Библиотека СОК

Г·Б·ПЫХАЧЕВ
Р·Г·ИСАЕВ

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРАВЛИКА

Г. Б. ПЫХАЧЕВ,
Р. Г. ИСАЕВ

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРАВЛИКА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
нефтяных специальностей вузов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»
МОСКВА 1973

УДК 622.276 : 532.5

Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г. Подземная гидравлика. Учебное пособие. М., «Недра», 1972, с. 360.

В учебном пособии изложены современные научные данные по теории фильтрации, особенностям фильтрации в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах. Приведены простейшие случаи фильтрации жидкости со свободной поверхностью, основные дифференциальные уравнения подземной гидравлики. Освещены вопросы неустановившейся фильтрации газа в пористой среде и в газоконденсатных залежах, а также жидкости в трещиноватых однородных и неоднородных пластах. Рассмотрены вопросы фильтрации неоднофазных жидкостей в пористых и трещиноватых породах.

Учебное пособие предназначено для студентов нефтяных вузов и факультетов.

Таблиц 30, иллюстраций 121, список литературы 35 названий.

РЕЦЕНЗЕНТЫ

1. Кафедра Московского института нефтехимической и газовой промышленности
2. Академик Азерб. ССР А. Х. Мирзаджанзаде

П $\frac{0382-133}{043(01)-73}$ 133—72

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга предназначается для первоначального ознакомления с элементами подземной гидрогазодинамики. В ней подобран материал, предусмотренный программой того курса, который преподается студентам нефтяных вузов и факультетов.

По расположению материала и по своему содержанию данный учебник отличается от изданных ранее. В текст включены сведения о фильтрации жидкости в трещиноватой и трещиновато-пористой среде, а также приведены некоторые результаты новых исследований, изъяты вопросы, которые, не будучи обязательными для студентов, делали содержание книги излишне громоздким.

Авторы стремились так изложить материал, чтобы книга могла служить учебным пособием и тогда, когда предмет изучается в сокращенном объеме. С этой целью раздел, посвященный общим дифференциальным уравнениям подземной гидравлики, приведен не в начале книги, а в главе VIII; со всеми основными задачами предыдущих семи глав, а также с задачами отдельных параграфов некоторых последующих глав можно знакомиться, не прибегая к общим дифференциальным уравнениям гидрогазодинамики. Например, вопросы плоского фильтрационного потока для многих скважин излагаются упрощенно до главы VIII. В главе IX плоский поток рассматривается уже на основе главы VIII в соответствии с более полным объемом курса.

Г. Б. Пыхачевым написаны главы I, II, IV, VI, VII, IX, X, XI, XII, XIII; §§ 1, 3 и часть § 2 главы VIII; §§ 1—6 главы XV и § 1 главы XVI. Им выполнена компоновка материала по главам.

Р. Г. Исаевым написаны главы III, V, XIV; § 4 и часть § 2 главы VIII; §§ 7 и 8 главы XV и §§ 2 и 3 главы XVI.

Авторы благодарят академика Академии наук Азербайджанской ССР А. Х. Мирзаджанзаде за те его указания, которые использовались при работе над книгой.

Особую признательность авторы выражают профессору Московского института нефтехимической и газовой промышленности имени акад. И. М. Губкина доктору технических наук В. Н. Щелкачеву и всему коллективу кафедры, которую он возглавляет, за большую работу по рецензированию книги. Полезные замечания В. Н. Щелкачева и его сотрудников помогли существенно улучшить содержание учебника.

Авторы считают нужным отметить, что подготовке рукописи к печати содействовали сотрудница кафедры теоретической механики Грозненского нефтяного института С. В. Христель и сотрудница научно-исследовательского сектора того же института В. С. Кириченко.

Авторы будут благодарны всем, кто выскажет свои критические замечания по поводу книги.

Глава I

§ 1. Значение и роль подземной гидравлики в развитии научных основ разработки нефтяных и газовых месторождений

Подземная гидравлика — *наука о движении нефти, воды, газа и их смеси в пористых и трещиноватых горных породах, слагающих продуктивные пласты и массивы.*

Поскольку подземная гидравлика изучает разновидность механического движения, ее можно считать отделом механики и называть *подземной гидрогазомеханикой.*

Те или иные положения подземной гидравлики устанавливаются и развиваются строгими или упрощенными математическими методами на основе данных о движении жидкости и газа в реальных пластах.

Существуют естественные подземные потоки пластовой жидкости. Движение жидкости и газа в пластах возникает всякий раз, когда начинают добывать из залежи нефть и газ. Это движение обладает специфическими особенностями, отличающими его от движения жидкости и газа по трубам или в открытых руслах. Знать особенности их движения в пористой или трещиноватой среде необходимо для того, чтобы вести успешную разработку нефтяных и газовых месторождений.

Процесс отдачи нефти и газа пластом сопровождается физико-химическими явлениями, возникающими в самом пласте. Так, если движение жидкости происходит по узким проходам (каналам или мелким трещинам), внутри горной породы возникают поверхностные явления, обусловленные взаимодействием между молекулами жидкости и твердого вещества на стенках мельчайших каналов, по которым движутся жидкие частицы. При изменении давления в пластах природный газ растворяется в жидкости или выделяется из раствора.

Особенности движения жидкости и газа в пластах часто объясняются высокими пластовыми температурами и давлениями. Следовательно, чтобы наиболее рационально разрабатывать месторождение нефти или газа, надо знать не только подземную гидравлику, но и геологию, геофизику, физику пласта и др. Рациональные методы добычи нефти и газа выбирают с учетом отраслевой экономики, техники эксплуатации или технологии нефтедобычи. В нашу задачу не входит освещение вопросов, связанных с перечисленными дисциплинами.

Подземная гидравлика — наука, применяемая не только для решения вопросов рациональной разработки нефтяных и газовых залежей. Область использования ее в различных отраслях народного хозяйства обширна. Гидротехнические сооружения (плотины, каналы, шлюзы, водоспуски и др.) проектируют на основе законов движения воды в грунтах. Вода просачивается под основаниями этих сооружений, а иногда подземный поток вымывает грунт под ними, что может вызвать аварию. Важно предусмотреть возможность такого вымывания и найти меры борьбы с ними. Законы подземной гидравлики лежат в основе расчетов, относящихся к водоснабжению, ирригации, подземной газификации угля и др.

Настоящая книга посвящается вопросам подземной гидравлики в аспекте их приложения к проблемам добычи нефти и газа. Можно сказать, что излагаемый здесь материал составляет курс *газонефтяной подземной гидравлики.*

Нефтяная подземная гидравлика — сравнительно молодая отрасль науки. Она создана и в последующем развивалась благодаря бурному развитию нефтедобывающей промышленности в СССР и за рубежом. Первые исследования проблемы движения нефти и газа в пластах, базировавшиеся на известных законах гидромеханики, появились в начале двадцатых годов нашего столетия. В настоящее время проектирование разработки нового месторождения нефти и газа, а также эксплуатация скважин не мыслятся без широкого применения законов подземной гидравлики. Как правильно расставить скважины в данном пласте; сколько скважин и в какой последовательности надо вводить в пласт; какой режим работы в них поддерживать; какой рабочий агент — воду или газ — следует нагнетать в пласт для поддержания давления и в каком количестве; как регулировать и направлять движение жидкости или газа в пласте — эти и многие другие вопросы решаются сейчас на основе подземной гидравлики.

От правильного разрешения этих вопросов зависит производственный и экономический эффект добычи нефти и газа на отдельных промыслах и в целых нефтедобывающих районах. При этом необходимо знать закономерности подземных потоков в нефтегазоносных пластах. Проблемам гидродинамики пласта посвящаются из года в год труды ряда исследовательских и учебных институтов Москвы, Азербайджана Башкирии, Западной Сибири, Северного Кавказа, Татарии, Украины и др.

§ 2. Важнейшие этапы развития подземной гидравлики

Начало развития подземной гидравлики было заложено в середине XIX столетия трудами французского инженера Г. Дарси. Им был выполнен первый гидравлически обоснованный расчет водопровода, сооруженного в 1840 г. в г. Дижоне (Франция). После постройки газопровода встал вопрос о расчете и постройке фильтров, в связи с чем Дарси занялся экспериментальным изучением движения

воды через песчаные фильтры. Результаты опытов и установленный им основной закон фильтрации были опубликованы в 1856 г.

Теоретические исследования именно в области *подземной гидравлики* впервые были предприняты И. Дюпюи; в 1857 и 1863 гг. появились две его работы, в которых были разобраны вопросы гидравлического обоснования опытного закона Дарси.

Начиная с 1886 г. Ф. Форхгеймер широко использовал методы теории потенциала для решения многих проблем подземной гидравлики.

В 1897 г. Ч. Слихтер опубликовал капитальное исследование по геометрии пористой среды и кинематике фильтрации.

В конце восьмидесятых годов прошлого века и позднее (в 1920 г.) значительные исследования в теории движения грунтовой воды были проведены нашим знаменитым механиком Н. Е. Жуковским. До 1920 г. подземная гидравлика развивалась как отрасль механики, изучающая течение подземных вод. Решались общие задачи теории фильтрации, исследовались притоки воды к колодцам и артезианским скважинам, водосборным галереям и т. д.

В 1922 г. была опубликована монография акад. Н. Н. Павловского, который многие задачи подземной гидравлики впервые сформулировал как краевые задачи математической физики, указав тем самым общие методы их решения. В этой монографии впервые было предложено использовать параметр Рейнольдса в качестве критерия существования закона фильтрации Дарси. Н. Н. Павловский практически разработал метод электрогидродинамической аналогии для решения задач подземной гидравлики.

В начале двадцатых годов нашего столетия подземная гидравлика вступает в новый период своего развития. Наряду с задачами течения подземных вод развивается новое направление — *газонефтяная* подземная гидравлика. Основоположником нового направления является акад. Л. С. Лейбензон.

Начав в 1921 г. теоретические и экспериментальные исследования, акад. Л. С. Лейбензон впервые вывел дифференциальные уравнения газа и газированной нефти в пористой среде, математически проанализировал методы подсчета запасов нефти и газа в пластах, проблему вытеснения нефти и газа водой и т. д.

Важнейшие исследования в области газонефтяной подземной гидравлики были описаны Л. С. Лейбензоном в его капитальной монографии, изданной в 1934 г. Автор впервые систематизировал исследования, проведенные им и другими учеными в указанной области до начала тридцатых годов нашего столетия. Следует отметить, что в решении новых проблем подземной гидравлики и в опубликовании сводной монографии Л. С. Лейбензон опередил многих ученых: сводная монография, затрагивающая аналогичные вопросы, была опубликована выдающимся физиком США М. Маскетом только в 1937 г.

В начатых в 1935 г. В. Н. Щелкачевым исследованиях были обобщены идеи, заложенные в трудах главным образом грозненских нефтяников — Н. Т. Линдтропа, М. М. Чарыгина, С. Н. Шаньгина,

М. Г. Танасевича, В. М. Николаева, Н. М. Карпенко и других. Была разработана теория пластовых водонапорных систем и взаимодействия (интерференции) скважин [1].

В начале тридцатых годов В. П. Яковлев провел обширные исследования нефтяных скважин. Это позволило ему внести ценные предложения по методике исследования скважин и указать на сжимаемость жидкости в пластах.

В конце тридцатых годов В. Н. Щелкачев установил простейшие гидродинамические варианты расстановки скважин в условиях различных структур, к которым приурочены залежи нефти.

В 1940 г. акад. Л. С. Лейбензон возглавил организованную Б. Б. Лапуком группу ученых и инженеров различных специальностей, которые поставили цель — создать научно-обоснованную методику проектирования рациональной разработки нефтяных месторождений. Во время Великой Отечественной войны группа реорганизовалась в проектно-исследовательское бюро при Московском нефтяном институте, а после войны вошла в состав Всесоюзного нефтегазового научно-исследовательского института (ВНИИ). Под руководством акад. А. П. Крылова бюро проектировало разработку нефтяных и газовых месторождений.

Теперь проектируют разработку научные коллективы ряда институтов, оснащенных современным лабораторным оборудованием.

Работу проектно-исследовательского бюро подытожила изданная в 1948 г. книга А. П. Крылова и др. «Научные основы разработки нефтяных месторождений». Авторы книги обобщили достижения подземной гидравлики, промысловой геологии, социалистической организации производства.

Исследования американских ученых Маскета, Мура, Шилсюиза и Херста, проводившиеся в тридцатых годах нашего столетия, доказывали необходимость учитывать сжимаемость воды и нефти в пластовых условиях. Наблюдения за поведением пласта, которые предпринял В. Н. Щелкачев на грозненских промыслах после массовой остановки скважин в период 1941—1944 гг. и пуска их, дали ему возможность, во-первых, уточнить гидродинамический анализ методов исследования пластов, во-вторых, внести существенное дополнение в теорию Маскета, Шилсюиза и Херста. Оказалось, что поведение пластовых давлений и приток жидкости к скважинам определяются не только упругостью жидкости, но и упругими свойствами самого пласта. Разработанные Щелкачевым основы теории упругого режима получили дальнейшее развитие в работах многих исследователей нашей страны. Было предложено учитывать упруго-пластические деформации пласта (академиком А. П. Крыловым и Г. И. Баренблаттом).

В настоящее время разрабатываются сложные вопросы движения в пластах неоднородной, многокомпонентной жидкости. Развиваются

---

[1] Теория изложена в монографии В. Н. Щелкачева и Г. Б. Пыхачева, изданной в 1939 г.

в направлении решения такого рода задач исследования наших ученых Л. С. Лейбензона, М. Д. Миллионщикова, С. А. Христиановича и др.

Изучается движение жидкости и газа в неоднородных по составу пластах (акад. П. Я. Полубариновой-Кочиной, проф. М. А. Гусейн-Заде, М. И. Швидлером, Г. Г. Вахитовым, М. М. Саттаровым, В. Д. Лысенко и др.).

Ряд исследований посвящается течению в пористой среде жидкости с аномальными свойствами, так называемой вязко-пластической жидкости (работы акад. Азербайдж. ССР А. Х. Мирзаджанзаде, его сотрудников и др.).

Большое значение имеют исследования движения жидкостей и газов в пласте с трещинами (работы акад. С. А. Христиановича, Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова, Е. С. Ромма, В. Н. Майдебора и др.).

Развивается подземная газовая динамика (работы Б. Б. Лапука, Е. М. Минского, И. А. Чарного и др.).

Благодаря работам А. А. Аббасова, М. А. Багирова, Г. Е. Малофеева, Н. Н. Непримерова, М. А. Пудовкина, Л. И. Рубинштейна, Э. Б. Чекалюка, А. Б. Шейнмана и других успешно развивается подземная гидро-термодинамика.

Все шире применяются к решению задач гидрогазодинамики пласта методы математической статистики.

Подземная гидравлика развивается и в гидротехническом направлении. В этой области проводится много важных и ценных по своим результатам исследований. Следует отметить работы по динамике подземных вод Г. Н. Каменского, В. И. Аравина, Ф. М. Бочевера, Н. Н. Веригина, С. Н. Нумерова, А. И. Силина-Бекчурина, В. М. Шестакова и др.

Выше приведен далеко не полный перечень проблем, над решением которых работают многие исследователи в СССР. В настоящее время сложились целые научные школы исследователей в области подземной гидрогазодинамики. Научные центры этих школ существуют в Баку, Бугульме, Грозном, Казани, Киеве, Ленинграде, Львове, Москве, Ташкенте, Тюмени, Уфе и в других городах.

Большие исследования по подземной нефтяной гидравлике ведутся в социалистических странах. Так, в Румынии этими исследованиями заняты Н. Кристеа, Т. Оровяну, Х. Паскал, С. Георгицэ и др.

Широкий размах приняли исследования по вопросам подземной гидромеханики и за рубежом. Об этом свидетельствует появление оригинальных зарубежных сводных монографий по этим вопросам, написанных М. Маскетом (США), А. Хупером (Франция), А. Э. Шейдеггером (Канада), Н. Кристеа (Румыния) и др.

Дифференциальные уравнения подземной гидрогазодинамики решаются нередко с применением современных аналоговых и электронных цифровых вычислительных машин. К аналоговым машинам относится, например, электроинтегратор. Он позволяет реализовать метод электро-гидродинамических аналогий (ЭГДА), разработанный акад.

Н. Н. Павловским. Этот метод основан на математической аналогии электрического тока в электропроводном материале и фильтрации жидкости в пористой среде.

Эффективные решения многих задач подземной гидродинамики удается получить с применением электронных цифровых машин (ЭЦВМ), с помощью которых имеется возможность произвести численное интегрирование уравнений с использованием в основном конечно-разностного метода. Метод конечных разностей для фильтрационных расчетов был впервые предложен в 1924 г. Е. Л. Николаи и применен в работах по динамике подземных вод Г. Н. Каменским, П. Ф. Фильчаковым и др. В задачах разработки нефтеводоносных пластов метод конечных разностей применялся Г. Г. Вахитовым и др.

§ 3. Использование подземной гидравлики при решении задач разработки нефтяных месторождений

Немногие примеры использования подземной гидравлики в практике разработки пластов, на которых мы здесь остановимся, излагаются в хронологическом порядке.

Для понимания особенностей разработки того или иного месторождения нефти и газа необходимо сказать о режиме пласта.

Режим работы пласта определяется по тому или иному виду пластовой энергии и характеру ее проявления в процессе разработки залежи.

Характерные для данного пластового режима приток жидкости к эксплуатационным скважинам и поведение пластового давления обусловлены, с одной стороны, комплексом мероприятий, проводимых при вскрытии и последующей эксплуатации пласта; с другой стороны — естественными факторами: физико-геологическими свойствами пород и насыщающей их жидкости [1].

В примерах этого параграфа встречаются следующие виды режимов разработки пласта: водонапорный, упругий, режим растворенного газа.

Пример I. До двадцатых годов нашего столетия считали, что единственной силой, продвигавшей нефть в пласте к скважинам, могла быть сила упругости газа. Такое мнение господствовало с 1865 г., отвечая американской теории Бриггса. Вместе с тем полагали, что влияние работы каждой скважины может распространяться в пласте не далее определенного расстояния; так, во всех гидромеханических расчетах Ч. Слихтера принималось, что радиус влияния скважин равнялся 183 м (600 футам). Скважины, удаленные друг от друга на расстояние в два раза большее, якобы никакого влияния не оказывают одна на другую.

Н. Т. Линдтроп и другие грозненские геологи, упомянутые в § 2 настоящей главы, привели факты взаимодействия скважин на очень больших расстояниях друг от друга.

Весьма показательна история разработки пласта XIII Октябрьского (б. Ново-Грозненского) месторождения нефти. Этот пласт представляет собой типичную водонапорную систему, имеющую: 1) область питания, в которой на-

[1] О режимах — см. литературу по вопросам разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений.

копляются запасы воды, 2) область выхода на поверхность, где были горячие источники, и 3) область напора. Вертикальный схематический разрез пласта XIII изображен на рис. 1. Расстояние от области питания *A* (Черные горы) до промыслов Октябрьского района *B* составляет 27 км; далее от промыслов до горячих источников *C* — 20 км. Таким образом горизонтальное протяжение этой системы 47 км (по горизонтали и по вертикали взяты разные масштабы). Область нефтеносности приурочена к вторичному брахиантиклинальному поднятию *DBE*.

Нефть здесь начали добывать с 1916 г., максимальная добыча получена в 1930 г. В начале двадцатых годов, т. е. во время интенсивной эксплуатации пласта фонтанными скважинами, было замечено систематическое падение дебита западной группы горячих источников; в 1927 г. эти источники совершенно прекратили подачу воды. Было показано, что падение дебита источников связано с ведением в эксплуатацию именно пласта XIII, причем общее количество жидкости, отбираемое из пласта через нефтяные скважины и горячие источники, оставалось почти постоянным. С увеличением дебита нефтяных скважин уменьшался дебит источников.

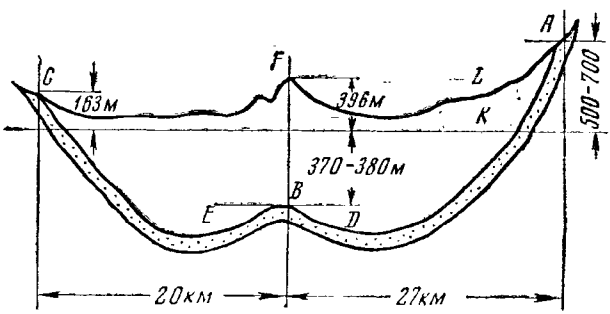


Рис. 1. Водонапорная система пласта XIII Октябрьского месторождения нефти Грозненского района (по В. М. Николаеву).

Влияние скважин, распространявшееся в данном случае на расстояние 20 км, убедительно доказывало несостоятельность теории ограниченного радиуса действия скважины. Было установлено также, что движущей силой в пласте является не сила упругости газа, а напор так называемой краевой (или контурной) воды, проталкивающей нефть к скважинам (водонапорный режим).

Методы подземной гидравлики позволили разработать теорию взаимодействия скважин в условиях водонапорного пластового режима. Формулы дебитов и давлений, выведенные в свое время по методам подземной гидродинамики, легли в основу тех расчетных уравнений, которые применяются при проектировании разработки нефтяных месторождений.

Пример II. Крупнейшее в США месторождение нефти — Восточный Техас — разрабатывается с 1930 г. Уже в середине 1934 г. в Восточном Техасе было пробурено 15 000 скважин. Месторождение тщательно и всесторонне исследовалось. Выяснилось, что нефтяная залежь подвержена давлению краевых вод. Пласт Вудбайн, к которому приурочена нефтяная залежь, образует пластовую водонапорную систему протяженностью примерно в 160 км.

В поведении пластового давления была замечена особенность, не согласовывавшаяся с существовавшим тогда представлением о водонапорном режиме: уменьшение или кратковременное полное прекращение отбора жидкости приводило к некоторому повышению пластового давления, но не к его восстановлению до первоначального значения. Газ не мог влиять на изменение давления, так как он был весь растворен. Оказалось, что режим пласта зависел от неучитывавшегося до того времени свойства жидкости расширяться при понижении давления.

Однако при подсчетах количества жидкости, выделившейся за счет упругого расширения, американским исследователям Р. Шилэюизу и У. Херсту пришлось допускать, что сжимаемость воды в 10 раз выше ее нормальной величины («сверхсжимаемость»). Для приведения в соответствие результатов подсчетов по уравнениям подземной гидродинамики с данными промысловых наблюдений им пришлось выдвинуть гипотезу газовых «карманов», т. е. предположить, что в пласте существует свободный газ, хотя, как уже говорилось, этого не могло быть.

В. Н. Щелкачев устранил указанное противоречие, доказав с помощью гидродинамических методов, что сверхсжимаемость объясняется не газовыми карманами, а сжимаемостью самого пласта. Предложенное В. Н. Щелкачевым дифференциальное уравнение упругого режима послужило основой для многих расчетных формул, используемых в практике разработки и исследования пластов.

Пример III. В условиях так называемого режима растворенного газа, когда приток нефти к скважинам осуществляется за счет расширения пузырьков газа, выделяющегося из раствора, увеличения дебитов скважин можно достигнуть путем регулирования давления, например, такими способами: 1) снижением забойного давления и 2) посредством закачки газа в пласт через нагнетательные скважины, в результате чего давление в пласте повысится. (Если отбор нефти из пласта ведется при забойных давлениях, меньших одной атмосферы, процесс отбора иногда называют вакуум-процессом).

Какой из этих двух способов более эффективен? Подобный вопрос возник, например, в связи с применением вторичных методов разработки к пластам XIV и XVI месторождения Бори-Су Малгобекского района в 1946 г.

Простые вычисления, выполненные по формулам теории движения газированной жидкости в пористой среде, показали, что повышение пластового давления эффективнее снижения давления на забой скважины. Значит, при одинаковых экономических показателях затрат на применение того или иного метода интенсификации добычи нефти более предпочтителен метод, связанный с повышением давления, а не с понижением забойного давления. Это лишний раз подчеркивало, что своевременно принятые меры по поддержанию пластового давления в первых же стадиях разработки месторождения исключительно важны.

На Туймазинском месторождении нефти и на месторождениях с аналогичными коллекторами и пластовыми условиями снижение забойного давления ниже давления насыщения нефти газом приводит к существенному увеличению дебитов скважин. Как показали исследования, при определенных условиях снижение забойных и даже пластовых давлений ниже давления насыщения оказывается эффективным.

Пример IV. При проектировании разработки Туймазинского месторождения нефти отказались от применявшегося до этого равномерного размещения скважин по треугольной сетке и перешли к более разреженной сетке скважин, размещая их кольцевыми рядами, параллельными внутреннему контуру нефтеносности. Это позволило почти в четыре раза сократить общее число эксплуатационных скважин при условии получения устойчивых дебитов. Аналогичное размещение скважин было запроектировано затем на Бавлинском, Серафимовском и некоторых других месторождениях.

Применение внутриконтурного заводнения на крупнейшем Ромашкинском месторождении способствовало резкому сокращению срока разработки, интенсификации нефтедобычи, уменьшению потребного числа скважин и т. п.

Во всех перечисленных случаях скважины по новой разреженной сетке размещались на основании тщательных гидродинамических исследований вопроса о взаимодействии скважин и большого объема гидродинамических расчетов. Для доказательства правильности гидродинамических расчетов на Бавлинском месторождении в 1958 г. предприняли широкий промышленный эксперимент: было выключено из работы около половины скважин. После их остановки сохранился прежний уровень добычи нефти и закачки воды.

Эксперимент показал применимость гидродинамических расчетов для нефтяных пластов.

Гидродинамические расчеты, на основании которых внедрялись передовые методы технологии нефтедобычи, сокращались сроки разработки, сокращалось

число скважин, уменьшались капиталовложения, увеличивалась нефтедобыча и т. п. способствовали получению огромного народнохозяйственного эффекта.

Пример V. В 1956 г. начало разрабатываться нефтяное месторождение Карабулак — Ачалуки (ЧИАССР), причем продуктивный коллектор представлял собой трещиноватый пласт с глубиной залегания 2000—2500 м. В 1959 г. вступило в эксплуатацию месторождение Малгобек — Вознесенское, также приуроченное к трещиноватому пласту. По этим и другим месторождениям с трещиноватыми коллекторами был отмечен ряд особенностей, не согласующихся с обычными представлениями теории движения жидкости в пористых пластах:

а) графики зависимости между дебитом и перепадом давления (индикаторные диаграммы) имели аномальное искривление;

б) взаимодействие скважин проявлялось неравномерно;

в) быстро восстанавливалось давление в остановленных скважинах. Это потребовало развития теории движения нефти в трещиноватых пластах, причем на основе выведенных зависимостей были не только проанализированы перечисленные особенности, но и дана их количественная оценка. Как установлено, индикаторные диаграммы искривлялись вследствие деформации систем фильтрующих трещин и из-за наличия значительных сил инерции, а анизотропия трещиноватости вызывала неравномерное (иногда очень резкое) взаимодействие скважин.

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. Явление фильтрации

Под фильтрацией понимают *движение (просачивание) жидкости или газа или газожидкостной смеси через твердое тело, имеющее пустоты, одни из которых называют порами, другие трещинами.* Мельчайшие пустоты обладают тем свойством, что силы молекулярного взаимодействия между жидкостью и твердыми стенками очень велики. Они образуют молекулярные поры. В самых больших пустотах взаимодействие жидкости со стенками лишь частично влияет на ее движение. Такие пустоты называются *кавернами.* Промежуточное место между молекулярными порами и кавернами занимают просто поры. Твердое тело, содержащее поры, представляет собой *пористую среду*: песок, песчаник, известняк.

Если внутри твердого тела возникли трещины, такое тело являет собой пример *трещиноватой среды.* Растрескапность горных пород макротрещинами и микротрещинами, не смещающими слои пород друг относительно друга, можно объединить под термином «трещиноватость». Пористый коллектор нефти и газа, наделенный к тому же свойством трещиноватости, есть представитель *пористо-трещиноватой среды.*

Жидкость, газ, смесь жидкости и газа, другими словами — всякая текучая среда, часто именуется в зарубежной литературе собирательным термином флюид (fluid), если не ставится задача выделить характерные особенности движения данной среды.

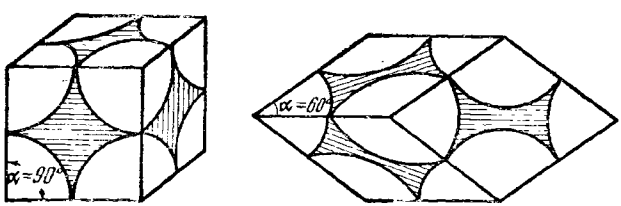
Движение текучей среды через поры или трещины возможно, если некоторые из пор или трещин сообщаются между собой. Флюид, заполняющий сообщающиеся поры или трещины, образует непрерывную среду (континуум), занимающую некоторую часть всего пространства, принадлежащего объему пористой или трещиноватой среды. Мы будем считать, что в любом как угодно малом объеме пористой или трещиноватой среды находится жидкость, газ или газожидкостная смесь. Чрезвычайно малые размеры поровых каналов, их неправильная форма, большая поверхность шероховатых стенок — все это создает огромные сопротивления движению жидкости и газа. Эти сопротивления служат главной причиной очень низкой скорости перемещения жидкости и газа в пористой среде; скорости в процессе

фильтрации оказываются значительно более низкими, чем скорости движения в трубах или открытых руслах.

Если объем пространства, занятого порами, не изменяется или изменяется так, что его изменениями можно пренебрегать, пористая среда считается недеформируемой. Если же под влиянием упругих сил происходят такие изменения объема порового или трещиноватого пространства, величиной которых пренебрегать нельзя, среду следует рассматривать как упругую.

§ 2. Простейшие модели пористой среды. Пористость и просветность

Ввиду того что поровые каналы имеют неправильную форму и самые разнообразные размеры, невозможно исследовать движение частиц жидкости или газа по всему множеству каналов; невозможно точно знать формы и размеры каждого из этого множества каналов, прорезающих толщу реальной пористой породы. С самого начала развития теории фильтрации пошли по пути построения упрощенных



а *б*

Рис. 2. Элемент фиктивного грунта.

моделей реальной пористой среды. Предположим, что пористая среда недеформируема. Так как движение вязкой жидкости хорошо исследовано в трубах цилиндрической формы, принимают, например, все поры цилиндрическими. Модель пористой среды, построенная на основе допущения, что все поры — узкие цилиндры, расположенные параллельно друг другу, называется моделью *идеального грунта*.

Другой моделью пористой среды в виде множества шарообразных частиц одинакового диаметра является модель *фиктивного грунта*. По идее Ч. Слихтера, все шарообразные частицы, образующие данную пористую среду, уложены во всем ее объеме одинаковым образом по элементам из восьми шаров. Наименее плотная укладка шаров — та, при которой центры восьми шаров помещаются в вершинах куба (см. рис. 2, *а*).

Наиболее плотная укладка получается при расположении центров восьми шаров в вершинах ромбоэдра с углом ромба $\alpha = 60°$ (рис. 2, *б*).

Более поздние исследования Л. Дарапского показали, что пространственные соотношения значительно более сложны, чем принимал

Ч. Слихтер. Недостаточно рассмотреть элемент из восьми шаров и предположить симметричную картину для всех остальных шаров.

Не останавливаясь на описании более сложных моделей пористой среды, заметим, что даже при одинаковых диаметрах шарообразных частиц грунта можно получить много различных комбинаций укладки шаров.

Одним из важных параметров, характеризующих пористую среду, является *пористость* m (коэффициент пористости). Пористостью называется отношение объема пор $\tau_п$ ко всему данному объему пористой среды τ:

$$m = \frac{\tau_п}{\tau}. \qquad (II.1)$$

Часто пористость выражают в процентах по отношению ко всему объему τ.

Другим параметром пористой среды служит *просветность* m' (коэффициент просветности), или поверхностная пористость. Просветностью называется отношение просветной площади (площади проходов) в некотором сечении пористой среды $F_п$ ко всей площади этого сечения F

$$m' = \frac{F_п}{F}. \qquad (II.2)$$

Ч. Слихтер, исходя из простых геометрических соображений, вывел формулу для пористости фиктивного грунта:

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}}, \qquad (II.3)$$

где α — угол ромба, представляющего грань основного ромбоэдра.

Ясно, что α характеризует укладку шаров фиктивного грунта по элементу из восьми шаров и изменяется от 60° (наиболее плотная укладка) до 90° (наименее плотная укладка). Из формулы (II.3) имеем:

$$m = 0{,}259 \quad \text{при} \quad \alpha = 60°;$$

$$m = 0{,}476 \quad \text{при} \quad \alpha = 90°.$$

Просветность m' грани основного ромбоэдра фиктивного грунта вычисляется по следующей формуле:

$$m' = 1 - \frac{\pi}{4\sin\alpha}. \qquad (II.4)$$

Величина m' согласно формуле (II.4) изменяется в таких пределах:

$$m' = 0{,}0931 \quad \text{при} \quad \alpha = 60°;$$

$$m' = 0{,}2146 \quad \text{при} \quad \alpha = 90°.$$

Формулы (II.3) и (II.4) показывают, что пористость и просветность фиктивного грунта не зависят от диаметра шарообразных час-

тиц, составляющих грунт, а зависят лишь от степени плотности укладки.

Фиктивный грунт может моделировать хорошо отсортированный песок с правильной упаковкой зерен. Но даже и при упорядоченной упаковке зерен для естественных рыхлых материалов обнаруживается следующая закономерность: чем меньше размер зерен, тем больше пористость.

Для природных или искусственных материалов различают две пористости: *общую*, или абсолютную пористость и *активную*, или эффективную пористость. Общая пористость, определяемая по формуле (II.1), будет в том случае, когда под $\tau_п$ понимают объем всех пор образца пористой среды. Активная пористость будет, если $\tau_п$ в формуле (II.1) обозначает объем только сообщающихся пор.

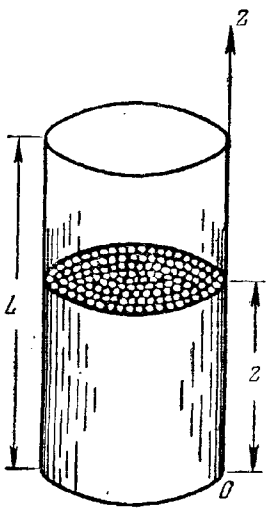


Рис. 3. Образец пористой среды.

Объем порового пространства такого природного материала, каким является кварцевый песок, изменяется незначительно даже под действием довольно больших давлений. Можно считать, что пористость этих твердых материалов мало изменяется при изменяющихся давлениях. Но пористость, например, глины весьма восприимчива к сжатию: она значительно уменьшается с увеличением глубины залегания глины под поверхностью земли. Л. Ф. Эси, установивший зависимость пористости глины с глубиной z, предлагает формулу

$$m = m_0 e^{-az}, \qquad (II.5)$$

где m_0 — средняя пористость поверхностных глин; a — постоянная.

Расчет показывает, что при значениях m_0, равных 0,4—0,5, пористость глинистого сланца на глубине 1800 м оценивается величиной $m = 0{,}05$ [12].

На понижение значения пористости горных пород наряду с сжатием влияет их сцементированность. По-видимому, цементирующее вещество, преимущественно располагающееся в местах бывших контактов между зернами осадочных пород, образовалось в течение геологического периода.

Со способами определения пористости в лабораториях читатель может ознакомиться в специальной литературе.

Для практических расчетов существенно знать среднюю просветность некоторого объема пористой среды.

Возьмем образец пористой среды цилиндрической формы (такой образец, извлеченный из скважины, называется керном). Площадь пор в сечении цилиндра на расстоянии z от его основания (рис. 3)

выражается в функции координаты z, т. е. $F_1(z)$. Длина образца равна L. Пусть просветность в этом сечении цилиндра

$$m'(z) = \frac{F_1(z)}{F}, \tag{II.6}$$

где F — площадь основания цилиндра.

Среднее значение просветности $\overline{m'}$ определится так:

$$\overline{m'} = \frac{1}{L}\int_0^L m'(z)\,dz. \tag{II.7}$$

Но объем рассматриваемого цилиндра $\tau = LF$, а объем всех пор в данном образце

$$\tau_п = \int_0^L F_1(z)\,dz. \tag{II.8}$$

Следовательно, получим:

$$\overline{m'} = \frac{1}{LF}\int_0^L m'(z)\,F dz = \frac{1}{\tau_0}\int_0^L F_1(z)\,dz = \frac{\tau_п}{\tau} = m. \tag{II.9}$$

Из формулы (II.9) видим, что *средняя просветность равна пористости* m.

§ 3. Переход от фиктивного грунта к естественному. Эффективный диаметр

Чтобы в расчетах, относящихся к фильтрационному потоку жидкости или газа в естественных породах, можно было пользоваться формулами, выведенными для фиктивного грунта, следует подобрать соответствующий размер шарообразной частицы фиктивного грунта. Размер частицы должен удовлетворять следующему условию: геометрическая характеристика гидравлического сопротивления, оказываемого фиктивным грунтом фильтрационному потоку, должна быть такой, как и в случае реальной породы.

Диаметр частиц фиктивного грунта, удовлетворяющий этому условию, назовем *эффективным диаметром* и обозначим $d_э$. Для перехода от фиктивного грунта к естественному следует определить эффективный диаметр.

Эффективный диаметр находится с помощью механического анализа, при котором определяются групповые показатели состава грунта и процентное содержание отдельных фракций. Просеивая грунт через специальный набор сит с различной площадью отверстий, разделяют данный образец породы на фракции по крупности зерен, находят взвешиванием весовое количество содержащихся во фракциях зерен и строят кривую. Для этого по оси абсцисс откладывают

диаметры песчинок, а по оси ординат — сумму процентного весового содержания всех фракций, начиная от нуля и кончая данным диаметром. Частицы естественного грунта далеки от шаровой формы, но мы условно принимаем, что они имеют форму шара, так как точная оценка действительной формы едва ли возможна.

График механического анализа строится следующим образом (рис. 4): по оси абсцисс откладывается длина, равная среднему диаметру частиц самой мелкой фракции d_1, а по соответствующей ординате — длину, равную весовому количеству содержащихся в этой фракции зерен в процентах; далее по оси абсцисс откладываем длину, равную сумме $d_1 + d_2$, где d_2 — средний диаметр следующей по крупности фракции, а по оси ординат — длину, равную весовому количеству содержащихся в первых двух фракциях зерен в процентах. Продолжая построение, получают последнюю точку с ординатой, равной 100%. За средний диаметр d_i зерен какой-либо фракции принимают среднее арифметическое крайних диаметров зерен этой фракции.

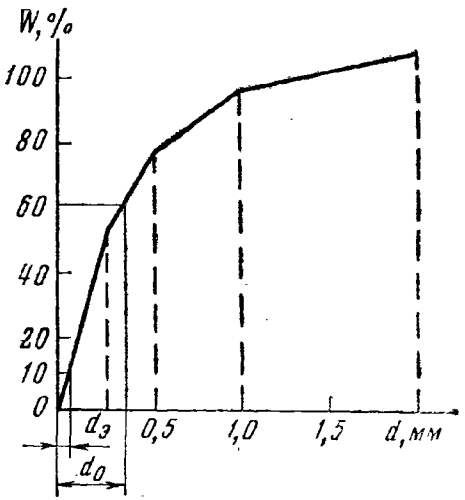


Рис. 4. График механического анализа естественного грунта.

После разбивки естественного грунта на фракции шарообразных частиц вычисляют эффективный диаметр $d_э$. Для вычисления $d_э$ предложен ряд способов. Мы приведем два из них.

1. *Способ веса средней частицы*, заключающийся в применении к расчету $d_э$ такой формулы:

$$d_э = \sqrt{\frac{\sum n_i d_i^3}{\sum n_i}}, \qquad (II.10)$$

где d_i — средний диаметр i-той фракции; n_i — число песчинок фракции.

2. *Способ Аллана Газена* состоит в следующем: за эффективный диаметр $d_э$ принимается такой диаметр шарообразной частицы, при котором сумма весов фракций всех диаметров, начиная от нуля и кончая весом зерен этого диаметра, составляет 10% от веса всех фракций. При этом так называемый коэффициент однородности, равный отношению $d_0/d_э$, должен быть не более пяти. В этом отношении d_0 есть тот диаметр шарообразной частицы, при котором сумма весов всех фракций, начиная от нуля и кончая весом зерен этого диаметра,

равна 60% от веса всех фракций. Величины d_0 и $d_э$ берутся с кривой на рис. 4.

Способ Газена довольно широко распространен. Предполагается, что $0{,}01 \text{ см} \leqslant d_э \leqslant 0{,}3 \text{ см}$.

Напомним, что пользоваться моделью фиктивного грунта допустимо для песка с округлыми хорошо отсортированными зернами. Рыхлые породы, имеющие различную форму зерен и различную структуру укладки, при одном и том же эффективном диаметре проявляют себя различно в процессе фильтрации. Эффективный диаметр как геометрическая характеристика пород не является полным. Большая неоднородность размеров частиц, их угловатость, сцементированность — эти свойства горных пород не позволяют прибегать к расчетам с помощью эффективного диаметра.

Попытки точного решения задач о течении жидкости через пористые среды, строение которых существенно неупорядоченно, надо признать безнадежными.

В некоторых исследованиях фильтрации можно использовать принципы общей статистики неупорядоченных явлений. А. Э. Шейдеггер, например, применил статистику неупорядоченных явлений, аналогично теории броуновского движения Эйнштейна, к течению жидкости через пористую среду. Движение каждой точки жидкости рассматривается как статистический процесс в пределах совокупности макроскопически одинаковых пористых сред.

Методы математической статистики использовались при решении задач фильтрации М. М. Саттаровым, В. Д. Лысенко и др.

§ 4. Скорость фильтрации. Закон Дарси

При изучении фильтрационного потока удобно отвлечься от размеров пор и их формы, допустив, что жидкость движется сплошной массой, заполняя весь объем пористой среды, включая пространство, занятое скелетом породы. Рассмотрим величину, называемую скоростью фильтрации.

Предположим, что объемный расход жидкости в единицу времени через площадку ΔF, выделенную в пористой среде, равен ΔQ.

Скорость фильтрации v в пределах данной площадки

$$v = \frac{\Delta Q}{\Delta F}. \tag{II.11}$$

Скорость фильтрации в данной точке пласта

$$v = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \frac{dQ}{dF}. \tag{II.12}$$

Установим связь между скоростью фильтрации и средней скоростью движения жидкости в порах u.

Пусть $\Delta F_п$ — площадь просветов, находящихся на площадке ΔF; просветность m' определяется как следующее отношение:

$$m' = \frac{\Delta F_п}{\Delta F}. \qquad (II.13)$$

Если вычисляется средняя скорость движения в порах, то расчет производится так:

$$u = \frac{\Delta Q}{\Delta F_п}. \qquad (II.14)$$

Подставив в (II.14) значение $\Delta F_п$ из (II.13) и учитывая зависимость (II.9), получим:

$$v = mu. \qquad (II.15)$$

Такова зависимость между скоростью фильтрации и средней скоростью движения.

Скорость фильтрации можно рассматривать как вектор. Если в данной точке области фильтрации вращать элементарную площадку и восстанавливать нормали к ней, направление нормали, соответствующее наибольшему расходу, будет направлением вектора скорости фильтрации.

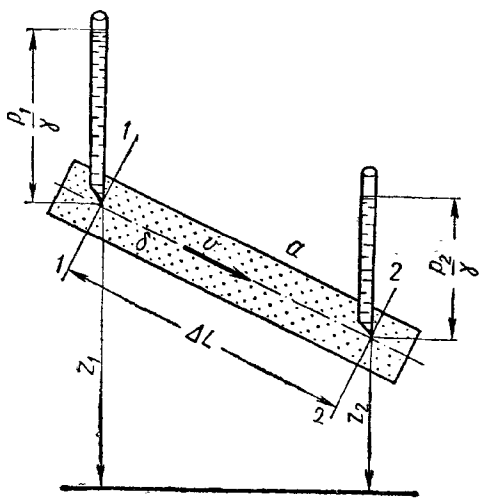


Рис. 5. Схема наклонного пласта.

В середине прошлого столетия в результате экспериментального изучения движения воды через песчаные фильтры был установлен *основной закон фильтрации — закон Дарси* (или линейный закон фильтрации). Этот закон является хронологически первым законом теории фильтрации. Его можно записать так:

$$v = K_ф i, \qquad (II.16)$$

где $K_ф$ — коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости; i — гидравлический уклон.

Коэффициент фильтрации $K_ф$ зависит от свойств пористой среды и свойств фильтрующейся жидкости. Наибольшее влияние на этот коэффициент оказывают размеры частиц породы. Величина $K_ф$ зависит также от формы частиц, степени шероховатости их поверхности, пористости среды, вязкости жидкости.

Видоизменим формулу (II.16).

Допустим, что в цилиндрической трубке, заполненной пористой средой, фильтруется жидкость в направлении, указанном стрелкой (рис. 5). Найдем потерю напора на данном участке длиной ΔL.

Если пренебречь величиной скоростного напора, можем считать напоры h_1 и h_2 равными соответственно:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{p_1}{\gamma} + z_1, \\ h_2 &= \frac{p_2}{\gamma} + z_2, \end{aligned}\right\} \tag{II.17}$$

где z_1 и z_2 — геометрические высоты крайних точек участка; p_1 и p_2 — давления в этих точках; γ — вес единицы объема жидкости.

Потеря напора Δh запишется так:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = \frac{\Delta p}{\gamma} + \Delta z, \tag{II.18}$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$ — потеря давления, а $\Delta z = z_1 - z_2$.

Но гидравлический уклон i можно с помощью формулы (II.18) записать так:

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta L} = \frac{\frac{\Delta p}{\gamma} + \Delta z}{\Delta L} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\Delta p + \gamma \Delta z}{\Delta L}. \tag{II.19}$$

Подставив значение i из (II.19) в формулу (II.16), получим:

$$v = \frac{K_\Phi}{\gamma} \cdot \frac{\Delta p + \gamma \Delta z}{\Delta L} = \frac{K_\Phi \Delta (p + \gamma z)}{\gamma \Delta L} = \frac{K_\Phi \Delta p^*}{\gamma \Delta L}, \tag{II.20}$$

где p^* — приведенное давление, причем

$$p^* = p + \gamma z. \tag{II.21}$$

В случае горизонтального пласта в формуле (II.20) надо положить $\Delta z = 0$; следовательно, закон Дарси запишется так:

$$v = \frac{K_\Phi}{\gamma} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta L}. \tag{II.22}$$

В символах дифференциального исчисления формула (II.22) имеет следующий вид:

$$v = -\frac{K_\Phi}{\gamma} \cdot \frac{dp}{dL}, \tag{II.23}$$

где dp/dL — величина градиента давления, а знак минус в правой части показывает, что скорость фильтрации направлена в сторону понижения давления.

Итак, *закон Дарси заключается в том, что скорость фильтрации пропорциональна градиенту давления.*

Закон Дарси имеет силу, если соблюдаются следующие условия:

1) мелкозернистая пористая среда или достаточно узкие поровые каналы;

2) малая скорость фильтрации или небольшой градиент давления;

3) незначительные изменения скорости фильтрации или градиента давления.

§ 5. Проницаемость пористой среды

Проницаемость есть свойство пористой среды пропускать через себя жидкости, газ или газожидкостную смесь под воздействием приложенного перепада давления. По отношению к текучей смеси пористая среда является проводником; проницаемость как бы означает *проводимость* относительно жидкости, газа или газожидкостной смеси.

Познакомимся с параметрами, характеризующими проницаемость.

После того как Г. Дарси опытным путем установил закон, носящий его имя, были выполнены многочисленные работы по аналитическому обоснованию этого закона. Первой такой работой была работа Ж. Дюпюи, уподобившего фильтрацию воды движению ее по тонким трубкам и получившего формулу, выражающую пропорциональность скорости течения гидравлическому уклону.

Ч. Слихтер, рассматривая элементарные струйки жидкости, движущейся между шарообразными частицами фиктивного грунта, вывел такую формулу:

$$v = \frac{m'^2}{96\,(1-m)} \cdot \frac{d_э^2}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta L}, \qquad \text{(II.24)}$$

где μ — динамический коэффициент вязкости жидкости.

Последняя формула показывает, что скорость фильтрации пропорциональна величине $\Delta p/\Delta L$. Это и есть закон Дарси.

Формулы, выведенные другими исследователями, отличаются от формулы (II.24) только безразмерным множителем перед дробью $\frac{d_э^2}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L}$.

В формуле (II.24) этот множитель равен $\frac{m'^2}{96\,(1-m)} = \mathrm{Sl}\,(m)$. Во всех формулах он выражается в функции пористости m. Множитель $\mathrm{Sl}\,(m)$ называют числом Слихтера.

При фильтрации жидкости в реальном грунте множитель Sl зависит не только от пористости, но еще и от структуры порового пространства, определяющейся формой частиц, степенью шероховатости их поверхности. Будем его обозначать так: $\mathrm{Sl}\,(m, \varepsilon)$, где ε — некоторый параметр, характеризующий структуру порового пространства.

Обобщая выражения различных теоретических формул, описывающих закон Дарси, получим:

$$v = \frac{d_э^2\,\mathrm{Sl}\,(m, \varepsilon)}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta L} \qquad \text{(II.25)}$$

или в дифференциальной форме

$$v = -\frac{d_э^2\,\mathrm{Sl}\,(m, \varepsilon)}{\mu} \cdot \frac{dp}{dL}. \qquad \text{(II.26)}$$

Формулы (II.25) и (II.26) имеют преимущество перед формулами (II.22) и (II.23): коэффициент фильтрации $K_ф$ в этих последних есть

величина, зависящая от свойств и жидкости, и пористой среды; в формулах же (II.25) и (II.26) числитель дроби перед градиентом давления зависит только от свойств пористой среды, знаменатель — только от свойств жидкости. Для исследования фильтрации нефти и газа такое обособление значений числителя и знаменателя существенно: в теории фильтрации приходится рассматривать движение в различных пористых средах многих разновидностей жидкости и газа.

В 1930 г. П. Г. Нуттинг ввел понятие коэффициента проницаемости пористой среды k. Коэффициент проницаемости определяется так:

$$k = d_3^2 \, \mathrm{Sl}(m, \varepsilon). \tag{II.27}$$

Таким образом, в случае однородной жидкости коэффициент проницаемости зависит от параметров, характеризующих только пористую среду. Он показывает, как велика способность пористой среды пропускать сквозь себя жидкость и газы.

Поскольку множитель Sl (m, ε) в формуле (II.27) — безразмерный, коэффициент проницаемости k имеет размерность площади, т. е. $[k] = L^2$.

Введя обозначение (II.27) в формулы (II.25) и (II.26), получим:

$$v = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta L} \tag{II.28}$$

или

$$v = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{dp}{dL}. \tag{II.29}$$

Связь между коэффициентом проницаемости k и коэффициентом фильтрации K_Φ легко установить, приравняв правые части равенств (II.22) и (II.28) или же (II.23) и (II.29). Имеем:

$$\frac{k}{\mu} = \frac{K_\Phi}{\gamma}. \tag{II.30}$$

За единицу проницаемости пористой среды принимается величина, равная в Международной системе единиц [*СИ*] $1{,}02 \cdot 10^{-12}$ *квадратного метра*; эта единица называется дарси. Единица проницаемости дарси установлена с помощью формулы (II.28), которой, пользуясь соотношением (II.11), можно придать вид

$$k = \frac{\mu Q \, \Delta L}{F \, \Delta p} \tag{II.31}$$

и затем подставить единицу измерения на место каждой величины в ее правой части; при этом соблюдено условие, что выбрана некоторая смешанная система единиц. За единицы смешанной системы принимаются: $\mu =$ одному сантипуазу $= 10^{-3}$ н·сек·м$^{-2}$; $Q = 10^{-6}$ м^3·сек$^{-1}$; $\Delta L = 10^{-2}$ м; $F = 10^{-4}$ м^2; $\Delta p =$ одной технической атмосфере $= 9{,}81 \cdot 10^4$ м$^{-2}$.

Для слабопроницаемых горных пород берут в качестве единицы проницаемости тысячную долю дарси — миллидарси.

Формула (II.31) позволяет определять величину коэффициента проницаемости по данным лабораторных исследований образца породы.

Хотя по определению коэффициент проницаемости не должен зависеть от природы жидкости (т. е. от того, будет ли это вода, нефть, воздух, природный газ и т. д.), опыты указывают на определенное влияние жидкости на результат лабораторных исследований образцов породы на проницаемость. Оказалось, например, что скорость течения дистиллированной воды, нефти и керосина через песчаники со временем уменьшалась. Объясняется это физико-химическим взаимодействием между жидкостью и пористой средой или изменением поперечных сечений поровых каналов вследствие перегруппировки зерен породы в рыхлых коллекторах. При лабораторных испытаниях образцов породы на проницаемость следует использовать газ, в процессе фильтрации которого не происходит указанных физико-химических взаимодействий.

Коэффициент проницаемости пористой среды k, измеренный в результате опытов по фильтрации однородной жидкости, отличается от значения k, найденного для той же жидкости, если она движется не одна, а в качестве одной из составляющих фаз неоднородной жидкости (состоящей, например, из нефти и газа или из нефти и воды). То, что в порах породы, кроме данной движущейся жидкости, содержатся и другие фазы — компоненты смеси, коэффициент проницаемости пористой среды для каждого компонента, как правило, получается более низкий, чем для однородной жидкости. При фильтрации неоднородной жидкости коэффициент проницаемости среды для ее отдельных составляющих фаз называется *коэффициентом фазовой проницаемости.*

Эксперименты показали (при расчете по закону Дарси), что проницаемость одной и той же пористой среды для воздуха выше, чем для жидкости. Это можно объяснить тем, что закон Дарси в действительности не сохраняется для газов. Было установлено, что этот закон нарушается, если размеры пор становятся сравнимыми со средним значением свободного пробега молекул газа или меньшими этого среднего значения.

Ф. Клинкенберг (1941 г.) построил простую капиллярную модель пористых сред и применил теорию проскальзывания Е. Варбурга (1875 г.) к каждому капилляру. Сущность этой теории состоит в том, что у стенок поровых каналов скорость движения слоя газа в отличие от скорости движения жидкости не равна нулю. Поэтому расход газа оказывается бо́льшим, чем должен быть по закону Дарси.

Введя «поверхностную» газопроницаемость k_a, Клинкенберг определил ее из соотношения

$$v = -\frac{k_a}{\mu} \cdot \frac{dp}{dL}$$

и исследовал ее зависимость от обратной величины среднего давления $p_{ср}$. Если проскальзыванием можно объяснить течение газа

в пористой среде, то по Клинкенбергу указанная зависимость должна быть линейной:

$$k_a = B + \frac{E}{p_{ср}},$$

где B и E — постоянные.

Поскольку проницаемость пористой среды для газа зависит от средней длины свободного пробега молекул, она обусловлена давлением, температурой и природой газа.

Из последующих параграфов будет видно, что коэффициент k сохраняет свое значение количественной характеристики проницаемости пористой среды и в случаях, в которых теряет силу закон Дарси.

§ 6. Границы применимости закона Дарси к явлениям фильтрации

В конце § 4 настоящей главы оговорены условия, при которых сохраняется закон фильтрации Дарси. Очень важно установить не только качественные, но и количественные признаки применимости закона Дарси к явлениям фильтрации. Впервые такой количественный признак установил акад. Н. Н. Павловский. Он установил применимость закона Дарси к фильтрационным потокам в зависимости от безразмерного параметра Re, подобно тому как в трубной гидравлике и в гидравлике открытых русел число Рейнольдса служит критерием существования ламинарного режима течения.

У акад. Н. Н. Павловского исходной была формула числа Re, используемого при движении жидкости в круглых трубах:

$$\mathrm{Re} = \frac{uD}{\nu}, \qquad (II.32)$$

где u — средняя скорость течения по трубе; D — диаметр трубы и ν — коэффициент кинематической вязкости.

Преобразовывая эту формулу для условий фильтрации в грунте, Павловский брал модель идеального грунта с его цилиндрическими порами и в процессе последующего преобразования переходил от идеального грунта к реальному. Результат преобразований можно представить так:

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{0{,}75m + 0{,}23} \cdot \frac{vd_э}{\nu}, \qquad (II.33)$$

где m, v и $d_э$ — соответственно пористость, скорость фильтрации и эффективный диаметр.

Пользуясь формулой (II.33) и экспериментальными данными, Н. Н. Павловский установил критические значения числа Re:

$$\mathrm{Re}_{кр} = 7{,}5 \div 9. \qquad (II.34)$$

Равенство (II.34) следует понимать так: если вычисленное по формуле (II.33) значение Re оказывается меньшим нижнего критического

значения $Re_{кр}$, полученного по формуле (II.34), справедлив закон фильтрации Дарси; если Re больше верхнего значения $Re_{кр}$, закон Дарси нарушен.

Относительно широкие пределы для $Re_{кр}$ объясняются тем, что в формуле (II.33) не учтены особенности структуры порового пространства. Кроме того, на интервал (II.34) влияет плавный переход от одного режима фильтрации к другому.

В 1933 г. были опубликованы результаты опытов Г. Х. Фэнчера, Ж. А. Льюиса и К. Б. Бернса (США) по исследованию движения нефти, воды, воздуха и газа через 27 образцов сцементированного и несцементированного песчаника и песка. Пористость и проницаемость образцов изменялись в широких пределах. Эффективный диаметр определялся по формуле (II.10).

Опытные данные обрабатывались следующим образом. Находилась зависимость между безразмерным коэффициентом гидравлического сопротивления λ и числом Re. Принималось, что

$$\lambda = \frac{d_э \Delta p}{2\rho v^2 \Delta L} \qquad (II.35)$$

и

$$Re = \frac{v d_э \rho}{\mu} = \frac{v d_э}{\nu}, \qquad (II.36)$$

где ρ — плотность жидкости; остальные обозначения прежние.

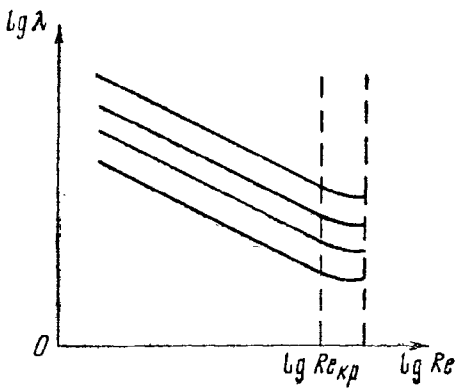


Рис. 6. Зависимость логарифма коэффициента гидравлического сопротивления λ от логарифма числа Re.

Кривые, полученные в результате обработки опытных данных для различных пород, изображены на рис. 6.

Анализ кривых Г. Х. Фэнчера, Ж. А. Льюиса и К. Б. Бернса позволяет сделать определенные заключения.

При значениях чисел Re, меньших 1 для сцементированных песков и меньших 4 для несцементированных песков, зависимость между $\lg \lambda$ и $\lg Re$ изображается прямыми линиями, наклоненными к оси абсцисс под углом 135°. При значениях Re, бо́льших 1 для сцементированных песков и больших 4 для несцементированных песков, зависимость $\lg \lambda - \lg Re$ изображается кривыми линиями. Переход от кривых к прямым совершается плавно.

Составим уравнения прямолинейных участков графика рис. 6. Заметим, что угловой коэффициент этих участков $\operatorname{tg} 135° = -1$. Имеем:

$$\lg \lambda = B - \lg Re, \qquad (II.37)$$

где постоянная B — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат.

Подставив в уравнение (II.37) значения λ и Re из (II.35) и (II.36), получим:

$$\lg\left(\frac{d_э \Delta p}{2\rho v^2 \Delta L} \cdot \frac{v d_э \rho}{\mu}\right) = B. \qquad \text{(II.38)}$$

Полагая, что $B = \lg C$, найдем:

$$v = \frac{1}{2C\mu} d^2_э \cdot \frac{\Delta p}{\Delta L}. \qquad \text{(II.39)}$$

Формула (II.39) выражает закон Дарси. Сравнивая (II.39) с (II.25), видим, что $\frac{1}{2C} = \mathrm{Sl}\,(m, \varepsilon)$.

Можно считать, что прямолинейные участки графиков рис. 6 отвечают закону Дарси. Очевидно, криволинейные участки графиков закону Дарси не отвечают. Но, как было сказано, точки прямолинейных участков имеют абсциссы, соответствующие значениям $\mathrm{Re} < 1$ для сцементированных песков, и $\mathrm{Re} < 4$ для несцементированных песков. Следовательно, критические значения Re для сцементированных песков таковы: $\mathrm{Re}_{кр} = 1$, для несцементированных $\mathrm{Re}_{кр} = 4$.

Неудобство формулы (II.36) состоит в том, что для вычисления по ней числа Re должен быть известен эффективный диаметр $d_э$. Различные способы вычисления $d_э$ дают различные численные значения этой величины. Кроме того, при движении нефти в известняках и доломитах определить $d_э$ невозможно.

Тем же недостатком обладает и формула Н. Н. Павловского (II.33).

Удобную для практики разведки и разработки нефтяных и газовых месторождений формулу числа Re впервые предложил В. Н. Щелкачев.

Выразив из формулы (II.27) величину $d_э$ и полагая, что Sl (m, ε) зависит только от m, В. Н. Щелкачев подставил значение $d_э$ в формулу Н. Н. Павловского (II.33).

Последняя приобрела следующий вид:

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{0{,}75m + 0{,}23} \cdot \frac{v\sqrt{96\,(1-m)\,k}}{\nu m'}. \qquad \text{(II.40)}$$

Далее было получено следующее равенство:

$$\frac{\sqrt{96\,(1-m)}}{m'\,(0{,}75m + 0{,}23)} \approx \frac{10}{m^{2,3}}. \qquad \text{(II.41)}$$

С помощью формулы (II.41) перепишем (II.40) так:

$$\mathrm{Re} = \frac{10}{m^{2,3}} \cdot \frac{v\sqrt{k}}{\nu}. \qquad \text{(II.42)}$$

Такова формула Щелкачева для вычисления Re.

По В. Н. Щелкачеву, критические значения Re, отвечающие этой формуле, заключены в таком интервале:

$$\mathrm{Re}_{кр} = 1 \div 12. \qquad \text{(II.43)}$$

Акад. М. Д. Миллионщиков предложил иную формулу:

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{m^{1,5}} \cdot \frac{v\sqrt{k}}{\nu}. \qquad (II.44)$$

По М. Д. Миллионщикову, отвечающие ей критические значения Re следующие:

$$\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}022 \div 0{,}29. \qquad (II.45)$$

Далее будет показано, что на основании позднейших экспериментов интервалы (II.43) и (II.45) должны быть расширены.

Обрабатывая результаты опытов Г. Х. Фэнчера, Ж. А. Льюиса и К. Б. Бернса, Е. М. Минский подобрал такую формулу, которая выражает зависимость между коэффициентом гидравлического сопротивления λ и числом Re во всем диапазоне значений Re. При этом указывается способ вычисления с заданной точностью предельного значения Re, отвечающего закону фильтрации Дарси.

Критерий существования закона Дарси, связанный с расчетами по формуле Е. М. Минского, не свободен от недостатка, о котором упоминалось применительно к формулам (II.33) и (II.36): формула Е. М. Минского содержит величину эффективного диаметра $d_э$.

Близкую по типу к (II.42) и (II.44) формулу рекомендовал Ф. И. Котяхов:

$$\mathrm{Re} = \frac{4v\sqrt{2k}}{m^{1,5}\nu}. \qquad (II.46)$$

Здесь при точности эксперимента порядка 4—5% $\mathrm{Re}_{кр} \approx 0{,}2$.

Экспериментальные исследования А. И. Абдулвагабова, проводившиеся в 1960 г., явились следующим шагом на пути решения вопроса о границах применимости закона фильтрации Дарси. Лабораторные опыты ставились с использованием образцов сцементированных и насыпных материалов. Рабочей жидкостью служили тщательно очищенный керосин и азот. Эксперименты показали, что закон Дарси перестает существовать выше определенного значения скорости фильтрации. Назовем это ее значение *критической скоростью фильтрации*.

С. А. Абдурашитов и А. И. Абдулвагабов предложили видоизменение формулы (II.42), а также кривую зависимости между λ и Re в области действия закона Дарси.

Из опытов А. И. Абдулвагабова следует, что критические значения Re заключены для различных пористых сред в следующих интервалах: $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}034 \div 14$ по формуле В. Н. Щелкачева (II.42); $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}0015 \div 0{,}6$ по формуле М. Д. Миллионщикова (II.44) и $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}085 \div 3{,}37$ по формуле Ф. И. Котяхова (II.46).

Наименьшие критические значения Re получались для наименее проницаемых сцементированных пород и насыпных образцов с фракциями менее 0,1 мм.

Все формулы для параметра Re типа (II.42), (II.44) и (II.46) можно объединить в одну, общий вид которой следующий:

$$\mathrm{Re} = \frac{v\sqrt{k}}{\nu} f(\varepsilon,\ C_1,\ m), \qquad \text{(II.47)}$$

где ε — параметр формы и шероховатости стенок поровых каналов; C_1 — коэффициент извилистости, равный отношению действительной длины криволинейной оси капилляра к расстоянию по оси фильтрационного потока между измерительными отверстиями.

До сих пор в настоящем параграфе уделялось внимание только критерию существования закона фильтрации Дарси. Возникает вопрос, сопровождается ли нарушение закона Дарси в пористой среде нарушением ламинарности течения? На этот вопрос приходится отвечать отрицательно.

Опыт Е. Линдквиста с попеременно утолщающимися и утончающимися трубками и ряд других экспериментов свидетельствовали в пользу того, что при нарушении закона фильтрации Дарси ламинарность течения в пористой среде сохраняется. Признаки турбулентности появляются лишь при значениях Re, значительно превышающих указанные здесь числа $\mathrm{Re}_{кр}$. Так, в опытах Н. М. Бочкова с четочным трубопроводом турбулентное течение наступало лишь тогда, когда Re превышало число 350, хотя уже в пределах $\mathrm{Re} = 49 \div 350$ струйки, проходя через суженные места, закручивались «жгутиками».

Чем объясняется нарушение закона Дарси?

С увеличением скорости движения жидкости или газа в пористой среде возрастает роль сил инерции. При движении жидкости по поровым каналам с большой скоростью величины и направления скоростей жидких частиц значительно изменяются по причинам извилистости каналов и непостоянства их поперечных размеров. Большие изменения скоростей означают существование больших сил инерции, что приводит к нарушению закона Дарси.

Заметим, что закон Дарси может быть обоснован при помощи общих дифференциальных уравнений гидродинамики — уравнений Навье — Стокса — при условии, что силами инерции пренебрегают.

Итак, *нарушение закона фильтрации Дарси не означает нарушения ламинарного режима течения.*

§ 7. Формулы общего закона фильтрации

Несмотря на то что закон Дарси достаточно точно описывает процессы фильтрации, с которыми чаще всего приходится иметь дело на практике, он является тем не менее лишь частным выражением общего закона фильтрации. В тех случаях, в которых закон Дарси не имеет силу, общий закон фильтрации называется *нелинейным законом.*

Формулы, выражающие общий закон фильтрации, можно подразделить на одночленные и двучленные.

Все употребительные одночленные формулы объединяются в степенную формулу следующего вида:

$$v = C\left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{II.48}$$

где C и n — некоторые постоянные, причем интервал возможных значений n такой:

$$n = 1 \div 2. \tag{II.49}$$

Если величину градиента давления записать dp/dL, получим вместо (II.48)

$$v = C\left|\frac{dp}{dL}\right|^{\frac{1}{n}}. \tag{II.50}$$

Формулы (II.48) и (II.50) применяются и для трещиноватых пород. В этом случае, по А. А. Краснопольскому, надо положить в формулах (II.48) и (II.50) $n = 2$; по Г. М. Ломизе $n = 1{,}75$.

Ряд исследователей (М. А. Великанов, В. М. Насберг, А. И. Силин-Бекчурин) правильно считает, что принципиально ошибочно пользоваться одночленной степенной формулой вида (II.48) или (II.50), так как параметры C и n являются функциями скорости фильтрации и, значит, не могут приниматься постоянными.

Только при условии, что изменения скорости фильтрации малы, допустимо принимать $n = \text{const}$.

Постепенный переход от закона Дарси к нелинейному закону фильтрации и последующая фильтрация по нелинейному закону лучше всего описываются двучленной формулой такого вида:

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = Av + Bv^2, \tag{II.51}$$

где A и B — некоторые постоянные.

Еще Дюпюи (1857 г.), дававший теоретическое объяснение закону Дарси, исходил в своей работе из двучленной формулы вида (II.51). Ф. Форхгеймер (1901 г.) считал, что закон фильтрации наилучшим образом представляется эмпирической формулой опять-таки вида (II.51).

При скоростях фильтрации, настолько малых, что возможно пренебрегать членом, содержащим v^2, мы из (II.51) получим закон Дарси. Наоборот, если скорости столь велики, что в формуле (II.51) возможно пренебречь членом с первой степенью v, мы будем иметь закон фильтрации Краснопольского.

Численные значения коэффициентов A и B могут быть найдены непосредственно из опытных данных.

Найдем выражения коэффициентов A и B формулы (II.51). Рассмотрим, как это сделано Э. Б. Чекалюком, фильтрацию в виде процесса микродросселирования, т. е. в виде процесса накопления потерь давления текучей среды при выходе ее из местных сужений

в трубке тока очень малого диаметра. Заметим, что абсолютное значение величины полного градиента давления $\Delta p/\Delta L$, который должен быть приложен для преодоления всех сопротивлений движению флюида, можно представить как сумму величин двух градиентов:

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{\Delta p_\mu}{\Delta L} + \frac{\Delta p_\rho}{\Delta L}, \tag{II.52}$$

где $\Delta p_\mu/\Delta L$ — абсолютное значение величины градиента давления, учитывающего сопротивление внутреннего трения вязкой жидкости и трения ее о стенки поровых каналов; $\Delta p_\rho/\Delta L$ — величина градиента давления, необходимого для преодоления инерционных сопротивлений, связанных с некоторыми особенностями геометрической структуры пористой среды (сужениями, степенью сжатия струек жидкости и др.).

Величина градиента $\Delta p_\mu/\Delta L$ определяется из закона Дарси

$$\frac{\Delta p_\mu}{\Delta L} = \frac{\mu}{k} v. \tag{II.53}$$

Что касается градиента $\Delta p_\rho/\Delta L$, то он находится из расчета потери энергии при выходах струек жидкости из мест сжатия в места расширения. Как известно, кинетическая энергия, потерянная струйкой жидкости или газа при внезапном расширении струи, равна кинетической энергии, соответствующей потерянной скорости (по теореме Борда — Карно). Следовательно,

$$\Delta p_\rho = \frac{\rho}{2}(u_c - u_p)^2, \tag{II.54}$$

где u_c — средняя скорость в месте сжатия; u_p — средняя скорость в месте расширения.

Относя равенство (II.54) к единице длины трубки и полагая, что на всем отрезке потока встречается N сжатий и расширений, найдем

$$\frac{\Delta p_\rho}{\Delta L} = \frac{N\rho}{2\Delta L}(u_c - u_p)^2. \tag{II.55}$$

Но

$$u_c - u_p = \frac{q}{F_c} - \frac{q}{F_p} = \frac{F_p - F_c}{F_c F_p} q,$$

где q — расход жидкости, газа или газожидкостной смеси через просветы трубки; F_c и F_p — площадь просвета сжатых и расширенных частей трубки соответственно.

Имеем в виду, что

$$u = \frac{v}{m}$$

и

$$u = \frac{q}{F_{cp}},$$

где $F_{ср}$ — средняя просветная площадь трубки. Подставляя значения величин u и q в равенство (II.55), получим

$$\frac{\Delta p_\rho}{\Delta L} = \frac{\rho}{k_\rho} v^2, \tag{II.56}$$

где

$$k_\rho = \frac{2m^2 \Delta L}{N} \left(\frac{F_c F_p}{F_p - F_c} \cdot \frac{1}{F_{ср}} \right)^2 \tag{II.57}$$

имеет размерность длины.

Полученные значения величин градиентов (II.53) и (II.56) подставим в формулу (II.52):

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{\mu}{k} v + \frac{\rho}{k_\rho} v^2. \tag{II.58}$$

Сравнив теперь правые части формул (II.51) и (II.58), запишем A и B:

$$A = \frac{\mu}{k}; \quad B = \frac{\rho}{k_\rho}. \tag{II.59}$$

Коэффициент проницаемости k, как мы видели из формулы (II.27), характеризуется следующими геометрическими параметрами пористой среды: размерами и формой частиц, степенью шероховатости их поверхности, пористостью. Коэффициент k_ρ, как усматривается из формулы (II.57), обусловлен такими геометрическими параметрами: числом сужений и расширений трубки, различием в ее просветных площадях, а также пористостью; k_ρ может быть назван коэффициентом проницаемости в квадратичном члене формулы (II.58).

Заметим, что во многих случаях нефтепромысловой практики допустимо ограничиваться при вычислениях только первым членом правой части этой формулы.

§ 8. Метод теории размерности для определения параметров фильтрации

В Международной системе единиц СИ формулы размерности всех физических величин имеют вид степенного одночлена $L^\lambda M^\varkappa T^\tau$, где L, M, T — размерности длины, массы и времени соответственно, λ, $\varkappa$, τ — показатели степеней. Из теории размерности известно следующее: если число основных единиц измерения равно числу определяющих параметров, которые имеют независимые размерности, то зависимость между определяемой величиной и определяющими параметрами находится с точностью до постоянного множителя. Покажем это положение на примере определения параметра C в формуле (II.48). Рассмотрим формулу общего закона фильтрации (II.58). Допустим, что параметр ε в выражении коэффициента проницаемости k (II.27) характеризует не только те особенности структуры порового пространства, которые отмечены в § 5, но также и особенности,

заключающиеся в коэффициенте k_ρ. Нетрудно понять, что коэффициент C зависит от трех определяющих параметров: k, μ, ρ. Число последних равно числу основных единиц СИ. На основании теории размерности функциональную зависимость (II.48) можно представить так:

$$v = ak^x \mu^y \rho^z \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{(II.60)}$$

где a — безразмерный множитель; x, y и z — показатели степеней, подлежащие определению.

Этой формуле должна соответствовать другая, в которой размерности левой и правой частей (II.60) одинаковы. Определим размерность каждой из величин формулы (II.60):

$$[v] = LT^{-1}; \quad [k] = L^2; \quad [\mu] = ML^{-1}T^{-1};$$

$$[\rho] = ML^{-3}; \quad \left[\frac{\Delta p}{\Delta L}\right] = ML^{-2}T^{-2}.$$

Равенство размерностей обеих частей (II.60) имеет такой вид:

$$LT^{-1} = L^{zx}M^y L^{-y}T^{-y}M^z L^{-3z} M^{\frac{1}{n}} L^{-\frac{2}{n}} T^{-\frac{2}{n}}. \qquad \text{(II.61)}$$

Приравнивая показатели степеней сначала у одной какой-либо буквы, например L, получим уравнение с неизвестными x, y и z; приравнивая затем показатели степеней у другой буквы и, наконец, у третьей, будем иметь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2x - y - 3z - \frac{2}{n}; \\ -1 &= -y - \frac{2}{n}; \\ 0 &= y + z + 1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.62)}$$

Решив уравнения (II.62), найдем, что

$$x = \frac{3-n}{2n}; \quad y = \frac{n-2}{n}; \quad z = \frac{1-n}{n}. \qquad \text{(II.63)}$$

Безразмерный множитель a в равенстве (II.60) определим из условия на границе раздела двух частей пористой среды, в одной из которых для данной жидкости сохраняется закон Дарси, а в другой — нелинейный закон, выражаемый формулой (II.60). На этой границе скорость фильтрации является критической скоростью $v_{кр}$, соответствующей критическому числу $\mathrm{Re}_{кр}$.

Скорость $v_{кр}$ можно вычислять, например, по формуле (II.47), положив $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{кр}$.

Подставив далее значение $v_{кр}$ из (II.47) в равенство (II.28), определим из полученного уравнения значение $\Delta p/\Delta L$; это значение подставим в равенство (II.60), из которого при помощи (II.47) исключим величину $v_{кр}$. Таким путем найдем a:

$$a = \left[\frac{\mathrm{Re}_{кр}}{f(\varepsilon, C_1, m)}\right]^{\frac{n-1}{n}}. \qquad (II.64)$$

Следует отметить, что при выводе формулы (II.64) мы допускаем скачкообразный переход от закона фильтрации Дарси к нелинейному закону, описываемому формулой (II.48). Такой переход возможен при внезапном расширении потока, поперечное сечение которого на участке, где существует закон Дарси, остается неизменным. Переход же от закона Дарси к нелинейному закону фильтрации при иных условиях совершается плавно.

Подставим значение a из (II.64) и значения x, y и z из (II.63) в формулу (II.60); получим:

$$v = \left[\frac{\mathrm{Re}_{кр}}{f(\varepsilon, C_1, m)}\right]^{\frac{n-1}{n}} k^{\frac{3-n}{2n}} \mu^{\frac{n-2}{n}} \rho^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (II.65)$$

Итак, пользуясь теорией размерности, мы нашли зависимость множителя C от параметров k, μ и ρ. Случай $n = 1$ отвечает закону Дарси.

Будем придерживаться допущения, сделанного в начале этого параграфа относительно физического смысла коэффициента проницаемости k: будем считать, что последний характеризует, во-первых, геометрические свойства пористой среды, которые ему приписаны в § 5, во-вторых, те структурные особенности, которые нашли свое выражение в коэффициенте k_ρ — см. § 7. Тогда возможно найти зависимость между k и k_ρ. Действительно, взяв формулу (II.65), положим в ней $n = 2$. Но полученный при этом закон фильтрации есть нечто иное, как зависимость (II.56).

Сравнивая (II.56) и (II.65) при $n = 2$, найдем:

$$k_\rho = \frac{\mathrm{Re}_{кр}}{f(\varepsilon, C_1, m)} \sqrt{k}, \qquad (II.66)$$

где множитель при $\sqrt{k}$ безразмерен.

Глава III

ОСОБЕННОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ ПЛАСТАХ

§ 1. Классификация трещиноватых пластов. Параметры трещиноватости

Рациональная разработка месторождений, приуроченных к трещиноватым пластам, будет способствовать дополнительной добыче нефти и газа. Отметим, что доля разведанных запасов нефти в трещиноватых пластах в общем балансе месторождений земного шара постоянно возрастает и уже сейчас составляет около 44%.

За последние годы трещиноватые пласты, содержащие нефть и газ, в Советском Союзе были обнаружены на Северном Кавказе (Карабулак — Ачалуки, Заманкул, Малгобек, Селли, Гаша); в республиках Средней Азии (Джаркак, Сарыташ и др.); в Куйбышевском Поволжье; в пределах Восточных Карпат; на Ухте и в других местах. Важное значение приобретают перспективные площади в пределах Восточной и Западной Сибири.

Из сказанного вытекает важность исследований по фильтрации в трещиноватых пластах. Уместно отметить, что если процессы фильтрации в поровых коллекторах хорошо изучены, то вопросам движения жидкости и газа в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах стали уделять внимание сравнительно недавно, в основном в 60 гг. Эта область является молодой, перспективной областью подземной гидравлики и несомненно с большой будущностью.

Все коллекторы можно подразделить на две большие группы: *гранулярные (поровые) и трещиноватые.* Емкость и фильтрация в гранулярном (поровом) коллекторе определяются структурой порового пространства породы, о чем подробно отмечалось в предшествующих параграфах главы II. Для второй группы характерно наличие развитой системы трещин.

Таким образом, трещиноватость пород создается развитыми системами трещин, густота которых зависит от состава пород, степени уплотнения, мощности, метаморфизма, структурных условий, состава и свойств вмещающей среды.

Трещиноватые коллекторы подразделяются на:

1) *коллекторы смешанного типа, для которых емкостью служат трещины, каверны, микрокарсты, стилолиты, поровые пространства; ведущая роль в фильтрации нефти и газа принадлежит развитой системе микротрещин, сообщающих эти пустоты между собой;*

2) чисто *трещинного типа — емкостью служат трещины и по ним же осуществляется фильтрация.*

Коллекторы смешанного типа в свою очередь подразделяются на подклассы: трещиновато-пористые, трещиновато-каверновые, трещиновато-пористо-каверновые коллекторы и т. д. Каждый такой подкласс определяется тем, какие категории пустот являются главными вместилищами для нефти (газа). Так, *в трещиновато-пористом коллекторе основные запасы нефти (газа) содержатся в порах, а фильтрация осуществляется по развитой системе микротрещин.* В дальнейшем мы подробно рассмотрим условия фильтрации в трещиновато-пористых коллекторах и коллекторах чисто трещинного типа.

Одним из важнейших параметров, характеризующих трещиноватый коллектор, является трещиноватость $m_т$ (коэффициент трещиноватости, называемый иногда в литературе трещинной пористостью). *Трещиноватостью называется отношение объема трещин образца* $\tau_т$ *ко всему объему образца* τ *трещиноватой среды*:

$$m_т = \frac{\tau_т}{\tau}. \qquad \text{(III.1)}$$

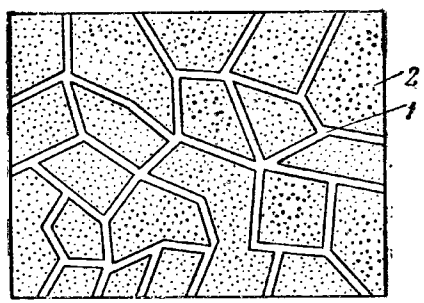


Рис. 7. Схема трещиновато-пористой среды.

Выражается эта величина обычно в процентах. Трещиновато-пористые коллекторы имеют два типа естественных пустот:

а) межзерновая (первичная) пористость, аналогичная пористости для обычных песков, песчаников;

б) вторичная пористость (трещиноватость), обусловленная развитием трещиноватости, появившейся за счет различных причин. Пустоты этого типа имеют большие раскрытия, чем обычные раскрытия пор, и в значительной степени обусловливают фильтрационные свойства коллектора.

В соответствии со сказанным такие коллекторы рассматриваются Г. И. Баренблаттом, Ю. П. Желтовым, И. Н. Кочиной как совокупность двух разномасштабных пористых сред (рис. 7): системы трещин (среда *1*), где пористые блоки играют роль «зерен», а трещины — роль извилистых «пор», и системы пористых блоков (среда *2*).

Для трещиновато-пористого коллектора помимо коэффициента трещиноватости $m_т$ следует еще ввести коэффициент пористости $m_п$, характеризующий среду *2*. Тогда общую (суммарную) пористость трещиновато-пористого коллектора можно получить, если к коэффициенту трещиноватости $m_т$ прибавить коэффициент межзерновой пористости пористых блоков $m_п$.

Другим важным параметром трещиноватой среды является густота трещин.

Густота трещин есть отношение числа трещин n, секущих нормаль, к длине нормали, проведенной к поверхностям, образующим трещины:

$$\Gamma = \frac{n}{L}. \qquad \text{(III.2)}$$

Густота трещин имеет размерность, обратную единице длины.

Если трещиноватый пласт моделируется одной сеткой горизонтальных трещин некоторой протяженности в фильтрующей среде, причем все трещины одинаково раскрыты и равно отстоят друг от

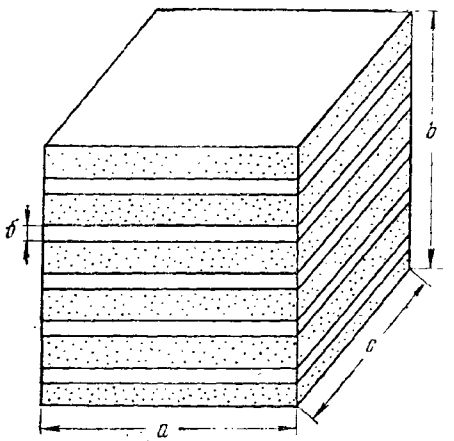


Рис. 8. Схема модели трещиновато-пористой среды.

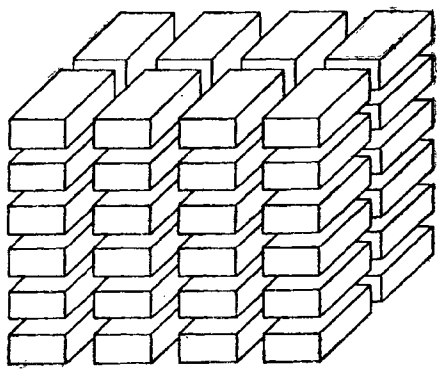


Рис. 9. Схема модели трещиноватого пласта с тремя сетками (ортогональными) трещин.

друга, то густота их — число трещин, приходящихся на единицу мощности пласта. Тогда коэффициент трещиноватости

$$m_т = \frac{\tau_т}{\tau} = \frac{nac\delta}{acb} = \Gamma\delta, \qquad \text{(III.3)}$$

где δ — раскрытие трещин; a, c — характерные линейные размеры образца; b — мощность (рис. 8).

Как показали исследования ВНИГРИ, для трещиноватых пластов в большинстве случаев характерно наличие двух взаимно-перпендикулярных систем вертикальных трещин. Такая порода может быть представлена в виде модели коллектора, расчлененного двумя взаимно-перпендикулярными системами трещин с равными величинами раскрытия и густоты.

В этом случае:

$$m_т = 2\Gamma\delta.$$

Для трех взаимно-перпендикулярных систем трещин (рис. 9) с равными величинами раскрытия и густоты имеем:

$$m_т = 3\Gamma\delta.$$

В общем случае следует положить что:

$$m_т = \alpha \Gamma \delta, \qquad \text{(III.4)}$$

где α — безразмерный коэффициент, зависящий от геометрии систем трещин в породе.

§ 2. Проницаемость пласта

В трещиноватом пласте зависимость между скоростью фильтрации v и средней скоростью движения по трещинам u выражается в виде:

$$v = m_т u \qquad \text{(III.5)}$$

или по известной из гидромеханики формуле Буссинеска для средней скорости течения жидкости между двумя плоскими неподвижными параллельными стенками:

$$u = -\frac{\delta^2}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dL}. \qquad \text{(III.6)}$$

На основании (III.5), (III.4) выражение (III.6) принимает форму:

$$v = -\frac{\alpha \Gamma \delta^3}{12\mu} \cdot \frac{dp}{dL}. \qquad \text{(III.7)}$$

Параметр проницаемости изотропного трещиноватого пласта, как это следует из (III.7)

$$k_т = \frac{\alpha \Gamma \delta^3}{12}. \qquad \text{(III.8)}$$

Если учесть, что в системе СИ проницаемость 1 дарси $= 1{,}02 \times \times 10^{-12}$ м^2, то для трещиноватого пласта

$$k_т = \frac{\alpha}{12 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-12}} \Gamma \delta^3 = 82 \cdot 10^9 \alpha \Gamma \delta^3. \qquad \text{(III.8а)}$$

Для трещиновато-пористого пласта общая проницаемость определяется как сумма межзерновой и трещинпостей проницаемостей трещиноватого пласта, рассмотренной выше (III.8).

В продуктивных трещиноватых пластах горное давление, определяющее общее напряженное состояние среды, уравновешивается напряжениями в скелете породы и давлением жидкости в трещинах. При постоянстве горного давления снижение пластового давления за счет отбора жидкости из пласта приводит к увеличению нагрузки на скелет среды. С уменьшением пластового давления (давления жидкости в трещинах) уменьшаются усилия, сжимающие зерна (пористые блоки) трещиноватой породы. Значение этого фактора наряду со значительными силами инерции следует учитывать при исследовании процессов фильтрации в трещиноватом пласте. Таким образом, на объем пространства трещин в трещиноватом коллекторе влияют в основном два фактора: 1) увеличение объемов зерен

с падением пластового давления; 2) увеличение сжимающих усилий на скелет продуктивного пласта.

Полагая, что в трещиноватом пласте преобладают упругие деформации и учитывая, что горное давление постоянно, а с изменением давления в жидкости, газе изменяются главным образом раскрытия трещин δ, можно так оценить изменение раскрытия трещин от давления:

$$\delta = \delta_0 - \Delta\delta = \delta_0 \left[1 - \beta_т \frac{l}{\delta_0} (p_0 - p)\right], \qquad \text{(III.9)}$$

где $\beta_т = \frac{1-2\sigma}{E}$ — упругая константа; σ — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; l — среднее расстояние между трещинами.

Разрешая уравнение (III.9) с учетом (III.8а), получим формулу для определения параметра проницаемости в деформируемом трещиноватом пласте:

$$k_т = k_т^0 [1 - \beta (p_0 - p)]^3, \qquad \text{(III.10)}$$

где $\beta = \beta_т \frac{l}{\delta_0}$ — комплексный параметр трещиноватой среды, зависящий от упругих свойств и геометрии трещин;

$$k_т^0 = 82 \cdot 10^9 \alpha \Gamma \delta_0^3. \qquad \text{(III.11)}$$

Механизм деформации в трещиновато-пористых пластах более сложен, чем в коллекторах чисто трещинного типа, рассмотренных выше. Однако можно отметить, что в трещиновато-пористых средах под внешними воздействиями вначале деформируется система трещин (среда *1*, рис. 7); причем истинное напряжение этой системы играет роль внешней нагрузки для системы пористых блоков (среда *2*, рис. 7). Заметим также, что зависимость для проницаемости вида (III.10) не единственная. Так, при построении нелинейной теории упругого деформирования, справедливой при больших изменениях давления и больших упругих деформациях, авторы (А. Т. Горбунов, В. Н. Николаевский) принимали, что проницаемость, пористость (а также вязкость и плотность фильтрующейся жидкости или газа) в обеих системах (среды *1* и *2* на рис. 7) являются экспоненциальными функциями от давления:

$$\begin{gathered} k_i = k_i^0 e^{-\alpha_i (p_0 - p_i)}; \quad m_i = m_i^0 e^{-\beta_i (p_0 - p_i)}; \\ \rho_i = \rho_i^0 e^{-\gamma_i (p_0 - p_i)}; \quad \mu_i = \mu_i^0 e^{-\lambda_i (p_0 - p_i)}, \\ (i = 1,\ 2) \end{gathered} \qquad \text{(III.12)}$$

где α_i, β_i, γ_i, λ_i — реологические постоянные породы и жидкости.

Некоторые авторы (А. Бан, К. С. Басниев, В. Н. Николаевский, Н. П. Лебединец, Л. Г. Наказная) используют также линейную зависимость между трещинной проницаемостью и изменением давления в виде:

$$k_т = k_т^0 [1 - \alpha (p_0 - p)], \qquad \text{(III.13)}$$

где α — реологическая постоянная трещиноватой среды, имеющая размерность, обратную размерности давления.

Из сопоставления (III.13) и (III.10) следует, что зависимость (III.13) можно получить, если ограничиться двумя первыми членами разложения полинома в правой части уравнения (III.10). Понятно, что использование линейного выражения (III.13) для трещинной проницаемости будет оправдано, если погрешность за счет исключенных членов не превышает 3—4%, что справедливо лишь для небольших изменений давления.

§ 3. Границы применимости линейного закона фильтрации

Так же как и для гранулярных (пористых) сред, при больших скоростях фильтрации линейный закон фильтрации может нарушаться из-за появления значительных по величине сил инерции. Как показали исследования Г. М. Ломизе, для движения воды в щелях различного вида характерны числа Re, значительно превышающие величины этого параметра для пористых сред: так, для щелей с гладкими стенками верхний предел применимости линейного закона оценивается числами $\mathrm{Re}_{кр} \approx 600$, а нижний — $\mathrm{Re}_{кр} \approx \approx 500$).

Ф. И. Котяхов указывал, что для трещиноватых пород за счет изменения относительной шероховатости трещин и их различного раскрытия (от 71 мк до 12,96 мк в опытах Ф. И. Котяхова) нарушение линейного закона происходит при значениях Re соответственно от 90 до 0,40. Исследования Е. С. Ромма подтвердили, что для щелей с гладкими стенками критическое число Рейнольдса равно 500. Им было также установлено, что если величина относительной шероховатости меньше 0,065, то ее роль в процессах фильтрации может не учитываться.

Параметр Re для трещиноватой среды можно ввести на основании следующих простых рассуждений.

Безразмерный параметр Re для щели любой формы определяется выражением:

$$\mathrm{Re} = \frac{4uR}{\nu}, \qquad \text{(III.14)}$$

где u — средняя скорость потока в м/сек; ν — кинематическая вязкость в м^2/сек; R — гидравлический радиус (отношение площади «живого» сечения потока к «смоченному» периметру) в м.

Для трещин прямоугольного сечения:

$$R = \frac{a\delta}{2(a+\delta)} \cong \frac{\delta}{2}, \qquad \text{(III.15)}$$

где a — ширина трещин.

Приближенное выражение для R получено на основании того, что обычно $\delta \ll a$ и величиной δ в знаменателе по сравнению с a можно пренебречь. Заметим, что в (III.15) δ — среднее раскрытие трещин в породе.

Таким образом, если учесть, что на основании (III.8) и (III.4):

$$\delta = \sqrt{\frac{12k_т}{m_т}}, \qquad \text{(III.16)}$$

и учитывая, что

$$v = m_т u,$$

то выражение для числа Рейнольдса в трещиноватой фильтрирующей среде может быть представлено в окончательной форме:

$$\mathrm{Re} = \frac{4v\sqrt{3k_т}}{\nu m_т \sqrt{m_т}}. \qquad \text{(III.17)}$$

Отметим, что согласно сказанному, за нижнюю границу нарушения линейного закона фильтрации в трещиноватом пласте следует принять $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}4$. Понятно, что если линейный закон фильтрации не действителен для трещиноватых пластов, следует использовать нелинейные законы.

Аналитически нелинейные законы выражаются в виде одночленных и двучленных формул. Одночленная формула предполагает следующую запись:

$$v = C_т \left(\frac{\Delta p}{\Delta L}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{(III.18)}$$

где n изменяется от 1 до 1,75 (по данным проф. Г. М. Ломизе).

Значение постоянной $C_т$ можно получить методами теории подобия, элементы которой рассмотрены ранее в главе II. Аналогичными рассуждениями получаем, что:

$$C_т = 12^{-\frac{1}{n}} m_т (0{,}25\mathrm{Re}_{кр})^{\frac{n-1}{n}} \delta^{\frac{3-n}{n}} \mu^{\frac{n-2}{n}} \rho^{\frac{1-n}{n}}, \qquad \text{(III.19)}$$

где

$$\mathrm{Re}_{кр} = \frac{2v_{кр}\delta}{\nu m_т} = \frac{2v_{кр}}{\nu\Gamma}.$$

На основании (III.19) уравнение (III.18) можно записать в виде:

$$v = 12^{-\frac{1}{n}} m_т (0{,}25\mathrm{Re}_{кр})^{\frac{n-1}{n}} \delta^{\frac{3-n}{n}} \mu^{\frac{n-2}{n}} \rho^{\frac{1-n}{n}} \left|\frac{dp}{dL}\right|^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{(III.20)}$$

где $n = 1 \div 1{,}75$.

При $n = 1{,}75$ имеем турбулентный режим. Если линейный закон нарушается, используется двучленная формула, учитывающая возрастающую роль сил инерции в связи с увеличением скоростей движения жидкостей и газов:

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = a\mu v + b\rho v^2, \qquad \text{(III.21)}$$

где a, b — некоторые постоянные.

Б. Ф. Степочкиным на основе обработки обширного экспериментального материала (по результатам опытных данных и заимствованного из различных литературных источников) для большого диапазона размеров (от нескольких микрон до 75 мм) твердых частиц разнообразной формы (слагающих продуктивные пласты) и интервала чисел Re от 10^{-6} до 10^{3}, получена двучленная формула:

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{1}{k}\left[\mu v + \frac{\rho d v^2}{120\,(1-m)}\right], \qquad \text{(III.22)}$$

где d — диаметр зерен, составляющих среду.

Согласно сказанному ранее, трещиноватую среду можно представлять в виде укрупненной пористой среды, где зернами являются блоки породы, а поровыми каналами — трещины.

Следовательно, уравнение (III.22) применительно к трещиноватой среде с учетом поправочного коэффициента α по Г. М. Ломизе запишется в виде:

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{1}{k_{\text{т}}}\left[\mu v + \frac{\rho d_{\text{бл}} v^2 \alpha}{120\,(1-m_{\text{т}})}\right], \qquad \text{(III.23)}$$

где $d_{\text{бл}}$ — средний линейный размер блока. Поправка $\alpha \approx 1{,}69$.

Для трещиновато-пористого пласта рассматривается скорость фильтрации в пористых блоках и в системе трещин. При этом в системе трещин нарушение линейного закона происходит раньше, чем в пористых блоках. Причем для фильтрации жидкости, газа в пористых блоках критериальная оценка нарушения линейного закона Дарси осуществляется на основании зависимостей, приведенных в главе II.

Глава IV

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. Одномерный фильтрационный поток. Потенциальное движение

Установившийся фильтрационный поток в пласте, в котором давление можно выразить в функции только одной линейной координаты, считается одномерным.

Представим себе в пористой или трещиноватой среде трубку тока переменного сечения (рис. 10) и допустим, что во всех сечениях, нормальных по отношению к кривой — оси трубки, площади сечения ΔF выражаются в функции длины l, отсчитываемой вдоль оси трубки

$$\Delta F = \Delta F(l). \qquad \text{(IV.1)}$$

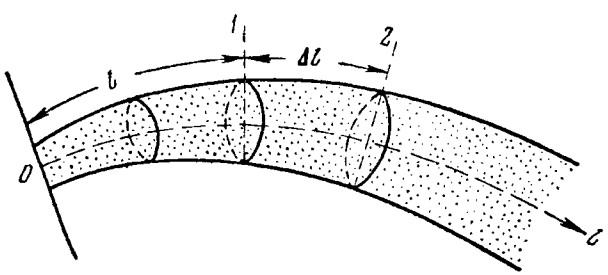


Рис. 10. Схема трубки тока в фильтрующей среде.

Пусть каждая нормальная к оси трубки поверхность является изобарической, т. е. поверхностью равного давления p. Если трубка тока неизменяема, давление можно считать зависящим только от одной линейной координаты l, а следовательно, поток — одномерным.

Из условия неразрывности потока следует, что *при установившейся одномерной фильтрации расход массы жидкости в единицу времени через все изобарические поверхности в трубке тока будет один и тот же.*

Кроме известной уже нам из § 4 главы II величины скорости фильтрации v, мы будем пользоваться еще алгебраической *величиной массовой скорости фильтрации* ρv, которую по аналогии с (II.11) определим так:

$$\rho v = \frac{dM}{dF}, \tag{IV.2}$$

где M — расход массы жидкости через поверхность равного давления; его мы можем назвать *массовым дебитом*. Полный установившийся фильтрационный поток можно рассматривать как непрерывную совокупность неизменяемых трубок тока, а массовый дебит M — как сумму расходов через соответствующие поверхности сечений всех этих трубок тока.

С другой стороны, в соответствии с законом Дарси (II.28) модуль массовой скорости фильтрации $|\rho v|$ можно записать так:

$$|\rho v| = \frac{dM}{dF} \operatorname{sign} M = \frac{k\rho}{\mu} \frac{dp}{dl} \operatorname{sign} \frac{dp}{dl}, \tag{IV.3}$$

где $\operatorname{sign} M$ и $\operatorname{sign} \frac{dp}{dl}$ — символы, показывающие, что в равенстве (IV.3) следует ставить тот знак, какой имеет в первом случае M, во втором dp/dl. (Латинское signum — знак).

Из равенства (IV.3) получим:

$$\frac{k\rho}{\mu} dp = \frac{dM}{dF} dl. \tag{IV.4}$$

Равенство (IV.4) применимо к несжимаемой или малосжимаемой жидкости, газу, газированной и многофазной жидкости. В случаях сжимаемой жидкости или газа плотность ρ изменяется в зависимости от давления p. Абсолютная вязкость μ зависит также от давления p. Коэффициент проницаемости фильтрующей среды k при неоднородности этой среды или неоднородности жидкости, а также при проявлении упругих свойств оказывается непостоянным, изменяющимся в зависимости от давления p.

Из этого следует, что множитель $k\rho/\mu$ левой части равенства (IV.4) в общем случае является переменным вдоль потока и его можно выразить в функции давления p.

После интегрирования (IV.4) найдем

$$\varphi = \int \frac{k\rho}{\mu} dp + C = \int \frac{dM}{dF} dl + C', \tag{IV.5}$$

где φ — функция, которую мы назовем *потенциальной* (потенциалом); C и C' — постоянные интегрирования.

Из (IV.5) видно, что φ может выражаться или в функции давления p, или же в функции линейной координаты l. Это объясняется тем, что p, как уже говорилось, однозначно определяется l.

Учитывая на основании (IV.4) и (IV.5), что левую часть равенства (IV.4) можно записать в виде

$$d\varphi = \frac{k\rho}{\mu} dp, \tag{IV.6}$$

представим равенство (IV.3) так:

$$\rho v = -\frac{d\varphi}{dl}. \qquad \text{(IV.7)}$$

Это есть уравнение закона фильтрации для любой жидкости или газа в случае существования потенциальной функции в одномерном потоке. Движение флюида при существовании потенциальной функции (IV.5) называется потенциальным.

Итак, на основании (IV.7) можем определить потенциальное движение жидкости, газа или их смеси в пористой или трещиноватой среде как такое, при котором массовая скорость фильтрации равна градиенту потенциальной функции. Как видим, формула (IV.7) обобщает закон Дарси для потенциального движения жидкости, газа или их смеси.

В самом деле, массовая скорость фильтрации оказывается пропорциональной величине градиента такой функции φ, которая определяется зависимостью параметров k, ρ, μ от давления p. Ранее же, формулируя в § 4 главы II закон Дарси, мы полагали, что скорость фильтрации зависит только от одной переменной — от величины градиента давления.

Подсчитаем массовый дебит. С этой целью возьмем формулы (IV.2) и (IV.7) и приравняем между собой правые их части. Умножаем затем обе части полученного равенства на dF и, проинтегрировав, находим:

$$M = \iint_{\Sigma} \frac{d\varphi}{dl}\, dF, \qquad \text{(IV.8)}$$

где $\sum$ — поверхность, массовый расход жидкости, газа или их смеси через которую равен M.

Примечание. Функцию, аналогичную φ, для случая движения газа и смеси нефти и газа в пласте использовал акад. Л. С. Лейбензон в своей монографии, опубликованной в 1934 г. Чтобы получить функцию, введенную Л. С. Лейбензоном, достаточно в подынтегральной функции (IV.5) положить $\frac{k}{\mu} = \text{const}$ и только множитель ρ считать переменным. (Лейбензон брал объемный вес γ).

Акад С. А. Христианович (1941 г.) применительно к случаю установившегося движения газированной жидкости в пористой среде рассматривал функцию, которую можно получить при посредстве (IV.5), если считать переменной в подынтегральной функции только k. Христианович назвал свою функцию фиктивным напором и обозначил H.

§ 2. Уравнения состояния жидкости, газа и пористой среды

Из предыдущего параграфа следует, что при установившемся течении жидкости для вычисления потенциальной функции $\varphi(p)$ по формуле (IV.5) надо знать зависимость параметров k, μ, ρ от давления p. При *изотермическом процессе такая зависимость выражает состояние жидкости, газа или их смеси и пласта.*

Зависимость определяется экспериментальным путем; плотность и вязкость жидкости (или газа), фазовая проницаемость породы, пропускающей сквозь свою толщу жидкость, записываются в функции от давления p.

Представим *уравнение состояния* в следующем виде:

$$\frac{\rho(p)\,k(p)}{\mu(p)} = \zeta(p), \tag{IV.9}$$

где $\zeta(p)$ — подынтегральная функция в (IV.5).

Если жидкость (или газ) однофазна и пласт однороден по проницаемости, множитель k постоянен. Во многих задачах промысловой практики, кроме того, постоянным считают коэффициент вязкости μ. Таким образом, если k и μ постоянные, уравнение состояния (IV.9) выражает зависимость между плотностью жидкости и давлением:

$$\rho = \zeta(p). \tag{IV.10}$$

При изложении вопроса о фильтрации неоднофазной жидкости, например газированной нефти, будет рассмотрено соответствующее этому случаю уравнение состояния, получаемое с помощью экспериментальных данных. Теперь же рассмотрим уравнение (IV.9) применительно к некоторым другим частным случаям.

1. Пусть в пористой среде движется *однородная несжимаемая жидкость*. Тогда плотность остается постоянной и уравнение (IV.9) приобретает следующий вид:

$$\rho = \text{const}. \tag{IV.11}$$

2. Предположим, что *однородная капельная жидкость сжимаема* и изменение ее объема происходит в соответствии с законом Гука. Мы можем воспользоваться величиной *коэффициента объемной упругости жидкости* $\beta_ж$, *который характеризует податливость жидкости изменению ее объема и показывает, на какую часть первоначального объема изменяется объем жидкости при изменении давления на единицу* (если давление измеряется в кгс/см^2, то на 1 кгс/см^2).

Основываясь на данном определении, напишем формулу для *коэффициента объемной упругости жидкости*:

$$\beta_ж = -\frac{1}{\tau_ж}\frac{d\tau_ж}{dp}, \tag{IV.12}$$

где $\tau_ж$ — объем жидкости; знак минус указывает на то, что объем $\tau_ж$ увеличивается с уменьшением давления.

Учитывая, что

$$\tau_ж = \frac{M}{\rho}, \quad d\tau_ж = -\frac{M d\rho}{\rho^2},$$

где M — масса жидкости в объеме $\tau_ж$, получим такое значение $\beta_ж$:

$$\beta_ж = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}. \tag{IV.13}$$

Вместо формулы (IV.12) можно пользоваться формулой, содержащей конечные приращения объема $\Delta\tau_ж$ и давления Δp:

$$\Delta\tau_ж = \beta_ж \tau_ж \Delta p. \qquad (IV.14)$$

Здесь изменение давления Δp берется по абсолютной величине. Размерность $[\beta_ж] = L^2P^{-1}$.

Если выражать давление в кгс/см^2, следует принять размерность коэффициента объемной упругости жидкости в см^2/кгс. *Величина, обратная коэффициенту объемной упругости жидкости, называется модулем объемной упругости жидкости.*

Коэффициент объемной упругости нефти $\beta_н$ зависит от состава нефти; он изменяется с изменением давления и температуры и в значительной мере зависит от количества газа, растворенного в нефти. Коэффициент объемной упругости негазированной («мертвой») нефти изменяется в довольно узких пределах. По результатам лабораторных исследований пластовой нефти значения $\beta_н$ заключены в следующих пределах:

$$\beta_н = (7 \div 30) \left\{ \begin{matrix} 0{,}102 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{н} \\ 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кгс} \end{matrix} \right\}. \qquad (IV.15)$$

Во многих случаях допустимо принимать значение $\beta_н = 10^{-4}$ см^2/кгс.

Коэффициент объемной упругости воды $\beta_в$ также изменяется в зависимости от давления, температуры и количества растворенного в воде газа, которое в свою очередь зависит от степени минерализации воды. Известно, что с увеличением давления $\beta_в$ уменьшается. При увеличении температуры до ~50° С величина $\beta_в$ уменьшается; при дальнейшем увеличении температуры $\beta_в$ увеличивается (при не слишком больших давлениях). В некотором диапазоне давлений коэффициент $\beta_в$ можно считать постоянным. Можно наметить такие предельные значения коэффициента объемной упругости воды:

$$\beta_в = (2{,}7 \div 5) \left\{ \begin{matrix} 0{,}102 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{н} \\ 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кгс} \end{matrix} \right\}. \qquad (IV.16)$$

Часто берут значение

$$\beta_в = 4{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{см}^2}{\text{кгс}}.$$

Очевидно, что *зависимость (IV.13) и есть уравнение состояния капельной сжимаемой жидкости.* Его можно представить в конечной форме. Для этого проинтегрируем (IV.13), получим

$$\rho = \rho_{ат} e^{\beta_ж (p - p_{ат})}, \qquad (IV.17)$$

где $\rho_{ат}$ — плотность при атмосферном давлении $p_{ат}$, равном 1 кгс/см^2.

Иногда можно пользоваться приближенным уравнением состояния.

Чтобы получить приближенное уравнение, разложим функцию ρ в ряд по степеням $\beta_ж (p - p_{ат})$. Удерживая ввиду малости $\beta_ж$ два первых члена ряда, найдем

$$\rho = \rho_{ат} + \rho_{ат}\beta_ж (p - p_{ат}). \qquad (IV.18)$$

3. Выясним форму уравнения состояния газа.

Если газ *идеальный*, то при изотермическом процессе справедлив закон Бойля — Мариотта, который может быть записан так:

$$\rho : \rho_{ат} = p : p_{ат}; \qquad (IV.19)$$

это равенство выражает уравнение состояния идеального газа.

Для *реальных* газов пользуются уравнением Клапейрона, вводя поправку на сжатие и расширение газов при помощи *коэффициента сжимаемости* z:

$$\frac{p}{\rho g} = zRT, \qquad (IV.20)$$

где g — ускорение свободного падения; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Для одного моля газа $R = 8{,}32 \cdot 10^3$ дж/град·кмоль.

Коэффициент сжимаемости z зависит от состава газа. Например, для метана значения z при различных условиях температуры и давления приведены на рис. 11.

4. В начале этого параграфа было отмечено, что зависимость (IV.9) является уравнением состояния в случае установившегося течения и постоянной температуры. Добавим, что то же уравнение используется и при неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде.

Если же в расчетах, связанных с неустановившейся фильтрацией, учитывают изменение объема порового пространства пласта вследствие перераспределения пластового давления, одного только уравнения состояния (IV.9) недостаточно для решения задачи. Необходимо еще и уравнение, характеризующее *изменение объема порового пространства*. Это уравнение вместе с уравнением (IV.9) применяется в исследованиях изменения пластового давления при упругом режиме нефтеводоносных пластов. Неустановившемуся движению жидкости в условиях упругого режима посвящена глава XII. В настоящем параграфе познакомимся с уравнением, описывающим изменение объема порового пространства в связи с изменением пластового давления. Предварительно выясним зависимость между пластовым давлением и давлением на скелет породы, слагающей продуктивный пласт.

Обозначим горное давление, т. е. давление на пласт, создаваемое весом вышележащих пород, через $p_{гор}$. Тогда давление на скелет породы $p_{ск}$, слагающей нефтеносный пласт, можно записать так:

$$p_{ск} = p_{гор} - p, \qquad (IV.21)$$

где p — пластовое давление.

Горное давление

$$p_{\text{гор}} = h\gamma_{\text{ср}},$$

где h — высота вышележащих пород; $\gamma_{\text{ср}}$ — средний вес единицы объема горных пород ($\gamma_{\text{ср}} \approx 24525$ н/м^3).

С уменьшением пластового давления p давление на скелет породы $p_{\text{ск}}$ возрастает, а объем порового пространства пласта уменьшается.

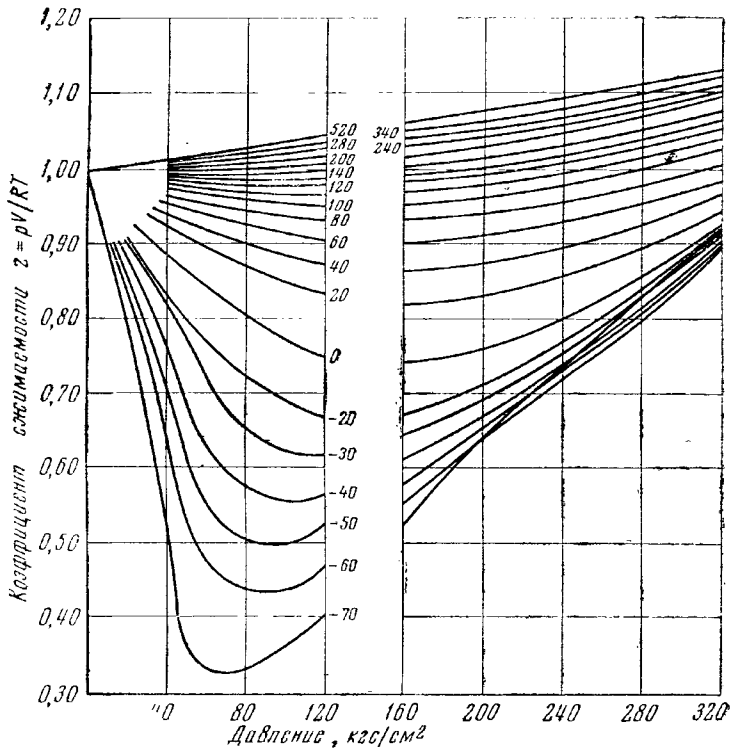


Рис. 11. Кривые изменения коэффициента сжимаемости для метана.

Кроме гидростатического давления, которое испытывает поверхность зерен породы, на объем порового пространства существенно влияет деформация пород на их контакте. Деформация пород на контакте — процесс обратимый.

К числу необратимых процессов, влияющих на изменение объема порового пространства, следует отнести процесс переупаковки зерен породы и деформирования цементирующего вещества.

Считаем пласт *однородной изотропной упругой средой, подчиняющейся закону Гука.* Если обозначим изменение объема порового

пространства для выделенного объема пласта τ через $\Delta\tau_п$, то это изменение можно определить так:

$$\Delta\tau_п = \beta_с \tau \Delta p, \tag{IV.22}$$

где $\beta_с$ — коэффициент объемной упругости пласта.

Из формулы (IV.22) и определяется $\beta_с$.

В символах дифференциального исчисления $\beta_с$ может выражаться следующим образом:

$$\beta_с = \frac{1}{\tau}\frac{d\tau_п}{dp} = -\frac{1}{\tau}\frac{d\tau_ж}{dp}^{*}. \tag{IV.23}$$

Для сильно и слабо сцементированных горных пород можно принимать значения $\beta_с$, заключенные в таких пределах:

$$\beta_с = (0{,}3 \div 2) \times \left\{ \begin{array}{l} 0{,}102 \cdot 10^{-9}\ м^2/н \\ 10^{-5}\ см^2/кгс \end{array} \right\}. \tag{IV.24}$$

Учитывая, что изменение пористости породы dm выражается формулой $dm = \frac{d\tau_п}{\tau}$, можем с помощью формулы (IV.23) представить изменение пористости так:

$$dm = \beta_с dp. \tag{IV.25}$$

Последнюю зависимость мы используем в главе, посвященной движению упругой жидкости в упругом пласте.

§ 3. Значение простейших задач одномерного потока для практики разведки и разработки пластов

В подземной гидравлике широко используются методы подземной гидрогазодинамики, являющейся разделом математической физики. Задачи одномерного потока относятся к классу *краевых задач математической физики*. Какова общая постановка такого рода задач?

Продуктивный пласт или выделенную из него часть можно рассматривать как некоторую область пространства, ограниченную поверхностями, сквозь которые либо происходит обмен жидкостью с внешней средой, либо обмена происходить не может ввиду их непроницаемости. В одном случае, например, этими граничными поверхностями пласта являются: контактная поверхность пласта с областью его питания (с дневной поверхностью, с естественным водоемом); открытая стенка скважины, ее забой. В другом случае граничную поверхность пласта представляет, например, непроницаемая

---

* $\frac{d\tau_ж}{dp}$ имеет то же значение, что и в формуле (IV.12).

для жидкости подошва — водоупор или граница пласта с непроницаемой породой, образовавшаяся вследствие тектонического нарушения (сброс).

Изучая перемещение жидкости в пласте, например приток ее к забою скважины, мы рассматриваем движение в области, ограниченной соответствующими поверхностями.

Практика разведки и разработки нефтегазоносных пластов обычно требует выяснения вопросов распределения давления в пласте.

В случае одномерного потока оказывается необходимым находить давление p в функции некоторой координаты l.

Чтобы получить единственное решение задачи одномерного потока, надо иметь *граничные условия*, т. е. условия на граничных поверхностях пласта. Обычно ставится один из таких видов граничных условий: а) на определенных границах выделенной области пласта, например на забое скважины, давление задается постоянным; б) на одной граничной поверхности области пласта задается расход или скорость жидкости, на другой — давление.

Если заданы граничные условия, то, следовательно, нам известны местоположения граничных поверхностей, размеры пласта, местонахождение скважины. В такой постановке задача является *прямой задачей подземной гидравлики.*

Довольно часто, однако, на практике приходится сталкиваться с *обратными задачами.* В задачах этого типа неизвестными служат те или иные параметры пласта, его размеры, форма границ. Распределение давления в пласте и дебит при этом должны быть заданы на основании промыслового наблюдения.

Большой практический интерес представляют задачи о продвижении водо-нефтяного контакта. Их также можно подразделить на прямые и обратные.

В прямых задачах о водо-нефтяном контакте развиваются рациональные методы прослеживания за его продвижением. Основной целью решения обратных задач является установление способов, дающих возможность управлять продвижением водо-нефтяного контакта.

Решения важных обратных задач подземной гидравлики принадлежат акад. П. Я. Полубариновой-Кочиной, А. М. Пирвердяну, И. А. Чарному и др. Обратные задачи о продвижении водо-нефтяного контакта поставлены Г. С. Салеховым. Решением их занимались В. Я. Булыгин, В. Л. Данилов, Н. Ф. Иванов, В. Ю. Ким, Г. С. Салехов, Б. А. Сейфуллина, В. С. Сидоренко, Г. П. Цыбульский, В. Д. Чугунов и др.

Рассмотрим простейшие виды одномерного течения жидкости, газа или их смеси в пласте.

1. Предположим, что в некоторой области пласта течение жидкости осуществляется так, что векторы скоростей ее фильтрации во всех точках параллельны между собой. Тогда в этой области пласта будем иметь тот вид одномерного потока, который называется *прямолинейно-параллельным.*

Приведем некоторые примеры прямолинейно-параллельного потока.

Допустим, что нефтеводоносный пласт имеет в плане полосообразную форму (рис. 12, *а*). Мощность пласта мало изменяется вдоль протяжения, так что ее можно считать везде одинаковой. Граничный контур пласта *ABCDE* непроницаем; он проходит по линии выклинивания или сбросового нарушения. Непроницаемы также кровля и подошва пласта. Батарея эксплуатационных скважин расположена параллельно начальному контуру нефтеносности *BD*. На некотором удалении от батареи скважин поток жидкости будет практически прямолинейно-параллельным.

Возьмем другой пример. Поток можно считать прямолинейно-параллельным на некотором участке между нагнетательной и эксплуатационной батареями скважин *Н* и *Э* (рис. 12, *б*). Относительно мощности пласта, его кровли и подошвы здесь сохраняются условия, оговоренные нами в предыдущем примере.

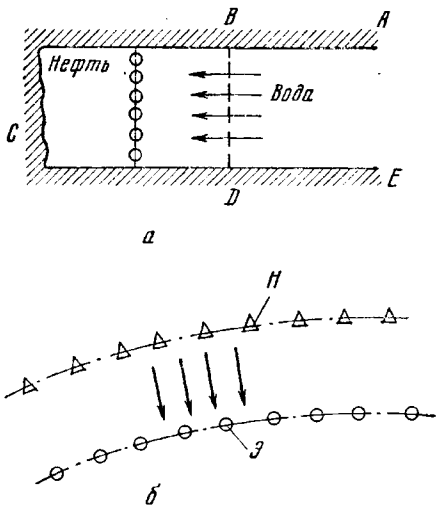


Рис. 12. Схема прямолинейно-параллельного потока жидкости в пласте полосообразной формы.

Для решения задач, относящихся к параллельноструйному течению жидкости в пласте, удобно представить себе модель, схематично изображающую пласт в виде прямоугольного параллелепипеда высотой *b*, которая здесь является мощностью пласта (рис. 13). Одна грань его *AA'D'D* служит границей пласта с областью питания, противоположная грань *BB'C'C* является поверхностью стока. Можно вообразить, что поверхность стока отграничивает пласт от прямолинейной галереи длиной *a*, в которую стекает жидкость из пласта. Грани *AA'D'D* и *DD'C'C* непроницаемы для жидкости.

Грань *A'B'C'D'* изображает непроницаемую кровлю пласта, грань *ABCD* — непроницаемую подошву.

Фильтрация жидкости осуществляется по всей толще пласта, мощность которого равна *b*. Пунктирными стрелками показаны на рисунке векторы скоростей фильтрации.

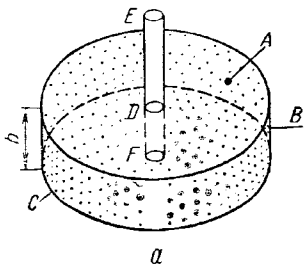
2. Рассмотрим горизонтальный пласт неограниченной протяженности, кровля *A* и подошва *C* которого непроницаемы (рис. 14, *а*). В пласте имеется единственная гидродинамически совершенная скважина. Гидродинамическое совершенство скважины определяется тем, что пласт вскрыт ею на всю мощность, скважина сообщается с продуктивным пластом через полностью открытую для жидкости

боковую поверхность, отделяющую ствол ее от продуктивного пласта. Кровля A и подошва C пласта параллельны друг другу.

На рис. 14, *а* изображена зона пласта, окружающая скважину EDF. Через всю часть DF стенки скважины может происходить обмен жидкостью между стволом и выделенной зоной пласта. На рис. 14, *б* показана та же зона в плане.

Если скважина EDF — эксплуатационная, то жидкость притекает извне через боковую поверхность B выделенной зоны равномерно со всех сторон. Внутри зоны жидкость образует сходящийся радиальный поток (рис. 14, *б*). Стоком жидкости является открытая боковая поверхность скважины DF.

Если EDF — нагнетательная скважина, источником питания жидкостью выделенной зоны пласта служит стенка скважины DF, а стоком — боковая поверхность зоны B. Поток будет радиально-расходящийся.



а

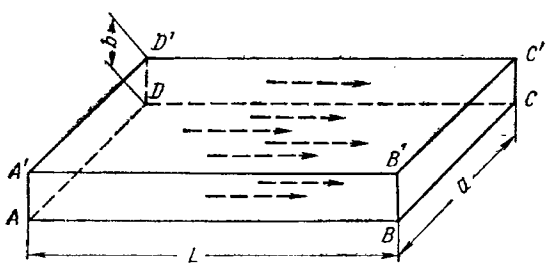
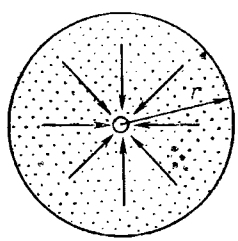


Рис. 13. Схема параллельноструйного течения жидкости в пласте.



б

Рис. 14. Схема плоско-радиального потока жидкости в пласте.

При условии, что движение жидкости осуществляется в пределах всей мощности пласта — от его подошвы до кровли, — рассматриваемое течение ее может быть названо *плоско-радиальным*.

В плоско-радиальном потоке давление и скорость фильтрации зависят исключительно от расстояния частицы жидкости от скважины. Таким образом, этот поток является другим видом одномерного потока.

В случае гидродинамически совершенной скважины плоско-радиальным потоком можно считать тот, который возникает в так называемой призабойной зоне пласта, т. е. в ближайшей к скважине зоне. Если скважина гидродинамически несовершенна, т. е. не вскрывает пласт на всю его мощность или ее боковая поверхность не полностью открыта для фильтрации жидкости, плоско-радиальный поток возникает не во всей призабойной зоне; в непосредственной близости к скважине линии тока искривляются, а следовательно,

здесь нарушается одномерность потока. Однако на некотором расстоянии от скважины в призабойной зоне поток допустимо в ряде случаев несовершенных скважин принимать за плоско-радиальный.

Иногда можно считать плоско-радиальным поток жидкости на некотором удалении от батареи эксплуатационных скважин, размещенных вдоль окружности. В этих случаях жидкость в пласте движется как бы к укрупненной скважине радиуса, равного радиусу окружности батареи.

3. Пусть в некоторой области пласта векторы скоростей фильтрации жидкости направлены вдоль пучка прямых, сходящихся в одной точке, причем давление и скорость фильтрации определяются исключительно расстоянием частицы жидкости от точки схода. Этот вид одномерного течения называется *сферически-радиальным потоком*. В условиях такого потока поверхностями равного давления (изобарами) [1] и поверхностями равных скоростей (изотахами) являются сферические поверхности.

Вообразим себе пласт неограниченной мощности с плоской непроницаемой горизонтальной кровлей $ABCD$, через которую скважина сообщается с пластом полусферическим забоем BEC (рис. 15).

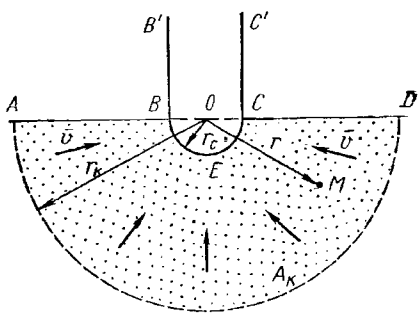


Рис. 15. Схема сферически-радиального потока жидкости в пласте.

Течение жидкости в пласте по направлению к забою скважины или в обратную сторону является сферически-радиальным. К этому виду потока будет близок тот, который поддерживается в пласте очень большой мощности, имеющем горизонтальную непроницаемую кровлю, вскрытую скважиной, не углубившейся в пласт.

Описанные три вида одномерного потока играют большую роль при решении многих задач нефтепромысловой практики. Они лежат в основе ряда исследований закономерностей течения жидкости в пласте в зависимости от принятой системы разработки или от конструктивных особенностей скважин. Естественно, что, моделируя каждый из трех видов одномерного потока, мы прибегаем к некоторой схематизации реальных пластов и движений жидкости, имеющих место в действительности.

Помимо того что рассмотренные здесь схемы воспроизводят хотя и приближенно простейшие случаи течения жидкости в реальном пласте, они помогают изучать более сложные виды потоков пластовой жидкости в тех случаях, в которых сложный фильтрационный

[1] В сферически-радиальном потоке изобарами являются поверхности равного приведенного давления — см. § 4 главы II.

поток удобно представлять себе состоящим из простейших видов потока.

К числу сложных потоков можно отнести, например, плоский фильтрационный поток в случае, когда число скважин не менее двух.

Перейдем к обоснованию расчетных формул для простейших одномерных потоков.

§ 4. Решение общего дифференциального уравнения трех простейших видов потенциального одномерного потока. Показатель формы потока

Во всех описанных в предыдущем параграфе случаях одномерного потока давление p, а следовательно, и потенциальная функция φ, зависят только от одной координаты.

Если жидкость вытесняется из пласта через сток-галерею или сток-скважину, условимся принимать за координату произвольной точки пласта расстояние r до этой точки от: 1) стока-галереи (для прямолинейно-параллельного потока), 2) центра контура стока-скважины в основной плоскости фильтрации (для плоско-радиального потока) и 3) центра полусферического забоя стока-скважины (для сферически-радиального потока). На модели прямолинейно-параллельного потока, изображенной на рис. 13, расстояние r отсчитывается таким образом от поверхности $BB'C'C$. На рис. 14, *а* расстояние r берется от точки F, если за основную плоскость течения принята подстилающая плоскость пласта C. На рис. 15 расстояние r отсчитывается от точки O схода всех векторов скоростей фильтрации.

Если жидкость внедряется в пласт через источник-галерею или источник-нагнетательную скважину, будем отсчитывать расстояние от источника-галереи или от соответствующего центра источника-скважины.

Каждый из трех простейших видов одномерного потока позволяет считать, что пласт есть своего рода укрупненная трубка тока и, значит, на всех изобарических (эквипотенциальных) поверхностях, определяемых уравнением $r = \text{const}$, массовый дебит M — величина постоянная (см. § 1 настоящей главы). В данном случае вместо равенства (IV.2) следует записать:

$$\rho v = \frac{M}{F(r)}, \tag{IV.26}$$

где $F = F(r)$ — площадь эквипотенциальной поверхности в функции координаты r. Отметим, что средняя скорость фильтрации на некоторой эквипотенциальной поверхности совпадает в данном случае со скоростью фильтрации в любой точке этой поверхности.

Для прямолинейно-параллельного потока площадь F не зависит от координаты r и определяется так (см. рис. 13):

$$F = ab.$$

Для радиальных потоков имеем указанные ниже значения площади изобарической поверхности:

Вид потока	
плоско-радиальный	сферически-радиальный
$F(r)=2\pi br$	$F(r)=2\pi r^2$

Обратимся теперь к равенству (IV.7). В случае описанных здесь трех простейших потоков оно представится так:

$$\rho v=\frac{d\varphi}{dr}. \tag{IV.27}$$

Из (IV.27) видим, что положительной массовая скорость фильтрации будет в случаях, когда r отсчитывается от стока.

Приравнивая правые части равенства (IV.26) и (IV.27), получим *общее дифференциальное уравнение трех простейших видов потенциального одномерного потока*:

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{M}{Ar^j}, \tag{IV.28}$$

где A и j имеют значения, указанные в табл. 1.

Таблица 1

Значения A и j для отдельных видов одномерного потока

Вид потока	Множитель A	Показатель формы потока j
Прямолинейно-параллельный	ab (a — см. рис. 13)	0
Плоско-радиальный	$2\pi b$	1
Сферически-радиальный	2π	2

Массовый дебит M в уравнении (IV.28), очевидно, содержит тот знак, который имеет производная левой части. По принятому нами в настоящем параграфе условию надо считать, что дебит M положителен, если r отсчитывается от стока, т. е. галерея или скважина — эксплуатационная; M — отрицателен, если жидкость или газ нагнетаются в пласт. Разделив в (IV.28) переменные и интегрируя, найдем, что

$$\varphi=\frac{M}{A}\frac{r^{1-j}}{1-j}+C, \tag{IV.29}$$

где C — произвольная постоянная.

Формула (IV.29) дает общее решение уравнения (IV.28), справедливое при значениях $j = 0; 2$. При $j = 1$ (случай плоскорадиального потока) можно условиться, что $\frac{r^{1-j}}{1-j} = \ln r$. Тогда мы получим взамен (IV.29) такое выражение для φ:

$$\varphi = \frac{M}{2\pi b} \ln r + C. \qquad \text{(IV.30)}$$

Это решение есть результат непосредственного интегрирования уравнения (IV.28) при условии, что $j = 1$. Остается найти единственное решение, соответствующее заданным граничным условиям.

Для нахождения единственного решения определим, пользуясь граничными условиями, произвольную постоянную C в равенствах (IV.29) и (IV.30). Здесь могут представиться, например, два нижеследующих варианта задачи.

В одном варианте нам известны: постоянный массовый дебит M и значение потенциальной функции φ на одной из граничных поверхностей рассматриваемой области пласта, например, на стенке (забое) эксплуатационной скважины или галереи. Пусть на указанной граничной поверхности $r = r_c$, а $\varphi = \varphi_c$. Подставляя эти значения r и φ в равенство (IV.29), находим C, после чего решение уравнения (IV.28) получит такой вид:

$$\varphi = \varphi_c + \frac{M}{A} \frac{r^{1-j} - r_c^{1-j}}{1-j}. \qquad \text{(IV.31)}$$

В другом варианте требуется определить постоянный массовый дебит M, а заданы значения функции φ на двух граничных поверхностях пласта, например на стенке (забое) эксплуатационной скважины или галереи и на границе пласта с областью питания.

Пусть при $r = r_c$ функция $\varphi = \varphi_c$, а при $r = r_к$ функция $\varphi = \varphi_к$. Подставляя в равенство (IV.29) один раз значения $r_к$ и $\varphi_к$, а другой раз значения r_c и φ_c и исключая из двух полученных уравнений постоянную C, найдем массовый дебит M или объемный дебит Q:

$$\left.\begin{aligned} M &= A \frac{(1-j)(\varphi_к - \varphi_c)}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}} \\ Q &= \frac{M}{\rho}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.32)}$$

где значения A и j приведены в табл. 1.

Исключая из (IV.31) величину $\frac{M}{A}$, при помощи формулы (IV.32) получим:

$$\frac{\varphi - \varphi_c}{\varphi_к - \varphi_c} = \frac{r^{1-j} - r_c^{1-j}}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}}. \qquad \text{(IV.33)}$$

По формуле (IV.33) можно определять значение функции φ для любой точки пласта с координатой r, если дебит M не известен.

В случае плоско-радиального потока ($j = 1$) соответственно рассмотренным выше двум вариантам задачи и поставленным граничным условиям получим равенства:

$$\varphi = \varphi_c + \frac{M}{2\pi b} \ln \frac{r}{r_c}; \tag{IV.34}$$

$$M = 2\pi b \frac{\varphi_к - \varphi_c}{\ln \frac{r_к}{r_c}}; \tag{IV.35}$$

$$\frac{\varphi - \varphi_c}{\varphi_к - \varphi_c} = \frac{\ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \tag{IV.36}$$

Итак, *формулы (IV.30), (IV.34) – (IV.36) действительны только в случае плоско-радиального потенциального потока любой жидкости. Для всех остальных случаев потенциального одномерного потока имеем формулы (IV.29), (IV.31)—(IV.33).*

Заметим, что при рассмотрении в этом параграфе простейших потенциальных одномерных потоков любой жидкости мы фиксировали внимание только на одном отличительном признаке потоков — на их форме (виде); поток характеризовался как бы с геометрической точки зрения. Форма потока нашла свое выражение в показателе j ($j = 0; 1; 2$). Мы пока не рассматривали вопрос о различиях, которые может внести в существо дела природа самой жидкости. Обобщая решение задачи на все виды жидкости, мы отвлекаемся от ее физических свойств. Особенностям одномерного потока, обусловленным свойствами той или иной жидкости или газа, будут посвящены соответствующие параграфы.

§ 5. Общие дифференциальные уравнения простейших одномерных потоков при нелинейном законе фильтрации

Если в некоторой области пласта с одномерным фильтрационным потоком действует нелинейный закон фильтрации, общее дифференциальное уравнение, описывающее движение, будет иметь иной вид, чем (IV.28).

Пусть, например, нелинейный закон фильтрации задан формулой (II.50). Выражение массовой скорости фильтрации тогда можно записать так:

$$\rho v = \left(\frac{d\theta}{dr} \operatorname{sign} \frac{d\theta}{dr} \right)^{\frac{1}{n}} \operatorname{sign} v, \tag{IV.37}$$

и *дифференциальное уравнение* представится

$$\left(\frac{M}{Ar^j \operatorname{sign} M} \right)^n = \frac{d\theta}{dr} \operatorname{sign} \frac{d\theta}{dr},$$

где θ — вспомогательная функция, определяемая следующим образом:

$$\theta = \int \zeta_1(p)\, dp + C_2. \tag{IV.38}$$

Здесь C_2 — постоянная интегрирования, а $\zeta_1(p)$ выражает зависимость коэффициента C, взятого из формулы (II.50), от давления p:

$$\zeta_1(p) = (ak^x \mu^y \rho^{z+1})^n. \tag{IV.39}$$

Значения безразмерного a в (IV.39) — см. формулу (II.64); значения показателей x, y, z — см. формулы (II.63).

Путем интегрирования дифференциального уравнения (IV.37) можно вычислить значение вспомогательной функции θ:

$$\theta = \left(\frac{M}{A \operatorname{sign} M}\right)^n \frac{r^{1-jn}}{1-jn} \operatorname{sign} M + C_2', \tag{IV.40}$$

где C_2' — постоянная интегрирования; значения A приводятся в табл. 1.

При данных граничных условиях из (IV.40) найдем:

$$\frac{\theta - \theta_c}{\theta_к - \theta_c} = \frac{r^{1-jn} - r_c^{1-jn}}{r_к^{1-jn} - r_c^{1-jn}};$$
$$M = A \operatorname{sign} M \left[\operatorname{sign} M \frac{(1-jn)(\theta_к - \theta_c)}{r_к^{1-jn} - r_c^{1-jn}}\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{IV.41}$$

Здесь $\theta_к$ и θ_c — значения θ при $r = r_к$ и $r = r_c$ соответственно.

Если $n = 1$ (закон Дарси), значения функции θ выражают значения потенциальной функции φ и формулы (IV.41) совпадают соответственно с формулами (IV.32) и (IV.33).

Как уже указывалось, двучленные формулы типа (II.51) и (II.58) вернее отражают физическую сущность процесса, чем одночленные формулы. Выведем дифференциальное уравнение, основанное на двучленной формуле закона фильтрации, и покажем его решение.

Умножим все члены равенства (II.58) на ρ и запишем его в дифференциальной форме применительно к простейшим видам одномерного потока:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{M}{Ar^j} \operatorname{sign} M + \frac{k}{\mu k_\rho} \frac{M^2}{(Ar^j)^2}, \tag{IV.42}$$

где в данном случае вспомогательная функция

$$\theta = \int \frac{k\rho}{\mu} dp + C_3; \tag{IV.43}$$

C_3 — постоянная интегрирования, остальные обозначения прежние.

После разделения переменных и интегрирования (IV.42) получим:

$$\theta = \frac{M}{A}\frac{r^{1-j}}{1-j}\operatorname{sign} M + \frac{k}{\mu k_\rho}\left(\frac{M}{A}\right)^2 \frac{r^{1-2j}}{1-2j} + C_4, \qquad \text{(IV.44)}$$

где C_4 — новая постоянная интегрирования.

При помощи граничных условий найдем:

$$\theta_к - \theta_с = \frac{M}{A}\frac{r_к^{1-j} - r_с^{1-j}}{1-j}\operatorname{sign} M + \left(\frac{M}{A}\right)^2 \frac{k}{\mu k_\rho}\frac{r_к^{1-2j} - r_с^{1-2j}}{1-2j}. \qquad \text{(IV.45)}$$

Решая уравнение (IV.45) относительно M, найдем массовый дебит.

§ 6. Потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости

В этом и следующих параграфах мы будем применять общие дифференциальные уравнения одномерного потока, приведенные в §§ 4 и 5 этой главы, к особенностям той или иной жидкости или газа. Чтобы описывать картину движения и исследовать течение жидкости или газа в пласте с учетом их физических свойств, следует придерживаться такого порядка.

1. Находится *уравнение состояния* по формуле (IV.9) или по формулам (IV.38) и (IV.39) с помощью определенного физического закона, выражающего состояние рассматриваемой жидкости или газа.

2. Определяется функция состояния $\zeta(p)$ или $\zeta_1(p)$ из уравнения состояния. Подставив $\zeta(p)$ в формулу (IV.5), находят зависимость потенциальной функции φ от давления p, если движение потенциальное; подставив $\zeta_1(p)$ в формулу (IV.38) или (IV.43), находят зависимость вспомогательной функции θ от давления, если фильтрация происходит по нелинейному закону.

3. Устанавливается форма потока и определяется показатель формы j. Найденную $\varphi = \varphi(p)$ подставляют в формулы (IV.29), (IV.31), (IV.33) или (IV.30), (IV.34), (IV.36), если движение потенциальное; $\theta = \theta(p)$ подставляют в формулу (IV.40) или (IV.44), если закон фильтрации нелинейный. Таким путем получают зависимость между давлением p и основной координатой r; эта зависимость показывает распределение давления в пласте. График этой зависимости называют *пьезометрической линией*.

4. Определяется массовый или объемный дебит на основе граничных условий по формулам (IV.32) или (IV.35), если движение потенциальное, и по формуле (IV.41) или (IV.45), если закон фильтрации нелинейный. Зависимость между дебитом и разностью значений $\varphi_к - \varphi_с$ или $\theta_к - \theta_с$ позволяет построить так называемую *индикаторную линию, которая в нефтепромысловой практике есть графическое представление зависимости дебита от перепада давления* $\Delta p_с = p_к - p_с$ ($p_к$ — давление на контуре питания пласта, $p_с$ — давление на контуре стока).

5. Определяется *время движения частицы жидкости по прямолинейной траектории* с учетом соотношения между скоростью

фильтрации v и средней скоростью движения u (см. формулу (II.15); для этого замечаем, что $u = \frac{dr}{dt}$. Далее используем формулы (IV.27)—(IV.28) или (IV.37), (IV.42).

В настоящем параграфе указанный ход исследования потока покажем на примере потенциального движения однородной несжимаемой жидкости.

Однородную несжимаемую жидкость рассматриваем как однофазную с неизменной вязкостью. Учитываем замечания, сделанные в § 2 настоящей главы перед формулой (IV.10) и уравнение состояния (IV.11). Тогда величина $\zeta(p)$ в формуле (IV.10) оказывается постоянной, равной $\zeta(p) = C' = \text{const}$. Потенциальная функция φ, вычисленная по формуле (IV.5), имеет следующее значение:

$$\varphi = C'p + C, \qquad \text{(IV.46)}$$

т. е. между φ и p существует линейная зависимость.

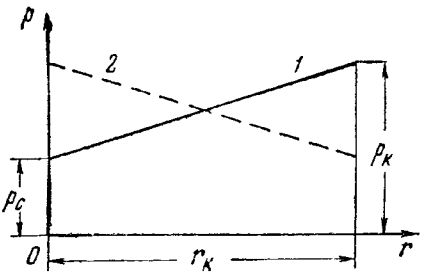


Рис. 16. Пьезометрическая линия для прямолинейно-параллельного потока однородной несжимаемой жидкости:
1 — для эксплуатационной галереи; 2 — для нагнетательной галереи.

Заменяя в формуле (IV.33) величины φ, $\varphi_к$ и $\varphi_с$ соответствующими значениями, выраженными формулой (IV.46), найдем зависимость между давлением p и координатой r при условии, что $j \neq 1$:

$$\frac{p - p_с}{p_к - p_с} = \frac{r^{1-j} - r_с^{1-j}}{r_к^{1-j} - r_с^{1-j}}. \qquad \text{(IV.47)}$$

Если $j = 1$, на основании формулы (IV.36) получим зависимость:

$$\frac{p - p_с}{p_к - p_с} = \frac{\ln \frac{r}{r_с}}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.48)}$$

Например, для прямолинейно-параллельного потока однородной несжимаемой жидкости ($j = 0$) давление p зависит линейно от расстояния r, пьезометрическая линия представляет собой прямую, наклонную к оси расстояний r (рис. 16).

Чтобы наглядно представить характер изменения давления по пласту для одного из двух других видов одномерного потока несжимаемой жидкости, например плоско-радиального, приведем численные расчеты по формуле (IV.48), положив, что $j = 1$.

Для однородной несжимаемой жидкости вместо понижения давления в скважине $p_к - p_с$ рассмотрим величину *понижения ее динамического уровня под статическим*

$$S_с = \frac{p_к - p_с}{\gamma},$$

где γ — вес единицы объема жидкости.

Взамен величины $p_к - p_с$ удобно определять при этом значение *понижения пьезометрического уровня жидкости* $S = \frac{p_к - p}{\gamma}$. Понижения $S_с$ и S вводятся в формулу (IV.48) описанным ниже способом.

Прибавим к числителям левых частей формулы (IV.48) величину $p_к$ и ее же вычтем. Кроме того, к числителю правой части формулы (IV.48) прибавим $\ln r_к$ и вычтем ее. Тогда получим

$$\frac{p_к - p}{p_к - p_с} = \frac{S}{S_с} = \frac{\ln \frac{r_к}{r}}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.49)}$$

Результаты расчетов по формуле (IV.49) сведены в табл. 2.

Таблица 2

Понижения пьезометрических уровней S, выраженных в процентах по отношению к понижению динамического уровня жидкости в эксплуатационной скважине $S_с$, для плоско-радиального потока однородной несжимаемой жидкости по закону Дарси ($r_к = 10$ км; $r_с = 10$ см)

Расстояние от оси скважины r, м	0,1	1	10	100	1000	10 000
$\frac{r_к}{r}$	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1
Понижение $\frac{S}{S_с} \cdot 100\%$	100	80	60	40	20	0
Потери понижения $100\left(1 - \frac{S}{S_с}\right)$, %	0	20	40	60	80	100

Примечание. Расчеты проводились по формуле (IV.49).

Из табл. 2 следует, что довольно резкое понижение пьезометрического уровня наблюдается в ближайшей к скважине области пласта. Так, на протяжении 9 км в области между $r = 1$ км и $r_к = 10$ км потеря понижения S составляет всего 20%, но такая же потеря понижения у скважины в области между $r_с = 0{,}1$ м и $r = 1$ м, т. е. только на расстоянии, меньшем 1 м.

Карта изобар для плоско-радиального потока, сходящегося или расходящегося, представляет собой семейство концентрических окружностей (рис. 17). Окружность наименьшего радиуса есть контур скважины. Уравнение семейства этих окружностей получается из формулы (IV.49). В формуле принято, что $p = \text{const}$, откуда

следует, что $r = \text{const}$. Последнее уравнение и выражает семейство окружностей.

Для плоско-радиального потока массовый дебит подсчитывается по следующей формуле, полученной из формулы (IV.35):

$$M = 2\pi b \frac{k\rho}{\mu} \frac{p_к - p_с}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.50)}$$

Разделяя равенство (IV.50) на плотность жидкости $\rho = \text{const}$, получим объемный дебит Q:

$$Q = \frac{2\pi b k (p_к - p_с)}{\mu \ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.51)}$$

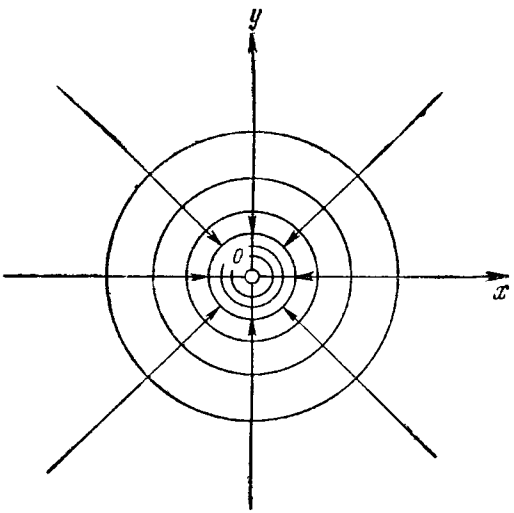


Рис. 17. Карта изобар для плоско-радиального потока.

Формулу (IV.51) принято называть *формулой Дюпюи*.

Введем следующее обозначение:

$$\eta = \frac{2\pi b k}{\mu \ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.52)}$$

Представим теперь формулу (IV.51) так:

$$Q = \eta \Delta p_с, \qquad \text{(IV.53)}$$

где $\Delta p_с = p_к - p_с > 0$.

Зависимость между $\Delta p_с$ и Q — линейная. Прямая, построенная в координатах Q и $\Delta p_с$ при помощи формулы (IV.53), — индикаторная линия.

Величина $\eta = Q/\Delta p_с$ называется *коэффициентом продуктивности*.

Легко понять, что η в данном случае численно равен тангенсу угла наклона прямой к оси перепадов $\Delta p_с$; $\eta = \text{const}$.

Массовая скорость фильтрации для простейшего одномерного потока определяется по формуле (IV.26).

В § 4 после формулы (IV.26) приводятся значения площади изобарической поверхности F, соответствующие каждому виду одномерного потока. Пользуясь этими значениями и формулой (IV.26), приходим к выводу, что при $\rho = \text{const}$ *для прямолинейно-параллельного потока скорость фильтрации v неизменна вдоль координаты r; в плоско-радиальном потоке v обратно пропорциональна расстоянию от оси скважин; в сферически-радиальном потоке v обратно пропорциональна квадрату расстояния от общего центра всех полусферических поверхностей — изобар.*

Найдем теперь время движения частицы жидкости вдоль координаты r.

Скорость перемещения частицы жидкости вдоль координаты r

$$u = \frac{dr}{dt}. \tag{IV.54}$$

Формула (IV.54) выражает величину некоторой средней скорости течения, взятой для площади ($r = \text{const}$), нормальной к данному одномерному потоку. Определяя, согласно формуле (II.15), величину скорости фильтрации v для той же площади, найдем, что

$$v = mu = m\frac{dr}{dt}. \tag{IV.55}$$

Заметим, что левая часть формулы (IV.28) есть массовая скорость фильтрации. Разделяя ее на $\rho = \text{const}$, получим величину скорости фильтрации в функции координаты r; пользуясь затем формулой (IV.55), составим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{Q}{Ar^j} = m\frac{dr}{dt}. \tag{IV.56}$$

Значения A и j приведены в табл. 1.

Допустим, что движение частицы жидкости рассматривается между двумя точками пласта, имеющими координаты r_0 и r. Интегрируя уравнение (IV.56), получим формулу для подсчета времени движения частицы t:

$$t = \frac{Am\,(r_0^{1+j} - r^{1+j})}{(1+j)\,Q}. \tag{IV.57}$$

Если одна из координат (r_0 или r) определяет радиус скважины или координату галереи, можно по формуле (IV.57) подсчитывать время отдачи или время поглощения жидкости пластом при поддержании постоянного дебита Q.

Пусть, например, требуется найти время вытеснения жидкости из области пласта протяженностью $r_0 - r_c$, где r_c обозначает в прямолинейно-параллельном потоке координату галереи-стока, в радиальном потоке — радиус скважины. Если при этом $r_0 \gg r_c$, мы можем пренебречь в формуле (IV.57) величиной r^{1+j} (в прямолинейно-параллельном потоке допустимо принимать, например, что $r_c = 0$). Тогда из формулы (IV.57) получим время отбора несжимаемой жидкости, заполнявшей область пласта протяженностью $r_0 - r_c$. Обозначив его T, запишем:

$$T = \frac{Amr_0^{1+j}}{(1+j)\,Q}. \tag{IV.58}$$

Нетрудно понять, что величина Amr_0^{1+j}: $(1 + j)$ в формуле (IV.58) выражает с некоторой степенью точности объем жидкости, извлеченной из пласта за время T.

Для извлечения из пласта данного количества жидкости за определенный промежуток времени требуется поддерживать определенный дебит Q. Установление этого дебита связано с созданием такой депрессии $\Delta p_c = p_к - p_c$, которая обусловлена действующим при этом законом фильтрации и видом одномерного потока. Очевидно, что *для несжимаемой жидкости с повышением депрессии* Δp_c *всегда повышается дебит* — см. формулы (IV.50) и (IV.51). Вместе с тем повышение дебита, вызывающее повышение скорости фильтрации, может изменять действующий закон фильтрации во всей рассматриваемой области пласта или в некоторой ее части, что усложняет расчет дебита. Более сложные случаи потока мы рассмотрим далее.

Можно принимать, что напорное движение несжимаемой жидкости в нефтеносном пласте происходит в случаях так называемого жесткого водонапорного режима пласта. В процессе разработки нефтяной залежи в условиях водонапорного режима доминирующей формой пластовой энергии является энергия воды, вытесняющей нефть к скважинам. При этом закачка воды через нагнетательные скважины или естественный приток краевой (контурной) воды компенсирует отбор жидкости из скважины.

§ 7. Потенциальное движение малосжимаемой жидкости

Используя уравнение состояния (IV.13), находим значение dp и подставляем его в формулу (IV.5). Вычисленная таким образом потенциальная функция φ принимает следующий вид:

$$\varphi = C''\rho + C, \tag{IV.59}$$

где

$$C'' = k\mu^{-1}\beta_ж^{-1}. \tag{IV.60}$$

Подобно тому как в случае однородной несжимаемой жидкости существует линейная зависимость между функцией φ и давлением p, *в установившемся потоке малосжимаемой жидкости существует линейная зависимость между* φ *и плотностью* ρ. Это значит, что для сжимаемой жидкости зависимость между ρ и координатой r выражается точно такими формулами, какими выражается зависимость между p и r при однородной несжимаемой жидкости.

Заменяя в формулах (IV.47) и (IV.48) величины p, $p_к$ и p_c соответствующими значениями ρ, получим зависимость ρ от r.

Найдем распределение давления в пласте.

Чтобы найти зависимость между p и r, подставим в уравнения, связывающие переменные ρ и r, значения ρ, $\rho_к$ и ρ_c, определяемые уравнением состояния (IV.17). Тогда для малосжимаемой жидкости получим следующие равенства:

при $j \neq 1$

$$\frac{e^{\beta_ж p} - e^{\beta_ж p_c}}{e^{\beta_ж p_к} - e^{\beta_ж p_c}} = \frac{r^{1-j} - r_c^{1-j}}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}}; \tag{IV.61}$$

при $j = 1$

$$\frac{e^{\beta_ж p} - e^{\beta_ж p_c}}{e^{\beta_ж p_к} - e^{\beta_ж p_c}} = \frac{\ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \qquad \text{(IV.62)}$$

Но если взять приближенное уравнение состояния (IV.18), мы придем к тем зависимостям между p и r, которые выражаются формулами (IV.47) и (IV.48). Следовательно, *приближенные зависимости ничем не отличаются от зависимостей для несжимаемой жидкости.*

Массовый дебит в случае малосжимаемой жидкости определяется из формулы (IV.32) при $j \neq 1$ и из формулы (IV.35) при $j = 1$. В обе формулы подставляются значения $\varphi_к$ и φ_c, определяемые формулой (IV.59). Формула (IV.32) представится так:

$$M = AC'' \frac{(1-j)(\rho_к - \rho_c)}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}}, \qquad \text{(IV.63)}$$

где C'' — см. формулу (IV.60).

Формула (IV.35) будет иметь такой вид:

$$M = \frac{2\pi bk}{\mu\beta_ж} \cdot \frac{\rho_к - \rho_c}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \qquad \text{(IV.64)}$$

Приближенные формулы для вычислений массового дебита M можно получить при помощи приближенного уравнения состояния (IV.18). Взамен формулы (IV.63) будем иметь:

$$M = AC''\rho_{ат}\beta_ж \frac{(1-j)(p_к - p_c)}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}}, \qquad \text{(IV.65)}$$

а вместо формулы (IV.64)

$$M = \frac{2\pi bk\rho_{ат}}{\mu} \frac{p_к - p_c}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \qquad \text{(IV.66)}$$

Разделив M на плотность ρ, найдем объемный дебит Q, приведенный к тому давлению, которому соответствует плотность ρ. Так, приводя объемный дебит к атмосферному давлению в 1 кгс/см^2, делим M на $\rho_{ат}$. Тогда, например, *формула для объемного дебита при $j = 1$ будет совпадать с формулой (IV.51), справедливой для несжимаемой жидкости.*

Пренебрегать в установившемся потоке сжимаемостью жидкости, т. е. пользоваться при расчетах давления и дебита формулами § 6, возможно при условии достаточно малой величины коэффициента $\beta_ж$ и не очень большого перепада давления $p_к - p_c$.

Как уже отмечалось в § 1 настоящей главы, массовый дебит M остается неизменным вдоль всего одномерного установившегося потока. Что же касается объемного дебита Q, то он сохраняет свою величину вдоль потока только в случае несжимаемой жидкости.

Массовая скорость фильтрации изменяется вдоль основной координаты r в случае сжимаемой жидкости по тому же закону, по которому массовая скорость ρv и скорость фильтрации v изменяются в зависимости от r в случае однородной несжимаемой жидкости (см. § 6 настоящей главы).

Время движения частицы сжимаемой жидкости рассчитывается так же, как и для несжимаемой жидкости, — см. § 6 настоящей главы.

§ 8. Потенциальное движение идеального газа

Исследования показали, что хотя при установившейся фильтрации газа и происходит понижение температуры, оно относительно невелико (даже при больших перепадах давления). Во многих случаях можно принимать для практических целей, что *установившаяся фильтрация газа в пористых породах совершается в условиях изотермического изменения его состояния.*

Рассмотрим одномерное потенциальное течение идеального газа в условиях изотермического процесса. Чтобы получить общее выражение потенциальной функции φ для идеального газа, обратимся к уравнению состояния (IV.19). Положим

$$\mu = \text{const}.$$

Произведя обычным порядком вычисления φ по формуле (IV.5), найдем с помощью формулы (IV.19), что

$$\varphi = C''' p^2 + C, \tag{IV.67}$$

где

$$C''' = \frac{1}{2} k\mu^{-1} \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}}. \tag{IV.67а}$$

В данном случае имеем *линейную зависимость между функцией* φ *и квадратом давления* p^2 — см. (IV.67); следовательно, формулы (IV.33) и (IV.36) применительно к идеальному газу запишутся так:

формула (IV.33) при $j \neq 1$

$$\frac{p^2 - p_c^2}{p_к^2 - p_c^2} = \frac{r^{1-j} - r_c^{1-j}}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}}; \tag{IV.68}$$

формула (IV.36) при $j = 1$

$$\frac{p^2 - p_c^2}{p_к^2 - p_c^2} = \frac{\ln \frac{r}{r_c}}{\ln \frac{r_к}{r_c}}. \tag{VI.69}$$

По формулам (IV.68) и (IV.69) можно определять давление p в любой точке газового пласта при соответствующих значениях j и при заданных граничных давлениях $p_к$ и p_c.

Сравним данные о давлении в случае потока газа с соответствующими данными для однородной несжимаемой жидкости, движущейся в тех же пластовых условиях, что и газ. Ограничимся примером плоско-радиального сходящегося потока. Пусть давление на стенке скважины $p_c = 0$; $r_к = 750$ м; $r_c = 0{,}1$ м. Табл. 3, составленная по формулам (IV.48) и (IV.69), позволяет провести интересующее нас сравнение.

Из табл. 3 видим, что для газа давление вблизи стенок скважины изменяется более резко, чем для несжимаемой жидкости. Пьезометрическая кривая для газа имеет, следовательно, более пологий характер на большем своем протяжении, чем кривая несжимаемой жидкости; однако у нее более резкий изгиб у стенки скважины, чем у кривой несжимаемой жидкости.

Таблица 3

Понижения давления ($p_к - p$), выраженные в процентах по отношению к депрессии в эксплуатационной скважине $\Delta p_c = p_к - p_c$, для плоско-радиальных потоков несжимаемой жидкости и газа ($r_к = 750$ м, $r_c = 10$ см, $p_c = 0$)

Наименование	Поток	Расстояние от оси скважин r, м				
		0,1	1	10	100	750
		$r_к/r$				
		7500	750	75	7,5	1
Понижение давления, % $100\frac{p_к - p}{p_к}$	Несжимаемая жидкость	100	74,2	49,7	22,9	0
	Газ	100	49,2	28,1	12,2	0

Найдем дебит галереи и скважины. Значения $\varphi_к$ и φ_c, определяемые по формуле (IV.67), подставим в формулы (IV.32) и (IV.35). Тогда для $j \neq 1$ получим:

$$M = AC''' \frac{(1-j)(p_к^2 - p_c^2)}{r_к^{1-j} - r_c^{1-j}}, \qquad \text{(IV.70)}$$

где C''' — см. формулу (IV.67а).

При $j = 1$ имеем:

$$M = \frac{\pi b k p_{ат}}{\mu p_{ат}} \frac{p_к^2 - p_c^2}{\ln \frac{r_к}{r_c}} \qquad \text{(IV.71)}$$

Если обе части формул (IV.70) и (IV.71) разделить на $\rho_{ат}$, мы получим формулы для соответствующих объемных дебитов Q, приведенных к атмосферному давлению:

$$Q = A\frac{1-j}{2}\cdot k\mu^{-1}p_{ат}^{-1}\frac{p_к^2 - p_с^2}{r_к^{1-j} - r_с^{1-j}}; \qquad \text{(IV.72)}$$

$$Q = \frac{\pi bk}{\mu p_{ат}}\frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln\frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.73)}$$

Составим уравнение индикаторной линии, т. е. уравнение зависимости между Q (или M) и $\Delta p_с = p_к - p_с$. С этой целью обозначим

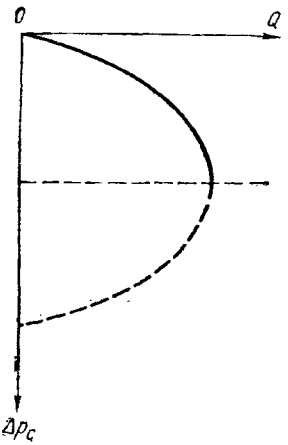


Рис. 18. Индикаторная диаграмма газовой скважины.

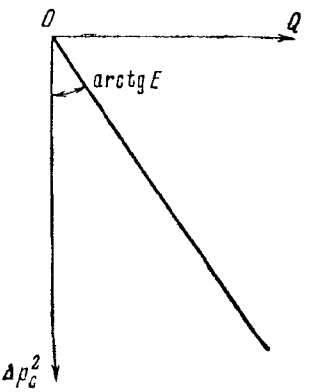


Рис. 19. Индикаторная линия в случае газового потока в координатах «$\Delta p_с^2$ — Q».

совокупность постоянных множителей и делителей в правой части (IV.72) через E_1, а в правой части (IV.73) через E_2:

$$E_1 = A\frac{(1-j)\,k\mu^{-1}p_{ат}^{-1}}{2\,(r_к^{1-j} - r_с^{1-j})}; \qquad \text{(IV.74)}$$

$$E_2 = \frac{\pi bk}{\mu p_{ат}\ln\frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(IV.75)}$$

Пользуясь обозначениями (IV.74) и (IV.75), запишем равенства (IV.72) и (IV.73) в следующем виде:

$$Q = E_1(p_к^2 - p_с^2); \qquad \text{(IV.76)}$$

$$Q = E_2(p_к^2 - p_с^2). \qquad \text{(IV.77)}$$

Заметим, что

$$\Delta p_с^2 = p_к^2 - p_с^2 = [2p_к - (p_к - p_с)]\,(p_к - p_с) =$$
$$= (2p_к - \Delta p_с)\,\Delta p_с = 2p_к\,\Delta p_с - (\Delta p_с)^2,$$

и перепишем равенства (IV.76) и (IV.77) так:

$$Q = E_1 [2p_к \Delta p_с - (\Delta p_с)^2]; \qquad (IV.78)$$

$$Q = E_2 [2p_к \Delta p_с - (\Delta p_с)^2]. \qquad (IV.79)$$

Уравнения (IV.78) и (IV.79) в координатах Q и $\Delta p_с$ представляют *индикаторные линии. Значит для случая закона фильтрации Дарси, имеем параболу с осью, параллельной оси дебитов* Q — см. рис. 18. Ветвь параболы, изображенная пунктиром, практического значения не имеет.

Если построить график в координатах Q и $\Delta p_с^2 = p_к^2 - p_с^2$, то согласно уравнениям (IV.76) и (IV.77) получим прямую, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом E_1 или E_2. Обе зависимости, отвечающие уравнениям (IV.76) и (IV.77), изображены на рис. 19.

Вычисления *скорости фильтрации газа* в зависимости от координаты r и *времени движения газовых частиц* выполняются в том порядке, какой описан в § 6 настоящей главы.

§ 9. Потенциальное движение реального газа

Рассмотрим теперь одномерный поток реального газа. Для реального газа следует воспользоваться уравнением состояния (IV.20). Кроме того, следует учитывать, что вязкость газа изменяется с изменением давления. Считая по-прежнему, что пластовый газ находится в условиях изотермического режима, найдем при помощи уравнений (IV.5), (IV.9) и (IV.26):

$$\varphi = C^{(IV)} \int [\mu(p)\, z(p)]^{-1} p\, dp + C, \qquad (IV.80)$$

где

$$C^{(IV)} = \frac{k}{gRT}; \qquad (IV.80а)$$

$z(p)$ — коэффициент сжимаемости, зависящий от давления p.

Интеграл, содержащийся в правой части (IV.80), представляет собой некоторую функцию от p. Введем для него следующее обозначение:

$$\int [\mu(p)\, z(p)]^{-1} p\, dp = f(p). \qquad (IV.81)$$

Формула (IV.80) будет иметь вид:

$$\varphi = C^{(IV)} f(p) + C. \qquad (IV.82)$$

Это значит, что существует *линейная зависимость между* φ *и* $f(p)$ и что функция $f(p)$ удовлетворяет равенству (IV.33) или (IV.36), если соответствующие ее значения подставить вместо значений φ.

Массовый дебит M можно вычислять по формулам (IV.32) и (IV. 35):

для $j \neq 1$

$$M = AC^{(IV)}(1-j)\frac{f(p_к)-f(p_с)}{r_к^{1-j}-r_с^{1-j}}, \qquad (IV.83)$$

для $j = 1$

$$M = \frac{2\pi bk}{gRT}\cdot\frac{f(p_к)-f(p_с)}{\ln\frac{r_к}{r_с}}. \qquad (IV.84)$$

В формулах (IV.83) и (IV.84) величины $f(p_к)$ и $f(p_с)$ — значения функции $f(p)$ при $p = p_к$ и $p = p_с$ соответственно. Функция $f(p)$ определяется, например, численным интегрированием, для выполнения которого должны быть известны функции $\mu(p)$ и $z(p)$.

Последние определяются на основании опытных данных. При постоянной температуре вязкость газа, вообще говоря, увеличивается с увеличением давления.

Что касается коэффициента сжимаемости $z(p)$, то, как отмечено в § 2 настоящей главы, изменение его также зависит от состава газа и имеет для метана характер кривых, изображенных на рис. 11.

Если, зная функции $\mu(p)$ и $z(p)$, мы подберем простую алгебраическую функцию, заменяющую для данных условий газового потока интеграл $f(p)$ в формуле (IV.81), станет возможным пользоваться этой простой функцией при расчетах дебита по формуле (IV.83) или (IV.84). Заметим, что такого рода аппроксимирование функции $f(p)$ в практических расчетах газового потока вполне допустимо: в процессе разработки газового пласта интервал изменения давления $(p_к - p_с)$ обычно поддерживается достаточно малым с целью сохранения энергии залежи; следовательно, сравнительно небольшим оказывается и интервал изменения функции $f(p)$, а это открывает широкую возможность указанного аппроксимирования. Удобной для аппроксимирования $f(p)$ в небольшом интервале является, например, такая одночленная степенная функция:

$$[\mu(p)z(p)]^{-1}p \approx Dp^{\varepsilon}, \qquad (IV.85)$$

где постоянные D и ε определяются по граничным условиям задачи.

Подставив аппроксимирующую функцию (IV.85) в формулу (IV.81), получим:

$$f(p) = D\frac{p^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}, \qquad (IV.86)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \lg\frac{p_к\mu(p_с)z(p_с)}{p_с\mu(p_к)z(p_к)} : \lg\frac{p_к}{p_с};\\ D &= [\mu(p_с)z(p_с)]^{-1}p_с^{1-\varepsilon}.\end{aligned}\right\} \qquad (IV.86а)$$

Граничные значения функции $f(p)$, найденные при помощи формулы (IV.86), позволяют записать выражения дебита (IV.83) и

(IV.84) по-новому. Так, формулу (IV.84) можно представить в следующем виде:

$$M = \frac{2\pi bk}{(1+\varepsilon)\, gRT \lg \frac{r_к}{r_с}} \left[\frac{p_к^2}{\mu (p_к)\, z (p_к)} - \frac{p_с^2}{\mu (p_с)\, z (p_с)} \right]. \quad \text{(IV.87)}$$

Для идеального газа $gRTz\,(p) = \frac{p}{\rho} = \text{const}$; $\mu\,(p_к)\, z\,(p_к) = \mu\,(p_с)\, z\,(p_с)$; следовательно, $\varepsilon = 1$ и формула (IV.87) переходит в формулу (IV.71).

Сравним расчетные дебиты для реального газа — метана с дебитами идеального газа. Расчет дебитов для метана произведем по формуле (IV.87), расчет дебитов идеального газа — по формуле (IV.71). При этом соответствующие значения $z\,(p)$ определим по той кривой на рис. 11, которая построена для температуры ~40 °С. Граничные значения вязкости $\mu\,(p)$ возьмем из экспериментальных данных Б. Б. Лапука.

В табл. 4 показаны три варианта работы газовой эксплуатационной скважины, взятые для трех различных давлений на стенке скважины: 1) $p_с = 80$ кгс/см², 2) $p_с = 60$ кгс/см² и 3) $p_с = 50$ кгс/см². Контурное давление всюду принято $p_к = 100$ кгс/см². Вязкость идеального газа принята $\mu = 0{,}012$ спз.

Таблица 4

Сравнение дебита метана с дебитом идеального газа

№№ вариантов	Давление $p_с$, кгс/см²	Вязкость метана μ, спз	Показатель ε в формуле (IV.87)	Отношение дебита метана к дебиту идеального газа, %
1	80	0,0144	0,918	89,64
2	60	0,0141	0,955	90,05
3	50	0,0140	0,969	92,55

Примечание. Расчет производился по формулам (IV.71) и (IV.87)

Из табл. 4 очевидно, что дебит метана ниже дебита идеального газа; отклонение в пределах рассмотренного примера не превышает 11%. Как показали расчеты Б. Б. Лапука, в случае природного газа, состоящего из метана, этана, пропана, бутана и более тяжелых компонентов, отклонение дебита от дебита идеального газа оказывается более значительным: дебит природного газа может составлять всего лишь ~72% дебита идеального газа.

Итак, если принять, что реальный газ имеет свойства идеального газа, расчетный дебит газовой скважины окажется завышенным сравнительно с фактическим дебитом.

Обратим внимание, что показатель ε (см. табл. 4) увеличивается с увеличением $\Delta p_с = p_к - p_с$, приближаясь к единице.

Ряд опытов по исследованию установившейся фильтрации газа в пористой среде был впервые широко предпринят в 1928 г. в бывшем Государственном исследовательском нефтяном институте (ГИНИ) под общим руководством акад. Л. С. Лейбензона. Опыты производил Д. С. Вилькер.

102-мм труба, состоящая из двух одинаковой длины прямых ветвей, соединенных дугообразной трубой того же диаметра, наполнялась мелким песком. Общая длина трубы составляла 31,1 м. Это и было длиной пути воздуха, который подавался компрессором в один конец трубы и выходил через другой ее конец. Давление воздуха измерялось семью манометрами, расположенными приблизительно на равных расстояниях по длине трубы. Во всех случаях давление не превышало 5,2 кгс/см^2.

Если бы фильтрация газа происходила в идеальных условиях, распределение давления в пласте выражалось бы точно уравнением (IV.68) при $j = 0$. Тогда в идеальных условиях пьезометрическая кривая была бы параболой, уравнение которой запишется так:

$$p^2 = p_c^2 + \frac{p_к^2 - p_c^2}{r_к} r. \qquad \text{(IV.88)}$$

В результате опытов с воздухом оказалось, что отклонения параболы (IV.88) от опытной кривой невелики. Среднее квадратическое отклонение изменялось от опыта к опыту, составляя при малых давлениях около 1%, а при больших до 4,5%.

Расход воздуха замерялся объемным способом.

В 1933 г. в гидродинамической лаборатории имени Н. Е. Жуковского Московского государственного университета опыты с воздухом были повторены. Воздух пропускался через тот же мелкий песок, наполняющий трубу диаметром 102 мм и длиной 15 м. Строились кривые, показывающие зависимость между квадратом давления и положением манометра, а также зависимость между расходом и разностью квадратов давлений у входа и выхода из трубы. Полученные точки опытных кривых группировались около прямых, соответствующих в первом случае уравнению (IV.88), во втором — уравнению (IV.76).

Опыты по одномерному установившемуся движению газа в песке, проводившиеся в США и описанные М. Маскетом и М. Ботсетом в 1931 г., а также И. Чалмерсом в 1932 г., подтверждают выводы Д. С. Вилькера.

При разработке естественного газоносного пласта с непроницаемыми кровлей и подошвой газ из некоторой области пласта вытесняется газом, притекающим сюда из области питания. В этом случае режим пласта газонапорный. Описанные в §§ 8 и 9 настоящей главы одномерные потоки газа по характеру отвечают газонапорному режиму.

§ 10. Потенциальное движение газированной жидкости

Газированная жидкость представляет собой смесь жидкой и газовой фаз. Газ находится не только в свободном состоянии; часть его растворена в жидком компоненте смеси.

В нефти, залегающей в естественных пластах, обычно содержится природный газ. Если давление в пласте выше давления насыщения нефти газом[1], весь газ растворяется в нефти, а нефть называется недонасыщенной. Задача об одномерном потоке такой нефти относится к тем, которые описаны в §§ 6 и 7 этой главы.

Если же пластовое давление ниже давления насыщения, то в процессе движения нефти в пласте из нее выделяется газ, находившийся в растворенном состоянии, и образуется движущаяся смесь нефти и свободного газа. Выделение газа из раствора обусловлено тем, что по пути фильтрации нефти давление снижается (так как движение направлено в сторону уменьшения давления).

Будем рассматривать движение каждой фазы в отдельности.

Различные эксперименты, проводившиеся по фильтрации двух- и трехфазной жидкости в пористой среде, показали следующее: проницаемость пористой среды для каждой фазы при движении ее в составе смеси отличается от проницаемости, соответствующей случаю, когда через пористую среду фильтруется только один из данных компонентов смеси; принимается, что фазовые состояния компонента в потоке смеси и в однофазном потоке одинаковы.

Во всех экспериментах фазовая проницаемость образца пористой среды оказывалась меньшей проницаемости, определяемой пропусканием через образец однофазной жидкости. Это объясняется тем, что каждая фаза, входящая в состав смеси, как бы мешает движению другой фазы смеси. Чем больший относительный объем занимает компонент смеси в данной фазе, тем менее проницаем компонент в другой фазе той же смеси.

Во время движения в пласте газированной жидкости картина представляется такой: по мере продвижения смеси в направлении снижения давления из капельно-жидкого раствора (жидкого компонента смеси), выделяется все новая масса газа. Выделяющийся из раствора газ присоединяется к движущемуся свободному газу, вследствие чего увеличивается часть порового пространства, занимаемого газом. Свободный газ становится все более подвижным и фазовая проницаемость породы для газа растет, а фазовая проницаемость для жидкой фазы уменьшается. В одной и той же точке пористой среды фазовая проницаемость имеет, как правило, разные значения для жидкой и газовой фаз и находится в определенной зависимости от давления.

Предполагая неразрывность потока каждой фазы, расчеты дебита, давления и другие, относящиеся к потоку газированной

---

[1] Давлением насыщения называется давление газа, находящегося в термодинамическом равновесии с пластовой нефтью.

жидкости, выполняют применительно к каждой из двух фаз смеси. Так, например, формулу (IV.28), выражающую массовую скорость фильтрации в одномерном потоке любой жидкости, можно применительно к капельно-жидкой фазе газированной жидкости записать так:

$$\frac{M_{ж}}{Ar^{l}} = \zeta_{ж}(p)\frac{dp}{dr}, \qquad \text{(IV.89)}$$

где $M_{ж}$ — массовый дебит жидкой фазы; $\zeta_{ж}$ — функция, определяемая для жидкой фазы формулой (IV.9), в которой величина k означает фазовую проницаемость.

В дальнейшем при выводе формул для фильтрации газированной жидкости ограничимся прямолинейно-параллельным и плоско-радиальным потоками.

Массовый дебит газового компонента смеси $M_{г}$ находится как сумма массового дебита газа, движущегося в свободном состоянии $M'_{г}$, и массового дебита газа, движущегося в растворенном состоянии $M''_{г}$. Используя формулу (IV.28) для свободного газа смеси, получим:

$$\frac{M'_{г}}{Ar^{l}} = \zeta_{г}(p)\frac{dp}{dr}, \qquad \text{(IV.90)}$$

где $\zeta_{г}$ — функция (IV.9), в которой все величины μ и ρ относятся к газу; k — фазовая проницаемость.

Для газа, находящегося в растворе, найдем

$$\frac{M''_{г}}{Ar^{l}} = \zeta_{ж}(p)\frac{dp}{dr}\sigma_{м}(p), \qquad \text{(IV.91)}$$

где $\sigma_{м}(p) = \frac{M''_{г}}{M_{ж}}$ *есть массовая растворимость газа в жидкости, т. е. количество массы газа, растворенное в единице массы жидкости при давлении* p.

Суммируя почленно равенства (IV.90) и (IV.91), получим:

$$\frac{M_{г}}{Ar^{l}} = \frac{M'_{г}+M''_{г}}{Ar^{l}} = \zeta_{г}(p)\frac{dp}{dr} + \frac{M_{ж}}{Ar^{l}}\sigma_{м}(p). \qquad \text{(IV.92)}$$

Для газированной жидкости пользуются при расчетах *величиной объемного газового фактора* G, *который представляет собой отношение объемного газового дебита* $Q_{г}$, *приведенного к давлению в 1 кгс/см*^{2}, *к объемному дебиту жидкого компонента* $Q_{ж}$, *приведенному к тем же условиям.* Поскольку, как было замечено в § 1 этой главы, массовый дебит на всех изобарических поверхностях в данном одномерном установившемся потоке один и тот же, сохраняется постоянным вдоль всего потока и газовый фактор G.

Учитывая, что

$$Q_{г} = \frac{M_{г}}{\rho_{го}}, \quad Q_{ж} = \frac{M_{ж}}{\rho_{жо}},$$

где $\rho_{го}$ и $\rho_{жо}$ — значения плотности газа и жидкого компонента соответственно, с помощью формул (IV.89) и (IV.92) получим:

$$G = \frac{Q_г}{Q_ж} = \frac{\rho_{жо}}{\rho_{го}} \frac{\zeta_г(p)}{\zeta_ж(p)} + \sigma(p), \qquad \text{(IV.93)}$$

где *объемная растворимость газа в жидкости*

$$\sigma(p) = \frac{\rho_{жо}}{\rho_{го}} \sigma_м(p).$$

Если газ однороден, то, по В. А. Архангельскому, в довольно широких пределах (примерно от 1 до 100 кгс/см^2) объемная растворимость пропорциональна давлению, т. е.

$$\sigma(p) = \alpha p, \qquad \text{(IV.94)}$$

где α — *объемный коэффициент растворимости, постоянный для данных жидкости и газа.* Формула (IV.94) выражает закон Генри растворимости газа в жидкости.

Расчетную схему для фильтрации газированной жидкости следует построить на основании экспериментов, проводившихся с целью выявления особенностей фазовой проницаемости породы.

Первая обстоятельная работа, описывающая эксперименты по фильтрации смеси нефти и газа, а также смеси нефти и воздуха по цилиндрической трубе с песком, была опубликована в 1930 г.

Особого внимания заслуживают результаты экспериментов Р. Викова и М. Ботсета в 1936 г., впервые установивших величину насыщенности жидкой фазой порового пространства. *Величина насыщенности жидкой фазой s показывает, какую часть данного объема порового пространства $\tau_п$ занимает жидкая фаза.* Таким образом имеем $s = \tau_ж/\tau_п$, где $\tau_ж$ — объем жидкой фазы. Газовая фаза занимает часть объема $\tau_п$, равную $1 - s$.

В результате экспериментов была найдена зависимость между относительной фазовой проницаемостью для жидкости $k_ж/k$ и для газа $k_г/k$ и насыщенностью s.

Первоначально эта зависимость была изучена на бакелитовой трубе длиной $\sim$3 м, заполненной рыхлым песком. Использовался песок четырех видов с проницаемостью k от 17,8 до 262 д. Поступающая в трубу вода насыщалась углекислым газом, который выделялся в песке с падением давления. При предварительных экспериментах было заранее определено, какой электропроводности газожидкостной смеси соответствует та или иная насыщенность s[1]. Замеряя в некотором сечении трубы электропроводность, можно было установить соответствующую насыщенность. Пласт — труба разделялась на 10 секций, на стыке которых помещались бронзовые кольца, служившие одновременно электродами и пьезометрами.

---

[1] Для сообщения воде некоторой электропроводности к ней прибавляли поваренную соль, а для повышения вязкости в воде растворяли сахар.

Определив давление p на каждом стыке двух секций, экспериментаторы пользовались законом Дарси и вычисляли фазовые проницаемости $k_ж$ и $k_г$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} Q_ж &= \frac{k_ж}{\mu_ж}\frac{\Delta p}{\Delta x}F, \\ Q_г &= \frac{k_г}{\mu_г}\frac{\Delta p}{\Delta x}F, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.95)}$$

где $\mu_ж$ и $\mu_г$ — вязкость жидкой и газовой фаз соответственно; $\Delta p/\Delta x$ — градиент давления; F — площадь поперечного сечения песчаной толщи.

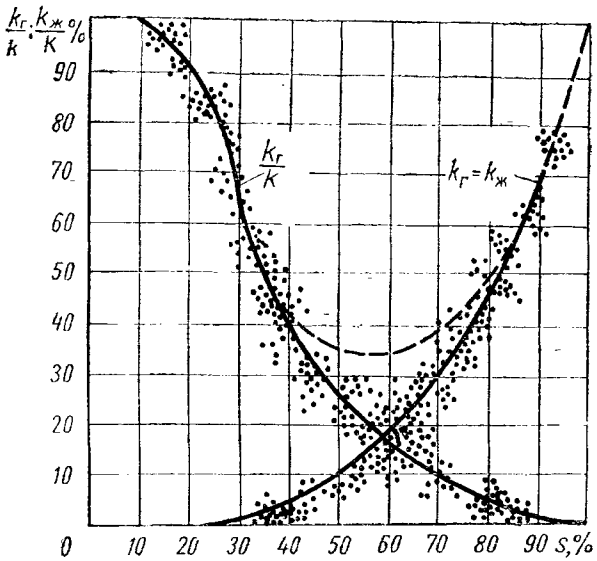


Рис. 20. Зависимость относительных фазовых проницаемостей для газа и жидкости от насыщенности для несцементированных песков.

По кривым рис. 20 можно судить об особенностях фильтрации газированной жидкости. Так, при $s = 80$—90% $k_ж/k = 48 - 70\%$; это означает, что присутствие в порах пласта от 10 до 20% свободного газа значительно снижает фазовую проницаемость для жидкой фазы. Фазовая же проницаемость для газовой фазы близка к нулю. Если $s = 50\%$ или ниже, то фазовая проницаемость для жидкой фазы $k_ж/k = 8\%$ или меньше.

При $s \leqslant 20\%$ $k_ж/k = 0$, т. е. жидкость не движется, а проницаемость для газа почти такая же, как если бы жидкости совсем не было. Если $s > 90\%$, то, как показывают экспериментальные и аналитические исследования, установившееся движение газированной

жидкости невозможно. Насыщенность $s \approx 90\%$ называется *равновесной насыщенностью*. Заметим, что сумма

$$\frac{k_{ж}}{k} + \frac{k_{г}}{k} < 1.$$

Следует учитывать, что в процессе разработки нефтяного месторождения при добыче попутного газа можно наблюдать такое явление: по мере снижения пластового давления совершенно прекращается отдача пластом нефти, а скважина дает чистый газ. Причиной этого может оказаться снижение насыщенности s до столь малой величины ($s \leqslant 20\%$), что фазовая проницаемость для нефти обращается в нуль; нефть, оставшаяся в пласте, не движется.

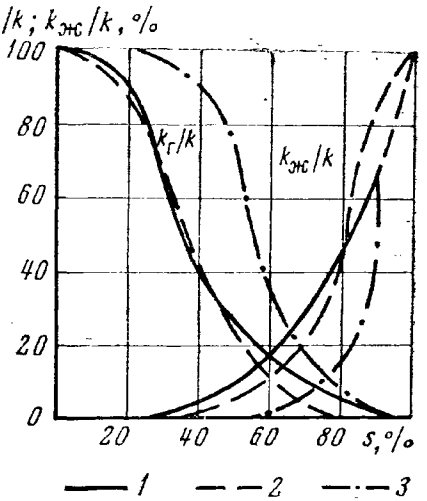


Рис. 21. Сравнение кривых зависимости относительной фазовой проницаемости от насыщенности s.

1 — несцементированные пески; *2* — известняки; *3* — песчаники.

Позднее М. Ботсет опытным путем нашел зависимость фазовой проницаемости для компонентов газожидкостной смеси от насыщенности s при движении в сцементированных песках, А. Балнес и Р. Фиттинг — при движении в известняках и доломитах. На рис. 21 показаны кривые для всех трех случаев.

Исследованиями Д. А. Эфроса во ВНИИ установлено, что фазовая проницаемость не может быть функцией одной только насыщенности и зависимости такого рода являются неоднозначными. При постоянстве физических свойств жидкости и газа относительная фазовая проницаемость $k_ж/k$ и $k_г/k$ зависит не только от насыщенности, но и от давления. Однако введение в уравнения движения газированной жидкости величин фазовой проницаемости, зависящей от насыщенности и давления, не изменило характер известных решений.

Акад. Л. С. Лейбензон, исходя из графика Викова и Ботсета, показанного на рис. 20, получил аналитически относительную фазовую проницаемость жидкости $k_ж/k$ в функции насыщенности $k_ж/k = F_ж(s)$. П. Джонс вывел эмпирические уравнения для зависимостей относительной фазовой проницаемости жидкости и газа от насыщенности s с учетом влияния на фазовую проницаемость так называемой *связанной (реликтовой) воды*. Как известно, связанная вода удерживается скелетом породы силами адсорбции и не участвует заметно в движении. Формулы для вычисления относительной фазовой проницаемости в случаях сцементированных и несцементированных песков рекомендовал К. А. Царевич. По этим формулам были составлены

таблицы, которыми удобно пользоваться при расчетах (см., например, книгу А. П. Крылова и др. «Проектирование разработки нефтяных месторождений»).

Решение задачи об одномерном потенциальном течении газированной жидкости строится в принципе по единой расчетной схеме, сущность которой выяснена в предыдущих параграфах настоящей главы на примерах различного рода жидкости. Следует прежде всего найти при помощи уравнения состояния выражения φ в функции давления p, а затем использовать готовые формулы, беря граничные условия.

В формуле газового фактора (IV.93) функции $\zeta_г(p)$ и $\zeta_ж(p)$ надо определять в соответствии с формулой (IV.9). Тогда формула (IV.93) примет вид:

$$G = \frac{\rho_{жо}\rho_г(p)\, k_г(p)\, \mu_ж(p)}{\rho_ж(p)\, \rho_{го} k_ж(p)\, \mu_г(p)} + \sigma(p), \qquad \text{(IV.96)}$$

где $\rho_г(p)$ и $\rho_ж(p)$ — плотность газа и жидкости соответственно.

В практических расчетах по технологии нефтедобычи учитывается величина объемного коэффициента нефти, зависящего от давления p. *Объемный коэффициент нефти* $\beta(p)$ *характеризует изменение объема нефти вследствие изменений давления и количества растворенного газа. Величина* $\beta(p)$ *есть отношение удельных объемов нефти в пластовых и атмосферных условиях.* Согласно данному определению $\beta(p) = \frac{\rho_{жо}}{\rho_ж(p)}$.

Заменяя в формуле (IV.96) отношение $\frac{k_г(p)}{k_ж(p)}$ функцией $\Psi(s)$, получим:

$$G = \Psi(s)\frac{\rho_г(p)\,\mu_ж(p)}{\rho_{го}\mu_г(p)}\beta(p) + \sigma(p). \qquad \text{(IV.97)}$$

При постоянном газовом факторе G уравнение (IV.97), выражая зависимость между давлением p и насыщенностью s, служит *уравнением состояния газированной жидкости.* Функции $\mu_ж(p)$, $\mu_г(p)$, $\beta(p)$ и $\sigma(p)$ определяются по экспериментальным данным. На рис. 22 представлены, например, зависимости растворимости σ и объемного коэффициента нефти β от давления p (по данным Л. А. Зиновьевой).

Уравнение (IV.97) решается относительно насыщенности s и полученное значение s подставляется в $F_ж(s) = k_ж/k$ или $F_г(s) = k_г/k$, смотря по тому, движение какой фазы изучается — жидкой или газовой. Если значение s подставить, например, в $F_ж(s)$, будем иметь следующий вид потенциальной функции $\varphi(p)$:

$$\varphi(p) = \int \frac{kF_ж[s(p)]\,\rho_ж(p)}{\mu_ж(p)}\,dp + C, \qquad \text{(IV.98)}$$

где $s(p)$ — найденное из (IV.97) значение s в функции p.

Такова принципиальная схема решения задачи о фильтрации газированной жидкости.

О том, как использовалась функция (IV.98) на основе предложенной акад. С. А. Христиановичем линеаризации дифференциального уравнения установившейся фильтрации газированной жидкости, сказано в примечании к § 1 настоящей главы.

Потенциальную функцию $\varphi(p)$ можно определять путем численного интегрирования. Именно так она определялась К. А. Царевичем и Б. Б. Лапуком.

Построим расчетную схему исходя из иного приближенного вычисления $\varphi(p)$. Удобно представить подынтегральную функцию в правой части равенства (IV.98) в виде одночленной степенной.

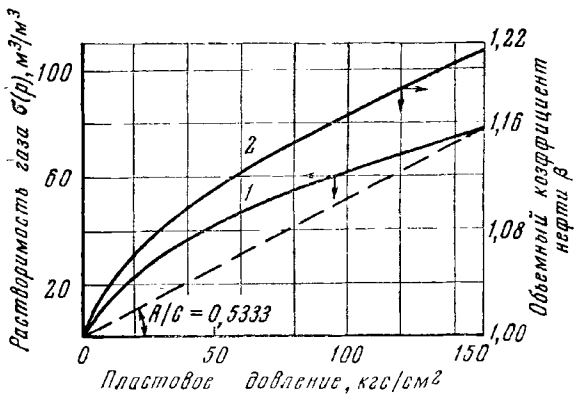


Рис. 22. Кривые зависимости коэффициента растворимости газа в нефти и объемного коэффициента нефти от давления (по Л. А. Зиновьевой).

Пусть

$$\zeta(p) = \frac{kF_{ж}(s)\,\rho_{ж}(p)}{\mu_{ж}(p)} = Dp^{\varepsilon}, \qquad \text{(IV.99)}$$

где D и ε — постоянные.

Подобной аппроксимацией мы пользовались для реального газа — см. формулу (IV.85).

Чтобы найти постоянные D и ε, обращаемся к граничным условиям и поступаем подобно тому, как рекомендовалось в § 9 настоящей главы: подставляем в (IV.99) последовательно значения $p_к$ и p_c и соответствующие им значения $F_{ж}(s)$, $\rho_{ж}(p)$ и $\mu_{ж}(p)$. Получаем систему уравнений с неизвестными D и ε.

Значения $F_{ж}(s)$ находим по уравнению (IV.97), определив предварительно $\Psi(s)$. Зависимость между $F(s)$ и $\Psi(s)$ показана кривыми рис. 23, построенными по эмпирическим формулам.

Из полученных двух уравнений вида (IV.99) найдем ε:

$$\varepsilon = \ln \frac{\mu_c \rho_к F_{ж}(s_к)}{\mu_к \rho_c F_{ж}(s_c)} : \ln \frac{p_к}{p_c}, \qquad \text{(IV.100)}$$

где $\mu_к$, μ_c, $\rho_к$, ρ_c, $F_{ж}(s_к)$ и $F_{ж}(s_c)$ — граничные значения $\mu_{ж}(p)$, $\rho_{ж}(p)$ и $F_{ж}(s)$, соответствующие давлениям $p_к$ и p_c.

Величина D легко определяется из (IV.99).

В результате подстановки подынтегральной функции $\zeta_{ж}(p) = Dp^{\varepsilon}$ в равенство (IV.98) найдем потенциальную функцию $\varphi(p)$. Подставляя затем граничные значения $\varphi(p)$, например, в уравнение (IV.35), получим формулу массового дебита жидкой фазы смеси:

$$M = \frac{2\pi bk}{(1+\varepsilon)\ln\frac{r_к}{r_с}}\left[\frac{p_к\rho_к F_{ж}(s_к)}{\mu_к} - \frac{p_с\rho_с F_{ж}(s_с)}{\mu_с}\right]. \qquad \text{(IV.101)}$$

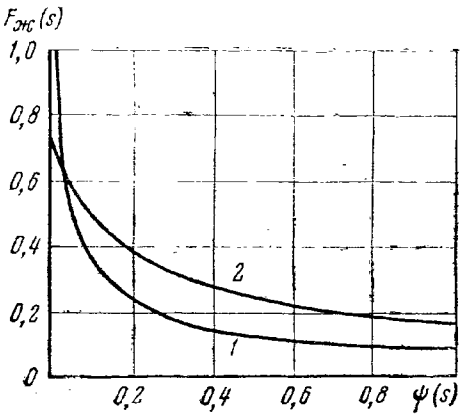


Рис. 23. Зависимость между относительной фазовой проницаемостью для жидкости и функцией $\Psi(s)$.

1 — сцементированные пески; *2* — несцементированные пески.

Для газированной жидкости ε заключено в следующем интервале значений:

$$0 < \varepsilon < 1.$$

ε характеризует степень отклонения закономерностей фильтрации от тех, какие присущи однородной несжимаемой жидкости; для однородной жидкости $\varepsilon = 0$. (ε может быть назван показателем «*несовершенства*» *жидкости*).

Г. А. Мамедов определяет D и ε путем подбора, пользуясь среднеквадратичным приближением. Его расчеты связаны с индикаторными диаграммами скважин, эксплуатирующих пласты при режиме *растворенного газа*. В практике разработки пластов *режимом растворенного газа называют тот, при котором пластовое давление ниже давления насыщения жидкости газом и, следовательно, происходит движение газированной смеси.*

Описанная расчетная схема позволяет избежать комплекса вспомогательных расчетов с численным интегрированием. Расчет дебита газированной жидкости можно упростить, сведя расчетные формулы к простейшему виду.

Расчетные формулы для дебита по закону Дарси имеют наиболее простой вид, когда жидкость однородна и несжимаема. Такова, например, формула Дюпюи (IV.51) для объемного дебита Q. Придадим формуле для объемного дебита жидкой фазы газированной смеси в плоско-радиальном потоке вид формулы Дюпюи, сохранив в ней неизменным множитель $p_к - p_с$.

Пусть k, $\rho_ж$ и $\mu_ж$ — постоянны. Тогда из (IV.98):

$$\left.\begin{aligned}\varphi_к &= \frac{k\rho_ж}{\mu_ж}\Phi(p_к) + C,\\ \varphi_с &= \frac{k\rho_ж}{\mu_ж}\Phi(p_с) + C,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.102)}$$

где $\Phi(p_к)$ и $\Phi(p_с)$ — граничные значения интеграла вида $\int F_ж[s(p)]\,dp$.

Вычитая почленно равенства (IV.102) и применяя известную теорему о среднем в интегральном исчислении, получим:

$$\varphi_к - \varphi_с = \frac{k\rho_ж}{\mu_ж}\int_{p_с}^{p_к} F_ж[s(p)]\,dp = \frac{\rho_ж}{\mu_ж}\int_{p_с}^{p_к} k_ж(p)\,dp = \frac{\rho_ж k'_ж}{\mu_ж}(p_к - p_с), \tag{IV.103}$$

где $k'_ж$ — некоторое среднее значение функции $k_ж(p)$ в интервале изменения p от $p_с$ до $p_к$.

Подставляя полученное значение $\varphi_к - \varphi_с$ во вторую формулу (IV.35) и разделяя на постоянное $\rho_ж$, найдем, что:

$$Q = \frac{2\pi b k'_ж (p_к - p_с)}{\mu_ж \ln\dfrac{r_к}{r_с}}. \tag{IV.104}$$

Имеем явное сходство с формулой (IV.51).

Таким образом при расчете дебита жидкого компонента газированной жидкости можно использовать формулы для определения M или Q для однородной несжимаемой жидкости, если заменить в них проницаемость пласта k некоторым средним значением фазовой проницаемости $k_ж$. Другими словами — определить *дебит газированной жидкости можно, заменив газированную жидкость воображаемой однородной несжимаемой жидкостью, движущейся в пласте с коэффициентом проницаемости $k'_ж$, меньшим k.*

Среднее значение проницаемости $k'_ж$ определяется с помощью формулы (IV.97), по которой вычисляется $\psi(s)$, соответствующее некоторому среднему давлению $p_{ср}$. Это давление можно принять равным среднему арифметическому от $p_к$ и $p_с$ при небольшом изменении по пласту насыщенности s. Взяв вычисленное $\psi(s)$, находим $k'_ж$ по графику на рис. 23.

Хотя формулы (IV.51) и (IV.104) сходны между собой, это сходство чисто внешнее. В действительности при движении однородной несжимаемой жидкости в пласте с проницаемостью k мы на основании формулы (IV.51) можем утверждать, что дебит пропорционален депрессии $\Delta p_с = p_к - p_с$, независимо от величины давления $p_к$ или $p_с$. Для газированной жидкости дебит зависит не только от депрессии $\Delta p_с$, но и от величины давления $p_к$ или $p_с$. В этом легко убедиться, если вспомнить, что средняя фазовая проницаемость $k'_ж$ обусловлена, между прочим, граничными давлениями $p_к$ и $p_с$.

Некоторые исследователи рекомендуют приближенные постоянные значения $k'_ж$. Так, И. А. Чарный для несцементированных песков (см. рис. 20) рекомендовал принимать величину $k'_ж = 0{,}65\,k$. М. М. Глоговский и М. Д. Розенберг рекомендуют для тех случаев,

когда контурная насыщенность $s_к$ близка к единице, вычислять $k'_ж$ так:

$$k'_ж = \left(0{,}944 - 21{,}43\alpha \frac{\mu_г}{\mu_ж}\right) k,$$

если

$$0{,}015 \geqslant \alpha \frac{\mu_г}{\mu_ж} \geqslant 0{,}005; \quad 0{,}2 \leqslant \frac{p_с}{p_к} \leqslant 1.$$

Следует отметить, что величина средней фазовой проницаемости $k^*_ж$ зависит, как мы видели, от целого ряда параметров для жидкости, газа и пласта.

Переходим к примерам и некоторым выводам.

1. Рассмотрим следующие варианты условий притока газированной жидкости к скважине с забойным давлением $p_с = 50$ кгс/см². Газовый фактор G в м³/м³: *а* — 200; *б* — 400; *в* — 600.

Давление на контуре питания во всех вариантах положим $p_к =$ $= 100$ кгс/см². На основании экспериментальных данных принимаем, что при $p_к = 100$ кгс/см² растворимость газа $\sigma(p) = 62$ м³/м³, а при $p_с = 50$ кгс/см² $\sigma(p) = 43$ м³/м³. Пусть выполняются следующие условия: 1) изменение состояния попутного газа подчиняется уравнению (IV.19) (идеальный газ); 2) объемный коэффициент жидкости $\beta = 1$; 3) вязкость газа $\mu_г$ постоянна.

Вычислим дебит жидкой фазы в процентах по отношению к дебиту однородной несжимаемой жидкости, приток которой к скважине поддерживается также депрессией $\Delta p_с = p_к - p_с$. Дебит газовой фазы выразим в процентах по отношению к дебиту скважины, действующей в газовом пласте при однофазном потоке и той же депрессии (дебит газа приведен к атмосферному давлению).

Результаты расчетов показаны в табл. 5.

Таблица 5

Сравнительная величина дебитов в случае газированной жидкости при разных газовых факторах

Газовый фактор G, м³/м³	Фазовая относительная проницаемость $F_ж(s)$		Показатель ε	Отношение объемного дебита жидкой фазы к дебиту однофазной жидкости, %	Отношение объемного дебита газа к дебиту газа в однофазном потоке, %
	$p_к =$ $= 100$ кгс/см²	$p_с =$ $= 50$ кгс/см²			
200	0,698	0,583	0,259	64,4	1,71
400	0,573	0,471	0,282	52,4	2,80
600	0,535	0,409	0,389	47,6	3,80

Примечание. Расчет производился по формулам (IV.51), (IV.73), (IV.97), (IV.100) и (IV.101).

Вывод

Дебит газированной жидкости при прочих равных условиях всегда меньше дебита однородной несжимаемой жидкости. С повышением газового фактора при неизменяющейся депрессии $\Delta p_с$ дебит жидкой

фазы уменьшается, а дебит газа увеличивается; при этом показатель ε *растет, хотя и непропорционально G.*

2. Пусть, например, при одинаковом перепаде давления $\Delta p_c = p_к - p_c = 19$ кгс/см^2 и одинаковом газовом факторе $G = 100$ м^3/м^3 в одном случае $p_к = 50$ кгс/см^2, $p_c = 31$ кгс/см^2, в другом $p_к = 20$ кгс/см^2, $p_c = 1$ кгс/см^2. Дебит, вычисленный при условии $\alpha = 0{,}8$ м^3/м^3 и $\mu_ж/\mu_г = 100$, оказывается на 35% выше в первом случае, чем во втором. Следовательно, *при данной депрессии* Δp_c *и газовом факторе G более высокий дебит будет при более высоком пластовом давлении.* Это объясняется тем, что при более высоких

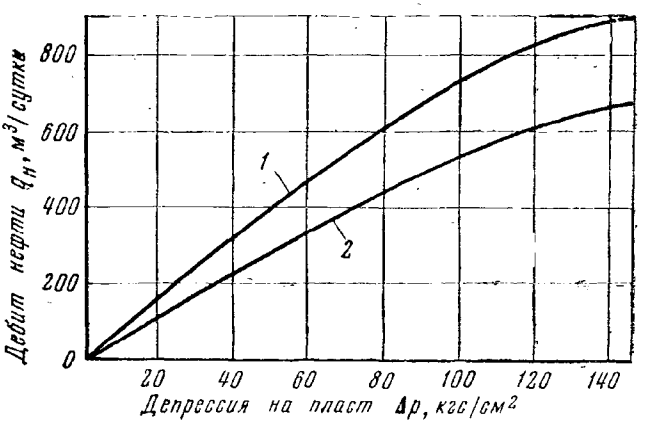


Рис. 24. Индикаторные кривые.
1 — для идеальной и *2* — реальной газированной нефти (по Л. А. Зиновьевой).

давлениях меньшее количество пластового газа находится в свободном состоянии, чем при более низких давлениях, значит, повышается фазовая проницаемость жидкости.

Отмеченный факт подчеркивает большое значение своевременно принятых мер по поддержанию или повышению пластового давления в первых же стадиях разработки нефтяных месторождений.

3. Чтобы выяснить различие в величинах дебита, когда в одном случае учитывают реальные свойства газированной жидкости, а в другом считают эту жидкость «идеальной»,— обратимся к индикаторной диаграмме, приведенной в работе Л. А. Зиновьевой[1]. Кривые построены при условии, что $G = 392$ м^3/м^3, $p_к = 144$ кгс/см^2, $r_к = 1000$ м, $r_c = 10$ см, $b = 10$ м, $k = 0{,}2$ д. Для идеальной газированной жидкости принимались: $\alpha = 0{,}88$ м^3/м^3, $\mu_ж = 0{,}89$ спз, $\mu_г = 0{,}015$ спз, $\beta(p) = 1$; для реальной газированной нефти величины объемного коэффициента нефти $\beta(p)$ и коэффициента растворимости

[1] Зиновьева Л. А. Приближенный метод расчета притока газированной нефти к скважинам с учетом реальных свойств пластовых нефтей. Труды ВНИИ, вып. 6. М., Гостоптехиздат, 1954.

$\sigma(p)$ определялись в функции давления по графикам рис. 22. Зависящей от давления считалась и вязкость нефти $\mu_ж$. Индикаторная кривая для реальной газированной нефти имеет меньший наклон, чем кривая для идеальной газированной жидкости. Это указывает на то, что для реальной жидкости существуют добавочные сопротивления при фильтрации, не учтенные в идеальной жидкости (рис. 24).

В заключение заметим, что многие задачи теории движения газированной жидкости были впервые разработаны акад. Л. С. Лейбензоном в период 1923—1930 гг. Л. С. Лейбензон сначала рассматривал такую смесь жидкости и газа, в которой пузырьки газа движутся со скоростью жидких частиц.

§ 11. О некоторых исследованиях фильтрации водонефтяной смеси и многофазной жидкости

Искусственное заводнение нефтеносных пластов, осуществляемое нагнетанием воды в пласт, приводит к необходимости изучать движение смеси воды и нефти в пласте. Движения водонефтяной смеси в пласте наблюдается также при наличии в пласте природной воды. Сюда относится связанная (реликтовая) вода; подошвенная вода, занимающая нижнюю часть пласта; краевая или контурная вода, первоначально располагающаяся за контуром нефтеносности и в последующем вытесняющая нефть к скважинам.

Эксперименты показали, что породы, из которых сложены продуктивные пласты, могут быть нефтесмачиваемыми и водосмачиваемыми. Наиболее распространены водосмачиваемые породы; в них реликтовая вода как бы прилипает к стенкам поровых каналов. Высокая насыщенность реликтовой водой и служит вероятным признаком водосмачиваемости пород, тогда как нефтесмачиваемость проявляется в низкой насыщенности реликтовой водой. Отделение той или иной жидкости (нефти, воды) в сетке поровых каналов обусловлено насыщенностью и характеристикой смачиваемости.

Экспериментальные исследования установившегося движения водонефтяной смеси в песках, в свое время поставленные М. С. Леверетом, показали, что если порода гидрофильная, то пара кривых, изображающих зависимость фазовой проницаемости для воды и нефти от водонасыщенности s, напоминает пару кривых, представленных на рис. 20 для случая газированной жидкости; кривая для газа теперь относится к нефти, а кривую для жидкости теперь следует считать как характеризующую фазовую проницаемость воды.

Результатом опытов Леверетта явились кривые, представленные на рис. 25. По оси абсцисс отложены значения водонасыщенности s в процентах, по оси ординат — относительная фазовая проницаемость для воды и нефти в процентах. Каждая кривая отвечает определенному значению некоторого параметра $\alpha = \pi \Delta L / D \Delta p$, где π — давление вытеснения в см рт. ст., ΔL — длина колонки песка в см, D — средний диаметр поровых каналов в см и Δp — перепад давле-

ния в см рт. ст. Параметр α пропорционален капиллярным силам, противодействующим прохождению отдельных капель нефти через поры песка.

Влияние вязкости компонентов смеси на проницаемость жидкости почти не наблюдалось. Ошибки, которые получались при обработке результатов наблюдений, если пренебрегали различиями в весе единицы объема жидкости, были сравнительно незначительными.

Заметим, что установившаяся фильтрация смеси воды и нефти возможна при условии неизменяемой насыщенности каждой из двух фаз жидкости в данной точке пористой среды. Для одномерного

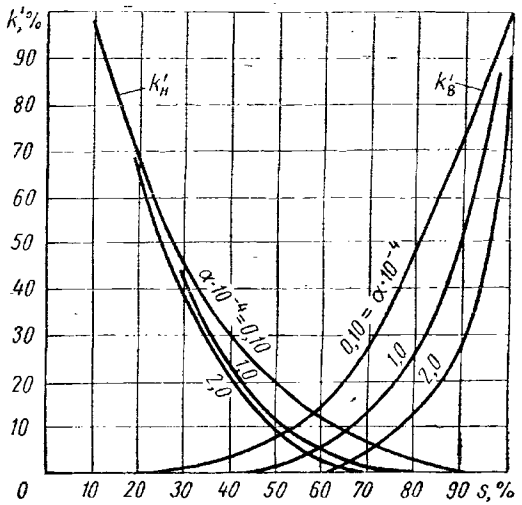


Рис. 25. Зависимость относительных фазовых проницаемостей для нефти и воды от водонасыщенности s при разных значениях параметра α (по М. С. Левересту).

потенциального движения несжимаемой водонефтяной массы без учета массовых сил и фазовых превращений можно при этом записать, исходя из формулы (IV.27), следующее равенство:

$$v = \frac{d\varphi}{dr},$$

где v — суммарная скорость фильтрации смеси,

$$\varphi = \int \left(\frac{k_в}{\mu_в} + \frac{k_н}{\mu_н} \right) dp + C. \qquad \text{(IV.105)}$$

Здесь $k_в$ и $k_н$ — фазовые проницаемости воды и нефти соответственно; $\mu_в$ и $\mu_н$ — коэффициенты вязкости воды и нефти. Расчеты, относящиеся к одномерному потоку смеси воды и нефти, выполняются по формулам (IV.105) так, как указано в § 6 настоящей главы.

При движении газированной жидкости в пластах содержатся обычно три фазы компонента смеси: нефть, газ и вода. В таком

случае имеем *поток многофазной жидкости.* Опыты над установившимся движением в несцементированных песках газо-водонефтяной смеси проводились М. С. Леверетом и В. Б. Льюисом. Треугольная диаграмма, изображенная на рис. 26, показывает границы преобладания потоков различных фаз. Так, при газонасыщенности, большей 35%, поток состоит только из газа. Заштрихованные области диаграммы на рис. 26 соответствуют двухфазным потокам. Двойной штриховкой отмечена область трехфазного потока. По диаграмме на рис. 26 можно определить, какие компоненты движутся в пласте при данном соотношении величин насыщенности пор фазами.

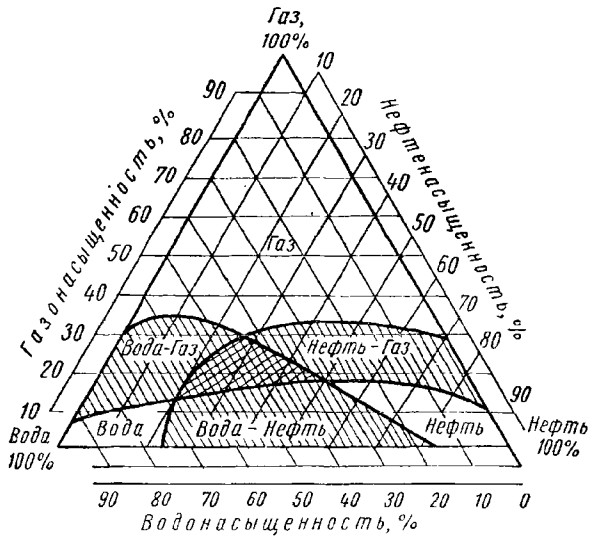


Рис. 26. Диаграмма для определения границ преобладания потоков различных фаз при трехфазном движении (по М. С. Леверетту и В. Б. Льюису).

На основании экспериментов можно считать, что относительная фазовая проницаемость в многофазном потоке почти не зависит от вязкости жидкости, ее плотности, внутрижидкостного натяжения, градиента давления и пористой среды. Тем не менее известный эффект поверхностного натяжения все же наблюдается.

В то время как вязкость существенно не влияет на относительную проницаемость, *отношение величин вязкости жидких фаз, присутствующих одновременно в потоке, значительно влияет на состав текущей смеси.*

В водосмачиваемых песчаниках вода часто проникает по каналам, не занятым нефтью.

Движущими силами элементов объема различных фаз, текущих совместно в пористой среде, являются не только внешние по отношению к данной фазе силы (например, сила тяжести), но и такие массовые силы, как электрические и магнитные. Силы, действующие

в пределах каждой фазы в данном направлении многофазного потока, для различных фаз различны в одном и том же месте пористой среды. Отличаются друг от друга и градиенты давления для различных фаз на элементарной площадке пористой среды.

Можно, однако, допустить, что различие градиентов давления для разных фаз пренебрежимо мало. Сделав такое допущение и не учитывая гравитационного эффекта, потенциальное течение многофазного потока в пласте примем плоско-параллельным ($j = 0$ или $j = 1$).

Потенциальную функцию фазы — компонента за номером λ обозначим через φ_λ. На основании формулы (IV.5) имеем:

$$\varphi_\lambda = \int \zeta_\lambda (p)\, dp + C, \tag{IV.106}$$

где $\zeta_\lambda (p)$ — функция, определяемая формулой (IV.9) для фазы — компонента за номером λ. Если фаза — компонент за номером i растворима в фазе — компоненте за номером λ, то объемный фактор $G_{i\lambda}$, т. е. отношение параметров компонента за номером i к соответствующим параметрам компонента за номером λ, можно определять по формуле (IV.96):

$$G_{i\lambda} = \frac{\rho_{\lambda 0} k_i (p)\, \rho_i (p)\, \mu_\lambda (p)}{\rho_{i0} k_\lambda (p)\, \rho_\lambda (p)\, \mu_i (p)} + \sigma_{i\lambda} (p), \tag{IV.107}$$

где индексы указывают, к какому компоненту относятся проницаемость, плотность, вязкость и растворимость.

Решив уравнение (IV.107) относительно $k_\lambda (p)$ и подставив найденное значение в формулу (IV.106), будем иметь:

$$\varphi_\lambda = \frac{\rho_{\lambda 0}}{\rho_{i0} G_{i\lambda}} \int \frac{\rho_i (p)\, k_i (p)}{\mu_i (p) \left[1 - \dfrac{\sigma_{i\lambda} (p)}{G_{i\lambda}}\right]} dp + C_\lambda =$$

$$= \frac{1}{G_{i\lambda}^{(\text{м})}} \int \frac{\rho_i (p)\, k_i (p)}{\mu_i (p) \left[1 - \dfrac{\sigma_{i\lambda} (p)}{G_{i\lambda}}\right]} dp + C_\lambda, \tag{IV.108}$$

где $G_{i\lambda}^{(\text{м})}$ — массовый фактор компонента за номером i по отношению к компоненту за номером λ; $G_{i\lambda}^{(\text{м})} = \frac{\rho_{i0}}{\rho_{\lambda 0}} G_{i\lambda}$.

Обозначая интеграл правой части равенства через φ_i, получим зависимость между φ_λ и φ_i:

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{G_{i\lambda}^{(\text{м})}} \varphi_i + C_\lambda. \tag{IV.109}$$

Если фаза-компонент за номером i не растворима в компоненте за номером λ, то $\sigma_{i\lambda} = 0$; $G_{i\lambda}^{(\text{м})} = 1$.

Используя формулу (IV.32) или (IV.35) при вычислении массового дебита компонента-растворителя за номером λ, найдем:
если $j \neq 0$

$$M_\lambda = A \frac{(1-j)(\varphi_{\lambda\text{к}} - \varphi_{\lambda\text{с}})}{r_\text{к}^{1-j} - r_\text{с}^{1-j}}; \tag{IV.110}$$

если $j = 1$

$$M_\lambda = 2\pi b \frac{\varphi_{\lambda к} - \varphi_{\lambda с}}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad (IV.111)$$

Здесь $\varphi_{\lambda к}$ и $\varphi_{\lambda с}$ — граничные значения потенциальной функции растворителя. Массовый дебит M_i компонента за номером i вычислим так:

$$M_i = G_{i\lambda}^{(м)} M_\lambda. \qquad (IV.112)$$

Подставляя в (IV.112) значение M_λ из формулы (IV.110) и заменяя $\varphi_{\lambda к}$ и $\varphi_{\lambda с}$ их выражениями в соответствии с формулой (IV.109), получим такую формулу для M_i:

$$M_i = A \frac{(1-j)(\varphi_{ik} - \varphi_{ic})}{r_к^{1-j} - r_с^{1-j}}. \qquad (IV.113)$$

Тем же путем можно получить формулу для M_i, аналогичную формуле (IV.111).

Если в состав многофазной жидкости входит всего N компонентов, полный массовый дебит M запишется в виде формул (IV.32) и (IV.35), в которых $\varphi_к = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ik}$ и $\varphi_с = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ic}$.

§ 12. Характеристика потока в условиях нелинейного закона фильтрации

Отметим наиболее важные для нефтепромысловой практики характеристики однофазного пластового потока, если наблюдаются отклонения от закона фильтрации Дарси.

Однородная несжимаемая жидкость. Постараемся представить себе для данной области пласта всю совокупность возможных *пьезометрических кривых плоско-радиального потока*, отвечающих как закону фильтрации Дарси, так и всем возможным отклонениям от этого закона. Все такие пьезометрические кривые можно построить при помощи формулы (IV.48) или (IV.49), если действует закон Дарси, и при помощи первой формулы (IV.41) или (IV.44), если закон Дарси нарушен. Предельными кривыми, ограничивающими указанную совокупность, будут, с одной стороны, кривая, отвечающая закону Дарси, с другой стороны, кривая, отвечающая закону фильтрации Краснопольского. Все остальные кривые нашей совокупности будут занимать как бы промежуточное место между двумя предельными.

Вычисления произведем для случаев, которым соответствуют указанные предельные кривые. Для кривой, отвечающей закону Краснопольского, формула понижения пьезометрического уровня получается непосредственно из первого уравнения (IV.41) при $n =$

$= 2$. В самом деле, для однородной несжимаемой жидкости вспомогательная функция θ определится по формулам (IV.38) и (IV.39) так:

$$\theta = C_1' p + C_2, \qquad \text{(IV.114)}$$

где $C' = \zeta_1 = \text{const}$, а C_2 — см. формулу (IV.38).

Подставляем соответствующие значения θ из (IV.114) в первое равенство (IV.41) при $n = 2$ и переходим к величинам понижения

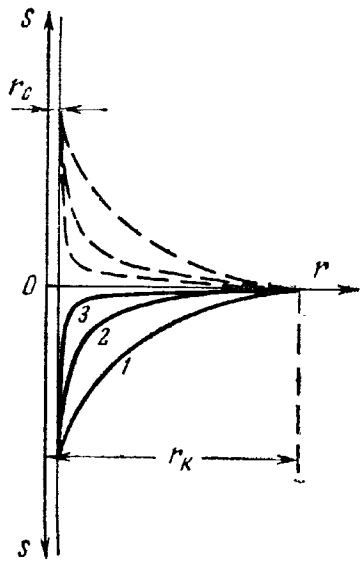


Рис. 27. Пьезометрические кривые, соответствующие различным законам фильтрации жидкости.
1 — закону Дарси; *2* — нелинейному закону при $n \neq 2$; *3* — закону Краснопольского.

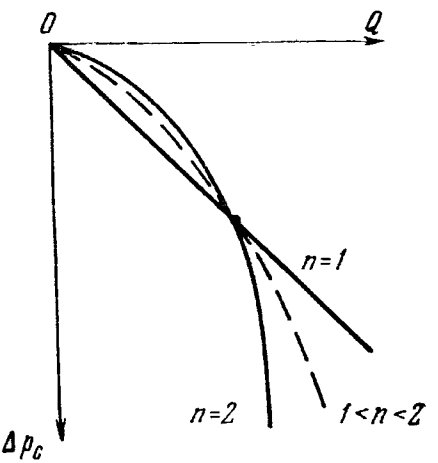


Рис. 28. Индикаторные кривые скважины, соответствующие различным законам фильтрации.

пьезометрического уровня жидкости. Тогда невдалеке от скважины получим:

$$\frac{s}{s_c} = \frac{r_c}{r}. \qquad \text{(IV.115)}$$

Из построенных по результатам расчета, основанного на формулах (IV.49) и (IV.115), пьезометрических кривых (рис. 27) наименее крутой подъем (у стенки скважины) имеет кривая логарифмического типа, соответствующая закону Дарси. Пьезометрические кривые, показанные сплошными линиями, иллюстрируют плоско-радиальные потоки, сходящиеся к эксплуатационной скважине. Для нагнетательной скважины (радиальный поток — расходящийся) величины понижений следует заменить величинами превышений пьезометрических уровней (см. рис. 27, пунктирные кривые).

При фильтрации по нелинейному закону фильтрации индикаторная линия не может быть прямой. Рассматривая, как и при анализе

пьезометрических кривых, возможные предельные условия фильтрации — фильтрацию по закону Краснопольского, получим из второй формулы (IV.41), полагая в ней $n = 2$, следующее выражение дебита:

$$Q = 2\pi bB\sqrt{r_c \Delta p_c}, \qquad \text{(IV.116)}$$

где B — некоторая постоянная.

Индикаторная кривая, построенная в соответствии с уравнением (IV.116), является параболой ($n = 2$, рис. 28). Пунктирная кривая на рис. 28 построена для условий фильтрации по нелинейному закону, промежуточному между теми, которым соответствуют кривые с отметками $n = 1$ и $n = 2$.

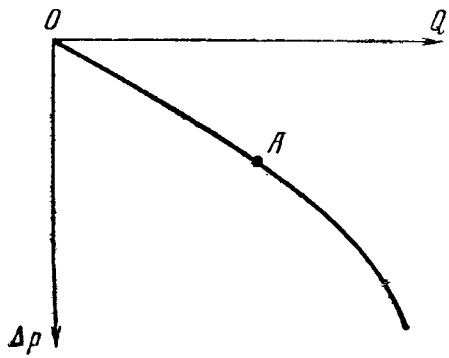


Рис. 29. Индикаторная линия при сосуществовании разных законов фильтрации в пласте.

Возможны составные индикаторные линии (рис. 29), существование которых объясняется следующим.

При малых депрессиях Δp_c, а значит при небольших дебитах, скорости фильтрации во всем пласте могут быть столь малы, что условия вполне могут соответствовать закону Дарси; следовательно, точки индикаторной кривой образуют прямолинейный участок.

С увеличением дебита, т. е. с увеличением депрессии, скорости фильтрации возрастают. На стенке скважины, где скорость фильтрации наибольшая, она при некоторой депрессии достигает критического значения (см. § 6 главы II). При более высоких депрессиях вокруг скважины образуется область пласта, в которой фильтрация происходит не в соответствии с законом Дарси,— область кризиса. Чем больше дебит, тем больше размеры этой области, внутри которой фильтрация происходит не по линейному закону. Индикаторная линия при фильтрации жидкости одновременно по разным законам имеет форму начального прямолинейного участка и собственно кривой (рис. 29).

При довольно низких депрессиях вследствие несовершенства скважины, как правило, по характеру вскрытия пласта (колонна обсадных труб имеет перфорационные отверстия небольшого диаметра) площадь свободного прохода жидкости из пласта в скважину мала, следовательно, скорость фильтрации у отверстий велика сравнительно со скоростью, возможной для гидродинамически совершенной скважины. Возможно нарушение закона Дарси.

Коэффициент продуктивности при фильтрации по нелинейному закону фильтрации численно равен тангенсу угла наклона хорды, проведенной через начало координат и данную точку индикатор-

ной кривой, к оси перепадов давления Δp_c. Так как индикаторная кривая обращена своей выпуклостью в сторону оси дебитов, этот коэффициент уменьшается с увеличением дебита.

Пунктирная кривая на рис. 28 может быть описана уравнением, которое для однородной несжимаемой жидкости выражается уравнением (IV.45), если принять в нем $j = 1$ (неопределенность первого члена правой части (IV.45) раскрывается по правилу Лопиталя):

$$\Delta p_c \equiv p_к - p_c = \frac{\mu \ln \frac{r_к}{r_c}}{2\pi b k} Q + \frac{\rho}{(2\pi b)^2 k_\rho}\left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_к}\right) Q^2. \qquad \text{(IV.117)}$$

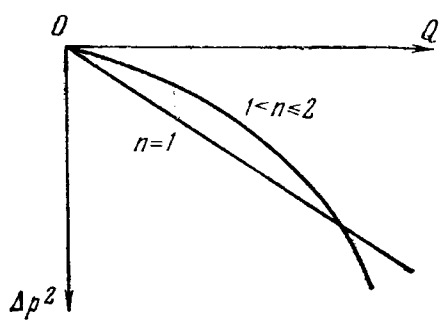


Рис. 30. Индикаторная кривая газовой скважины, построенная в координатах «$\Delta p^2 - Q$».

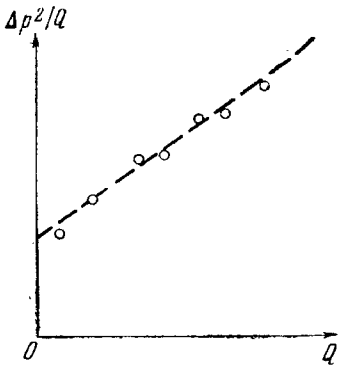


Рис. 31. Индикаторная кривая газовой скважины, построенная по двучленной формуле в координатах «$\frac{\Delta p^2}{Q} - Q$».

Идеальный газ. Пьезометрическая кривая в плоско-радиальном потоке строится по данным, полученным при решении уравнения, составляемого при помощи уравнения состояния (IV.19) и формулы (IV.44):

$$\Delta p^2 \equiv p^2 - p_c^2 = \frac{\mu p_{ат} \ln \frac{r}{r_c}}{\pi b k} Q + \frac{\rho_{ат} p_{ат}}{2(\pi b)^2 k_\rho}\left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r}\right) Q^2, \qquad \text{(IV.118)}$$

где Q — объемный дебит газа, приведенный к давлению в 1 кгс/см^2.

Используя формулу (IV.118) и граничное условие $p = p_к$ при $r = r_к$, получим:

$$\Delta p_c^2 \equiv p_к^2 - p_c^2 = A_1 Q + B_1 Q^2, \qquad \text{(IV.119)}$$

где

$$A_1 = \frac{\mu p_{ат} \ln \frac{r}{r_c}}{\pi b k};$$

$$B_1 = \frac{\rho_{ат} p_{ат}}{2(\pi b)^2 k_\rho}\left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_к}\right).$$

Уравнение (IV.119) графически выражается *индикаторной кривой*, проходящей через начало координат (рис. 30). На этом рисунке

в тех же координатах изображена прямая для потенциального движения газа.

Укажем порядок обработки индикаторных кривых, построенных для газовой скважины по данным замеров дебитов и давлений. Пусть произведено n замеров. Взяв уравнение вида (IV.119), представляют его так:

$$\frac{\Delta p_c^2}{Q} = A_1 + B_1 Q. \tag{IV.120}$$

Коэффициенты A_1 и B_1 определяют по методу наименьших квадратов:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sum \frac{\Delta p_c^2}{Q} \sum Q^2 - \sum Q \sum \Delta p_c^2}{n \sum Q^2 - \left(\sum Q\right)^2}; \\ B_1 &= \frac{n \sum \Delta p_c^2 - \sum Q \sum \frac{\Delta p_c^2}{Q}}{n \sum Q^2 - \left(\sum Q\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{IV.121}$$

В координатах Q и $\Delta p_c^2/Q$ зависимость (IV.120) имеет вид прямой (рис. 31).

Подобно этому по формуле (IV.117) обрабатываются индикаторные кривые нефтяных и водяных скважин.

§ 13. Поток жидкости в пласте с неоднородной проницаемостью

В продуктивных пластах в различных точках проницаемость не одинакова. Иногда можно найти, хотя и приближенно, некоторые закономерности ее изменения по простиранию пласта или в ином каком-либо направлении. При незначительных изменениях проницаемости вдоль потока допустимо принимать, что пласт однороден по проницаемости.

Однако явно выраженные скачки проницаемости заметно влияют на приток пластовой жидкости к скважинам или на поток обратного направления (при нагнетании жидкости в пласт). Эти скачки проницаемости могут быть обусловлены, например, слоистым строением пласта, пропластки которого имеют разную проницаемость. Проницаемость может скачкообразно изменяться вдоль потока, если вследствие тектонических нарушений жидкость переходит из пласта одной проницаемости в пласт другой проницаемости. Рассмотрим некоторые примеры одномерного потока в неоднородной по проницаемости среде.

1. *Многослойный пласт.* Предположим, что поток в пласте, состоящем из нескольких горизонтальных пропластков, прямолинейно параллельный или плоско-радиальный; в пределах каждого пропластка проницаемость везде одинакова, на границе двух соседних про-

пластков проницаемость изменяется скачкообразно. Пласт залегает между непроницаемыми кровлей и подошвой. Перетока жидкости из одного слоя в другой нет.

Если течение потенциальное, полный дебит пласта определяется, очевидно, как сумма дебитов всех пропластков, а дебит каждого пропластка подсчитывается по формуле (IV.32) или (IV.35).

2. *Жидкость протекает через несколько последовательно залегающих областей пласта*, на стыке которых проницаемость изменяется скачкообразно. Рассмотрим пласт, расчлененный на n областей, в каждой из которых проницаемость везде одинакова, а при переходе через границу двух соседних областей проницаемость претерпевает скачок. Жидкость, перемещаясь в пласте между двумя его граничными координатами $r_к$ и $r_с$, проникает последовательно в одну за другой область пласта. Границы раздела областей пласта перпендикулярны потоку.

Пусть в пределах области пласта за номером ν коэффициент проницаемости $k_\nu = \text{const}$. Тогда для однофазной жидкости или для одной из фаз неоднородной жидкости уравнение состояния (IV.2) в этой области пласта при фильтрации по закону Дарси можно написать так (см. IV.9):

$$k_\nu F(s)\,\mu^{-1}\rho = \zeta_\nu(p), \tag{IV.122}$$

где $F(s)$ — относительная фазовая проницаемость для данной фазы неоднородной жидкости в функции насыщенности s. Для однофазной жидкости $F(s) = 1$.

Введем следующее обозначение:

$$F(s)\,\mu^{-1}\rho = \alpha(p). \tag{IV.123}$$

Перепишем (IV.122) так:

$$\zeta_\nu(p) = k_\nu \alpha(p) \tag{IV.124}$$

и вычислим по формуле (IV.5) потенциальную функцию φ:

$$\varphi = k_\nu \int \alpha(p)\,dp + C = k_\nu \Phi + C, \tag{IV.125}$$

где $\Phi = \int \alpha(p)\,dp$.

Допустим, что поток плоско-радиальный. Массовый дебит можно определить по формуле (IV.35). Для ν-ой области пласта формула (IV.35) представится так:

$$M = 2\pi k_\nu b \frac{\Phi_\nu - \Phi_{\nu-1}}{\ln \dfrac{r_\nu}{r_{\nu-1}}}. \tag{IV.126}$$

Здесь Φ_ν и $\Phi_{\nu-1}$ — значения функции Φ на границах ν-ой области; r_ν и $r_{\nu-1}$ — соответствующие координаты этих границ, причем полагаем, что $\Phi_n = \Phi_к$, т. е. значению Φ на одной границе всего

пласта, $\Phi_0 = \Phi_c$ — значению на другой границе пласта; $r_n = r_к$ и $r_0 = r_c$.

Чтобы выразить массовый дебит M через значения Ф на границах пласта $\Phi_к$ и Φ_c, напишем равенство (IV.126) для каждой из n областей пласта; затем, приведя все полученные равенства к одному знаменателю и сложив их почленно, определим M:

$$M = 2\pi b \frac{\Phi_к - \Phi_c}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{k_\nu} \ln \frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}}. \qquad \text{(IV.127)}$$

Найдем далее зависимость функции Ф от основной координаты r. Запишем, например, равенство (IV.29) применительно к любой точке пласта, находящейся в области пласта за номером σ с проницаемостью k_σ. Постоянное C определяем из условия на границе взятой области пласта с областью за номером σ — 1 по той же формуле (IV.29). Составив равенства вида (IV.126) для всех (σ — 1) областей пласта и сложив все равенства почленно, найдем значение $\Phi_{\sigma-1}$. Значение $\frac{M}{2\pi b}$ определится из (IV.127). Окончательно будем иметь:

$$\frac{\Phi - \Phi_c}{\Phi_к - \Phi_c} = \frac{k_\sigma^{-1} \ln \frac{r}{r_{\sigma-1}} + \sum_{\nu=1}^{\sigma-1} k_\nu^{-1} \ln \frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}}{\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^{-1} \ln \frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}}. \qquad \text{(IV.128)}$$

Большое практическое значение имеет случай, в котором пласт можно рассматривать в виде некоторой пористой среды, состоящей из двух частей ($n = 2$) с разной проницаемостью. Это особенно ценно при радиальных потоках в связи с изменением проницаемости у стенки или у забоя скважины, где проницаемость иная, чем в части пласта, не примыкающей непосредственно к скважине. Различие проницаемостей указанных двух частей пласта создается, например, в результате кислотной обработки или торпедирования забоя, при гидравлическом разрыве пласта, при закупорке пор парафином или глиной, проникновении в пласт воды из глинистого раствора и т. п. Если в скважине устанавливается гравийный фильтр, толщу гравия его можно считать частью пористой среды с одной проницаемостью, а пласт — другой частью пористой среды с другой проницаемостью. Подобно этому можно считать, что пласт состоит из двух неодинаково проницаемых частей, если у стенки скважины поддерживается давление ниже давления насыщения жидкости газом $p_н$, а на границе пласта с областью питания — давление выше давления насыщения.

Давление насыщения $p_н$ устанавливается при этом между скважиной и областью питания так, что в части пласта, в которой давле-

ние ниже давления насыщения $p_н$, движется смесь жидкости и газа. Осередняя фазовую проницаемость пласта для каждой фазы, получим две неодинаково проницаемые части пласта. Проницаемость одной части пласта для данной фазы смеси равна средней в этой части фазовой проницаемости, проницаемость другой — проницаемости пород, слагающих пласт.

Полагая в формуле (IV.127) $n = 2$, найдем выражение дебита, позволяющее сравнивать производительность скважин в пласте, состоящем из двух неодинаково проницаемых частей, с производительностью скважины, действующей в однородном пласте, при прочих одинаковых условиях. При $n = 2$ формула (IV.127) запишется так:

$$M = 2\pi b \frac{\Phi_к - \Phi_с}{\frac{1}{k_1}\ln\frac{r}{r_с} + \frac{1}{k_2}\ln\frac{r_к}{r}}, \qquad \text{(IV.129)}$$

где r — координата границы между двумя частями пласта.

Если $n = 1$, формула (IV.129) принимает вид формулы (IV.35). Этот случай соответствует однородному пласту ($k_1 = k_2$).

Сравнивая дебит скважины в неоднородном пласте с двумя областями проницаемости с дебитом скважины в однородном пласте, можем представить следующее.

1. Однородный пласт имеет такую же проницаемость, как и проницаемость части неоднородного пласта, примыкающей к скважине; проницаемость этой части пласта будет k_1. Дебит скважины в однородном пласте обозначим через M_1.

2. Однородный пласт имеет такую же проницаемость k_2, как и проницаемость другой части неоднородного пласта. Дебит скважины в однородном пласте обозначим в этом случае через M_2.

При помощи отношений

$$1)\ \frac{M}{M_1}; \qquad 2)\ \frac{M}{M_2} \qquad \text{(IV.130)}$$

можно сравнить дебиты в неоднородном и однородном пластах.

По первому из отношений (IV.130) *оценивается возможная ошибка при предварительном расчете дебита скважины, если допускается, что пласт однороден и проницаемость его повсюду такая же, как и проницаемость образца породы, взятого из скважины* (k_1).

По второму отношению (IV.130) решается вопрос *о влиянии на дебит изменения проницаемости призабойной области пласта, имевшего первоначально повсюду проницаемость* k_2.

В выражениях (IV.130) дебит M определяется по формуле (IV.129).

Вычислим дебит M и найдем отношения (IV.130) для ряда значений k_1/k_2 и r.

В табл. 6 приведены отношения M/M_1 и M/M_2 в процентах к дебиту скважины в однородном пласте.

Таблица 6

Отношения $\frac{M}{M_1}$ и $\frac{M}{M_2}$ при различных значениях $\frac{k_1}{k_2}$ и r для плоско-радиального потока в пласте с радиусом контура питания $r_к = 10$ км и радиусом скважины $r_с = 10$ см (закон фильтрации Дарси)

Параметр	r	k_1/k_2			
		0,1	0,5	2	10
1	2	3	4	5	6
$\frac{M}{M_1}\cdot 100\%$	10 м	220	143	62,5	14,5
	2,5 км	112,5	106	89,2	46,0
	5 км	106	103	94,3	65,0
	7,5 км	102,3	101,5	97,5	80,0
$\frac{M}{M_2}\cdot 100\%$	0,25 м	58	93	104	108
	0,5 м	44	88	108	114
	1,0 м	36	83	111	122
	100 м	16	63	143	217

Анализируя первую часть таблицы 6, позволяющую оценить возможную ошибку в подсчете дебита, если неоднородный пласт принимается за однородный, можем сделать следующее замечание: при значительном различии проницаемости двух областей пласта, из которых одна примыкает к скважине, а другая — к внешней границе пласта, получится столь большое расхождение в дебитах скважин в однородном и неоднородном пластах, что не учитывать *неоднородность проницаемости и ставить прогноз на будущий дебит, исходя только из данных о проницаемости призабойной области пласта, совершенно недопустимо.*

Если и можно получить расчетный дебит в предположении, что пласт однороден, то для расчета следует принимать среднее значение коэффициента проницаемости по пласту.

По второй части табл. 6 сделаем следующие замечания:

а) *ухудшение проницаемости в некоторой кольцевой области, примыкающей непосредственно к скважине, сильнее влияет на дебит скважины, чем увеличение проницаемости в той же области* (см., например, колонки 3 и 6 части второй табл. 6);

б) *если произойдет заметное ухудшение проницаемости даже в небольшой области пласта, примыкающей к скважине,— дебит скважины резко снизится* (см. колонку 3 части второй табл. 6).

Далее уместно поставить такой вопрос: целесообразно ли стремиться увеличивать проницаемость призабойной области пласта по возможности в большее число раз? На этот вопрос дает ответ табл. 7, из которой можно видеть, на сколько процентов увеличивается дебит скважины при увеличении проницаемости призабойной области

пласта в двух предельных случаях: 1) фильтрация по закону Дарси и 2) фильтрация по закону Краснопольского. Формула для расчета дебита скважины в пласте с двумя областями разной проницаемости при законе Краснопольского выводится по аналогии с тем, как получена формула (IV.129).

Таблица 7

Увеличение (в процентах) дебита скважины при увеличении проницаемости призабойной области

Закон фильтрации	r/r_c	k_1/k_2			
		2	4	20	∞
1	2	3	4	5	6
Дарси, формула (IV.129)	2	3,1	4,7	6,0	6,4
	3	5,0	7,8	10,0	10,6
	4	6,4	9,9	12,9	13,6
	10	11,1	17,7	23,5	25,0
Краснопольского	2	8	15	27	41
	3	11	22	44	73
	4	13	27	55	100
	10	16	35	82	216

На основании табл. 7 можно сделать некоторые выводы.

1. *В случае фильтрации по закону Дарси увеличивать проницаемость призабойной области пласта более чем в 20 раз не имеет смысла*, так как дальнейшее увеличение проницаемости практически не влечет за собой сколько-нибудь значительного роста дебита (см. колонки 5 и 6 первой части табл. 7).

2. *Нарушение в пластовых условиях закона Дарси усиливает положительное влияние увеличенной проницаемости призабойной области пласта на производительность скважины.* В случае, например, закона Краснопольского с увеличением проницаемости призабойной области пласта более чем в 20 раз можно отметить больший рост дебита, чем в случае закона Дарси.

3. Перед началом кислотной обработки забоя скважины проницаемость призабойной области обычно бывает резко снижена сравнительно с проницаемостью удаленных от скважины областей пласта. В процессе обработки проницаемость у забоя повышается не только до проницаемости пласта, но нередко становится более высокой [1]. В отдельных случаях будет наблюдаться прирост дебита скважины бо́льший того, который указан в табл. 7.

[1] При кислотных обработках известняков образуются глубокие каналы растворения, резко увеличивающие дебит скважины.

Глава V

ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ ПЛАСТАХ

В настоящей главе рассматриваются вопросы установившейся фильтрации жидкости и газа в трещиноватом пласте.

Понятно, что фильтрация в трещиноватой среде при условии изотропии ее фильтрационных свойств будет происходить по существу также, как и в пористой среде, но с иным масштабом «зерен» и «поровых каналов». Поэтому те основные предпосылки, которые были использованы в главе IV, применимы и к нашей задаче.

В трещиноватых пластах также известны три вида простейших одномерных потоков: прямолинейно-параллельный, плоско-радиальный и сферически-радиальный. Аналогично тому как это делалось в главе IV, можно показать, что основное дифференциальное уравнение для одномерного потока жидкости и газа в изотропном трещиноватом пласте имеет вид:

$$\frac{M}{A r^{l}} = \frac{d\varphi_{т}}{dr}, \qquad (V.1)$$

где $\varphi_{т} = \int \frac{k_{т}\rho}{\mu} dp + C$ — потенциальная функция течения в изотропном трещиноватом пласте.

Поэтому при построении расчетных схем можно использовать те готовые решения для массового дебита M и распределения потенциальной функции по пласту, которые получены в главе IV, но с иным значением для проницаемости в трещиноватом пласте.

Что касается особенностей фильтрации в трещиновато-пористом пласте, то здесь следует учитывать, что при установившейся фильтрации в таких пластах будет одно поле давления, т. е. $p = p_1 = p_2$, и суммарный фильтрационный поток будет складываться из порового и трещинного потоков жидкости и газа.

В последующем в конце параграфов мелким шрифтом будет освещена постановка задачи и решение в анизотропном трещиноватом пласте.

§ 1. Поток однородной несжимаемой жидкости в деформируемом трещиноватом пласте

Полагаем, что однородная несжимаемая жидкость обладает неизменной вязкостью.

Определим конкретный вид потенциальной функции течения для однородной несжимаемой жидкости. На основании предположений в постановке задачи имеем:

$$\varphi_т = \int \frac{k_т \rho}{\mu}\, dp + C = \frac{k_т^0 \rho}{\mu} \int [1 - \beta (p_к - p)]^3\, dp + C =$$

$$= \frac{k_т^0 \rho}{4\mu\beta} [1 - \beta (p_к - p)]^4 + C. \qquad (V.2)$$

Если поток плоско-радиальный ($j = 1$), то массовый дебит можно подсчитать из:

$$M = \frac{2\pi b (\varphi_{тк} - \varphi_{тс})}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad (V.2а)$$

В условиях данной задачи значение потенциальной функции на контуре питания ($p = p_к$; $\varphi_т = \varphi_{тк}$):

$$\varphi_{тк} = \frac{k_т^0 \rho}{4\mu\beta} + C, \qquad (V.3)$$

а на стенке скважины потенциальная функция определяется из выражения:

$$\varphi_{тс} = \frac{k_т^0 \rho}{4\mu\beta} [1 - \beta (p_к - p_с)]^4 + C. \qquad (V.4)$$

Составляя разность (V.3) и (V.4) и подставляя в (V.2а), получаем:

$$M = \frac{\pi b k_т^0 \rho}{2\mu\beta \ln \frac{r_к}{r_с}} [1 - (1 - \beta \Delta p_с)^4]. \qquad (V.5)$$

Поделив (V.5) на плотность жидкости, получаем объемный дебит скважины, эксплуатирующей трещиноватый пласт:

$$Q = \pm \frac{\pi b k_т^0}{2\mu\beta \ln \frac{r_к}{r_с}} [1 - (1 - \beta \Delta p_с)^4]. \qquad (V.6)$$

Заметим, что знаки перед выражением в правой части зависят от того, является ли скважина стоком или источником (нагнетательная скважина). При $\beta = 0$, т. е. для недеформируемого трещиноватого пласта, после раскрытия неопределенности получаем формулу Дюпюи.

Распределение давления в деформируемом трещиноватом пласте можно получить, если известен вид формулы для распределения потенциальной функции течения в таком коллекторе.

Учитывая сказанное ранее в главе IV для плоско-радиального потока, зависимость для определения потенциальной функции в любой точке деформируемого трещиноватого пласта можем представить в виде:

$$\frac{\varphi_{тк}-\varphi_{т}}{\varphi_{тк}-\varphi_{тс}}=\frac{\lg\frac{r_к}{r}}{\lg\frac{r_к}{r_с}}. \qquad (V.7)$$

Здесь $\varphi_т$ определяется из (V.2), а разность $\varphi_{тк}-\varphi_{тс}$ — из выражений (V.3) и (V.4).

После подстановки в (V.7) значений $\varphi_{тк}$, $\varphi_{тс}$, $\varphi_т$ получаем:

$$\frac{1-[1-\beta(p_к-p)]^4}{1-[1-\beta(p_к-p_с)]^4}=\frac{\lg\frac{r_к}{r}}{\lg\frac{r_к}{r_с}}. \qquad (V.8)$$

Решая уравнение (V.8) относительно p — давления в любой точке деформируемого трещиноватого пласта, имеем:

$$p=p_к-\frac{1-\sqrt[4]{\Lambda}}{\beta}, \qquad (V.9)$$

где

$$\Lambda=1-[1-(1-\beta\,\Delta p_с)^4]\frac{\lg\frac{r_к}{r}}{\lg\frac{r_к}{r_с}}.$$

Как видно, зависимость (V.9) в значительной степени отличается от соответствующего уравнения для определения давления в любой точке пористого коллектора:

$$p=p_к-(p_к-p_с)\frac{\lg\frac{r_к}{r}}{\lg\frac{r_к}{r_с}}. \qquad (V.10)$$

Однако здесь следует указать на общность формулы (V.8) с (V.10), так как формула (V.10) может быть получена из (V.8) при следующих допущениях: β весьма мало и депрессия на пласт $(p_к-p_с)$ относительно невелика.

Тогда:

$$[1-\beta(p_к-p)]^4\approx 1-4\beta(p_к-p),$$

$$[1-\beta(p_к-p_с)]^4\approx 1-4\beta(p_к-p_с).$$

Из (V.8) прямо следует (V.10).

На рис. 32 приведены пьезометрические кривые для одиночно работающих скважин в деформируемом трещиноватом коллекторе (при $\beta=0{,}01\cdot10^{-5}$ м²/н, $\beta=0{,}005\cdot10^{-5}$ м²/н) и в пористом

пласте, построенные на основе выведенных зависимостей. Характер графиков подтверждает мысль о том, что в деформируемом трещиноватом пласте за счет уменьшения раскрытости трещин при снижении пластового давления возникают дополнительные фильтрационные сопротивления, вызывающие резкое понижение пьезометрического уровня на сравнительно небольшом расстоянии от скважины (в ближайшей к скважине зоне), причем при прочих равных условиях более резко снижается давление в пласте с большим значением β.

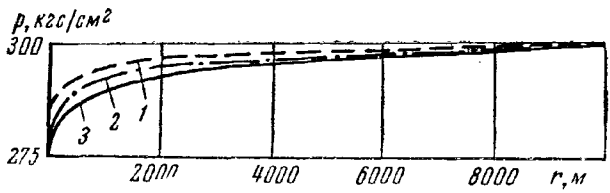


Рис. 32. Кривые распределения давления.
1 и *2* — для деформируемого трещиноватого коллектора; *3* — для пористого коллектора.

Большое практическое значение приведенной расчетной схемы для однородной несжимаемой жидкости состоит в том, что параметры трещиноватого пласта можно определять по индикаторным кривым, построенным на основе промысловых исследований. Из упомянутых параметров наибольшую ценность имеют проницаемость $k_т^0$ и коэффициент β. Из формулы для объемного дебита (V.6) следует, что

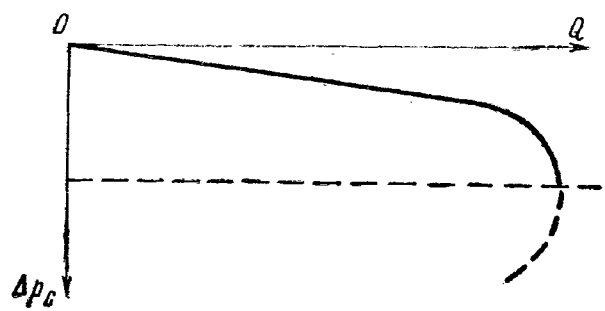


Рис. 33. Индикаторная кривая, построенная при фильтрации несжимаемой жидкости в трещиноватом пласте.

индикаторная кривая, отвечающая этой зависимости, есть парабола четвертого порядка с координатами вершины:

$$Q = \frac{\pi b k_т^0}{2\mu\beta \ln \frac{r_к}{r_с}}; \quad \Delta p_с = \frac{1}{\beta}. \qquad (V.11)$$

Парабола проходит через начало координат, симметрична относительно оси, параллельной оси дебитов; вторая ветвь параболы смысла не имеет (рис. 33). Однако если учесть реальные пластовые

условия (полного смыкания трещин не наблюдается; при написании основных уравнений из-за изменения раскрытия трещин в направлении потока оказались неучтенными факторы, связанные с изменением характеристики течения, то можно говорить лишь о приближенном выполнении экстремальных условий (V.11). Для обработки индикаторных кривых следует использовать графоаналитический способ. Согласно этому способу необходимо замерить площадь, ограниченную фактической индикаторной кривой, и определить отношение этой площади к площади прямоугольника, построенного для концевой точки индикаторной кривой.

Таблица 8

Безразмерное отношение площадей F в зависимости от произведения $\beta \Delta p_c$

F	$\beta \Delta p_c$	F	$\beta \Delta p_c$
0,5	0	0,69	0,6
0,53	0,1	0,72	0,7
0,56	0,2	0,75	0,8
0,595	0,3	0,78	0,9
0 62	0,4	0,80	1,0
0,65	0,5		

Полученное безразмерное отношение F используется далее для нахождения произведения $\beta \Delta p_c$ (рис. 34 и табл. 8). Располагая значением величин F и Δp_c (для концевой точки индикаторной кривой), по этому графику можно найти β.

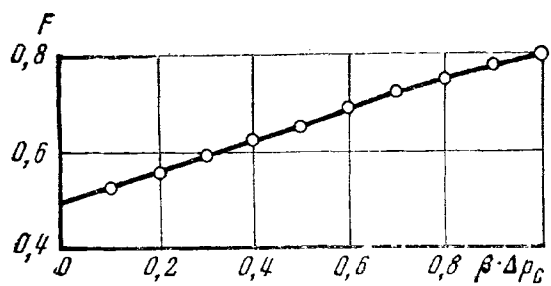


Рис. 34. График зависимости отношения площади F от $\beta \Delta p_c$.

Комплексный параметр β можно определить и непосредственно из (V.6), взяв по индикаторной кривой два известных значения дебита Q_1 и Q_2 при двух известных депрессиях на пласт Δp_{c1}, Δp_{c2}, т. е. из отношения:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1-(1-\beta \Delta p_{c1})^4}{1-(1-\beta \Delta p_{c2})^4} = \frac{\Delta p_{c1}}{\Delta p_{c2}} \frac{4-6\beta \Delta p_{c1}+4\beta^2 \Delta p_{c1}^2-\beta^3 \Delta p_{c1}^3}{4-6\beta \Delta p_{c2}+4\beta^2 \Delta p_{c2}^2-\beta^3 \Delta p_{c2}^3}. \quad \text{(V.12)}$$

По найденной тем или иным способом величине β можно определить проницаемость $k_т^0$ из уравнения:

$$k_т^0 = \frac{2Q\mu\beta \ln \frac{r_к}{r_c}}{\pi b [1-(1-\beta \Delta p_c)^4]}. \quad \text{(V.13)}$$

Обработка индикаторных кривых по скважинам месторождения Карабулак — Ачалуки показала, что β изменяется от $0{,}01 \cdot 10^{-5}$ м²/н до $0{,}006 \cdot 10^{-5}$ м²/н. При установившейся фильтрации в трещиновато-пористом пласте общий дебит жидкости, отбираемой из него, определяется суммированием ее потока из системы пористых блоков и из системы трещин, и форма индикаторных кривых будет определяться и притоком жидкости из пористых блоков, и притоком жидкости по трещинам (сложение параболы четвертого порядка и прямой, проходящей через начало координат).

Для анизотропного трещиноватого пласта доказывается следующее. Если оси координат совпадают с главными осями тензора проницаемости, то дебит скважины можно подсчитать из выражения:

$$Q = \frac{\pi b \sqrt{k_x^0 k_y^0}}{2\mu\beta \ln \frac{r'_к}{r'_c}} [1 - (1 - \beta \Delta p_c)^4], \qquad (V.13')$$

где

$$\ln \frac{r'_к}{r'_c} = \ln \frac{4 r_к \sqrt{\frac{k_x^0}{k_y^0}}}{r_c \left(1 + \sqrt{\frac{k_x^0}{k_y^0}}\right)^2}.$$

Если $k_x^0/k_y^0 < 100$, то эллиптичностью контура питания и скважины можно пренебречь и считать, что $\ln \frac{r'_к}{r'_c} \approx \ln \frac{r_к}{r_c}$.

Время движения частицы жидкости вдоль координаты r в трещиноватом пласте можно определить на основе тех общих зависимостей, которые получены в главе IV, т. е.

$$t = \frac{A m_т (r_0^{1+j} - r^{1+j})}{(1+j) Q},$$

что для плоско-радиального потока дает:

$$t = \frac{m_т (r_0^2 - r^2) 2\mu\beta \ln \frac{r_к}{r_c}}{k_т^0 [1 - (1 - \beta \Delta p_c)^4]}. \qquad (V.14)$$

§ 2. Поток идеального газа в деформируемом трещиноватом пласте

При изучении вопросов фильтрации идеального газа принимается, что установившаяся фильтрация газа совершается в условиях изотермического изменения его состояния (хотя при установившейся фильтрации газа и происходит понижение температуры, но оно относительно невелико).

Уравнение состояния идеального газа записывается в виде соотношения, известного под названием закона Бойля — Мариотта:

$$\frac{\rho}{\rho_{ат}} = \frac{p}{p_{ат}}. \qquad (V.15)$$

где ρ, $\rho_{ат}$,— плотности газа при давлениях p и $p_{ат}$.

Предполагая, что проницаемость деформируемого трещиноватого пласта связана с текущим пластовым давлением выражением:

$$k_т = k_т^0 [1 - \beta (p_к - p)]^3,$$

потенциальную функцию течения для идеального газа можно записать в виде (при $\mu = \text{const}$):

$$\varphi_т = \int \frac{k_т \rho}{\mu} dp + C = \frac{\rho_{ат} k_т^0}{\mu p_{ат}} \int p [1 - \beta (p_к - p)]^3 dp + C =$$

$$= \frac{\rho_{ат} k_т^0}{\mu p_{ат}} \left\{ \frac{p}{4\beta} [1 - \beta (p_к - p)]^4 - \frac{1}{20\beta^2} [1 - \beta (p_к - p)]^5 \right\} + C. \quad (V.16)$$

Используя граничные условия на контуре питания и на стенке скважины, соответственно получаем:

$$\varphi_{тк} = \frac{\rho_{ат} k_т^0}{\mu p_{ат}} \left(\frac{p_к}{4\beta} - \frac{1}{20\beta^2} \right) + C, \quad (V.17)$$

$$\varphi_{тс} = \frac{\rho_{ат} k_т^0}{\mu p_{ат}} \left\{ \frac{p_с}{4\beta} [1 - \beta (p_к - p_с)]^4 - \frac{1}{20\beta^2} [1 - \beta (p_к - p_с)]^5 \right\} + C. \quad (V.18)$$

Подставляя значение разности $\varphi_{тк} - \varphi_{тс}$ из (V.17) и (V.18) в формулы:

а) для плоско-радиального потока:

$$Q = 2\pi b \frac{\varphi_{тк} - \varphi_{тс}}{\rho_{ат} \ln \frac{r_к}{r_с}};$$

б) для прямолинейно-параллельного потока:

$$Q = \frac{ab (\varphi_{тк} - \varphi_{тс})}{\rho_{ат} (r_к - r_с)},$$

получаем следующие формулы для объемного дебита идеального газа при фильтрации в деформируемом трещиноватом пласте:

а) для плоско-радиального потока:

$$Q = \frac{\pi b k_т^0}{2\mu\beta p_{ат} \ln \frac{r_к}{r_с}} \left\{ [p_к - p_с (1 - \beta \Delta p_с)^4] - \frac{1}{5\beta} [1 - (1 - \beta \Delta p_с)^5] \right\}; \quad (V.19)$$

б) для прямолинейно-параллельного потока:

$$Q = \frac{ab k_т^0}{4\mu\beta p_{ат} (r_к - r_с)} \left\{ [p_к - p_с (1 - \beta \Delta p_с)^4] - \frac{1}{5\beta} [1 - (1 - \beta \Delta p_с)^5] \right\}. \quad (V.20)$$

Чтобы определить распределение давления в деформируемом трещиноватом пласте при установившейся фильтрации идеального

газа, следует использовать формулу распределения потенциальной функции по пласту (плоско-радиальный поток):

$$\frac{\varphi_т - \varphi_{тс}}{\varphi_{тк} - \varphi_{тс}} = \frac{\lg \frac{r}{r_с}}{\lg \frac{r_к}{r_с}}.$$

Из рис. 35 видим, что при $\frac{r}{r_с} = 5$, т. е. на расстоянии всего лишь $5r_с$ теряется: в пористом пласте 20% всей депрессии на пласт, а в трещиноватом 40%, т. е. в 2 раза больше.

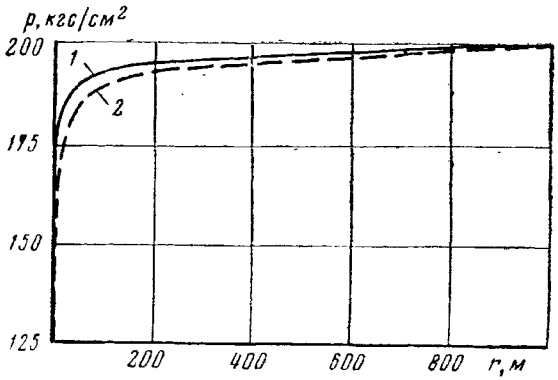


Рис. 35. Распределение давления в пластах при установившейся фильтрации идеального газа и одинаковых граничных условиях ($r_с = 0{,}1$; $p_с = 150 \cdot 10^5$ н/м²; $r_к = 1000$ м; $p_к = 200 \cdot 10^5$ н/м²).
1 — трещиноватый и *2* — пористый пласты.

Таким образом, характерной особенностью фильтрации идеального газа в деформируемом трещиноватом пласте является весьма резкий рост потери депрессии в непосредственной близости от скважины (больше, чем в пористом пласте в 1,5 —2 раза).

Теоретические и экспериментальные исследования фильтрации газа проводились А. Эгли, С. Гриннеллом, И. П. Гинзбургом. Представляют интерес работы Е. С. Ромма по анализу притока газа в скважину через систему недеформируемых трещин пласта-коллектора. Существенное значение имеют и работы Ю. П. Желтова и П. П. Золотарева по неустановившейся фильтрации идеального газа в трещиновато-пористой среде, а также работы К. С. Басниева.

Отметим, что для трещиновато-пористого пласта выражения для суммарного дебита при установившейся фильтрации газа получаются при одновременном учете притока газа по трещинам и по пористым блокам, т. е. к выведенным уравнениям для дебита добавляется еще одно слагаемое, учитывающее приток газа из пористых блоков.

§ 3. Особенности фильтрационного одномерного потока в деформируемом трещиноватом пласте в условиях нелинейного закона фильтрации

Анализ фактических данных по исследованию скважин, а также теоретические и экспериментальные работы ряда исследователей (В. Н. Майдебора, Н. П. Лебединца, Л. Г. Наказной и др.) показали, что фильтрация жидкости в трещиноватых пластах может осложняться не только деформациями систем трещин, но также и появлением значительных сил инерции. Детальный анализ, выполненный Н. П. Лебединцем, показал, что в тех или иных конкретных случаях возможно влияние обоих факторов на характер индикаторных кривых, или же преимущественное влияние одного из этих факторов.

Поэтому имеет смысл рассмотрение особенностей фильтрационного одномерного потока в деформируемом трещиноватом пласте в условиях нелинейного закона, выражаемого в виде одночленной или двучленной зависимости.

Если в некоторой зоне трещиноватого деформируемого пласта справедлив нелинейный закон фильтрации, то основное дифференциальное уравнение одномерного фильтрационного потока в этом случае будет отличаться от уравнения (V.1). Положим, что *нелинейный закон фильтрации выражается посредством одночленной степенной зависимости* (III.18).

Тогда массовая скорость фильтрации определится в виде:

$$\rho v = \left(\frac{d\theta_т}{dr}\operatorname{sign}\frac{d\theta_т}{dr}\right)^{\frac{1}{n}}\operatorname{sign} v, \qquad (V.21)$$

а основное дифференциальное уравнение одномерного потока можно записать в следующей форме:

$$\left(\frac{M}{Ar^j \operatorname{sign} M}\right)^n = \frac{d\theta_т}{dr}\operatorname{sign}\frac{d\theta_т}{dr},$$

где значения A определяются из табл. 1 главы IV; а $\theta_т$ есть вспомогательная функция следующего вида:

$$\theta_т = \int\left[12^{-\frac{1}{n}} m_т (0{,}25\,\mathrm{Re}_{кр})^{\frac{n-1}{n}} \delta^{\frac{3-n}{n}} \mu^{-\frac{n-2}{n}} \rho^{\frac{1}{n}}\right]^n dp + C_2. \qquad (V.22)$$

В уравнении (V.22) C_2 — постоянная интегрирования; значение величин в квадратной скобке получено на основании зависимости (III.19); n изменяется от 1 до 1,75. Интегрируя дифференциальное уравнение (V.21), можно вычислить значение вспомогательной функции $\theta_т$:

$$\theta_т = \left(\frac{M}{A\operatorname{sign} M}\right)^n \frac{r^{1-jn}}{1-jn}\operatorname{sign} M + C_3. \qquad (V.23)$$

где C_3 — постоянная интегрирования.

Аналогично соответствующим выражениям главы IV, § 5 при данных граничных условиях из (V.23) получаем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\theta_т-\theta_{тс}}{\theta_{тк}-\theta_{тс}}=\frac{r^{1-jn}-r_с^{1-jn}}{r_к^{1-jn}-r_с^{1-jn}};\\&M=A\operatorname{sign}M\left[\operatorname{sign}M\frac{(1-jn)(\theta_{тк}-\theta_{тс})}{r_к^{1-jn}-r_с^{1-jn}}\right]^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}\right\}\qquad(V.24)$$

В формулах (V.24) $\theta_{тк}$ и $\theta_{тс}$ — значения функции $\theta_т$ из (V.22) при $r=r_к$ и $r=r_с$.

Предположим теперь, что нелинейный закон фильтрации выражается посредством двучленной зависимости (III.23).

Проделаем некоторые преобразования в (III.23): умножим все члены этого равенства на плотность ρ и вынесем за скобки вязкость μ. Тогда применительно к одномерному потоку мы получаем:

$$\frac{d\varphi_т}{dr}=\frac{M}{Ar^j}\operatorname{sign}M+\frac{\alpha d}{120\mu(1-m_т)}\frac{M^2}{(Ar^j)^2},\qquad(V.25)$$

где

$$\varphi_т=\int\frac{k_т\rho}{\mu}dp+C.$$

После разделения переменных и интегрирования (V.25) получим:

$$\varphi_т=\frac{M}{A}\frac{r^{1-j}}{1-j}\operatorname{sign}M+\frac{\alpha d}{120\mu(1-m_т)}\left(\frac{M}{A}\right)^2\frac{r^{1-2j}}{1-2j}+C_1,\qquad(V.26)$$

где C_1 — новая постоянная интегрирования. В формуле (V.26) осреднено значение коэффициента трещиноватости.

Используя граничные условия на стенке скважины и на контуре питания, из (V.26) имеем:

$$\varphi_{тк}-\varphi_{тс}=\frac{M}{A}\frac{r_к^{1-j}-r_с^{1-j}}{1-j}\operatorname{sign}M+\left(\frac{M}{A}\right)^2\frac{\alpha d}{120\mu(1-m_т)}\frac{r_к^{1-2j}-r_с^{1-2j}}{1-2j}.\qquad(V.27)$$

Массовый дебит M определяется из решения уравнения (V.27) относительно M.

Однородная несжимаемая жидкость постоянной вязкости. Для одномерного потока однородной несжимаемой жидкости в деформируемом трещиноватом коллекторе из уравнения (V.27) при $j=1$ (неопределенность в первом члене правой части (V.27) раскрывается по правилу Лопиталя) получаем:

$$[1-(1-\beta\Delta p_с)^4]=\frac{2\mu\beta Q}{\pi bk_т^0}\ln\frac{r_к}{r_с}+\frac{\alpha\beta d\rho Q^2}{120\pi^2b^2k_т^0(1-m_т)}\left(\frac{1}{r_с}-\frac{1}{r_к}\right).\qquad(V.28)$$

Заметим, что разность потенциалов в левой части (V.27) раскрыта на основании выражений (V.3) и (V.4). Как видно из (V.28), индикаторная кривая в этом случае определяется в результате сложения

двух парабол — параболы четвертого порядка, симметричной относительно оси, параллельной оси дебитов, а параболы второго порядка (относительно дебита Q) симметричной относительно оси, параллельной оси депрессий (Δp_c) и отстоящей от последней на расстоянии, равном

$$\left(-\frac{120\pi b\mu(1-\bar{m}_т)\ln\frac{r_к}{r_c}}{\rho d\,(r_c^{-1}-r_к^{-1})}\right).$$

Идеальный газ. Для изотермической фильтрации идеального газа аналогичными рассуждениями из (V.27) с учетом (V.17) и (V.18) получаем:

$$\frac{k_т^0}{p_{ат}}\left\{\left(\frac{p_к}{4\beta}-\frac{1}{20\beta^2}\right)[1-(1-\beta\Delta p_c)^4]+\frac{\Delta p_c}{5\beta}(1-\beta\Delta p_c)^4\right\}=$$

$$=\frac{\mu Q}{2\pi b}\ln\frac{r_к}{r_c}+\frac{\alpha d\rho Q^2}{120\pi^2 b^2(1-\bar{m}_т)}\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_к}\right). \qquad (V.29)$$

Глава VI

ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§ 1. Дифференциальное уравнение установившегося движения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в пласте, имеющем непроницаемую подошву

В главах IV и V движение жидкости в пласте рассматривалось при условии, что движущаяся жидкая масса заполняет поры или трещины выделенной области пласта на всем протяжении этой области по всей мощности пласта. Например, для прямолинейно-параллельного и плоско-радиального потоков предполагалось, что движение жидкости происходит во всех точках любого вертикального отрезка прямой, отсчитанного от непроницаемой подошвы пласта до его непроницаемой кровли. При этом напорная пьезометрическая поверхность располагалась выше кровли пласта. В настоящей главе рассматривается *движение жидкости, поверхность которой остается ниже кровли пласта и совпадает с пьезометрической поверхностью.*

Поверхность жидкости в рассматриваемых здесь случаях назовем *свободной поверхностью жидкости*, давление над поверхностью постоянное. При неподвижном состоянии жидкости свободная ее поверхность горизонтальна; в процессе движения она искривляется, понижаясь в направлении потока.

В отличие от движения жидкости, пьезометрический уровень которой выше непроницаемой кровли пласта, движение жидкости со свободной поверхностью называют *безнапорным движением.*

Когда добывают нефть, безнапорное движение жидкости может происходить, например, в условиях определенной разновидности гравитационного режима пласта; вследствие истощения пластовой энергии уровень жидкости находится ниже кровли пласта.

Преобладающая форма пластовой энергии при разработке нефтяного месторождения с гравитационным режимом проявляется в действии силы тяжести жидкости.

Безнапорное движение жидкости в пласте встречается также при шахтной и карьерной разработке нефтяных месторождений.

Теория безнапорного движения жидкости в пористой среде особенно широко применяется при решении задач гидрогеологии, относящимся, например, к фильтрации воды через земляные плотины, к фильтрации грунтовой воды к колодцам и др.

Затруднительно найти точное решение некоторых задач безнапорного движения жидкости в пласте. Мы ограничимся изложением

той приближенной теории безнапорного установившегося движения жидкости, которая известна под названием гидравлической теории Дюпюи — Форхгеймера.

Основным методом указанной приближенной теории безнапорной фильтрации служит метод осреднения потока по высоте. Представим продуктивный пласт, имеющий непроницаемую горизонтальную подошву. Пусть при отборе жидкости из пласта или при поглощении ее пластом уровень жидкости устанавливается ниже кровли пласта. Если потоком жидкости со свободной поверхностью охвачена большая площадь, свободная поверхность потока бывает слабо искривлена. В этом случае задачи об осесимметричном безнапорном течении (к скважине или от скважины) и о безнапорном течении к прямолинейной галерее (или от галереи) могут быть сведены к задачам об одномерном потоке.

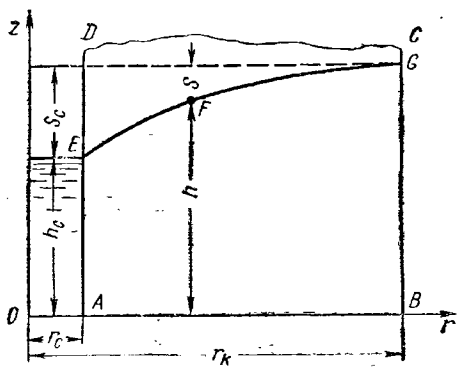


Рис. 36. Схема пласта, в котором движется жидкость со свободной поверхностью.

Рассмотрим один из этих двух видов безнапорного течения в любой из вертикальных плоскостей, в которой движутся все находящиеся в ней жидкие частицы.

На рис. 36 изображено сечение пласта $ABCD$ вертикальной плоскостью координат rOz. Наша координатная плоскость выбрана так, что она пересекает непроницаемую подошву пласта по оси Or, кровлю — по линии DC, свободную поверхность жидкости — по кривой EFG.

Если пренебречь скоростным напором (вследствие малости скорости фильтрации), можно записать напор h следующим образом:

$$h = \frac{p}{\gamma}, \qquad \text{(VI.1)}$$

где $\gamma = \text{const}$ — вес единицы объема жидкости.

Напор h выражается в функции r и z — координат точек кривой EFG. Следовательно, давление p выражается в функции тех же переменных:

$$p = p(r, z). \qquad \text{(VI.2)}$$

Считая, что кривая EFG имеет малый наклон, будем пренебрегать вертикальными составляющими векторов скорости фильтрации. Тогда получим в плоскости rOz поток с параллельными горизонтальными скоростями.

Если принять, что во всех точках пласта, расположенных на одной вертикали, скорости не только параллельны, но и равны по величине, мы должны заключить, что и давления в точках одной вертикали будут одинаковыми.

Но из формулы (VI.2) следует, что давление выражается в функции двух переменных: r и z. Допущение о независимости давления p от координаты z — для точек одной вертикали равносильно тому, что в формуле (VI.2) мало изменяющаяся переменная z заменяется некоторой постоянной $z_{ср}$ средней высотой потока. Таким образом давление p можно считать зависящим только от координаты r, а значит рассматриваемое безнапорное течение можно считать одномерным. В данном потоке напор h совпадает с высотой свободной поверхности жидкости.

Приняв указанные допущения, мы можем использовать дифференциальное уравнение одномерного потока (IV.28). Поскольку жидкость несжимаема и параметры k и μ постоянны, потенциальная функция φ выражается формулой (IV.46):

$$\varphi = C'p + C,$$

где постоянная C' определяется так, как и в формуле (IV.46).

Подставим значение φ, выраженное формулой (IV.46), в уравнение (IV.28) и заметим, что величина A в этом уравнении для безнапорного потока имеет следующие значения:
$A = ah$ — в случае притока в направлении к прямолинейной галерее, или в противоположную сторону;
$A = 2\pi h$ — в случае осесимметричного потока к скважине или в противоположную сторону.

Учитывая, кроме того, что при сделанных нами допущениях имеет место равенство (VI.1), напишем дифференциальное уравнение безнапорного потока в следующем виде:

$$\frac{M}{A'r^j} = \frac{k\rho\gamma}{2\mu}\frac{dh^2}{dr}, \qquad \text{(VI.3)}$$

где $A' = a$ — ширина потока прямолинейной галереи и $A' = 2\pi$ — ширина истока для скважины; $j = 0$ — для галереи и $j = 1$ для скважины.

Интегрируя уравнение (VI.3) при условии, что $j = 0$, получим:

$$h^2 = \frac{2M\mu}{A'k\rho\gamma}r + C. \qquad \text{(VI.4)}$$

При $j = 1$ будем иметь

$$h^2 = \frac{M\mu}{\pi k\rho\gamma}\ln r + C. \qquad \text{(VI.5)}$$

Произвольные постоянные C в формулах (VI.4) и (VI.5) определяются обычным порядком по граничным условиям задачи.

Поскольку дифференциальное уравнение безнапорного потока (VI.3) и формулы (VI.4), (VI.5) основаны на допущениях, связанных с методом осреднения потока по высоте, необходимо выяснить, в какой мере эти формулы отвечают реальным условиям.

Точные аналитические исследования в теории безнапорного потока и данные специальных экспериментов, проводившихся на

песчаных и электрических моделях, показывают значительное несоответствие между действительной свободной поверхностью жидкости и поверхностью, определяемой по уравнениям (VI.3)—(VI.5) *Использование формул (VI. 4) — (VI.5) при определении свободного зеркала жидкости возможно тем с большей точностью, чем выше уровень жидкости в стоке, чем большую протяженность имеет поток по сравнению с его мощностью и чем дальше от стока берутся уровни жидкости.*

Установлено, однако, что при сходящемся или расходящемся *осесимметричном потоке формула (VI.5) с достаточной точностью воспроизводит фактическое распределение высот h по пласту.* Для

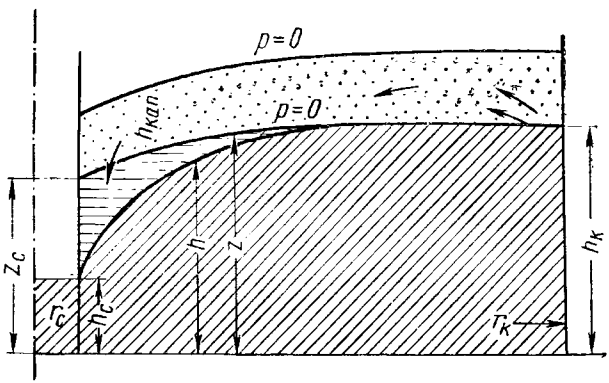


Рис. 37. Влияние капиллярного слоя на безнапорный поток жидкости к скважине (по М. Маскету).

безнапорного потока *в случае галереи по формуле (VI.4) получаем лишь грубое приближение к действительности.*

Несоответствие между действительными и расчетными уровнями жидкости в безнапорном движении объясняется *влиянием капиллярного слоя*, перекрывающего основную массу жидкости в пласте. Это несоответствие особенно заметно у стенок стока (рис. 37), где уровень жидкости в пласте выше уровня жидкости в самом стоке (галереи или скважины). Между уровнями жидкости в пласте и внутри стока на стенке последнего образуется промежуток высачивания. На рис. 37 высота промежутка высачивания равна $z_c - h_c$.

Но если имеется несоответствие между фактическими данными о свободной поверхности жидкости и результатами подсчетов высот уровней по формулам (VI.4) и (VI.5), то с помощью последних можно получить вполне приемлемые для практических целей формулы дебита. В том, что получаемые этим путем формулы дебита верны, убеждают решения рассматриваемой задачи по методам, свободным от допущений теории Дюпюи — Форхгейлеера. Эти более точные решения задачи мы здесь не приводим, отсылая читателя к соответствующей литературе, например, к книгам акад. П. Я. Полубариновой-Кочиной, М. Маскета, И. А. Чарного и других авторов.

§ 2. Дебит и индикаторная диаграмма для потока жидкости со свободной поверхностью

Чтобы получить формулы дебита, надо использовать граничные условия задачи.

Пусть на стенке, ограничивающей пласт с одной стороны, определяемой координатой $r = r_с$ (см. рис. 36), высота уровня жидкости $h = h_с$; на противоположной стороне пласта, т. е. при $r = r_к$, высота уровня $h = h_к$. Подставив в формулы (VI.4) и (VI.5) сначала величины $r_с$ и $h_с$, а затем $r_к$ и $h_к$, получим для каждой из формул по два уравнения, содержащих неизвестную C. Исключая C из каждой пары уравнений, найдем соответствующее значение Q.

Для прямолинейной галереи из формулы (VI.4) следует

$$Q = \frac{ak\gamma}{2\mu} \frac{h_к^2 - h_с^2}{L}, \tag{VI.6}$$

где $L = r_к - r_с$.

Из формулы (VI.5) имеем дебит для осесимметричного безнапорного потока по закону Дарси:

$$Q = \frac{\pi k\gamma}{\mu} \frac{h_к^2 - h_с^2}{\ln \frac{r_к}{r_с}}. \tag{VI.7}$$

Формулы (VI.6) и (VI.7) называются *формулами Дюпюи для безнапорного потока*. И. А. Чарным дано строгое доказательство этих формул [30].

Следует отметить некоторую внешнюю аналогию формул безнапорного потока жидкости с формулами потока идеального газа. Если действует закон фильтрации Дарси, то в том и в другом случаях, например, дебит пропорционален разности квадратов граничных значений некоторой переменной; для безнапорного потока берется разность квадратов граничных высот уровней жидкости, а для газа — разность квадратов граничных давлений. В силу этой аналогии можно заключить, что в указанных случаях сходными будут и соответствующие индикаторные кривые.

Обратимся к индикаторным диаграммам. Введем величину понижения уровня свободной поверхности жидкости под статическим уровнем, высоту которого будем считать равной $h_к$. Обозначим понижение уровня, как и в главе IV, через S. Имеем:
$S = h_к - h$; $S_с = h_к - h_с$ (см. рис. 36).

Для построения индикаторной диаграммы следует знать зависимость между Q и $S_с$. Найдем ее с помощью закона Дарси. Она выводится из соответствующей формулы Дюпюи (VI.6) или (VI.7). Если обозначим совокупность постоянных множителей и делителей через E, можем представить выражение дебита Q так:

$$Q = E(h_к^2 - h_с^2), \tag{VI.8}$$

где $E = \dfrac{\pi k\gamma}{\mu \ln \dfrac{r_к}{r_с}}$ — для осесимметричного потока; $E = \dfrac{ak\gamma}{2\mu L}$ — для потока при действии галереи. Разность $h_к^2 - h_с^2$ в формуле (VI.8) можно видоизменить, введя понижение уровня $S_с$:

$$h_к^2 - h_с^2 = 2h_к S_с - S_с^2.$$

Мы видим аналогию между этим равенством и равенством, полученным для $p_к^2 - p_с^2$ в главе IV при выводе зависимости между дебитом идеального газа Q и понижением давления $\Delta p_с$.

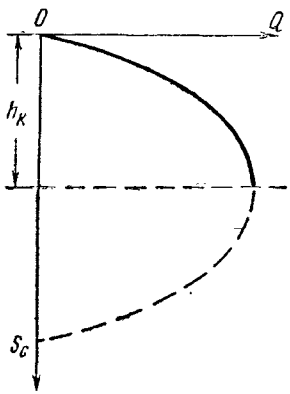


Рис. 38. Индикаторная кривая для безнапорного потока.

Подставляя найденное значение $h_к^2 - h_с^2$ в равенство (VI.8), запишем:

$$Q = 2Eh_к S_с - ES_с^2. \qquad \text{(VI.9)}$$

Индикаторная диаграмма, построенная по формуле (VI.9), имеет вид параболы с осью, параллельной оси дебитов (см. рис. 38). Того же вида индикаторная кривая получается и для газа — см. главу IV.

Коэффициент продуктивности здесь уменьшается с увеличением $S_с$. При $S_с = h_к$, как видно из диаграммы, дебит будет наибольшим.

В заключение настоящего параграфа отметим явление инфильтрации жидкости в пласт.

Безнапорные подземные воды водоносного горизонта, залегающего на первом от поверхности водоупорном ложе, называют грунтовыми. При движении грунтовая вода обычно проникает в водоносный горизонт из вышележащих горизонтов или с поверхности земли. Это явление носит название *инфильтрации*. Инфильтрация происходит и в нефтеносных пластах, если они перекрываются или подстилаются проницаемыми, хотя и слабо, для жидкости пластами. Дифференциальное уравнение безнапорного потока (VI.3) выведено нами без учета инфильтрации. Полученные на основе этого уравнения формулы дебита (VI.6) и (VI.7) можно, следовательно, применять к расчетам потоков, в которых инфильтрация или отдача жидкости в направлении перекрывающих или подстилающих пластов не играет существенной роли.

Обстоятельный труд, посвященный теории движения грунтовых вод, выполнен акад. П. Я. Полубариновой-Кочиной. Многие задачи грунтового потока рассмотрены В. И. Аравиным и С. Н. Нумеровым, П. П. Климентовым, А. И. Силиным-Бекчуриным.

Глава VII

ПЛОСКИЙ УСТАНОВИВШИЙСЯ НЕРАДИАЛЬНЫЙ ПОТОК ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА В ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

§ 1. Предварительные понятия о методе исследования плоского потока

В настоящей главе рассматривается *плоский нерадиальный поток, поддерживаемый в пласте одной или несколькими эксплуатационными и нагнетательными скважинами.*

Если нет специальных оговорок, везде предполагается, что пласт — *горизонтальный*, имеющий всюду *одинаковую мощность*. Сверху он перекрыт *непроницаемой горизонтальной кровлей*, а подстилается *горизонтальной непроницаемой подошвой*. Движение жидкости или газа в пласте подчиняется *закону фильтрации Дарси* и является *установившимся*.

Во всех параграфах настоящей главы рассматривается плоское движение жидкости (газа) в пористой среде. Это значит, что изучается движение, происходящее в плоскостях, параллельных между собой и что картина движения во всех плоскостях представляется одинаковой. Будем разбирать движение в одной из этих плоскостей — в *основной плоскости течения*.

К решению задач настоящей главы мы будем применять *принцип суперпозиции* (*наложения*) потоков. Основанный на этом принципе *метод суперпозиции* заключается в следующем.

При совместном действии в пласте нескольких стоков (источников) потенциальная функция (или давление), определяемая каждым стоком (источником), вычисляется по формуле для единственого стока. Потенциальная функция, обусловленная всеми стоками и источниками, вычисляется путем алгебраического сложения этих независимых друг от друга значений потенциальной функции.

Относительно обоснования метода суперпозиции будет сказано в главе IX.

Пусть в неограниченном по протяженности пласте действует одна эксплуатационная скважина (сток) с положительным массовым дебитом M. (Если бы скважина была нагнетательной, она являлась бы источником и ее дебит был бы отрицательным). Поток, поддерживаемый стоком с дебитом M,—плоско-радиальный. Потенциальная функция φ определяется формулой (IV.30):

$$\varphi = \frac{M}{2\pi b} \ln r + C, \qquad \text{(VII.1)}$$

где r — расстояние между некоторой точкой пласта и центром скважины; C — постоянная.

Допустим, что дебит M' эта скважина имеет в случае, если она не единственная в пласте, а действует совместно с другой или с несколькими скважинами того же пласта (эксплуатационными и нагнетательными). Пользуясь методом суперпозиции, найдем выражение потенциальной функции сложного потока φ так:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{M'_j}{2\pi b} \ln r_j + C, \qquad \text{(VII.2)}$$

где φ_j — выражение функции φ на контуре скважины за номером j; r_j — расстояние между данной точкой пласта и скважиной за номером j; M'_j — массовый дебит этой скважины, положительный, если скважина эксплуатационная (сток), и отрицательный, если скважина нагнетательная (источник); n — общее число скважин; C — постоянная.

Если жидкость несжимаемая, формулу (VII.2) можно записать, вводя вместо M'_j объемный дебит Q'_j:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q'_j}{2\pi b} \ln r_j + C. \qquad \text{(VII.3)}$$

Для определения *эквипотенциальных линий — изобар* заметим, что во всех точках этих кривых значение φ должно оставаться неизменным; следовательно, уравнение изобар получается, например, из (VII.2) путем приравнивания его правой части некоторой постоянной, и представляется в следующем виде:

$$r_1^{M'_1} r_2^{M'_2} r_3^{M'_3} \ldots r_n^{M'_n} = \prod_{j=1}^{n} r_j^{M'_j} = C_1, \qquad \text{(VII.4)}$$

где П — знак произведения; C_1 — постоянная.

Таково уравнение изобар в многополярной системе координат. Если дебит всех скважин как по величине, так и по знаку одинаковый, уравнение изобар записывается проще:

$$\prod_{j=1}^{n} r_j = C_1. \qquad \text{(VII.5)}$$

Линии тока образуют семейство кривых, ортогональных изобарам.

Чтобы вычислить дебиты M'_j, воспользуемся граничными условиями: контуры всех скважин и контур питания пласта — изобары, радиусы скважин одинаковы; радиус скважины r_c значительно меньше расстояния между скважинами и расстояния между скважинами и контуром питания пласта. Для вычисления дебитов надо составить всего $n + 1$ уравнений, потому что столько будет неизвестных: n

дебитов M_j и постоянная C_1. Пусть значение φ на контуре скважины за номером λ будет φ_λ; значение φ на контуре питания пласта $\varphi_к$.

Подставив в уравнение (VII.2) порознь значения φ на каждой скважине и соответствующие этой скважине значения r_j, получим n уравнений. Подставив значения φ и r_j на контуре питания, получим еще одно уравнение. Окончательно будем иметь систему $(n+1)$ — уравнение с $n+1$ неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{\lambda-1}\frac{M'_j}{2\pi b}\ln r_{j\lambda}+\frac{M'_\lambda}{2\pi b}\ln r_c+\sum_{j=\lambda+1}^{n}\frac{M'_j}{2\pi b}\ln r_{j\lambda}+C=\varphi_\lambda, \quad \text{(VII.6)}$$

где λ принимает значения $1, 2, \ldots, n$, а $r_{j\lambda}$ — расстояния между скважинами за номерами j и λ;

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{M'_j}{2\pi b}\ln r_{jк}+C=\varphi_к, \quad \text{(VII.6а)}$$

где $r_{jк}$ — расстояние между скважиной за номером j и контуром питания.

Для вычисления массовых дебитов остается решить систему уравнений (VII.6) относительно M'_j.

Итак, последовательность вывода формулы дебита следующая.

1. По методу суперпозиции составляется потенциальная функция потока φ.

2. Устанавливаются граничные условия задачи.

3. В выражение потенциальной функции φ подставляются порознь значения переменных φ_j и r_j на граничных контурах пласта и скважин; составляется таким образом система уравнений с неизвестными массовыми дебитами M'_j и постоянной C.

4. Полученная система уравнений решается относительно дебитов M'_j.

§ 2. Фильтрационный поток от нагнетательной скважины к эксплуатационной

Пусть сток O_1 и источник O_2 равнодебитны, т. е. имеют одинаковые по модулю массовые дебиты M; $O_1O_2 = 2a$. Исследуем поток от источника к стоку.

Проведем ось Ox через точки O_1 и O_2 так, чтобы точка O_1 находилась от начала координат O на расстоянии a_1, а точка O_2 на расстоянии a_2 (рис. 39).

По формуле (VII.2) определим потенциальную функцию сложного потока. По принятому здесь обозначению для дебита стока запишем: $M'_1 = +M$; для дебита источника $M'_2 = -M$. После подстановки значений M'_1 и M'_2 в формулу (VII.2) получим:

$$\varphi=\frac{M}{2\pi b}\ln r_1-\frac{M}{2\pi b}\ln r_2+C=\frac{M}{2\pi b}\ln\frac{r_1}{r_2}+C, \quad \text{(VII.7)}$$

где r_1 и r_2 — расстояния любой точки пласта до стока и источника соответственно.

Уравнение изобар (VII.4) в данном случае будет следующим:

$$\frac{r_1}{r_2} = C_1. \tag{VII.8}$$

Каким кривым соответствует уравнение (VII.8)? Чтобы ответить на этот вопрос, выразим прежде всего r_1, r_2 через координаты точки $M(x, y)$ в соответствии с рис. 39.

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-a_1)^2+y^2}; \\ r_2 &= \sqrt{(a_2-x)^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{VII.9}$$

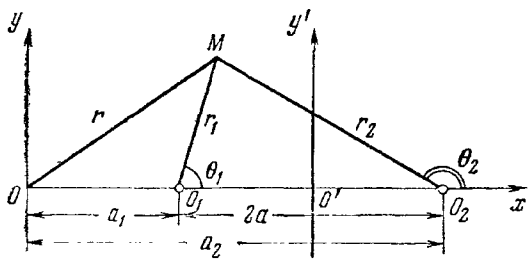


Рис. 39. Схема стока O_1 и источника O_2.

Подставляя значения r_1 и r_2 из (VII.9) в уравнение (VII.8), получим:

$$\frac{(x-a_1)^2+y^2}{(a_2-x)^2+y^2} = C_1^2. \tag{VII.10}$$

Уравнение (VII.10) характеризует эквипотенциальные линии — изобары.

Запишем уравнение (VII.10) в таком виде:

$$x^2+y^2+2\,\frac{C_1^2a_2-a_1}{1-C_1^2}\,x = \frac{C_1^2a_2^2-a_1^2}{1-C_1^2}. \tag{VII.11}$$

Из уравнения (VII.11) видно, что эквипотенциальные линии — окружности, центры которых расположены на оси Ox (в уравнении отсутствует член, содержащий первую степень y). Если поместим начало координат в центре какой-либо окружности семейства, уравнение этой окружности получим из (VII.11), в котором следует принять коэффициент при x равным нулю, т. е.

$$C_1^2a_2 - a_1 = 0. \tag{VII.12}$$

При условии (VII.12) радиус окружности R имеет величину:

$$R = \sqrt{\frac{C_1^2a_2^2-a_1^2}{1-C_1^2}}. \tag{VII.13}$$

Из (VII.12) найдем:

$$C_1 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}. \qquad \text{(VII.14)}$$

Подставляя значение C_1 из (VII.14) в равенство (VII.13), найдем, что

$$R^2(a_2 - a_1) = a_1 a_2^2 - a_1^2 a_2$$

или:

$$a_1 a_2 = R^2. \qquad \text{(VII.15)}$$

Из (VII.15) нетрудно заключить, что $a_1 < R < a_2$ или $a_1 > R > a_2$; следовательно, все окружности пересекают ось между стоком O_1 и источником O_2, а значит, одна из особых точек находится внутри окружности данного радиуса R, другая — вне этой окружности. Точки O_1 и O_2, положения которых на прямой Ox определяются равенством (VII.15), называются *взаимносимметричными относительно окружности радиуса* R. Равенство (VII.15) выражает *свойство инверсии* относительно окружности радиуса R.

Допустим, что радиус $R = \infty$; другими словами, берем ту эквипотенциальную линию, которая является прямой. Из формулы (VII.13) следует, что при $R = \infty$, $C_1 = 1$. На основании уравнения (VII.8) заключаем, что $r_1 = r_2$, т. е. в числе эквипотенциальных линий есть прямая Oy, которая делит расстояние между стоком и источником пополам и параллельна оси Oy (см. рис. 39).

Найдем зависимость между расстоянием между скважинами $2a$ и радиусом окружности R.

Из (VII.15) следует, что $a_2 = \frac{R^2}{a_1}$; значит

$$2a = a_2 - a_1 = \frac{R^2}{a_1} - a_1 = \frac{R^2 - a_1^2}{a_1}. \qquad \text{(VII.16)}$$

Аналогичную формулу можно получить при помощи (VII.15), исключив из (VII.16) величину a_1.

Зависимость постоянной C_1 от радиуса окружности R удобно представлять в таком виде

$$C_1 = \sqrt{\frac{a_1 a_1}{a_2 a_1}} = \frac{a_1}{R} \qquad \text{(VII.17)}$$

или

$$C_1 = \frac{R}{a_2}.$$

Итак *эквипотенциальные линии (изобары) при совместном действии одной эксплуатационной и одной нагнетательной равнодебитных скважин в неограниченном пласте представляют собой окружности, центры которых расположены на прямой, проходящей через центры скважин.* Среди окружностей есть одна, имеющая

бесконечно большой радиус — прямая, которая делит расстояние между скважинами и всю плоскость течения пополам. Половина всех окружностей конечного радиуса R расположена по одну сторону от этой прямой, остальные окружности — по другую (рис. 40).

Как будет показано в главе IX, семейство *линий тока* в данном случае есть семейство *окружностей*, ортогональных изобарам. Все линии тока проходят через сток и источник. Центры всех окружностей линии тока расположены на прямой, делящей расстояние между стоком и источником пополам (см. рис. 40).

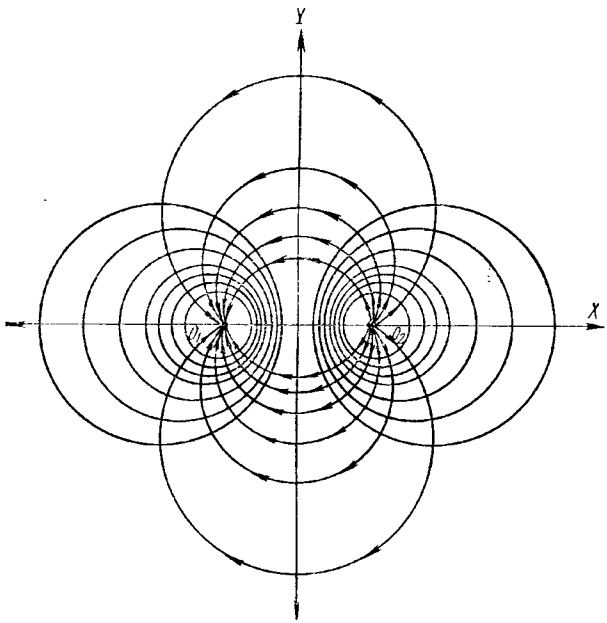


Рис. 40. Фильтрационное поле источника и стока.

Таково фильтрационное поле, поддерживаемое стоком и источником одинаковой мощности.

Выведем формулу *массового дебита* M эксплуатационной и нагнетательной скважин при совместном их действии.

Для вывода формулы M следует принять граничные условия. Граничными контурами в данном случае являются контуры обеих скважин.

Предположим, что на контуре эксплуатационной скважины O_1 радиусом r_c потенциальная функция φ принимает значение $\varphi_э = \text{const}$, определяемое в зависимости от давления с точностью до произвольной постоянной, а на контуре нагнетательной скважины O_2 того же радиуса $\varphi = \varphi_н = \text{const}$.

Воспользуемся формулой (VII.7). На контуре эксплуатационной скважины имеем $\frac{r_1}{r_2}=\frac{r_c}{2a}$ (см. рис. 39); на контуре нагнетательной скважины $\frac{r_1}{r_2}=\frac{2a}{r_c}$.

$$\left.\begin{aligned}\varphi_э &= \frac{M}{2\pi b}\ln\frac{r_c}{2a}+C,\\ \varphi_н &= \frac{M}{2\pi b}\ln\frac{2a}{r_c}+C.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.18)}$$

Вычитая почленно из второго равенства (VII.18) первое и решая полученное уравнение относительно M, найдем, что

$$M=\frac{2\pi b(\varphi_н-\varphi_э)}{\ln\frac{2a}{r_c}}. \qquad \text{(VII.19)}$$

Определим *массовую скорость фильтрации в любой точке пласта* M (см. рис. 39). Если бы в пласте действовал только один сток O_1 с дебитом, модуль которого равнялся M, мы получили бы, согласно формуле (IV.28), следующее выражение модуля вектора массовой скорости $\rho\vec{v}_1$:

$$\left|\rho\vec{v}_1\right|=\frac{M}{2\pi b r_1}; \qquad \text{(VII.20)}$$

если бы действовал только один источник O_2 с дебитом M, можно было бы записать:

$$\left|\rho\vec{v}_2\right|=\frac{M}{2\pi b r_2}. \qquad \text{(VII.21)}$$

Суммируя по принципу суперпозиции векторы массовых скоростей $\rho\vec{v}_1$ и $\rho\vec{v}_2$, вычислим модуль массовой скорости в данной точке пласта $\rho\vec{v}$ (см. рис. 39).

$$\left|\rho\vec{v}\right|=\frac{M}{2\pi b r_1 r_2}\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}. \qquad \text{(VII.22)}$$

Но величина корня квадратного правой части (VII.22) есть расстояние между стоком и источником $O_1O_2=2a$; следовательно, формулу (VII.22) перепишем так:

$$\left|\rho\vec{v}\right|=\frac{M}{\pi b}\frac{a}{r_1r_2}. \qquad \text{(VII.23)}$$

Для поддержания в нефтяной залежи пластового давления, обеспечивающего высокую отдачу нефти пластом, на промыслах широко используется способ нагнетания воды в пласт через нагнетательные скважины.

Вычислим для однородной несжимаемой жидкости *время движения частицы по кратчайшему пути между нагнетательной и*

эксплуатационной скважинами, т. е. по оси Ox. Если считать, что через нагнетательную скважину закачивается в пласт жидкость (вода) с теми параметрами, которыми обладает извлекаемая из пласта через эксплуатационную скважину (нефть), то в первом приближении можно решить вопрос о времени, протекшем от начала закачки воды в пласт до начала прорыва ее в эксплуатационную скважину.

Для несжимаемой жидкости равенство (VII.23) можно записать так:

$$|\vec{v}| = \frac{Q}{\pi b}\,\frac{a}{r_1 r_2}$$

или для частицы D, движущейся по оси Ox от O_2 к O_1 (см. рис. 39).

$$-m\,\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{\pi b}\,\frac{a}{r_1 r_2}, \qquad \text{(VII.24)}$$

где x — абсцисса частицы D, движущейся по оси Ox.

Если начало координат поместим в стоке O_1, то применительно к частице D будем иметь:

$$r_1 = x.$$

$$r_2 = 2a - x.$$

Подставляя эти значения r_1 и r_2 в уравнение (VII.24), разделяя в нем переменные и интегрируя, получаем:

$$t = \frac{\pi b m}{Q a}\int_{x_0}^{x}(x^2 - 2ax)\,dx = \frac{\pi b m}{Q a}\left(\frac{x^3 - x_0^3}{3} - ax^2 + ax_0^2\right). \qquad \text{(VII.25)}$$

Время T прохождения частицей расстояния $O_1O_2 = 2a$ определится из (VII.25), если принять $x = 0$, $x_0 = 2a$:

$$T = \frac{4}{3}\,\frac{\pi b m a^2}{Q}. \qquad \text{(VII.26)}$$

Общий объем внедренной в пласт воды за время T равен $mb\omega$, где ω — обводненная площадь. Этот объем воды можно подсчитать также по формуле (VII.26):

$$QT = \frac{4}{3}\pi b m a^2.$$

Приравнивая оба выражения объема, найдем обводненную площадь за время T:

$$\omega = \frac{4}{3}\pi a^2. \qquad \text{(VII.27)}$$

По формулам (VII.25) и (VII.26) нетрудно установить, что за время T, в которое одна частица воды пройдет расстояние $2a$ от нагнетательной скважины до эксплуатационной, а другая частица, вошедшая в пласт извне одновременно с первой, но движущаяся в

положительном направлении оси Ox, пройдет расстояние вдвое меньшее, т. е. равное a. Таким образом, площадь, обводнившаяся к моменту времени T, вытянута в сторону эксплуатационной скважины.

Итак, мы исследовали поток от нагнетательной скважины к эксплуатационной. Не повторяя сделанных уже заключений о форме эквипотенциальных линий и линий тока, заметим, что исследование потока в случае двух скважин — одной эксплуатационной и одной нагнетательной в неограниченном пласте служит основой изучения нерадиального плоского потока в случаях одной и многих скважин в пласте, границы которого с областью питания находятся на конечном расстоянии от скважины. Приведенный же способ определения дебита будет применяться и в последующих задачах.

§ 3. Плоский поток, если в полубесконечном и круглом пластах расположена одна скважина. Влияние на производительность скважины формы внешнего контура пласта

1. Прямолинейный внешний контур

Представим пласт, ограниченный прямолинейным контуром бесконечно большого протяжения Oy, через который поступает жидкость или газ (рис. 41). В пласте имеется единственная эксплуатационная скважина с центром в O_1 на расстоянии a от контура Oy.

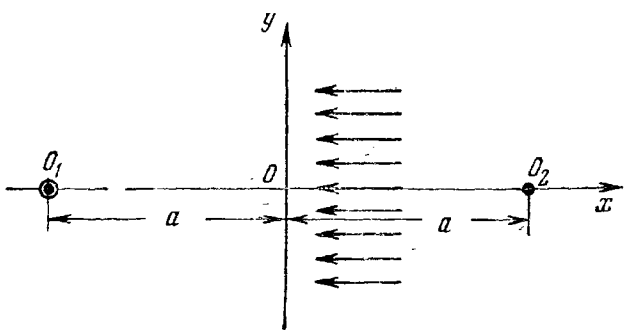


Рис. 41. Схема расположения скважины в пласте с прямолинейным контуром питания.

На контуре питания Oy значение потенциальной функции $\varphi = \varphi_к = \text{const}$; на контуре скважины $\varphi = \varphi_с = \text{const}$; радиус скважины $r_с$. Найдем дебит скважины M и распределение функции φ.

Поскольку контур питания пласта Oy является эквипотенциальной линией, все линии тока, сходящиеся в центре скважины O_1, должны быть перпендикулярными к прямой Oy. Пласт, изображенный на рис. 41 в виде левой полуплоскости, оказывается как бы носителем фильтрационного потока от прямолинейного контура Oy к точечному

стоку O_1. Но картину фильтрационного поля в левой полуплоскости рис. 41 можно получить, применив зеркальное отображение точки O_1 относительно прямой Oy и поместив в точке — отображении O_2 источник с дебитом, равным дебиту стока O_1. Следовательно, задача о фильтрационном потоке в пласте с прямолинейным контуром питания и с одиночной эксплуатационной скважиной сводится к задаче о совместном действии стока и источника равной производительности, т. е. к задаче, рассмотренной в § 2. Задача, решенная в § 2, отличается от поставленной здесь задачи только граничными условиями. В самом деле, в задаче § 2 контуром питания пласта является контур нагнетательной скважины O_2. В данном же случае источник O_2 воображаемый, а фактическим контуром питания служит прямая Oy на рис. 41. Однако это не мешает нам использовать найденное уже выражение потенциальной функции (VII.7). Такой метод решения задачи называется *методом отображения*. В данном случае сток отображен источником. Как увидим, сток может отображаться стоком, источник — источником.

Учтем, что

$$\varphi = \varphi_к \text{ при } r_1 = r_2, \text{ т. е. при } \frac{r_1}{r_2} = 1;$$

$$\varphi = \varphi_с \text{ при } r_1 = r_с,\ r_2 \approx 2a, \text{ т. е. при } \frac{r_1}{r_2} \approx \frac{r_с}{2a}.$$

Подставив последовательно соответствующие граничные значения φ, r_1 и r_2 в равенство (VII.7), получим:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_к &= \frac{M}{2\pi b} \ln 1 + C; \\ \varphi_с &= \frac{M}{2\pi b} \ln \frac{r_с}{2a} + C. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.28)}$$

Вычитая почленно второе равенство (VII.28) из первого и решая полученное уравнение относительно M, найдем, что

$$M = \frac{2\pi b (\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{2a}{r_с}}. \qquad \text{(VII.29)}$$

Такова формула *массового дебита одиночной скважины в пласте с прямолинейным контуром питания.*

Если бы в пласте с прямолинейным внешним открытым контуром была единственная нагнетательная, а не эксплуатационная скважина, и в формуле (VII.29) достаточно было бы изменить знак в правой части, мы имели бы такое выражение дебита:

$$M = \frac{2\pi b (\varphi_с - \varphi_к)}{\ln \frac{2a}{r_с}}. \qquad \text{(VII.29а)}$$

2. Круговой внешний контур и эксцентрично заложенная скважина

Выражение потенциальной функции, использованное при решении задачи о скважине в пласте с прямолинейным контуром, можно применять и при решении задачи для скважины O_1, заложенной в пласт с круговым внешним контуром $B_к$ при условии, что она расположена эксцентрично относительно окружности контура $B_к$ (рис. 42). В этом случае радиус внешнего контура пласта, являющийся также эквипотенциальной линией, можно определить по уравнению (VII.8).

Пусть радиус контура питания пласта $B_к$ равен $r_к$, а радиус эксплуатационной скважины O_1 — $r_с$; расстояние скважины от центра

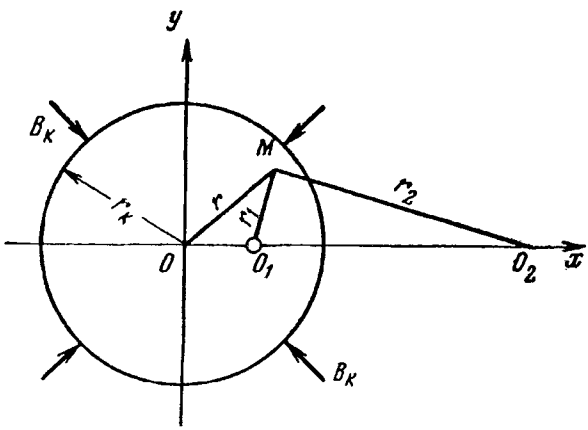


Рис. 42. Схема расположения скважины в пласте с круговым контуром питания.

контура питания (эксцентриситет) равен a_1. По формуле (VII.17) определяем значение постоянной C_1, соответствующее данному контуру радиуса $r_к$. В данном случае $r_к$ обозначает величину R формулы (VII.17).

Граничные условия задачи:
по формулам (VII.8) и (VII.17) на контуре питания:

$$\varphi = \varphi_к = \text{const} \text{ при } \frac{r_1}{r_2} = C_1 = \frac{a_1}{r_к}, \qquad \text{(VII.30)}$$

по формуле (VII.16) на контуре скважины:

$$\varphi = \varphi_с = \text{const} \text{ при } \frac{r_1}{r_2} \approx \frac{r_с}{2a} = \frac{a_1 r_с}{r_к^2 - a_1^2}. \qquad \text{(VII.31)}$$

Подставляя в формулу (VII.7) сначала данные условия (VII.30), а затем данные (VII.31), вычитая почленно одно равенство из другого и решая полученное уравнение относительно M, найдем:

$$M = \frac{2\pi b (\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \dfrac{r_к^2 - a_1^2}{r_к - r_с}}. \qquad \text{(VII.32)}$$

Такой вид имеет формула *массового дебита эксплуатационной скважины, заложенной эксцентрично в пласт с круговым контуром области питания.* Для одиночной нагнетательной скважины дебит вычисляется по формуле (VII.32), но перед правой частью ставится знак минус.

Из формулы (VII.32) легко получается формула (IV.35) для плоско-радиального потока, т. е. для случая скважины, расположенной концентрично относительно кругового контура питания пласта: если скважина находится в центре пласта, то достаточно в формуле (VII.32) положить $a_1 = 0$; тогда получим формулу типа формулы Дюпюи.

3. Скважина расположена в пласте с произвольным по форме внешним контуром; влияние формы внешнего контура и расстояния между контуром и скважиной на ее производительность

В условиях естественного пласта внешний открытый контур, например контур питания, не имеет правильную форму (например, форму прямой или окружности) и ее не всегда удается установить. Часто не удается определить достаточно точно и расстояние скважины до контура питания.

Применимы ли в этих условиях формулы, выведенные в разделах 1 и 2 этого параграфа?

Как видно из рис. 43, при данном расстоянии a скважины O_1 от внешнего контура пласта B прямую $B_{пр}$ и окружность $B_{кр}$ можно рассматривать как некоторые предельные возможные конфигурации действительного контура B, имеющего неправильную форму и занимающего как бы промежуточное положение между $B_{пр}$ и $B_{кр}$.

Дебит скважины в случае, в котором действительный контур пласта есть контур B, будет промежуточным между дебитами, рассчитанными по формулам (VII.29) и (VII.32), т. е. между дебитами при прямолинейном и круговом контурах.

Сравним результаты подсчета дебита по формулам (VII.29) и (VII.32) при одних и тех же r_c и одинаковых значениях a, для чего найдем отношение $M_{кр}$ к $M_{пр}$, где $M_{кр}$ — дебит скважины в пласте с круговым контуром питания, $M_{пр}$ — дебит в пласте с прямолинейным контуром питания. Учитывая, что $a_1 = r_к - a$, получим:

$$\frac{M_{кр}}{M_{пр}} = \frac{\ln \frac{2a}{r_c}}{\ln \frac{a(2r_к - a)}{r_к r_c}} \qquad \text{(VII.33)}$$

Расчет по формуле (VII.33) произведем в двух вариантах: в первом положим, что $r_к = 10^3 r_c$, во втором $r_к = 10^5 r_c$. Примем r_c равным 10 см. Результаты расчета приведены в табл. 9.

Из табл. 9 видим, что наибольшая возможная ошибка при вычислении дебита не превосходит 10% (см. случай $a = 100$ м). Ошибка будет тем меньше, чем больше размеры пласта. В этом нетрудно убе-

диться, сопоставив величины отношений $M_{кр}/M_{пр}$ для обоих рассматриваемых вариантов.

Чем ближе расположена скважина к контуру питания, тем меньшее значение имеет форма внешнего контура.

Итак, *при вычислении дебита скважины форма внешнего открытого контура пласта не имеет сколько-нибудь существенного значения.* Не рискуя допустить неприемлемую в технических расчетах ошибку при вычислении дебита скважины, можно применять любую из двух формул (VII.29) или (VII.32).

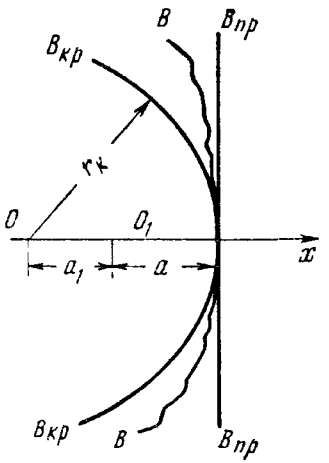


Рис. 43. Схема расположения скважины в пласте с произвольным по форме внешним контуром.

Таблица 9

Отношение $M_{кр}/M_{пр}$

Расстояние от скважины до контура a, м	$(M_{кр}/M_{пр})\cdot 100$, %	
	при $r_к = 10^3 r_с = 100$ м	при $r_к = 10^5 r_с = 10$ км
1	100,1	—
10	101,0	100,0
25	102,2	—
50	104,3	—
75	106,9	—
90	108,7	—
100	110,0	100,1
1 тыс.	—	100,5
2,5 тыс.	—	101,3
5 тыс.	—	102,6
7,5 тыс.	—	104,1
9 тыс.	—	105,2
10 тыс.	—	106,0

Влияние на дебит скважины расстояния от нее до контура пласта можно определить по формулам (VII.29) и (VII.32): *чем дальше от внешнего контура пласта находится скважина, тем меньший дебит она имеет.*

Поскольку, однако, величина расстояния a входит в формулу, например, (VII.29) под знаком логарифма, даже значительное изменение этого расстояния мало влияет на значение дебита. Это замечание имеет существенное значение: затрудняясь на практике точно оценить расстояние a, мы можем допустить большую погрешность в его определении, не делая при этом большой ошибки при вычислении дебита по формуле (VII.29).

Если дебит рассчитывают по формуле (VII.32), но не известно точно положение скважины относительно центра пласта, можно ли считать, что $a_1 = 0$, т. е. можно ли считать, что скважина расположена в центре пласта? Можно ли применять формулу типа Дюпюи для плоско-радиального потока?

Численные расчеты показывают, что если эксцентриситет $a_1 \leqslant \frac{1}{2} r_к$, а $r_к \geqslant 10^3 r_с$, то погрешность от применения формулы дебита при плоско-радиальном потоке не превзойдет допустимых процентов. Поэтому формулой дебита плоско-радиального потока (типа формулы Дюпюи) широко пользуются при решении многих задач нерадиального потока, встречающихся в практике разработки нефтяных месторождений. Эта формула также широко применяется и в гидрогеологической практике.

§ 4. Взаимодействие скважин кольцевой батареи

Рассмотрим совместное действие в пласте большой протяженности n эксплуатационных скважин, центры которых O_1, O_2, O_3, ..., O_n помещаются в вершинах правильного n-угольника так, что скважины образуют кольцевую батарею на окружности радиусом a (рис. 44). Предположим, что контур питания пласта удален от скважин на расстояние, значительно превышающее радиус кольцевой батареи a. При этом приближенно можно считать, что все скважины находятся на одинаковом расстоянии от контура $r_к$. Заданы: постоянное значение потенциальной функции $\varphi_к$ на контуре питания и постоянное значение ее на контуре всех скважин $\varphi_с$.

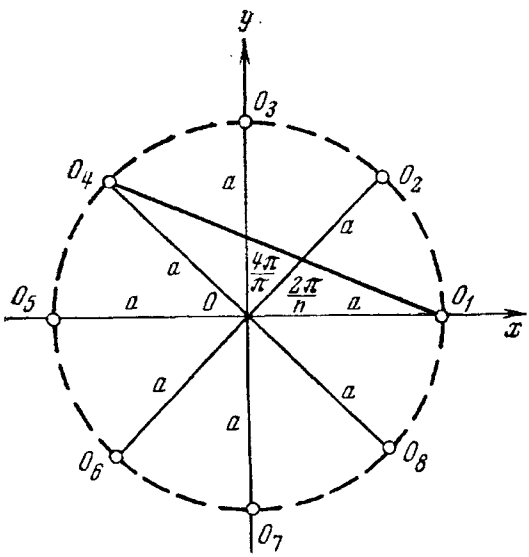


Рис. 44. Схема кольцевой батареи скважин.

Задача о фильтрационном потоке к скважинам кольцевой батареи — это задача о плоском течении к n точечным стокам, размещенным равномерно на окружности данного радиуса a.

Вывод формулы дебита скважин можно сделать в той последовательности, какая указана в конце § 1 настоящей главы.

По формуле (VII.2) найдем, что

$$\varphi = \frac{M'}{2\pi b} \sum_{j=1}^{n} \ln r_j + C = \frac{M'}{2\pi b} \ln (r_1 r_2 r_3 \ldots r_n) + C, \qquad \text{(VII.34)}$$

где M' — массовый дебит любой скважины батареи: r_1, r_2, ..., r_n — расстояния некоторой точки пласта до всех n скважин.

Граничные условия:

на контуре питания

$$\varphi = \varphi_к = \text{const} \text{ при } r_1 \approx r_2 \approx \ldots \approx r_n \approx r_к; \qquad \text{(VII.35)}$$

на контуре скважины за номером 1 (рис. 44, тр-ки OO_1O_2, OO_1O_3 и т. д.)

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \varphi_c = \text{const} \text{ при } r_1 = r_c;\ r_2 = 2a\sin\frac{\pi}{n};\\ &r_3 = 2a\sin\frac{2\pi}{n};\ \ldots;\ r_j = 2a\sin\frac{(j-1)\pi}{n};\ \ldots;\\ &r_n = 2a\sin\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.36)}$$

Используя граничные условия (VII.35) и (VII.36) применительно к формуле (VII.34), получим:

$$\varphi_к = \frac{M'}{2\pi b}\ln r_к^n + C, \qquad \text{(VII.37)}$$

$$\varphi_c = \frac{M'}{2\pi b}\ln\left[(2a)^{n-1} r_c \sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] =$$

$$= \frac{M'}{2\pi b}\ln\left[(2a)^{n-1} r_c \prod_{j=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n}\right] + C. \qquad \text{(VII.38)}$$

Известно, что [1]

$$\prod_{j=1}^{n-1}\sin\frac{j\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}. \qquad \text{(VII.39)}$$

Подставляя значение произведения (VII.39) в формулу (VII.38), найдем, что

$$\varphi_c = \frac{M'}{2\pi b}\ln(na^{n-1}r_c) + C. \qquad \text{(VII.40)}$$

Из формул (VII.37) и (VII.40) получим дебит скважины:

$$M' = \frac{2\pi b(\varphi_к - \varphi_c)}{\ln\dfrac{r_k^n}{na^{n-1}r_c}}. \qquad \text{(VII.41)}$$

Формула (VII.41) справедлива при любом целом n. В частности, при $n = 1$ получаем формулу дебита в плоско-радиальном потоке, т. е. формулу (IV.35) типа формулы Дюпюи:

$$M = \frac{2\pi b(\varphi_к - \varphi_c)}{\ln\dfrac{r_к}{r_c}}. \qquad \text{(VII.42)}$$

Формула (VII.41) — *приближенная*. Ее удобно применять тогда, когда действует батарея скважин в пласте большой протяженности, например, при водонапорном режиме, если жидкость можно рассматривать как несжимаемую. Если же в пласте установился режим

[1] Вывод формулы (VII.39) см. в [35].

растворенного газа, трудно предполагать, что площадь, занятая газированной жидкостью, простирается до границ пласта, который по размерам должен быть во много раз большим площади внутри окружности батареи скважин. Но именно это предположение легло в основу вывода формулы (VII.41). Если по условию задачи расстояние от скважин до контура питания не слишком превосходит радиус батареи a, следует пользоваться более точной формулой.

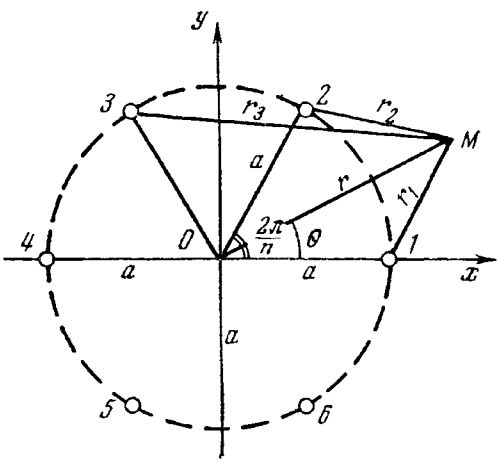


Рис. 45. Расстояния от точки M до скважин кольцевой батареи 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Отсылая читателя за подробностями вывода формулы к специальной литературе, например к книге [35], напишем готовую формулу:

$$M' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \dfrac{r_к^{2n} - a^{2n}}{n a^{n-1} r_к^{n} r_с}}. \qquad \text{(VII.43)}$$

Из формулы (VII.43) получается формула (VII.32), если $n = 1$, т. е. для одной эксцентрично заложенной скважины в круглом пласте (a — в данном случае эксцентриситет скважины).

Если $r_к \gg a$, различие в результатах подсчета M по формулам (VII.41) и (VII.43) пренебрежимо мало. Даже при $r_к = 10\,a$, дебиты, подсчитанные по этим двум формулам, различаются не более чем на одну тысячную процента.

Пользуясь равенством (VII.5), можно получить уравнение изобар в полярной системе координат. Для этого заметим, что из рис. 45 следует

$$r_j = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\left[\frac{2(j-1)\pi}{n} - \theta\right]}, \qquad \text{(VII.44)}$$

где r и θ — полярные радиус и угол точки пласта.

Подставляя значение r_j в формулу (VII.5), найдем уравнение изобар:

$$\prod_{j=1}^{n} \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\left[\frac{2(j-1)\pi}{n} - \theta\right]} = C_1. \qquad \text{(VII.45)}$$

С помощью уравнения (VII.45) можно построить семейство изобар. Линии тока проходят так, что пересекают изобары под прямым углом.

Ортогональная сетка, изображающая фильтрационное поле для трех скважин, расставленных в вершинах правильного треугольника

показана на рис. 46. Плоскость течения делится на три равных части прямыми линиями тока H, сходящимися в центре батареи. Эти линии тока называются нейтральными. Среди линий тока в данном случае имеются еще три прямые Γ, проходящие через скважины и делящие сектор, ограниченный двумя нейтральными линиями, пополам. Это — главные линии тока (термины «нейтральные» и «главные» введены В. Н. Щелкачевым).

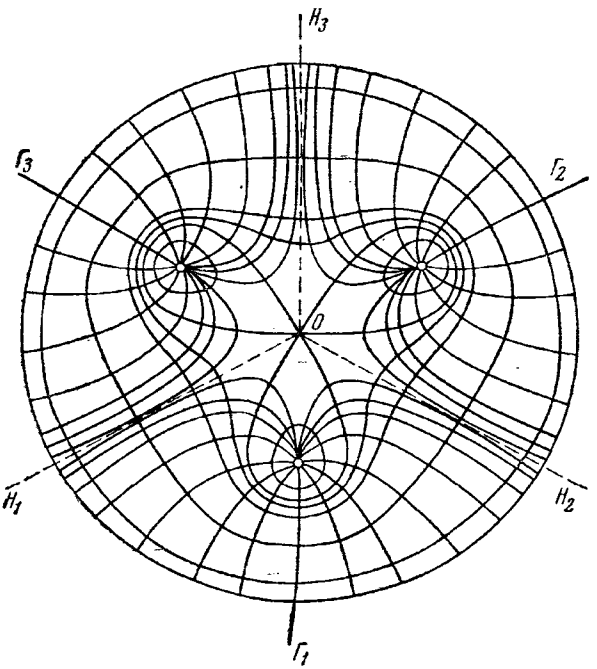


Рис. 46. Изобары и линии тока для кольцевой батареи из трех скважин.

В числе изобар есть такая, которая трижды пересекает сама себя в центре батареи (к точке, где эта изобара пересекается, мы вернемся в главе IX).

Очевидно, фильтрационное поле всякой кольцевой батареи с равнодебитными скважинами, размещенными в вершинах правильного многоугольника, делится нейтральными линиями тока на столько одинаковых частей (секторов), сколько скважин в батарее.

§ 5. Количественная оценка эффекта взаимодействия скважин

Давая величине n в формуле (VII.41) или (VII.43) различные численные значения при неизменных a, $r_к$, $r_с$, b и $(\varphi_к - \varphi_с)$, будем получать и различные значения дебита M'. Изменяя численные значения радиуса батареи a при неизменности остальных величин, входящих в формулу (VII.41) или (VII.43), будем иным путем изменять

значения дебита M'. Но, как показывают формулы (VII.41) и (VII.43), *дебит изменяется непропорционально числу скважин n и радиусу батареи a, а значит, и расстоянию между скважинами.*

Суммарный дебит батареи, равный nM', также не пропорционален числу скважин n и расстоянию между ними.

Важно отметить, что с увеличением числа скважин n дебит каждой скважины будет уменьшаться, если давление в скважинах принимается неизменным.

Это объясняется *влиянием скважин друг на друга — «интерференцией» скважин.* Дело в том что при единственной, например, эксплуатационной скважине в пласте поток жидкости или газа направляется только к ней. Ввод в эксплуатацию новых скважин создает новые условия для притока жидкости или газа к этой скважине; в новых условиях поток направляется не к одной скважине, а распределяется между всеми действующими скважинами.

Эффект взаимодействия (интерференции) скважин может прослеживаться при различных режимах их работы.

В зависимости от режима, который устанавливается в той или иной скважине, будут наблюдаться различные эффекты взаимодействия.

Предположим, что первоначально в пласте действовала только одна эксплуатационная скважина, в которой поддерживалось постоянным давление на забой при неизменном давлении на контуре питания пласта. В процессе последующей разработки пласта были пущены в эксплуатацию новые скважины так, что все n действующих скважин вместе с той, которая первой вскрыла пласт и в начальной стадии разработки была единственной, образуют батарею скважин. Допустим, что приток жидкости (газа) к скважинам установившийся. Укажем на три возможных режима работы батареи скважин после того как будет достигнуто установившееся состояние.

1. Все скважины работают *при постоянном забойном давлении*, наблюдавшемся в начальной стадии разработки пласта.

2. Все скважины работают в условиях *постоянного дебита*, который был у скважины, пущенной в эксплуатацию первой.

3. Скважины эксплуатируются в таких условиях, в которых *не сохраняются первоначальные давление и дебит у первой скважины.*

Третий из перечисленных режимов следует очевидно считать одним из наиболее распространенных в промысловой действительности.

Первые два режима следует рассматривать как крайние возможные режимы эксплуатации групп скважин. Тем не менее именно в этих крайних случаях наиболее четко проявляет себя эффект взаимодействия скважин.

Допустим, что скважины работают в условиях первого режима, когда давление в них поддерживается постоянным; следовательно, влияние вновь пущенных в эксплуатацию скважин на работу первой должно проявиться в том, что за счет новых скважин снизится дебит в первой.

Таким образом взаимодействие скважин при этом их режиме характеризуется *изменением только дебита.*

Очевидно, взаимодействие скважин при режиме постоянного дебита будет характеризоваться изменением только забойных давлений.

Взаимодействие скважин в условиях третьего режима выражается в одновременном изменении давлений и дебитов. В условиях третьего режима, следовательно, количественная оценка эффекта взаимодействия усложняется.

Для количественной оценки эффекта взаимодействия мы будем предполагать, что скважины работают в условиях первого из перечисленных здесь режимов, т. е. что во всех скважинах поддерживается то давление, которое было на забое первой скважины в период ее одиночной работы; при введении новых скважин изменяется только дебит этой скважины.

Как условлено в § 1 настоящей главы, будем обозначать массовый дебит скважины при ее одиночной работе в пласте через M, а массовый дебит той же скважины при совместной ее работе с группой скважин — через M'.

Коэффициентом взаимодействия (интерференции) I назовем отношение дебита скважины при ее одиночной работе M к дебиту ее при совместной работе с группой скважин M':

$$I = \frac{M}{M'}. \tag{VII.46}$$

Коэффициентом суммарного взаимодействия U назовем отношение суммарного дебита группы совместно действующих скважин $\sum M'$ к дебиту одиночной скважины M:

$$U = \frac{\sum M'}{M}. \tag{VII.47}$$

Применительно к кольцевой батарее скважин в круглом пласте I и U имеют на основании формулы (VII.43) следующие значения:

$$I = \frac{\ln \frac{r_к^{2n} - a^{2n}}{n a^{n-1} r_к^n r_с}}{\ln \frac{r_к^2 - a^2}{r_к r_с}}; \tag{VII.48}$$

$$U = \frac{n}{I} = \frac{n \ln \frac{r_к^2 - a^2}{r_к r_с}}{\ln \frac{r_к^{2n} - a^{2n}}{n a^{n-1} r_к^n r_с}}. \tag{VII.49}$$

Покажем численные значения I и U, полученные по формулам (VII.48) и (VII.49) при нижеследующих предположениях.

В пласте с круговым контуром питания данного радиуса $r_к$ действует эксплуатационная скважина, заложенная эксцентрично

относительно контура питания на расстоянии a от центра пласта. Позднее были пущены в эксплуатацию еще две скважины так, что все три скважины в вершинах правильного треугольника с центром, совпадающим с центром пласта (вторая стадия разработки). Пуском трех новых скважин положили начало третьей стадии разработки. На этой стадии всего действует шесть эксплуатационных скважин, расположенных в вершинах правильного шестиугольника: три новые скважины пробуривались в серединах интервала между двумя соседними скважинами из трех, работавших на второй стадии разработки; середины интервалов брались на окружности радиусом, равным a.

Радиус контура питания принимался при подсчетах равным $10^5 r_c$, что при радиусе скважины $r_c = 10$ см составляет $r_к = 10$ км. Подсчеты выполнялись для различных значений радиуса батареи a. Результаты подсчетов сведены в табл. 10.

Таблица 10

Результаты расчетов при взаимодействии скважин кольцевой батареи

$\frac{a}{r_к}$	3 скважины в вершинах треугольника		6 скважин в вершинах шестиугольника	
	I	U	I	U
0,001 (10 м)	2,10	1,43	4,03	1,49
0,01 (100 м)	1,70	1,76	2,84	2,11
0,1 (1 км)	1,31	2,30	1,85	3,25
0,5 (5 км)	1,05	2,86	1,17	5,11
0,9 (9 км)	1,00	3,00	1,01	5,96

Анализ табл. 10 позволяет высказать ряд положений, характерных для взаимного влияния скважин.

1. С увеличением расстояния между скважинами численное значение коэффициента U увеличивается, стремясь стать равным числу скважин группы, коэффициент I уменьшается, стремясь к единице. Предельные значения $U = n$ и $I = 1$ показывают отсутствие взаимодействия скважин.

2. С увеличением числа скважин оба коэффициента I и U увеличиваются. Увеличение I характеризует усиление взаимного влияния скважин. Рост коэффициента U с увеличением числа скважин указывает на непропорциональность суммарного дебита числу скважин.

3. Взаимодействие скважин может практически не проявляться только при очень больших расстояниях между скважинами (см. последнюю строку табл. 10 и предпоследнюю строку ее для трех скважин). Строго говоря, влияние каждой скважины на другие распространяются на весь пласт, когда жидкость несжимаема.

Положения, сформулированные на основе анализа табл. 10, справедливы лишь для идеальных условий, принятых при выводе формул, характеризующих явление взаимодействия скважин.

Тем не менее в реальных условиях известны многие случаи ярко выраженного влияния скважин друг на друга.

В. Н. Щелкачев описывает примеры интерференции фонтанировавших нефтяных скважин в пластах с водонапорным режимом. В отдельных случаях, приведенных В. Н. Щелкачевым, влияние одной скважины на другую отчетливо фиксировалось даже тогда, когда расстояние между скважиной, вносившей «возмущение» в пласт, и скважиной, реагирующей на это возмущение, было более 2 км.

Однако часто результаты теоретических подсчетов, имеющих цель — выявление количественных показателей взаимодействия скважин, не совпадают с результатами фактических промысловых наблюдений. Если пользоваться выведенными здесь формулами (VII.41)—(VII.43) и (VII.48)—(VII.49) для кольцевых батарей скважин, то можно получить в отдельных случаях значительные расхождения, например, между данными табл. 10 и соответствующими результатами промысловых замеров.

Следует еще раз подчеркнуть, что табл. 10 составлена для того крайнего возможного режима эксплуатации, при котором в связи с взаимодействием скважин происходит наиболее резкое изменение дебита. Если бы ввод в действие новых скважин сопровождался изменением одновременно давления и дебита первой скважины, изменение ее дебита не было бы столь резким.

Гидродинамическое несовершенство скважин, неоднородная проницаемость пласта, неустановившиеся процессы фильтрации, которые происходят в пластах в течение более или менее длительного периода разработки,— все это и другие обстоятельства также являются причиной отмеченных расхождений между подсчетами по формулам для I и U и промысловыми данными. О влиянии перечисленных обстоятельств на взаимодействие скважин будет сказано в соответствующих параграфах.

Найдем предел, к которому стремится суммарный дебит батареи $\sum M'$, выраженный с помощью формулы (VII.41), при неограниченном возрастании числа скважин n.

Если $n \to \infty$, то дробь под знаком логарифма становится неопределенной.

Запишем выражение суммарного дебита батареи $\sum M' = nM'$ так:

$$\sum M' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{r_к}{a} + \frac{1}{n} \ln \frac{a}{nr_с}}. \qquad \text{(VII.50)}$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим:

$$M_г = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{r_к}{a} + \frac{1}{n} \ln \frac{a}{nr_с}} \right] = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{r_к}{a}}, \qquad \text{(VII.51)}$$

где $M_г$ — дебит кольцевой галереи радиусом a, которая является предельным случаем кольцевой батареи при $n \to \infty$.

Формула (VII.51) может рассматриваться как формула дебита скважины с укрупненным радиусом $r_с = a$ в плоско-радиальном потоке [1].

Определение эффекта взаимодействия имеет существенное значение при установлении оптимального числа скважин, размещаемых, например, в виде кольцевой батареи. Решение такого ряда вопросов связано с экономической оценкой проектируемого числа скважин.

Выясним, на какое *приращение суммарного дебита кольцевой батареи* скважин можно рассчитывать при увеличении их числа. Допустим, что первоначально в составе батареи были только четыре эксплуатационные скважины, находившиеся в вершинах квадрата; затем число скважин удвоили, введя между двумя соседними еще по одной, и т. д. Будем определять приращение суммарного дебита батареи, обусловленное удвоением числа скважин; для этого будем находить последовательные числовые значения следующих отношений, полученных с помощью формул (VII.41), (VII.50) и (VII.51):

$$\frac{nM'_n}{4M'_4} = \frac{n}{4}\,\frac{\ln\dfrac{r_к^4}{4a^3r_с}}{\ln\dfrac{r_к^n}{na^{n-1}r_с}}, \qquad \text{(VII.52)}$$

где M'_n — дебит одной скважины из состава батареи в n скважин; M'_4 — дебит скважины из состава батареи в четыре скважины;

$$\frac{nM'_n}{M_г} = n\,\frac{\ln\dfrac{r_к}{a}}{\ln\dfrac{r_к^n}{na^{n-1}r_с}}. \qquad \text{(VII.53)}$$

Таблица 11

Рост суммарного дебита скважин*

Показатель	Число скважин			
	4	8	16	∞
$\frac{n}{4}\frac{M'_n}{M'_4}$	1,00	1,24	1,38	1,54
$\frac{nM'_n}{M_г}$	0,65	0,80	0,90	1,00

* Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1949.

[1] См. например, формулу (VII.42).

Табл. 11 составлена для $r_к = 10$ км, $r_с = 10$ см, $a = 400$ *м*. Вычисления производились по формулам (VII. 52) и (VII. 53).

Из табл. 11 видим, что *с увеличением числа скважин темп роста суммарного дебита батареи замедляется*. Это видно из рис. 47.

Кривая *1* выражает зависимость отношения (VII.52) от числа скважин n при $a = 200$ м; кривая *2* — при $a = 400$ *м*; кривая *3* соответствует тем же условиям, что и кривая *2*, но при $r_к = 20$ км.

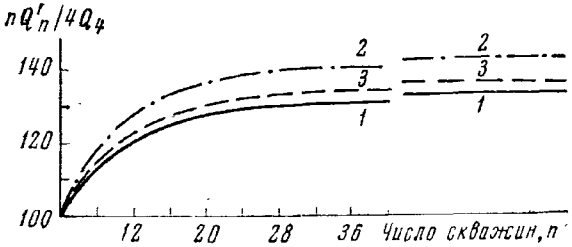


Рис. 47. Взаимодействие скважин кольцевой батареи.

Прямые на рис. 47 асимптоты кривых. Для кривых *1* и *2* принималось, что $r_к = 10$ км; $r_с = 10$ см.

По любой кривой на рис. 47 можно определить число скважин, при котором прекращается прирост дебита. Следовательно, сверх определенного предела увеличение числа скважин оказывается неэффективным.

§ 6. Прямолинейная батарея скважин

1. Представим себе, что по физико-геологическим условиям пласта и условиям разработки эксплуатационные скважины расставлены по прямой Ox через равные интервалы h. *Число скважин в батарее конечно* (рис. 48). Попрежнему считаем, что во всех скважинах давление одно и то же и именно такое, каким оно было в одиночной скважине в начальной стадии разработки. Батарея скважин столь далека от контура питания пласта, что можно

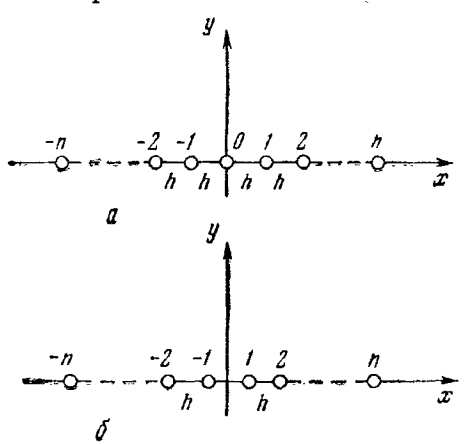


Рис. 48. Схема прямолинейной цепочки скважин:
число скважин: а — нечетное $(2n + 1)$; б — четное $(2n)$.

приближенно считать все скважины находящимися на одинаковом расстоянии от контура $r_к$.

Будем различать два случая:
а) число скважин батареи нечетное, равное $2n + 1$, где n — любое целое число; б) число скважин батареи четное, равное $2n$.

Поместив начало координат в центре батареи, занумеруем скважины следующим образом. Каждой скважине, расположенной справа от начала координат, присваивается положительный порядковый номер, который отсчитывается от начала координат в положительном направлении оси Ox. Каждой скважине слева от начала координат присваивается отрицательный порядковый номер, отсчитываемый в отрицательном направлении оси Ox.

В обоих случаях дебиты скважин будут разные ввиду того, что при равенстве давлений скважины занимают разные относительные местоположения в батарее и, следовательно, влияние со стороны скважин батареи на те или иные скважины сказывается не с одинаковой интенсивностью. Однако скважины, равноотстоящие от середины (или от концов) батареи, имеют одинаковые дебиты.

При нечетном числе скважин $2n + 1$ дебит средней скважины, находящейся в начале координат, отличается от дебитов всех других скважин. При четном их числе все скважины можно подразделить на n пар таких, что скважины каждой пары равноудалены от середины цепочки — от оси Oy.

Потенциальную функцию φ представим на основании формулы (VII. 2).

Для нечетного числа скважин:

$$\varphi = \frac{M_0'}{2\pi b} \ln r_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j'}{2\pi b} (\ln r_j + \ln r_{-j}) + C, \qquad \text{(VII.54а)}$$

где M_0' — массовый дебит центральной скважины; r_0 — расстояние до нее.

Для четного числа скважин:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j'}{2\pi b} (\ln r_j + \ln r_{-j}) + C. \qquad \text{(VII.54б)}$$

Граничные условия:
на контуре любой скважины за номером j потенциальная функция $\varphi = \varphi_c$; на контуре питания пласта $\varphi = \varphi_к$.

Чтобы найти все $n + 1$ неизвестных дебитов в случае $а$, будем подставлять в равенство (VII. 54 $а$) значения r_0, r_j и φ_c последовательно на контурах всех скважин, начиная со скважины за номером «нуль» и кончая скважиной за номером $j = n$.

В случае $б$ будем подставлять в равенство (VII. 54$б$) значения r_j и φ_c, соответствующие скважинам, начиная со скважины за номером $j = 1$ и кончая скважиной за номером $j = n$.

В результате подстановок получим такую систему уравнений для нечетного числа скважин:

$$\varphi_c = \frac{M'_0}{2\pi b}\ln(\lambda h) + \sum_{j=1}^{\lambda-1}\frac{M'_j}{2\pi b}\{\ln[(\lambda-j)h] + \ln[(\lambda+j)h]\} +$$

$$+\frac{M'_\lambda}{2\pi b}[\ln r_c + \ln(2\lambda h)] + \sum_{j=\lambda+1}^{n}\frac{M'_j}{2\pi b}\{\ln[(j-\lambda)h] + \ln[(j+\lambda)h]\} + C, \quad \text{(VII.55а)}$$

где λ принимает значения от 0 до n; следовательно, уравнений вида (VII. 55 *а*) будет $n + 1$.

При четном числе скважин получим

$$\varphi_c = \sum_{j=1}^{\lambda-1}\frac{M'_j}{2\pi b}\{\ln[(\lambda-j)h] + \ln[(\lambda+j)h]\} + \frac{M'_\lambda}{2\pi b}[\ln r_c + \ln(2\lambda h)] +$$

$$+\sum_{j=\lambda+1}^{n}\frac{M'_j}{2\pi b}\{\ln[(j-\lambda)h] + \ln[(j+\lambda)h]\} + C, \quad \text{(VII.55б)}$$

где λ принимает значения от 1 до n. Уравнений вида (VII. 55*б*) будет n. Члены с нулевыми значениями аргументов логарифмов в расчет не принимаются.

В системе уравнений вида (VII. 55*а*) будет всего $(n + 2)$ неизвестных: $(n + 1)$ неизвестных дебитов M и произвольная постоянная C. В системе уравнений вида (VII. 55 *б*) всего $(n + 1)$ неизвестных. Для решения первой или второй системы относительно дебитов M составляем еще одно уравнение, подставляя в (VII. 54*а*) или в (VII. 54*б*) соответствующие значения на контуре питания пласта:

$$\varphi_к = \frac{\ln r_к}{\pi b}\sum_{\substack{j=0\\ j=1}}^{n} M'_j + C, \quad \text{(VII.56)}$$

где нижний предел суммы $j = 0$ отвечает случаю нечетного числа скважины $2n + 1$, а нижний предел суммы $j = 1$ — случаю четного числа скважин $2n$.

Теперь общее число неизвестных и общее число уравнений вида (VII. 55*а*) или (VII. 55*б*) и (VII.56) одинаковы. Решение задачи сводится к решению системы линейных уравнений со многими неизвестными.

Только что описанным путем можно вывести формулы дебита любой скважины прямолинейной батареи конечной длины в пласте, ограниченном прямолинейным контуром питания. Задача решается с помощью зеркального отображения относительно контура питания всех стоков-скважин источниками. Запись расстояний r_l при этом

оказывается достаточно громоздкой, так как приходится учитывать не только взаимные расстояния между скважинами, но расстояния между скважинами и воображаемыми источниками, а также расстояния между этими последними. Вследствие этого и сами уравнения для определения дебитов скважин будут более громоздкими, чем уравнения системы вида (VII.55а)—(VII.56).

За подробностями вывода указанных формул отсылаем читателя к книге [35].

П. П. Голосов вывел простую приближенную формулу для суммарного дебита скважин прямолинейной батареи [34].

Если число скважин в батарее нечетное, равное $(2n+1)$, то формула Голосова такова:

$$\sum M' = \frac{2\pi b\,(2n+1)\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{r_к}{r_с} + \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{r_к^2}{(jh)^2}}. \qquad \text{(VII.57)}$$

Если число скважин четное, равное $2n$, формула имеет следующий вид

$$\sum M' = \frac{4\pi bn\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{r_к^2}{hr_с} + \sum_{j=2}^{n} \ln \frac{r_к^2}{j\,(j-1)\,h^2}}. \qquad \text{(VII.57а)}$$

Ошибка от подсчетов по приближенным формулам (VII.57) и (VII.57а) не превосходит 3—4% при $r_к = 10$ км, $r_с = 10$ см при любом расстоянии между скважинами в пределах 100 м $\leqslant h \leqslant$ 500 м. Сравнение формул (VII.57) и (VII.57а) с точными проводилось для батарей, содержащих от трех до восьми скважин.

Другого вида формула дебита прямолинейной батареи скважин предложена В. Т. Мироненко.

Полагая, что прямолинейная батарея, состоящая из n равноудаленных друг от друга скважин, находится в пласте с контуром питания эллиптической формы, вычислим дебит M^* скважины по формуле Мироненко так:

$$M^* = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)\,\mathrm{sh}\,\beta\,\mathrm{ch}\,\frac{2\beta x}{l}}{\mathrm{sh}\,(n\beta)\left(\mathrm{Ar\,sh}\,\frac{2L}{nl} + \frac{1}{n}\ln\frac{l}{2\pi r_с}\right)}, \qquad \text{(VII.58)}$$

где β вычисляется из уравнения

$$\mathrm{ch}\,(2\beta) = 1 + \frac{\ln n}{(n-1)\ln\frac{l}{2r_с}};$$

x — координата скважины при выборе начала координат в центре батареи; l — расстояние между соседними скважинами батареи; L — малая полуось эллипса — контура питания.

Формула (VII.58) применима при

$$n \geqslant 6, \quad \frac{l}{2r_c} \geqslant 10^3, \quad \frac{L}{R_c} \geqslant 10^5.$$

Исследования эффекта взаимодействия двух скважин в пласте линейным контуром питания и в пласте с круговым контуром питания по формулам (VII.48) и (VII.49) показали, что форма контура питания пласта мало влияет на взаимодействие скважин.

Что касается расстояния скважин до контура питания, то по мере приближения скважин к контуру питания эффект взаимодействия уменьшается.

Если в реальных условиях скважины находятся на большом расстоянии от контура питания, погрешность в оценке расстояния их до контура не отражается заметно на эффекте взаимодействия даже тогда, когда погрешность достигает 100%. Это имеет существенное значение именно для практики технологии нефтедобычи: при водонапорном режиме нефтяные залежи обычно удалены на большое расстояние от естественных источников питания пласта водой и положение контура питания часто известно только приближенно.

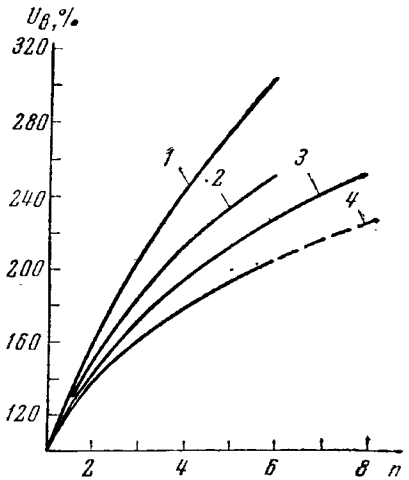


Рис. 49. Кривые роста суммарного дебита батареи.

Значения h в м: *1* — 1000; *2* — 400; *3* — 200; *4* — 100.

Наоборот, в гидрогеологической практике бывают случаи, когда контур питания близок к скважинам: им служит граница пласта с большим естественным водоемом — берег реки или моря; близость этого водоема к скважинам ослабляет эффект их взаимодействия.

Рассмотрим взаимодействие скважин на примере *ползущей системы разработки* залежи прямолинейной батареей.

Сначала в эксплуатацию была пущена одна скважина (скв.1). Дебит ее принимаем за 100%. Спустя некоторое время в пласт ввели скв. 2, затем еще через некоторое время скв. 3 и т. д.

Рассчитываем суммарный дебит $\sum M_j$ батареи, состоящей из двух, трех, четырех и большего числа скважин так, как описано в настоящем параграфе и вычисляем затем коэффициент суммарного взаимодействия скважин U по формуле (VII.47) для каждого числа скважин в батарее.

Полученные на основании этих расчетов кривые (вернее, ломаные) роста суммарного дебита батареи с увеличением числа скважин в ней представлена на рис. 49 для разных расстояний между соседними скважинами. По оси абсцисс отложено число скважин в батарее,

по оси ординат — коэффициент U в процентах по отношению к дебиту одиночной скважины. При расчете принято, что батарея скважин удалена от прямолинейного контура питания пласта на $r_к = 10^5 r_с$ ($r_с = 10$ см).

Видим, что с увеличением расстояния между скважинами, ломаная линия приближается к прямой. При расстоянии $h = 200$ м с подключением скв. 2 суммарный дебит увеличивается на 45%. При введении скв. 3 прирост суммарного дебита составит только 30%, а при подключении скв. 6 — всего 15,5%. Можно с большой степенью точности предсказать, что после введения скв. 9 и скв. 10 дебит увеличился бы на 12,5% в каждом случае.

Пример сгущающейся системы разработки, когда новые скважины вводятся в интервал между двумя соседними, был рассмотрен в § 5 для случая кольцевой батареи.

Важно заметить, что, как показывают, например, формулы (VII.48) и (VII.49), относительные изменения дебитов скважин, вызванные эффектом взаимодействия, не зависят от физико-геологических характеристик пласта и от физических параметров жидкости. Конечно, это справедливо при условии, что пласт и жидкость однородны.

Представим себе теперь, что число скважин в прямолинейной батарее *неограниченно увеличивается*, а расстояние между соседними скважинами не меняется.

В пределе, когда общее число скважин $n \to \infty$, дебиты их будут одинаковыми: все скважины окажутся в совершенно одинаковых условиях притока к ним жидкости, газа или их смеси.

Для получения формул дебита скважины бесконечной прямолинейной батареи обратимся к формуле дебита скважины кольцевой батареи (VII.41). Положим, что

$$\left.\begin{aligned} r_к &= l + a; \\ a &= \frac{nh}{2\pi}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.59)}$$

где $l = \text{const}$ — разность между радиусом контура питания и радиусом кольцевой галереи a; $h = \text{const}$ — длина дуги окружности радиусом a между двумя соседними скважинами кольцевой батареи.

Подставив значения $r_к$ и a в формулу (VII.41), найдем:

$$M' = -\frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln\left(1 + \dfrac{2\pi l}{nh}\right)^n + \ln\dfrac{h}{2\pi r_с}}. \qquad \text{(VII.60)}$$

Представим теперь первый член в знаменателе (VII.60) так:

$$\ln\left[\left(1 + \frac{1}{zn}\right)^{nz}\right]^{\frac{1}{z}},$$

где $z = \dfrac{h}{2\pi l}$.

Переходя в формуле (VII.60) к пределу при $n \to \infty$ и замечая, что $\lim\limits_{hz \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{nz}\right)^{nz} = e\right.$, получим формулу *массового дебита скважины бесконечной прямолинейной батареи* (цепочки)

$$M' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\frac{2\pi l}{h} + \ln \frac{h}{2\pi r_с}}. \qquad \text{(VII.61)}$$

Ортогональная сетка, изображающая фильтрационное поле, поддерживаемое бесконечной цепочкой скважин, показана на рис. 50.

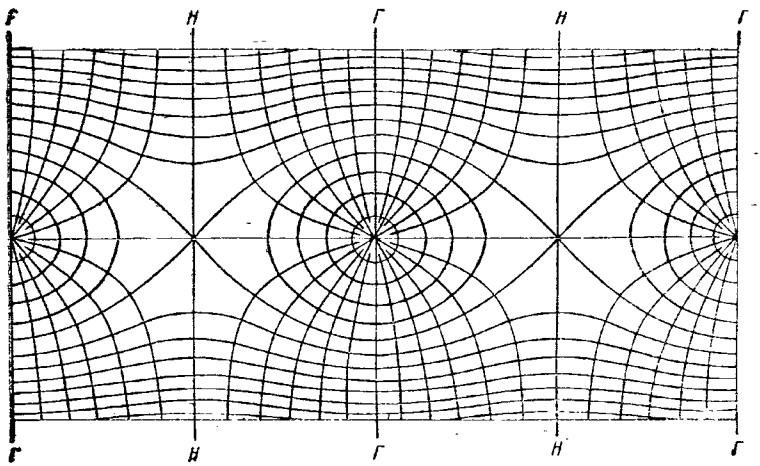


Рис. 50. Фильтрационное поле при бесконечной цепочке скважин.
ГГ — главные линии тока; *НН* — нейтральные линии тока.

Здесь, как и в кольцевой батарее, имеются главные и нейтральные линии тока, перпендикулярные к цепочке.

Нейтральными линиями тока вся плоскость течения делится на бесконечное множество полос, каждая из которых является полосой влияния одной из скважин, находящейся в середине расстояния между двумя соседними нейтральными линиями. Главные линии тока проходят через центры скважин, параллельно нейтральным линиям.

Изобара, бесчисленное множество раз пересекающая сама себя, отделяет изобары, охватывающие всю цепочку скважин, от изобар, охватывающих только данную скважину. Точки, в которых изобара пересекает сама себя, и здесь, как и в случае кольцевой батареи, являются точками равновесия; они делят интервал между двумя соседними скважинами пополам.

§ 7. Совместное действие нескольких эксплуатационных и нагнетательных батарей

Концентрические кольцевые батареи. Пусть пласт разрабатывается несколькими концентрическими кольцевыми батареями. Одни батареи могут быть нагнетательными, другие эксплуатационными.

Давления во всех скважинах данной батареи считаем одинаковыми, размещение скважин в батарее равномерным. Предполагаем, что контур питания пласта есть окружность, концентрическая по отношению ко всем батареям скважин.

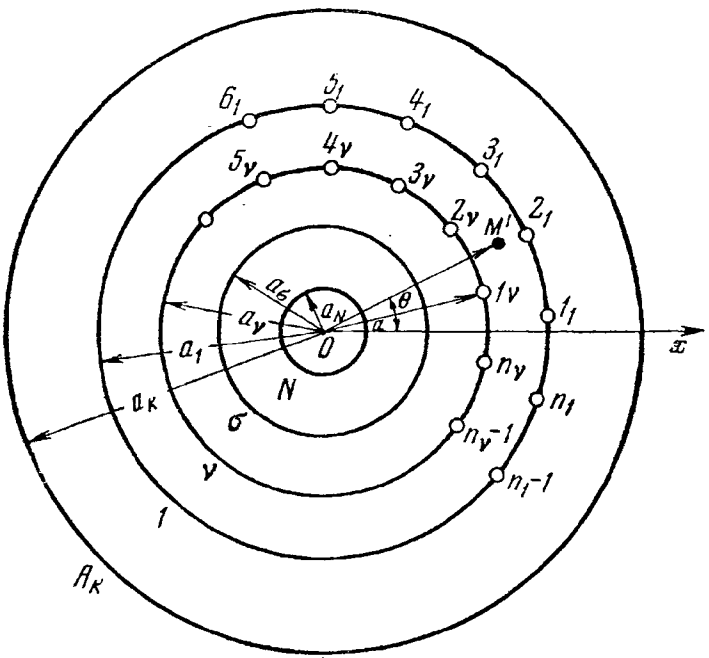


Рис. 51. Схема нескольких кольцевых батарей скважин. 1, 2 — . . . , ν, . . . , σ, . . . , N — номера батарей.

При этих условиях дебиты скважин одной какой-либо батереи будем считать равными между собой. Если заданы давления, число неизвестных дебитов будет равно числу батарей. (Можно полагать, что заданы дебиты; тогда неизвестными окажутся давления, одинаковые во всех скважинах одной какой-либо батареи).

Исследуем совместную работу N круговых батарей скважин (рис. 51). На основании (VII.2) запишем выражение потенциальной функции течения:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi b} \sum_{\nu=1}^{N} [M'_\nu \ln (r_{1\nu} r_{2\nu} \ldots r_{n\nu})] + C, \qquad \text{(VII.62)}$$

где M'_ν — массовый дебит скважины батареи за номером ν; $r_{1\nu}$, $r_{2\nu}$, ..., $r_{n\nu}$— расстояния любой точки пласта M до скважин за номерами 1, 2, ..., n_ν, этой батареи, (n_ν — число скважин в батарее за номером ν). Но, как можно понять из рис. 51

$$r_{1\nu}r_{2\nu}\ldots r_{n\nu}=\prod_{\sigma=0}^{n_\nu-1}\sqrt{r^2+a_\nu^2-2ra_\nu\cos\left[\frac{2\pi}{n_\nu}\sigma-(\theta-\alpha_{\sigma\nu})\right]}, \quad \text{(VII.63)}$$

где (r, θ) — полярные координаты точки M; a_ν — радиус батареи за номером ν; $\alpha_{\sigma\nu}$ — полярный угол скважины за номером σ.

Отметим граничные условия.

$\varphi = \varphi_к = \text{const}$ на контуре питания, столь удаленном от всех скважин, что расстояния от всех скважин до контура принимаются равными между собой, т. е. что $r_{1\nu} \approx r_{2\nu} \approx r_{3\nu} \approx \ldots \approx r_{n\nu} \approx r_к$; $\varphi = \varphi_\nu = \text{const}$ на контуре скважины батареи за номером ν, который может принимать такие значения: $\nu = 1, 2, 3, \ldots N$.

Подставляя значения соответствующих величин на контуре питания и порознь на одной из скважин каждой из N батарей в равенство (VII.62), получим систему $N + 1$ линейных уравнений относительно N дебитов M'_ν и постоянной C.

Путем последовательных преобразований, с которыми читатель может ознакомиться в специальной литературе, уравнения нашей системы приводятся к такому общему виду:

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda-1}\left(n_\nu M'_\nu \ln\frac{r_к}{a_\nu}\right)+M'_\lambda\ln\frac{a_\lambda}{n_\lambda r_c}+\ln\frac{r_к}{a_\lambda}\sum_{\nu=\lambda+1}^{N}(n_\nu M'_\nu)=2\pi b(\varphi_к-\varphi_\lambda), \quad \text{(VII.64)}$$

где $\lambda = 1, 2, 3, \ldots N$.

Батареи занумерованы снаружи внутрь, так что внешняя батарея имеет номер 1, а внутренняя номер N.

Упрощение решения системы уравнений для вычисления дебитов скважин кольцевых батарей. Система линейных уравнений (VII.64), предложенная В. Н. Щелкачевым, очень удобна для определения N потенциальных функций φ_ν, если известны все дебиты скважин, ибо в каждое уравнение (VII.64) входит одно неизвестное φ_λ. Однако система уравнений (VII.64) оказывается громоздкой для определения неизвестных дебитов, если известны все потенциальные функции φ_ν и все прочие величины.

Для облегчения решения задачи определения дебитов скважин В. Н. Щелкачев рекомендует вычесть уравнение с номером $(N - 1)$ из уравнения с номером N, затем — вычесть уравнение с номером $(N - 2)$ из уравнения с номером $(N - 1)$ и т. д., т. е. вычесть каждое предшествующее уравнение из последующего, начиная с последнего.

Получается

$$\left(\ln\frac{a_{\lambda-1}}{a_\lambda}\right)\sum_{\nu=\lambda}^{N} n_\nu M'_\nu + M'_\lambda \ln\frac{a_\lambda}{n_\lambda r_c} - M'_{\lambda-1}\ln\frac{a_{\lambda-1}}{n_{\lambda-1}r_c} = 2\pi b\,(\varphi_{\lambda-1}-\varphi_\lambda), \tag{VII.65}$$

где надо учесть, что при $\varphi_0 = \varphi_\lambda$; $n_0 = 1$, а в третьем члене левой части надо положить $r_c = r_к$.

Для ясности перепишем формулу (VII.65) в виде системы N уравнений, придавая λ значения N, $(N-1)$ и т. д. в убывающем порядке:

$$\left.\begin{aligned}
M'_{N-1}\ln\frac{a_{N-1}}{n_{N-1}r_c} &= \left(\ln\frac{a_{N-1}}{a_N}\right)n_N M'_N + \\
&+ M'_N\ln\frac{a_N}{r_c} - 2\pi b\,(\varphi_{N-1}-\varphi_N); \\
M'_{N-2}\ln\frac{a_{N-2}}{n_{N-2}r_c} &= \left(\ln\frac{a_{N-2}}{a_N}\right)(n_{N-1}M'_{N-1} + n_N M'_N) + \\
&+ M'_{N-1}\ln\frac{a_{N-1}}{n_{N-1}r_c} - 2\pi b\,(\varphi_{N-2}-\varphi_{N-1}); \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M'_1\ln\frac{a_1}{n_1 r_c} &= \ln\frac{a_1}{a_2}\sum_{\nu=2}^{N} n_\nu M'_\nu + M'_2\ln\frac{a_2}{n_2 r_c} - 2\pi b\,(\varphi_1-\varphi_2); \\
0 &= \left(\ln\frac{r_к}{a_1}\right)\sum_{\nu=1}^{N} n_\nu M'_\nu + M'_1\ln\frac{a_1}{n_1 r_c} - 2\pi b\,(\varphi_к-\varphi_1).
\end{aligned}\right\} \tag{VII.66}$$

В первое уравнение входят две неизвестные величины M'_{N-1} и M'_N; во втором уравнении прибавляется еще одна неизвестная M_{N-2}; в третьем — неизвестная M'_{N-3} и т. д. Из первых $(N-1)$ уравнений (VII.66) легко выразим первые $(N-1)$ неизвестных M'_1, M'_2, ..., M'_{N-1} через M'_N и, подставив найденные выражения в последнее уравнение, найдем M'_N, после чего сразу определяем значения первых $(N-1)$ неизвестных.

Примечание. Согласно определению линейной алгебры, система линейных уравнений называется полной треугольной системой, если в первое уравнение входит одно неизвестное, а в каждом последующем уравнении прибавляется по одному новому неизвестному. Система уравнений (VII.64) или (VII.65) является усеченной треугольной системой по отношению к N неизвестным. Первые же $(N-1)$ уравнений (VII.65) представляют собой полную треуголь-

ную систему по отношению к группе (N — 1) неизвестных

$$M'_{N-1},\ M'_{N-2},\ \ldots,\ M'_2,\ M'_1.$$

Дальнейшее упрощение решения системы уравнений вида (VII.64) было предложено М. А. Гусейн-Заде [5].

Параллельные прямолинейные батареи. Формулы, связывающие дебиты и значения потенциальной функции на контурах скважин и питания при одновременной работе многих параллельных прямолинейных бесконечных батарей, эксплуатационных и нагнетательных, можно вывести по способу, который кратко здесь опишем. Суть этого способа заключается в том, что в формулах настоящего параграфа совершается предельный переход, причем прямолинейная батарея рассматривается как кольцевая, но с бесконечно большим радиусом.

Для осуществления предельного перехода введем новые обозначения.

Обозначим через h_σ измеренное вдоль окружности расстояние между соседними скважинами кольцевой батареи с номером σ; ε_σ — кратчайшее расстояние между батареями с номерами σ и (σ — 1). Величина h_ν имеет тот же смысл, что h_σ, но для батареи с номером ν.

Будем иметь следующие соотношения (см. рис. 51):

$$2\pi a_\sigma = n_\sigma h_\sigma;\quad 2\pi a_\nu = n_\nu h_\nu; \tag{VII.67}$$

$$a_{\sigma-1} - a_\sigma = \varepsilon_\sigma; \tag{VII.68}$$

$$a_\sigma = a_\nu + B_{\sigma\nu}, \tag{VII.69}$$

где $B_{\sigma\nu}$ — расстояние между батареями с номерами σ и ν.

Преобразовав формулу (VII.65) с помощью равенств (VII.67) — (VII.69), перейдем к пределу, полагая $a_\sigma \to \infty$. Раскрывая затем неопределенности по правилу Лопиталя, получим следующую систему N уравнений для параллельных прямолинейных бесконечных батарей (рис. 52):

$$\varepsilon_\sigma \sum_{\nu=\sigma}^{N} \frac{M'_\nu}{h_\nu} + \frac{M'_\sigma}{2\pi} \ln \frac{h_\sigma}{2\pi r_c} - \frac{M'_{\sigma-1}}{2\pi} \ln \frac{h_{\sigma-1}}{2\pi r_c} = b\left(\varphi_{\sigma-1} - \varphi_\sigma\right), \tag{VII.70}$$

где $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, N$; $\varphi_0 = \varphi_к$.

При этом в отрицательном члене левой части $2\pi r_c = h_0$; если $\sigma = 1$.

Решение системы уравнений (VII.70) может быть облегчено в результате упрощений, подобных тем, какие предложены М. А. Гусейн-Заде для кольцевых батарей скважин.

Подчеркнем одно важное обстоятельство. Формулы настоящего параграфа для расчета дебитов или потенциальных функций скважин для нескольких батарей имеют преимущественное значение при решении вопросов проектирования разработки достаточно крупных нефтяных залежей в условиях водонапорного режима. Часто такой режим обусловливается применением законтурного и

внутриконтурного заводнения пласта, т. е. применением нагнетания воды в пласт через скважины, расположенные соответственно за контуром нефтеносности и внутри этого контура. Во многих задачах законтурного и внутриконтурного заводнения допустимо воду и нефть принимать за однородную несжимаемую жидкость. Это

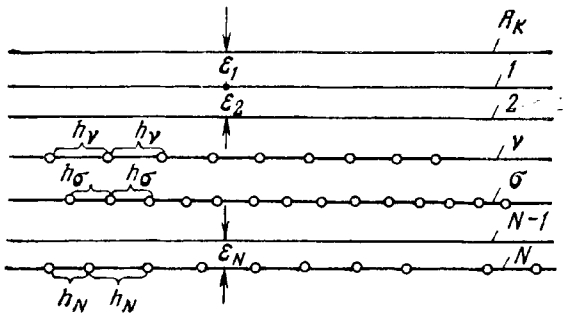


Рис 52. Схема нескольких параллельных цепочек скважин.
1, 2, . . ., ν, . . . , σ , . . . , N — номера батарей.

позволяет в формулах настоящего параграфа вместо массовых дебитов M'_ν, M'_σ, M'_λ принимать величины объемных дебитов, одновременно заменяя значения потенциальных функций на контурах скважин и пласта φ_ν, $\varphi_к$ соответствующими давлениями p_ν и $p_к$.

§ 8. Составление расчетных уравнений для батарей скважин с помощью величин внутренних и внешних фильтрационных сопротивлений

Членам уравнений, применяемых для подсчетов дебитов или значений потенциальных функций на контурах можно придать простой физический смысл, пользуясь понятиями внутреннего и внешнего фильтрационных сопротивлений. Введение этих понятий позволило Ю. П. Борисову сложный фильтрационный поток в пласте при совместной работе нескольких батарей эксплуатационных и нагнетательных скважин разложить на простейшие потоки — на потоки к одиночно работающей скважине и к одиночно работающей галерее.

Поясним, что мы будем подразумевать под понятиями величин внутреннего и внешнего фильтрационных сопротивлений потоку. Представим себе, что из общего потока в бесконечной цепочке скважин мы выделяем фильтрационный поток от прямолинейного контура питания к n подряд расположенным скважинам этой цепочки.

Массовый расход в единицу времени nM' можно определить по формуле (VII.61) так:

$$nM' = \frac{\varphi_к - \varphi_с}{\frac{l}{hnb} + \frac{1}{2\pi bn} \ln \frac{h}{2\pi r_с}}. \qquad \text{(VII.71)}$$

Фильтрационное сопротивление потоку определяется величиной знаменателя дроби правой части (VII.71) *. В данном случае знаменатель состоит из двух слагаемых. Выясним смысл каждого слагаемого.

Поставим перед собой такой вопрос: что выражала бы формула (VII.71), если бы в знаменателе ее правой части было одно первое слагаемое? Формула (VII.71) тогда приняла бы такой вид:

$$nM' = \frac{nbh\,(\varphi_к - \varphi_с)}{l}. \qquad \text{(VII.72)}$$

Формула (VII.72) выражает дебит в прямолинейно-параллельном потоке через площадь величиной nbh на длине l. Очевидно формулу (VII.72) мы получим из формулы (IV.32), положив в ней $j = 0$; $r_с = 0$; $A = nbh$. Линии тока — прямые, между собой параллельные. Следовательно, первое слагаемое знаменателя дроби в (VII.71) выражает фильтрационное сопротивление потоку от контура питания к участку прямолинейной бесконечной цепочки, занятому n скважинами в предположении, что на всем протяжении линии тока остаются прямыми, т. е. что цепочку скважин заменили галереей («галереизация» батарей).

Б. П. Борисов называет эту часть фильтрационного сопротивления, т. е. член $\frac{l}{nbh}$, внешним фильтрационным сопротивлением.

Предположив далее, что в знаменателе дроби (VII.71) есть только одно второе слагаемое, получим такую формулу:

$$nM' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{h}{2\pi r_с}}\, n. \qquad \text{(VII.73)}$$

Формула (VII.73) выражает суммарный дебит n скважин нашей бесконечной цепочки в предположении, что каждая скважина окружена контуром питания длиной h и что между этим контуром и контуром скважины имеет место плоско-радиальный поток.

Таким образом, второе слагаемое знаменателя дроби в (VII.71) выражает некоторое местное фильтрационное сопротивление, возникающее при подходе жидкости ко всем скважинам. Появление этого сопротивления объясняется искривлением линий тока у скважины. Величину части сопротивления, равную $\frac{1}{2\pi bn} \ln \frac{h}{2\pi r_с}$ Ю. П. Борисов назвал *внутренним фильтрационным сопротивлением батареи.*

На внешнее и внутреннее фильтрационные сопротивления расчленяется также полное фильтрационное сопротивление потоку к эксплуатационным скважинам кольцевой батареи.

---

[1] По аналогии с тем, как в дроби, выражающей силу тока по закону Ома, знаменатель представляет сопротивление электрическому току.

Воспользовавшись формулой (VII.41), суммарный дебит всех скважин батареи nM' представим в следующем виде:

$$nM' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln\left[\left(\frac{r_к}{a}\right)^n \frac{a}{nr_с}\right]}\,n = \frac{\varphi_к - \varphi_с}{\frac{1}{2\pi b}\ln\frac{r_к}{a} + \frac{1}{2\pi bn}\ln\frac{a}{nr_с}} =$$

$$= \frac{\varphi_к - \varphi_с}{\frac{1}{2\pi b}\ln\frac{r_к}{a} + \frac{1}{2\pi bn}\ln\frac{2\pi a}{n}}. \qquad \text{(VII.74)}$$

Если отбросить второй член в знаменателе дроби, представляющей правую часть (VII.74), эта формула запишется так:

$$nM' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln\frac{r_к}{a}}. \qquad \text{(VII.75)}$$

Формула (VII.75) соответствует плоско-радиальному потоку между контуром питания радиусом $r_к$ и кольцевой галереей радиусом a. Отбрасывание второго члена знаменателя формулы (VII.74), следовательно, равносильно замене кольцевой батареи радиусом a кольцевой галереей с тем же радиусом («галереизация» кольцевой батареи). Можно заключить, что первое слагаемое в знаменателе формулы (VII.74) выражает фильтрационное сопротивление потоку от контура питания к кольцевой батарее скважин в предположении, что на всем протяжении поток остается плоско-радиальным, т. е. что осуществили «галереизацию» кольцевой батареи. Величина $\frac{1}{2\pi b}\ln\frac{r_к}{a}$ *есть внешнее сопротивление потоку.*

Фактическое фильтрационное сопротивление потоку к кольцевой батарее будет больше внешнего сопротивления на величину $\frac{1}{2\pi bn}\ln\left[\frac{2\pi a}{n} : (2\pi r_с)\right]$. Последняя и есть внутреннее сопротивление батареи. Внутреннее сопротивление одной скважины имеет тот же смысл, что и внутреннее сопротивление скважины для прямолинейной цепочки, т. е. сопротивление плоско-радиальному потоку от воображаемого контура окружности длиной $2\pi a/n$ к скважине. Величина $2\pi a/n$ — длина дуги сектора, который содержит одну из скважин батареи (дуга сектора имеет радиус, равный радиусу батареи a).

Общая формула суммарного дебита n скважин прямолинейной или кольцевой батареи представится так:

$$nM' = \frac{\varphi_к - \varphi_с}{R_E + R_I}, \qquad \text{(VII.76)}$$

где $R_E^{\text{н}}$ и $R_I^{\text{в}}$ — внешнее и внутреннее фильтрационные сопротивления потоку.

Рассмотрим случай нескольких эксплуатационных и нагнетательных батарей скважин.

Составим систему расчетных уравнений по схеме, расчленяющей фильтрационные сопротивления на внутренние и внешние.

Имеем N эксплуатационных кольцевых или прямолинейных батарей скважин, к которым устремляется фильтрационный поток со стороны контура питания, равноудаленного от всех скважин любой данной батареи (см. рис. 51 или рис. 52).

На первом участке между контуром питания и скважинами первой батареи поток выражается количественно величиной $\sum_{\nu=1}^{N} n_\nu M'_\nu$. Скважинами первой батареи поглощается в единицу времени масса $n_1 M'_1$; следовательно, на участке между первой и второй батареями поток определяется величиной $\sum_{\nu=1}^{N} (n_\nu M'_\nu) - n_1 M'_1 = \sum_{\nu=2}^{N} n_\nu M'_\nu$. Вторая батарея поглощает массу $n_2 M'_2$, поток на следующем участке составит величину $\sum_{\nu=3}^{N} n_\nu M'_\nu$ и т. д.

Потеря величины потенциальной функции (падение потенциала) на участке между контуром питания и скважинами первой батареи подсчитываем так:

$$\varphi_к - \varphi_1 = R_{E1} \sum_{\nu=1}^{N} (n_\nu M'_\nu) + R J_2 M'_1, \qquad \text{(VII.77)}$$

где R_{E1} — внешнее сопротивление первого участка потока; R_{I1} — внутреннее сопротивление скважин первой батареи. R_{E1} и R_{I1} подсчитываются так, как объяснено в начале параграфа.

Падение потенциала между контуром питания и скважинами второй батареи определяется следующим образом:

$$\varphi_к - \varphi_c = R_{E1} \sum_{\nu=1}^{N} (n_\nu M'_\nu) + R_{E2} \sum_{\nu=2}^{N} (n_\nu M'_\nu) + R J_2 M'_2, \qquad \text{(VII.78)}$$

где R_{E2} — внешнее фильтрационное сопротивление на участке между первой и второй батареями скважин; RJ_2 — внутреннее фильтрационное сопротивление второй батареи.

Падение потенциала между контуром питания и скважинами σ-ой батарей запишем так:

$$\varphi_к - \varphi_\sigma = \sum_{j=1}^{\sigma} \left(R_{Ej} \sum_{\nu=j}^{N} n_\nu M'_\nu \right) + R J_\sigma M'_\sigma, \qquad \text{(VII.79)}$$

где R_{Ej} — внешнее сопротивление на участке между батареями за номерами j—1 и j, причем длина батареи, имеющей номер нуль, есть контур питания; $R_{I\sigma}$ — внутреннее сопротивление батареи за номером σ.

В соответствии с понятиями величин внешнего и внутреннего фильтрационных сопротивлений определяем R_{Ej} и RJ_6 следующими формулами:

для параллельных прямолинейных батарей

$$\left.\begin{aligned} R_{Ej} &= \frac{\varepsilon_j}{n_j b h_j}, \\ RJ_{\text{б}} &= \frac{1}{2\pi b} \ln \frac{h_\sigma}{2\pi r_{\text{c}}}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.80)}$$

для концентрических кольцевых батарей

$$\left.\begin{aligned} R_{Ej} &= \frac{1}{2\pi b} \ln \frac{a_j}{a_{j-1}}, \\ RJ_{\text{б}} &= \frac{1}{2\pi b} \ln \frac{h_\sigma}{2\pi r_{\text{c}}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.81)}$$

В формулах (VII.80), согласно обозначениям, принятым для формулы (VII.70) и рис. 52, ε_j — расстояние между прямыми, по которым размещены батареи за номерами $(j-1)$ и j; h_{v} — расстояние между соседними скважинами батареи за номером σ. Обозначения в первой формуле (VII.81) согласуются с обозначениями, принятыми для концентрических кольцевых батарей: a_j и a_{j-1} — радиусы двух соседних батарей за номерами j и $j-1$; h_j во второй формуле (VII.81) — длина дуги сектора, заключающего одну скважину батареи за номером σ, если радиус сектора равен a_{v}, т. е. радиусу батареи.

Составив систему N уравнений вида (VII.77)—(VII.79), вычитаем почленно сначала из уравнения (VII.78) уравнение (VII.77), затем уравнение (VII.78) из уравнения (VII.79) при $\sigma = 3$ и т. д. При этом из уравнения за номером σ отнимается почленно уравнение за номером $\sigma - 1$. В результате получится новая система уравнений, общий вид которых вместе с уравнением (VII.77) будет следующий:

$$\varphi_{\sigma-1} - \varphi_\sigma = R_{E\sigma} \sum_{j=\sigma}^{N} (n_j M'_j) + RJ_{\text{б}} M'_\sigma - RJ_{(\sigma-1)} M'_{\sigma-1}, \qquad \text{(VII.82)}$$

где $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, N$, а $\varphi_0 = \varphi_{\text{к}}$.

Система уравнений (VII.82) представляет собой усеченную треугольную систему по отношению к N неизвестным дебитам (см. примечание к системе уравнений VII.66). Учитывая формулы (VII.80) и (VII.81), можно убедиться, что для кольцевых батарей система уравнений (VII.82) есть не что иное, как система (VII.65), а для прямолинейных батарей — система (VII.70).

Составление системы расчетных уравнений для нескольких батарей с помощью величин внутренних и внешних фильтрационных сопротивлений благодаря простой физической трактовке явления[1] обладает рядом достоинств. Понятно, больших принципиальных и вычислительных упрощений в расчеты дебитов и давлений для условий совместной работы батарей скважин этот порядок составления уравнений не вносит.

[1] Расчеты ведутся как бы по законам Ома и Кирхгофа.

§ 9. Взаимодействие скважин в неоднородно проницаемом и анизотропном пластах

В процессах разработки нефтяной залежи часто возникают такие условия, при которых проницаемость пласта в законтурной области оказывается худшей, чем внутри контура нефтеносности.

Рассмотрим взаимодействие скважин кольцевой батареи в неоднородно проницаемом пласте и сделаем некоторые замечания по поводу анизотропного пласта.

Предположим, что в пласте большой протяженности действуют n эксплуатационных скважин, размещенных равномерно по окружности радиусом a. В этой части пласта проницаемость характеризуется коэффициентом $k_1 = \text{const}$.

На расстоянии $r_0 > a$ от центра кольцевой батареи скважин проницаемость изменяется скачком так, что во всех точках пласта, удаленных от центра батареи более, чем на r_0, проницаемость характеризуется коэффициентом $k_2 = \text{const}$. Полагаем, что контур питания пласта удален от батареи на расстояние, значительно большее, чем радиус батареи a. Часть пласта с коэффициентом проницаемости k_1 будем называть частью I, а часть пласта, в которой проницаемость характеризуется коэффициентом k_2, — частью II (рис. 53).

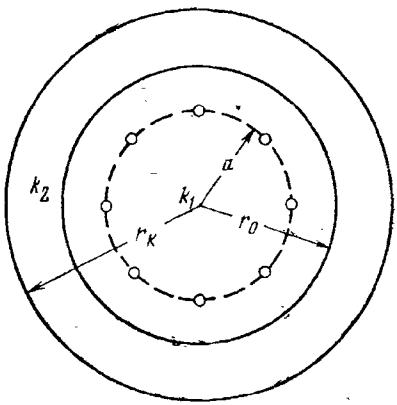


Рис. 53. Кольцевая батарея скважин в пласте с проницаемостью, изменяющейся скачком.

Во всем пласте сохраняется закон фильтрации Дарси.

Обратимся сначала к части I пласта. Поток здесь направлен к n эксплуатационным скважинам кольцевой батареи радиусом a от окружности — источника радиусом r_0. Потенциальную функцию φ в любой точке этой части пласта можно определить по формуле (VII.34), а дебит каждой скважины батареи при помощи формулы (VII.41) можно записать так:

$$M' = \frac{2\pi b\,(\varphi_0 - \varphi_c)}{\ln \dfrac{r_0^n}{n a^{n-1} r_c}}, \qquad \text{(VII.83)}$$

где φ_0 — значение потенциальной функции на границе раздела частей пласта I и II.

Поток в части II считаем плоско-радиальным от окружности питания радиусом $r_к$ к «скважине» укрупненного радиуса r_0. Дебит ее составляет величину nM'. Следовательно, M' можно подсчитать так:

$$M' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_0)}{n \ln \dfrac{r_к}{r_0}} = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_0)}{\ln \left(\dfrac{r_к}{r_0}\right)^n}. \qquad \text{(VII.84)}$$

Но формулы (VII.83) и (VII.84) можно представить в ином виде. Согласно выражению потенциальной функции будем иметь:

$$\varphi = \int \frac{\rho k}{\mu}\, dp + C. \qquad \text{(VII.85)}$$

В пределах каждой из частей пласта I и II коэффициент проницаемости постоянен. Значит, применительно к части I пласта формула (VII.85) представится так:

$$\varphi = k_1 \Phi + C, \qquad \text{(VII.86)}$$

где

$$\Phi = \int \frac{\rho}{\mu}\, dp. \qquad \text{(VII.87)}$$

Применительно же к части II получим:

$$\varphi = k_2 \Phi + C. \qquad \text{(VII.88)}$$

Подставляя значения φ_0 и φ_c, выраженные формулой (VII.86), в равенство (VII.83), а значения $\varphi_к$ и φ_0, выраженные формулой (VII.88), в равенство (VII.84), найдем что

$$M' = \frac{2\pi b k_1 (\Phi_0 - \Phi_c)}{\ln \frac{r_0^n}{n a^{n-1} r_c}}; \qquad \text{(VII.89)}$$

$$M' = \frac{2\pi b k_2 (\Phi_к - \Phi_0)}{\ln \left(\frac{r_к}{r_0}\right)^n}. \qquad \text{(VII.90)}$$

Здесь $\Phi_к$, Φ_0 и Φ_c — значения функции Φ, определяемой формулой (VII.87), на контуре питания пласта на границе раздела частей I и II и на контуре скважины соответственно.

Исключая из равенств (VII.89) и (VII.90) величину Φ_0, получим:

$$M' = \frac{2\pi b (\Phi_к - \Phi_c)}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{r_0^n}{n a^{n-1} r_c} + \frac{1}{k_2} \ln \left(\frac{r_к}{r_0}\right)^n}. \qquad \text{(VII.91)}$$

Для однородной несжимаемой жидкости значения $\Phi_к$ и Φ_c в формуле (VII.91) можно заменить соответственно величинами $\frac{p_к}{\mu}$ и $\frac{p_c}{\mu}$ с одновременной заменой M' объемным дебитом Q.

Пользуясь формулой (VII.91), можно сравнить дебиты батареи при различных относительных размерах частей I и II пласта и при различных соотношениях между коэффициентами проницаемости. На рис. 54 показана зависимость коэффициента суммарного взаимодействия U — см. формулу (VII.47) — от числа скважин n, безразмерной величины $\beta = \frac{k_1}{k_2}$, характеризующей неоднородность проницаемости пласта и радиуса границы раздела частей I и II. По ломаным линиям на этом рисунке можно получить представление о взаимо-

действии скважин. Так, если проницаемость той части пласта, в которой расположены скважины (части I), *ниже проницаемости остальной части пласта* ($\beta < 1$), величина U *всегда выше*, чем U батареи, действующей при тех же условиях в однородном пласте ($\beta = 1$). Если же проницаемость части пласта со скважинами выше проницаемости остальной части пласта ($\beta > 1$), U будет ниже его значения в однородном пласте. При одних и тех же значениях $\beta = k_1/k_2$ взаимодействие скважин будет тем больше, чем большую площадь при данных условиях занимает менее проницаемая часть

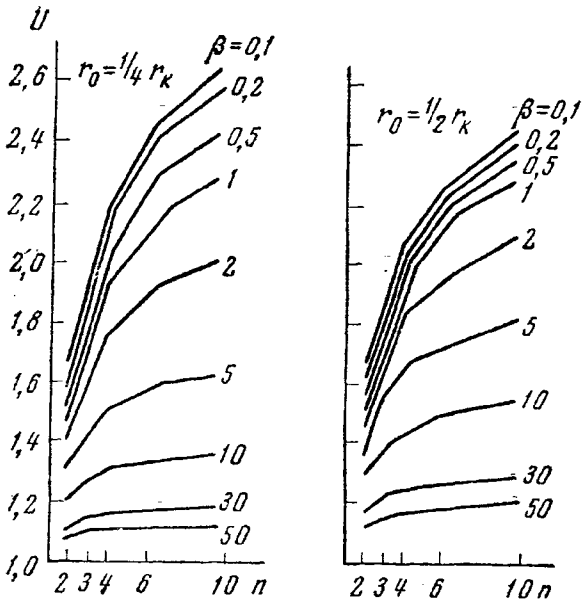


Рис. 54. Зависимость суммарного дебита кольцевой батареи скважин от величины β.

пласта. Ломаные линии на рис. 54 построены для следующих соотношений: $r_к = 10^5 r_с$; $a = 0{,}01 r_к$. Следовательно, если считать что $r_с = 10$ см, то левая группа ломаных на рис. 54 соответствует $r_0 = 2{,}5$ км, а правая группа — $r_0 = 5$ км.

Если кольцевая батарея скважин находится не во внутренней круглой области части I пласта, а в той, которая примыкает к контуру питания, т.е. в части II, то $a > r_0$. В этом случае массовый дебит скважины определяется по следующей формуле:

$$M' = \frac{2\pi b\,(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln \dfrac{r_к^n}{n a^{n-1} r_с} + \dfrac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ln \dfrac{a^{2n}}{a^{2n} - r_0^{2n}}}, \qquad \text{(VII.92)}$$

где сохранены обозначения, употреблявшиеся в формуле (VII.91). Обоснование формулы (VII.92) дано М. А. Гусейн-Заде в книге, в которой автор рассмотрел влияние многих особенностей неоднородно проницаемых пластов на фильтрацию жидкостей.

Особое проявление неоднородности структурных пород, у которых проницаемость приобретает некоторую *векториальность*, позволяет рассматривать пласт, сложенный такими породами, как анизотропную среду. Коротко коснемся вопроса влияния анизотропной проницаемости на взаимодействие скважин.

Аналитически исследовалось взаимодействие двух скважин в однородном анизотропном пласте. Оказалось, что во многих случаях скважины взаимодействуют приблизительно так, как и в однородном изотропном пласте. Эффект взаимодействия будет заметно усиленным или ослабленным лишь при резком различии проницаемостей в двух определенных направлениях: в направлении линии расстановки скважин и в направлении, перпендикулярном к этой линии.

Ослабление эффекта взаимодействия наблюдается тогда, когда в направлении линии расстановки скважин проницаемость низка по сравнению с проницаемостью в перпендикулярном направлении. Наоборот, усиление эффекта взаимодействия означает, что в направлении вдоль линии скважин пласт более проницаем для жидкости, чем в направлении, перпендикулярном к нему.

Во избежание усиленного эффекта взаимного влияния скважин при возможности выбора направления, в котором следует закладывать новые скважины, следует предпочесть направление, в котором пласт наименее проницаем (если изучение коллекторских свойств пласта позволяет установить это направление).

Известно, что в каждой точке упругой сплошной среды можно построить эллипсоид напряжений, характеризующий распределение напряжений по всем возможным направлениям. Если силы действуют в одной плоскости берется эллипс напряжений.

Подобно этому в каждой точке анизотропного пласта может быть построен эллипсоид проницаемости, характеризующий распределение ее по всем возможным направлениям. Поверхность эллипсоида проницаемости получим, если в каждом направлении от данной точки отложить величину $1/\sqrt{k}$, где k — коэффициент проницаемости в данном направлении. Для плоского потока в анизотропном пласте будем иметь эллипс проницаемости.

Как указывает А. Э. Шейдеггер, существуют две возможности изучения фильтрационного поля: 1) с помощью функции силового потенциала и 2) потенциальной функции φ, которая является потенциалом массовой скорости (эта возможность использована, например, в настоящей главе).

Для потока в анизотропной пористой среде: 1) градиент силового потенциала и скорость фильтрации не параллельны; 2) имеются три ортогональные оси в каждой точке пространства, вдоль которых направление градиента силового потенциала и скорости одно и то же. Эти оси называются главными осями проницаемости.

Главные оси проницаемости совпадают с осями эллипсоида проницаемости. Для плоского потока в каждой точке анизотропного пласта существуют две главные оси, совпадающие с осями эллипса проницаемости. В таком случае главные оси соответствуют наибольшей и наименьшей проницаемости.

В настоящее время широко распространены *методы математической статистики* для решения практических задач движения жидкости в неоднородных пластах. Этим методам посвящены исследования И. Г. Пермякова, М. М. Саттарова и И. Б. Генкина, М. И. Швидлера, В. Д. Лысенко и др.

§ 10. Влияние непроницаемых границ пласта на работу скважин

Любая эквипотенциальная линия, охватывающая все действующие скважины, может приниматься за контур питания находящейся внутри нее области пласта. Но границей пласта может быть и линия тока.

Если, например, расчленить поток в случае кольцевой батареи равнодебитных эксплуатационных скважин на части, границами которых являются нейтральные линии тока (см. § 4 настоящей главы), получим секторы; весь поток внутри каждого сектора поглощается скважиной, находящейся на биссектрисе угла между двумя нейтральными линиями. При бесконечной прямолинейной цепочке скважин расчленение всего потока нейтральными линиями означает разбиение его на бесчисленное множество одинаковых полос, внутри каждой из которых имеется одна скважина (см. рис. 50).

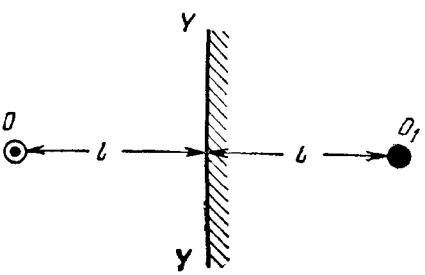


Рис. 55. Расположение скважины в пласте с прямолинейным сбросом.

Поскольку ни одна частица жидкости не пересекает в своем движении нейтральных линий можно принимать эти прямые за след на плоскости чертежа непроницаемых стенок пласта, имеющего в одном случае клинообразную форму, в другом — полосообразную. В реальных условиях эти непроницаемые стенки соответствуют сбросам, через которые жидкость не протекает.

Рассмотрим простейшие случаи тектонических нарушений — сбросов.

Одна скважина вблизи прямолинейного сброса. Пусть эксплуатационная совершенная скважина O действует в пласте очень большой протяженности на расстоянии l от прямолинейного сброса yy (рис. 55).

Фильтрационное поле, поддерживаемое скважиной O, занимает на рис. 55 левую полуплоскость и ограничено прямой линией тока yy.

Если расстояние между двумя равнодебитными эксплуатационными скважинами, составляет $2l$, получим фильтрационное поле, разделенное на две части нейтральной линией, перпендикулярной отрезку прямой, соединяющей скважины и делящей расстояние между ними пополам. В этом случае часть поля, занимающая левую полуплоскость, ничем не отличается от фильтрационного поля одной скважины, действующей на расстоянии l от линии сброса.

Сравнение фильтрационного поля одной скважины, расположенной на расстоянии l от линии сброса, с фильтрационным полем двух равнодебитных скважин, действующих на расстоянии $2l$ друг от друга, дает основание применить нижеследующий способ решения задачи о потоке к скважине, находящейся в пласте с прямолинейным сбросом.

Отображаем зеркально сток-скважину O относительно линии сброса (см. рис. 55) и в точке — отображения O_1 помещаем сток с дебитом отображаемого стока. Фильтрационное поле, поддерживаемое данной скважиной, представится в виде поля, находящегося по одну сторону нейтральной линии, которая здесь играет роль линии сброса. Дебит M' следует, очевидно, определять для каждой из двух совместно действующих эксплуатационных скважин, например, по формуле (VII.41); в ней надо принять $n = 2$, $a = l$.

В табл. 12 даны различные значения отношения M'/M, т. е. отношения дебита скважины M' в пласте при наличии сброса к дебиту скважины M, работающей в пласте при отсутствии сброса — если прочие условия работы этих двух скважин, одинаковы. Расчет значений M'/M производился по такой формуле:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\ln \frac{r_к}{r_с}}{\ln \frac{r_к^2}{2lr_с}} = \frac{1}{I}, \qquad \text{(VII.93)}$$

где I — коэффициент взаимодействия скважин; l — расстояние скважины от сброса. Принималось, что $r_к = 10$ км, $r_с = 10$ см. Как видим, *с увеличением расстояния скважины от сброса увеличивается дебит скважины*, ибо увеличение расстояния до сброса равносильно увеличению расстояния между двумя скважинами — фактической и ее отображением.

Таблица 12

Значения M'/M

Показатель	l, м			
	10	50	100	1000
$\frac{M'}{M} \cdot 100$ (или $100/I$), %	64,8	71,4	74,6	92,6

Одна или несколько скважин между сбросами, образующими тектонический клин. Представим себе, что эксплуатационная скважина O расположена на биссектрисе угла между двумя прямолинейными сбросам AB и $A'B$, образующими тектонический клин с углом α (рис. 56).

Фильтрационное поле внутри клина ABA' можно рассматривать как поле сектора одной скважины кольцевой батареи с общим числом скважин $n = \frac{2\pi}{\alpha}$. Дебит скважины M' определяется по формуле (VII.41) или (VII.43).

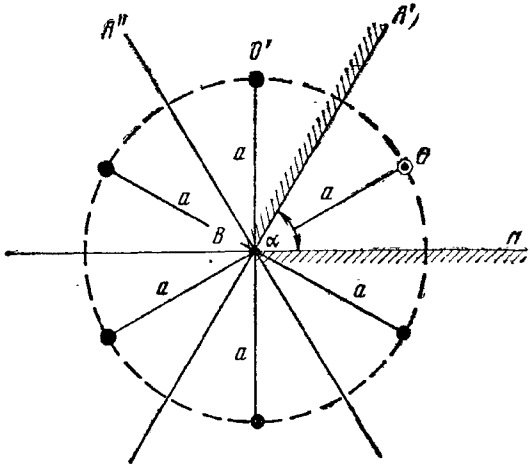


Рис. 56. Расположение скважины внутри тектонического клина.

Для сравнения дебита скважины, действующей в тектоническом клине, с дебитом скважины, находящейся в тех же условиях, но при отсутствии сбросов, воспользуемся следующей формулой:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\ln \frac{r_к}{r_с}}{\ln \frac{r_к^n}{na^{n-1}r_с}} = \frac{1}{I}. \qquad \text{(VII.94)}$$

Значения M'/M, соответствующие этой формуле для $\alpha = 120°$ и $60°$, можно определить для разных a, т. е. для разных расстояний скважины от вершины клина, по табл. 10. Как видно из формулы (VII.94), $\frac{M'}{M} = \frac{1}{I}$; следовательно в этом случае для значений I, приведенных в табл. 10, достаточно найти обратные величины I. Найденные таким путем значения M'/M помещены в табл. 13.

Принятые в данном случае значения $r_к$ и $r_с$ указаны в § 4.

Из сопоставления данных табл. 12 и 13 можно заключить: чем больше оказывается стесненным поток, направляющийся к скважине,

Таблица 13

Сравнительная оценка величины дебита скважины, действующей внутри тектонического клина

Расстояние a, м	M', % от M	
	$\alpha=120°$	$\alpha=60°$
10	47,6	24,8
100	58,9	35,2
1000	76,4	54,1

Примечание. Дебит M' выражен в процентах по отношению к дебиту скважины M в пласте без сбросов.

т. е. чем больше в пласте непроницаемых стенок и чем ближе к скважине они находятся, тем меньше дебит скважины.

Если внутри тектонического клина действует не одна, а несколько скважин, то в некоторых случаях задачу можно решать также с помощью формул (VII.41) или (VII.43). Пусть, например, внутри тектонического клина с углом $\alpha = 120°$ действуют две скважины, размещенные так, как скважины O и O'' внутри клина ABA'' на рис. 56. Дебит каждой из них можно рассчитать как дебит каждой скважины кольцевой батареи из шести скважин.

Одна скважина или цепочка скважин между двумя параллельными сбросами. Если скважина действует в пласте полосообразной формы, ограниченной с двух сторон прямолийными параллельными непроницаемыми сбросами, то действие ее можно уподобить действию одной из скважин бесконечной прямолинейной цепочки, например, скважины O на рис. 50.

Фильтрационное поле одной скважины в полосообразном пласте можно найти так. Фиксировав две непроницаемые параллельные границы пласта, мы отображаем зеркально сток-скважину бесчисленное множество раз относительно прямолинейных границ и бесконечного множества прямых, им параллельных, проведенных от них на расстояниях h, $2h$, $3h$ и т.д. В точках-отображениях помещены равнодебитные стоки; фильтрационное поле в данном полосообразном пласте будет таким, каким оно поддерживается в полосе одного из стоков, ограниченной двумя соседними нейтральными линиями фильтрационного поля бесконечной прямолинейной цепочки стоков.

Если между двумя параллельными непроницаемыми сбросами действует несколько скважин, образующих прямолинейную цепочку, перпендикулярную линии сбросов, — фильтрационное поле может быть составлено из стольких отдельных фильтрационных полос, соответствующих скважинам из бесконечной цепочки стоков, сколько скважин в цепочке.

Исследование влияния сбросов на производительность скважин было проведено с помощью отображения стоков стоками В. Н. Щелкачевым. Он нашел, что если нарушить симметрию и расположить скважину в полосообразном пласте между двумя прямолинейными параллельными сбросами ближе к одной из границ, чем к другой, то дебит ее мало изменился бы от такой перестановки. Это положение доказано для случая, в котором, кроме двух параллельных сбросов, существует третий, ограничивающий приток жидкости к скважине еще и с третьей стороны, причем третья линия сброса перпендикулярна к двум параллельным сбросам. Изменение положения скважин по отношению к этой третьей границе также мало отразится на дебите скважины.

Выводы, относящиеся к работе эксплуатационных скважин в пласте, ограниченном непроницаемыми сбросами, можно распространить и на случай, когда в пласте действуют не эксплуатационные, а нагнетательные скважины.

Как мы видели, в процессе работы эксплуатационных скважин при существовании сбросов решать задачу приходится используя зеркальные отображения стоков стоками. При действии же нагнетательных скважин в пласте, перебитом сбросами, задача решается зеркальным отображением источников источниками.

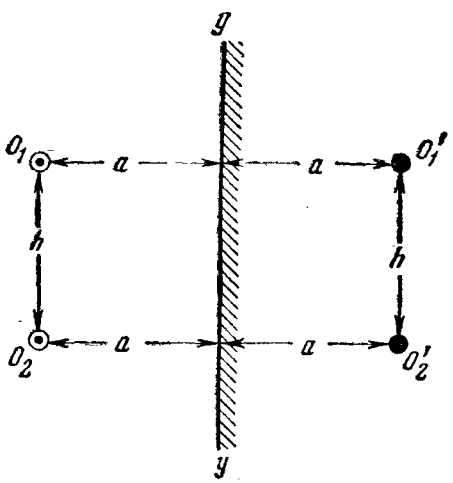


Рис. 57. Расположение двух скважин в пласте с прямолинейным сбросом.

Некоторые особенности взаимодействия скважин в пласте, ограниченном сбросами. Допустим, что в пласте, ограниченном прямолинейным непроницаемым сбросом yy, действуют две равнодебитные эксплуатационные (или нагнетательные) скважины O_1 и O_2. Расстояние между ними равно h, расстояние между скважиной и сбросом равно a (рис. 57).

Отображаем зеркально каждый сток относительно прямой yy и в точках-отображениях O_1' и O_2' помещаем стоки с тем же дебитом, что и дебиты стоков O_1 и O_2. Найдя далее обычным порядком потенциальную функцию φ и воспользовавшись граничными условиями, получим формулу дебита скважины. Вывода и самой формулы приводить не будем, но покажем результаты подсчетов, выполненных по этой формуле.

В табл. 14 приведены числовые значения коэффициента суммарного взаимодействия U, равного отношению суммарного дебита $2M'$ к дебиту одиночной скважины M в условиях сброса. Взяты данные

Таблица 14

Значения коэффициента суммарного взаимодействия двух скважин в пласте с прямолинейным сбросом в зависимости от a и h

a, м	Коэффициент суммарного взаимодействия U	
	$h=100$ м	$h=200$ м
10	1,317	1,388
50	1,291 *	1,358
100	1,295	1,347 *
200	1,308	1,355
1000	1,357	1,408

* Минимальная величина.

U для разных расстояний скважин a от сброса при двух значениях интервала между скважинами: $h = 100$ и 200 м.

Расстояние между скважинами и контуром питания принято $r_к = 10$ км, радиус скважин $r_с = 10$ см.

Табл. 14 характеризует особенность взаимодействия двух скважин, подверженных влиянию сброса: *наибольший эффект взаимодействия будет на некотором определенном* (для данного интервала h) *расстоянии скважин от сброса.*

Так, среди указанных в табл. 14 значений U наименьшее будет при $a = 50$ м (если $h = 100$ м) и при $a = 100$ м (если $h = 200$ м). С увеличением расстояния a влияние скважин друг на друга ослабляется. (Вспомним, что контур питания ослабляет влияние скважин друг на друга, наоборот, по мере приближения скважин к контуру.)

Отметим особенность взаимодействия скважин батареи при условии, что полосообразный пласт ограничен сбросами с трех сторон: он простирается между двумя параллельными непроницаемыми сбросами и замкнут перпендикулярным к ним третьим сбросом. В. Н. Щелкачев, исследовавший случай трехстороннего сбросового ограничения пласта, приходит к заключению, что добавление новых скважин к батарее действующих мало влияет на увеличение суммарного дебита первых ранее введенных в эксплуатацию скважин.

Исследование фильтрационных потоков и применение отображений стоков-источников приводит к следующему общему заключению. При отображении относительно открытой границы пласта (контура питания или контура утечки) реальный сток переводится в фиктивный источник, а реальный источник — в фиктивный сток. При отображении относительно закрытой границы пласта (непроницаемого сброса) реальные стоки и источники переводятся в фиктивные точки того же наименования. В рассмотренных нами случаях открытым контуром служит эквипотенциальная линия (изобара), закрытым контуром — линия тока.

§ 11. Движение контура раздела двух несжимаемых жидкостей с одинаковыми параметрами (контура отмеченных частиц). Случай одной скважины. Относительная обводненность скважины

Отметим в фильтрационном поле, поддерживаемом некоторой группой скважин, какую-либо кривую. Последнюю можно рассматривать как геометрическое место частиц жидкости, совпадающих в данный момент времени t_0 с отмеченной кривой. Проследим за тем, какое место займет каждая из отмеченных частиц нашей кривой после определенного промежутка времени $\Delta t = t - t_0$, (где t — момент времени, соответствующий концу промежутка Δt). Положения частиц жидкости в момент времени t соединим плавной кривой. Выполнив такие построения для ряда моментов через последовательные промежутки времени, получим семейство кривых, дающее представление о продвижении в плоскости потока некоторой кривой отмеченных частиц. Эту перемещающуюся и деформирующуюся в процессе движения кривую назовем *контуром отмеченных частиц*. Его последовательные положения образуют *семейство синхронных контуров*.

По Г. С. Салехову, два контура будут синхронными, если частицы жидкости, лежавшие на одном из них, одновременно достигают другого. Понятие синхронных контуров было введено В. П. Яковлевым, который называл так кривые, обладающие тем свойством, что частицы жидкости, находившиеся на каждой из них, одновременно подходят к скважине.

Пусть в плоском фильтрационном потоке несжимаемой жидкости имеются две ее разновидности, причем одна вытесняет другую при условии, что области обеих разновидностей остаются локализованными. Допустим, например, что нефть вытесняется водой. Если пренебречь различием в вязкостях и плотностях нефти и воды, можно в первом приближении считать, что весь пласт занят однородной несжимаемой жидкостью. При такой постановке задачи стягивающийся к скважинам контур раздела воды и нефти — *контур нефтеносности* — будет контуром отмеченных частиц.

Характер движения контура нефтеносности в данном нефтяном месторождении определяется геологическими и гидродинамическими условиями пласта, порядком размещения скважин и их технологическим режимом.

Все задачи, связанные с изучением перемещения контура нефтеносности для целого нефтяного месторождения, а не только вблизи самой скважины, Г. С. Салехов разбивает на две основные — прямую и обратную. *Прямую задачу* он называет задачей *прослеживания продвижения контура нефтеносности*. Целью прямой задачи является изучение закона стягивания контура нефтеносности по заданному характеру размещения эксплуатационных и нагнетательных скважин и режиму их работы. *Обратную задачу* он называет задачей *управления продвижением контура нефтеносности*. В этой задаче

следует определить такие оптимальные способы размещения эксплуатационных и нагнетательных скважин в данном месторождении и такой режим их работы, которые бы с учетом экономических показателей наилучшим образом обеспечили бы желаемый закон стягивания контура нефтеносности.

В настоящей главе мы рассмотрим прямую задачу движения контура нефтеносности при упрощающих условиях, полагая физические параметры воды и нефти (например, вязкость и плотность) везде одинаковыми и постоянными.

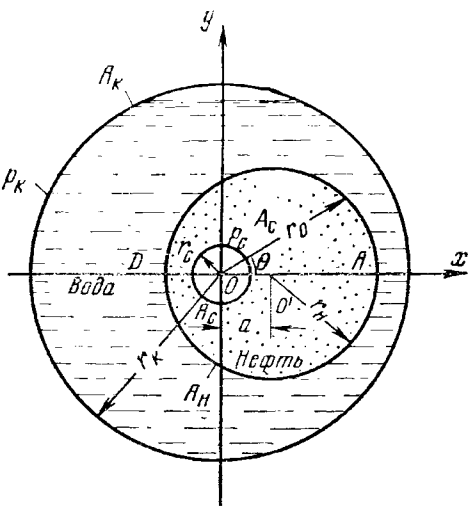


Рис. 58. Расположение скважин эксцентрично относительно начального контура нефтеносности.

Аналитические исследования в аспекте прямой и обратной задачи продвижения контура нефтеносности к одной скважине и к батареям скважин были впервые предприняты при указанных упрощающих условиях в СССР В. Н. Щелкачевым, в США — М. Маскетом. Экспериментальные исследования, связанные с этими задачами, производились на электрических моделях Р. Д. Виковым, Х. Г. Ботсетом и М. Маскетом, П. М. Белашом и др.

Рассмотрим случай стягивания контура нефтеносности только к одной эксплуатационной скважине.

Решить прямую задачу продвижения контура нефтеносности, т.е. задачу прослеживания, это значит найти *уравнение контура нефтеносности*, которое в общем виде можно представить так:

$$f(x,\ y,\ t) = 0, \qquad \text{(VII.95)}$$

где x и y — декартовы координаты точек контура; t — время.

В полярных координатах уравнение контура нефтеносности имеет вид:

$$f(r,\ \theta,\ t) = 0, \qquad \text{(VII.96)}$$

где r и θ — полярные координаты точек контура.

Предположим, что скважина O радиусом $r_с$ расположена внутри нефтяной залежи, имеющей форму круга радиусом $r_н$ (рис. 58).

Расстояние между скважиной и контуром питания пласта равно $r_к$.

Скважина заложена эксцентрично по отношению к первоначальному контуру нефтеносности. Расстояние между центром скважины O и центром круговой залежи O' обозначим через a.

Взяв начало декартовой системы координат в центре скважины и направив оси координат так, как показано на чертеже, напишем уравнение контура нефтеносности в начальный момент времени:

$$(x-a)^2+y^2=r_{\text{н}}^2. \qquad \text{(VII.97)}$$

Если r_0 — начальное расстояние точек контура нефтеносности от скважины, то имеем:

$$x=r_0\cos\theta; \quad y=r_0\sin\theta. \qquad \text{(VII.98)}$$

Допустим, что поток жидкости к скважине плоско-радиальный. При таком допущении закон движения частицы жидкости по прямолинейной радиальной траектории можно получить непосредственно из формулы (IV.57), если принять в ней, что $A=2\pi b$, $j=1$. Из формулы (IV.57) имеем:

$$r^2=r_0^2-\frac{Q}{\pi bm}t. \qquad \text{(VII.99)}$$

Подставляя значения x и y из (VII.98) в уравнение (VII.97) и решая его относительно r_0, найдем, что

$$r_0=a\cos\theta+\sqrt{r_{\text{н}}^2-a^2\sin^2\theta}. \qquad \text{(VII.100)}$$

Это значение r_0 подставим в (VII.99) и выразим закон движения стягивающегося контура нефтеносности в следующем виде:

$$r^2=r_{\text{н}}^2+a^2\cos 2\theta+2a\cos\theta\sqrt{r_{\text{н}}^2-a^2\sin^2\theta}-\frac{Q}{\pi mb}t. \qquad \text{(VII.101)}$$

На рис. 59 представлены последовательные положения стягивающегося контура нефтеносности, начальная форма которого — окружность. Построение выполнено по формуле (VII.101) при таких численных значениях величин: $r_{\text{н}}=150$ м, $a=50$ м, $r_{\text{с}}=10$ см, $Q=47{,}2$ м^3/сутки, $b=10$ см, $m=0{,}15$. Кривая *4* соответствует началу обводнения скважины. Видно постепенное образование «языка обводнения», развившегося по причине несимметричного расположения скважины по отношению к начальному контуру нефтеносности.

Когда наиболее удаленная частица контура нефтеносности A подойдет к скважине, наступит полное ее обводнение. Подсчеты показывают, что промежуток времени до полного обводнения скважины равен в данном случае 4000 суток.

Проводя дальнейшие исследования, В. Н. Щелкачев рассмотрел задачу о стягивании к скважине в плоско-радиальном потоке контура нефтеносности, имевшего первоначально произвольную форму, которой отвечает уравнение в полярных координатах такого вида:

$$r_0=f_0(\theta) \qquad \text{(VII.102)}$$

или в безразмерной форме

$$\frac{r_0}{L}=f_1(\theta), \qquad \text{(VII.103)}$$

где L — расстояние от скважины до ближайшей точки начального контура нефтеносности. Полагая, что $r_c \ll r_0$, определим время прорыва t воды в скважину из равенства (VII.99), если будем считать, что $r_c \approx 0$, $r_0 = L$, $t = t_{\overline{n}}$:

$$t_{\overline{n}} = \frac{\pi b m}{Q} L^2. \qquad \text{(VII.104)}$$

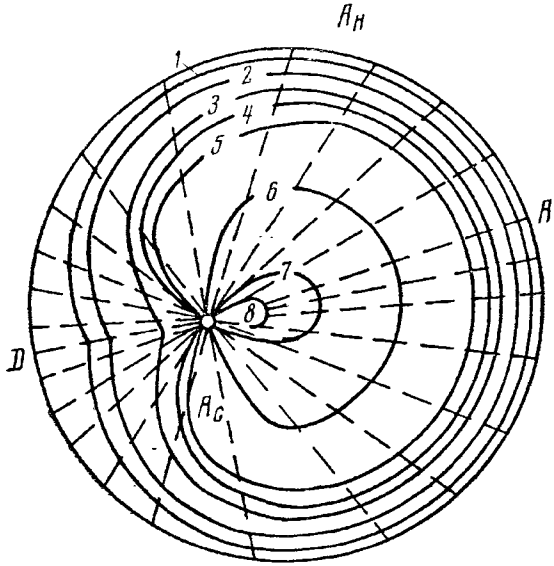


Рис. 59. Положения стягивающегося контура нефтеносности к скважине A_c (по В. Н. Щелкачеву).

Найдя из (VII.104) выражение $Q/\pi b m$, подставим его в уравнение (VII.99) и, пользуясь формулой (VII.103), представим уравнение контура нефтеносности так:

$$\left(\frac{r}{L}\right)^2 = [f_1(\theta)]^2 - \frac{t}{t_{\overline{n}}} = [f_1(\theta)]^2 - \tau, \qquad \text{(VII.105)}$$

где безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{t_{\overline{n}}} = \frac{Qt}{\pi b m L^2}. \qquad \text{(VII.106)}$$

Точки первоначального произвольного контура нефтеносности будут подходить к скважине тем раньше, чем ближе к ней они находились [1]. При изучении стягивания контура нефтеносности к скважине в связи с обводнением последней разбиваем начальный контур на части, чтобы в процессе обхода каждой выделенной части поляр-

[1] Считается, что полярный радиус точки контура нефтеносности есть однозначная функция полярного угла.

ный радиус точки этого контура r_0 изменялся монотонно от наименьшего до наибольшего значений. Полярную ось направим через ближайшую к скважине точку начального контура нефтеносности (рис. 60).

Поставив эти условия, мы можем определить долю контура скважины в пределах угла α, соответствующего выделенной части контура нефтеносности, обводненной к моменту времени t.

Учитывая, что для точки контура нефтеносности, подошедшей к скважине, можно считать $r = r_c \approx 0$, получим для этой точки зависимость между временем и углом с помощью уравнения (VII.105):

$$\frac{t}{t_n} = \tau = [f_1(\theta)]^2. \qquad \text{(VII.107)}$$

Можно попытаться решить уравнение (VII.107) относительно угла θ, чтобы выразить его явно в зависимости от t или τ:

$$\theta = f_2\left(\frac{t}{t_n}\right) = f_2(\tau). \qquad \text{(VII.108)}$$

Когда частица жидкости M, принадлежащая контуру нефтеносности и движущаяся по прямой, определяемой углом $\theta = \text{const}$, достигает скважины, контур скважины оказывается обводненным внутри всего угла θ — текущего угла обводнения. Формула (VII.108) позволяет найти относительную обводненность скважины в каждый данный момент времени.

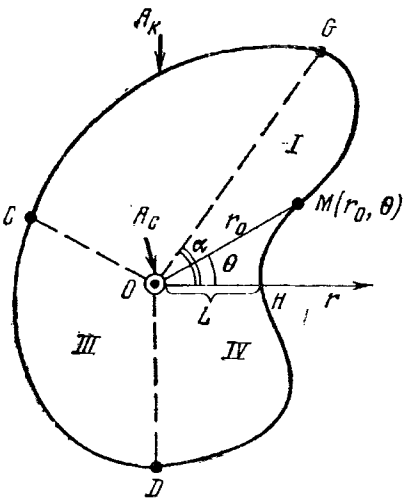


Рис. 60. Начальный контур нефтеносности произвольной формы (A_c скважина).

В самом деле отношение частичного объемного дебита скважины Q_1, соответствующего притоку жидкости через ее контур только из области пласта, определяемой углом α, к полному объемному дебиту скважины Q, можно вычислить так:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\alpha}{2\pi}. \qquad \text{(VII.109)}$$

Относительная же обводненность контура скважины в области угла α определится из следующего равенства:

$$\frac{Q_1^{(в)}}{Q_1} = \frac{\theta}{\alpha}, \qquad \text{(VII.110)}$$

где $Q_1^{(в)}$ — частичный дебит воды, соответствующий ее притоку к скважине из области угла α.

Чтобы найти относительную обводненность скважины в момент времени t, подставим значение θ из (VII.110) в уравнение (VII.108):

$$\frac{Q_1^{(в)}}{Q_1} = \frac{f_2(\tau)}{\alpha}. \qquad \text{(VII.111)}$$

Подчеркнем, что относительную обводненность $\frac{Q_1^{(в)}}{Q_1}$, определяемую по формуле (VII.111), можно найти при условии, что известно уравнение начального контура нефтеносности.

Можно решить и обратную задачу, т. е. задачу определения формы и положения начального контура нефтеносности, соответствующего наперед заданному закону обводнения скважины. Поскольку решение этой задачи представляет в основном чисто теоретический интерес, мы на ней останавливаться не будем.

Используя указанный выше прием расчета обводненности скважины, К. Н. Джалилов исследовал процесс обводнения в случаях, когда первоначально контур нефтеносности имеет прямолинейную и круговую формы. На основании проведенных исследований можно заключить, что обводненность скважины возрастает интенсивно сразу после начала ее обводнения, затем темп возрастания обводненности скважины начинает постепенно ослабевать. Для кругового контура нефтеносности темп возрастания обводненности скважины вновь начинает усиливаться перед ее полным обводнением. Для начального прямолинейного контура нефтеносности темп обводненности непрерывно убывает, приближаясь к пределу, при котором скважина обводнена на 50%, а контур занимает предельное положение — прямой, параллельной начальному контуру.

К. Н. Джалиловым решались и другие задачи обводнения скважин; например, им выяснились особенности обводнения скважины в наклонном пласте, в пласте с неоднородной проницаемостью. Закономерностям обводнения скважин посвящены работы Н. Н. Барановской.

§ 12. О влиянии радиуса скважины на ее производительность

Зависимость дебита скважины от ее радиуса попытаемся установить сначала на примере ее одиночной работы, а затем — при взаимодействии с другими скважинами.

Чтобы установить зависимость дебита одиночной скважины от ее радиуса, надо обратиться к формуле (IV.32) и применить ее к случаям, в которых одной из границ пласта служит стенка или забой скважины. Все такие случаи ограничиваются радиальными потоками, сходящимися или расходящимися. Для радиальных потоков величина j в формуле (IV.32) может иметь значение 1 или 2. Формула (IV.35) справедлива для плоско-радиального потока по закону фильтрации Дарси ($j = 1$).

Поскольку возможны нарушения закона Дарси, следует рассмотреть влияние радиуса скважины на дебит и при нелинейном законе фильтрации. Определим дебит в двух крайних случаях, в одном из которых фильтрация отвечает закону Дарси, в другом — закону Краснопольского.

Сравним дебит двух скважин, работающих в совершенно одинаковых условиях, но отличающихся друг от друга радиусами. Пусть у одной из них радиус равен r_c, у другой $r_c' = xr_c$, где x — любое положительное число.

Дебит первой скважины обозначим через M, дебит второй — через M'. Найдя предельные значения дебитов M и M' по формулам (IV.32), (IV.35) и (IV.41), вычислим отношение M'/M.

Пренебрегая в формуле (IV.32) величиной $r_к^{-1}$, а в формуле (IV.41) величиной $r_к^{-3}$, получим формулы для вычисления отношения M'/M, приведенные в табл. 15 ($r_к$ значительно больше $r_с$).

Таблица 15

Формулы для предельных значений отношения $\frac{M'}{M}$ при радиальном потоке любой жидкости

Закон фильтрации	Тип потока	
	плоско-радиальный ($j=1$)	сферически-радиальный ($j=2$)
Дарси	$\frac{M'}{M}=\frac{\ln\frac{r_к}{r_с}}{\ln\frac{r_к}{r_с}-\ln x}$	$\frac{M'}{M}=x$
Краснопольского	$\frac{M'}{M}=\sqrt{x}$	$\frac{M'}{M}=\sqrt{x^3}$

Численные значения отношения M'/M при различных x, подсчитанные по формулам табл. 15, показаны в табл. 16.

Таблица 16

Зависимость отношения $(M'/M)\cdot 100\%$ от величины x, показывающей во сколько раз радиус одной скважины отличается от радиуса другой (в %)

x	Плоско-радиальный поток			Сферически-радиальный поток	
	закон Дарси		Закон Краснопольского	Закон Дарси	Закон Краснопольского
	при $r_к/r_с=10^6$	при $r_к/r_с=10^4$			
0,01	75	67	10	1	1
0,1	86	80	32	10	3
0,5	95	93	71	50	35
1	100	100	100	100	100
2	105	108	141	200	283
10	120	133	320	1000	3163

Как видно из табл. 16, при сохранении закона фильтрации Дарси в плоско-радиальном потоке влияние радиуса скважины на дебит *невелико*: чтобы дебит некоторой скважины превышал дебит другой

скважины на $20 \div 33\%$, надо чтобы радиус этой другой скважины был больше радиуса первой скважины в 10 раз ($x = 10$). Однако если фильтрация происходит по закону Краснопольского, влияние радиуса скважины на дебит усиливается. Очевидно, что и *при всяком нарушении закона Дарси в пласте увеличивается влияние радиуса скважины на дебит.*

Для сферически-радиального потока дебит скважины в большей степени зависит от ее радиуса, особенно при нелинейном законе фильтрации.

Продолжая анализировать полученные результаты, можно высказать такое заключение: расширение забоя скважины способствует увеличению ее производительности. При торпедировании забоя, гидравлическом разрыве пласта и других способах воздействия на призабойную область пласта образуются и расширяются трещины в породах, примыкающих к скважине. Процессы образования новых и расширения имевшихся трещин способствуют нарушению закона Дарси в призабойной области пласта и, следовательно, усилению влияния радиуса скважины на приток к ней жидкости.

Поставим вопрос: какая связь между взаимодействием скважин и влиянием их радиуса на дебит?

Для ответа на него сравним дебиты скважин кольцевой эксплуатационной батареи в двух случаях: 1) скважины имеют радиус $r_с$ и 2) скважины имеют радиус $2r_с$. Отношение M_2' к M_1' найдем с помощью формулы (VII.41):

$$\frac{M_2'}{M_1'} = \frac{\ln \dfrac{r_к^n}{na^{n-1}r_с}}{\ln \dfrac{r_к^n}{2na^{n-1}r_с}}. \qquad \text{(VII.112)}$$

Кроме того, сравним дебиты скважины кольцевой эксплуатационной батареи в тех же двух случаях, но при условии, что в каждом из них в центре батареи действует нагнетательная скважина с дебитом, равным дебиту батареи. Теперь дебиты обозначим так: $M_{1н}'$ и $M_{2н}'$. Их отношение представится в виде

$$\frac{M_{2н}'}{M_{1н}'} = \frac{\ln \left(\dfrac{a}{r_с}\right)^{n+1} - \ln n}{\ln \left(\dfrac{a}{2r_с}\right)^{n+1} - \ln n}. \qquad \text{(VII.113)}$$

Вывод формулы (VII.113) рекомендуем читателю проделать самостоятельно.

Выпишем в таблицу значения отношений M_2'/M_1' и $M_{2н}'/M_{1н}'$ при следующих данных: $r_к/a = 10^2$; $a/r_с = 10^3$. В табл. 17 содержатся эти значения для трех случаев: 1) эксплуатационная батарея имеет 2 скважины ($n = 2$); 2) $n = 4$ и 3) $n = 10$.

Из табл. 17 видно, что с увеличением числа эксплуатационных скважин кольцевой батареи влияние их радиуса на дебит уменьшается, если отсутствует нагнетание жидкости в пласт. Следовательно,

Таблица 17

Влияние радиуса скважин эксплуатационной батареи на дебит

Показатель	Число эксплуатационных скважин в батарее		
	2	4	10
Отношение дебитов M'_2/M'_1 (при отсутствии нагнетания)	1,05	1,03	$\sim 1{,}01$
Отношение $M'_{2н}/M'_{1н}$ (в условиях центрального нагнетания)	$\sim 1{,}12$	$\sim 1{,}12$	$\sim 1{,}12$

при взаимодействии эксплуатационных скважин ослабляется влияние их радиуса на производительность.

Когда в центре батареи эксплуатационных скважин действует нагнетательная скважина, влияние радиуса скважин на дебит будет больше, чем при отсутствии центрального нагнетания жидкости в пласт. Если жидкость нагнетается в пласт через центральную скважину, радиус скважин влияет на производительность больше, чем при одиночной эксплуатационной скважине. Число скважин эксплуатационной батареи в этом случае несущественно.

Приведенными здесь примерами подчеркивается тот несомненный факт, что взаимодействие эксплуатационных скважин с нагнетательными повышает влияние радиуса скважины на дебит.

Глава VIII

ОБЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРАВЛИКИ

§ 1. Уравнение неразрывности (сплошности) фильтрационного потока в прямоугольной декартовой системе координат

В предыдущих главах рассматривались установившиеся процессы фильтрации нефти, газа и их смеси в пластах. В действительности приходится встречаться наиболее часто с явлениями неустановившегося движения пластовой жидкости. При этом изменяются в зависимости от координат и времени, например, следующие параметры: плотность жидкости ρ, давление p, проекции вектора скорости фильтрации на оси координат v_x, v_y, v_z, коэффициент пористости пласта m. Задача определения этих параметров в функции x, y, z и t приводится к интегрированию некоторой системы дифференциальных уравнений.

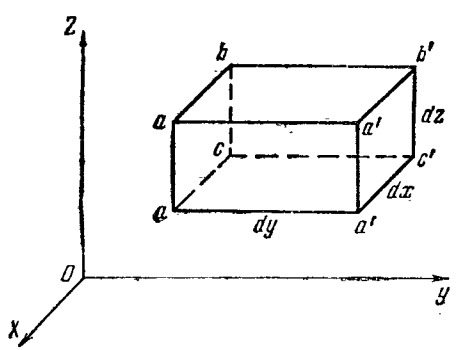


Рис. 61. Элемент фильтрующей среды с прямыми ребрами.

В § 4 главы IV отмечалось, что для установившегося одномерного потока один из указанных параметров — давление p — определяется в функции только некоторой координаты при заданных граничных условиях. Задачи неустановившегося потока требуют задания не только граничных, но и начальных условий.

Одним из уравнений системы для определения переменных параметров нефти, газа или их смеси и параметров пласта является общее дифференциальное уравнение движения сжимаемой жидкости или газа в упругой среде *уравнение неразрывности* (сплошности) фильтрационного потока. *Оно выражает баланс массы жидкости в пределах постоянного элементарного объема, выделенного внутри пористой или трещиноватой среды.*

Выделим в фильтрующей среде элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными координатным осям (рис. 61). Объем выделенного параллелепипеда обозначим через $\tau = dxdydz$.

Объем порового пространства внутри параллелепипеда $\tau_п$ можно записать так:

$$\tau_п = m\tau,$$

где m — коэффициент пористости, являющийся переменной величиной.

Найдем изменение массы жидкости внутри нашего параллелепипеда за промежуток времени dt, производя расчет двумя различными способами.

Пусть масса жидкости, заполняющей поры выделенного элемента пласта, будет равна M. Тогда

$$M = m\tau\rho, \tag{VIII.1}$$

где ρ — плотность жидкости.

Дифференцируя (VIII.1), найдем изменение массы M за промежуток времени dt:

$$\frac{\partial M}{\partial t}\,dt = \tau\frac{\partial (m\rho)}{\partial t}\,dt. \tag{VIII.2}$$

С другой стороны, положим, что через грань $bb'c'c$ параллелепипеда втекает жидкость, причем массовая скорость фильтрации равна ρv_x. За время dt через площадь грани $dydz$ протекает масса $\rho v_x\,dydzdt$. Через противоположную грань $aa'd'd$, которая отстоит от первой на расстояние dx, протекает за то же время масса

$$\rho r_x\,dy\,dz\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Накопленная в параллелепипеде за время dt масса составляет разность между массами втекающей и вытекающей жидкостей:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,\tau\,dt.$$

Аналогичные выражения получим для избыточной массы, образовавшейся в нашем элементе пористой среды за время dt при фильтрации жидкости вдоль осей Oy и Oz соответственно:

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)\,\tau\,dt,$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\,\tau\,dt.$$

Суммируя три последних выражения, найдем полную массу жидкости, накопленную в элементе пористой среды за время dt при условии, что источниками и стоками жидкости являются исключительно внешние грани выделенного параллелепипеда, т. е. что *внутри нашего элемента не существует источников и стоков*:

$$-\left[\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z}\right]\tau\,dt = -\operatorname{div}(\rho\vec{v})\,\tau\,dt, \tag{VIII.3}$$

где $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\rho v})$ — символическая запись дифференциального трехчлена в квадратных скобках левой части; (div — первые три буквы латинского divergere — «обнаруживать расхождение»); $\overrightarrow{\rho v}$ — вектор массовой скорости фильтрации.

Приравнивая выражения (VIII.2) и (VIII.3), получим *уравнение неразрывности фильтрационного потока*:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=-\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.4)}$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$ и, следовательно, уравнение (VIII.4) принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{\partial m}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.4а)}$$

Уравнение (VIII.4) — одно из дифференциальных уравнений системы, необходимой для решения задач. К числу уравнений этой системы относятся уравнения, выражающие закон фильтрации жидкости (например, закон Дарси), а также уравнения состояния жидкости и фильтрующей среды.

В уравнении неразрывности находит свое выражение закон сохранения массы.

Дифференциальный трехчлен левой части уравнения неразрывности (VIII.4) иногда обозначают так:

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\rho v})=\nabla\,(\overrightarrow{\rho v}).$$

При этом уравнение неразрывности запишется короче:

$$\nabla\,(\overrightarrow{\rho v})=-\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.5)}$$

Символ ∇ («набла») называют оператором Гамильтона.

Как и при течении жидкости в трубах или в открытых руслах, движение жидкости в фильтрующей среде может быть *установившимся* (стационарным) и *неустановившимся* (нестационарным). При установившейся фильтрации величины плотности жидкости ρ, скорости фильтрации v и пористости породы m в каждой данной точке пористой среды являются неизменными и, следовательно, не зависящими от времени.

Таким образом, при установившейся фильтрации имеем:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}=0,$$

в результате чего уравнение неразрывности (VIII.4) запишется так:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \qquad \text{(VIII.6)}$$

или

$$\nabla(\rho\vec{v}) = 0.$$

Если фильтруется несжимаемая жидкость в недеформируемом пласте, будем иметь

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad \text{(VIII.6а)}$$

§ 2. Обобщенная форма закона Дарси. Уравнения потенциального движения

Последуем идее разложения фильтрационного потока на три составляющих течения вдоль координатных осей Ox, Oy и Oz, которая была использована при выводе уравнения неразрывности (VIII.4).

В каждой точке фильтрующей среды определим значения величин составляющих вектора скорости фильтрации по координатным осям v_x, v_y и v_z. Для получения указанных значений возьмем формулу, выражающую закон фильтрации Дарси, и применим ее к каждому из трех составляющих потоков:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_y &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ v_z &= -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.7)}$$

Три последние равенства равносильны одному векторному, представляющему *закон Дарси в обобщенной форме*:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p, \qquad \text{(VIII.8)}$$

где $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации; $\operatorname{grad} p$ — вектор — градиент давления p, имеющий в данной точке направление быстрейшего возрастания величины давления p.

Иногда записывают закон Дарси, выражая $\operatorname{grad} p$ через оператор Гамильтона:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p. \qquad \text{(VIII.9)}$$

Знак минус в формулах (VIII.8) и (VIII.9) показывает, что направления вектора скорости фильтрации $\vec{v}$ и вектора — градиента давления ∇p противоположны.

Найдем проекции вектора массовой скорости фильтрации на оси координат. С этой целью умножим обе части каждого из равенств

(VIII.7) на плотность ρ. С помощью значения потенциальной функции φ получим:

$$\left.\begin{aligned} \rho v_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \rho v_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \rho v_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.10)}$$

где потенциальная функция φ определяется равенством (IV.5). Объединяя три равенства (VIII.10) в одно векторное, запишем.

$$\rho \vec{v} = -\operatorname{grad} \varphi, \qquad \text{(VIII.11)}$$

где $\rho \vec{v}$ — вектор массовой скорости фильтрации; grad φ — вектор — градиент потенциальной функции φ, направленный в сторону быстрейшего возрастания функции φ.

Подставив значения проекции вектора массовой скорости фильтрации из (VIII.10) в уравнение (VIII.4), представим последнее в новом виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial (m\rho)}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.12)}$$

При установившейся фильтрации уравнение (VIII.12) запишется так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Левые части уравнений (VIII.12) и (VIII.13) содержат дифференциальный трехчлен, называемый *лапласианом* и обозначаемый символом $\Delta\varphi$ или $\nabla^2\varphi$; при этом уравнения (VIII.12) и (VIII.13) будут иметь соответственно такой вид:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial (m\rho)}{\partial t} \quad \text{или} \quad \nabla^2\varphi = \frac{\partial (m\rho)}{\partial t}; \qquad \text{(VIII.12а)}$$

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2\varphi = 0. \qquad \text{(VIII.13а)}$$

Знаки Δ и ∇^2 символизируют оператор Лапласа. Уравнения (VIII.13) и (VIII.13а) называются *уравнениями Лапласа* относительно функции φ.

Для потока, параллельного плоскости *xOy*, левая часть уравнения (VIII.12) и (VIII.13) имеет такой вид:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \qquad \text{(VIII.14)}$$

Для плоско-радиального течения удобна полярная система координат. Если $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим из (VIII.12) и (VIII.14) следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial (m\rho)}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.15)}$$

Уравнение Лапласа для плоско-радиального потока в полярных координатах запишется так:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}=0. \qquad \text{(VIII.16)}$$

Таковы дифференциальные уравнения потенциального движения жидкости в фильтрующей среде.

Еще более общую форму закона фильтрации можно получить для случая анизотропного по проницаемости пласта.

В § 9 главы VI сказано, что в каждой точке анизотропного пласта можно построить эллипсоид (эллипс) проницаемости. Отметим здесь, что свойство анизотропии отражается и в законе фильтрации, если рассматривается тензор проницаемости.

Первыми исследователями фильтрации в анизотропных пористых средах являются В. Н. Аравин, Ф. Шаффернак, С. Вриденбург, О. Стевенс. В дальнейшем вопросы фильтрации в анизотропных средах рассматривались в работах Дж. Феррандона, А. Гизетти, А. Э. Щейдеггера и др. Для характеристики фильтрационных свойств анизотропной пористой среды был использован аффинный симметричный тензор проницаемости второго ранга. Тогда линейный закон фильтрации в анизотропном пласте можно записать в виде:

$$\vec{v}=-\frac{\vec{\vec{k}}}{\mu}\operatorname{grad} p, \qquad \text{(VIII.8а)}$$

где $\vec{\vec{k}}$ — тензор проницаемости с матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{Vmatrix}$$

Исходя из представленной выше формы записи линейного закона фильтрации можно заключить:

1) вектор скорости фильтрации $\vec{v}$ может в анизотропном пласте не совпадать по направлению с вектором — градиентом давления (grad p);

2) если за оси координат выбрать главные оси симметричного тензора проницаемости, то только в этом случае направление скорости фильтрации и вектора grad p совпадают (причем матрица тензора проницаемости имеет диагональный вид);

3) для симметричного аффинного тензора проницаемости всегда существуют три ортогональных главных направления и три главных значения (k_1, k_2, k_3).

В последнее время в ряде статей Е. С. Ромма и других аффинный симметричный тензор проницаемости был использован также для характеристики фильтрационных свойств анизотропной трещиноватой среды.

В последующих главах книги будут показаны некоторые методы решения приведенных здесь уравнений; при этом будут использоваться граничные условия, о которых говорилось в § 3 главы IV, а также соответствующие уравнения состояния жидкости.

§ 3. Уравнение неразрывности в криволинейных координатах

При решении некоторых задач подземной гидравлики удобно связывать с неподвижной фильтрующей средой систему криволинейных координат. Примером такой системы координат может служить система полярных (цилиндрических) координат, в которых представлены дифференциальные уравнения потенциального плоско-радиального потока (VIII.15) и (VIII.16).

Приведем без вывода уравнение неразрывности в криволинейных координатах:

$$\frac{\partial(\rho v_1 L_2 L_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(\rho v_2 L_1 L_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(\rho v_3 L_1 L_2)}{\partial q_3}=-L_1 L_2 L_3\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}, \qquad \text{(VIII.17)}$$

где q_1, q_2, q_3 — криволинейные координаты; v_1, v_2, v_3 — величины скоростей фильтрации вдоль касательных к соответствующим координатным линиям; L_1, L_2, L_3 — параметры Ламе, общий вид которых такой:

$$L_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}; \qquad \text{(VIII.18)}$$

x, y, z — декартовы координаты точки фильтрующей среды; i — принимает значения 1, 2, 3.

При установившейся фильтрации правая часть уравнения (VIII.17) обращается в нуль.

Остановимся на одном примере применения уравнения (VIII.17) к установившемуся течению жидкости в фильтрующей среде.

Допустим, что одно из трех семейств координатных линий совмещается с семейством линий тока, а ортогональные по отношению к этим линиям координатные поверхности совмещаются с эквипотенциальными поверхностями, нормальными к линиям тока. Пусть с линиями тока совмещаются координатные линии, уравнения семейства которых следующие:

$$q_2=\text{const}; \qquad q_3=\text{const}. \qquad \text{(VIII.19)}$$

Тогда уравнения координатных поверхностей, представляющих эквипотенциальные поверхности, ортогональные линиям тока, будут такими:

$$q_1=\text{const}. \qquad \text{(VIII.19а)}$$

В данном примере уравнение (VIII.17) запишется проще:

$$\frac{d}{dq_1}(\rho v_1 L_2 L_3)=0. \qquad \text{(VIII.20)}$$

Если движение потенциальное, вектор массовой скорости фильтрации (VIII.11) имеет величину

$$\rho v_1 = -\frac{d\varphi}{dl_1}, \qquad \text{(VIII.21)}$$

где l_1 — длина, отсчитанная вдоль линии тока.

Из гидромеханики известно, что

$$\frac{d\varphi}{dl_1} = \frac{1}{L_1}\frac{d\varphi}{dq_1}. \qquad \text{(VIII.22)}$$

Учитывая равенства (VIII.21) и (VIII.22), запишем уравнение (VIII.20) так:

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{d\varphi}{dq_1}\right) = 0. \qquad \text{(VIII.23)}$$

Уравнение (VIII.23) легко интегрируется. Введем обозначения:

$$\frac{d\varphi}{dq_1} = \varphi'; \qquad \frac{d^2\varphi}{dq_1^2} = \varphi''; \qquad \frac{L_2L_3}{L_1} = L; \qquad \frac{dL}{dq_1} = L'.$$

Пользуясь этими обозначениями, получим из (VIII.23):

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{L'}{L}. \qquad \text{(VIII.24)}$$

Первый интеграл уравнения (VIII.24):

$$-\varphi' = \frac{C}{L}, \qquad \text{(VIII.25)}$$

где C — постоянная интегрирования.

Интегрируя (VIII.25), найдем

$$\varphi = \int \frac{C}{L} dq_1 + C_1. \qquad \text{(VIII.26)}$$

Итак, по формуле (VIII.26) в рассмотренном частном случае фильтрации можно определить потенциальную функцию φ в зависимости от криволинейных координат q_1, q_2, q_3. (L выражается в функции этих координат).

Как, пользуясь формулой (VIII.26), вывести зависимость функции φ от координаты r, например, в плоско-радиальном потоке? Другими словами, как из формулы (VIII.26) вывести формулу (IV.30)?

Для ответа на вопрос возьмем цилиндрическую систему координат, в которой координатными линиями, совпадающими с линиями тока, будут лучи r, перпендикулярные оси скважины Oz и начинающиеся на этой оси. Основная плоскость потока будет плоскостью xOy.

Положение частицы определяется тремя координатами $q_1 = r$; $q_2 = \theta$; $q_3 = z$; они связаны с декартовыми координатами x, y, z следующими зависимостями:

$$x = r\cos\theta;$$

$$y = r\sin\theta;$$

$$z = z.$$

По формуле (VIII.18) находим параметры Ламе:

$$L_1 = 1; \qquad L_2 = r; \qquad L_3 = 1; \qquad L = r.$$

Из (VIII.26), заметив, что $dq_1 = dr$, получаем $\varphi = C \ln r + C_1$. Чтобы найти C, подсчитаем массовый расход жидкости dM через элемент эквипотенциальной поверхности

$$dl_2\, dl_3 = L_2 L_3\, dq_2\, dq_3;$$

$$dM = \frac{d\varphi}{dl_1} L_2 L_3\, dq_2\, dq_3.$$

Подставив сюда значение $\frac{d\varphi}{dl_1}$ из (VIII.22) и (VIII.25), суммируем и находим M:

$$M = \int\limits_{(F)}\int C\, d\theta\, dz = C \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^b dz = 2\pi b C.$$

Отсюда $C = \frac{M}{2\pi b}$.

§ 4. Уравнение неразрывности фильтрационного потока в трещиновато-пористом и трещиноватом пластах

Уравнение неразрывности фильтрационного потока *в (чисто) трещиноватом пласте* строится на основе тех же самых рассуждений, которые были приведены в предшествующих параграфах этой главы.

При построении уравнений неразрывности *для трещиновато-пористого пласта* следует учитывать характерные особенности такого пласта: во-первых, то, что трещиновато-пористый пласт моделируется системой *двух* сред с порами разных масштабов (среда 1, где роль поровых каналов играют трещины, а роль зерен — пористые блоки; среда 2 — обычная пористая среда, образующая пористые блоки); во-вторых, между отмеченными выше средами при фильтрации возникает переток жидкости из пористых блоков в трещины в пределах выделенного элементарного объема трещиновато-пористого пласта. При этом предполагается, что в каждом элементарном объеме трещиновато-пористого пласта содержится большое число пористых блоков (т. е. размер блоков мал по сравнению с характерным размером элементарного объема пласта), так что в окрестности каждой точки трещиновато-пористой среды вводятся две скорости фильтрации, два давления, относящиеся к средам 1 и 2. На основании сказанного уравнения неразрывности выписываются *для каждой из сред*, составляющих трещиновато-пористый пласт; при этом переток жидкости из пористых блоков в трещины при фильтрации в каждой из сред учитывается членом $q_{1;\ 2}$.

Таким образом, для трещиновато-пористого пласта будем иметь два уравнения неразрывности: одно для среды 1 (трещины — поровые каналы, пористые блоки — зерна); второе для среды 2 (пористая среда блоков). Заметим, что наличие перетока эквивалентно существованию внутренних источников жидкости внутри выделенного элементарного объема трещиновато-пористой среды. При этом количества жидкости, подсчитанные двумя различными способами (§ 1 этой главы), будут отличаться на величину перетока из пористых блоков в трещины. Следовательно, для жидкости, находящейся в трещинах (среда 1), будем иметь уравнение неразрывности такого вида:

$$\operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1) = -\frac{\partial (m_1\rho_1)}{\partial t} + q_{1;2}. \qquad \text{(VIII.27)}$$

Уравнение неразрывности для жидкости, находящейся в пористых блоках (среда 2), с учетом перетока из блоков в трещины внутри выделенного элемента трещиновато-пористого пласта можно представить как:

$$\operatorname{div}(\rho_2 \vec{v}_2) = -\frac{\partial (m_2\rho_2)}{\partial t} - q_{1;2}. \qquad \text{(VIII.28)}$$

В уравнениях (VIII.27) и (VIII.28) $q_{1;2}$ — масса жидкости, поступающей из пористых блоков в трещины за единицу времени на единицу объема; она имеет размерность: $ML^{-3}T^{-1}$.

Полагая, что величина $q_{1;2}$, характеризующая переток, пропорциональна разности фильтрационных потенциалов первой и второй сред, уравнения неразрывности для трещиновато-пористого пласта окончательно получаем в виде:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1) &= -\frac{\partial (m_1\rho_1)}{\partial t} + \theta(\varphi_2 - \varphi_1); \\ \operatorname{div}(\rho_2 \vec{v}_2) &= -\frac{\partial (m_2\rho_2)}{\partial t} - \theta(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VIII.29)}$$

где θ — коэффициент переноса, размерности L^{-2}.

Заметим, что некоторые авторы полагали:

$$q_{1;2} = \frac{\alpha\rho}{\mu}(p_2 - p_1).$$

Здесь α — безразмерный параметр трещиновато-пористой среды, характеризующий обмен жидкостью между системой пористых блоков и трещин.

Выражение для $q_{1;2}$ в этом случае следует из нашего:

$$q_{1;2} = \theta(\varphi_2 - \varphi_1)$$

при упрощающих предположениях относительно вязкости и плотности.

Для (чисто) трещиноватого пласта естественно считать, что $q_{1;2} = 0$ и тогда на основании (VIII.27) имеем только одно уравнение

неразрывности для жидкости в системе трещин (в пористых блоках не содержится жидкость):

$$\operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1) = -\frac{\partial (m_1 \rho_1)}{\partial t}. \qquad \text{(VIII.30)}$$

При установившейся фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте, когда во всем пласте существует только одно поле давления ($p_1 = p_2 = p$) и величины плотности жидкости ρ_1, ρ_2, скорости фильтрации $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, а также m_1 и m_2 не зависят от времени, тогда получаем:

$$\operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1) = 0; \qquad \operatorname{div}(\rho_2 \vec{v}_2) = 0. \qquad \text{(VIII.31)}$$

Для чисто трещиноватого пласта имеем:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \qquad \text{(VIII.32)}$$

Глава IX

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОБЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЛОСКОГО ПОТОКА

§ 1. Связь между плоской задачей теории фильтрации и теорией функций комплексного переменного

Круг задач, рассмотренных в главе VII, может быть значительно расширен, если к решениям применить аппарат теории функций — комплексного переменного. При этом оказывается возможным исследовать отдельные вопросы плоского потока более полно, чем позволяли средства, описанные в главе VII.

Рассмотрим связь между задачами плоского фильтрационного потока и теорией функций комплексного переменного.

Совместим с основной плоскостью течения плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Каждое комплексное число z изображается в этой плоскости точкой M (x, y) (рис. 62). Функцией комплексного переменного z будет комплексное переменное $F(z)$, если указан закон, позволяющий получить значение $F(z)$ по заданному значению z.

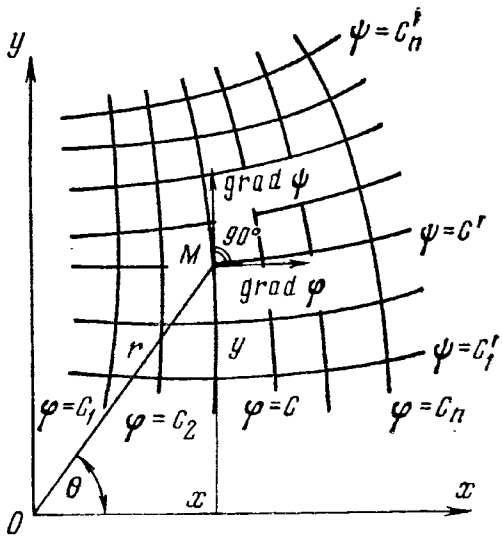


Рис. 62. Ортогональность изобар и линий тока.

Отделив в функции $F(z)$ действительную часть от мнимой, можем записать:

$$F(z) = F(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \qquad \text{(IX.1)}$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — некоторые функции действительных переменных x и y; i — мнимая единица.

Задать функцию комплексного переменного — значит задать соответствие между парами чисел (x, y) и (φ, ψ). Функция $F(z)$ является

аналитической в точке z_M, т. е. имеющей производную во всех точках некоторой окрестности z_M.

В теории функций комплексного переменного доказываются следующие положения.

1. *Каждые две кривые, из которых одна принадлежит семейству кривых, определяемых уравнением* $\varphi(x, y) = C$, *а другая — семейству кривых* $\psi(x, y) = C$ (C и C — *постоянные*), *пересекаются под прямым углом, т. е. два семейства кривых образуют ортогональную сетку в основной плоскости течения.*

2. *Функции* $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ *удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е.*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0; \qquad \text{(IX.2)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \qquad \text{(IX.3)}$$

Положения 1 и 2 справедливы, если выполняются такие условия:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad \text{(IX.4)}$$

Условия (IX.3) называются *уравнениями Коши — Римана* [1].

Покажем, что из (IX.4) вытекают сформулированные здесь положения 1 и 2. С этой целью построим кривые равного значения функции $\varphi(x, y)$ и кривые равного значения функции $\psi(x, y)$ — см. рис. 62. Докажем, что кривые этих двух семейств взаимно ортогональны.

Если обозначим через $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ направляющие косинусы нормали к кривой первого семейства в точке M, а через $\cos\alpha_1$ и $\cos\beta_1$ — направляющие косинусы нормали к кривой второго семейства в той же точке M, то условие перпендикулярности нормалей, как известно из геометрии, запишется так:

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 = 0. \qquad \text{(IX.5)}$$

Но условие (IX.5) можно выразить иначе.

Учтем, что направляющие косинусы нормалей к рассматриваемым кривым, пропорциональным соответствующим производным

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}. \qquad \text{(IX.6)}$$

Это станет ясным, если взять векторы — градиенты функций φ и ψ, направленные в сторону быстрейшего возрастания функций, следовательно,— по нормалям к соответствующим кривым равного значения их,— $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{grad}\psi$ (см. рис. 62); заметив, что производ-

---

[1] Иногда эти уравнения называют уравнениями Даламбера — Эйлера.

ные (IX.8) являются проекциями векторов — градиентов на оси координат, запишем направляющие косинусы в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{|\operatorname{grad}\varphi|}; \quad \cos\alpha_1 = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{|\operatorname{grad}\psi|}; \\ \cos\beta &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{|\operatorname{grad}\varphi|}; \quad \cos\beta_1 = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{|\operatorname{grad}\psi|}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.7)}$$

Подставляя эти значения направляющих косинусов в равенство (IX.5), получим условие ортогональности кривых в таком виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \qquad \text{(IX.8)}$$

Но условие (IX.8) вытекает непосредственно из уравнений Коши — Римана, если их почленно перемножить.

Итак, доказана взаимная ортогональность кривых двух семейств

$$\varphi(x, y) = C; \qquad \psi(x, y) = C'. \qquad \text{(IX.9)}$$

Докажем теперь, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Дифференцируя первое из уравнений (IX.4) по x, а второе по y и складывая их, найдем (IX.2). Дифференцируя же первое из уравнений (IX.4) по y, а второе по x и вычитая второе из первого, получим (IX.3).

Итак, доказано и второе положение, вытекающее непосредственно из уравнений Коши — Римана.

Представим себе, что имеем плоский фильтрационный поток любой жидкости или газа, подчиняющийся закону Дарси. В § 2 главы VIII показано, что если фильтрация протекает по закону Дарси, существует потенциальная функция φ, удовлетворяющая уравнению Лапласа. Но если существует потенциальная функция φ, то наряду с ней существует функция Ψ, также удовлетворяющая уравнению Лапласа. Зная функцию φ, всегда можно определить функцию ψ путем интегрирования уравнения (IX.6).

Как следует из равенства (IX.5) и § 2 главы VIII, потенциальная функция течения определяется зависимостью основных параметров жидкости (или газа) и пористой среды от давления. Допустим, что эта зависимость однозначная; тогда можно заключить, что в основной плоскости течения линии равного давления (изобары) совпадают с эквипотенциальными линиями $\varphi(x, y) = C$. Но кривые $\psi(x, y) = C'$, как доказано, взаимно ортогональны с эквипотенциальными линиями. Следовательно, направление векторов скорости фильтрации будет совпадать в любой данной точке M с направлением касательной к кривой семейства $\psi(x, y) = C$, т. е. кривые этого семейства можно считать линиями тока. (При установившемся движении

линии тока и траектории частиц жидкости совпадают). Функция $\psi(x, y)$ называется *функцией тока*.

Потенциальную функцию течения φ и функцию тока ψ всегда можно принять за действительную и мнимую части некоторой функции $F(z)$ комплексного переменного z (см. формулу (IX.1).

Функция $F(z)$ называется *характеристической функцией течения (комплексным потенциалом)*.

Исследование любого плоского течения жидкости или газа в пористой среде должно начинаться с определения характеристической функции, соответствующей данной задаче. Найдя ее мы можем считать задачу решенной. В самом деле, отделив в характеристической функции действительную часть от мнимой, т. е. представив ее в виде, показанном формулой (IX.1), можно определить потенциальную функцию $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$. В результате можно представить полную картину потока: принимая различные значения функции φ, получим уравнения семейства эквипотенциальных линий $\varphi(x, y) = C$, а придавая различные значения ψ, найдем уравнения семейства линий тока $\psi(x, y) = C'$. По эквипотенциальным линиям определяется распределение давлений в пласте, по линиям тока — направление движения и характер поля скоростей фильтрации.

На основании (VIII.10) и (IX.4) проекции вектора массовой скорости фильтрации на оси координат запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \rho v_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \rho v_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.10)}$$

Примечание. Функции тока может быть дан следующий смысл. Фиксируем некоторую линию тока $\psi(x, y) = 0$ и вообразим канал, ограниченный цилиндрическими поверхностями с образующими, перпендикулярными плоскости течения, проведенными через линию тока $\psi = 0$ и другую линию тока $\psi = C_1'$, и двумя плоскостями — плоскостью движения и ей параллельной, отстоящей от первой плоскости на расстояние, равное единице (рис. 63).

Рассматривая два произвольных поперечных сечения канала ω_1 и ω_2, убеждаемся, что количество массы жидкости, протекающей через эти сечения в единицу времени (расход) будет одно и то же; внутри такого канала количество массы жидкости при установившемся движении измениться не может; через боковые стенки канала, образованные линиями тока $\psi = 0$ и $\psi = C_1'$, и через плоскости движения жидкость не протекает, следовательно, втекает жидкости в единицу времени через ω_1, столько, сколько вытекает через ω_2.

Функцией тока можно назвать функцию, принимающую на линии тока $\psi(x, y) = C_1'$ значение C_1', равное массе жидкости (газа), протекающей в единицу времени через поперечное сечение канала, построенного на линиях $\psi = 0$ и $\psi = C_1'$. Функция тока опре-

делена с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора начальной линии тока $\Psi = 0$.

Массовую скорость фильтрации можно очень просто определить в любой точке пласта, найдя производную от характеристической функции по комплексному аргументу z. Чтобы это показать, составим полный дифференциал от характеристической функции $F(z)$:

$$dF(z) = d\varphi + i\,d\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + i\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + i\frac{\partial\psi}{\partial y}dy =$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy. \qquad \text{(IX.11)}$$

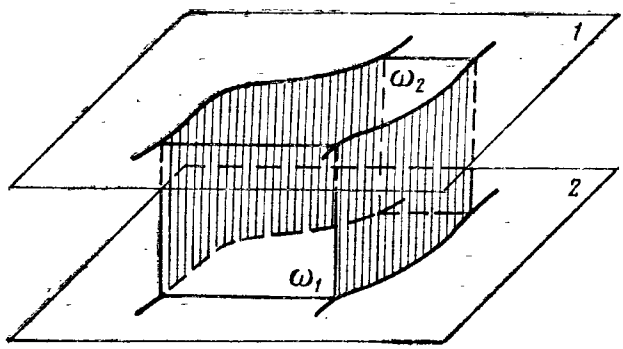


Рис. 63. Распределение потока между двумя параллельными плоскостями *1* и *2*.

Вынося во второй скобке множитель i за знак скобки и воспользовавшись затем уравнениями Коши — Римана (IX.4) получим:

$$dF = \left(\frac{d\varphi}{dx} + i\frac{d\psi}{\partial x}\right)dx + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)i\,dy =$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(dx + i\,dy) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dz,$$

т. е.

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad \text{(IX.12)}$$

Учитывая равенство (IX.10), перепишем (IX.12) так:

$$\frac{dF}{dz} = -[(\rho v_x) - i(\rho v_y)]. \qquad \text{(IX.13)}$$

Из (IX.12) и (IX.13) следует, что производная dF/dz есть комплексное число, модуль которого равен модулю массовой скорости фильтрации:

$$\left|\frac{dF}{dz}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{(-\rho v_x)^2 + (\rho v_y)^2} = |\vec{\rho v}|. \qquad \text{(IX.14)}$$

Итак, *модуль производной от характеристической функции течения равен модулю массовой скорости фильтрации.*

Характеристическая функция течения, действительно, позволяет полностью характеризовать плоский фильтрационный поток.

Для однородной несжимаемой жидкости, движущейся в однородном изотропном пласте, будем иметь линейную зависимость между потенциальной функцией φ и давлением p; на основании (IV.5) и (IV.9) запишем:

$$\varphi = \frac{\rho k}{\mu} p + C, \tag{IX.15}$$

где C — постоянная в формуле (IV.5);

$$\frac{\rho k}{\mu} = \text{const}. \tag{IX.16}$$

Нетрудно убедиться в том, что для однородной несжимаемой жидкости давление p удовлетворяет уравнению Лапласа. Для плоского фильтрационного потока, например, получим:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{IX.17}$$

Вместе с тем в случае однородной несжимаемой жидкости можно опустить множитель $\rho = \text{const}$, который входит в выражение φ — [см. формулу (IX.15)] — а следовательно, и в выражение ψ и F_z. Тогда, например, функция тока ψ будет иметь значение объемного (а не массового) расхода жидкости через поперечное сечение канала, построенного на линиях тока $\psi = 0$ и $\psi = C_1'$. Модуль же производной от характеристической функции течения будет равен скорости (а не массовой скорости) фильтрации жидкости v.

§ 2. Характеристические функции некоторых основных типов плоского потока

Как уже говорилось в предыдущем параграфе, исследование любого плоского потока должно начинаться с определения соответствующей ему характеристической функции. Однако мы начнем, как обычно принято в курсах гидродинамики, с решения обратных задач, т. е. с исследования того, какие типы плоского потока соответствуют простейшим аналитическим функциям.

Исследуем течения, заданные характеристическими функциями вида $F(z) = Az$ и $F(z) = A\ln z$.

I. Пусть характеристическая функция имеет вид:

$$F(z) = Az, \tag{IX.18}$$

где $z = x + iy$, а A — любое комплексное или действительное постоянное число. Пусть, например, $A = A_1 + iA_2$.

Отделим в $F(z)$ действительную часть от мнимой:

$$F(z) = \varphi + i\Psi = A_1 x - A_2 y + i(A_1 y + A_2 x).$$

Следовательно, потенциальная функция φ и функция тока ψ выразятся так:

$$\varphi = A_1 x - A_2 y;$$
$$\psi = A_1 y + A_2 x. \qquad \text{(IX.19)}$$

Приравнивая полученное выражение потенциальной функции φ постоянной C, найдем уравнение семейства эквипотенциальных линий:

$$A_1 x - A_2 y = C. \qquad \text{(IX.20)}$$

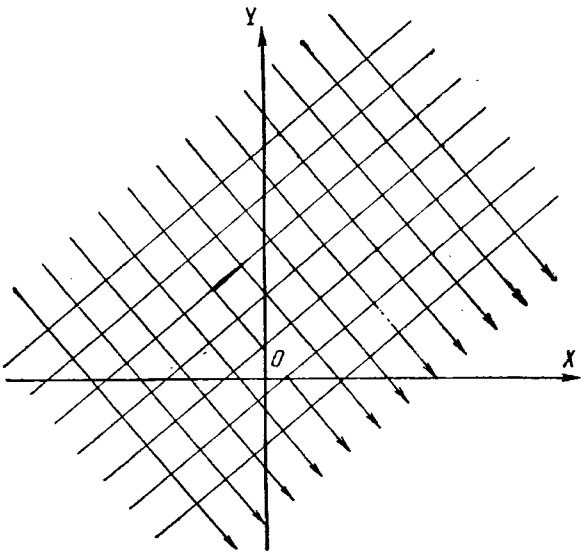


Рис. 64. Сетка, изображающая прямолинейно-параллельный поток в направлении, показанном стрелками.

Из (IX.20) следует, что эквипотенциальные линии — прямые с угловым коэффициентом A_1/A_2.

Уравнение семейства линий тока найдем, приравняв выражение для ψ (IX.19) постоянной C':

$$A_1 y + A_2 x = C' \qquad \text{(IX.21)}$$

Видим, что линии тока — прямые с угловым коэффициентом $(-A_2/A_1)$.

Таким образом, заданная характеристическая функция соответствует прямолинейно-параллельному потоку. Фильтрационное поле представлено ортогональной прямолинейной сеткой, изображенной на рис. 64.

Чтобы определить массовую скорость фильтрации, вычислим производную от $F(z)$ по z:

$$\frac{dF}{dz} = \overline{A} = A_1 + iA_2.$$

Согласно формулам (IX.13) и (IX.14), получим:

$$\rho v_x = -A_1;\ \rho v_y = A_2;$$

$$\rho v = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

Если бы $A_2 = 0$, то $\rho v = \rho v_x = -A_1$, $\rho v_y = 0$ и мы имели бы поток, параллельный оси Ox. При $A_1 = 0$ значение $\rho v = \rho v_y = A_2$; $\rho v_x = 0$, т. е. поток направлялся бы параллельно оси Oy.

II. Пусть характеристическая функция задана в виде:

$$F(z) = A \ln z, \tag{IX.22}$$

где A — некоторое действительное число.

Представим комплексный аргумент z с помощью полярных координат так (см. рис. 62):

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}, \tag{IX.23}$$

где r — радиус — вектор точки; θ — полярный угол.

Подставляя значение z из (IX.23) в (IX.22) и отделяя действительную часть от мнимой, получим:

$$F(z) = A \ln (re^{i\theta}) = A \ln r + iA\theta.$$

Значит

$$\varphi = A \ln r;\ \psi = A\theta. \tag{IX.24}$$

Приравнивая эти значения φ и Ψ постоянным, найдем уравнения эквипотенциальных линий и линий тока в следующем виде: для эквипотенциальных линий

$$r = \text{const} \tag{IX.25}$$

для линии тока

$$\theta = \text{const}. \tag{IX.26}$$

Очевидно, эквипотенциальные линии будут концентрическими окружностями с центром в начале координат (см. рис. 17). Линии тока — прямые, проходящие через начало координат.

В данном случае имеется *плоско-радиальный* (сходящийся или расходящийся) поток. Центр скважины (сток или источник) находится в начале координат.

Найдем массовую скорость фильтрации, для чего вычислим производную от функции (VII.22) по z:

$$\frac{dF}{dz} = \frac{A}{z} = \frac{A}{r} e^{-i\theta}.$$

Эта производная есть комплексное переменное, модуль которого представляет собой множитель перед $e^{-i\theta}$; следовательно, согласно (IX.15)

$$\rho v = \left|\frac{dF}{dz}\right| = \frac{A}{r}, \tag{IX.27}$$

т. е. массовая скорость фильтрации обратно пропорциональна расстоянию от скважины. (Точка $r = 0$ является особой точкой плоскости; здесь $\rho v = \infty$; и функция $F(z)$ уже не будет аналитической).

В соответствии с формулой (IV.26) для плоско-радиального потока имеем:

$$\rho v = \frac{M}{2\pi b r}, \tag{IX.28}$$

где $M = \text{const}$ — массовый дебит; b — мощность пласта.

Приравнивая правые части (IX.27) и (IX.28), определим коэффициент A:

$$A = \frac{M}{2\pi b}. \tag{IX.29}$$

Подставив это значение A в формулу (IX.22), получим окончательный результат:

$$F(z) = \frac{M}{2\pi b} \ln z, \tag{IX.30}$$

где положительный дебит M соответствует случаю стока (эксплуатационной скважине), а отрицательный — случаю источника (нагнетательной скважине).

Итак, функция (IX.30) характеризует плоско-радиальное движение жидкости или газа в однородном горизонтальном пласте неограниченной протяженности. Скважина предполагается гидродинамически совершенной.

Представим себе теперь, что характеристическая функция имеет такой вид:

$$F(z) = \frac{M}{2\pi b} \ln (z - a), \tag{IX.31}$$

где $a = a_1 + ia_2$.

Это значит, что особая точка, в которой помещается точечный сток или точечный источник, сдвинута в направлении оси Ox на расстояние a_1, а в направлении оси y на расстояние a_2 и, следовательно, центр поперечного сечения скважины находится не в начале координат, а в точке $a = a_1 + ia_2$.

Если представить комплексное переменное $z - a$ — аргумент логарифма в формуле (IX.31) — в полярных координатах, получим:

$$F(z) = \frac{M}{2\pi b} \ln (z - a) = \frac{M}{2\pi b} \ln (re^{i\theta}) = \frac{M}{2\pi b} \ln r + \frac{M}{2\pi b} i\theta, \tag{IX.32}$$

где в данном случае r — расстояние любой точки плоскости потока не до начала координат, а до особой точки $a = a_1 + ia_2$, в которой помещается сток или источник; θ — полярный угол с вершиной в этой особой точке.

В соответствии с формулами (IX.24) и (IX.32) найдем, что

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{2\pi b} \ln r; \\ \psi &= \frac{M}{2\pi b} \theta. \end{aligned}\right\} \tag{IX.33}$$

Примечание. Как показывает формула (III.16), потенциальная функция φ определяется с точностью до произвольной постоянной C. С точностью до произвольной постоянной определяется также и функция тока ψ, что отмечалось уже в примечании к § 1 настоящей главы. В формулах, выражающих φ и ψ, которые здесь приводились, например в формулах (IX.33), мы опускали произвольные постоянные. Если надо определить дебит, произвольные постоянные C следует учитывать в выражении φ.

III. Пусть в основной плоскости течения имеется *несколько точечных стоков и источников* (несколько эксплуатационных и нагнетательных скважин).

Потенциальную функцию течения, поддерживаемого всеми стоками и источниками φ, можно определить по методу суперпозиции, описанному в главе VII, как алгебраическую сумму потенциальных функций течений, поддерживаемых отдельными стоками и источниками, если бы каждый из них был единственным в пласте,— φ_j, где j — порядковый номер стока или источника. На основании первого равенства (IX.33) запишем:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{2\pi b} \ln r_j, \qquad \text{(IX.34)}$$

где M_j — массовый дебит стока или источника за номером j; r_j — расстояние любой точки плоскости потока до этого стока или источника; n — число стоков и источников.

Обоснование метода суперпозиции следует искать, исходя из линейности дифференциального уравнения, которому удовлетворяет потенциальная функция φ. Как известно из теории дифференциальных уравнений, сумма частных решений линейного уравнения, умноженных на произвольные постоянные, есть решение этого уравнения. В данном случае это будет уравнение Лапласа, например, вида (VIII.13) или (VIII.16).

В § 1 настоящей главы было показано, что существование потенциальной функции φ_j означает существование наряду с ней функции тока ψ_j, соответствующей каждому стоку и источнику. Функция ψ_j удовлетворяет уравнению Лапласа; следовательно, по отношению к функции тока можно применять метод суперпозиции (см. главу VII). Функция тока ψ для течения, поддерживаемого всеми стоками и источниками, определится так:

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{2\pi b} \theta_j. \qquad \text{(IX.35)}$$

Характеристическая функция сложного потока, согласно формулам (IX.1), (IX.34) и (IX.35), определится уравнением:

$$F(z) = \varphi + i\psi = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j + i\psi_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j}{2\pi b} (\ln r_j + i\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} F_j(z), \qquad \text{(IX.36)}$$

где $F_j(z)$ — характеристическая функция, соответствующая стоку или источнику за номером j, находящемуся в точке a_j:

$$F_j(z) = \frac{M_j}{2\pi b} \ln\left(r_j e^{i\theta_j}\right) = \frac{M_j}{2\pi b} \ln(z - a_j). \qquad \text{(IX.37)}$$

§ 3. Характеристическая функция течения при совместном действии источника и стока

В § 2 главы VII подробно исследовалось семейство изобар в случае потока от нагнетательной скважины к эксплуатационной. О линиях тока было замечено, что они образуют семейство окружностей, ортогональных изобарам. Теперь, когда читатель познакомился с методом теории функций комплексного переменного, нетрудно уточнить вопрос об особенностях семейства линий тока.

Сохраняя прежние обозначения и придерживаясь рис. 39 (см. § 2 главы VII), получим на основании формул (IX.31) и (IX.36) характеристическую функцию течения от нагнетательной скважины к эксплуатационной в таком виде:

$$F(z) = \frac{M}{2\pi b} \ln(z - a_1) - \frac{M}{2\pi b} \ln(z - a_2) = \frac{M}{2\pi b} \ln \frac{z - a_1}{z - a_2} = \qquad \text{(IX.38)}$$

$$= \frac{M}{2\pi b} \ln \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}},$$

где $z - a_1 = r_1 e^{i\theta_1}$; $z - a_2 = r_2 e^{i\theta_2}$; r_1 и r_2 — расстояния некоторой точки M до стока O_1 и источника O_2 соответственно (радиусы — векторы точки M относительно точек O_1 и O_2), θ_1 и θ_2 — соответствующие полярные углы; M — модуль массового дебита стока и источника.

Отделяя в (IX.38) действительную часть от мнимой, получим:

$$F(z) = \varphi + i\psi = \frac{M}{2\pi b} \ln \frac{r_1}{r_2} + i \frac{M}{2\pi b} (\theta_1 - \theta_2). \qquad \text{(IX.39)}$$

Из (IX.39) на основании (IX.34) и (IX.35) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{2\pi b} \ln \frac{r_1}{r_2}; \\ \psi &= \frac{M}{2\pi b} (\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.40)}$$

Из § 2 главы VII и из (IX.40) следует, что уравнение семейства изобар можно записать так:

$$\frac{r_1}{r_2} = C,$$

где C — постоянное.

Уравнение линий тока получается из второй формулы (IX.40):

$$\theta_1 - \theta_2 = C', \qquad \text{(IX.41)}$$

где C' — постоянное.

Рассмотрим уравнение (IX.41).

Выразим θ_1 и θ_2 через координаты точки $M(x, y)$ в соответствии с рис. 39.

$$\theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a_1}; \quad \theta_2 = \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a_2}.$$

Подставив значения θ_1 и θ_2 в уравнение (IX.41), получим:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x-a_1} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x-a_2} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{x-a_1} - \frac{y}{x-a_2}}{1+\frac{y^2}{(x-a_1)(x-a_2)}} = C'$$

или, учитывая, что $a_2 - a_1 = 2a$, будем иметь

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2} = C'', \qquad \text{(IX.42)}$$

где C'' — новая постоянная.

Представим уравнение (IX.42) в следующем виде:

$$x^2+y^2-(a_1+a_2)x-\frac{2a}{C''}y+a_1a_2=0. \qquad \text{(IX.43)}$$

Очевидно, уравнение (IX.43) есть также уравнение окружностей.

Для нахождения центров всех этих окружностей и их радиусов прибавим к левой части уравнения (IX.43) и одновременно отнимем величины:

$$\frac{(a_1+a_2)^2}{4}; \quad \frac{a^2}{C''^2}.$$

Уравнение (IX.43) запишется так:

$$\left(x-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{C''}\right)^2=\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2+\frac{a^2}{C''^2}=\frac{a^2}{C''^2}(C''^2+1). \qquad \text{(IX.44)}$$

Из (IX.44) видно, что центры окружностей имеют координаты $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a}{C''}\right)$. Поскольку абсцисса центров окружностей не зависит от C'', она для всех окружностей одинакова; все окружности расположены на прямой $x = \frac{a_1+a_2}{2} = a_1 + a$, т. е. на прямой, параллельной оси Oy, делящей расстояние между стоком и источником пополам. Радиус окружностей

$$R_1 = \frac{a}{C''}\sqrt{C''^2+1}.$$

Найдем точки пересечений линий тока с осью Ox. Для этого в уравнении (IX.44) положим $y = 0$. Тогда:

$$x-\frac{a_1+a_2}{2} = \pm a;$$

Отсюда абсциссы точек пересечения

$$x_1 = a_1 + 2a = a_2;$$

$$x_2 = a_1 + a - a = a_1,$$

т. е. линии тока, как и следовало ожидать, проходят через сток и источник.

Итак линии тока представляют собой *окружности, проходящие через центры обеих скважин.* Центры всех этих окружностей расположены на прямой — эквипотенциальной линии,— делящей расстояние между скважинами пополам (см. рис. 40). Как доказано в § 1 настоящей главы, окружности — линии тока ортогональны окружностям — изобарам.

§ 4. Характеристическая функция течения для кольцевой батареи скважин

Характеристическую функцию для n стоков представим в таком виде:

$$F(z) = \frac{M'}{2\pi b} \sum_{j=1}^{n} F_j(z). \qquad \text{(IX.45)}$$

Согласно формуле (IX.37), можно записать, что

$$F_j(z) = \frac{M'}{2\pi b} \sum_{j=1}^{n} \ln(z - a_j). \qquad \text{(IX.46)}$$

Здесь a_j — комплексное число, определяющее положение стока за номером j.

В соответствии с формулой (IX.23) комплексное число a_j можно представить в тригонометрической форме, заменив в (IX.23) z на a_j, r на a. Тогда формулу (IX.46) можно переписать для кольцевой батареи из n скважин в следующем виде:

$$F(z) = \frac{M'}{2\pi b} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left[z - a\left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{M'}{2\pi b} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left\{a\left[\frac{z}{a} - \left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{M'}{2\pi b} \ln\left\{a^n \prod_{j=0}^{n-1}\left[\frac{z}{a} - \left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right)\right]\right\}, \qquad \text{(IX.47)}$$

где

$$a\left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right) = a_j \quad \text{(см. рис. 45)}$$

Но из алгебры известно[1], что целая рациональная функция вида $x^n - 1$ может быть представлена так:

$$x^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1} \left[x - \left(\cos \frac{2j\pi}{n} + i \sin \frac{2j\pi}{n} \right) \right]. \qquad \text{(IX.48)}$$

Выражение, сходное с правой частью формулы (IX.48), мы имеем под знаком логарифма в (IX.47). Если в (IX.48) вместо x взять $\frac{z}{a}$, можно представить характеристическую функцию $F(z)$ (IX.47) в ином виде:

$$F(z) = \frac{M'}{2\pi b} \ln (z^n - a^n). \qquad \text{(IX.49)}$$

Согласно формулам (IX.15) и (IX.49), найдем модуль массовой скорости фильтрации $\rho \vec{v}$:

$$|\vec{\rho v}| = \left| \frac{dF}{dz} \right| = \frac{nM'}{2\pi b} \left| \frac{z^{n-1}}{z^n - a^n} \right| = \frac{nM'}{2\pi b} \left| \frac{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}}{r^n e^{in\theta} - a^n} \right| = \frac{nM'}{2\pi b} \frac{r^{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_n}, \qquad \text{(IX.50)}$$

где $z = re^{i\theta}$; r_1, r_2, ..., r_n — расстояния точки пласта от стоков O_1, O_2, ... O_n — соответственно.

В центре кольцевой батареи (см. рис. 46) $r = 0$. Из (IX.50) следует, что скорость фильтрации v здесь равна нулю. Таким образом, частица жидкости, находящаяся в точке, в которой изобара пересекает сама себя, неподвижна. Эти точки фильтрационного поля называются точками равновесия. При разработке залежей нефти в окрестностях таких точек образуются «застойные области». В условиях водонапорного режима пласта в этих застойных областях могут возникнуть «целики нефти».

Зная положения точек равновесия в пласте, можно находить рациональные приемы для своевременной ликвидации целиков нефти. Одним из таких приемов является изменение режима работы скважин, заставляющее нефть целика прийти в движение в нужном направлении.

§ 5. Подсчет времени движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока

В конце § 1 настоящей главы было сказано, что для однородной несжимаемой жидкости в выражениях характеристической функции потока $F(z)$, потенциальной функции φ и функции тока ψ можно опускать постоянный множитель ρ и вести расчеты применительно к объемному дебиту Q и скорости фильтрации v, а не к массовым дебиту M и скорости фильтрации ρv. Таким образом, например, формулы (IX.12) для проекции массовой скорости фильтрации на оси

[1] Теорема Декарта и ее следствие.

декартовых координат могут быть для несжимаемой жидкости применены к вычислению проекции скорости фильтрации на эти оси v_x и v_y:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}; \\ v_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.51)}$$

Формулу же (IX.14) можно для несжимаемой жидкости представить так:

$$\frac{dF}{dz} = -(v_x - iv_y). \qquad \text{(IX.52)}$$

Но проекции скорости движения на оси координат, как известно, равны dx/dt и dy/dt; следовательно, проекции скорости фильтрации v_x и v_y можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= m\frac{dx}{dt}; \\ v_y &= m\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.53)}$$

Исключаем из правой части первого равенства (IX.51) y, а из правой части второго равенства (IX.51) x при помощи уравнения линии тока, по которой движется частица:

$$\psi(x, y) = C', \qquad \text{(IX.54)}$$

где C' — постоянная, соответствующая данной линии тока. Приравнивая затем выражения v_x, представленные первыми формулами (IX.51) и (IX.53), разделяя переменные и интегрируя, получим уравнение движения частицы жидкости в направлении оси x:

$$t = -m\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial y}}dx. \qquad \text{(IX.54)}$$

Тем же путем найдем уравнение движения частицы в направлении оси y:

$$t = m\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}dy. \qquad \text{(IX.55)}$$

Чтобы вывести формулу времени движения частицы жидкости вдоль линии тока (IX.54), подставим значения v_x и v_y из (IX.53) в формулу (IX.52):

$$\frac{dF}{dz} = -m\frac{dx - i\,dy}{dt} = -m\frac{d(x - iy)}{dt} = -m\frac{d\bar{z}}{dt}, \qquad \text{(IX.56)}$$

где $\bar{z} = x - iy$ — сопряженное с z комплексное переменное.

Разделяя переменные в (IX.56) и интегрируя вдоль линии тока, получим формулу для подсчета времени движения частицы на длине кривой L[1]

$$t = -m \int_{L} \frac{1}{\frac{dF}{dz}} d\bar{z}. \qquad \text{(IX.57)}$$

§ 6. Стягивание контура нефтеносности к эксплуатационной кольцевой батарее

Имеется кольцевая батарея, состоящая из $n > 2$ эксплуатационных скважин, размещенных равномерно по окружности радиусом a. Контур питания удален от всех скважин на расстояние $r_к$, значительно превышающее a. Пусть первоначально контур нефтеносности представляет собой окружность, концентричную по отношению к окружности — батарее и имеющую радиус $r_н$, причем $r_н$ в несколько раз меньше $r_к$, но больше радиуса батареи a.

Для подсчета времени движения частиц контура нефтеносности по линиям тока берем формулу (IX.57); вычисляем dF/dz учитывая, что характеристическую функцию течения в данном случае можно определить по формуле (IX.49) так:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi b} \ln (z^n - a^n), \qquad \text{(IX.58)}$$

где Q — объемный дебит одной из скважин.
Значит

$$\frac{dF}{dz} = \frac{nQ}{2\pi b} \frac{z^{n-1}}{z^n - a^n}. \qquad \text{(IX.59)}$$

Величины z и $\bar{z}$ запишем в полярной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} z &= re^{i\theta}; \\ \bar{z} &= re^{-i\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.60)}$$

Тогда из (IX.59) и (IX.60) будет следовать, что

$$\frac{dF}{dz} = \frac{nQ}{2\pi b} \frac{r^{n-1} e^{i\theta(n-1)}}{r^n e^{i\theta n} - a^n}. \qquad \text{(IX.61)}$$

Условимся рассматривать движение частиц только вдоль прямых линий тока — главной и нейтральной (см. рис. 46). По всем главным линиям тока частицы контура нефтеносности движутся с одинаковой скоростью, по всем нейтральным линиям тока характер движения этих частиц также один и тот же. Поэтому достаточно найти время продвижения двух частиц контура: одной, которая движется по любой из главных линий тока, и другой, движущейся по любой из нейтральных линий.

---

[1] Формула (IX.57) выведена В. Н. Щелкачевым.

Направим полярную ось из центра батареи вдоль одной из главных линий тока и будем искать время движения частицы контура нефтеносности вдоль полярной оси.

Из всех частиц контура нефтеносности, движущихся по нейтральным линиям тока, выберем ту, которая движется по нейтральной линии, ближайшей к полярной оси.

Так как для главных и нейтральных линий тока $\theta = \text{const}$, можно на основании второй формулы (IX.60) определить $d\bar{z}$ так:

$$d\bar{z} = e^{-i\theta}\, dr. \tag{IX.62}$$

Подставляя значения dF/dz из (IX.61) и $d\bar{z}$ из (IX.62) в формулу (IX.57), получим:

$$t = -\frac{2\pi bm}{Qn} \int_{r_н}^{r'} \frac{r^n - e^{-i\theta n} a^n}{r^{n-1}}\, dr, \tag{IX.63}$$

где r' — полярный радиус частицы.

Но уравнение полярной оси записывается так: $\theta = 0$. Подставляя это значение θ в уравнение (IX.63), получим формулу для вычисления времени движения частицы контура нефтеносности по главной линии тока:

$$t = -\frac{2\pi bm}{Qn} \int_{r_н}^{r'} \frac{r^n - a^n}{r^{n-1}}\, dr. \tag{IX.64}$$

Имеем уравнение нейтральной линии тока: $\theta = \frac{\pi}{n}$. Подставим это значение θ в (IX.63) и заметим, что по известной формуле Эйлера $e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi = -1$. Уравнение движения частицы контура нефтеносности по нейтральной линии тока представится следующим образом:

$$t = -\frac{2\pi bm}{Qn} \int_{r_н}^{r'} \frac{r^n + a^n}{r^{n-1}}\, dr. \tag{IX.65}$$

Из частиц контура нефтеносности раньше всех других достигнут скважин те, которые движутся по главным линиям тока, ибо их пути — наикратчайшие. Когда частица контура, движущаяся по главной линии тока, подойдет к скважине, последняя начнет обводняться. В этот момент времени, обозначаемый нами t_n, в уравнении (IX.64) надо считать, что $r' \approx a$. Раскрывая интеграл правой части (IX.64), получим:

$$t_n = -\frac{2\pi bm}{Qn} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{a^n}{(n-2)\, r^{n-2}}\right]_{r_н}^{a}. \tag{IX.66}$$

В какой точке нейтральной линии тока будет находиться частица контура нефтеносности в момент начала обводнения скважин, т. е.

в момент времени t_n? Раскроем интеграл правой части (IX.65) и напишем это равенство для момента t_n:

$$t_n = -\frac{2\pi bm}{Qn}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{a^n}{(n-2)\,r^{n-2}}\right]_{r_н}^{r'}. \qquad \text{(IX.67)}$$

На поставленный вопрос о местоположении частицы контура нефтеносности на нейтральной линии тока в момент прорыва воды в скважины можно дать ответ, приравняв правые части формул (IX.66) и (IX.67) и решив затем полученное уравнение относительно r'. Подлежащее решению уравнение будет алгебраическим уравнением степени n:

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^n + \left\{\frac{2}{n-2}\left[2\left(\frac{a}{r_н}\right)^{n-2} - 1\right]1 - \right\}\left(\frac{r'}{a}\right)^{n-2} - \frac{2}{n-2} = 0. \qquad \text{(IX.68)}$$

Исследуя уравнение (IX.68), В. Н. Щелкачев установил, что величина r'/a возрастает с увеличением отношения $r_н/a$; следовательно, *чем больше величина радиуса первоначального контура нефтеносности, тем больше отставание точек контура нефтеносности, движущихся по нейтральной линии тока, от точек контура, движущихся по главной линии тока.*

При величине радиуса контура нефтеносности $r_н$ более, чем в два раза превышающей радиус батареи a можно пренебрегать тем членом уравнения (IX.68), который содержит множитель $a/r_н$. Тогда уравнение (IX.68) принимает более простой вид:

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^n - \frac{n}{n-2}\left(\frac{r'}{a}\right)^{n-2} - \frac{2}{n-2} = 0. \qquad \text{(IX.69)}$$

Если $n = 3$, уравнение (IX.69) сводится к кубическому уравнению, у которого левая часть раскладывается на множители. К кубическому уравнению сводится (IX.69) и при $n = 6$. Если $n = 4$, получим биквадратное уравнение, если $n = 8$ — уравнение четвертой степени.

Результаты решения уравнения (IX.69) для этих случаев приведены в табл. 18.

Таблица 18

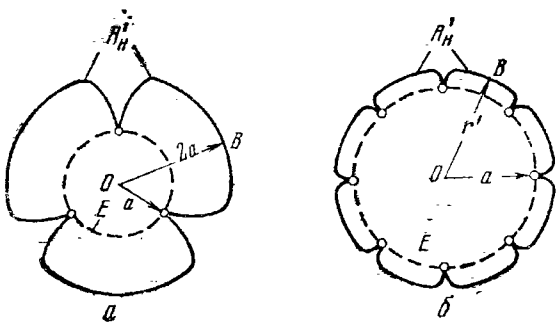
Положение наиболее удаленной частицы контура нефтеносности в момент прорыва воды в скважины

Параметр	Число скважин n			
	3	4	6	8
r'/a	2	1,55	1,30	1,20

На основании таблицы можно составить представление о форме стягивающегося контура нефтеносности в начальный момент обводнения скважин при том или ином числе скважин батареи.

На рис. 65 контуры нефтеносности вычерчены для трех и восьми скважин в момент прорыва в них воды. *Чем больше скважин в батарее*, тем меньше отставание частиц контура нефтеносности от тех, которые движутся по главной линии тока т. е. *тем равномернее стягивается контур.*

Исследования при помощи формул (IX.64) и (IX.65) позволяют утверждать, что формы контура нефтеносности, которая первоначально была в виде окружности, искажается лишь в ближайшей окрестности скважин. При анализе явления стягивания контура к скважинам кольцевой батареи допустимо применить «галереизацию», т. е. *кольцевую батарею заменить равнодебитной кольцевой галереей.*



Ри. 65. Контур нефтеносности в момент прорыва воды в скважины кольцевой батареи.

Время безводной эксплуатации батареи t_n определяется формулой (IX.66). Из этой же формулы легко определить: 1) общий объем добытой нефти за время безводной эксплуатации, 2) объем оставшейся в пласте нефти к начальному моменту обводнения скважин и 3) площадь, занятую оставшейся в пласте нефтью.

Действительно, общий объем добытой жидкости за время безводной эксплуатации скважин Qnt_n подсчитывается по формуле (IX.66) так:

$$nQt_n = \pi bm\left[r_н^2 - a^2 - \frac{2a^n}{n-2}\left(\frac{1}{a^{n-2}} - \frac{1}{r_н^{n-2}}\right)\right]. \qquad (IX.70)$$

Объем оставшейся в пласте нефти найдем следующим образом:

$$m\pi r_н^2 b - nQt_n = \pi bma^2\left\{1 - \frac{2}{n-2}\left[1 - \left(\frac{a}{r_н}\right)^{n-2}\right]\right\}. \qquad (IX.71)$$

Наконец, площадь $\omega_н$, занятая оставшейся в пласте нефтью в момент прорыва воды в скважины, определится так:

$$\omega_н = \pi r_н^2 - \frac{nQt_n}{bm} = \pi a^2\left\{1 - \frac{2}{n-2}\left[1 - \left(\frac{a}{r_н}\right)^{n-2}\right]\right\}. \qquad (IX.72)$$

Если сравнить площадь оставшейся в пласте нефти $\omega_н$ с площадью круга, ограниченного кольцевой батареей скважин πa^2, получим

Таблица 19

Относительное количество нефти, остающейся в пласте к моменту начала обводнения скважин кольцевой батареи

$a/r_н$	Число скважин n		
	4	8	∞
	Относительная неличина площади $\omega_н/\pi a^2$		
0,4	1,84	1,33	1
0,1	1,99	1,33	1

значения отношения $\omega_н/\pi a^2$, приведенные в табл. 19 для $a = 0,4\ r_н$ и $0,1 r_н$.

Табл. 19 показывает, что при большом числе скважин в батарее нефтеносная площадь $\omega_н$ не зависит от величины отношения $a/r_н$.

§ 7. Поток к эллиптическим галерее и батарее скважин в пласте с эллиптическим контуром питания

Если контур питания пласта имеет форму эллипса, иногда допустимо систему скважин моделировать софокусным эллипсом — стоком. Такие случаи могут встретиться при разработке продуктивных залежей, приуроченных, например, к брахиантиклинальной складке.

Известно, что семейство изобар — эллипсов в данном случае можно представить следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{l^2 \operatorname{ch}^2 q_1} + \frac{y^2}{l^2 \operatorname{sh}^2 q_1} = 1, \qquad \text{(IX.73)}$$

при этом $q_0 \leqslant q_1 \leqslant q_к$ (рис. 66), где $q_с$ и $q_к$ — значения q_1, соответствующие контурам стока и питания пласта; l— половина фокусного расстояния. Тогда семейство линий тока определяется уравнением гипербол

$$\frac{x^2}{l^2 \cos^2 q_2} - \frac{y^2}{l^2 \sin^2 q_2} = 1, \qquad \text{(IX.74)}$$

где

$$0 < q_2 < 2\pi.$$

Здесь

$$q_2 \neq 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \ldots$$

Возьмем систему эллиптических координат q_1 и q_2, связанных с декартовыми следующими зависимостями:

$$x = l \operatorname{ch} q_1 \cos q_2,$$

$$y = l \operatorname{sh} q_1 \sin q_2.$$

По формуле (VIII.18) находим параметры Ламе

$$L_1 = L_2 = l\sqrt{\operatorname{ch}^2 q_1 - \cos^2 q_2}; \quad L = 1.$$

Заметив, что $q_1 = \ln(\operatorname{sh} q_1 + \operatorname{ch} q_1)$, воспользуемся формулой (VIII.26) для вычисления разности значений функции φ на контурах питания и стока:

$$\varphi_к - \varphi_с = C\int_{q_с}^{q_к} dq_1 = C\ln\frac{\operatorname{sh} q_к + \operatorname{ch} q_к}{\operatorname{sh} q_с + \operatorname{ch} q_с} = C\ln\frac{a_к + b_к}{a_с + b_с}, \qquad \text{(IX.75)}$$

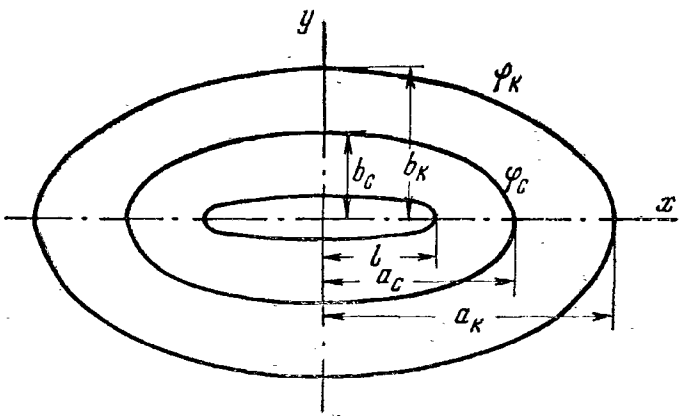


Рис. 66. Софокусные эллиптические контуры.
Контур питания с полуосями $a_к$, $b_к$; контур стока с полуосями $a_с$, $b_с$.

где полуоси эллипсов $a_к$, $b_к$, $a_с$ и $b_с$ имеют следующие значения — см. уравнение (IX.73):

$$a_к = l\operatorname{ch} q_к; \quad b_к = l\operatorname{sh} q_к;$$
$$a_с = l\operatorname{ch} q_с; \quad b_с = l\operatorname{sh} q_с.$$

Вычислим теперь по примеру того, как сделано в § 3 главы VIII, массовый дебит M:

$$M = 4bC\int_0^{\frac{\pi}{2}} dq_2 = 2\pi bC, \qquad \text{(IX.76)}$$

где b — мощность пласта.
Подставив значение C из (IX.75) в (IX.76), получим:

$$M = \frac{2\pi b(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln\frac{a_к + b_к}{a_с + b_с}}. \qquad \text{(IX.77)}$$

Положим, что в пласте имеется вертикальная поглощающая трещина длиной $2l$, высотой b. Если контуром питания служит эллипс,

столь близкий к окружности, что допустимо считать в формуле (IX.77) $a_к \approx b_к \approx r_н \gg l$; $a_с \approx l$; $b_с \ll l$, найдем из (IX.77):

$$M = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{2r_к}{l}}. \qquad \text{(IX.78)}$$

Формула (IX.78) по виду напоминает формулу (VII.29) дебита скважины в пласте с прямолинейным контуром питания; легко установить соотношения между величинами, входящими в аргументы логарифмов одной и другой формулы для того, чтобы вычисленные по ним дебиты были одинаковыми. Из формулы (IX.77) без всяких затруднений может быть выведена формула типа формулы (IV.35).

Допустим теперь, что на месте эллиптической галереи — стока, представленной уравнением вида (IX.73), в пласте эллиптической формы размещены скважины, образующие *эллиптическую батарею*. Между любыми двумя соседними скважинами батареи расстояние везде одинаково. Число скважин батареи равно n.

Суммарный дебит всех n скважин эллиптической батареи можно вычислить по формуле, которую легко получить, придерживаясь понятий величин внешнего и внутреннего фильтрационных сопротивлений. При этом расчетная формула по своему виду напоминает формулу (VII.74) для суммарного дебита скважин кольцевой батареи. Формулы для кольцевой и эллиптической батарей отличаются только величинами, соответствующими внешним фильтрационным сопротивлениям: внешнее сопротивление кольцевой батареи равно, как известно, сопротивлению при плоско-радиальном потоке; внешнее сопротивление эллиптической батареи равно сопротивлению при потоке между софокусными эллиптическими контурами.

В. Т. Мироненко, воспользовавшись формулой (IX.77) и величиной внутреннего фильтрационного сопротивления батареи (VII.73), предложил следующую формулу суммарного дебита эллиптической батареи из n скважин:

$$\sum M' = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \frac{a_к + b_к}{a_б + b_б} + \frac{1}{n} \ln \frac{h}{2\pi r_с}}, \qquad \text{(IX.79)}$$

где $a_к$ и $b_к$ — соответственно большая и малая полуоси эллипса — контура питания; $a_б$ и $b_б$ — полуоси эллипса батареи; h — расстояние между соседними скважинами; остальные обозначения прежние.

Расширяя расчетную схему, в которой используются величины внешних и внутренних фильтрационных сопротивлений, В. Т. Мироненко составил системы уравнений для определения дебитов многорядных овальных батарей и батарей скважин, расставленных по софокусным эллипсам; он предложил расчет, учитывающий заниженную проницаемость в законтурной области пласта.

Глава X

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ НЕСОВЕРШЕННАЯ СКВАЖИНА И ОСОБЕННОСТИ ЕЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ В ПЛАСТЕ ПОДОШВЕННОЙ ВОДЫ И «ВЕРХНЕГО» ГАЗА. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА

§ 1. Коэффициент совершенства скважины и ее приведенный радиус. Добавочное фильтрационное сопротивление

Гидродинамическое несовершенство скважины проявляется в том, что в призабойной области пласта с конечной мощностью отсутствует радиальность потока по причине, обусловленной конструкцией забоя или фильтра.

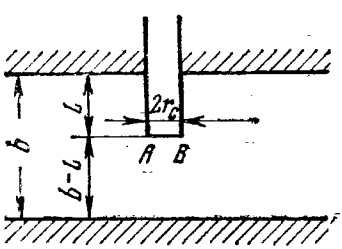


Рис. 67. Схема скважины, несовершенной по степени вскрытия пласта.

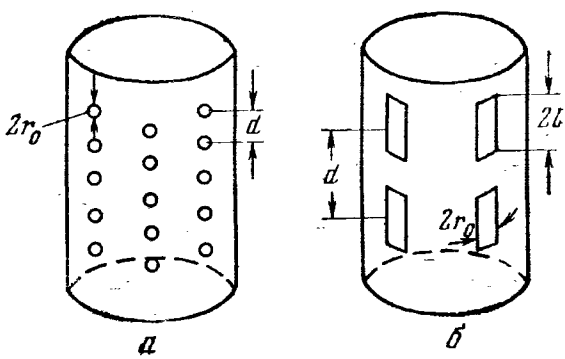


Рис. 68. Схема скважины, несовершенной по характеру вскрытия пласта.
а — элемент фильтра с круглыми отверстиями, *б* — элемент фильтра с щелевидными отверстиями.

Отметим три типа несовершенных скважин.

1. Скважина вскрывает пласт не на всю его мощность, хотя и имеет полностью открытую для притока пластовой жидкости поверхность. Такая скважина называется несовершенной по степени вскрытия пласта (рис. 67).

2. Скважина, хотя и доведена до подошвы пласта, но сообщается с пластом только через отверстия в колонне труб, в цементном кольце или в специальном фильтре. Скважина эта называется несовершенной по характеру вскрытия пласта (рис. 68).

3. Скважина несовершенна как по степени вскрытия пласта, так и по характеру вскрытия.

Задачи, относящиеся к несовершенным скважинам, более сложны, чем для совершенных скважин.

В практике разработки нефтяных и газовых месторождений гидродинамически совершенные скважины встречаются значительно реже, чем скважины несовершенные.

Производительность несовершенной скважины удобно изучать, сравнивая ее дебит M или Q с дебитом совершенной скважины M_c или Q_c, действующей в тех же условиях, что и данная несовершенная скважина. Несовершенство скважин характеризуется *коэффициентом совершенства скважины* δ:

$$\delta = \frac{M}{M_c}. \qquad (X.1)$$

Если скважина несовершенна по степени вскрытия пласта, коэффициент совершенства δ зависит от *относительного вскрытия* пласта скважиной $\bar{l}$, которое определяется так:

$$\bar{l} = \frac{l}{b}, \qquad (X.2)$$

где l — глубина погружения скважины в пласт; b — мощность пласта (см. рис. 67).

Для скважины, несовершенной по характеру вскрытия пласта, коэффициент δ зависит от числа отверстий, приходящихся на 1 м колонны, размеров и формы отверстия и др. Если пласт вскрывается при помощи стреляющих перфораторов — пулевых, беспулевых (кумулятивных) и т. п., коэффициент δ зависит еще от глубины прострела.

Фильтры в скважинах, несовершенных по характеру вскрытия пласта, схематически изображены на рис. 68.

При расчете дебитов несовершенных скважин иногда пользуются величиной *приведенного радиуса скважины* $r_{пр}$.

Приведенный радиус несовершенной скважины — это радиус такой воображаемой совершенной скважины, которая, действуя в условиях несовершенной скважины, давала бы тот же дебит, что и эта последняя.

Из определения приведенного радиуса вытекает, что можно вычислять дебит несовершенной скважины по формулам дебита совершенной скважины, если известен приведенный радиус $r_{пр}$. Используя, например, формулу (IV.35) для вычисления дебита несовершенной скважины, достаточно в формуле на место r_c подставить значение $r_{пр}$.

Итак, дебит несовершенной скважины можно определять, если известен коэффициент совершенства δ или приведенный радиус $r_{пр}$. Кроме того, должна быть известна соответствующая формула дебита совершенной скважины.

Поступление жидкости из пласта в ствол несовершенной скважины более затруднено, чем в совершенную скважину, так как поверхность фильтра первой скважины соответственно меньше фильтрующей поверхности совершенной скважины. Вследствие этого коэф-

фициент δ бывает чаще всего меньшим единицы. В некоторых же случаях (при торпедной или кумулятивной перфорации, когда глубина прострела достаточно велика) коэффициент δ может оказаться больше единицы.

Влияние несовершенства скважины на приток к ней жидкости при существовании закона фильтрации Дарси может учитываться величиной C, основываясь на аналогии между формулами фильтрации жидкости и электрического тока. Возьмем формулу (IV.35) для дебита совершенной скважины и сравним ее с формулой, выражающей закон Ома. Запишем формулу (IV.35) для скважины-стока так:

$$M_c = \frac{\varphi_к - \varphi_c}{\frac{1}{2\pi b} \ln \frac{r_к}{r_c}}. \qquad (X.3)$$

Очевидно, что с увеличением знаменателя правой части (X.3) величина дебита M_c уменьшается. Подобно тому, как знаменатель формулы закона Ома представляет сопротивление электрическому току, знаменатель формулы (X.3) можно рассматривать как сопротивление фильтрационному потоку к гидродинамически совершенной скважине.

Дебит несовершенной скважины M при условиях, когда справедлива формула (X.3) для совершенной скважины, не будет равным дебиту M_c. Относя различие в дебитах M и M_c за счет различия в фильтрационных сопротивлениях несовершенной и совершенной скважин, запишем формулу дебита несовершенной скважины M в следующем виде:

$$M = \frac{\varphi_к - \varphi_c}{\frac{1}{2\pi b}\left(\ln \frac{r_к}{r_c} + C\right)}, \qquad (X.4)$$

где $C/2\pi b$ — добавочное фильтрационное сопротивление несовершенной скважины. Добавочное сопротивление, таким образом, пропорционально C.

Учитывая формулы (X.1), (X.3) и (X.4), покажем зависимость между коэффициентом δ и величиной C:

$$\delta = \frac{\ln \frac{r_к}{r_c}}{\ln \frac{r_к}{r_c} + C}. \qquad (X.5)$$

Найдем зависимость между приведенным радиусом $r_{пр}$ и коэффициентом C для случая закона фильтрации Дарси.

Согласно определению приведенного радиуса и формуле (X.1), получим:

$$\delta = \frac{\ln \frac{r_к}{r_c}}{\ln \frac{r_к}{r_{пр}}}. \qquad (X.6)$$

Приравнивая правые части формул (X.5) и (X.6) и потенцируя полученное равенство, запишем:

$$r_{пр} = r_c e^{-C}. \qquad (X.7)$$

Иногда для пласта большой мощности (рис. 69) допустима схематизация, при которой мощность его считают неограниченной.

Предельным случаем скважины в пласте неограниченной мощности будет тот, в котором скважина вскрыла только кровлю пласта, но в него не углубилась. Если при этом забой полусферический, поток жидкости в скважине будет сферически-радиальным (см.

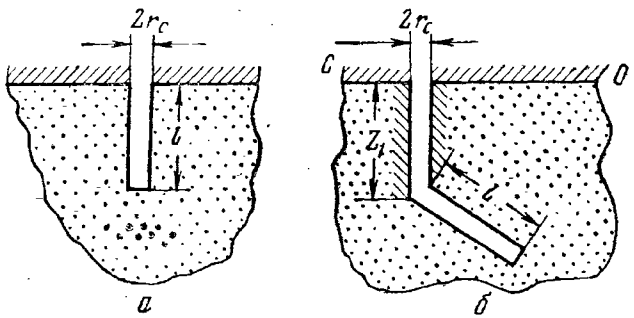


Рис. 69. Схема скважин конечной длины в пласте неограниченной мощности.
а — вертикальная; *б* — наклонная.

рис. 15). К расчетам, относящимся к такого рода потоку, применимы, следовательно, соответствующие формулы главы IV, например формула (IV.32) при $j = 2$.

Влияние различного вида несовершенства скважин на приток жидкости к ним изучалось экспериментально и аналитически многими исследователями. Результаты этих исследований мы рассмотрим в следующих параграфах настоящей главы.

§ 2. Экспериментальные исследования притока жидкости к гидродинамически несовершенной скважине

Эксперименты по изучению притока жидкости к несовершенной по степени вскрытия скважине ставились несколькими исследователями. Удобны для практического пользования кривые, полученные В. И. Шуровым путем электролитического моделирования.

В электролитическую ванну погружались два электрода, один, моделирующий внешнюю границу пласта, другой — представляющий скважину. Глубина погружения последнего в электролит характеризовала глубину проникновения скважины в пласт. Пропуская электрический ток через электролит, В. И. Шуров определял силу тока

в соответствии с законом Ома; по аналогии между электрическим током и явлением фильтрации вычислялось C для формулы (X.4). Значение величины C при различном относительном вскрытии $\bar{l}$ и в зависимости от параметра $a = \frac{b}{D}$ показано на рис. 70 (b — мощность пласта; D — диаметр скважины).

Эксперименты на электролитических моделях позволили В. И. Шурову построить серию кривых изменения величины C и для скважины, несовершенной по характеру вскрытия пласта. Моделировалась скважина, например, с круглыми перфорационными от-

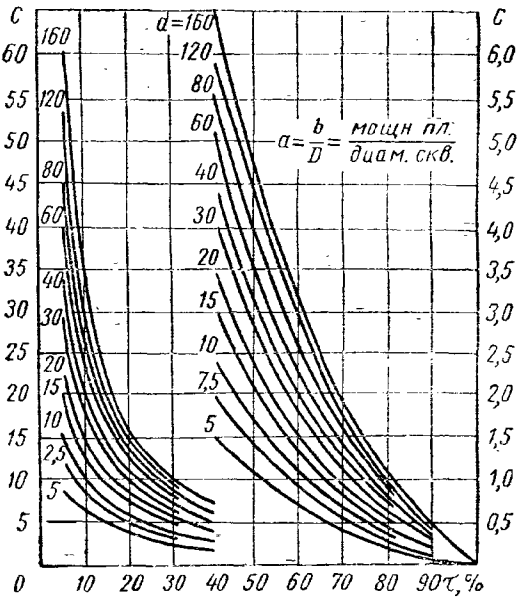


Рис. 70. Зависимость величины C от параметра a и относительного вскрытия пласта скважиной $\bar{l}$ (по В. И. Шурову).

верстиями. Изучалась зависимость C от параметров $\bar{e} = \frac{e}{D}$, $\alpha = \frac{d}{D}$ и nD, где n — число отверстий на 1 м; e — глубина перфорационного канала; D — диаметр скважины; d — диаметр отверстия.

В качестве примера приводим на рис. 71 пучок кривых Шурова для $\bar{e} = 0{,}25$. Кривые отвечают таким значениям: *1* — для $\alpha = 0{,}03$; *2* — $\alpha = 0{,}04$; *3* — $\alpha = 0{,}05$; *4* — $\alpha = 0{,}06$; *5* — $\alpha = 0{,}07$; *6* — $\alpha = 0{,}08$; *7* — $\alpha = 0{,}09$.

Электролитическое моделирование скважины, несовершенной по характеру вскрытия пласта, проводилось также И. М. Доуэллом и М. Маскетом. Как и в опытах В. И. Шурова, исследовалось влияние

на производительность скважины диаметра и длины перфорационного канала, который на модели был представлен медным проводом. Было показано, что если длина перфорационного канала превышает радиус скважины более чем в два раза, влияние изменения диаметра канала на производительность скважины очень мало.

Достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными Доуэлла и Маскета результаты исследований на электролитической модели, полученные Р. А. Ховардом и М. С. Ватсоном. Исследователи снабдили электролитическую модель платиновыми электродами.

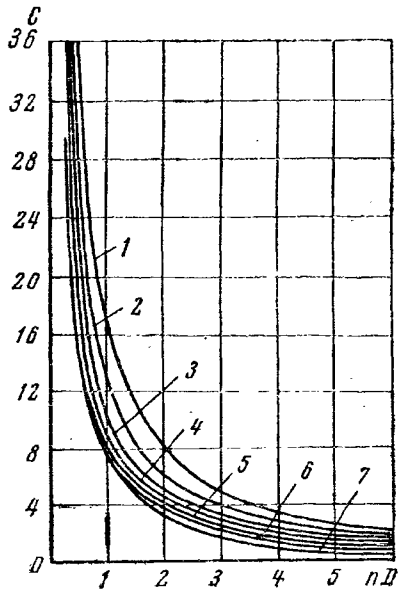


Рис. 71. Зависимость величины C от параметра ND при разных значениях α (по В. И. Шурову).

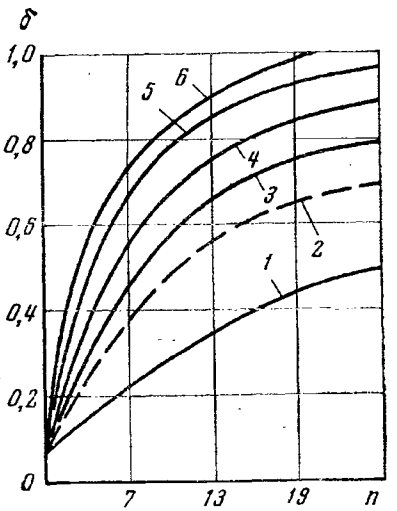


Рис. 72. Зависимость δ от плотности перфорации n (по Р. А. Ховарду и М. С. Ватсону).

Они представили графически зависимость коэффициента совершенства скважины δ от плотности перфорации (числа отверстий на 1 м) для разных глубин прострела. Построенные ими кривые изображены на рис. 72 для следующих глубин прострела: *1* — 0 мм, *2* — 12 мм; *3* — 25 мм; *4* — 55 мм; *5* — 101 мм; *6* — 150 мм.

Некоторые замечания об экспериментах Доуэлла и Маскета, Ховарда и Ватсона будут сделаны в следующем параграфе.

Хотя расположение отверстий практически не влияет на коэффициент совершенства скважины, эксперименты показывают, что при различном расположении отверстий в фильтре при равном их числе фильтрационное сопротивление потоку жидкости в скважину может отличаться от среднего на $\pm 10\%$. Это объясняется различным характером искривления потока в призабойной зоне пласта.

Рассматривая кривые рис. 72, видим, что при возрастании числа отверстий до 16—20 на 1 м дебит интенсивно возрастает. Дальнейшее увеличение плотности перфорации мало влияет на усиление притока жидкости.

Е. М. Минский и П. П. Марков изучали фильтрацию азота и воздуха через круглое перфорационное отверстие. Они исследовали на лабораторных установках с песком приток газа к скважине, несовершенной и по степени вскрытия.

В двучленной формуле

$$\Delta p_c^2 = AQ + BQ^2. \qquad (X.8)$$

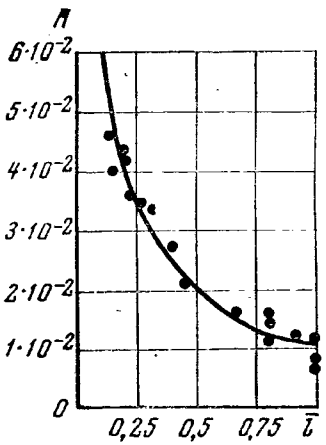


Рис. 73. Зависимость коэффициента линейного сопротивления A от $\bar{l}$ (по Е. М. Минскому и П. П. Маркову).

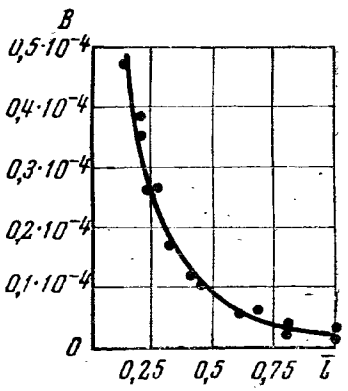


Рис. 74. Зависимость коэффициента квадратичного сопротивления B от $\bar{l}$ (по Е. М. Минскому и П. П. Маркову).

Коэффициенты A и B вычислялись по экспериментальным данным по методу наименьших квадратов — см. формулы (IV.121). Давление в корпусе модели и на забое «скважины» выражалось в кгс/см², дебит газа Q — в см³/сек.

Изменение коэффициента линейного сопротивления A в формуле (X.8) в зависимости от относительного вскрытия пласта l показано на рис. 73, зависимость коэффициента квадратичного сопротивления B от l — на рис. 74.

Из графиков рис. 73 и 74 можно заключить, что значения A_0 и B_0, соответствующие случаю совершенной скважины ($l = 1$), расположены значительно ниже всех остальных значений A и B. Было принято, что $A_0 = 1{,}12 \cdot 10^{-2}$ и $B_0 = 0{,}025 \cdot 10^{-4}$.

§ 3. Некоторые аналитические методы решения задачи о скважине в пласте неограниченной мощности

Рассмотрим действие *несовершенных скважин в неограниченном пласте.*

Для решения задач несовершенных скважин широко используется метод источников — стоков, с которым мы познакомились в главе VII. Там мы имели дело с источниками — стоками в плоскости; в задачах несовершенных скважин решения строят с помощью источников — стоков, размещаемых в трехмерном пространстве.

Представим себе пространство неограниченной пористой среды, поровый объем которой заполнен некоторой жидкостью или газом. Представим далее, что в пористой среде находится точечный сток или источник. Поток жидкости в данном случае будет сферически-радиальным: направления векторов скоростей фильтрации во всех точках среды сходятся в стоке или в источнике (см. §§3 и 4 главы IV).

Допустим, что жидкость фильтруется в соответствии с законом потенциального движения и что дебит стока (источника) равен M. Возьмем уравнение одномерного потока в виде (IV.29) и согласно принятым условиям примем $j = 2$ (так как поток сферически-радиальный). Выражение потенциальной функции из (IV.29) будет

$$\varphi = \frac{M}{4\pi r} + C, \tag{X.9}$$

где r — расстояние любой точки пласта до стока (источника).

Примечание. Величину A в формуле (IV.29) следует в данном случае принимать равной 4π, а не 2π, как указано в табл. 1; в этой таблице имеется в виду полупространство, т. е. пространство, ограниченное плоскостью — кровлей пласта, где помещается сток или источник.

Скважину конечной длины в неограниченном пористом пространстве можно моделировать отрезком прямой, который представляет собой непрерывную совокупность множества точечных стоков (источников). Если концами такого линейного стока служат точечные стоки с расстояниями их от некоторой точки пласта $r = r_1$ и $r = r_2$, потенциальная функция в этой точке определится на основании (X.9) по методу суперпозиции:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dM(r)}{r}, \tag{X.10}$$

где $dM(r)$ — дебит, приходящийся на элемент длины скважины.

Приняв условие, что интенсивность линейного стока в пространстве постоянна, т. е. что дебит, приходящийся на единицу длины этого стока, одинаков вдоль всего стока, акад. П. Я. Полубаринова-Кочина получила выражение для потенциальной функции в любой точке пласта.

Рассмотрим рис. 75; наклонная скважина имеет фильтр, не примыкающий к горизонтальной непроницаемой кровле пласта; ближайший к кровле конец фильтра удален от нее на расстояние z_1.

П. Я. Полубаринова-Кочина решала задачу о дебите такой скважины, применяя метод отображений. Отображался зеркально относительно кровли пласта весь интервал стоков, составляющих отрезок прямой, моделирующий наклонную скважину; в каждой точке отрезка — отображения помещался сток, соответствующий отображенному. По методу суперпозиции найдено распределение функции φ фильтрационного поля в пространстве, в котором действуют два линейные стока — отображаемый и отображенный, а при помощи граничных условий выведена формула наклонной скважины:

$$M = \frac{2\pi l\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln \dfrac{l}{r_с} + \sigma}, \qquad (X.11)$$

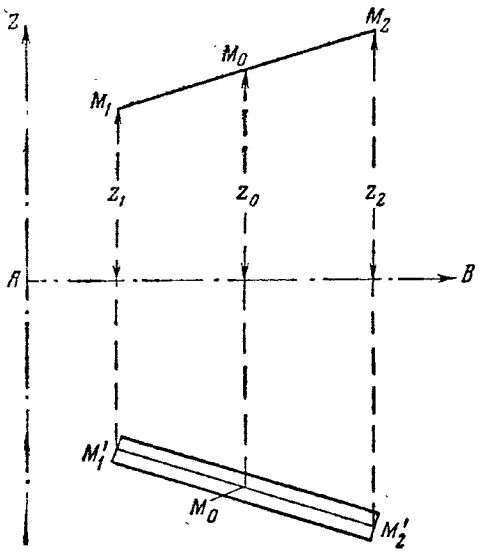


Рис. 75. Схема наклонной скважины длиной $M_1'M_2' = l$ и ее отображения M_1M_2 относительно кровли пласта AB.

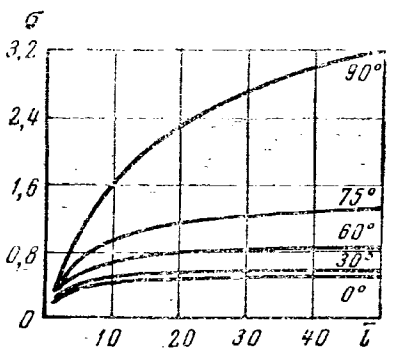


Рис. 76. Зависимость величины σ от $\bar{l}$ (по П. Я. Полубариновой-Кочиной).

где σ определяется, во-первых, расстоянием между ближайшим к горизонтальной кровле концом фильтра и этой кровлей z_1; во-вторых, углом наклона оси скважины к вертикали γ.

На рис. 76 представлена зависимость σ от безразмерной $\bar{l} = \frac{l}{z_1}$ при различных углах γ. Слагаемое σ в формуле (X.11) мало меняется для скважин, близких к вертикальным, и заметно возрастает с приближением скважины к горизонтальному положению. Если σ и γ увеличиваются, дебит скважины уменьшается.

К решению рассмотренной задачи можно применить способ, в котором используются *криволинейные координаты*. Ради упрощения будем считать, что фильтр скважины в неограниченном трехмерном фильтрующем пространстве представляется поверхностью настолько вытянутого эллипсоида вращения, что его большую ось $2a_с$ допустимо приближенно принять равной фокусному расстоянию длиной $2l$. Если поверхность фильтра — эквипотенциальная, а область питания бесконечно удалена от скважины, все эллипсоиды вращения,

софокусные с эллипсоидом-скважиной, будут эквипотенциальными поверхностями; любую из них допустимо принять за поверхность питания.

Для изучения фильтрации между поверхностью фильтра скважины и поверхностью питания можно воспользоваться эллипсоидальными «вытянутыми» координатами. Пусть, например, уравнение координатной поверхности $q = \text{const}$ будет поверхностью равного давления. Зависимость между координатой q и декартовыми координатами x, y, z выражается уравнением эллипсоида вращения

$$\frac{x^2+y^2}{l^2\,\mathrm{sh}^2\,q}+\frac{z^2}{l^2\,\mathrm{ch}^2\,q}=1, \tag{X.12}$$

где $l\,\mathrm{ch}\,q = a$ и $l\,\mathrm{sh}\,q = b$ — полуоси эллипсоидов — эквипотенциальных поверхностей. Поверхность фильтра скважины и поверхность питания выделенной области представлены на рис. 77. Полуоси этих поверхностей запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} a_c &= l\,\mathrm{ch}\,q_c \approx l,\\ b_c &= l\,\mathrm{sh}\,q_c,\\ a_к &= l\,\mathrm{ch}\,q_к,\\ b_к &= l\,\mathrm{sh}\,q_к. \end{aligned}\right\} \tag{X.13}$$

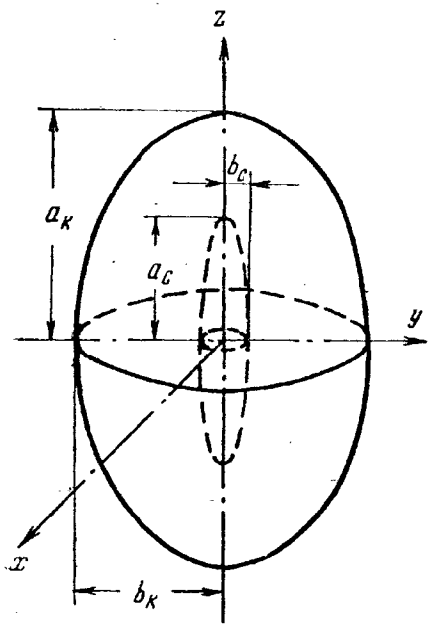


Рис. 77. Эллипсоидальная область пласта, охватывающая фильтр скважины, моделируемый эллипсоидом с полуосями a_c и b_c.

Используя граничные условия и коэффициенты Ламе в системе вытянутых эллипсоидальных координат вращения, вычислим в том порядке, какого мы придерживались в § 7 главы IX, дебит скважины:

$$M = 4\pi l\,(\varphi_к - \varphi_c) : \ln\frac{(2l+b_c)\,(a_к+b_к-l)}{b_c\,(l+a_к+b_к)}. \tag{X.14}$$

Если скважина длиной l вскрывает непроницаемую горизонтальную кровлю пласта, мощность которого допустимо считать неограниченной, возможно использовать также формулу (X.14). В этом случае следует учесть, что жидкость притекает к скважине из пласта, занимающего *полупространство* под его кровлей.

Это значит, что дебит скважины в таком пласте должен быть в два раза меньше дебита, определяемого формулой (X.14), т. е. в числителе ее правой части должен стоять не коэффициент 4, а коэффициент 2.

От формулы (X.14) легко перейти к распространенной формуле Н. К. Гиринского.

Полагаем: фильтр скважины имеет на самом деле форму цилиндра с заданным радиусом r_c. Приравнивая площадь боковой поверхности цилиндра величине площади эллипсоида, моделирующего фильтр скважины, получим $b_c = \alpha r_c$, где α — поправочный коэффициент ($\alpha > 1$). Замечая, что b_c мало в сравнении с $2l$, считаем, что можно пренебречь b_c в числителе под логарифмом формулы (X.14). Если поверхность питания выделенной области пласта значительно удалена от фильтра скважины, можно допустить, что

$$a_к \approx b_к = r_к,$$

где $r_к$ — радиус поверхности питания.

При этих условиях из (X.14) следует:

$$M = 4\pi l (\varphi_к - \varphi_c) : \ln \frac{2l\left(2 - \frac{l}{r_к}\right)}{\alpha r_c \left(2 + \frac{l}{r_к}\right)} \qquad (X.15)$$

Если $r_к \to \infty$, в пределе получим формулу Н. К. Гиринского, которая для *полубесконечного* пласта имеет вид:

$$M = \frac{2\pi l (\varphi_к - \varphi_c)}{\ln \frac{2l}{\alpha r_c}}. \qquad (X.16)$$

В знаменателе (X.16) обычно считают $2/\alpha = 1{,}6$. Но α зависит от дроби l/r_c. Величины этой зависимости приведены в табл. 20.

Различия в величине $2/\alpha$, показанные в табл. 20, мало влияют на дебит скважины.

Таблица 20

Значения поправочного коэффициента $2/\alpha$

l/r_c	α	$2/\alpha$
10	1,18	1,75
100	1,25	1,6
1000	1,27	1,575

Подобно тому как в § 11 главы VII рассматривалось движение контура отмеченных частиц в плоском потоке, можно в данном пространственном течении жидкости к скважине изучать *движение поверхности отмеченных частиц*. В начальный момент времени некоторое множество частиц образует плоскость, параллельную непроницаемой кровле пласта; пусть эта плоскость отмеченных частиц есть плоскость раздела воды и нефти. Расстояние этой плоскости от кровли пласта будет равно $b_н > l$; оно обозначает мощность нефтенасыщенной части пласта. Ниже этой плоскости — вода.

Не делая в первом приближении различия в параметрах воды и нефти, воспроизведем кривые, которые показывают количество добытой *безводной нефти* до прорыва воды в скважину, т. е. до момента поднятия поверхности раздела воды и нефти к нижней точке фильтра скважины (при различных значениях k_r/k_z) (рис. 78).

Безразмерная величина $\tau = T : \frac{mb_н^3}{Q}$, где T — полное время безводной эксплуатации; $\overline{l} = \frac{l}{b_н}$ — величина относительного вскрытия нефтеносной части пласта.

Если скважина вскрывает только непроницаемую кровлю пласта неограниченной мощности, а по своим свойствам пласт изотропный, время безводной эксплуатации можно определить по формуле акад. М. Д. Миллионщикова

$$T = \frac{2}{3}\frac{\pi m}{Q} b_н^3. \qquad (X.17)$$

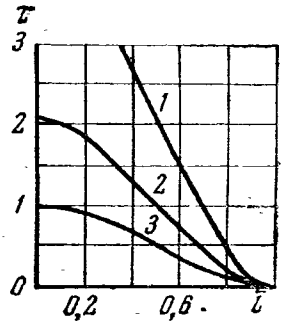


Рис. 78. Кривые для определения безразмерной величины τ в зависимости от $\overline{l}$ и k_r/k_z (по Г. С. Салехову и др.).

1 — $k_r/k_z = 2$; *2* — $k_r/k_z = 1$; *3* — $k_r/k_z = 1/2$.

Отметим, что при выводе формул (X.11), (X.14), (X.16) и (X.17) этого параграфа условия были идеализированы. Именно: пласт наделялся свойствами однородной изотропной среды, не учитывалось различие в вязкостях и плотностях воды и нефти.

Попытаемся теперь установить *влияние анизотропности пласта по проницаемости* на приток жидкости к скважине. Дело в том что проницаемость пород в горизонтальном (радиальном) направлении бывает во много раз больше проницаемости в вертикальном направлении из-за существования в пласте прослоев глины или плохо проницаемых мергелей. Для учета производительности несовершенных скважин это обстоятельство играет особенно важную роль.

Напишем формулу объемного дебита полуэллипсоидальной скважины в полубесконечном пласте с учетом различия проницаемости в двух направлениях — горизонтальном и вертикальном. Для однородной несжимаемой жидкости имеем:

$$Q = \frac{2\pi k_r l (p_к - p_с)}{\mu \ln\left(\sqrt{\frac{k_r}{k_z}}\,\frac{2l}{r_с}\right)}, \qquad (X.18)$$

где k_r и k_z — коэффициенты проницаемости в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно; остальные обозначения прежние. Здесь $r_с \ll l$ и $k_r > k_z$.

При указанных условиях полное время безводной эксплуатации скважины T можно подсчитать так:

$$T = \frac{2}{3}\frac{\pi m b_н^3}{Q}\frac{k_r}{k_н}\left(1 - \frac{l}{b_н}\right)^2\left(1 + \frac{2l}{b_н}\right). \qquad (X.19)$$

Если учесть влияние *различия в объемном весе воды и нефти*, можно рекомендовать для времени T формулу М. Маскета:

$$T = \frac{\alpha m b_н^3}{Q}\frac{k_r}{k_z} D. \qquad (X.20)$$

Здесь α — произведение коэффициента усадки нефти на коэффициент нефтеотдачи пласта; коэффициент усадки нефти равен $\frac{\gamma - \gamma_н}{\gamma_н}$, где γ — вес единицы объема нефти в пластовых условиях, $\gamma_н$ — вес единицы объема нефти на дневной поверхности; коэффициент нефтеотдачи равен $\frac{s_0 - s}{s}$, где s_0 — начальная нефтенасыщенность; s — конечная или остаточная нефтенасыщенность; D — поправочный коэффициент, зависящий от относительной глубины вскрытия нефте-

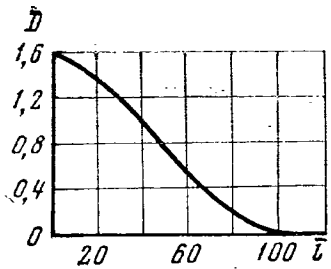


Рис. 79. График зависимости D от $\bar{l}$ (по М. Маскету).

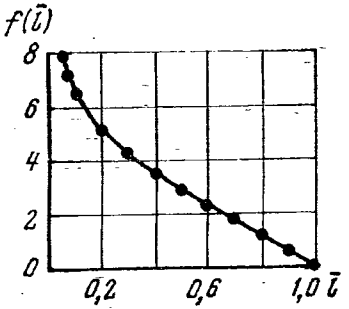


Рис. 80. График функции $f(\bar{l})$ (к расчету дебита несовершенной скважины по И. А. Чарному).

насыщенной области пласта $\bar{l} = \frac{l}{b_н}$. График D в функции $\bar{l}$ приведен на рис. 79.

Формулу (X.20) Маскет обосновал предположением, что в скважине создается такое понижение давления, которое выше критического (т. е. наименьшего, допускающего подъем воды до забоя скважины). Формула (X.20) — приближенная. Различие в вязкостях воды и нефти не учитывается. Кроме того, формула справедлива при условии, что $\frac{L}{b_н}\sqrt{\frac{k_z}{k_r}} > 3{,}5$, где $2L$ — расстояние между скважинами.

§ 4. Некоторые результаты решений задачи о несовершенной по степени вскрытия скважине в пласте конечной мощности

М. Маскет и другие исследователи применяли отображение стоков и метод суперпозиции для скважины, *несовершенной по степени вскрытия пласта конечной мощности*. М. Маскет подбирал переменные вдоль оси скважины распределения стоков и отображал стоки в кровле и в подошве пласта бесчисленное множество раз. Таким путем Маскетом была получена следующая формула:

$$M = \frac{2\pi b\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\frac{1}{2\bar{l}}\left[2\ln\frac{4b}{r_с} - f(\bar{l})\right] - \ln\frac{4b}{r_к}}, \qquad (X.21)$$

где $f(\bar{l})$ — некоторая функция относительного вскрытия пласта $\bar{l}$, которая выражается так:

$$f(\bar{l}) = \ln \frac{\Gamma(0{,}875\bar{l})\,\Gamma(0{,}125\bar{l})}{\Gamma(1-0{,}875\bar{l})\,\Gamma(1-0{,}125\bar{l})}. \qquad (X.22)$$

Символ Г обозначает гамма-функцию или интеграл Эйлера второго рода. Таблицы гамма-функции можно найти во многих математических справочниках.

На рис. 67 представлена схема несовершенной скважины в пласте мощностью b, а на рис. 80 график функции $f(\bar{l})$, которым можно пользоваться при расчетах дебита по формуле (X.21).

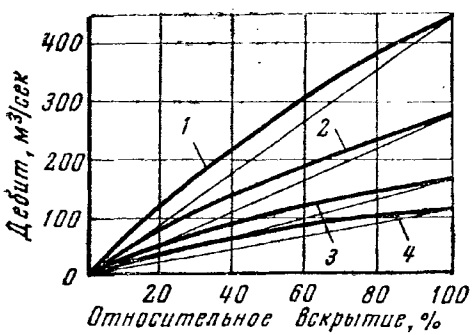


Рис. 81. Зависимость дебита несовершенной скважины от относительного вскрытия пласта при различных значениях мощности b.
Значения b в м: 1 — 61; 2 — 38; 3 — 23; 4 — 15,25.

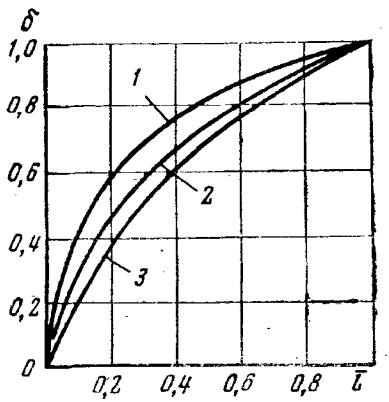


Рис. 82. Зависимость коэффициента совершенства скважины δ от $\bar{l}$ при различных значениях r_c/b.
1 — $b = 50\ r_c$; 2 — $b = 200\ r_c$; 3 — $b = 400\ r_c$.

Зависимость объемного дебита Q от относительного вскрытия пласта скважиной $\bar{l}$, найденная в соответствии с формулой (X.21) для несжимаемой жидкости, графически показана на рис. 81.

Каждая кривая на рис. 81 соответствует пласту определенной мощности b. Рядом с кривой изображена прямая, по которой можно определить дебит скважины с относительным вскрытием $\bar{l} = 1$, имеющей длину, равную глубине вскрытия пласта несовершенной скважиной в пласте данной мощности b. Таким образом, прямые линии характеризуют дебиты совершенных скважин в пластах различной мощности с плоско-радиальным потоком.

Исходными данными при вычислении дебита являлись: перепад давления $\Delta p_c = 1 \frac{кгс}{см^2}$; $\frac{k}{\mu} = 1$д/спз; радиус скважины $r_c = 0{,}075$ м; радиус внешнего контура пласта $r_к = 152{,}5$ м.

По формуле (X.21) получаем результаты, вполне удовлетворяющие практическим требованиям.

Для кривых на рис. 81 можно вместо формулы (X.21) применять формулу дебита, предложенную И. Козени:

$$M = \frac{2\pi b\bar{l}\,(\varphi_к - \varphi_с)}{\ln\frac{r_к}{r_с}}\left(1 + 7\sqrt{\frac{r_с}{2b\bar{l}}}\cos\frac{\pi\bar{l}}{2}\right). \qquad (X.23)$$

Рассмотрим кривые рис. 81. Видим, что с уменьшением относительного вскрытия пласта превышение фактического дебита над величиной дебита для радиального потока возрастает. При относительном вскрытии около 20% это превышение может превзойти на 50% дебит для радиального потока. Возможны, следовательно, большие ошибки, если заменять, выполняя приближенные расчеты, поток жидкости к несовершенной скважине плоско-радиальным потоком.

Кривые зависимости δ от $\bar{l}$ показаны на рис. 82; они построены по формуле (X.23) или (X.21).

Кривые, сходные с теми, которые представлены на рис. 82, получены М. М. Глоговским, исследовавшим вопрос о скважинах, несовершенных по степени вскрытия пласта. Он различал два типа скважин, незакрепленных обсадными колоннами: скважина с донным притоком и скважина с закрытым для жидкости дном. По кривым Глоговского можно установить долю всего потока от потока, проходящего через дно скважины. При достаточно большом относительном вскрытии $\bar{l}$ эта доля невелика. Предлагались различные приближенные формулы для вычисления дебита скважины, несовершенной по степени вскрытия изотропного пласта конечной мощности. Так, В. Н. Щелкачевым дана формула дебита скважины с полусферическим забоем, вскрывшей только кровлю пласта конечной мощности; А. М. Пирвердяном предложена формула, справедливая в довольно широком диапазоне значений $\bar{l}$ и $\frac{b}{r_с}$. Читатель сможет познакомиться с этими формулами в соответствующей литературе.

Для потока жидкости к несовершенной скважине М. Маскет построил эквипотенциальные линии в случае $\bar{l} = 0{,}5$ и заметил, что на расстоянии от скважины, равном удвоенной мощности пласта, линии принимают ту форму, которая свойственна плоско-радиальному потоку. И. А. Чарный условно расчленил пласт на две области. Первая — в интервале между поверхностью, ограничивающей пласт от области питания, и цилиндрической поверхностью, окружающей несовершенную скважину так, что в первой области поток можно считать плоско-радиальным. Вторая — в интервале между указанной цилиндрической поверхностью и скважиной. Во второй области линии тока жидкости искривлены вследствие несовершенства скважины. На рис. 83 представлен разрез пласта вертикальной плоскостью, проходящей через ось скважины. Цилиндрическая поверхность, разграничивающая первую и вторую области, имеет радиус $r_0 \geqslant b$. При расчетах эту цилиндрическую поверхность можно принимать за стенку укрупненной совершенной скважины радиусом r_0, к которой

устремляется плоско-радиальный поток жидкости. В плоскости рис. 83 за пределами радиуса r_0 линии тока жидкости параллельны; здесь находится область плоско-радиального потока.

Таким образом, в основу расчета дебита несовершенной скважины может быть положена идея *«сращивания» фильтрационных потоков* — плоско-радиального и искривленного (у фильтра скважины). Идея сращивания потоков применялась уже, например, для неоднородно проницаемого пласта (§ 13 главы IV и § 9 главы VII) и в некоторых других случаях.

Чтобы показать, какое значение имеет *различие проницаемости в двух направлениях* — вертикальном и горизонтальном — приведем график Маскета (рис. 84), исследовавшего аналитически явление притока жидкости к скважине, несовершенной по степени вскрытия анизотропного пласта.

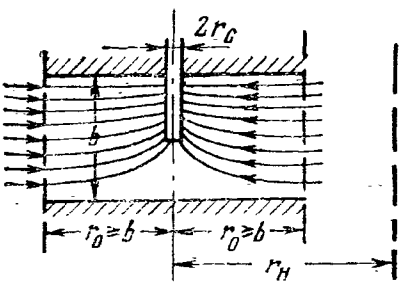


Рис. 83. Схема притока жидкости к несовершенной скважине.

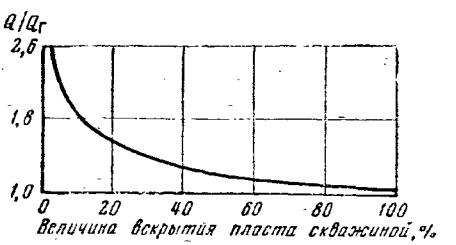


Рис. 84. Зависимость дебита скважины от величины относительного вскрытия пласта скважиной (по М. Маскету).

На рис. 84 представлена кривая зависимости отношения $Q/Q_г$ от относительного вскрытия пласта; Q — дебит несовершенной скважины в изотропном пласте; $Q_г$ — дебит несовершенной скважины в пласте, в котором проницаемость в вертикальном направлении $k_z = 0$.

По графику видим, что при небольшом относительном вскрытии пласта добавочное количество жидкости, поступающей в скважину в единицу времени за счет вертикального течения, достигает значительной величины. Так, для относительного вскрытия в 20%, дебит повышается за счет вертикальных составляющих скоростей фильтрации на 50%, а для 10% вскрытия — более чем на 75%.

§ 5. Некоторые гидродинамические исследования притока к скважине, несовершенной по характеру вскрытия пласта

Рассмотрим действие скважины с круглыми перфорационными отверстиями (рис. 68, *а*).

На рис. 85 показаны кривые зависимости коэффициента совершенства скважины δ от параметра $r_0 n$; здесь n — число отверстий, приходящихся на один метр колонны, r_0 — радиус отверстия (в см).

Сплошная кривая построена при радиусе скважин $r_c = 89$ мм, пунктирная — для $r_c = 168$ мм.

Из графика рис. 85 следует, что для сохранения коэффициента δ при увеличении радиуса всех отверстий в некоторое число раз следует во столько же раз уменьшить число отверстий в колонне, приходящееся на 1 м перфорированной части. Пусть пласт анизотропный по проницаемости, причем в горизонтальном направлении проницаемость есть k_0, а в вертикальном направлении k_z.

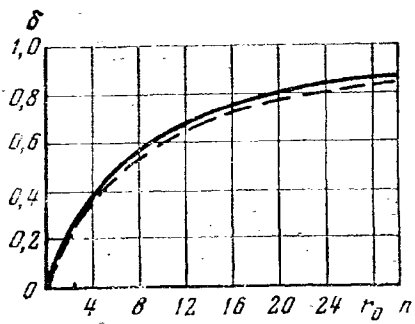


Рис. 85. Зависимость коэффициента совершенства скважины δ от параметра $r_0 n$.

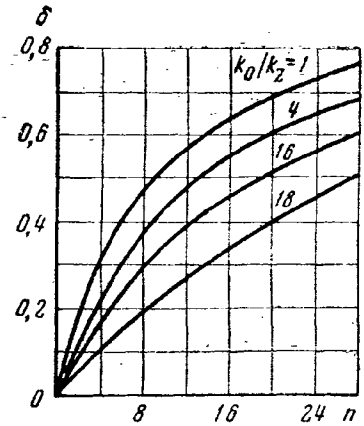


Рис. 86. Зависимость коэффициента δ от числа отверстий на 1 м при разных отношениях k_0/k_z (по Н. Кристеа).

Зависимость коэффициента совершенства δ от числа отверстий, приходящихся на 1 м колонны, при разных отношениях k_0/k_z показано на рис. 86. Радиус скважины принят равным $r_c = 89$ мм, радиус отверстия $r_0 = 6$ мм.

М. Н. Тиховым была сделана попытка установить на основе приближенного решения задачи *оптимальное число перфорационных отверстий* в колонне при линейном и нелинейном законах фильтрации. Предполагалось, что по проницаемости пласт однородно-изотропный. М. Н. Тихов показал, что условия симметрии в расположении отверстий на стволе скважины не играют роли. Это снимает ограничения, которые ставил А. Л. Хейн, решавший подобную задачу.

А. Л. Хейн разработал теорию установившегося притока жидкости и газа к несовершенным скважинам с меридионально-симметричной конструкцией забоя. К скважинам с меридионально-симметричной структурой забоя автор относит скважины, обладающие такой поверхностью дренирования пласта, что по крайней мере одна из проходящих через ось скважины меридиональных плоскостей делит эту поверхность на две симметричные относительно этой плоскости части. В частности, была рассмотрена задача о многорядном щелевом

фильтре, полностью вскрывающем пласт (см. рис. 68, *б*). Формулируем наиболее важные выводы автора, который выясняет характер зависимости величины C в формуле (X.4) или (X.5) от тех или иных особенностей конструкции щелевого фильтра с прямоугольными щелями.

1. При относительно небольшой плотности расположения щелей C изменяется обратно пропорционально их числу и, следовательно, обратно пропорционально площади дренирования фильтра.

2. Увеличение общей площади дренирования в многорядных фильтрах за счет увеличения числа щелей дает значительно больший эффект в повышении коэффициента совершенства скважины, чем увеличение площади дренирования коллектора путем увеличения размера щелей.

3. Величина C многорядного фильтра с прямоугольными щелями почти не зависит от радиуса скважины.

4. Увеличение общей площади дренирования коллектора путем увеличения числа рядов щелей должно давать такой же эффект в повышении коэффициента совершенства скважины, как увеличение площади дренирования путем увеличения числа прямоугольных щелей в ряду.

Значительный интерес представляют исследования М. Х. Харриса. Рассматривая приток жидкости к перфорированной скважине как математическую проблему, автор изучал явление в пределах некоторой воображаемой модели, включающей часть поверхности перфорационного канала. Для такой модели решение задачи сводилось к решению уравнения Лапласа в цилиндрических координатах при специально поставленных граничных условиях. М. Х. Харрис учел влияние на дебит скважины следующих параметров: 1) радиуса ствола скважины; 2) диаметра перфорационного канала; 3) глубину прострела, т. е. длину перфорационного канала; 4) вертикальный интервал между соседними горизонтальными плоскостями, содержащими перфорационные отверстия; 5) число перфорационных отверстий в каждой плоскости; 6) соотношение между коэффициентами проницаемости пласта в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Вычисляя коэффициент совершенства перфорированной скважины δ, Харрис делает ряд выводов, с некоторыми из которых мы вкратце познакомим читателя.

Главным фактором, обусловливающим величину δ, является длина перфорационного канала. Чем глубже канал, тем больше величина коэффициента δ.

Далее рассматривается влияние плотности перфорационных отверстий на величину δ. При этом длина каждого перфорационного канала принимается равной около 30 см. Сначала берется случай, при котором на один фут длины колонны приходится четыре прострела (около 12 прострелов на 1 м). Исследуются различные местоположения отверстий на стенке скважины. На рис. 87 изображена схема расположения четырех каналов относительно ствола скважины в пределах единицы его длины. При $n = 1$ в горизонтальной плоскости

имеется одно отверстие или 4 отверстия по одну сторону от ствола скважины; при $n = 2$ — два отверстия в каждой из двух горизонтальных плоскостей; $n = 4$ — четыре отверстия в одной плоскости, направленные из тех точек кругового сечения скважины, которые расположены на концах двух взаимноперпендикулярных диаметров. При $n = 4$ величина $\delta = 1{,}12$, т. е. производительность скважин с таким вскрытием пласта более чем на 10 % превышает производительность совершенной скважины. Близка к этому значению δ его величина при $n = 2$. Чтобы показать преимущество четырех прострелов в одной плоскости по схеме $n = 4$, на рис. 88 приводится графическая зависимость δ от числа простреленных отверстий в одной горизонтальной плоскости.

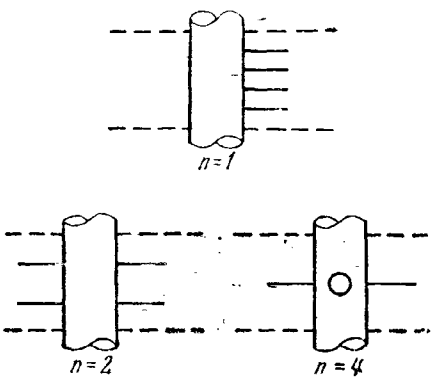


Рис. 87. Схема расположения четырех каналов в пределах единицы длины ствола скважины.

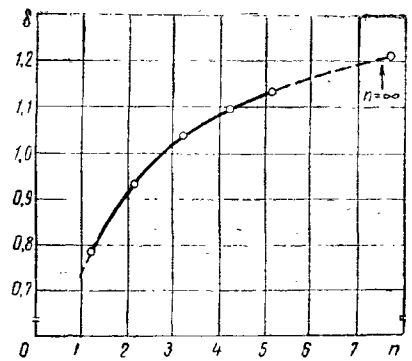


Рис. 88. Зависимость коэффициента δ от числа прострелов n в одной горизонтальной плоскости (по М. Х. Харрису).

Эффект плотности перфорации особенно заметен при небольшом числе прострелов, приходящихся на единицу длины колонны (2—3 отверстий): увеличение числа отверстий только на единицу значительно повышает величину δ. Максимальное значение $\delta = 1{,}24$ соответствует круговой горизонтальной трещине, для которой $n = \infty$. Для 4-х прострелов, т. е. при $\delta = 1{,}12$, производительность скважины составляет 90% максимального значения δ. Что касается схемы $n = 1$ на рис. 88, то при том числе прострелов на единицу длины колонны, которое приходится и при $n = 2$ и $n = 4$, коэффициент δ оказывается ниже единицы: следовательно, дебит перфорированной скважины по схеме $n = 1$ будет ниже дебита совершенной скважины.

Итак, схему с четырьмя прострелами на фут (12 прострелов на 1 м) можно считать оптимальной схемой перфорации при условии, что перфорационные каналы располагаются не по одну сторону от ствола скважины.

Результаты своих исследований Харрис сравнил с экспериментальными данными И. М. Доуэлла и М. Маскета, а также Р. А. Ховарда и М. С. Ватсона — см. § 2 настоящей главы. Оказалось, что

данные Доуэлла и Маскета лучше согласуются с исследованиями Харриса, чем данные Ховарда и Ватсона. Все экспериментальные данные показали несколько более низкие дебиты, чем вытекало из расчетов Харриса. Причины отклонений экспериментальных данных от результатов исследований Харриса заключаются в погрешностях, допущенных при экспериментах. Так, например, диаметр медного провода, заменяющего в модели Доуэлла и Маскета перфорационные каналы, был замерен неточно.

При конструировании электрической модели, изображающей ту часть пласта, в которой поток жидкости поблизости перфорационных каналов отличается от плоско-радиального, не было выдержано нужного соотношения между радиусами модели и скважины. Особенно большая погрешность в этом соотношении была допущена в модели, сконструированной Ховардом и Ватсоном; именно их данные и показывают наибольшие отклонения от результатов расчетов Харриса.

В заключение этого параграфа заметим, что для скважины *с двумя видами несовершенства* величина C формул (X.4) или (X.5), или (X.7) вычисляется следующим образом:

$$C = C_1 + C_2, \tag{X.24}$$

где C_1 — определяется так, как если бы данная скважина была несовершенна только по степени вскрытия пласта, а C_2 — из условия, что данная скважина несовершенна только по характеру вскрытия пласта. При этом расчетное число отверстий находится предварительно как отношение общего числа отверстий к полной (а не вскрытой) мощности пласта.

В соответствии с формулой (X.7) приведенный радиус несовершенной скважины с двумя видами несовершенства определяется по формуле:

$$r_{\text{пр}} = r_c e^{-(C_1+C_2)}. \tag{X.25}$$

§ 6. Теория образования водяного конуса в пласте с подошвенной водой

Если нижняя часть горизонтального или слабо наклонного нефтяного пласта занята подошвенной водой, то в процессе эксплуатации скважины, несовершенной по степени вскрытия, возможно образование так называемого водяного конуса с последующим прорывом подошвенной воды в скважину. Обводнение скважины в результате поднятия водяного конуса обычно происходит тогда, когда она эксплуатируется при высоких скоростях откачки продуктами.

Проблема движения воды, прорывающейся к скважине через область нефти, настолько сложна, что точный анализ этого явления оказывается практически невыполнимым. Ограничимся указанием на некоторые приближенные методы решения задачи о безводной эксплуатации скважины.

Как выражается условие предельно-устойчивого положения водяного конуса? Для ответа на вопрос воспользуемся допущением М. Маскета, считавшим, что выше конуса *вдоль оси Oz распределение потенциала такое же, как и при невозмущенной первоначально горизонтальной поверхности раздела между водой и нефтью DD* (рис. 89).

До начала эксплуатации скважины, когда поверхностью раздела «вода — нефть» являлась горизонтальная плоскость DD, давление в точках нефтеносной области пласта p_0 выражалось так:

$$p_0 = p_D - \gamma_н (b_н - z), \qquad (X.26)$$

где p_D — давление на горизонтальной плоскости раздела «вода — нефть» DD до начала эксплуатации скважины (давление p_D сохраняется на поверхности DM_1D в достаточном удалении от скважины

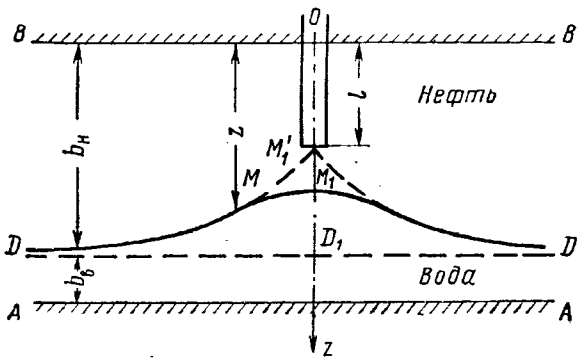


Рис. 89. Вертикальный разрез нефтяного пласта с подошвенной водой.

$r_к$); $\gamma_н$ — вес единицы объема нефти; $b_н$ — мощность нефтеносной части пласта; z — координата, отсчитанная от непроницаемой кровли пласта.

Вычисляя потенциал φ_0 объемной скорости фильтрации в соответствии с формулой (IV.5), находим из (X.26):

$$\varphi_0 = \frac{k}{\mu} p_0 = \frac{k}{\mu} \left[p_D - \gamma_н (b_н - z)\right]; \qquad (X.27)$$

здесь опущены: множитель ρ, который нужен для вычисления потенциала массовой скорости фильтрации, и слагаемое C.

Неподвижное состояние водяного конуса, вершина которого находится на продолженной оси скважины Oz, определяется, очевидно, таким условием:

$$p = p_D - \gamma_в (b_н - z), \qquad (X.28)$$

где p — давление в любой точке M поверхности раздела между водой и нефтью; $\gamma_в$ — вес единицы объема воды; z — координата

точки M на поверхности раздела «вода — нефть»; остальные обозначения прежние.

Переходя к потенциалу φ, найдем

$$\varphi = \frac{k}{\mu}\left[p_D - \gamma_в (b - z)\right]. \qquad (X.29)$$

Вычитая почленно из равенства (X.27) равенство (X.29), получим

$$\varphi_0 - \varphi = \frac{k}{\mu}(\gamma_в - \gamma_н)(b_н - z), \qquad (X.30)$$

где $\varphi_0 = \text{const}$.

Дифференцируя (X.30), найдем, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{k}{\mu}\delta\gamma, \qquad (X.31)$$

где $\delta\gamma = \gamma_в - \gamma_н$.

Поскольку левая часть равенства (X.31) выражает скорость фильтрации вдоль вертикали, *условию устойчивости водяного конуса* можно придать вид неравенства

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{r=0} \leqslant \frac{k}{\mu}\delta\gamma, \qquad (X.32)$$

где r — расстояние от оси Oz.

При нарушении условия (X.32) конус неустойчив и вода может прорваться к забою скважины.

Для некоторых частных случаев М. Маскет приводит результаты решения задачи в виде графиков. На графиках показано, например, изменение высоты водяного конуса в зависимости от перепада давления между поверхностью питания пласта и скважиной, несовершенной по характеру вскрытия. Представлены графически максимальные перепады давления, которые можно поддерживать, не допуская образования конусов воды, максимальные дебиты нефти при бесконусной эксплуатации скважины. Здесь не приводятся методы Маскета; они сложны и не позволяют оценить степень точности решения задачи определения предельных безводных дебитов.

Кроме работ Маскета, в ранний период изучения проблемы движения подошвенных вод были известны работы акад. Н. Я. Голубариновой-Кочиной, Б. Э. Казарновской, акад. М. Д. Миллионщикова и др.

В § 3 этой главы приведены формулы для подсчета времени безводной эксплуатации скважины в пласте с подошвенной водой. Акад. М. Д. Миллионщиков, рекомендовавший формулу (X.17), исходил в своих исследованиях из следующей схемы отбора нефти из пласта: 1) влияние разности объемных весов нефти и воды несущественно; 2) различие вязкости воды и нефти не учитывается; 3) пласт по проницаемости изотропный, имеет неограниченную мощность и протяженность, вскрывается на кровле скважиной — точечным стоком; 4) пласт и жидкость несжимаемы. При этом рассматривалось движе-

ние поверхности отмеченных частиц, представляющий границу раздела между нефтью и подошвенной водой. Период безводной эксплуатации скважины определялся так: подсчитывалось время, в течение которого частица поверхности раздела, движущаяся по кратчайшему пути между начальной плоскостью раздела и забоем скважины, пройдет весь этот путь.

§ 7. Упрощенные способы расчета предельного безводного и безгазового дебита скважины

Допустим, что устойчивое положение водяного конуса достигается в предельном случае, в котором его *вершина находится у забоя скважины M''* (см. рис. 89). Этому положению конуса соответствует предельный *безводный дебит скважины*. Обозначим предельный объемный дебит через $Q_{\text{пр}}$ и найдем приближенную формулу для его подсчета.

Пренебрегая вертикальными составляющими скорости фильтрации нефти в рассматриваемом нами предельном случае и обозначая расстояние частицы нефти от оси скважины Oz через r, запишем выражение скорости фильтрации нефти v по закону Дарси:

$$v = \frac{k}{\mu}\frac{dp}{dr}, \tag{X.33}$$

где μ — вязкость нефти.

Дебит $Q_{\text{пр}}$ определяется так:

$$Q_{\text{пр}} = 2\pi r z \frac{k}{\mu}\frac{dp}{dr}. \tag{X.34}$$

Равенство (X.31) справедливо для всех точек поверхности раздела вода — нефть. Считая, что жидкость несжимаема и $\frac{k}{\mu} = \text{const}$, для каждой точки поверхности раздела получим из (X.31) следующую формулу:

$$dp = \delta\gamma\, dz. \tag{X.35}$$

Подставляя в равенство (X.34) значение dp из формулы (X.35), разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{Q_{\text{пр}}}{2\pi\delta\gamma}\int_{r_{\text{к}}}^{r_{\text{с}}}\frac{dr}{r} = \int_{b_{\text{н}}}^{l} z\, dz.$$

Из последнего равенства следует формула предельного безводного дебита $Q_{\text{пр}}$:

$$Q_{\text{пр}} = \frac{\pi k\delta\gamma}{\mu}\,\frac{b_{\text{н}}^2 - l^2}{\ln\frac{r_{\text{к}}}{r_{\text{с}}}}. \tag{X.36}$$

Формула (X.36) имеет полное сходство с формулой (VI.7) для безнапорного осесимметричного потока к скважине по закону фильтрации Дарси; чтобы из (VI.7) получить формулу (X.36), достаточно заменить в (VI.7) $h_к$ на $b_н$, h на l, а γ на $\delta\gamma$.

Построим в соответствии с формулой (VI.5) кривую свободного зеркала при безнапорном движении воображаемой жидкости, имеющей для единицы объема вес $\delta\gamma$, и обозначим высоту динамического уровня жидкости в скважине через l, а высоту невозмущенного зеркала — через $b_н$. Такой кривой является, например, кривая, изображенная на рис. 36, при условии, что поток осесимметричный и $r_с$ — радиус скважины. Если построенную кривую повернуть на угол 180°, вращая чертеж вокруг оси Or, получим ту линию раздела между водой и нефтью, которая отвечает предельной высоте водяного конуса в условиях безводной эксплуатации скважины, несовершенной по характеру вскрытия, изображенной на рис. 89.

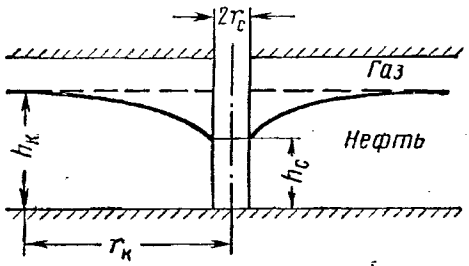


Рис. 90. Схема скважины в пласте с подгазовой нефтью.

Аналогия между безнапорным фильтрационным потоком и потоком нефти при безводной эксплуатации несовершенной скважины была отмечена Маскетом.

Формула (X.36), выведенная Г. Дж. Мейером и А. О. Гардером и независимо от них Н. Ф. Ивановым, позволяет вычислять величину предельного безводного дебита скважины лишь в первом приближении. Об оценке приближения будет сказано в следующем параграфе.

Описанный приближенный способ исследования притока безводной нефти к скважине в пласте, содержащем подошвенную воду, может распространяться и на случай притока нефти к скважине *при условии недопущения прорыва газа из газовой шапки.*

Положим, что в пласте находятся жидкость (нефть) и газ, занимающий верхнюю часть пласта, ограниченного непроницаемыми кровлей и подошвой (рис. 90). В невозмущенном состоянии уровень жидкости находится на высоте $h_к$ над подошвой пласта. Доступ жидкости в скважину обеспечивает открытая поверхность стенки скважины; эта открытая поверхность возвышается над подошвой пласта не более чем на $h_с$; при этом, допустим, исключается возможность прорыва газа из газовой шапки. На некотором расстоянии $r_к$ высота уровня жидкости остается $h_к$.

Поставим следующий вопрос: какой максимальный дебит $Q_{пр}$ можно установить для скважины, боковая поверхность которой открыта для жидкости вдоль всей заданной высоты $h_к$, отсчитанной от подошвы пласта (см. рис. 90).

Если давление в газовой шапке равно давлению в стволе скважины над поверхностью уровня жидкости, то движение жидкости

к скважине может происходить лишь при некотором снижении уровня жидкости в скважине относительно уровня жидкости в пласте. В предельном случае, когда имеется гарантия, что газ из пласта не прорвется в скважину, снижение динамического уровня должно равняться величине $h_к - h_с$. В этом предельном случае задача сводится к задаче о потоке жидкости со свободной поверхностью (см. главу VI).

Но в настоящем параграфе была отмечена аналогия между фильтрационным потоком жидкости со свободной поверхностью и потоком нефти при безводной эксплуатации скважины (если вопрос о безводной эксплуатации рассматривается приближенно так, как его рассматривали Иванов и Мейер, Гардер). Этой аналогией мы и воспользуемся для приближенного решения задачи о предельном дебите перед прорывом газа $Q_{пр}$.

Возьмем рис. 89, изображающий конус воды при эксплуатации несовершенной скважины. Пусть вершина конуса совпадает с точкой M'. Безводный дебит $Q_{пр}$, соответствующий указанному положению водяного конуса, вычисляется по формуле (X.36). Если чертеж рис. 89 повернуть на 180°, вращая его вокруг прямой BB, и предположить, что на месте воды находится газ, мы получим схему предельного случая безгазовой эксплуатации скважины, в которую через открытую часть ее стенки высотой l фильтруется нефть, имеющая свободную поверхность. Таким образом мы получили случай, представленный на рис. 90. Для этого случая также будет справедлива формула (X.36), если в ней величины $b_н$ и l заменить соответствующими величинами рис. 36. Делая такую замену, найдем:

$$Q_{пр} = \frac{\pi k \delta\gamma}{\mu} \frac{h_к^2 - h_с^2}{\ln \frac{r_к}{r_с}}, \qquad (X.37)$$

где $\delta\gamma$ — обозначает теперь $\gamma_н - \gamma_г$, т. е. разность в весе единицы объема нефти и газа. Полагая $\gamma_г = 0$, получим формулу (VI.7).

Вообразим теперь, что кроме имеющейся в пласте газовой шапки, в нем содержится подошвенная вода — см. рис. 91. Первоначальная мощность нефтеносной области пласта, залегающей между газовой шапкой и подошвенной водой, равнялась $b_н$. Каков должен быть предельный дебит скважины, чтобы при заданном интервале вскрытия пласта l в скважину не прорывались «верхний» газ подошвенная вода? Насколько ниже газовой шапки следует вскрывать пласт при данной длине интервала вскрытия?

Попытаемся дать ответы на эти вопросы, воспользовавшись формулами (X.36) и (X.37). Рассмотрим рис. 91.

Допустим, что l — интервал вскрытия, AA_1A_1A — контактная кривая, полученная в предельном случае отбора безводной нефти в результате искривления контактной поверхности между водой и нефтью. BB_1B_1B — предельная кривая раздела между газом и нефтью в процессе безгазовой эксплуатации скважины. На расстоянии

$r_к$ мощность $b_н$ сохраняется. При этом предполагается, что газ и вода должны быть неподвижными.

На стенке скважины в верхней точке интервала вскрытия (т. е. на уровне B_1B_1) вектор скорости фильтрации нефти имеет наклон вниз, а в нижней точке интервала вскрытия (на уровне A_1A_1) направлен под некоторым углом к горизонту вверх. Очевидно, в некоторой промежуточной точке интервала вскрытия вектор скорости имеет горизонтальное направление. Таким образом, мы можем предположить, что через эту промежуточную точку проходит горизонтальная

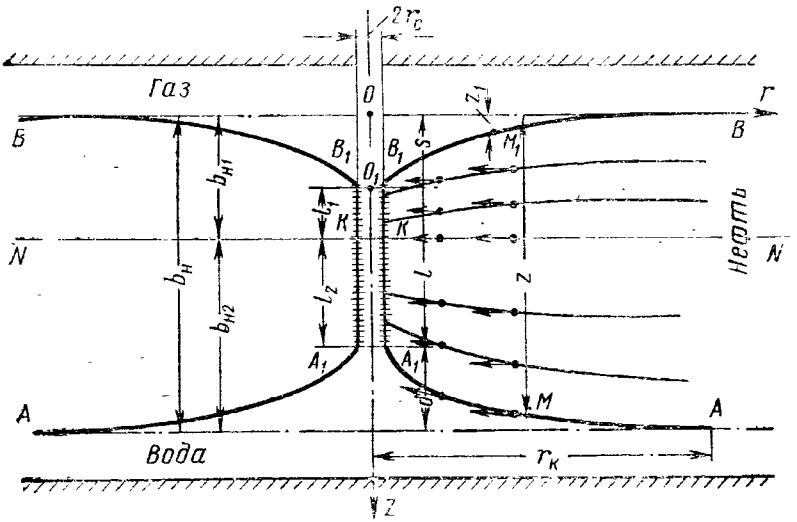


Рис. 91. Схема скважины в пласте с подошвенной водой и «верхним» газом.

плоскость, делящая область движущейся нефти на две части; выше указанной плоскости скорости фильтрации могут иметь наклон только вниз, ниже плоскости скорости таковы, что они направлены под некоторым углом к горизонту только вверх. Пусть NN — линия пересечения раздельной плоскости с плоскостью чертежа (см. рис. 91). Назовем область нефти над плоскостью NN верхней областью, под плоскостью NN — нижней областью.

Верхнюю область будем рассматривать как область нефти, движущейся в пласте в условиях существования газовой шапки; для этой области, следовательно, применима формула (X.37). Нижнюю область будем считать областью нефти, притекающей к скважине в условиях предельного поднятия водяного конуса; для нее можно применять формулу (X.36).

В результате совместного применения формул (X.36) и (X.37) для потока нефти в пласте с подошвенной водой и верхним газом получим формулы:

$$S = \frac{\delta\gamma}{\gamma_в}(b_н - l), \qquad \text{(X.38)}$$

где S — расстояние между газовой шапкой и верхней точкой B_1 интервала вскрытия A_1B_1;

$$Q_{\text{пр}} = \frac{\pi k \delta \gamma (b_{\text{н}}^2 - l^2)}{\mu \ln \frac{r_{\text{к}}}{r_{\text{с}}}} \frac{\gamma_{\text{н}} - \gamma_{\text{г}}}{\gamma_{\text{в}} - \gamma_{\text{г}}}. \qquad \text{(X.39)}$$

Здесь $\gamma_{\text{г}}$ — вес единицы объема газа.

Формула (X.38) отвечает на вопрос, *насколько ниже газовой шапки следует вскрывать пласт при заданной длине интервала вскрытия.* Формула (X.39) позволяет вычислять *предельный безводный и безгазовый дебит скважины* в пласте с подошвенной водой и верхним газом. Она была выведена несколько иным путем Г. Дж. Мейером и А. О. Гардером; независимо от них формулу получил П. М. Шульга. С. Д. Пирсон применил к выводу аналогичной формулы метод, сходный с тем, какой здесь изложен; Ю. А. Теплов проанализировал решение рассмотренной задачи и подтвердил формулу (X.39) экспериментально, проведя опыты на вертикальном щелевом лотке, моделирующем плоскую задачу. Формула (X.39) позволяет *по заданному предельному дебиту* $Q_{\text{пр}}$ устанавливать *длину интервала вскрытия.*

§ 8. Решения некоторых задач эксплуатации скважины в пласте с подошвенной водой

Теория конусообразования, основанная на допущениях М. Маскета, была развита затем И. А. Чарным. Вкратце познакомимся с тем, как подходил И. А. Чарный к вопросу определения предельных безводных дебитов, депрессий и высот конуса.

Обратимся к рис. 89 и к формуле (X.28), выражающей условие неподвижного состояния водяного конуса. Это условие позволяет находить давление p в любой точке поверхности раздела.

Если z — координата точки поверхности раздела, то потенциал приведенного давления φ вдоль границы раздела для движущихся частиц нефти запишем так:

$$\varphi = \frac{k}{\mu}(p - \gamma_{\text{н}} z). \qquad \text{(X.40)}$$

(О приведенном давлении — см. формулу (II.21); знак «минус» в формуле (X.40) объясняется тем, что плоскость отсчета взята на рис. 89 выше поверхности раздела.

Подставив в (X.40) значение p из формулы (X.28), получим:

$$\varphi = \frac{k}{\mu}\left[p_D - \gamma_{\text{в}}(b_{\text{н}} - z) - \gamma_{\text{н}} z\right]. \qquad \text{(X.41)}$$

Замечаем, что потенциал на поверхности питания пласта, находящейся на расстоянии $r_{\text{к}}$ от оси скважины, на основании формулы (X.41) равен

$$\varphi_{\text{к}} = \frac{k}{\mu}(p_D - \gamma_{\text{н}} b_{\text{н}}). \qquad \text{(X.42)}$$

Прибавляя и отнимая в квадратных скобках (X.41) одну и ту же величину $\gamma_н b_н$, найдем

$$\varphi = \varphi_к - \frac{k}{\mu}\delta\gamma\,(b_п - z). \qquad (X.43)$$

Уравнение (X.43) показывает, что зависимость между координатой z и потенциалом φ линейная. Следовательно, вдоль границы раздела «вода — нефть» по направлению от поверхности питания до вершины водяного конуса график этой зависимости представляется прямой линией с угловым коэффициентом, равным $\operatorname{tg}\beta = \frac{k}{\mu}\delta\gamma$.

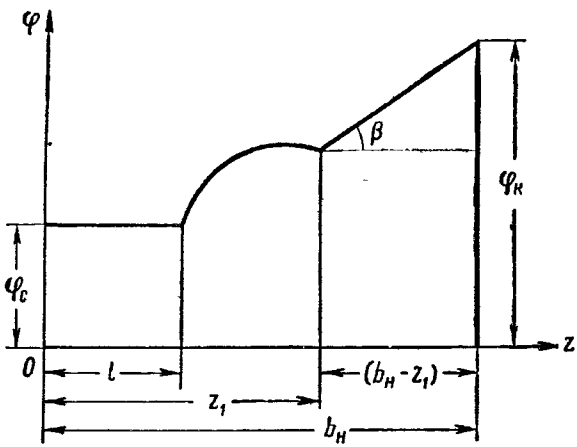


Рис. 92. График распределения потенциала φ на стенке скважины, вдоль оси *Oz* и на поверхности раздела вода—нефть.

Построим график распределения потенциала сначала вдоль поверхности несовершенной скважины, затем вдоль оси *Oz* между нижней точкой интервала вскрытия и вершиной водяного конуса, далее — вдоль границы раздела вода — нефть до поверхности питания и, наконец, вдоль поверхности питания $r = r_к$. График имеет вид, изображенный на рис. 92. Величина z_1 обозначает координату z вершины конуса, которая точно не известна.

И. А. Чарный сопоставляет движению жидкости в пласте при наличии конуса с напорным *равнодебитным* движением нефти в пласте постоянной мощности $b_н$, когда подошва пласта горизонтальна и непроницаема, на боковой поверхности $r = r_к$ поддерживается прежнее распределение потенциала. Это второе движение Чарный называет невозмущенным, движение при наличии конуса — возмущенным. Делается заключение, что при возмущенном движении потенциал любой точки пласта будет меньше, чем потенциал той же точки при невозмущенном движении. Это объясняется тем, что невозмущенное движение происходит в расширенной по сравнению с возмущенным области, так как стеснения потока, вызываемого конусом, не будет.

Рассматривается невозмущенное движение в пласте мощностью $b_н$ при том же распределении потенциала на боковой поверхности $r = r_к$ и при столь большом дебите Q_1, что, как доказывает Чарный, его можно считать заведомо большим предельного дебита возмущенного движения $Q_{пр}$. Анализируется невозмущенное движение с некоторым дебитом Q_2, соответствующим распределению потенциала вдоль оси скважины, при котором Q_2 заведомо меньше $Q_{пр}$. Таким образом устанавливается неравенство

$$Q_2 < Q_{пр} < Q_1. \qquad (X.44)$$

И. А. Чарный указывает, что количественный расчет дебитов Q_1 и Q_2 может быть проведен по известному решению задачи о напорном притоке жидкости к несовершенной скважине. Q_1 и Q_2 отличаются на 25—30%. Для расчетов предельных дебита и высоты подъема конуса рекомендованы соответствующие графики [30].

А. П. Телков и Ю. И. Стклянин показали на примерах, что по формуле предельного безводного дебита (X.36), предложенной Мейером и Гардером, а также Ивановым, получаем заниженную величину безводного дебита, выходящую за пределы соотношения (X.44). В примерах А. П. Телкова и Ю. И. Стклянина дебит по формуле (X.36) ниже соответствующего значения Q_2 на 29—34%.

Поскольку формула (X.39) предельного безводного и безгазового дебита обосновывается с помощью формулы (X.36), надо полагать, что замечания, сделанные к расчетам по формуле (X.36), справедливы и по отношению к формуле (X.39).

Д. А. Эфрос, И. Ф. Куранов, Р. А. Аллахвердиева выполнили расчеты предельных безводных дебитов по методу, представляющему собой соединение моделирования в собственном смысле, т. е. физического моделирования, с математическим моделированием. В работе использовалась аналогия между потенциальным движением в пористой среде и течением вязкой жидкости в малом зазоре между двумя поверхностями. Как утверждают исследователи, максимальный безводный дебит находится в пределах, указанных И. А. Чарным.

Задачу о безводном извлечении нефти из пластов с подошвенной водой решал Н. С. Пискунов. Им дана в общем виде оценка дебита при заданных вскрытии пласта и высоте водяного конуса. Численные расчеты по формулам Н. С. Пискунова трудны.

Вычисления, нужные для оценки величины предельного дебита в соответствии с решением Пискунова, очень упрощаются, когда вскрытая часть пласта составляет половину его мощности, т. е. когда $\frac{l}{b} = 0{,}5$, и когда вершина водяного конуса достигает забоя скважины. В этом случае предельный дебит $Q_{пр}$ выражается такой простой формулой

$$Q_{пр} = \frac{\pi b_н^2 k \delta \gamma}{\mu \ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad (X.45)$$

Нетрудно видеть, что формулу (X.45) можно получить из (X.36), полагая в последней $l = 0$. Это указывает на то, что по формуле (X.36) получаем заниженные результаты при подсчете предельного безводного дебита.

В самом деле, при заданном значении мощности нефтенасыщенной части пласта $b_н$ наибольшее значение предельного дебита будет, очевидно, при $l = 0$. Именно это наибольшее значение и выражает формула (X.45), если считать, что последняя есть приближенная формула (X.36) при $l = 0$. Однако в более точной постановке задачи формула (X.45) не выражает наибольшего значения $Q_{пр}$: по Пискунову, формула (X.45) справедлива при $l \neq 0$.

Хотя в одном из разделов своей работы Н. С. Пискунов доказал, что скважина не может полностью обводниться, если мощность нефтенасыщенной части пласта сравнительно велика, следует помнить о несколько идеализированной постановке задачи как Чарным, так и Пискуновым (отсутствие капиллярных сил, однородность пласта и др.). В реальных условиях возможно полное обводнение скважин.

Отметим, что по вычислениям А. П. Телкова и Ю. И. Стклянина формула (X.45) дает заниженную относительно Q_2 величину предельного безводного дебита.

По данным Б. Б. Лапука значения предельных безводных дебитов, рассчитанные в соответствии *с общими формулами Пискунова*, оказываются завышенными относительно верхнего предела Q_1 в несколько раз.

Расчетом предельных безводных дебитов скважин, несовершенных по степени вскрытия при существовании водяного конуса, занимались Б. Б. Лапук, А. Л. Брудно и Б. Е. Сомов. Ими определены предельные высоты подъема конуса воды и предельные депрессии. Известны и другие решения этой задачи, например В. А. Карпычева.

Достаточно подробное исследование вопроса образования водяных конусов проделано А. П. Телковым и Ю. И. Стклянины м. Предельные дебиты скважин, несовершенных по степени вскрытия, в этих исследованиях рассчитывались для однородно-анизотропного пласта. Для такого же пласта рассчитывались предельная депрессия, наивыгоднейший интервал вскрытия, обеспечивающий наибольший предельный безводный и безгазовый дебит; устанавливалось влияние некоторых параметров пласта и скважин на явление конусообразования. Анализировался ряд других вопросов конусообразования, например влияние капиллярного давления на безводный дебит. Результаты исследований представлены многими графиками.

А. П. Телков рассмотрел движение несжимаемой жидкости к несовершенным скважинам кольцевой батареи в пласте, в котором нефть подстилается активной подошвенной водой, и нашел время безводной эксплуатации скважин.

В заключение настоящего параграфа сошлемся на опыт разработки нефтяных залежей, подстилаемых на большой площади подошвенной водой; добыча безводной нефти здесь затруднительна из-за крайне малых дебитов скважин. При умеренных дебитах скважины

быстро обводняются. Образуется совместный поток нефти и воды; при их перемешивании в скважине добывается эмульсия, осложняющая процессы технологии добычи и переработки нефти.

Для получения безводной нефти из обводнившейся скважины рекомендуется извлекать раздельно нефть и воду. Для этого необходимо путем регулирования совмещать уровень раздела воды и нефти в скважине с тем же уровнем в пласте и располагать фильтры по разные стороны уровня раздела.

Иногда в практике разработки Туймазинского, Бавлинского и ряда других месторождений платформенного типа со скважинами, пробуренными в водоплавающей части залежи, образования сколько-нибудь значительных конусов воды не происходит. На это указывают, например, А. И. Холин и С. А. Султанов, сопоставившие данные радиометрических наблюдений с данными электрометрических исследований вновь пробуренных скважин и проанализировавшие эксплуатацию отдельных скважин. Можно считать, что на процесс конусообразования в пласте значительно влияет анизотропия в проницаемости пород.

§ 9. Эффективность гидравлического разрыва пласта

Гидравлическим разрывом пласта называют искусственное образование и расширение трещин в породах призабойной области путем создания повышенных давлений жидкости, нагнетаемой в скважину. Вновь образовавшиеся и расширяющиеся трещины, соединяясь между собой, создают для нефти и газа пути, связывающие скважину с удаленными от забоя частями пласта. Пропускная способность этих трещин высокая. Чтобы трещины не смыкались после снижения давления, в нагнетаемую жидкость добавляют крупнозернистый песок.

Чаще всего давление разрыва бывает меньше горного давления, создаваемого весом вышележащих пород. Свойства жидкости разрыва и жидкости-песконосителя должны быть различными: жидкость разрыва должна быть достаточно вязкой и хорошо фильтроваться в породу, а жидкость-песконоситель — обладать низкой фильтруемостью для поддержания трещин в открытом состоянии при заполнении их песком, находящимся в жидкости во взвешенном состоянии.

При разрыве жидкостью, хорошо фильтрующейся, образуются горизонтальные трещины. В процессе разрыва нефильтрующейся жидкостью механизм разрыва пласта сходен с механизмом разрыва толстостенных сосудов. Направление трещин в таком случае обычно вертикальное или наклонное.

По акад. С. А. Христиановичу, образование горизонтальных трещин объясняется тем, что вертикальное горное давление оказывается уменьшенным вблизи скважины ввиду пластической деформации малопрочных глин и глинистых сланцев во время бурения скважин. Глины как бы вытекают в скважину после их вскрытия под действием вышележащих пород. Протяженность трещин, образующихся при разрыве пласта, составляет обычно несколько десятков метров.

Рассмотрим скважину в пласте мощностью b с горизонтальной трещиной радиусом $r_т$ (рис. 93). Пропускную способность трещины будем считать бесконечно большой. Если $Q_с$ — дебит скважины совершенной по степени вскрытия, а $Q_г$ — дебит скважины с горизонтальной трещиной, изображенной на рис. 93, то для подсчета отноше-

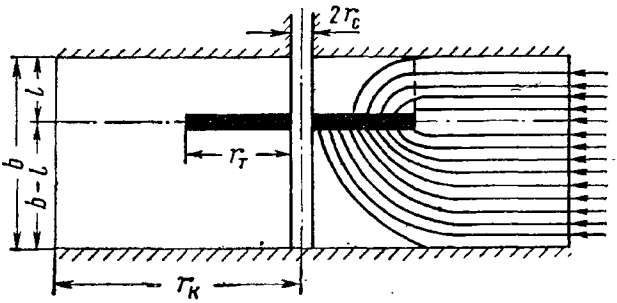


Рис. 93. Схема горизонтальной трещины.

ния $Q_г/Q_с$ можно пользоваться такой формулой, рекомендованной акад. С. А. Христиановичем и Ю. П. Желтовым:

$$\frac{Q_г}{Q_с}=1+f_1\left(\frac{b}{2r_с}\right)\left(\frac{r_т}{r_с}\right)^{f_2\left(\frac{b}{2r_с}\right)}, \qquad (X.46)$$

где $f_1\left(\frac{b}{2r_с}\right)$ и $f_2\left(\frac{b}{2r_с}\right)$ — некоторые функции от параметра $\frac{b}{2r_с}$. Значения этих функций, вычисленные по данным электролитического моделирования, приводятся в табл. 21.

Таблица 21

Значения функций $f_1\left(\frac{b}{2r_с}\right)$ и $f_2\left(\frac{b}{2r_с}\right)$ к формуле (X.46)

$\frac{b}{2r_с}$	$f_1\left(\frac{b}{2r_с}\right)$	$f_2\left(\frac{b}{2r_с}\right)$
17,00	0,15	0,44
22,72	0,106	0,55
28,41	0,064	0,61
38,65	0,041	0,70
89,80	0,0108	0,93

При исследовании эффективности гидравлического разрыва пласта И. М. Муравьев, В. И. Щуров и Го Шан Пин частично использовали материалы электролитического моделирования. Приведем результаты этих исследований для горизонтальной трещины, изображенной на рис. 93. (Круглая трещина изотропного пласта дает максимальный эффект при ее горизонтальном расположении).

1. Эффективность гидравлического разрыва в большой мере зависит от радиуса трещины, причем с увеличением его производительность трещины вначале резко возрастает, а затем замедляется.

2. Разрыв тем более эффективен, чем меньше мощность пласта. С точки зрения экономической эффективности целесообразнее раз-

рывать пласт или пропласток большей мощности: получается больший абсолютный прирост добычи нефти при тех же затратах на проведение процесса, что и для разрыва пропластка малой мощности.

3. Максимальный эффект от разрыва получается при расположении трещины в середине пласта; минимальный эффект — при расположении ее у подошвы или кровли пласта.

Заметим, что такие выводы справедливы для трещин с бесконечно большой проницаемостью. Для трещин с конечными, но достаточно большими проницаемостями и высотой влияние места их расположения будет существеннее, чем при бесконечно проницаемой трещине.

Исследовалось влияние числа горизонтальных трещин на дебит. Чтобы показать некоторые результаты, приведем численный пример. Пусть горизонтальная круглая трещина, изображенная на рис. 93, занимает среднее положение между верхней и нижней горизонтальными границами представленной на чертеже области пласта. Допустим, что эта область не единственная в пласте, а кроме нее имеется всего n совершенно таких же областей, в каждой из которых образовалась трещина так, что получается гирлянда одинаковых трещин, расположенных одна над другой симметрично относительно вертикальной оси. В табл. 22 приведены данные отношения суммарного дебита всех трещин $nQ_г$ к дебиту совершенной скважины $Q_с$ радиусом $r_с$ при $r_к = 2000r_с$ и $b = 400r_с$.

Таблица 22

Отношение суммарного дебита горизонтальных трещин к дебиту скважины, совершенной по степени вскрытия $nQ_г/Q_с$ при различных радиусах трещин $r_т$

$\frac{r_т}{r_с}$	$nQ_г \cdot Q_с$		
	1 трещина	4 трещины	20 трещин
30	1,192	1,521	1,688
60	1,521	1,919	1,983
120	2,145	2,416	2,42
180	2,586	2,795	2,80
240	2,964	3,15	3,15
300	3,345	3,48	3,48

Из этой таблицы видим, что *следует по возможности создавать одну крупную трещину.* Чем крупнее трещина (чем больше ее радиус), тем меньший прирост дебита получается от увеличения числа трещин. Сравнивая по табл. 22 эффект одной трещины радиусом $r_т = 300\ r_с$ с производительностью двадцати трещин радиусом $r_т = 30\ r_с$, найдем, что дебит, полученный из единственной в пласте крупной трещины, почти в два раза больше дебита из 20 мелких трещин.

Изучение эффекта вертикальной трещины позволяет сделать вывод о том, что при небольшой мощности изотропного пласта длинная

вертикальная трещина (длиной больше 30 м) высотой, равной 60—90% мощности пласта, мало отличается по эффекту от трещины, высота которой равна всей мощности пласта. Для такой вертикальной прямоугольной трещины можно воспользоваться формулой (IX.78), рекомендованной в § 7 главы IX, если пренебрегать притоком к самой скважине. Обозначив длину трещины через $2l$, высоту b, получим соотношение между дебитом трещины $Q_в$ и дебитом совершенной скважины

$$\frac{Q_в}{Q_с} = \frac{\lg \frac{r_к}{r_с}}{\lg \frac{2r_к}{l}}. \qquad (X.47)$$

Вычислив соотношение дебитов для вертикальной трещины по формуле (X.47), можно сравнить его с соответствующей величиной для горизонтальной трещины; таким образом можно оценить преимущество той или другой трещины при различных условиях гидравлического разрыва пласта.

Промысловые данные показывают, что иногда гидравлический разрыв пласта повышает дебит скважины в несколько десятков раз. Это объясняется тем, что образовавшиеся трещины соединяют ствол скважины с отдаленными, более продуктивными областями пласта, чем та, которая непосредственно примыкает к скважине.

В свое время для изоляции подошвенной воды было предложено производить гидравлический разрыв пласта через несовершенную по степени вскрытия скважину. При разрыве в таком случае изменяется направление движения жидкости. М. И. Щвидлер сравнил расчетное время безводной эксплуатации горизонтальной трещины после разрыва $T_т$ с временем безводной эксплуатации скважины T в пласте неограниченной мощности. Притоком к самой скважине при наличии трещины пренебрегалось по сравнению с притоком к трещине.

Сравнение времени $T_т$ с временем T показало, что замена скважины трещиной, находящейся на глубине l, равной длине погружения скважины, довольно эффективна в смысле увеличения периода безводной эксплуатации. Если по проницаемости пласт — анизотропная среда, а вертикальная проницаемость его в несколько раз меньше горизонтальной проницаемости, роль трещин как средства увеличения безводного периода эксплуатации менее значительна, чем для изотропного пласта.

Итак, гидравлический разрыв пласта может не только способствовать повышению производительности скважины, но одновременно является действенным средством *продления безводного периода их эксплуатации.*

Глава XI

НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ ПОТОК, В КОТОРОМ ОДНА ЖИДКОСТЬ ВЫТЕСНЯЕТ ДРУГУЮ[1]

§ 1. Предварительные замечания

В VII и IX главах рассматривалось движение контура отмеченных частиц, играющего роль контура нефтеносности. Поскольку для воды и нефти не делалось различия в параметре, характеризующем определенное физическое свойство (например, различия в вязкости), поток был установившимся. Однако в реальных условиях невозможно пренебрегать этим различием, которое обусловливает нестационарность фильтрационного потока при неизменных давлениях на границах пласта.

Неустановившимся будет также поток газа, вытесняемого, например, из газовой залежи напором краевой воды, или поток нефти, вытесняемой газом, образующим так называемую газовую шапку, которая занимает верхнюю часть структуры залежи. При этом иногда практикуется закачка газа в шапку через нагнетательные скважины. В настоящей главе рассмотрим такого рода неустановившиеся потоки.

Так как нам придется иметь дело с движением контакта двух жидкостей или контакта жидкости и газа, сделаем некоторые замечания.

Нефть, подпираемая пластовой водой, залегает обычно в частях пласта, приуроченных к местным его поднятиям. Газовая шапка, как только-что отмечалось, также занимает верхнюю часть структуры. Следовательно, рассматривая области по одну и другую стороны контактной поверхности, можем сказать следующее: газ находится выше его поверхности контакта с водой или с нефтью; нефть располагается выше поверхности контакта ее с водой.

Представим себе вертикальный разрез участка пласта, заключающий поверхность контакта двух жидкостей AB (рис. 94). Если построить горизонтальную проекцию контактной поверхности, получим полосу, площадь которой ограничена двумя кривыми. Таким образом на карте месторождения отмечаются два контактных контура, внешний — по кровле пласта и внутренний — по подошве.

[1] Понятие «жидкость» распространяется здесь и на газ.

Расстояния между внешним и внутренним контурами зависят от мощности пласта и угла падения. Скорости перемещения обоих контуров могут быть различными.

В расчетных схемах подземной гидравлики, в которых изучение реального фильтрационного потока возможно свести к изучению плоского потока, вводят некоторый *условный контур нефтеносности*. Предполагается, что контактная поверхность *нормальна к кровле и подошве пласта*. Такое предположение оказывается тем более точным, чем больше угол наклона пласта и чем меньше контактная поверхность.

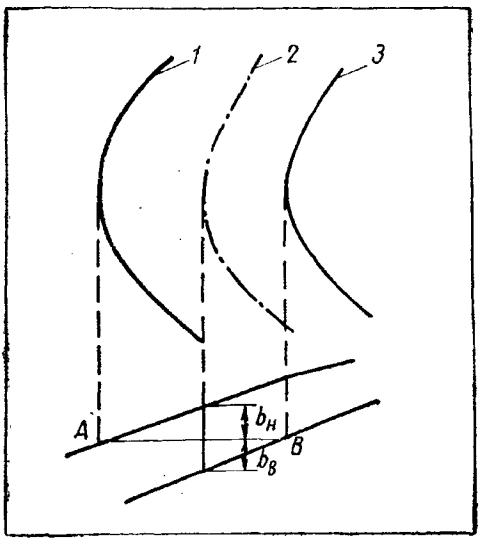


Рис. 94. Схема контуров нефтеносности (по А. П. Крылову).
1 — внешний; *2* — расчетный; *3* — внутренний.

Если в потоке однородной жидкости, фильтрующейся по закону Дарси в однородном пласте, линии тока представляют собой плавные кривые, то при вытесняющем действии одной жидкости на другую, имеющую иные параметры, чем у вытесняющей жидкости, линии тока на подвижной границе раздела двух жидкостей могут преломляться.

Возможное преломление линий тока на границе раздела объясняется скачкообразным изменением при переходе через эти границы одного или нескольких параметров, характеризующих физические свойства жидкости. Вследствие этого массовая скорость фильтрации на границе также претерпевает скачок, изменяясь по величине и направлению. Но чтобы было выполнено условие неразрывности потока, на границе раздела должно быть *равенство нормальных составляющих массовой скорости фильтрации* жидкости по одну и другую сторону границы (рис. 95). В самом деле, количество жидкости, входящей с одной стороны, должно равняться количеству жидкости, выходящей с другой стороны поверхности раздела. В данной точке поверхности раздела расход в единицу времени, отнесенный к единице площади, равен ρv_n, где v_n — нормальная составляющая скорости фильтрации. Следовательно, на границе имеем:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \qquad \text{(XI.1)}$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкости по одну и другую стороны границы раздела соответственно; v_{1n} и v_{2n} — соответствующие нормальные составляющие скорости фильтрации.

Если обе жидкости несжимаемы, равенство (XI.1) запишется так:

$$v_{1n} = v_{2n}. \qquad \text{(XI.2)}$$

Изменение массовой скорости фильтрации (скачок) на границе раздела происходит за счет изменения ее тангенциальной составляющей $\rho_1 v_{1\tau}$ и $\rho_2 v_{2\tau}$ (см. рис. 95).

Кроме условия (XI.1), на границе раздела должно выполняться еще одно: *должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга жидкости по обеим сторонам границы.* Это значит, что

$$p_1 = p_2, \qquad \text{(XI.3)}$$

где p_1 и p_2 — давления по обе стороны границы.

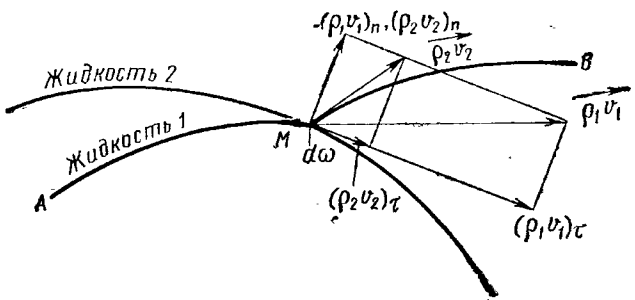


Рис. 95. Преломление линии тока на границе раздела двух жидкостей.

Итак, *на границе раздела вытесняющей и вытесняемой жидкостей должны выполняться условия, выражаемые формулами (XI.1) или (XI.2) и (XI.3).*

Если движение жидкости подчиняется закону Дарси, условие (XI.1) можно представить так:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \qquad \text{(XI.4)}$$

где $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ — производные по нормали к поверхности раздела от потенциальной функции по одну φ_1 и другую φ_2 стороны поверхности. Для одномерного фильтрационного потока, осложненного тем, что одна жидкость вытесняет другую, линии тока не преломляются.

Переходим к рассмотрению некоторых простейших видов неустановившегося одномерного потока, в котором одна жидкость вытесняется другой. В отдельных случаях место вытесняемой или вытесняющей жидкости будет занимать газ. Везде будем считать, что сохраняется закон фильтрации Дарси.

§ 2. Вытеснение нефти водой, которая полностью замещает нефть (поршневое вытеснение) в полосообразном пласте

Рассмотрим прямолинейно-параллельное течение нефти, вытесняемой из пласта к прямолинейной галерее под напором наступающей на нее воды. Нефть и воду считаем несжимаемыми.

На рис. 96 изображена в плане схема полосообразного пласта, в котором движутся обе жидкости.

Давления $p_к$ на контуре питания и $p_с$ на контуре стока принимаются постоянными. Длина пласта L.

Взяв начало координат O на контуре стока, направим, как обычно, ось основной координаты r в сторону, противоположную

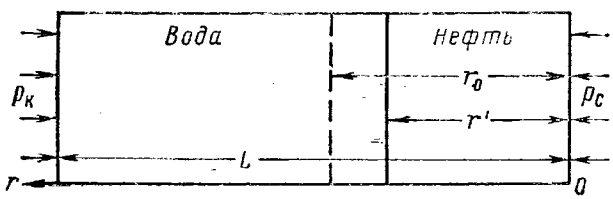


Рис. 96. Вытеснение нефти водой из полосообразного пласта.

направлению потока. Пусть начальный контур нефтеносности был параллелен контурам питания и стока и его координата $r = r_0$. Текущая координата контура нефтеносности $r = r'$. Нефть отличается от воды коэффициентом вязкости; последний для нефти и воды соответственно равен $\mu_н$ и $\mu_в$.

Составим для областей воды и нефти порознь уравнения вида (IV.47), считая, что $j = 0$.

Отметим граничные условия для каждой области с подвижной границей на контуре нефтеносности.

Для области воды:

$$\left.\begin{aligned} p = p_к \text{ при } r = r_к = L; \\ p = p' \text{ при } r = r_с = r'. \end{aligned}\right\} \qquad (XI.5)$$

Для области нефти:

$$\left.\begin{aligned} p = p' \text{ при } r = r_к = r'; \\ p = p_с \text{ при } r = r_с = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (XI.6)$$

Подставляя значения p и r на границах области воды (XI.5) в уравнение (IV.47), получим:

$$\frac{p - p'}{p_к - p'} = \frac{r - r'}{L - r'},$$

отсюда:

$$p = p' + \frac{r - r'}{L - r'}(p_к - p'). \qquad (XI.7)$$

Подстановка значений (XI.6) в уравнение (IV.47), примененное к области нефти, приведет к следующему равенству:

$$\frac{p-p_c}{p'-p_c}=\frac{r}{r'}$$

или

$$p=p_c+\frac{r}{r'}(p'-p_c). \qquad \text{(XI.8)}$$

На водонефтяной границе имеем условие (XI.4), которое в данном случае можно выразить в виде (XI.2):

$$v=\frac{k}{\mu_в}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_в=\frac{k}{\mu_н}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_н, \qquad \text{(XI.9)}$$

где $\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_в$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_н$ — частные производные от давления p, выраженного по формулам (XI.7) и (XI.8) соответственно.

На основании формул (XI.7), (XI.8) и (XI.9) получим:

$$\frac{1}{\mu_в}\frac{p_к-p'}{L-r'}=\frac{1}{\mu_н}\frac{p'-p_c}{r'}. \qquad \text{(XI.10)}$$

Из (XI.10) найдем

$$p=\frac{p_к\mu_н r'+p_c\mu_в(L-r')}{\mu_н r'+\mu_в(L-r')}. \qquad \text{(XI.11)}$$

Подставляя значение p' из (XI.11) в формулу (XI.9), найдем такое выражение скорости фильтрации v:

$$v=\frac{k(p_к-p_c)}{\mu_н r'+\mu_в(L-r')}=\frac{k(p_к-p_c)}{\mu_в L+(\mu_н-\mu_в)r'}. \qquad \text{(XI.12)}$$

Объемный дебит Q вычислим из (XI.12), умножив v на ширину пласта (длину галереи) a и его мощность b:

$$Q=\frac{abk(p_к-p_c)}{\mu_в L+(\mu_н-\mu_в)r'}, \qquad \text{(XI.13)}$$

где r' убывает, изменяясь в таком интервале: $r_0 \geqslant r' \geqslant 0$.

Из формул (XI.11), (XI.12) и (XI.13) следует, что p', v и Q — переменные, зависящие от r', т. е. от протяженности нефтеносной области, которая с течением времени *сокращается*.

Если вязкость нефти больше вязкости воды, т. е. $\mu_н > \mu_в$ то, как видно из формул (XI.12) и (XI.13), скорость фильтрации v и дебит Q с течением времени *возрастают*. Это объясняется тем, что по мере продвижения контура нефтеносности к галерее нефть все больше замещается водой, фильтрационное сопротивление для которой меньше фильтрационного сопротивления для нефти.

В исключительных случаях вязкость пластовой нефти может оказаться меньшей, чем вязкость воды ($\mu_н < \mu_в$). Такое явление возможно, например, тогда, когда нефть сильно газирована (хотя газ и находится в растворенном состоянии), а в пластовой воде растворено много солей.

Найдем *уравнение движения контура нефтеносности.*

Согласно формуле (IV.55), имеем:

$$v' = -m\frac{dr'}{dt}, \qquad \text{(XI.14)}$$

где v' — скорость фильтрации на контуре нефтеносности.

Приравняв правые части (XI.13) и (XI.14), разделив переменные в полученном уравнении и проинтегрировав, будем иметь:

$$t_1 = \frac{m}{k(p_к - p_с)} \int_{r_1'}^{r_0} [\mu_в L + (\mu_н - \mu_н) r'] dr' =$$

$$= \frac{m}{k(p_к - p_с)} \left[\mu_в L (r_0 - r_1') + \frac{\mu_н - \mu_в}{2}\left(r_0^2 - r_1'^2\right)\right], \qquad \text{(XI.15)}$$

где r_1' — значение r' в некоторый момент времени t_1.

Время извлечения всей нефти из пласта T определится из условия, что при $t = T$ величина $r' = 0$:

$$T = \frac{m}{k(p_к - p_с)} \left[\mu_в L r_0 + \frac{\mu_н - \mu_в}{2} r_0^2\right]. \qquad \text{(XI.16)}$$

В соответствии с (XI.15) уравнение контура нефтеносности запишется так:

$$r' = \sqrt{\left(\frac{\mu_в L}{\mu_н - \mu_в} + r_0\right)^2 - \frac{2k(p_к - p_с)}{m(\mu_н - \mu_в)} t} - \frac{\mu_в L}{\mu_н - \mu_в}. \qquad \text{(XI.17)}$$

Подставляя значение r' из равенства (XI.17) в формулу (XI.13), найдем зависимость дебита Q от времени:

$$Q = \frac{abk(p_к - p_с)}{\sqrt{[\mu_в L + (\mu_н - \mu_в) r_0]^2 - \frac{2k(p_к - p_с)(\mu_н - \mu_в)}{m} t}}. \qquad \text{(XI.18)}$$

Для одножидкостной системы, т. е. когда $\mu_н = \mu_в = \mu$, дебит Q постоянен. Из (XI.18) мы получим формулу

$$Q = \frac{abk(p_к - p_с)}{\mu L}, \qquad \text{(XI.19)}$$

которую можно получить непосредственно из первой формулы (IV.32), если выразить значения потенциальной функции φ на границах пласта через соответствующие значения давления и положить, что $j = 0$.

В. Н. Щелкачев исследовал влияние различия коэффициентов вязкости нефти и воды на вытеснение нефти водой. Время вытеснения нефти водой T он сравнил со временем вытеснения нефти нефтью $T_н$. Время T подсчитывалось по формуле (XI.16), а $T_н$ — по этой же формуле, но при условии, что $\mu_н = \mu_в$. Результаты расчетов В. Н. Щелкачева показаны в табл. 23, в которой приводятся значения $\frac{T}{T_н}$ для различных величин $\mu_н/\mu_в$, причем взяты четыре отношения r_0/L, характеризующие относительные размеры области нефтеносности.

Таблица 23

Отношение времени вытеснения нефти водой T ко времени вытеснения нефти нефтью $T_н$ в условиях полосообразного пласта

$\mu_н/\mu_в$	r_0/L			
	0,01	0,1	0,5	1
2	0,50	0,53	0,63	0,75
5	0,20	0,24	0,40	0,60
20	0,05	0,10	0,29	0,53
∞	0,005	0,05	0,25	0,50

Разница в коэффициентах вязкости воды и нефти существенно влияет на время продвижения контура нефтеносности.

Обычно во всей пластовой водонапорной системе область нефтеносности занимает относительно небольшое место. Случаи $r_0 = 0{,}01L$ и $r_0 = 0{,}1L$, взятые в табл. 23, более отвечают реальным условиям, чем два другие случая. Но из табл. 23 видно, *что чем меньше*

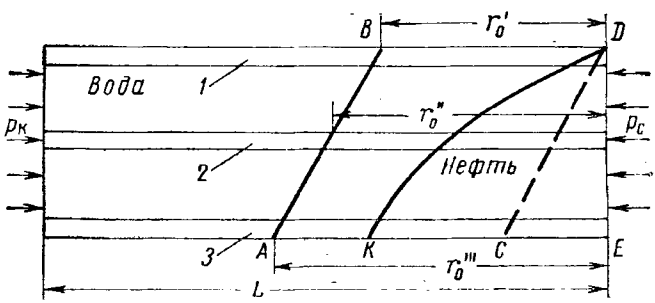


Рис. 97. Деформирование контура нефтеносности в процессе послойного движения нефти при вытеснении ее водой (по В. Н. Щелкачеву).

область нефтеносности сравнительно с областью воды, тем больше различие в значениях T и $T_н$, т. е. тем быстрее вытесняется нефть сравнительно с тем, как вытеснялась бы она, если бы двигалась одножидкостная система. Случай $\mu_н/\mu_в = \infty$ означает, что вязкостью воды пренебрегается.

Выясним влияние различия в коэффициентах вязкости на форму и положение контура нефтеносности.

Мы считали, что вначале контур нефтеносности был параллелен контурам питания и стока. Теперь предположим, что в начальный момент он им непараллелен (рис. 97).

Рассмотрим, как рекомендует В. Н. Щелкачев, движение отдельных полос жидкости. Если полоса достаточно узкая, можно считать, что контур нефтеносности в каждой из таких полос параллелен

галерее DE. Тогда движение контура в каждой из этих полос будет отвечать формулам, выведенным в настоящем параграфе.

Из формулы (XI.12) видно: чем меньше r', т. е. чем ближе фронт воды в данной полосе к стоку, тем больше скорость фильтрации, а следовательно, больше скорость движения жидкости. Точка B начального контура нефтеносности (см. рис. 97) будет продвигаться быстрее вдоль полосы BD, чем точка A вдоль полосы AE. Положение контура нефтеносности в момент начала обводнения галереи можно определить так: подставим в формулу (XI.16) на место r_0 значение r_0' и определим T; это найденное значение T подставим в формулу (XI.17), положив в ней сначала $r_0 = r_0''$, а затем $r_0 = r_0'''$; отсюда определяться три точки контура нефтеносности в момент начала обводнения галереи. На рис. 97 началу обводнения галереи соответствует положение контура KD. Если бы различия в коэффициентах вязкости нефти и воды не было, контур нефтеносности перемещался бы поступательно и к началу обводнения галереи занял бы положение CD.

Из сказанного можно сделать вывод о характере продвижения контура нефтеносности. Появившийся *«язык» обводнения имеет тенденцию вытягиваться с гораздо большей скоростью, чем та, с которой движется остальная часть контура нефтеносности.* Для возможного предотвращения появления языков обводнения *важно расставлять скважины вдоль линии, параллельной первоначальному контуру нефтеносности.*

В рассмотренной задаче предполагалось, что давление на границах $p_к$ и $p_с$ постоянно. Другим вариантом задачи является тот, в котором даются: дебит галереи и постоянное давление на контуре питания пласта $p_к$. По какому закону надо изменять давление в галерее, чтобы выполнялось заданное условие?

Найдем из формулы (XI.13) переменную $p_с$, которую в данном случае можно выразить в функции времени $p_с = p_с(t)$:

$$p_с(t) = \frac{Q\left[\mu_в L + (\mu_н - \mu_в) r'\right]}{abk} + p_к. \qquad \text{(XI.20)}$$

Допустим, что $Q = \text{const}$. Пользуясь формулой (XI.14), представим дебит Q так:

$$Q = -abm\frac{dr'}{dt}. \qquad \text{(XI.21)}$$

Интегрируя (XI.21), получим:

$$r' = r_0 - \frac{Q}{abm}t. \qquad \text{(XI.22)}$$

Подставляя это значение r' в формулу (XI.20), найдем:

$$p_с(t) = \frac{Q\left[\mu_в L + (\mu_н - \mu_в)\left(r_0 - \frac{Q}{abm}t\right)\right]}{abm} + p_к. \qquad \text{(XI.23)}$$

Итак, чтобы поддерживать постоянным дебит галереи при постоянном контурном давлении $p_к$, надо изменять давление в ней по закону,

выражаемому линейной зависимостью (XI.23). Время отбора всей нефти T определяется просто из выражения (XI.22), в котором надо положить $r' = 0$.

§ 3. Плоско-радиальное движение при вытеснении нефти водой

Рассмотрим сначала *полное вытеснение нефти* водой в скважину. Пусть $r_к$ — радиус контура питания; r_0 — радиус начального контура нефтеносности, концентричного по отношению к контурам эксплуатационной скважины и питания; r' — радиус текущего контура нефтеносности (рис. 98); $p_к$ и $p_с$ — постоянные давления на контурах питания и скважины соответственно.

Напишем по аналогии с прямолинейно-параллельным потоком готовые формулы. Формула для переменного давления p' на движущемся контуре нефтеносности, аналогичная формуле (XI.11), запишется так:

$$p' = \frac{p_к \mu_н \ln \frac{r'}{r_с} + p_с \mu_в \ln \frac{r_к}{r'}}{\mu_н \ln \frac{r'}{r_с} + \mu_в \ln \frac{r_к}{r'}} \qquad \text{(XI.24)}$$

Формула *скорости фильтрации жидкости* в точке, имеющей основную координату r, представится так:

$$v = \frac{-k(p_к - p_с)}{\mu_н \ln \frac{r'}{r_с} + \mu_в \ln \frac{r_к}{r'}} \frac{1}{r}. \qquad \text{(XI.25)}$$

Формула *дебита*, аналогичная формуле (XI.13):

$$Q = \frac{2\pi b k (p_к - p_с)}{\mu_н \ln \frac{r'}{r_с} + \mu_в \ln \frac{r_к}{r'}}. \qquad \text{(XI.26)}$$

Полагая в формуле (XI.25) $r = r'$, приравнивая правые части равенств (XI.14) и (XI.25) и затем интегрируя полученное дифференциальное уравнение по t в пределах от 0 до t, по r' в пределах от r_0 до r', получим:

$$t = \frac{m}{2k(p_к - p_с)} \left[(\mu_в \ln r_к - \mu_н \ln r_с)(r_0^2 - r'^2) + \right.$$
$$\left. + (\mu_н - \mu_в)(r_0^2 \ln r_0 - r'^2 \ln r') - \frac{\mu_н - \mu_в}{2}(r_0^2 - r'^2) \right]. \qquad \text{(XI.27)}$$

Считая, что $r' = r_с$, получим из (XI.27) время вытеснения всей нефти. Если же $\mu_в = \mu_н$, то имеем случай одножидкостной системы (см. формулу (IV.57) § 6 главы IV).

Соответствующие расчеты, основанные на формуле (XI.27), показывают, что *различие в коэффициентах вязкости нефти и воды существенно влияет на время вытеснения нефти водой и в условиях*

плоско-радиального потока. Это влияние особенно сильно в случае, когда имеется кольцевая галерея. Условия притока нефти к такой галерее очень близки к условиям притока нефти к кольцевой эксплуатационной батарее скважин, даже при сравнительно небольшом их числе (см. главу IX). Так, при начальном радиусе контура нефтеносности $r_0 = 1$ км, радиусе контура питания $r_к = 50$ км и $\frac{\mu_н}{\mu_в} = 10$ время вытеснения нефти водой к кольцевой галерее радиусом $r_с = 400$ м почти в пять раз меньше времени вытеснения нефти нефтью.

Если в условиях радиального потока принять коэффициент вязкости воды $\mu_в = 0$ (или $\mu_н/\mu_в = \infty$), ошибка в расчете времени

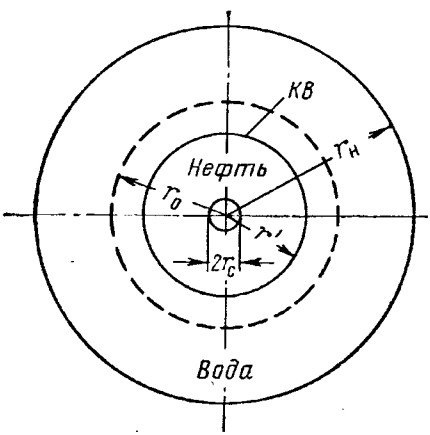


Рис. 98. Схема вытеснения нефти водой в радиальном потоке.

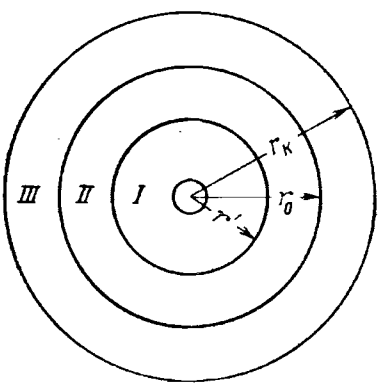


Рис. 99. Схема радиального вытеснения нефти водой с образованием области остаточной нефти.

вытеснения нефти водой будет несущественной (при параллельно-струйном потоке ошибка, как мы видели, достаточно велика).

Рассмотрим процесс вытеснения нефти водой с образованием области остаточной нефти. По-прежнему считаем, что залежь нефти имела первоначально круглую форму, контур нефтеносности концентричен относительно контуров скважины и питания. Как только начинается движение контура нефтеносности, в пласте возникает такая кольцевая область между первоначальным положением контура нефтеносности и его положением в данный момент времени, в которой, кроме вторгшейся воды, содержится еще остаточная нефть (рис. 99).

Будем различать всего три кольцевых области: *I* — плоскорадиального движения нефти между фронтом воды и контуром скважины; *II* — движения воды с остаточной нефтью; *III* — движения воды между контуром питания пласта и первоначальным положением контура нефтеносности.

Введем следующие обозначения: $r_к$ — радиус контура питания, $r_с$ — радиус скважины, r_0 — радиус начального контура нефтенос-

ности, r' — радиус контура нефтеносности в данный момент времени t, k — коэффициент проницаемости пласта, k_2 — коэффициент фазовой проницаемости пласта для воды в области II, в которой осталась нефть, $\mu_н$ и $\mu_в$ — коэффициенты вязкости нефти и воды соответственно.

Эту задачу можно свести к задаче о плоско-радиальном потоке однородной жидкости в пласте с тремя кольцевыми областями, каждая из которых характеризуется своим коэффициентом проницаемости.

Нам известно, что в областях *I* и *III* коэффициенты проницаемости одинаковы и равны k. Будем считать, что во всем пласте движется вода. В действительности же в области *I* движется не вода, а нефть. Чтобы получить из расчетов, относящихся к воображаемому движению, те результаты, какие должны быть получены в действительности, предположим, что проницаемость в области *I* характеризуется коэффициентом k_1, который определим так:

$$k_1 = \frac{\mu_в}{\mu_н} k. \tag{XI.28}$$

Тогда можно считать, что плоско-радиальный поток однородной жидкости (воды) встречает три последовательно залегающие области пласта, на стыке которых проницаемость изменяется скачком. Граница областей *I* и *II* подвижна. Подобная задача рассматривается в § 13 главы IV. Для вычисления объемного дебита Q воспользуемся формулой (IV.127), в которой следует принять $N = 3$, а значение функции Ф на основании формулы (IV.125) определяется так:

$$Ф_к = \frac{\rho p_к}{\mu_в}; \quad Ф_с = \frac{\rho p_с}{\mu_в} \tag{XI.29}$$

Объемный дебит выразится в данном случае следующей формулой:

$$Q = \frac{2\pi b (p_к - p_с)}{\mu_в \left(\frac{1}{k_1} \ln \frac{r'}{r_с} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{r_0}{r'} + \frac{1}{k} \ln \frac{r_к}{r_0} \right)} = \frac{2\pi b (p_к - p_с)}{\frac{\mu_н}{k} \ln \frac{r'}{r_с} + \frac{\mu_в}{k_2} \ln \frac{r_0}{r'} + \frac{\mu_в}{k} \ln \frac{r_к}{r_0}} \tag{XI.30}$$

Скорость продвижения контура нефтеносности v'_r найдем так:

$$v'_r = \frac{Q}{2\pi b r'}. \tag{XI.31}$$

Подставляя в (XI.31) значение v' из формулы (XI.14) и значение Q из формулы (XI.30), получим:

$$dt = -\frac{m}{p_к - p_с} \left(\frac{\mu_н}{k} \ln \frac{r'}{r_с} + \frac{\mu_в}{k_2} \ln \frac{r_0}{r'} + \frac{\mu_в}{k} \ln \frac{r_к}{r_0} \right) r' dr'. \tag{XI.32}$$

Интегрируя уравнение (XI.32) по t в пределах от нуля до t, по r' — в пределах от r_0 до r', найдем:

$$t=\frac{m}{2(p_к-p_с)}\left[\frac{\mu_в}{k}\left(r_0^2-r'^2\right)\ln\frac{r_к}{r_0}+\frac{\mu_в}{k_2}\left(\frac{r_0^2-r'^2}{2}-r'^2\ln\frac{r_0}{r'}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_н}{k}\left(r_0^2\ln\frac{r_0}{r'}-r'^2\ln\frac{r'}{r_с}-\frac{r_0^2-r'^2}{2}\right)\right]. \qquad \text{(XI.33)}$$

Решение этой задачи обобщено Г. Г. Вахитовым и Г. Л. Говоровой для неоднородно-проницаемого пласта, состоящего из произвольного числа концентрических кольцевых областей, каждая из которых характеризуется определенным коэффициентом проницаемости.

Как показывают расчеты по формуле (XI.33), существование зоны с остаточной нефтеносностью *удлиняет процесс отбора всей нефти* из пласта.

§ 4. Существование области двухфазного потока при вытеснении нефти водой

Решая в § 3 настоящей главы задачу о вытеснении нефти водой с образованием области остаточной нефти, мы предполагали, что в этой области коэффициент фазовой проницаемости для воды постоянен. Если бы в водонефтяной области вместе с водой двигалась и нефть, коэффициент фазовой проницаемости не мог быть постоянным вследствие уменьшения насыщенности нефтью порового пространства; извне в эту область нефть не притекает. Очевидно, что остаточная нефть при нашем предположении считается неподвижной. Не будем теперь ограничивать себя таким предположением; допустим, что обе фазы (вода и нефть) движутся.

При движении смеси двух фаз возникает капиллярный эффект. Для одной и той же точки фильтрующей среды давления воды и нефти не равны друг другу. Разность их есть капиллярное давление, которое, по М. С. Леверетту, выражается в функции водонасыщенности s. Однако, по М. Маскету, величина градиента капиллярного давления мала по сравнению с градиентом среднего давления. В практических расчетах для однородного пласта капиллярное давление можно не учитывать [18]. Будем считать, что капиллярный эффект учитывается кривыми фазовых проницаемостей — см. рис. 20; при этом условии рассмотрим процесс вытеснения нефти водой. Обратимся к формуле (IV.105), по которой вычисляется потенциальная функция φ для водонефтяной смеси. Суммарная скорость фильтрации смеси v записывается так:

$$v=\frac{\partial}{\partial r}\int\left(\frac{k_в}{\mu_в}+\frac{k_н}{\mu_в}\right)dp. \qquad \text{(XI.34)}$$

Пусть движение прямолинейно-параллельное, а жидкость несжимаема. Подставим значение v из (XI.34) в уравнение неразрывности (VIII.6а):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{k_в}{\mu_в}+\frac{k_н}{\mu_н}\right)dp\right]=0, \qquad \text{(XI.35)}$$

где x заменяет основную координату r.

Из (XI.35) следует, что суммарная скорость фильтрации неизменна вдоль оси Ox.

$$v=-\left(\frac{k_в}{\mu_в}+\frac{k_н}{\mu_н}\right)\frac{\partial p}{\partial x}=\text{const}. \qquad \text{(XI.36)}$$

Найдя из (XI.36) значение $\frac{\partial p}{\partial x}$, подставим его в выражение скорости фильтрации для воды $v_в$:

$$v_в=-\frac{k_в}{\mu_в}\frac{\partial p}{\partial x}=v\frac{k_в/\mu_в}{\frac{k_в}{\mu_в}+\frac{k_н}{\mu_н}}=vf(s), \qquad \text{(XI.37)}$$

где $f(s)=\frac{k_в/\mu_в}{\frac{k_в}{\mu_в}+\frac{k_н}{\mu_н}}$ — функция С. Ф. Баклея и М. С. Леверетта.

Заметив, что каждая из фаз занимает не весь объем порового пространства, а ту его часть, которая определяется соответствующей насыщенностью, составим теперь, исходя из уравнения (VIII.4а), уравнение неразрывности для воды:

$$\frac{\partial v_в}{\partial x}=-m\frac{\partial s}{\partial t}. \qquad \text{(XI.38)}$$

Дифференцируя (XI.37) по x и подставляя результат в (XI.38), получим:

$$v\frac{\partial f(s)}{ds}\frac{\partial s}{\partial x}+m\frac{\partial s}{\partial t}=0. \qquad \text{(XI.39)}$$

Чтобы найти распределение насыщенности s по длине координаты x в зависимости от времени t, следует решить уравнение (XI.39) относительно s. Но это уравнение нелинейно, так как коэффициент при $\frac{\partial s}{\partial x}$ зависит от s. Для решения уравнения применяют следующий нестандартный численный прием.

Вычислим полную производную от s по времени:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial s}{\partial t}. \qquad \text{(XI.40)}$$

Из (XI.40) найдем $\frac{\partial s}{\partial t}$ и подставим его в (XI.39).

Для плоскости, в которой насыщенность s сохраняет постоянное значение, $\frac{ds}{dt} = 0$; следовательно, из (XI.39) и (XI.40) получим уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v}{m}\frac{df(s)}{ds}. \qquad \text{(XI.41)}$$

Оно называется *уравнением Баклея — Леверетта.*

Как видим, уравнение (XI.41) позволяет определить *скорость распространения заданной насыщенности s.*

С помощью уравнения (XI.41) можно найти расстояние, пройденное к моменту времени t плоскостью, на которой насыщенность равна постоянной величине s. Действительно, проинтегрировав (XI.41), по t, найдем

$$x - x_0 = \frac{vt}{m}\frac{df(s)}{ds}, \qquad \text{(XI.42)}$$

где x и x_0 — координаты рассматриваемой плоскости в моменты времени t и 0, vt — полный объем жидкости, отнесенный к единице площади поперечного сечения, вторгшейся в данную область за время t.

По уравнению (XI.42) допускается вычислять насыщенность, соответствующую любой координате x для всех моментов времени t, если известно распределение насыщенности в момент $t = 0$. Величину производной $\frac{df}{ds}$ можно определить предварительно для каждого значения насыщенности s по известной зависимости относительных фазовых проницаемостей от водонасыщенности — см., например, рис. 25.

Выясним, какого рода затруднения встречаются при вычислении распределения насыщенности рекомендуемым приемом?

Пусть по графикам зависимостей относительных фазовых проницаемостей от водонасыщенности построены две кривые, изображенные на рис. 100*. Одна из них выражает зависимость функции Баклея — Леверетта от водонасыщенности $f(s)$, другая — производную этой функции $\frac{df}{ds} = f'(s)$. Но из уравнения (XI.42) заключаем, что расстояние $x - x_0$ пропорционально производной $f'(s)$ для каждого данного момента времени. Следовательно, график зависимости координаты плоскости, в которой водонасыщенность имеет данное значение, от водонасыщенности s подобен кривой, выражающей зависимость df/ds от s.

Желая изобразить графически зависимость s от $x - x_0$, мы по оси абсцисс откладываем величины $f'(s)$, умноженные на коэффициент пропорциональности vt/m — (см. уравнение (XI.42) — а по оси ординат соответствующие значения s; получим при этом кривую,

---

* На рис. 100 s_A — величина водонасыщенности, обусловливающая подвижность воды; при $s < s_A$ вода неподвижна.

показанную на рис. 101. Для непрерывного ряда значений $x - x_0$ имеем следующее: каждому из значений $x - x_0$ отвечают два значения насыщенности.

Чтобы устранить неоднозначность, надо допустить существование *скачка насыщенности*, в области движения двухфазной жидкости. Определим *насыщенность на фронтальной плоскости воды*, т. е. на плоскости, где возник скачок насыщенности.

Пусть в начальный момент времени область двухфазного потока была занята только нефтью.

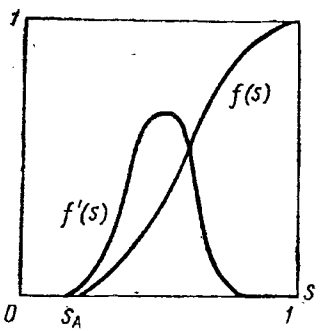


Рис. 100. Графики функции Баклея—Леверетта $f(s)$ и ее производной.

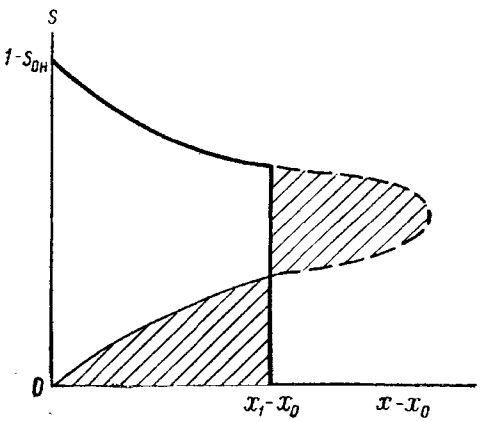


Рис. 101. Зависимость насыщенности s от расстояния $x - x_0$.

Величину vt, обозначающую объем воды, отнесенный к единице площади поперечного сечения, можно вычислить следующим образом:

$$vt = m \int_0^{x_1} s(x, t)\, dx, \qquad \text{(XI.43)}$$

где x_1 — координата скачка насыщенности; $s(x, t)$ — водонасыщенность в функции x и t.

Дифференцируем (XI.42) по s:

$$dx = \frac{vt}{m} f''(s)\, ds. \qquad \text{(XI.44)}$$

Подставив значение dx из (XI.44) в (XI.43), проинтегрируем его по частям:

$$vt = \int_{s=1}^{s_\Phi} vtsf''(s)\, ds = vt\,[s_\Phi f'(s_\Phi) - f(s_\Phi)] - vt\,[f'(1) - f(1)], \qquad \text{(XI.45)}$$

где s_Φ — насыщенность на скачке.

Но из рис. 100 можно видеть, что $f(1) = 1$, а $f'(1) = 0$. Тогда из (XI.45) получим

$$f'(s_\Phi) = \frac{f(s_\Phi)}{s_\Phi}. \qquad \text{(XI.46)}$$

По равенству (XI.46) определяется *насыщенность на скачке* $s_ф$. Определив $s_ф$, можно из (XI.42) вычислить координату скачка x_1. Насыщенность $s_ф$ определяется и графически. Как показывает уравнение (XI.46), производная $f'(s_ф)$ равна отношению ординаты $f(s_ф)$ к абсциссе $s_ф$. Значит, проведя касательную к кривой $f(s)$ из начала координат, следует опустить перпендикуляр из точки касания на ось абсцисс. Основание перпендикуляра укажет значение насыщенности (рис. 102). Распределение насыщенности будет однозначным, если отбрасываются все значения насыщенности, меньшие насыщенности на скачке $s_ф$. Этому значению насыщенности соответствует точка разрыва с координатой $x = x_p$ на рис. 101.

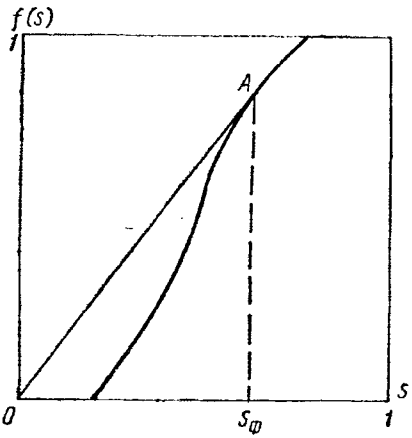


Рис. 102. График для определения насыщенности на фронтальном контуре воды $s_ф$.

Исследование, которое мы здесь не описываем, показывает, что в момент времени, отвечающий, например, кривой рис. 101, координата точки разрыва определяется условием равенства заштрихованных площадей.

Итак, уравнение Баклея — Леверетта позволяет находить положение плоскости, на которой водонасыщенность имеет заданное значение; определять насыщенность на фронтальной плоскости воды, координату этой плоскости и момент начала обводнения стока. Следует помнить, что рассмотренная теория применима к взаимно нерастворимым жидкостям. В случае взаимно растворимых жидкостей расчеты оказываются значительно более сложными, чем описанные в этом параграфе.

Наиболее полное извлечение нефти при вытеснении ее из пласта водой требует затраты большого объемного количества последней. Теория Баклея — Леверетта дает возможность оценить в первом приближении эффективность форсирования добычи жидкости из пласта, так как можно для любого периода времени определить долю добытой нефти по отношению ко всему объему извлеченной из пласта жидкости.

§ 5. Применение метода последовательной смены установившихся состояний к задачам вытеснения газированной нефти водой

Ко всем задачам, рассматриваемым в §§ 2 и 3 настоящей главы, применялся по существу метод последовательной смены установившихся состояний. В чем заключается этот приближенный метод?

Вспомним ход решения задачи вытеснения нефти водой из пластообразного пласта (см. § 2). Используя граничные условия для областей нефти и воды, подставляем значения соответствующих величин на границах этих областей в формулы, которые справедливы для установившихся потоков. Например, формула (XI.7) для подсчета давления p получена из уравнения (IV.47), выведенного в главе IV для установившегося потока. Таким образом, метод последовательной смены установившихся состояний заключается в том, *что неустановившийся процесс движения жидкости или газа рассматривается как непрерывная последовательность мгновенных установившихся состояний* потока. Разумеется, результаты вычислений по этому методу являются приближенными. Метод оказывается полезным во всех тех случаях, в которых точное решение особенно затруднительно.

К. Э. Лембке, по-видимому, впервые применил в 1886 г. метод последовательной смены установившихся состояний к решению задач подземной гидравлики. Развивая метод последовательной смены установившихся состояний, использованный применительно к неустановившейся фильтрации газированной жидкости сначала К. А. Царевичем, а затем Б. Б. Лапуком, М. М. Глоговский и М. Д. Розенберг рассмотрели задачу о вытеснении газированной нефти водой в круговой залежи с учетом остаточной нефти и изменения фазовой проницаемости для воды в зоне вытеснения.

Результаты решения задачи о вытеснении газированной нефти водой в круговой залежи показаны на численных примерах. В одном из примеров учитывались реальные свойства пластовой нефти и газа — изменяемость коэффициентов вязкости нефти и газа в зависимости от давления, отклонение от законов идеальных газов, изменение объемного коэффициента нефти β при дегазации и зависимость растворимости газа в нефти σ от давления — см. § 10 главы IV. В этом случае получены результаты, представленные на рис. 103.

В качестве условия в данном примере принималось, что $r_к = 3000$ м, $r_0 = 500$ м, $p_к = 76$ кгс/см^2, объемный дебит нефти постоянен и равен $Q_н = 150$ м^3/сутки, $k = 1$ д, вязкость нефти при давлении, равном давлению насыщения $\mu_н = 2{,}03$ спз, вязкость газа $\mu_г = 0{,}012$ спз, $m = 0{,}2$, $b = 1$ м. Растворимость σ и объемный коэффициент β определялись по графикам, подобных тем, какие изображены на рис. 22.

Характерную особенность выражает график изменения газового фактора, который авторы обозначили Г; последний, *достигнув некоторого наивысшего значения к концу первого периода разработки залежи, во все последующее время убывает, сначала быстро, а затем медленно* (рис. 103).

Авторы примера приходят к следующему выводу: несмотря на некоторые численные расхождения величин среднего давления $\bar{p}$, насыщенности $\bar{s}$, радиуса фронтального контура воды r' при поршневом вытеснении нефти (т. е. без учета существования зоны остаточной нефти) и в том случае, когда учитывается существование зоны остаточной нефти, в целом *процесс протекает одинаково.* Исследуя

вопрос о вытеснении газированной нефти водой с учетом остаточной нефти, Г. П. Гусейнов и Э. С. Бабиб указывают на возможные причины неполного замещения нефти водой.

Этими причинами они считают следующие:

1) контур питания не полностью обеспечивает пласт водой;

2) фазовая проницаемость для воды за контуром нефтеносности значительно меняется;

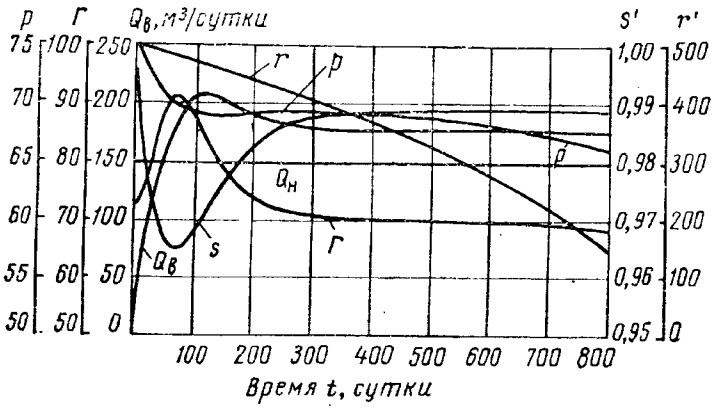


Рис. 103. Изменение во времени величины p', Г, $Q_в$, s, r' при вытеснении газированной нефти водой, если учитываются реальные свойства нефти и газа (по М. М. Глоговскому и М. Д. Розенбергу).

3) соотношение между расстоянием от контура нефтеносности до скважин и радиусом залежи столь велико, что несмотря на заметное возрастание перепада давления, дебит воды возрастает медленно.

§ 6. Вытеснение нефти водой из наклонного пласта. Устойчивость фронта вытеснения

В § 1 настоящей главы отмечалось, что в реальных условиях нефть располагается выше поверхности контакта ее с водой, а пласт имеет некоторый наклон к горизонтальной плоскости. Вопросы о перемещении границы раздела двух жидкостей в вертикальном сечении наклонного пласта с различной степенью приближения к реальным условиям освещались в работах ряда исследователей — В. Э. Казарновской, И. А. Чарного, А. М. Пирвердяна, В. Н. Щелкачева, М. Т. Золоева и Н. К. Михайловского, В. П. Пилатовского и др.

Во всех перечисленных работах, кроме работ И. А. Чарного, предполагалось послойное движение жидкости, т. е. такое, которое можно рассматривать как движение отдельных достаточно узких слоев жидкости вдоль напластования пород. Это соответствовало тому, что коэффициент проницаемости пласта в направлении, перпендикулярном напластованию, равнялся нулю.

Геофизические и геолого-промысловые данные, полученные в ходе разработки некоторых нефтеносных площадей месторождений платформенного типа, показали, что проницаемость пород в направлении, перпендикулярном к простиранию, колеблется в широком диапазоне: коэффициент проницаемости может изменяться от нуля до величины, равной коэффициенту проницаемости по простиранию, а при поперечных трещинах в пласте коэффициент проницаемости неограниченно возрастает.

Дальнейшее развитие работ А. М. Пирвердяна и И. А. Чарного дано С. В. Сафроновым, который, пользуясь приближенными методами, решал задачу о продвижении водонефтяного контакта в слабо наклонном пласте к галерее в двух случаях: 1) проницаемость в направлении, перпендикулярном к напластованию, отсутствует и 2) проницаемость в перпендикулярном направлении к напластованию увеличивается неограниченно. Пласт рассматривался как с одинаковой проницаемостью по напластованию в водяной, нефтяной и переходной областях, так и с различной. Различие величин плотности для воды и нефти не учитывалось.

Результаты решения сводятся к следующему: *существование области остаточной нефти качественно изменяет форму водонефтяного контакта*, которая не остается постоянной, а зависит от коэффициентов проницаемости (для воды в водоносной и переходной областях и для нефти), мощности пласта и угла его наклона. На форму водонефтяного контакта будет влиять соотношение коэффициентов вязкости нефти и воды.

Образование переходной области приводит при прочих равных условиях к *уменьшению скорости движения внутреннего контура нефтеносности* (по подошве пласта) *и к увеличению скорости движения внешнего контура нефтеносности* (по кровле пласта). Отдельные примеры показывают, что внутренний контур нефтеносности перемещается в несколько раз быстрее, чем внешний. Впрочем, точки контакта по подошве могут двигаться быстрее, медленнее или с одинаковыми скоростями по сравнению с точками контакта воды и нефти на кровле в зависимости от того, каковы проницаемость породы, степень остаточной нефтенасыщенности и относительная вязкость.

В. П. Пилатовский сформулировал и развил новый аналитический подход к решению проблемы неустановившегося фильтрационного потока при вытеснении нефти краевой водой в наклонном пласте и в пласте конической формы. В начале пятидесятых годов им было выведено необходимое условие устойчивости неоднородного фильтрационного потока при поступательном перемещении границы раздела двух жидкостей.

Описывая здесь движение фронта вытеснения, мы не рассматривали вопрос об устойчивости фронта. Однако уже в простейшей схеме вытеснения нефти водой, рассмотренной в § 2 настоящей главы, наблюдается искажение формы водонефтяного контура с образованием языка обводнения, если первоначально прямолинейный фронт не параллелен контуру стока.

Представим себе, что вытесняющая жидкость более подвижна, чем вытесняемая, и что фронт вытеснения при прямолинейно-параллельном движении параллелен контуру стока. В этом случае, как следует из § 2, в однородном пласте фронт вытеснения должен оставаться плоским в течение всего процесса вытеснения. Если же на небольшом участке однородность пористой среды нарушается и проницаемость больше, чем у окружающей среды, то при подходе к аномальному участку скорость фронта вытеснения ускоряется. На прежде плоском фронте возникает язык.

Изучив дальнейшую эволюцию языка, можно получить уравнение, показывающее, что любое малое искажение формы фронта будет быстро увеличиваться, если вытесняющая жидкость более подвижна, чем вытесняемая. Уравнение не приводим. Критерием устойчивости фронта для такого рода жидкостей служит величина так называемого *коэффициента подвижности*.

$$\lambda = \frac{k_{во}\mu_н}{k_{нсв}\mu_в}, \qquad (XI.47)$$

где $k_{во}$ — коэффициент проницаемости для воды в присутствии остаточной нефти; $k_{нсв}$ — коэффициент проницаемости для нефти в присутствии связанной воды.

По Р. Е. Коллинзу, фронт вытеснения устойчив, т. е. любое небольшое искажение фронта уменьшается, если $\lambda < 1$; при $\lambda > 1$ фронт неустойчив.

§ 7. Вытеснение газа водой. Условие материального баланса

Рассмотрим плоско-радиальный поток, в котором газ вытесняется водой (рис. 104).

Обозначения следующие:

$p_к$ — давление на контуре питания, радиус которого равен $r_к$; p' — давление на перемещающемся фронтальном контуре воды, радиус которого равен r'; $\bar{p}$ — средневзвешенное по объему давление в газовой залежи.

$$\bar{p} = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} p\, d\tau, \qquad (XI.48)$$

где τ — объем пористой среды в пределах газовой залежи; r_0 — радиус газовой залежи в начальный момент времени.

Пусть вязкость газа $\mu_г = 0$. Тогда можно считать, что во всех точках газоносной области давление одинаково и равно средневзвешенному по объему давлению $\bar{p}$ — см. (XI.48). Газ — идеальный.

Скорость движения фронтального контура воды v_r^* определится на основании формул (IV.55) и (IV.56) так:

$$v_r' = \frac{v'}{m} = \frac{Q}{2\pi r' m b}. \qquad \text{(XI.49)}$$

Поскольку в данном случае задача решается по методу последовательный смены установившихся состояний (см. § 5 настоящей главы), берем для области воды формулу Дюпюи, выражающую объемный дебит Q при установившемся плоско-радиальном потоке несжимаемой жидкости; подставляя это выражение Q в формулу (XI.49) получим:

$$v_r^* = \frac{k}{m\mu_в} \frac{p_к - \bar{p}}{\ln \frac{r_к}{r'}} \frac{1}{r'}. \qquad \text{(XI.50)}$$

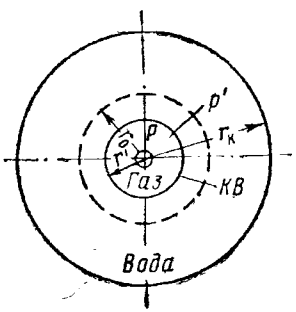


Рис. 104. Схема радиального вытеснения газа водой.

Допустим, что газовая скважина эксплуатируется так, что объемный дебит, приведенный к давлению в 1 кгс/см^2, $Q_г$ остается постоянным. Тогда средневзвешенное давление в газовой залежи $\bar{p}$ будет изменяться. Найдем, воспользовавшись *уравнением материального баланса*, зависимость $\bar{p}$ от времени t. Для газовой залежи это условие можно формулировать так: количество газа, извлеченного из пласта за некоторый промежуток времени, равно изменению запасов газа в пласте за тот же промежуток времени.

Составим уравнение материального баланса.

В начале разработки залежь имела такой запас газа, выраженный в объемных единицах, причем объем τ приведен к давлению в 1 кгс/см^2:

$$\tau = \pi r_0^2 b m p_к,$$

где $p_к$ — давление в кгс/см^2.

За время t от начала разработки добыто газа $Q_г t$. В момент времени t радиус залежи равен r', следовательно, объем содержащегося в ней газа, приведенный к давлению в 1 кгс/см^2, τ будет равен

$$\tau' = \pi r'^2 b \bar{p}.$$

Таким образом уравнение материального баланса можно записать:

$$\pi r'^2 b m \bar{p} = \pi r_0^2 b m p_к - Q_г t. \qquad \text{(XI.51)}$$

Из (XI.51) найдем переменное давление $\bar{p}$:

$$\bar{p} = \frac{\pi r_0^2 b m p_к - Q_г t}{\pi r'^2 b m}. \qquad \text{(XI.52)}$$

Выражение средневзвешенного давления $\bar{p}$ (XI.48) следует подставить в уравнение (XI.50), в котором левая часть на основании формулы (XI.14), можно представить в виде dr'/dt.

Этим путем получается дифференциальное уравнение движения фронтального контура воды, имеющее следующий вид:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{k}{m\mu_в} \frac{(r_0^2 - r'^2)\, p_к - \frac{Q_г t}{\pi b m}}{r'^3 \ln \frac{r_к}{r'}} \qquad \text{(XI.53)}$$

Уравнение (XI.53) интегрируется приближенными методами.

Б. Б. Лапук, решавший задачу о вытеснении газа водой, рекомендует интегрировать уравнение (XI.53) способом последовательных приближений. Опишем сущность этого способа.

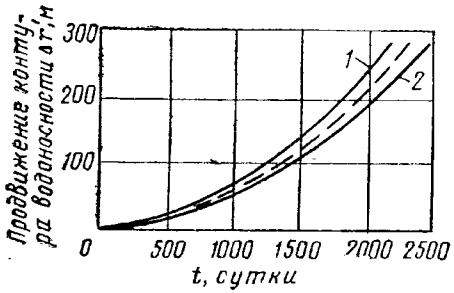


Рис. 105. Кривые продвижения контура воды, вытесняющей газ (по Б. Б. Лапуку).

Заменим в формуле (XI.52) переменную величину знаменателя r' постоянной r_0, т. е. предположим, что за время t размеры газовой залежи не изменились. Как следует из формулы (XI.52), давление $\bar{p}$, вычисленное в результате такой замены, будет заниженным. Подставив теперь заниженное значение $\bar{p}$ в уравнение (XI.50), получим вместо уравнения (XI.53) следующее дифференциальное уравнение с разделенными переменными:

$$r' \ln \frac{r_к}{r'}\, dr' = -\frac{kQ_г t\, dt}{\pi m^2 \mu_в r_0^2 b}. \qquad \text{(XI.54)}$$

Проинтегрировав (XI.54), уравнение движения фронтального контура воды представим в таком виде:

$$t = mr_0 \sqrt{\frac{2\pi\mu_в b}{kQ_г}\left[\left(\frac{r'^2}{2}\ln\frac{r'}{r_к} - \frac{r'^2}{4}\right) - \left(\frac{r_0^2}{2}\ln\frac{r_0}{r_к} - \frac{r_0^2}{4}\right)\right]}. \qquad \text{(XI.55)}$$

Найденная из уравнения (XI.55) величина r' является заниженной, поскольку мы занизили величины $\bar{p}$, тем самым приняв ее значение таким, каким оно должно быть когда фронтальный контур воды будет ближе к скважине, чем он есть на самом деле (чем меньше $\bar{p}$, тем ближе к скважине контур воды, т. е. тем меньше r').

Найдем далее завышенное значение r'. Для этого заниженное значение r' подставим в уравнение (XI.52) и получим завышенное значение $\bar{p}$. Это завышенное значение $\bar{p}$ снова подставляем в уравнение (XI.50) и определяем в том же порядке завышенное значение r'.

Если найденные указанным способом завышенные и заниженные значения r' существенно отличаются друг от друга, переходят ко второму приближению, с которым связаны расчеты, выполняемые в той же последовательности, в какой выполнялись расчеты в первом приближении.

На рис. 105 представлены кривые зависимости расстояния, покрываемого точками фронтального контура воды, вытесняющей газ, $\Delta r' = r_0 - r'$ от времени t. Кривая *1* соответствует заниженным значениям r', полученным в первом приближении; кривая *2* построена по завышенным значениям r' в первом же приближении. Как видно из рис. 105, в данном случае нет необходимости прибегать ко второму приближению, ибо завышенные и заниженные значения $\Delta r'$ достаточно близки друг к другу.

Для расчета были приняты следующие исходные данные: $r_к = 11{,}75$ км; $r_0 = 1{,}75$ км; $b = 7{,}5$ м; $m = 0{,}16$; $k = 0{,}8_д$; $p_к = 28$ кгс/см^2; $\mu = 1$ спз; $Q_г = 97\,700$ м^3/сутки.

По результатам исследования можно сделать вывод, что *пренебрежение вязкостью газа при расчетах, связанных с плоско-радиальным вытеснением газа водой не вносит крупной ошибки в определение положения фронтального контура воды.*

При вытеснении газа водой в случае *прямолинейно-параллельного потока в расчетах следует учитывать вязкость газа.*

§ 8. Вытеснение нефти газом

Рассмотрим круглую газовую шапку, под давлением в которой нефть вытесняется из пласта в скважины. Начальный радиус газовой шапки r_0, радиус газовой шапки в момент времени t равен r'.

В простейшей постановке задача о вытеснении нефти за счет расширения газовой шапки решается при следующих условиях:

1) нефть принимается за однородную несжимаемую жидкость;

2) пренебрегается вязкостью газа, т. е. в каждый данный момент давление во всех точках газовой шапки принимается одинаковым;

3) газ принимается за идеальный.

Задача может решаться в разных вариантах, например, при заданных давлениях в газовой шапке и в скважинах или при заданных дебите скважин и расходе газа, нагнетаемого в газовую шапку.

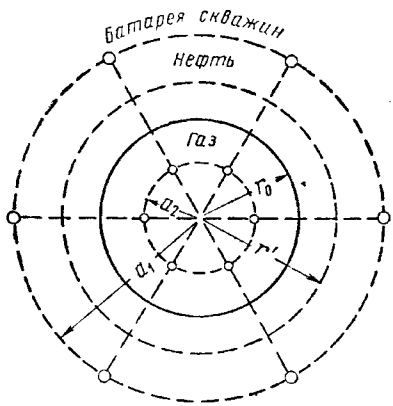


Рис. 106. Схема вытеснения нефти в скважины кольцевой батареи за счет расширения газовой шапки.

Выберем тот вариант задачи в простейшей ее постановке, в котором давления в газовой шапке и в эксплуатационных скважинах поддерживаются постоянными.

Пусть нефть вытесняется к кольцевой батарее n эксплуатационных скважин, начальный контур газовой шапки концентричен по отношению к кольцу скважин. Радиус r_0 меньше радиуса батареи a_1 (рис. 106).

Газовая шапка предполагается непрерывно расширяющейся при неизменном давлении в ней p_0. Это значит, что в газовую шапку закачивается газ, препятствующий снижению давления. Давление в эксплуатационных скважинах $p_c = \text{const}$.

В § 4 главы VII дана формула массового дебита скважины кольцевой батареи для кругового контура питания (VII.43). При этом оговорено, что формула выводилась с помощью отображения стоков — скважин относительно контура питания (т. е. с помощью инверсии относительно окружности — контура) и размещения в точках — отображениях фиктивных источников, причем дебит источников равен дебиту стоков. Воспользуемся формулой (VII.43) для решения нашей задачи о вытеснении нефти в случае газовой шапки (см. рис. 106).

Допустим, что круговая граница расширяющейся газовой шапки радиусом r' есть окружность инверсии, относительно которой отображаются стоки источниками. Будем теперь считать в отличие от задачи, к которой относится формула (VII.43), что реальные стоки, а следовательно, и область нефти, находятся вне окружности радиусом r', а их отображения (фиктивные источники) — внутри этой окружности. Но, так как фронтальный газовый контур (окружность инверсии) подвижен, а положения стоков (скважин) фиксированы, следует предположить, что вместе с окружностью перемещается каждый фиктивный источник. При этом должно быть выполнено условие взаимной симметричности стока и источника — см. формулу (VII.15).

Применительно к условиям настоящей задачи формула массового дебита эксплуатационной скважины M' запишется так:

$$M' = 2\pi b \frac{\varphi_0 - \varphi_c}{\ln \dfrac{a_1^{2n} - r'^{2n}}{n r_c a_1^{n-1} r'^{n}}}, \qquad \text{(XI.56)}$$

где φ_0 и φ_c — значения потенциальной функции на фронтальном газовом контуре и на контуре эксплуатационных скважин соответственно.

Считая, что плотность и вязкость нефти постоянны и равны $\rho_н$ и $\mu_н$, найдем, воспользовавшись формулой (IV.46), что

$$\Delta\varphi_c = \varphi_0 - \varphi_c = \frac{k\rho_н}{\mu_н}(p_0 - p_c). \qquad \text{(XI.57)}$$

Подставив значение $\Delta\varphi_c = \varphi_0 - \varphi_c$ из (XI.57) в формулу (XI.56) и разделив обе ее части на $\rho_н$, получим выражение объемного дебита скважин:

$$Q' = \frac{2\pi b k}{\mu_н} \frac{p_0 - p_c}{\ln \dfrac{a_1^{2n} - r'^{2n}}{n r_c r'^{n} a_1^{n-1}}} \qquad \text{(XI.58)}$$

Найдем *уравнение движения фронтального газового контура.*

Полагаем, что вся вытесняемая в скважины нефть замещается газом расширяющейся шапки. Если за время dt объем вытесненной нефти можно выразить произведением $nQ'dt$, то объем заместившего ее газа можно определить как приращение объема газа за счет расширения газовой шапки: $2\pi r' bmdr'$.

Таким образом, имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$nQ' dt = 2\pi bmr' dr'. \qquad \text{(XI.59)}$$

Подставив в уравнение (XI.59) значение Q' из формулы (XI.58) и проинтегрировав, получим уравнение движения фронтального газового контура в таком виде:

$$t = \frac{m\mu_н r_0^2}{nk\,(p_0 - p_c)} \int_{r_0}^{r'} \frac{r}{r_0} \ln \frac{\left(\frac{a_1}{r_0}\right)^{2n} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n}}{n\left(\frac{r_c}{r_0}\right)\left(\frac{a_1}{r_0}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n}} d\left(\frac{r}{r_0}\right), \qquad \text{(XI.60)}$$

где правая часть представляется в функции верхнего предела содержащегося в ней интеграла.

Введя безразмерный параметр $\tau(r')$, напишем (XI.60) в таком виде:

$$t = \frac{r_0^2}{n} A\tau(r'), \qquad \text{(XI.61)}$$

где

$$A = \frac{m\mu_н}{k(p_0 - p_c)}. \qquad \text{(XI.61а)}$$

а $\tau(r')$ есть интеграл в правой части равенства (XI.60).

Объем газа, внедренного в пласт за некоторый промежуток времени, подсчитывается с помощью формулы (XI.59).

Следует заметить, что при рассмотрении вопроса внедрения газа в пласт мы имели в виду существование нагнетательных скважин, пробуренных в газовую шапку. Однако не следует думать, что выводя формулы (XI.56)—(XI.61), мы моделировали эти нагнетательные скважины теми скользящими фиктивными источниками, которые условно поместили внутри контура газовой шапки и которые, по нашему предположению, движутся вслед за газовым контуром; мысленно осуществляя «скольжение» фиктивных источников, размещенных внутри газового контура в определенном порядке (по правилу инверсии), мы воспроизводим приближенную картину неустановившегося потока к батарее эксплуатационных скважин со стороны расширяющейся газовой шапки, которая сохраняет при этом форму круга. Нетрудно понять, что способ скользящих источников есть просто некоторая разновидность метода последовательной смены установившихся состояний.

Возникает вопрос: в какой мере справедливо допущение того, что во все время расширения газовой шапки она сохраняет форму круга?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим скорости частиц фронтального газового контура в направлении главных и нейтральных линий тока. Напомним, что для кольцевой батареи равнодебитных скважин главной линией тока называлась в главе VII прямая, проходящая через центр батареи скважин и центр скважины. Нейтральная линия тока — прямая, делящая угол между двумя соседними главными линиями тока пополам.

Вычислим сначала модуль скорости фильтрации в области нефти. Как известно из главы IX, для этого надо найти модуль производной от характеристической функции данного течения по комплексному z. Характеристическую функцию составляем, пользуясь формулой (IX.49) для одной кольцевой батареи эксплуатационных скважин.

В данном же случае имеются две концентрические кольцевые батареи: эксплуатационная батарея и батарея фиктивных скользящих источников (см. рис. 106).

По методу суперпозиции найдем, что

$$F(z)=\frac{Q'}{2\pi b}\ln(z^n-a_1^n)-\frac{Q'}{2\pi b}\ln(z^n-a_2^n)=\frac{Q'}{2\pi b}\ln\frac{z^n-a_1^n}{z^n-a_2^n}. \quad \text{(XI.62)}$$

На основании формулы (VII.15) a_2 можно представить так:

$$a_2=\frac{r'^2}{a_1}. \quad \text{(XI.63)}$$

Подставляя значение a_2 из (XI.63) в формулу (XI.62) и вычисляя модуль производной от $F(z)$ по независимому z, найдем выражение модуля скорости фильтрации нефти $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}|=\left|\frac{dF(z)}{dz}\right|=\frac{Q'}{2\pi b}\left|\frac{nz^{n-1}(z'^{2n}-a_1^{2n})}{(z^n-a_1^n)(a_1^nz^n-r'^{2n})}\right|, \quad \text{(XI.64)}$$

где Q' — определяется по формуле (XI.58).

Уравнение главной линии тока в полярных координатах можно записать так (см. главу IX): $\theta=0$. Уравнение нейтральной линии тока: $\theta=\frac{\pi}{2}$, где θ — полярный угол.

Представляя z в формуле (XI.64) в полярных координатах, т. е. считая, что $z=re^{i\theta}$, для точек *главной линии тока* получим:

$$|\vec{v}|=\frac{Q'}{2\pi b}\frac{nr^{n-1}(a_1^{2n}-r'^{2n})}{(a_1^n-r^n)(a_1^nr^n-r'^{2n})}. \quad \text{(XI.65)}$$

На границе с газовой шапкой, т. е. при $r=r'$ будем иметь из (XI.65):

$$|\vec{v}_{\text{гл}}|=\frac{nQ'}{2\pi br'}\frac{a_1^n+r'^n}{a_1^n-r'^n}=\frac{nQ}{2\pi br'}\frac{1+\left(\frac{r'}{a_1}\right)^n}{1-\left(\frac{r'}{a_1}\right)^n}, \quad \text{(XI.66)}$$

где $|\vec{v}_{гл}|$ — модуль скорости фильтрации нефти на границе с газовой шапкой для точек главной линии тока.

Тем же путем получим выражение модуля скорости фильтрации нефти на границе с газовой шапкой для точек *нейтральной линии тока* $\vec{v}_н$:

$$|\vec{v}_н| = \frac{nQ'}{2\pi b r'} \frac{1-\left(\frac{r'}{a_1}\right)^n}{1+\left(\frac{r'}{a_1}\right)^n}. \qquad (XI.67)$$

Скорость движения нефти на границе с газовой шапкой можно определить, разделив модуль скорости фильтрации на величину m.

Скорость движения фронтального контура газовой шапки $v_ф$ определится из формулы (XI.59) так:

$$v'_ф = \frac{dr'}{dt} = \frac{nQ'}{2\pi b m r'}. \qquad (XI.68)$$

Из формул (XI.66)—(XI.68) следует:

$$|\vec{v}'_н| < |\vec{v}'_ф| < |\vec{v}'_{гл}|, \qquad (XI.69)$$

где $\vec{v}'_{гл} = \frac{v_{гл}}{m}$ — скорость движения нефти на границе с газовой шапкой по главной линии тока; $v'_н = \frac{v_н}{m}$ — скорость движения на той же границе по нейтральной линии.

Сравним скорости движения нефти на границе с газовой шапкой $v'_{гл}$ и $v'_н$ со скоростью движения фронтального газового контура v'.

В табл. 24 показаны отношения $v'_{гл}/v'_ф$ и $v'_н/v'_ф$ при различных значениях, для двух случаев:

1) число скважин эксплуатационной батареи $n = 4$ и 2) число скважин $n = 10$. Расчет производился по таким формулам

$$\left.\begin{aligned} \frac{v'_{гл}}{v'_ф} &= \frac{a_1^n + r'^n}{a_1^n - r'^n} \\ \frac{v'_н}{v_ф} &= \frac{a_1^n - r'^n}{a_1^n + r'^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (XI.70)$$

Проанализируем результаты наших подсчетов с помощью табл. 24.

При десяти скважинах в батарее можно считать, что нефть на всей границе с газовой шапкой движется с той скоростью, с какой движется газовый фронт, до тех пор, пока радиус газовой шапки не достигнет величины, несколько превышающей половину радиуса эксплуатационной батареи. Даже при радиусе газовой шапки $r' = 0{,}6a_1$, наибольшая скорость нефти на границе с газовым фронтом $v'_{гл}$ превосходит скорость последнего всего лишь на $\sim$1,2%.

На столько же процентов меньше скорости газового фронта будет минимальная вдоль этой границы скорость нефти. $v'_н$.

Таблица 24

Отношения наибольших и наименьших значений скорости движения нефти $v'_{гл}$ и $v'_{н}$ на границе с газовой шапкой к скорости движения контура газоносности v'

Относительное положение контура газоносности, r'/a_1	$v'_{гл}/v'$		$v'_{н}/v'$	
	$n=4$	$n=10$	$n=4$	$n=10$
0,1	1,0002	~ 1	0,998	~ 1
0,2	1,0032	~ 1	0,9968	~ 1
0,3	1,0163	~ 1	0,9839	~ 1
0,4	1,0525	~ 1	0,9501	~ 1
0,5	1,135	~ 1	0,880	~ 1
0,6	1,297	1,0121	0,770	0,9880
0,7	1,632	1,0581	0,613	0,9451
0,8	2,395	1,2405	0,418	0,8061
0,9	4,82	1,536	0,208	0,484

С дальнейшим продвижением фронтального газового контура к скважинам батареи обнаруживается все большее различие между наибольшей скоростью нефти на границе с шапкой и скоростью контура шапки. Так при $r' = 0{,}8\ a_1$, скорость нефти $v'_{гл}$ превышает скорость газового контура уже на $\sim$24%, при $r = 0{,}9\ a_1$ — на $\sim$54%. Скорость частиц нефти по нейтральной линии тока на границе с шапкой отстает от скорости газового фронта при $r' = 0{,}8a_1$ более чем на 19%, при $r' = 0{,}9a_1$ — более чем на 51%.

Для четырех скважин указанный прогрессирующий разрыв между скоростями нефти и наступающего газа заметно выявляется при меньших значениях r'. Так, если $r' = 0{,}4\ a_1$, разность между $v'_{гл}$ и v' уже превышает 5%, а при $r' = 0{,}5\ a_1$ — $\sim$13%.

Так как вслед за нефтью неразрывно движется газ расширяющейся газовой шапки, нельзя допускать, что в реальных условиях могут существовать разрывы между скоростью нефти на газовой границе и скоростью газового фронта. Следовательно, газовая шапка может сохранять круглую форму лишь до того момента, пока не образуется достаточно заметный разрыв в скоростях замыкающих движение частиц нефти и передовых частиц газа. Как видно из табл. 24, для десяти скважин этот разрыв намечается при значениях r' несколько больших $0{,}6a_1$; для четырех скважин уже при значениях r' только несколько больших $0{,}3a_1$.

Как только намечается разрыв в скоростях, который, например, можно видеть в табл. 24, так форма газового контура искажается. Фронт газа вытягивается в направлении главных линий тока и одновременно втягивается внутрь в направлении нейтральных линий тока. Вследствие вытягивания газового фронта в кратчайшем направлении к скважинам, *газ может прорваться к ним из газовой шапки* как только появятся признаки искажения ее круглой формы.

Начиная с этого момента, очевидно, должен быть изменен режим нагнетания газа в пласт, чтобы предотвратить возможный прорыв газа из газовой шапки.

Чем больше скважин в батарее, тем ровнее продвигается фронтальный газовый контур.

Итак, способ скользящих источников применим к решению задачи о вытеснении нефти под напором расширяющейся круглой газовой области лишь в тех пределах, в каких допустимо считать, что газовая область сохраняет свою первоначальную форму.

По табл. 24 и формуле (XI.59) или (XI.61) можно определить время разработки залежи нефти, в течение которого допустимо держать постоянным давление в газовой шапке, не рискуя вызвать прорыв газа в эксплуатационные скважины.

Например, если первоначальный радиус газовой шапки $r_0 = 100$ м, а радиус батареи эксплуатационных скважин $a_1 = 300$ м, то при десяти скважинах в батарее можем считать приближенно на основании табл. 24, что форма газовой шапки будет оставаться круглой до тех пор, пока радиус r' не достигнет примерно значения $2/3a_1$, т. е. пока он не станет равным $\sim$200 м.

Пусть радиус скважины $r_c = 0{,}1$ м.

Вычисляя время t_{10} по формуле (XI.61) путем численного интегрирования в пределах изменения r' от $r' = 100$ м до $r' \approx 200$ м, найдем, что $t_{10} = 18\,080\,A$ сек, (если A имеет размерность сек/м^2), где A определяется формулой (XI.61а).

При двадцати скважинах ($n = 20$) в тех же условиях и увеличении радиуса r' до $\sim$200 м получим время $t_{20} = 13\,440A$ сек. Видим, что время t_{20} составляет $\sim$74,5% от времени t_{10}.

§ 9. Итоги некоторых работ, уточняющих исследования вытеснения нефти газом

Познакомимся вкратце с постановкой и результатами решений отдельных задач о вытеснении нефти газом. Уточнения, которые вносились в решения этих задач, приближали их к реальным условиям пластового потока.

М. Маскет рассматривал процесс нефтеотдачи пласта с учетом силы тяжести и при условии расширения газовой шапки. Не вводя в формулы элемент времени, он составил уравнение материального баланса в общем конечном виде [18]. Из построенных Маскетом графиков видно, что на положение контакта газ — нефть не влияет соотношение между количествами добытого и возвращенного в пласт газа; положение контакта определяется в основном суммарной нефтеотдачей [1]. Отмечено, что при медленном падении давления (до определенного предела снижения) газовый фактор в области нефти растет медленно и не имеет максимума, характерного для случая достаточно быстрого снижения давления.

---

[1] О нефтеотдаче — см. § 3 главы X.

Маскетом рассматривались и другие задачи вытеснения нефти под воздействием газа. На этих задачах останавливаться не будем.

Г. П. Гусейнов составил дифференциальные уравнения материального баланса для газированной нефти и газа и, пользуясь ими, исследовал вопрос о нефтеотдаче пластов с газовой шапкой при нагнетании или без нагнетания газа. В работе учитывалось поступление части газа из шапки вместе с нефтью в эксплуатационные скважины.

Оказалось, что с увеличением относительного объёма пор в пределах газовой шапки *конечная нефтеотдача и насыщение свободным газом пространства, занятого газированной нефтью и водой, увеличиваются при данном давлении.* Увеличивается и газовый фактор.

В работе М. М. Глоговского и М. Д. Розенберга задача о вытеснении нефти газом решалась и с учетом вязкости газа (по методу последовательной смены установившихся состояний).

Сопоставляя результаты решения задачи без учета вязкости газа в газовой шапке с результатами, полученными с учетом вязкости газа, можно сделать вывод, что расхождение в расчетах незначительно. Возможно предпочесть более простые формулы упрощенного решения более сложным формулам, в которых учитывается вязкость газа. Только при сближении фронтального контура газа с галереей — стоком требуется применять более сложные формулы.

Интересно отметить некоторые особенности вытеснения нефти воздухом в лабораторных условиях.

Л. К. Мамедов, проводивший опыты на специально смонтированной установке, где укреплялись образцы в основном несцементированных пород, указывает на то, что после окончания процесса вытеснения нефти воздухом *остаточной нефти бывает больше на участках близ выхода.* На участках около входа нефти почти не остается. После окончания процесса вытеснения нефти воздухом при определенном градиенте давления и последующем его повышении не увеличивается фильтрация нефти.

В главе XV читатель найдет приближенное решение задачи об отборе нефти из пласта в условиях нагнетания газа по всей площади залежи.

§ 10. Заключительные замечания к главе

Гидравлическая расчетная схема вытеснения смешивающихся жидкостей, описанная в настоящей главе, отражает картину действительного вытеснения в той мере, в какой не учитываются явления, сопутствующие процессу. Картина движения была бы представлена более полно, если бы учитывалось, например, явление диффузии. В простейшем случае *диффузия* — это выравнивание концентрации в неоднофазной системе. При движении смеси, например, воды и нефти, происходят беспорядочные блуждания элементов системы — молекул и более крупных частиц, взвешенных в жидкости (броуновское

движение). В условиях постоянной температуры диффузия характеризуется стремлением *к выравниванию химических потенциалов.*

Движение газожидкостной смеси в пласте сопровождается явлением сорбции, в результате которого происходит поглощение газа жидкой фазой.

Эти сопутствующие явления изучаются с помощью подземной гидродинамики, физики и физикохимии нефтеносных и газоносных пластов. Методы одной только подземной гидравлики недостаточны, чтобы процесс вытеснения смешивающихся жидкоостей был освещен во всей его полноте. Однако общее представление о процессе вытеснения дает то описание процесса, которому посвящена настоящая глава.

Глава XII

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НЕФТЕВОДОНОСНЫХ ПОРИСТЫХ ПЛАСТАХ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ

При подсчете запасов нефти и газа в нефтегазоводоносных пластах, проектировании разработки нефтяных месторождений и в процессе самой разработки их следует учитывать упругие свойства жидкости и нефтеводоносного пласта. Доминирующие формы пластовой энергии в процессе его разработки определяют режим пласта.

Если преобладающей формой пластовой энергии будет та, источником которой является упругая деформация пласта и сжатый жидкости, режим пласта назовем упругим.

В пластовой жидкости может содержаться природный газ. Когда пластовое давление превышает давление насыщения жидкости газом, весь пластовый газ находится в растворенном состоянии. Если в начале разработки пласта давление было больше давления насыщения, то режим пласта был непременно упругим. Движению пластовой жидкости в условиях именно такого режима и посвящается настоящая глава. Очевидно в этом случае поток однофазный.

Отметим две характерные особенности упругого режима.

1) наблюдаются *длительные* (неустановившиеся) *процессы перераспределения давления в пласте*;

2) происходит *изменение упругого запаса жидкости* в пласте (подробнее об упругом запасе будет сказано в следующих параграфах).

Движение жидкости в условиях упругого режима возникает в ближайшей окрестности скважины в начале ее эксплуатации (или введенной для нагнетания); только через некоторое время оно распространится на более удаленные области пласта.

В ряде случаев приток жидкости к скважинам поддерживается за счет напора воды, поступающей в пласт из области питания. Тогда режим пласта называется водонапорным. Однако всякий водонапорный режим является также и упругим. Следовательно, водонапорный режим пласта можно именовать *упруго-водонапорным*.

Если вытеснение жидкости из пласта происходит не под действием преобладающего влияния упругости пласта и жидкости, упруго-водонапорный режим вступает в новую фазу; режим становится *жестким водонапорным*. Конечно, влияние упругости пласта и жид-

кости на фильтрационный поток при этом не прекращается, но упругие свойства заметно не проявляются.

Не всякий упругий режим будет упруго-водонапорным. Название упругого режима мы сохраним за упруго-водонапорным или за замкнуто-упругим режимом. Поясним последний термин.

Пусть нефтеводоносный пласт выклинивается в непроницаемую для жидкости породу или он ограничен непроницаемыми сбросами. Доступ жидкости в пласт извне отсутствует. При этих условиях пласт является закрытым, запасы жидкости в процессе ее отбора не пополняются. Обычно большое в начале разработки пласта давление по мере истощения запаса жидкости падает. В данном случае налицо *замкнуто-упругий режим.*

Разработка девонских пластов Туймазинского месторождения нефти, к которым приурочены крупные залежи нефти, начиналась и протекала в условиях ярко выраженного упруго-водонапорного режима.

Примером пласта, разрабатываемого в условиях замкнуто-упругого режима, может служить пласт XIII месторождения Озек-Суат в Затеречной равнине.

Хотя идеи, указывающие на существование упругого режима пластов, были высказаны еще в двадцатых годах нашего столетия И. Н. Стрижовым, первые гидродинамические теории упругого режима появились позднее. Теория упругого режима, разработанная М. Маскетом, Р. Шилсюизом и У. Херстом не включала объемную упругость пласта.

Наиболее полно основы теории упругого режима пластов заложены в СССР В. Н. Щелкачевым, который исследовал впервые влияние объемной упругости пористой среды и ряда важных параметров на фильтрацию жидкости. Им же решены различные задачи теории упругого режима, относящиеся к практике разработки нефтяных месторождений. Исследования по теории упругого режима проводились в СССР многими учеными и инженерами в связи с разработкой нефтяных месторождений. Решением задач упругого режима в связи с вопросами гидрогеологии занимались Ф. М. Бочевер, Н. Н. Веригин, Б. И. Куделин и др.

§ 1. Основные параметры теории упругого режима

Важнейшими параметрами теории упругого режима являются *коэффициенты объемной упругости жидкости и пласта* (см. § 2 главы IV).

Большое значение в практике добычи нефти и подсчета ее запасов имеет величина *упругого запаса выделенной области пласта*, соответствующая заданному падению давления. Следуя В. Н. Щелкачеву, определим упругий запас как *количество жидкости, высвобождающейся в процессе отбора из некоторой области пласта при снижении пластового давления до заданной величины*, если высвобождение происходит за счет объемного расширения жидкости и уменьшения порового пространства пласта [33].

Обозначая упругий запас через $\Delta\tau_э$, получим:

$$\Delta\tau_э = \Delta\tau_ж + \Delta\tau_п, \qquad \text{(XII.1)}$$

где $\Delta\tau_ж$ — вычисляется по формуле (IV.14), $\Delta\tau_п$ — по формуле (IV.22).

Подставляя в формулу (XII.1) значения $\Delta\tau_ж$ и $\Delta\tau_п$, найдем:

$$\Delta\tau_э = \beta_ж \Delta p m\tau + \beta_с\tau \Delta p = (m\beta_ж + \beta_с)\,\tau \Delta p = \beta^*\tau \Delta p, \qquad \text{(XII.2)}$$

где m — коэффициент пористости.

$$\beta^* = m\beta_ж + \beta_с. \qquad \text{(XII.3)}$$

Коэффициент β^* будем называть *коэффициентом упругоемкости пласта.* Он показывает, какую долю от выделенного элемента объема пласта составляет объем жидкости, высвобождающейся из элемента пласта при снижении пластового давления на единицу давления, например на 1 кгс/см^2.

Введем в рассмотрение параметр, характеризующий темпы изменения пластового давления.

Вскрытие пласта и изменение режима работы действующей эксплуатационной или нагнетательной скважины вызывает «возмущение» в пласте, вследствие чего происходит перераспределение пластового давления. От «возмущающей» скважины, в которой произошло изменение давления, возмущение передается во все стороны пласта. Однако изменение давления распространяется в пласте не мгновенно. Скорость распространения изменения пластового давления характеризуется величиной $\varkappa$, названной В. Н. Щелкачевым коэффициентом пьезопроводности пласта.

$$\varkappa = \frac{k}{\mu\beta^*}, \qquad \text{(XII.4)}$$

где μ — абсолютная вязкость жидкости; k — коэффициент проницаемости пласта. Размерность коэффициента $\varkappa$ такова:

$$[\varkappa] = L^2T^{-1}.$$

Здесь L имеет размерность длины; а T — размерность времени.

Наиболее часто встречающиеся значения $\varkappa$ заключены в таком интервале:

$$1000 \text{ см}^2/\text{сек} \leqslant \varkappa \leqslant 50\,000 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

О происхождении названия коэффициента пьезопроводности и самой величины $\varkappa$ будет сказано ниже.

При изучении неустановившихся процессов перераспределения пластового давления и отдачи жидкости пластом удобно пользоваться безразмерными величинами.

Введем два *безразмерных параметра Фурье*, выражающих «безразмерное время» fo и Fo.

Показывая ту или иную зависимость переменных величин упругого режима от времени, удобно пользоваться в одном случае параметром fo, содержащим численное значение радиуса скважины r_c; в другом случае — параметром Fo, содержащим значение величины, характеризующей размеры пласта, $r_к$.

$$\text{fo} = \frac{\varkappa t}{r_c^2}, \tag{XII.5}$$

$$\text{Fo} = \frac{\varkappa t}{r_к^2}, \tag{XII.6}$$

где t — время.

Очевидно, что параметры fo и Fo зависят также от физико-геологических констант пород и свойств пластовой жидкости.

§ 2. Дифференциальное уравнение пьезопроводности

Пусть при упругом режиме жидкость в пласте движется в соответствии с законом Дарси. Тогда проекции скорости фильтрации на оси декартовых координат v_x, v_y и v_z выразятся формулами (VIII.7).

В качестве уравнений состояния используем уравнения (IV.13) и (IV.23). Изменение пористости элемента пласта в единицу времени

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau_п}{\partial t}; \tag{XII.7}$$

(напомним, что пористость $m = \frac{\tau_п}{\tau}$ см., например, § 2 главы II).

Значит, на основании формулы (IV.23), будем иметь такое выражение для $\frac{\partial m}{\partial t}$:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \beta_c \frac{\partial p}{\partial t}; \tag{XII.8}$$

следовательно, правой части уравнения неразрывности (VIII.4) или (VIII.5) можно придать с помощью формул (IV.12) и (XII.8) следующий вид:

$$-\frac{\partial (m\rho)}{\partial t} = -\rho (m\beta_ж + \beta_c)\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{XII.9}$$

Подставляя значения v_x, v_y, и v_z из формул (VIII.7) в уравнение неразрывности (VIII.4) или (VIII.5) и заменяя его правую часть величиной (XII.9), получим:

$$\frac{k}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right] = \rho (m\beta_ж + \beta_c)\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{XII.10}$$

Теперь, пользуясь зависимостью (IV.13), можно исключить из уравнения (XII.10) одно из переменных ρ или p. Учитывая, что согласно (IV.13)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\beta_{ж}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\beta_{ж}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y},$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\beta_{ж}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z},$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\beta_{ж}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

перепишем уравнение (XII.10) в таком виде:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} = \frac{\mu\beta^*}{k}\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad \text{(XII.11)}$$

Это есть *дифференциальное уравнение пьезопроводности.*

Чтобы исключить из уравнения (XII.10) величину ρ, обратимся к формуле (IV.18) на основании которой получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} &= \rho_{ат}\beta_{ж}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right); \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho_{ат}\beta_{ж}\frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.12)}$$

Пользуясь равенствами (XII.12), представим дифференциальное уравнение (XII.11) так:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XII.13)}$$

Дифференциальный трехчлен в скобке левой части уравнения (XII.13) можно представить символически в виде: Δp или $\nabla^2 p$. Тогда уравнение (XII.13) запишется короче:

$$\varkappa\,\Delta p = \frac{\partial p}{\partial t}$$

или

$$\varkappa\,\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XII.14)}$$

Уравнение вида (XII.11) или (XII.13)—(XII.14) известно в теории теплопроводности под названием уравнения теплопроводности. В теории теплопроводности роль давления играет температура, а роль коэффициента $\varkappa$ — коэффициент температуропроводности, характеризующий быстроту перераспределения температуры в проводнике теплоты. По аналогии с этим параметром теории теплопроводности величина $\varkappa$ и названа коэффициентом пьезопроводности [33].

Уравнение (XII.11) или (XII.13)—(XII.14) позволяет решать задачи неустановившегося движения жидкости в пласте с упругим режимом. Решение задачи сводится к определению, например, функции $p = p(x, y, z, t)$ при заданных начальных и граничных условиях.

§ 3. Скважина в пласте неограниченных размеров
Основная формула

Знакомя читателей с основными параметрами упругого режима, мы указывали на то, что, например, вскрытие пласта, сопровождаемое пуском скважины, вызывает в пласте возмущения, распространяющееся во все стороны от возмущающей скважины. Возмущающая скважина является источником зарождения процесса перераспределения пластового давления.

Имея дело с горизонтальным упругим пластом большой протяженности и единственной скважиной, можно моделировать движение жидкости в нем как плоское радиальное к точечному стоку (в случае эксплуатационной скважины) или от точечного источника (в случае нагнетательной скважины).

Рассмотрим процесс перераспределения пластового давления при *неустановившемся плоском радиальном движении жидкости.*

Очевидно, что вследствие радиальной симметрии давление в любой точке пласта будет функцией двух переменных — расстояния r этой точки до стока (источника) и времени t:

$$p = p(r,\ t),$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Беря полярную систему координат и представляя дифференциальный двучлен левой части уравнения (XII.13)[1] так, чтобы в нем были частные производные от p только по r, получим из (VIII.15) и (XII.13):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XII.15)}$$

Предположим сначала, что в пласт неограниченно большого протяжения введен мгновенный сток. Хотя сток существует лишь одно мгновение, возникает возмущенное состояние. Лапласом дано для этого случая решение уравнения (XII.15) в следующем виде:

$$p(r,\ t) = C - \frac{A}{t}\, e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}, \qquad \text{(XII.16)}$$

где A и C — некоторые постоянные.

В том что функция (XII.16) удовлетворяет уравнению (XII.15), легко убедиться подстановкой.

Найдем значения постоянных A и C. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ давление в пласте было $p = p_0 = \text{const}$. Полагая в (XII.16) $t = 0$ и $r > 0$, видим, что второй член правой части обра-

[1] При плоском движении член $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ отсутствует.

щается в неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим: $C = p_0$. Таким образом, будем иметь:

$$p_0 - p(r,\ t) = \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}. \qquad \text{(XII.17)}$$

Если сток существовал в момент времени t', формула (XII.17) запишется так:

$$p_0 - p = \frac{A}{t - t'} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa (t-t')}}. \qquad \text{(XII.18)}$$

Выясним, сколько жидкости высвобождается из пласта в результате существования мгновенного стока.

Возьмем кольцевой элемент пласта с центром в данном мгновенном стоке, имеющий внутренний радиус r, а ширину dr. Обозначая выделившийся из элемента объем жидкости через $d\tau_ж$ применим к элементу формулу для подсчета упругого запаса (XII.2). На основании (XII.2) и (XII.17) получим:

$$d\tau_ж = \beta^* \Delta p\, d\tau = 2\pi b \beta^* \frac{A}{t} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}} r\, dr, \qquad \text{(XII.19)}$$

где Δp — снижение давления, равное $p_0 - p$, $d\tau = 2\pi r b dr$.

Обозначим через $\tau_ж$ объем жидкости, выделившейся из всего пласта, и проинтегрируем (XII.19):

$$\tau_ж = 2\pi b \beta^* \frac{A}{t} \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}} dr = 4\pi b \varkappa \beta^* A \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}} d\left(\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) =$$

$$= -4\pi b \varkappa \beta^* A e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}} \Big|_0^\infty = \frac{4\pi b k A}{\mu}. \qquad \text{(XII.20)}$$

Отсюда определяется A — величина, выражаемая в функции мгновенного отбора жидкости $\tau_ж$:

$$A = \frac{\mu \tau_ж}{4\pi b k}. \qquad \text{(XII.21)}$$

Перейдем теперь к случаю скважины, введенной в неограниченный пласт в некоторый (начальный) момент времени и действующей непрерывно с постоянным объемным дебитом Q; найдем выражающую снижение давления в любой точке пласта $\Delta p = p_0 - p$.

Подставим значение A из (XII.21) и равенство (XII.18):

$$p_0 - p = \frac{\mu \tau_ж}{4\pi b k (t - t')} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa (t-t')}}. \qquad \text{(XII.22)}$$

Допустим, что сток не мгновенен, а существует в течение времени dt'. За этот промежуток времени через сток выделяется из пласта такой объем жидкости $d\tau_ж$

$$d\tau_ж = Q\,dt'. \qquad \text{(XII.23)}$$

Подставляя значение $d\tau_ж$ из (XII.23) в равенство (XII.22) и интегрируя последнее в соответствии с предположением о непрерывной работе стока при $Q = \text{const}$, получим:

$$p_0 - p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\int_0^t e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}}\frac{dt'}{t-t'}. \qquad \text{(XII.24)}$$

Полагая, что $\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')} = u$, получим решение уравнения (XII.15) в таком виде:

$$p_0 - p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\int_{\frac{r^2}{4\varkappa t}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du. \qquad \text{(XII.25)}$$

Если введем общепринятое обозначение для *интегральной показательной функции*

$$\int_{\frac{r^2}{4\varkappa t}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du = -\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right),$$

то решение (XII.25) запишется так:

$$p_0 - p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right] \qquad \text{(XII.26)}$$

(решение У. Томсона — Кельвина).

Формула (XII.26) является *основной формулой теории упругого режима пластов.*

Сделаем несколько замечаний относительно функции $-\mathrm{Ei}(-x)$. Известно, что при изменении аргумента интегральной показательной функции $-\mathrm{Ei}(-x)$ от 0 до ∞ функция изменяется от ∞ до 0, как это видно из табл. 25*.

Таблица 25

Значения интегральной показательной функции

x	0	10^{-4}	10^{-2}	0,1	1	2	10	∞
$-\mathrm{Ei}(-x)$	∞	8,631	4,04	1,82	0,22	0,049	$0{,}4\cdot10^{-5}$	0

* Значения функции — Ei $(-x)$, соответствующие аргументу x, можно найти во многих математических справочниках. См. например, Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции. «Наука», 1964.

Если представить функцию $-\mathrm{Ei}(-x)$ в виде ряда, получим:

$$-\mathrm{Ei}(-x)=\ln\frac{1}{x}-C_э+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{18}-\frac{x^4}{96}+\ldots, \qquad (XII.27)$$

где постоянная Эйлера $C_э = 0{,}5772$. Ряд сходится всюду при $0<x<\infty$.

Для малых значений x, например для $x = 0{,}01$, можно считать, что

$$-\mathrm{Ei}(-x)=\ln\frac{1}{x}-C_э. \qquad (XII.28)$$

Заметим еще, что

$$\frac{d}{dx}[-\mathrm{Ei}(-x)]=-\frac{e^{-x}}{x}. \qquad (XII.29)$$

§ 4. Анализ основной формулы теории упругого режима

Строго говоря, основная формула (XII.26) справедлива лишь для случая точечного стока, т. е. для $r_c = 0$. Однако практическое использование формулы допустимо и при $r_c \neq 0$; формула применима даже при больших значениях r_c, например, порядка одного километра (укрупненная скважина). Как показывают численные расчеты, нельзя пользоваться формулой (XII.26) только для времени t в долях секунды от момента пуска скважины.

Таблица 26

Относительная погрешность формулы (XII.26) при расчетах изменения давления в случае скважины конечного радиуса

fo	Погрешность формулы (XII.26), %
5	0,4
10	5
25	2,3
100	0,6

Если скважина укрупненная, формула (XII.26) может дать большую погрешность лишь вблизи от ее стенки (контура). Чем дальше отстоит от этой стенки точка, в которой определяется давление, и чем больше времени прошло с момента пуска укрупненной скважины, тем меньше упомянутая погрешность, что подтверждается итогами подсчетов, приведенными в табл. 26.

Таблица составлена следующим образом. Значение величины $\Delta p = p_0 - p$ вычислялось по двум формулам для нескольких значений параметра $\mathrm{fo} = \frac{\varkappa t}{r_c^2}$. По первой расчетной формуле можно определить величины понижения давления в скважине *конечного* радиуса r_c в ограниченном открытом круговом пласте. Эту формулу мы не приводим; читатель может найти ее в книге [33]. Вторая расчетная формула — (XII.26), т. е. для случая *точечной* скважины. При данном значении времени t параметр fo тем больше, чем меньше величина радиуса r_c.

Путем сравнения результатов вычисления Δp_c по обеим расчетным формулам устанавливается размер погрешности, которая и приводится в табл. 26. Из таблицы видим, что с увеличением параметра fo погрешность формулы (XII.26) уменьшается.

Примеры: 1) пусть $r_c = 10$ см, $\varkappa = 10^4$ см^2/сек, fo $= 25$.

По формуле (XII.5) найдем, что $t = 0{,}25$ сек;

2) если $r_c = 1$ км $= 10^5$ см (укрупненная скважина), $\varkappa = 10^4$ см^2/сек, fo $= 10$, найдем, что $t \approx 116$ суток.

По этим примерам и табл. 26 можно определить абсолютную погрешность при заданном радиусе скважины.

Выясним, какова точность формулы (XII.26), если в ней взято приближенное значение функции $-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)$, выраженное двумя первыми членами ряда (XII.27), т. е. значение, вычисленное по формуле (XII.28). Согласно последней имеем:

$$p_0 - p = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left(\ln\frac{4\varkappa t}{r^2} - C_э\right). \qquad \text{(XII.30)}$$

Величина, которую не превышает погрешность формулы (XII.30), подсчитанная в процентах, показана в табл. 27.

Таблица 27

Наибольшие величины погрешности формулы XII.30 при некоторых значениях $\varkappa t/r^2$

$\varkappa t/r^2$	$\geqslant 2{,}3$	$\geqslant 8{,}33$	$\geqslant 25$
Наибольшие величины погрешности в %	5,7	1,0	0,25

Из таблицы явствует, что если $\varkappa t/r^2$ не меньше 25, погрешность формулы (XII.30) не превышает 0,25%; если $\varkappa t/r^2$ не меньше 8,33, погрешность не больше 1%.

Таким образом, гарантируя точность в пределах 1%, мы можем утверждать, что скорость изменения давления будет одинакова во всех тех точках пласта, по отношению к которым выполняется неравенство $\frac{\varkappa t}{r^2} \geqslant 8{,}33$.

В самом деле, пользуясь формулой (XII.30), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{Q\mu}{4\pi bk}\frac{1}{t}, \qquad \text{(XII.31)}$$

значит скорость изменения давления $\partial p/\partial t$ не зависит от координаты r.

Дифференцируя равенство (XII.30) по переменному r, найдем величину градиента давления $\partial p/\partial r$:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi bk}\frac{1}{r}. \qquad \text{(XII.32)}$$

Эта формула совпадает с формулой для величины градиента давления в условиях установившегося плоского радиального движения несжимаемой жидкости.

Чем больше t, тем большее значение r будет удовлетворять неравенству

$$\frac{\varkappa t}{r^2} \geqslant 8{,}33, \qquad \text{(XII.33)}$$

при котором расчеты по формуле (XII.30) выполняются с точностью до 1%; следовательно, с достаточной для практики точностью мож-

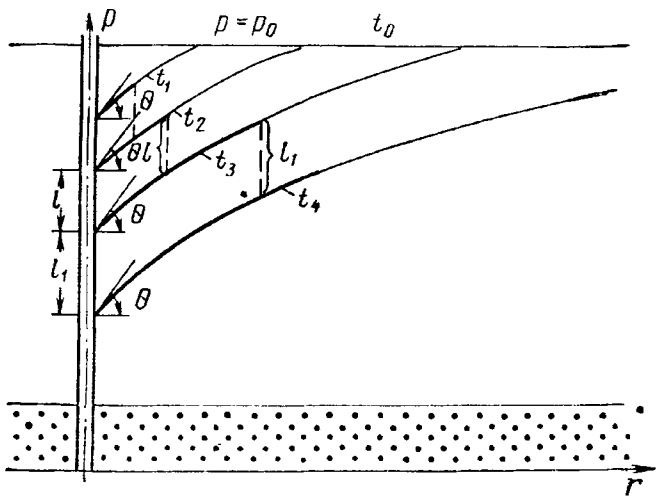


Рис. 107. Пьезометрические кривые с участками квазиустановившегося состояния (по В. Н. Щелкачеву).

но принимать, что равенства (XII.31) и (XII.32) справедливы для всех r, удовлетворяющих неравенству (XII.33).

В заключение можно формулировать вывод: вскоре после пуска скважины вокруг нее начинает непрерывно увеличиваться область пласта, в которой для каждого момента времени давление распределяется так, как и при установившемся движении, т. е. *давление оказывается квазиустановившимся*. Пьезометрические кривые в пределах этой области будут кривыми логарифмического типа.

На рис. 107 изображены пьезометрические кривые для различных моментов времени. Участки кривых, соответствующие квазиустановившемуся состоянию, отмечены жирными линиями. В пределах области квазиустановившегося состояния углы наклона касательных к разным кривым для одной и той же точки пласта (например, на забое скважины) одинаковы — см. формулу (XII.32).

Возьмем формулу (XII.30) для точки $r = r_c$ и видоизменим ее, воспользовавшись безразмерными параметрами.

Введем параметр ΔP, определяющий безразмерное понижение давления в некоторой точке пласта следующим образом:

$$\Delta P = \frac{2\pi bk\,(p_0 - p)}{\mu Q}. \qquad \text{(XII.34)}$$

Взяв параметры (XII.5) и (XII.34), перепишем формулу (XII.30) так:

$$\Delta P_c = \frac{1}{2}(\ln 4f_0 - C_э), \qquad \text{(XII.35)}$$

где ΔP_c — значение параметра ΔP на забое возмущающей скважины.

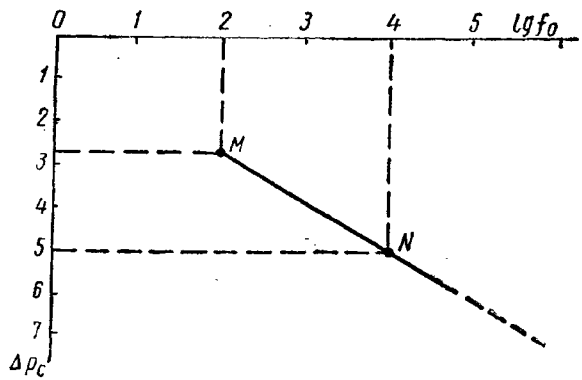


Рис. 108. Универсальный график зависимости между безразмерным понижением давления Δp_c и lg fo (по В. Н. Щелкачеву).

Учитывая, что

$$C_э = \ln 1{,}781, \qquad \text{(XII.36)}$$

получим из (XII.35) формулу, которой будем пользоваться для расчетов

$$\Delta P_c = 0{,}4045 + 1{,}15 \lg f_0. \qquad \text{(XII.37)}$$

Формулу (XII.37) иногда представляют в таком виде:

$$\Delta P_c = \frac{1}{2}\ln 2{,}246 f_0. \qquad \text{(XII.38)}$$

Подсчеты по формуле [XII.37] можно выполнить с точностью до 0,6% при $f_0 \geqslant 100$.

Это условие и определяет нижний предел применимости формулы (XII.37) к исследованию изменения давления на забое возмущающей скважины.

Формула (XII.37) действительна для пласта неограниченных размеров. Что касается скважины, эксплуатирующей конечный круглый открытый пласт, то о применимости формулы (XII.37) к такому пласту будет сказано в следующем параграфе.

Нетрудно построить по формуле (XII.37) *универсальный график*, изображенный на рис. 108, учитывая, что зависимость между ΔP_c и lg fo линейная; достаточно иметь для его построения две точки, например, точку M с координатами fo $= 100$ и $\Delta P_c = 2{,}7$ и точку N с координатами fo $= 10^4$ и $\Delta P_c = 5{,}0$.

§ 5. Движение жидкости в пласте конечных размеров в условиях упруго-водонапорного и замкнуто-упругого режимов

1. Рассмотрим *круглый горизонтальный пласт с открытой внешней границей* радиуса $r_к$, через которую из области питания может поступать вода при истощении упругого запаса. Вертикальный схематический разрез такого пласта показан на рис. 109.

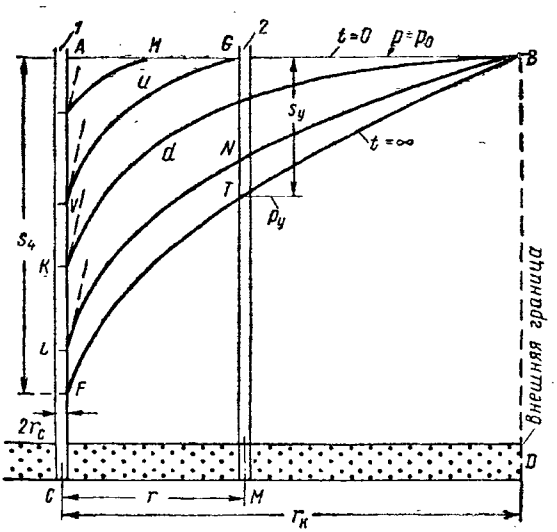


Рис. 109. Изменение пьезометрической кривой во времени для скважины, действующей с постоянным дебитом.
Скважины: *1* — возмущающая, *2* — реагирующая.

Допустим, что центральная скважина радиусом r_c мгновенно пущена в эксплуатацию, с постоянным дебитом Q. Перед ее пуском давление во всем пласте было равно p_0.

Для определения давления в любой точке пласта в любой момент времени надо проинтегрировать дифференциальное уравнение (XII.15) при заданных граничных и начальных условиях.

Выводы соответствующих формул во всех задачах настоящего параграфа мы не приводим. Познакомиться с формулами можно в специальной литературе.

В данной задаче неустановившееся понижение давления в любой точке пласта $\Delta p = p_0 - p$ можно выразить в функции координаты

этой точки r и безразмерного параметра Fo — [зависящего от времени t].

Для установившегося плоско-радиального потока имеем формулу Дюпюи (IV.51):

$$Q_{\text{у}} = \frac{2\pi bk\,(p_0 - p_{\text{у}})}{\mu \ln \frac{r_{\text{к}}}{r}}, \qquad \text{(XII.39)}$$

где $p_{\text{у}}$ — установившееся давление в любой точке пласта или в реагирующей бездействующей скважине (см. например, скважину GM на рис. 109). Давление $p_{\text{у}}$ соответствует времени $t = \infty$ (или Fo = $= \infty$).

Обозначим установившееся понижение давления в любой точке пласта, вычисленное по формуле (XII.39), так:

$$p_0 - p_{\text{у}} = \Delta p_{\text{у}} = \text{const}. \qquad \text{(XII.40)}$$

Теперь введем величину α, которую назовем безразмерным понижением давления в реагирующей скважине или в любой точке пласта, удаленной на расстояние r от оси возмущающей скважины (см. рис. 109):

$$\alpha = \frac{p_0 - p}{p_0 - p_{\text{у}}} = \frac{\Delta p}{\Delta p_{\text{у}}}. \qquad \text{(XII.41)}$$

Безразмерное понижение давления α для круглого пласта с открытой внешней границей при условии, что $r_{\text{с}} \ll r_{\text{к}}$ подсчитывается по формуле, которую можно найти в [33].

Если взять формулу (XII.26) для неограниченного пласта и воспользоваться ею для расчета величины α в пласте конечных размеров, мы можем получить соответствующую расчетную формулу. Эта приближенная формула, выведенная с помощью равенства (XII.39), имеет следующий вид [33]:

$$\alpha = -\frac{1}{2 \ln \frac{r_{\text{к}}}{r}} \operatorname{Ei}\left[-\left(\frac{r}{r_{\text{к}}}\right)^2 \frac{1}{4\text{Fo}}\right]. \qquad \text{(XII.42)}$$

Результаты расчетов по соответствующим формулам сведены для сравнения в табл. 28. Величина r принята равной 0,1 $r_{\text{к}}$; $r_{\text{к}} = 10^5 r_{\text{с}}$.

Из табл. 28 видно, что приближенной формулой (XII.42) можно пользоваться при расчетах пласта конечных размеров.

В предыдущем параграфе настоящей главы мы установили нижний предел значений параметра fo, при которых справедлива формула (XII.37). Выясним, каков верхний предел применимости той же формулы, если пласт конечных размеров. Для этого в самом общем случае при любом соотношении между $r_{\text{к}}$ и $r_{\text{с}}$ сравним результаты вычислений по формуле (XII.37) с результатами вычислений по формуле, позволяющей определить безразмерное понижение давления $\Delta P_{\text{с}}$ на забое возмущающей скважины, пущенной в эксплуатацию с постоянным дебитом Q в открытом круглом пласте.

Таблица 28

Величины безразмерного понижения давления α в реагирующей скважине после пуска возмущающей скважины с постоянным дебитом

Формула для расчета	Значение Fo						
	0,005	0,01	0,05	0,1	0,2	0,5	∞
Конечного пласта . .	0,122	0,227	0,536	0,681	0,827	0,970	1
Неограниченного пласта	0,122	0,227	0,536	0,681	0,829	1,026	—

Примечание. Реагирующая скважина удалена от возмущающей на $r=0{,}1r_к$; $r_к 10^3 r_c$.

Формула для ΔP_c в конечном круглом пласте здесь не приводится. Читатель найдет ее в книге [33].

Сравнение результатов показывает, что расхождения в значениях ΔP_c для бесконечного и конечного пластов не превосходит 1%, если $\text{fo} \leqslant 3{,}5 \cdot 10^5$ и $r_к \geqslant 1000 r_c$. Учитывая, что между fo и Fo существует зависимость

$$\text{fo} = \left(\frac{r_к}{r_c}\right)^2 \text{Fo},$$

заметим, что эти расхождения в значениях ΔP_c не превосходят 1%, если $\text{Fo} \leqslant 0{,}35$ и $r_к \geqslant 1000\, r_c$. Указанные значения fo и Fo при взятом соотношении между $r_к$ и r_c можно считать верхними пределами, при которых справедлива формула (XII.37).

На рис. 109 показано изменение пьезометрической кривой в различные моменты времени после пуска возмущающей скважины с постоянным дебитом. Пласт имеет круговой контур области питания.

2. Рассмотрим *закрытый пласт с центральной скважиной, имеющей постоянный дебит.* Пьезометрические кривые падения давления для нескольких моментов времени изображены на рис. 110.

С некоторого момента смещение во времени пьезометрической кривой для закрытого пласта, происходит так, что все точки ее опускаются на одно и то же расстояние, т. е. во всех точках пласта давление падает с одинаковой скоростью.

Рассматривая рис. 109 и 110 замечаем, что в условиях упругого режима процесс перераспределения давления, а значит, и процесс взаимодействия скважин развивается *постепенно.* Если же в практике нефтедобычи наблюдается аномально быстрое взаимодействие скважин, это можно объяснить направленной трещиноватостью пласта.

Кроме того, важно заметить, что в возмущающей скважине давление понижается сначала быстро, а затем замедляется. Аналогичные замечания можно сделать по поводу повышения давления в скважине

после ее остановки, если до этого момента она функционировала с постоянным дебитом.

В тех точках пласта, до которых не распространился еще процесс изменения давления, градиенты давления равны нулю; следовательно, через сечения пласта, заключающие в себе эти точки, не будет протекать жидкость. Для примера возьмем границу пласта с областью питания (на рис. 109 точка D). До момента времени, в который пьезометрическая кривая займет положение KB, жидкость не проникала в пласт через контур питания. Только с этого момента градиент давления на контуре питания пласта становится отличным от нуля и начинается поступление воды в пласт из области питания.

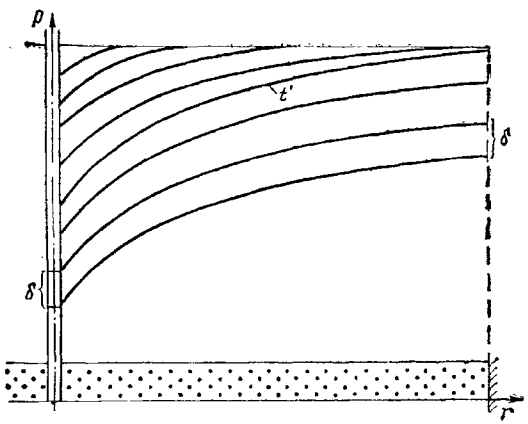


Рис. 110. Кривые падения давления в закрытом пласте.

Если скважина действовала с постоянным дебитом Q при установившемся потоке и в некоторый момент времени отбор жидкости из пласта прекращается, начнется процесс восстановления давления. Уровень жидкости в скважине будет подниматься.

Для расчетов в этом случае получим те формулы, которые приведены в §§ 4 и 5 данной главы, но только всюду вместо данных понижения давления в пласте и в самой возмущающей скважине надо подставить данные повышения давления после ее остановки.

Графики зависимости безразмерного понижения давления на забое возмущающей скважины от безразмерного параметра t_0 построены для неограниченного пласта, для открытого пласта конечных размеров и для закрытого пласта [33].

Вид такого графика в каждом из трех случаев показан на рис. 111.

Отметим, что в условиях закрытого пласта, т. е. при замкнуто-упругом режиме, начиная с некоторого момента времени, давление падает равномерно, т. е. с постоянной скоростью (см. рис. 111). Все сказанное относительно поведения эксплуатационной скважины с постоянным дебитом справедливо и в отношении поведения

нагнетательной скважины. Соответствующие графики, например, графики рис. 109 должны быть повернуты теперь на 180° вокруг прямой $p = p_0$.

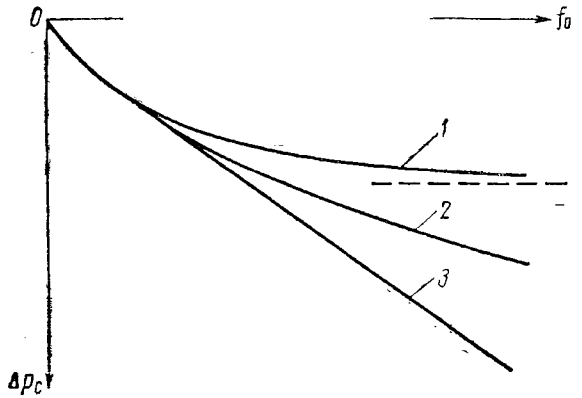


Рис. 111. Кривые зависимости безразмерного понижения давления в скважине Δp_c от безразмерного параметра f_0 (по В. Н. Щелкачеву).

Для пластов: *1* — открытого конечного; *2* — бесконечного; *3* — закрытого.

3. Предположим, что в *ограниченном открытом круглом пласте* имеется центральная возмущающая скважина, мгновенно пущенная в эксплуатацию с *постоянным забойным давлением* p_c.

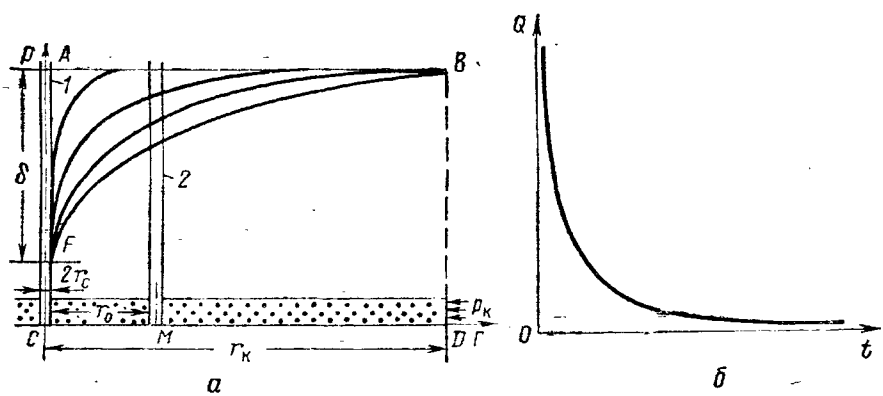


Рис. 112. Пьезометрические кривые в различные моменты времени после пуска возмущающей скважины с постоянным забойным давлением.

Скважины: *1* — возмущающая; *2* — реагирующая.

На рис. 112, *а* изображена в различные моменты пьезометрическая кривая после пуска возмущающей скважины с постоянным забойным давлением p_c, а на рис. 112, *б* — изменение дебита скважины с течением времени.

4. Пусть центральная возмущающая скважина конечного радиуса пущена мгновенно в эксплуатацию с *постоянным давлением* p_c *в закрытом круглом пласте.*

Объемный дебит возмущающей скважины определится по такой формуле:

$$Q = 2\pi b r_c \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_c}, \qquad \text{(XII.43)}$$

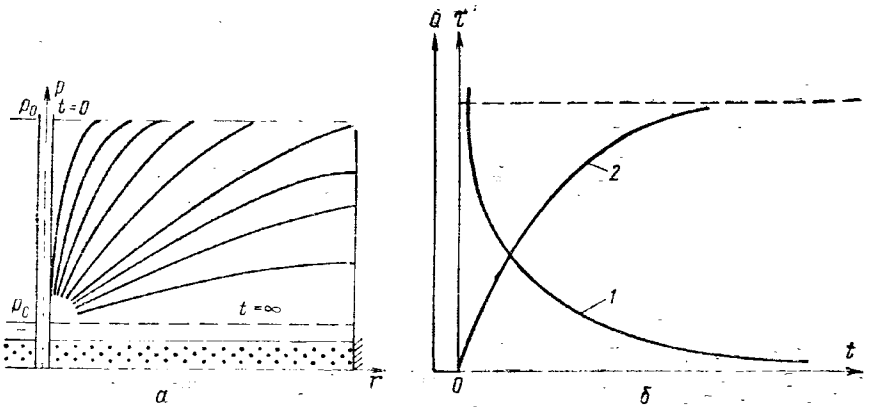


Рис. 113. Пьезометрические кривые в различные моменты времени для скважины с постоянным забойным давлением в закрытом пласте.
1 — кривая дебита; *2* — кривая суммарной добычи.

а объем жидкости $\tau_ж$, добытой из скважины (в пластовых условиях) за время t с момента пуска скважины, можно подсчитать так:

$$\tau_ж = \int_0^t Q\,dt. \qquad \text{(XII.44)}$$

При больших значениях параметра Фурье fo объем $Q_ж$ оказывается равным упругому запасу жидкости в закрытом пласте.

$$\tau_ж \approx \tau\beta^*(p_0 - p_c). \qquad \text{(XII.45)}$$

На рис. 113, *а* схематически показана пьезометрическая кривая для нескольких моментов времени в закрытом пласте, а на рис. 113, *б* изображены две кривые; одна из них характеризует падение дебита скважины с постоянным забойным давлением; другая — рост суммарной добычи жидкости $\tau_ж$ см. формулу (XII.44). Обе кривые имеют асимптоты, параллельные оси абсцисс.

5. Предположим, что стоком является *прямолинейная галерея*; здесь в некоторый момент времени произошло снижение давления от p_0 до $p_г$. Течение жидкости осуществляется с параллельными скоростями вдоль координатной оси Ox, перпендикулярной к галерее. Ограничимся случаем, в котором на стенках галереи поддерживается

постоянное давление $p_г$, а на границе пласта с областью питания, удаленной от галереи на расстояние L, сохраняется первоначальное пластовое давление p_0. Искомая функция p в данном случае запишется так:

$$p = p(x, t).$$

Соответствующие формулы можно найти в книге [33].

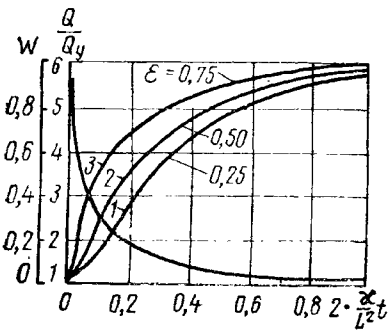


Рис. 114. Кривые изменения функции W, показывающие падение давления в разных точках полосообразного пласта, и кривая изменения дебита (по В. Н. Щелкачеву).

Наглядную картину того, как совершается изменение давления в разных точках пласта, определяемых безразмерными координатами $\varepsilon = \frac{x}{L}$, дает рис. 114. Кривые *1—3* — графическое представление функции

$$W = \frac{p_0 - p}{p_0 - p_г} \frac{1}{\varepsilon}.$$

На этом же рисунке показано падение объемного дебита Q в сечении $x = L$; взято отношение Q к объемному дебиту при установившемся течении Q_y (установившееся течение достигается при $t \to \infty$). По рис. 114 видим, что уже в момент времени $t = 0{,}5 \frac{L^2}{\varkappa}$ течение жидкости можно считать практически установившимся, так как значения дебита и давления близки к величинам, которые равны Q и p при установившемся движении.

§ 6. Суперпозиция в задачах упругого режима. Пьезометрические методы исследования скважин и пластов

Метод суперпозиции (наложения) фильтрационных потоков используется и в задачах неустановившихся процессов при упругом режиме.

Рассмотрим некоторые примеры.

Предположим, что в неограниченном пласте пущена в эксплуатацию скважина с постоянным дебитом Q. Понижение давления в пласте $\Delta p'$ можно определить, например, по формуле (XII.30). Через промежуток времени T после пуска скважину остановили. С момента остановки давление в ней повышается, а возмущение, вызванное остановкой, распространяется по пласту. Рекомендуется считать, что с момента остановки *сток, моделирующий скважину, совмещен с источником*, имеющим тот же дебит Q. Обозначим повышение давления за счет работы источника через $\Delta p''$. Таким образом, начиная с момента времени T, в одном и том же месте пласта как бы действуют совместно и непрерывно эксплуатационная и нагнетательная скважины.

На основании формулы (XII.30) имеем:

$$\Delta p' = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left[\ln\frac{4\varkappa(T+t)}{r^2} - C_э\right];$$

$$\Delta p'' = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\left(\ln\frac{4\varkappa t}{r^2} - C_э\right).$$

По методу суперпозиции найдем результирующее понижение давления Δp в любой точке пласта:

$$\Delta p = \Delta p' - \Delta p'' = \frac{Q\mu}{4\pi bk}\ln\frac{T+t}{t}. \qquad \text{(XII.46)}$$

Обозначая через p_c давление на забой скважины после ее остановки, получим по формуле (XII.46):

$$p_c = p_0 + 0{,}1832\frac{Q\mu}{bk}\lg\frac{t}{T+t}. \qquad \text{(XII.47)}$$

Если $T \gg t$, аргумент обыкновенного логарифма в формуле (XII.47) можно принимать равным $\frac{t}{T}$.

Зависимость (XII.47), как увидим далее, используется при исследованиях скважин, которые с этой целью должны быть остановлены. Однако остановка их не всегда возможна и желательна. Если скважина исследуется без остановки, меняют режим ее работы, устанавливая, например, новый дебит. При этом расчетные формулы, определяющие изменение давления в скважине, можно вывести, пользуясь по-прежнему методом суперпозиции [33].

Пусть на первом режиме эксплуатационная скважина работает с объемным дебитом Q_1. При переводе на второй режим дебит был уменьшен и стал равным Q_2. Можно, например, считать, что на первом режиме вместо одной скважины с дебитом Q_1 эксплуатировались две: одна с дебитом Q_2, другая с дебитом $\Delta Q = Q_1 - Q_2$. В момент смены режимов одна из этих скважин с дебитом ΔQ была остановлена, а другая продолжает эксплуатироваться с неизменным дебитом Q_2. В расчетные формулы, основанные на формуле (XII.30), вносятся соответствующие поправки в величины времени, зависящие от того, в какой момент изменен режим работы скважины.

Если в пласте действует *группа скважин*, в числе которых имеются и эксплуатационные, и нагнетательные, понижение давления в какой-либо точке пласта Δp определяется сложением понижений давлений, создаваемых в этой точке отдельными источниками и стоками, изображающими скважины $\Delta p^{(j)}$. Таким путем найдем

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{n}\Delta p^{(j)} = \frac{\mu}{4\pi bk}\sum_{j=1}^{n}Q_j\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_j^2}{4\varkappa t}\right)\right], \qquad \text{(XII.48)}$$

где n — число скважин; Q_j — объемный дебит стока (+) или источника (—) за номером j; r_j — расстояние данной точки пласта от скважины за номером j.

Полагая, что значения аргументов Ei в формуле (XII.48) достаточно малы, и пользуясь формулами (XII.28), (XII.30) и (XII.36), видоизменяем зависимость (XII.48) следующим образом:

$$\Delta p = \frac{\mu}{4\pi bk} \sum_{j=1}^{n} Q \ln \frac{2{,}246 \varkappa t}{r_j^2}. \qquad \text{(XII.49)}$$

С помощью формулы(XII.49) определяется по данным исследования скважин, например, параметр bk/μ.

Формула (XII.48) получена для случая одновременного пуска всех скважин группы.

Если нагнетательные и эксплуатационные скважины пущены в различное время, формула (XII.48) будет иметь такой вид:

$$\Delta p = \frac{\mu}{4\pi bk} \sum_{j=0}^{n-1} Q_{j+1} \left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_{j+1}}{4\varkappa (t_1 - t'_{j+1})} \right) \right], \qquad \text{(XII.50)}$$

где t'_{j+1} — время пуска скважины за номером $j+1$, причем здесь $t'_1 = 0$ $(j = 0)$.

Темп изменения давления в пласте зависит от проницаемости пласта в целом. Поэтому большое значение имеет определение этого параметра. Только исследование неустановившихся процессов позволяет определять коэффициент проницаемости пласта. Как сказано, скважину исследуют, изменяя режим ее работы. Пуск простаивавшей скважины вызывает неустановившийся процесс снижения давления.

Замеряя изменяющееся забойное давление в скважине, строят графики изменения давления. Изучение таких графиков — графиков прослеживания — составляет сущность *методов прослеживания*.

Выражая графически зависимость между забойным давлением и временем, пользуются *полулогарифмической анаморфозой*.

Выведем формулу для построения зависимости между забойным давлением и временем при пуске простаивавшей скважины. Берем формулу (XII.30) и запишем величину снижения забойного давления после пуска скважины:

$$\Delta p_c \equiv p_0 - p_c = \frac{Q\mu}{4\pi bk} \left(\ln \frac{4\varkappa t}{r_c^2} - 0{,}5772 \right) = 0{,}1832 \frac{Q\mu}{bk} \ln \frac{2{,}246\varkappa t}{r_c^2},$$

отсюда получаем:

$$\Delta p_c = 0{,}1832 \frac{Q\mu}{bk} \left(\lg t + 0{,}3514 + \lg \frac{\varkappa}{r_c^2} \right). \qquad \text{(XII.51)}$$

Зависимость (XII.51) представляет прямую линию в координатных осях $\lg t - \Delta p_c$. Восстановление забойного давления при остановке действующей скважины, которая к моменту остановки работала в условиях неустановившегося процесса, описывается зависимостью (XII.47).

Если скважина до момента остановки работала в течение столь продолжительного времени, что распределение давления в пласте можно принять за установившееся, мы так же, как и при выводе зависимости (XII.47), используем метод суперпозиции. Пусть перед остановкой дебит скважины был Q, а радиус контура питания пласта $r_к$.

Обозначим через $\Delta p'_с$ установившееся снижение давления, предшествовавшее остановке скважины. На основании формулы Дюпюи имеем:

$$\Delta p'_с = \frac{Q_{у\text{д}}}{2\pi bk} \ln \frac{r_к}{r_с}. \qquad \text{(XII.52)}$$

Повышение давления после остановки скважины $\Delta p''_с$ вычисляем по формуле (XII.30). По методу суперпозиции снижение давления в скважине найдем так:

$$\Delta p_с = \Delta p'_с - \Delta p''_с \qquad \text{(XII.53)}$$

или

$$\Delta p_с = 0{,}1832 \frac{Q_{у\text{д}}}{bk} \left(\lg \frac{r_к^2}{2{,}246\varkappa} - \lg t \right).$$

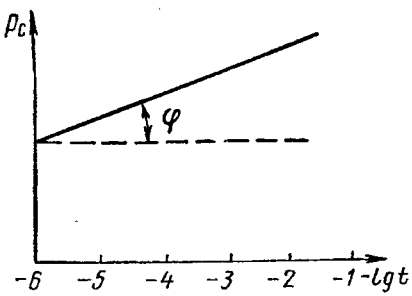


Рис. 115. Зависимость забойного давления от величины — lg t.

График, соответствующий зависимости (XII.53), изображен на рис. 115.

Процесс повышения давления после пуска нагнетательной скважины протекает подобно тому, как развивается процесс его снижения. Для подсчета повышения $\Delta p_с = p_с - p_0$ можем воспользоваться формулой (XII.51).

Рассматривая зависимости между понижением (или повышением давления в скважине $\Delta p_с$ и обыкновенным логарифмом времени t — см. уравнения (XII.47), (XII.51) и (XII.52), приходим к выводу, что угол наклона прямой к оси абсцисс η определяется с помощью следующего равенства:

$$\operatorname{tg} \eta = i = 0{,}1832 \frac{Q_{у\text{д}}}{bk}, \qquad \text{(XII.54)}$$

отсюда имеем:

$$bk = \frac{0{,}1832 Q_{у\text{д}}}{i}. \qquad \text{(XII.55)}$$

С помощью формулы (XII.55) по заданному участку графика прослеживания давления в скважине можно определять *коллекторские свойства пласта*. В самом деле, установив по графику типа приведенного на рис. 115 уклон прямой $i = \operatorname{tg} \eta$, по формуле (XII.55) можем подсчитать величину произведения bk. Если при этом еще известна мощность пласта b, легко вычислить коэффициент проницаемости пласта k.

Если по результатам лабораторных исследований мы знаем коэффициент упругоемкости пласта и вязкость жидкости, можем по формуле (XII.4) при найденном k вычислить коэффициент пьезопроводности $\varkappa$.

График, построенный по результатам реальных промысловых исследований скважин, принимает форму прямой не сразу. Как показывают многочисленные эксперименты, если после остановки скважины, поступление жидкости через ее забой из пласта продолжается, на графике восстановления давления такой скважины непременно будет прямолинейный участок.

На форму начальных участков графиков прослеживания забойного давления *влияет изменение проницаемости в призабойной области пласта.* В зарубежной литературе это влияние именуется «скин-эффектом» (английское skin — «пленка», «оболочка»).

С учетом скин-эффекта, по У. Херсту и А. Ф. Ван-Эвердингену, основная формула вида (XII.37) должна видоизмениться в результате добавления слагаемого, отражающего скин-эффект [33]:

$$\Delta p_c = \frac{Q_{у}\mu}{4\pi bk}\left(\ln\frac{\varkappa t}{r_c^2} + 0{,}8091 + 2S\right), \qquad \text{(XII.56)}$$

где S — показатель скин-эффекта.

Коэффициент проницаемости призабойной зоны пласта k_1 можно определить по методу установившихся отборов. Сравнивая его с коэффициентом k, найденным по формуле (XII.55), можно судить о том, насколько различаются эти коэффициенты. Если, например $k_1 \ll k$, призабойная область пласта имеет плохую проницаемость.

Все формулы, помещенные в настоящем параграфе, кроме формулы (XII.56), справедливы при следующих условиях:

1) режим пласта — упругий;
2) пласт неограниченный и однородный;
3) скважина гидродинамически совершенная;
4) в момент остановки скважины дебит ее на забое равен нулю.

Для гидродинамически несовершенной скважины, вблизи забоя которой пласт неоднороден, в формулах (XII.51) и (XII.53) следует принимать иной свободный член. Величина уклона i — см. формулу (XII.54) — сохраняется и при нарушении перечисленных выше четырех условий.

Влияние изменения проницаемости пласта в призабойной области и гидродинамического несовершенства скважины на график прослеживания забойного давления учел С. Н. Назаров. Г. И. Баренблатт и В. А. Максимов, Ю. П. Борисов и В. П. Яковлев предложили методы приближенного определения некоторых неоднородностей пласта.

Кроме влияния проницаемости пласта в призабойной области и гидродинамического несовершенства скважин на график прослеживания, следует отметить возможность нарушения закона Дарси у стенок скважины. Уравнение пьезопроводности (XII.15), решением которого является функция (XII.30), при этом будет иметь несколько

иной вид: оно будет содержать еще так называемые инерционные члены. Решение уравнения с инерционными членами усложнится по сравнению с решением (XII.30). Мы не будем останавливаться здесь на случаях нарушения закона Дарси.

Способ определения параметров, характеризующих коллекторские свойства пласта, с использованием графиков прослеживания относится к одному из *пьезометрических методов* исследования пластов и скважин. Цели и методы исследования пластов и скважин различны. Пьезометрическими методы исследования названы потому, что они связаны с замерами пластовых и забойных давлений.

В настоящее время существует много способов обработки графиков прослеживания. Предложенные рядом авторов способы позволяют обрабатывать начальные и конечные участки графиков прослеживания.

Заметим, что параметры пласта определяются по графикам прослеживания давления не только в возмущающих, но и в реагирующих скважинах.

В качестве примера рассмотрим рекомендованный Р. Г. Шагиевым (по идее В. Н. Щелкачева) прием определения параметров пласта на основе данных о прослеживании давления в реагирующей скважине.

Представим формулу (XII.26) в следующем виде:

$$P_r = \frac{2\pi kb}{Q\mu}\Delta p_r = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{4\mathrm{fo}}\right)\right], \qquad \text{(XII.57)}$$

где $\Delta p_r = p_0 - p_r$ — понижение давления в реагирующей скважине; P_r — безразмерная величина.

Построив по формуле (XII.57) универсальную кривую в логарифмических координатах, снимем ее на кальку. Эта универсальная кривая накладывается на фактическую кривую прослеживания давления в реагирующей скважине до возможно более полного совмещения. Фактическая кривая должна быть построена в логарифмических координатах. При таком наложении следует соблюдать параллельность соответствующих осей координат фактического и универсального графиков.

Совпадение фактической и универсальной кривых на некотором участке означает пропорциональность соответствующих переменных.

В самом деле, так как соответствующие координатные оси фактического и универсального графиков параллельны, а кривые совпадают, получим:

$$\left.\begin{aligned}\lg \mathrm{fo} &= \lg t + \lg A,\\ \lg P &= \lg \Delta p + \lg B,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.58)}$$

где $\lg A$ и $\lg B$ — постоянные величины, показывающие смещения соответствующих осей координат.

Из (XII.58) найдем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{fo}}{t} &= A;\\ \frac{P}{\Delta p} &= B.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII.59)}$$

Учитывая значение fo, из первой формулы (XII.59) выразим значение коэффициента пьезопроводности $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{r^2 A}{n_t}, \qquad \text{(XII.60)}$$

где n_t пересчетный коэффициент, зависящий от системы единиц, в которой измерено время на фактической кривой.

Из формулы (XII.57), показывающей зависимость между P и Δp, найдем значение параметра kb/μ:

$$\frac{kb}{\mu} = \frac{Qn_p B}{2\pi}, \qquad \text{(XII.60а)}$$

где n_p — пересчетный коэффициент.

Итак по результатам прослеживания давления в реагирующей скважине можно определить коэффициенты пьезопроводности $\varkappa$ и гидропроводности $\frac{kb}{\mu}$.

Если коэффициент $\varkappa$ определен по формуле (XII.60), а коэффициент упругоемкости β^* известен, можно определить величину $\frac{k}{\mu}$ по формуле (XII.4). Зная параметр $\frac{k}{\mu}$, находят среднюю мощность пласта по формуле (XII.60а).

Несовпадение фактической кривой изменения давления (уровня) в реагирующей скважине с наложенной на нее универсальной кривой может вызываться, например, влиянием неустановившихся режимов работы скважин, действующих вблизи исследуемой скважины, нарушением закона Дарси в пласте и т. п.

В заключение параграфа укажем, что акад. А. П. Крыловым и Г. И. Баренблаттом предложено учитывать влияние необратимости изменений структуры пористой среды на процессы движения жидкости в пластах, т. е. предложено учитывать *упруго-пластические деформации пласта*. Развитие такого рода идей представляет принципиальный интерес.

Лабораторные опыты, поставленные Д. А. Антоновым в условиях, наиболее близких к реальным, показывают, что коэффициент упругоемкости пласта не изменялся более чем на 5% за счет остаточной деформации. Но при таких условиях процессы перераспределения давления в пластах, в которых возникают упруго-пластические деформации, мало отличаются от процессов, присущих упругому режиму.

§ 7. Подсчет упругого запаса жидкости нефтеводоносного пласта. Условный радиус влияния скважины

Формула для подсчета упругого запаса (XII.2) приведена в § 2, запишем ее так:

$$\Delta\tau_з = \beta^*\tau\,\Delta\bar{p}, \tag{XII.61}$$

где $\Delta\bar{p} = p_0 - \bar{p}$ — снижение давления $\bar{p}$, т. е. давления, средневзвешенного по объему выделенной области пласта относительно начального давления p_0.

При замкнуто-упругом режиме объемное количество жидкости $\tau_ж$, отобранной из пласта при падении средневзвешенного пластового давления от начального p_0 до некоторого $\bar{p}$, определяется так:

$$\tau_ж = \beta^*\tau\,(p_0 - \bar{p}), \tag{XII.62}$$

где τ — объем пласта.

Дифференцируя (XII.62), получим:

$$d\tau_ж = -\beta^*\tau\,d\bar{p}. \tag{XII.63}$$

С другой стороны

$$d\tau_ж = Q\,dt, \tag{XII.64}$$

где Q — дебит всех скважин, заложенных в пласт.

Приравнивая (XII.63) и (XII.64), получим *дифференциальное уравнение истощения закрытого пласта при упругом режиме.*

$$Q\,dt = -\beta^*\tau\,d\bar{p}. \tag{XII.65}$$

Запишем его в виде:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -\frac{Q}{\beta^*\tau}. \tag{XII.66}$$

Если $Q = \text{const}$, то $\frac{d\bar{p}}{dt} = \text{const}$; следовательно, средневзвешенное пластовое давление падает, изменяясь в зависимости от времени по линейному закону. На основании равенства (XII.62) заключаем, что общее количество отобранной жидкости возрастает, будучи связано с временем линейной зависимостью. Очевидно, что при замкнуто-упругом режиме это общее количество жидкости $\tau_ж$ равно упругому запасу.

Если все скважины эксплуатируются в замкнутом пласте с постоянным забойным давлением, общее количество добываемой из пласта жидкости будет возрастать со временем все более медленно.

Как подсчитать упругий запас, который извлекается из пласта к концу процесса перераспределения давления при плоско-радиальном течении жидкости, если режим пласта упруго-водонапорный?

Пусть начальное давление p_0 сохраняется на контуре питания.

Средневзвешенное по площади пластовое давление в конце процесса перераспределения давления подсчитываем по фомуле типа (XI.47) так:

$$\bar{p} = \frac{\int p\,dF}{F} = p_0 - \frac{p_0 - p_c}{2\ln\frac{r_к}{r_c}}, \qquad \text{(XII.67)}$$

где F — площадь пласта; p_c — забойное давление в скважине.

Подставляя значение $\bar{p}$ из (XII.67) в формулу (XII.61), найдем:

$$\Delta\tau_э \approx \beta^* (p_0 - p_c) \frac{\tau}{2\ln\frac{r_к}{r_c}} \qquad \text{(XII.68)}$$

Если $r_к/r_c \geqslant 26$, погрешность формулы (XII.68) не превосходит 1%.

В объеме всего пласта упругий запас составляет обычно малую долю по отношению к абсолютному запасу, но он может выражать довольно большое количество жидкости (в абсолютных единицах).

Рассмотрим пример, характеризующий значительную роль упругого запаса некоторой выделенной области пласта при упруговодонапорном режиме; предполагается, что жидкость отбирается в пределах выделенной области пласта.

Пусть площадь выделенной области пласта $F = 3000$ га, средняя мощность пласта $b = 20$ м, $m = 0{,}2$, падение средневзвешенного пластового давления в области $\Delta\bar{p} = 20$ кгс/см^2, коэффициент упругоемкости $\beta^* = 4 \cdot 10^{-5}$ см^2/кгс. По формуле (XII.61) находим, что упругий запас $\Delta\tau_э = 480\,000$ м$^3 \approx 0{,}5$ млн. м^3. Какую часть объема всех пор выделенной нами области составляет жидкость, вторгшаяся в пределы области через ее внешнюю границу, к тому моменту, когда давление внутри области упало на 20 кгс/см^2. Допустим, что к этому моменту времени из пласта отобрано 1,5 млн. м^3 жидкости.

Нетрудно подсчитать, что объем жидкости, вторгшейся в нашу область пласта, составляет только 1/120 часть объема всех ее пор. В самом деле, объем всей этой области равен $(3 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 20)$ м^3 = = 600 млн. м^3, объем пор = 0,2·600 млн. м^3 = 120 млн. м^3, а объем вторгшейся жидкости равен 1,5—0,5 = 1 млн. м^3. Но если мы наметим более обширную область, внешний контур которой является объемлющим по отношению к контуру взятой ранее области, то через границу этой более обширной области за то же время протечет меньший объем жидкости. Выделяя все более обширные области пласта, мы дойдем, наконец, до контура, настолько удаленного от места отбора жидкости, что вся добытая жидкость (1,5 млн. м^3) окажется отобранной исключительно за счет упругого запаса области пласта, ограниченной этим достаточно удаленным контуром. Через последний не будет протекать жидкость.

Расстояние от скважины до той точки пласта, в которой понижение давления в данный момент времени достигло заданной величины $\Delta p_у$, названо *условным радиусом влияния*. Обозначим его через $r_у$.

Если пласт практически однороден, то на протяжении длительного времени можно определять условный радиус влияния с помощью основной формулы теории упругого режима (XII.26). Пользуясь методом однородности размерностей, легко показать, что для условного радиуса влияния справедлива такая формула:

$$r_у = f\left(\frac{\Delta p_у}{\Delta p_с}\right)\sqrt{\varkappa t}, \qquad \text{(XII.69)}$$

где $f\left(\frac{\Delta p_у}{\Delta p_с}\right)$ — некоторая функция; $\Delta p_с$ — установившееся понижение давления в действующей скважине. При плоско-радиальном движении жидкости после пуска скважины с постоянным дебитом условный радиус подсчитывается по формуле:

$$r_у = \left(0{,}6 \ln \frac{\Delta p_с}{\Delta p_у} - 1\right)\sqrt{\varkappa t}, \qquad \text{(XII.70)}$$

где $r_у$ в м; t — время после пуска в ч; $\varkappa$ — в м²/ч; $\Delta p_с$ — установившееся понижение давления в скважине в кгс/см²; $\Delta p_у$ в кгс/см².

После рассмотрения процессов отбора жидкости из пласта в условиях упругого режима можно сделать вывод о том, что в пласте существует *возмущенная область*, которая расширяется постепенно. На границах этой области снижение давления равно нулю, а переток жидкости через границу области отсутствует. В каждый момент времени весь пласт можно расчленить на две области — возмущенную и невозмущенную[1]. Этим пользуются для приближенного решения задач теории упругого режима по методу последовательной смены установившихся состояний.

Для возмущенной области задается тот или иной закон распределения давления. Так, например, при притоке жидкости к прямолинейной галерее с параллельными скоростями И. А. Чарный брал закон прямой линии; для плоско-радиального притока им же взят логарифмический закон.

А. М. Пирвердяном значительно повышена точность метода последовательной смены установившихся состояний путем задания параболического закона распределения давления в возмущенной области галереи. Парабола подбирается таким образом, чтобы происходило плавное ее смыкание с прямой невозмущенной области.

Еще более точные методы предложены Г. И. Баренблаттом. Им составлена цепь интегральных соотношений. Чем больше таких соотношений, тем точнее решение.

---

[1] Радиус внешней границы возмущенной области называется приведенным радиусом влияния скважины.

§ 8. Общая форма простейшего вида уравнения пьезопроводности

Дифференциальное уравнение (XII.15) представляет собой простейший вид уравнения пьезопроводности для плоскорадиального потока упругой жидкости в упругом пласте. Этот вид уравнения может быть обобщен на все случаи неустановившегося фильтрационного потока, в котором давление зависит от времени и только от одной пространственной координаты.

Возьмем уравнение в обобщенных координатах (VIII.17) и предположим, что массовая скорость фильтрации зависит от одной обобщенной координаты, например, от $q_1 = q$. Тогда, пользуясь законом потенциального движения (VIII.21) и зависимостью (VIII.22), получим уравнение в следующем общем виде:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} + \frac{L'}{L}\frac{\partial\varphi}{\partial q} = L_1^2\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}, \qquad \text{(XII.71)}$$

где L_1, L_2, L_3 — коэффициенты Ламе, определяемые формулой (VIII.18); L — имеет такое же значение, как и в уравнении (VIII.24).

Выполнив преобразования, сходные с теми, какие описаны в § 3 настоящей главы, запишем уравнение (XII.71) в таком виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial l^2} + \frac{1}{L_1L_2L_3}\frac{\partial(L_2L_3)}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(XII.72)}$$

где p — приведенное давление; $\frac{\partial p}{\partial l}$ — величина градиента давления в данной точке пласта; $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности; l — расстояние по траектории, отсчитанное от стока. Такова общая форма уравнения пьезопроводности простейшего вида.

Пусть поток — *прямолинейно-параллельный*. Тогда $q = l$, $L_1 = L_2 = L_3 = 1$; уравнение (XII.72) представится так:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial l^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \text{(XII.73)}$$

Для *плоско-радиального потока* $L_1 = L_3 = 1$, $L_2 = r$; в этом случае из (XII.72) получим уравнение (XII.15).

Для *сферически-радиального* потока $q = r$; $L_1 = 1$; $L_2 = r$; $L_3 = r\sin\theta$; уравнение (XII.72) в этом случае можем записать так:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XII.74)}$$

Если допустить, что движение установившееся, из уравнений (XII.72)—(XII.74) найдем соответствующие уравнения Лапласа.

В. Н. Щелкачев исследовал уравнение пьезопроводности такого вида:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial l^2} + \frac{j}{l}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(XII.75)}$$

где для одномерных потоков с прямолинейными траекториями $j = 0, 1, 2$. Приведем без вывода некоторые результаты, полученные В. Н. Щелкачевым для $j = 0$ и $j = 1$. Пусть $j = 0$; имеем прямолинейно-параллельный поток к галерее—стоку, на стенке которой $l = 0$. Тогда на галерее

$$\Delta p_{\text{г}} = -\frac{A_{\text{п}}}{2^n \Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)} t^{\frac{1}{2}n}; \qquad \text{(XII.76)}$$

$$Q_{\text{г}} = -\frac{A_{\text{п}} kF}{\mu \sqrt{\varkappa}\, 2^n \Gamma\left[1+\frac{1}{2}(n-1)\right]} t^{\frac{1}{2}(n-1)}; \qquad \text{(XII.77)}$$

$$\tau_{\text{г}} = -\frac{A_{\text{п}} \sqrt{\varkappa}\, \beta^* F}{2^n \Gamma\left[1+\frac{1}{2}(n+1)\right]} t^{\frac{1}{2}(n+1)}. \qquad \text{(XII.78)}$$

Здесь $A_{\text{п}}$ — произвольная постоянная; Γ — символ гамма-функции; $\Delta p_{\text{г}}$ — снижение давления на стенке стока; $Q_{\text{г}}$ — дебит галереи, $\tau_{\text{г}}$ — объемное количество добытой жидкости; F — площадь галереи-стока.

При $n = -1, 0, +1$ всегда постоянна одна из следующих трех величин: $\tau_{\text{г}}$, $\Delta p_{\text{г}}$, $Q_{\text{г}}$.

Если $n = -1$, значит, мгновенно влияет сток-галерея. Если $n = 0$, на стенке галереи поддерживается постоянное давление или галерея пущена с дебитом, обратно пропорциональным $\sqrt{t}$ — см. формулу (XII.77). При $n = 1$ дебит галереи постоянный. Случай целого $n > 1$ соответствует пуску галереи с переменным дебитом, пропорциональным $t^{\frac{n-1}{2}}$ или с переменным давлением на галерее — см. формулу (XII.77).

Пусть $j = 1$; это соответствует плоско-радиальному потоку. Дебит стока $Q_{\text{с}}$ и количество добытой жидкости $\tau_{\text{с}}$ подсчитываются так:

$$Q_{\text{с}} = -\frac{4\pi bkA_{\text{п}}}{\mu} \frac{t^n}{n!}; \qquad \text{(XII.79)}$$

$$\tau_{\text{с}} = -\frac{4\pi bkA_{\text{п}}}{\mu} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad \text{(XII.80)}$$

При $n = 0$ получаем решение задачи о плоско-радиальном течении жидкости с постоянным дебитом $Q_{\text{с}}$. Если $n = 1, 2, 3\ldots$, имеем сток с дебитом, пропорциональным t^n.

Можно в уравнении (XII.75) не ограничиваться только значениями $j = 0, 1, 2$, а допустить, что j принимает некоторые промежуточные нецелые значения, например $j = 0{,}5$ или $j = 1{,}5$. Таким целым значениям j можно привести в соответствие потоки с непрямолинейными траекториями. Если j постоянно и $0 \leqslant j \leqslant 1$, поток будет

плоским. Уравнение (XII.72) построено из условия, что l отсчитывается вдоль любой криволинейной траектории. В уравнении (XII.75) при j нецелом постоянном следует брать l не вдоль любой данной линии тока, как это берется для прямолинейных траекторий, а вдоль некоторой средней кривой, соответствующей величине j.

Решение уравнения (XII.75) при нецелом постоянном j выражается в специальных функциях.

В заключение настоящей главы подчеркнем, что уравнение пьезопроводности выведено с учетом упругих свойств жидкости и пласта. Как уже отмечалось в § 1 главы М. Маскет, Р. Шилсюиз и У. Херст, разрабатывая теорию упругого режима, не учитывали объемную упругость пласта. По этой причине полученное ими дифференциальное уравнение содержало коэффициент $\varkappa = \frac{k}{\mu\beta_ж}$, в формуле которого в отличие от нашей формулы (XII.4) фигурировал не коэффициент упругоемкости пласта β^*, а объемный коэффициент упругости воды $\beta_ж$. Не учитывая объемной упругости пласта ($\beta_ж < \beta^*$), они объяснили кажущуюся при этом сверхсжимаемость воды наличием в пласте газовых включений. Эта гипотеза позволяет получить такое численное значение $\varkappa$, которое формально согласовалось с промысловыми наблюдениями, но не достаточно обосновывалось физическим состоянием пласта. Можно вывести совершенно такое уравнение пьезопроводности, которое мы рассмотрели в этой главе, если пользоваться величиной приведенного коэффициента упругоемкости, вычисленного на основе гипотезы газовых включений.

Отсылаем интересующихся к соответствующей литературе [30].

Глава XIII

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГАЗА

§ 1. Дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации газа

Теория движения газа в пористой среде была разработана акад. Л. С. Лейбензоном в двадцатых годах нашего столетия. В основу теории были положены выведенные им дифференциальные уравнения установившегося и неустановившегося движений газа в пористой среде.

Под руководством Л. С. Лейбензона были проведены тщательные эксперименты по фильтрации газов. Неустановившаяся фильтрация газов экспериментально исследовалась Д. С. Вилькером, И. П. Москальковым и др.

В тридцатых годах были опубликованы работы М. Маскета, посвященные неустановившейся фильтрации газов.

Б. Б. Лапук посвятил свои исследования основам разработки месторождений природных газов и при этом отметил ряд существенных положений, относящихся к вопросам неустановившейся фильтрации газов в пластах. В частности, Б. Б. Лапук показал, что неустановившееся движение природного газа в пластах приемлемо рассматривать во многих случаях, как изотермический процесс. В условиях неустановившейся фильтрации газа в залежи падение температуры газа меньше, чем при его установившейся фильтрации: в неустановившемся процессе происходит теплопередача как от самой породы, слагающей пласт, так и от пород, залегающих выше и ниже данного газоносного пласта.

В настоящее время теория неустановившейся фильтрации газов продолжает развиваться.

Будем рассматривать неустановившуюся фильтрацию газа как изотермический процесс.

Для вывода дифференциального уравнения неустановившейся фильтрации газа воспользуемся уравнением состояния (IV.19). Выразив с его помощью величину плотности ρ в функции давления p, запишем:

$$\rho = \frac{\rho_{ат}}{p_{ат}} p. \qquad \text{(XIII.1)}$$

Значение ρ в (XIII.1) подставим в уравнение неразрывности (VIII.4); получим, полагая, что $m = \text{const}$, т. е. что пористая среда — неизменяема:

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = -m \frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.2)}$$

Ограничившись предположением, что в пористой среде имеет место закон фильтрации Дарси, и, подставив в уравнение (XIII.2) значения проекций скорости фильтрации v_x, v_y и v_z из формул (VIII.7), придадим уравнению (XIII.2) следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p \frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{m\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \qquad \text{(XIII.3)}$$

Выражения в скобках левой части уравнения (XIII.3) можно представить так:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial x}; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial y}; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial p^2}{\partial z}. \qquad \text{(XIII.4)}$$

Учитывая (XIII.4), перепишем уравнение (XIII.3) в виде:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} = \frac{2m\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.5)}$$

Это и есть *дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации газа* при условии, что газ — идеальный, а фильтрация совершается по закону Дарси.

Для установившегося потока $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$; уравнение (XIII.5) в этом случае представится так:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} = 0. \qquad \text{(XIII.6)}$$

Уравнение (XIII.6) можно получить непосредственно из уравнения Лапласа (VIII.13) относительно потенциальной функции φ, которую с помощью формул (IV.9) и (IV.19) можно выразить в функции давления p (при постоянных k и μ):

$$\varphi = \frac{k\rho_{ат}}{2\mu p_{ат}} p^2 + C. \qquad \text{(XIII.7)}$$

Формула (XIII.7) согласуется с формулой (IV.67).

Сравнив уравнение (XIII.6) с уравнением Лапласа (VIII.13), заключаем, что (XIII.6) является уравнением Лапласа относительно функции p^2. Следовательно, можно для него воспользоваться такой записью:

$$\Delta p^2 = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2 p^2 = 0. \qquad \text{(XIII.8)}$$

Вернемся к дифференциальному уравнению неустановившегося потока газа (XIII.5) и видоизменим его с таким расчетом, чтобы под

знаками производных в обеих его частях стояла одна и та же функция (в уравнении (XIII.5) слева под знаками производных находится p^2, справа p). С этой целью введем следующее обозначение:

$$p^2 = P. \qquad \text{(XIII.9)}$$

Представляя, согласно обозначению (XIII.9), правую часть уравнения (XIII.5) так:

$$\frac{2m\mu}{k}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{m\mu}{kp}\frac{\partial P}{\partial t}, \qquad \text{(XIII.10)}$$

увидим, что цель достигнута, теперь уравнение (XIII.5) получит новый вид:

$$\frac{kp}{m\mu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.11)}$$

По внешнему виду дифференциальное уравнение (XIII.11) ничем не отличалось бы от дифференциального уравнения упругого режима (XII.13), если бы множитель перед скобкой левой части, т. е. величина $\frac{kp}{m\mu}$, был бы постоянным. В уравнении (XII.13) постоянный множитель есть коэффициент пьезопроводности $\varkappa$. Но величина $\frac{kp}{m\mu}$ зависит от переменного давления p, вследствие чего уравнение (XIII.11) или (XIII.5) является нелинейным дифференциальным уравнением в отличие от линейного уравнения теории упругого режима (XII.13). Последнее, как было сказано в § 3 главы XII, относится по виду к уравнению теплопроводности, а методы интегрирования уравнения теплопроводности достаточно хорошо разработаны для многих краевых задач математической физики.

Точные решения нелинейного уравнения вида (XIII.11) получены лишь для некоторых задач гидромеханики. Как правило, это уравнение интегрируется приближенными методами. Пример приближенного интегрирования уравнения (XII.11) для неустановившегося истечения газа из полосообразного пласта дается в следующем параграфе.

Заметим, что внешний вид уравнения (XIII.11) для двухразмерного газового потока совпадает с видом уравнения неустановившегося безнапорного грунтового потока над горизонтальным водоупором. Уравнение безнапорного движения несжимаемой жидкости при существовании закона фильтрации Дарси имеет такой вид (вывода его не приводим):

$$\frac{k\gamma h}{\mu m'}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial h^2}{\partial t}, \qquad \text{(XIII.12)}$$

где h — напор, определяемый по формуле (VI.1); m' — коэффициент отдачи грунта, меньший коэффициента пористости m. [При подъеме уровня грунтовой воды m' есть коэффициент недостатка насыщения]; γ — вес единицы объема жидкости.

Таким образом, формальный переход от уравнения (XIII.11) к уравнению (XIII.12) может быть осуществлен заменой величины P величиной h^2.

Уравнение (XIII.12) иногда называют *уравнением Буссинеска.*

§ 2. Приближенное решение задачи об истечении газа из полосообразного пласта при постоянном давлении на контуре стока

Допустим, что имеется полосообразный газопосный пласт прямоугольной формы, ограниченный со всех сторон непроницаемыми стенками. Иначе говоря, имеется прямоугольная закрытая газовая залежь. До вскрытия пласта давление в нем везде было одинаковым и равным p_0.

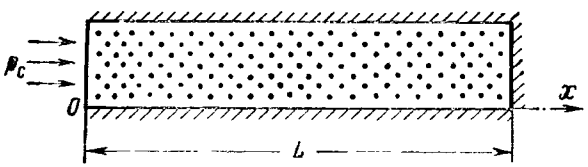


Рис. 116. Схема полосообразного закрытого газового пласта.

В некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t = 0$), одна из стенок пласта становится стоком, т. е. пласт вскрывается вдоль этой стенки и давление на ней снижается относительно начального пластового давления p_0. Пусть в течение всего последующего времени давление на открытой стороне пласта поддерживается постоянным, равным $p_c = \text{const}$.

Пласт длиной L изображен в плане на рис. 116.

С момента вскрытия пласта начинается газовый поток, который можно рассматривать как прямолинейно-параллельный. Взяв начало координат на контуре стока и направив ось Ox в сторону, противоположную потоку, сформулируем граничные и начальные условия задачи:

1) при $x = L$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

(так как через закрытую стенку пласта газ не проникает);

2) при $x = 0$

$$P = P_c = p_c^2 = \text{const} \qquad \text{(XIII.13)}$$

(условие на контуре стока);

3) при $t = 0$

$$P = P_0 = p_0^2.$$

Поскольку поток газа направлен только вдоль оси Ox, в левой части уравнения (XIII.11) можно оставить один член. Уравнение газового потока запишется так:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{m\mu}{kp}\frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.14)}$$

Акад. Л. С. Лейбензон интегрировал уравнение (XIII.14) при поставленных граничных и начальных условиях *по методу последовательных приближений* [15, 16].

В первом приближении величина p в знаменателе коэффициента перед производной правой части уравнения (VIII.14) принимается постоянной, равной начальному давлению в пласте p_0. При этом уравнение (XIII.14) можно считать за уравнение пьезопроводности. Сравнивая его, например, с уравнением упругого режима вида (XII.13), видим, что для газового потока роль коэффициента пьезопроводности играет величина $\frac{kp_0}{\mu m}$, а роль коэффициента упругоемкости — величина $\frac{m}{p_0}$.

Решение задачи в первом приближении при граничных и начальных условиях (XIII.13) свелось, следовательно, к интегрированию уравнения:

$$\frac{kp_0}{\mu m}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(XIII.15)}$$

Если воспользоваться для интегрирования уравнения (X.15) способом Фурье, мы должны прежде всего искать его частное решение в следующем виде:

$$P(t, x) - P_c = T(t)\,X(x), \qquad \text{(XIII.16)}$$

где $T(t)$ — функция, зависящая только от t, $X(x)$ — функция, зависящая только от x. Подставляя искомую функцию (XIII.16) в уравнение (XIII.15), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{kp_0}{m\mu}\lambda^2 T(t) = 0 \qquad \text{(XIII.17)}$$

и

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0. \qquad \text{(XIII.18)}$$

где λ^2 — определяемый коэффициент.

Найдя затем общие решения уравнений (XIII.17) и (XIII.18), известных из курса математики, и, использовав граничные условия, получим значения λ, соответствующие отдельным частным решениям уравнения (XIII.15). Чтобы удовлетворить начальным условиям, надо положить $t = 0$ и это значение t внести в общее решение уравнения (XIII.15), представляющее сумму частных решений. Опуская

промежуточные выкладки [1], напишем общее решение, удовлетворяющее граничным и начальным условиям (XIII.13):

$$P(t, x) = P_c + \frac{4}{\pi}(P_0 - P_c) \sum_{j=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{1}{j} e^{-\omega j^2 t} \sin \frac{j\pi x}{2L}, \quad \text{(XIII.19)}$$

где

$$\omega = \frac{\pi^2 k p_0}{4m\mu L^2}, \quad \text{(XIII.20)}$$

или

$$\frac{P - P_c}{P_0 - P_c} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1, 3, 5, \ldots}^{\infty} \frac{q^{\frac{j^2}{4}}}{j} \sin \frac{j\pi x}{2L} = f\left(\frac{x}{L}, q\right). \quad \text{(XIII.21)}$$

Здесь

$$q = e^{-4\omega t}.$$

Получив решение уравнения (XIII.14) в первом приближении (XIII.21), можно перейти ко *второму приближению*.

Полагаем, что переменное давление p в знаменателе коэффициента у производной в правой части (XIII.14) зависит только от времени t. Выбираем эту зависимость в следующем виде:

$$p(t) = \sqrt{P} = p_c + (p_0 - p_c) e^{-\frac{\omega}{2} t}. \quad \text{(XIII.22)}$$

Из равенства (XIII.22) следует, что $p \to p_c$ при $t \to \infty$.

В соответствии с начальным условием (XIII.13) из равенства (XIII.22) при $t = 0$ получим:

$$p = p_0.$$

Равенство (XIII.22) можно представить так:

$$p(t) = p_0 \left[\frac{p_c}{p_0} + \left(1 - \frac{p_c}{p_0}\right) e^{-\frac{\omega}{2} t}\right] = p_0 \xi(t), \quad \text{(XIII.23)}$$

где $\xi(t)$ — выражение в квадратных скобках.

Подставив значение $p(t)$ из (XIII.23) в уравнение (XIII.14), получим:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{m\mu}{k p_0 \xi(t)} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{(XIII.24)}$$

Уравнение (XIII.24) запишем в ином виде, введя новую переменную θ:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{m\mu}{k p_0} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad \text{(XIII.25)}$$

где

$$\theta = \int_0^t \xi(t)\, dt = \frac{p_c}{p_0} t + \frac{2}{\omega}\left(1 - \frac{p_c}{p_0}\right)\left(1 - e^{-\frac{\omega}{2} t}\right). \quad \text{(XIII.26)}$$

---

[1] Промежуточные выкладки можно найти в книге [16].

Уравнение (XIII.25) совпадает с уравнением теплопроводности (XIII.15), но только вместо независимой переменной t оно содержит переменную θ, определяемую формулой (XIII.26). Последняя показывает, что $\theta = 0$ при $t = 0$. Следовательно, решение уравнения (XIII.25), отвечающее граничным и начальным условиям (XIII.13), дается функцией (XIII.21), но с иным значением q. Теперь считаем:

$$q = e^{-4\omega\theta}. \qquad \text{(XIII.27)}$$

С возрастанием t, а значит и θ, величина q убывает.

Кривые, выражающие функцию $\frac{P - P_c}{P_0 - P_c} = f\left(\frac{x}{L}, q\right)$, изображены на рис. 117.

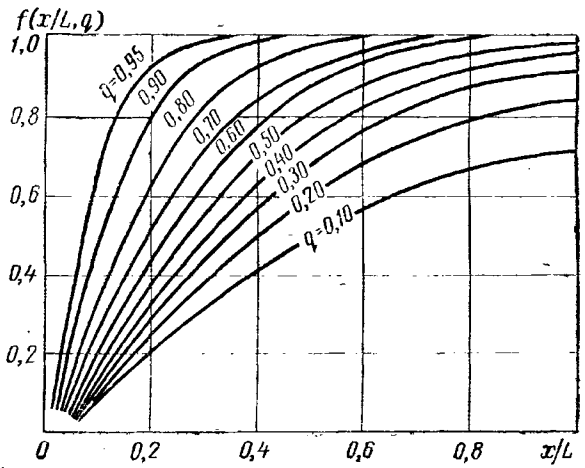


Рис. 117. Кривые изменения функции $f\left(\frac{x}{L}, q\right)$, для неустановившегося истечения газа из пласта (по Л. С. Лейбензону).

По этим кривым можно определить давление в любой точке пласта в любой момент времени, которому соответствует переменная q. Из рис. 117 видим, что по мере истечения газа из пласта, т. е. с уменьшением q, уменьшается и функция $f\left(\frac{x}{L}, q\right)$, а это означает, что величина $P = p^2$ уменьшается.

Анализ формулы (XIII.21) и характер изменения кривых на рис. 117 со временем позволяют сделать вывод, что при $t \to \infty$ [при $\theta \to \infty$] величина $q \to 0$; следовательно, давление $p \to p_c$, т. е. к давлению на открытой стороне пласта.

Итак, *предельным состоянием закрытой газовой залежи, разрабатываемой при постоянном давлении у выхода газа из пласта, является состояние, при котором во всей залежи будет такое же давление.*

Массовый дебит стока M определим так:

$$M = (\rho v)_{x=0} F, \qquad \text{(XIII.28)}$$

где $(\rho v)_{x=0}$ — массовая скорость фильтрации у выхода из пласта; F — площадь поперечного сечения пласта.

На основании формул (XIII.1) и (XIII.4) равенство (XIII.28) можно записать так:

$$\frac{M}{F} = \frac{k\rho_{ат}}{\mu p_{ат}}\left(p\,\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{k\rho_{ат}}{2\mu p_{ат}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=0} \qquad \text{(XIII.29)}$$

Но

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{4}{\pi}(P_0 - P_c)\left(\sum_{j=1,\,3,\,5,\ldots}^{\infty} \frac{q^{\frac{j^2}{4}}}{j}\,\frac{j\pi}{2L}\cos\frac{j\pi}{2L}x\right)_{x=0} =$$

$$= 2\,\frac{P_0 - P_c}{L}\left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \ldots\right). \qquad \text{(XIII.30)}$$

Подставляя значение $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{x=0}$ из (XIII.30) в формулу (XIII.29), получим:

$$\frac{M}{F} = \frac{k\rho_{ат}}{\mu p_{ат}}\,\frac{P_0 - P_c}{L}\left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \ldots\right). \qquad \text{(XIII.31)}$$

Если откладывать по оси абсцисс время t, а по оси ординат массовый дебит M, получим в соответствии с формулой (XIII.31) кривую истощения, представленную на рис. 118 (ось ординат служит асимптотой для кривой истощения).

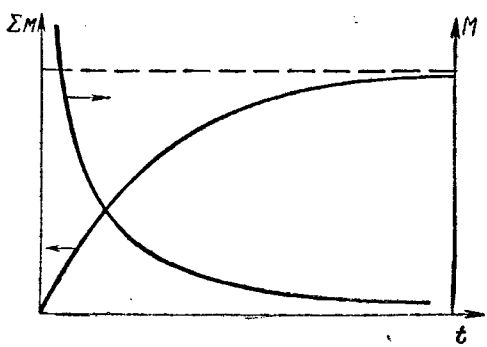


Рис. 118. Кривая падения дебита и роста суммарной добычи газа при истечении его из закрытого пласта.

На том же рис. 118 изображена кривая суммарной добычи газа из пласта к моменту времени t'. Строя кривую суммарной добычи, по ось ординат откладывали полное количество массы газа $\sum M$, вытекшего из пласта к моменту времени t'. Масса газа $\sum M$ определялась по формуле

$$\sum M = \int_0^{t'} M\,dt. \qquad \text{(XIII.32)}$$

Вблизи начала координат кривая суммарной добычи газа близка по своему виду к обыкновенной параболе второй степени, имеющей ось ординат в качестве касательной в начале координат [15].

Примечание. В настоящем параграфе на конкретном примере описан метод Л. С. Лейбензона *линеаризации* нелинейного уравнения (XIII.14): нелинейному уравнению (XIII.14) придается вид линейного уравнения пьезопроводности, которое затем решается путем последовательных приближений. Если фильтруется газ в условиях неустановившегося потока, множитель $\frac{kp}{m\mu}$ в не-

линейном уравнении (XIII.11) или (XIII.14) является переменным. Как показали исследования (Г. И. Баренблатта), при этом скорость распространения возмущений по пласту в некоторых случаях оказывается конечной. Применяя к нелинейному уравнению (XIII.11) или (XIII.14) линеаризацию Лейбензона, при которой коэффициент пьезопроводности является постоянной величиной, мы получим бесконечную скорость распространения возмущений. Сопоставление результата решений нелинейного уравнения (XIII.11), выполненных для некоторых частных случаев на электронно-вычислительных машинах, с результатами решений по методу линеаризации Лейбензона свидетельствует о достаточной точности этого метода и его практической пригодности.

§ 3. Применение условия материального баланса к задачам разработки газовых залежей

Рассматривая в § 7 главы XI процесс вытеснения газа водой, мы составили для этого частного случая уравнение материального баланса. Руководствуясь теми же простыми соображениями, какие легли в основу вывода уравнения (XI.51), можно получить уравнение баланса газа в общем виде; это уравнение позволяет приближенно решать многие задачи разработки газовых залежей.

Пусть в начальный момент разработки газовой залежи объем порового пространства залежи будет τ_0, давление в залежи p_0, абсолютная температура в залежи T_0, коэффициент сжимаемости газа z_0 (см. § 2 главы IV). В момент времени t названные величины соответственно равны τ, $\bar{p}$, T и z.

Запас массы газа в залежи в начальный момент времени равен сумме оставшейся в ней массы газа к моменту t и всей массы газа, отобранной из пласта к этому моменту времени.

Учитывая формулу (IV.20), получим *уравнение баланса реального газа в общем виде*

$$\frac{p_0}{z_0 T_0 R g}\tau_0 = \frac{\bar{p}}{zTRg}\tau + \sum M, \qquad \text{(XIII.33)}$$

где R — газовая постоянная, $\sum M$ — вся масса газа, отобранная из пласта к моменту t, $\sum M$ определяется по формуле (XIII.32).

Но в § 1 настоящей главы мы условились считать изотермическим неустановившийся процесс фильтрации газа. Если, кроме того, перейти к случаю идеального газа, при составлении общего уравнения баланса газа можно воспользоваться не формулой (IV.20), а зависимостью (XIII.1). Выражая давление p_0 и $\bar{p}$ в кгс/см^2 и, полагая, что залежь закрытая (при $\tau = \text{const}$), получим вместо уравнения (XIII.33) следующее:

$$\tau p_0 = \tau \bar{p} + \frac{\sum M}{\rho_{ат}}. \qquad \text{(XIII.34)}$$

Но

$$\frac{\sum M}{\rho_{ат}} = \frac{1}{\rho_{ат}} \int_0^t M\,dt = \int_0^t Q\,dt. \qquad \text{(XIII.35)}$$

где Q — объемный дебит всех эксплуатационных скважин пласта, приведенный к давлению в 1 кгс/см^2; $\bar{p}$ — средневзвешенное по объему давление в газовой залежи — см. формулу (XI.48).

Дифференцируя (XIII.34) по времени и учитывая равенство (XIII.35), получим *дифференциальное уравнение истощения газовой залежи* с неизменным объемом порового пространства.

$$Q\,dt = -\tau\,d\bar{p}. \qquad \text{(XIII.36)}$$

Покажем применение уравнения истощения газовой залежи (XIII.36) в сочетании с методом последовательной смены установившихся состояний к решению задач разработки газовых месторождений. Возьмем некоторые простейшие случаи.

I. Дебит постоянен [$Q = \text{const}$].

Интегрируем уравнение (XIII.36) в пределах изменения времени от 0 до t, а средневзвешенного давления — от p_0 до $\bar{p}$.

$$\bar{p} = p_0 - \frac{Q}{\tau}\,t. \qquad \text{(XIII.37)}$$

Такова закономерность изменения со временем средневзвешенного давления $\bar{p}$ в залежи.

Предположим, что эксплуатационная скважина находится в центре закрытой круглой газовой залежи радиусом $r_к$. Считая, что в таком случае поток газа плоско-радиальный и воспользовавшись методом последовательной смены установившихся состояний, обратимся к формуле объемного дебита газа (IV.73):

$$Q = \frac{\pi b k}{\mu p_{ат}}\,\frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln\dfrac{r_к}{r_с}}, \qquad \text{(XIII.38)}$$

где $p_к$ — давление на внешнем контуре залежи; $p_с$ — давление в скважине.

Но при постоянном дебите Q давления $p_к$ и $p_с$ будут переменными.

Найдем зависимость $p_к$ и $p_с$ от времени. С этой целью прежде всего покажем, что при установившейся плоскорадиальной фильтрации газа по закону Дарси *контурное давление* $p_к$ *столь близко средневзвешенному* $\bar{p}$, что практически в расчетных формулах можно одно заменять другим.

Давление $\bar{p}$ в данном случае вычисляем по формуле (XI.48), в которой следует положить, что

$$\tau = m\pi\,(r_к^2 - r_с^2)\,b; \quad d\tau = 2\pi b m r\,dr. \qquad \text{(XIII.39)}$$

Величину p определяем по формуле (IV.69) так:

$$p = \sqrt{p_с^2 + \frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln\dfrac{r_к}{r_с}}\ln\frac{r}{r_с}}. \qquad \text{(XIII.40)}$$

Подставив в формулу (XI.48) соответствующие значения τ и dr из формул (XIII.39) и p из формулы (XIII.40), получим:

$$\bar{p} = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} p\,d\tau = \frac{2}{r_к^2 - r_с^2}\int_{r_с}^{r_к} \sqrt{p_с^2 + \frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln\frac{r_к}{r_с}}\ln\frac{r}{r_с}}\; r\,dr. \qquad \text{(XIII.41)}$$

Чем меньше различаются между собой граничные давления $p_к$ и $p_с$ и чем больше размеры залежи по сравнению с поперечными размерами ствола скважины, тем ближе средневзвешенное давление $\bar{p}$ к контурному давлению $p_к$. Так, при $p_с = 0{,}5\,p_к$ имеем по результатам вычислений, выполненных Б. Б. Лапуком с помощью формулы (XIII.41):

$$\frac{\bar{p}}{p_к} = 0{,}9808, \quad \text{если } r_к \approx 22000\,r_с;$$

$$\frac{\bar{p}}{p_к} = 0{,}9677, \quad \text{если } r_к \approx 400\,r_с.$$

При $p_с = 0{,}9$ отношение $\frac{\bar{p}}{p_к}$ превышает 0,99, если $r_к$ равно указанным значениям.

Приняв, что в данном случае контурное давление $p_к$ равно средневзвешенному $\bar{p}$, запишем теперь формулу (XIII.37) в таком виде:

$$p_к = p_0 - \frac{Q}{\tau}\,t, \qquad \text{(XIII.42)}$$

Формулой (XIII.42) устанавливается зависимость давления $p_с$ от времени.

Подставив значения $p_к$ из (XIII.42) в формулу (XIII.38), получим зависимость от времени забойного давления $p_с$:

$$p_с = \sqrt{\left(p_0 - \frac{Q}{\tau}\,t\right)^2 - \frac{\mu p_{ат} Q}{\pi b k}\ln\frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(XIII.43)}$$

Допустим, что перед нами поставлена следующая задача: для обеспечения нужд промышленного района требуется разрабатывать данную газовую залежь так, чтобы ежесуточно добывать некоторое постоянное количество газа N (N — объем газа, приведенный к давлению в 1 *кгс/см*^{2}); скважины необходимо разместить равномерно по газоносной площади; найти зависимость между временем t, истекшим с начала разработки, и потребным числом скважин n для поддержания постоянной добычи N.

Разместив на газоносной площади равномерно n скважин и производя отбор газа из пласта так, что все скважины оказались равнодебитными, можем считать всю газоносную площадь разделенной на n равных площадей — *удельных площадей дренажа*; каждая удельная

площадь дренируется одной скважиной. Будем принимать приближенно, что каждая скважина дренирует площадь круга, равновеликую удельной площади дренажа, и что поток газа в пределах этой площади плоско-радиальный.

Принятое допущение позволяет использовать при решении поставленной задачи выведенные в настоящем параграфе формулы.

Обозначим объем порового пространства всей залежи τ, а радиус границы удельной площади дренажа $r_к$. Тогда получим такую формулу:

$$r_к = \sqrt{\frac{\tau}{n\pi bm}}. \qquad \text{(XIII.44)}$$

Подставив в формулу (XIII.38) значение $r_к$ из (XIII.44), получим выражение дебита Q одной скважины:

$$Q = \frac{\pi bk}{\mu p_{ат}} \frac{p_к^2 - p_с^2}{\ln\left(\frac{1}{r_с}\sqrt{\frac{\tau}{nm\pi b}}\right)} \qquad \text{(XIII.45)}$$

С другой стороны, дебит скважины можно записать в виде:

$$Q = \frac{N}{n}. \qquad \text{(XIII.46)}$$

Давление $p_к$ на основании формулы (XIII.42) можно определить так:

$$p_к = p_0 - \frac{N}{\tau} t. \qquad \text{(XIII.47)}$$

При определении давления на забоях скважин $p_с$ будем исходить из следующих условий: у забоя скважины надо установить максимально допустимую скорость фильтрации газа v_{max}, исключающую возможность осложнений от чрезмерных скоростей газа в пласте (например, возможность появления песчаных пробок). При этом отбор газа из пласта должен быть подчинен условию:

$$\left.\begin{aligned} Q &= 2\pi r_с b v_{max} p_с, \\ Q &= C p_с, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIII.48)}$$

где

$$C = 2\pi r_с b v_{max}. \qquad \text{(XIII.49)}$$

Подставив значения Q из формулы (XIII.46), $p_к$ из (XIII.47) и $p_с$ из (XIII.48) в формулу (XIII.45), получим искомую зависимость:

$$t = \frac{\tau}{N}\left[p_0 - \sqrt{\frac{N}{n}\left(\frac{\mu p_{ат}}{\pi kb}\ln\sqrt{\frac{\tau}{nm\pi br_с^2}} + \frac{N}{C^2 n}\right)}\right]. \qquad \text{(XIII.50)}$$

Задаваясь различными значениями n, нетрудно вычислить соответствующие им значения t.

II. Забойное давление постоянно ($p_с = \text{const}$).

Полагаем, что в центре круглой закрытой газовой залежи действует одна эксплуатационная скважина с постоянным забойным давле-

нием $p_с$. Определим дебит скважины и зависимость между временем t и контурным давлением $p_к$.

Берем формулы (XIII.36) и (XIII.38) как и в п. I настоящего параграфа, средневзвешенное давление $\bar{p}$ в формуле (XIII.36) заменяем контурным $p_к$.

Исключая из (XIII.36) и (XIII.38) величину Q, получим:

$$\frac{\pi bk}{\mu p_{ат} \ln \frac{r_к}{r_с}} (p_к^2 - p_с^2) = -\tau \frac{dp_к}{dt}. \qquad \text{(XIII.51)}$$

Разделяя переменные в уравнении (XIII.51) и интегрируя в пределах изменения времени от 0 до t и контурного давления от p_0 до $p_к$, найдем зависимость между t и $p_к$:

$$t = \frac{\tau \mu p_{ат}}{2\pi bk p_с} \ln \frac{r_к}{r_с} \ln \frac{(p_0 - p_с)(p_к + p_с)}{(p_0 + p_с)(p_к - p_с)}. \qquad \text{(XIII.52)}$$

Дебит вычисляется по формуле (XIII.38).

Если газовая залежь разрабатывается n скважинами, равномерно размещенными на газоносной площади, время ее истощения определяется также по формуле (XIII.52), в которой теперь следует считать, что τ — объем порового пространства в пределах только одной удельной площади дренажа, составляющей $^1/_n$ часть площади всей залежи, а $r_к$ — радиус границы удельной площади дренажа.

Подчеркнем, что решением ряда задач разработки газовых и газоконденсатных месторождений занимался Б. Б. Лапук.

Глава XIV

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ ПЛАСТАХ

§ 1. Основные дифференциальные уравнения

Ранее, в главе VIII было выведено уравнение неразрывности для деформируемого трещиноватого пласта:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = -\frac{\partial(m_т\rho)}{\partial t} \qquad \text{(XIV.1)}$$

Получить дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации жидкости в трещиноватом пласте можно на основе (XIV.1) с учетом уравнения движения:

$$\rho\vec{v} = -\frac{k_т\rho}{\mu}\operatorname{grad} p. \qquad \text{(XIV.2)}$$

Подстановка значения $\rho\vec{v}$ в левую часть равенства (XIV.1) приводит к выражению вида:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k_т\rho}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = \frac{\partial(m_т\rho)}{\partial t}. \qquad \text{(XIV.3)}$$

Правую часть полученного равенства можно раскрыть таким же образом, как и в главе XII, т. е.:

$$\frac{\partial(m_т\rho)}{\partial t} = \frac{\partial m_т}{\partial t}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t}m_т. \qquad \text{(XIV.4)}$$

Учитывая, что коэффициент трещиноватости

$$m_т = \frac{\tau_т}{\tau},$$

получаем:

$$\frac{\partial m_т}{\partial t} = \frac{\partial\tau_т}{\tau\,\partial t}. \qquad \text{(XIV.5)}$$

Введем коэффициент объемной упругости трещиноватого пласта

$$\beta_т = \frac{d\tau_т}{\tau\,dp}. \qquad \text{(XIV.6)}$$

Из формулы (XIV.6) видно, что с помощью $\beta_т$ определяется на какую долю от всего объема пласта τ изменяется объем фильтрующихся

трещин с изменением давления на 1 кгс/см² (или $1{,}02 \cdot 10^5$ н/м²). Размерность этого коэффициента обратна размерности давления.

Из уравнения (XIV.6) следует, что:

$$\frac{\partial \tau_т}{\partial t} = \beta_т \tau \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XIV.7)}$$

Таким образом, первое слагаемое правой части равенства (XIV.4) можно представить в виде:

$$\frac{\partial m_т}{\partial t} \rho = \frac{\partial \tau_т}{\tau \partial t} \rho = \rho \beta_т \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XIV.8)}$$

Что касается второго слагаемого, то так же, как и в главе XII, можно показать, что:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta_ж \rho \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XIV.9)}$$

Следовательно, правая часть уравнения (XIV.3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial (m_т \rho)}{\partial t} = \rho (\beta_т + m_т \beta_ж) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \beta_т^* \frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(XIV.10)}$$

где $\beta_т^* = \beta_т + m_т \beta_ж$

Коэффициент $\beta_т^*$ по аналогии с пористой средой можно назвать коэффициентом упругоемкости трещиноватого пласта. Как показали результаты обработки промысловых данных по месторождениям, величина этого коэффициента колеблется в пределах от $0{,}4 \cdot 10^{-10}$ м²/Н до $0{,}9 \cdot 10^{-10}$ м²/Н.

Преобразуем левую часть уравнения (XIV.3), которая в развернутом виде может быть записана как:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_т \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_т \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_т \rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}\right). \qquad \text{(XIV.11)}$$

Полагая, что $k_т = k_т^0 [1 - \beta (p_0 - p)]^3$ см. формулу (III.10) и $\mu = \text{const}$, из (XIV.11) получаем:

$$\frac{k_т^0}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho f(p) \frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho f(p) \frac{\partial p}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho f(p) \frac{\partial p}{\partial z}\right]\right\}, \qquad \text{(XIV.12)}$$

где $f(p) = [1 - \beta (p_0 - p)]^3$.

Учитывая, что:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\beta_ж \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\beta_ж \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\beta_ж \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z};$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\beta_ж \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

перепишем уравнение (XIV.12) в такой форме:

$$\frac{k_т^0}{\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[f(p)\frac{\partial \rho}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[f(p)\frac{\partial \rho}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[f(p)\frac{\partial \rho}{\partial z}\right]\right\}=\beta_т^*\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{XIV.13}$$

Учитывая, что

$$\rho=\rho_{ат}e^{\beta_ж(p-p_{ат})}\cong\rho_{ат}[1+\beta_ж(p-p_{ат})], \tag{XIV.14}$$

из (XIV.13) можно получить более простое дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению неустановившейся политропической фильтрации газа акад. Л. С. Лейбензона:

$$\frac{k_т^0}{\mu\beta_т^*}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[f(p)\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[f(p)\frac{\partial p}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[f(p)\frac{\partial p}{\partial z}\right]\right\}=\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{XIV.15}$$

Вводя новую переменную $\Phi=1-\beta(p_0-p)$, уравнение (XIV.15) можно переписать в окончательном виде:

$$\frac{k_т^0}{4\mu\beta_т^*}\left(\frac{\partial^2\Phi^4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi^4}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi^4}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{XIV.16}$$

Как видно из (XIV.16), полученное уравнение аналогично уравнению акад. Л. С. Лейбензона для идеального газа, но с иным значением функции Φ и иным показателем степени.

В полярной системе координат для неустановившегося плоскорадиального движения жидкости в трещиноватом пласте соответственно уравнению (XIV.16) будем иметь:

$$\varkappa_т^0\left(\frac{\partial^2\Phi^4}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^4}{\partial r}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \tag{XIV.17}$$

где

$$\varkappa_т^0=\frac{k_т^0}{4\mu\beta_т^*}.$$

Уравнение (XIV.17) можно представить также в таком виде:

$$\varkappa_т^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi^4}{\partial r}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{XIV.18}$$

Дифференциальные уравнения неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористом пласте были впервые предложены Г. И. Баренблаттом, Ю. П. Желтовым, И. Н. Кочиной.

§ 2. Неустановившаяся фильтрация жидкости в деформируемом трещиноватом пласте, вызванная остановкой скважины после ее длительной работы с постоянным дебитом

В § 1 настоящей главы были получены нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, описывающие неустановившиеся процессы в деформируемом трещинова-

том пласте. Подобные нелинейные уравнения не имеют точного решения. Существуют, однако, достаточно эффективные приближенные методы решения уравнений подобного вида: методы линеаризации по акад. Л. С. Лейбензону, метод малого параметра, метод интегральных соотношений Г. И. Баренблатта, метод осреднения производной по времени Г. П. Гусейнова и другие специальные методы.

Рассмотрим итоговое решение задачи об остановке скважины. Полагаем, что скважина находится в центре пласта с круговым контуром питания. На контуре питания все время поддерживается постоянное давление, равное начальному давлению в пласте, т. е. $p_к = p_0$. Считаем, что перед остановкой скважина длительное время эксплуатировалась при постоянной депрессии (с установившимся объемным дебитом); в момент остановки приток жидкости из пласта сразу же прекращается. Сформулируем начальное и граничные условия. Полагаем, что перед остановкой скважины распределение функции давления происходило стационарно (для деформируемого трещиноватого пласта, т. е. для $\Phi = 1 - \beta (p_0 - p)$ имеем:

$$\Phi^4(r,\ 0)=\Phi_0^4+\Omega \ln \frac{r}{r_к}, \qquad \text{(XIV.19)}$$

где

$$\Omega=\frac{2\mu Q\beta}{\pi b k_т^0}.$$

Формулу (XIV.19) получаем из известных в главе V зависимостей для установившегося одномерного потока жидкости в деформируемом трещиноватом коллекторе. При решении задачи обычно выделяют две фазы процесса перераспределения давления. Для первой фазы характерно то, что область возмущения (ее граница) не доходит до контура питания. Вторая фаза начинается тогда, когда радиус границы возмущенной области станет равным радиусу контура питания.

Рассмотрим решение задачи только для первой фазы. Для второй фазы решение аналогично, но с учетом некоторых особенностей в формулировке граничных условий. С этим решением, а также его выводом можно познакомиться в специальной литературе.

Для первой фазы процесса перераспределения давления, вызванного остановкой скважины, на границе возмущенной области будем иметь:

$$\left(r\frac{\partial \Phi^4}{\partial r}\right)\Big|_{r=l\,(t)}=\Omega,$$

или

$$\left(4r\Phi^3\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\Big|_{r=l\,(t)}=\Omega. \qquad \text{(XIV.20)}$$

На стенке скважины, так как она остановлена, имеем:

$$\left(r\frac{\partial \Phi^4}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_c\to 0}=0. \qquad \text{(XIV.21)}$$

Понятно, что решение поставленной задачи должно удовлетворять дифференциальному уравнению вида (см. § 1 настоящей главы):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \varkappa_{\text{т}}^{0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^4}{\partial r} \right). \qquad \text{(XIV.22)}$$

Если воспользоваться методом интегральных соотношений, то после ряда рассуждений, которые выходят за рамки курса, мы в итоге можем получить для точки на стенке скважины:

$$\Phi_{\text{c0}}^4 - \Phi_{\text{c}}^4 = \frac{5}{6}\Omega + \Omega \ln \frac{r_{\text{к}}}{3{,}65\sqrt{\varkappa_{\text{т}}^{0} t}}. \qquad \text{(XIV.23)}$$

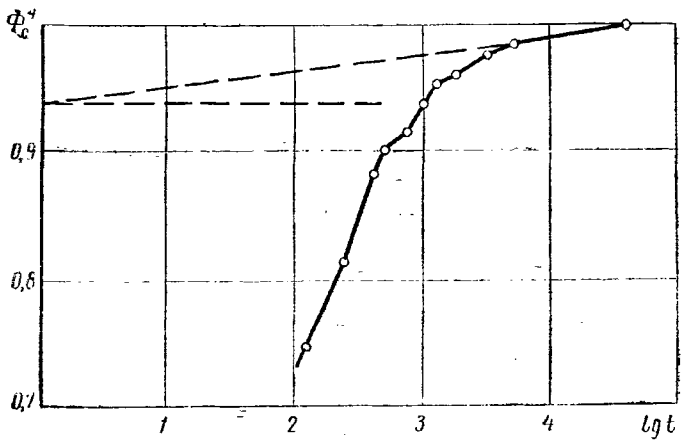


Рис. 119. Преобразованный график прослеживания в координатах «$\Phi_{\text{c}}^4 - \lg t$»

После простых преобразований из уравнения (XIV.23) следует:

$$\Phi_{\text{c}}^4 = \Phi_{\text{c0}}^4 - A + b \lg t, \qquad \text{(XIV.24)}$$

где

$$\Phi_{\text{c}}^4 = [1 - \beta (p_{\text{c0}} - p_{\text{c}})]^4; \quad \Phi_{\text{c0}}^4 = 1 \quad (\text{при } p_{\text{c0}} = p_0 = p_{\text{к}});$$

$$A = 2{,}3\Omega \lg \frac{r_{\text{к}}}{\sqrt{\varkappa_{\text{т}}^{0}}} - 0{,}47\Omega; \qquad b = 1{,}15\Omega;$$

$$\Omega = \frac{2\mu Q \beta}{\pi b k_{\text{т}}^{0}}.$$

Таким образом, кривая восстановления давления для деформируемого трещиноватого пласта должна перестраиваться в координатах Φ_{c}^4 и ($\lg\ t$) (см. рис. 119).

График будет представлять собой прямую, отсекающую по оси ординат ($\lg\ t = 0$; $t = 1$) отрезок

$$A = 2{,}3\ \Omega \lg \frac{r_{\text{к}}}{\sqrt{\varkappa_{\text{т}}^{0}}} - 0{,}47\ \Omega;$$

с тангенсом угла наклона к оси (lg t), равным:

$$\operatorname{tg}\alpha\, 1{,}15\Omega = \frac{2{,}3\mu Q\beta}{\pi b k_{\text{т}}^{0}}. \qquad \text{(XIV.25)}$$

Зная значение tg α, можно (при известном из обработки индикаторных кривых коэффициенте β) определить проницаемость $k_{\text{т}}^{0}$:

$$k_{\text{т}}^{0} = \frac{2{,}3\mu Q\beta}{\pi b \operatorname{tg}\alpha} \qquad \text{(XIV.26)}$$

Отметим, что нелинейные уравнения, полученные ранее, можно решить также и другими способами: методом малого параметра, методом осреднения производной по времени (способ Г. П. Гусейнова) и другими специальными приближенными методами, с которыми можно познакомиться в соответствующей литературе.

Туда же мы отсылаем читателя и по вопросам, касающимся решения дифференциального уравнения неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористом пласте.

Глава XV

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕОДНОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Некоторые замечания о фазовой проницаемости пористой среды

В § 10 главы IV отмечалось, что фазовая проницаемость пористой среды в том случае, если жидкость газированная, не выражается в функции одной только насыщенности, но что это обстоятельство не изменяет характер известных решений задач с помощью соответствующих уравнений движения. Дадим по этому поводу необходимые уточнения.

Результаты экспериментальных исследований Д. А. Эфроса, опубликованные в 1960 г., показали, что следует выделять два рода течения жидкости, одновременного с течением газа через образец пористой среды. Течение одного рода получается тогда, когда в образец вместе с жидкостью вводится внешний газ; при этом в образце породы движется смесь жидкости и газа, а газ из жидкости не выделяется. Течение иного рода происходит, если в образец поступает насыщенная газом жидкость и процесс движения сопровождается выделением газа из раствора.

Назовем смесью две движущиеся фазы, если из жидкости не выделяется газ, а газированной жидкостью — жидкость, при движении которой выделяется газ.

Основываясь на данных сопоставления течений смеси и газированной жидкости можно утверждать, что при условии равных газовых факторов в точках равных давлений, *фазовые проницаемости для смеси оказываются большими,* чем фазовые проницаемости для газированной жидкости. Это можно объяснить тем, что в случае смеси фазы занимают различные поры, а при фильтрации, сопровождающейся выделением газа из раствора, во многих порах присутствуют одновременно жидкость и пузырьки выделившегося газа. Если вычислять фазовые проницаемости, исходя из указанного объяснения, то при насыщенности S, близкой к единице, фазовые проницаемости газированной жидкости соответствуют проницаемостям в опытах течения смеси.

Только при фильтрации смесей, т. е. если газ не выделяется из раствора, а вводится извне, можно считать, что фазовые проницаемости зависят лишь от одной насыщенности S во всем диапазоне изменения последней. В этих случаях зависимости $\frac{k_r}{k} = F_r(S)$ и

$\frac{k_{ж}}{k} = F_{ж}(S)$ можно представлять, например, соответствующими кривыми рис. 20. В остальных случаях имеет значение распределение фаз в порах, которое в свою очередь определяется безразмерной величиной π_D:

$$\pi_D = \frac{Dp_{н}}{k} : \frac{dp}{dt}, \qquad \text{(XV.1)}$$

где D — коэффициент диффузии; $p_{н}$ — давление насыщения жидкости газом; остальные обозначения прежние.

При очень медленном снижении давления, т. е. при небольшом значении $\frac{dp}{dt}$, газ диффундирует в пузыри, образовавшиеся в начальный период, расширяющиеся пузыри вытесняют жидкость и образуют смесь как и при вводе внешнего газа.

Промысловые исследования дали возможность определить в ряде случаев среднепластовую функцию следующего вида:

$$\Psi(S) = \frac{F_{г}(s)}{F_{ж}(s)} \qquad \text{(XV.2)}$$

Оказалось, что *среднепластовая функция* (XV.2) *близка к той, которая получается при движении смеси.* Это подтверждается специальными опытами по истощению пласта. Таким образом, осредняя значения фазовых проницаемостей для всего пласта, можно принимать, что фазовые проницаемости зависят только от насыщенности. В то же время проницаемости призабойной области пласта оказываются значительно меньшими, чем проницаемости для смеси.

На основании указанных выше экспериментальных исследований можно считать, что относительная фазовая проницаемость для жидкой фазы газированной жидкости зависит только от насыщенности S при условии, что относительная фазовая проницаемость для газа определена в функции двух параметров, например, безразмерных p^* и λ; в данном случае

$$\left.\begin{aligned} p^* &= \frac{p}{p_1}, \\ \lambda &= \frac{G}{\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.3)}$$

Здесь p_1 — выходное давление; G и σ соответственно газовый фактор и объемная растворимость газа в жидкости, приведенные к давлению p_1. Но, выражая фазовую проницаемость для газа двупараметрически, можно выразить в функции также двух параметров проницаемость для жидкой фазы. Применительно к неустановившемуся плоско-радиальному потоку газированной жидкости результаты исследований сформулируем так: использование однопараметрических зависимостей для фазовых проницаемостей (т. е. зависимостей, известных нам из главы IV, которые выражают фазовые проницаемости в функции только насыщенности), приводит к завышению дебита в первый период и к занижению значения времени разработки.

Хотя двупараметрические зависимости при определении проницаемости для фаз газированной жидкости, строго говоря, применимы лишь в случаях установившегося течения, приближенное использование этих зависимостей допустимо для ряда неустановившихся течений.

Резюмируя изложенное, мы можем сделать такой вывод: известные нам однопараметрические зависимости для фазовых проницаемостей практически действительны не только при фильтрации смеси жидкости и газа, но и при осреднении проницаемостей по пласту, при *медленно изменяющемся давлении в процессе неустановившегося движения газированной жидкости.*

Еще раз подчеркиваем, что в принципе характер решения уравнений при введении двупараметрических зависимостей для проницаемостей не меняется, хотя решения оказываются более громоздкими. Мы ограничимся однопараметрическими зависимостями.

§ 2. Система дифференциальных уравнений неустановившегося движения газированной жидкости в пористой среде

Система дифференциальных уравнений неоднофазного фильтрационного потока составляется с помощью уравнения неразрывности (VIII.4) и уравнения, выражающего закон фильтрации, например (VIII.7). Уравнение неразрывности записывается для каждого компонента потока, находящегося в соответствующей фазе. Уравнение, выражающее закон фильтрации, применяется также к каждой фазе — компоненту.

Составим систему двух дифференциальных уравнений неустановившегося движения газированной жидкости в пористой среде.

Будем считать, что каждая из двух фаз фильтруется в соответствии с законом Дарси, т. е. в соответствии с формулой (VIII.9). Пользуясь этой последней, запишем для жидкой фазы следующую формулу:

$$\rho_{ж}\vec{v}_{ж} = -\nabla\varphi_{ж}, \tag{XV.4}$$

где $\rho_{ж}$ — плотность жидкой фазы; $\vec{v}_{ж}$ — вектор скорости ее фильтрации; $\varphi_{ж}$ — определяется на основании (IV.9) и (VIII.9) так:

$$\varphi_{ж} = \int \frac{\rho_{ж} k_{ж}}{\mu_{ж}}\, dp + C. \tag{XV.5}$$

Подставив значение $\varphi_{ж}$ из (XV.5) в (XV.4), получим вместо (XV.4) такое равенство:

$$\rho_{ж}\vec{v}_{ж} = -\frac{\rho_{ж} k_{ж}}{\mu_{ж}}\nabla p. \tag{XV.6}$$

Равенство (XV.6) можно было получить и непосредственно из формулы (VIII.9), умножив обе ее части на $\rho_{ж}$.

Для газа, растворенного в жидкости и движущегося вместе с ней, имеем:

$$\rho_{\text{г}}'\vec{v}_{\text{ж}} = -\frac{\rho_{\text{г}}' k_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \nabla p, \qquad \text{(XV.7)}$$

где $\rho_{\text{г}}'$ — плотность растворенного газа.

Но известно — см. формулу (IV.91) — что массовая растворимость газа

$$\sigma_{\text{м}}(p) = \frac{M_{\text{г}}''}{M_{\text{ж}}} = \frac{\rho_{\text{г}}'\vec{v}_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}\vec{v}_{\text{ж}}} = \frac{\rho_{\text{г}}'}{\rho_{\text{ж}}}, \qquad \text{(XV.8)}$$

где $M_{\text{г}}''$ — массовый дебит растворенного газа; $M_{\text{ж}}$ — дебит жидкости.

Согласно пояснению к формуле (IV.93), массовая растворимость газа $\sigma_{\text{м}}(p)$ связана с объемной растворимостью $\sigma(p)$ следующей зависимостью:

$$\sigma_{\text{м}}(p) = \frac{\rho_{\text{г. 0}}}{\rho_{\text{ж. 0}}} \sigma(p), \qquad \text{(XV.9)}$$

где $\rho_{\text{г. 0}}$ и $\rho_{\text{ж. 0}}$ — плотности газа и жидкости при давлении в 1 кгс/см^2.

Приравнивая правые части (XV.8) и (XV.9), получим:

$$\rho_{\text{г}}' = \rho_{\text{г. 0}} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж. 0}}} \sigma(p) = \frac{\sigma(p)}{\beta(p)} \rho_{\text{г. 0}}, \qquad \text{(XV.10)}$$

где $\beta(p)$ — объемный коэффициент жидкости — см. формулу (IV.97).

Подставляя значение $\rho_{\text{г}}'$ из (XV.10) в правую часть формулы (XV.7), найдем:

$$\rho_{\text{г}}'\vec{v}_{\text{ж}} = -\frac{\sigma(p)}{\beta(p)} \frac{\rho_{\text{г. 0}} k_{\text{ж}}}{\mu_{\text{ж}}} \nabla p. \qquad \text{(XV.11)}$$

Вектор массовой скорости свободного газа $\rho_{\text{г}} v_{\text{г}}$ представится так:

$$\rho_{\text{г}}\vec{v}_{\text{г}} = -\frac{\rho_{\text{г}} k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}} \nabla p, \qquad \text{(XV.12)}$$

где $\rho_{\text{г}}$ — плотность свободного газа; $\vec{v}_{\text{г}}$ — вектор скорости фильтрации газа.

Учтем, что растворенный газ занимает ту часть объема порового пространства, которая принадлежит жидкой фазе, т. е. S; часть объема порового пространства, занятая свободным газом, равна $1-S$.

Теперь нетрудно составить уравнения, одно из которых будет отвечать фильтрации жидкой фазы, другое — газовой фазы.

Подставим значение вектора массовой скорости фильтрации жидкой фазы из (XV.6) в уравнение неразрывности (VIII.4). При этом плотность жидкой фазы будем выражать так:

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{\rho_{\text{ж. 0}}}{\beta(p)}. \qquad \text{(XV.13)}$$

Получим из формул (VIII.4), (XV.6) и (XV.13) первое уравнение системы:

$$\nabla\left[\frac{k_{ж}}{\beta(p)\mu_{ж}}\nabla p\right]=m\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{s}{\beta(p)}\right]; \qquad (XV.14)$$

предполагается, что пористость m неизменна.

Суммируя затем равенства (XV.11) и (XV.12) почленно и подставив результат суммирования в левую часть уравнения (VIII.4), найдем второе уравнение системы:

$$\nabla\left\{\left[\frac{\sigma(p)}{\beta(p)}\frac{\rho_{г.\,0}k_{ж}}{\mu_{ж}}+\frac{\rho_{г}k_{г}}{\mu_{г}}\right]\nabla p\right\}=$$

$$=m\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sigma(p)}{\beta(p)}\rho_{г.\,0}s+\rho_{г}(1-s)\right]. \qquad (XV.15)$$

Уравнения (XV.14) и (XV.15) *образуют систему общих дифференциальных уравнений движения газированной жидкости в пористой среде.* В таком виде эта система общих уравнений была дана М. Маскетом.

Впервые дифференциальные уравнения движения газированной нефти в пласте были выведены акад. Л. С. Лейбензоном в начале тридцатых годов. Акад. Л. С. Лейбензон рассматривал смесь жидкости и пузырьков газа как нечто целое, движущееся через поры породы. Поскольку предполагалось, что соотношение между объемами газовых пузырьков и жидкой фазы меняется в связи с давлением, было выведено соответствующее уравнение состояния, которое представляло зависимость между давлением и объемным весом смеси.

В 1945 г. акад. Л. С. Лейбензон вывел систему дифференциальных уравнений неустановившегося движения газированной жидкости с учетом того, что скорости компонентов (жидкости и газа) различны. Как показано Д. А. Эфросом, система уравнений Маскета (XV.14) и (XV.15) не противоречит системе уравнений Лейбензона и при известных физических предпосылках из уравнений (XV.14) и (XV.15) могут быть получены уравнения Лейбензона.

Систему уравнений (XV.14) и (XV.15) можно рассматривать как уравнения материального баланса, составленные для бесконечно малого объема пористой среды. П. М. Белаш, следуя Маскету, показал связь между уравнениями материального баланса в конечной форме и дифференциальными уравнениями фильтрации в различных случаях, например в случаях, которым отвечают уравнения (XV.14) и (XV.15).

Точные решения системы уравнений (XV.14) и (XV.15) в связи с задачами разработки нефтегазоносных пластов возможны только в отдельных частных случаях при тех или иных допущениях и ограничениях. Так, например, акад. М. Д. Миллионщиков привел дифференциальное уравнение движения жидкой фазы (XV.14) при высокой насыщенности S к виду уравнения теплопроводности и, следовательно, показал возможность его интегрирования для случаев истощения нефтегазоносной залежи в условиях режима растворенного

газа и высокой насыщенности. Уравнение (XV.14) можно свести к уравнению теплопроводности и при некоторых иных предположениях.

Как правило, система уравнений (XV.14) и (XV.15) решается приближенными методами.

К. А. Царевич путем упрощения системы уравнений Маскета и Мереса получил выражение газового фактора так, как это было рекомендовано акад. С. А. Христиановичем, и далее решал задачу о плоско-радиальном нестационарном движении газированной жидкости — по методу последовательной смены установившихся состояний. Подобная задача решалась В. А. Архангельским.

Маскет заменил левые части уравнений (XV.14) и (XV.15) текущими дебитами нефти и газа, приходящимися на единицу объема продуктивного пласта; получив из новых уравнений формулу, выражающую газовый фактор, Маскет рассматривает ее как уравнение материального баланса, а пласт как «средний» изолированный дифференциальный элемент. Из уравнений (XV.14) и (XV.15) выводится дифференциальное уравнение зависимости между насыщенностью s и давлением p для указанного среднего элемента.

Комбинируя метод последовательной смены установившихся состояний с условием материального баланса, Б. Б. Лапук решал задачу о разработке нефтегазоносного месторождения с режимом растворенного газа.

Необходимо оговорить, что метод последовательной смены установившихся состояний для прямолинейно-параллельного неустановившегося потока газированной жидкости неточен, так как дает большие погрешности.

В двух следующих параграфах будет показано, как, исходя из некоторых предположений, можно применять систему уравнений (XV.14) и (XV.15) для решения определенных задач движения газированной жидкости в пласте. Мы познакомимся также с результатами некоторых приближенных решений, основанных на использовании уравнения материального баланса.

§ 3. Изменение давления и газового фактора в связи с изменением насыщенности при небольших градиентах давления

Рассмотрим неустановившееся движение в пласте газированной жидкости, когда давление ниже давления насыщения жидкости газом.

Этому движению соответствуют следующие условия:

1) фазовые проницаемости $k_ж$ и $k_г$ допустимо выражать однопараметрическими зависимостями, считая, что $k_ж/k$ и $k_г/k$ зависят от насыщенности s, которая в свою очередь является функцией давления p, т. е.

$$s=s(p), \qquad \text{(XV.16)}$$

следовательно, изменение относительных фазовых проницаемостей для жидкости и газа $F_{ж}(s)=\frac{k_{ж}}{k}$ и $F_{г}(s)=\frac{k_{г}}{k}$ в зависимости от давления можно характеризовать такими производными:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_{ж}}{\partial p}&=\frac{\partial F_{ж}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p};\\ \frac{\partial F_{г}}{\partial p}&=\frac{\partial F_{г}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p};\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.17)}$$

2) коэффициент объемного расширения жидкости

$$\beta(p)=1; \qquad \text{(XV.18)}$$

3) газ — идеальный, его состояние определяется уравнением (IV.19):

$$\frac{\rho_{г}}{\rho_{ат}}=\frac{p}{p_{ат}}; \qquad \text{(XV.19)}$$

4) объемная растворимость газа в жидкости пропорциональна давлению:

$$\sigma(p)=\alpha\frac{p}{p_{ат}}, \qquad \text{(XV.20)}$$

где $\alpha=\text{const}$;

5) градиенты давления ∇p столь малы, что в видоизмененных уравнениях (XV.14) и (XV.15) квадратами градиентов давления можно пренебрегать;

6) коэффициенты вязкости $\mu_{ж}$ и $\mu_{г}$ постоянны.

Учитывая условия пп. 2—4 и 6, перепишем уравнения (XV.14) и (XV.15) так:

$$\frac{k}{\mu_{ж}}\nabla[F_{ж}(s)\nabla p]=m\frac{\partial s}{\partial t}, \qquad \text{(XV.21)}$$

$$k\nabla\left\{\left[\frac{\alpha p F_{ж}(s)}{\mu_{ж}}+\frac{pF_{г}(s)}{\mu_{г}}\right]\nabla p\right\}=m\frac{\partial}{\partial t}[\alpha ps+p(1-s)]. \qquad \text{(XV.22)}$$

Представим теперь уравнения (XV.21) и (XV.22) в развернутом виде. Заметим, что оператор Гамильтона ∇, поставленный левее внешних скобок в левой части каждого из этих уравнений, символизирует операцию, которая формально выполняется по правилам дифференцирования, причем $\nabla\nabla p=\nabla^2 p$.

Развернутый вид уравнений будет таким:

$$\frac{k}{\mu_{ж}}[\nabla F_{ж}(s)\nabla p+F_{ж}(s)\nabla^2 p]=m\frac{\partial s}{\partial t}; \qquad \text{(XV.23)}$$

$$\begin{aligned}&\frac{k\alpha}{\mu_{ж}}[F_{ж}(s)(\nabla p)^2+p\nabla F_{ж}(s)\nabla p+pF_{ж}(s)\nabla^2 p]+\\ &+\frac{k}{\mu_{г}}[F_{г}(s)(\nabla p)^2+p\nabla F_{г}(s)\nabla p+pF_{г}(s)\nabla^2 p]=\\ &=m\alpha s\frac{\partial p}{\partial t}+m\alpha p\frac{\partial s}{\partial t}+m\frac{\partial p}{\partial t}-mp\frac{\partial s}{\partial t}-ms\frac{\partial p}{\partial t}.\end{aligned} \qquad \text{(XV.24)}$$

Но

$$\left.\begin{aligned}\nabla F_{ж} &= \frac{\partial F_{ж}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}\nabla p,\\ \nabla F_{г} &= \frac{\partial F_{г}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial p}\nabla p,\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.25)}$$

а

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(XV.26)}$$

Кроме того, на основании условия п. 5 будем считать, что $(\nabla p)^2 = 0$.

Определив из уравнения (XV.23) с помощью (XV.26) величину

$$\frac{\partial p}{\partial t} : \nabla^2 p = \frac{kF_{ж}(s)}{\mu_{ж}} : m\frac{\partial s}{\partial p}, \qquad \text{(XV.27)}$$

подставим ее значение из (XV.27) в уравнение (XV.24), предварительно разделив все его члены на $\nabla^2 p$. Учитывая равенства (XV.25) — (XV.27), представим уравнение (XV.24) так:

$$\frac{\partial s}{\partial p} = \frac{1-(1-\alpha)s}{p\left[1+\dfrac{F_{г}(s)}{F_{ж}(s)}\dfrac{\mu_{ж}}{\mu_{г}}\right]}, \qquad \text{(XV.28)}$$

Из (XV.28) следует, что

$$p = p_0 e^{\int_{s_0}^{s} f(s')\,ds'} \qquad \text{(XV.29)}$$

где

$$f(s) = \frac{\dfrac{F_{г}(s)}{F_{ж}(s)} + \dfrac{\mu_{г}}{\mu_{ж}}}{\dfrac{\mu_{г}}{\mu_{ж}}[1-(1-\alpha)s]}; \qquad \text{(XV.30)}$$

p_0 — давление, соответствующее насыщенности s_0.

Итак, уравнение (XV.28) или (XV.29) выражает *зависимость между давлением p и насыщенностью s при неустановившемся движении газированной жидкости*, если выполняются поставленные выше условия (пп. 1—6).

На рис. 120 изображены кривые, показывающие зависимость (XV.29): 1) при $\mu_{г}/\mu_{ж} = 0{,}01$ и 2) при $\mu_{г}/\mu_{ж} = 0{,}001$. В обоих случаях принято, что объемный коэффициент растворимости газа в жидкости $\alpha = 0{,}5$ м³/м³. Относительные фазовые проницаемости определялись в функции насыщенности $F_{ж}(s)$ и $F_{г}(s)$ по формулам Джонса.

Давление p_0 соответствует насыщенности $s = 1$.

На рис. 120 видно, что с уменьшением давления *p насыщенность снижается*. Это является характерной особенностью режима растворенного газа, который можно считать также режимом газированной жидкости. Из рис. 120 можно заключить, что в значительном диапазоне изменения давления справедливо следующее утверждение:

изменение давления в некоторое число раз, превышающее единицу, влечет за собой изменение насыщенности всего лишь на некоторую долю ее начального значения, т. е. насыщенность изменяется медленнее, чем давление.

Другую характерную особенность режима растворенного газа следует отметить в связи с изменением газового фактора G в процессе снижения давления p и насыщенности s. Этой особенностью отличаются некоторые случаи вытеснения газированной нефти водой, на что указывалось уже в § 5 главы XI. Чтобы выявить эту особенность, в данном случае вычислим значения газового фактора G для ряда значений p и s и построим кривую зависимости G/p_c от насыщенности s. Такая кривая изображена на рис. 121 для одного из примеров, которым отвечают кривые рис. 120, именно для примера $\mu_г/\mu_ж = 0{,}01$.

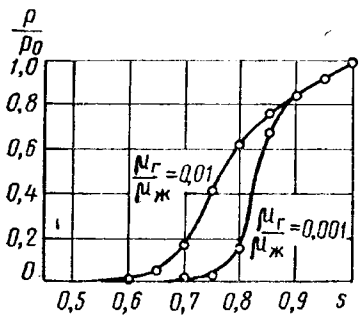


Рис. 120. Кривые зависимости давления от насыщенности s.

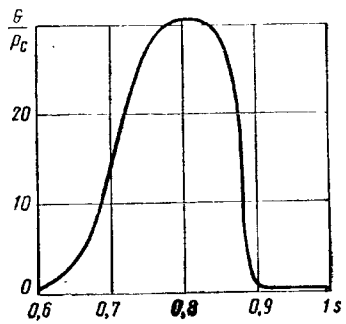


Рис. 121. Кривая зависимости величины $\frac{G}{p_c}$ от насыщенности s.

Расчет газового фактора G производился по формуле (IV.97) — газовый фактор, выраженный формулой (IV.97), рассматривался в данном случае как переменная величина.

Кривая газового фактора имеет *максимум*. Достигнув в процессе разработки пласта этого максимума, газовый фактор уменьшается вместе с уменьшением давления p и насыщенности s. Такова другая особенность режима растворенного газа.

Дифференцируем равенство (XV.29) по времени t:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p_0 e^{\int_{s_0}^{s} f(s')\,ds'} f(s) \frac{\partial s}{\partial t}. \qquad \text{(XV.31)}$$

Найдем из (XV.31) выражение $\partial s/\partial t$ и подставив его в формулу (XV.27), получим:

$$\frac{kp_0}{m\mu_ж} F_ж(s)\,\omega(s)\,\nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(XV.32)}$$

$$\omega(s) = f(s)\, e^{\int_{s_0}^{s} f(s')\,ds'} \qquad \text{(XV.33)}$$

Уравнение (XV.32) есть дифференциальное уравнение движения *жидкой фазы* газированной жидкости *при соблюдении условий* (п. п. 1—6). Оно отличается от дифференциального уравнения теории упругого режима (XII.14) тем, что множитель при $\nabla^2 p$ в левой части уравнения не постоянный, а переменный.

§ 4. Фильтрация газированной жидкости при высокой насыщенности

Рассмотрим движение газированной жидкости, когда в уравнении (XV.32) множитель при $\nabla^2 p$ можно приближенно принять за постоянный. Следовательно, уравнение (XV.32) по виду является уравнением теплопроводности.

Допустим, что движение газированной жидкости, которому отвечает уравнение (XV.32), происходит при условии, что насыщенность s остается *близкой к единице*. В этом случае по кривым фазовой проницаемости, изображенным на рис. 21, видим, что относительная фазовая проницаемость для газа $F_г(s)$ близка к нулю или равна нулю. Если газированная жидкость движется в сцементированных песках, можно принять, что $F_г(s) = 0$, а $F_ж(s) = 1$. Тогда на основании формулы (XV.33) функция $\omega(s)$ при $s_0 = 1$ получает такой вид: если $\alpha \neq 1$

$$\omega(s) = \{\alpha[1-(1-\alpha)s]^{\alpha-2}\}^{\frac{1}{1-\alpha}}; \qquad \text{(XV.34)}$$

если $\alpha = 1$

$$\omega(s) = e^{s-1}.$$

Пусть имеется полосообразный пласт длиной L, сложенный сцементированными породами. Положим, что в начальный момент времени пластовое давление везде одинаково и равно давлению насыщения жидкости газом p_0, причем начальная насыщенность $s_0 = 1$. Положим еще, что давление на контуре стока — галереи p_c настолько ниже p_0, насколько необходимо, чтобы выделяющийся из жидкости газ оставался неподвижным, т. е. чтобы $F_г(s) = 0$. При этом, как нам известно, функция $\omega(s)$ выражается одним из равенств (XV.34).

Будем, например, считать, что формулы (XV.34) справедливы в интервале изменения насыщенности от $s = 1$ до $s = 0{,}9$. Значения функции $\omega(s)$ в этом интервале значений s при $\alpha = 1$ приводятся в табл. 29.

Таблица 29

Значения функции $\omega(s)$, определяемой по формуле (XV.34) при высокой насыщенности и $\alpha = 1$

Насыщенность s	1	0,98	0,96	0,95	0,94	0,92	0,90
$\omega(s)$	1	0,980	0,961	0,951	0,942	0,923	0,905

Напишем теперь уравнение (XV.32) применительно к движению газированной жидкости в рассматриваемом полосообразном пласте:

$$\frac{kp_0}{m\mu_{ж}}\omega(s)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \text{(XV.35)}$$

где x — координата, отсчитанная вдоль потока от контура питания.

Если принимать в уравнении (XV.35) множитель $\omega(s)$ за постоянный, равный, например, одному из значений, показанных в табл. 29, то уравнение (XV.35) получит следующий вид:

$$\frac{kp_0}{m\mu_{ж}}\omega(\bar{s})\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(XV.36)}$$

где $\bar{s}$ — одно из значений s в данном интервале;

$$\omega(\bar{s})=\bar{\omega}=\text{const}.$$

В уравнении (XV.36) множитель $kp_0\bar{\omega}/m\mu_{ж}$ постоянен; следовательно, по виду оно совпадает с уравнением (XII.14) для течения жидкости в пласте при упругом режиме и с уравнением (XIII.15) для течения газа.

Формулируем граничные и начальные условия:

1) пусть на контуре питания пласта поддерживается постоянное давление p_0; это значит, что при $x=0$

$$p=p_0; \qquad \text{(XV.37)}$$

2) на контуре стока поддерживается постоянное давление $p_c<p_0$, т. е. при $x=L$

$$p=p_c; \qquad \text{(XV.38)}$$

3) в начальный момент давление везде одинаково и при $t=0$

$$p=p_0. \qquad \text{(XV.39)}$$

Мы видим, что не только дифференциальное уравнение (XV.36) совпадает по виду с уравнением (XII.14), но и условия (XV.37) — (XV.39) совпадают с граничными и начальными условиями аналогичной задачи теории упругого режима. Поскольку поставленная здесь задача должна решаться при помощи уравнения (XV.36), совпадающего по виду с уравнением задачи п. 5 (§ 5, глава XII) и поскольку граничные и начальные условия в обеих задачах одинаковы, получим одинаковые по виду результаты решений обеих задач.

Но для аналогичной задачи теории упругого режима результат решения известен. Можем воспользоваться этими готовыми формулами для решения задачи настоящего параграфа. Следует только помнить, что в задаче по движению газированной жидкости роль коэффициента пьезопроводности пласта $\varkappa$ играет постоянный множитель $kp_0\bar{\omega}/m\mu_{ж}$, в чем легко убедиться, сравнив уравнения (XII.14) и (XV.36).

Возьмем, например, отношение текущего объемного дебита жидкости Q к дебиту $Q_у$ при установившемся состоянии. В п. 5 (§ 5, глава XII) было выяснено на основании кривой изменения $Q/Q_у$ на рис. 114, что после момента времени $t = 0{,}5L^2/\varkappa$ течение можно считать практически установившимся. В аналогичной задаче о движении газированной жидкости следует считать (учитывая значение величины, заменяющей коэффициент $\varkappa$), что неустановившееся состояние практически заканчивается по истечении следующего времени:

$$t = \frac{m\mu_ж L^2}{2kp_0\bar{\omega}}. \qquad \text{(XV.40)}$$

Возможная максимальная погрешность в оценке времени неустановившегося процесса, конечным результатом которого является практически стабильный дебит, находится из нижеследующих соображений.

Возьмем из табл. 29 среднее значение $\bar{s} = 0{,}951$; время $\bar{t}$, соответствующее этому значению $\bar{s}$, определится по формуле (XV.40). Сравнивая его с временем t_1, подсчитанным при условии, что $\bar{s} = 1$, найдем погрешность, которая будет порядка 5%. Если $\alpha \neq 1$, погрешность будет иной. Так, при $\alpha = 0{,}5$ и при тех условиях, которые ставились для $\alpha = 1$, максимальная погрешность достигает 16%.

В рассмотренном здесь случае движения газированной жидкости в полосообразном пласте при условиях (XV.37)—(XV.39) проявляются типичные особенности упругого режима, хотя давление везде, кроме контура питания, оказывается более низким, чем давление насыщения жидкости газом. Давление p_0 на контуре питания может поддерживаться постоянным на протяжении более или менее длительного времени, если, например, за пределами контура питания выделенной нами части пласта существует упругий режим. Такие условия можно создать искусственно путем регулирования давления в специальных нагнетательных скважинах, размещенных в той части пласта, в которой давление выше давления насыщения p_0.

Условия движения газированной жидкости, при которых перераспределение давления в пласте происходит в соответствии с особенностями упругого режима, являются более эффективными, чем те, при которых контурное давление непрерывно снижается (т. е. более эффективными, чем условия режима растворенного газа). Действительно, как мы видели, дебит жидкого компонента, снижаясь, не падает ниже определенной величины, соответствующей практически установившемуся состоянию. В заданном случае промежуток времени резкого падения дебита до его стабилизации уместно назвать *пусковым периодом*. Пусковой период T рассчитывается по формуле (XV.40).

Если, например, $kp_0/m\mu_ж = 50$ см^2/сек, $\bar{\omega} = 1$, то по формуле (XV.40) найдем пусковой период $T = 10^6$ сек ≈ 12 ч при $L = 100$ м и $T = 4 \cdot 10^6$ сек ≈ 2 суткам при $L = 200$ м.

В следующем параграфе рассмотрим приближенные способы решения задач движения газированной жидкости в условиях пласта, в который нагнетается газ.

§ 5. О применении уравнения материального баланса к вопросам разработки пласта в условиях нагнетания газа по площади

Представим себе залежь нефти и газа, который частично растворен в нефти. Извлечение нефти из пласта не сопровождается продвижением краевой воды вследствие ее слабой активности или ее отсутствия. Можно также предполагать, что газированная нефть являлась до начала разработки, как бы «запечатанной» в пласте, который был ограничен непроницаемыми стенками или выклинивался в непроницаемую породу.

Обозначим насыщенность нефтью порового пространства в начальный момент времени s_0. Средневзвешенная по объему пор насыщенность во время разработки

$$\bar{s} = \frac{1}{\tau}\int_0 s\, d\tau, \tag{XV.41}$$

где τ — объем пор пласта.

Обозначим через $\tau_н$ объемное количество отобранной из пласта нефти к тому моменту времени, когда насыщенность будет равна $\bar{s}$.

$$\tau_н = \tau(s_0 - \bar{s}). \tag{XV.42}$$

Дифференцируем равенство (XV.42):

$$d\tau_н = -\tau\, d\bar{s}. \tag{XV.43}$$

Но

$$d\tau_н = \left(\sum Q\right) dt, \tag{XV.44}$$

где $\sum Q$ — суммарный объемный дебит всех эксплуатационных скважин пласта.

Подставив значение $d\tau_н$ из (XV.44) в (XV.43), получим дифференциальное уравнение материального баланса в таком виде:

$$\left(\sum Q\right) dt = -\tau\, d\bar{s}. \tag{XV.45}$$

Это уравнение называется *уравнением истощения нефтяной залежи.*

Представим себе, что отдача жидкости пластом происходит при воздействии нагнетаемого по площади газа. Пусть нагнетательная скважина обслуживает некоторую замкнутую площадь пласта — «поле нагнетания», разрабатываемую эксплуатационными скважинами. Воспользуемся методом последовательной смены установившихся состояний.

Предположим, что переменный средний по площади поля нагнетания коэффициент фазовой проницаемости жидкости равен $k'_ж$. Если

взять среднее значение коэффициента фазовой проницаемости для жидкой фазы, объемный дебит эксплуатационной скважины при плоско-радиальном потоке можно определить по формуле (IV.104). Обобщая эту формулу для любого плоского потока в данном поле нагнетания, запишем:

$$Q = \frac{2\pi b k'_{ж} (p_н - p_с)}{\mu_ж \ln A}, \qquad \text{(XV.46)}$$

где Q — объемный дебит одной эксплуатационной скважины; $p_н$ и $p_с$ — давления в нагнетательной и эксплуатационной скважинах соответственно; A — величина, зависящая от порядка размещения скважин по площади, их числа, взаимных расстояний и размеров площади. Если, например, на данной площади эксплуатационные скважины образуют кольцевую батарею с нагнетательной в центре батареи, легко по способу отображения источников-стоков найти

$$A = \frac{R^{2n} a^{n+1}}{n r_с^{n+1} (R^{2n} - a^{2n})},$$

где n — число скважин; R — радиус площади поля нагнетания, a — радиус кольцевой батареи.

Допустим, что дебит всех эксплуатационных скважин одинаковый.

Изменение дебита или давления эксплуатационной скважины определяется с помощью системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} nQ\,dt &= -\tau\,d\bar{s}; \\ Q &= \frac{2\pi b k F_ж(\bar{s})(p_н - p_с)}{\mu_ж \ln A}; \\ F_ж(\bar{s}) &= \frac{k'_ж}{k}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.47)}$$

Если требуется найти давление $p_с$ при постоянных заданных Q и $p_н$, надо подставить заданное значение Q в первое уравнение (XV.47) и его проинтегрировать. Исключая из полученного уравнения насыщенность S с помощью второго уравнения (XV.47), находим зависимость между давлением $p_с$ и временем. Когда заданы $p_н$ и $p_с$ определяют зависимость между Q и временем.

Здесь приводится только упрощенная схема расчета. При проектировании разработки реального месторождения с применением газовой репрессии используется уточненная схема вычислений с учетом многих параметров, характеризующих свойства жидкости, газа и пласта. Учитывается, например, тот фактор, что нагнетаемый газ способен при повышении давления растворяться в жидкости.

§ 6. Особенности фильтрации газожидкостной смеси в газоконденсатных залежах

С увеличением глубин эксплуатационных скважин возрастают пластовые давления и температура. При этом выявляются свойства пластовой жидкости, присущие глубокозалегающим пластам.

Известно, например, что газ под действием высокого давления способен растворять жидкие углеводороды. Если давление снижается, жидкие углеводороды выделяются из него.

Такое необычное поведение смеси углеводородов наблюдается при давлениях и температурах выше критических. Выделение жидкости при снижении давления в условиях изотермического режима называется *обратной конденсацией*.

Переход с повышением давления жидких углеводородов в газообразное состояние в присутствии газа высокого давления называется *обратным испарением*. (Обычное испарение возникает при снижении давления при низких его значениях.)

Залежи, из которых добывают газ и жидкие углеводороды — конденсаты, т. е. смеси бензиновых и более тяжелых фракций, называются газоконденсатными. Эти залежи характеризуются высокими газовыми факторами. До начала разработки газоконденсатной залежи газожидкостная смесь в большинстве случаев находится в газообразном состоянии. В процессе разработки давление в залежи снижается и наиболее тяжелые ее компоненты, подчиняясь закону обратной конденсации, выпадают в виде конденсата.

В настоящее время многие задачи, связанные с разработкой газоконденсатных месторождений, решены не полностью. Проведенные же исследования позволяют судить, насколько важны результаты полученных гидро-газодинамических решений для подсчета запасов газа, конденсата и нефти, для установления особенностей фильтрации газожидкостной смеси в процессе разработки залежей и т. п. Покажем, как проводится газо-гидродинамическое решение задач фильтрации газоконденсатных систем.

Задача фильтрации газожидкостной смеси в принципе решается на основе системы общих дифференциальных уравнений (XV.14) и (XV.15) и с учетом экспериментальных кривых зависимости относительных фазовых проницаемостей от насыщенности жидкой фазой порового пространства (рис. 20). Однако в случае фильтрации газоконденсатной смеси предлагаются уравнения, несколько отличные от уравнений (XV.14) и (XV.15):

$$-\nabla\left(\frac{k_{ж}}{\mu_{ж}}\nabla p\right)+Apm\left[(1-s)\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{k_{г}}{m\mu_{г}}(\nabla p)^2\right]=m\frac{\partial s}{\partial p}; \quad \text{(XV.48)}$$

$$\nabla\left(p\frac{k_{г}}{\mu_{г}}\nabla p\right)=m\frac{\partial}{\partial t}[p(1-s)], \quad \text{(XV.49)}$$

где A — параметр, представляющий отношение максимального удельного объема конденсата к разности давлений начала и максимальной конденсации.

Второй член в квадратных скобках в уравнении (XV.48) характеризует накопление конденсата при конвективном изменении газовой фазы. Остальные обозначения прежние.

Система уравнений (XV.48) и (XV.49) позволяет перейти к безразмерным величинам и свести решение задачи к решению обыкно-

венных дифференциальных уравнений (к автомодельному решению). Неизвестные переменные определяются методами численного интегрирования при заданных граничных и начальных условиях. При окончательном решении задачи давление и насыщенность выражаются в функциях координат и времени.

§ 7. Особенности фильтрации двухфазной жидкости в трещиноватой среде

Как уже отмечалось, в трещиноватой среде при условии изотропии ее фильтрационных свойств движение смеси воды и нефти будет происходить так же, как и в пористой среде, но с иными размерами зерен (блоков породы) и поровых каналов (трещин). Поэтому при изучении процессов фильтрации двухфазной жидкости в трещиноватом пласте можно использовать те теоретические и экспериментальные положения теории Баклея — Леверетта, которые были изложены в § 4 главы XI применительно к пористым пластам. На основе исследований такого движения, проведенных некоторыми авторами, можно сделать весьма существенное допущение о линейной зависимости между фазовой проницаемостью и насыщенностью. Поэтому для двухфазного движения жидкостей (вода — нефть) можно принять:

$$\frac{k_в}{k} = s, \quad \frac{k_н}{k} = 1 - s. \tag{XV.50}$$

Из формул (XV.50) следует, что фазовые проницаемости для воды и нефти в трещиноватом пласте определяются как

$$k_в = ks, \quad k_н = k(1 - s). \tag{XV.51}$$

При движении смеси двух (или нескольких) жидкостей скорости фильтрации каждой из них, как правило, не одинаковы. Однако установлено, что при движении двухфазной системы (вода, нефть) линейный закон фильтрации выполняется для каждой фазы системы. Применительно к трещиноватому пласту можно получить следующую систему уравнений движения и неразрывности с учетом зависимостей для $k_в$ и для $k_н$:

$$\left.\begin{aligned} v_в &= -\frac{ks}{\mu_в}\frac{\partial p}{\partial r}; \quad m_т\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v_в}{\partial r} = 0, \\ v_н &= -\frac{k(1-s)}{\mu_н}\frac{\partial p}{\partial r}; \quad -m_т\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v_н}{\partial r} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{XV.52}$$

Из системы (XV.52) после таких же преобразований, как и в § 4 главы XI, можно в итоге получить:

$$v(t) f'(s)\frac{\partial s}{\partial r} + m_т\frac{\partial s}{\partial t} = 0, \tag{XV.53}$$

где $f(s) = \dfrac{s/\mu_в}{s/\mu_в + 1 - s/\mu_н}$; $m_т$ — коэффициент трещиноватости.

Выражение для $f(s)$ получено из соотношения:

$$f(s)=\frac{k_в/\mu_в}{k_в/\mu_в+k_н/\mu_н},$$

приведенного в § 4 главы XI, с учетом, что для трещиноватого пласта справедливы выражения (XV.51):

$$k_в=ks,\ k_н=k(1-s).$$

Таким образом, уравнение (XV.53) имеет те же вид и смысл, что и уравнение (XI.39), но с иными значениями коэффициентов.

Получившееся уравнение (XV.53) является квазилинейным (так как при производной $\partial s/\partial r$ стоит коэффициент $f'(s)$, зависящий от s) дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных.

Видоизменим несколько уравнение (XI.53), введя расход смеси $Qt=2\pi br\,v(t)$ *для плоско-радиального потока смеси.* Тогда:

$$\frac{Q(t)}{2\pi br}f'(s)\frac{\partial s}{\partial r}+m_т\frac{\partial s}{\partial t}=0.$$

Вспомогательная система уравнений имеет вид:

$$\frac{Q(t)f'(s)}{2\pi br\,dr}=\frac{m_т}{dt}=\frac{0}{ds}. \qquad (XV.54)$$

Из (XV.54) следует, что

$$2\pi br\,dr=\frac{Q(t)f'(s)}{m_т}dt, \qquad (XV.55)$$

$$\frac{m_т}{dt}=\frac{0}{ds}.$$

Независимая система первых интегралов есть:

$$s=\text{const},\ \int_{r_0}^{r}2\pi br\,dr=\frac{f'(r)}{m_т}\int_{0}^{t}Q(t)\,dt. \qquad (XV.56)$$

Из второго уравнения (XV.56):

$$r^2=r_0^2+\frac{f'(s)\int_0^t Q(t)\,dt}{\pi bm_т}. \qquad (XV.57)$$

Подставляя в (XV.57) значение $f'(s)=\frac{\mu_0}{[s\mu_0+(1-s)]^2}$, имеем:

$$r^2=r_0^2+\frac{\mu_0\int_0^t Q(t)\,dt}{\pi bm_т[s\mu_0+(1-s)]^2}, \qquad (XV.58)$$

где

$$\mu_0=\frac{\mu_н}{\mu_в}.$$

Таким образом, пользуясь уравнением (XV.58), можно, зная заданную насыщенность $s = \text{const}$ в начальный момент времени (r_0), определить ее в любой момент времени, если известно $Q(t)$ при $t > 0$, т. е. следить за изменением ее по пласту. Из уравнения (XV.58) следует, что

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 Q(t)}{\pi b m_т [s\mu_0 + (1-s)]^2} = \frac{f'(s) Q(t)}{\pi b m_т}. \qquad \text{(XV.59)}$$

Следовательно, $\frac{f'(s) Q(t)}{\pi b m_т}$ есть скорость изменения насыщенности заданной величины s. При плоско-радиальном неустановившемся течении возможно вытеснение нефти:

а) к кольцевой галерее водой, закачиваемой в нагнетательную скважину;

б) водой, поступающей из-за контура питания.

В первом случае изменение насыщенности s можно определить из (XV.58) при $r_0 = r_c$ (где r_c — радиус нагнетательной скважины):

$$r^2 = r_c^2 + \frac{\mu_0 \int_0^t Q(t)\, dt}{\pi b m_т [s\mu_0 + (1-s)]^2}. \qquad \text{(XV.60)}$$

Во втором случае расчет ведут по формуле:

$$r^2 = r_0^2 - \frac{\mu_0 \int_0^t Q(t)\, dt}{\pi b m_т [s\mu_0 + (1-s)]^2}, \qquad \text{(XV.61)}$$

где r_0 — радиус контура, характеризующего границу между водой и нефтью в начальный момент времени $(t = 0)$.

Для прямолинейно-параллельного потока смеси вместо (XV.55) имеем:

$$\left.\begin{aligned} ab\, dr &= \frac{Q(t) f'(s)}{m_т} dt, \\ \frac{m_т}{dt} &= \frac{0}{ds}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XV.62)}$$

Откуда следует:

$$s = \text{const}, \quad r = r_0 + \frac{f'(s) \int_0^t Q(t)\, dt}{ab m_т}. \qquad \text{(XV.63)}$$

Подставляя во второе из уравнений (XV.63) значение $f'(s)$, получаем:

$$r = r_0 + \frac{\mu_0 \int_0^t Q(t)\, dt}{ab m_т [s\mu_0 + (1-s)]^2}. \qquad \text{(XV.64)}$$

При помощи этого уравнения можно определить положение точки с заданной насыщенностью в любой момент времени, если известно положение этой точки в начальный момент времени.

§ 8. Особенности фильтрации двухфазной жидкости в трещиновато-пористой среде

В каждой точке трещиновато-пористой среды при исследовании вопросов фильтрации двухфазных систем следует ввести две насыщенности одной из жидкостей — насыщенность трещин вытесняющей жидкостью и насыщенность пор пористых блоков вытесняющей жидкостью (s_1, s_2).

В дальнейшем будем полагать, что двухфазная система образована нефтью и водой, причем вода вытесняет нефть; поэтому с этой точки зрения s_1 и s_2 — есть насыщенность водой системы трещин и пористых блоков соответственно. Будем полагать также, что движение жидкостей осуществляется в основном по трещинам; так что скоростями фильтрации жидкостей по пористым блокам можно пренебречь, так как они очень малы.

Механизм движения такой двухфазной системы в трещиновато-пористой среде можно себе представить таким образом.

Вода, проникая в трещиновато-пористый пласт по системе фильтрующих трещин, охватывает некоторое число пористых блоков к моменту времени θ, при этом образуется поверхность $F(x, y, z, \theta) = 0$, ограничивающая охваченный водой объем пласта $v(\theta)$. Затем вода под действием капиллярных сил впитывается в пористые блоки, заключенные внутри $V(\theta)$, и вытесняет нефть из пористых блоков в трещины.

Объем воды, впитавшейся в пористые блоки из трещин под действием капиллярных сил в единицу времени на единицу объема породы к моменту времени $t \geqslant \theta$, если известно время охвата водой пористых блоков θ, можно подсчитать как:

$$V = \psi[t - \theta(x, y, z)]. \qquad \text{(XV.65)}$$

Вид функции $\psi[t - \theta(x, y, z)]$ определялся на основании экспериментальных исследований капиллярной пропитки пористых блоков; с достаточной для практики степенью точности эта функция может быть представлена зависимостью:

$$\psi(t) = Ct^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{(XV.66)}$$

где

$$C = \frac{A}{2} m_2 s_2 \frac{\sigma \cos\alpha \sqrt{k_2/m_2}\, F^2}{\mu_{\text{п}}} \left(\frac{\sigma \cos\alpha \sqrt{k_2/m_2}\, F^2}{\mu_{\text{н}}}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

A — постоянная; σ — поверхностное натяжение; α — угол смачивания; F — осредненная удельная поверхность блоков; s_2 — насыщен-

ность блоков водой к моменту времени t; m_2, k_2 — пористость и проницаемость блоков.

Понятно, что точно такое же количество нефти поступит в единицу времени из единичного объема блоков породы в трещины. В соответствии с отмеченными особенностями система дифференциальных уравнений фильтрации несмешивающихся жидкостей (нефть — вода) должна включать уравнения неразрывности для воды и нефти в системе трещин (среда 1) и в системе пористых блоков (среда 2), и уравнения движения жидкостей в трещинах.

Остановимся в итоге на результатах некоторых экспериментов по изучению процесса вытеснения нефти водой. Значительный объем экспериментов был проведен во ВНИИ в 1962—1964 г. научными сотрудниками Д. Ш. Везировым, А. А. Кочешковым, Ш. Я. Коджаевым и др.

Эксперименты проводились с дистиллированной водой в качестве вытесняющей жидкости; нефть моделировалась различными неполярными жидкостями. Авторы экспериментов выделяли два периода: безводный и водный периоды работы. Эксперименты проводились на элементарной модели, состоящей из двух гидрофильных пористых блоков (определенных размеров), разделенных трещинами по торцам и между собой.

Эксперименты позволили установить существование *критической скорости вытеснения*, при которой граница раздела вода — нефть и в трещине, и в пористом блоке продвигалась с одинаковой скоростью. При скорости вытеснения ниже критической пористые блоки модели были полностью охвачены прямоточной капиллярной пропиткой и к началу водного периода практически вся нефть извлекалась из блоков. Понятно, что при скорости ниже критической безводная нефтеотдача не зависит от скорости вытеснения и очень близка к полной.

Если скорость вытеснения больше критической скорости, то вода быстро прорывается по трещине, капиллярно впитываясь лишь в области блоков, прилегающих к трещине. Оставшиеся целики нефти после прорыва воды к выходному концу модели постепенно рассасываются за счет противоточной капиллярной пропитки. Теперь безводная нефтеотдача существенно зависела от скорости вытеснения. Чем больше была скорость вытеснения, тем быстрее вода подходила к выходному концу модели, и тем ниже была безводная нефтеотдача.

Для водного периода работы модели характерно, что текущая нефтеотдача не зависит от скорости закачки воды, а определяется лишь временем, в течение которого пористый блок находится в контакте с водой.

Кроме того, было установлено, что чем больше капиллярные силы, тем интенсивнее происходила капиллярная пропитка пористых блоков и больше была критическая скорость вытеснения, т. е. с увеличением капиллярных сил текущая нефтеотдача модели трещиновато-пористой среды увеличивалась при одной и той же скорости вытеснения.

Интенсивность впитывания воды в пористые блоки, насыщенные нефтью, помимо молекулярно-поверхностных характеристик жидкостей и твердой фазы, зависит также от вязкости вытесняемой и вытесняющей жидкостей. С повышением вязкости жидкостей увеличивается сопротивление движению и как результат — и продолжительность капиллярной пропитки.

Опыты также показали, что безводная и текущая нефтеотдача элементарной модели трещиновато-пористой среды не зависит от раскрытия трещин, однако это справедливо только до определенного соотношения проницаемостей трещин и блоков.

В настоящее время продолжаются интересные эксперименты по исследованию нефтеотдачи трещиноватых и трещиновато-пористых сред.

Глава XVI

РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. Аналогия между движением жидкости в фильтрующей среде и другими физическими явлениями

Указания на аналогию между фильтрационным потоком и электрическим током содержатся в главе I в связи с упоминанием метода электрогидродинамической аналогии, разработанного акад. Павловским. В гл. X говорилось о развитии этого метода в экспериментах с электролитическим моделированием. В гл. XII отмечалась аналогия между дифференциальным уравнением упругого режима и уравнением передачи теплоты. Обобщим все эти аналогии.

Закон потенциального движения жидкости и газа в фильтрующей среде выражает один из видов движения, подчиняющегося единому линейному физическому закону.

Этот единый линейный закон физики можно представить формулой:

$$\vec{q} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad \text{(XVI.1)}$$

где $\vec{q}$ — вектор некоторого потока; φ — соответствующая потенциальная функция.

Для фильтрационного потока $\vec{q}$ означает вектор, величина которого есть для данной точки пористой среды количество массы жидкости, просачивающейся в единицу времени через единицу площади сечения, ориентированного так, что количество фильтрующейся массы является в данной точке наибольшим. Это есть величина массовой скорости фильтрации $|\rho\vec{v}|$.

Если коэффициенты проницаемости и вязкости k, μ и плотность ρ не зависят от давления p и постоянны, формула (XVI.1) для фильтрационного потока выражает закон Дарси:

$$\rho\vec{v} = -\frac{k\rho}{\mu}\operatorname{grad} p, \qquad \text{(XVI.2)}$$

где $k\rho/\mu$ — коэффициент гидропроводности.

Для теплового потока вектор $\vec{q}$ в формуле (XVI.1) определяется как вектор, равный по величине количеству теплоты, протекающей в единицу времени через единицу площади сечения, ориентированного

в данной точке проводника так, что протекающее количество теплоты оказывается наибольшим. Вектор $\vec{q}$ в этом случае называется вектором теплового потока.

Но если в случае фильтрационного потока потенциальная функция φ зависит от давления p и времени t, то для теплового потока она представится так:

$$\varphi = \varphi(T,\ t), \tag{XVI.3}$$

где T — температура.

Коэффициенту гидропроводности $k\rho/\mu$ соответствует коэффициент теплопроводности λ. Если $\lambda = \text{const}$, получим закон Фурье:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \tag{XVI.4}$$

Для электрического тока вектор $\vec{q}$ означает вектор силы тока (вектор тока). Потенциальная функция запишется так:

$$\varphi = \varphi(V,\ t), \tag{XVI.5}$$

где V — напряжение (потенциал).

Коэффициентам $k\rho/\mu$ и λ соответствует удельная электропроводность σ. Имеем закон Ома:

$$\vec{q} = -\sigma \operatorname{grad} V. \tag{XVI.6}$$

Исходя из единого линейного физического закона (XVI.1) можно вывести общее дифференциальное уравнение неустановившегося процесса некоторого движения. Если положить, что коэффициенты проводимости $k\rho/\mu$, λ и σ постоянны, это общее дифференциальное уравнение запишется так:

$$a^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{XVI.7}$$

где a^2 и Φ — см. табл. 30.

Таблица 30

Значения величин a^2 и Φ в общем дифференциальном уравнении (XII.7)

Величины	Фильтрационный поток	Тепловой поток	Электрический ток
a^2	Коэффициент пьезопроводности	Коэффициент температуропроводности	Удельная электропроводность
Φ	Давление	Температура	Напряжение (потенциал)

Для решения уравнения (XVI.7), которое при установившемся движении переходит в уравнение Лапласа, можно пользоваться гидравлическими, тепловыми и электрическими моделями. Например, процесс движения жидкости в пласте представляют электрическим током, который пропускают через электролит, изображающий пласт, или через проволочные проводники, образующие сетки.

В электрических сетках фильтрационное сопротивление элемента пласта заменяют проволочным сопротивлением. На сетке сопротивлений очерчивается контур данной области пласта. Распределение напряжений в узлах сетки аналогично распределению давлений в пласте. Чем больше число узлов сетки, тем точнее будут моделироваться процессы, происходящие в пласте. Путем выключения части реостатов сетки можно моделировать месторождение любой формы.

На модели контуры скважин составляют небольшие доли ячейки сеточной области. Поэтому диаметры скважин моделируют добавочными сопротивлениями, подключаемыми к соответствующим точкам сеточной области.

Модели для решения уравнения (XVI.7) или других дифференциальных уравнений называются интеграторами. Модели-сетки служат электроинтеграторами. На электроинтеграторе ЭИ-С, имеющем 20 000 точек, например, в 1957 г. был осуществлен анализ Бавлинского нефтяного месторождения. На сетке была смоделирована история разработки этого месторождения (за предшествовавшие 10 лет) и выбран наиболее рациональный вариант его дальнейшей разработки (см. пример IV, § 3 главы I).

Прост по устройству гидроинтегратор, сконструированный в 1936 г. В. С. Лукьяновым. Однако с помощью гидроинтегратора решаются задачи лишь одномерного (хотя и неустановившегося) потока жидкости в пласте.

§ 2. Некоторые современные представления о фильтрации нефти

Особенности фильтрации неньютоновских нефтей

В самое последнее время в связи с разработкой ряда нефтяных месторождений в СССР, и особенно в Азербайджанской ССР (месторождения Бинагадинское, Локбатанское, Бузовны — Маштагинское, о. Артема и др.) и по некоторым месторождениям Урало-Поволжья были обнаружены нефти, обладающие рядом особенностей, отличающих их от нефтей, которые можно было представить в виде обычных ньютоновских жидкостей (фильтрация их была рассмотрена во всех предшествующих главах).

Все особенности этих нефтей, как установлено, были связаны с повышенным содержанием в них парафино-асфальтеновых веществ.

Вполне понятно, что для исследования фильтрации таких нефтей следовало расширить класс тех жидкостей, которые рассматривались в теории фильтрации. Так возникло понятие неньютоновской нефти.

Напомним, что для *обычной ньютоновской (вязкой) жидкости* (нефти) справедливо уравнение состояния в виде закона Ньютона:

$$\tau = \mu \frac{de}{dt}, \qquad \text{(XVI.8)}$$

где μ — динамическая вязкость; de/dt — скорость деформации; τ — касательное напряжение.

Нефти, рассмотренные в предшествующих главах, соответствовали отмеченному уравнению состояния. Для неньютоновской нефти А. Х. Мирзаджанзаде и др., а также, независимо, группой казанских ученых во главе с Н. И. Непримеровым было предложено более общее уравнение состояния вида:

$$\tau = \tau_0 + \eta \frac{de}{dt}, \quad \text{при } \tau \geqslant \tau_0. \qquad \text{(XVI.9)}$$

Здесь τ_0 — предельное напряжение сдвига; η — структурная вязкость.

Уравнение вида (XVI.9), как известно из реологии (реология — это раздел механики сплошных сред, занимающийся изучением текучести жидких, газообразных тел, а также изучением остаточных деформаций в твердых телах), соответствует вязко-пластическому телу Бингама.

Заметим, что уравнению вида (XVI.9), как показали те же авторы, отвечают глинистые растворы при бурении (промывочные жидкости), цементные растворы, растворы жидкостно-песчаных смесей, жидкие органические и неорганические добавки к промывочным жидкостям, нефтепесочные и фенолформальдегидпесочные смеси и т. д.

Фильтрация вязко-пластических (неньютоновских) нефтей имеет целый ряд особенностей. Подробно эти особенности были выявлены и исследованы в работах С. Е. Агаевой, М. Г. Алишаева, З. М. Ахмедова, Шт. Георгице, Р. С. Гурбанова, М. А. Гусейн-Заде, В. М. Ентова, А. Ф. Касимова, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Молоковича, Н. Н. Непримерова, В. Д. Полянина, Э. В. Скворцова, А. Я. Чилапа и др.

Для вязко-пластических (неньютоновских) нефтей обобщенный закон фильтрации Дарси принимает следующую форму:

$$\operatorname{grad} p = -\left(\frac{\mu}{k}\vec{v} + \frac{\alpha\tau_0}{\sqrt{k_1}}\frac{\vec{v}}{v}\right), \qquad \text{(XVI.10)}$$

где α — некоторая константа $\left(\alpha = \frac{\Delta p_0 \sqrt{k}}{\tau_0 l}\right)$, численно равная (162 — —180)$\cdot 10^{-4}$; k — проницаемость при фильтрации вязко-пластической (неньютоновской) жидкости; k_1 — воздухопроницаемость; Δp_0 — перепад давления, расходуемый на преодоление предельного напряжения сдвига (τ_0); $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации; μ — вязкость при фильтрации неньютоновской жидкости. Как видно, из уравнения (XVI.10) получается закон Дарси для обычной неньютонов-

ской жидкости (нефти), если положить, что жидкость не обладает начальным напряжением сдвига ($\tau_0 = 0$).

Многочисленными экспериментами были установлены численные значения τ_0 для каждого конкретного типа нефти и данного месторождения. Так, например, по данным В. А. Ковальковой и А. И. Саркисовой, по скважинам месторождения Песчаный-море (Азерб. ССР), $\Delta p_0 = 4{,}2 \div 12$ кгс/см^2; $\tau_0 = 0{,}208 - 0{,}704$ кгс/см^2. Для плоскорадиального одномерного потока из уравнения (XVI.10) следует:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\mu}{k}\frac{Q}{2\pi br} + \frac{\alpha\tau_0}{\sqrt{k_1}}, \qquad \text{(XVI.11)}$$

откуда интегрированием от $p_к$ до $p_с$ и от $r_к$ до $r_с$ можно получить следующее выражение для объемного дебита (величина μ осреднена):

$$Q = \frac{2\pi bk\,(p_к - p_с)}{\mu \ln \frac{r_к}{r_с}} + \frac{2\pi bk\alpha\tau_0\,(r_к - r_с)}{\sqrt{k_1}\,\mu \ln \frac{r_к}{r_с}}. \qquad \text{(XVI.12)}$$

Как видно из (XVI.12), индикаторные линии, соответствующие неньютоновской нефти, не будут проходить через начало координат, а будут отсекать на оси $\Delta p_с$ отрезок (второе слагаемое правой части), по размеру которого можно судить о величине коэффициента τ_0. Такие индикаторные линии были получены по ряду месторождений в Азербайджанской ССР и Урало-Поволжья.

В работах В. В. Девликамова, З. А. Хабибуллина и других было установлено, что нефти нижнего карбона месторождений Башкирии следует отнести к неньютоновским жидкостям. Ими также была разработана аппаратура для анализа таких нефтей и установлено влияние различных факторов (состава нефти; состава газообразных компонентов, растворенных в нефти; температуры, давления и т. д.) на предельное напряжение сдвига.

В последнее время стали исследоваться особенности фильтрации таких неньютоновских нефтей, реологические уравнения для которых отличаются от уравнения (XVI.9). Тем самым был расширен класс неньютоновских нефтей. Сюда следует отнести жидкости, у которых вязкость μ — см. уравнение (XVI.8) — зависит от давления, причем вид этой зависимости определяется экспериментально, а также и теоретически. Для некоторых нефтей, обладающих и переменной вязкостью, и начальным напряжением сдвига, можно предложить обобщенную модель тела Бингама, зависимость между напряжением и скоростью деформации [1] для которой имеет вид:

$$\frac{de}{dt} = [\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_0)\exp(-\tau^2/\chi)]\,(\tau - \tau_0), \qquad \text{(XVI.13)}$$

где χ — некоторая постоянная (структурная устойчивость); φ_1, φ_0 — коэффициенты текучести (величина, обратная вязкости) соответственно конечный и начальный.

[1] Эта зависимость была подтверждена практически.

Представляет интерес также рассмотрение особенностей фильтрации жидкостей, которые помимо перечисленных выше свойств обладают эффектами второго порядка (поперечной вязкостью μ_c), т. е. в правой части (XVI.8) появляется член, содержащий произведение величин de/dt:

$$\tau = \mu \frac{de}{dt} + \mu_c \frac{de}{dt} \cdot \frac{de}{dt}.$$

Наконец, для общей модели жидкости, которая к тому же обладает начальным напряжением сдвига, имеем:

$$\tau = \tau_0 + \mu(\tau) \frac{de}{dt} + \mu_c(\tau) \frac{de}{dt} \cdot \frac{de}{dt},$$

где $\mu(\tau)$, $\mu_c(\tau)$ — известные функции напряжений сдвига. По-видимому, для такой модели жидкости обобщенный закон фильтрации можно записать в виде:

$$\operatorname{grad} p = -\left(\frac{\alpha \tau_0}{\sqrt{k_1}} \frac{\vec{v}}{v} + \frac{\mu}{k} \vec{v} + \frac{\mu_c}{(\sqrt{k})^3} \frac{v^2 \vec{v}}{|v|} \operatorname{sign} v \right).$$

Заметим, что поперечная вязкость μ_c имеет размерность ML^{-1}. Отмеченной выше реологической модели отвечают растворы коллоидов, полимеров; причем наличие третьего слагаемого в выражении для τ обусловлено, по Ривлину, ориентацией вытянутых молекулярных цепочек. По-видимому, нефти, содержащие смолы, сложные углеводородные цепочки, будут соответствовать указанной реологической модели

Исследование некоторых особенностей деформаций продуктивных коллекторов в условиях их залегания на больших глубинах

Наиболее характерные особенности деформации продуктивных пластов были обстоятельно разобраны в работах проф. В. Н. Щелкачева. Подробно анализируя экспериментальные исследования многих отечественных и зарубежных ученых, В. Н. Щелкачев делает ряд выводов, из которых наиболее существенны следующие.

1. «Изменения коэффициентов сжимаемости, проницаемости и пористости в процессе разработки при обычных условиях (при небольших изменениях пластового давления по сравнению с абсолютными величинами пластового и горного давлений) очень малы и поэтому, в частности, можно считать с высокой степенью точности справедливым закон Гука о линейной зависимости изменения объема пор с изменением пластового давления».

2. На основании теории Гертца доказано, что «объем пористой среды и объем пор выражаются линейной функцией от величины $(p_{ск})^{2/3}$ где $p_{ск}$ — эффективное давление на зерна скелета пористой среды».

3. «... Изменение общего объема пористой среды почти точно равно изменению объема пор, а изменения объема скелета (объема

зерен грунта) относительно столь малы, что ими можно пренебречь».

4. В. Н. Щелкачев указывает на ценные зависимости В. М. Добрынина, устанавливающие зависимость проницаемости, пористости и сжимаемости горных пород от величины $p_{ск}$. При этом В. Н. Щелкачев отмечает, что «на основании этих опытов (В. М. Добрынина. — *Примеч. авт.*) также можно считать, что в диапазонах изменения давления $p_{ск}$, с которыми приходится сталкиваться в обычных условиях разработки артезианских и нефтеносных пластов, величины коэффициентов сжимаемости, проницаемости, пористости и пьезопроводности пластов изменяются очень незначительно и их приближенно вполне допустимо принимать постоянными».

Однако, как отмечает В. Н. Щелкачев, «в реальных условиях нельзя полностью исключать возможности проявления необратимости деформаций, зависимости проницаемости пласта от изменения давления, возможности заметных нарушений законов Гука и Дарси».

Заметим, что в своей статье В. Н. Щелкачев не затрагивал опытов и исследований деформации трещиноватых и трещиновато-пористых горных пород.

В свете сказанного выше в настоящее время выделилось существенное направление в исследовании неустановившейся фильтрации жидкости в условиях упругого режима, связанное с построением строгих аналитических и гидродинамических решений задач, и выводом на этой основе упрощенных расчетных формул. Исследования, проведенные в этом направлении В. Н. Щелкачевым, О. Н. Хариным, В. Е. Влюшиным, И. Г. Гороховой, В. С. Блиновым, показали, что полученные таким образом формулы дают более эффективные результаты, чем применение специальных приближенных методов. В работах В. Н. Щелкачева были впервые выявлены функции, характерные для всех решений уравнения пьезопроводности в случае одномерных потоков. Использование этих характеристических функций позволяет выписывать решения задач в наиболее общей форме и дает возможность получать наиболее простые решения задач в тех случаях, когда отбор жидкости из пласта изменяется в функции времени. Позднее в работах В. С. Блинова были более подробно исследованы аналитические свойства этих характеристических функций и показано их использование для построения эффективных решений ряда задач, связанных с неустановившейся фильтрацией жидкости в упругом пласте. Работы в этой области продолжаются.

Представляют интерес также и работы, в которых учитываются не только упругие свойства пласта, но возможное проявление необратимости деформаций (пластическое и вязкое деформирование).

На необходимость учета неупругости впервые указали И. Н. Стрижов и Г. Б. Исаков.

В § 7 главы XII уже отмечалось, что акад. А. П. Крыловым и проф. Г. И. Баренблаттом была предложена модель деформируемого континуума с учетом не только упругого, но и пластического деформирования. Характеризуя это направление, В. Н. Щелкачев отмечал,

что «развивается не только аналитическая теория упругого режима, но представления, лежащие в ее основе».

Вопросы упруго-пластического деформирования насыщенного жидкостью порового коллектора рассматривались в работах В. Н. Николаевского, который, широко используя методы термодинамики необратимых процессов, проводит термодинамический анализ модели неупругой сплошной среды. На основании этого анализа из рассмотрения особенностей необратимых деформаций пористых сред В. Н. Николаевский приходит к выводу о наличии в продуктивных пластах сдвиговых и объемных пластических деформаций при существенности параметра упрочнения и строит модель идеальной упруго-пластической среды. Отмечалось также возможное увеличение необратимых деформаций в связи с непрерывным увеличением глубин залегания продуктивных пластов, а также в связи с аномально высокими пластовыми давлениями.

Вопросы упруго-пластического деформирования нефтесодержащих пород с учетом нелинейной зависимости параметров пласта от пластового давления рассматривались также А. Т. Горбуновым и Э. А. Авакян.

В. Н. Николаевский, а затем А. Т. Горбунов и Э. А. Авакян построили и теорию нелинейно упругого режима фильтрации жидкости и газа, справедливую при больших упругих деформациях, когда проницаемость и пористость принимают вид экспоненциальных зависимостей от изменения давления (см. гл. III) в пористых и трещиноватых пластах.

Ю. П. Желтовым также рассматривались неупругие нефтесодержащие среды, моделируемые линейным упруго-запаздывающим телом Кельвина и линейным релаксирующимся телом Максвелла, причем определяющие соотношения записывались в форме связи между средним нормальным эффективным напряжением и эффективной средней деформацией. Также отмечалось, что высокие сжимающие напряжения и температуры будут влиять на реологические свойства пластов, приводя, в частности, к аномально высоким пластовым давлениям.

Характеризуя это направление, В. Н. Щелкачев отмечал, что «при специфических геологических условиях, безусловно, может возникнуть необходимость учитывать явления, усложняющие обычную теорию упругого режима», и «нельзя полностью исключать возможности проявлений необратимости деформаций».

Разработка ряда глубокозалегающих *трещиновато-пористых и трещиноватых* пластов выявила целый ряд новых особенностей. К числу этих особенностей следует отнести: аномально высокие пластовые давления, намного превышающие расчетные; высокие температуры, влияющие на физико-механические характеристики нефтесодержащего пласта (например, на предел текучести); мгновенное и однозначное изменение давления в пределах значительных участков площадей; очень быстрое восстановление давления в остановленных скважинах; появление гистерезиса на индикаторных диаграм-

мах (т. е. индикаторные диаграммы при прямом и обратном ходе не совпадают); значительное превышение объема накопленной добычи нефти над упругим запасом гидродинамической пластовой системы; связь между аномалией пластового давления и высокими температурами и т. д.[1]. По-видимому, одной из причин появления указанных особенностей может быть то, что для трещиноватых и трещиновато-пористых пластов на больших глубинах, где велики температуры, сам продуктивный трещиноватый или трещиновато-пористый пласт начинает проявлять в значительной степени вязкие и пластические свойства (при напряжениях в скелете выше предела текучести, а предел текучести может быть снижен в значительной степени высокой температурой). Тогда, возможно, одной из причин, объясняющих аномалию пластового давления, может быть следующая. Если трещиноватая порода на глубине обладает новыми реологическими свойствами, обусловливающими ее неупругое поведение, то все давление вышележащих пород будет восприниматься в основном жидкостью, а скелет будет почти не нагружен. В процессе отбора жидкости происходит перераспределение давления в том смысле, что давление в жидкости будет снижаться, а напряжение в скелете увеличиваться; ранее ненагруженный скелет будет деформироваться, проявляя в заметной степени новые реологические свойства.

В заключение укажем, что можно рассмотреть фильтрацию неньютоновской жидкости (одного из перечисленных в пункте (а) типов) в упруго-вязко-пластическом трещиноватом и трещиновато-пористом пласте, однако определяющие уравнения, их вид и решения выходят за рамки курса.

§ 3. Некоторые сведения о термодинамических исследованиях стационарных и нестационарных температурных полей в продуктивных пластах

До сих пор во всех предшествующих главах при исследовании фильтрационных процессов в пористых, трещиноватых, трещиновато-пористых пластах предполагалось, что течение жидкостей и газов в этих продуктивных коллекторах осуществляется в изотермических условиях, вследствие чего основные характеристики (давление, скорость фильтрации и проч.) не зависели от температуры.

Однако в связи с разработкой и применением термических методов воздействия на нефтяные пласты с целью повышения их нефтеотдачи, а также с целью построения общей замкнутой системы дифференциальных уравнений, которая должна обязательно включать и уравнение баланса энергии, возникла настоятельная потребность более детального исследования термодинамики процессов фильтрации.

---

[1] На многие из этих особенностей обратил внимание Г. Т. Пристанский в своей статье, касающейся анализа разработки Малгобек-Вознесенско-Алиюртовского месторождения, приуроченного к трещиноватому коллектору. С этой статьей авторы ознакомились уже после написания рукописи.

Первые работы в этой области принадлежат Б. Б. Лапуку, который рассматривал эффект дросселирования при фильтрации в пористых средах. В дальнейшем в связи с развитием и разработкой различных методов теплового воздействия на пласты (конвективного нагрева, нагревания пласта при нагнетании воды в скважины, создания и поддержания управляемого искусственного очага горения, тепловой обработки призабойной зоны и т. п.) был опубликован целый ряд теоретических и экспериментальных работ в этой области.

К первым теоретическим работам в этой области можно отнести работы И. А. Чарного, Л. И. Рубинштейна, Э. Б. Чекалюка. В дальнейшем исследования в этом направлении выполнялись рядом авторов: Н. А. Авдониным, А. А. Аббасовым, И. Д. Амелиным, М. Я. Антимировым, М. А. Багировым, Ю. А. Балакировым, В. Н. Дахновым, Д. И. Дьяконовым, П. П. Золотаревым, Ю. В. Капыриным, А. К. Колосовской, Г. Е. Малофеевым, В. Н. Николаевским, К. А. Огановым, М. А. Пудовкиным, В. А. Рождественским, М. Д. Розенбергом, Е. В. Теслюком, Г. Ф. Требиным, А. Б. Шейнманом и многими другими.

Из зарубежных исследований известны работы И. Р. Иффли, Р. В. Стальмана, И. Феррандона и др.

Особенности тепловых процессов в продуктивных пластах. Начала термодинамики

Тепловые процессы в продуктивных коллекторах характеризуются рядом существенных особенностей, к числу которых следует отнести:

1) наличие определенной однозначной связи между полем давлений (полем скоростей фильтрации) и полем температур;

2) между компонентами термодинамической системы (пласт, флюид или смесь флюидов) происходит интенсивный теплообмен вследствие наличия большой площади поверхности контакта;

3) наличие конвективного переноса тепла за счет движения компонентов термодинамической системы внутри этой системы (движение компонентов с отличающимися температурами в пористой среде, температура которой также может изменяться от точки к точке);

4) наличие передачи тепла между компонентами за счет теплопроводности;

5) значительное трение при фильтрации флюидов в продуктивных пластах;

6) поверхностные и капиллярные явления на контактах фаз;

7) возможный приток немеханической, нетепловой энергии: приток энергии за счет поляризации и намагничивания при взаимодействии с внешними электромагнитными полями (например, Земли), энергия химических реакций, фазовых превращений и т. д.

Построение замкнутой гидро- и термодинамической системы уравнений основывается на началах термодинамики. Интересно отметить, что Э. Б. Чекалюк приходит к *принципиально важному вы-*

воду, который затем лег в основу всех исследований по термозондированию нефтяных, газовых продуктивных пластов. Этот вывод можно сформулировать словами автора: «В силу термодинамической взаимосвязи между давлением, температурой и характером термодинамических процессов, протекающих в пористой среде, изменения забойной температуры во времени отображают определенным образом распределение давлений в пласте. В условиях постоянного отбора жидкости или газа из скважины кривая «забойной температуры» в координатах «температура — время» *копирует* в известном масштабе форму кривой распределения давления в пласте в координатах «давление — расстояние от скважины». Кривая изменения забойной температуры $\Delta T = \varphi(t)$ после трансформации в систему координат $[p, r]$ изображает кривую пластовых давлений $p(r)$ вокруг забоя скважины, воронку депрессии, по которой нетрудно найти эффективный радиус скважины, дифференцированное распределение гидропроводности (kb/μ) пласта в зависимости от радиуса r, уточнить и определить ряд дополнительных параметров пласта и пластовых жидкостей и газов, обосновать эффективные мероприятия по интенсификации притока».

* * *

В § 1 настоящей главы был взят простой пример аналогии между дифференциальным уравнением упругого режима и уравнениями математической физики (уравнением теплопроводности). В более общей постановке замкнутая система определяющих дифференциальных уравнений, как видно из § 3, должна включать уравнения неразрывности, уравнения движения, уравнение баланса энергии, (полученное на основе первого и второго начал термодинамики с учетом уравнения баланса энтропии), уравнение момента количества движения, а также уравнения состояния для фильтрующегося флюида и продуктивного коллектора. Для многофазных смесей аналогичные уравнения составляются для каждой фазы смеси и для всей смеси в целом.

На основании всего сказанного следует, что с увеличением глубин разработки, температур, с уточнением свойств пластовых жидкостей, подземная гидродинамика разрастается в один из основных разделов механики сплошной среды, связанный с реологией, термодинамикой, термофизикой, неравновесной термодинамикой, термохимией, с теорией пластичности, с гидромеханикой неньютоновских жидкостей и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абасов М. Т., Джалилов К. Н. Вопросы подземной гидродинамики и разработки нефтяных и газовых месторождений. Баку, Азнефтеиздат, 1960.

2. Аравин В. И., Нумеров С. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., ГИТТЛ, 1953.

3. Бан А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М., Гостоптехиздат, 1962.

4. Вахитов Г. Г. Эффективные способы решения задач разработки неоднородных нефтеводоносных пластов. М., Гостоптехиздат, 1963.

5. Гуссейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.

6. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку, Азнефтеиздат, 1961.

7. Джонс Парк Дж. Механика нефтяного пласта. М., Гостоптехиздат, 1947.

8. Добрынин В. М. Деформация и изменения физических свойств коллекторов нефти и газа. М., «Недра», 1970.

9. Евдокимова В. А., Кочина И. Н. Подземная гидравлика. М., Росвузиздат, 1962.

10. Желтов Ю. П. Деформации горных пород. М., «Недра», 1966.

11. Климентов П. П., Пыхачев Г. Б. Динамика подземных вод. М., Гостоптехиздат, 1961.

12. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.

13. Кристеа Н. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, том I, 1961; том II, 1962.

14. Крылов А. П. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. М., Гостоптехиздат, 1948.

15. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1947.

16. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, том. 2. М., Изд-во АН СССР, 1953.

17. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949.

18. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. М., Гостоптехиздат, 1953.

19. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку, Азнефтеиздат, 1959.

20. Мирзаджанзаде А. Х. и др. Разработка газоконденсатных месторождений. М., «Недра», 1967.

21. Непримеров Н. Н., Пудовкин М. А., Марков А. И. Особенности теплового поля нефтяного месторождения. Казань, Изд-во КГУ, 1968.

22. Николаевский В. Н. и др. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
23. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
24. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956.
25. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., ГИТТЛ, 1952.
26. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1961.
27 Рейнер М. Деформация и течение. М., Гостоптехиздат, 1963.
28. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1966.
29. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1965.
30. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
31. Чекалюк Э. Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Киев, Гос. изд. техн. лит. УССР, 1961.
32. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.
33. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
34. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1949.
35. Щелкачев В. Н., Пыхачев Г. Б. Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. Баку, АзГОНТИ, 1939.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава I. 5

§ 1. Значение и роль подземной гидравлики в развитии научных основ разработки нефтяных и газовых месторождений 5
§ 2. Важнейшие этапы развития подземной гидравлики 6
§ 3. Использование подземной гидравлики при решении задач разработки нефтяных месторождений 10

Глава II. **Элементы теории фильтрации** 14

§ 1. Явление фильтрации 14
§ 2. Простейшие модели пористой среды. Пористость и просветность 15
§ 3. Переход от фиктивного грунта к естественному. Эффективный диаметр 18
§ 4. Скорость фильтрации. Закон Дарси 20
§ 5. Проницаемость пористой среды 23
§ 6. Границы применимости закона Дарси к явлениям фильтрации 26
§ 7. Формулы общего закона фильтрации 30
§ 8. Метод теории размерности для определения параметров фильтрации 33

Глава III. **Особенности фильтрации в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах** 36

§ 1. Классификация трещиноватых пластов. Параметры трещиноватости 36
§ 2. Проницаемость пласта 39
§ 3. Границы применимости линейного закона фильтратации 41

Глава IV. **Простейшие задачи одномерного потока в пористой среде** 44

§ 1. Одномерный фильтрационный поток. Потенциальное движение . . 44
§ 2. Уравнения состояния жидкости, газа и пористой среды 46
§ 3. Значение простейших задач одномерного потока для практики разведки и разработки пластов 51
§ 4. Решение общего дифференциального уравнения трех простейших видов потенциального одномерного потока. Показатель формы потока 56
§ 5. Общие дифференциальные уравнения простейших одномерных потоков при нелинейном законе фильтрации 59
§ 6. Потенциальное движение однородной несжимаемой жидкости . . 61
§ 7. Потенциальное движение малосжимаемой жидкости 66
§ 8. Потенциальное движение идеального газа 68

Стр.

§ 9. Потенциальное движение реального газа 71
§ 10. Потенциальное движение газированной жидкости 75
§ 11. О некоторых исследованиях фильтрации водонефтяной смеси и многофазной жидкости 86
§ 12. Характеристика потока в условиях нелинейного закона фильтрации 90
§ 13. Поток жидкости в пласте с неоднородной проницаемостью . . . 94

Глава V. **Одномерный поток в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах** 100

§ 1. Поток однородной несжимаемой жидкости в деформируемом трещиноватом пласте 101
§ 2. Поток идеального газа в деформируемом трещиноватом пласте . . 105
§ 3. Особенности фильтрационного одномерного потока в деформируемом трещиноватом пласте в условиях нелинейного закона фильтрации 108

Глава VI. **Фильтрационный поток жидкости со свободной поверхностью** 111

§ 1. Дифференциальное уравнение установившегося движения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в пласте, имеющем непроницаемую подошву 111
§ 2. Дебит и индикаторная диаграмма для потока жидкости со свободной поверхностью 115

Глава VII. **Плоский установившийся нерадиальный поток жидкости или газа в пористом пласте** 117

§ 1. Предварительные понятия о методе исследования плоского потока 117
§ 2. Фильтрационный поток от нагнетательной скважины к эксплуатационной 119
§ 3. Плоский поток, если в полубесконечном и круглом пластах расположена одна скважина. Влияние на производительность скважины формы внешнего контура пласта 125
§ 4. Взаимодействие скважин кольцевой батареи 130
§ 5. Количественная оценка эффекта взаимодействия скважин 133
§ 6. Прямолинейная батарея скважин 139
§ 7. Совместное действие нескольких эксплуатационных и нагнетательных батарей 146
§ 8. Составление расчетных уравнений для батарей скважин с помощью величин внутренних и внешних фильтрационных сопротивлений 150
§ 9. Взаимодействие скважин в неоднородно проницаемом и анизотропном пластах 155
§ 10. Влияние непроницаемых границ пласта на работу скважин . . 159
§ 11. Движение контура раздела двух несжимаемых жидкостей с одинаковыми параметрами (контура отмеченных частиц). Случай одной скважины. Относительная обводненность скважины 165
§ 12. О влиянии радиуса скважины на ее производительность 170

Глава VIII. **Общие дифференциальные уравнения подземной гидравлики** 174

§ 1. Уравнение неразрывности (сплошности) фильтрационного потока в прямоугольной декартовой системе координат 174
§ 2. Обобщенная форма закона Дарси. Уравнения потенциального движения 177
§ 3. Уравнение неразрывности в криволинейных координатах 180
§ 4. Уравнение неразрывности фильтрационного потока в трещиновато-пористом и трещиноватом пластах 182

Стр.

Глава IX. **Приложение теории функций комплексного переменного и общих дифференциальных уравнений к исследованию плоского потока** 185

§ 1. Связь между плоской задачей теории фильтрации и теорией функций комплексного переменного 185
§ 2. Характеристические функции некоторых основных типов плоского потока 190
§ 3. Характеристическая функция течения при совместном действии источника и стока 195
§ 4. Характеристическая функция течения для кольцевой батареи скважин 197
§ 5. Подсчет времени движения частицы несжимаемой жидкости вдоль линии тока 198
§ 6. Стягивание контура нефтеносности к эксплуатационной кольцевой батарее 200
§ 7. Поток к эллиптическим галерее и батарее скважин в пласте с эллиптическим контуром питания 204

Глава X. **Гидродинамически несовершенная скважина и особенности ее эксплуатации при наличии в пласте подошвенной воды и «верхнего» газа. Эффективность гидравлического разрыва пласта** 207

§ 1. Коэффициент совершенства скважины и ее приведенный радиус. Добавочное фильтрационное сопротивление 207
§ 2. Экспериментальные исследования притока жидкости к гидродинамически несовершенной скважине 210
§ 3. Некоторые аналитические методы решения задачи о скважине в пласте неограниченной мощности 214
§ 4. Некоторые результаты решений задачи о несовершенной по степени вскрытия скважине в пласте конечной мощности 219
§ 5. Некоторые гидродинамические исследования притока к скважине, несовершенной по характеру вскрытия пласта 222
§ 6. Теория образования водяного конуса в пласте с подошвенной водой 226
§ 7. Упрощенные способы расчета предельного безводного и безгазового дебита скважины 229
§ 8. Решения некоторых задач эксплуатации скважины в пласте с подошвенной водой 233
§ 9. Эффективность гидравлического разрыва пласта 237

Глава XI. **Неустановившийся фильтрационный поток, в котором одна жидкость вытесняет другую** 241

§ 1. Предварительные замечания 241
§ 2. Вытеснение нефти водой, которая полностью замещает нефть (поршневое вытеснение) в полосообразном пласте 244
§ 3. Плоско-радиальное движение при вытеснении нефти водой . . . 249
§ 4. Существование области двухфазного потока при вытеснении нефти водой 252
§ 5. Применение метода последовательной смены установившихся состояний к задачам вытеснения газированной нефти водой 256
§ 6. Вытеснение нефти водой из наклонного пласта. Устойчивость фронта вытеснения 258
§ 7. Вытеснение газа водой. Условие материального баланса 260
§ 8. Вытеснение нефти газом 263
§ 9. Итоги некоторых работ, уточняющих исследования вытеснения нефти газом 269
§ 10. Заключительные замечания к главе 270

Стр.

Глава XII. Неустановившееся движение жидкости в нефтеводоносных пористых пластах при упругом режиме 272

§ 1. Основные параметры теории упругого режима 273
§ 2. Дифференциальное уравнение пьезопроводности 275
§ 3. Скважина в пласте неограниченных размеров. Основная формула 277
§ 4. Анализ основной формулы теории упругого режима 280
§ 5. Движение жидкости в пласте конечных размеров в условиях упруго-водонапорного и замкнуто-упругого режимов 284
§ 6. Суперпозиция в задачах упругого режима. Пьезометрические методы исследования скважин и пластов 290
§ 7. Подсчет упругого запаса жидкости нефтеводоносного пласта. Условный радиус влияния скважины 297
§ 8. Общая форма простейшего вида уравнения пьезопроводности . . 300

Глава XIII. Неустановившаяся фильтрация газа 303

§ 1. Дифференциальное уравнение неустановившейся фильтрации газа 303
§ 2. Приближенное решение задачи об истечении газа из полосообразного пласта при постоянном давлении на контуре стока 306
§ 3. Применение условия материального баланса к задачам разработки газовых залежей 311

Глава XIV. Неустановившаяся фильтрация жидкости в трещиноватых и трещиновато-пористых пластах 316

§ 1. Основные дифференциальные уравнения 316
§ 2. Неустайовившаяся фильтрация жидкости в деформируемом трещиноватом пласте, вызванная остановкой скважины после ее длительной работы с постоянным дебитом 318

Глава XV. Неустановившаяся фильтрация неоднофазной жидкости 322

§ 1. Некоторые замечания о фазовой проницаемости пористой среды . . 322
§ 2. Система дифференциальных уравнений неустановившегося движения газированной жидкости в пористой среде 324
§ 3. Изменение давления и газового фактора в связи с изменением насыщенности при небольших градиентах давления 327
§ 4. Фильтрация газированной жидкости при высокой насыщенности 331
§ 5. О применении уравнения материального баланса к вопросам разработки пласта в условиях нагнетания газа по площади 334
§ 6. Особенности фильтрации газожидкостной смеси в газоконденсатных залежах 335
§ 7. Особенности фильтрации двухфазной жидкости в трещиноватой среде 337
§ 8. Особенности фильтрации двухфазной жидкости в трещиновато-пористой среде 340

Глава XVI. Развитие современных исследований по теории фильтрации 343

§ 1. Аналогия между движением жидкости в фильтрующей среде и другими физическими явлениями 343
§ 2. Некоторые современные представления о фильтрации нефти . . . 345
§ 3. Некоторые сведения о термодинамических исследованиях стационарных и нестационарных температурных полей в продуктивных пластах 351

Список литературы 354