Библиотека СОК



Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Учебное пособие

Р.А. Янсон

Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя в свободном атмосферном потоке

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Р.А. Янсон

Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя в свободном атмосферном потоке

Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия по курсу «Ветроэнергетика»

Под редакцией *М.И. Осипова*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2005

УДК 55.37.33(075.8)
ББК 31.62
Я 65

Рецензенты: *Д.Н. Попов, О.Н. Емин*

Янсон Р.А.

Я 65 Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя в свободном атмосферном потоке: Учебное пособие по курсу «Ветроэнергетика» / Под ред. М.И. Осипова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 32 с.: ил.

Рассмотрены различные математические модели течения свободного атмосферного потока через идеальный горизонтально-осевой ветродвигатель как без учета, так и с учетом закрутки струи за ветродвигателем. Перечислены классические литературные источники по теме.

Для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающихся по специальности «Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии» (направление – «Электроэнергетика»).

УДК 55.37.33(075.8)
ББК 31.62

Ричард Александрович Янсон

ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНО-ОСЕВОГО ВЕТРОДВИГАТЕЛЯ В СВОБОДНОМ АТМОСФЕРНОМ ПОТОКЕ

Учебное пособие

Редактор *А.В. Сахарова*
Корректор *М.А. Василевская*

Подписано в печать 25.01.2005. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печ. л. 2,0. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,75. Тираж 100 экз. Изд. № 84. Заказ 162.

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5.

© Янсон Р.А., 2005
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005

Введение

В последней четверти прошлого века ветроэнергетика стала во многих развитых странах мира частью энергетической отрасли, одной из ведущих составляющих нетрадиционной энергетики на основе возобновляемых источников энергии. Суммарная мощность ветроустановок в различных странах мира достигла в начале 2003 г. 32000 МВт. По прогнозам Американской и Европейской ветроэнергетических ассоциаций производство электроэнергии на основе ветроэнергетики достигнет в 2020 г. 10 % от мирового производства электроэнергии. К сожалению, в России в 2001 г. было [illegible] всего несколько более 7 МВт электроэнергии на основе ветроэнергетики, что объясняется явным невниманием соответствующих структур к развитию этой экологически чистой отрасли энергетики и отсутствием на сегодня финансовых возможностей для приобретения ветроустановок как у организаций, так и у населения. Несмотря на такое положение дел, как и ранее в Советском Союзе, так и сейчас в России в научно-исследовательских организациях и вузах, на ряде заводов постоянно велись и ведутся работы в области ветроэнергетики, разрабатывается теория, создаются отдельные промышленные образцы. На сегодня в России имеется несколько десятков организаций, занимающихся развитием ветроэнергетики и могущих производить установки всех мощностей: от малой до мегаваттной. При этом ощущается большой недостаток литературы по ветроэнергетике – восполнить его и призвано данное пособие.

1. История теории идеального ветродвигателя и ее место в современных методах аэродинамического расчета ветродвигателя

Современный аэродинамический расчет горизонтально-осевого ветродвигателя базируется на последних теоретических и экспериментальных достижениях механики жидкости и газа, теории обтекания винтов вертолета и самолета, теории турбомашин, различных численных методах расчета течения жидкости.

Исторически сложилось так, что, исходя из потребностей промышленного развития, теорию обтекания начали разрабатывать в XIX в. применительно к расчету обтекания гребного винта (работы В. Ранкина[1], Р.Фруда[2]).

Возникновение и развитие этой теории для ветродвигателя связано с ее применением (в рамках импульсной теории реального ветроколеса) к расчету винта вертолета и пропеллера самолета. В применении к воздушным винтам такая импульсная теория была впервые разработана Г.Х. Сабининым и Б.Н. Юрьевым[3] в 1910 г., а затем в работе Г.Х. Сабинина[4] она была приложена к расчету ветродвигателя. Впервые основы теории идеального ветродвигателя были разработаны В.П. Ветчинкиным в 1914 г. и изложены Н.Е. Жуковским в его статье[5] в 1920 г. За рубежом аналогичную теорию разрабатывали А. Бетц[6] (1919 г.) и Г. Глауэрт[7] (1921 г.), а также М. Мунк[8] и В. Хофф[9]. Часто теорию идеального ветроколеса называют классической, подчеркивая фундаментальное значение полученных на ее основе результатов для расчета пропеллерных машин.

1 *Rankine W.J.M.* //Transactions / Institute of Naval Architects. 1865. V. 6.
2 *Froud R.E.* On the part played in propulsion by differences of fluid pressure // Transactions /Institute of Naval Architects. 1889. V. 30.
3 *Юрьев Б.Н.* Импульсная теория воздушных винтов /Тр. Воен.-воздуш. акад. им. Н.Е. Жуковского. М., 1948. Вып. 30.
4 *Сабинин Г.* Ветряной двигатель с самоустанавливающимися лопастями /Тр. ЦАГИ. 1923. Вып. 2.
5 *Жуковский Н.Е.* Ветряная мельница типа НЕЖ: Ст. третья (1920 г.) //Полн. собр. соч. Т. VI. М.: ОНТИ, 1937.
6 *Бетц А.* Энергия ветра и ее использование посредством ветряных двигателей: Пер. с нем. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1933.
7 *Глауэрт Г.* Теория воздушного винта //Аэродинамика. Разд. L /Под ред. В.Ф. Дюренда. Т. IV. М.: Гос. изд-во оборон. пром-сти, 1940.
8 *Munk M.M.* General theory of windmills //Technical notes NACA. 1923. № 164.
9 *Hoff W.* Theory of the ideal windmill //Technical notes NACA. 1921. № 46.

В период интенсивного развития ветроэнергетики в Советском Союзе (в 1920 – 1930-е годы) Г.Х. Сабинин разработал используемый и сегодня метод расчета горизонтально-осевого ветродвигателя на базе модифицированной им импульсной теории. Заметим, что эта теория ветродвигателя была изложена Г.Х. Сабининым в его работе[1] в том виде, как он читал ее студентам в 1929 г. на аэромеханическом отделении Московского высшего технического училища. Теорию идеального ветроколеса также развивали в СССР Г.Ф. Проскура (1929 г.), Е.М. Фатеев[2], К.П. Вашкевич[3]. Из зарубежных исследований обобщающий вклад в расчет ветродвигателей на основе использования импульсной теории внесла работа Р. Вильсона, Р. Лиссамана и С. Уолкера[4].

Отметим, что параллельно с использованием для расчета горизонтально-осевого ветродвигателя импульсной теории развивался и развивается расчет на основе вихревой модели обтекания ветроколеса.

Особенностью расчета является необходимость совместного учета, с одной стороны, силового взаимодействия лопастной системы ветроколеса с потоком идущего через него воздуха, а с другой – аэродинамического взаимодействия ветроколеса с атмосферным потоком воздуха вокруг него. Первое изучается на основе теории обтекания одиночного профиля и теории решеток профилей. Второе – аэродинамическое взаимодействие потока с ветроколесом – изучается с применением различных моделей течения: на основе импульсной и вихревой теории, на основе моделей течения с использованием метода распределенных особенностей и с использованием прямого решения уравнений движения в форме Эйлера.

Первоначально теоретическое изучение взаимодействия атмосферного потока с ветроколесом было основано на теории обтекания идеального ветродвигателя. Эта теория рассматривает основные уравнения, описывающие течение жидкости (уравнения сохранения массы, количества движения, энергии и уравнение состояния), примененные к изолированной струйке тока, внутри которой находится идеальный ветродвигатель.

1 *Сабинин Г.Х.* Теория и аэродинамический расчет ветряных двигателей / Тр. ЦАГИ. 1931. Вып. 104.
2 *Фатеев Е.М.* Ветродвигатели и ветроустановки. М.: Сельхозгиз, 1957.
3 *Вашкевич К.П.* Импульсная теория ветряных двигателей проф. Г.Х. Сабинина //Пром. аэродинамика: Сб. тр. ЦАГИ. М., 1959.
4 *Wilson R.E., Lissaman R.B.S., Walker S.N.* Aerodinamic performance of wind turbines. Oregon State University, 1976.

Теория идеального ветродвигателя отражает фундаментальные особенности аэродинамического взаимодействия атмосферного потока и ветроколеса. Она является частью импульсной теории реального ветродвигателя, и ее результаты лежат в основе всех современных расчетов ветродвигателей. (Импульсная теория реального ветродвигателя представляет собой сочетание модели течения для идеального ветродвигателя и модели обтекания одиночного профиля.) Однако на основе теории идеального ветродвигателя можно установить только суммарно действующие на лопастную систему силы и моменты и получить только соотношения между скоростями в характерных поперечных сечениях идущей через ветродвигатель струи воздуха.

2. Ветродвигатель и характеризующие его параметры

2.1. Ветродвигатель

Ветродвигатель является частью ветроэнергетической установки (ВЭУ) – комплекса взаимосвязанных оборудования и сооружений, предназначенных для преобразования энергии ветра в другие виды энергии (механическую, тепловую, электрическую и др.)[1]. Основная часть ВЭУ – это ветроагрегат (собственно ветроустановка), состоящий из ветродвигателя, системы передачи мощности и приводимой им в движение машины (электромашинного генератора, насоса, компрессора и т. п.).

Сам ветродвигатель является устройством для преобразования ветровой энергии в механическую энергию вращения ветроколеса. Он может иметь горизонтальную или вертикальную ось вращения. В данной работе рассматривается ветродвигатель горизонтально-осевого типа.

Ветроколесом называется лопастная система ветродвигателя, воспринимающая аэродинамические нагрузки от ветрового потока и преобразующая энергию ветра в механическую энергию вращения ветроколеса.

При анализе течения воздуха через горизонтально-осевой ветродвигатель, находящийся в свободном атмосферном потоке, используют схему течения, изображенную на рис. 1. Рассматривают три характерных сечения в потоке: сечение *11* – в плоскости вращения ветродвигателя; сечение *00* – далеко перед ветродвигате-

[1] См.: ГОСТ Р 51237–98. Нетрадиционная энергетика. Ветроэнергетика. Термины и определения. М.: Изд-во стандартов, 1998.

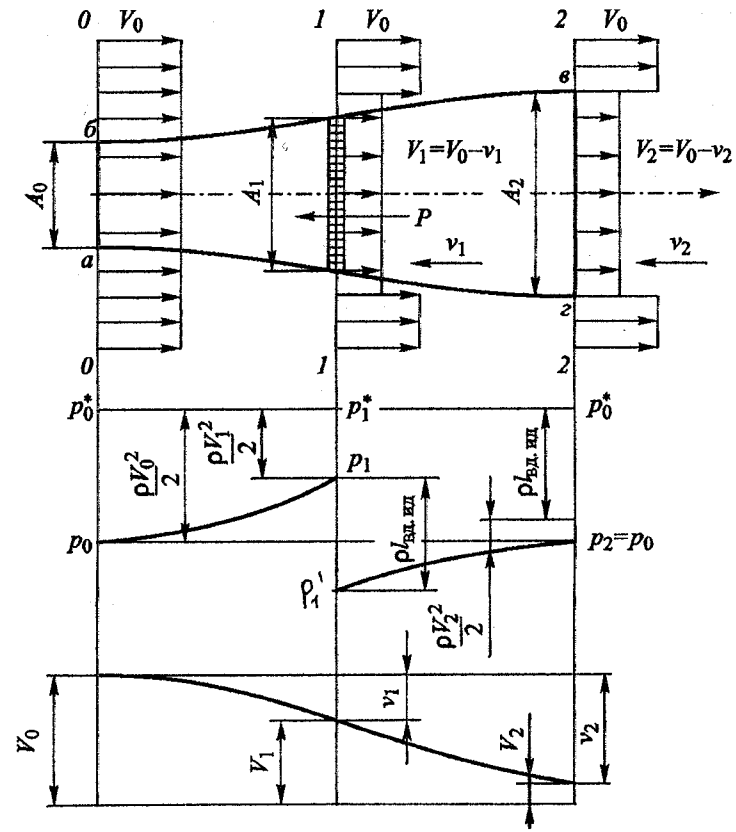


Рис. 1. Струйная схема течения в идеальном горизонтально-осевом ветродвигателе без учета закрутки струи за ветродвигателем

лем, где поток воздуха не возмущен; сечение *22* – за ветродвигателем, где статическое давление за ветродвигателем стало равным атмосферному. Через ветродвигатель проходит расширяющаяся цилиндрическая струя воздуха в виде трубки тока *абвга* переменного поперечного сечения. В каждом сечении площадь и скорость потока имеют соответственно значения A_0, A_1, A_2 и V_0, V_1, V_2.

Невозмущенный атмосферный поток, имеющий скорость V_0, при приближении к ветродвигателю замедляет свою скорость до значения V_1, поскольку вращающееся ветроколесо представляет собой для потока определенное сопротивление. Его можно трактовать как наложение на поток перед ветроколесом осевой индуктивной скорости v_1, направленной против скорости невозмущенного потока (диаграмма скоростей и сил, действующих на одиночный профиль лопасти для сечения *11*, показана на рис. 2).

Под воздействием потока воздуха, набегающего на ветродвигатель, лопасти ветродвигателя вращаются вокруг его оси с окружной скоростью U, ветродвигатель развивает крутящий момент, а струя за ним получает в сечении *11* окружной вращательный импульс в направлении, противоположном направлению вращения

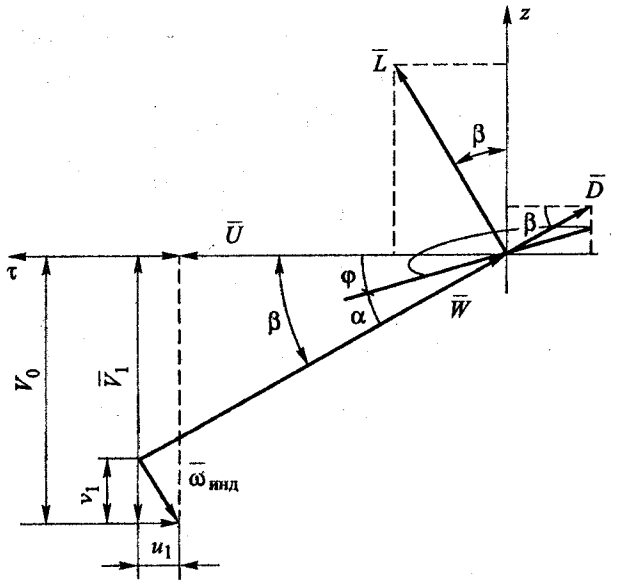


Рис. 2. Диаграмма скоростей и действующих на лопасть сил

колеса. Это приводит к возникновению в сечении *11* окружной индуктивной скорости u_1. Результирующий вектор индуктивной скорости обозначен как $\bar{\omega}_{инд}$.

Подъемная сила L при обтекании одиночного профиля направлена перпендикулярно относительной скорости потока W, обтекающего профиль. Сила профильного сопротивления вращению лопасти D направлена по скорости W.

Осевая сила, действующая на рассматриваемый профиль (лобовое давление),

$$P = L\cos\beta + D\sin\beta.$$

Окружная сила, действующая на профиль,

$$Q = L\sin\beta - D\cos\beta,$$

где угол β определяет угол натекания относительной скорости W на плоскость вращения ветроколеса. Угол β связан с углом установки профиля φ и углом атаки α соотношением

$$\beta = \varphi + \alpha.$$

2.2. Параметры, характеризующие работу ветродвигателя

В сечении *00* перед ветродвигателем кинетическая энергия E, Дж, массы m воздушного потока выражается как

$$E = \frac{mV_0^2}{2}.$$

Величину $m = \rho V_0 A_1$ рассматривают как массу воздуха в сечении *00*, которая могла бы пройти через поперечное сечение ветродвигателя за единицу времени. Тогда для сечения *00* мощность, Вт, ветрового потока, натекающего на ветродвигатель,

$$N_{ветро} = \frac{\rho V_0^3}{2} A_1. \qquad (2.1)$$

Ветродвигатель извлекает из ветрового потока только часть этой мощности и передает ее затем потребителю, например электрогенератору. Обозначим мощность, развиваемую ветродвигателем, как $N_{вд}$. Отношение мощности ветродвигателя $N_{вд}$ к мощности ветрового потока $N_{ветро}$ называется коэффициентом использования энергии ветра

$$C_p = \frac{N_{вд}}{N_{ветро}}. \qquad (2.2)$$

Таким образом, мощность ветродвигателя, Вт,

$$N_{\text{вд}} = C_p \frac{\rho V_0^3}{2} A_1.$$

Отношение окружной скорости лопасти на периферии U_R к скорости невозмущенного потока V_0

$$X = \frac{U_R}{V_0} = \frac{\Omega R}{V_0} \qquad (2.3)$$

называют коэффициентом быстроходности ветродвигателя. Здесь Ω – угловая скорость вращения ветродвигателя; R – наружный радиус лопасти. Для текущего радиуса r пользуются понятием местного коэффициента быстроходности

$$x = \frac{U}{V_0} = \frac{\Omega r}{V_0}. \qquad (2.4)$$

Отношение индуктивной осевой скорости v_1 к скорости невозмущенного потока V_0 называется коэффициентом торможения потока (или относительной индуктивной осевой скоростью)

$$a = \frac{v_1}{V_0}. \qquad (2.5)$$

В зарубежных публикациях этот коэффициент именуется осевым скоростным индуктивным фактором (axial speed induction factor).

Введем в рассмотрение коэффициент относительной индуктивной окружной скорости (коэффициент закрутки струи) a' как отношение угловой скорости вращения струи ω_1 в сечении *11* к угловой скорости вращения ветродвигателя Ω, которая считается постоянной величиной:

$$a' = \frac{\omega_1}{\Omega}. \qquad (2.6)$$

При использовании угловой скорости ω_2 вращения струи в сечении *22* за ветродвигателем (см. разд. 4.3) этот коэффициент оказывается равным

$$a' = \frac{\omega_2}{2\Omega}.$$

В зарубежной литературе коэффициент a' называется угловым скоростным индуктивным фактором (angular speed induction factor).

Отношение осевой силы (лобового давления) P, действующей на лопастную систему ветродвигателя, к скоростному давлению (напору) на ометаемую лопастями поверхность называется коэффициентом лобового давления

$$B = \frac{P}{\frac{\rho V_0^2}{2} A_1}. \qquad (2.7)$$

3. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя без учета закрутки уходящей от него струи

3.1. Особенности математической модели теории идеального ветродвигателя

Рассматривается стационарное течение несжимаемой, невязкой жидкости внутри контрольного объема *абвга* (см. рис. 1), имеющего форму струйки тока в виде расширяющегося цилиндра, внутри которого перпендикулярно течению располагается проницаемый для потока так называемый активный диск, моделирующий собой присутствие ветроколеса. Активный диск условно наделяется двумя свойствами реального ветродвигателя: во-первых, он проницаем для протекающей внутри этой струйки тока жидкости, а, во-вторых, представляет собой для потока некоторое сопротивление (лобовое давление), которое моделируется сосредоточенной осевой силой сопротивления P, в единицу времени совершающей работу над движущимся потоком, равную мощности, выводимой из потока. Эта мощность при предположении отсутствия вращения струи принимается равной мощности $N_{\text{вд.ид}}$, развиваемой таким идеальным ветродвигателем. В результате процесс отвода мощности из атмосферного потока с помощью реального ветродвигателя заменяется неким схематизированным процессом течения воздуха через активный диск с помощью идеального ветродвигателя. Полагают, что такой идеальный ветродвигатель имеет бесконечно большую угловую скорость вращения и бесконечно большое число лопастей, профильное сопротивление которых равно нулю.

Суммируем условия и особенности рассматриваемой математической модели идеального ветродвигателя, не имеющего за собой вращения струи.

1. Жидкость несжимаемая.
2. Жидкость невязкая.
3. Течение стационарное.
4. Течение осесимметричное, с постоянными параметрами потока в каждом сечении, перпендикулярном оси ветродвигателя, т. е. одномерное.
5. Трубка тока, содержащая активный диск, энергетически изолирована от внешнего атмосферного потока.
6. Статическое давление по всей наружной поверхности рассматриваемой трубки тока равно окружающему атмосферному давлению; это означает, что во входном и выходном поперечных сечениях струи достаточно удаленных от плоскости активного диска статическое давление равно окружающему атмосферному давлению.
7. Радиальные силы в струе отсутствуют.
8. Отсутствуют потери внутри трубки тока за ветродвигателем, т. е. пренебрегают реальными процессами превращения кинетической энергии атмосферного потока в энергию турбулентного и возможно частичного возвратного движения потока за ветродвигателем.
9. Ветродвигатель не имеет профильных потерь.
10. Вращением струи, генерируемое после прохождения ветроколеса, пренебрегают.

Несмотря на значительное число наложенных ограничений, упрощающих реальную картину течения, рассматриваемая математическая модель позволяет выявить основные фундаментальные зависимости между скоростями в атмосферном потоке, проходящем через ветродвигатель. Это объясняется тем, что модель базируется на системе основных уравнений течения (неразрывности, изменения количества движения энергии, состояния) для контрольного объема струи, из которой определенным образом отводится полезная мощность.

В отечественной литературе эта математическая модель получила название теории идеального ветродвигателя Н.Е. Жуковского. В зарубежной литературе она именуется теорией А. Бетца осевого количества движения (axial momentum theory). Иногда используется термин «теория активного диска».

Далее в соответствии с принятой математической моделью течения взаимодействие потока атмосферного воздуха с ветродвигателем схематизируется следующим образом (см. рис. 1). Имеющийся невозмущенный поток, со скоростью V_0 приближаясь к ветроколесу (активному диску), замедляет свою скорость на величину v_1 до значения V_1, что вызывает повышение статического давления перед ветродвигателем p_0 до значения p_1 непосредственно перед плоскостью активного диска. В момент прохождения через ветроколесо скорость потока своего значения V_1 не меняет, а статическое давление уменьшается скачком на величину разности $(p_1 - p_1')$ таким образом, что за ветроколесом образуется некоторое разряжение. Далее по мере удаления от ветроколеса статическое давление возрастает до значения p_0 в окружающей атмосфере. Скорость потока при этом уменьшается на величину v_2, достигая в сечении *22* за ветроколесом значения V_2.

Соотношение скоростей определяется следующими зависимостями:

$$V_1 = V_0 - v_1, \tag{3.1}$$

$$V_2 = V_0 - v_2. \tag{3.2}$$

3.2. Система основных уравнений

Система основных уравнений включает: уравнения неразрывности, изменения количества движения (осевого импульса), сохранения энергии, а также уравнение состояния и уравнение баланса работ для рассматриваемого объема струи.

Уравнение неразрывности представляется в форме уравнения расхода жидкости G, кг/с, для массового секундного расхода:

$$G = \rho A V,$$

который одинаков во всех сечениях струи: $G_0 = G_1 = G_2$.

Пользуясь уравнением состояния $\rho = \text{const}$, получим

$$A_0 V_0 = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

или

$$A_0 V_0 = A_1 (V_0 - v_1) = A_2 (V_0 - v_2). \tag{3.3}$$

Рассмотрим уравнение изменения количества движения. Известна теорема о том, что изменение количества движения материальной системы равно импульсу сил, действующих на систему. Из всех сил, действующих на выделенный контрольный объем струи, в проекции на ось z от нуля отлична только сила сопротивления P, действующая в плоскости активного диска. В результате в проекции на ось z для секундного количества движения получаем

$$GV_0 - GV_2 = P. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим уравнение энергии. Между сечениями *00* и *22* происходит изменение только кинетической энергии струи и при принятых выше допущениях это изменение кинетической энергии в рассматриваемом контрольном объеме струи равно работе в единицу времени (мощности N, Вт) сил, действующих на этот объем:

$$\frac{GV_0^2}{2} - \frac{GV_2^2}{2} = N. \qquad (3.5)$$

Отличную от нуля работу дает только сила P. Путь частицы воздуха в единицу времени в месте приложения этой силы в сечении *11* есть скорость V_1. Мощность N можно рассматривать как мощность $N_{пот}$, отбираемую из набегающего атмосферного потока. Для модели с отсутствием закрутки струи за ветродвигателем эта мощность целиком равна мощности идеального ветродвигателя $N_{вд.ид}$ и, таким образом,

$$N_{пот} = PV_1, \qquad (3.6)$$

а уравнение для баланса работ (для мощности) в контрольном объеме струи в данном случае будет представлять собой равенство

$$N_{пот} = N_{вд.ид}. \qquad (3.7)$$

3.3. Решение и анализ основных уравнений

Из уравнения (3.4) с учетом (3.2) получаем формулу для силы сопротивления

$$P = Gv_2. \qquad (3.8)$$

Это первый фундаментальный вывод теории идеального ветродвигателя: лобовое сопротивление ветроколеса определяется количеством воздуха G, прошедшим через ветродвигатель, и индуктивной скоростью v_2, характеризующей осевое торможение потока в сечении *22* за ветродвигателем.

Подставляя полученный результат (3.8) в уравнение энергии (3.5), с учетом (3.1) и (3.4) получим

$$v_1 = \frac{v_2}{2}. \qquad (3.9)$$

Таким образом, торможение потока (потеря скорости v_2) воздуха в плоскости поперечного сечения струи за ветродвигателем (в сечении *22*) в два раза больше, чем потеря скорости v_1 в сечении *11*,

где расположен ветродвигатель. Это другой фундаментальный результат теории идеального ветродвигателя.

С учетом (3.1) и (3.3) соотношение (3.9) можно переписать в виде

$$V_1 = \frac{V_0 + V_2}{2},$$

т. е. абсолютная скорость потока в сечении ветродвигателя есть среднее арифметическое скоростей до и после ветродвигателя.

Используя коэффициент торможения (2.5) для скоростей V_1, V_2, V_0 можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0(1 - a), \\ V_2 &= V_0(1 - 2a) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

и

$$\begin{aligned} V_0 - V_1 &= aV_0, \\ V_0 - V_2 &= 2aV_0. \end{aligned} \qquad (3.11)$$

3.4. Коэффициент использования энергии ветра для идеального ветродвигателя и его максимальное значение

Коэффициент использования энергии ветра в случае идеального ветродвигателя $C_{p,ид}$, согласно формуле (2.2), с использованием соотношений (3.8), (3.1) и (3.2) принимает вид

$$C_{p,ид} = \frac{2Gv_2(V_0 - v_1)}{\rho V_0^3 A_1}.$$

Поскольку $G = \rho V_1 A_1$ и $v_2 = 2v_1$, то с использованием коэффициента торможения $a = \frac{v_1}{V}$ получаем

$$C_{p,ид} = 4a(1 - a)^2. \qquad (3.12)$$

Зависимость $C_{p,ид} = f(a)$ показана на рис. 3, взятом из работы Г.Х. Сабинина[1]. Значение величины $C_{p,ид}$ обращается в ноль при $a = 0$ (ветродвигатель не вращается, поток не тормозится) и при $a = 1$ (вместо ветродвигателя – непроницаемый диск).

Максимальное значение коэффициента использования энергии ветра для идеального ветродвигателя определяется условием

[1] *Сабинин Г.Х.* Теория и аэродинамический расчет ветряных двигателей / Тр. ЦАГИ. 1931. Вып. 104.

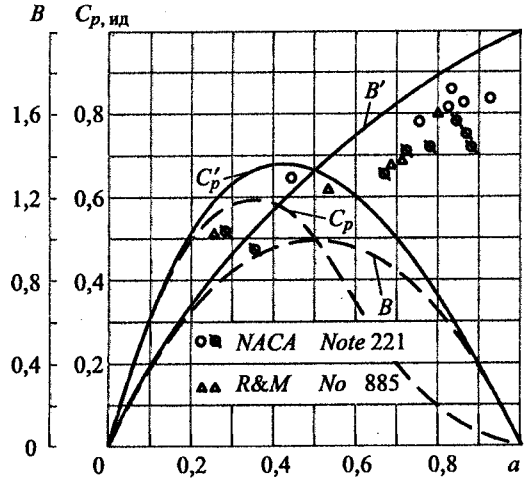


Рис. 3. Изменение коэффициента использования энергии ветра C_p и коэффициента лобового давления B в зависимости от коэффициента торможения потока a

$$\frac{dC_{p,\text{ид}}}{da} = 0.$$

Получаем уравнение

$$a^2 - \frac{4a}{3} + \frac{1}{3} = 0,$$

корни которого $a_1 = 1$ и $a_2 = 1/3$. Практический интерес представляет оптимальное значение коэффициента торможения $a_{\text{опт}} = 1/3$. В этом случае максимальная величина коэффициента использования энергии ветра для идеального ветродвигателя достигает значения

$$C_{p,\text{ид}}^{\max} = \frac{16}{27} = 0{,}5926.$$

Это число называется критерием Жуковского – Бетца и является еще одним фундаментальным результатом теории идеального ветродвигателя.

3.5. Коэффициент лобового давления

Коэффициент лобового давления B для идеального ветродвигателя в рассматриваемой модели течения согласно формуле (2.7),

при использовании соотношений (3.8), (3.10), (3.9), (2.5) принимает вид

$$B = 4a(1 - a). \qquad (3.13)$$

Между коэффициентами C_p и B имеется связь:

$$C_p = B(1 - a).$$

Зависимость $B = f(a)$ показана на рис. 3. При $a = 1/3$ значение $B = 8/9 = 0{,}888$.

3.6. Выводы из теории Жуковского–Бетца для идеального ветродвигателя

Основной вывод состоит в том, что максимальный коэффициент использования энергии ветра $C_{p,\text{ид}}^{\max}$ у идеального ветродвигателя не может быть больше 16/27 (критерий Жуковского – Бетца) и при этом значение коэффициента торможения $a = 1/3$.

В этом случае потеря скорости в плоскости ветродвигателя, согласно (3.11), равна $v_1 = V_0/3$. За ветродвигателем такая потеря скорости вдвое больше: $v_2 = 2V_0/3$. Это означает, что скорость воздуха за ветродвигателем в оптимальных условиях в три раза меньше скорости окружающей среды:

$$V_2 = V_0/3.$$

В этом случае воспринятая ветродвигателем кинетическая энергия составляет

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} = \frac{V_0^2}{2} - \frac{1}{2}\left(V_0 - \frac{2}{3}V_0\right)^2 = \frac{8}{9}\frac{V_0^2}{2}.$$

Следовательно, ветродвигатель не может воспринимать всю кинетическую энергию набегающего потока, а может использовать максимально только 8/9 этой энергии, и уходящая струя в оптимальных условиях должна уносить с собой 1/9 кинетической энергии потока перед колесом.

Вместе с тем некоторые выводы теории Жуковского – Бетца противоречат практике. Действительно, в случае полного торможения воздушного потока ($a = 1$, непроницаемый диск) значение коэффициента лобового давления B оказывается, согласно (3.13), равным нулю, в то время как эксперименты (см. точки на рис. 3) показывают, что оно стремится к числу, несколько меньшему двух.

Другое несоответствие заключается в том, что отношение площадей в струе с учетом (3.10)

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0 - v_1}{V_0 - v_2} = \frac{1-a}{1-2a},$$

а при $a = 0{,}5$ оно стремится к бесконечности.

Указанные несоответствия объясняются неполным совпадением свойств математической модели течения с реальной картиной обтекания ветродвигателя атмосферным потоком. С ростом торможения потока (при $a > 0{,}5$) в обтекании ветродвигателя все большую роль начинает играть режим турбулентного обтекания малопроницаемого диска с образованием за ним вихревой структуры и возвратного течения. При малых значениях коэффициента торможения ($a < 0{,}5$) это явление малосущественно, в этом случае основную роль играет явление проницаемости потока через вращающуюся лопастную структуру ветроколеса и совпадение результатов теории Жуковского – Бетца с реальным течением хорошее. Здесь следует отметить, что наилучший режим работы ветродвигателя находится как раз в этой области, при значении коэффициента торможения, близком 1/3.

3.7. Анализ параметров струи

Рассмотрим уравнение энергии (3.5) с учетом (3.7). Если обозначить удельную мощность идеального ветродвигателя, $\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг}}$,

$$l_{\text{вд.ид}} = \frac{N_{\text{вд.ид}}}{G},$$

то из (3.5) получим, что

$$\rho l_{\text{вд.ид}} = \rho\frac{V_0^2}{2} - \rho\frac{V_1^2}{2},$$

или (см. рис. 1).

$$\rho l_{\text{вд.ид}} = p_0^* - p_2^*,$$

где p_0^* и p_2^* – давления заторможенного потока; что и следует из уравнения Бернулли для осевой струйки тока между сечениями *00* и *22*:

$$p_0 + \rho\frac{V_0^2}{2} = p_2 + \rho\frac{V_2^2}{2} + \rho l_{\text{вд.ид}}.$$

Относительная величина удельной мощности идеального ветродвигателя при $p_0 = p_2$

$$\bar{l}_{\text{вд.ид}} = \frac{l_{\text{вд.ид}}}{\rho\frac{V_0^2}{2}} = \frac{V_0^2 - V_2^2}{V_0^2}. \qquad (3.14)$$

Рассматривая уравнение Бернулли для осевой струйки тока между сечениями *00* и *11*

$$p_0 + \rho\frac{V_0^2}{2} = p_1 + \rho\frac{V_1^2}{2}, \qquad (3.15)$$

получаем относительное увеличение статического давления перед идеальным ветродвигателем

$$\Delta\bar{p}_{01} = \frac{p_1 - p_0}{\rho\frac{V_0^2}{2}} = 1 - \frac{V_1^2}{V_0^2}.$$

С учетом $V_1 = V_0 - a$ получаем

$$\Delta\bar{p}_{01} = a(2-a).$$

Рассматривая уравнение Бернулли для осевой струйки тока между сечениями *11* и *22*

$$p_1' + \rho\frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{V_2^2}{2},$$

получаем относительное увеличение статического давления за идеальным ветродвигателем (величина разряжения за ним)

$$\Delta\bar{p}_{21'} = \frac{p_2 - p_1'}{\rho\frac{V_0^2}{2}} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_0^2}. \qquad (3.16)$$

С учетом $V_1 = V_0 - v_1$ и $V_2 = V_0 - 2v_1$ получим

$$\Delta\bar{p}_{21'} = a(2-3a).$$

Рассмотрим перепад давления на активном диске $\Delta p = p_1 - p_1'$. С учетом (3.15) и (3.16) относительный перепад давлений на идеальном ветродвигателе определяется как

$$\Delta\bar{p}_{11'} = \frac{V_0^2 - V_2^2}{V_0^2} = 4a(1-a) \equiv B,$$

что, естественно, тождественно равно коэффициенту лобового давления (3.13) и относительной удельной мощности идеального ветродвигателя (3.14).

Если принять оптимальное значение коэффициента торможения $a = \frac{1}{3}$, то получим, что

– относительное повышение давления $\Delta\bar{p}_{01}$ перед идеальным ветродвигателем составляет $\frac{5}{9}$ скоростного напора $\rho\frac{V_0^2}{2}$;

– относительное разряжение за идеальным ветродвигателем $\Delta\bar{p}_{21'} = \frac{3}{9}$;

– относительный перепад давления на идеальном ветродвигателе (его относительная удельная мощность) $\rho\bar{l}_{\text{вд.ид}} = \frac{8}{9}$.

Для скорости ветра $V_0 = 10$ м/с и плотности воздуха $\rho = 1{,}225$ кг/м^3 рассматриваемые характерные величины вычисляются как

$$\frac{\rho V_0^2}{2} = 61{,}3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}},$$

$p_1 - p_0 = 34{,}1$ Па $\approx 3{,}4$ мм водяного столба,
$\rho l_{\text{вд.ид}} = 54{,}5$ Па $\approx 5{,}5$ мм водяного столба,
$p_0 - p_1' = 20{,}4$ Па $\approx 2{,}0$ мм водяного столба.

3.8. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя с учетом «присоединенной» массы

В 1927 г. Г.Х. Сабининым[1] была рассмотрена математическая модель течения с учетом того факта, что с ростом торможения потока перед ветродвигателем (при стремлении коэффициента a к единице) обтекание ветродвигателя все более приближается к обтеканию малопроницаемого диска (плоской непроницаемой пластины) с образованием вихрей позади него. В работе была использована идея Н.Е. Жуковского и Т. Кармана о том, что сопротивление тела в этом случае обусловлено приращением количества

[1] *Сабинин Г.Х.* Теория идеального ветряка / Тр. ЦАГИ. 1927. Вып. 32.

движения, которое тело сообщает потоку за счет возникновения за телом вихревой структуры. При этом в отличие от Н.Е. Жуковского им было принято, что изменение количества движения определяется по вихревым кольцам не в момент их образования на краях диска, а на некотором удалении за ним, там, где образовавшийся вихревой соленоид принял цилиндрическую форму. Изложим основные моменты этой теории и ее результаты.

Схема течения показана на рис. 4. В соответствии с принятой математической моделью с периферии активного диска (с концов лопастей) сходит бесконечное число вихревых шнуров. Образующаяся винтовая вихревая поверхность создает вихревой соленоид. Деформация свободного потока, производимая идеальным ветродвигателем, сводится к наложению индуктивной скорости v, вызванной вихревым соленоидом, на равномерный поток, имеющий скорость V_0. Изменение осевого количества движения, производимое идеальным ветродвигателем, будет равно количеству движения вновь образующейся в сечении *22* цилиндрической части соленоида, уходящей от ветродвигателя. Закрутка струи за ветродвигателем в данной математической модели не рассматривается. Вне соленоида индуктивная скорость $v = 0$. Принимается, что сам соленоид движется со скоростью $V_0 - \frac{v_2}{2}$, т. е. медленнее, чем наружный поток.

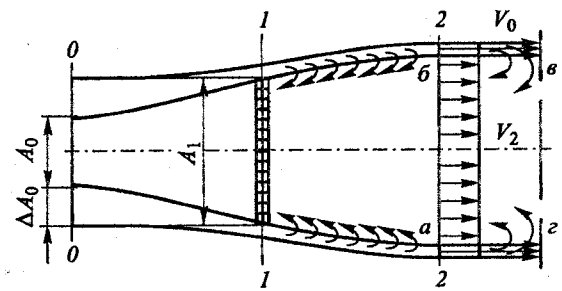


Рис. 4. Струйная схема течения через ветродвигатель с учетом присоединенной массы воздуха

Ветродвигатель, пропуская через себя расход воздуха G_0, который идет через площадь A_0, захватывает также по терминологии Г.Х. Сабинина «присоединенную» массу воздуха G_2, которая проходит через кольцо с площадью ΔA_0. На продвижение этой массы воздуха

$$G_2 = \rho A_2 \frac{v_2}{2}$$

необходимо затратить дополнительную энергию воздушного потока, которая не учтена в схеме Жуковского — Бетца.

Через идеальный ветродвигатель проходит масса воздуха

$$G_1 = \rho A_2 V_2.$$

Сумма масс ($G_1 + G_2$), равная величине $\rho A_1 V_0$, составляет массу, «увлеченную» ветродвигателем, т. е. массу воздуха, проходящую в сечении *00* через площадь, равную A_1, со скоростью V_0.

В результате осевая сила P оказывается равной величине

$$P = (G_1 + G_2)v_2.$$

Как видно, в данной математической модели (ср. (3.8)) величина осевой силы P зависит не только от массы воздуха G_1, прошедшей через ветродвигатель, но и от массы воздуха G_2, обтекающей ветродвигатель. Учет этого эффекта и добавление в уравнение сохранения энергии величины мощности $G_2 \frac{v_2^2}{2}$, затраченной на создание вихревого соленоида, приводит к формуле для индуктивных скоростей

$$v_2 = \frac{2v_1}{1 + \frac{v_1}{V_0}},$$

отличной от формулы (3.9) $v_2 = 2v_1$ классической теории.

Коэффициент использования энергии ветра принимает вид

$$C^{c}_{p,\text{ид}} = \frac{4a(1-a)}{1+a},$$

а оптимальное значение величины осевой индуктивной скорости оказывается равным $a = 0{,}414$. Это дает максимальное значение коэффициента использования энергии ветра для идеального ветродвигателя

$$C^{c,\max}_{p,\text{ид}} = 0{,}687.$$

Коэффициент лобового давления становится равным

$$B^{c} = \frac{4a}{1+a},$$

а при значении $a = 1$ его значение $B^{c} = 2$ (а не ноль, как в классической модели).

На рис. 3 было показано характерное изменение этих зависимостей и нанесены экспериментальные данные для величины B.

4. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя с учетом закрутки струи за ветродвигателем

4.1. Особенности математической модели течения при учете закрутки струи

Лопастная система горизонтально-осевого ветроколеса, работая, как турбина без соплового аппарата, изменяющего направление потока воздуха, придает набегающему незакрученному атмосферному потоку вращение вокруг оси ветродвигателя в направлении, обратном направлению вращения ветроколеса. Величина образовавшейся закрутки струи непосредственно за ветроколесом характеризуется угловой скоростью ее вращения ω. Абсолютное значение угловой скорости вращения струи ω невелико, т. е. существенно меньше угловой скорости вращения Ω самого ветроколеса. Малое значение скорости вращения уходящей струи воздуха позволяет пренебречь изменением давления в струе вдоль радиуса и тем самым дает возможность провести анализ при тех же самых допущениях, что для модели струи без закрутки. Однако в данной модели будем рассматривать струю, идущую через ветродвигатель, как множество вложенных друг в друга кольцевых струй толщиной dr (рис. 5). Это позволит в ходе проводимого анализа идеального ветродвигателя учитывать изменение скоростей по радиусу и использовать запись основных уравнений в дифференциальной, а не в алгебраической форме.

Абсолютная окружная скорость потока в струе перед ветродвигателем (сечение *00*) равна нулю ($U_{0,\text{стр}} = 0$), также равна нулю в этом сечении и окружная индуктивная скорость u_0. В плоскости ветродвигателя (сечение *11*) поток получает индуктивную окружную скорость u_1, которая направлена в сторону, обратную вращению ветродвигателя U. В сечении *22* за ветроколесом окружная индуктивная составляющая будет иметь значение u_2, а абсолютная окружная скорость струи $U_{2,\text{стр}} = u_2$. Она направлена против направления вращения ветродвигателя.

Отметим, что в рассматриваемой модели течения в отличие от предыдущей (разд. 3.1) появились два новых параметра: угловые

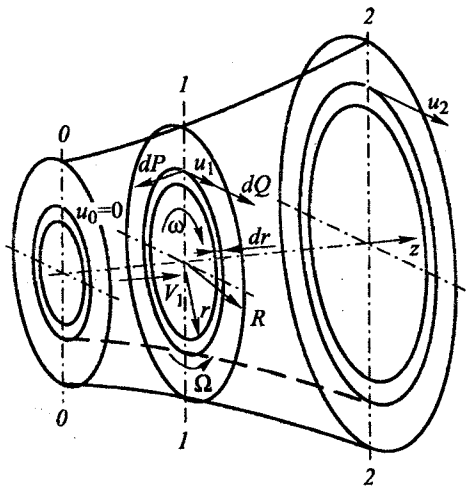


Рис. 5. Струйная схема течения в горизонтально-осевом ветродвигателе с учетом закрутки струи

скорости вращения ветродвигателя Ω и струи ω. Впервые учет закрутки струи в теории ветродвигателя провели Г.Х. Сабинин и А. Бетц.

4.2. Система основных уравнений

Система основных уравнений для рассматриваемой математической модели течения включает в себя, как и в предыдущем случае (разд. 3.2), уравнения неразрывности, изменения количества движения, сохранения энергии (кинетической), уравнение состояния, уравнение баланса работ в контрольном объеме струи и дополнительно уравнение изменения окружного количества движения.

Согласно принятым допущениям уравнение состояния имеет вид $\rho = \text{const}$. Уравнение неразрывности для соответствующего сечения элементарной кольцевой трубки тока, например для сечения *11*, имеет вид

$$dG = \rho V_1 2\pi r dr. \qquad (4.1)$$

Уравнение изменения секундного осевого количества движения

$$V_0 dG - V_2 dG = dP. \qquad (4.2)$$

Уравнение сохранения энергии с учетом вращения струи для элементарной кольцевой струйки тока может быть записано в виде

$$\frac{V_0^2}{2} dG - \frac{(V_2^2 + U_{2,\text{стр}}^2)}{2} dG = dN'_{\text{вд.ид}}. \qquad (4.3)$$

Появление в математической модели течения нового явления – вращения струи – потребовало расширения общей системы уравнений: добавления уравнения изменения окружного количества движения для абсолютного движения рассматриваемого кольцевого элемента струи. Согласно этому уравнению, полная производная от момента количества движения массы жидкости струи $\frac{dM_{\text{стр}}}{dt}$ в анализируемом контрольном объеме равна моменту сил, действующих на рассматриваемую массу, относительно ее оси вращения. Если рассмотреть изменение момента количества движения в кольцевой струе за время $dt = 1$ с, то секундное изменение окружного момента количества движения массы струи при прохождении жидкости через ветродвигатель

$$dM_{\text{стр}} = dM_2 - dM_0, \qquad (4.4)$$

где секундные моменты окружного количества движения перед и за ветродвигателем составляют

$$\begin{aligned} dM_0 &= U_0 dGr \equiv 0, \\ dM_2 &= U_{2,\text{стр}} dGr = u_2 dGr. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Обозначим через dQ элементарную окружную (тангенциальную) составляющую силы, которая действует на массу жидкости в элементарной кольцевой струе. Тогда момент

$$dM_{\text{стр}} = dQr_1. \qquad (4.6)$$

Если полагать, что расширение струи не слишком велико, то из (4.4), (4.5) и (4.6) следует уравнение изменения окружного количества движения в виде

$$dQ = u_2 dG. \qquad (4.7)$$

Это фундаментальный вывод теории идеального ветродвигателя с учетом закрутки струи: окружная сила на ветродвигателе определяется количеством воздуха G, прошедшим через ветродвигатель, и окружной составляющей индуктивной скорости u_2 в сечении за ветродвигателем.

Рассмотрим уравнение баланса работ в контрольном объеме струи. В пределах элементарной кольцевой струи осевая (тормозящая) сила сопротивления dP совершает в плоскости активного диска в единицу времени элементарную работу (мощность) $dN_{пот}$. Эта мощность отводится от потока, проходящего через ветродвигатель, и расходуется в рассматриваемой модели течения не только на работу идеального ветродвигателя $dN'_{вд.ид}$, но и на работу вращения струи $dN_{стр}$:

$$dN_{пот} = dN'_{вд.ид} + dN_{стр}. \qquad (4.8)$$

Таким образом, вращение струи за ветродвигателем приводит к тому, что мощность идеального ветродвигателя становится меньше, чем мощность $dN_{пот}$, отбираемая в плоскости активного диска из свободного атмосферного потока. Аналогично (3.6), мощность

$$dN_{пот} = V_1 dP. \qquad (4.9)$$

Мощность идеального ветродвигателя в рассматриваемой модели течения с вращением струи в пределах элементарной кольцевой струи

$$dN'_{вд.ид} = \Omega dM,$$

где dM – элементарный крутящий момент на роторе ветродвигателя. Принимается, что крутящий момент на роторе идеального ветродвигателя по абсолютной величине равен крутящему моменту уходящей от ветродвигателя струи:

$$dM = dM_{стр}.$$

Аналогично, мощность вращения струи

$$dN_{стр} = \omega_1 dM_{стр}. \qquad (4.10)$$

Таким образом, уравнение баланса (4.8) работ для кольцевой струи примет вид

$$V_1 dP = (\Omega + \omega_1) dM_{стр}. \qquad (4.11)$$

4.3. Решение и анализ основных уравнений

Из уравнения (4.2) с учетом того, что $V_2 = V_0 - v_2$, получаем, что элементарная осевая (тормозящая) сила

$$dP = v_2 dG. \qquad (4.12)$$

С учетом (4.1), (3.2), (3.10) и (3.11) получим

$$dP = 4\pi\rho V_0^2 a(1-a) r dr. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим уравнение энергии (4.3) и раскроем в нем величину $dN'_{вд.ид}$. Из (4.8) следует, что

$$dN'_{вд.ид} = dN_{пот} - dN_{стр}.$$

С учетом (4.9) и (4.12) получим, что

$$dN_{пот} = V_1 v_2 dG.$$

С учетом (4.10), (4.6) и (4.7) получим, что

$$dN_{стр} = u_1 u_2 dG.$$

Кроме того, $V_1 = V_0 - v_1$ и $V_2 = V_0 - v_2$, а $U^2_{2,стр} = u_2^2$.

Подстановка этих соотношений в уравнение энергии (4.3) приводит его к виду

$$v_2\left(v_1 - \frac{v_2}{2}\right) = -u_2\left(u_1 - \frac{u_2}{2}\right). \qquad (4.14)$$

Поскольку механизмы возникновения индуктивных осевых и окружных скоростей v и u имеют различную природу (описывают независимые физические явления изменения количеств движения в осевом и окружном направлениях), то равенство (4.14) возможно только, если порознь равны нулю обе его части. Тогда между индуктивными скоростями возникают следующие соотношения:

$$v_1 = \frac{v_2}{2}, \quad u_1 = \frac{u_2}{2}. \qquad (4.15)$$

Если расширение уходящей струи невелико, то условие (4.15) можно распространить на угловые скорости вращения струи:

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{2},$$

и тогда коэффициент относительной индуктивной окружной скорости (коэффициент закрутки струи) (2.6)

$$a' = \frac{\omega_2}{2\Omega}. \qquad (4.16)$$

Рассмотрим величину крутящего момента $dM_{стр}$ (4.6). Для окружной составляющей в разд. 4.2 получена формула (4.7):

$$dQ = u_2 dG.$$

С учетом (4.1), (4.16) и того, что $u_2 = \omega_2 r$ и $V_1 = V_0(1 - a)$, элементарная окружная сила

$$dQ = 4\pi\rho V_0(1 - a)a'\Omega r^2 dr.$$

В результате элементарный крутящий момент, действующий как на струю, так и на идеальный ветродвигатель,

$$dM = 4\pi\rho V_0(1 - a)a'\Omega r^3 dr. \qquad (4.17)$$

Полный крутящий момент

$$M = \int_0^R dM,$$

где R – наружный радиус струи в сечении *11*.

Рассмотрим уравнение баланса работ (4.11). Подстановка в него соотношений (4.12), (4.1), (4.16), (4.17) с учетом, что $V_1 = V_0(1 - a)$, дает формулу Г. Глауэрта

$$(1 - a)a = (1 + a')a'x^2, \qquad (4.18)$$

где x – местный коэффициент быстроходности (2.4).

Из (4.18) следует, что отсутствие вращения струи ($a' = 0$) возможно только при условии $a = 1$ (полное торможение потока) и при условии $a = 0$ (неработающий ветродвигатель). Зависимость (4.18) показана на рис. 6.

4.4. Коэффициент использования энергии ветра для идеального ветродвигателя с учетом закрутки струи

Мощность идеального ветродвигателя с учетом закрутки струи

$$N'_{\text{вд.ид}} = \int \Omega dM.$$

С учетом (4.16) и того, что Ω = const, получим

$$N'_{\text{вд.ид}} = 4\pi\rho V_0\Omega^2 \int_0^R (1 - a)a'r^3 dr. \qquad (4.19)$$

Как можно видеть из (4.19), без учета функциональной зависимости $f(a, a', x) = 0$ (4.18) величина $N'_{\text{вд.ид}}$ обращается в нуль в случае полного торможения потока ($a = 1$) и в случае отсутствия вращения струи ($a' = 0$). Как показано ниже, наличие зависимости (4.18) снимет ограничение, возникающее от условия $a' = 0$.

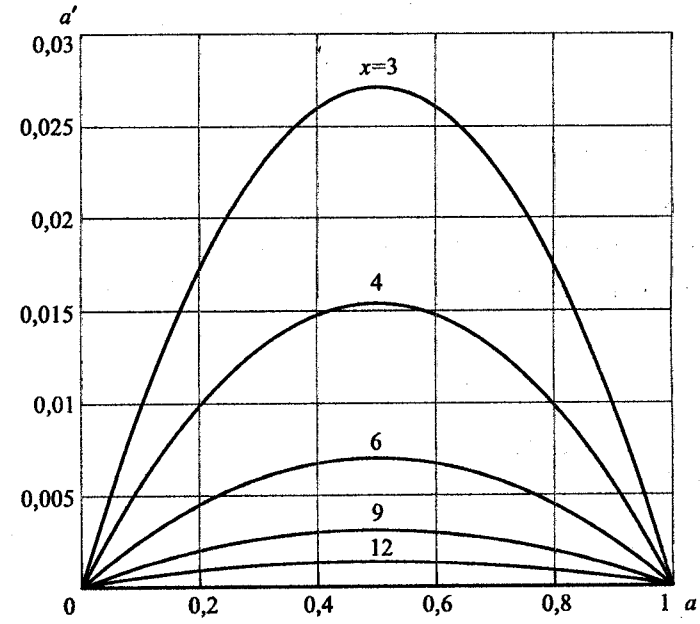


Рис. 6. Изменение коэффициента закрутки струи a' в зависимости от коэффициента торможения потока a и коэффициента быстроходности x

Коэффициент использования энергии ветра идеального ветродвигателя согласно (3.12) с учетом (4.19) при наличии закрутки струи составляет

$$C'_{p,\text{ид}} = \frac{N'_{\text{вд.ид}}}{\frac{\rho V_0^3}{2}\pi R^2} = \frac{8\Omega^2}{V_0^2 R^2}\int_0^R (1 - a)a'r^3 dr. \qquad (4.20)$$

С учетом (2.3) и (2.4) получаем

$$C'_{p,\text{ид}} = \frac{8}{X^2}\int_0^X (1 - a)a'x^3 dx.$$

С учетом наличия функциональной зависимости $f(a, a', x) = 0$ (4.18) величина

$$C'_{p,\text{ид}} = \frac{8}{X^2}\int_0^X \frac{(1 - a)^2 a}{1 + a'} x dx.$$

В случае отсутствия вращения струи ($a' = 0$) и при $a = \text{const}$ получаем

$$C'_{p,\text{ид}} = 4a(1-a)^2,$$

что совпадает со значением $C_{p,\text{ид}}$ (3.12) в теории Жуковского – Бетца.

Если полагать, что вращение струи за ветродвигателем подчиняется условию постоянства циркуляции $\Gamma_{\text{стр}} = 2\pi U_{\text{стр}} r = \text{const}$, то в сечении *11* ее угловая скорость $\omega_1 = \dfrac{U_{\text{стр}}}{r}$ составляет

$$\omega_1 = \frac{\Gamma_{\text{стр}}}{2\pi r^2}$$

и является переменной по радиусу величиной. Тогда коэффициент относительной индуктивной окружной скорости

$$a' = \frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{\Gamma_{\text{стр}}}{2\pi r^2 \Omega}. \qquad (4.21)$$

С учетом (4.21) коэффициент $C'_{p,\text{ид}}$ по (4.20) примет вид

$$C'_{p,\text{ид}} = \frac{8\Omega\Gamma_{\text{стр}}}{2\pi V_0^2}\int_0^1 (1-a)\bar{r}\,d\bar{r},$$

где $\bar{r} = \dfrac{r}{R}$ – относительный радиус.

Определим значение $\Gamma_{\text{стр}} = \text{const}$ по параметрам на периферии струи:

$$\Gamma_{\text{стр}} = 2\pi\omega_{1R}R^2$$

и найдем значение дроби $\dfrac{\Omega\Gamma_{\text{стр}}}{2\pi V_0^2} = a'_R X^2$, здесь a'_R – коэффициент закрутки струи на периферии.

Тогда коэффициент использования энергии ветра для идеального ветродвигателя

$$C'_{p,\text{ид}} = 8a'_R X^2 \int_0^1 (1-a)\bar{r}\,d\bar{r}.$$

При постоянном значении коэффициента торможения a по радиусу получаем

$$C'_{p,\text{ид}} = 4a'X^2(1-a).$$

Использование зависимости (4.18) дает

$$a'X^2 = \frac{(1-a)a}{1+a'_R}.$$

В результате получаем, что при $a = \text{const}$ коэффициент использования энергии ветра с учетом закрутки струи

$$C'_{p,\text{ид}} = \frac{4a(1-a)^2}{1+a'_R}.$$

Очевидно влияние на величину $C'_{p,\text{ид}}$ значения коэффициента закрутки струи a'_R на ее периферии.

4.5. Коэффициент лобового давления

Величина элементарной тормозящей силы dP определяется формулой (4.13). Полная тормозящая сила получается интегрированием по радиусу:

$$P = 4\pi\rho V_0^2 \int_0^R (1-a)ardr.$$

Коэффициент лобового давления

$$B' = \frac{P}{\frac{\rho V_0^2}{2}\pi R^2} = \frac{8}{R^2}\int_0^R (1-a)ardr.$$

В случае $a = \text{const}$ получаем совпадение с теорией Жуковского – Бетца:

$$B = 4a(1-a).$$

Оглавление

Введение 3
1. История теории идеального ветродвигателя и ее место в современных методах аэродинамического расчета ветродвигателя 4
2. Ветродвигатель и характеризующие его параметры 6
2.1. Ветродвигатель 6
2.2. Параметры, характеризующие работу ветродвигателя 9
3. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя без учета закрутки уходящей от него струи 11
3.1. Особенности математической модели теории идеального ветродвигателя 11
3.2. Система основных уравнений 13
3.3. Решение и анализ основных уравнений 14
3.4. Коэффициент использования энергии ветра для идеального ветродвигателя и его максимальное значение 15
3.5. Коэффициент лобового давления 16
3.6. Выводы из теории Жуковского–Бетца для идеального ветродвигателя 17
3.7. Анализ параметров струи 18
3.8. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя с учетом «присоединенной» массы 20
4. Теория идеального горизонтально-осевого ветродвигателя с учетом закрутки струи за ветродвигателем 23
4.1. Особенности математической модели течения при учете закрутки струи 23
4.2. Система основных уравнений 24
4.3. Решение и анализ основных уравнений 26
4.4. Коэффициент использования энергии ветра для идеального ветродвигателя с учетом закрутки струи 29
4.5. Коэффициент лобового давления 31