x, y)$;

при $x = 0 \quad s = s^0(y, t), \quad p = p^0(y, t)$;

при $x = L \quad p = p_L(y, t), \quad p_L < p^0$;

при $y = \{0, l\} \quad \partial p/\partial y = 0.$ (13.33)

Здесь $f = f_s$ – функция Бакли–Леверетта (доля вытесняющей фазы 1 в суммарном потоке), определяемая равенством (8.8); $f(s)\vec{w} = \vec{w}_1$ – вектор скорости фильтрации вытесняющей фазы; $\vec{w}$ – вектор суммарной скорости фильтрации:

$$\vec{w} = -k\left[\frac{k_1(s)}{\eta_1}+\frac{k_2(s)}{\eta_2}\right]\operatorname{grad} p.$$

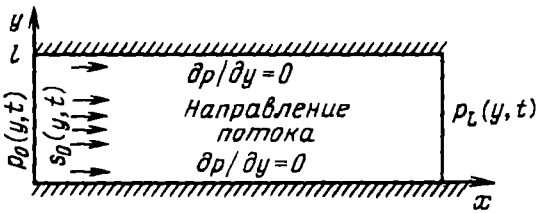


Рис. 13.9. Схема области двухфазной фильтрации

Первое уравнение системы (13.32) получено в результате суммирования уравнений неразрывности (9.15) фаз с использованием обобщенного закона Дарси (9.16).

Воспользовавшись изложенными ранее способами построения дискретных аналогов краевых задач, приведем постановку задачи (13.32)–(13.33) к конечно-разностной форме, опустив промежуточные выкладки:

$$k^n_{i+1/2,j}(p^{n+1}_{i+1,j} - p^{n+1}_{i,j}) - k^n_{i-1/2,j}(p^{n+1}_{i,j} - p^{n+1}_{i-1,j}) +$$

$$+ k^n_{i,j+1/2}(p^{n+1}_{i,j+1} - p^{n+1}_{i,j}) - k^n_{i,j-1/2}(p^{n+1}_{i,j} - p^{n+1}_{i,j-1}) = 0;$$

$$f^{n\bullet}_{i+1/2,j} w^{n+1}_{i+1/2,j} - f^{n\bullet}_{i-1/2,j} w^{n+1}_{i-1/2,j} + f^{n\bullet}_{i,j+1/2} w^{n+1}_{i,j+1/2} -$$

$$- f^{n\bullet}_{i,j-1/2} w^{n+1}_{i,j-1/2} - h m_{ij} \frac{s^{n+1}_{i,j} - s^n_{i,j}}{\tau} = 0;$$

$$i = \overline{1, M-1}; \; j = \overline{0, N}; \; n = 1,2,\ldots; \tag{13.34}$$

при $n = 0 \quad s = s_{0i,j}; \quad i = \overline{0, M}; \quad j = \overline{0, N};$

при $i = 0 \quad s = s^{0n}_{0,j}; \quad p = p^{0n}_{0,j};$

при $i = M \quad p = p^n_{L,j}; \quad j = \overline{1, N-1}, \quad n = 1,2,\ldots;$

при $j = 0 \quad p_{i,-1} = p_{i,1};$

при $j = N \quad p_{i,N+1} = p_{i,N-1}; \quad i = \overline{1, M-1};$ (13.35)

$$k^n_{i\pm 1/2,j} = \frac{2k^n_{i,j} k^n_{i\pm 1,j}}{k^n_{i,j} + k^n_{i\pm 1,j}}; \quad k^n_{i,j\pm 1/2} = \frac{2k^n_{i,j} k^n_{i,j\pm 1}}{k^n_{i,j} + k^n_{i,j\pm 1}};$$

$$k^n = k\left[\frac{k_1(s^n)}{\eta_1} + \frac{k_2(s^n)}{\eta_2}\right];$$

$$f^{n\bullet}_{i+1/2,j} = \begin{cases} f^n_{i+1,j} \text{ при } w_{i+1/2,j} < 0; \\ f^n_{i,j} \text{ при } w_{i+1/2,j} > 0; \end{cases}$$

$$f^{n\bullet}_{i,j+1/2} = \begin{cases} f^n_{i,j+1} \text{ при } w_{i\,j+1/2} < 0; \\ f^n_{i,j} \text{ при } w_{i,j+1/2} > 0. \end{cases}$$

Аналогично выбираются $f^{n\bullet}_{i-1/2,j}$ и $f^{n\bullet}_{i,j-1/2}$ (правило «против потока»).

Приведенная схема является неявной по давлению и явной по насыщенности.

Система (13.34) является эллиптической. Для решения таких систем чаще всего используются различные итерационные методы.

Простейший метод реализуется по следующей схеме:

$$p_{i,j}^{n+1,r+1} = (k_{i+1/2,j}^{n} + k_{i-1/2,j}^{n} + k_{i,j+1/2}^{n} + k_{i,j-1/2}^{n})^{-1} (k_{i+1/2,j}^{n} p_{i+1,j}^{n+1,r} +$$

$$+ k_{i-1/2,j}^{n} p_{i-1,j}^{n+1,r} + k_{i,j+1/2}^{n} p_{i,j+1}^{n+1,r} + k_{i,j-1/2}^{n} p_{i,j-1}^{n+1,r}),$$

где r – номер итерации.

Итерационный процесс заканчивается при выполнении неравенства

$$\max_{i,j} |p_{i,j}^{n+1,r+1} - p_{i,j}^{n+1,r}| < \varepsilon,$$

где ε – заданная достаточно малая величина.

После того, как будут найдены $p_{i,j}^{n+1}$, по явной формуле из (13.35) можно вычислить насыщенности $s_{i,j}^{n+1}$. Для устойчивости счета должно выполняться следующее условие:

$$\tau < h \frac{\min\limits_{i,j} m_{i,j}}{\max\limits_{i,j} w_{i,j} \cdot \max f'(s)}.$$

Теория и практика приближенного численного решения задач подземной гидромеханики развиты достаточно широко. Можно даже считать, что уже сложилась особая дисциплина – вычислительная подземная гидромеханика.

Контрольные вопросы и задачи

1. Каковы основные свойства моделей и требования, предъявляемые к ним?
2. Какие типы моделей используются в подземной гидромеханике?
3. С какими математическими моделями вы встретились в курсе подземной гидромеханики и других дисциплинах?
4. Перечислите основные этапы математического моделирования.
5. Что называют порядком точности конечно-разностной схемы?
6. Постройте конечно-разностные аппроксимации первой du/dx и второй d^2u/dx^2 производных второго порядка точности.
7. Сформулируйте условия устойчивости явной конечно-разностной схемы.
8. Постройте численный алгоритм решения задачи (9.38), (9.41) о вытеснении нефти водой при произвольном монотонно убывающем начальном распределении насыщенности $\varphi(\xi)$ (см. гл. 9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абасов М. Т., Оруджалиев Ф. Г.* Газогидродинамика и разработка газоконденсатных месторождений.– М.: Недра, 1969.– 262 с.

2. *Абасов М. Т., Кулиев А. М.* Методы гидрогазодинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа.– Баку: ЭЛМ, 1976.– 204 с.

3. *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем.– М.: Недра, 1982.– 407 с.

4. *Алишаев М. Г., Розенберг М. Д., Теслюк Е. В.* Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений.– М.: Недра, 1985.– 271 с.

5. *Аравин В. Н., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.– М.: Гостехтеориздат, 1953.– 616 с.

6. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика.– Л.: Гидрометеоиздат, 1982.– 207 с.

7. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах.– М.: Недра, 1984.– 207 с.

8. *Басниев К. С.* Разработка месторождений природных газов, содержащих неуглеводородные компоненты.– М.: Недра, 1986.– 183 с.

9. *Басниев К. С., Бедриковецкий П. Г.* Многофазное вытеснение смешивающихся жидкостей из пористых сред//Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики.– 1988.– Т. 3.– С. 81–162.

10. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей.– М.: Наука, 1975.– 199 с.

11. *Борисов Ю. П., Рябинина З. К., Воинов В. В.* Особенности проектирования разработки нефтяных месторождений с учетом их неоднородности.– М.: Недра, 1976.– 288 с.

12. *Бузинов С. Н., Умрихин И. Д.* Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов.– М.: Недра, 1984.– 269 с.

13. *Булыгин В. Я.* Гидромеханика нефтяного пласта.– М.: Недра, 1974.– 230 с.

14. *Вахитов Г. Г., Кузнецов О. Л., Симкин Э. М.* Термодинамика призабойной зоны нефтяного пласта.– М.: Недра, 1978.– 216 с.

15. *Влияние* свойств горных пород на движение в них жидкостей/А. Бан, А. Ф. Богомолова, В. А. Максимов и др.– М.: Гостоптехиздат, 1962.– 275 с.

16. *Гиматудинов Ш. К., Ширковский А. И.* Физика нефтяного и газового пласта.– М.: Недра, 1982.– 308 с.

17. *Голф-Рахт Т. Д.* Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов: Пер. с англ.– М.: Недра, 1986.– 608 с.

18. *Горбунов А. Т.* Разработка аномальных нефтяных месторождений.– М.: Недра, 1981.– 239 с.

19. *Гусейн-Заде М. А.* Особенности движения жидкостей в неоднородном пласте.– М.: Недра, 1965.– 210 с.

20. *Гусейн-Заде М. А., Колосовская А. К.* Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах.– М.: Недра, 1972.– 454 с.

21. *Данилов В. Л., Кац Р. М.* Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде.– М.: Недра, 1980.– 264 с.

22. *Движение* углеводородных смесей в ористой среде/В. Н. Николаевский, Э. А. Бондарев, М. И. Миркин и др.– М.: Недра, 1968.– 190 с.

23. *Добрынин В. М.* Деформации и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа.– М.: Недра, 1970.– 239 с.

24. *Добыча*, подготовка и транспорт газа: Справ. руководство: в 2 т/Под ред. Ю. П. Коротаева, Р. Д. Маргулова.– М.: Недра, 1984.– Т. 1: Добыча/– 360 с.

25. *Евдокимова В. А., Кочина И. Н.* Сборник задач по подземной гидравлике.– М.: Недра, 1979.– 169 с.

26. *Ентов В. М., Зазовский А. Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи.– М.: Недра, 1989.– 232 с.

27. *Желтов Ю. П.* Разработка нефтяных месторождений: Учеб. для вузов.– М.: Недра, 1986.– 332 с.

28. *Желтов Ю. П.* Механика нефтегазоносного пласта.– М.: Недра, 1975.– 216 с.

29. *Жуковский Н. Е.* Собрание сочинений. Т. 3.– М.–Л.: Гослитиздат, 1949.– 700 с.

30. *Закиров С. Н.* Теория и проектирование разработки газовых и газоконденсатных месторождений.– М.: Недра, 1989.– 334 с.

31. *Зотов Г. А., Тверковкин С. М.* Газогидродинамические методы исследования газовых скважин:– М.: Недра, 1970.– 192 с.

32. *Иванова М. М., Дементьев А. Ф., Чоловский И. П.* Нефтегазопромысловая геология и геологические основы разработки месторождений нефти и газа: Учеб. для вузов.– М.: Недра, 1985.– 422 с.

33. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы: Пер. с англ.– М.: Мир, 1964.– 350 с.

34. *Коновалов А. Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.– Новосибирск: Наука, 1988.– 165 с.

35. *Коротаев Ю. П., Ширковский А. И.* Добыча, транспорт и подземное хранение газа: Учеб. для вузов.– М.: Недра, 1984.– 485 с.

36. *Котяхов Ф. И.* Физика нефтяных и газовых коллекторов.– М.: Недра, 1977.– 287 с.

37. *Кристеа Н.* Подземная гидравлика: В 2 т.– М.: Гостоптехиздат, 1962.

38. *Кричлоу Г. Б.* Современная разработка нефтяных месторождений. Проблемы моделирования.– М.: Недра, 1979.– 303 с.

39. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 733 с.

40. *Лапук Б. Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов.– М.–Л.: Гостоптехиздат, 1948.– 295 с.

41. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов: В 2 т.– М.: АН СССР, 1953.– Т. 2: Подземная гидрогазодинамика.– 544 с.

42. *Лейбензон Л. С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде.– М.–Л.: Гостехиздат, 1947.– 244 с.

43. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука.– 1987.– 904 с.

44. *Майдебор В. Н.* Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами.– М.: Недра, 1980.– 288 с.

45. *Максимов М. М., Рыбицкая Л. П.* Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений.– М.: Недра, 1976.– 264 с.

46. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде.– М.–Л.: Гостоптехиздат, 1949.– 628 с.

47. *Маскет М.* Физические основы технологии добычи нефти.– М.–Л.: Гостоптехиздат, 1953.– 607 с.

48. *Механика* насыщенных пористых сред/В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов.– М.: Недра, 1970.– 335 с.

49. *Мирзаджанзаде А. Х., Степанова Г. С.* Математическая теория эксперимента в добыче нефти и газа.– М.: Недра, 1977.– 229 с.

50. *Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. П., Зайцев Ю. В.* Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей.– М.: Недра, 1972.– 200 с.

51. *Многомерная* и многокомпонентная фильтрация: Справ. пособие/ С. Н. Закиров, Б. Е. Сомов, В. Я. Гордон и др.– М.: Недра, 1988.– 335 с.

52. *Наказная Л. Г.* Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах.– М.: Недра, 1972.– 184 с.

53. *Научные* основы разработки нефтяных месторождений/А. П. Крылов, М. М. Глоговский, М. Ф. Мирчинк и др.– М.–Л.: Гостоптехиздат, 1948.– 416 с.

54. *Непримеров Н. Н.* Трехмерный анализ нефтеотдачи охлажденных пластов.– Казань, КГУ, 1978.– 216 с.

55. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред, т. II, М., Наука, 1987.– 359 с.

56. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред.– М.: Недра, 1984.– 232 с.

57. *Пирвердян А. М.* Физика и гидравлика нефтяного пласта.– М., Недра, 1982.– 192 с.

58. *Пирсон С. Д.* Учение о нефтяном пласте.– М., Гостоптехиздат, 1961.– 570 с.

59. *Подземная* гидравлика/К. С. Басниев, А. М. Власов, И. Н. Кочина, В. М. Максимов.– М.: Недра, 1986.– 303 с.

60. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод.– М.: Наука, 1977.– 664 с.

61. *Применение* углекислого газа в добыче нефти/В. Балинт, А. Бан, Ш. Долешал и др.– М.: Недра, 1977.– 240 с.

62. *Проблемы* теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи/Под ред. П. Я. Кочиной, В. М. Ентова.– М.: Наука, 1987.– 216 с.

63. *Проектирование* разработки и эксплуатация нефтяных месторождений: Справ. руководство: В 2 т./Под ред. Ш. К. Гиматудинова – 3-е изд. испр. – М.: Недра, 1983.– Т. 2: Проектирование разработки/Ш. К. Гиматудинов. Ю. П. Борисов, М. Д. Розенберг – 431 с.

64. *Проектирование* разработки и эксплуатация нефтяных месторождений: Справ. руководство: В 2 т./Под ред. Ш. К. Гиматудинова – 3-е изд., испр.– М.: Недра, 1983.– Т. 1: Добыча нефти/Р. С. Андриасов, И. Т. Мищенко, А. И. Петров.– 453 с.

65. *Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г.* Подземная гидравлика.– М.: Недра, 1973.– 360 с.

66. *Развитие* исследований по теории фильтрации в СССР/Отв. редактор П. Я. Полубаринова-Кочина.– М.: Наука, 1969.– 545 с.

67. *Разработка* газоконденсатных месторождений/А. Х. Мирзаджанзаде, А. Г. Дурмишьян, А. Г. Ковалев и др.– М.: Недра, 1967.– 356 с.

68. *Релаксационная* фильтрация/Ю. М. Молокович, Н. Н. Непримеров. В. И. Пикуза, А. В. Штанин – Казань: КГУ, 1980.– 136 с.

69. *Розенберг М. Д., Кундии С. А.* Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа.– М.: Недра, 1976.– 335 с.

70. *Ромм Е. С.* Структурные модели порового пространства горных пород.– Л.: Недра, 1985.– 240 с.

71. *Руководство* по добыче, транспорту и переработке природного газа/ Д. Л. Катц, Д. Корнелл, Р. Кобаяши и др.: Пер. с англ.– М.: Недра, 1965.– 676 с.

72. *Седов М. И.* Механика сплошной среды: В 2 т.– М.: Наука, 1983–1984.

73. *Соколовский Э. В., Соловьев Г. Б., Тренчиков Ю. Т.*, Индикаторные методы изучения нефтегазоносных пластов.– М.: Недра, 1986.– 157 с.

74. *Сургучев М. Л.* Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи пластов.– М.: Недра, 1985.– 308 с.

75. *Теория* водонапорного режима газовых месторождений//С. Н. Закиров, Ю. П. Коротаев и др.– М.: Недра, 1976.– 240 с.

76. *Технология* добычи природных газов/А. Х. Мирзаджанзаде, И. М. Аметов, К. С. Басниев и др.– М.: Недра, 1987.– 414 с.

77. *Технология* повышения нефтеотдачи пластов/Э. М. Халимов, Б. И. Леви, В. И. Дзюба, С. А. Пономарев.– М.: Недра, 1984.– 271 с.

78. *Требин Ф. А., Щербаков Г. В., Яковлев В. П.* Гидромеханические методы исследования скважин и пластов.– М.: Недра, 1965.– 276 с.

79. *Хейфец Л. И., Неймарк А. В.* Многофазные процессы в пористых средах.– М.: Химия, 1982.– 319 с.

80. *Хранение* газа в горизонтальных и пологозалегающих водоносных пластах/И. А. Чарный, Д. И. Астрахан, А. М. Власов и др.– М.: Недра, 1968.– 299 с.

81. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика.– М.: Гостоптехиздат, 1963.– 396 с.

82. *Чекалюк Э. Б.* Термодинамика нефтяного пласта.– М.: Недра, 1965.– 238 с.

83. *Шаймуратов Р. В.* Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта.– М.: Недра, 1980.– 223 с.
84. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред.– М.: Недра, 1985.– 288 с.
85. *Шейдеггер А. Э.* Физика течения жидкостей через пористые среды: Пер. с англ.– М.: Гостоптехиздат, 1960.– 249 с.
86. *Шмыгля П. Т.* Разработка газовых и газоконденсатных месторождений.– М.: Недра, 1967.– 260 с.
87. *Щелкачев В. Н.* Избранные труды.– М.: Недра, 1990.– Т. I–II.
88. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме.– М.: Гостоптехиздат, 1959.– 467 с.
89. *Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б.* Подземная гидравлика. М.: Гостоптехиздат, 1949.– 358 с.
90. *Эфрос Д. А.* Исследования фильтрации неоднородных систем.– Л.: Гостоптехиздат, 1963.– 351 с.
91. *Barenblatt G. I., Entov V. M., Ryzhik V. M.* Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks.– Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990.– 395 p.
92. *Darcy H.* Les fontaines publiques de la ville de Dijon.– Paris, 1856.
93. *Dupuit J.* Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans le canaux découverts et à travers les terrains permeables, 2-eme ed.– Paris: 1863.
94. *Greenkorn R. A.* Flow phenomena in porous media.– N.-Y., Basel: M. Dekker, Inc., 1983.– 550 p.
95. *Houpeurt A.* Elèments de mècanique des fluides dans les milieux poreux. Paris, Editions Technip., 1958.– 231 p.
96. *Ikoku C. V., Ramey H. J.* Transient flow of non-newtonian power-low fluids in porous media.– Stanford: Stanford University, 1979.– 220 p.
97. *Marle C.* Cours de production, t. IV, Les écoulements polyphasiques.– Paris: Soc. des Editions Technip., 1965.– 175 p.
98. *Nikolaevskij V. N.* Mechanics of Porous and Fractured Media.– Singapore: World Scientific, 1990.– 472 p.
99. *Smith C. R.* Secondary oil recovery.– N.-Y.: Reinhold Publishing Company, 1966.– 315 p.
100. *Timmerman E. H.* Practical reservoir engineering. Vol. 1,2.– Tulsa, Oklahoma: Penn Well Publishing Company, 1982.– 422 p.

Приложение 1

Таблица 1 Зависимость безразмерного отобранного объема воды $\bar{Q}$ от параметра Фурье fo при эксплуатации укрупненной скважины с постоянной депрессией и зависимость безразмерной депрессии $\Delta\bar{p}$ от параметра Фурье fo при эксплуатации скважины с постоянным дебитом. Пласт бесконечный.

fo	$\bar{Q}$	$\Delta\bar{p}$	fo	$\bar{Q}$	$\Delta\bar{p}$	fo	$\bar{Q}$	$\Delta\bar{p}$
0,01	0,112	0,112	7	5,749	1,500	$6\cdot10^2$	1,897	3,608
0,05	0,278	0,229	8	6,314	1,556	7	2,160	3,684
0,10	0,404	0,315	9	6,861	1,604	8	2,423	3,750
0,15	0,520	0,376	10	7,417	1,651	9	2,677	3,809
0,20	0,606	0,424	15	9,965	1,829	10^3	2,831	3,860
0,25	0,689	0,469	20	12,29	1,960	$1,5\cdot10^3$	4,136	
0,30	0,758	0,503	25	14,55	2,067	2	5,315	
0,40	0,898	0,564	30	16,81	2,147	4,5	6,466	
0,50	1,020	0,616	40	20,88	2,282	3	7,590	
0,60	1,140	0,659	50	24,82	2,388	4	9,757	
0,70	1,251	0,702	60	28,60	2,476	5	$1,188\cdot10^3$	
0,80	1,359	0,735	70	32,28	2,550	6	1,395	
0,90	1,469	0,772	80	35,99	2,615	7	1,599	
1,00	1,570	0,802	90	39,42	2,672	8	1,800	
1,5	2,032	0,927	10^2	43,01	2,723	9	1,999	
2,0	2,442	1,020	$1,5\cdot10^2$	59,80	2,921	10^4	2,196	
2,5	2,838	1,101	2,0	75,86	3,064	$1,5\cdot10^4$	3,146	
3,0	3,209	1,169	2,5	91,20	3,173	2	4,079	
4,0	3,897	1,275	3,0	$1,058\cdot10^2$	3,263	2,5	4,994	
5,0	4,541	1,362	4,0	1,348	3,206	3	5,891	
6,0	5,148	1,436	5,0	1,624	3,516	4	7,631	
$5\cdot10^4$	$9,312\cdot10^4$		$1,5\cdot10^7$	1,828		6	5,368	
6	$1,103\cdot10^4$		2	2,398		7	6,220	
7	1,269		2,5	2,961		8	7,066	
8	1,433		3	3,517		9	7,909	
9	1,595		$4\cdot10^7$	$4,610\cdot10^6$		10^{10}	$8,747\cdot10^8$	
10^5	1,756		5	5,689		$1,5\cdot10^{10}$	$1,288\cdot10^9$	
$1,5\cdot10^5$	2,538		6	6,758		2	1,697	
2	3,308		7	7,816		2,5	2,103	
$2,5\cdot10^5$	$4,066\cdot10^4$		8	8,866		3	2,505	
3	4,817		9	9,911		4	3,299	
4	6,267		10^8	$1,095\cdot10^7$		5	4,087	
5	7,699		$1,5\cdot10^8$	1,604		6	4,868	
6	9,113		2	2,108		7	5,643	
7	$1,051\cdot10^5$		2,5	2,607		8	6,414	
8	1,189		3	3,100		9	7,183	
9	1,326		4	4,071		10^{11}	7,948	
10^6	1,462		5	5,032		$1,5\cdot10^{11}$	$1,17\cdot10^{10}$	
$1,5\cdot10^6$	2,126		6	5,984		2	1,55	
2	2,781		7	6,928		2,5	1,92	
2,5	3,427		8	7,865		3	2,29	
3	4,064		9	8,797		4	3,02	
4	5,313		10^9	9,725		5	3,75	
5	6,544		$1,5\cdot10^9$	$1,429\cdot10^8$		6	4,47	
6	7,761		2	1,880		7	5,19	
7	8,965		2,5	2,328		8	5,89	
8	$1,016\cdot10^6$		3	2,771		9	6,58	
9	1,134		4	3,645		10^{12}	7,28	
10^7	2,252		5	4,510		$1,5\cdot10^{12}$	$1,08\cdot10^{11}$	
						2	1,42	

Таблица 2

Зависимость безразмерного отобранного объема воды от параметра Фурье fo при эксплуатации укрупненной скважины с постоянной депрессией. Пласт конечный закрытый, $R = R_к/R_с$

$R = 3$		$R = 5$		$R = 8$		$R = 10$	
fo	$\bar{Q}$	fo	$\bar{Q}$	fo	$\bar{Q}$	fo	$\bar{Q}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,3	0,755	3,0	3,195	9	6,861	15	9,965
0,4	0,895	3,5	3,542	10	7,398	20	12,32
0,5	1,023	4,0	3,875	11	7,920	22	13,22
0,6	1,143	4,5	4,193	12	8,431	24	14,09
0,7	1,256	5,0	4,499	13	8,930	26	14,95
0,8	1,363	5,5	4,792	14	9,418	28	15,78
0,9	1,465	6,0	5,074	15	9,895	30	16,59
1,00	1,563	6,5	5,345	16	10,361	32	17,38
1,25	1,791	7,0	5,605	17	10,62	34	18,16
1,50	1,997	7,5	5,854	18	11,26	36	18,91
1,75	2,104	8,0	6,094	19	11,70	38	19,65
2,00	2,353	8,5	6,325	20	12,13	40	20,37
2,25	2,507	9,0	6,547	22	12,95	42	21,07
2,50	2,646	9,5	6,760	24	13,74	44	21,76
2,75	2,772	10	6,965	26	14,50	46	22,42
3,00	2,886	11	7,350	28	15,23	48	23,07
3,25	2,990	12	7,706	30	15,92	50	23,71
3,50	3,084	13	8,035	34	17,22	52	24,33
3,75	3,170	14	8,339	38	18,41	54	24,94
4,00	3,247	15	8,620	40	18,97	56	25,53
4,25	3,317	16	8,879	45	20,26	58	26,11
4,50	3,381	18	9,338	50	21,42	60	26,67
4,75	3,439	20	9,731	55	22,46	65	28,02
5,00	3,491	22	10,07	60	23,40	70	29,29
5,50	3,581	24	10,35	70	24,98	75	30,49
6,0	3,656	26	10,59	80	26,26	80	31,61
6,5	3,717	28	10,80	90	27,28	85	32,67
7,0	3,767	30	10,98	100	28,11	90	33,66
7,5	3,809	34	11,26	120	29,31	95	34,60
8,0	3,843	38	11,46	140	30,08	100	35,48
9	3,894	42	11,61	160	30,58	120	38,51
10	3,928	46	11,71	180	30,91	140	40,89
11	3,951	50	11,79	200	31,12	160	42,75
12	3,967	60	11,91	240	31,34	180	44,21
14	3,985	70	11,96	280	31,43	200	45,36
16	3,993	80	11,98	320	31,47	240	46,95
18	3,997	90	11,99	360	31,49	280	47,24
20	3,999	100	12	400	31,50	320	48,54
22	3,999	120	12	500	31,50	360	48,91
24	4	—	—	—	—	400	49,14
						440	49,28
						480	49,36

Таблица 3

Зависимость безразмерной депрессии $\Delta\bar{p}$ от параметров Фурье fo при эксплуатации укрупненной скважины с постоянным дебитом. Пласт ограниченный закрытый, $R = R_к/R_з$

$R = 3$		$R = 5$		$R = 8$		$R = 10$	
fo	$\Delta\bar{p}$	fo	$\Delta\bar{p}$	fo	$\Delta\bar{p}$	fo	$\Delta\bar{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,52	0,627	3,0	1,167	8,0	1,556	12,0	1,732
0,54	0,636	3,1	1,180	8,5	1,582	12,5	1,750
0,56	0,645	3,2	1,192	9,0	1,607	13,0	1,768
0,60	0,662	3,3	1,204	9,5	1,631	13,5	1,784
0,65	0,683	3,4	1,215	10,0	1,653	14,0	1,801
0,70	0,703	3,5	1,227	10,5	1,675	14,5	1,807
0,75	0,721	3,6	1,238	11,0	1,697	15,0	1,832
0,80	0,740	3,7	1,249	11,5	1,717	15,5	1,847
0,85	0,758	3,8	1,259	12,0	1,737	16	1,862
0,90	0,776	3,9	1,270	12,5	1,757	17	1,890
0,95	0,791	4,0	1,281	13,0	1,776	18	1,917
1,0	0,806	4,2	1,301	13,5	1,795	19	1,943
1,2	0,865	4,4	1,321	14,0	1,813	20	1,968
1,4	0,920	4,6	1,340	14,5	1,831	22	2,017
1,6	0,973	4,8	1,360	15	1,849	24	2,063
2	1,076	5	1,378	17	1,919	26	2,108
3	1,328	5,5	1,424	19	1,986	28	2,151
4	1,578	6,0	1,469	21	2,051	30	2,194
5	1,828	6,5	1,513	23	2,116	32	2,236
		7,0	1,556	25	2,180	34	2,278
		7,5	1,598	30	2,340	36	2,319
		8	1,641	35	2,499	38	2,360
		9	1,725	40	2,658	40	2,401
		10	1,808	45	2,817	50	2,604
		11	1,892			60	2,806
		12	1,975			70	3,008
		13	2,059				
		14	2,142				
		15	2,225				

Таблица 4

Зависимость безразмерной депрессии $\Delta\bar{p}$ от параметра Фурье fo при эксплуатации укрупненной скважины с постоянным дебитом. Пласт конечный открытый, $R = R_к/R_с$

$R = 3$		$R = 6$		$R = 10$		$R = 15$	
fo	$\Delta\bar{p}$	fo	$\Delta\bar{p}$	fo	$\Delta\bar{p}$	fo	$\Delta\bar{p}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,50	0,617	4,0	1,275	10	1,651	20	1,960
0,55	0,640	4,5	1,320	12	1,730	22	2,003
0,60	0,662	5,0	1,361	14	1,798	24	2,043
0,70	0,702	5,5	1,398	16	1,856	26	2,080
0,80	0,738	6,0	1,432	18	1,907	28	2,114
0,90	0,770	6,5	1,462	20	1,952	30	2,146
1,0	0,799	7,0	1,490	25	2,043	35	2,218
1,2	0,850	7,5	1,516	30	2,111	40	2,279
1,4	0,892	8,0	1,539	35	2,160	45	2,332
1,6	0,927	8,5	1,561	40	2,197	50	2,379
1,8	0,955	9	1,580	45	2,224	60	2,455
2,0	0,980	10	1,615	50	2,245	70	2,513
2,2	1,000	12	1,667	55	2,260	80	2,558
2,4	1,016	14	1,704	60	2,271	90	2,592
2,6	1,030	16	1,730	65	2,279	100	2,619
2,8	1,042	18	1,749	70	2,285	120	2,655
3,0	1,051	20	1,762	75	2,290	140	2,677
3,5	1,069	22	1,771	80	2,293	160	2,689
4,0	1,080	24	1,777	90	2,297	180	2,697
4,5	1,087	26	1,781	100	2,300	200	2,701
5,0	1,091	28	1,784	110	2,301	220	2,704
5,5	1,094	30	1,787	120	2,302	240	2,706
6,0	1,096	35	1,789	130	2,302	260	2,707
6,5	1,097	40	1,791	140	2,302	280	2,707
7,0	1,097	50	1,792	160	2,303	300	2,708
8	1,098						
10	1,099						

Таблица 5

Значения интегральной показательной функции – $\mathrm{Ei}(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0		4,038	3,355	2,959	2,681	2,468	2,295	2,151	2,027	1,919
1	1,823	1,737	1,660	1,589	1,524	1,464	1,409	1,358	1,310	1,265
2	1,223	1,183	1,145	1,110	1,076	1,044	1,014	0,9849	9573	9309
3	0,9057	8815	8583	8361	8147	7942	7745	7554	7371	7194
4	7024	6859	6700	6546	6397	6253	6114	5979	5848	5721
5	5598	5478	5362	5250	5140	5034	4930	4830	4732	4636
6	4544	4454	4366	4280	4197	4115	4036	3959	3883	3810
7	3738	3668	3599	3532	3467	3403	3341	3280	3221	3163
8	3106	3050	2996	2943	2891	2840	2790	2742	2694	2647
9	2602	2557	2513	2470	2429	2387	2347	2308	2269	2231
1,0	2194	2157	2122	2087	2052	2019	1986	1953	1922	1890
1	1860	1830	1801	1772	1743	1716	1688	1662	1635	1609
2	1584	1559	1535	1511	1487	1464	1441	1419	1397	1376
3	1355	1334	1313	1293	1274	1254	1235	1216	1198	1180
4	1162	1145	1128	1111	1094	1078	1062	1046	1030	1015
5	1000	*9854	*9709	*9567	*9526	*9288	*9152	*9019	*8887	*8758
6	0,08631	8506	8383	8261	8142	8025	7909	7796	7684	7574
7	7465	7359	7254	7151	7049	6949	6850	6753	6658	6564
8	6471	6380	6290	6202	6115	6029	5945	5862	5780	5700
9	5620	5542	5465	5390	5315	5241	5169	5098	5027	4958
2,0	4890	4823	4757	4692	4627	4564	4502	4440	4380	4320
1	4261	4204	4147	4090	4035	3980	3927	3874	3821	3770
2	3719	3669	3620	3571	3523	3476	3430	3384	3339	3294
3	3250	3207	3164	3122	3081	3040	3000	2960	2921	2882
4	2844	2806	2769	2733	2697	2662	2627	2592	2558	2525
5	2491	2459	2427	2395	2364	2333	2303	2273	2243	2214
6	2185	2157	2129	2101	2074	2047	2021	1994	1969	1943
7	1918	1893	1869	1845	1821	1798	1775	1752	1730	1707
8	1686	1664	1643	1622	1601	1581	1560	1540	1521	1502

9	1482	1464	1445	1427	1409	1391	1373	1356	1338	1322
3,0	1305	1288	1272	1256	1240	1225	1209	1194	1179	1164
1	1149	1135	1121	1107	1093	1079	1066	1052	1039	1026
2	1013	1001	*9882	*9758	*9637	*9517	*9398	*9281	*9166	*9052
3	0,008939	8828	8718	8610	8503	8398	8294	8191	8090	7990
4	7891	7793	7697	7602	7508	7416	7324	7234	7145	7057
3,5	6970	6884	6800	6716	6634	6552	6472	6393	6314	6237
6	6160	6085	6011	5937	5864	5793	5722	5652	5583	5515
7	5448	5381	5316	5251	5187	5124	5062	5000	4939	4879
8	4820	4762	4704	4647	4591	4535	4480	4426	4372	4319
9	4267	4216	4165	4114	4065	4016	3967	3919	3872	3825
4,0	3779	3734	3689	3645	3601	3557	3515	3472	3431	3390
1	3349	3309	3269	3230	3191	3153	3115	3078	3041	3005
2	2969	2933	2898	2864	2829	2796	2762	2729	2697	2665
3	2633	2602	2571	2540	2510	2480	2450	2421	2393	2364
4	2336	2308	2281	2254	2227	2201	2175	2149	2123	2098
5	2073	2049	2025	2001	1977	1954	1931	1908	1885	1863
6	1841	1819	1798	1777	1756	1735	1715	1694	1674	1655
7	1635	1616	1597	1578	1560	1541	1523	1505	1488	1470
8	1453	1436	1419	1402	1386	1370	1354	1338	1322	1307
9	1291	1276	1261	1247	1232	1218	1204	1189	1176	1162
5,0	1148	1135	1122	1109	1096	1083	1070	1058	1045	1033

Приложение 2

Некоторые сведения о скалярных и векторных полях. Дифференциальные операции над ними

В случае, если каждой точке $M(x, y, z)$ некоторой области пространства отнесен скаляр $\varphi(M)$, то образуется скалярное поле (например, поле давлений, поле температуры).

Градиентом скалярной функции φ в точке M называется вектор

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

В случае, если каждой точке M некоторой области пространства поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(M)$, то образуется векторное поле (например, поле скоростей $\vec{v}$).

Пусть функция $\vec{a}(M)$ задана и непрерывна на двустороннем куске поверхности S и $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали в точке $M(x, y, z)$ этой поверхности. Тогда поверхностный интеграл

$$\int_S \vec{a}(M)\cdot\vec{n}\,dS$$

называется потоком векторного поля через поверхность S (вспомните, например, определение расхода, вектора потока теплоты).

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M)$ (обозначается $\operatorname{div}\vec{a}$) в точке (x, y, z) называется скаляр:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Физический смысл дивергенции: $\operatorname{div}\vec{a}$ в точке $M(x, y, z)$ равна отнесенному к единице объема ΔV потоку векторного поля через бесконечно малую замкнутую поверхность ΔS, окружающую данную точку, так что

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta V\to 0}} \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta S}\vec{a}(M)\cdot\vec{n}\,dS.$$

Для компактности записи иногда используют символический вектор («набла») – оператор Гамильтона[1]

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

и выполняют с ним действия по правилам, установленным для реальных векторов. Тогда можно записать:

[1] Не путайте с оператором Лапласа («дельта») (п. 3).

$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi, \quad \nabla\cdot\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}$.

Здесь в первом равенстве стоит произведение ∇ на реальный скаляр φ, во втором – скалярное произведение ∇ на реальный вектор $\vec{a}$.

В случае, если $\vec{a} = \vec{v}$, то точно так же имеем[2]:

$$(\vec{v}\,\nabla)\vec{v} = v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}.$$

Некоторые свойства введенных операций

1. Производная по какому-либо направлению $\vec{l}$ ($\vec{l}$ обозначает единичный вектор) равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{l} = (\operatorname{grad}\varphi);$$

2) $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi;$ (п. 1)

3) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \Delta\varphi,$ (п. 2)

где Δ – оператор Лапласа.

Представление оператора Лапласа:

в декартовых координатах

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2};$$ (п. 3)

в цилиндрических координатах

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r};$$

в полярных координатах в случае осевой симметрии ($\partial/\partial\theta = 0$)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$ (п. 4)

Преобразования интегралов.

Формула Грина служит для преобразования интеграла по двумерной области D в интеграл по замкнутой кривой Γ, ограничивающей эту область:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_\Gamma P dx + Q dy.$$ (п. 5)

В частности, ири $P = -s$ $Q = f(s)$, $x = \zeta$ и $y = \tau$ из (п. 5) получим

---

[1] Будьте осторожны! Скалярное произведение ∇ и реального вектора не обладает всеми свойствами скалярного произведения векторов; так, например, $\vec{u}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\vec{u}$.

$$\iint_D \left[\frac{\partial f(s)}{\partial \zeta} + \frac{\partial s}{\partial \tau} \right] d\zeta\, d\tau = \oint_\Gamma - s d\zeta + f(s)\, d\tau. \qquad \text{(п. 6)}$$

Формула Гаусса–Остроградского позволяет преобразовать интеграл по замкнутой поверхности S в интеграл по объему V, ограниченному этой поверхностью. Если величина $\vec{a}$ – вектор с компонентами $\{a_1, a_2, a_3\}$, то эта формула примет вид

$$\int_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a}\, dV \equiv \int_V \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV. \qquad \text{(п. 7)}$$

Для скалярной величины b (или компоненты тензора) получим:

$$\int_S b n_i\, dS \equiv \int_S b \cos(\vec{n}, x_i)\, dS = \int_V \frac{\partial b}{\partial x_i} dV, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad \text{(П.8)}$$

Zdesx ws*du $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности S в каждой ее точке.

Приложение 3

Дифференциальные уравнения и их характеристики. Определения

Обыкновенное дифференциальное уравнение: соотношение, содержащее одну независимую (x), одну зависимую переменную (искомую функцию u) и одну или более производных по x.

Дифференциальное уравнение в частных производных: уравнение, содержащее одну зависимую, две или более независимых переменных и частные производные по независимым переменным.

Порядок дифференциального уравнения: порядок наивысшей производной, содержащейся в уравнении.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если зависимая переменная и ее производные имеют только первую степень и отсутствуют их взаимные произведения. Остальные уравнения называются нелинейными. Если производная высшего порядка входит в первой степени в нелинейное дифференциальное уравнение, то оно называется квазилинейным.

Квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

Общий вид:

$$a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}=c(x,t,u). \qquad \text{(п. 9)}$$

Пусть функция u задана на начальной кривой Γ_0, проходящей через точку (x_0,t_0) и требуется ее определить в некоторой окрестности Γ_0, т. е. решить задачу Коши для уравнения (п. 9). В общем случае можно вычислить первые и высшие производные из уравнения (п.9) в точке (x_0,t_0). Тогда функцию u можно найти на близкой соседней кривой Γ_1 посредством разложения в ряд Тейлора в окрестности точки на начальной кривой.

При нормальных условиях этот ряд сходится и определяет единственное решение уравнения в соответствии с начальными данными. Это справедливо для всех начальных кривых Γ_0, исключая некоторые особые кривые, на которых первую и высшую производные нельзя рассчитать по данному дифференциальному уравнению.

Поставим более узкую задачу: зная вдоль кривой Γ_0 функцию u, найти в точках этой кривой производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$. Значение дифференциала du, отвечающего смещению dx, dt вдоль Γ_0, можно записать в следующем виде:

$$dt\frac{\partial u}{\partial t}+dx\frac{\partial u}{\partial x}=du.$$

Объединив это равенство с уравнением (п. 9), получим два линейных уравнения с двумя неизвестными $\partial u/\partial t$ и $\partial u/\partial x$:

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial u}{\partial t} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} = c; \\ dt\dfrac{\partial u}{\partial t} + dx\dfrac{\partial u}{\partial x} = du. \end{cases} \qquad \text{(п.10)}$$

Производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$ определяются из (п. 10) однозначно, за исключением случая, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ dt & dx \end{vmatrix} = adx - bdt = 0, \qquad \frac{dx}{b} = \frac{dt}{a}, \qquad \text{(п. 11)}$$

что является уравнением особой линии.

Линии (задаваемые дифференциалами смещения dx, dt), вдоль которых выполняется условие (п. 11), т. е. не могут быть определены единственным образом производные $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x$, называются характеристиками уравнения (п. 9). Требование конечности значений производных приводит к условию регулярности

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} c & b \\ du & dx \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & c \\ dt & du \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим равенства

$$\frac{dx}{b} = \frac{du}{c}, \quad \frac{dt}{a} = \frac{du}{c}, \qquad \text{(п. 12)}$$

известные как соотношения на характеристике.

Объединив (п. 11) и (п. 12), получим уравнение характеристической линии или характеристики:

$$\frac{\partial t}{a} = \frac{dx}{b} = \frac{du}{c}. \qquad \text{(п. 13)}$$

Метод характеристик для определения решения уравнения (п. 9).

Характеристики уравнения (п. 9) можно использовать при построении его решения. Решение уравнения (п. 9) образует в пространстве (x, t, u) поверхность, уравнение которой можно записать в следующем виде:

$$f(x, t) - u = 0.$$

Нормаль к этой поверхности в каждой ее точке имеет следующие компоненты:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{dx}, \quad -1\right\} \text{ или } \left\{\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -1\right\}.$$

Тогда уравнение (п. 9) выражает тот факт, что нормаль к поверхности $u = f(x, t)$ ортогональная к направлению a, b, c. Если двигаться

в этом направлении от точки к точке, то получим линию на поверхности, уравнение которой есть (п. 12), и которая является характеристикой. Таким образом, приходим к следующему важному выводу.

В пространстве (x, t, u) любая поверхность, состоящая из характеристик, является решением уравнения (п. 9). Уравнения (п. 13) определяют семейство кривых в пространстве (x, t, u), которые лежат на поверхности, являющейся решением уравнения (п. 9).

Этот вывод приводит к следующей методике построения решения уравнения (п. 9).

1. Решить уравнения характеристик (п. 13), представив их в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{c(x,t,u)}{a(x,t,u)}; \\ \dfrac{du}{dx} = \dfrac{c(x,t,u)}{b(x,t,u)}. \end{cases}$$

2. Решение этой системы представить в виде двух независимых функций:

$$\begin{cases} f(x,t,u) = \alpha; \\ g(x,t,u) = \beta. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений представляет семейство поверхностей в пространстве (x, t, u). Характеристики – линии их пересечения, которые однозначно определяются фиксированными значениями α и β.

3. Для того, чтобы получить поверхность, состоящую из характеристик, рассмотрим α и β как переменных и тогда уравнение поверхности можно записать в следующем виде:

$$F(\alpha, \beta) = F(f, g) = 0,$$

где F – произвольная функция, вид которой определяется при помощи начальных данных. Тогда искомое решение уравнения (п. 9) примет следующий вид:

$$F(f, g) = 0.$$

Для примера рассмотрим линейное уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u. \qquad \text{(п. 14)}$$

Уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

имеет решение

$$x/u = A, \quad y/u = B.$$

Следовательно, решение уравнения (п. 14) можно представить в следующем виде:

$$F\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}\right) = 0.$$

Это решение представляет семейство конусов с вершиной в начале координат: характеристики – прямые линии, выходящие из начала координат.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . . .

Глава 1. Основные понятия и законы фильтрации нефти, газа и воды . . . 9

Глава 2. Дифференциальные уравнения изотермической фильтрации флюидов в нефтегазоносных пластах 36

Глава 3. Одномерные установившиеся потоки жидкости и газа в пористой среде 58

Глава 4. Плоские установившиеся фильтрационные потоки 103

Глава 5. Неустановившееся движение упругой жидкости в упругой (деформируемой) пористой среде 131

Глава 6. Неустановившееся движение газа в пористой среде 181

Глава 7. Движение границы раздела при вытеснении жидкостей и газов 202

Глава 8. Теория двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей 227

Глава 9. Основы теории фильтрации многофазных систем 252

Глава 10. Гидродинамические модели методов повышения нефте- и газоконденсатоотдачи пластов 300

Глава 11. Особенности фильтрации неньютоновской жидкости 335

Глава 12. Движение жидкостей и газов в трещиноватых и трещиновато-пористых средах 350

Глава 13. Моделирование основных процессов фильтрации пластовых флюидов 371

Список литературы 398

Приложения 402

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Басниев Каплан Сафербиевич
Кочина Ираида Николаевна
Максимов Вячеслав Михайлович

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Заведующий редакцией *Т. К. Рубинская*
Редактор издательства *Т. К. Лазарева*
Технический редактор *С. Г. Веселкина*
Корректор *М. В. Дроздова*

ИБ № 8887

Сдано в набор 11.02.93. Подписано в печать 08.06.93. Формат 60×88/16. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 25,48. Усл. кр.-отт. 25,48. Уч.-изд. л. 27,77. Тираж 1500 экз. Заказ № 1642/2910-2.

Издательство «Недра».
125047 Москва, Тверская застава, 3.

Набрано в Можайском полиграфкомбинате
Министерства печати и информации Российской Федерации.
143200 Москва, ул. Мира, 93.

Отпечатано в Московской типографии № 11
Министерства печати и информации Российской Федерации
113105 Москва, Нагатинская ул., 1.