Библиотека СОК

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Г.Н. Дульнев

ТЕОРИЯ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2012

Дульнев Геннадий Николаевич, Теория тепло- и массообмена. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 195 с.

В первых главах книги даны выводы уравнений переноса (непрерывности, энергии, движения); изложена теория подобия и построенные на её основе критериальные уравнения. Дан вывод основных уравнений процессов конвективного теплообмена при ламинарном и турбулентном режимах, в условиях разрежённого газа, при больших скоростях потока, при конденсации и испарении жидкости. Дано краткое изложение теории теплового регулярного режима. В последней главе книги рассматриваются процессы теплообмена при излучении реальных поверхностей систем тел.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса «Тепломассообмен» государственного стандарта высшего и профессионального образования в направлении подготовки «Техническая физика» и предназначено для подготовки бакалавров.

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Техническая физика».



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012

©Дульнев Г.Н., 2012

Введение

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с программой курса «Тепло- и массообмен» государственного стандарта высшего и профессионального образования в направлении подготовки «Техническая физика». Это учебное пособие состоит из двух частей, первая часть предназначена на подготовку бакалавров и подготовлена проф. Дульневым Г.Н. и доц. Тихоновым С.В. Она носит название «Введение в теорию тепло- и массообмена» и издана в 2010 в СПб Государственном Университете информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО).

Вторая часть подготовлена проф. Дульневым Г.Н. и носит название «Теория тепло- и массообмена» и также предназначена для подготовки бакалавров по направлению «Техническая физика».

Если в первой части учебного пособия изложены основы теплопередачи и даны сведения о кондуктивном теплообмене, то во второй части более полно рассматриваются процессы конвективного тепло- и массообмена, излучения и даны основы теории теплового регулярного режима. Знакомство с учебной и монографической литературой показало, что усилиями зарубежных и отечественных учёных и педагогов в течение XX столетия созданы глубокие по содержанию и методически отработанные пособия, в которых в строгой форме изложены основы тепло- и массообмена.

В первой главе второй части учебного пособия изложены сведения о коэффициентах теплоотдачи в различных ситуациях, во второй главе приведён вывод дифференциальных уравнений процесса конвективного теплообмена, а именно: уравнение массообмена (непрерывности), теплопроводности (энергии), движения (Навье-Стокс). Далее в третьей главе изложена теория подобия, позволяющая не прибегая к анализу дифференциальных уравнений на основе эксперимента получить количественные выражения (критериальные уравнения) для процессов теплообмена.

В четвёртой главе даны критериальные зависимости для различных видов конвективного теплообмена. Иными словами, на основе четырёх первых глав студент будет способен вычислить коэффициент теплоотдачи для различных реальных случаев.

В пятой главе приведены аналитические методы решения избранных задач конвективного теплообмена для простейших процессов. Здесь студент впервые знакомится с аналитическими методами решения дифференциальных уравнений и получает формулы для теплового сопротивления и коэффициента теплоотдачи.

В шестой главе переходим к более сложным аналитическим задачам на примере ламинарного течения жидкости на начальном участке течения. Рассматриваются два основных метода, принятые в теории тепло- и

массообмена – метод функций тока и метод интегро-дифференциальных уравнений.

В главе седьмой рассматриваются простейшие примеры свободного движения жидкости. На этом завершается анализ задач по ламинарному течению жидкости и в восьмой главе рассмотрен турбулентный процесс. В учебном пособии эта задача решается только на основе аналогии Рейнольдса.

В девятой главе рассмотрен теплообмен в разрежённых газах. Изучаются физические процессы, режимы течения газа и способы расчёта коэффициента теплоотдачи.

В десятой главе рассматривается явление теплообмена при обтекании тел высокоскоростным потоком газа, при котором может происходить не только нагревание тела, но и различные физико-химические процессы.

В одиннадцатой главе рассмотрены процессы теплообмена при конденсации пара на поверхности и кипение жидкостей. Дано изложение теории Нуссельта для анализа теплоотдачи при плёночной конденсации. Все расчётные формулы для процесса кипения получены на основе опытов.

В главе двенадцатой изложен материал по процессам массообмена как для диффузии в твёрдом теле, так и для конвективного массообмена. Даются сведения о влажности воздуха и гигроскопических материалах.

В главах 13 и 14 изложена теория регулярного теплового режима, которая была разработана научной школой проф. Г.М. Кондратьева. Рассмотрены достижения этой школы, полученные в последнее время. Теория изложена достаточно полно и в простой форме.

Завершают вторую часть учебного пособия главы пятнадцатая и шестнадцатая, в которых дано классическое изложение процессов теплообмена при излучении. При составлении настоящего учебного пособия автор использовал богатый научный и методический опыт предшественников. А также опыт многолетнего чтения курса «Теория тепло- и массообмена» в СПбГУ ИТМО. Всё это позволило определить степень освоения курса студентами и предложить несколько иное построение учебного пособия для бакалавров и магистров с учётом современных методических требований и рекомендаций.

Содержание

Введение……3
Глава I. Конвекция……..8
1.1. Модель процесса конвективного теплообмена……...8
1.2. Местный и средний коэффициенты теплообмена……12
Глава 2. Дифференциальные уравнения переноса массы, энергии, импульса……...15
2.1. Уравнение массообмена……..15
2.2. Уравнение теплопроводности……17
2.3. Уравнение движения……19
2.4. Вязкость жидкости. Закон Ньютона для вязкости……21
2.5. Свободное движение жидкости вдоль вертикальной стенки…...22
Глава 3. Теория подобия……...23
3.1. Постановка задачи……23
3.2. Условия физического подобия……25
3.3. Теоремы подобия……..26
3.4. Определение критериев подобия из дифференциальных уравнений……27
3.5. Критерии подобия……28
3.6. Обработка результатов опыта……31
Глава 4. Критериальные формулы конвективного теплообмена……..34
4.1. Свободное движение жидкости в неограниченном пространстве……34
4.2. Естественная конвекция в прослойках……...38
4.3. Вынужденное продольное движение жидкости……41
4.4. Вынужденное поперечное движение воздуха..……43
4.5. Вынужденное движение жидкости в трубах……44
Глава 5. Аналитические методы решения простейших задач конвективного теплообмена……...46
5.1. Математическая модель вынужденного изотермического течения……46
5.2. Математическая модель стабилизированного течения несжимаемой изотермической жидкости в канале……..……48
5.3. Движение жидкости между плоскими пластинами вдали от входа……49
5.4. Изотермическое течение жидкости в круглой трубе вдали от входа……50
5.5. Течение Куэтта……52
5.6. Неизотермическое течение жидкости в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока на стенке……53
5.7. Стержневое течение……55
5.8. Теплообмен на начальном участке трубы……..55
Глава 6. Ламинарное течение жидкости на начальном участке её

движения……57
6.1. Математическая модель для начального участка (уравнение Прандтля)……57
6.2. Преобразование математической модели введением функций тока……...59
6.3. Обтекание несжимаемым потоком плоской пластины……61
6.4. Гидравлическое сопротивление плоской пластины……62
Глава 7. Описание движения жидкости с помощью интегродифференциального уравнения……..……..64
7.1. Уравнение Кармана для изотермического течения……..64
7.2. Решение уравнения Кармана для пластины……..66
7.3. Уравнение Г.Н. Кружилина для неизотермической жидкости...67
7.4. Теплообмен при ламинарном течении жидкости вдоль пластины…….……69
7.5. Свободное движение жидкости вдоль нагретой вертикальной стенки (математическая модель)……...70
7.6. Интегродифференциальное уравнение свободной конвекции…71
7.7. Конвективный теплообмен у нагретой вертикальной стенки…..72
Глава 8. Турбулентное течение жидкости……..74
8.1. Описание турбулентного течения……..74
8.2. Аналогия Рейнольдса……...76
8.3. Анализ частных случаев……..79
8.4. Полуэмпирическая теория турбулентности……...81
Глава 9. Теплообмен в разрежённых газах……82
9.1. Описание физических процессов……82
9.2. Режимы течения газа……85
9.3. Расчет коэффициента теплоотдачи по Кавенау……86
9.4. Эффективные значения коэффициентов переноса (метод Р.С. Прасолова)……88
9.5. Расчёт коэффициента теплоотдачи по Р.С. Прасолову……90
Глава 10. Обтекание тел высокоскоростным потоком газа……...91
10.1. Скорость звука……91
10.2. Нагревание тел, обтекаемых высокоскоростным потоком газа……91
10.3. Обобщённый коэффициент теплоотдачи……95
Глава 11. Теплообмен при конденсации пара и кипении жидкостей……...96
11.1. Плёночная и капельная конденсация……...96
11.2. Теплообмен при плёночной конденсации для ламинарного течения жидкости……98
11.3. Физические особенности процесса кипения……102
11.4. Коэффициенты теплообмена при кипении……106
11.5. Кипение в трубах……..108
Глава 12. Массообмен……109

12.1. Диффузия в твёрдом теле……109
12.2. Влажность……112
12.3. Конденсация влаги на поверхностях……..116
12.4. Энтальпия влажного газа……118
12.5. Тройная аналогия……120
12.6. Конвективный массообмен……122
Глава 13. Регуляризация температурных полей однородных тел……..124
13.1. Регулярный тепловой режим тел без источников энергии…..124
13.2. Теоремы Г.М. Кондратьева……128
13.3. Метод разделения переменных (метод Фурье) для задач теплопроводности……131
13.4. Нагревание неограниченной пластины при граничных условиях третьего рода Обобщённая зависимость между темпом охлаждения и теплоотдачей тела ……....132
13.5. Применение теории регулярного теплового режима к анализу температурного поля тел различной формы……..135
13.6. Обобщенная зависимость между темпом охлаждения и теплоотдачей тела……137
Глава 14. Регуляризация температурных полей системы тел. Влияние источника энергии……...140
14.1. Трёхсоставная система тел……..140
14.2. Регуляризация температурных полей тел с источниками энергии……...145
14.3. Приближённые расчёты нестационарных температурных полей……...149
14.4. Длительность дорегулярного теплового режима……..152
Глава 15. Излучение……159
15.1. Законы лучистого теплообмена……..159
15.1.1. Основные определения……...159
15.1.2. Закон Планка……...160
15.1.3. Закон Ламберта. Интенсивность излучения……...…..162
15.2. Излучение реальных поверхностей……164
15.3. Обмен энергией излучения в системе тел…….170
15.3.1. Постановка задачи……..170
15.3.2. Угловые коэффициенты……171
15.4. Метод поточной (лучистой) алгебры……174
Глава 16. Теплообмен излучением между серыми телами……178
16.1. Виды излучения……178
16.2. Аналитические методы решения задачи……179
16.3. Расчётные формулы теплообмена……..182
16.4. Теплообмен излучением при наличии экранов……183
16.5. Солнечное излучение……...186
Список рекомендуемой литературы……..189

Глава 1. Конвекция

1.1. Модель процесса конвективного теплообмена

Как уже упоминалось в учебном пособии [1], в отличие от передачи тепла в твёрдых телах, механизм конвективного теплообмена оказывается более сложным. На процесс обычной теплопроводности, обусловленный молекулярным движением частиц жидкости, большое влияние оказывает перемещение больших масс жидкости (жидких молей). Следовательно, конвективный теплообмен оказывается существенно связанным с движением самой жидкости, т.е. с гидродинамическим процессом. Тепловые и механические явления взаимосвязаны и влияют друг на друга, поэтому изучение каждого из них не может проводиться изолированно.

Условимся о некоторых определениях. Под термином «жидкость» (если это специально не оговорено) будем понимать как капельную жидкость, так и газ. Жидкость может быть сжимаемой (газ) и несжимаемой (капельная жидкость).

При изучении картины теплообмена между телом и средой обычно ограничиваются выявлением закономерностей теплообмена внутри тела и в слое жидкости, непосредственно примыкающей к телу. При изучении многих практически важных задач гидродинамики и теплообмена оказалась плодотворной идея , основанная на анализе процесса в пограничном слое. Наличие пограничного слоя было впервые установлено немецким учёным Людвигом Прандтлем в 1904г., который предложил термин «пограничный слой».

Пристенный слой жидкости, в котором происходит изменение скорости движения жидкости от нулевой (на поверхности тела) до величины, практически равной скорости основного потока жидкости, называют гидродинамическим пограничным слоем жидкости.

На рисунке 1.1 представлены схемы изменения скоростей и температур в гидродинамическом и температурном пограничных слоях, на передней кромке пластины, которую омывает жидкость, и на некотором расстоянии от кромки.

За пределами гидродинамического пограничного слоя градиент скорости $\partial v/\partial n$ настолько мал, что им можно пренебречь, считая, что течение происходит без трения, и применять для этой части потока уравнение Бернулли. Понятие «толщина пограничного слоя» δ весьма условно, так как резкого перехода от пограничного слоя к течению вне слоя нет. Поэтому под δ подразумевают такое расстояние от стенки, на котором температура жидкости t и скорость v будут отличаться от v_0 на заданную величину, например на 1%, т.е. можно считать, что

$$\left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{n}}\right|_{y=\delta} = 0, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{y=\delta_t} = 0$$

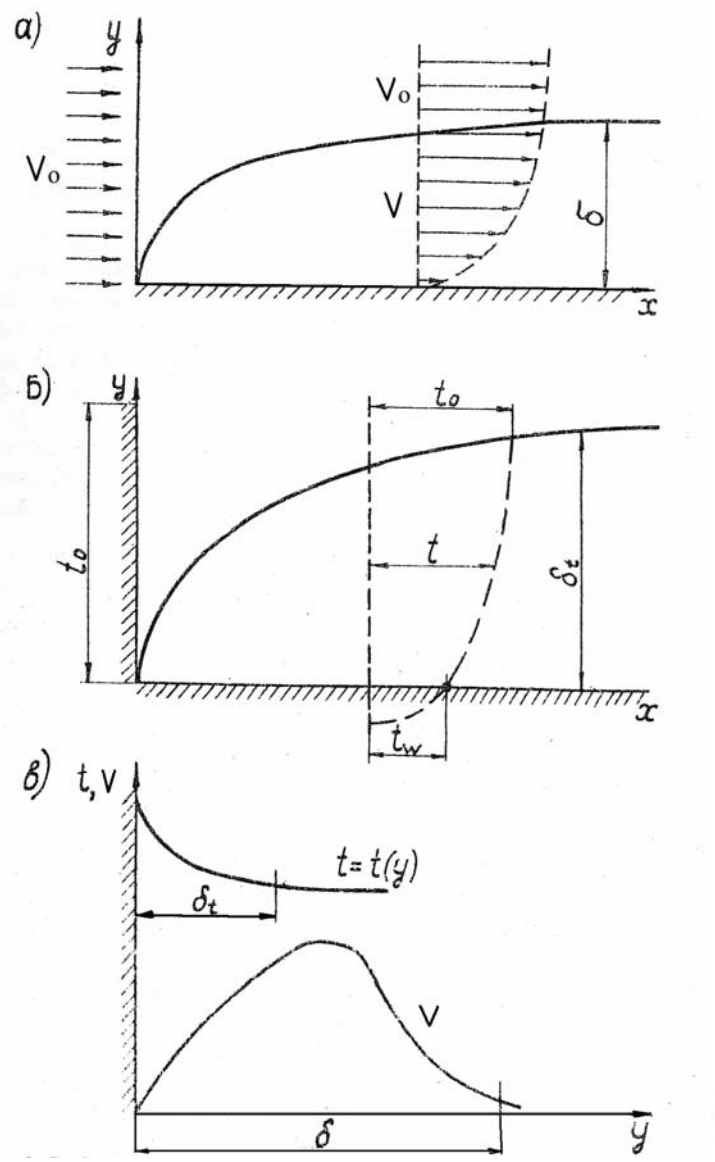


Рис. 1.1 Изменение полей скорости и температуры в пограничном слое

В общем случае величины δ и δ_t не совпадают. Разница в структуре теплового и гидродинамического пограничных слоёв особенно заметно наблюдается при свободном движении жидкости около нагретой стенки (рис. 1.1 в). В случае естественной конвекции скорость v_0 вдали от стенки равна нулю, поэтому распределение скоростей имеет иной характер, чем для вынужденной конвекции. Теплообмен между телом и средой существенно зависит от формы и размеров тела, так как с ними в значительной мере связана структура пограничного слоя.

В 1883 г. английский учёный Осборн Рейнольдс впервые показал, что существуют два основных режима движения: ламинарный и турбулентный. При ламинарном движении отдельные струи потока располагаются упорядоченно, параллельно друг другу, тогда как при турбулентном режиме они хаотически переплетены друг с другом. В последнем случае отдельные струи жидкости или газа совершают колебательные движения относительно некоторого среднего пути потока совершенно беспорядочно. Например, при обтекании пластины при значении безразмерного комплекса величин (критерий Рейнольдса) $\mathrm{Re}_x = \frac{\mathrm{v}_x \cdot x}{v} > 5 \cdot 10^5$ возникает турбулентность. Зарождение турбулентности зависит от величины возмущений в потоке, например, тех, которые могут существовать на подходе к передней кромке пластины и в области самой кромки. Чем больше мер принято, чтобы избежать возмущений, тем при большем числе Re_x сохраняется ламинарное движение. Известно, что можно реализовать условия, когда при $\mathrm{Re}_x > 5 \cdot 10^5$ ещё имеется ламинарное течение, однако, это состояние неустойчиво. Количественное описание степени турбулентности (интенсивности турбулентности) производится следующим образом. Пусть измерена составляющая скорости $\mathrm{v_x}$ в определённом месте турбулентного потока как функция времени (рис. 1-2).

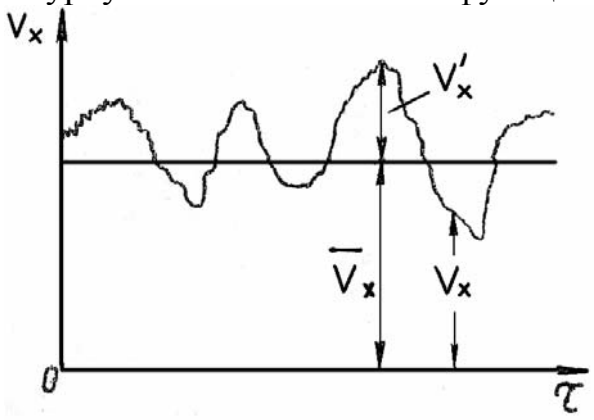


Рис. 1.2. Хаотическое колебание скорости турбулентного потока около среднего значения

Составляющая скорости в любой момент времени может быть записана как

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}'_x + \bar{\mathrm{v}}_x, \quad \bar{\mathrm{v}}_x = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \mathrm{v}_x d\tau, \qquad (1.1)$$

где $\bar{\mathrm{v}}_x$ - средняя во времени величина v_x , v'_x - отклонение от средней скорости.

Если $\bar{\mathrm{v}}_x$ не изменяется во времени, то такой турбулентный поток называют стационарным.

$$\overline{v}_x = \frac{1}{\tau_1}\int_0^{\tau_1} v'_x d\tau, \qquad (1.2)$$

где v'_x - мгновенная скорость.

Пусть это условие соблюдается также для составляющих скорости v_y и v_z. Степенью турбулентности будем называть величину.

$$J = \frac{1}{\overline{v}_x}\sqrt{\frac{1}{3}[(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2]} \qquad (1.3)$$

Рассмотрим процесс движения жидкости вдоль пластины (рис.1-3)

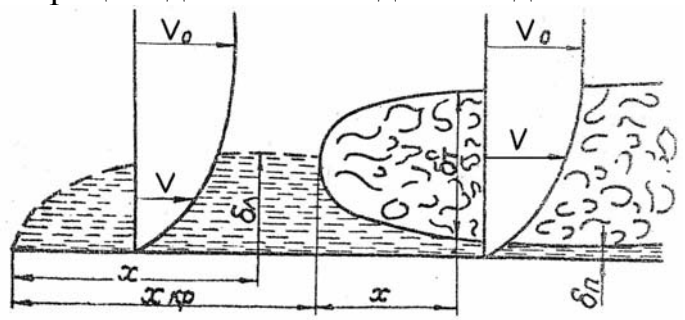


Рис. 1.3. Гидродинамическая картина обтекания пластины потоком жидкости

На переднем участке пластины $x < x_{кр}$ образуется ламинарный гидродинамический пограничный слой толщиною $\delta_л(x)$. Как только толщина слоя становится больше критической (при $x = x_{кр}$), течение в слое становится неупорядоченным, вихревым; образуется турбулентный пограничный слой с ламинарным подслоем. Переход из ламинарного режима в турбулентный происходит постепенно, и этот режим течения обычно называют переходным.

Рассмотрим течение жидкости в канале (трубе) (рис 1-4)

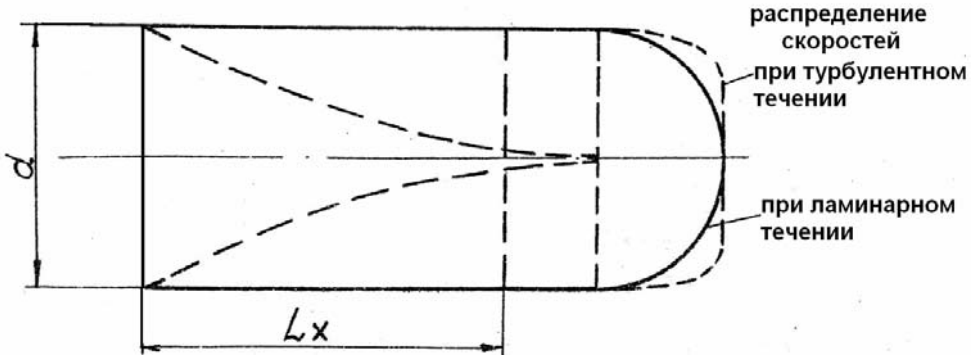


Рис 1.4. Характер движения жидкости в трубах

Условия в канале (трубе) вблизи входа подобны условиям на продольно обтекаемой пластине. У внутренней поверхности трубы также образуется пограничный слой, толщина которого у входного края трубы равна нулю, а затем постепенно возрастает, как это показано на рис. 1.4. Предположим, что условия входа таковы, что движение частиц в трубе происходит без

возмущения. На определённом расстоянии от входа пограничный слой утолщается настолько, что заполняет всё сечение. Кривая распределения скоростей в направлении потока дальше этой точки не меняется и имеет форму параболы (ламинарное течение) либо более сложной выпуклой кривой (турбулентное течение). При $x > L_x$ поток называется установившимся. Для установившегося потока, как будет показано ниже, при $\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{v}d}{v} \geq 2300$ ламинарное течение переходит в турбулентное.

1.2. Местный и средний коэффициенты теплообмена

Рассмотрим канал произвольного сечения A и периметра S; распределение температур и скоростей по сечению представлено на рис.1.5 кривыми *t(x),* v*(x)*. На стенках канала имеется источник или сток энергии q, с удельной мощностью $q_w(x)$.

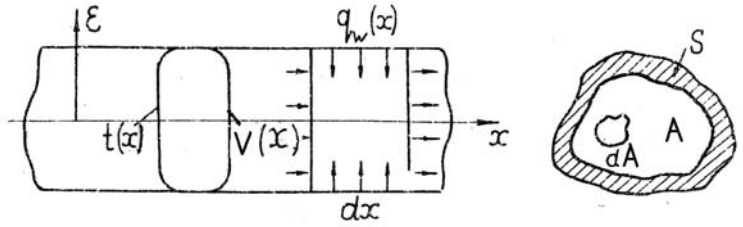


Рис 1.5. К определению коэффициентов теплообмена

Найдем тепловой поток $d^2\Phi_1$, который уносится жидкостью от стенки через сечение *dA* канала на длине *dx*. Переносимый движущейся жидкостью тепловой поток равен произведению удельной теплоемкости C_p на массовый расход *G* и на изменение температуры $\frac{\partial t}{\partial x}dx$ жидкости. В рассматриваемом случае массовый расход через элемент сечения *dA* равен произведению плотности ρ на объемный расход $\mathrm{v}(x)dA$, а изменение температуры жидкости на отрезке *dx* равно *dt*, тогда

$$d^2\Phi_1 = C_p \rho \mathrm{v}(x) \frac{\partial t}{\partial x} dx dA .$$

Через все сечение *A* переносится поток $d\Phi_1$:

$$d\Phi_1 = \int_A d^2\Phi_1 = C_p \frac{\partial}{\partial x}[\int_A \rho \mathrm{v}(x) t(x) dA] dx \qquad (1.4)$$

Введем понятие средней массовой температуры $\bar{t}$ жидкости:

$$\bar{t} = \frac{1}{\int_A \rho \mathrm{v}(x) dA} \int_A \rho \mathrm{v}(x) t dA \qquad (1.5)$$

и преобразуем выражение (1.4): $d\Phi_1 = C_p G d\bar{t}, G = \int_A \rho \mathrm{v}(x) dA.$ Здесь *G* – массовый расход жидкости. Через стенки трубы на отрезке длиной *dx* в жидкость поступает поток $d\Phi_2$:

$$d\Phi_2 = q_w(x) A dx,$$

где $q_w(x)$ – удельный поток от стенки к жидкости.

На основе закона сохранения энергии $d\Phi_1 = d\Phi_2$, что позволяет из последних формул получить

$$q_w = \frac{C_p G}{A} \frac{d\bar{t}}{dx} \tag{1.6}$$

На длине трубы *l* полный поток Φ_w от стенки к жидкости равен

$$\Phi_w = \int_0^l q_w A dx = \int_0^l C_p d\bar{t} = C_p G(\bar{t}_l - \bar{t}_0), \tag{1.7}$$

где $\bar{t}_l$ и $\bar{t}_0$ – средняя массовая температура на выходе и входе в трубу.

Перейдем к определению местного коэффициента теплообмена. В зависимости от выбора температуры жидкости различают два способа определения местного коэффициента теплообмена:

$$\alpha = \frac{q_w}{t_w - \bar{t}} \tag{1.8}$$

$$\alpha = \frac{q_w}{t_w - t_0} \tag{1.9}$$

где q_w - плотность теплового потока в данной точке поверхности стенки; t_w - температура стенки в этой же точке; $\bar{t}$ - средняя массовая температура жидкости в рассматриваемом сечении; t_0 - постоянная по сечению температура жидкости на входе в обогреваемый участок трубы.

Выбор того или иного способа определения α зависит от характера задачи и производится лишь из соображений удобства. Следует всегда обращать внимание на то, о каком именно коэффициенте теплообмена идет речь в той или иной формуле.

В общем случае в (1.8) и (1.9) удельный поток равен

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w, \tag{1.10}$$

где $\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_w$ - градиент температур в пограничном слое у стенки (w); λ - коэффициент теплопроводности жидкости.

В простейшем случае, когда q_w может быть представлен в форме (1.6), из (1.8) и (1.9) получаем

$$\alpha = \frac{C_p G}{A(t_w - \bar{t})} \frac{d\bar{t}}{dx}, \tag{1.11}$$

$$\alpha = \frac{C_p G}{A(t_w - t_0)} \frac{d\bar{t}}{dx}. \tag{1.12}$$

Заметим, что (1.10) позволяет найти q_w в разных точках как по периметру, так и по длине трубы, а (1.6) - в разных точках по длине трубы, но осредненное по периметру значение q_w. Соответственно, и уравнения

(1.11), (1.12) дают возможность определить осредненное по периметру значение α.

Рассмотрим теперь некоторые способы осреднения коэффициента теплообмена.

Средний интегральный коэффициент теплообмена.

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l}\int_0^l \alpha dx. \qquad (1.13)$$

Коэффициент теплообмена, отнесенный к средней интегральной разности температур,

$$\bar{\alpha}_u = \frac{\Phi_w}{A\Delta\bar{t}_u}, \qquad \Delta\bar{t}_u = \frac{1}{l}\int_0^l (t_w - \bar{t})dx.$$

Средний коэффициент теплообмена, отнесенный к начальной разности температур,

$$\bar{\alpha}_н = \frac{\Phi_w}{A(t_w - t_0)}$$

Выбор того или иного способа определения $\bar{\alpha}$ произволен и должен определяться характером изучаемой задачи. Подставим в (1.13) значение из (1.11):

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l}\frac{C_p G}{A}\int_0^l \frac{d\bar{t}}{t_w - \bar{t}}.$$

Если положить $t_w = const$, то интегрирование выполняется просто:

$$\bar{\alpha} = \frac{C_p G}{A}\ln\frac{t_w - \bar{t}_0}{t_w - \bar{t}_l}.$$

Умножим и разделим это уравнение на $(\bar{t}_l - \bar{t}_0)$ и примем во внимание (1.7), тогда

$$\bar{\alpha}_л = \frac{\Phi_w}{A\Delta\bar{t}_л}, \qquad \Delta\bar{t}_л = \frac{\bar{t}_l - \bar{t}_0}{\ln\frac{t_w - \bar{t}_0}{t_w - \bar{t}_l}},$$

где $\Delta\bar{t}_л$ - средняя логарифмическая разность температур.

В заключение заметим, что средние коэффициенты теплообмена, отнесенные к средней логарифмической $(\bar{\alpha}_л)$, средней интегральной $(\bar{\alpha}_u)$ и начальной $(\bar{\alpha}_н)$ разностям температур, связаны очевидными соотношениями

$$\bar{\alpha}_л\Delta\bar{t}_л = \bar{\alpha}_u\Delta\bar{t}_u = \bar{\alpha}_н\Delta\bar{t}_н \qquad (1.14)$$

С помощью этих соотношений нетрудно перейти от значений $\bar{\alpha}$, определенных по одному способу, к значениям, определенным по другому способу.

При движении жидкости в трубе α, определенное по (1.11), обычно изменяется по длине участка от $x=0$ до $x = l_{нт}$, при $x > l_{нт}$, где $l_{нт}$ - длина термического начального участка, т.е. на протяжении остальной части

трубы, - сохраняет постоянное значение. Это постоянное значение α будем обозначать α_∞.

Глава 2. Дифференциальное уравнение переноса массы, энергии, импульса

2.1. Уравнение массообмена

Рассмотрим поток жидкости в одном направлении *x* (рис. 2.1).

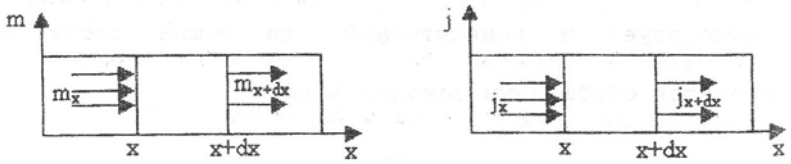


Рис. 2.1. Количество и поток массы при одномерном движении

Выделим в движущемся потоке массы (рис. 2.1) некоторый объём с сечением $1\,м^2$. На расстоянии *x* в это сечение входит количество вещества m_x, а через сечение (x+Δx) – выходит $m_{x+\Delta x}$, разница между ними Δm - изменение плотности. Применим закон сохранения количества вещества и запишем его в форме:

$$m_x = m_{x+\Delta x} + \Delta m, \text{ кг} \tag{2.1}$$

Вводим понятие плотности потока массы j_x

$$j_x = \frac{m_x}{1 \cdot \tau} \quad \frac{кг}{м^2 с} \tag{2.2}$$

и запишем уравнение (2.1) в иной форме

$$j_x \Delta\tau \cdot 1 = j_{x+\Delta x} \Delta\tau \cdot 1 + \Delta m \tag{2.3}$$

Изменение плотности $\Delta\rho$ вещества за время $\Delta\tau$ в объёме $\Delta x \cdot 1$, представим в форме $\frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}\Delta x \Delta\tau \cdot 1$, а изменение массы Δm в объёме $\Delta x \cdot 1$ запишем в виде

$$\Delta m = \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}\Delta x \Delta\tau \cdot 1 \tag{2.4}$$

Принимая во внимание зависимость (2.4), запишем (2.3) в виде

$$j_x \Delta\tau \cdot 1 = j_{x+\Delta x} \cdot \Delta\tau \cdot 1 + \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}\Delta x \Delta\tau \cdot 1$$

или

$$j_{x+\Delta x} - j_x = -\frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}\Delta x \tag{2.5}$$

Предел отношения $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{j_{x+\Delta x} - j_x}{\Delta x} = \frac{\partial j}{\partial x}$ по определению является производной, тогда (2.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \tag{2.6}$$

В уравнении (2.6) присутствуют две искомые величины: плотность потока *j* и удельный вес *ρ*, и для перехода к одной искомой величине необходимо

знать связь между ними. Эту связь дает закон Фика: плотность потока массы j $\frac{кг}{м^2 с}$ связана с плотностью ρ $\frac{кг}{м^3}$ зависимостью

$$j = -D\frac{\partial \rho}{\partial n} \tag{2.7}$$

Знак (-) вызван следующими соображениями: по законам физики перенос вещества осуществляется от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией, а в математике за положительное направление изменения функции принято направление от меньших ее значений к большим. Для того, чтобы снять противоречие между определениями в физике и математике, в уравнение (2.7) подставим знак (-). Коэффициент D в уравнении (2.7) носит название коэффициента диффузии, он имеет размерность $[D] = \frac{м^2}{с}$ и, как показывают опыты, может изменяться на 14 порядков.

Обобщенный закон Фика относится к движущейся жидкости, а закон (2.7) – к покоящейся. Если имеет место движущаяся жидкость, то к молекулярному механизму переноса вещества накладывается конвективный, т.е. к зависимости (2.7) надо прибавить массовый перенос вещества, равный $[\rho \mathrm{v}_x \cdot 1] = \frac{кг}{м^3}\frac{м}{с} = \frac{кг}{м^2 с}$

$$j = -D\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \mathrm{v}_x \tag{2.8}$$

Составим дифференциальное уравнение массопереноса

Подставим (2.8) в уравнение (2.6), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial \rho}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x}(\rho \mathrm{v}_x) = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial \rho}{\partial x}) - \rho\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} - \mathrm{v}_x\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Последнее выражение можно представить в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \mathrm{v}_x\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial \rho}{\partial x}) - \rho\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} \tag{2.9}$$

т.е. получим дифференциальное уравнение массопереноса для движущейся в направлении оси x жидкости. По аналогии напишем два уравнения для жидкости, «движущейся» в направлениях y и z.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \mathrm{v}_y\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(D\frac{\partial \rho}{\partial y}) - \rho\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(D\frac{\partial \rho}{\partial z}) - \rho\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} \tag{2.10}$$

Складывая уравнения (2.9) и (2.10) придем к случаю, когда жидкость движется в направлениях (*x, y, z*), и применяя формулы векторного анализа из математики, можем прийти к дифференциальному уравнению массообмена в векторной форме.

Напомним некоторые уравнения векторного анализа.

Полная производная $\frac{d}{d\tau}$ по времени равна

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathrm{v}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{v}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (2.11а)$$

Градиент функции *f* есть вектор

$$gradf = \frac{\partial f}{\partial \tau}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.11б)$$

Дивергенция вектора $\vec{f}$ есть скаляр

$$\mathrm{div}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad (2.11в)$$

Если применить к (2.9), (2.10) определения (2.11), то дифференциальное уравнение массопереноса в векторной форме приобретет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \mathrm{div}(\mathrm{Dgrad}\rho) - \rho \mathrm{div}\vec{\mathrm{V}} \qquad (2.12)$$

Частные случаи дифференциального уравнения массообмена.

По определению несжимаемая жидкость имеет нулевую дивергенцию скорости, т.е.

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{v}} = 0 \qquad (2.13)$$

И уравнение (2.12) примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \mathrm{div}(\mathrm{Dgrad}\rho) \qquad (2.14)$$

Если при этом коэффициент диффузии не будет зависеть от координат, т.е. *D=const*, то его можно вынести за операцию div и

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \mathrm{Ddivgrad}\rho = D\nabla^2\rho \qquad (2.15)$$

$$\mathrm{divgrad} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \qquad (2.16)$$

Операция (2.16) носит название оператора Лапласа.

Если диффузия отсутствует *D=0*

В этом случае

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\rho \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{v}} \qquad (2.17)$$

2.2. Уравнение теплопроводности

Это уравнение выводится на основе закона сохранения энергии.

Выделим в движущемся потоке жидкости элементарную трубку в форме удлиненного по оси *x* параллелограмма. Тепловой поток в этом теле вызван разностью температур на гранях *x* и *x+Δx*. К грани *x* площадью А за одну секунду подводится поток энергии $\Delta\Phi_x$, а через (*x+Δx*) - проходит поток энергии $\Delta\Phi_{x+\Delta x}\,\frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{м}^2}$. Согласно закону сохранения энергии количество подведенного за единицу тепла $(\Delta\Phi_{x+\Delta x} - \Phi_x)$ расходуется на изменение теплосодержания объёма $\Delta\Phi = c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}$

$$\Delta\Phi_{x+\Delta x} - \Phi_x = -\Delta\Phi \qquad (2.18)$$

Запишем (2.18) с использованием понятия удельный тепловой поток $q = \frac{Ф}{A}$ и устремим объем элемента $\Delta x \cdot 1$ к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{q_{x+\Delta x} - q_x}{\Delta x} = -c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad \text{или} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} \tag{2.19}$$

Здесь мы столкнулись с проблемой, рассмотренной в предыдущем разделе: поток тепла направлен от более высокой к более низкой температуре, а за положительное изменение функции в математике принимают ее рост от меньших к большим значениям. Этим обстоятельством вызван знак (-) в уравнении (2.19). Второй проблемой является наличие в уравнении двух неизвестных *q* и *t*. Связь между ними содержится в законе Фурье: перенос удельного потока энергии *q* молекулярным механизмом пропорционален градиенту температуры $\frac{\partial t}{\partial n}$ в направлении нормали n, т.е.

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \tag{2.20}$$

где λ - коэффициент теплопроводности материала.

Здесь знак (-) вызван теми же соображениями, что и формуле (2.7). Коэффициент теплопроводности, $[\lambda] = \frac{Bm}{м \cdot K}$,может меняться на 5 порядков $0{,}01 < \lambda < 10^3$.

Для движущейся жидкости применяют обобщенный закон Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + c\rho t \tag{2.21}$$

В данном уравнении первый член отвечает за молекулярный механизм переноса, а второй – за конвективный.

Формулы (2.20) и (2.21) связывают удельный поток *q* теплоты и температуру *t*, и их можно использовать для преобразования уравнения (2.19). Для этого подставим (2.21) в уравнение (2.19).

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + c\rho \mathrm{v}_x t\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + c\rho \mathrm{v}_x \frac{\partial t}{\partial z} + c\rho t \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}.$$

После перестановки отдельных членов этого уравнения получим

$$\frac{1}{c\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) - t\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}\right] = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \mathrm{v}_x \frac{\partial t}{\partial x}. \tag{2.22}$$

Если движение жидкости описывается не одной координатой *x*, а тремя – (*x,y,z*), то аналогичные рассуждения следует провести для направлений *y* и *z*:

$$\frac{1}{c\rho}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) - t\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y}\right] = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \mathrm{v}_y \frac{\partial t}{\partial y}.$$

$$\frac{1}{c\rho}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right) - t\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right] = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \mathrm{v}_z \frac{\partial t}{\partial z}. \tag{2.23}$$

Складывая выражения (2.22), (2.23) и применяя формулы векторного анализа (2.11), получим уравнение теплопроводности в векторной форме

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c\rho}\operatorname{div}(\lambda grad t) - t\operatorname{div}\vec{v} \qquad (2.24)$$

При наличии источника энергии мощности P в объеме V уравнение (2.24) примет вид

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{c\rho}\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) - t\operatorname{div}\vec{v} + \frac{P}{Vc\rho} \qquad (2.25)$$

Частные случаи уравнения теплопроводности

1. Источники отсутствуют, коэффициент теплопроводности $\lambda=const$
   Уравнение (2.25) примет вид

$$a\nabla^2 t - t\operatorname{div}\vec{v} = \frac{dt}{d\tau} \qquad (2.26)$$

Здесь через a обозначен коэффициент температуропроводности тела

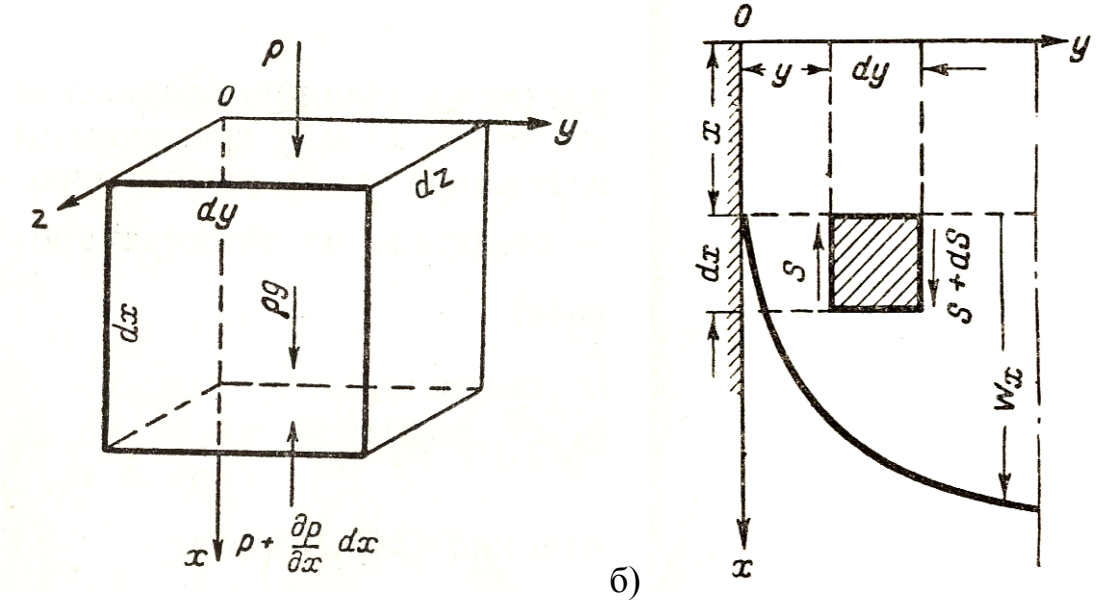
$$a = \frac{\lambda}{c\rho} \qquad (2.27)$$

2. Несжимаемая жидкость $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, источники отсутствуют $P=0$, $\lambda=const$
   Получаем наиболее распространенный вид уравнения теплопроводности

$$a\nabla^2 t = \frac{\partial t}{\partial \tau} \qquad (2.28)$$

2.3. Уравнение движения

В уравнении (2.24) наряду с температурой имеются еще три переменные v_x, v_y, v_z т.е. температурное поле в движущейся жидкости зависит от распределения скоростей. Последнее описывается дифференциальным уравнением движения, вывод которого основан на втором законе Ньютона: сила равна массе, умноженной на ускорение.



а) б)

Рис. 2.3. К выводу дифференциального уравнения движения жидкости (а); сила трения, действующая на элемент движущейся жидкости (б).

Выделим в потоке движущейся жидкости элементарный параллелепипед с ребрами *dx, dy dz*. На этот элемент действуют три силы: сила тяжести, сила давления и сила трения. Найдем проекции этих сил на ось *x* (рис.2.3,а)

Сила тяжести приложена к центру элемента $dV=dx\cdot dy\cdot dz$, и его проекция на ось *x* равна произведению ускорения силы тяжести g_x на массу элемента $dm=\rho d\mathrm{v}$, т.е.

$$g_z \rho d\mathrm{v} = g_x \rho dx dy dz \qquad (2.29)$$

Удельная сила давления на верхние грани элемента $P\left[\frac{кг}{м^2}\right]$, а на нижней $\left(P+\frac{dP}{dx}dx\right)$. На эти грани действует равнодействующая сила

$$Pdy\cdot dz - (P+\frac{dP}{dx}dx)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz \qquad (2.30)$$

При движении жидкости возникает сила трения на боковых гранях элемента (рис.2.3,б). Около левой грани скорость движения частиц меньше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении у сила трения F направлена против движения и равна - *Fdxdz*. Около правой грани элемента, наоборот, скорость движения частиц жидкости больше, чем в самом элементе, и поэтому здесь в сечении (*y*+*dy*) сила трения направлена в сторону движения и равна

$$(F+\frac{dF}{dy}dy)dxdz$$

Равнодействующая этих сил равна алгебраической сумме:

$$(F+\frac{dF}{dy}dy)dxdz - Fdxdz = \frac{\partial F}{\partial y}dxdydz \qquad (2.31)$$

Здесь *F* - сила трения на единицу поверхности и согласно закона Ньютона для трения равна (см. раздел 2.4)

$$F = \mu\frac{d\mathrm{v}_x}{dy} \qquad (2.32)$$

Подставим (2.32) в уравнение (2.31), получаем

$$\frac{dF}{dy}d\mathrm{V} = \mu\frac{d^2\mathrm{v}_x}{dy^2}d\mathrm{V}, \quad \mathrm{dV} = \mathrm{dxdydz} \qquad (2.33)$$

В общем случае v_z меняется по трем направлениям, и проекция силы трения на ось *x* имеет вид:

$$\mu\left(\frac{\partial^2\mathrm{v}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{v}_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathrm{v}_z}{\partial z^2}\right)d\mathrm{V} = \mu\nabla^2\mathrm{v}_x d\mathrm{V} \qquad (2.34)$$

Суммируя выражения (2.29), (2.30), (2.34), получим проекцию на ось *x* равнодействующей всех сил, приложенных к объему *d*V,

$$\rho\mathrm{g}_\mathrm{x} - \frac{\partial P}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial^2\mathrm{v}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2\mathrm{v}_\mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2\mathrm{v}_\mathrm{z}}{\partial \mathrm{z}^2}\right)\mathrm{dV} \qquad (2.35)$$

Согласно второму закону механики эта равнодействующая сила равна произведению массы элемента ρdV на ускорение $\frac{dv_x}{d\tau}$, т.е.

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial \tau} dV = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \qquad (2.36)$$

Приравнивая (2.35) и (2.36) и произведя сокращение на dv, получим

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \qquad (2.37)$$

Таким же образом могут быть получены уравнения и для проекций равнодействующих сил на оси y и z. В результате получится система из трех уравнений.

Это и будет дифференциальное уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости в проекциях на оси координат, или уравнение Навье-Стокса. В векторной форме это уравнение имеет вид

$$\rho \frac{dv}{d\tau} = -\nabla \rho + \mu \nabla^2 v + \rho g \qquad (2.38)$$

Рассмотрим частный случай уравнения Навье-Стокса для невязкого течения ($\mu=0$)

Полагая в (2.38) $\mu=0$, получим уравнение Эйлера

$$\frac{dv}{d\tau} = g - \frac{1}{\rho} \nabla P \qquad (2.39)$$

для невязкого течения жидкости.

2.4. Вязкость жидкости. Закон Ньютона для вязкости

Известно, что в деформируемых твердых упругих телах имеет место закон Гука, согласно которому деформация пропорциональна нагрузке. Согласно закону Стокса, жидкость имеет непрерывную деформацию, она течет со скоростью, которая возникает с нагрузкой. На рис.2.4 на расстоянии Δy друг от друга изображены две параллельные плоскости внутри движущегося объема жидкости. Причем нижняя плоскость движется со скоростью v, а верхняя – $v+\Delta v$.

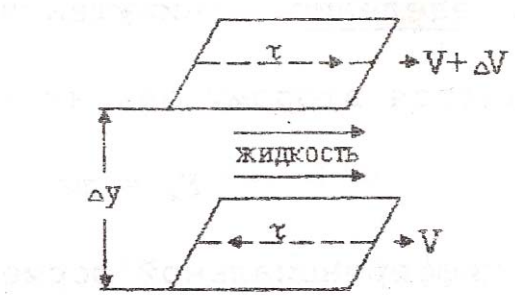


Рис. 2.4. Ламинарное течение жидкости между двумя параллельными пластинами.

Введем понятие касательного напряжения $\tau_т$, оно равно силе на единицу площади, которую надо приложить к пластине, чтобы поддержать постоянную скорость

$$\tau_т = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad \text{или} \quad \tau_т = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.40}$$

Этот закон носит название закона Ньютона для трения, параметр μ - динамическая вязкость жидкости. Сила $F=ma$ и единицей измерения силы является Ньютон (Н)

$$[F] = кг \frac{м}{с^2} = Н \ , \ [\tau] = \frac{Н}{м^2} \ , \ [\mu] = \frac{[\tau]}{[dv]}[dy] = \frac{Н \cdot м \cdot с}{м^2 \cdot м} = \frac{Н \cdot с}{м^2}$$

Существует понятие кинематической вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \ , \ [\nu] = \frac{м^2}{с}$$

Оба эти понятия широко применяются в гидродинамике. Существуют жидкости чрезвычайно высокой вязкости, например, жидкий асфальт, вулканическая лава, вазелин и др. Для таких понятий закон Ньютона (2.40) не выполняется, поэтому они называются неньютоновскими, для них справедлив закон

$$\tau_т = K\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^n, \ n>1 \tag{2.41}$$

где n – эмпирическая величина.

2.5. Свободное движение жидкости вдоль вертикальной стенки

Рассмотрим процесс движения вдоль вертикальной нагреваемой пластины, расположенной в неограниченном пространстве (рис. 2.5).

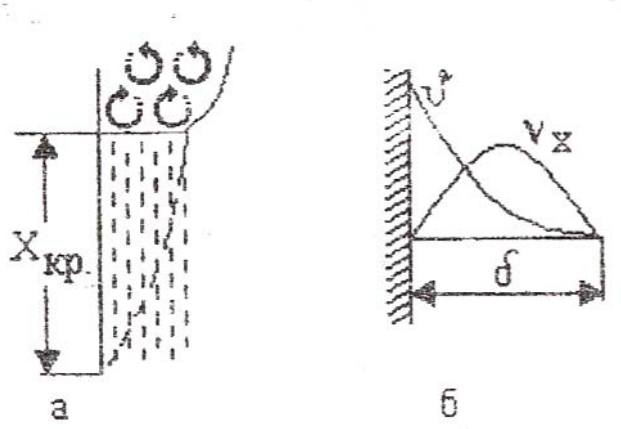


Рис. 2.5. Свободная конвекция вдоль вертикальной стенки: а) ламинарный и турбулентный пограничные слои; б) распределение температуры t и скорости Vx по толщине δ пограничного ламинарного слоя.

В этих условиях вдоль пластины снизу вверх движется тонкий слой жидкости, а основная масса жидкости остаётся в состоянии покоя (рис. 2.5,а). На некоторой высоте ламинарный пограничный слой разрушается и

переходит в турбулентный. На рис. 2.5,б показано распределение температуры перегрева ϑ и скоростей v по толщине пограничного слоя.

Составим для ламинарного пограничного слоя уравнение движения для случая, когда разность давлений отсутствует. Определим объёмную силу X, вызывающую движение жидкости из-за перепада температуры ϑ (температура перегрева):

$$X = g_x(\rho_\infty - \rho), \qquad (2.42)$$

где g_x - составляющая гравитационного ускорения в направлении X; ρ_∞, ρ – плотность удалённой от поверхности среды и плотность среды в пограничном слое.

$$\beta = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty \upsilon}, \qquad (2.43)$$

На основании (2.42) и (2.43) запишем объёмную силу X в иной форме:
$X = g_x \beta \rho_\infty \vartheta$

где ϑ – перегрев среды, равный $(t - t_0)$, t_0 - температура среды до внесения нагретой пластины.

Уравнение движения (2.37) для пограничного слоя при свободной конвекции примет вид

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = g_x \beta \vartheta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}, \ \nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (2.44)$$

Глава 3. Теория подобия

3.1. Постановка задачи

Из-за ограниченных возможностей аналитического решения дифференциальных уравнений большое значение приобретает эксперимент. Однако, число экспериментальных данных как правило, велико, и требуются методы обобщения опытных данных. Одно из средств решения этой задачи – теория подобия, которая по существу является теорией эксперимента. При постановке любого эксперимента необходимо заранее знать:

какие величины надо измерять в опыте;

как обрабатывать результаты опыта;

какие явления подобны изучаемому, т.е. на какие случаи можно распространять полученные зависимости. Ответы на эти вопросы даёт теория подобия, к изложению которой переходим.

Впервые с понятием подобия встречаемся в геометрии, в которой введено понятие геометрически подобных фигур. Например, изображённые на рис. 3.1 фигуры и треугольники обладают следующим свойством: их соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны, т.е.

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_3''}{l_3'} = C, \qquad (3.1)$$

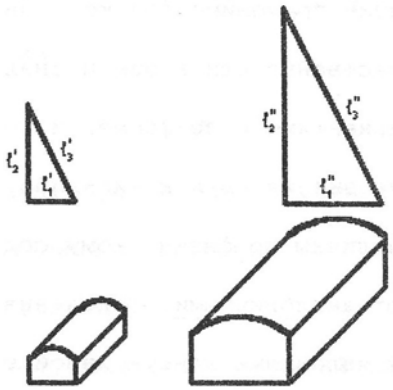


Рис. 3.1 Подобие различных геометрических фигур

где l_1, l_2, l_3 – линейные размеры фигур; штрихи (′) и (″) относятся к обозначениям первой и второй фигуры; С – коэффициент пропорциональности, или константа подобия. Условие (3.1) – математическая формулировка геометрического подобия фигур. Оно справедливо для любых сходственных отрезков подобных фигур: высот, медиан и других.

Понятие подобия можно распространять и на физические явления. Можно, например, говорить о подобии движения двух потоков жидкости, так называемое кинематическое подобие; подобие сил – динамическое подобие; о подобии температур – тепловое подобие. Понятие подобия в отношении физических величин применимо только к явлениям одного рода, которые качественно одинаковы и аналитически описываются одними уравнениями и по форме, и по содержанию. Если аналитические уравнения двух каких-либо одинаковых по форме, но различных по физическому содержанию, то такие явления называют аналогичными. Такая аналогия существует, например, между явлениями кондуктивной теплопроводности и переноса электрического заряда в проводниках. Основной закон и в том, и в другом случае формулируется одинаково: удельные потоки теплоты $\vec{q}$, плотности электрического тока $\vec{j}$ пропорциональны градиенту температуры – $grad\ t$, градиенту электрического потенциала – $grad\ U$ (законы Фурье и Ома).

$$\vec{q} = -\lambda grad\ t\ ,\ \vec{j} = -\sigma grad\ U \qquad (3.2)$$

где λ и σ – коэффициенты пропорциональности, т.е. коэффициент теплопроводности и электропроводности. Хотя выражения (3.2) одинаковы по форме, но по содержанию они совершенно различны. Это позволяет явления переноса теплоты и электричества отнести к явлениям аналогичным.

3.2. Условия физического подобия

Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления, т.е. любая величина первого явления φ' пропорциональна однородной с ней величине φ'' второго явления

$$\varphi' = C_\varphi \varphi'' \qquad (3.3)$$

где C_φ - коэффициент пропорциональности – называется константой подобия величины φ. Параметр C_φ не зависит ни от координат, ни от времени.

Рассмотрим, например, общий случай движения жидкости. По определению величина скорости *u* есть отношение пути *l* ко времени τ движения, т.е. v= *l*/ τ. Применим формулу (3.3) к двум подобным потокам жидкости:

$$\mathrm{v}' = \frac{l'}{\tau'}, \qquad \mathrm{v}'' = \frac{l''}{\tau''}$$

Разделив почленно эти равенства друг на друга получим

$$\mathrm{v}'/\mathrm{v}'' = (l'/\tau')/(l''/\tau''), \quad C_u = C_l / C_\tau,$$
$$(C_u C_\tau)/C_l = 1,$$
$$(\mathrm{v}' \cdot \tau')/l' = (\mathrm{v}'' \cdot \tau'')/l'' = idem \qquad (3.4)$$

Уравнения (3.4) выражают условия подобия, которым ограничивается произвольный выбор констант подобия C_u, C_l, C_τ. Обозначение *idem* в уравнении (3.4) означает “одно и то же”. Уравнение (3.4) характеризует кинематическое подобие и показывает, что в подобных системах существуют особые величины, называемые инвариантами, или критериями подобия, или числами подобия. Критерии подобия – безразмерные комплексы, составленные из величин, характеризующих явление.

Рассмотрим условия динамического подобия. Согласно второму закону Ньютона, сила *F* равна массе *m*, умноженной на ускорение *a*: *F= m·a= m·(* v/ τ). Применим преобразования (3.3), в этом случае

$$F=m\cdot a=m\cdot(\mathrm{v}/\tau), \quad (F\cdot\tau)/(m\cdot\mathrm{v})=idem=Ne,$$
$$(C_u \cdot C_m)/(C_l \cdot C_\tau) = 1.$$

Критерии подобия принято называть именами учёных, работавших в этой области, и обозначать двумя начальными буквами их фамилии, например, *Ne* (*Newton*) критерий Ньютона.

Критерий подобия можно получить для любого физического явления. Для этого необходимо иметь аналитическую зависимость между переменными рассматриваемого явления. Это необходимая предпосылка теории подобия. В тех же случаях, когда рассматривается новый процесс, для которого аналитического описания ещё нет, критерии подобия выделяются на основе анализа размерностей, познакомиться с которым

можно в специальной литературе. Отметим, что комбинации из чисел подобия дают новое число подобия.

3.3. Теоремы подобия

Основные положения теории подобия формулируются в виде трёх теорем.

Первая теорема подобия: подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия.

Вторая теорема подобия: зависимость между переменными, характеризующими явления, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия K_1, K_2,…, K_n:

$$f(K_1, K_2, ..., K_n) = 0. \qquad (3.6)$$

Зависимость (3.6) называется критериальным уравнением. Помимо критериев подобия в это уравнение могут входить так называемые симплексы – безразмерные отношения однородных физических величин.

Третья теорема подобия: подобны те явления, условия однозначности которых подобны и критерии, составленные из условий однозначности, численно одинаковы.

Условия однозначности состоят из начальных и граничных условий задачи, или краевых условий. Критерии, полученные из этих условий, называются определяющими. Возможна такая формулировка третьей теоремы подобия: явления подобны, если определяющие критерии инвариантны (одинаковы).

Критерии, составленные из величин, не входящих в условия однозначности, называются неопределяющими. Когда устанавливается подобие, то неопределяющие критерии сами собой получаются также одинаковыми. Следовательно, теория подобия позволяет, не интегрируя дифференциальных уравнений, получить из них критерии подобия и из опытных данных установить критериальные зависимости, последние будут справедливы для всех подобных между собою процессов.

В начале этого раздела были сформулированы основные три вопроса, которые стоят перед экспериментатором. Теперь можно дать ответ на эти вопросы.

На первый – о том, какие величины надо измерять в опыте – отвечает первая теорема подобия: в опытах надо измерять величины, которые содержатся в критериях подобия изучаемого явления.

На второй вопрос – как обрабатывать результаты опыта – отвечает вторая теорема подобия: результаты опытов надо представлять в виде критериальных зависимостей.

На третий вопрос – какие явления подобны – ответ дает третья теорема подобия: подобны те явления, у которых подобны условия однозначности и равны определяющие критерии.

3.4. Определение критериев подобия из дифференциальных уравнений

Приведем иллюстрацию этого метода на примере одномерного стационарного ($\partial\vartheta/\partial\tau = 0$) уравнения движения (2.38):

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}\right)$$

Представим это уравнение через размерности входящих в него параметров. При этом обозначим размерности скоростей v_x и v_y через v, размерность отрезков *x*, *y* – через L, получим

$$\left[\frac{\mathrm{v}^2}{L}\right] = \left[g - \frac{\Delta P}{\rho L} + \frac{\nu \mathrm{v}^2}{L^2}\right]$$

разделим все члены уравнения на левую часть

$$[1] = \left[\frac{gL}{u^2} - \frac{\Delta P}{\rho u^2} + \frac{\mathrm{v}L}{\nu}\right]$$

В последнее равенство вошли искомые критерии:

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho \mathrm{v}^2} = \frac{\textit{сила давления}}{\textit{сила инерции}} \text{ - число Эйлера} \qquad (3.7)$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{g}\mathrm{L}} = \frac{\textit{сила инерции}}{\textit{сила тяжести}} \text{ - число Фруда} \qquad (3.8)$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{v}\mathrm{L}}{\nu} = \frac{\textit{сила инерции}}{\textit{сила вязкого трения}} \text{ - число Рейнольдса} \qquad (3.9)$$

Согласно второй теореме подобия опытные данные надо обрабатывать в виде зависимости:

$$Eu = f(Fr, Re) \qquad (3.10)$$

Уравнение энергии для однородного стационарного уравнения ($\partial\vartheta/\partial\tau = 0$) в несжимаемой жидкости ($\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{v}} = 0$) при умеренных скоростях имеет вид:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

Представим это уравнение через размерности

$$\left[\frac{\mathrm{v}t}{L}\right] = \left[\frac{at^2}{L^2}\right],\ [1] = \left[\frac{\mathrm{v}L}{a}\right].$$

$$Pe = \frac{\mathrm{v}L}{a} = \frac{\textit{конвективный перенос теплоты}}{\textit{кондуктивный перенос теплоты}} \text{ - число Пекле.} \qquad (3.11)$$

Комбинируя критерии Рейнольдса и Пекле, получим критерий Прандтля, являющиеся физической константой:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{физическая константа}}{\text{физическая константа}} = \text{физическая константа} \text{ - критерий Прандтля}$$

Аналогичным образом рассмотрим уравнение для коэффициента теплоотдачи

$$a = -\frac{\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)}{t - t_w}$$

которое приведем к виду

$$[1]=\left[\frac{aL}{\lambda}\right].$$

Комплекс $\frac{aL}{\lambda}$ (безразмерный коэффициент теплоотдачи) носит название критерия Нуссельта:

$$Nu=\frac{aL}{\lambda} \tag{3.12}$$

Критерий подобия для естественной конвекции можно получить, комбинируя критерии Рейнольдса и Фруда:

$$\frac{\mathrm{Re}^2}{Fr}=\frac{gL^3}{\nu^2}=Ga \tag{3.13}$$

его называют критерием Галилея. Умножая критерий Галилея на симплекс $\frac{\rho-\rho_0}{\rho}$, получим новый критерий

$$\frac{gL^3}{\nu^2}\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=Ar, \tag{3.14}$$

носящий название критерия Архимеда. Так как при естественной конвекции неоднородность поля плотности вызывается неоднородностью температуры, то параметрический критерий $\frac{\rho-\rho_0}{\rho}$ замещается выражением $\beta\Delta t$, в результате получим комплекс

$$\frac{g\beta L^3\Delta t}{\nu^2}=Gr, \tag{3.15}$$

который носит название критерия Грасгофа.

Интенсивность теплообмена при естественной конвекции может быть определена с помощью уравнения

$$Nu=f_1(Gr,\mathrm{Pr}), \tag{3.16}$$

Для естественной и вынужденной конвекции -

$$Nu=f(\mathrm{Re},Gr,\mathrm{Pr}) \tag{3.17}$$

3.5. Критерии подобия

Основные трудности дальнейшего анализа конвективного теплообмена связаны с установлением вида функциональной зависимости (3.6). Эта задача для простейших случаев может быть решена аналитически, но в большинстве случаев вид этих функциональных зависимостей устанавливается при обобщении экспериментальных данных.

Изложим основные принципы, на которых основаны методы обобщения данных эксперименты по изучению конвективного теплообмена. Предположим, что экспериментально в условиях естественной конвекции удалось измерить коэффициент теплообмена проволок разного диаметра в различных средах при различных значениях

температурных напоров. При обработке экспериментальных данных были получены серии зависимостей (3.6), связывающих коэффициенты теплообмена с отдельными параметрами (диаметром, температурным напором, свойствами среды, геометрическими параметрами L и т.д.), т.е. $\alpha = f(t, t_c, \beta, \lambda, C_p, \nu, a, g, L).$ Эти зависимости носят частный характер и справедливы только для тех условий, при которых проводились опыты. Однако существует возможность эти частные результаты применить для расчета коэффициента теплообмена иных (в отличие от изучаемого) случаев теплообмена проволок. Например, исследования проводились в воздухе на проволоках диаметром 0.5 – 3 мм при температурном напоре - 150 С. Если эти данные опыта обрабатывать на основе теории подобия, то возможно полученные зависимости использовать для определения коэффициента теплообмена проволоки диаметром 0.1 или 5 мм в водороде при температурном напоре до 150 С.

Изложим основные положения теории подобия. Протекание сложных физических процессов характеризуется не отдельными физическими и геометрическими величинами, а некоторыми безразмерными комплексами или так называемыми критериями подобия, составленными из этих величин. Например, на теплообмен при естественной конвекции существенное влияние оказывают около десятка физических величин, входящих в зависимость (3.6). Если на основе теории подобия объединить физические и геометрические параметры в безразмерные комплексы, тот же процесс можно описать не десятью, а тремя следующими критериями:

критерием Нуссельта $Nu = \frac{aL}{\lambda}$,

критерием Грасгофа $Gr = \beta g \Delta t \frac{L^3}{\nu^2}$,

критерием Прандтля $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$.

Здесь через L обозначен геометрический параметр, характерный для тела данной конфигурации (диаметр для труб или шаров, высота плиты и т.д.).

Пусть в результате исследования коэффициента теплоотдачи проволок при разных значениях диаметров (L), температурных напоров $(t - t_c)$ и в различных средах (λ,β,ν,α) получен набор значений коэффициента теплоотдачи. На основании этих эмпирических данных вычисляются значения критериев Gr, Pr, Nu и устанавливается эмпирическая функциональная зависимость типа (3.16). Забегая вперед, заметим, что для явлений естественной конвекции часто удается получить эту зависимость в более простом виде, а именно:

$$Nu = F_1(Gr \cdot \mathrm{Pr}) \qquad (3.18)$$

т.е. вместо двух аргументов (Gr,Pr) можно, как показывает опыт, в данном случае обойтись одним аргументом (Gr·Pr).

Допустим, что произведение критериев Gr·Pr изменялось в рассматриваемых опытах в диапазоне $1 \le Gr \cdot \Pr \le 10^3$.

Покажем, что формулу (3.18) можно применить для большого числа иных (нежели изучаемого) случаев теплообмена проволоки, т.к. величину комплекса Gr·Pr в пределах от 1 до 10^3 можно получить при самых различных значениях параметров, входящих в критерии Gr и Pr. Сопоставим значения критериев для неограниченного цилиндра $d = 5\text{ мм} = 5 \cdot 10^{-3} м$ в воздухе и водороде, если температура среды $t_c = 50°C$, а цилиндра $t = 150°C$. Значения параметров β,ν будем находить для средней температуры $t_m = 0{,}5(t + t_c) = 100°C$.

Тогда для воздуха $\nu = 2{,}3 \cdot 10^{-5} м^2 / c$ и

$$Gr = \frac{9{,}81(5 \cdot 10^{-3}) \cdot 100}{373(2{,}3)^2 \cdot 10^{-10}} = 590; \quad \Pr = 0{,}688; \quad \mathrm{Gr} \cdot \Pr = 400.$$

Для водорода $\nu = 15{,}7 \cdot 10^{-5} м^2 / c$ и

$$Gr = \frac{9{,}81(5 \cdot 10^{-3}) \cdot 100}{373(15{,}7)^2 \cdot 10^{-10}} = 12{,}7; \quad \Pr = 0{,}677; \quad \mathrm{Gr} \cdot \Pr = 8{,}6.$$

Если опыты проводились только в воздухе с цилиндрами разных диаметров и при этом произведение Gr·Pr изменялось в пределах от 1 до 10^3, то полученные результаты можно использовать для расчета комплекса *Nu* для цилиндра *d=5мм* в водородной среде, т.к. значение Gr·Pr не выходит за пределы, полученные в опытах с воздухом. В частности, меняя температуры t и t_c или диаметр цилиндра, можно подобрать значение Gr·Pr=400. Если будет известен вид функциональной зависимости (3.18), то можно рассчитать критерий *Nu*, а затем из (3.18) определить значение коэффициента теплообмена для рассматриваемых цилиндров в воздушной и водородной средах.

Итак, показана возможность обобщения результатов отдельных опытов. Следует помнить, что в нашем частном примере критериальная зависимость (3.18) справедлива для значений аргументов $1 \le Gr \cdot \Pr \le 10^3$ и ее нельзя использовать в расчетах α, например, при $Gr \cdot \Pr = 10^5$. Этим определяются границы применимости эмпирической формулы.

Следовательно, теория дает возможность ответить на следующие важные вопросы, возникающие при планировании эксперимента, обработке опытных данных и использовании эмпирических результатов: какие величины надо измерять в опыте; как обрабатывать результаты опыта; в каких пределах можно пользоваться полученной эмпирической зависимостью.

Покажем на примере отличие качественно одинаковых и неодинаковых физических процессов. Естественная конвекция между твердой поверхностью и различными жидкими и газообразными средами

(воздух, водород, вода, спирт, трансформаторное масло, нефть и т.д.) составляют группу качественно одинаковых физических процессов, поскольку на границе тело-среда и в самой среде происходят одинаковые физические процессы.

Приведем примеры качественно различных физических явлений. В одном случае поверхность имеет одинаковую температуру, а в другом – поверхность не изотермична. Другой пример: одна жидкость химически не реагирует со стенкой, а другая является агрессивной средой по отношению к материалам твердой стенки и т.д.

3.6. Обработка результатов опыта

Для изучения способов построения критериальных зависимостей по конвективному теплообмену рассмотрим некоторые примеры, входящие в критерии подобия, а именно: определяющую температуру и определяющий размер.

Критерии подобия включают в себя параметры, существенно зависящие от температуры (ν,λ,γ и т.д.).

При естественной конвекции происходит изменение температуры жидкости от температуры стенки t_w до температуры среды t_c в области, удаленной от стенки. В некоторых случаях температура жидкости меняется не только в поперечном сечении, но и по длине потока. Поэтому в технических расчетах принято выбирать значения параметров при некотором осредненном значении температуры, названном определяющей температурой.

В процессах с естественной конвекцией в качестве определяющей температуры t_m часто используется среднеарифметическое значение температур стенки t_w и среды t_c, т.е. $t_m = 0{,}5(t_w + t_c)$. При вынужденной конвекции производится расчет определяющей температуры как по сечению (осреднение по площади, осреднение по объемному расходу, осреднение по теплосодержанию), так и по длине. Если некоторую осредненную по сечению температуру на входе потока обозначить t_c', а на выходе - t_c'', то в качестве средней температуры жидкости можно брать среднеарифметическое значение по длине, а именно:

$$t_c = 0{,}5(t_c' + t_c'') \qquad (3.18)$$

Однако такие способы осреднения допустимы лишь для грубой оценки при малых изменениях температуры потока. Более строгое осреднение может быть произведено при наличии данных об изменении скорости потока и температуры в поперечном и продольном направлениях, исходя их физических свойств жидкости и требуемой точности. Как указывалось ранее, коэффициент конвективного теплообмена должен зависеть и от геометрических свойств тела, причем при анализе разнообразных случаев

теплообмена чисто геометрических параметров, существенно влияющих на процесс, может существенно изменяться. Однако даже в простейших случаях, когда число геометрических параметров невелико (один, два), возникают трудности с выбором именно тех параметров, которые оказывают наибольшее влияние на процесс. Например, для круглой трубы, по которой протекает жидкость, будет существенным выбрать в качестве определяющего размера диаметр *d* трубы. Для каналов сложного сечения (прямоугольного, неправильного сечения и т.д.) в качестве определяющего размера обычно выбирают эквивалентный диаметр, равный

$$d_{эк} = \frac{4A}{U},$$

где A – площадь поперечного сечения канала; U - полный периметр сечения, независимо от того, какая часть этого периметра участвует в теплообмене.

При обтекании пластины в качестве определяющего размера выбирается длина пластины по направлению движения. При исследовании теплообмена в более сложных геометрических системах в критериальное уравнение обычно вводят симплексы $d_1/d_0, d_2/d_0, \ldots$, где d_0 - определяющий размер системы, а d_1, d_2 - длина тела, шероховатость т.д.

Рассмотрим теперь практический способ получения критериальной зависимости. Пусть изучаемое явление описывается тремя критериями: K_1, K_2 и K_3; требуется установить вид зависимости

$f(K_1, K_2, K_3) = 0.$

Представим последнее уравнение в виде

$$K_1 = \varphi(K_2, K_3) \qquad (3.19)$$

и на основании обработки данных опыта определим вид функциональной зависимости φ. Пусть опытные данные представлены в виде зависимостей параметра K_1 от K_2 при фиксированных значениях K_3. Эти зависимости можно представить графически в виде семейства кривых (рис.3.2). Необходимо подобрать аппроксимационную формулу, которая аналитически способна описать полученное семейство кривых.

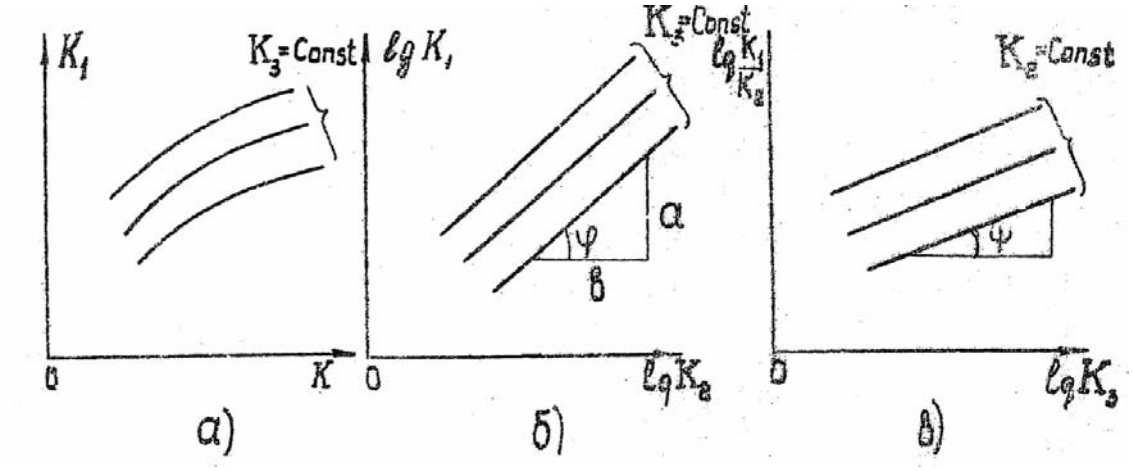


Рис. 3.2. Обработка экспериментальных данных для получения критериальных зависимостей

В основу такой формулы можно положить различные функциональные зависимости (степенную, показательную, логарифмическую и т.д.). Характерной особенностью зависимостей по конвективному теплообмену является монотонное изменение искомого параметра при изменении других параметров. Монотонное изменение какой либо величины хорошо аппроксимируется степенными функциями

$$K_1 = CK^n{}_2K^m{}_3, \qquad (3.20)$$

Где *c, m, n* – постоянные числа.

Степенные зависимости являются достаточно гибкими и позволяют подбором чисел *c, m, n* описать практически любые монотонные изменения искомого параметра.

При графическом представлении функции (3.20) в логарифмических координатах получается семейство прямых линий (рис.3.2)

$$\lg K_1 = \lg C + n\lg K_2 + m\lg K_3. \qquad (3.21)$$

Показатель *n* при критерии K_2 определяется по одной из прямых (например, K_3): он равен тангенсу угла наклона прямой линии к оси абсцисс:

$$n = tg\varphi = \frac{a}{b},$$

где φ – угол наклона прямой на рис.3.2, *a* и *b* – катеты прямоугольного треугольника.

Представим теперь зависимость (3.21) в виде

$$\lg\frac{K_1}{K^n{}_2} = \lg C + m\lg K_3 \qquad (3.22)$$

и из графика рис.3.2 определим показатель степени *m* при критерии K_3:

m=tgψ;

Постоянную *C* найдем из уравнения (3.22), преобразовав его к виду

$$C = \frac{K_1}{K_2{}^n K_3{}^m}.$$

Аналогичным способом можно установить и более сложные зависимости. Если опытные точки на графиках располагаются в логарифмических координатах по кривой, то эту кривую обычно заменяют ломаными прямыми. Для отдельных участков такой кривой значения *c, m, n* различны.

Глава 4. Критериальные формулы конвективного теплообмена

4.1. Свободное движение жидкости в неограниченном пространстве

Сопоставляя и обобщая на основе теории подобия обширный экспериментальный материал по теплообмену при естественной конвекции в неограниченном пространстве, исследователи предложили общую зависимость для коэффициента теплообмена тел с одним определяющим размером (вертикальные плиты, бесконечно длинные проволоки, трубы и шары). Приведём получившие большое распространение формулу, предложенную акад. М.А. Михеевым.

$$Nu_m = C(Gr \cdot \mathrm{Pr})_m^n \qquad (4.1)$$

где c и n – эмпирические коэффициенты, а индекс m указывает, что значения физических параметров λ, a, ν, β газа или жидкости следует выбирать для средней температуры t_m рассчитываемой по формуле $t_m = 0{,}5(t_w + t_c)$. Постоянные c и n в формуле (4.1) зависят от величины аргумента $(Gr \cdot \mathrm{Pr})$. Их значения приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

(Gr·Pr)m	C	n	Режим движения
$1 \cdot 10^{-3}$	0.50	0.00	плёночный
$1{,}1 \cdot 10^{-3}$ -$5 \cdot 10^{2}$	1.18	1/8	переходный к ламинарному
$5 \cdot 10^{2}$ -$2 \cdot 10^{7}$	0.54	1/4	ламинарный
$2 \cdot 10^{7}$ -$1 \cdot 10^{13}$	0.135	1/3	турбулентный

В табл. 4.2 и 4.3 приведены соответственно физические параметры воды на линии насыщения сухого воздуха при давлении H=760 мм.рт.ст.

Физические параметры воды на линии насыщения Таблица 4.2

t°C	γ, кг/$м^3$	C_p,Дж/кг·К	λ, вт/$м^2 \cdot$К	ν $\cdot 10^6$ $м^2$/с	β,10^{-3},1/К	Pr
0	999,9	4230	0,552	1,790	-0,63	13,7
10	999,6	4220	0,575	1,306	0,70	9,56
20	998,2	4210	0,600	1,006	1,82	7,06
30	995,6	4200	0,618	0,805	3,21	5,5
40	992,2	4200	0,635	0,659	3,87	4,3
50	998,0	4200	0,647	0,556	4,49	3,56
60	983,2	4210	0,660	0,478	5,3	3,00
70	977,7	4220	0,667	0,415	5,8	2,56
80	971,8	4220	0,674	0,366	6,3	2,23

90	965,3	4225	0,680	0,326	7,0	1,95
100	958,3	4230	0,682	0,295	7,5	1,75

Физические параметры сухого воздуха при Н=760 мм рт. ст. Таблица 4.3

t°C	γ, кг/ $м^3$	C_p,Дж/кг·К	$\lambda \cdot 10^2$, вт/ $м^2 \cdot$К	$\nu \cdot 10^6$ $м^2$/с	Pr
-50	1,584	1010	2,04	9,23	0,728
-20	1,395	1010	2,28	12,79	0,716
0	1,293	1000	2,44	13,28	0,707
10	1,247	1000	2,51	14,16	0,705
20	1,205	1000	2,60	15,06	0,703
30	1,165	1000	2,68	16,00	0,701
40	1,128	1000	2,76	16,96	0,699
50	1,093	1000	2,83	17,95	0,698
60	1,060	1000	2,90	18,97	0,696
70	1,029	1000	2,97	20,02	0,694
80	1,000	1000	3,05	21,09	0,692
90	0,972	1000	3,13	22,10	0,690
100	0,946	1000	3,21	23,13	0,688
120	0,898	1000	3,34	25,45	0,686

По величине коэффициента *c* и *n* различают четыре случая теплообмена, соответствующие четырем режимам движения:

1) так называемый пленочный режим, при котором у поверхности образуется практически неподвижная пленка нагретой жидкости (*c*=0,5; n=0):

$$Nu_m = 0{,}5; \quad \alpha = 0{,}5\frac{\lambda}{L}, \tag{4.2}$$

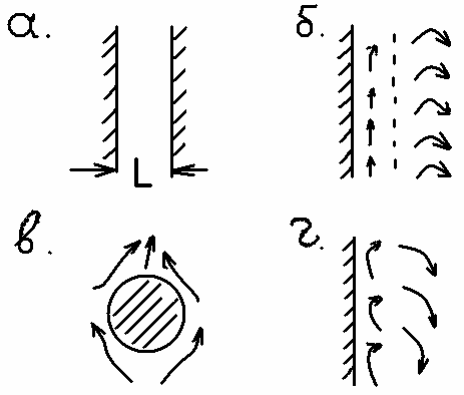


Рис.4.1. Характер теплообмена при различных режимах

В этом случае коэффициент теплообмена прямо пропорционален теплопроводности среды. Такой режим неустойчив и наблюдается у тел с плавными очертаниями при небольших температурных напорах (рис. 4.1, а);

2) при $5\cdot10^{2} > (Gr\cdot \mathrm{Pr}) > 10^{-3}\,a)$ наступает переходный режим, у стенок тела образуется пограничный слой, в котором наблюдается слабое ламинарное движение (рис. 4.1, б), в данном случае c =1,18, n =1/8;

3) при $2\cdot10^{7} > (Gr\cdot \mathrm{Pr}) > 5\cdot10^{2}$ устанавливается основной ламинарный режим движения; здесь c =0,54, n =1/4 (закон 1/4). Такой режим движения жидкости наступает около омываемых плоскостей, цилиндров и шаров, размеры которых изменяются в пределах от нескольких сантиметров до десятков сантиметров при средних температурных напорах $(10 < \Delta t < 200K)$ (рис. 4.1, в);

4) наконец, при $10^{13} > (Gr\cdot \mathrm{Pr}) > 2\cdot10^{7}$, c=0,135, n=1/3 наступает вихревой турбулентный режим движения жидкости или газа (рис. 4.1, г) (закон 1/3) интенсивным теплообменом.

Заметим, что формула (4.1.) получена на основании обобщения опытов, проводящихся в различных средах (воздух, водород, углекислота, глицерин, вода, различные масла и др.), с разнообразными объектами исследования (горизонтальные и вертикальные проволоки, трубы, плиты, шары), размеры которых изменялись в широких пределах (от проволок с L=1,55 мм до шаров с L=16 мм).

При вычислении критериев подобия за определяющий размер принимался для труб и шаров их диаметр d, а для плит – их высота h. Данные всех опытов хорошо укладываются на ломаную кривую рис. 4.2.

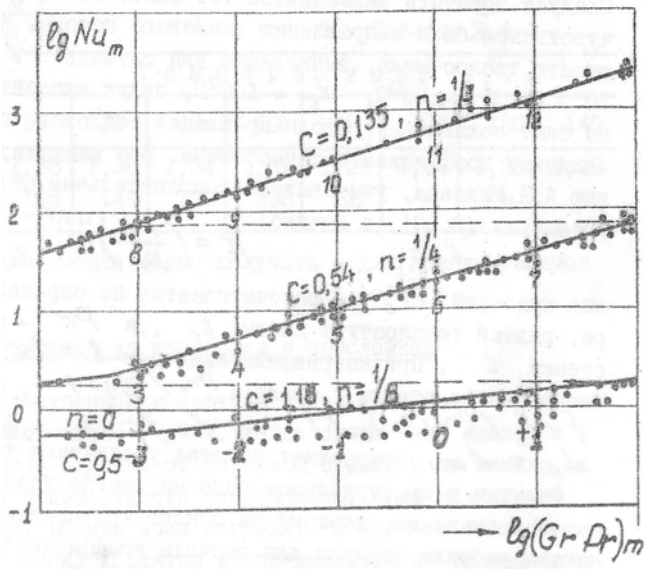


Рис. 4.2. Критериальные зависимости при свободном движении

Тот факт, что данные, полученные из опытов с телами разнообразной формы в критериальных координатах укладываются на одну кривую,

позволяет сделать следующий вывод: форма тела слабо влияет на характер теплообмена при естественной конвекции; режим движения жидкости, в основном, определяется размером тела, свойствами среды и температурным напором.

Рассмотрим подробнее структуру выражения (4.1) для случая вихревого движения, т.е. n =1/3:

$$\frac{\alpha L}{\lambda_m} = c\left(\frac{\beta g}{\nu^2}\cdot\frac{\nu}{a}\right)_m^{1/3}(L^3)^{1/3}(t-t_c)^{1/3}$$

или

$$\frac{\alpha L}{\lambda_m} = c\left(\frac{\beta g}{\nu^2}\cdot\frac{\nu}{a}\right)_m^{1/3}(t-t_c)^{1/3}.$$

Можно заметить, что в этом режиме коэффициента теплообмена не зависит от размеров тела. Такой процесс называют автомодельным. Исследования показали, что формула (4.1) может использоваться и для расчета коэффициента теплообмена горизонтальных плит. В этом случае за определяющий размер берется не высота, а меньшая сторона плиты. Расчетная величина коэффициента теплообмена увеличивается на 30%, если поверхность теплообмена обращена вверх, и уменьшается на 30%, если поверхность теплообмена обращена вниз, т.е. $(Nu_{\text{в}})_m = 1{,}3(Nu)_m$; $(Nu_{\text{н}})_m = 0{,}7(Nu)_m$.

Следует обратить внимание на тот факт, что формула (4.1) не чувствительна к направлению теплового потока. Например, коэффициент теплообмена, вычисление для случаев $t = 100\,^{\circ}\text{C}$, $t_c = 20\,^{\circ}\text{C}$ и $t_c = 20\,^{\circ}\text{C}$, $t = 100\,^{\circ}\text{C}$, будут численно равными. Однако опыт показывает, что направление теплового потока влияет на величину коэффициента теплообмена. Это влияние, по предложению М.А.Михеева, учитывается дополнительным множителем K в уравнении (4.1), а именно:

$$K = \left(\frac{\text{Pr}_c}{\text{Pr}_w}\right)^{0{,}25}, \qquad (4.3)$$

где критерии Pr_c – рассчитывается по определяющей температуре, равной температуре среды t_c, Pr_w – для температуры стенки t_w. При нагревании жидкости $t > t_c$ тепловой поток направлен от стенки к среде $(\text{Pr}_c/\text{Pr}_w) > 1$, а при охлаждении $t < t_c\left(\text{Pr}_c \big/ \text{Pr}_w\right)_{\text{охл}} < 1$, т.е. $\alpha_{\text{н}} > \alpha_{\text{охл}}$, причем разность $\alpha_{\text{н}}$ и $\alpha_{\text{охл}}$ возрастает по мере увеличения температуры.

Формулы в критериальном виде не всегда удобны для практического применения, поэтому на основе критериальных формул составляются рабочие формулы для расчета коэффициента теплообмена. Например, если для плоской и цилиндрической поверхности выполняется условие

$$|t - t_c| \le \left(\frac{840}{L}\right)^3, \qquad (4.4)$$

То движение жидкости подчиняется закону ¼ степени. Здесь L – определяющий размер тела в миллиметрах.

Рассмотрим следующие рабочие формулы для расчета конвективного коэффициента теплообмена при законе n =¼ для вертикально ориентированной поверхности высотой h (в метрах).

$$\alpha = A_2\left(\frac{t-t_c}{h}\right)^{1/4} \qquad \text{Вт/м}^2\,\text{К}; \qquad (4.5)$$

Для горизонтально ориентированной поверхности, обращенной нагретой стороной вверх,

$$\alpha = 1{,}30A_2\left(\frac{t-t_c}{L}\right)^{1/4} \qquad \text{Вт/м}^2\,\text{К},$$

где L – наименьшая сторона поверхности в метра;
для горизонтально ориентированной поверхности, обращенной нагретой стороной вниз,

$$\alpha = 0{,}70A_2\left(\frac{t-t_c}{L}\right)^{1/4} \qquad \text{Вт/м}^2\,\text{К}.$$

В коэффициент A_2 вошли все физические параметры среды:

$$A_2 = 0{,}54(\beta g\,\text{Pr})_m^{1/4}\frac{\lambda_m}{\nu_m^{0,5}} \qquad \text{Вт/м}^{7/4}\,\text{К}^{5/4}.$$

Значения A_2 для воздуха и воды, рассчитанные по этой формуле, приведенные в табл. 4.4.

Среда tºС	Температура, ºС								
	10	20	30	40	60	80	100	120	140
Воздух	1,40			1,34					
Вода	90	1,38	1,36	1,10	1,17	1,13	1,07	1,00	1,00
		105	1,15		1,08	1,06	1,03		

Аналогичные зависимости можно получить и для других режимов теплообмена.

4.2. Естественная конвекция в прослойках

При анализе естественной конвекции в неограниченном пространстве, рассматривались такие случаи, когда охлаждение жидкости или газа происходило вдалеке от нагретой стенки и не влияло на характер движения у поверхности теплообмена. Если охлаждение жидкости происходит вблизи зоны нагрева, то процесс теплообмена принимает более

сложный характер и определяется не только физическими свойствами жидкости и температурной стенок, но и формой и размерами пространства. В вертикальных щелях значительной ширины восходящие и нисходящие потоки отделены друг от друга, и траектория движения жидкости определяется контурами щели (рис. 4.3,а).

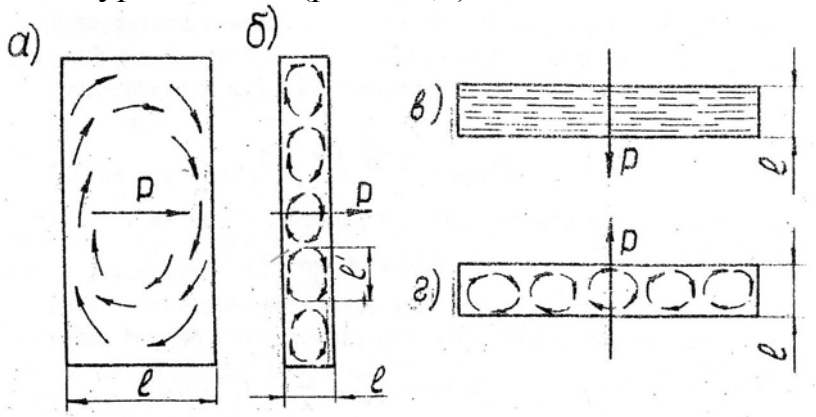


Рис. 4.3. Естественная конвекция в плоских прослойках

При малых размерах взаимодействие восходящих и нисходящих потоков приводит к возникновению циркулярных контуров, размеры которых меньше габаритов щели и определяются родом жидкости, ориентацией щели и интенсивностью процессов теплообмена (рис. 4.3, б). В горизонтальных щелях характер конвекционных потоков определяется взаимным расположением поверхностей с различной температурой, расстоянием между ними и вязкостью жидкости. Если более нагретая поверхность расположена сверху, то циркуляционные токи не возникают (рис.4.3,в). если нагретая поверхность расположена внизу, в щели возникают циркуляционные токи (рис. 4.3, г).

В шаровых и горизонтальных цилиндрических прослойках характер конвективных токов также зависит от размера прослойки и направления теплового потока (рис. 4.4).

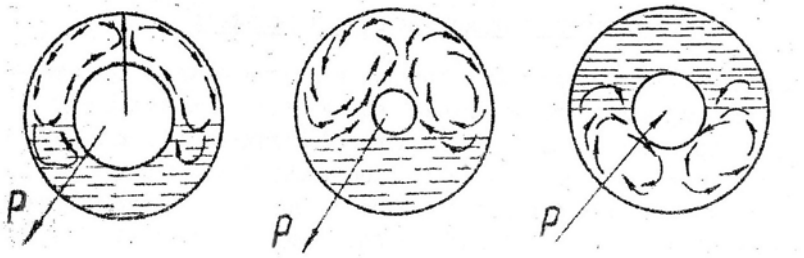


Рис. 4.4. Естественная конвекция в цилиндрических прослойках.

На рис. 4.5 представлен процесс естественной конвекции внутри прибора с источником энергии; этот случай занимает промежуточное положение между процессами конвекции в ограниченном и неограниченном пространствах.

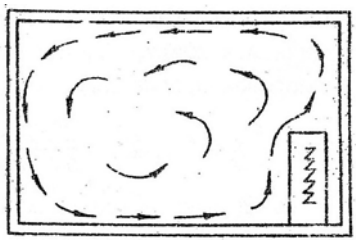


Рис. 4.5. Естественная конвекция в приборе

Сложный процесс теплообмена в ограниченном пространстве принято рассматривать по аналогии с передачей тепла путем теплопроводности, что позволяет избежать определения коэффициентов теплообмена с нагретой и холодной поверхностей. С этой целью вводится понятие об эквивалентном коэффициенте теплопроводности $\lambda_{эк}$ среды между теплообменивающимися поверхностями. Процесс теплообмена принято описывать с помощью критериального уравнения

$$\varepsilon_K = f(Gr \cdot \mathrm{Pr})_f , \qquad (4.6)$$

$$\varepsilon_K = \lambda_{эк} / \lambda_{\mathrm{f}} ,$$

где ε_K - коэффициент конвекции, λ_{f} - коэффициент теплопроводности жидкости в прослойке при среднеарифметической температуре стенок.

Найдём связь между коэффициентом конвекции ε_K и коэффициентом теплопередачи К, который связан с мощностью Р и разностью температур зависимостью

$$P = K(t_1 - t_2)S . \qquad (4.7)$$

Представим тепловой поток для прослоек различной формы:

для плоской прослойки толщиной δ

$$P = \lambda_{эк} \frac{t_1 - t_2}{\delta} S ;$$

для цилиндрической прослойки, внутренний и наружный диаметр который d_1, d_2,

$$P = \frac{\lambda_{эк} \cdot 2(t_1 - t_2)}{d_1 \ln d_2 / d_1} S_1 ,$$

где $S_1 = \pi d_1 \ell$ - поверхность внутреннего цилиндра;

для шаровой прослойки

$$P = \lambda_{эк} \frac{(t_1 - t_2)}{\frac{d_1}{d_2}\delta} 2S_1 ,$$

где d_1, d_2 - диаметры внутреннего и наружного шаров, S_1 - поверхность внутреннего шара.

Сопоставляя формулы для потока P в прослойках с формулами (4.7), (4.6), получим выражение для коэффициента теплопередачи K в прослойке различной конфигурации (i = п,ц,ш – плоская, цилиндрическая, шаровая прослойки).

$$K_n = \frac{\varepsilon_K \lambda_f}{\delta}; \quad K_ц = \frac{2\varepsilon_K \lambda_f}{d_1 lr \,/\, d_2 / d_1}; \qquad K_ш = \frac{2\varepsilon_K \lambda d_2}{\delta d_1}. \tag{4.8}$$

Значения коэффициента конвекции определяют из критериальных уравнений типа (4.6). Для неограниченных плоских, цилиндрических, а также шаровых прослоек можно рекомендовать следующие приближенные зависимости.

$$\begin{aligned} &Gr \cdot \mathrm{Pr} < 1000, && \varepsilon_K = 1; \\ &(Gr \cdot \mathrm{Pr}) > 10^3, && \varepsilon_K = 0{,}18(Gr \cdot \mathrm{Pr})^{0{,}25}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Последнюю формулу приведём к виду

$$\varepsilon_K = A_ц \delta \sqrt[4]{\frac{\Delta t}{\delta}}; \qquad A_ц = 0{,}18 \frac{(\beta g \,\mathrm{Pr})}{\nu^{0{,}5}}, \; 1 \,/\, м^{3/4} K^{1/4}.$$

Подставив в эту формулу физические параметры сухого воздуха при атмосферном давлении, можно заметить, что в температурном интервале 0 + 1000 ºС произведение

$$A_ц \cdot \lambda_f = 0{,}45 \quad Вт \,/\, м^{7/4} \cdot K^{5/4}.$$

Этот факт позволяет упростить выражение для коэффициента теплопередачи через воздушные прослойки и представить его в следующей форме:

$$K = 0{,}45 \sqrt[4]{\frac{t_1 - t_2}{\delta}}; \qquad K = \frac{0{,}9\delta}{d_1 \ln d_2 / d_1} \sqrt[4]{\frac{t_1 - t_2}{\delta}} \qquad Вт/м^2 К. \tag{4.10}$$

4.3. Вынужденное продольное движение жидкости

Пусть внешняя поверхность тела омывается потоком жидкости, имеющем на удалении от тела скорость v. Эта скорость по сечению потока остается неизменной, лишь у самой поверхности наблюдается резкое её изменение в пограничном слое. Различают три режима движения жидкости – ламинарный, турбулентный и переходный. Последний, занимает малую область и обычно переход из ламинарного движения в турбулентный происходит сразу, как только скорость достигает критического значения.

Коэффициенты теплообмена при вынужденном движении жидкости представляется обычно в виде зависимости между критериями Нуссельта Nu_f, Рейнольдса Re_f и Прандтля Pr_f или Pr_W:

$$Nu_f = \frac{\alpha}{\lambda_f}\ell, \quad \mathrm{Re}_f = \frac{\mathrm{v}\ell}{\nu_f}, \qquad \mathrm{Pr}_f = \frac{\nu_f}{a_f}, \qquad \mathrm{Pr}_W = \frac{\nu_W}{a_W}, \tag{4.11}$$

где индексы f и w означают, что соответствующие параметры рассматриваются при температурах жидкости (f) и стенки (w), l - длина тела по направлению потока.

Переход от ламинарного течения к турбулентному определяется критическим значением числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр}$. Если при движении жидкости вдоль плоской стенки её температура изменяется (неизотермические условия), то $\mathrm{Re}_{кр} = 4 \cdot 10^4$.

Ламинарное движение жидкости. При ламинарном движении жидкости, т.е. при $\mathrm{Re}_f < 4 \cdot 10^4$, критериальное уравнение для среднего коэффициента теплообмена имеет следующий вид:

$$Nu_f = 0{,}66\,\mathrm{Re}_f^{0{,}50}\,\mathrm{Pr}_f^{\,0{,}43}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_W}\right)^{0{,}25} \qquad (4.12)$$

За определяющую температуру здесь принята температура набегающего потока t_f, за определяющий размер – теплоотдающая длина стенки ℓ по направлению потока. Влияние физических свойств жидкости и их зависимости от температуры учитываются в формуле (4.12) параметром $\mathrm{Pr}_f^{0{,}43}$, а влияние направления теплового потока (от жидкости к стенке или наоборот) и температурного напора – параметром $\left(\mathrm{Pr}_f \big/ \mathrm{Pr}_W\right)^{0{,}25}$.

Для воздуха в широком интервале температур (0 – 1000ºС) можно считать $\mathrm{Pr}_f = \mathrm{Pr}_W = 0{,}70$, а $\left(\mathrm{Pr}_{f,W}\right)^{0{,}43} = 0{,}86$ и формулу (4.12) записать в виде

$$Nu_f = 0{,}57\sqrt{\mathrm{Re}_f} \qquad (4.13)$$

Зависимость (4.13) представлена ниже в форме, удобной для практических расчетов:

$\mathrm{Re}_f 10^{-3}$...	5	10	15	20	25	30	40	50	60	80
Nu_f	41	56	68	81	90	100	115	127	140	160

Расчет коэффициента теплообмена целесообразно проводить в следующем порядке. По формуле (4.11) находят критерии Re_f, $\mathrm{Pr}_f, \mathrm{Pr}_W$; если $\mathrm{Re}_f < 4 \cdot 10^4$, то по формуле (4.12), а для воздуха по формуле (4.13) определяют значение критерия Nu_f и далее – коэффициента теплообмена

$$\alpha = Nu_f \frac{\lambda_f}{\ell}.$$

Параметры ν_f, λ_f и a_f для воды и воздуха берут из таблиц 4.2 и 4.3; для других видов жидкостей значения этих параметров приведены в литературе.

Турбулентное движение жидкости. При значениях критерия Рейнольдса, превышающих критическое или равное ему ($\mathrm{Re}_f \geq 4 \cdot 10^4$), критериальное уравнение для среднего коэффициента теплообмена имеет вид:

$$Nu_f = 0{,}037\,\mathrm{Re}_f^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}_f^{0{,}43}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_W}\right)^{0{,}25} \qquad (4.14)$$

Уравнение (4.14) для воздуха принимает более простой вид –

$$Nu_f = 0{,}032\,\mathrm{Re}_f^{0,8}. \qquad (4.15)$$

Определяющая температура и определяющий размер – те же, что и в предыдущем случае. Зависимость (4.15) представлена ниже в форме, удобной для расчетов:

$\mathrm{Re}_f 10^{-5}$...	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
$Nu_f 10^{-2}$ …	3,20	4,42	5,70	7,87	9,66	11,6	13,4	15,0	17,2

Приведённые выше формулы были получены при исследовании теплообмена плоской горизонтальной плиты, омываемой потоком жидкости. В приближенных расчетах можно использовать эти формулы и для определения теплообмена цилиндрических поверхностей, омываемых продольным потоком жидкости.

4.4. Вынужденное поперечное движение воздуха

Исследованиями было проделано большое число опытов по определению коэффициента теплообмена тел различной формы, омываемых поперечным потоком воздуха.

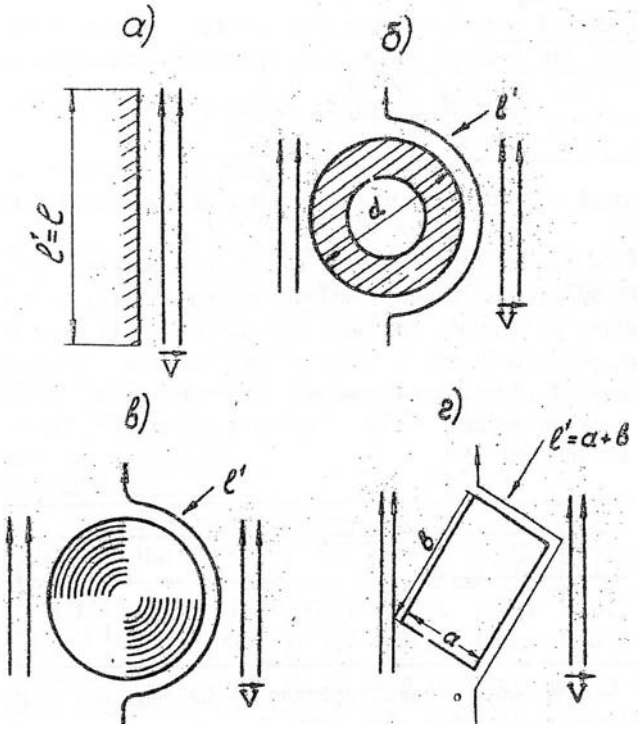


Рис. 4.5. К единому подходу в выборе определяющего размера

Для тел разнообразной конфигурации целесообразно ввести характерный размер, определяемый по какому-нибудь единому принципу. Обычно в качестве характерного размера плоской плиты предложено считать её длину в направлении омывающего потока, а для шара и цилиндра – их диаметр; единства подхода в выборе определяющего размера нет. Это неудобство О. Кришер рекомендует избежать следующим образом: в

качестве характерного размера выбирается длина обтекания ℓ' тела потоком жидкости. Длина обтекания для цилиндра и шара составляет $\ell' = 0{,}5\pi d$, а для пластины – $\ell' = \ell$. Метод определения длины обтекания ℓ' ясен также из рис. 4.5.

Если в качестве характерного размера рассматривать ℓ', то в критерии Рейнольдса и Нуссельта примут вид

$$\mathrm{Re}_{\ell'} = \frac{\mathrm{v}\ell'}{\nu_f}, \qquad Nu_{\ell'} = \frac{\alpha\ell'}{\lambda_f} \tag{4.16}$$

При значении критерия Рейнольдса $10 < \mathrm{Re}_{\ell'} < 10^5$ критериальное уравнение для теплообмена тел, омывающих поперечным потоком воздуха, с ошибкой не более 20% может быть представлено в виде

$$Nu_{\ell'} = 0{,}8\sqrt{\mathrm{Re}_{\ell'}} \tag{4.17}$$

Формулу (4.17) можно использовать также для оценки коэффициента теплообмена тел, находящихся в замкнутом пространстве и омываемых поперечным потоком воздуха. Определяющий размер в этом случае равен ℓ', а скорость движения воздуха около тела рассчитывается по формуле

$$\mathrm{v} = \frac{G}{A_{cp}}, \tag{4.18}$$

где G - объемный расход жидкости, протекающий через ограниченное пространство, A_{cp} - площадь среднего сечения потока, т.е. средняя площадь между телом и ограничивающей его оболочкой (корпусом).

4.5. Вынужденное движение жидкости в трубах

Вынужденное движение в трубах создается внешними возбудителями-насосами и вентиляторами. Скорость потока в трубе изменяется по сечению – у стенки она меньше, чем в ядре. Если поперечное сечение трубы f, а расход жидкости G постоянный, то среднерасходная скорость v равна $\mathrm{v} = \frac{G}{f}$.

Режим движения жидкости в трубе может быть ламинарным ($\mathrm{Re}_f = \frac{\mathrm{v}d}{\nu_f} < 2200$), переходным ($2200 < \mathrm{Re}_f < 10^4$) и турбулентным ($\mathrm{Re}_f < 10^4$).

Турбулентный режим. Рабочая формула для расчета коэффициента теплообмена при течении жидкости в круглой трубе имеет вид

$$\alpha = z\frac{V^{0,8}}{d^{0,2}}\varepsilon_t\varepsilon_L\varepsilon_R,$$

$$z = 0{,}023\lambda\,\mathrm{Pr}^{0,4}\frac{1}{\nu^{0,4}} \tag{4.19}$$

Определяющей температурой является средняя температура жидкости

$$t_f = 0{,}5(t'+t''),$$

t' и t'' - температуры жидкости на входе и на выходе.

При турбулентном режиме коэффициент теплообмена по длине трубе не одинаков: среднее его значение для коротких труб выше, чем у длинных. Последнее обстоятельство учитывается поправочным коэффициентом $\varepsilon_L \geq 1$, зависящим как от величины числа Рейнольдса, так и от отношения ℓ / d (длины к диаметру). Значения ε_L берутся из таблицы 4.5

Таблица 4.5

Re	Геометрия трубы (ℓ / d)							
	1	2	5	10	15	20	30	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,50	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,00
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,00

ε_t-поправка на неизотермичность потока. Для газа $\varepsilon_t = \left(\frac{T_f}{T_W}\right)^{0,55}$, где T_f и T_W - средние абсолютные температуры газа и стенки. Для воды $\varepsilon_t = 1$.

При движении жидкости в изогнутых трубах увеличивается турбулентность центробежного эффекта, следовательно, коэффициент теплоотдачи в изогнутых трубах выше, чем в прямых. Этот эффект учитывает поправка $\varepsilon_R = 1 + 1{,}8\frac{d}{R}$,

где d-диаметр трубы; R - радиус закругления.

При расчете труб некруглого сечения вводится понятие эквивалентного диаметра.

Ламинарный режим. При ламинарном режиме движения жидкости внутри трубы теплоотдача определяется факторами как вынужденного, так и свободного движения, поэтому в формулах фигурируют критерии, характеризующие как вынужденное (Re), так и свободное (Gr) движения жидкости. Для определения коэффициента теплообмена рекомендуется следующая формула:

$$Nu_{\ell'} = 0{,}15\sqrt[3]{\mathrm{Re}_f}\, Gr^{0,1}\, \mathrm{Pr}^{0,43}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_W}\right)^{0,25} \varepsilon'_L\, \varepsilon_R, \qquad (4.20)$$

ε' находится по табл. 4.6.

Таблица 4.6

ℓ / d	1	2	5	10	15	20	30	50
ε'_L	1,90	1,70	1,44	1,28	1,17	1,13	1,05	1,00

Для воздуха формула упрощается:

$$Nu_{\ell'} = 0{,}13\sqrt[3]{\mathrm{Re}_f}\, Gr^{0,1} \varepsilon'_L\, \varepsilon_R. \qquad (4.21)$$

Переходный режим. В этом случае теплообмен зависит от многих обстоятельств и может существенно изменяться в зависимости от критерия Re_f. Для переходного режима можно предложить следующую формулу:

$$Nu_f = K \cdot M, \qquad (4.22)$$

где K-безразмерный параметр, зависящий от критерия Рейнольдса

$$K = K(\mathrm{Re}_f).$$

Эта зависимость представлена в табл. 4.7.

Таблица 4.7

$\mathrm{Re}_f \cdot 10^{-3}$	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	3	4	5	6	8	10
K	1,9	2,2	3,3	3,8	4,4	6,0	10,3	15,5	19,5	27,0	33,3

Параметр M определяется по формуле

$$M = \mathrm{Pr}_f^{0,43}\left(\frac{\mathrm{Pr}_f}{\mathrm{Pr}_W}\right)^{0,25}.$$

При движении жидкости в трубках на процесс теплообмена может оказывать влияние шероховатость поверхности. При ламинарном режиме или турбулентности, когда высота неровностей δ меньше толщины ламинарного подслоя $\delta_{ЛП}$, бугорки шероховатости не нарушают течения и обтекаются без отрыва и вихреобразований. При этом нет никакой разницы между гладкой и шероховатой трубами, а отдаваемый тепловой поток может увеличиваться только за счет большей поверхности теплообмена шероховатой стенки (эффект оребрения). При турбулентном режиме течения, когда $\delta > \delta_{ЛП}$, шероховатость начинает сказываться на теплоотдаче и гидравлическом сопротивлении; при этом в зависимости от соотношения величин $\mathrm{Re}, \frac{\delta}{d}, \frac{S}{d}$ (S – среднее расстояние по потоку между соседними бугорками) коэффициент теплообмена может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Глава 5. Аналитические методы решения простейших задач конвективного теплообмена

5.1. Математическая модель вынужденного неизотермического течения

Изотермическое течение жидкости происходит при одинаковой температуре во всех ее точках, при неизотермическом течении температура жидкости различна. В этом случае происходит конвективный перенос теплоты. Если движение происходит за счет перепада давлений (за счет работы насоса или вентилятора), то конвекция называется вынужденной. Когда движение жидкости происходит только за счет разности плотности из–за неравномерного температурного поля, то имеем

дело с естественной конвекцией. При малых скоростях обычно поток ламинарен, при больших –турбулентен.

Математическую модель конвективного теплообмена можно сформулировать при помощи дифференциальных уравнений переноса массы, импульса и энергии, рассмотренных в главах. Интегрирование этой системы уравнений в частных производных сопряжено с такими математическими трудностями, что аналитические решения возможны только для простейших случаев.

Напомним, что удельный тепловой поток q принято выражать через коэффициент теплоотдачи α в виде

$$q = \alpha(t_S - t_C), \ \frac{Bm}{м^2} \tag{5.1}$$

где t_S, t_C – температуры поверхности тела и среды при достаточном удалении от поверхности. Тепловой поток можно также выразить через закон Фурье, описывающий перенос тепла теплопроводностью через пограничный слой:

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}, \frac{Bm}{м^2} \tag{5.2}$$

Объединение уравнение (5.1) и (5.2) дает выражение для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = -\frac{\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}}{t_S - t_0}, \ \frac{Bm}{м^2 K} \tag{5.3}$$

и носит название уравнении теплообмена. В уравнении (5.3) неизвестна величина $\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\Big|_{y=0}$, для определения которой необходимо знать распределение температур в движущейся в пограничном слое жидкости. Для нахождения $\frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{y=0}$ необходимо воспользоваться уравнением энергии:

$$a\nabla^2 t - t \operatorname{div} \vec{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\tau} \tag{5.4}$$

для движущегося потока жидкости без внутренних источников тепла. Для двухмерного слоя символы имеют следующие значения:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mathrm{v}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{v}} = \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5.5}$$

Напомним, что при выводе уравнения (5.4) предполагалось постоянство физических свойств жидкости, а также пренебрежение

теплотой трения, возникающей между движущимися друг относительно друга слоями жидкости. В дальнейшем будем рассматривать стационарные процессы $\partial f / \partial \tau = 0$ и несжимаемую жидкость, для которой уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad (5.6)$$

Для определения скорости в ламинарном пограничном слое потребуется воспользоваться уравнением движения:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (5.7,а)$$

вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (5.7,б)$$

Может показаться неочевидным, что распределение температуры влияет на распределение скорости. Действительно, уравнения Навье–Стокса явно температуры не содержат. Однако они содержат члены, зависящие от температуры, особенно те, в которые входит вязкость. Следовательно, профиль скорости при изотермическом течении может существенно отличаться от профиля скорости неизотермического течения жидкости.

5.2. Математическая модель стабилизированного течения несжимаемой изотермической жидкости в канале

Уравнение движения в общем виде не поддается аналитическому решению, поэтому принято рассматривать различные частные случаи решения этого уравнения. Прежде всего, обратим внимание на стационарное движение несжимаемой жидкости, т.е. выполним условия

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (5.8)$$

Характер движения жидкости (рис. 5.1) может быть стабилизированным и нестабилизированным.

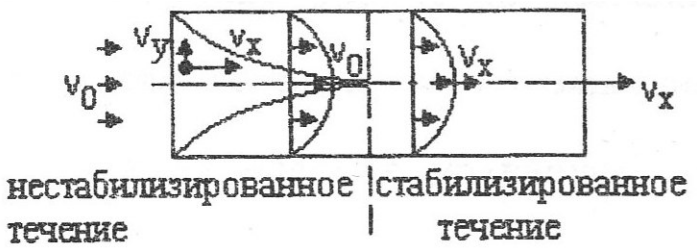


Рис. 5.1. Нестабилизированное и стабилизированное течение жидкости в трубе

В первом случае пограничные слои в канале сошлись, и осталась только одна составляющая скорости v_x:

$$v_y = v_z = 0 \qquad (5.9)$$

Из уравнений (5.8) и (5.9) следует, что

$$\partial v_x / \partial x = 0. \qquad (5.10)$$

Кроме того, будем рассматривать плоскую задачу, т.е. изменения всех параметров по оси z примем равными нулю. Тогда уравнение движения с учётом (5.10) принимает вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (5.11)$$

5.3. Движение жидкости между плоскими пластинами вдали от входа

На рис. 5.2 показано плоское течение несжимаемой жидкости между стенками вдали от входа.

Для неограниченного горизонтального канала ($z = \infty$) гравитационный член X=0 и уравнение (5.11) приобретает вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad \mu = \nu\rho \qquad (5.12)$$

Обратим внимание на следующую особенность уравнения (5.12): левая его часть изменяется только от x, а правая – от y. Это возможно только при условии $\frac{\partial p}{\partial x} = const$, что даёт $C_1 = 0$. Тогда решение уравнения (5.11) можно представить в виде

$$v = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy}\frac{y^2}{2} + C_2, \qquad (5.13)$$

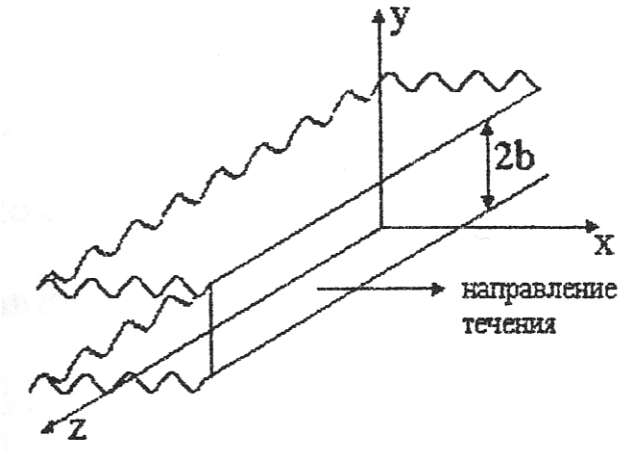


Рис. 5.2. Течение в щели

где C_2 - вторая постоянная интегрирования, которая может быть найдена из второго условия: на границе $y=b$ скорость равна нулю:

$$v\big|_{y=b} = 0. \qquad (5.14)$$

Найдём из этого условия и уравнения (5.13) скорость в канале:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{2\mu}(y^2 - b^2)\frac{dp}{dx}. \qquad (5.15)$$

Представим это решение в иной форме, введя величину максимальной скорости:

$$\mathrm{v}\big|_{y=b} = \mathrm{v}_{\max}. \qquad (5.16)$$

Тогда скорость в канале может быть определена в виде

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_{\max}\left[1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]. \qquad (5.17)$$

Введём среднюю скорость течения:

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{1}{\mathrm{b}}\int_0^b \mathrm{v}_{\max}\left[1 - \frac{y^2}{b^2}\right]dy = \frac{2}{3}\mathrm{v}_{\max}, \qquad (5.18)$$

и запишем (5.17) в иной форме:

$$\mathrm{v} = \frac{3}{2}\overline{\mathrm{v}}(1 - \frac{\mathrm{y}^2}{b^2}) \qquad (5.19)$$

Из уравнений (5.15), (5.17) и представления производной в виде $\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{\Delta p}{L}$ можно найти

$$\Delta p = \frac{3\overline{\mathrm{v}}\mu L}{b^2}$$

и получить выражение для гидравлического сопротивления R при течении в плоской щели

$$R = \frac{2\Delta p}{m\overline{\mathrm{v}}^2} = \frac{2\cdot 3\overline{\mathrm{v}}\mu \mathrm{L}}{b^2 m\overline{\mathrm{v}}^2} = \frac{6\mu L}{b^2 m\overline{\mathrm{v}}}$$

5.4. Изотермическое течение жидкости в круглой трубе вдали от входа

На рис. 5.3. представлен этот случай, и для стационарного течения примем $\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_z = 0$ и, как и в случае (5.9) и (5.10) $\partial \mathrm{v}_y / \partial x = 0, \partial \mathrm{v}_x / \partial \tau = 0.$

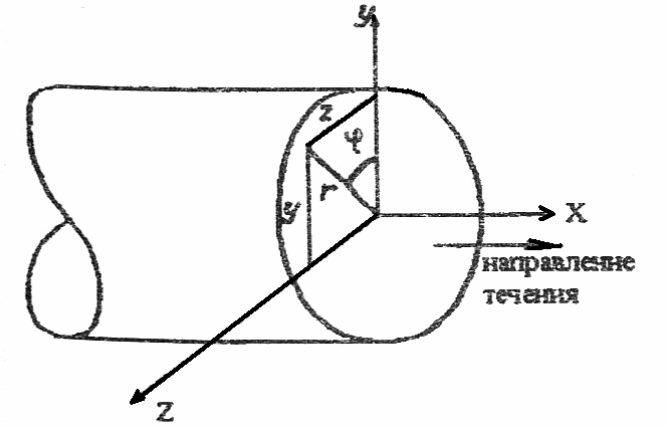


Рис. 5.3. Течение в круглой трубе

Тогда уравнение движения в декартовой системе координат приобретает вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right).$$

В дальнейшем у скорости индекс x опустим, и запишем полученное уравнение в цилиндрической системе координат:

$$\frac{d^2\mathrm{v}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{v}}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\mathrm{v}}{dr}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}. \qquad (5.20,\text{а})$$

Запишем два граничных условия:

$$\left.\frac{d\mathrm{v}}{dr}\right|_{r=0} = 0,\ \mathrm{v}\big|_{r=R} = 0. \qquad (5.20,\text{б})$$

Решение уравнения (5.20,а) имеет вид:

$$\mathrm{v} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(R^2 - r^2). \qquad (5.21)$$

Найдём выражение для максимальной и средней скорости:

$$\mathrm{v}\big|_{r=0} = \mathrm{v}_{\max},\quad \mathrm{v}_{\max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}R^2,\quad \mathrm{v} = \mathrm{v}_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (5.22)$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{2\pi\int_0^R \mathrm{v}r dr}{2\pi\int_0^R r dr} = \frac{2\int_0^R \mathrm{v}r dr}{R^2} = \frac{2\mathrm{v}_{\max}}{R^2}\int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r dr = \frac{\mathrm{v}_{\max}}{2}. \qquad (5.23,\text{а})$$

Представим скорость v в разных формах:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v} &= -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dx}(R^2 - r^2), \\ \mathrm{v} &= \mathrm{v}_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (5.24,\text{а})$$

и найдем из них значение градиента давления dp/dx:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4\mu\mathrm{v}_{\max}}{R^2} = -\frac{8\mu\bar{\mathrm{v}}}{R^2}. \qquad (5.24,\text{б})$$

Если градиент постоянный, то на длине L перепад составит Δp и $dp/dx = \Delta p/L$, что позволяет уравнение (5.24) представить в виде

$$-\Delta p = \frac{8\mu\bar{\mathrm{v}}L}{R^2}. \qquad (5.25)$$

Это уравнение известно как уравнение Гагена-Пуайзеля.

5.5. Течение Куэтта

Пусть одна из пластин неподвижна, а вторая движется со скоростью v; жидкость между двумя пластинами при этом приходит в движение (рис. 5.4, а).

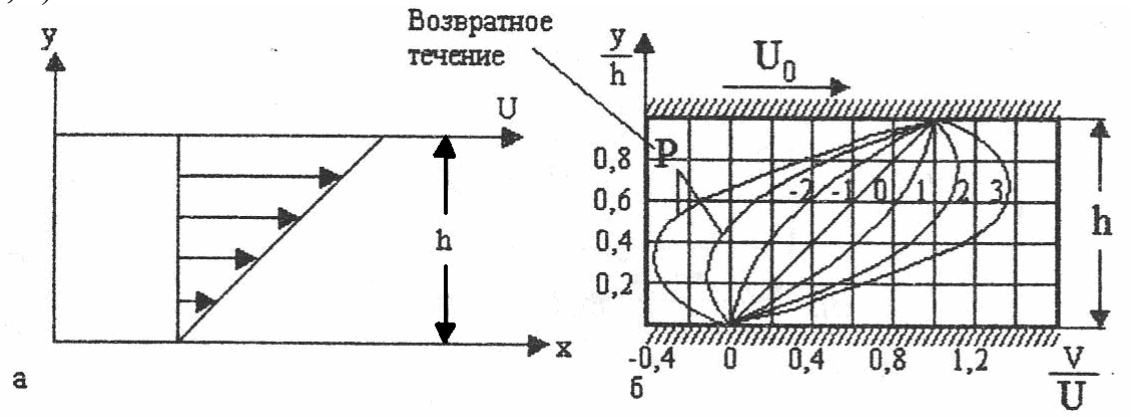


Рис.5.4. Течение Куэтта

Определим профиль распределения скорости жидкости; такое течение носит название течения Куэтта. Движение такой жидкости описывается уравнением (5.12):

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=\frac{d^2\mathrm{v}}{dy^2} \qquad (5.26)$$

С граничными условиями

$$\mathrm{v}\big|_{y=0}=0,\ \ \mathrm{v}\big|_{y=h}=U\ . \qquad (5.27)$$

Интегрирование этих уравнений дает значения скорости:

$$\mathrm{v}=\frac{y}{h}U-\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right). \qquad (5.28)$$

Распределение скоростей, даваемое решением (5.28) для различных значений перепада давления, изображены на рис. 5.5б

В частности, для нулевого перепада давления получается линейное распределение скоростей

$$\mathrm{v}=(y/h)U$$

Течение с таким распределением скоростей часто называют простым течением Куэтта или течением чистого сдвига. При наличии перепада давлений происходит наложение простого течения Куэтта и течения в канале. Форма кривой распределения скоростей при течении Куэтта определяется безразмерным градиентом давления

$$P=\frac{h^2}{2\mu U}\left(-\frac{dp}{dx}\right).$$

При падении давления в направлении движения верхней стенки (p>0), скорость положительна по всей ширине канала. При p<0 в некоторой части поперечного сечения возможны отрицательные скорости, т.е. возвратное течение.

5.6. Неизотермическое течение жидкости в круглой трубе при постоянной плотности теплового потока на стенке

Поле температур жидкости трубе будет описываться уравнением (5.4), которое при допущении $(\partial t / \partial \tau = 0)$ для несжимаемой жидкости ($\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$) в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

примет вид

$$v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_r \frac{\partial t}{\partial r} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2}\right) \qquad (5.29,а)$$

Рассмотрим течение жидкости на стабилизированном участке трубы, где составляющая скорости $v_r = 0$. Произведём оценку количества теплоты dQ_T, переносимого на расстояние dx теплопроводностью и конвекцией dQ_K. Известно, что

$$dQ_T = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right),\ dQ_K = \frac{\partial}{\partial x}(\rho c v_x t),$$

и конвективный перенос dQ_K намного больше кондуктивного dQ_T, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) << \frac{\partial}{\partial x}(\rho C v_x t) \qquad (5.29,б)$$

преобразование последнего неравенства приводит к

$$a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} << v_x \frac{\partial t}{\partial x}$$

Учитывая это неравенство, и указанное ранее условие $v_r = 0$, запишем уравнение (5.29,а) в виде

$$v_x \frac{\partial t}{\partial x} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right) \qquad (5.30)$$

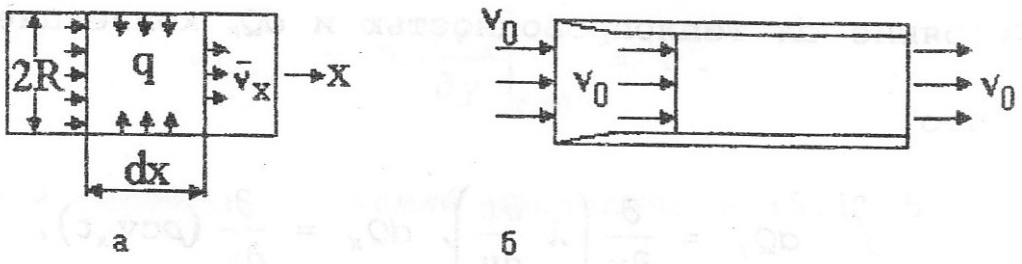


Рис.5.5 Фрагмент трубы dx с поверхностным источником тепла с удельной плотностью потока q и средней скоростью жидкости v (а); б – стержневое течение жидкости

В уравнении (5.29,а) фигурируют переменные x и r, что затрудняет его интегрирование. Покажем прием, позволяющий представить (5.29,а) в приближенном виде, но содержащем одну переменную r. На рис.5.5 представлен фрагмент трубы, длиною dx, в который входит тепловой

поток, равный $\pi R^2 \bar{v}_x \rho C d\bar{t}$, а на поверхности фрагмента $2\pi R^2 dx$ выделяется согласно поставленной задаче поток $2\pi qRdx$. Можно эти потоки приравнять и получить

$$\frac{d\bar{t}}{dx} = \frac{2q}{R\rho C\bar{v}} \tag{5.31}$$

Выразим теперь производную $\partial t / \partial x$ приближенно через среднюю температуру, то есть

$$\frac{d\bar{t}}{dx} \cong \frac{\partial t}{\partial x}$$

примем во внимание выражение (5.24,а) для v_x, что позволяет представить уравнение (5.30) в виде

$$\frac{\partial^2 t}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{4q}{\lambda R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{5.32}$$

Граничные условия рассматриваемой задачи

$$t\big|_{r=R} = t_w, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{5.33}$$

Решение системы уравнений (5.32) при граничных условиях имеет следующий вид:

$$\vartheta = t_W - t(r) = \frac{qR}{4\lambda}\left(3 - \frac{4r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4}\right) \tag{5.34}$$

Перейдем теперь к определению локального коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q}{t_W - \bar{t}} \tag{5.35}$$

где $\bar{t}$ с чертой - среднескоростная температура потока в сечении x.
По определению $\bar{t}$

$$\bar{t} = \frac{\int_A v_x t dA}{\int_A v_x dA}, \quad dA = 2\pi r dr.$$

Вычисляя значение среднерасходной температуры

$$t_W - t = \frac{11qR}{24\lambda} \tag{5.36}$$

и подставляя ее в формулу (5.35) получим

$$\alpha = \frac{q}{t_W - \bar{t}} = \frac{24\lambda}{11R} \tag{5.37}$$

Это выражение представим в безразмерном виде с помощью числа Нуссельта

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{48}{11} = 4{,}36 \tag{5.38}$$

Решение аналогичной задачи для плоского канала шириной h приводит к Nu = 4.12

Напомним, что эта задача решалась при допущении (5.29б). Оценим, при каких условиях это допущение выполняется. Для этого представим его приближенно в виде

$$\frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{t - t_0}{x}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \approx \frac{t - t_0}{x^2}, \tag{5.39}$$

что приведет к $(v_x \cdot x)/a >> 1$

Введем критерий Пекле

$$Pe = Re \cdot Pr = vd/a$$

и запишем последнее неравенство в виде

$$\frac{vx}{a} >> 1, \quad \frac{vd}{a}\frac{x}{d} >> 1, \quad x/d << 1/Pe \tag{5.40}$$

Для неметаллических жидкостей Pr меньше или равен 10^3 и неравенство (5.40) практически всегда выполняется. Для жидких металлов Pr находится в интервале между 0.605 и 0.05, и условие (5.40) выполняется редко, для газов же Pr приближенно равен 1, и условие (5.40) может не выполняться.

5.7. Стержневое течение

Если скорость на входе в канал равномерна, то в начале канала, когда пограничный слой еще тонок, можно считать, что скорость течения неизменна по сечению и равна v_0, такое течение называют стержневым.

В уравнении (5.30) заменим v_x на v_0 и примем во внимание (5.31), тогда

$$\frac{\partial^2 t}{\partial^2 r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{4q}{\lambda R}$$

Решение этого уравнения при граничных условиях (5.33) дает

$$\vartheta = t_W - t(r) = \frac{qR}{4\lambda}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Среднерасходные температуры равны

$$\overline{\vartheta} = t_W - \bar{t} = \frac{qR}{4\lambda},$$

что приводит к коэффициенту теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{q}{t_W - \bar{t}} = \frac{4\lambda}{R} \qquad \text{и} \qquad Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 8 \tag{5.41}$$

Итак, по всей длине трубы значение числа Nu равняется 4.36 и Nu = 8 при стержневом течении.

5.8. Теплообмен на начальном участке трубы

В этом разделе будут приведены без вывода окончательные результаты. Термический начальный участок. Заметим, что на критерий Nu = αx/λ стремится с увеличением x к предельному значению. начальный

термический участок можно определить, задавая погрешность, с которой Nu приближается к Nu_∞ например (рис.5.6),

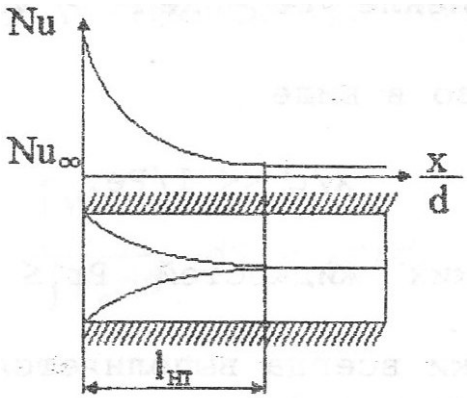


Рис. 5.6. Изменение числа Нуссельта Nu по длине канала

$$\mathrm{Nu} = 1.01\ Nu_\infty, \qquad (5.42)$$

при этом длину начального термического участка $l_{н.т.}$ определим по формуле [:::]

$$l_{н.т.}/d = 0.07*\mathrm{Pe},\ \mathrm{Pe} = Vd/a, \qquad (5.43)$$

а для плоского канала

$$l_{н.т.}/h = 0.079\cdot\mathrm{Pe}.$$

Коэффициент теплопередачи можно рассчитать по следующим аппроксимационным формулам

$$Nu = \begin{cases} 1{,}31k^{-1/3}, k = \dfrac{1}{Pe}\dfrac{x}{d} < 0.037 \\ Nu_\infty = 4{,}36, k \ge 0.037 \end{cases} \qquad (5.44)$$

Гидродинамический начальный участок. Ранее рассматривался теплообмен при гидродинамической стабилизации потока (раздел :). Этот пример типичен при значительном удалении от в входа в трубу обогреваемого участка. Рассмотрим случай, при котором вход жидкости совпадает с участком нагрева, то есть происходит одновременно формирование полей скоростей и температур (рис.5.7).

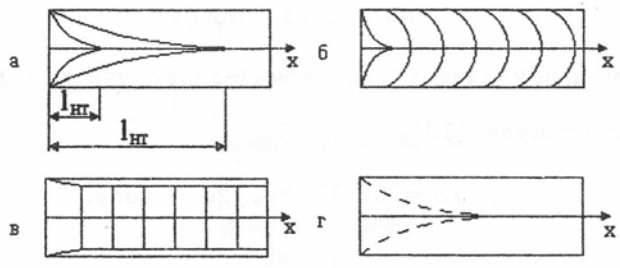


Рис. 5.7. Формирование ламинарного и термического пограничных слоёв нестабилизированного течения жидкости в трубе. Одновременное формирование этих слоёв (а); почти по всей длине начального термического участка профиль параболический (б); стержневое течение (в); совпадают оба слоя (г)

Можно показать, что связь начальных участков $l_{н.т.}$ и $l_{н.г.}$ дается соотношением [:::]

$$l_{н.т.} \approx \mathrm{Pr}^* l_{н.г.} \qquad (5.45)$$

которые позволяет определить режим течения:

1) Pr >> 1: почти по всей длине начального термического участка профиль скорости имеет параболический характер (рис.5.7,б).

2) Pr << 1: по всей длине начального термического участка распределение скорости равномерное, и течение можно рассматривать как стержневое (рис.5.7,в).

3) Pr >> 1: почти по всей длине начального термического участка профиль скорости имеет параболический характер (рис.5.7,б).

4) Pr ≈1: происходит одновременное формирование полей скорости и температуры (рис.7.3,г).

Глава 6. Ламинарное течение жидкости на начальном участке её движения

6.1. Математическая модель для начального участка (уравнения Прандтля)

Рассмотрим начальный участок с нестабилизированным течением, при котором пограничные слои меняют свою толщину (рис.6.1). Составим уравнение движения для пограничного слоя и произведем оценку отдельных членов этих уравнений с точки зрения порядка их величины. Уравнения Навье-Стокса для стационарного течения $\left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \tau} = 0\right)$ в горизонтальном направлении x (массовые силы отсутствуют X=0) для несжимаемой жидкости $(\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{v}} = 0)$ могут быть получены из уравнения (2.37) для осей x и y в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}^2}\right) \\ \mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y} \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

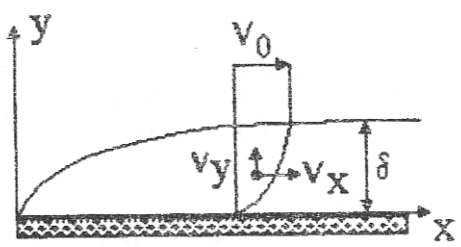


Рис.6.1. Течение в пограничном слое

Такое движение, характерное для больших чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{vL}{\nu}$ исследовал в 1904 г. немецкий физик Л.Прандтль. Он предложил метод упрощения уравнений (6.1) с помощью оценки порядка величины каждого из членов, входящих в эти уравнения. Для этого припишем к каждому параметру порядок 1 или δ (большая и малая величины). Составляющая скорости v_x значительно больше v_y, поэтому $v_x \sim 1$, а $v_y \sim \delta$ (знак ~ означает "имеют порядок"), геометрические размеры в направлении оси x ~ 1, а в направлении оси y ~ δ. Перепишем уравнение (6.1), указывая над каждым входящим в него членом порядок δ или 1:

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{v_x}\frac{\partial \overset{1}{v_x}}{\partial \overset{1}{x}} + \overset{\delta}{v_y}\frac{\partial \overset{1}{v_x}}{\partial \overset{\delta}{y}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overset{1}{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \overset{1}{v_x}}{\partial \overset{1}{x}^2} + \frac{\partial^2 \overset{1}{v_x}}{\partial \overset{\delta^2}{y}^2}\right) \\ \overset{1}{v_x}\frac{\partial \overset{\delta}{v_y}}{\partial \overset{1}{x}} + \overset{\delta}{v_y}\frac{\partial \overset{\delta}{v_y}}{\partial \overset{\delta}{y}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overset{\delta}{p}}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \overset{\delta}{v_y}}{\partial \overset{1}{x}^2} + \frac{\partial^2 \overset{\delta}{v_y}}{\partial \overset{\delta^2}{y}^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

Порядок членов в уравнении (6.2) будет следующий:

$$\left.\begin{aligned} 1+1 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(1 + \frac{1}{\delta^2}\right) \\ \delta+\delta &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right) \end{aligned}\right\}$$

Чтобы сохранить давление как причину движения, припишем члену $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ порядок 1. Тот же порядок выберем и для $\frac{\mu}{\rho}$, тогда можно отбросить члены уравнения малого порядка и переписать уравнения (6.2) в виде

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \qquad (6.3)$$

Второе уравнение (6.2) во внимание не принимается, т.к. почти вес его члены имеют малый порядок.

Рассмотрим условие несжимаемости

$$\mathrm{div}\, v = 0$$

или на плоскости

$$\frac{\partial \overset{1}{v_x}}{\partial \overset{1}{x}} + \frac{\partial \overset{\delta}{v_y}}{\partial \overset{\delta}{y}} = 0,$$

члены которого имеют порядок 1, т.е. уравнение остается

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \qquad (6.4)$$

Граничные условия: первое – прилипание жидкости к стенкам, а второе – совпадение скорости v_x на внешнем крае пограничного слоя со скоростью v_0 внешнего течения:

$$v_x\big|_{y=0} = v_y\big|_{y=0} = 0, \quad v_x\big|_{y=\delta} = v_0. \tag{6.5}$$

Покажем, что уравнение (6.3) можно упростить. Для этого рассмотрим движение жидкости в свободном потоке, т.е. при y > δ за границей пограничного слоя. В этом случае $\frac{\partial v_x}{\partial y}\big|_{y=\delta} = 0$, а значение v_x становится равным скорости потока v_0, тогда уравнение (6.3) переходит в уравнение свободного течения жидкости, при этом член с вязкостью тоже равен нулю:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

интегрирование которого дает

$$\frac{\rho v_x^2}{2} + p = const, \tag{6.6}$$

т.е. уравнение Бернулли.

Заметим, что при постоянной величине скорости ($v_x = v_0$) давление *p*, как следует из (6.6), будет постоянным и $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Следовательно, структуры уравнения (6.3) для постоянной скорости (v_0=const) станут более простыми:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \tag{6.7}$$

Систему выражений (6.5) и (6.7) иногда называют системой уравнений Прандтля.

6.2. Преобразование математической модели введением функций тока

Приступим к интегрированию уравнения (6.7), для чего используем новый прием, нашедший широкое распространение в работах по механике жидкостей и газов. Введем так называемые функции тока ψ. Последние связаны со скоростями v_x и v_y зависимостями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{6.8}$$

Функции тока были определены таким образом, чтобы при подстановке их в уравнение неразрывности (6.4) последнее тождественно обращалось в нуль. Действительно, подстановка (6.8) в (6.4) дает

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Остановимся на физическом смысле этих странных, на первый взгляд функций. Общепринято графическое представление течения при помощи линий тока. Математически линию тока можно представить как линию равных значений ψ. Можно связать компоненты скорости v_x и v_y с направлением линий тока и показать, что скорость направлена по линии тока. Например, на рис.6.2 показано расположение линий тока при движении жидкости через сопло.

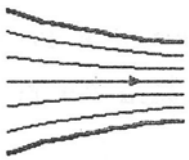


Рис.6.2. Линии тока при движении через сопло

Подставим в уравнение (6.7) значения скоростей v_x и v_y из (6.8). Это дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \qquad (6.9)$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка в частных производных для функции ψ, оно должно решаться при указанных выше граничных условиях (6.5), которые примут вид

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \qquad (6.10)$$

Решение дифференциального уравнения вида (6.9) нельзя получить с помощью аналитических приемов. Оно требует подбора, основанного на значительной физической и математической интуиции. Не останавливаясь на методе замены переменных x и y, введем новые переменные – безразмерные координаты η и f:

$$\eta = y\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}, \; f = \frac{\psi}{\sqrt{x \nu v_0}}. \qquad (6.11)$$

Перепишем с учетом (6.11) дифференциальные уравнения (6.9) в следующем виде:

$$f(\eta)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} = 0,$$

или

$$ff'' + 2f''' = 0, \qquad (6.12)$$

в итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение.

Выразим через функции η и f граничные условия, для этого проведем следующие преобразования:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\nu x v_0}\, f' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\nu x v_0}\, f' \sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}, v_x = v_0 f' \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\nu x v_0}\, \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \ldots = \frac{1}{2(\eta f' - f)} \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{При } y = 0 \quad v_x = v_y = 0, \text{ что даёт } \eta = 0 \text{ и } f = f' = 0; \\ &\text{При } y = \infty \quad v_x = v_0 = 0, \text{ что даёт } \eta = \infty \quad f' = 1. \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

Окончательно в новых обозначениях граничные условия примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } y = 0 \quad \eta = 0, \quad f = 0, \quad f' = 0; \\ &\text{при } y = \infty \quad v_x = v_0, \ \eta = \infty \quad f' = 1. \end{aligned}\right\} \quad (6.15)$$

Остановимся на некоторых исторических моментах, связанных с решением уравнения (6.3). Решение этого уравнения для $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, т.е. уравнение (6.7) впервые получено Блаузиусом в 1908 г., далее оно было усовершенствовано Хонартом в 1938 г., а позже группа немецких и английских ученых развивала этот метод вплоть до 60-х годов; в дальнейшем широко применялись численные методы с применением компьютеров.

6.3. Обтекание несжимаемым потоком плоской пластины

Эта задача целиком описывается уравнениями (6.12) и (6.15). Аналитически решить уравнение (6.12) до сих пор не удалось. Поэтому Г.Блаузиус получил приближенное решение, применив разложение функции f в степенной ряд:

$$f = A\eta^2 - B\eta^5 + C\eta^8 - D\eta^{11}. \quad (6.16)$$

Обоснование этого разложения и определение коэффициентов A, B, C, … здесь не приводится.

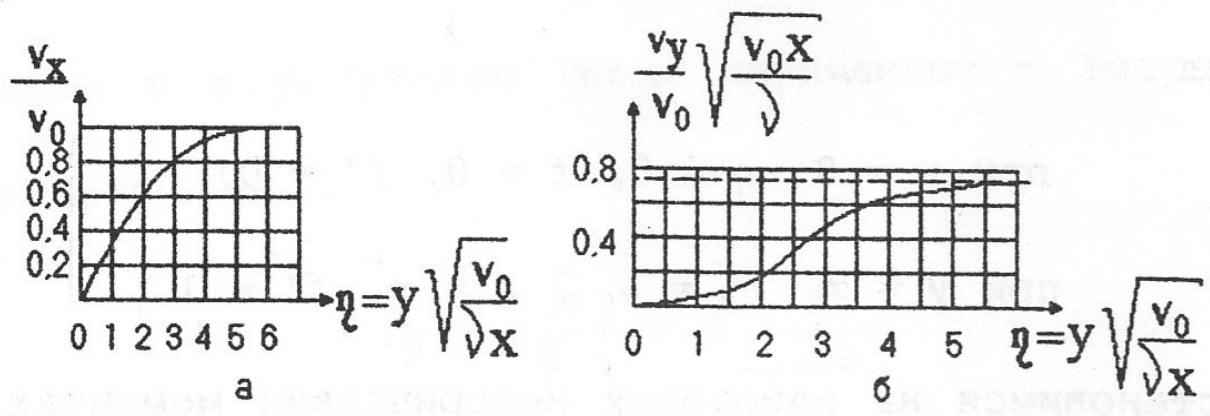


Рис.6.3. Распределение продольной (а) и поперечной (б) скорости в ламинарном пограничном слое

Используя уравнение (6.16) совместно с уравнениями (6.13) и (6.14), можно найти значения v_x и v_y, представленные на графиках рис.6.3.

Из рис.6.3, а для $\frac{v_x}{v_0}=1$ на границе пограничного слоя y=δ видно, что толщина пограничного слоя (η=5) приближенно равна

$$5=\delta\sqrt{\frac{v_0}{v_x}},$$

а это приводит к выводу зависимости для толщины δ:

$$\delta=5\sqrt{\frac{v_x}{v_0}}. \qquad (6.17)$$

6.4. Гидравлическое сопротивление плоской пластины

Полученное решение для распределения скоростей позволяет легко вычислить сопротивление трения. Силы сопротивления вычисляются по касательным напряжениям на поверхности. На расстоянии x от передней кромки они равны

$$\tau=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \qquad (6.18)$$

Вычислим величину производной $\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0}$. Из уравнения (6.13) $v_x=v_0 f'$; вычислим производную:

$$\frac{v_x}{y}=v_0\frac{f'}{\eta}\frac{\eta}{y}=v_0 f''\frac{\eta}{y}.$$

Найдем величину $\frac{\eta}{y}$:

$$\eta=y\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}},\quad \frac{\eta}{y}=\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}.$$

и значение производной

$$\frac{dv_x}{dy}=v_0 f''\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}$$

Величину f'' найдем из степенного ряда (6.15)

$$f''=2A-20B\eta^3+\ldots \qquad (6.19)$$

При y=0, как следует из (6.14), η=0, и искомый параметр $\frac{v_x}{y}\Big|_{y=0}$ в формуле (6.18)

$$\frac{v_x}{y}\Big|_{y=0}=\frac{v_x}{y}\Big|_{\eta=0}=v_0\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}f''\Big|_{\eta=0}.$$

Как следует из формулы (6.19), величина $f''\big|_{\eta=0}=2A$, и

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}}\Big|_{y=0} = 2A\mathrm{v}_0\sqrt{\frac{\mathrm{v}_0}{\nu \mathrm{x}}}.$$

Касательное напряжение на поверхности пластины будет

$$\tau_s = 2\mu A\mathrm{v}_0\sqrt{\frac{\mathrm{v}_0}{\nu \mathrm{x}}}.$$

Подставив в это уравнение численное значение постоянной A, получим

$$\tau_s = 0.332\mu\mathrm{v}_0\sqrt{\frac{\mathrm{v}_0}{\nu \mathrm{x}}}. \qquad (6.20)$$

Полная сила сопротивления F пластины длиной L и шириной b составляет

$$F = b\int_0^L \tau dx = b\int_0^L 2\mathrm{A}\mu\mathrm{v}_0\sqrt{\frac{\mathrm{v}_0}{\nu \mathrm{x}}}dx = 2A\mu\mathrm{v}_0 b\sqrt{\frac{\mathrm{v}_0}{\nu}}\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Вычисления дают:

$$\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^L = 2\sqrt{L}.$$

Таким образом, подставив $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, получим

$$F = 0.664b\sqrt{\mu\rho\mathrm{v}_0{}^3 L}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{F}{bL} = \Delta p$, и по определению (1.18) коэффициент гидравлического сопротивления

$$\xi = \frac{\Delta p}{\frac{\rho \mathrm{v}^2}{2}},$$

получим

$$\xi = \frac{F}{\frac{\rho \mathrm{v}_0{}^2}{2}bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}},\ \mathrm{Re}_L = \frac{\mathrm{v}_0 L}{\nu}. \qquad (6.21)$$

Напомним, что эта и выведенные ранее формулы применимы только к ламинарному пограничному слою, когда число Рейнольдса $\mathrm{Re}_L \le 5\cdot 10^5$. Формулы (6.20) и (6.21) подтверждены многочисленными опытами.

Полученное Блаузиусом решение задачи о ламинарном пограничном слое показывает, что, даже в совершенстве владеющий предметом математик не в состоянии решить общих уравнений Навье-Стокса. На самом деле при решении приведенной выше простой задачи обтекания плоской пластины нужно качественно знать общую картину течения, обладать интуицией, чтобы без ущерба для точности отбрасывать отдельные члены уравнения и делать удачные подстановки при анализе дифференциальных уравнений.

Глава 7. Описание движения жидкости с помощью интегродифференциального уравнения

7.1. Уравнение Кармана для изотермического течения

Примеры точного решения уравнений пограничного слоя показывают, что их интегрирование сопряжено с большими математическими трудностями. Между тем, для практических целей важен общий случай обтекания для тел любой формы при любом режиме течения. Изложенные выше аналитические методы не позволяют решить эту задачу. Поэтому возникает необходимость найти приближенные методы расчета пограничного слоя.

Как показали Т.Карман (1921) и К.Польгаузен, можно предложить простой приближенный метод, если отказаться от удовлетворения дифференциальных уравнений пограничного слоя для каждой отдельной жидкой струйки и вместо этого ограничиться удовлетворением этих уравнений только в среднем по толщине пограничного слоя. Для этой цели следует заменить дифференциальные уравнения интегральными соотношениями, получившимися из уравнения движения путем его интегрирования по толщине пограничного слоя.

Введем интегральное уравнение для случая обтекания пластины несжимаемой жидкостью $(\operatorname{div}\vec{v}=0)$ в продольном направлении, когда давление и скорость вдоль координаты x остаются неизменными. Будем исходить из уравнения Навье-Стокса (6.3):

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{6.3}$$

и уравнения неразрывности (6.4):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{6.4}$$

при граничных условиях

$$v_x\big|_{y=0}=0,\quad v_y\big|_{y=0}=0,\quad v_x\big|_{y=\delta}=v_0. \tag{7.1}$$

Проинтегрируем уравнения (6.3) и (6.4) по толщине пограничного слоя от 0 до δ:

$$\int_0^\delta v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}dy+\int_0^\delta v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}dy+\int_0^\delta\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy=\nu\int_0^\delta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}dy, \tag{7.2}$$

$$\int_0^\delta\frac{\partial v_x}{\partial x}dy+\int_0^\delta\frac{\partial v_y}{\partial y}dy=0. \tag{7.3}$$

Из уравнения (7.3) следует, что

$$v_y=\int_0^y\frac{\partial v_x}{\partial x}dy. \tag{7.4}$$

Запишем второй член уравнения (7.2) с учетом (7.4):

$$\int_0^{\delta} \mathrm{v_y} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} dy = -\int_0^{\delta} \left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \int_0^{\delta} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy \right) dy,$$

и проинтегрируем это выражение по частям, обозначив

$$\int_0^{y} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy = \mathrm{V},\ \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} dy = dU.$$

Примем во внимание правило

$$\int \mathrm{VdU} = \mathrm{VU} - \int \mathrm{UdV}$$

и запишем

$$-\int_0^{\delta} \left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \int_0^{y} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy \right) dy = -\int_0^{y} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy \mathrm{v_x} + \int_0^{\delta} \mathrm{v_x} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy. \qquad (7.5)$$

Рассмотрим третий член уравнения (7.2) и обратим внимание на то, что вне пограничного слоя скорость постоянна, т.е. $\partial \mathrm{v_x} / \partial y = 0$, и, как было показано в разделе 6.1, члены с вязкостью равны нулю, т.е. уравнение (6.3) приобретает вид

$$\mathrm{v_x} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \text{ или } \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{v_x}^2}{\partial \mathrm{x}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Напомним, что решение данного уравнения приводит к уравнению Бернулли, т.е.

$$\frac{\rho \mathrm{v_0}^2}{2} + p = const,$$

что позволяет записать

$$-\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{v_0} \rho \frac{\partial \mathrm{v_0}}{\partial \mathrm{x}}. \qquad (7.6)$$

Преобразуем теперь правую часть уравнения (7.2):

$$\nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}^2} dy = \nu \int_0^{\delta} d\left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \right) = \nu \left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \right)_{\delta} - \nu \left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \right)_0 = \frac{\tau_w}{\rho}. \qquad (7.7)$$

Здесь использована формула Ньютона для трения

$$\mu \left. \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \right|_{y=0} = \tau_w.$$

Подставим (7.5), (7.6) и (7.7) в (7.2), после преобразований получим

$$\int_0^{\delta} \left(2\mathrm{v_x} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{v_0} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{v_0} \frac{\partial \mathrm{v_0}}{\partial \mathrm{x}} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

или

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left[\mathrm{v_x} (\mathrm{v_0} - \mathrm{v_x}) \right] dy + \frac{\partial \mathrm{v_0}}{\partial \mathrm{x}} \int_0^{\delta} (\mathrm{v_0} - \mathrm{v_x}) dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \qquad (7.8)$$

Если $\mathrm{v_0} = const$, то $\partial \mathrm{v_0} / \partial x = 0$ и выражение (7.8) приобретает вид

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mathrm{v_0} - \mathrm{v_x}) \right] \mathrm{v_x} dy = \frac{\tau_w}{\rho}. \qquad (7.9)$$

Полученное уравнение называют интегральным соотношением Кармана для безградиентного течения ($\partial p/\partial x = 0$) пограничного слоя. Это условие пригодно для ламинарного и турбулентного течения жидкости. Однако вид функций $v_x = v_x(y)$, способ их выбора, а также метод определения касательных напряжений τ_w будут различными для ламинарного и турбулентного режимов течения. Поэтому решение интегральных соотношений для этих двух видов течения рассмотрим отдельно.

7.2. Решение уравнения Кармана для пластины

Заметим, что в уравнении (7.9) искомой величиной является толщина пограничного слоя δ, а распределение скорости v_x - по толщине пограничного слоя задается. Представим зависимость $v_x = v_x(y)$ в виде полинома:

$$v_x = a + by + cy^2 + dy^3, \tag{7.10}$$

где a, b, c, d – постоянные коэффициенты. Для определения постоянных коэффициентов в (7.10) используются граничные условия (7.1) на поверхности пластины y=0 и на внешней границе пограничного слоя y=δ.
При y=0

$$v_x = 0,\ v_y = 0,\ \partial^2 v_x/\partial y^2 = 0, \tag{7.11}$$

последнее условие следует из уравнения (6.7), если его записать для y=0 и учесть, что $\partial p/\partial x = 0$, то все члены, кроме последнего, обратятся в нуль.
При y=δ

$$v_x = v_y = const,\ \partial v_x/\partial y = 0, \tag{7.12}$$

т.к. происходит плавный переход кривой $v_x = v_x(y)$ к вертикальной прямой $v_0 = const$ на внешней границе пограничного слоя.

Используя граничные условия (7.11) и (7.12), легко найти постоянные коэффициенты уравнения (7.10). Соответствующие преобразования приводят к искомой функции распределения продольной скорости v_x по толщине пограничного слоя:

$$\frac{v_x}{v_0} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \tag{7.13}$$

Подставляя в (7.9) выражение (7.13), получим

$$\int_0^\delta (v_0 - v_x)v_x dy = v_0^2 \int_0^\delta \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy = \frac{39v_0}{280}\delta.$$

Найдем касательное напряжение на поверхности пластины:

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2}\mu\frac{v_0}{\delta}. \tag{7.14}$$

Интегральное соотношение (7.9) с учетом двух последних зависимостей переходит в дифференциальное уравнение:

$$\frac{13}{140}\delta d\delta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0}dx. \tag{7.15}$$

Размещая начало координат на передней кромке пластины, получим граничное условие:

$$\delta\big|_{x=0} = 0. \tag{7.16}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (7.15) с учетом граничного условия (7.16), получим

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\ \mathrm{Re}_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{v}_0 x}{\nu}. \tag{7.17}$$

Введем локальный коэффициент трения r

$$r = \frac{2\tau_w(x)}{\rho \mathrm{v}^2{}_0}. \tag{7.18}$$

Учитывая уравнение (7.18), из (7.14) получим

$$r = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \tag{7.19}$$

Среднее значение коэффициентов трения для всей пластины длиной l и шириной, равной l определяется из выражения

$$R = \frac{1}{l}\int_0^l r dx = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}dx = \frac{0{,}664}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0}}\int_0^l \frac{dx}{x}.$$

Так как

$$\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^l = 2\sqrt{l},$$

то

$$R = 2\frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}} = 2r,\ R = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}}. \tag{7.20}$$

Выражение (7.20) получено Блаузиусом для сопротивления продольно обтекаемой пластины при ламинарном течении; формула (7.20) справедлива для чисел Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_l = \frac{\mathrm{v}_0 l}{\nu} < 5\cdot 10^5 - 10^6. \tag{7.21}$$

7.3. Уравнение Г.Н. Кружилина для неизотермической жидкости

Это уравнение позволяет получить не локальные, а средние по толщине пограничного слоя скорости и температуры, а по длине пограничного слоя эти зависимости получаются точно.

Рассмотрим теплообмен пластины, продольно обтекаемой потоком несжимаемой жидкости ($\operatorname{div}\vec{v}=0$), в стационарном режиме ($\frac{\partial t}{\partial \tau}=0$). Процесс описывается системой уравнений (5.7):

$$v_x\frac{\partial t}{\partial x}+v_y\frac{\partial t}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \qquad (5.7,а)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \qquad (5.7,б)$$

Можно показать, что $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}<<\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ и записать уравнение (5.7) в форме

$$v_x\frac{\partial t}{\partial x}+v_y\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \qquad (7.22)$$

Рассмотрим следующие преобразования:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(t-t_0)\right]=\frac{\partial v_x}{\partial x}(t-t_0)+v_x\frac{\partial}{\partial x}(t-t_0);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[v_y(t-t_0)\right]=\frac{\partial v_y}{\partial y}(t-t_0)+v_y\frac{\partial}{\partial y}(t-t_0).$$

Сложим эти два равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(t-t_0)+\frac{\partial}{\partial y}v_y(t-t_0)\right]=(t-t_0)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+v_x\frac{\partial t}{\partial x}+v_y\frac{\partial t}{\partial y}.$$

С учетом уравнения (5.7,б) первое слагаемое в правой части обращается в нуль, и уравнение (7.22) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(t-t_0)+\frac{\partial}{\partial y}v_y(t-t_0)\right]=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \qquad (7.23)$$

Проинтегрируем выражение (7.23) по толщине δ термического пограничного слоя

$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(t-t_0)\right]dy+\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial y}v_y(t-t_0)dy=\int_0^\delta a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dy.$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_x(t-t_0)dy+v_y(t-t_0)\Big|_0^\delta=a\frac{\partial t}{\partial y}\Big|_0^\delta.$$

Второе слагаемое в левой части обращается в нуль, так как

$$v_y\big|_{y=0}=0,\quad (t-t_0)\big|_{y=\delta}=0,\quad \frac{\partial t}{\partial y}\big|_{y=\delta}=0,$$

что позволяет записать последнее выражение в виде

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta v_x(t-t_0)dy=-a\frac{\partial t}{\partial y}\big|_0. \qquad (7.24)$$

Это выражение носит название интегродифференциального уравнения теплового потока и впервые было получено в 1936 г. Г.Н.Кружилиным.

7.4. Теплообмен при ламинарном течении жидкости вдоль пластины

Для ламинарного течения жидкости вдоль пластины известно выражение (7.13) для распределения скорости v_x по сечению y:

$$\frac{v_x}{v_0} = 1.5\frac{y}{\delta} - 0.5\left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \qquad (7.13)$$

где δ - толщина гидродинамического пограничного слоя, которая может быть найдена из формулы (7.17)

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{Re_x}},\ Re_x = \frac{v_0 x}{\nu}. \qquad (7.17)$$

Найдем теперь распределение температур в пограничном слое. Зададим это распределение в виде полинома третьей степени, который описывает монотонный ход кривой

$$\vartheta = t - t_0 = a + by + cy^2 + dy^3, \qquad (7.25)$$

где *a, b, c* и *d* – постоянные коэффициенты этого полинома определяются из следующих граничных условий

$$\vartheta\big|_{y=\delta_t} = 0,\ \frac{d\vartheta}{dy}\Big|_{t=\delta_t} = 0,\ \vartheta\big|_{y=0} = \vartheta\big|_w. \qquad (7.26)$$

Четвертое условие найдем из уравнения (7.22), записанного для скорости пограничного слоя на поверхности y=0, где $v_x = v_y = 0$. Получаем

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2}\Big|_{y=0} = 0. \qquad (7.27)$$

Из условий (7.26), (7.27) нетрудно получить постоянные коэффициенты, и уравнение (7.25) приобретает следующий вид:

$$\frac{t - t_w}{t - t_0} = 1.5\frac{y}{\delta_t} - 0.5\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3. \qquad (7.28)$$

Найдем из этого условия значение производной на поверхности y=0:

$$\left.\frac{dt}{dy}\right|_{y=0} = \frac{1.5}{\delta_t}(t_0 - t_w) \qquad (7.29)$$

Для определения толщины δ_t термического пограничного слоя воспользуемся интегродифференциальным уравнением (7.24), в которое подставим значение скорости v_x, температуры t и производной $\frac{\partial t}{\partial y}$ из уравнений (7.13), (7.25) и (7.26).

Левая часть уравнения (7.24) примет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} v_x(t - t_0)dy = \frac{d}{dx}\left\{\vartheta_w v_0 \delta\left[\frac{3}{20}\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right) - \frac{3}{280}\left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^3\right]\right\}.$$

Условимся, что $\delta_t < \delta$, т.е. интегрирование от 0 до δ_t происходит в пределах гидродинамического пограничного слоя. Тогда $\delta_t / \delta \le 1$, и вторым

слагаемым в правой части можно пренебречь. С учетом выражения (7.29) уравнение (7.24) примет вид

$$\frac{3}{20}\vartheta_w \mathrm{v}_0 \frac{d}{dx}(\beta^2\delta) = \frac{3}{2}a\frac{\vartheta_w}{\beta\delta},\ \beta = \frac{\delta_t}{\delta}. \qquad (7.30)$$

Будем считать, что тепловой и гидродинамический слои подобны, т.е. $\beta = const$. Это имеет место, когда они начинаются из одной точки (рис. 7.1), в противном случае $\beta \neq const$. Из (7.30) находим $\frac{\beta^3}{10}\mathrm{v}_0\delta\frac{d\delta}{dx} = a$.

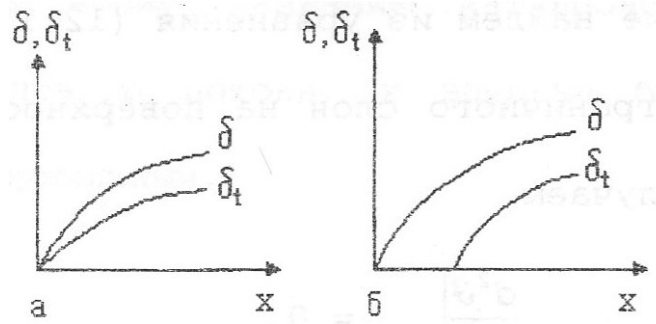


Рис.7.1. Термический δ_t и гидродинамический δ слои подобны (а) и не подобны (б)

Для нахождения комплекса $\delta\frac{d\delta}{dx}$ воспользуемся равенством (7.17), что позволяет получить

$$\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}},$$

откуда

$$\beta = \frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}}. \qquad (7.31)$$

Коэффициент теплоотдачи определим по уравнению (5.3), и в критериальном виде выражение для него принимает вид

$$Nu_x = 0.33\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}. \qquad (7.32)$$

7.5. Свободное движение жидкости вдоль нагретой вертикальной стенки (математическая модель)

Процесс движения вдоль вертикальной нагреваемой пластины, расположенной в неограниченном пространстве рассмотрен в разделе 2.5. Напомним, что в этих условиях вдоль пластины снизу вверх движется тонкий слой жидкости, а основная масса жидкости остаётся в состоянии покоя (рис. 2.5,а). На некоторой высоте ламинарный пограничный слой разрушается и переходит в турбулентный. На рис. 2.5,б показано распределение температур и скоростей по толщине пограничного слоя.

Движение для случая, когда разность давлений отсутствует. ΔP вызвано движением жидкости из-за перепада температуры ϑ. Объёмная сила X при этом равна

$$X = g_x(\rho_\infty - \rho), \qquad (2.42)$$

где g_x - составляющая гравитационного ускорения в направлении X; ρ_∞, ρ – плотность удалённой от поверхности среды и плотность среды в пограничном слое. По определению коэффициент объёмного расширения равен

$$\beta = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty \vartheta}, \qquad (2.43)$$

На основании последних равенств запишем объёмную силу X:

$$X = g_x \beta \rho_\infty \vartheta$$

где $\vartheta = (t - t_0)$ – перегрев среды, t_0 - температура среды до внесения нагретой пластины.

Дифференциальное уравнение движения для пограничного слоя при свободной конвекции примет вид

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = g_x \beta \vartheta + \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}$$

Рассматривается естественная конвекция жидкости у нагретой вертикальной пластины. Запишем для безградиентного двухмерного случая систему уравнений массо- и теплообмена.

Уравнение движения:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v}_\mathrm{y} \frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}} = \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}^2} + \beta g (t - t_0); \qquad (7.33,\text{а})$$

Уравнение энергии:

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial t}{\partial x} + \mathrm{v}_\mathrm{y} \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \qquad (7.33,\text{б})$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}} = 0. \qquad (7.33,\text{в})$$

В рассматриваемой задаче будут справедливыми граничные условия:

для перегрева $\vartheta = t - t_0$

$$\vartheta\big|_{y=0} = \vartheta_w,\ \vartheta\big|_{y=\infty} = 0,\ \vartheta\big|_{x=0} = 0, \qquad (7.34,\text{а})$$

для скоростей

$$\mathrm{v}_\mathrm{x}\big|_{y=0} = \mathrm{v}_\mathrm{y}\big|_{y=0} = 0,\ \mathrm{v}_\mathrm{x}\big|_{y=\infty} = 0,\ \mathrm{v}_\mathrm{x}\big|_{x=0} = 0. \qquad (7.34,\text{б})$$

7.6. Интегродифференциальное уравнение свободной конвекции

Распределение скоростей и температур в пограничном ламинарном слое для естественной конвекции у нагретой стенки изображено на рис.2.5.

Математическая модель этого процесса отражена дифференциальными уравнениями (7.33) с граничными условиями (7.34).

Составим интегродифференциальные уравнения для рассматриваемого случая. Для этого проинтегрируем уравнение (7.33,а) почленно по толщине пограничного слоя, при этом будем считать, что тепловой и гидродинамический слои совпадают. Интегрирование первого члена уравнения (7.33,а):

$$\int_0^{\delta} \mathrm{v_x} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \frac{\partial \mathrm{v_x}^2}{\partial \mathrm{x}} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \mathrm{v_x}^2 dy;$$

интегрирование второго члена уравнения (7.33,а):

$$\int_0^{\delta} \mathrm{v_y} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} dy = \int_0^{\delta} \mathrm{v_y} d\ \mathrm{v_x} = \mathrm{v_y} \mathrm{v_x} \Big|_0^{\delta} - \int_0^{\delta} \mathrm{v_x} \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}} dy = \int_0^{\delta} \mathrm{v_x} \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \mathrm{v_x}^2 dy.$$

При проведении преобразований было использовано уравнение (7.33,в) и граничное условие (7.34,б).

Интегрирование третьего члена уравнения (7.33,а):

$$\nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}^2} dy = \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \right) dy = \nu \left(\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \right)_0^{\delta} = -\nu \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \Big|_{y=0}.$$

Заметим, что было использовано граничное условие $\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \Big|_{y=\delta} = 0$. Наконец, проинтегрируем четвертый член уравнения:

$$\int_0^{\delta} [\beta g (t - t_0)] dy = \int_0^{\delta} \beta g \vartheta dy.$$

Окончательно после подстановки в (7.33,а) полученных выше результатов получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \mathrm{v_x}^2 dy - \int_0^{\delta} \beta g \vartheta dy = \nu \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} \Big|_{y=0}. \qquad (7.35)$$

Это и есть интегродифференциальное уравнение для естественной конвекции при ламинарном движении жидкости у нагретой вертикальной стенки.

7.7. Конвективный теплообмен у нагретой вертикальной стенки

В уравнении (7.35) три неизвестных параметра - $\mathrm{v_x}$, ϑ и δ, т.е. для их нахождения необходимо иметь еще два уравнения. Распределение скорости $\mathrm{v_x} = \mathrm{v_x}(y)$ и температуры $\vartheta = \vartheta(y)$ задается, т.е. эти выражения аппроксимируются так, чтобы они соответствовали характеру функций, показанному на рис.2.5,б и граничным условиям (7.27). Нетрудно убедиться, что этим условиям удовлетворяют функции

$$\vartheta = \vartheta_w\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2, \quad \mathrm{v_x} = \mathrm{v_1}\frac{y}{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2. \tag{7.36}$$

Исследуя распределение скорости на экстремум, можно установить связь между параметрами $\mathrm{v_1}$ и $\mathrm{v_{max}}$:

$$\mathrm{v_{max}} = \frac{4}{27}\mathrm{v_1}$$

и записать выражение (7.30) для скорости в виде

$$\mathrm{v_x} = \frac{27}{4}\mathrm{v_{max}}\frac{y}{\delta}\left(1-\frac{y}{\delta}\right)^2. \tag{7.37}$$

Подставим выражение (7.36) в интегродифференциальные уравнения (7.35) и (7.9)

$$\frac{1}{105}\frac{d}{dx}(\mathrm{v_1}^2\delta) = \frac{1}{3}\beta g\vartheta_w\delta - \nu\frac{\mathrm{v_1}}{\delta} \quad ,\frac{1}{30}\vartheta_w\frac{d}{dx}(\mathrm{v_1}\delta) = 2a\frac{\vartheta_w}{\delta}. \tag{7.38}$$

Ниже мы приведем оригинальный метод решения уравнений (7.38). Будем искать их решение в виде функций $\mathrm{v_1} = \mathrm{v_1}(x)$ и $\delta = \delta(x)$, которые задаем в следующей форме:

$$\mathrm{v_1} = \mathrm{C_1}x^m, \quad \delta = C_2x^n. \tag{7.39}$$

Неизвестные коэффициенты $\mathrm{C_1}$, C_2, m, n определяются путем подстановки выражений (7.39) в уравнения (7.38):

$$\frac{1}{105}C_1^{\,2}C_2(2m+n)x^{2m+n-1} = \frac{1}{3}\beta g\vartheta_w x^n C_2 - \frac{C_1}{C_2}\nu x^{m-n}, \frac{m+n}{30}C_1C_2x^{m+n-1} = \frac{2a}{C_2}x^{-n}. \tag{7.40}$$

Эти условия будут выполняться для любого значения x только в том случае, если записанные выше уравнения не будут зависеть от x, т.е.

$$2m+n-1=n,$$
$$2m+n-1=m-n,$$
$$m+n-1=-n,$$

откуда

$$m=1/2,\ n=1/4. \tag{7.41}$$

Приведённая система трех уравнений относительно двух неизвестных m и n в данном случае имеет единственное решение. Это говорит о том, что при выборе (7.39) был близко угадан их вид. Решение задачи (7.40) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{C_1} &= 5.17\nu\left(\frac{20}{21}+\frac{\nu}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta g\vartheta_w}{\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ C_2 &= 3.93\left(\frac{20}{21}+\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\beta g\vartheta_w}{\nu^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}. \tag{7.42}$$

Введем локальные числа Грасгофа и Прандтля

$$Gr_x = \frac{\beta g x^3}{\nu^2}\vartheta_w, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a},$$

и запишем выражение для толщины пограничного слоя:

$$\frac{\delta}{x} = 3.93\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}}(0.952+\mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}(Gr_x)^{-\frac{1}{4}}. \qquad (7.43)$$

Используя определение коэффициента теплоотдачи (5.3), аппроксимацию (7.29) и выражение (7.43), запишем число Нуссельта для искомого коэффициента теплоотдачи

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 2\frac{x}{\delta} = 0.508\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{2}}(0.952+\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{4}}(Gr_x)^{\frac{1}{4}}. \qquad (7.44)$$

Средний коэффициент теплоотдачи определим, интегрируя выражение (7.44):

$$\overline{\alpha} = \frac{4}{3}\alpha.$$

Запишем теперь выражение (7.44) для воздуха, для которого Pr=0.714

$$Nu_x = 0.378 Gr_x^{\frac{1}{4}}. \qquad (7.45)$$

Точные расчеты Польгаузена и других дают вместо коэффициента 0,378 значение 0,360, т.е. разница около 10%.

Глава 8. Турбулентное течение жидкости

8.1. Описание турбулентного течения

Упоминание о турбулентном течении приведено в разделе 1.1. Показано, что зарождение турбулентности зависит от величины возмущений в потоке, например, при входе в трубу. При течении в трубах турбулентность обычно проявляется при Re > 2100, а для течения в пограничном слое - при Re ~ $75\cdot10^5$. Существование ламинарного течения при числах Рейнольдса, превышающих эти критические значения, приводит к неустойчивому состоянию. Заметим, что для турбулентного течения нет точных решений. Приближенные уравнения, описывающие турбулентное течение, основаны на стольких предположениях, что в конечном итоге приходится на том или ином этапе исследования прибегать к эксперименту. Для получения наглядного представления о турбулентном течении на рис.8.1 изображены три стадии движения жидкости в потоке.

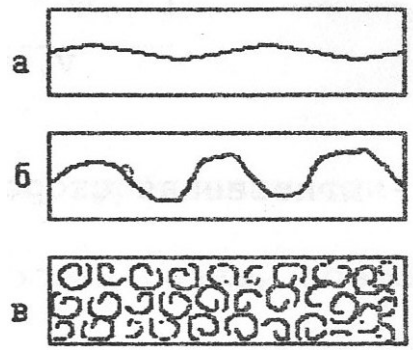


Рис.8.1. Характер движения жидкости в трубе при ламинарном (а), переходном (б) и турбулентном (в) режимах

Пульсационное движение, налагающееся на главное движение, очень сложно, и делает проблематичным возможность чисто теоретического расчета. При большем числе Рейнольдса энергия непрерывно переходит из основного течения в наиболее крупные турбулентные образования ("вихри").

Турбулентное перемешивание является причиной большого сопротивления при турбулентном течении в трубах, сопротивление трения кораблей и самолетов и потерь энергии в трубах и компрессорах. Из-за сложности пульсационных движений математическое описание процесса приходится искать лишь для осредненных во времени величин. При турбулентном движении скорость в каждой точке беспорядочно меняется во времени по величине и направлению, поэтому, при турбулентном течении нет стационарности. График типичной зависимости v_x от τ показан на рис.8.2.

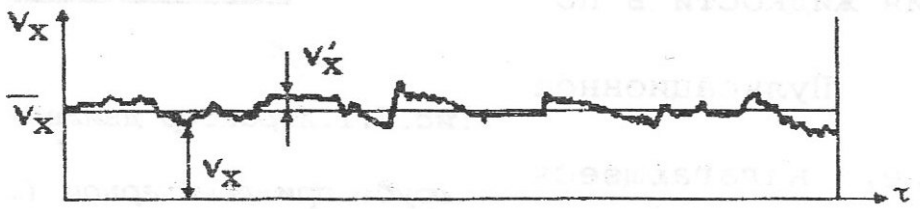


Рис.8.2. Пульсации скорости в турбулентном потоке

Введем среднюю скорость в направлении оси x

$$\overline{v}_x = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} v_x d\tau \qquad (8.1)$$

где v_x - мгновенная скорость. Аналогичные соотношения можно ввести для других компонент скорости и для давления p. Мгновенные значения переменных представим в виде суммы средних $\overline{v_x}$ и пульсационных величин v_x'

$$v_x = \overline{v_x} + v_x', \quad v_y = \overline{v_y} + v_y', \quad p = \overline{p} + p' \qquad (8.2)$$

Из этих определений очевидно, что

$$\overline{v_x'} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} V_x' d\tau = 0 \qquad (8.3)$$

Аналогично находим, что $\overline{v_y'}, \overline{v_z'}$ и $\overline{p'}$ равны нулю. Кроме того, для одномерного потока (вдоль оси x) $\overline{v_x} = \overline{v_z} = 0$. Турбулентное течение, как было показано в первой главе, характеризуется степенью турбулентности. Для потока жидкости эта величина определяется количественно выражением

$$I = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left[\overline{(v_x')^2} + \overline{(v_y')^2} + \overline{(v_z')^2}\right]}}{\overline{v_x}} \qquad (8.4)$$

В частном случае для изотропной турбулентности средние квадраты трех пульсационных скоростей равны, поэтому

$$I = \frac{\sqrt{\overline{(v_x')^2}}}{\overline{v_x}} \qquad (8.5)$$

Полезно знать размер турбулентных вихрей, который обычно называют масштабом турбулентности. Если рассмотреть скорости в двух отдельных удаленных точках, то связи между этими двумя скоростями не будет, то есть эти точки относятся как бы к разным вихрям. Количественно коэффициент корреляции для течения жидкости по оси x определяется соотношением

$$R(y) = \frac{\overline{v_{x1}' \cdot v_{x2}'}}{\sqrt{\overline{(v_{x1}')^2} + \overline{(v_{x2}')^2}}}, \qquad (8.6)$$

где v_{x1}' и v_{x2}' - пульсационные скорости, измеренные одновременно в точках 1 и 2, разделенных расстоянием y. Коэффициент корреляции может изменяться с расстоянием *y* как показано на рис.8.3.

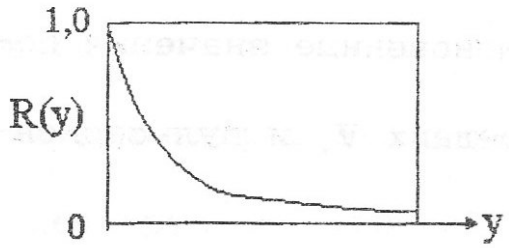


Рис.8.3. Зависимость коэффициента корреляции от расстояния между точками

8.2. Аналогия Рейнольдса

При описании турбулентного теплообмена плодотворным оказался метод, предложенный в конце 19 века английским физиком О. Рейнольдсом и получивший название аналогии Рейнольдса.

Исследования показали, что при течении жидкости у поверхности твердого тела существует ламинарный слой. Далее он разрушается, возникает переходная зона и, наконец, формируется турбулентный слой. Последний состоит из двух частей: примыкающий к поверхности тонкий ламинарный подслой и ядро, состоящее из вихрей (рис.8.4).

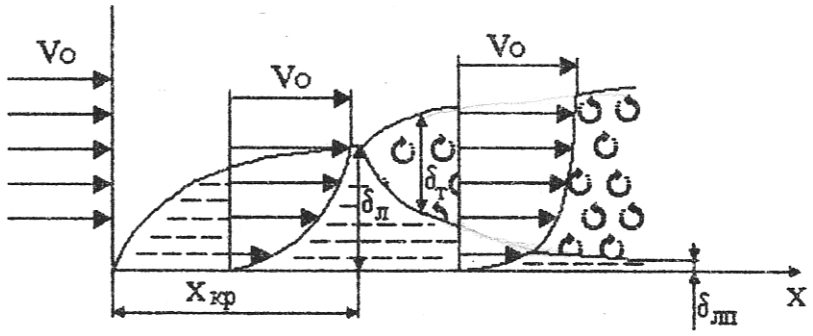


Рис.8.4. Схема ламинарного и турбулентного пограничного слоя при продольном обтекании пластины

Предложенный Рейнольдсом метод описания процесса и построенная математической модели отличаются простотой и, даже, примитивностью; но,наверное, основные физические стороны этого процесса были схвачены удивительно верно и привели для некоторых случаев к хорошему совпадению с данными эксперимента. Этот раздел может служить примером того, что главное при описании процесса правильно понять главную его физическую сущность, а не увлекаться второстепенными деталями, упорным преодолением математических трудностей.

Переходим к изложению сущности метода. Рассмотрим сначала ламинарный подслой и запишем для него выражение для напряжения сдвига

$$\tau = \mu \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} \tag{8.7}$$

и теплового потока через него

$$q = -\lambda \left(\frac{dt}{dy} \right) \tag{8.8}$$

Для гидравлического сопротивления ξ

$$\xi = \frac{2\tau}{m\mathrm{v}^{-2}} \tag{8.9}$$

известно много зависимостей, этот процесс хорошо изучен и экспериментально и теоретически.

Центральная идея Рейнольдса - стремление выразить теплоотдачу или тепловой поток q через напряжение сдвига, т. е. найти между ними зависимость $q = f(\tau)$. Для ламинарного подслоя эта задача была решена Рейнольдсом удивительно просто: он разделил уравнения (8.8) и (8.7) и получил

$$q = -\tau \frac{\lambda}{\mu} \frac{dt}{d\mathrm{v}} \tag{8.10}$$

В этой зависимости $q = f(\tau)$ отношение $\partial t / \partial v_x$ неизвестно, его будем разыскивать в дальнейшем.

А теперь перейдем к турбулентному ядру в потоке и обратим внимание на то, что основной процесс в потоке - перенос турбулентными вихрями энергии и количества движения при перемещении вихрей внутри потока.

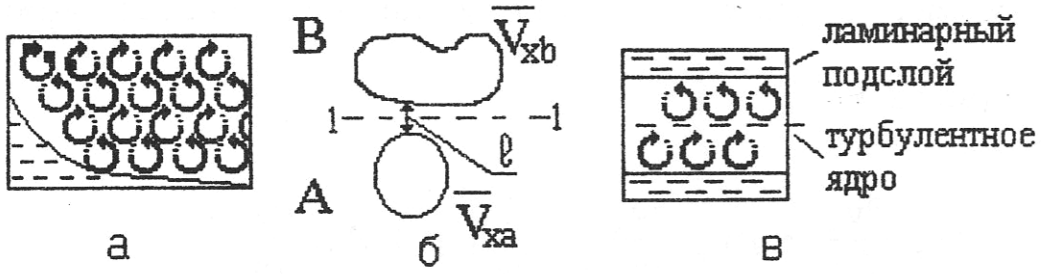


Рис.8.5. Ламинарный подслой и турбулентное ядро при движении жидкости вдоль пластины (а) и в трубе (в); объём жидкости А и В меняет скорости на расстоянии *l* пути перемешивания (б)

Рассмотрим этот процесс: выделим некую плоскость внутри турбулентного ядра (рис.8.5,б), через нее постоянно проходят макроскопические образования - вихри. Пусть через единицу площади в единицу времени от плоскости А к плоскости В передается количество жидкости m' со скоростью v , температура этого образования t. В стационарном режиме такое же количество жидкости m' переносится от 1-1 к 2-2 со скоростью V' и температурой t'. Частицы жидкости, движущиеся вверх, переносят поток теплоты $m'C_pt$, а частицы, движущиеся вниз - теплоту $m'C_pt'$. Плотность теплового потока q_t

$$q_t = m'C_p(t - t') \qquad (8.11)$$

Далее в соответствии с законом сохранения количества движения турбулентное перемешивание действует аналогично напряжению трения

$$\tau_t = m`(v - v`). \qquad (8.12)$$

Объединим зависимости (8.11) и (8.12) и представить их в дифференциальной форме

$$q_t = \tau_t \, C_p(dt/dv) \qquad (8.13)$$

Перейдем теперь к вычислению отношений dt/dv в формулах (8.10) и (8.13). Сделаем основное допущение: скорость и температура изменяются на протяжении ламинарного подслоя и турбулентного ядра по линейному закону. Это позволяет записать $\frac{dt}{dy} = \frac{t_{ЛП} - t_W}{\delta_{ЛП}}$, $\frac{dv_x}{dy} = \frac{v_{ЛП}}{\delta_{ЛП}}$,

Отсюда

$$\frac{dt}{dv_x} = \frac{t_{ЛП} - t_W}{v_{ЛП}},$$

и перепад температуры

$$t_{ЛП} - t_W = v_{ЛП}\frac{q\mu}{\tau\lambda}, \qquad (8.14)$$

Перейдем к расчету переноса в турбулентном ядре, при этом сделаем следующие допущения:
- перенос потока теплоты в ламинарном и турбулентных слоях одинаков;
- касательные напряжения τ, τ_t примем равными экспериментально измеренным значениям $\tau_э$, то есть

$$\tau = \tau_t = \tau_э$$

Из (8.13) получаем

$$q = \tau_Э c_P \frac{t_0 - t_{ЛП}}{v_0 - v_{ЛП}},$$

а перепад температуры по толщине турбулентного слоя

$$t_0 - t_{ЛП} = \frac{q\mathrm{v}_0}{\tau_Э c_P}\left(1 - \frac{\mathrm{v}_{ЛП}}{\mathrm{v}_0}\right), \qquad (8.15)$$

Суммарный перепад температур (t_0 - t_W) равен

$$t_0 - t_W = \frac{q\mathrm{v}_0}{\tau_Э c_P}\left[\frac{\mu c_P}{\lambda}\frac{\mathrm{v}_{ЛП}}{\mathrm{v}_0} + 1 - \frac{\mathrm{v}_{ЛП}}{\mathrm{v}_0}\right] = \frac{q\mathrm{v}_0}{\tau_Э c_P}\left[1 - \frac{\mathrm{v}_{ЛП}}{\mathrm{v}_0}(\mathrm{Pr} - 1)\right],$$

Из последнего соотношения находим значение коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = \frac{q}{t_0 - t_W} = \frac{\tau_Э c_P}{\mathrm{v}_0} E, \qquad (8.16)$$

$$E = \left[1 - \frac{\mathrm{v}_{ЛП}}{\mathrm{v}_0}(\mathrm{Pr} - 1)\right]^{-1}.$$

Для газов критерий Прандтля близок к единице, то есть Pr ≈ 1 и E = 1 и формула (8.16) упрощаются

$$\alpha = (\tau_Э \cdot C_p) / \mathrm{v}_0 .$$

Для характеристики касательных напряжений на стенке используется коэффициент трения R

$$\tau = R\frac{\rho \mathrm{v}_0^2}{2} \qquad (8.17)$$

Если объединить выражения (8.16) и (8.17), то получим в критериальной форме

$$\mathrm{Nu} = (\mathrm{R}/2) \cdot \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr} \cdot \mathrm{E} \qquad (8.18)$$

Комплекс

$$\mathrm{St} = \mathrm{Nu} / (\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr})$$

известен как критерий Стантона, для Pr = 1

$$\mathrm{St} = 1/2 \cdot \mathrm{R} \qquad (8.19)$$

8.3. Анализ частных случаев

Теплообмен пластины. Из гидродинамики известна формула для гидравлического сопротивления,

$$R = \frac{0{,}0592}{(\mathrm{Re}_x)^{0{,}2}}, \qquad (8.20)$$

тогда локальное число Нуссельта на основании (8.16) и (8.20)

$$Nu_x = 0{,}0296(\mathrm{Re}_x)^{0{,}8} \frac{\mathrm{Pr}}{1 + \frac{\nu_{\text{ЛП}}}{\nu_0}(\mathrm{Pr} - 1)}.$$

Если Pr = 1, то

$$Nu_x = 0{,}0296(\mathrm{Re}_x)^{0{,}8}. \qquad (8.21)$$

Эта формула хорошо согласуется с экспериментальными данными и может быть использована для расчетов, но для $\mathrm{Pr} \neq 1$ она непригодна.

Теплообмен в трубах и каналах. Гидродинамическое сопротивление для этого случая

$$R = \frac{0{,}0768}{(\mathrm{Re}_x)^{1/4}}. \qquad (8.22)$$

Найдем теплообмен в трубе при турбулентном движении. Согласно формуле (8.16)

$$St = \frac{Nu_x}{\mathrm{Re}_x \mathrm{Pr}} = \frac{0{,}038(\mathrm{Re}_x)^{-1/4}}{1 + \frac{\nu_{\text{ЛП}}}{\nu_0}(\mathrm{Pr} - 1)}. \qquad (8.23)$$

Так как $\nu_{\text{ЛП}}$ неизвестна, то воспользуемся специальной обработкой опытных данных и представим последнюю формулу в виде

$$St = \frac{0{,}038(\mathrm{Re}_x)^{-1/4}}{1 + A(\mathrm{Pr} - 1)}. \qquad (8.24)$$

При такой обработке данных опыта академик М.А. Михеев получил для А значение

$$A = 1{,}5\,\mathrm{Pr}^{-1/6}(\mathrm{Re}_x)^{-1/8}.$$

Аналогично можно получить зависимости на основе других гидродинамических формул.

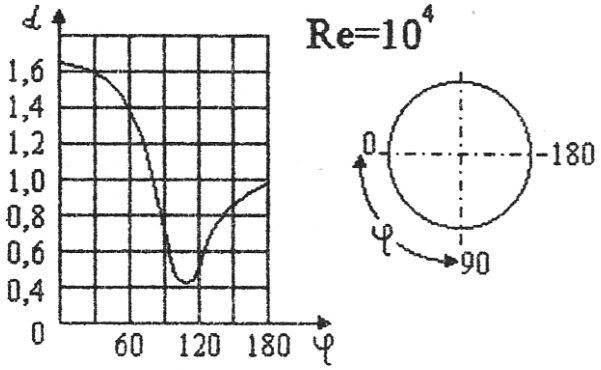


Рис. 8.6. Зависимость коэффициента теплоотдачи от угла φ для разных точек поверхности трубы

Вынужденное поперечное обтекание труб. Такого рода задачи широко встречаются при расчете теплообменников. При малых значениях числа Re наблюдается безотрывное обтекание, затем в концевой части образуются два симметричных вихря (рис. 8.6). Большая часть поверхности омывается безотрывно течением, а остальная подвержена сложной циркуляции жидкости.

Аналитические методы не позволяют описать отрывные течения, поэтому, формулы строятся на обработке экспериментальных данных. График α = f (φ) представлен на рис.8.6. Для количественных расчетов можно рекомендовать формулы [6,7]:

$$\mathrm{Re}_{f,d} = 5 \div 10^3;$$

$$Nu_{f,d} = 0{,}5\sqrt{\mathrm{Re}_{f,d}}\,\mathrm{Pr}_\mathrm{f}^{0{,}38}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\mathrm{f}}{\mathrm{Pr}_\mathrm{w}}\right)^{0{,}25};$$

$$\mathrm{Re}_{f,d} = 10^3 \div 2\cdot 10^5;$$

$$Nu_{f,d} = 0{,}25\,\mathrm{Re}_{f,d}^{0{,}6}\,\mathrm{Pr}_\mathrm{f}^{0{,}38}\left(\frac{\mathrm{Pr}_\mathrm{f}}{\mathrm{Pr}_\mathrm{w}}\right)^{0{,}25}.$$

где индексы f и w говорят о том, что соответствующие физические параметры, входящие в числа Nu, Pr, Re, рассчитываются при температурах жидкости (f) и стенки (w).

8.4. Полуэмпирическая теория турбулентности

Полуэмпирическая теория применяется для анализа теплообмена при тербулентном течении. Ниже приведена основная схема рассуждений.

Представим мгновенное значение температуры при турбулентном течении в виде

$$t = \bar{t} + t', \tag{8.25}$$

где $\bar{t}$ - средняя температура; t' - пульсационное изменение температуры.

Подставим в дифференциальное уравнение энергии значение температуры (8.25) и используем зависимость $ac\rho = \lambda$, тогда уравнение энергии после преобразований примет вид

$$\rho c\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{x}\frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \rho c\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{y}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho c\bar{\mathrm{v}}'_\mathrm{y}\bar{t}') - \rho\bar{\mathrm{v}}'_\mathrm{x}\bar{\mathrm{v}}'_\mathrm{y}\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_\mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}}. \tag{8.26}$$

Проделаем те же преобразования с уравнением Навье-Стокса, т.е. примем ряд допущений. Первое допущение: представим произведение $\rho c\bar{\mathrm{v}}'_\mathrm{y}\bar{t}'$ в форме, аналогичной первому члену в правой части уравнения (8.26):

$$-\rho c\bar{\mathrm{v}}'_\mathrm{y}\bar{t}' = A_q\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\right), \tag{8.27}$$

где A_q - коэффициент турбулентной теплопроводности. Тогда уравнение энергии (8.26) примет вид

$$\rho c\bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}\frac{\partial\bar{t}}{\partial x}+\rho c\bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{y}}\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda+A_q)\frac{\partial\bar{t}}{\partial y}+(\mu+A_\sigma)\left(\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}}{\partial \mathrm{y}}\right)^2\right]. \qquad (8.28)$$

Допущение №2 сохраняет силу и выражается равенством:

$$\sigma_T=\tau_W\,.$$

Далее идёт ряд допущений которые позволяют в итоге получить значения скоростей при турбулентном движении и гидравлического сопротивления. Коэффициент теплоотдачи рассчитывают по формуле (8.19)

$$St=Nu/(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr})=0.5\mathrm{R},$$

которая, как уже указывалось, удовлетворительно работает для случая, когда $\mathrm{Pr}\approx 1.$

Глава 9. Теплообмен в разрежённых газах

9.1. Описание физических процессов

а) Критерий Кнудсена. При обычном рассмотрении переноса теплоты в газах структура газа считается сплошной и поэтому не требуется привлечения представлений о молекулярном строении газа. Поток и явления переноса теплоты при таких условиях непрерывности среды могут быть адекватно выражены через критерии Рейнольдса, Нуссельта и Прандтля. Однако при малых абсолютных давлениях газ частично теряет характерные свойства непрерывности, и появляются явления, которые могут быть объяснены только в том случае, когда будут приняты во внимание представления о молекулярном строении газа.

Понятие "разреженный газ" – относительное и отражает тот факт, что столкновения молекул в процессе их хаотического движения со стенками более существенны по сравнению с их столкновениями друг с другом.

Для характеристики разреженности газа вводят критерий Кнудсена

$$\mathrm{Kn}=\frac{\Lambda}{\mathrm{L}}, \qquad (9.1)$$

где Λ - средняя длина свободного пробега молекул, L - характерный размер тела.

Если Kn>>1, то газ считается разреженным, при Kn<<1 говорят о сплошной среде (более детальная классификация режимов будет приведена в дальнейшем).

В табл.9.1 приведена средняя длина свободного пробега молекул в воздухе при различной высоте. Известно, что в порах мелкодисперсных порошков (пород, грунтов) с диаметром частиц d < 1 мкм эффект разрежения наблюдается уже при атмосферном давлении, что еще раз подчеркивает относительность термина "разреженный газ".

Таблица 9.1

H , км	P, Па ;	мм рт.ст.	Λ , см
0	I0I300;	760	$8{,}6\cdot I0^{-6}$
II	23459;	I76	$2{,}8\cdot I0^{-5}$
32	866;	6,5	$7{,}7\cdot I0^{-4}$
62	2I;	$I{,}6\cdot I0^{-I}$	$4{,}9\cdot I0^{-2}$
84	I,2;	$9\cdot I0^{-3}$	0,5
I00	$I{,}3\cdot I0^{-I}$;	$I0^{-3}$	6,0
I50	$I{,}2\cdot I0^{-3}$;	$8{,}7\cdot I0^{-6}$	2000
400	$I{,}6\cdot I0^{-4}$;	$I{,}2\cdot I0^{-6}$	5500

При течении разряженных газов характерными особенностями являются скачки скорости (рис.9.1,а) и температуры на поверхности (рис.9.1,б). Количественно данные явления характеризуются с помощью коэффициента скольжения и коэффициента аккомодации.

б) Коэффициент скольжения. Введем коэффициент

$$f = \frac{mv_{\tau п} - mv_{\tau o}}{mv_{\tau п}}, \qquad (9.2)$$

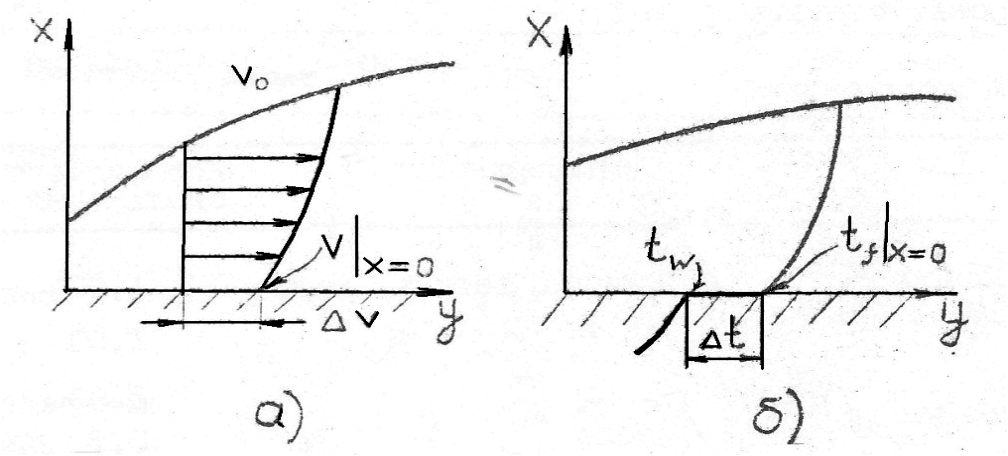


Рис. 9.1. Скачки скорости и температуры

который характеризует полноту обмена тангенциальным количеством движения. Здесь m - масса молекулы, $v_{\tau o}$ и $v_{\tau п}$ - тангенциальные составляющие скорости до и после отражения (рис.9.2). Если соударение упругое, то f = 0, при абсолютном неупругом взаимодействии f=1 (при неупругом соударении молекула поглощается стенкой, т.е. временно задерживается, и в дальнейшем может иметь любую тангенциальную составляющую).

Для газового потока (большого числа молекул) коэффициент f принимает значение

$$f = \frac{v - u}{v}, \qquad (9.3)$$

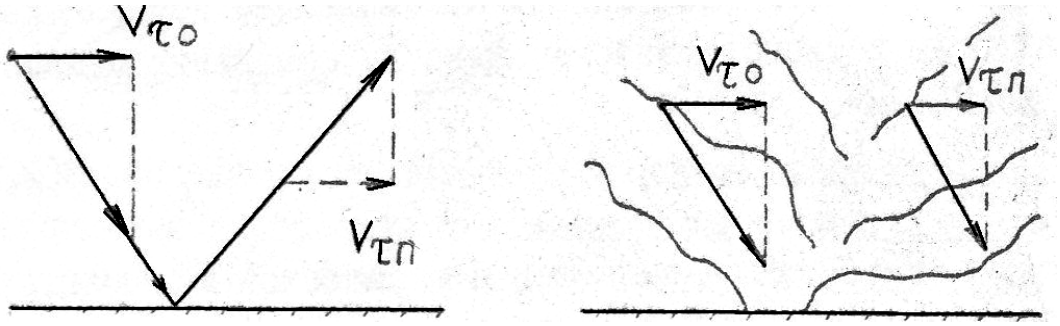


Рис. 9.2. Здесь $v_{\tau o}$ и $v_{\tau п}$ тангенциальные составляющие скорости потока до и после взаимодействия со стенкой.

В большинстве случаев молекулы, исходящие от стенки, могут разлетаться в разные стороны беспорядочно и u – близко к 0, т.е. f≈1. В табл.9.2 приведены значения f для некоторых систем. В большинстве случаев в первом приближении можно считать f=1.

Таблица 9.2

Газ	Поверхность	Коэффициент скольжения f
Воздух	Бронза, латунь, медь	I,00
CO_2	То же	I,00
Воздух	Ртуть	I,00
	Масло	0,9
Воздух, He, H_2, O_2	Стекло	I,0

Максвелл на основании молекулярно-кинетической теории получил выражение для скачка скорости у поверхности

$$v|_{x=0} - v_w = \xi\left(\frac{dv_y}{dy}\right)_{x=0} = \Delta v, \qquad (9.4)$$

где $\xi = \frac{2-f}{f}\Lambda$ - коэффициент скольжения; $v|_{x=0}$ - скорость газа у поверхности стенки; v_w - скорость поверхности; $\left(\frac{dv_y}{dy}\right)_{x=0}$ - градиент скорости у поверхности.

в) Коэффициент аккомодации. Эффект температурного скачка был впервые обнаружен в 1898г. Смолуховским. В дальнейшем Кнудсен предложил ввести коэффициент аккомодации, который характеризует долю истинного энергообмена по сравнению с максимально возможным:

$$a = \frac{E_{пад} - E_{отр}}{E_{пад} - E_w}, \tag{9.5}$$

где $E_{пад}$, $E_{отр}$ - энергия падающей и отраженной молекулы, E_w - энергия молекулы при температуре стенки.

Для одноатомного идеального газа точно, а для других газов с хорошим приближением равенство (9.5) можно записать в виде

$$a = \frac{t_{пад} - t_{отр}}{t_{пад} - t_w}. \tag{9.6}$$

Значения a для некоторых систем приведены в табл.9.3.

Таблица 9.3

Материал	Газ	Коэффициент аккомодации a
Вольфрам	H_2	0,2
	N_2	0,35
Платина	H_2	0,36
	N_2	0,89
Полированная платина	H_2	0,36
	O_2	0,84
	CO_2	0,87
	Воздух	0,88
Чугун, лак	Воздух	0,87

Из молекулярно-кинетической теории газа Максвелл показал, что температурный скачок на поверхности описывается выражением

$$\Delta T = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{\Lambda}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x=0}, \tag{9.7}$$

где $k = \frac{C_p}{C_v}$ - постоянная адиабаты.

Из выражений (9.4), (9.7) следует, что температурный и скоростной скачок имеют место всегда, но при больших Λ они принимают заметные значения.

9.2. Режимы течения газа

При исследовании теплообмена необходимо знать характер протекающих процессов и доминирующих явлений. Это можно сделать с помощью классификации режимов течения газа, которая проводится по численным значениям следующих критериев: критерия Маха M, Re, Kn. Укажем взаимосвязь между ними:

$$\mathrm{Kn} = 1{,}26\sqrt{\mathrm{k}}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}. \tag{9.8}$$

Для одноатомного и двухатомного газов формула (9.8) имеет соответственно вид

$$\mathrm{Kn} = 1{,}66\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}; \quad \mathrm{Kn} = 1{,}48\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}.$$

В отдельных случаях в критерий Кнудсена в качестве определяющего размера вводят толщину пограничного слоя δ

$$\mathrm{Kn}_\delta = \frac{\Lambda}{\delta} = \frac{\Lambda}{\mathrm{L}} \cdot \frac{\mathrm{L}}{\delta} = \mathrm{Kn}\frac{\mathrm{L}}{\delta}.$$

При обтекании пластины ламинарным потоком

$$\frac{\delta}{\mathrm{L}} = \frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \qquad (9.9)$$

Классификация режимов, предложенная Тзяном, приведена в табл.9.4.

Таблица 9.4

Вид течения	K_n	$M/Re, M/\sqrt{Re}$
Непрерывное (о прилипанием) течение	$K_{n\delta} < 0{,}003$	$\frac{M}{\sqrt{Re}} < 0{,}01$
Скользящее течение	$0{,}003 < K_{n\delta} < 0{,}33$	$0{,}01 < \frac{M}{\sqrt{Re}} < 1$
Свободно-молекулярное течение	$K_{n\delta} > 2$	$\frac{M}{Re} > 10$

Другая классификация режимов предложена Девиеном:

$\mathrm{Kn} < 10^{-3}$ - непрерывная среда;

$10^{-3} < \mathrm{Kn} < 0{,}25$ - режим скольжения;

$0{,}25 < \mathrm{Kn} < 10$ - переходный режим от течения со скольжением к свободно-молекулярному;

$\mathrm{Kn} > 10$ - свободно-молекулярный режим.

При $\mathrm{Kn} > 10$ межмолекулярными столкновениями можно пренебречь. Область аэродинамики, которая занимается этой проблемой, называется супераэродинамикой, или молекулярной аэродинамикой.

9.3. Расчет коэффициента теплоотдачи по Кавенау

Удовлетворительной формулировки уравнений движения потока, а также уравнений энергии, которые могли бы описать поверхностное трение и перенос теплоты в слегка разряженном газе в скользящем потоке, не существует. Это приводит к необходимости практические расчеты строить на приближенных подходах. Они основываются на использовании

уравнений для сплошной среды, а скачки скорости и температуры учитываются законами для разреженного газа.

Запишем выражение для теплового потока q в условиях непрерывного течения (индекс "0"):

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha_0(T_f - T_{w0}). \qquad (9.10)$$

Если газовый поток разрежен, а критерий Re=idem (соблюдается гидродинамическое подобие), то возникает температурный скачок, который вызывает дополнительное тепловое сопротивление. Запишем выражение, аналогичное (9.10):

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha(T_f - T_w). \qquad (9.11)$$

где α - учитывает как тепловое сопротивление пограничного слоя, так и температурный скачок.

При одинаковых тепловых потоках в пограничном слое у поверхности градиенты температуры одинаковы, т.е. одинаковы углы наклона касательной к температурной кривой T=T(x) у стенки (рис.9.3); тогда для температур справедливо соотношение

$$T_w = T_{w0} - \Delta T. \qquad (9.12)$$

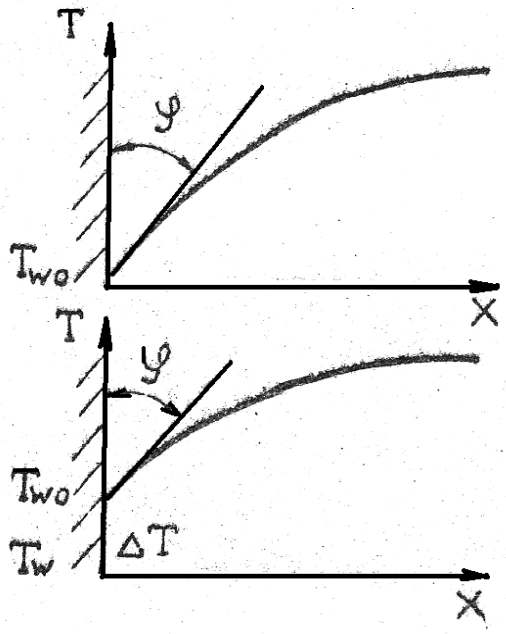


Рис. 9.3. Температурное поле в пограничном слое при отсутствии (ΔT=0) и наличии скачка температуры на поверхности

Приравняем правые части (9.10), (9.11) с учетом (9.12)

$$\alpha_0(T_f - T_{w0}) = \alpha(T_f - T_{w0}) + \alpha\Delta T.$$

Разделим обе части на $\alpha_0(T_f - T_{w0})$:

$$1 = \frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\alpha}{\alpha_0}\cdot\frac{\Delta T}{T_f - T_{w0}}.$$

Согласно выражению (9.7)

$$\Delta T = \beta' \frac{\Lambda}{\mathrm{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}; \quad \beta' = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{2k}{k+1}.$$

Тогда

$$1 = \frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\beta' \Lambda}{\mathrm{Pr}}.$$

Здесь использовано соотношение (9.10)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{\alpha_0}{\lambda} (T_f - T_{w0}).$$

Окончательно в критериальном виде

$$Nu = \frac{1}{\frac{1}{Nu_0} + \beta' \frac{Kn}{\mathrm{Pr}}}. \qquad (9.13)$$

Формула (9.13) учитывает температурный скачок на одной поверхности, что достигнуто за счет рассмотрения условий на границе раздела. Эта схема была предложена Кавенау и группой американских ученых в конце 50-х годов. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что формула (9.13) в целом правильно отражает влияние температурного скачка, однако при больших M наблюдается сильное расхождение (т.к. скачок скорости не учитывается) с экспериментом.

9.4. Эффективные значения коэффициентов переноса (метод Р.С. Прасолова)

Введем эффективные коэффициенты переноса, которые учитывают как собственно свойства газа, так и влияние скачков скорости и температуры у поверхности.

Рассмотрим перенос теплоты в плоской газовой прослойке, ограниченной поверхностями с температурами T_1 и T_2 (рис.9.4).

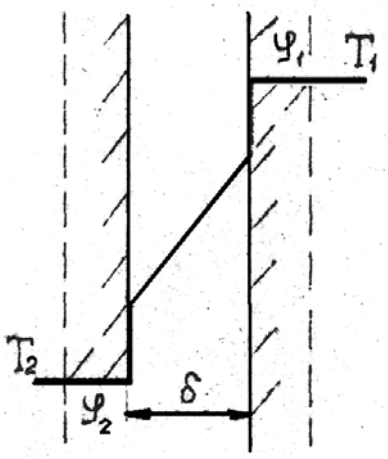


Рис. 9.4. Ход температуры в плоской газовой прослойке

Плотность теплового потока в прослойке можно выразить через истинную теплопроводность газа, увеличив прослойку на толщину $\varphi_1 + \varphi_2$:

$$q = \lambda_0 \frac{T_1 - T_2}{\delta + \varphi_1 + \varphi_2}. \qquad (9.14)$$

С другой стороны, сохраняя размер прослойки и вводя тот же поток q, запишем

$$q = \lambda_{эф} \frac{T_1 - T_2}{\delta}. \qquad (9.15)$$

Сравнив выражения (9.14) и (9.15), найдем

$$\lambda_{эф} = \lambda_0 \frac{\delta}{\delta + \varphi_1 + \varphi_2}. \qquad (9.16)$$

Для нахождения φ_1 и φ_2 воспользуемся равенством (9.7), где производную $\frac{dT}{dy}\Big|_{x=0}$ для линейного распределения температуры можно записать в виде

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{x=0} = \frac{\Delta T}{\varphi}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{2-a}{a} \cdot \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{\Lambda}{Pr}.$$

Используя последнее соотношение для нахождения φ_1 и φ_2, получим выражение для $\lambda_{эф}$:

$$\frac{\lambda_{эф}}{\lambda_0} = \left[1 + \frac{2k}{k+1}\left(\frac{2-a_1}{a_1} + \frac{2-a_2}{a_2}\right)\frac{Kn}{Pr_0}\right]^{-1}. \qquad (9.17)$$

Здесь λ_0 и Pr_0 берутся из таблиц при нормальном давлении (рис.9.5).

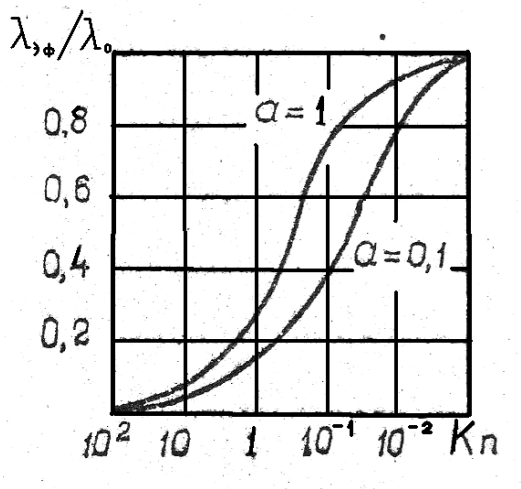


Рис. 9.5. Зависимость $\frac{\lambda_{эф}}{\lambda_0}$ от критерия Кнудсена

Если рассматривается теплообмен одиночной пластины, когда имеет место только один температурный скачок, то

$$\frac{\lambda_{эф}}{\lambda_0}=\left[1+\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{2-a}{a}\cdot\frac{Kn}{\mathrm{Pr}_0}\right]^{-1}. \qquad (9.18)$$

Аналогичное выражение можно получить для эффективного значения динамической вязкости с учетом скачка скорости. С одной стороны, касательное напряжение $\tau=\mu_0\frac{\mathrm{v}}{\delta+\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, с другой стороны, $\tau=\mu\frac{\mathrm{v}}{\delta}$.

Приравняв правые части последних выражений, с учетом (9.4) получим

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu}=\left[1+\left(\frac{2-f_1}{f_1}+\frac{2-f_2}{f_2}\right)Kn\right]^{-1}. \qquad (9.19)$$

При теплообмене одиночной пластины

$$\frac{\mu_{эф}}{\mu}=\left[1+\frac{2-f}{f}Kn\right]^{-1}. \qquad (9.20)$$

9.5. Расчёт коэффициента теплоотдачи по Р.С. Прасолову

Рассмотрим метод расчета, предложенный Р.С. Прасоловым. Его суть заключается в использовании критериальных уравнений для сплошного потока, а в критерии подставляются эффективные значения параметров. Проиллюстрируем метод конкретными примерами.

Коэффициент восстановления при обтекании пластины при ламинарном режиме течения определяется по формуле $r=\sqrt{\mathrm{Pr}}$. Найдем значение Pr с учетом скачка скорости и температуры v и T:

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{a}=\frac{\nu c\rho}{\lambda}=\frac{\mu c}{\lambda}=\frac{1+\frac{2-a}{a}\cdot\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{Kn}{\mathrm{Pr}_0}}{1+\frac{2-f}{f}Kn}\cdot\frac{\mu_0 c}{\lambda_0}=\frac{1+\frac{2+a}{a}\cdot\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{Kn}{\mathrm{Pr}}}{1+\frac{2-f}{f}Kn}\cdot\mathrm{Pr}_0. \qquad (9.21)$$

Сравним это с литературными данными. Если Kn>>1, то

$$r=\sqrt{\mathrm{Pr}}=\left[\frac{(2-a)2kf}{a(k+1)\mathrm{Pr}_0(2-f)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Молекулярно-кинетическая теория для данного режима дает соотношение $r=\frac{2k}{k+1}$, которое при a=0,9 и f=1 находится в хорошем соответствии с последним выражением.

Теплообмен при обтекании пластины. Толщина пограничного слоя для течения с прилипанием определяется по формуле

$$\frac{\delta}{x}=\frac{4{,}64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\quad,\quad \mathrm{Re}_x=\frac{\mathrm{vx}}{\nu},$$

$$\mathrm{Re}_x=\frac{\mathrm{vx}\rho}{\mu_0\left(1+\dfrac{2-f}{f}Kn\right)}=\frac{\mathrm{Re}_0}{1+\dfrac{2-f}{f}Kn},\quad \frac{\mu_0}{\rho}=\nu \qquad (9.22)$$

Для расчета коэффициента теплоотдачи при обтекании пластины используют формулу

$$Nu=0{,}67\,\mathrm{Re}^{0{,}5}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}. \qquad (9.23)$$

С учетом скачков температуры эта формула приобретает вид

$$Nu_{эф}=\left(\frac{\alpha L}{\lambda}\right)_{эф}=\left(\frac{\alpha L}{\lambda}\right)_0\left[1+\frac{2-a}{a}\cdot\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{Kn}{\mathrm{Pr}_0}\right]^{+1}; \qquad (9.24)$$

$$Nu_{эф}=\left(1+\frac{2-\mathrm{f}}{\mathrm{f}}Kn\right)^{-0.17}\left[1+\frac{2k}{k+1}\frac{2-a}{a}\frac{Kn}{\mathrm{Pr}_0}\right]^{0.67} \qquad (9.25)$$

Аналогично получаются расчетные соотношения для описания других процессов.

Глава 10. Обтекание тел высокоскоростным потоком газа

10.1. Скорость звука

Скорость звука в газе - скорость распространения в газе малых изменений плотности давления. Пусть колебания камертона передаются частицами воздуха, тогда возникает возмущение воздуха, распространение возмущения называют волной. На рис.10.1 показаны шарики, соединенные пружинками; деформация последних имитирует распространение уплотнения в стержне, а движение шариков - движение частиц в реальном стержне.

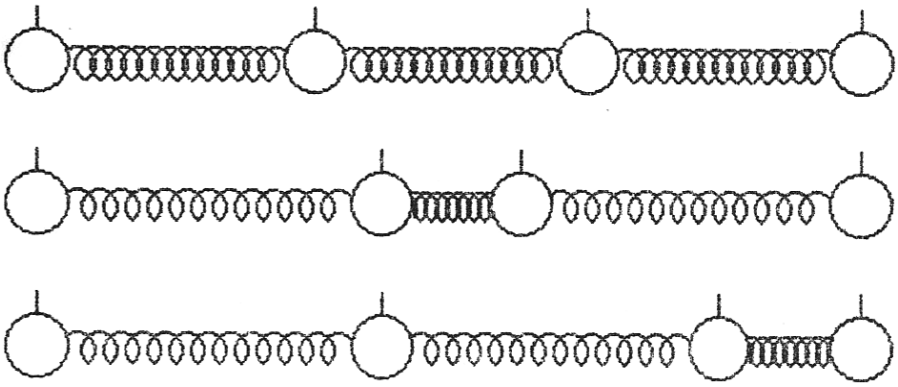


Рис.10.1. К пояснению скорости распространения изменений плотности и давления (скорости звука)

На рис.10.2 представлена неподвижная масса газа с давлением p, плотностью ρ, температурой T, далее производим толчок поршня. Давление повышается, передний фронт

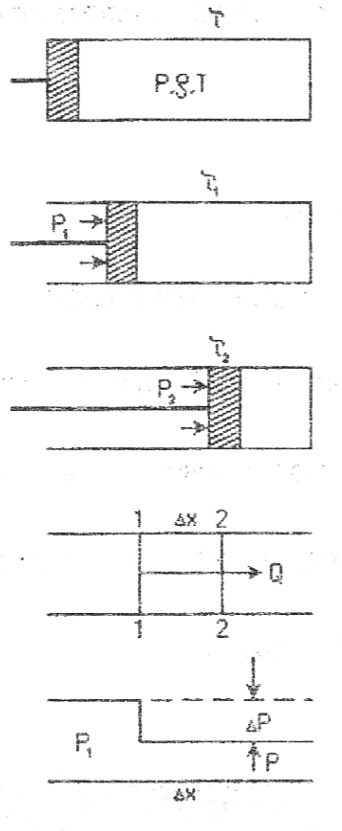


Рис.10.2 Изменение давления в трубе с поршнем.
звуковой волны в момент времени τ_1 имеет давление p_1, а в момент времени τ_2 - давление p_2.

Изменение плотности Δρ и давления Δp при этом равно

$$\Delta\rho_1 = \rho_1 - \rho\,,\ \Delta p = p_1 - p\,.$$

Пусть за время $\Delta\tau$ звуковая волна прошла расстояние Δx, скорость звука равна $a_{зв} = \dfrac{\Delta x}{\Delta\tau}$.

Ньютон связал изменение давления Δp и плотности $\Delta\rho$ со скоростью звука $a_{зв}$ и получил

$$a_{зв} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} \qquad (10.1)$$

Отношение $\Delta p\ /\Delta\rho$ зависит от закона, по которому происходит сжатие газа. Ньютон предположил, что сжатие происходит по изотермическому закону.

В 1810 году Лаплас предположил, что процесс колебаний происходит достаточно быстро, и температура газа не успевает выровняться, то есть

надо использовать адиабатический закон сжатия газа, и получил скорость звука

$$a_{\text{зв}} = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} \quad , \qquad k = \frac{C_p}{C_{\text{V}}} \tag{10.2}$$

Найдем теперь зависимость скорости звука от температуры, для этого напомним следующие зависимости из кинетической теории газов:

$$\begin{aligned} &pV = \frac{m}{\mu}RT, p = \frac{m}{V}\frac{R}{\mu}T = \rho\frac{R}{\mu}T, \frac{p}{\rho} = \frac{R}{\mu}T, \\ &a_{\text{ЭВ}} = \sqrt{k\frac{p}{\rho}} = \sqrt{k\frac{R}{\mu}T}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

10.2. Нагревание тел, обтекаемых высокоскоростным потоком газа

Рассмотрим выражение для полной энергии газа в горизонтальной трубе, где $z_1 = 0$:

$$\frac{E}{m} = c_p T + \frac{\text{v}^2}{2} = i + \frac{\text{v}^2}{2}, \quad i = \frac{p}{\rho}\frac{k}{k-1} = \frac{a_{зв}^{\ 2}}{\kappa - 1} \tag{10.4}$$

где i – энтальпия газа, v – скорость газа. Найдем отношение

$$N = \frac{\text{v}^2}{2i} = \frac{\text{v}^2}{2C_p T} = \frac{k-1}{2}\left(\frac{\text{v}}{a_{\text{ЭВ}}}\right)^2 = \frac{k-1}{2}M^2, \tag{10.5}$$

где М- критерий Маха,

$$M = \frac{\text{v}}{a_{\text{ЗВ}}} = \frac{\textit{скорость}\ \textit{движения}\ \textit{частиц}\ \textit{газа}}{\textit{скорость}\quad\textit{звука}}.$$

Выражение (10.5) связано со следующим преобразованиями:

$$\left.\begin{aligned} &c_p - c_v = R, \ \frac{c_p}{c_v} = k, \\ &\frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{R}{c_v} = k - 1 = \frac{R}{c_v}\frac{c_p}{c_p}, \\ &\frac{k}{k-1} = \frac{R}{c_p}, \quad c_p = R\frac{k}{k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

где R – газовая постоянная.

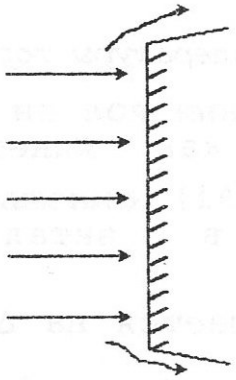


Рис.10.3. Полное торможение потока на стенке

На рис. 10.3 представлен случай полного перехода кинетической энергии в потенциальную из-за сжатия газа при полном торможении потока на стенке. Этот процесс приводит к нагреванию газа, так как кинетическая энергия $E_{кин}$ полностью переходит в энтальпию. Первоначальная температура газа T_f повышается на ΔT и принимает значение температуры полностью заторможенного газа (температуры торможения) T_0, то есть

$$T_0 = T_f + \Delta T \qquad (10.7)$$

Проведем следующее преобразование

$$\frac{T_0}{T_f} = 1 + \frac{\Delta T}{T_f} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T_f} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2,$$

и представим формулу (10.7) в виде

$$T_0 = T_f \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right), \qquad (10.8)$$

Для воздуха k = 1,4, и последняя формула упрощается

$$T_0 = T_f(1 + 0.2 \cdot M^2)$$

На рис.10.4 приведен график этой зависимости, из которой следует, что при M > 2.5 температура поверхности становится выше 300°, и при дальнейшем увеличении M надо использовать более теплостойкий материал, и в обиход входит понятие теплового барьера. Последнее связано с термостойкостью материала, например, при M > 5 для тепловой защиты надо использовать керамические материалы.

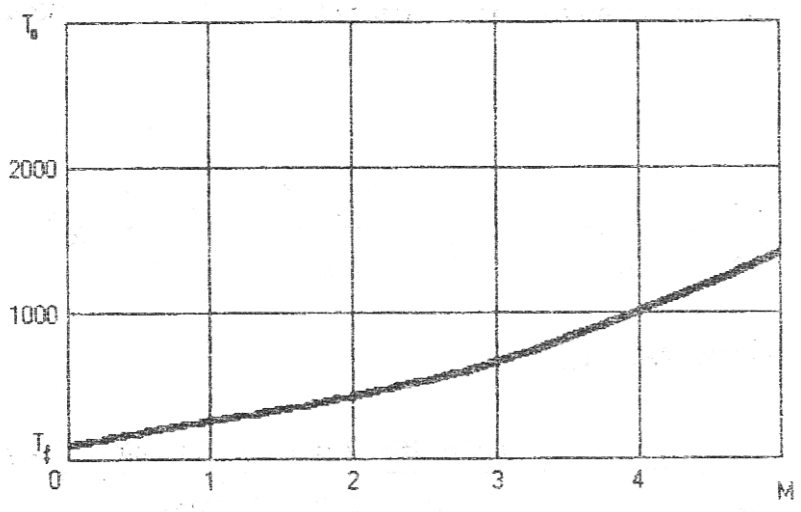


Рис.10.4. Зависимость температуры торможения от числа Маха

При обтекании тел не вся кинетическая энергия переходит в тепловую и выражению (10.8) следует придать иную форму

$$T_0 = T_f + r\frac{v^2}{2c_p} = T_f \left(1 + r\frac{k-1}{2} M^2 \right), \qquad (10.9)$$

где T_r - собственная температура, или температура восстановления; r - меньший или равный единице коэффициент, учитывающий, какая доля кинетической энергии переходит в тепловую. Из (10.9) следует, что

$$r = \frac{T_r - T_f}{\frac{v^2}{2c_p}} = \frac{T_r - T_f}{T_0 - T_f}. \qquad (10.10)$$

Можно показать, что при ламинарном продольном обтекании пластины газом $r = \sqrt{\mathrm{Pr}}$, для турбулентного процесса $r = \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$.

10.3. Обобщенный коэффициент теплоотдачи

Для рассматриваемых процессов введем понятие "обобщенного коэффициента теплоотдачи", которое определяется из следующей зависимости:

$$q = \alpha(T_f + r\frac{v^2}{2c_p} - T_w) = \alpha(T_r - T_w) \qquad (10.11)$$

где T_W - температура стенки.

При $T_f \geq 3000$ К возникает диссоциация молекул N_2 и O_2, а также реакция окисления азота, окислы которого тоже диссоциируют. При $T_f \geq 5000$-6000 К происходит ионизация воздуха, и формула (10.8) при этих процессах усложняется. Когда диссоциированный газ соприкасается с холодной поверхностью, возникает обратный процесс - рекомбинация, при которой выделяется тепло. На рис. 10.5 приведена зависимость T_f от числа М для случаев

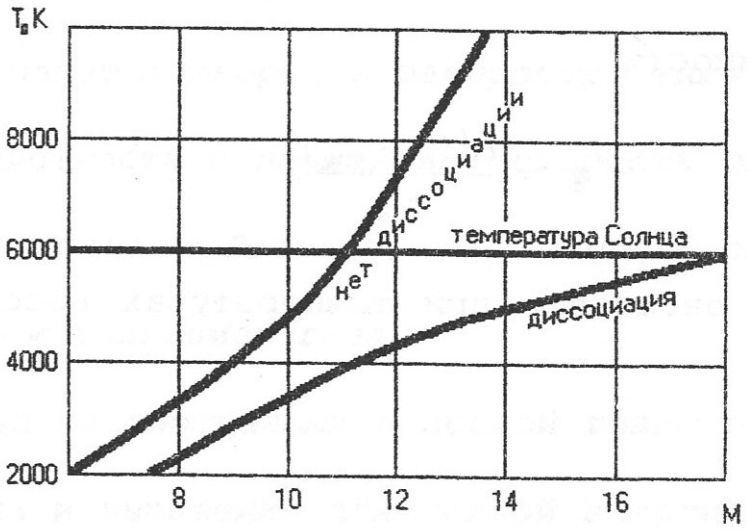


Рис.10.5. Зависимость температуры восстановления от числа Маха

наличия и отсутствия диссоциации, из которой следует сложность указанных процессов. В таблице 10.1 приведена связь T_r от числа Маха М,

Таблица 10.1

M	0.2	0.5	1.0	2.0	10
$(T_r-T_f)/T_f*100\%$	0.8	5	20	80	2000

Отметим, что при числе M ≈ 3 или 100 м/с температура повышается за счет процесса торможения; при M ≥ 10 имеют место процессы как диссоциации, так и рекомбинации; при M ≥ 25 происходит ионизация газа. Во всех этих случаях гидродинамические, тепловые и химические процессы взаимосвязаны.

Заметим, что при M > 0.3 обычно учитывают повышение температуры газа за счет его торможения, и используется формула (10.11). При усложнении процессов вместо этой формулы используется зависимость

$$q = \frac{\alpha(i_r - i_w)}{c_{ps}}, M \geq 1{,}6, \qquad (10.12)$$

где $i_r = c_P T_r$, $i_W = c_P T_W$.

При описании химических процессов целесообразно применять зависимости

$$q = \frac{\alpha(I_r - I_w)}{c_{pw}}, \qquad (10.13)$$

где I_W, I_r - энтальпии при температурах восстановления и стенки.

Глава 11. Теплообмен при конденсации пара и кипении жидкостей

11.1. Пленочная и капельная конденсация

При соприкосновении пара с твердой поверхностью, температура которой t_W меньше температуры насыщения $t_S (t_W < t_S)$, пар конденсируется на стенке. При этом различают капельную и пленочную конденсации. В первом случае конденсат осаждается в виде отдельных капелек, во втором – в виде сплошной пленки. Характер конденсации зависит от величины угла смачивания β (краевого угла). Напомним, что при $\beta < 90^\circ$ твердую поверхность называют смачиваемой, при $\beta > 90^\circ$ - несмачиваемой (рис. 11.1).

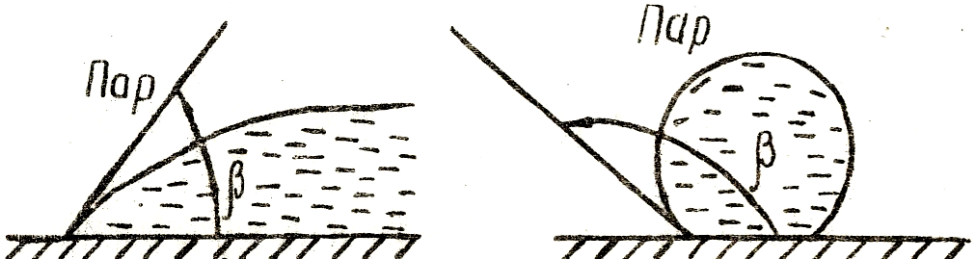


Рис.11.1. Характер конденсации пара на твёрдой поверхности

Совершенно чистые поверхности металлов хорошо смачиваются водой, загрязнённые – неполно и вовсе не смачиваются. Напротив, чисто металлическая поверхность очень плохо смачивается ртутью.

Выпадающие на чистую металлическую поверхность капли воды благодаря хорошей смачиваемости растекаются по поверхности, сливаются вместе, т.е. образуют пленку. В стационарном режиме в фиксированном месте поверхности толщина пленки постоянна, так как количество стекающей жидкости равно количеству образующегося конденсата, а пар при этом отделен от металлической поверхности сплошной пленкой конденсата.

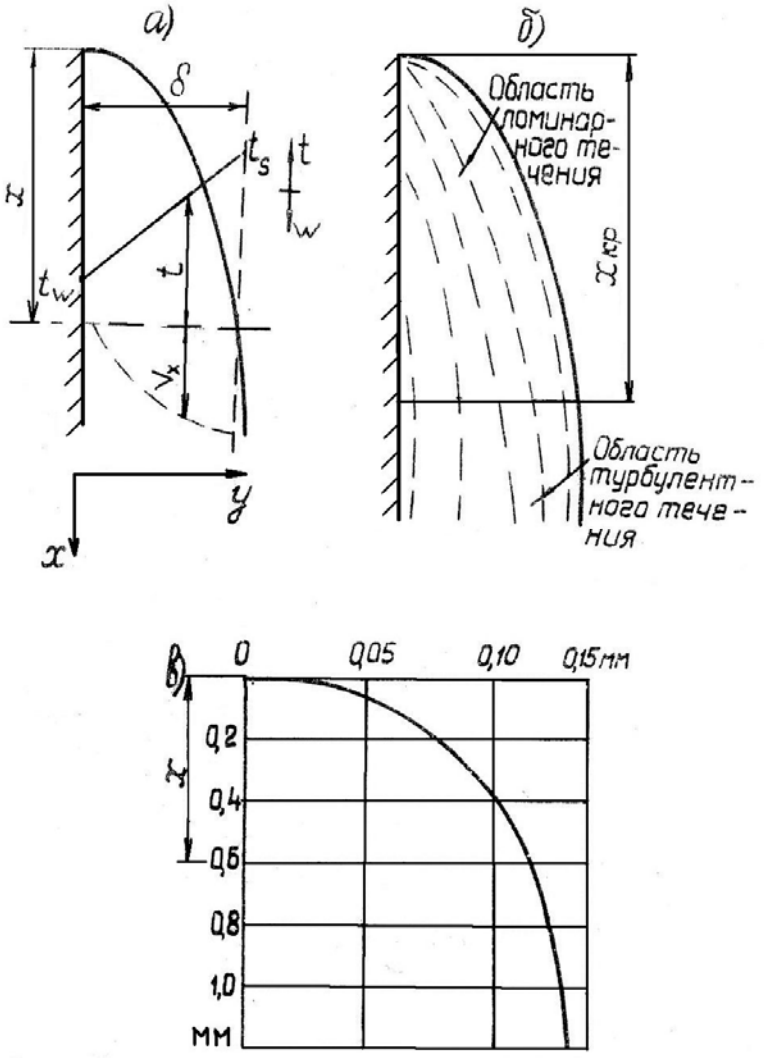


Рис.11.2. Схема плёночной конденсации на вертикальной стенке

При значениях $\beta > 90°$ усеивающие поверхность мельчайшие капли локализованы, продолжающаяся конденсация приводит только к росту старых капель и к образованию новых. В дальнейшем отдельные капли

сливаются, образуют ручейки, однако часть твердой поверхности при этом продолжает непосредственно смываться паром. Заметим, что чистая, но плохо смачиваемая металлическая поверхность со временем покрывается оксидной пленкой и становится хорошо смачиваемой, что приводит к пленочной конденсации. Коэффициент теплоотдачи при капельной конденсации в 5-10 раз выше, чем при пленочной, однако выгодность капельной конденсации водяного пара реализуется на практике в очень редких случаях. Так как для водяного пара трудно с уверенностью предсказать, когда будет происходить капельная конденсация, то рекомендуется расчеты производить по формулам для пленочной конденсации.

Практически в современных конденсаторах всегда имеет место пленочная конденсация паров. Исключение составляют конденсаторы ртутного пара, в которых обычно имеет место капельная конденсация. При этом у паров металлов различия в интенсивности теплообмена при пленочном и капельном типах конденсации стираются, так как термическое сопротивление жидкометаллической пленки оказывается весьма малым.

На рис. 11.2,а показана схема пленочной конденсации на вертикальной стенке. В верхней части пленки имеет место ламинарное движение (толщина пленки δ и скорость течения v невелики). В дальнейшем, как показал П.Л.Капица, на поверхности пленки из-за влияния сил поверхностного натяжения начинают возникать волновые движения, приводящие к турбулентным пульсациям. В результате на некотором расстоянии от верхней кромки течение пленки становится турбулентным.

11.2. Теплообмен при пленочной конденсации для ламинарного течения жидкости

Первое решение этой задачи (1916 г.) принадлежит немецкому физику Нуссельту, оно не утратило актуальности, так как сравнительно хорошо увязывает основные факторы, влияющие на процесс. Приведем решение задачи по Нуссельту о коэффициенте теплообмена при пленочной конденсации для области $x < x_{\text{КР}}$.

Движение жидкости осуществляется благодаря действию сил тяжести; препятствуют этому движению силы внутреннего трения. Температура жидкости t в месте соприкосновения со стенкой равна температуре стенки t_W, а на внешней поверхности пленки температура считается равной температуре насыщения t_s (рис.11.2,б). Остановимся более подробно на последнем утверждении. Опыт показывает, что, за исключением случая глубокого вакуума термическое сопротивление пара у неметаллических теплоносителей пренебрежимо мало по сравнению с

термическим сопротивлением пленки конденсата. Поэтому считают, что на границе раздела фаз устанавливается температура, равная температуре насыщения в ядре паровой фазы.

Найдем распределение скоростей по сечению пленки. Воспользуемся уравнением движения в проекции на ось x:

$$\rho(\mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}).$$

Будем полагать, что силы инерции, возникающие в пленке, пренебрежимо малы по сравнению с силами вязкости и веса, что позволяет принять левую часть уравнения равной нулю. Иными словами, можно считать $\mathrm{v}_x = const$ и, следовательно $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = 0$, а $\mathrm{v}_y << \mathrm{v}_x$. Так как $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} = 0$, то можно положить $\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} = 0$, кроме того, следует учесть, то давление в неподвижном паре всюду одинаково: $P = const$. Последнее позволяет говорить, что и в пленке конденсата давление одинаково, т.е. $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$. После указанных упрощений уравнение движения примет вид

$$\rho g + \mu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} = 0. \qquad (11.1,\text{а})$$

Граничные условия найдем из следующих рассуждений. На поверхности стенки

$$\mathrm{v}_x\big|_{y=0} = 0.$$

На границе конденсат - неподвижный пар силы трения малы, что позволяет не принимать их во внимание и получать граничное условие

$$\left.\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0.$$

Решение уравнения (11.1) совместно с граничными условиями проводит к следующему выражению для скорости v_x:

$$\mathrm{v}_x = \frac{\rho g}{2\mu}\left(2\delta y - y^2\right).$$

Средняя скорость в сечении x равна

$$\bar{\mathrm{v}}_x = \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} \mathrm{v}_x dy = \frac{\rho g \delta^2}{3\mu}. \qquad (11.1,\text{б})$$

Определим теперь массовый расход m^* жидкости через поперечное сечение пленки $(\delta \cdot 1)$ при скорости течения $\bar{\mathrm{v}}_x$:

$$m^* = \rho\delta \cdot 1 \cdot \bar{\mathrm{v}}_x = \frac{\rho g \delta^3}{3\mu}.$$

Перейдем ко второй части задачи, связанной с определением коэффициента теплообмена при конденсации. Если в сечении x расход равен m^*, то в сечении $(x + dx)$ он увеличится на dm^*:

$$dm^* = \frac{\rho^2 g \delta^2 d\delta}{\mu} \qquad (11.2)$$

Этот прирост вызван конденсации пара на соответствующей поверхности пленки. Выразим dm^* через параметры, характеризующие тепловой процесс; для этого введём теплоту конденсации r и приращении потока тепла dQ^*:

$$dQ^* = r dm^* . \qquad (11.3)$$

Предположим, что распределение температур в сечении x подчиняется линейному закону, тогда dQ^* равно

$$dQ^* = \lambda \frac{t_S - t_W}{\delta} dx \cdot 1 \qquad (11.4)$$

Из формул (11.2)- (11.4) получаем

$$\frac{\lambda}{r} \cdot \frac{t_S - t_W}{\delta} dx = \frac{\rho^2 g}{\mu} \delta^2 d\delta .$$

Интегрирование этого уравнения при условии $\delta\big|_{x=0} = 0$ позволяет получить выражения для толщины пленки конденсата

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda\mu(t_S - t_W)x}{\rho^2 g r}} \qquad (11.5)$$

На рис.11.2,*в* приведены результаты расчеты пленочной конденсации водяного пара при $t_S = 100\,^{\circ}\text{C}$, $t_W = 90\,^{\circ}\text{C}$. У нижней кромки стенки $h = 1$м и толщина достигает 0,14 мм.

Подставляя в (11.4) значение δ из (11.5), находим местную плотность теплового потока:

$$q_x = \frac{dQ^*}{dx} = \sqrt[4]{\frac{\rho^2 g \lambda^3 r (t_S - t_W)^3}{4\mu x}} \qquad (11.6)$$

Средняя плотность теплового потока q равна

$$q = \frac{1}{h}\int_0^h q_x dx = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{\rho^3 g \lambda^3 r (t_S - t_W)}{4\mu h}}$$

А средний коэффициент теплообмена

$$\overline{\alpha} = \frac{q}{t_S - t_W} = 0{,}943\sqrt[4]{\frac{\rho^3 g \lambda^3 r}{\mu h (t_S - t_W)}} \qquad (11.7)$$

Для случая, приведённого на рис. 11.2,*в* получаем $\overline{\alpha} = 6675$ Вт/м^2 К. в критериальном виде формула (11.7) принимает вид

$$Nu = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{1}{4} Ga \cdot K \cdot \mathrm{Pr}}$$

$$Nu = \frac{\overline{\alpha} h}{\lambda}, \quad Ga = \frac{g h^3}{\nu^2}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad K = \frac{r}{C(t_S - t_W)}. \qquad (11.8)$$

Здесь Ga - критерий Галилея; K - критерий фазового превращения.

Описанным методом были также получены формулы и для наклонной стенки. В этом случае следует брать вертикальную

составляющую слы тяжести, и формула для коэффициента теплообмена $\bar{\alpha}_\Psi$ стенки, наклонной к горизонту под углом Ψ , принимают вид

$$\bar{\alpha}_\Psi = \bar{\alpha}\sqrt[4]{\sin\Psi}\,, \qquad (11.9)$$

где $\bar{\alpha}$ следует определять по формуле (11.7).

Поверхность горизонтальной трубы можно рассматривать как состоящую из небольших полосок элементов с различным углом наклона к горизонту. Интегрирование по Ψ от 0 до π приводит к

$$\bar{\alpha}' = 0{,}728\sqrt[4]{\frac{\rho^2 g\lambda^3 r}{\mu(t_S - t_W)d}} \qquad (11.10)$$

Заметим, что при составлении уравнения движения был сделан ряд предположений, которые заставляют рассматривать полученное решение как приближенное. Однако, как показывает опыт, общая закономерность отражена правильно, но действительные значения коэффициента теплообмена примерно на 20% выше расчётных.

Теория исходит из предположения о равномерной толщине пленки, которая увеличивается лишь постепенно вследствие дальнейшей конденсации. Однако П.Л.Капица наблюдал (1948 г.) в условиях строгого ламинарного течения пленки образование на её поверхности волн с высотой порядка полутолщины пленки. Такое образование волн связано с влиянием сил поверхностного натяжения. Соответствующее уточнение теории приводит к увеличению коэффициента теплообмена приблизительно на 20%.

Если в формуле (11.7) ввести сомножитель 1,2, то этот эффект будет учтен, и приходим к хорошему согласию с опытом. В теории Нуссельта физические параметры отнесены к средней температуре $t_m = 0{,}5(t_m + t_S)$ и принимаются постоянными.

Задача о теплообмене при конденсации решается также и на основане теории подобия: в этом случае из опыта устанавливается зависимость

$$Nu = f(Ga, \mathrm{Pr}, K) \qquad (11.11)$$

В дальнейшем эта зависимость была уточнена с учетом влияния скорости и направления течения пара, состояния поверхности, перегрева пара, содержания в паре неконденсированных газов, компоновки поверхности нагрева и т.д.

Большой вклад в исследование конденсации был сделан С.С.Кутателадзе, который расширил число критериев в зависимости (11.11), дал теоретическое решение для случая турбулентного течения пленки конденсата, а также рассмотрел случай смешанного течения, течения пара с большой скоростью и т.д.

11.3. Физические особенности процесса кипения

Теплообмен при кипении жидкости на поверхности нагрева твердых тел широко применяется в технике. Этот способ переноса тепла используется в ракетной и приборостроительной технике, обычной и ядерной энергетике, в химической, пищевой и других отраслях промышленности.

Хотя процессы кипения и парообразования относятся к древнейшим теплотехническим процессам, накопление фактического материала и создание физической картины процесса проходило до 40-50-х годов нашего столетия весьма медленно, и только в 60-80 годах наблюдалась высокая интенсификация исследований в этой области.

Приведём некоторые экспериментальные результаты. Известно, что когда капля воды попадает на накаленную поверхность, она сильно подбрасывается над поверхностью, практически её не касаясь; необходимо несколько секунд для испарения капли. Это явление впервые было описано в 1756 г. Лейденфростом и носит название эффекта Лейденфроста.

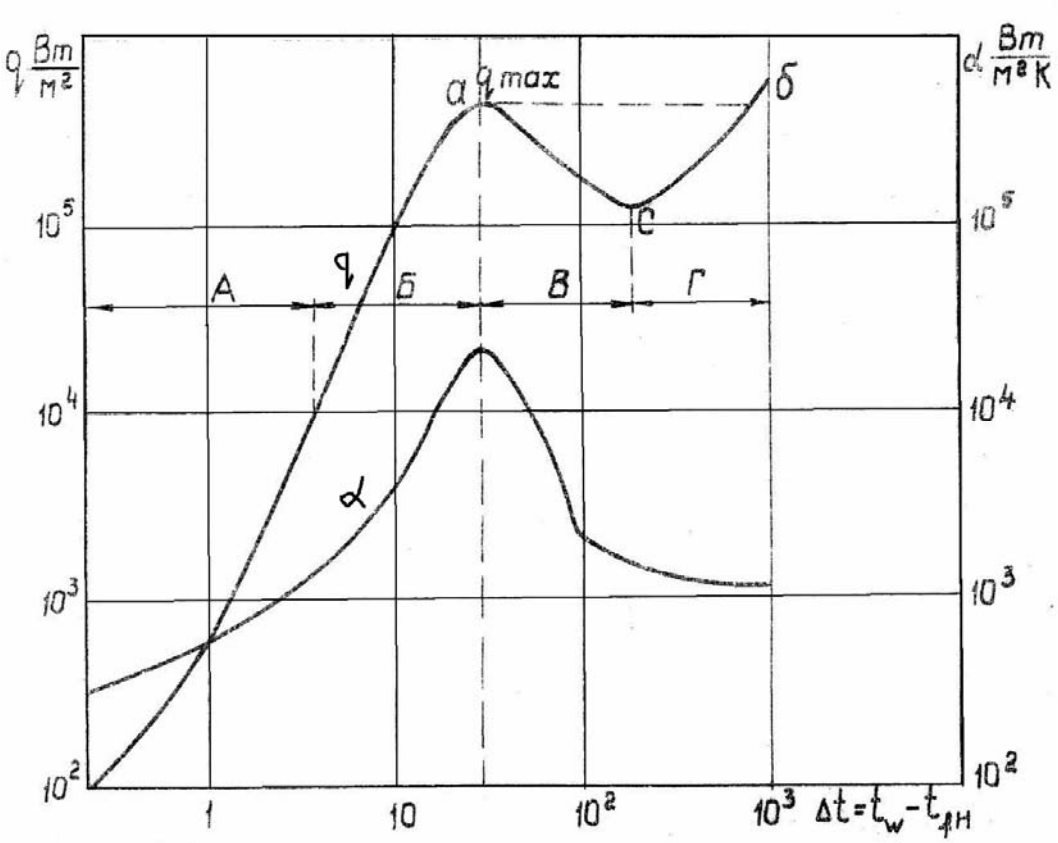


Рис.11.3. Связь плотности теплового потока с перепадом температур при кипении

Известно также, что та же капля, попадая на более холодную поверхность из того же материала, уже не подбрасывается. Капли смачивают поверхность, растекаются по ней и испаряются в течение секунды. Это

значит, что существуют максимальные и минимальные скорости испарения или возможны различные режимы кипения. Описание этих процессов также встречается в работах Лэнта (1883 г.). Однако впервые чётко сформулировал существование различных режимов кипения в 1934 г. японский теплофизик Нукияма. Приведём описание его опытов. Нукияма погрузил платиновую проволоку в воду при 100ºС и нагревал проволоку, пропуская по ней электрический ток. Тепловой поток от проволоки рассчитывался по электрической мощности, а температура проволоки определялась по её электрическому сопротивлению. Результаты опытов, поверенных в дальнейшем другими исследованиями, приведены на рис. 11.3.

При росте q повышается температура проволоки до некоторого значения, соответствующего $q_{\max}$ (точка а). Дальнейшее увеличение $q > q_{\max}$ приводит к резкому скачку температуры от точки а в точку б. Температура теплоотдающей поверхности возрастает настолько, что может наступить расплавление проволоки.

Можно выделить четыре области:

А. Отсутствие парообразования или слабое образование пузырей; здесь справедливы законы свободной конвекции некипящих жидкостей.

Б. Пузырьковое кипение, интенсивно турбулезирующее теплообмен. Пузырьки образуются на большой площади поверхности, и появляются цепочки пузырьков, интенсивно отводящих тепло.

В. Нестабильное пленочное кипение; постоянное переход к сплошной паровой пленке из-за слияния пузырей на поверхности; температура проволоки повышается.

Г. Стабильное пленочное кипение: испарение жидкости происходит на границе жидкость-пар, вызывая увеличение толщины паровой пленки до тех пор, пока пар не отрывается от неё в виде беспорядочной массы пузырьков неправильной формы. Если точка δ оказывается при температуре, превышающей температуру плавления, то проволока разрушается.

Область В весьма неустойчива и не представляет большого интереса для технических приложений.

Результат перерождения пузырькового кипения в плёночное существенно зависит от того, регулирует экспериментатор температуру стенки либо плотность теплового потока на ней. Первый случай, возможно, реализовать с помощью парового подогрева, второй – электрического.

Итак, при паровом обогреве независимой от процесса теплообмена является температура поверхности t_W, а следовательно, и температурный напор $\Delta t = t_W - t_{fH}$ (t_{fH} -температура насыщения, t_W - температура стенки).

Тепловой поток q, отводимый от поверхности в переходной области, постепенно уменьшается по мере ухудшения интенсивности теплообмена. При такой постановке опыта возможно реализовать любую точку на графике (рис. 11.4), в том числе и неустойчивый участок *ac*, в котором одновременно существуют пузырьковое и пленочное кипение.

Область неустойчивого пленочного кипения отвечает частичному покрытию поверхности нагрева паровой пленкой, через которую часто и прорывается жидкость. При повышении t_W часть поверхности, покрытая пленкой, возрастает, и изолирует влияние пара, вызывает уменьшение плотности потока q и коэффициента теплоотдачи α. При электрическом обогреве независимой от процесса теплообмена является величина теплового потока. Переход пузырькового режима к пленочному происходит скачкообразно (рис. 11.4). Если теперь снижать q, то переход к пузырьковому кипению произойдет лишь при $q_{\min}$.

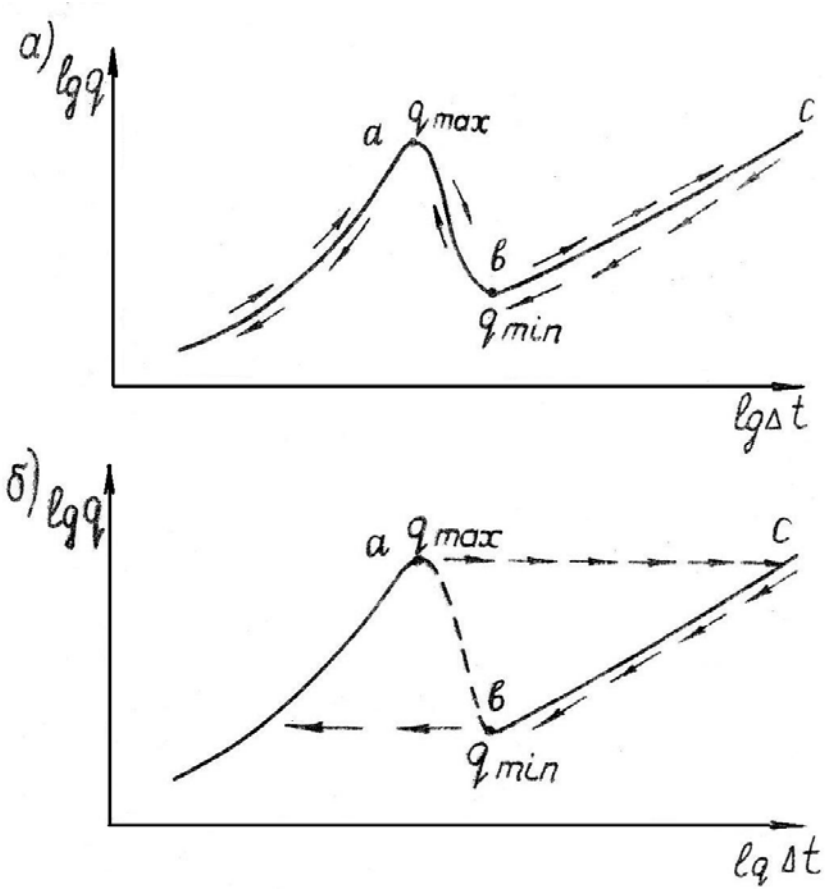


Рис. 11.4. Зависимость q=f(Δt) при различных режимах опыта

Введём следующие коэффициенты теплообмена:

$$\alpha' = \frac{q}{t_W - t_{fH}}, \qquad \alpha'' = \frac{q}{t_W - t_f}, \tag{11.12}$$

t_{fH} - температура насыщение для данного давления, t_f - температура массы жидкости.

Выясним, насколько сильно отличаются друг от друга t_{fH} и t_f.

На рис. 11.5 представлено температурное поле в кипящей жидкости, измеренное для кипения большого объема жидкости со свободной поверхностью испарения.

Пространство над поверхностью воды заполнено паром при атмосферном давлении (t_{fH}=100 ºС). Весь объём воды находится при равномерной температуре, но слегка перегрет (на 0,4 ºС). Однако возле греющей поверхности температура вода возрастает в тонком слое до температуры поверхности 109 ºС.

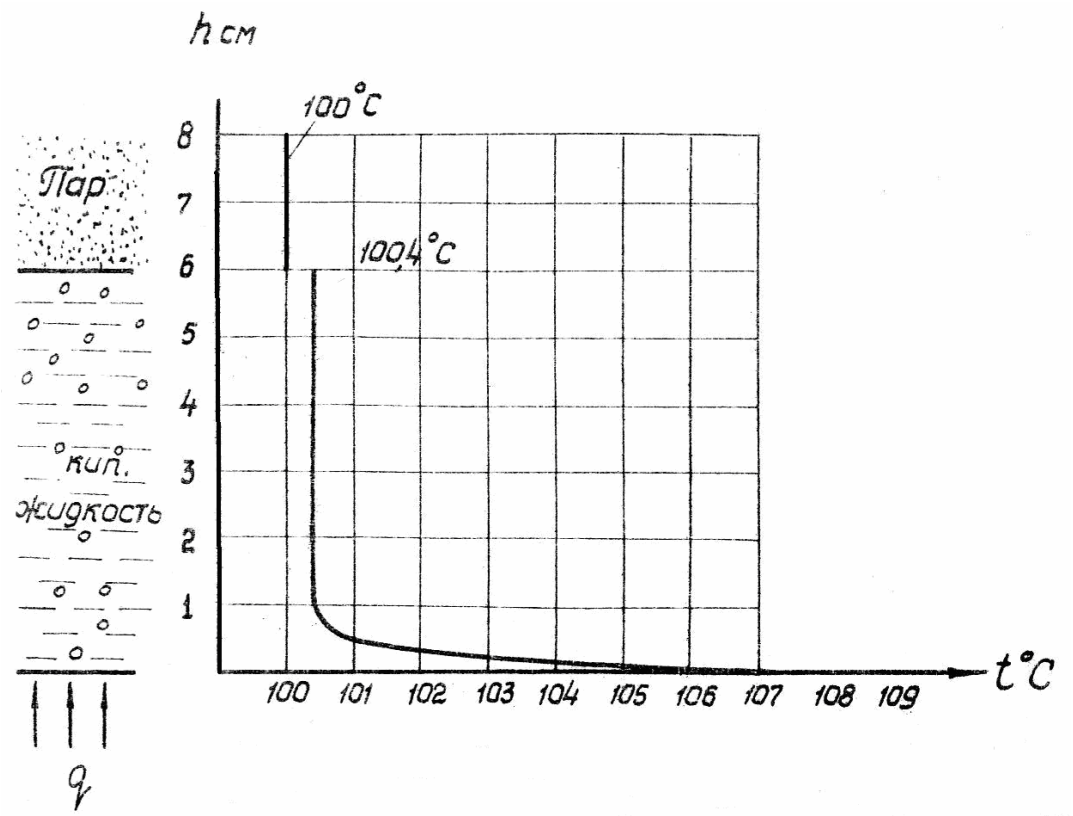


Рис. 11.5. Распределение температур в слое кипящей жидкости над горизонтальной поверхностью нагрева

На основании этого рисунка можно заключить, что $\alpha' \approx \alpha''$. На рис. 11.3 дано изменение плотности потока q от перепада температуры Δt для разных областей кипения. Из кривых $q = q(\Delta t)$ и $\alpha = \alpha(\Delta t)$ на этом рисунке может быть получена зависимость $\alpha = \alpha(q)$, показанная на рис. 11.6. Кривая *аб* – теплообмен при пузырьковом кипении; *вд* – теплообмен при пленочном кипении.

Максимальная тепловая нагрузка (точка а на рис. 11.3), предшествующая резкому падению теплоотдачи при переходе к пленочному кипению, называется критической тепловой нагрузкой $q_{кр}$.

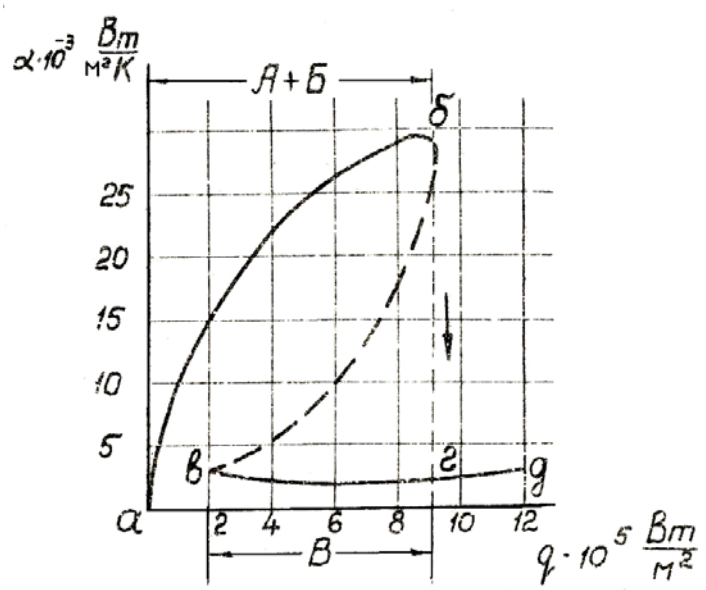


Рис. 11.6. Зависимость α=f(q) при кипении

Для воды в точке a величина удельного потока $q = q_{кр} = 900$ кВт/м^2 К.

При дальнейшем повышении нагрузки коэффициент теплоотдачи α падает в десятки раз и далее медленно возрастает с нагрузкой. При обратном снижении q коэффициент α по-прежнему сохраняется небольшим при значительно меньшей тепловой нагрузке. Это указывает на значительную устойчивость пленочного режима кипения жидкости при снижении тепловой нагрузки. Приходится говорить о двух критических плотностях теплового потока: $q_{кр1}$ - переход от пузырьков к пленке (а), $q_{кр2}$ - разрушение сплошного парового слоя и восстановление пузырькового режима кипения. В области между ними возможно существование обоих режимов кипения на разных частях одной и той же поверхности нагрева.

11.4. Коэффициенты теплообмена при кипении

При развитии пузырьковом кипении в большом объеме коэффициент теплообмена α пропорционален q^n:

$$\alpha = C_1 q^{0,7}, \qquad q = C_2 \Delta t^{3,3}, \tag{11.13}$$

Здесь C_1 зависит от рода жидкости, характера поверхности нагрева, наличия примесей; коэффициенты C_1 и C_2 связаны $C_2 = C_1^{3,3}$. С ростом давления P растёт α:

$$\alpha_P = C_1 q^{0,7} p^K \tag{11.14}$$

для воды при $p < 500$ атм $K = 0{,}15 \div 0{,}20$, $C_1 = 2{,}6 \div 30$. Зависимость α от давления P для различных жидкостей различна, а в безразмерных координатах примет вид

$$\left(\frac{\alpha}{q^{0,7}}\right)_P \Big/ \left(\frac{\alpha}{q^{0,7}}\right)_{P^*} = f\left(\frac{P}{P_{кр}}\right), \tag{11.15}$$

как показал В.М. Боришанский (рис. 11.7), она будет одинаковой для ряда жидкостей [14].

Интенсивность теплообмена при кипении зависит от физических свойств жидкости, которые могут изменяться с давлением. С увеличением теплопроводности жидкости основной поток тепла от стенки воспринимается жидкой, а не паровой фазой, поэтому α увеличивается.

Форма и размеры поверхностей нагрева до тех пор не влияют на интенсивность теплообмена, пока размеры не станут соизмеримы с диаметром пузырей (кипение на тонких проволоках).

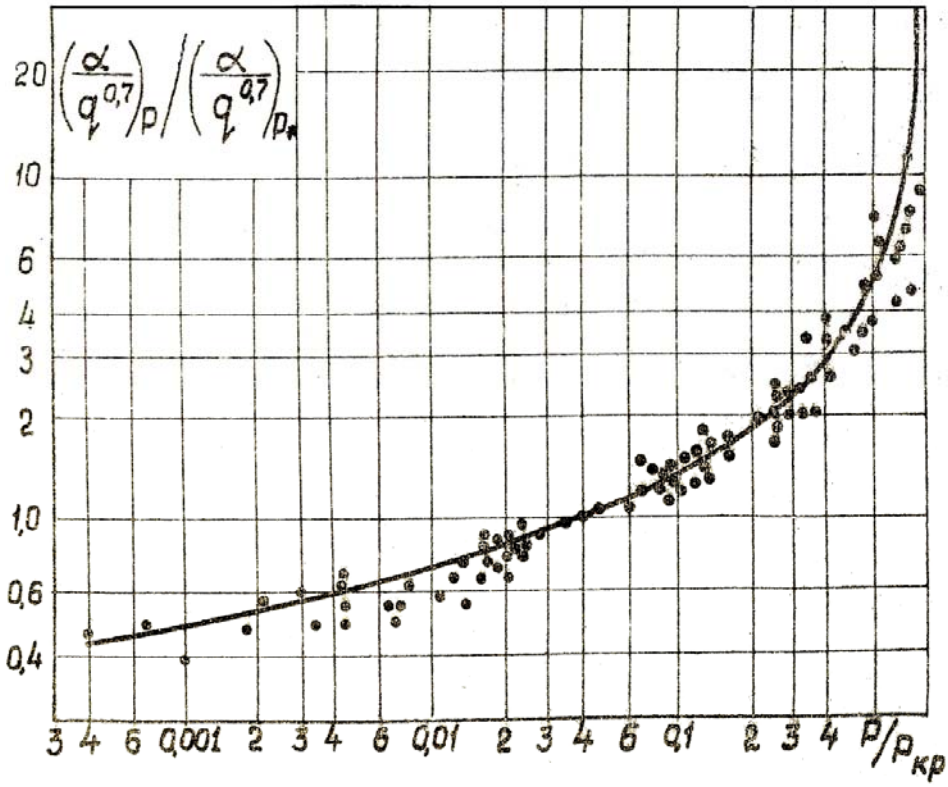


Рис.11.7. Сравнение опытных данных (точки) с эмпирической кривой

Здесь P - текущее давление, $P = 0{,}03P_{кр}$, где $P_{кр}$ - критическое давление.

Для расчета кипятильных устройств достаточно иметь зависимость

$$\Delta t_f = t_W - t_{fH} = f(q),$$

так как при заданном q обычно необходимо знать t_W. Это позволяет рекомендовать для расчетов предложенную И.Т. Аладьевым зависимость [6]

$$\frac{t_W - t_{fH}}{t_{fH}} = A\left(\frac{qr}{C_1 \lambda t_{fH}}\right)^{0,3}\left(\frac{r}{C \cdot t_{fH}}\right), \qquad (11.16)$$

где A и n зависят от рода жидкости, поверхности и характера кипения. В формуле (11.16) r - теплота парообразования, λ и C – коэффициент теплопроводности и удельная теплоёмкость жидкости.

11.5. Кипение в трубах

В этом случае влияние на процесс оказывает положение трубы, которое определяет скорость и характер кипения жидкости. Кроме того, на теплопередачу большое влияние оказывает паросодержание: пароводяная смесь может представлять собою однородную эмульсию, либо два самостоятельных потока воды и пара (рис. 11.8).



Рис.11.8. Характер парожидкостной смеси в горизонтальных трубах

В вертикальных трубах из-за ограниченности объема происходит непрерывное увеличение паровой и уменьшение жидкой фазы, что приводит к изменению структуры потока по длине.

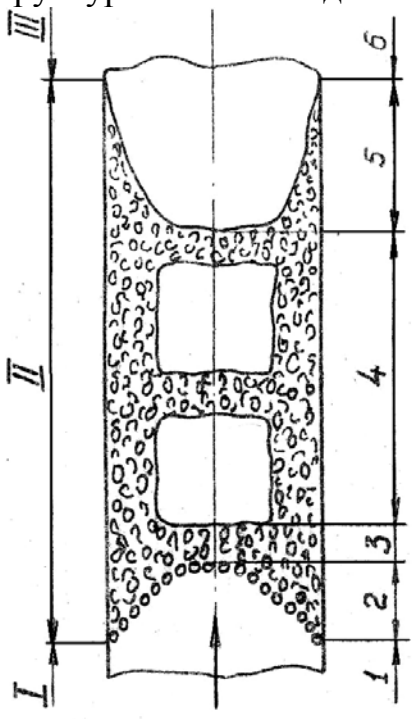


Рис. 11.9. Процесс кипения в вертикальных трубах

На рис. 11.9: область перегрева – I, испарительный участок – II, область подсыхания – III, 1 – однофазная жидкость, 2 – поверхностное кипение, 3 – эмульсионный режим; 4 – пробковый режим, 5 – пар. В горизонтальных трубах, кроме изменения структуры потока по длине, изменяется структура и по периметру. Из-за сложности гидродинамической

обстановки знания о процессе кипения в трубах ещё недостаточны, и расчеты α и $q_{кр}$ производятся как правило по эмпирическим необобщенным формулам.

При вынужденном течении в трубах наблюдается следующие закономерности. При малых q вынужденное течение подавляет кипение, и для определения коэффициента теплоотдачи α возможно применить обычные формулы однофазной конвекции. При больших q имеет место развитое кипение – скорость движения жидкости теряет влияние на теплообмен, и возможно находить α по формуле (11.13) с иным значением C_1.

Между двумя крайними случаями имеет место переходный режим (неразвитое кипение), где влияет на коэффициент теплоотдачи α как скорость, так и процесс кипения.

Расчеты α в этой зоне проводятся по формуле, предложенной С.С. Кутателадзе [14]

$$\alpha / \alpha_{кон} = \sqrt[n]{1 + (\alpha_{рк} / \alpha_{кон})}, \qquad (11.17)$$

где $\alpha_{кон}$ -однофазная конвекция, $\alpha_{рк}$ - развитое кипение, $n = 1{,}5 + 2{,}0$

Глава 12. Массообмен

12.1. Диффузия в твёрдом теле

Диффузией называется самопроизвольный процесс установления внутри фаз равновесного распределения концентраций. Процесс направлен к выравниванию концентраций в системе; при этом вещество переносится из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. Диффузия характеризуется потоком массы, т.е. количеством вещества, проходящем в единицу времени через данную поверхность в направлении нормали к ней. Обозначим поток массы через J, в системе СИ единицей измерения потока массы является кг/с.

Через $j = \frac{dJ}{dS}$ обозначим плотность потока массы, которая в системе СИ измеряется в кг/м^{2}с. Между потоком массы и концентрацией вещества на основе обобщения опытных данных в 1855 г. Немецким физиком Адольфом Фиком установлена следующая связь:

$$j = -D\frac{d\rho}{dn}, \qquad (12.1)$$

где ρ - концентрация данного вещества;n - обозначение нормали к поверхности, через которую проходит вещество;D - коэффициент пропорциональности, названный коэффициентом диффузии.

Концентрацию вещества ρ можно выражать по-разному: $[\rho] = кг/м^3, [\rho] = моль/м^3$; используя также понятие массовой или объемной относительной концентрации (%). Однако j всегда имеет указанный выше четкий смысл и измеряется в кг/м^2*с*, следовательно, смысл коэффициента диффузии также может изменяться в зависимости от того, как определена концентрация. Мы будем придерживаться следующего определения: концентрация данной компоненты равна ее массе, приходящейся на единицу объема системы. В этом случае

$$j\left[\frac{кг}{м^2 с}\right] = -D\left[\frac{м^2}{с}\right]\frac{\partial \rho}{\partial n}\left[\frac{кг}{м^3 м}\right],$$

т.е. D будет измеряться в $м^2/с$. Поскольку поток вещества идет от пространства с большей концентрацией к пространству с меньшей концентрацией, а за положительное направление градиент в математике принято направление в сторону возрастания функции (в данном случае ρ), то в (12.1) поставлен знак "-". В этом случае правая часть уравнения будет всегда положительной. В табл.12.1 приведены порядки величин коэффициентов диффузии для твердых, жидких и газообразных тел.

Таблица 12.1

Диффундирующие материалы	Коэффициент диффузии $\mathcal{D}$, м^2/с	Система
Bi в Pb *Sb в Ag* *Cd в Cu*	10^{-6} 10^{-9} 10^{-13}	Твердое тело-твердое тело
H_2 *в* SiO_2 *He в* SiO_2	$10^{-11} - 10^{-12}$ $(2 \div 5)\cdot 10^{-14}$	Газ – твердое тело
Растворитель H_2O, растворяемые вещества различны	$10^{-9} - 10^{-10}$	Жидкость – жидкость
Бинарные газообразные системы	$10^{-5} - 10^{-4}$	Газ – газ

Как следует из приведенной таблицы, коэффициент диффузии может изменяться на 10 порядков ($10^{-4} - 10^{-14}$). Рассмотрим на конкретном примере характер распределения концентраций в теле.

Рассмотрим поток массы через твердое тело в направлении оси *x* и будем считать, что в направлениях *y* и *z* поток отсутствует (рис.12.1). Обозначим через j_1 плотность

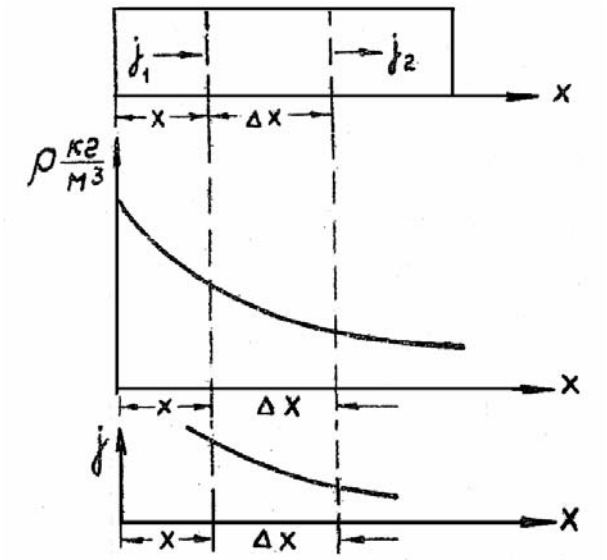


Рис.12.1. К выводу уравнения диффузии.

потока вещества через единичную площадку в сечении *x*, а через j_2 - плотность потока вещества в сечении (x+Δx). И пусть Δx мало, а закон изменения концентрации носит монотонный характер, тогда приближенно характер изменения плотности потока на отрезке Δx можно принять линейным и записать

$$j_1 = j_2 - \frac{\partial j}{\partial x}\Delta x. \qquad (12.2)$$

Поскольку количество вещества j_1, входящего в объем Δx в единицу времени, отлично от выходящего j_2 из этого объема, то концентрация вещества в объеме изменяется во времени, т.е.

$$j_1 - j_2 = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}\Delta x. \qquad (12.3)$$

На основании закона сохранения вещества следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\frac{\partial j}{\partial x} \qquad (12.4)$$

Поставим в (12.4) вместо j его значение из (12.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \qquad (12.5)$$

Если концентрация вещества изменяется в направлениях *x, y, z*, а D не зависит от координат, то уравнение (12.5) можно обобщить и представить в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = D\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right) = D\nabla^2\rho. \qquad (12.6)$$

Уравнение (12.6) в стационарном режиме $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$ в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах для одномерных задач примет вид

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=0;\quad \frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\rho}{dx}=0;\quad \frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d\rho}{dx}=0. \qquad (12.7)$$

12.2. Влажность

Рассмотрим основные понятия и определения.

В настоящее время изменение и регулирование влажности играет важную роль при проведении научных исследований и в промышленности. Приведем отдельные примеры, связанные с измерением, регулированием и расчетом влажностного режима в различных отраслях человеческой деятельности.

Прежде всего, влажность воздуха имеет большое гигиеническое значение, т.к. она влияет на интенсивность испарения влаги телом человека. Гигиенисты считают нормальной относительную влажность воздуха в пределах от 30 до 60%. Если влажность будет высокой, то это затрудняет отдачу влаги с поверхности, что неблагоприятно отражается на состоянии организма. При низкой влажности (менее 30%), наоборот, появляется усиленное испарение влаги с кожи и слизистых оболочек, неприятное ощущение сухости во рту и в горле.

Повышенная влажность помещений приводит к развитию грибков, плесени, гниению материалов. С влажностным режимом сооружений связана их долговечность. Измерение и регулирование влажности газовых сред составляет важную часть многих процессов, связанных с производством и хранением продуктов, сушкой материалов и изделий, кондиционированием воздуха в помещениях и т.д.

Разнообразные приборы часто работают в сложном тепловом и влажностном режимах, что может привести к выходу их из строя или нарушению точности показаний. Например, сложная оптическая система, переносимая из среды с низкой температурой в среду с более высокой температурой, находится в сложном динамическом тепловом и влажностном режиме. При определенных обстоятельствах на поверхностях оптической системы может неравномерно конденсироваться влага, которая приведет в конечном итоге к искажению изображения. Даже если влага в дальнейшем испарится, то она может оставить следы в виде пятен, существенно понижающих качества оптического прибора. В настоящее время при проектировании практически любого прибора задается диапазон изменения влажности, в котором прибор должен нормально функционировать.

Влажность. Рассмотрим обычный атмосферный воздух, в котором кроме постоянных газов, присутствуют в молекулярном состоянии пары воды, а также часть влаги в виде капель. Если рассматривать влажный воздух (в том числе и капли) как смесь идеальных газов, то для них справедлив закон Дальтона:

ЕСЛИ В ОДНОМ И ТОМ ЖЕ ОБЪЕМЕ ЗАКЛЮЧЕНЫ ДВА РАЗЛИЧНЫХ ГАЗА, ТО КАЖДЫЙ ИЗ НИХ ЗАПОЛНЯЕТ ВЕСЬ ОБЪЕМ, КАК ЕСЛИ БЫ ДРУГОГО ГАЗА НЕ БЫЛО. ДАВЛЕНИЕ ЛЮБОГО ИЗ ЭТИХ ГАЗОВ ЯВЛЯЕТСЯ ЕГО ПАРЦИАЛЬНЫМ ДАВЛЕНИЕМ, ОБЩЕЕ ДАВЛЕНИЕ РАВНО СУММЕ ПАРЦИАЛЬНЫХ; С МОЛЕКУЛЯРНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЭТО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО СРЕДИ МОЛЕКУЛ НЕТ СИЛ ПРИТЯЖЕНИЯ.

Парциальное давление Р водяного пара обычно называют упругостью водяного пара и измеряют в миллиметрах ртутного столба.

Основными характеристиками влажного состояния газа являются абсолютная влажность и влагосодержание.

Абсолютная влажность. Количество влаги в килограммах, содержащееся в $1\,м^3$ воздуха, называется его абсолютной влажностью $m_п(кг/м^3)$. Чем больше $m_п$, тем больше и парциальное давление $P_п$ при тех же температуре и барометрическом давлении воздуха. Следовательно, величина Р также является характеристикой его влажности. При фиксированных температуре и барометрическом давлении величина $P_п$ не может увеличиваться беспредельно за счет поступления извне и имеет предельное значение - $P_{нп}$-давление насыщенного пара; максимальному значению $P_п = P_{нп}$ соответствует и максимальное значение абсолютной влажности $m_{нп}$.

Чем выше температура воздуха, тем больше значения $P_{нп}$ и $m_{нп}$. Например, в табл.12.2 приведены значения упругости насыщенного водяного пара в миллиметрах ртутного столба для различных значений температур при барометрическом давлении 755 мм рт.ст.

Таблица 12.2

$t\,^{\circ}C$	0	-1	-3	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40
$P_{нп}$, мм рт.ст	4,58	4,22	3,57	3,01	1,97	1,24	0,77	0,47	0,28	0,11	0,093

над водой от 0 до $+50^{\circ}C$

$t\,^{\circ}C$	0	1	3	4	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$P_{нп}$, мм рт.ст	4,58	4,93	5,69	6,10	6,54	9,21	12,79	17,54	23,76	31,82	42,18	55,32	71,88	92,51

Упругость водяного пара $P_п$ в воздухе или его абсолютная влажность $m_п$ не дают представления о степени насыщения влагой воздуха, если при этом не указана его температура.

Относительная влажность. Чтобы выразить степень насыщения воздуха влагой, вводится понятие относительной влажности. Относительная влажность выражается в процентах и равна отношению

действительной массы $m_п$ пара в объеме к максимально возможной массе $m_{пв}$ пара при данной температуре:

$$\varphi = \frac{\mathrm{m}_п}{\mathrm{m}_{нп}} \cdot 100\%. \qquad (12.8)$$

Для лучшего уяснения понятия "относительная влажность" рассмотрим объем $1\,м^3$. В объеме находится вода, количество которой немного больше количества, необходимого для насыщения объема парами воды при температуре Т. Пусть для простоты рассуждений в объеме нет постоянного газа (воздуха или азота), капельной фазы в объемах также нет. На основании уравнения состояния идеальных газов имеем

$$PV = \frac{\mathrm{m}_п}{\mu_{пв}} R_0 T, \quad P_{нп} V = \frac{\mathrm{m}_{пв}}{\mu_{пв}} R_0 T, \qquad (12.9)$$

где $\mu_{пв}$ - молекулярный вес паров воды, а V=1 $м^3$.

Из соотношения (12.8) и (12.9) следует, что

$$\varphi = \frac{\mathrm{m}_п}{\mathrm{m}_{нп}} 100\% = \frac{P_п}{P_{нп}} 100\%, \qquad (12.10)$$

т.е. возможно иное определение φ.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА ВЫРАЖАЕТСЯ В ПРОЦЕНТАХ КАК ОТНОШЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ УПРУГОСТИ ВОДЯНОГО ПАРА К МАКСИМАЛЬНОЙ ЕГО УПРУГОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ДАННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ.

Если в объеме есть газ, то можно считать, что давление паров воды в объеме не зависит от давления газа. Покажем, как прямым способом могут быть измерены $m_п$ и $m_{пв}$. Для этой цели можно приспособить химический гигрометр (рис.12.2): влажный газ пропускают через закрытые осушительные трубки А, заполненные рыхлой массой эффективного поглотителя влаги; после этого сухой газ пропускают через U-образные трубки В с пористой стеклянной ватой, пропитанной до полного насыщения водой. При прохождении через трубки В воздух насыщается парами воды; затем его пропускают через серию осушительных трубок С. Взвешиванием трубок А и С до и после пропускания газа определяют величины $m_п$ и $m_{пв}$.

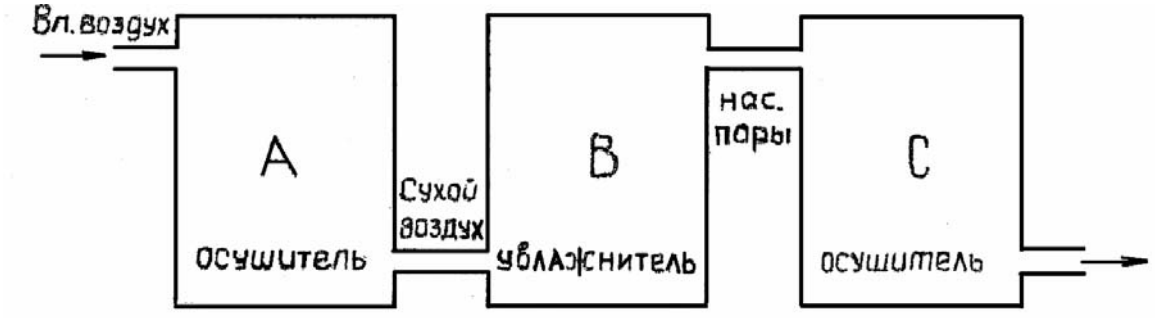


Рис.12.2. Схема химического гигрометра

Влагосодержание. Влагосодержание влажного воздуха равно отношению массы пара $m_п$ во влажном воздухе к массе сухого воздуха $m_с$, содержащегося во влажном воздухе:

$$d = \frac{m_п}{m_с} = \frac{\mu_п P_п}{\mu_с P_с}. \qquad (12.11)$$

Из (12.9) следует, что

$$d = \frac{m_п}{m_с} = \frac{\mu_п P_п}{\mu_с P_с} = \frac{18}{29}\frac{P_п}{P_с} = 0.622\frac{P_п}{P - P_п}, \qquad (12.12)$$

где $\mu_п = 18, \quad \mu_с = 29, \quad P = P_п + P_с.$

Влагосодержание воздуха в состоянии насыщения достигает максимального значения $d_{нп}$ и равно

$$d_{нп} = 0.622\frac{P_{нп}}{P - P_{нп}} \qquad \text{или} \qquad P_{нп} = P\frac{d_{нп}}{0.622 + d_{нп}}, \qquad (12.13)$$

где $P_{нп}$ - давление насыщенных паров, связанное с температурой (см.табл.12.2). Избыток воды над влагосодержанием $d_{нп}$ при насыщении может содержаться в воздухе только в виде жидкости (капли, туман) или твердой фазы (снег). Содержание воды (влаги) $d_{вл}$ в 1 кг воздуха равно

$$d_{вл} = d - d_{нп}. \qquad (12.14)$$

Точка росы. Если воздух данной влажности повысит свою температуру, то его относительная влажность понизится, как это следует из табл.12.2. Наоборот, при охлаждении воздуха по мере понижения температуры будет увеличиваться его относительная влажность.

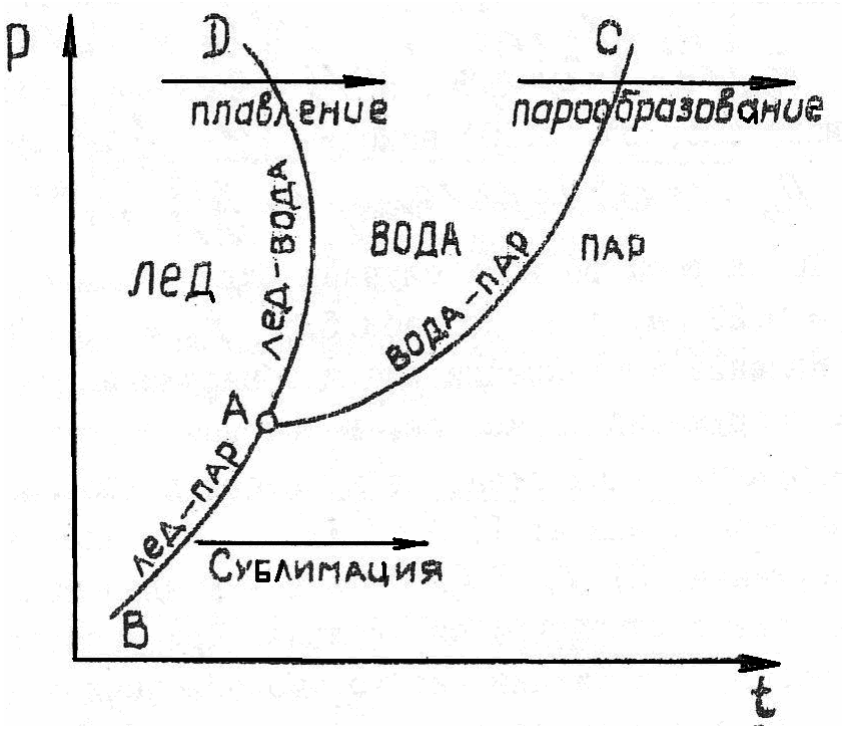


Рис.12.3. Диаграмма состояний воды

При некоторой температуре, когда P = $P_{нп}$, воздух получит относительную влажность φ=100%, т.е. достигнет полного насыщения водяным паром. Эта температура носит название температуры точки росы для данной влажности воздуха.

Если продолжать понижать температуру, то излишнее количество влаги начнет конденсироваться. Температура t_P при заданном парциальном давлении водяного пара равна температуре насыщения и определяется по таблицам насыщенного водяного пара. Конденсация излишней влаги при понижении температуры наблюдается в природе в виде образования туманов.

Изменение агрегатного состояния. Переход от одного агрегатного состояния в другое удобно рассматривать на диаграмме P-t (рис.12.3). Кривая АС является зависимостью между давлением насыщенного пара $P_{нп}$ и температурой кипения и заканчивается в критической точке С. Кривая АД представляет собой кривую зависимости давления от температуры плавления $P = f(t_{пл})$ а АВ – от температуры сублимации. Кривые $P = f(t)$ описывают двухфазные состояния и только в точке А (тройная точка) одновременно существуют три фазы. Для воды это $t_0 = 0.0098^\circ C, P_{нп} = 4.58 мм\ рт.ст.$. Расположение и вид кривых в диаграмме зависят от природы вещества и устанавливаются опытным путем.

12.3. Конденсация влаги на поверхностях

Рассмотрим условия конденсации влаги на поверхностях различных устройств. Для этого предварительно разберем несколько примеров, связанных с определением параметров, при которых возникает конденсация влаги.

Пример 1. Определить точку росы для воздуха, имеющего температуру +20°С при относительной влажности φ = 70%.

Решение. По табл.12.2 находим, что при t=20ºС, $P_{нп}$=17.54 мм ртутного столба. Из формулы (12.10) следует, что действительная упругость паров будет составлять только 70% от $P_{нп}$, т.е. $P_n = \varphi P_{нп}$,

P_n=17.54·0.7=12.28 мм рт. ст.

Та температура, для которой 12.28 мм будет соответствовать максимальной упругости паров, и будет точкой росы, т.е.

$t_p \le 15^\circ C$, а точнее $t_p = 14.4^\circ C$.

Пример 2. При температуре +18°С воздух имеет относительную влажность φ = 60%. Как изменится φ: а) при повышении температуры до +22°С; б) при понижении температуры до 15°С?

Решение. $P_{нп}\big|_{t=18^\circ C} = 15.48$ мм, отсюда упругость пара при φ = 60%.

$P_n(t = 18^\circ C, \varphi = 60\%) = \varphi \cdot P_{нп} = 15.48 \cdot 0.60 = 9.29\ мм.$

а) $P_{нп}(t=22^{\circ}C)=19.83$ мм, а $P_{п}$=9.29мм осталось без изменения, следовательно, по (12.10) находим $\varphi=\frac{9.29}{19.83}\cdot 100=47\%$;

б) $P_{нп}(t=15^{\circ}C)=12.79$ мм, $\varphi=\frac{9.29}{12.79}\cdot 100=73\%$.

Точка росы во всех случаях будет одна и та же, соответствующая $P_{п}$=9.29 мм, т.е. из табл.12.2 $t_{р}=10.1^{\circ}C$.

Явление конденсации влаги обнаруживается прежде всего в тех местах сооружений, приборов, в которых температура является наименьшей: в наружных углах стен, на корпусах приборов. Сформулируем условия конденсации влаги: 1) $t_{В}<t_{р}$ - конденсация по всей поверхности сооружения; 2) $t_{В}>t_{р}>t_{\min}$ - конденсация на тех частях сооружения, где температура минимальна. При расчете различных аппаратов, приборов, сооружений необходимо обеспечить на их внутренних поверхностях такую температуру t, чтобы $t>t_{р}$ для данной влажности воздуха. При этом следует брать максимально допустимые значения влажности. Источниками влаги являются люди, осветительные и нагревательные приборы и просто предметы, содержащие влагу. Количество влаги, выделяемое в некоторых случаях, приведено в табл.12.3.

Таблица 12.3

Наименование источника	Количество выделенной влаги	
	г/ч	кг/сутки
Взрослый человек в спокойном состоянии:		
при дыхании	I2,5	0,30
с поверхности кожи	33,3	0,80
всего	45,8	I,I0
Человек при работе	80 - I30	I,92 - 3,I2
Горение газа, керосина	II00 г с I $м^3$ газа I250 г с I кг керосина	

Из последнего примера следует важный вывод о влажностном режиме сооружений, приборов, устройств и т.д.: относительная влажность в общем случае различна в разных местах устройства, т.к. упругость водяного пара одинакова по всему объему, а температура различна.

Пример 3. На рис.12.4 схематически представлены некоторые аппараты, температуры поверхностей которых равны $t_1=7.6^{\circ}C, t_2=9.^{\circ}C, t_3=13.4^{\circ}C$; аппараты находятся в помещении с температурой воздуха $t_{В}=18^{\circ}C$.

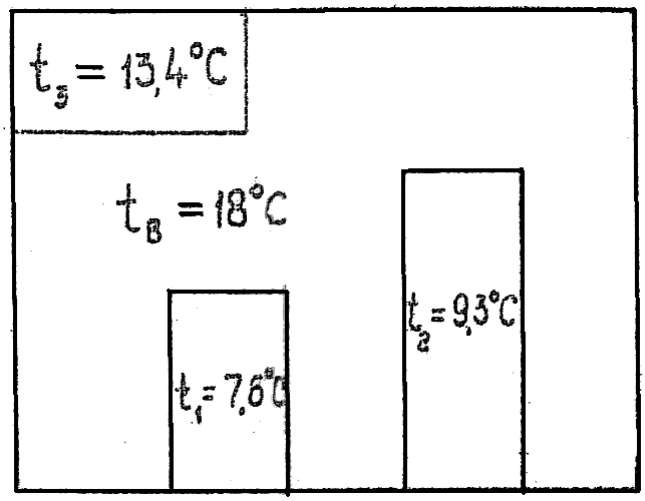


Рис.12.4. К расчёту влажностного режима приборов

Найти предельные значения влажности воздуха, при которых может происходить конденсация на поверхностях аппаратов.

t °C	I8	I3,4	9,3	7,6
$P_{нп}$ мм рт.ст.	I5,48	II,83	8,89	7,83

По формуле (12.10) определяем предельные значения относительной влажности, при которой еще существует конденсация:

$$\varphi_1 = \frac{7.83}{15.48}100 = 50.5\%\,;\ \varphi_2 = \frac{8.79}{15.48}100 = 57\%\,;\ \varphi_3 = \frac{11.53}{15.48}100 = 74.5\%.$$

12.4. Энтальпия влажного газа

Энтальпия влажного газа i равна сумме энтальпий отдельных частей, составляющих парогазовую смесь. Влагосодержание d не превышает предела насыщения $d \le d_{нп}$. В этом случае смесь содержит только сухой газ и пары; при этом энтальпии газа и пара равны:

$$i_c = C_{pc}t,\ i_n = C_{pn}t + i_r,\quad Дж/кг, \tag{12.15}$$

где C_{pc} и C_{pn} - изобарные удельные теплоемкости сухого газа и пара; i_r - удельная теплота испарения (энтальпия испарения).

Энтальпия влажного газа равна сумме энтальпий 1 кг сухого воздуха (газа) и d кг водяного пара:

$$i = C_{pc}t + (C_{pc}t + i_r)d. \tag{12.16}$$

В частности, для водяного пара

$$C_{pc} = 1005\ Дж/кг\cdot К,\ C_{pn} = 1968\ Дж/кг\cdot К,\ i_r = 2491\cdot 10^3\ Дж/кг,$$

и уравнение (12.16) можно представить в виде

$$i = 1005t + (2491\cdot 10^3 + 1968t)d\ . \tag{12.17}$$

Воздух перенасыщен водяным паром $d \geq d_{нп}$. Для перенасыщенного воздуха его влагосодержание $d > d_{нп}$ при той же температуре, т.е. часть влаги $(d - d_{нп})$ находится в состоянии тумана. В этом случае необходимо учесть энтальпию воды в жидкой фазе.

$$i = C_{pc}t + (C_{pn}t + i_r)d_{нп} + (d - d_{нп})C_{pc}t \qquad (12.18)$$

Энтальпия воздуха с туманом из кристалликов льда

$$i = C_{pc}t + (C_{pn}t + i_r)d_{нп} + (d - d_{нп})C_{л}t - (d - d_{нп})i_{пл}, \qquad (12.19)$$

где $i_{пл} = 80\ ккал/кг$ - теплота плавления льда; $C_{л} = 0.5\ ккал/кг \cdot град$ удельная теплоемкость льда.

Энтальпия льда – отрицательная величина, т.к. энтальпия воды в жидкой фазе при 0°С считается равной нулю.

Смешение воздуха. Пусть смешивается G_1 кг воздуха при температуре t_1 и влагосодержании d_1 с G_2 кг воздуха, имеющим параметры t_2 и d_2. При смешении отсутствует теплообмен с внешней средой; параметры смеси будем обозначать с индексами m.

Массовый баланс смеси $G_1 d_1 + G_2 d_2 = (G_1 + G_2)d_m$.

Энергетический баланс смеси $G_1 i_1 + G_2 i_2 = (G_1 + G_2)i_m$.

Из этих зависимостей следует, что

$$d_m = \frac{d_1 + d_2 a}{1 + a}, \quad i_m = \frac{i_1 + a i_2}{1 + a}, \quad a = \frac{G_2}{G_1}. \qquad (12.20)$$

Пример. В сложной установке смонтирован воздухоохладитель, производительность которого $G_V = 10^5 \frac{м^3}{с}$ при давлении $10^5 н/м^2$ (750 мм рт.ст.), температуре t=4ºC и относительной влажности φ=80%. По технологическим условиям воздух должен охлаждаться до 0ºC. Определить количество тепла, которое необходимо отнять для охлаждения воздуха, и количество влаги, выпадающей на поверхности охладителя.

Решение.

1) Давление насыщенного пара при t=4ºC находим из табл.12.2: $P_{нп}\big|_t = 6.10$ мм рт. ст. По формуле (12.10) определяем P_n - парциальное давление (упругость) $P_n = \varphi \cdot P_{нп} = 0.8 \cdot 6.10 = 4.90$ мм рт.ст.

2) Влагосодержание влажного воздуха на входе в охладитель находим по формуле (12.12): $d = 0.622 \frac{P_n}{P - P_n} = 0.622 \frac{4.90}{745 - 4.90} = 0.0048\ кг/кг.$

3) Энтальпию влажного воздуха на входе в охладитель находим по формуле (12.17): $i = 1005 \cdot 4 + (2491 \cdot 10^3 + 1968 \cdot 4) \cdot 4.1 \cdot 10^{-3} = 14.23\ кДж/кг.$

Найдем влагосодержание насыщенного воздуха $d_{нп}$ на выходе из охладителя при температуре t=0ºC и давлении насыщенного пара $P_{нп}(t = 0^\circ C) = 4.6$ мм рт.ст. По формуле (12.13) находим

$$d_{нп} = 0.622\frac{4.58}{745-4.58} \approx 3.83\cdot 10^{-3}\,кг/кг.$$

4) Количество выпавшей влаги Δd на каждый кг воздуха

$$\Delta d = d - d_{нп} = (4.08-3.83)\cdot 10^{-3} = 0.25\cdot 10^{-3}\,кг/кг$$

5) Количество сухого воздуха, приходящего через воздухоохладитель. Поделим обе части (12.9) на τ :

$$(P-P_n)G_V = G\frac{R_0T}{\mu},\ G_V = \frac{\mathrm{v}}{\tau},\ G\frac{m_n}{\tau},\ G = G_V\frac{(P-P_n)\mu}{R_0T} = 3.47\ кг/с.$$

6) Энтальпия влажного воздуха на выходе из охладителя при t=0ºC. По формуле(12.18)находим

$$i' = C_{рс}\cdot 0 + (C_{рп}\cdot 0 + 2491\cdot 10^3)d_{нп} + (d-d_{нп})C_{ж}\cdot 0 = 9.57\ кДж/кг.$$

7) Изменение энтальпии 1 кг влажного воздуха при его охлаждении в охладителе $\Delta i = i' - i = 9.57 - 14.23 = -4.63$ *кДж/кг*.

8) Количество тепла, отводимое от всего воздуха, проходящего через охладитель в 1с $Q = G\Delta i = 34.7(-4.63) = -161$ *кДж/кг*.

9) Количество влаги, выпавшей на поверхности охладителя

$$G_{вл} = G(d-d_{нп}) = 34.7\cdot 0.25\cdot 10^{-3} = 8.67\cdot 10^{-3}\,кг/с.$$

12.5. Тройная аналогия

Рассмотрим уравнения диффузии, энергии и движения, описывающие поля концентраций, температуры и скорости в раздельно идущих процессах переноса вещества, тепла и количества движения. Жидкость будем считать несжимаемой.

Уравнение массообмена (без учета термо- и бародиффузии)

$$\frac{d\rho}{d\tau} = D\nabla^2\rho. \qquad (12.21)$$

Уравнение энергии (без учета диффузии)

$$\frac{dt}{d\tau} = a\nabla^2 t. \qquad (12.22)$$

Уравнение движения (без учета массовых сил и для безнапорного движения $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} = 0$)

$$\frac{d\mathrm{v}}{d\tau} = \nu\nabla^2\mathrm{v}. \qquad (12.23)$$

Уравнения (12.21) - (12.23) по записи аналогичны. Эти уравнения содержат три физических параметра: D, a, ν, каждый из которых характеризует соответственно перенос вещества, тепла и импульса. Единицы измерения D, *a* и ν одинаковы - $\frac{м^2}{с}$. При D=*a*=ν расчетные поля концентраций, температур и скорости будут подобны, если только имеет

место подобие условий однозначности. В частности, поля концентраций и температур будут подобны, если *a*=D или D/a=1. Отношение

$$\frac{D}{a} = Le \tag{12.24}$$

называется числом Льюиса.

Для теплообмена, неосложненного массообменном, и без учета массовых сил справедливо уравнение

$$\overline{Nu} = \varphi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}). \tag{12.25}$$

Исходя из аналогии процессов теплообмена и массообмена, можно написать

$$\overline{Nu}_D = \psi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}_D). \tag{12.26}$$

где $\overline{Nu}_D = \frac{\beta d}{D}$ - диффузионный критерий Нуссельта; $\mathrm{Pr}_D = \frac{\nu}{D}$ - диффузионный критерий Прандтля, который иногда называют числом Шмидта и обозначают S_c.

Вид диффузионных критериев вытекает из анализа соотношений по аналогии с соответствующими тепловыми процессами.

Запишем поток массы с поверхности через градиент давления в газовой среде:

$$j = -D\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Тот же поток может быть записан через коэффициент конвективного массообмена

$$j = \beta(\rho_s - \rho_0),$$

где ρ_s, ρ_0 - концентрации вещества у поверхности и на значительном удалении от нее.

Приравняем правые части последних равенств:

$$-D\frac{\partial \rho}{\partial x} = \beta(\rho_s - \rho_0) \tag{12.27}$$

и перейдем к относительной координате $\bar{x} = \frac{x}{L}$, где L - характерный размер. Разделив затем обе части (12.27) на D, получим

$$-\frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} = \frac{\beta L}{D}(\rho_s - \rho_0), \tag{12.28}$$

где $\frac{\beta L}{D} = \overline{Nu}_D$ - диффузионный критерий Нуссельта.

Критерий Pr_D также получается в результате приведения стационарного одномерного уравнения (12.28) к безразмерному виду.

При аналогии между тепло- и массообменном функции φ и ψ в уравнениях (12.25) и (12.26) должны быть одинаковыми. Если одноименные определяющие критерии равны, будут численно одинаковы и критерии Nu и Nu_D. Следовательно, можно провести исследование теплообмена и полученные критериальные формулы использовать для

расчета массообмена и наоборот. Например, если для расчета теплоотдачи получено уравнение

$$Nu = a\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Pr}^m, \qquad (12.29)$$

то для расчета массообмена, проходящего в аналогичных условиях, используется уравнение

$$Nu_D = a\,\mathrm{Re}^n\,\mathrm{Pr}_D{}^m, \qquad (12.30)$$

где a, n, m - одни и те же величины.

Теплообмен в условиях свободной конвекции определяется уравнением

$$Nu = f(Gr\,\mathrm{Pr}),$$

куда входит критерий Грасгофа $Gr = \frac{gL^3}{\nu^2}[\beta'(t - t_w)]$.. Здесь произведение $\beta'(t - t_w)$ заменяет собой отношение плотностей $\frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_w}$, которое и вызывает движение жидкости. Поэтому для процессов переноса массы число Gr_D записывают в форме

$$Gr_D = \frac{gL^3}{\nu^2}\left(\frac{\rho_s}{\rho_w} - 1\right). \qquad (12.31)$$

удобной для проведения расчетов процессов массообмена.

12.5. Конвективный массообмен

Закон Фика определяет количество переносимого вещества при условии, что в системе отсутствует макроскопическое движение. Перенос массы вещества может иметь место, например, от поверхности воды в поток воздуха путем испарения (рис.12.5). при этом массоперенос может происходить как при вынужденном, так и при естественном процессе конвекции.

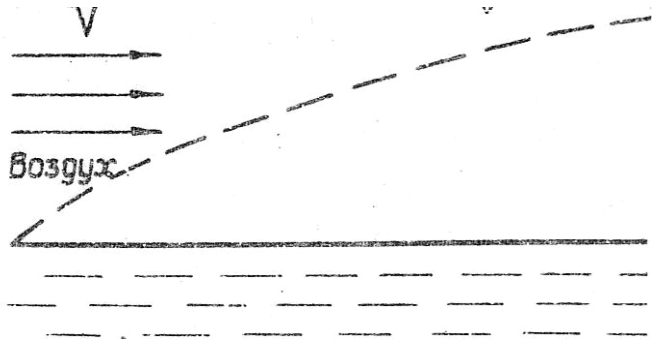


Рис. 12.5. Массоперенос воды путем испарения

Удельный поток массы j $кг/м^2с$ пропорционален движущей силе – разности концентраций $(\rho_s - \rho_0)$ $кг/м^3$ на границе фаз, т.е. j~$(\rho_s - \rho_0)$.

Коэффициент пропорциональности между этими величинами обозначим через β и назовем, как ранее указывалось, коэффициентом конвективного массобмена.

$$j = \beta(\rho_s - \rho_0), [\beta] = м/с \qquad (12.32)$$

Для идеальных газов легко выразить связь между концентрацией и парциальным давлением Р. Из уравнения состояния идеальных газов имеем

$$PV = \frac{m}{\mu}R_0T \quad или \quad \frac{m}{V} = \rho = \frac{P\mu}{R_0T}; R_0 = \mu R, R_0 = 8314\,Дж/кмольК \qquad (12.33)$$

Из (12.32) и (12.33) следует, что

$$j = \frac{\beta}{RT}(P_s - P_0), \qquad (12.34)$$

где P_s - парциальное давление газообразного вещества непосредственно над жидкой или твердой поверхностью; P_0 - парциальное давление этого же компонента вдали от поверхности раздела фаз.

Конвективный массообмен аналогичен конвективному теплообмену. Сравним формулы (12.32) и (12.33):

$$q = \frac{P}{S} = \alpha(t_s - t_0),\ j = \beta(\rho_s - \rho_0) = \frac{\beta}{RT}(P_s - P_0).$$

Если также сравнить законы Фурье и Фика для диффузионного переноса тепла и массы, то нетрудно догадаться о довольно глубокой аналогии между рассматриваемыми явлениями. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, ограничимся приближенной зависимостью между коэффициентами конвективного массобмена β и конвективного теплообмена α, полученной на основе указанной аналогии:

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho c_p}, \qquad (12.35)$$

где ρ и c_p - плотность и удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Для случая, когда отношение *a*/D коэффициентов температуропроводности и диффузии близко к единице, расчеты по формуле (12.35) дают удовлетворительную точность. Например, для диффузии водяного пара в воздухе *a*/D=0.87, и расчет β по формуле (12.35) отличается от его точного значения не более, чем на 10%.

Пример. Над горизонтальной поверхностью воды в небольшом водоеме движется поток воздуха со скоростью $v = 3.1$м/с. Температура на поверхности 15°С, температура воздуха +20°С. Длина водоема в направлении движения воздуха *l*=0.1м. Влажность воздуха φ=33.3%.

Определить количество воды, испаряющейся за 1с с $1\,м^2$ поверхности.

Решение.

1) Найдем парциальное давление P_s около поверхности воды и P_0 вдали от нее. Из табл.12.2 определяем, что при $t_0 = 20°C$ давление насыщенных

паров $(P_0)_{нп} = 17.54$ мм, при влажности φ=33.3% парциальное давление P_0 равно

$$P_0 = \varphi(P_0)_{нп} = 17.54 \cdot 0.333 = 5.85 мм.рт.ст. = 780 н/м^2.$$

Парциальное давление водяного пара над поверхностью воды равно давлению насыщенных паров при температуре поверхности воды, т.е.

$$P_s = (P_s)_{нп} = 12.79 мм = 1704 н/м^2.$$

2) Найдем коэффициент теплообмена α. Для этого прежде всего оценим характер режима, т.е. вычислим критерий Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{l \cdot \mathrm{v}_0}{\nu} = \frac{3.1 \cdot 0.1}{1.56 \cdot 10^{-5}} = 2 \cdot 10^4,$$

т.е. течение ламинарное, и дальнейшие расчеты можно проводить по формулам:

$$Nu = 0.57\sqrt{\mathrm{Re}}, \quad Nu = 0.57\sqrt{2 \cdot 10^4} = 78.$$

Коэффициент теплообмена равен ($\lambda_f = 0.025 Вт/мК$)

$$\alpha = Nu\frac{\lambda_f}{l} = 78\frac{0.025}{0.1} = 19.5 Вт/м^2 К.$$

3) По формуле (12.24) найдем коэффициент конвективного массообмена. Для воздуха при $t = 20°C$, $\rho = 1.205 кг/м^3$, $C_P = 1000 Дж/кгК$,

$$\beta = \frac{19.5}{1.205 \cdot 10^3} = 0.018 м/с.$$

4) По формуле (12.33) определим поток массы. Предварительно найдем газовую постоянную R для паров воды с $\mu = 18$:

$$R = \frac{R_0}{\mu} = \frac{8314}{18} = 461 Дж/кгК, \quad T = 288 К,$$

$$j = \frac{1.8 \cdot 10^{-2}}{4.61 \cdot 10^2 \cdot 2.88 \cdot 10^2}(1704 - 780) = 1.26 \cdot 10^{-4} кг/м^2 с.$$

Глава 13. Регуляризация температурных полей однородных тел

13.1. Регулярный тепловой режим тел без источников энергии

Рассмотрим общие закономерности перехода температурного поля тела или системы тел от одного стационарного состояния к другому из-за изменения температуры окружающей среды.

Охлаждение (нагревание) тела при изменении температуры окружающей среды. Пусть однородное тело произвольной конфигурации имеет начальное распределение избыточной температуры ϑ_0

$$\vartheta_0 = \vartheta(x, y, z, 0) = t(x, y, z, 0) - t_c = f(x, y, z) \qquad (13.1)$$

и находится в среде с постоянной температурой t_c. Теплообмен со средой подчиняется закону Ньютона, тогда при отсутствии на поверхности тела S источников или стоков теплоты справедливо условие

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} + \frac{\alpha \vartheta}{\lambda}\right)_S = 0, \qquad (13.2)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности тела S.

Начальное распределение температур $\vartheta_{нач} = \mathrm{f}(x, y, z)$ задано условием $\vartheta_n(x, y, z, 0) = \vartheta_{нач} = \mathrm{f(x, y, z)}$

Температурное поле $\vartheta(x, y, z, \tau)$ тела описывается уравнением Фурье

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a\nabla^2 \vartheta. \qquad (13.3)$$

Для многих практических задач решение системы уравнений (13.1) – (13.3) может быть получено в форме бесконечного ряда (см. подробнее литературу [15])

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x, y, z) e^{-m_n \tau}, \qquad (13.4)$$

где A_n - коэффициент, зависящий от начального распределения температур,

U_n - функция, зависящая только от координат и формы тела,

m_n - коэффициенты, не зависящие ни от координат, ни от времени.

Решение (13.4) системы уравнений (13.1) – (13.3), определяющее пространственно-временное изменение температур в охлаждающемся или нагревающемся теле, получено при условии неизменности теплофизических параметров тела *a, λ, c* и коэффициента теплоотдачи α.

Различные стадии процесса охлаждения (нагревания) тела. В аналитической теории теплопроводности для тел простой конфигурации существуют решения вида (13.4) при различном характере начального распределения температур. Обычно рассматриваются температурные поля полупространства, шара, неограниченных цилиндра или пластины, некоторых ограниченных тел и простейших систем тел. Каждое из таких решений представляют ценность, но совокупность этих решений редко позволяет сделать выводы об общих закономерностях пространственно-временного изменения температурных полей. А такие общие закономерности, проявляющиеся в телах самых разнообразных форм, безусловно существуют, знание их может облегчить понимание процесса и решение некоторых конкретных задач. Одна из таких закономерностей, описывающих изменение температурного поля тела и системы тел во времени, была установлена в работах проф. Г.М.Кондратьева [16].

Процесс охлаждения (нагревания) тела можно разделить во времени на две стадии: стадию неупорядоченного (иррегулярного) процесса и стадию упорядоченного (регулярного) режима. Первая из них характеризуется сильным влиянием на температурное поле тела его

начального состояния. С течением времени влияние начальных особенностей температурного поля на его дальнейшее изменение сглаживается. Процесс из стадии неупорядоченной переходит в стадию упорядоченную - " регулярную". В регулярном тепловом режиме закон изменения температурного поля во времени приобретает простую экспоненциальную форму. Эти выводы можно непосредственно усмотреть из анализа решения уравнения теплопроводности (13.4) для изотропного тела, охлаждающегося в среде с постоянной температурой. Коэффициенты m_n связаны с собственными числами задачи μ_n соотношением $m_n = \mu_n^2 a$ и, как правило, образуют возрастающую последовательность

$$0 < m \equiv m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots . \qquad (13.5)$$

Тогда последовательность $\{\exp(-m_n\tau)\}$ будет убывающей, причем с ростом τ скорость убывания будет увеличиваться и при некоторых значениях $\tau \geq \tau^*$ первый член ряда (13.4) будет значительно превосходить сумму остальных членов этого ряда, т.е. начиная с некоторого момента времени пространственно-временное изменение температурного поля будет с удовлетворительной точностью описываться первым членом ряда (13.4). Начинающийся с момента времени τ^* режим охлаждения тела был назван Г.М.Кондратьевым регулярным тепловым режимом первого рода.

Итак, в основу теории теплового регулярного режима положена известная математическая теория, а в качестве решений краевых задач берутся их приближенные значения в виде первого члена бесконечного ряда (13.4). Следовательно, в стадии регулярного режима температурное поле $t_{рег}$ подчиняется зависимости

$$\vartheta_{рег} = t_{рег} - t_c = AUe^{-m\tau}, \qquad (13.6)$$

где $A \equiv A_1, \quad U \equiv U_1, \quad m \equiv m_1.$

Если основное предположение о характере сходимости ряда (13.4) выполняется, то это влечет за собою некоторые следствия.

1. В стадии регулярного режима температурное поле во всех точках тела изменяется по экспоненциальному закону (13.6), причем показатель экспоненты m не зависит от координат. Из формулы (13.6) следует, что

$$\ln \vartheta_{рег} = -m\tau + \ln(AU) = -m\tau + G(x, y, z) \qquad (13.7)$$

или

$$-\frac{\partial \ln \vartheta_{рег}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \vartheta_{рег}}{\vartheta_{рег} \partial \tau} = m \neq m(x, y, z), \qquad (13.8)$$

т.е. по истечении достаточного времени после начала охлаждения наступает регулярный режим, отличительной особенностью которого является постоянство скорости изменения логарифма перегрева со времени для всех точек тела.

2. В стадии регулярного режима в моменты времени τ' и τ'' значения избыточной температуры в какой-либо точке тела равны

$$\vartheta'_{рег} = AUe^{-m\tau'},\ \vartheta''_{рег} = AUe^{-m\tau''},$$

а их отношение

$$\frac{\vartheta'_{рег}}{\vartheta''_{рег}} = e^{-m(\tau'-\tau'')}. \qquad (13.9)$$

т.е. поле избыточной температуры $\vartheta_{рег}$ в стадии регулярного режима остается при изменении времени подобным самому себе. Или говорят, что температурное поле становится автомодельным. Заметим, что автомодельность поля температур в стадии регулярного режима наступает независимо от характера начального распределения температур. Поэтому иногда говорят, что в условиях регулярного режима неравномерность начального температурного поля перестает влиять на характер изменения поля температур.

3. Показатель m, входящий в выражение (13.6), занимает центральное место в теории регулярного режима и называется темпом охлаждения (нагревания) тела. На всей стадии регулярного режима темп остается неизменным, не зависящим от времени и выбора точек внутри тела.

Рассмотрим графическую интерпретацию изучаемого процесса. На рис.13.1.а в координатах $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$, τ построены кривые охлаждения для двух произвольных точек тела. Т.к. начальное поле температур может быть неравномерным, то в начальный момент времени температуры $\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_0}$ и $\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_0}$ не совпадают.

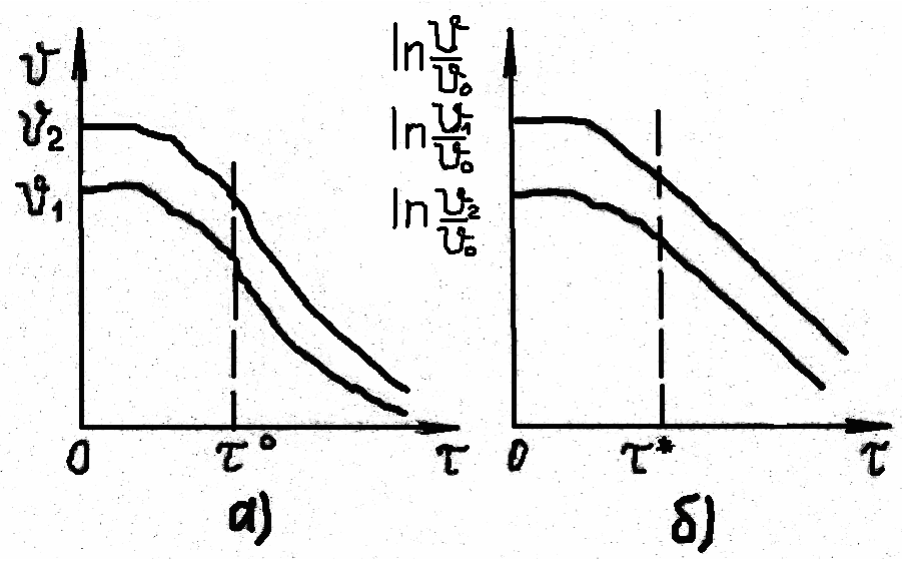


Рис.13.1. Изменение температуры $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ во времени τ в

а) обычных б) полулогарифмических координатах

Здесь ϑ_0 - избыточная начальная температура тела. По виду кривых трудно установить, подчиняются характер охлаждения температурного поля экспоненциальной зависимости или нет. На рис.13.1.б построены кривые охлаждения для тех же точек тела, но в полулогарифмических координатах $ln\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$, τ. Как следует из уравнения (13.7), в стадии регулярного охлаждения зависимость логарифма избыточной относительной температуры $\frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ со временем изменяется по линейному закону.

Из рис.13.1.б видно, что с момента времени $\tau \geq \tau^*$ линии остаются прямыми с одинаковым углом наклона, т.е. с этого момента времени можно считать, что температурное поле вошло в стадию регулярного режима. На основании уравнения (13.8) можно предложить практический прием определения темпа охлаждения. Применив уравнение (13.7) к двум произвольным элементам времени τ' и τ'' и вычтя одно уравнение из другого, получим

$$m = \frac{\ln \vartheta_1' - \ln \vartheta_1''}{\tau'' - \tau'} \qquad (13.10)$$

13.2. Теоремы Г.М. Кондратьева

Закономерности охлаждения (нагревания) тел или систем тел сформулированы в следующих теоремах.

1. Для системы тел имеет место регуляризация температурного поля, т.е. скорость изменения логарифма избыточной относительной температуры одинакова для всех точек системы (первая теорема Кондратьева).

Доказательство этой теоремы очевидно для однородного изотропного тела и приведено выше, для системы тел обоснование сформулированной теоремы вследствие его громоздкости здесь не приводим.

2. Темп *m* охлаждения (нагревания) изотропного тела при конечном значении коэффициента теплоотдачи α пропорционален произведению внешней поверхности S тела на коэффициент теплоотдачи и обратно пропорционален полной теплоемкости C тела (вторая теорема Кондратьева).

$$m = \psi \frac{\alpha S}{C}, \quad \psi = \frac{(\vartheta_{рег})_s}{(\vartheta_{рег})_v}, \qquad (13.11)$$

где ψ - коэффициент пропорциональности, равный отношению среднеповерхностной избыточной температуры $(\vartheta_{рег})_s$ в стадии регулярного режима к среднеобъемной $(\vartheta_{рег})_v$.

Коэффициент ψ называют также критерием неравномерности температурного поля в теле. Если распределение температур в теле

равномерное, то $\vartheta_s = \vartheta_v$ и ψ=1; чем больше неравномерность температурного поля в теле, тем больше отличаются ϑ_s от ϑ_v, в предел температуры поверхности тела может стать равной температуре среды, а их разность – нулю, т.е. предельное значение $\vartheta = \vartheta_s$ тогда ψ=0.

Температурное поле тела, в том числе и поверхностная температура, зависят от коэффициента теплоотдачи. При небольших коэффициентах теплоотдачи неравномерность температурного поля в теле сравнительно небольшая; при стремлении коэффициента теплоотдачи к бесконечности $\vartheta_s \to 0$, а температурное поле тела становится сильно неравномерным. Следовательно, предельные значения критерия ψ при изменениях коэффициента теплоотдачи от нуля до бесконечности равны

$$\lim_{\alpha \to 0} \psi = 1, \lim_{\alpha \to \infty} \psi = 0.$$

Приведем доказательство сформулированной выше теоремы. Рассмотрим тело в произвольной конфигурации, охлаждающееся в среде с постоянной температурой. На основании закона сохранения энергии количество энергии F_1, теряемой телом за время dτ, равно количеству энергии F_2, отданной за то же время поверхностью тела в среду, т.е.

$$F_1 = F_2, \tag{13.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\int_v c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} d\tau dV = -c\rho V \frac{d\vartheta_V}{d\tau} d\tau, \\ F_2 &= \int_S \alpha \vartheta dS d\tau = \alpha S \vartheta_S d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{13.13}$$

Если α=α(S), то по теореме о среднем с использованием среднего значения коэффициента теплоотдачи $\bar{\alpha}$ найдем

$$F_2 = \int_S \alpha(S) \vartheta dS d\tau = \bar{\alpha} S \vartheta_S d\tau. \tag{13.14}$$

Подставим (13.13), (13.14) в равенство (13.12), получим

$$C \frac{d\vartheta_V}{d\tau} = \bar{\alpha} \vartheta_S S, \tag{13.15,а}$$

где C=cρV - полная теплоемкость тела.

Рассмотрим соотношение

$$\psi = \frac{\vartheta_S}{\vartheta_V} = \frac{V}{S} \frac{\int_S \vartheta dS}{\int_V \vartheta dV} = \frac{V}{S} \frac{\int_S \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau} dS}{\int_V \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n e^{-m_n \tau} dV} = \frac{V}{S} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n \tau} \int_s U_n dS}{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n \tau} \int_V U_n dV}$$

и покажем, что в стадии регулярного теплового режима оно не зависит от времени.

Действительно, при наступлении регулярного режима температурное поле описывается первым членом ряда и последнее выражение принимает вид

$$\psi = \frac{V}{S}\frac{Ae^{-m\tau}\int_S UdS}{Ae^{-m\tau}\int_V UdV} = \frac{V}{S}\frac{\int_S UdS}{\int_V UdV} \neq f(\tau).$$

Используя это свойство критерия ψ в стадии регулярного режима, получим равенство (13.15)

$$C\frac{d\vartheta_V}{\vartheta_V d\tau} = \overline{\alpha}S\psi \qquad (13.15,б)$$

и на основании выражения (13.8) $Cm = \overline{\alpha}S\psi$, т.е. приходим к выражению (13.11). Теорема доказана.

3. При значении $\alpha = \infty$ выражение (13.11) для темпа охлаждения становится неопределенным, т.к. ψ=0. Можно показать, что темп охлаждения имеет предел при $\alpha \to \infty$.

Предельное значение темпа охлаждения m_∞ и температуропроводность материала a прямо пропорциональны (третья теорема Кондратьева):

$$a = \text{К}\, m_\infty \qquad (13.16)$$

Коэффициент пропорциональности К зависит лишь от формы и размеров тела и называется поэтому коэффициентом формы тела.

Для обоснования этой теоремы рассмотрим произведение αψ

$$\alpha\psi = \alpha\frac{\vartheta_S}{\vartheta_V}. \qquad (13.17)$$

Из условия (13.2) на границе тела следует, что

$$\alpha\vartheta\big|_S = -\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\Big|_S$$

или для средних поверхностных температур

$$\alpha\vartheta_S = -\frac{\lambda}{S}\int_S\frac{\partial\vartheta}{\partial n}dS. \qquad (13.18)$$

Из (13.17) и (13.18) получим

$$\alpha\psi = -\frac{\lambda}{S}\frac{\int_S\frac{\partial\vartheta}{\partial n}dS}{\vartheta_V}. \qquad (13.19)$$

Рассмотрим пределы изменения числителя и знаменателя правой части (13.19). Среднеобъемный перегрев ϑ_V по физическому смыслу не может принимать бесконечно большое или нулевое значение; комплекс $\lambda\int_S\frac{\partial\vartheta}{\partial n}dS$ является потоком тепла, отдаваемым с поверхности тела, и он также будет конечным. Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty}(\alpha\psi) = B, \qquad (13.20)$$

где В - конечная величина.

Обозначим $\lim_{\alpha\to\infty} m = m_\infty$ и найдем предельное значение m_∞ с учетом равенства (13.20) и соотношения $c\rho = \frac{\lambda}{a}$:

$$m_\infty = \psi\frac{\alpha S}{C} = \frac{BS}{C} = \frac{BS}{c\rho V} = \frac{BS}{V\lambda}a.$$

введя обозначение $K = \frac{V\lambda}{BS}$, получим $m_\infty = \frac{a}{K}$, т.е. пришли к выражению (13.16). Теорема доказана.

13.3. Метод разделения переменных (метод Фурье) для задач теплопроводности

Приведём точное классическое решение простейшей задачи для неограниченной пластины, температурное поле которой будет зависеть от времени и координаты. Температурное поле тела описывается дифференциальным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t, \qquad (13.21)$$

Используем для его решения разделение переменных (метод Фурье). Частные решения представляются в виде произведения функций $\theta(\tau)\cdot U(x)$, каждая из которых зависит только от одной переменной

$$t(x,\tau) = A\theta(\tau)U(x) \qquad (13.22)$$

Подставим выражение (13.22) в уравнение (13.21), после преобразований получим

$$\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} = a\frac{\nabla^2 U(x)}{U(x)} = D \qquad (13.23)$$

Это отношение должно равняться постоянной величине D.

Из выражения (13.23) получим два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} &\theta'(\tau) - D\theta(\tau) = 0, \qquad (а)\\ &\nabla^2 U(x) - \frac{D}{a}U(x) = 0 \quad (б) \end{aligned} \qquad (13.24)$$

Обсудим свойства постоянной величины D. Эта величина не может быть положительной, в противном случае из решения (13.24а) получим при устремлении $\tau\to\infty$, возрастание θ до бесконечности, а следовательно в силу (13.22) и температура тела примет бесконечное значение, а это противоречит физическому смыслу задачи. Величина D не может быть равна нулю $D\neq 0$, т.к. при $D = 0$ из (13.24а) следует, что θ не зависит от времени, т.е. нет нестационарных процессов, что также противоречит физическому смыслу задачи. Остается одна возможность, а именно: D<0 и она может быть вещественной или мнимой. При D вещественной описываются обычные процессы нагрева и охлаждения тел, при D мнимой – периодические процессы.

Обозначим

$$-\frac{D}{a}=\gamma^2,\quad D=-a\gamma^2 \tag{13.25}$$

и приведем решение уравнения (13.24а).

Уравнение (13.24а) можно проинтегрировать и тогда получим

$$\theta(\tau)=e^{D\tau}=e^{-a\gamma^2} \tag{13.26}$$

Уравнение (13.24б) с учетом (13.25) примет вид

$$\nabla^2U(x,y,z)+\gamma^2U(x,y,z)=0 \tag{13.27}$$

Решение уравнения (13.27) определяется геометрической формой тела и условиями теплообмена тела с окружающей средой. Пусть все эти условия известны и найдено решение $U(x,y,z)$ уравнения (13.27). Тогда частное решение уравнения теплопроводности (13.21) можно записать так

$$\vartheta=Ce^{-a\gamma^2\tau}U(x,y,z) \tag{13.28}$$

Уравнение (13.28) является частным решением уравнения (13.21), т.е. давая постоянным C и γ различные значения, получим бесконечное множество частных решений. Общее решение равно сумме частных решений. Постоянные γ определяются граничными условиями, а постоянные C - из начальных условий.

13.4. Нагревание неограниченной пластины при граничных условиях третьего рода

Постановка задачи и ее решение. Дана неограниченная пластина, толщиной 2R. Начальное распределение температуры задается функцией $\vartheta=(x,0)=f(x)$. В начальный момент времени пластина помещена в среду с постоянной температурой $t_c<t(x,0)$. Между поверхностями пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Требуется найти распределение температуры по толщине пластины.

Запишем математическую формулировку этой задачи.

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2t(x,\tau)}{\partial x^2},\quad \tau>0,\quad -R<x<+R \tag{13.29}$$

$$t(x,0)=f(x) \tag{13.30}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial x}+\alpha(t-t_c)=0\\&\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x}=0\end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

Условие (13.32) носит название условия симметрии.

Приведем решение этой задачи методом разделения переменных. Обозначим $t-t_c(x,\tau)=\vartheta(x,\tau)$. Подставим выражение (13.22) в граничное условие (13.31), и получим граничное условие для функций U:

$$\left[\frac{\partial U(x)}{\partial x}+hU(x)\right]_{x=R}=0,\quad h=\frac{\alpha}{\lambda}, \tag{13.32}$$

где x=R.

Собственными функциями краевой задачи называются нетривиальные (т.е. ненулевые) решения задачи (13.29). Собственными числами задачи называются те значения γ, при которых существуют нетривиальные решения (13.27) и (13.32). Для ограниченных областей спектр собственных чисел дискретный и образует счетное множество, поэтому собственные функции и числа записываются с индексом γ_n.

$$\gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_n < ...$$

Одним из основных свойств собственных функций является их ортогональность, т.е.

$$\int_V U_n(x)U_m(x)dV = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1, n = m \end{cases} \qquad (13.33)$$

Частное решение уравнения (13.29) при условии (13.32) имеет вид

$$\vartheta(x,\tau) = A\cos\gamma x e^{-\gamma^2 a\tau} \qquad (13.34)$$

Удовлетворим решение (13.34) условию (13.31), которое для новой переменной примет вид

$$\frac{\partial\vartheta(R,\tau)}{\partial x} + h\vartheta(R,\tau) = 0, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad (13.35)$$

Тогда

$$-\gamma A\sin\gamma \mathrm{Re}^{-\gamma^2 a\tau} + hA\cos\gamma \mathrm{Re}^{-\gamma^2 a\tau} = 0 \qquad (13.36)$$

Сократим (13.36) на $Ae^{-\gamma^2 a\tau}$, тогда получим тригонометрическое уравнение для определения постоянной γ

$$ctg\gamma R = \frac{\gamma}{h} = \frac{\gamma R}{hR} = \frac{\gamma R}{Bi}, \qquad (13.37)$$

Величина $hR = \frac{\alpha}{\lambda}R = Bi$ есть критерий Био.

Обозначим γR=μ, из анализа уравнения (13.37) видно, что μ имеет бесчисленное множество значений. Наиболее просто можно определить корни уравнения (13.37) графическим путем. Если левую часть уравнения ctg μ обозначить через y_1, т.е. y_1= ctg μ, а правую часть – через $y_2 = \frac{\mu}{Bi}$, то пересечение котангенсоиды y_1 с прямой y_2 (рис.13.2) даст значение корней μ. Из рисунка видно, что имеется

$$\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$$

чем больше n, тем ближе μ_n к числу (n-1)π. Тангенс угла наклона прямой yz равен $\frac{1}{Bi}$.

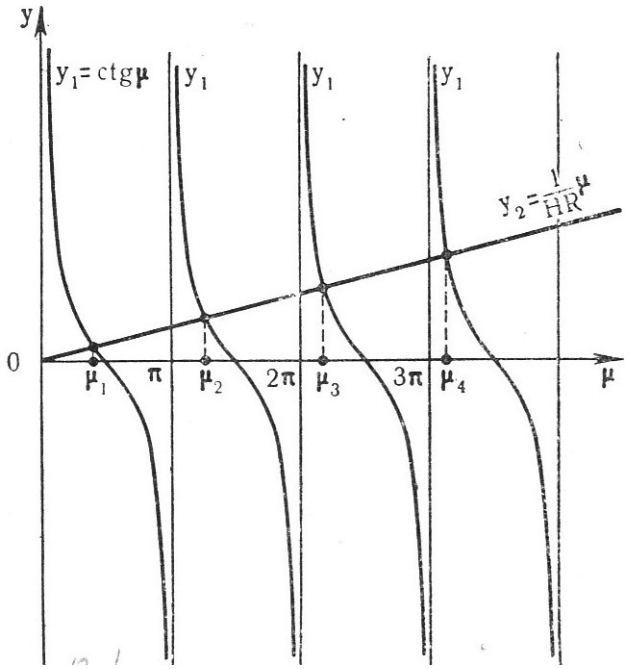


Рис.13.2. Графический способ определения корней характеристического уравнения

Поэтому при $Bi \to \infty$ тангенс наклона будет равен нулю, и прямая совпадет с осью абсцисс. Тогда $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, т.е. получаем характеристические числа задачи.

Итак, характеристическое уравнение (13.37) можно записать

$$ctg\mu = \frac{\mu}{Bi} \tag{13.38}$$

Общее решение будет равно сумме всех частных решений

$$\vartheta(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\mu_n \frac{x}{R} \exp(-\mu_n{}^2 \frac{a\tau}{R}) \tag{13.39}$$

Постоянные A_n определим из начального условия (13.30), которое для переменной ϑ имеет вид:

$$\vartheta(x,0) = t - t_c(x,0) = f(x) \tag{13.40}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\mu_n \frac{x}{R}$$

Собственные функции обладают свойством ортогональности (13.33). Используя свойство (13.33) найдем постоянную A_n

$$\int_V f_1(x) U_n dx = A_n \int_V U_n{}^2 dV$$

$$A_n = \frac{\int_V f_1(x) U_n(x) dx}{\int_V U_n{}^2(x) dV} \tag{13.41}$$

Если подставить $U_n(x) = \cos \mu_n \frac{x}{R}$, а $\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ тогда искомое распределение температур примет вид:

$$\vartheta(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{(2\mu-1)\pi x}{2R} \exp\left[-(2\mu-1)^2 \frac{\pi^2}{4}\frac{a\tau}{R^2}\right]$$
$$A_n = \frac{2}{R}\int_0^R f(x)\cos\frac{(2\mu-1)\pi x}{2R}dx \qquad (13.42)$$

13.5. Применение теории регулярного теплового режима к анализу температурного поля тел различной формы

Пластина. Дана неограниченная пластина толщиной 2R, свободно охлаждающаяся в среде с постоянной температурой. Требуется найти параметры m_∞, Ψ, K.

Запишем уравнение (13.38) для определения собственных чисел рассматриваемой задачи в ином виде:

$$\mu_n tg\mu_n = Bi, \qquad (13.43)$$

в темп охлаждения m входит наименьшее из них:

$$m = m_1 = \frac{a\mu_1^2}{R^2}.$$

Обозначив $\mu_\infty = \lim_{Bi\to\infty} \mu_n$, из выражения (13.43) определим μ_∞:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_\infty tg\mu_\infty = \infty,\ tg\mu_\infty = \infty,\ \mu_\infty = \pi/2; \\ &\mu_\infty = a\frac{\mu_\infty^2}{R^2} = (\pi/2)^2\frac{a}{R^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.44)$$

Сопоставив (13.16) и (13.44), найдём

$$K = (2R/\pi)^2. \qquad (13.45)$$

Можно показать, что для коэффициента формы тела справедлива общая зависимость

$$K = \frac{L^2}{\mu_\infty^2}, \qquad (13.46)$$

где L – определяющий размер тела (в данном случае половина толщины пластины).

Для отыскания коэффициента Ψ преобразуем зависимость (13.11) к следующему виду:

$$m = \alpha\Psi\frac{S}{C} = \alpha\Psi\frac{S}{c\rho V};$$
$$a\frac{\mu_1^2}{R^2} = \alpha\Psi\frac{Sa}{V\lambda}, \qquad (13.46)$$

откуда

$$\Psi = \frac{\mu_1^2 V\lambda}{R^2 \alpha S} = \frac{V}{S}\cdot\frac{\mu_1^2}{RBi}.$$

Для пластины V/S=R,

$$\Psi = \frac{\mu_1^2}{Bi}. \qquad (13.47)$$

Неограниченный цилиндр. Рассуждая аналогично, выпишем значения m_∞, Ψ, K для задачи о свободном охлаждении (нагрева) цилиндра радиусом R в среде с постоянной температурой:

$$\frac{\nu_k I_1(\nu_k)}{I_0(\nu_k)} = Bi \quad ; \quad \nu_\infty = 2{,}4048\ ;$$
$$K = \frac{R^2}{(2{,}4048)^2} \quad ; \quad \Psi = \frac{\nu_1 I_0(\nu_1)}{2 I_1(\nu_1)}. \qquad (13.48)$$

Здесь I_0 и I_1, - бесселевы функции нулевого и первого порядков.

Шар. Аналогичной по постановке задаче для шара радиусом R соответствуют значения

$$1 - \xi_k ctg\xi_k = Bi \quad ; \quad \xi_\infty = \pi\ ;$$
$$K = \frac{R^2}{\pi^2} \quad ; \quad \Psi = \frac{1}{3}\cdot\frac{\xi_1^2}{Bi}. \qquad (13.49)$$

Ограниченный цилиндр длиной $2l$ и радиусом R, охлаждающийся (нагревающийся) в среде с постоянной температурой.

Первое собственное число задачи $\gamma_{1,1}$

$$\gamma_{1,1}^2 = \frac{\mu_1^2}{l^2} + \frac{\nu_1^2}{R^2},$$

где μ_1 и ν_1 определяются соотношениями (13.43) и (13.48). Для предельного случая

$$Bi_{1,2} = \infty\ (Bi_1 = \alpha l/\lambda\ ;\ Bi_2 = \alpha R/\lambda)$$
$$\gamma_\infty^2 \equiv \gamma_{1,1}^2 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 + \frac{(2{,}4048)^2}{R^2}, \qquad (13.50)$$

и темп охлаждения $m_\infty = \alpha\gamma_\infty^2$, откуда

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 + \frac{(2{,}4048)^2}{R^2}}. \qquad (13.51)$$

Коэффициент неравномерности Ψ определим из соотношения, аналогичного (13.46):

$$a\gamma_{1,1}^2 = \alpha\Psi\frac{Sa}{V\lambda},$$

где $S = 2\pi R(2l + R)$, $V = 2\pi R^2 l$. Тогда

$$\Psi = \frac{V}{S}\cdot\frac{{\gamma_{1,1}}^2\lambda}{\alpha} = \frac{2l}{2l+R}\left(\frac{{\mu_1}^2}{l^2}+\frac{{\nu_1}^2}{R^2}\right)\frac{\lambda}{\alpha} =$$

$$= \frac{(\mu_1/Bi_1)^2+(\nu_1/Bi_2)^2}{2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{2l}\right)}\cdot\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{(\mu_1/Bi_1)^2+(\nu_1/Bi_2)^2}{2\left(\frac{1}{2Bi_1}+\frac{1}{Bi_2}\right)}. \qquad (13.52)$$

Аналогично находятся выражения К и Ψ для других тел. Следует обратить внимание на громоздкость выражений для Ψ, который во многих случаях вообще не представляется возможным определить аналитически. Поэтому рассмотрим другой метод решения этой задачи.

13.6. Обобщенная зависимость между темпом охлаждения и теплоотдачей тела

Критерии М и Н. Из соотношения (13.11) следует, что темп охлаждения (нагревания) тела растёт с ростом коэффициента теплоотдачи и стремится к асимптотическому значению m_∞ при бесконечно больших величинах этого коэффициента (3.16). Найдём из (3.11) и (3.16) отношение $\frac{m}{m_\infty}$ и исследуем зависимости $ac\rho=\lambda,\ C=c\rho$, получим

$$M = \Psi H, \qquad (13.53)$$

где $M=\frac{m}{m_\infty}$ - критерий тепловой инерции; $H=\frac{\alpha KS}{\lambda V}$ - обобщённый критерий Био.

На рис.13.3,а показан вид зависимости (13.11) в координатах m=m(α): это выпуклая кривая с асимптотой, параллельной оси абсцисс и находящейся от неё на расстоянии m_∞. Так как зависимость (13.11) связывает размерные физические (α,С) и геометрические (S) параметры тела, то каждому набору этих параметров будет соответствовать своя кривая. Поэтому представленная в графическом виде зависимость (13.11) носит иллюстративный характер и не может служить основой для численных расчётов. Практические расчёты по формуле (13.11) также затруднены, так как неизвестен критерий Ψ. Для группы простейших тел (шар, цилиндр, пластина и некоторые другие) вид этого критерия найден, но для более сложных тел отыскание структуры критерия Ψ является сложной самостоятельной задачей. Однако можно обобщить зависимость (13.11), что позволит избежать трудностей, связанных с расчётом темпа охлаждения тел.

В уравнении (13.53) фигурируют только безразмерные величины, поэтому оно является обобщением уравнения (13.11).

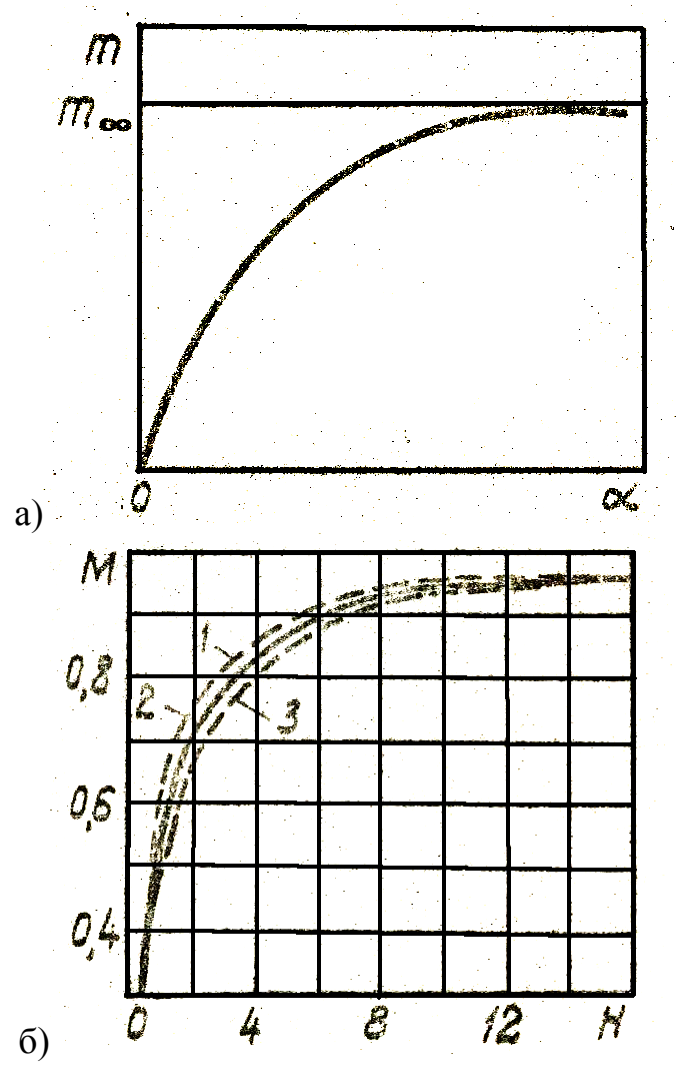


Рис.13.3. Зависимость темпа охлаждения от коэффициента теплоотдачи
а) в обычных и б) обобщённых координатах

Структура критерия М такова, что независимо от конфигурации тела при Н=0 темп охлаждения m=0 и М=0, а при $H=\infty$ темп охлаждения m=m_∞ и М=1. Если теперь зависимость (13.53) изобразить графически для тел различной конфигурации (1 – пластина, 2 – цилиндр, 3 – шар), то все кривые начинаются из одной точки, и при устремлении Н к бесконечности стремятся к единой асимптоте М=1 (рис.13.3,б).

Исследования показали, что для тел разной конфигурации кривые М=М(Н) при значениях $0 \le H < \infty$ настолько близко располагаются друг к другу, что практически всё многообразие их можно заменить одной осреднённой кривой. Приближённое аналитическое выражение для критерия Ψ, соответствующее этой кривой, имеет вид […]

$$\Psi = \frac{M}{H} = \frac{1}{\sqrt{H^2 + 1{,}437H + 1}}. \qquad (13.54)$$

Уравнение (13.54) значительно упростило математический аппарат теории регулярного режима и открыло перспективу решения задачи о

температурных полях тел сложных очертаний в стадии регулярного режима.

Коэффициент формы тела. При практическом использовании зависимости (13.54) неясно, как находить коэффициент формы К для тел различной конфигурации. Для некоторых тел, температурное поле которых можно определить аналитически, известны выражения для К. Для тел сложных очертаний коэффициент формы можно найти опытным путём.

Идея метода состоит в следующим. Из эталонного вещества, т.е. материала с известными теплофизическими свойствами, изготовляется модель, копирующая в выбранном масштабе данное тело. Охлаждая модель таким способом, чтобы было обеспечено условие $Bi \to \infty$, определяют из опыта темп регулярного охлаждения m_∞ и по формуле (13.16) вычисляют коэффициент формы $K_{мод}$ модели. После этого коэффициент формы К объекта вычисляют по формуле

$$K = n^2 K_{мод}\,, \qquad (13.55)$$

если модель по линейным размерам в n раз меньше объекта.

Обосновать эту формулу нетрудно на основании соотношения (13.46). Вместо коэффициента формы К удобно ввести безразмерный коэффициент

$$E_N = \frac{K}{K_N}\,, \qquad (13.56)$$

где K_N - коэффициента формы основного тела данного класса тел: класс пластины

$$E_1 = K / K_{пл} \quad , K_{пл} = (2l/\pi)^2\,;$$

класс цилиндра

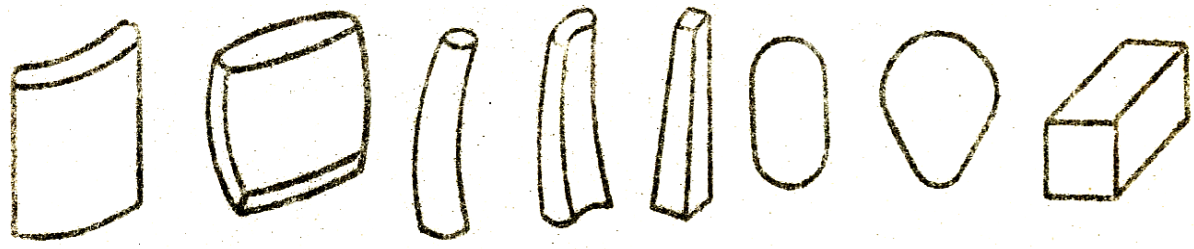
$$E_2 = K / K_{цил} \quad , K_{цил} = R^2 (2{,}4048)^2\,;$$

класс шара

$$E_3 = K / K_{ш} \quad , K_{ш} = R^2 / \pi^2 .$$

Введением Е удалось освободиться от влияния размеров сравниваемых форм; коэффициент Е, определяемый только формой тела и одинаковый только для геометрически подобных тел, можно назвать относительным коэффициентом формы.

Для изготовления моделей тел в качестве эталонного вещества удобно использовать натуральный необработанный пчелиный воск, температуропроводность a которого при температуре $0{,}5^\circ C$ равна $0{,}92 \cdot 10^{-7}\,\frac{м^2}{с}$. На рис.13.4 представлены некоторые тела 1,2 и 3-го классов.



Тела I-го класса Тела II-го класса Тела III-го класса

Рис. 13.4

Таблица 13.1

Относительный коэффициент формы

Описание формы	E	Способ определения
Длинная призма с квадратным сечением	0,92	выч.
Длинная призма с сечением в виде правильного треугольника	0,95	оп.
Архимедов цилиндр (высота равна основанию)	0,912	выч.
Куб	0,865	выч.
Трехгранная призма, все ребра которой равны между собой	0,692	оп.
Конус; в проходящем через высоту сечении правильный треугольник	0,668	оп.
Правильный тетраэдр	0,635	оп.
Тело вращения, образованное диском с полушариями на основаниях	0,96	оп.
Яйцевидное тело, близкое к эллипсоиду вращения с отношением осей 1,4	0,9	оп.
Тело вращения, состоящее из архимедова цилиндра с полушариями на основаниях цилиндра	0,83	оп.

В отдельных случаях можно критерий E найти аналитически. В табл.13.1 представлены значения критерия E, определённые опытным (оп.) или расчётным (выч.) путём для некоторых тел.

Глава 14. Регуляризация температурных полей системы тел. Влияние источника энергии

14.1. Трёхсоставная система тел

Рассмотрим замкнутые системы тел, т. е. будем считать, что одно тело полностью охватывает другие.

Точное решение задачи об охлаждении простейшей трёхсоставной системы тел. Рассмотрим сначала точное решение задачи нахождения

температурного поля простейшей системы, состоящей из ядра 1, оболочки 3 и зазора 2 между ними. Предположим, что температурное поле ядра и оболочки равномерно, а в зазоре существует перепад температур (рис. 14.1,а). Кроме того, будем считать, что теплоёмкость C_2 зазора мала по сравнению с теплоёмкостью ядра и оболочки и все теплофизические свойства не зависят от температуры. Найдём температурное поле такой системы при её нагревании или охлаждении в среде с постоянной температурой t_c. Составим на основе закона сохранения энергии дифференциальные уравнения, характеризующие процесс переноса тепла в данной системе.

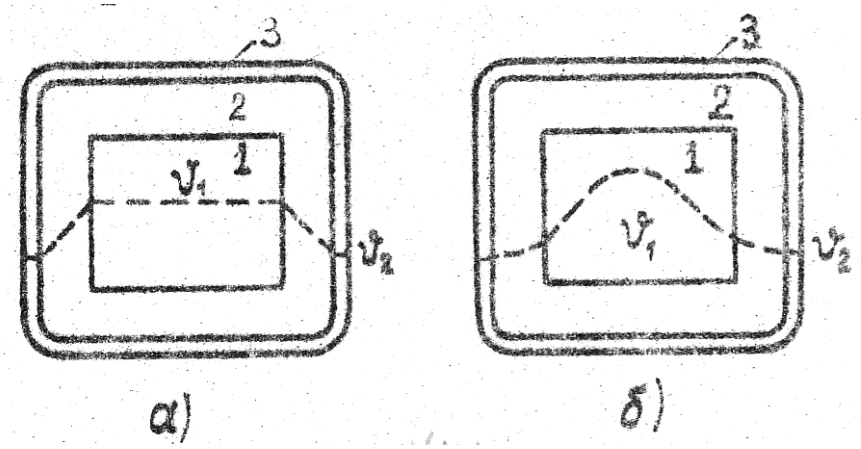


Рис.14.1. Трёхсоставная система тел; температура в ядре
а) равномерна, б) неравномерна

Количество тепла, теряемое в единицу времени при охлаждении ядра, передаётся через зазор оболочке 3, т. е.

$$-C_1\frac{d\vartheta_1}{d\tau}=\sigma_2(\vartheta_1-\vartheta_3)\quad,\ \vartheta_i=t_i-t_c\ ,i=1{,}3, \tag{14.1}$$

где σ_2 $\frac{Bm}{K}$ - тепловая проводимость зазора.

Тепловой поток, который по закону Ньютона отводится с поверхности системы в окружающую среду $\alpha S_3\vartheta_3$, определяется суммой тепловых потоков: рассеиваемого при охлаждении ядра и прошедшего через зазор 2, $\sigma_1(\vartheta_1-\vartheta_2)$ и теплового потока, рассеиваемого при остывании внешней оболочки $C_3\frac{d\vartheta_3}{d\tau}$, т. е.

$$\sigma_2(\vartheta_1-\vartheta_3)-C_3\frac{d\vartheta_3}{d\tau}=\alpha S_3\vartheta_3. \tag{14.2}$$

Решим систему уравнений (14.1)-(14.2) относительно ϑ_1:

$$\frac{d^2\vartheta_1}{d\tau^2}+\left(\frac{\sigma_2}{C_3}+\frac{\sigma_2}{C_1}+\alpha\frac{S_3}{C_3}\right)\frac{d\vartheta_1}{d\tau}+\frac{\sigma_2\alpha S_3}{C_1C_3}\vartheta_1=0. \tag{14.3}$$

Введём обозначения

$$a = \frac{\sigma_2}{C_3} + \frac{\sigma_2}{C_1} + \frac{\alpha S_3}{C_3} \quad , \quad b = \frac{\sigma_2 \alpha S_3}{C_1 C_3}$$

и запишем последнее уравнение в виде

$$\vartheta_1'' + a\vartheta_1' + b\vartheta_1 = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения при условии $a^2 - 4b > 0$ (что справедливо в данном случае) определяется выражением

$$\vartheta_1 = A_1 e^{-m_1\tau} + A_2 e^{-m_2\tau}, \qquad (14.4)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - 4b}) \ , \ \ m_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4b}). \qquad (14.5)$$

Подставив равенство (14.4) в (14.1), можно получить решение для ϑ_3:

$$\vartheta_3 = A_1\left(1 - \frac{C_1}{\sigma_2}m_1\right)e^{-m_1\tau} + A_2\left(1 - \frac{C_1}{\sigma_2}m_2\right)e^{-m_2\tau}.$$

Значения постоянных интегрирования A_1 и A_2 определяются из начальных условий:

$\vartheta_1(0) = \vartheta_{10}$, $\vartheta_2(0) = \vartheta_{20}$.

Перепишем уравнение (14.4), выразив из начальных условий A_2 через A_1. Если $\vartheta_{10} = \vartheta_{20}$, то

$$A_1 m_1 + A_2 m_2 = 0 \ , \ \ \vartheta_1 = A_1 e^{-m_1\tau}\left[1 - \frac{m_1}{m_2}e^{-(m_2 - m_1)\tau}\right]. \qquad (14.6)$$

Итак, изменение температурного поля рассматриваемой системы характеризуется двумя экспоненциальными членами; для оценки их относительного влияния необходимо определить соотношение между m_1 и m_2.

Перепишем выражение (14.5) в следующем виде:

$$m_1 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{1-n}) \ ; \ \ m_2 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{1-n}) \ ; \ n = \frac{4b}{a^2} \cdot \frac{4\alpha S_3 \dfrac{C_3}{C_1}}{\sigma_2\left(1 + \dfrac{C_3}{C_1} + \dfrac{\alpha S_3}{\sigma_2}\right)^2}. \qquad (14.7)$$

Оценим значения m_1 и m_2 для конкретного случая: ядро – параллелепипед с размерами 10x20x5 см, $C_1 = 460 Дж/К$; оболочка из дюралюминия, $C_3 = 140 Дж/К$. Зазор – воздушный, толщиной $\delta_2 = 0.5 см$ см; $\lambda_2 = 0.03 Вт/м \cdot К$; $S_3 = 0.06 м^2$. Охлаждение происходит в условиях естественной конвекции, $\alpha_3 = 20 Вт/м^2 К$. Тогда

$$\sigma_2 = \frac{\lambda_2}{\delta_2}S_3 = \frac{0{,}03}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot 0{,}06 = 0{,}36 \ , Вт/К \ ; \ \ n = 4b/a^2 = 0{,}4 \ ;$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0{,}4}}{1 + \sqrt{1 - 0{,}4}} = 0{,}13 \ ; \ m_1 = 8{,}5 \cdot 10^{-4}, c^{-1} \ ; \ m_2 = 6{,}7 \cdot 10^{-3}, c^{-1};$$

$$\vartheta_1 = A_1 e^{-m_1\tau}\left[1 - 0{,}13 e^{-6{,}9 m_1 \tau}\right]$$

При τ=0 второй член отличается от первого на 13%, через 3 мин. второй член будет отличаться от первого на 4%. Когда второй член станет малым по сравнению с первым, придём к регулярному тепловому режиму.

Тепловой регулярный режим трёхслойной системы тел с неравномерным полем ядра (рис.14.1,б). Проведённый анализ позволяет перейти к более общему случаю, лучше отражающему особенности реальной системы: постановка задачи остаётся прежней, но предполагается, что температурное поле ядра неравномерное.

Введём на основе закона сохранения энергии дифференциальные уравнения переноса тепла, аналогичные уравнениям (14.1) и (14.2). Уравнение (14.1) в данном случае имеет вид

$$C_1 \frac{d\vartheta_{1v}}{d\tau} = \sigma_2(\vartheta_{1s} - \vartheta_3), \tag{14.8}$$

где ϑ_{1v} и ϑ_{1s} - средний объёмный и поверхностный перегрев ядра.

Уравнение (14.2) следует записывать так:

$$\sigma_2(\vartheta_{1s} - \vartheta_3) - C_3 \frac{d\vartheta_3}{d\tau} = \alpha S_3 \vartheta_3. \tag{14.9}$$

Сделаем предположение о том, что температурное поле всей системы входит с самого начала в стадию регулярного теплового режима, тогда для любой точки *i* тела будет справедливо основное соотношение теории регулярного режима

$$\frac{d\vartheta_1}{\vartheta_i d\tau} = -m = const, \tag{14.10}$$

где m – темп охлаждения системы, общий для любой её части. Введём обозначение

$$\Psi_1 = \frac{\vartheta_{1s}}{\vartheta_{1v}}, \tag{14.11}$$

где Ψ_1 - критерий неравномерности температурного поля в ядре. Из теории регулярного режима известно, что Ψ_1 не зависит от времени.

Перепишем уравнения (14.8) и (14.9) с учётом зависимостей (14.10) и (14.11):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Psi} C_1 m = \sigma_2(1 - \vartheta_3 / \vartheta_{1s}); \\ C_3 m + \sigma_2(\vartheta_{1s} / \vartheta_3 - 1) = \alpha S_3. \end{cases}$$

Исключив из последней системы уравнений $\vartheta_3 / \vartheta_{1s}$, придём относительно m к алгебраическому уравнению

$$am^2 - bm + c = 0. \tag{14.12}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a = C_1 C_3;\ b = C_1\sigma_2 + C_3\sigma_2\Psi_1 + \alpha S_3 C_1;\ c = \alpha S_3 \Psi_1 \sigma_2.$$

По определению, в условиях регулярного теплового режима следует брать наименьшее значение параметра m, поэтому

$$m = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (14.13)$$

Заметим, что критерий Ψ_1 может быть найден по формуле (13.54):

$$\Psi_1 = \frac{M}{H_1} = \frac{1}{\sqrt{H_1^{\,2} + 1{,}437H_1 + 1}},$$

где $H_1 = \dfrac{\alpha_{эф} K_1 S_1}{\lambda_1 V_1}$, $M = m/m_\infty$, $\alpha_{эф}$ - эффективный коэффициент теплообмена ядра с окружающей средой.

Пусть начальное поле температуры ядра $\vartheta_{10}(x,y,z)$, а оболочки - ϑ_{20}, тогда охлаждение ядра и оболочки в стадии регулярного режима можно определить по следующим приближённым формулам:

$$\vartheta_1(x,y,z,\tau) = \vartheta_{10}(x,y,z)e^{-m\tau}\,;\ \vartheta_2(\tau) = \vartheta_{20}e^{-m\tau}. \qquad (14.14)$$

Тепловой регулярный режим ядра с оболочкой. Рассмотрим изоляционное ядро, окружённое металлической оболочкой (рис.14.2,а).

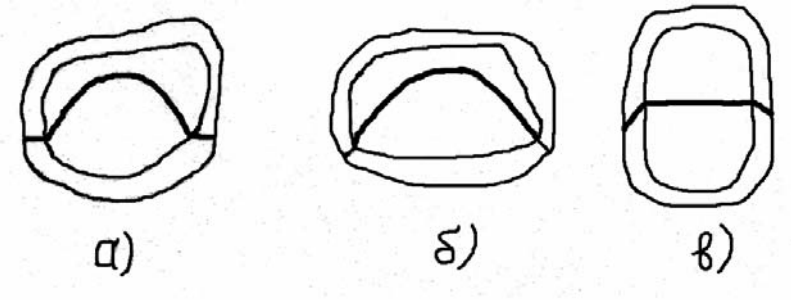


Рис.14.2. Система ядро с оболочкой: а) металлическая оболочка, б) изоляционная оболочка, в) металлическое ядро

Выражение для темпа охлаждения такой системы можно получить, полагая в (14.13) $\sigma_2 = \infty$. Для этого запишем (14.12) в виде

$$\frac{a}{c}m^2 - \frac{b}{c}m + 1 = 0\,; \qquad (14.15)$$

где $\sigma = \infty$

$$\frac{a}{c} = \frac{C_1 C_3}{\alpha S_3 \sigma_2 \Psi_1} = 0\,,\ \frac{b}{c} = \frac{C_1}{\Psi_1 \alpha S_3} + \frac{C_3}{\alpha S_3}$$

и уравнение (14.15) примет вид $\dfrac{b}{c}m = 1$, откуда

$$m = \frac{c}{b} = \frac{\alpha S_3}{\dfrac{C_1}{\Psi_1} + C_3}. \qquad (14.16)$$

Пусть изоляционное ядро окружено тонкой изоляционной оболочкой, в которой есть перепад температур (рис. 14.2,б). Для определения m такой системы следует перейти от наружной проводимости αS_3 к полной проводимости системы изоляция – наружное тепловое

сопротивление. Если тепловое сопротивление изоляции R, а наружное тепловое сопротивление $\frac{1}{\alpha S_3}$, то полное тепловое сопротивление R_1 равно

$R_1 = R + 1/(\alpha S_3).$

Далее при расчете теплоемкости ядра будем учитывать и теплоемкость оболочки, т.е. вместо C_1 брать $C_1 + C_3$. Эта операция приближенная, но при $C_3 << C_1$ ошибка будет незначительной. Окончательно получим

$$m = \frac{1}{\left(R + \frac{1}{\alpha S_3}\right)\frac{C_1 + C_3}{\Psi_1}} = \frac{\alpha \Psi_1 S_3}{(C_1 + C_3\Psi_1)(1 + R\alpha S_3)}. \qquad (14.17)$$

Наконец, рассмотрим третий случай: металлическое ядро (равномерное поле температур в ядре) окружено изоляционной оболочкой (рис.14.2, в). Полагая в формуле (14.17) Ψ_1=1, приходим к выражению для m в данном случае:

$$m = \frac{\alpha S_3}{(C_1 + C_3)(1 + R\alpha S_3)}. \qquad (14.18)$$

14.2. Регуляризация температурных полей тел с источниками энергии

В работах Г.М.Кондратьева и Г.Н.Дульнева изложенная ранее теория регуляризации получила дальнейшее развитие и обобщена для тел и системы тел с внутренними источниками тепла [2,10].

Пусть тело или система тел нагревается источниками энергии, произвольно распределенными внутри тела или на его границах. Предполагается, что мощность источников энергии неизменна во времени, температура среды постоянна, коэффициент теплоотдачи и теплофизические параметры материалов не зависят от температуры.

В этих условиях, как и в случае нагревания тела под влиянием окружающей среды, процесс можно разделить во времени на стадию неупорядоченного (иррегулярного) режимов.

В регулярном режиме изменение температурного поля во времени приобретает простейшую форму. С момента наступления регулярного режима натуральный логарифм разности температур $(t_{cm} - t)$ любой точки тела или системы тел изменяется во времени по линейному закону, т.е. разность температур $(t_{cm} - t)$ убывает во времени по экспоненциальному закону:

$$\ln(t_{cm} - t) = -m^*\tau + G^*(x, y, z), \qquad (14.19)$$

где t_{cm} - стационарная (предельная) температура в точке (x,y,z) системы; t - температура в той же точке в момент времени τ; m^* - темп охлаждения системы; G^* - функция координат.

Сопоставив формулы (13.7) и (14.19), видим, что в первом случае закон формулируется для избыточной температуры $\vartheta = t - t_c$, во втором – для разности температур в стационарном и нестационарном режимах системы.

Зависимость (14.19) может быть установлена из анализа решения уравнения теплопроводности однородного изотропного тела с источниками энергии. Уравнение теплопроводности в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} = a\nabla^2 \vartheta(x,y,z,\tau) + \frac{W(x,y,z)}{c\rho}, \qquad (14.20)$$

где $\vartheta(x,y,z,\tau) = t(x,y,z,\tau) - t_c$.

Теплообмен тела на границе S со средой происходит по закону Ньютона, т.е.

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n_i} + \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\vartheta\right)_{S_i} = 0, \qquad (14.21)$$

где i – номер границы.

Начальное распределение температур в теле

$$\vartheta(x,y,z,0) = \vartheta_0(x,y,z). \qquad (14.22)$$

В теле с источниками энергии стационарная избыточная температура ϑ_{cm} является предельным значением перегрева ϑ, т.е. $\lim_{\tau\to\infty} \vartheta(x,y,z,\tau) = \vartheta_{cm}(x,y,z)$, что позволяет представить избыточную температуру в любой момент времени (рис.14.3) в виде

$$\vartheta(x,y,z,\tau) = \vartheta_{cm}(x,y,z) - \varepsilon(x,y,z,\tau), \qquad (14.23)$$

где $\lim_{\tau\to\infty} \varepsilon(x,y,z,\tau) = 0$.

В начальный момент времени

$$\varepsilon(x,y,z,0) = \vartheta_{cm}(x,y,z) - \vartheta_0(x,y,z). \qquad (14.24)$$

Воспользуемся этими свойствами функции ε для определения интеграла уравнения (14.20); подставим в уравнение (14.20) значение ϑ из равенства (14.23):

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = a\nabla^2 \vartheta_{cm} - a\nabla^2 \varepsilon + \frac{W}{c\gamma}. \qquad (14.25)$$

Т.к. стационарное температурное поле в теле подчиняется уравнению $a\nabla^2 \vartheta_{cm} = -\frac{W}{c\gamma}$, то из уравнения (14.25) получаем дифференциальное уравнение для функции ε:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = a\nabla^2 \varepsilon. \qquad (14.26)$$

Следовательно, задача сводится к определению общего интеграла (14.26), который представим в форме (13.4), как и в случае простого охлаждения тела, т.е.

$$\varepsilon(x,y,z,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nU_n e^{-m_n^*\tau}, \qquad (14.27)$$

где числа $m^* \equiv m_1^*, m_2^*, m_3^*, \ldots$ образуют возрастающую последовательность; в отличие от аналогичных чисел (13.5), обозначим их со звездочкой.

Числа m_n^* не зависят ни от координат, ни от времени; это строго доказывается при условии, что ε имеет форму выражения (14.27); величина A_n зависит от стационарного и начального распределения температуры

$$A_n=\frac{\int_V(\vartheta_{cm}-\vartheta_0)U_n dV}{\int_V U_n^2 dV}. \qquad (14.28)$$

Выражения (14.27) – (14.28) являются решением поставленной задачи. Однако получить рабочие расчетные формулы на их основании удается лишь в отдельных случаях для однородных тел простой формы и некоторых систем тел.

Найдем приближенное решение задачи, предположив, что температурное поле системы вошло в стадию регулярного режима. На основании неравенств (13.5) и вида решения для $\varepsilon(x,y,z,\tau)$ сделаем следующее предположение: для моментов времени, не очень близких к начальному, в уравнении (14.27) можно пренебречь в некоторых случаях всеми членами ряда, кроме первого, еще задолго до наступления стационарного состояния, т.е.

$$\varepsilon_{рег}(x,y,z,\tau)=AUe^{-m^*\tau}. \qquad (14.29)$$

Как только выражение (14.29) станет справедливым для всех точек тела, будем считать по аналогии с обычной теорией регулярного теплового режима и с употреблявшейся там терминологией, что температурное поле системы вошло в стадию регулярного теплового режима.

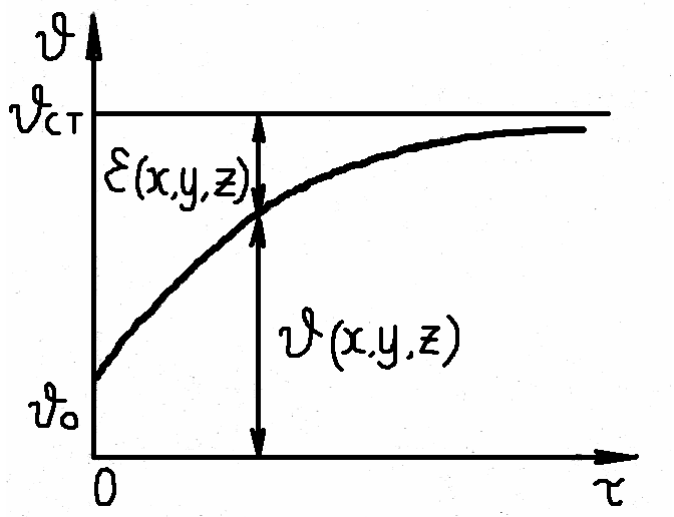


Рис.14.3. Изменение температуры в теле под влиянием внутренних источников энергии

Подставив в равенство (14.23) значение ε из уравнения (14.29) и произведя логарифмирование, придем к уравнению (14.19).

Следовательно, анализ дифференциального уравнения для температурного поля однородного изотропного тела с источниками энергии позволяет сделать вывод о регуляризации температурного поля в таких телах.

Как в обычной теории регулярного режима, в случае регуляризации температурного поля тел с источниками энергии центральное место в теории занимает темп охлаждения m^* тела.

Рассмотрим более подробно свойства m^* и в первую очередь установим связь между взаимодействиями на тело внешней среды и темпом нагревания тела, являющемся реакцией на это воздействие. Если характеризовать воздействие окружающей среды на тело с помощью коэффициента теплоотдачи α, то связь между m^* и α имеет вид, аналогичный равенствам (13.11), т.е.

$$m^* = \psi^* \frac{\alpha S}{C}, \quad \psi^* = \frac{(t_{cm} - t)_s}{(t_{cm} - t)_v}. \tag{14.30}$$

Дальнейшее исследование регуляризации температурных полей тел и систем тел с источниками энергии позволило сформулировать следующие теоремы Кондратьева, Дульнева:

1. Темп нагревания m^* тела или системы тел не зависит от мощности источников энергии и их расположения в системе и численно равен темпу охлаждения m тела без источников тепла:

$$m^* = m \tag{14.31}$$

2. Темп нагревания не зависит от координат.

3. Критерии Ψ и Ψ*, формально различные, сохраняют прежний физический смысл и численно равны между собой. Коэффициент формы тела, нагревающегося под действием источников энергии, численно равен коэффициенту формы того же тела, охлаждающегося в среде с постоянной температурой.

4. Температура ϑ_j в любой точке j тела с источниками энергии в стадии регулярного режима следующим образом связана с мощностью P источников энергии:

$$\frac{1}{mF_j} \cdot \frac{d\vartheta_j}{d\tau} + \frac{1}{F_j} \cdot \vartheta_j = P, \tag{14.32}$$

где $m^* = m$ – темп нагревания тела; $F_j = \frac{(\vartheta_j)_{cm}}{P}$ - тепловой коэффициент в точке j тела.

14.3. Приближённые расчёты нестационарных температурных полей

Теория регулярного режима позволяет в некоторых случаях проводить приближённые расчёты нестационарных температурных полей. Эти расчёты базируются на следующей предпосылке. Принимается, что температурное поле тела или системы тел входит в стадию регулярного режима с самого начала рассматриваемого процесса.

Термическая инерция системы. Время τ_{12}, в течение которого перегрев в какой-либо точке системы изменится от значения ϑ_1 до ϑ_2, определяется выражением

$$\tau_{12} = \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}, \qquad (14.33)$$

где m – темп охлаждения системы.

Если изучается термическая инерция однородного тела или системы тел, то параметр m может быть вычислен теоретически по одной из формул (13.11), (14.16)-(14.18).

По формуле (14.33) можно вычислить время охлаждения или нагрева тел или даже сложных систем тел, например, радиоэлектронных блоков, термостатов и т.д. Для этого следует задать величину абсолютного значения разности $\vartheta_2 = t_2 - t_c$, которая практически должна лежать за пределами требуемой точности расчёта температур. Например, если блок РЭА, имеющий начальную температуру t_1, помещён в среду с иной температурой $t_c \neq t_1$, то время τ_{12}, необходимое для достижения температуры t_2 в блоке, равно

$$\tau_{12} = \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{t_1 - t_c}{t_2 - t_c}.$$

Если блок разогревается под влиянием источников энергии, то разность между стационарной температурой $(\vartheta_j)_{cm}$ в некоторой точке j блока и температурой ϑ_j в этой же точке тела достигает требуемой величины $\Delta\vartheta_j = (\vartheta_j)_{cm} - \vartheta_j$ за время

$$\tau' = \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{(\vartheta_j)_{cm}}{\Delta\vartheta_j}, \qquad (14.34)$$

где $(\vartheta_j)_{cm}$ в свою очередь определяется формулами

$$(\vartheta_j)_{cm} = PF_j \qquad \textit{или} \qquad (\vartheta_j)_{cm} = \sum_{i=1}^{n} P_i F_{ij}. \qquad (14.35)$$

Нестационарное температурное поле системы тел с источниками энергии. Рассмотрим систему тел с источниками энергии, общая мощность которых равна P, а темп регулярного нагревания – m. Выделим в системе какую-либо точку j и будем считать, что известны начальный перегрев в этой точке, т.е. $\vartheta_{j0} = t_j(0) - t_c$ и предельный перегрев $(\vartheta_j)_{cm} = t_j(\infty) - t_c$.

Стационарную температуру будем характеризовать с помощью теплового коэффициента F_j или F_{ij}, тогда можно воспользоваться уравнениями (14.33).

Пусть регуляризация температурного поля в точке j наступает с начального момента времени τ=0;требуется определить нестационарное температурное поле в точке j.

Из уравнений (14.32) и (14.35) следует, что

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{d\varepsilon_j}{d\tau}+\varepsilon_j=0\,,\quad \varepsilon_j=(\vartheta_j)_{cm}-\vartheta_j\,,$$

интегрирование последнего уравнения приводит к зависимости $(\vartheta_j)_{cm}-\vartheta_j=Ae^{-m\tau}$, где А – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $A=[(\vartheta_j)_{cm}-\vartheta_j]_{\tau=0}=(\vartheta_j)_{cm}-\vartheta_{j0}..$ Тогда $(\vartheta_j)_{cm}-\vartheta_j=[(\vartheta_j)_{cm}-\vartheta_j]e^{-m\tau}$. Последнее решение перепишем в виде

$$\vartheta_j=\vartheta_{j0}e^{-m\tau}+(\vartheta_j)_{cm}(1-e^{-m\tau}). \qquad (14.36)$$

Если начальное поле температур равномерно и равно температуре среды, то $\vartheta_{j0}=0$ и (14.36) принимает вид

$$\vartheta_j=(\vartheta_j)_{cm}(1-e^{-m\tau}). \qquad (14.37)$$

Итак, задача сводится к определению тепловых коэффициентов F_{ij} и темпа m охлаждения системы в среде с постоянной температурой.

Предположим теперь, что в момент времени τ_1 источники энергии отключены и система тел начинает охлаждаться в среде с той же температурой t_c. К этому времени согласно равенству (14.37) температура в точке j достигает значения

$$\vartheta_{j1}=(\vartheta_j)_{cm}(1-e^{-m\tau_1}) \qquad (14.38)$$

и далее начнёт уменьшаться по экспоненциальному закону, если температурное поле системы сразу же войдёт в стадия регулярного режима. Обозначим температуру в точке j при $\tau\ge\tau_1$ через ϑ_{j2}. Тогда

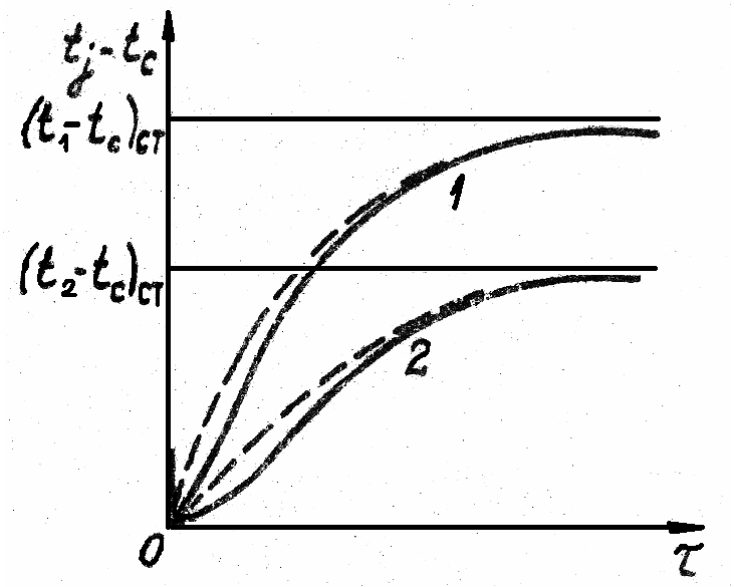
$$\vartheta_{j2}=Be^{-m(\tau-\tau_1)}, \qquad (14.39)$$

где В – постоянная интегрирования, которая легко определяется из выражения (14.38) при условии $\vartheta_{j2}(\tau=\tau_1)=\vartheta_{j1}$. Тогда

$$\vartheta_{j2}=(\vartheta_j)_{cm}(e^{m\tau}-1)e^{-m\tau}. \qquad (14.40)$$

Следовательно, при сделанных в начале раздела 14.3 предположениях возможно приближённо рассчитать изменение во времени температуры системы тел при включении и выключении источников энергии. При этом следует иметь в виду, что изложенный здесь метод расчёта является приближённым, степень приближения зависит от многих факторов: характера стационарного и начального поля температур, условий охлаждения, физических и геометрических свойств системы,

координат точки, времени наблюдения. Например, на рис.14.4 показано изменение температуры в двух точках некоей системы тел



Рисю14.4. Изменение температуры в точках 1 и 2 системы тел с неравномерным стационарным полем температур.

Сплошные линии отражают действительное изменение температуры во времени в точках 1 и 2 системы, а штриховые – значения приближённо вычисленных температур в различные моменты времени в этих точках. Возможность применения теории регулярного режима для приближённых расчётов температурных полей требует в каждом конкретном случае специального теоретического или экспериментального обоснования.

Выбор изоляционной оболочки объекта. Объект произвольной формы окружён со всех сторон изоляцией, и вся система находится в кожухе. Требуется так подобрать физические и геометрические параметры изоляции и кожуха, чтобы объект, имеющий начальный перегрев над средою $(t_1 - t_c)$, изменил его величину до $(t_2 - t_c)$ за время τ_{12}.

Рассматриваемый объект совпадает с системой тел, изображённой на рис.14.2,в. Будем называть объект «ядром», изоляцию – «зазором», а кожух – «оболочкой». По условию задачи известны геометрические параметры оболочки и её теплофизические свойства, а также коэффициент теплообмена со средой α ; требуется найти геометрические и физические параметры зазора и оболочки σ_2, C_3, S_3, при которых будут выполняться поставленные условия.

Задача может быть решена следующим способом. По формуле (14.33) вычисляем темп, который должна иметь система, чтобы выполнялись поставленные условия:

$$m = \frac{1}{\tau_{12}} \cdot \ln \frac{t_1 - t_c}{t_2 - t_c}.$$

Далее из соображений технического и технологического характера подбирается материал зазора, его толщина, а также материал и толщина оболочки. После этого по формуле (14.13) рассчитывается m'. Если окажется, что $m' \neq m$, то несколько изменяются параметры зазора и оболочки и снова рассчитывается m'. Эта операция подбора размеров изоляционной оболочки (зазор и оболочка) объекта продолжается до тех пор, пока m' будет несущественно отличаться от m.

14.4. Длительность дорегулярного теплового режима

Применение теории регулярного режима и основанных на ней приближенных зависимостей правомерно при условии вступления температурного поля тела или системы тел в стадию регулярного режима. Длительность дорегулярного (иррегулярного) теплового режима можно оценить экспериментально или аналитически.

При экспериментальном исследовании температурного поля тела или системы тел критерием наступления стадии регулярного режима является выполнение условий (13.7) или (13.8). Построенная в полулогарифмических координатах зависимость избыточной относительной температуры от времени (рис.13.1,б) позволяет оценить длительность дорегулярного режима в различных точках системы.

При математическом исследовании температурного поля тела определение регулярного режима связано с быстротой сходимости рядов (13.4) или (14.27). Напомним, что регулярным режимом называется температурный режим тела, при котором пространственно-временное изменение температурного поля с удовлетворительной точностью описывается первым членом ряда (13.4) (источники энергии отсутствуют) или (14.27) (тело с источниками энергии). В связи с этим вопрос о сходимости этих рядов приобретает важное значение.

В литературе изложены результаты исследований сходимости рядов типа (13.4) для некоторых частных случаев и приведены для них иногда удачные, иногда менее удачные способы оценки длительности дорегулярного режима тел простой конфигурации. Однако в настоящее время нет общих способов простой оценки длительности дорегулярного режима, справедливых для тел различной конфигурации при разнообразных начальных температурных полях и значениях критерия Био. Попытаемся качественно определить, как влияет форма тела, значение критерия Био, начальное распределение температур и расположение источников энергии на сходимость рядов типа (13.4) и (14.27).

Тела без источников энергии. Допустим, что начальное температурное поле $f(x,y,z)$ подобно l-й собственной функции, т.е.

$$f(x,y,z) = KU_l(x,y,z), \qquad (14.41)$$

где численный коэффициент K=const имеет размерность температуры. Используем (14.41) для определения A_n в формуле (13.4). Приняв во внимание ортогональность собственных функций, найдем

$$A_n = \frac{\int_V U_l U_n dV}{\int_V U_n^2 dV} = \begin{cases} 0, l \neq n \\ K, l = n \end{cases} \qquad (14.42)$$

Тогда

$$\vartheta = KU_1 e^{-m_1 \tau}, \qquad (14.43)$$

т.е. все члены ряда (13.4), кроме *l*-го, будут равны нулю и температурное поле будет изменяться, начиная с τ=0, по закону экспоненты с показателем m_l. Если *l*=1, то (14.43) примет вид

$$\vartheta = KUe^{-m\tau}, \qquad (14.44)$$

где индексы «1» при U и m опущены.

Итак, если начальное температурное поле подобно первой собственной функции, то стадия регулярного режима наступает сразу с τ=0. Очевидно, что если начальное поле температур не подобно первой собственной функции, но близко к такому подобию, то ряд (13.4) будет быстро сходиться и через короткое время наступит регуляризация температурного поля. Эти выводы служат в дальнейшем руководящей идеей при исследовании длительности дорегулярного режима.

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая, когда $l \neq 1$. При этом регулярный тепловой режим никогда не наступит.

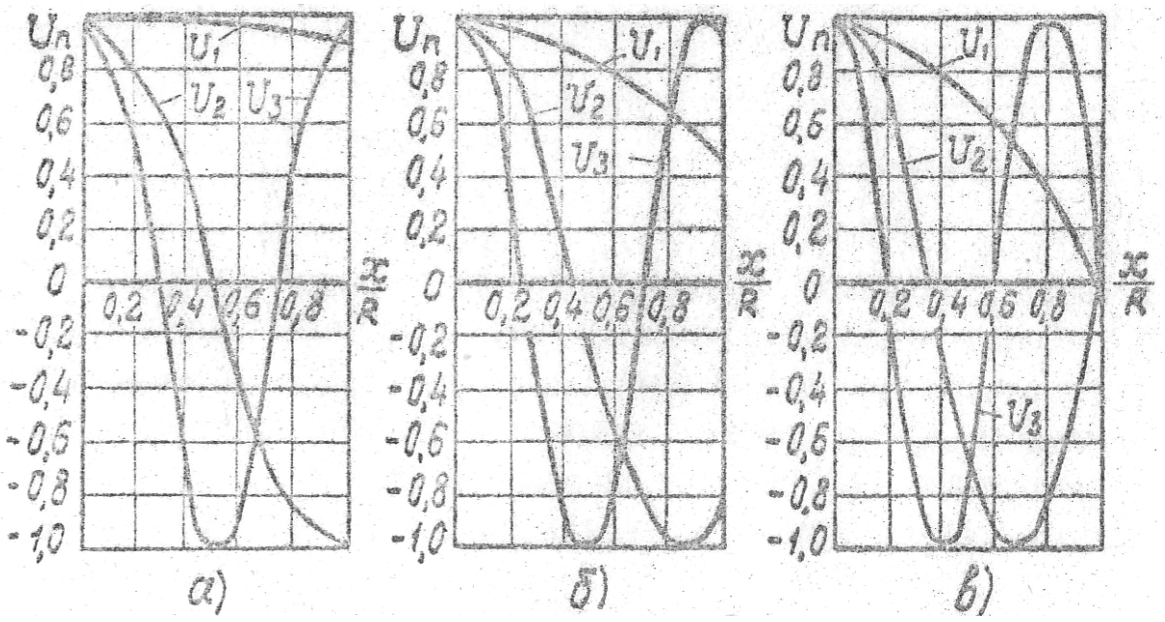
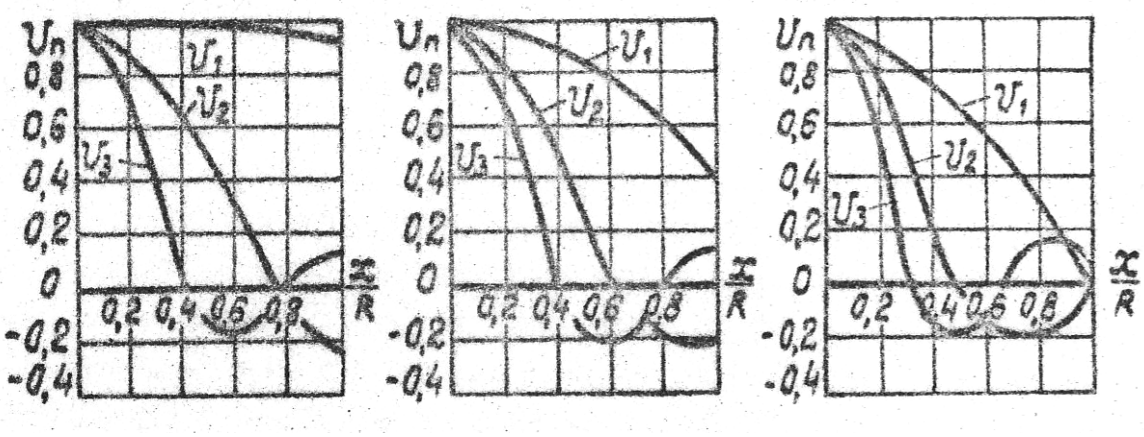


Рис. 14.5. Первые три собственные функции для пластины при значении критерия а) Bi=0.01; б) Bi=10; в) Bi=∞.



а) б) в)

Рис. 14.6. Первые три собственные функции для шара при
а) Bi=0.01; б) Bi=10; в) Bi=∞.

Известно, что первая собственная функция изменяется для тел различной конфигурации в пределах $0 \le U_1 \le 1$, а последующие собственные функции (n>1) изменяются в пределах $-1 \le U_n \le 1$, т.е. собственные функции при n>1 имеют несколько узлов, количество которых увеличивается с ростом n.

На рис.14.5 и 14.6 изображены три первые собственные функции для пластины и шара при значениях критерия $Bi = 0.01; 2; \infty$.

На рис.14.6 графически представлены приближенные значения первых трех собственных функций зависимости от координаты r/R для клина с углом при вершине $\varphi = 15^\circ$ и $Bi = \infty$, начало координат помещено в вершине клина. Для того, чтобы начальное поле температур было подобно собственной функции U_n при n>1, начальная температура должна в разных точках тела быть и выше и ниже температуры окружающей среды. Существование такого начального распределения температур возможно, хотя практически маловероятно. Поэтому в случае подобия начального поля температур собственной функции U_n с n=2 принципиально допустимы, но, по-видимому, не представляют большого практического интереса для случая простого охлаждения (нагревания) тел в среде. При малых значениях критерия Био первая собственная функция для пластины и шара для всех точек близка к единице (рис.14.5,а, 14.6,а). Если начальное поле температур равномерно, то оно практически подобно первой собственной функции $f(x, y, z) \approx KU(x, y, z)$ и температурное поле описывается с моментов времени, близких к начальному, первым членом ряда (13.4), т.е. практически сразу наступает регуляризация температурного поля.

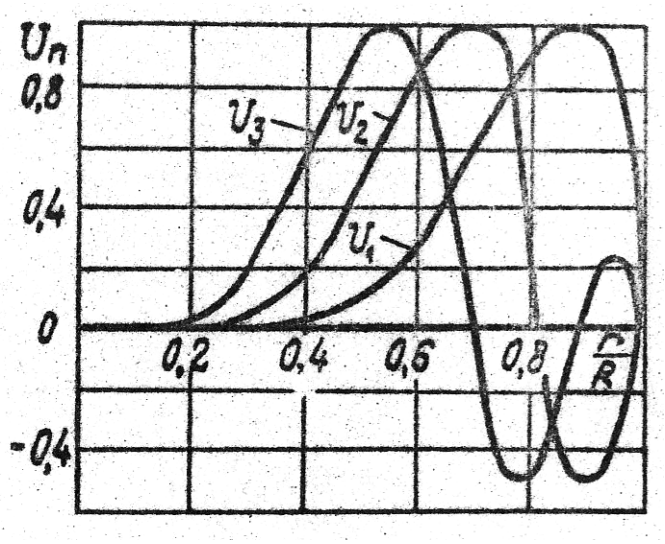


Рис. 14.7. Первые три собственные функции для клина с углом $\varphi = 15^\circ$ и Bi=∞.

Обычно экспериментальные и теоретические исследования температурного поля в теле проводятся при равномерном начальном распределении температур, что может привести к примерным обобщениям при истолковании результатов исследований. Например, можно утверждать, что при малых значениях критерия Био регуляризация наступает всегда быстро. Другой пример ошибочного обобщения: в телах, имеющих конфигурацию типа клина, при больших значениях критерия Био регуляризация поля температур наступает слишком медленно. Эти выводы верны только для частного случая равномерного начального поля температур. В других случаях (например, $f(x,y,z) \approx KU_2(x,y,z)$ для пластины или $f(x,y,z) \approx KU_1(x,y,z)$ для клина) эти выводы могут оказаться ошибочными.

Следовательно, время регуляризации температурного поля в теле зависит от конфигурации тела и величины критерия Био (которые определяют вид собственных функций U_n) и от начального распределения температур.

Взаимосвязь U_n и $f(x,y,z)$ выражена в структуре амплитуд

$$A_n = \frac{\int\limits_V f(x,y,z)U_n dV}{\int\limits_V U_n{}^2 dV}.$$

Приведенные рассуждения позволяют сделать некоторые выводы:

1. Время до регулярной стадии температурного поля в теле определяется быстротой сходимости ряда (13.4), которая зависит от конфигурации тела, начального распределения температур численного значения критерия Био.

2. Если конфигурация тела задана, то при некотором виде начального поля температур возможны такие случаи, когда регуляризация

температурного поля в теле простейшей конфигурации (например, в пластине), долго не наступает или даже вообще принципиально никогда не наступает (например, если $f = KU_2$). В то же время возможны и такие случаи, когда в теле более сложной конфигурации (например, в клине) регуляризация температурного поля будет иметь место практически с момента его охлаждения (если, например, $f = KU_1$).

3. Данные выше признаки регуляризации температурного поля следует дополнить, а именно: избыточная температура различных точек тела в процессе ее изменения в регулярной стадии сохраняет один и тот же знак.

При практическом решении вопроса о длительности дорегулярной стадии следует сопоставлять характер начального поля температур и вид первой собственной функции для данного тела для конкретного значения критерия Био.

Для таких часто встречающихся на практике тел, как шар, неограниченные цилиндр и пластина, ограниченный цилиндр, параллелепипед, и для тел, приближающихся по своей конфигурации к перечисленным, вид первой собственной функции по отдельным осям близок к симметричной параболе (условия охлаждения также симметричны). Если условия охлаждения на противоположных плоскостях тела различны, то вид $U_1(x, y, z)$ близок к несимметричной параболе.

При значении критерия Био, стремящемся к нулю, первая собственная функция стремится к единице, т.е. $\lim\limits_{Bi \to 0} U_1(x, y, z) = 1$. При наибольшем значении критерия Био ($Bi = \infty$) вид первой собственной функции близок к параболе с максимумом центральных частях тела и нулевым значением на поверхности (рис. 14.5, 14.6).

Для тел более сложной конфигурации вид первой собственной функции следует отыскивать особо, прибегая к решению краевых задач математической физики. Сопоставление вида первой собственной функции (рис. 14.5,а,б,в и 14.6,а,б,в) и характера начального поля температур позволит вынести суждение о длительности дорегулярной стадии и целесообразности применения теории регулярного режима.

Заметим также, что аппарат теории регулярного режима иногда можно использовать и в тех случаях, когда регуляризация температурного поля наступила не во всем теле, а только в отдельных его частях.

Во всех более сложных и сомнительных случаях обоснование применения методов регулярного режима для анализа нестационарных температурных полей следует проводить экспериментально.

Тела с источниками энергии. Рассмотрим теперь регуляризацию температурного поля тела, нагреваемого внутренними источниками энергии, произвольно распределенными в теле. Для того, чтобы дать качественную оценку быстроты сходимости ряда (14.2) и сделать выводы о

длительности дорегулярного режима, используем тот же прием, что и в предыдущем разделе.

Из выражения (14.28) для амплитуд A_n и ортогональности собственных функций U_n следует, что при

$$\vartheta_{cm} - \vartheta_0 = BU_1,\ B = const \tag{14.45}$$

где B – коэффициент пропорциональности,

выполняется равенство

$$A_n = B\frac{\int_V U_1 U_n dV}{\int_V U_n{}^2 dV} = \begin{cases} 0, n \neq l \\ B, n = l \end{cases} \tag{14.46}$$

Если разность между предельным и начальным значением температур подобна первой (l=1) собственной функции, то регуляризация температурного поля наступает сразу с момента времени τ=0. Следовательно, длительность дорегулярной стадии определяется конфигурацией тела, значением критерия Био, начальным полем температур и распределением источников в теле, т.е. задача еще более усложняется, чем в случае простого охлаждения тела. Все выводы, сделанные ранее, остаются в силе, только прибавляется дополнительное условие о характере распределения источников энергии. Анализ отдельных частных случаев и экспериментальные исследования показывают, что при равномерном распределении источников энергии в теле и симметричных условиях охлаждения на его противоположных плоскостях регуляризация температурного поля наступает быстро. Этот результат легко объяснить с помощью изложенного метода.

Рассмотрим, например, параллелепипед с равномерным распределением источников энергии и постоянным коэффициентом теплоотдачи на границах. Стационарное температурное поле такого тела может быть приближенно описано с помощью параболических симметричных функций. Если начальное поле температур равномерно, то условие (14.45) выполняется для первой собственной функции (l=1), т.к. первые собственные функции также приближенно могут быть представлены с помощью симметричных парабол. При выполнении условия (14.45) регуляризация температурного поля наступает быстро.

Рассмотрим теперь иное распределение источников энергии в системе, а именно: большая часть энергии вырабатывается в центральных частях тела и меньшая – на периферии. В этом случае стационарное температурное поле так же будет описываться зависимостью, близкой к параболе, и условие (14.43) приближенно может выполняться, т.е. следует ожидать быстрого вступления поля температур в стадию регулярного режима. Если значительная доля энергии будет сосредоточена в центральных частях тела, а на периферии источники энергии практически будут отсутствовать (рис.14.8,а), то характер стационарного поля

температур уже будет подобен параболической зависимости (рис.14.8,б). Подобие в какой-то степени еще будет соблюдаться в центральной части тела, т.е. для центральных частей тела следует ожидать сравнительно быструю регуляризацию температурного поля, а на периферии регулярный режим может наступить через длительное время после начала процесса.

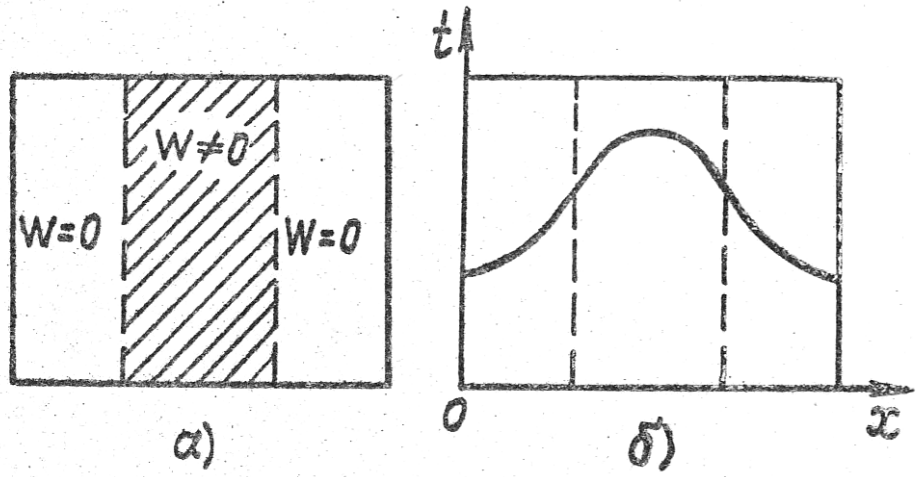


Рис. 14.8. а) Энергия сосредоточена в центральной части тела
б) Распределение температуры

Этот вывод хорошо подтверждается многочисленными экспериментами, которые позволяют сформулировать следующую закономерность: если в теле имеются дискретные источники энергии, то раньше всего температурное поле регуляризуется в тех областях тела, где расположены источники.

Системы тел. В заключение рассмотрим вопрос о регуляризации температурного поля системы тел. Аналитический метод определения длительности дорегулярного режима системы тел еще более затруднителен, чем для однородных тел и практически отсутствует в литературе. Для системы тел целесообразно использовать экспериментальный признак наступления регулярности – параллельность полулогарифмических кривых охлаждения, построенных для отдельных наиболее существенных областей исследуемой системы.

Изучение нестационарных температурных полей некоторых систем тел показывает, что наступление дорегулярного режима зависит от интенсивности кондуктивного теплообмена между отдельными частями системы, которая определяется качеством тепловой связи между отдельными частями системы, и начальным распределением температурного поля в системе тел. Если площади соприкосновения отдельных частей системы невелики по сравнению с поверхностями этих частей, материал перемычек между частями системы обладает малой теплопроводностью, то тепловая связь между этими частями системы слаба, в противном случае будем говорить о сильных тепловых связях.

В случае слабых тепловых связей и при начальном равномерном поле температур интенсивность теплообмена между отдельными частями системы мала, эти части ведут себя практически как независимые тела, и регуляризация температурного поля всей системы наступает либо очень нескоро, либо в предельных случаях может вообще не наступить, хотя в отдельных местах системы регуляризация температурного поля может наступать и довольно быстро. В случае сильных тепловых связей и при благоприятном начальном распределении температур, способствующем более интенсивному теплообмену между отдельными частями системы, регуляризация температурного поля может наступать сравнительно быстро.

Многолетний опыт работы различных научно-исследовательских учреждений показывает, что метод регулярного режима является эффективным средством решения инженерных задач, в том числе задач, связанных с приближенными расчетами нестационарных температурных полей и тепловых потоков. Надежность решения во многом зависит от того, насколько точно выполняются основные предпосылки метода регулярного режима.

Глава 15. Излучение

15.1. Законы лучистого теплообмена

15.1.1. Основные определения

Известно, что излучение переносится со скоростью света. По электромагнитной теории это – скорость электромагнитных волн, по квантовой теории – скорость фотонов.

Вводим следующие обозначения: n – показатель преломления, C_0 - скорость света в вакууме, C – скорость света в среде. В табл. 15.1 даны некоторые зависимости, которые в дальнейшем будут использованы.

Таблица 15.1

Наименование	Обозначение
Постоянная Планка	h
Энергия фотона	hν
Импульс фотона	hν/C
Связь λ и ν	C= λ ν
Связь C и C_0	C=C_0/n

Если на пути теплового излучения встречается вещество, то тепловая энергия частично поглощается, частично отражается и частично проходит сквозь тело. Обозначим количество падающей в единицу времени на тело энергии через Φ (поток излучения), поглощённой - Φ_a, отражённой - Φ_r и прошедшей через вещество - Φ_d. Тогда на основании закона сохранения

энергии : $\Phi = \Phi_a + \Phi_r + \Phi_d$.

(15.1)

Разделим обе части равенства (15.1) на Φ:

$$1 = \frac{\Phi_a}{\Phi} + \frac{\Phi_r}{\Phi} + \frac{\Phi_d}{\Phi}. \qquad (15.2)$$

Первый член равенства (15.2) называется поглощательной способностью тела и обозначается через *a*, второй r – отражательной способностью тела, третий d – пропускательной способностью тела. Следовательно,

$$a+r+d=1 \qquad (15.3)$$

Каждая из величин *a*, r, d изменяется в пределах от нуля до единицы. В зависимости от этих величин различают три крайних случая.

1) *a*=1, r=0, d=0, т.е. падающая лучистая энергия полностью поглощается телом; такие тела называются абсолютно чёрными.

2) r=1, *a*=0, d=0, т.е. падающая лучистая энергия полностью отражается; при диффузном отражении такие тела называются абсолютно белыми. Если при этом тело отражает по законам геометрической оптики, то поверхность называется зеркальной.

3) d =1, *a*=0, r =0, т.е. падающая энергия полностью проходит через тело; такие тела называются абсолютно прозрачными.

В природе такие крайние случаи не встречаются, т.е. величины *a*, r,d не принимают значений, равных нулю или единице. Однако анализ таких случаев позволил найти путь для установления законов изучения реальных тел.

Различают монохроматическое и интегральное (или полное) излучение. Если излучение происходит в узком интервале длин волн от λ до dλ, то оно называется монохроматическим, и у параметров, характеризующих монохроматическое излучение, ставится индекс λ или ν. Интегральным (или полным) называется суммарное излучение во всем диапазоне длин волн от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. Таким образом, в отличие от других механизмов теплообмена, энергия излучения имеет не только количественную, но и качественную (спектральную) характеристику.

15.1.2. Закон Планка

Энергию, излучаемую абсолютно черным телом (АЧТ) в единицу времени с единицы поверхности (плотность потока излучения) в диапазоне частот dν, обозначим $M_{0\nu} \cdot d\nu$. Здесь $M_{0\nu}$ - плотность потока монохроматического излучения, или излучательная способность АЧТ.

Если АЧТ окружает среда с показателем преломления n, то зависимость $M_{0\nu} = f(n,\nu,T)$ дана формулой Планка, предложенной им в 1900г.

$$M_{0\nu} = \frac{2\pi h \nu^3 n^2}{C_0^{\,2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}, \qquad (15.4)$$

где h и k – постоянные Планка и Больцмана; n – показатель преломления (табл.15.2).

Представим зависимость (15.4) как функцию λ. Связь λ и ν согласно табл.15.1 равна

$$\nu = \frac{C}{\lambda} = \frac{C_0}{\lambda n}, \quad d\nu = -\frac{C_0}{n}\frac{d\lambda}{\lambda^2} - \frac{C_0}{\lambda}\frac{dn}{n^2}.$$

Если $n \neq n(\nu)$, то $d\nu = -\frac{C_0}{n}\frac{d\lambda}{\lambda^2}$.

Это справедливо для вакуума n=1 или газов $n \approx 1$; для кварца $1.68 > n > 1.52$ при $0.185 < \lambda < 2.32$ *мкм*.

Таблица 15.2

Наименование	Обозначение	Единицы измерения	Значение
Постоянная Больцмана	k	Дж/К	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$
Постоянная Планка	h	Дж·С	$6{,}625 \cdot 10^{-34}$
Скорость света	C_0	м/с	$2{,}998 \cdot 10^{8}$
Постоянная Стефана–Больцмана	σ	$Вт/м^2К^4$	$5{,}668 \cdot 10^{-8}$
Первая постоянная	C_1	$Вт \cdot м^2$	$3{,}740 \cdot 10^{-16}$
Вторая постоянная	C_2	м·К	$1{,}4387 \cdot 10^{-2}$

Введем соотношения $M_{0\lambda}d\lambda = -M_{0\nu}d\nu$, где $M_{0\lambda}$ – излучательная способность АЧТ в диапазоне длин волн dλ.

$$M_{0\nu}d\nu = -\frac{2\pi h \nu^3 n^2 d\nu}{C_0^{\,2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]} = \frac{2\pi h n^2 C_0^{\,3} C_0 d\lambda}{\lambda^3 n^3 n \lambda^2 \left[\exp\left(\frac{hC_0}{\lambda n k T}\right) - 1\right]}$$

$$M_{0\lambda} = \frac{2\pi h C_0^{\,2}}{n^2\lambda^5\left[\exp\left(\frac{hC_0}{n\lambda kT}\right) - 1\right]} \quad \textit{или} \quad M_{0\lambda} = \frac{C_1}{n^2\lambda^5\left(e^{\frac{C_2}{n\lambda T}} - 1\right)},$$

(15.5)

где C_1 и C_2 первая и вторая постоянные формулы Планка.

На рис.15.1 дано графическое представление формулы (15.5).

В табл.15.2 приведены константы излучения АЧТ.

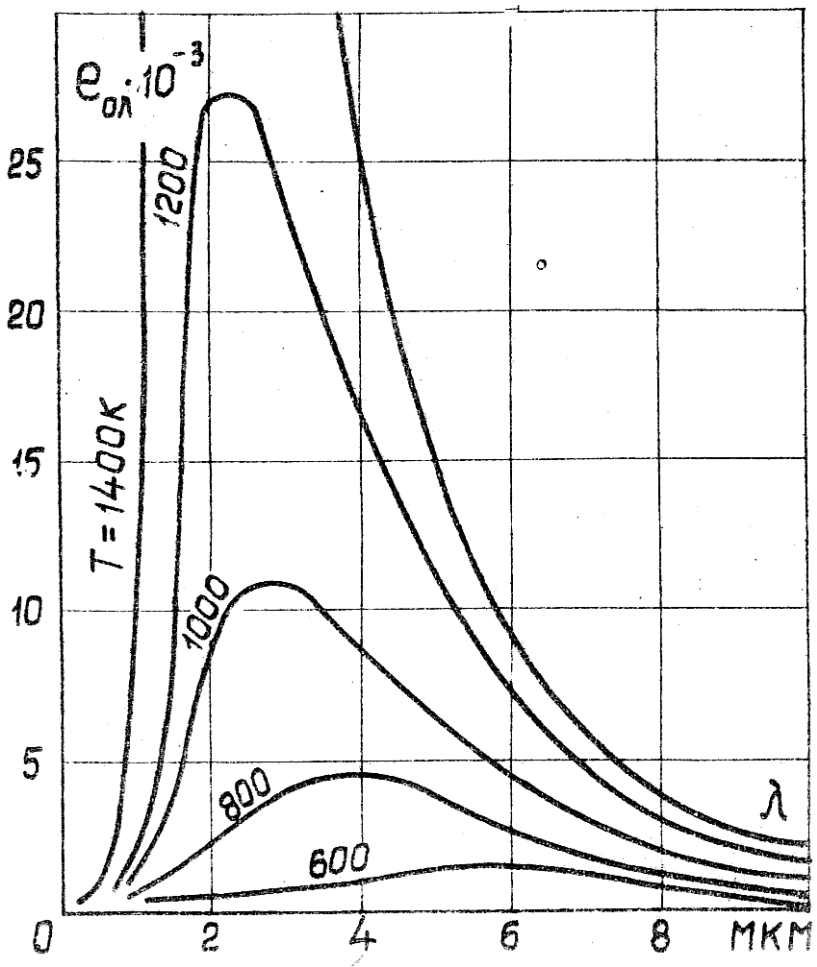


Рис. 15.1. Закон Планка

Из закона Планка нетрудно получить как частный случай закон Стефана-Больцмана. Для этого вычислим плотность потока интегрального излучения АЧТ во всем диапазоне частот.

$$M_0(T) = \int_0^\infty M_{0\nu} d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3 n^2 d\nu}{C_0[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1]} = n^2 \sigma T^4 \qquad (15.6)$$

$\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ - постоянная Стефана-Больцмана, $[\sigma] = \frac{Bm}{м^2 K^4}$.

При расчете теплообмена излучением часто бывает необходимо определить плотность потока излучения в полосе спектра $(0 - \lambda_1; \lambda_2 - \lambda_3)$, тогда

$$M_{0,0-\lambda_1} = \int_0^{\lambda_1} M_{0\lambda} d\lambda;\ M_{0,\lambda_2-\lambda_3} = \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} M_{0\lambda} d\lambda.$$

15.1.3. Закон Ламберта. Интенсивность излучения

Закон Стефана-Больцмана позволяет определить поток лучистой энергии, излучаемой телом по всем направлениям в пределах полусферы.

В различных направлениях поток энергии может быть неравномерным. Остановимся подробнее на этом вопросе.

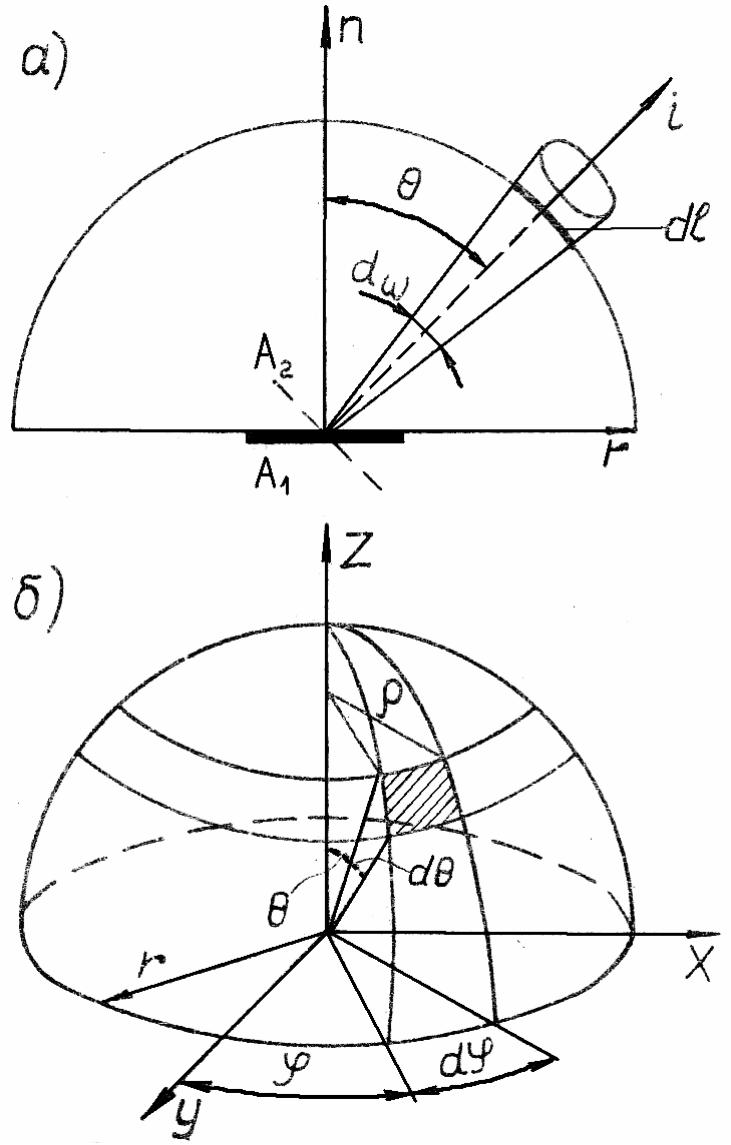


Рис.15.2. К выводу закона Ламберта

Рассмотрим плотность потока излучения от поверхности в заданном направлении θ в элементарном телесном угле dω, обозначим его через dФ (рис.15.2,а). Интенсивностью (яркостью) излучения i будем называть поток dФ, излучаемый в заданном направлении с единицы поверхности A_i, перпендикулярном направлению луча, в единичном телесном угле:

$$i = \frac{d\Phi}{d\omega \cos\theta}. \qquad (15.7)$$

Заметим, что излучение АЧТ изотропно, т.е. интенсивность единицы поверхности не зависит от направления, поэтому из определений Ф и M следует, что

$$\Phi_{0\lambda} = M_{0\lambda} \quad и \quad \Phi_0 = M_0 \qquad (15.8)$$

Пространственный и плоский (рис.15.2, а) телесные углы (рис.15.2,б) по определению равны

$$d\omega = \frac{dA}{r^2},\ d\omega = \frac{dl}{r}. \qquad (15.9)$$

Найдем $dA = \rho d\varphi \cdot r d\theta = r\sin\theta \cdot r d\theta d\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ и $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. (15.10)

Определим плотность полусферического излучения. Из (15.7) и (15.10) следует, что

$$\Phi = \int_0^{2\pi} i\cos\theta d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} i\cos\theta\sin\theta d\theta. \qquad (15.11)$$

Если i - интенсивность излучения – по всем направлениям одинакова, т.е. не зависит от θ, то такое излучение называется диффузным. Для этого случая (15.11) дает

$$\Phi = i\pi. \qquad (15.12)$$

Для АЧТ i не зависит от направления, что позволяет сформулировать на основании (15.8) и (15.12) закон Ламберта:

$$i_0 = \frac{M_0}{\pi},\ i_{0\lambda} = \frac{M_{0\lambda}}{\pi}. \qquad (15.13)$$

Яркость излучения в направлении нормали к поверхности излучения в π раз меньше плотности полного полусферического излучения. Из формул (15.7), (15.8), (15.13) следует, что

$$d\Phi = i_0 d\omega\cos\theta = \frac{M_0}{\pi}\cos\theta d\omega. \qquad (15.14)$$

Используя закон Стефана-Больцмана (15.6), перепишем последнее выражение в виде $d\Phi = \frac{n^2\widetilde{C}}{\pi}\left(\frac{T}{100}\right)^4 \cos\theta d\omega,\ \widetilde{C} = \sigma \cdot 10^8$.. Это выражение служит основой для расчета лучистого теплообмена между поверхностями конечных размеров.

В дальнейшем заметим, что закон Ламберта строго справедлив для АЧТ. Для реальных поверхностей он не всегда подтверждается опытом. Более подробный анализ таких случаев будет приведен в дальнейшем.

15.2. Излучение реальных поверхностей

Для количественной характеристики излучения нечерных тел вводят понятие степени черноты тела. Степенью черноты тела называется отношение потока излучения (излучательной способности) к потоку энергии, излучаемой АЧТ при той же температуре, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{M}{M_0} \le 1. \qquad (15.15)$$

Степень черноты характеризует излучательную способность реального тела по сравнению с излучательной способностью АЧТ. Излучательная способность тела и степень его черноты могут зависеть от длины волны

излучения; в этом случае говорят, что тело обладает селективным излучением (рис.15.3).

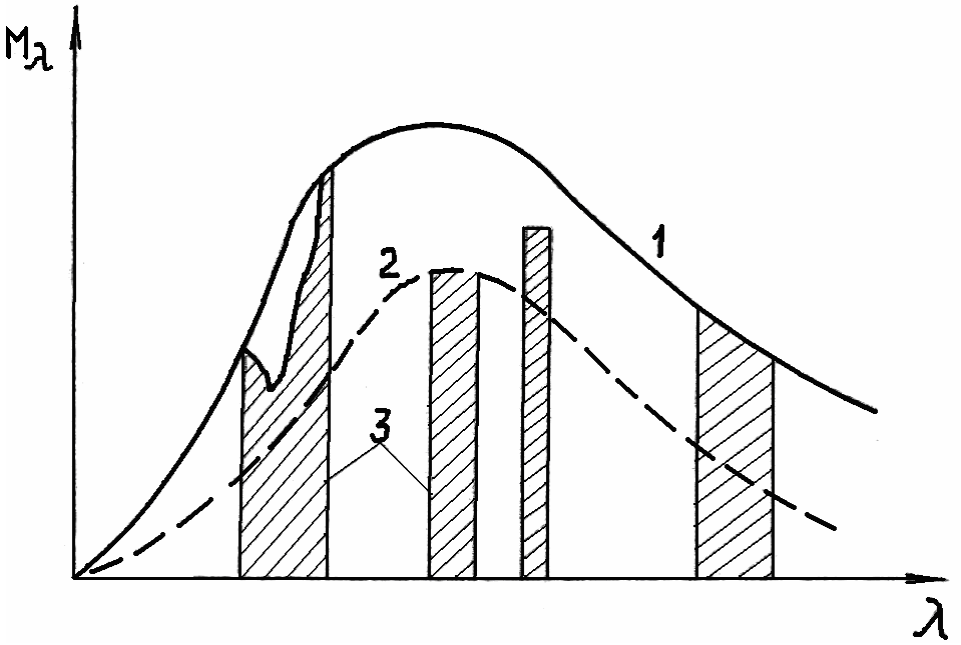


Рис.15.3. Спектр излучения реального (3), серого (2) и абсолютно чёрного (1) тел

Различают спектральную $\varepsilon(\lambda,T)=\varepsilon_\lambda(T)$ и интегральную (суммарную, общую) $\varepsilon(T)$ степени черноты. Спектральная степень черноты для длины волны λ и температуры Т определяется отношением плотности потока излучения $\varepsilon_\lambda(T)$ реального тела плотности потока излучения $\varepsilon_{\lambda_0}(T)$ АЧТ при той же температуре.

Твердые диэлектрики, имеющие шероховатую поверхность, обладают небольшой степенью селективности. Спектр их излучения является сплошным и по своему характеру мало отличается от спектра АЧТ. Если тело обладает непрерывным спектром излучения, а кривые зависимости плотности потока излучения от длины волны для реального и черного тел подобны, то излучение такого тела, как и само тело, называют серым (рис.15.3). Строго говоря, серых тел, так же как и абсолютно черных, в природе не существует.

Однако некоторые тела (диэлектрики, окиси металлов с шероховатыми поверхностями и др.) могут быть отнесены к серым, при этом чем уже рассматриваемый интервал длин волн, тем меньше различие между спектром реального и серого тела.

Для серых тел их степени черноты и коэффициенты поглощения численно равны во всём спектре излучения тела. По определению (15.15) $\varepsilon=\dfrac{M}{M_0}$. Сформулируем закон Кирхгофа: при термодинамическом равновесии отношение излучательной способности к поглощательной для

всех тел одинаково и равно излучательной способности АЧТ при той же температуре.

Из формул (15.15) и (15.16) следует, что $\varepsilon = a$. Аналогичным способом можно также показать, что спектральные степень черноты и коэффициент поглощения равны друг другу, итак

$$\varepsilon = a\,;\ \varepsilon_\lambda = a_\lambda\,. \qquad (15.17)$$

Интегральная степень черноты и коэффициент поглощения несерых тел не равны друг другу. Приведём обоснование этого положения. Излучательная способность тела e по определению зависит только от температурного состояния тела и его индивидуальных особенностей и не должна зависеть ни от индивидуальных особенностей окружающих тел, ни от температуры последних. Поэтому ε (см. формулу 15.15) – физическая константа тела, которое рассматривается как источник излучения. Коэффициент поглощения можно рассматривать как параметр, характеризующий приёмник излучения. Сопоставление (15.17) ε и a допустимы лишь при том условии, что a представляет собой также физическую константу.

Для монохроматического излучения, а также для интегрального излучения серых тел a_λ и a представляют собой физические константы, т.к. эти величины не зависят от свойств окружающих тел. В остальных случаях это условие не соблюдается, что видно из следующего примера.

Рассмотрим тело, которое способно поглощать только в интервале длин волн ($\lambda_1 \div \lambda_2$). Пусть на это тело падает излучение от трех источников: один излучает только в диапазоне $\lambda_1 \div \lambda_2$, другой – в диапазоне $\lambda_1 \div \lambda_2$ и $\lambda_3 \div \lambda_4$, третий излучает сплошной спектр (рис.15.4). Для простоты предположим, что во всех трех случаях интенсивность излучения в диапазоне $\lambda_1 \div \lambda_2$ одинакова, тогда поглощенный удельный поток $e_{погл}$ также будет одинаковым для этих случаев. На рис.15.4 этот поток представлен графически в виде заштрихованной области. Интегральную интенсивность падающего лучистого потока обозначим через e_1, e_2, и e_3 для трех выбранных источников. По условиям задачи

$$M_1 < M_2 < M_3. \qquad (15.18)$$

По определению поглощательные способности в трех рассматриваемых случаях равны

$$a_1 = \frac{M_{погл}}{M_1}\,,\ a_2 = \frac{M_{погл}}{M_2}\,,\ a_3 = \frac{M_{погл}}{M_3}\,. \qquad (15.19)$$

Из неравенств (15.18) и равенств (15.19) следует, что

$$a_1 > a_2 > a_3,$$

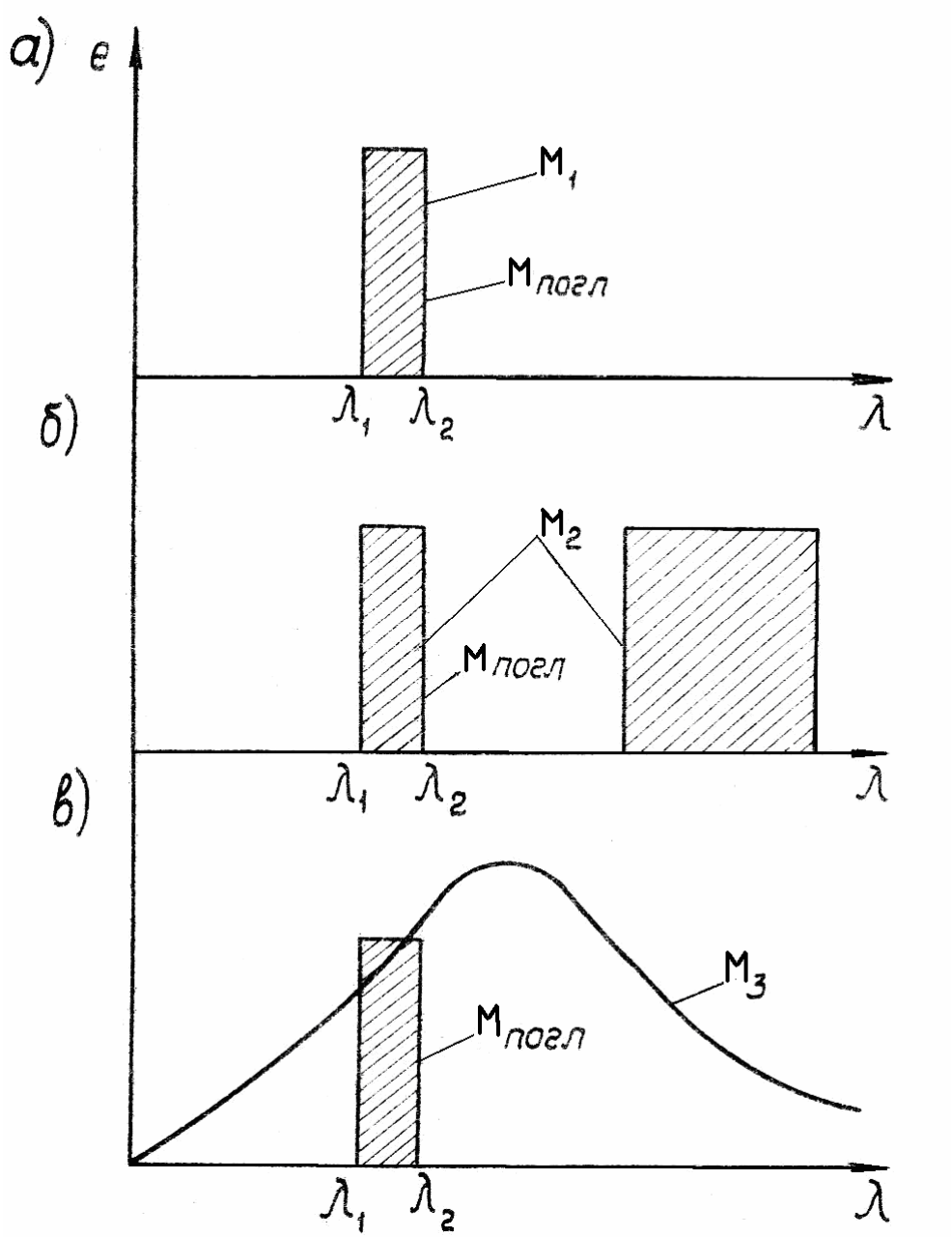


Рис.15.4. К анализу физического смысла степени черноты и поглощательной способности тела

В случае справедливости закона Ламберта значение ε_φ должно оставаться постоянным для всех значений φ. В действительности оказывается, что для шероховатых тел (кривые 1, 2 и 3) при $\varphi > 60^\circ$ значение M_φ уменьшается и стремится к нулю. Однако это уменьшение практического значения не имеет, т.к. среднее значение $\varepsilon \approx \varepsilon_{\varphi=0}$. Более резкое отклонение от закона Ламберта наблюдается для полированных металлов (кривые 4, 5 и 6).

Как видно из рис.15.5 при $40^\circ < \varphi < 80^\circ$ значение ε_φ увеличивается, а при $\varphi < 80^\circ$ оно стремится к нулю; в этом случае среднее значение

$\varepsilon = 1.2\varepsilon_{\varphi=0}$. Характер индикатрис рис.15.5 связан с внутренним строением вещества и состоянием его поверхности. Если для АЧТ $\varepsilon_\varphi = 1$, то для всех нечерных тел $\varepsilon_\varphi < 1$; для серого тела, обладающего однородным диффузным излучением, $\varepsilon_\varphi = const < 1$, для физических серых тел $\varepsilon_\varphi \neq const$.

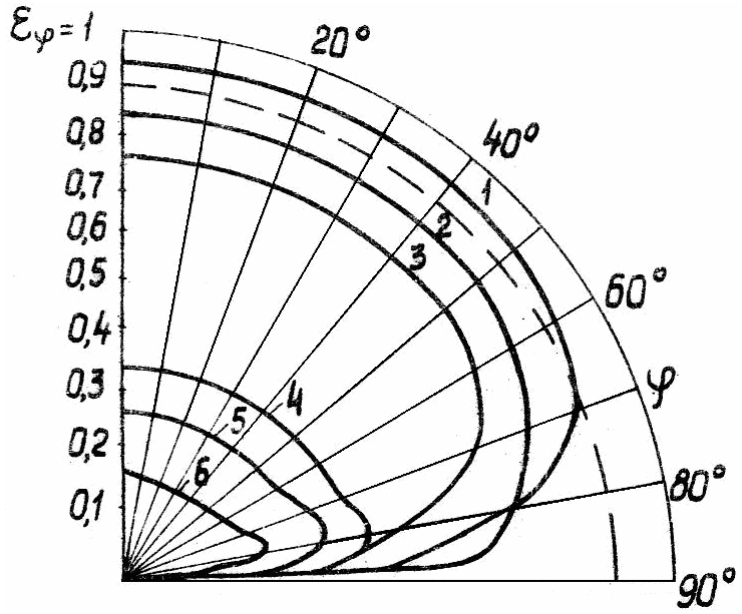


Рис.15.5. Излучательная способность реальных тел в направлении φ: 1 – дерево, 2 – корунд, 3 – окисленная медь, 4 – висмут, 5 – алюминий, 6 – бронза.

Из-за сложности теоретического анализа надежные значения суммарных степеней черноты могут быть получены лишь опытным путем. На основании имеющегося в настоящее время опытного материала могут быть сделаны следующие выводы:

1) внешний вид поверхности не дает представления о величине ε;

2) суммарные степени черноты поверхности неметаллов больше степеней черноты неокисленной поверхности металлов;

3) суммарные степени черноты для большинства материалов увеличиваются с ростом температуры, хотя для некоторых неметаллов и покрытий наблюдается и обратная зависимость;

4) суммарные степени черноты неокисленных металлов больше суммарных нормальных степеней черноты приблизительно на 15-20%, т.е. $\varepsilon(T) = 1.2\varepsilon_n(T)$, а для сильно окисленных металлов и неметаллов $\varepsilon(T) \approx \varepsilon_n(T)$;

5) степени черноты окислов металлов и покрытий увеличиваются с ростом размеров зерна материала покрытия. В табл.15.3 приведены значения суммарных степеней черноты различных технических материалов.

Таблица 15.3

Степени черноты различных поверхностей

Материал и состояние поверхности	Температура °С	Степень черноты
Алюминий; тщательно полированная пластина	200–600	0,04–0,06
Алюминий; сильно окислен	35–500	0,20–0,31
Силуминовое литье (в песчаной форме)	100–500	0,33–0,31
Силуминовое литье (в кокильной форме)	100–500	0,16–0,22
Люралюминий Д16	50–350	0,37–0,41
Сталь полированная	100	0,066
Сталь листовая холоднокатаная	93	0,075–0,085
Сталь листовая сильно окисленная	25	0,80–0,82
Сталь различных сортов после окисления	300–800	0,86–0,92
Латунь прокатанная	22	0,06
Латунь прокатанная и обработанная грубым наждаком	22	0,20
Латунь тусклая	50–350	0,22
Латунь хромированная полированная	100	0,075
Латунь торговая шлифованная	20	0,030
Медь шабренная до блеска	22	0,072
Медь; пластина после нагрева до 600°	200	0,57
Никель; проволока окисленная	70–200	0,44
Олово; луженое кровельное железо	100	0,07–0,08
Цинк; оцинкованное железо	25	0,23–0,27
Асбестовый картон, бумага, ткань	20–300	0,93
Бумага тонкая, наклеенная на лакированную металлическую пластинку	20	0,92
Краски эмалевые; лаки различных цветов	20–100	0,92
Краски матовые различных цветов	100	0,92–0,96
Лак черный матовый	40–100	0,96–0,98
Муар серый, черный	20	0,89;0,90
Краска защитно-зеленая	20	0,90
Краска бронзовая	100	0,51
Краска алюминиевая	100	0,28
Краски алюминиевые разной давности с переменным содержанием алюминия	100	0,28–0,67
Алюминиевая фольга без масла	100	0,09
Алюминиевая фольга, покрытая слоем масла	100	0,56
Окиси металлов	–	0,4–0,8

Следовательно a зависит не только от свойств поглощающей поверхности, но и от спектрального состава падающего излучения и поэтому не может рассматриваться как физическая константа. В этих случаях сопоставлять параметры ε (физическая константа) и a (не физическая константа) неправомерно.

Для решения практических задач лучистого теплообмена преимущественно используют суммарную степень черноты.

Суммарная полусферическая степень черноты определяется по излучению во всех направлениях в пределах телесного угла 2π. Различают также и суммарную нормальную степень черноты $\varepsilon_n(T)$, определяемую по излучению в направлении нормали к поверхности. На рис.15.5 в полярных координатах представлена зависимость

$$\varepsilon_\varphi = \frac{M_\varphi}{M_{0n}} = f(\varphi), \qquad (15.20)$$

где ε_φ - степень черноты тела в направлении φ; M_{0n} - излучательная способность тела в направлении n; e_φ - излучательная способность АЧТ в направлении нормали φ=0.

15.3. Обмен энергией излучением в системе тел

15.3.1. Постановка задачи

Совокупные процессы взаимного испускания, поглощения, отражения и пропускания энергии излучения в системах различных тел называются лучистым теплообменом.

Решить задачу об обмене энергией излучения в системе тел – это значит по заданному температурному полю системы тел найти лучистые потоки между ними или обратно; зная распределение лучистых потоков, определить поле температур.

Решение этой задачи в общем случае весьма затруднительно, поэтому приходится принимать ряд ограничений, которые, хотя и сужают задачу, вместе с тем упрощают ее и позволяют решить для многих частных, но весьма важных случаев.

Большинство твердых тел обладают очень малой прозрачностью. Лучистая энергия, падающая на эти тела, проникает внутрь их только на глубину, соизмеримую с длиной волны, так что явления излучения и поглощения в большинстве случаев могут рассматриваться как поверхностные. В этом разделе вопрос о лучистом теплообмене решается при следующих ограничениях:

1)рассматриваются только непрозрачные тела, поэтому исследование теплообмена излучением сводится к исследованию теплообмена между непрозрачными поверхностями;

2) излучение отдельных поверхностей является только температурным (не люминесценция);

3) поглощенная энергия вся превращается в теплоту;

4) процесс теплообмена – стационарный;

5) излучающие тела неподвижны. Конвекция и теплопроводность в промежуточной среде отсутствуют;

6) излучение и отражение поверхностей являются диффузными, т.е. подчиняются закону Ламберта;

7) поверхности серые или черные, т.е. поглощательная способность равна степени черноты и не зависит ни от температуры, ни от направления;

8) среда, разделяющая поверхности, лучепрозрачна.

Анализ теплообмена между поверхностями может быть разделен на две самостоятельные задачи.

Задача 1. Определение величин лучистых потоков, падающих от излучающих поверхностей на произвольно расположенные облучаемые поверхности. Это чисто геометрическая задача, определяемая только формой, размерами и взаимной ориентацией поверхностей. Не снижая общности результатов, при решении этой задачи можно рассматривать для простоты только черные поверхности.

Задача 2. Определение лучистых потоков с учетом многократного отражения и поглощения на поверхности тел. Здесь одновременно с геометрическими характеристиками системы, которые могут быть независимо получены из решения задачи 1, необходимо учитывать и иные свойства системы, такие как степени черноты и отражательные способности поверхностей.

15.3.2. Угловые коэффициенты

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя невогнутыми произвольно расположенными черными поверхностями A_1 и A_2 конечных размеров (рис.15.6), температуры которых T_1 и T_2.

Требуется найти потоки, падающие с первой поверхности на вторую и обратно. Выделим на первой и второй поверхностях соответственно элементарные площадки $\mathrm{d}A_1$ и $\mathrm{d}A_2$, размеры которых бесконечно малы по сравнению с расстоянием между ними r.

На основании (15.14) плотность потока излучения поверхности A_1 в направлении θ в элементарном телесном угле dω равна $d\Phi = \frac{e_{01}}{\pi}\cos\theta d\omega.$

Если взять элементарную поверхность $\mathrm{d}A_1$, то поток излучения будет оставлять величину второго порядка малости по сравнению с потоком со всей поверхности A_1. Обозначим его

$$d^2\Phi_1 = \frac{M_{01}}{\pi}\cos\theta d\omega d\mathrm{A}_1. \qquad (15.21)$$

Если среди всех возможных направлений θ выбрать направление на площадку d A_2, то $\theta = \theta_1$ (рис.15.6), а телесный угол равен

$$d\omega_1 = \frac{dA_2 \cos\theta_2}{r^2}.$$

Учитывая это замечание, запишем выражение (15.21) для $d^2\Phi_{1\to 2}$, т.е. доли потока излучения от площадки dA_1 на площадку dA_2:

$$d^2\Phi_{1\to 2} = \frac{d\mathrm{A}_1 dA_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{r^2}\frac{M_{01}}{\pi}. \qquad (15.22)$$

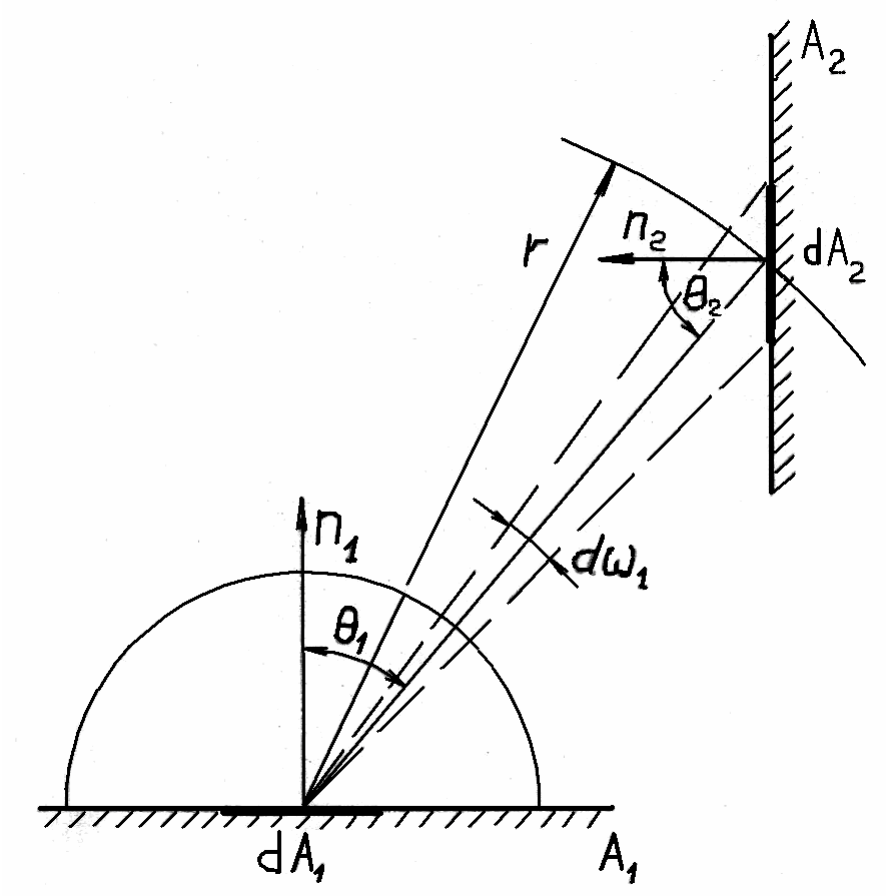


Рис.15.6. Расчёт угловых коэффициентов

Полусферический поток с площадки dA_1 обозначим $d\Phi_{\Delta 1}$, по определению $d\Phi_{\Delta 1} = e_{01} d\mathrm{A}_1$. Найдем, какую часть от полусферического потока $d\Phi_{\Delta 1}$ составляет падающий на площадку dA_2 поток $d^2\Phi_{1\to 2}$, т.е.

$$d\varphi_{d\mathrm{A}_1, dA_2} = \frac{d\Phi_{1\to 2}}{d\Phi_{\Delta 1}} = \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 d\mathrm{A}_2}{\pi r^2}. \qquad (15.23)$$

Величина $d\varphi_{dA_1, dA_2}$ - элементарный угловой коэффициент облученности с элементарной площадки dA_1 на dA_2.

Поток $d\Phi_{1\to 2}$ на всю поверхность A_2 от излучения элементарной поверхности dA_1 определяется из (15.22):

$$d\Phi_{1\to 2} = \int_{A_2} d^2\Phi_{1\to 2} = \frac{M_{01}}{\pi} dA_1 \int_{A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_2}{\pi r^2}. \qquad (15.24)$$

Определим локальный угловой коэффициент φ_{dA_1, A_2} с площадки dA_1 на всю поверхность A_2:

$$\varphi_{dA_1, A_2} = \frac{d\Phi_{1\to 2}}{d\Phi_{\Delta 1}} = \int_{A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_2}{\pi r^2} = \int_{A_2} d\varphi_{dA_1, dA_2}. \qquad (15.25)$$

Если выражение (15.24) проинтегрировать по всей поверхности A_1, то получим поток $\Phi_{1\to 2}$ с поверхности A_1 на A_2:

$$\Phi_{1\to 2} = \frac{M_{01}}{\pi} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r^2} dA_1 dA_2.$$

Величина полусферического потока с поверхности A_1 по определению равна $\Phi_1 = e_{01} A_1$, что позволяет найти средний угловой коэффициент

$$\varphi_{1,2} = \frac{\Phi_{1\to 2}}{\Phi_1} = \frac{1}{\pi A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r^2} dA_1 dA_2. \qquad (15.26)$$

Сравнивая (15.25) и (15.26), находим

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \varphi_{dA_1, A_2} dA_1.$$

Если в качестве излучателя рассматривать поверхность A_2, а в качестве приемника излучения - A_1, то для соответствующих угловых коэффициентов можно составить выражения, аналогичные (15.23), (15.25), (15.26):

$$\begin{aligned} d\varphi_{dA_2, dA_1} &= \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_1}{\pi r^2}; \\ \varphi_{dA_2, A_1} &= \int_{A_1} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_1}{\pi r^2}; \qquad (15.27) \\ \varphi_{2,1} &= \frac{1}{A_1} \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2. \end{aligned}$$

Произведение

$$\varphi_{i,j} A_i = H_{i,j} \qquad (15.28)$$

называется взаимной поверхностью излучения.

Взаимные поверхности, так же как и угловые коэффициенты, могут быть элементарными

$$dH_{dA_1, dA_2} = dH_{dA_2, dA_1} = \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}; \qquad (15.29)$$

локальными

$$H_{dA_1, A_2} = \varphi_{dA_1, A_2} dA_1 = dA_1 \int_{A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_2}{\pi r^2}; \qquad (15.30)$$

средними

$$H_{2,1} = H_{1,2} = \varphi_{1,2} A_1 = \varphi_{2,1} A_2 = \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}. \qquad (15.31)$$

Заметим, что угловой коэффициент иногда определяют как вероятность того, что фотоны, испускаемые первым телом, попадут на второе тело. Существуют расчетные (непосредственное интегрирование, графоаналитический метод, метод лучистой алгебры, метод натянутых нитей) и экспериментальные (световое моделирование, аналогии) методы определения углового коэффициента. Непосредственное интегрирование весьма громоздко и требует привлечения ЭЦВМ.

Графическое интегрирование с помощью специальных приспособлений расширяет возможности расчета, но весьма трудоемко. Метод световых моделей основан на полной аналогии в распространении светового и теплового излучения. Сравнительно простыми средствами, такими, как осветительные лампочки и чувствительные приемники света (фотоэлемента, фотопленка и т.п.), удается найти угловые коэффициенты для тел весьма сложной конфигурации.

15.4. Метод поточной (лучистой) алгебры

Основываясь на довольно очевидных свойствах лучистых потоков, русский теплофизик Г.Л.Поляк предложил оригинальный метод определения коэффициентов облученности.

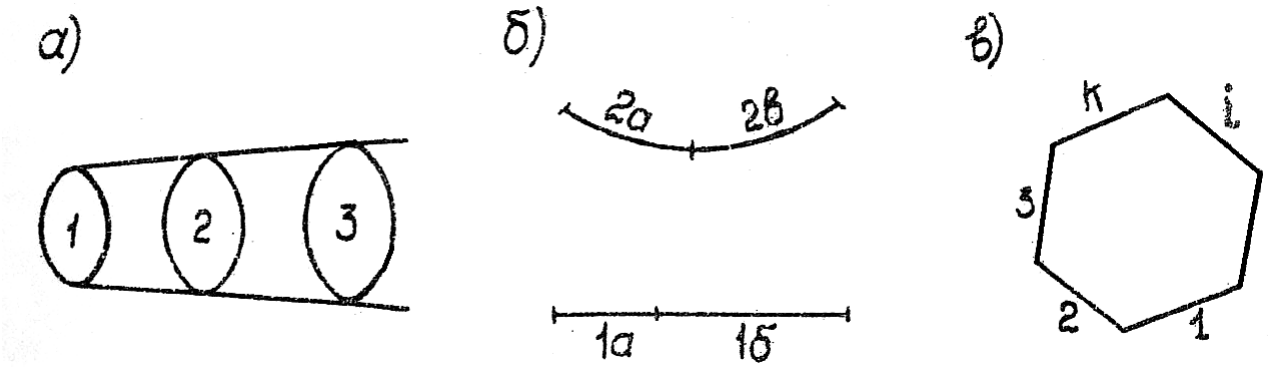


Рис. 15.7. К свойствам тепловых потоков

Свойства совмещаемости (определение равных потоков). Равными являются потоки, исходящие из одного и того же тела, которые можно совместить так, что все лучи одного потока совпадут по положению с соответствующими лучами другого. Поток от тела 1 на тело 2 (рис.15.7): $\Phi_{1,2} = M_1 H_{1,2} = M_1 \varphi_{1,2} A_1$, а поток отела 1 на тело 3 - $\Phi_{1,3} = M_1 H_{1,3} = M_1 \varphi_{1,3} A_1$. Если эти потоки равны, как следует из рисунка, то должны иметь место равенства: $\varphi_{1,2} = \varphi_{1,3}$; $H_{1,2} = H_{1,3}$.

Свойство распределительности. Лучистый поток от тела 1 на тело 2 складывается из лучистых потоков между отдельными частями тел 1 и 2 (рис.15.7, б). Если тело 1 состоит из частей 1,а и 1,б, а тело 2 – из частей 2,а и 2,б, то лучистый поток от тела 1 на тело 2 $\Phi_{1,2} = \Phi_{1a,2a} + \Phi_{1a,2б} + \Phi_{1б,2a} + \Phi_{1б,2б}$. Разделив обе части этого равенства на величину собственного излучения тела 1 (M_1), получим

$$H_{1,2} = H_{1a,2a} + H_{1a,2б} + H_{1б,2a} + H_{1б,2б}. \qquad (15.32)$$

Свойство затемняемости. Лучистый поток от тела 1 на тело 3 равен нулю, если на пути всех лучей, идущих от тела 1 к телу 3, помещается непрозрачное тело: $\Phi_{1,3} = 0$; $\varphi_{1,3} = 0$; $H_{1,3} = 0$. Для плоских и выпуклых тел самооблученность отсутствует:

$$\Phi_{1,1} = 0; \varphi_{1,1} = 0; H_{1,1} = 0. \qquad (15.33)$$

Свойство замыкаемости. Для замкнутой системы n тел лучистый поток, посылаемый одним из тел K на остальные, равен полусферическому излучению этого тела (рис.15.7,в):

$$\sum_{i=1}^{i=k} \Phi_{k,i} = \Phi_k = M_k \mathrm{A}_k$$

для K=1,2,3,…,n.
Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} H_{k,i} = A_k; \sum_{i=1}^{n} \varphi_{k,i} = 1. \qquad (15.34)$$

Последнее равенство справедливо и в том случае, когда тело является вогнутым:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} H_{k,i} + H_{k,k} = A_k; \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \varphi_{k,i} + \varphi_{k,k} = 1. \qquad (15.35)$$

Свойство взаимности. Взаимные поверхности тел равны между собой:

$$H_{1,2} = H_{2,1} \qquad (15.36)$$

Это свойство следует непосредственно из выражения (15.31). Последнее совершенно симметрично относительно своих индексов. Т.к. по определению $\varphi_{i,j} A_i = H_{i,j}$, то получим

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} \frac{A_2}{A_1} \qquad (15.37)$$

Метод поточной алгебры. Этот метод позволяет интегрирование заменить простыми алгебраическими операциями. Мы ограничимся лишь несколькими примерами, иллюстрирующими возможности лучистой алгебры.

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из трех пересекающихся бесконечных невогнутых цилиндрических поверхностей, изображенную на рис.15.8,а. Направляющие этих поверхностей (лежащие в плоскости чертежа) являются невогнутыми. Образующие, перпендикулярные плоскости чертежа, - прямые линии. Ввиду неограниченной

протяженности этих поверхностей эффектом, связанным с излучением через краевые отверстия можно пренебречь. Требуется найти взаимные поверхности и угловые коэффициенты этих трех цилиндрических поверхностей, площади которых соответственно - A_1, A_2, A_3. Общее количество угловых коэффициентов равно n^2, где n – число поверхностей в системе. В данном случае имеется девять неизвестных: $H_{1,1}, H_{1,2}, H_{1,3}, H_{2,1}, H_{2,2}, H_{2,3}, H_{3,1}, H_{3,2}, H_{3,3}$. Для того, чтобы найти неизвестные, необходимо составить девять независимых уравнений.

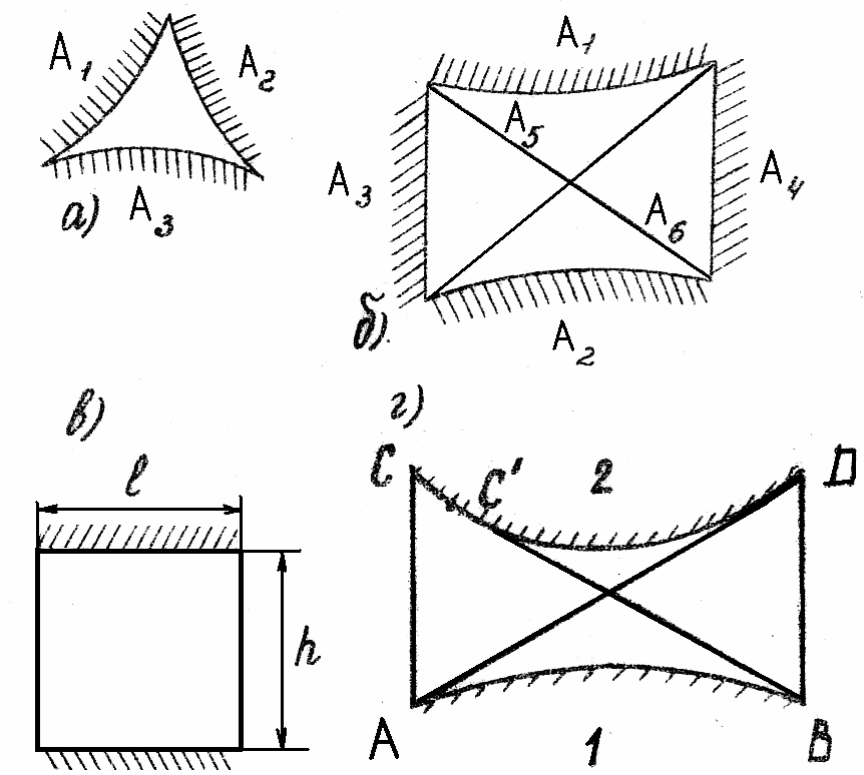


Рис.15.8. Система тел

Из свойства затемняемости следует, что

$$H_{1,1} = 0\,;\, H_{2,2} = 0\,;\, H_{3,3} = 0.$$

Из свойства замыкаемости потоков получим

$$\begin{cases} H_{1,1} + H_{1,2} + H_{1,3} = A_1 \\ H_{2,1} + H_{2,2} + H_{2,3} = A_2 \\ H_{3,1} + H_{3,2} + H_{3,3} = A_3 \end{cases} \qquad (15.38)$$

И, наконец, на основании свойства взаимности

$$H_{1,2} = H_{2,1}\,;\, H_{2,3} = H_{3,2}\,;\, H_{3,1} = H_{1,3}.$$

Итак, мы получили систему алгебраических уравнений с девятью неизвестными. Система является алгебраически определенной и имеет единственное решение. После преобразований получим

$$H_{1,2} + H_{2,3} + H_{3,1} = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + A_3). \qquad (15.39)$$

Вычитая затем поочередно из (15.39) равенства (15.38), найдем зависимости для искомых величин:

$$H_{1,2}=\frac{A_1+A_2-A_3}{2};\ H_{2,3}=\frac{A_2+A_3-A_1}{2};\ H_{3,1}=\frac{A_3+A_1-A_2}{2}. \qquad (14.40)$$

Используя соотношения (15.37), определим искомые угловые коэффициенты

$$\varphi_{1,2}=\frac{A_1+A_2-A_3}{2A_1};\ \varphi_{2,1}=\frac{A_1+A_2-A_3}{2A_2};$$

$$\varphi_{2,3}=\frac{A_2+A_3-A_1}{2A_2};\ \varphi_{3,2}=\frac{A_2+A_3-A_1}{2A_3}; \qquad (15.41)$$

$$\varphi_{3,1}=\frac{A_3+A_1-A_2}{2A_3};\ \varphi_{1,3}=\frac{A_3+A_1-A_2}{2A_1}.$$

Заметим, что в рассмотренном случае ввиду бесконечной протяженности тел имеет смысл говорить о взаимных поверхностях и угловых коэффициентах, приходящихся на единицу длины образующих. Тогда A_1, A_2 и A_3 оказываются численно равными соответствующим длинам направляющих.

Пример 2.Лучистый теплообмен между двумя неперересекающимися невогнутыми бесконечными цилиндрическими поверхностями (рис.15.8,б). В этом случае n^2=4, т.е. требуется определить четыре неизвестных: $H_{1,1}, H_{1,2}, H_{2,1}, H_{2,2}$. Однако уравнений можно составить только три:

$$H_{1,1}=0;\ H_{2,2}=0;\ H_{1,2}=H_{2,1} \qquad (15.42)$$

Свойства замыкаемости не удается использовать, т.е. система поверхностей не замкнута. Очевидно, падающие потоки не изменяются, если мы замкнем нашу систему двумя абсолютно черными плоскостями 3 и 4. Теперь можно воспользоваться свойством замыкаемости:

$$H_{1,1}+H_{1,2}+H_{1,3}+H_{1,4}=A_1 \qquad (15.43)$$

Если мы разделим данную полость плоскостями A_5 и A_6, соединяющими края исходных поверхностей 1 и 2, то задача сведется к известной уже системе трех пересекающихся цилиндрических поверхностей.

Воспользуемся соотношениями, выведенными в примере 1:

$$H_{1,3}=\frac{A_1+A_3-A_5}{2};\ H_{1,4}=\frac{A_1+A_4-A_6}{2}. \qquad (15.44)$$

Подставляя равенства (15.42), (15.44) в уравнение (15.43), получим

$$H_{1,2}=A_1-\frac{A_1+A_3-A_5}{2}-\frac{A_1+A_4-A_6}{2}=\frac{A_5+A_6-A_3-A_4}{2} \qquad (15.45)$$

На основании выражения (15.37) запишем

$$\varphi_{1,2}=\frac{A_5+A_6-A_3-A_4}{2A_1};\ \varphi_{2,1}=\frac{A_5+A_6-A_3-A_4}{2A_2}. \qquad (15.46)$$

Пример 3. Представляет интерес частный случай, когда поверхности 1 и 2 являются параллельными бесконечными полосами равной ширины, расположенными так, что одна из них совпадает с проекцией на нее второй

полосы (рис.15.8,в). Если ширина полосы равна l, расстояние между ними - h, то, очевидно,

$$A_1 = A_2 = l\,;\; A_3 = A_4 = h\,;\; A_5 = A_6 = \sqrt{h^2 + l^2}.$$

Результат получается непосредственно из формул (15.45) и (15.46) после подстановки в них величин $H_{1,2} = \sqrt{h^2 + l^2} - h$,

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{2,1} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2} - \frac{h}{l}.$$

Метод натянутых нитей позволяет определить коэффициенты облученности для плоской задачи (система двух цилиндрических поверхностей с образующими, перпендикулярными плоскости чертежа) при любой конфигурации тел. Суть метода заключается в следующем. Внешние кромки поверхностей (рис.15.8,г) соединяются нитями AC, DB, AD и $CC'B$. Используя результаты (15.40) примера 1 и свойство (15.34), можно показать, что в общем виде взаимная поверхность $H_{1,2} = \frac{l_{внутр} - l_{внеш}}{2}$, где $l_{внут} = AD + CC'B$ - длина пересекающихся нитей, $l_{внеш} = AC + DB$ - длина непересекающихся нитей. Тогда коэффициенты облученности $\varphi_{1,2} = \frac{H_{1,2}}{AB}$, $\varphi_{2,1} = \frac{H_{1,2}}{CD}$.

Глава 16. Теплообмен излучением между серыми телами

16.1. Виды излучения

Выше мы рассмотрели теплообмен между черными телами. Излучение, падающее на некоторое тело, полностью им поглощалось. При теплообмене реальных тел, которые для большинства практических задач могут считаться серыми, необходимо учитывать отражение. Будем различать следующие виды лучистых потоков (рис.16.1).

1. Собственный поток Φ_i, выходящий из массы тела i сквозь его поверхность $\Phi_i = e_i \mathrm{A}_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 A_i$. Для серых тел

$$\Phi_i = a_i \sigma T_i^4 A_i. \qquad (16.1)$$

2. Падающий поток $\Phi_{падi}$ – поток, падающий на поверхность извне.

3. Поглощенный поток $\Phi_{погі}$ – часть падающего потока, которая поглотится телом:

$$\Phi_{погі} = a_i \Phi_{падi} \qquad (16.2)$$

4. Отраженный поток $\Phi_{отi}$ – часть падающего потока, которая отразится от поверхности тела: $\Phi_{отi} = (1 - a_i)\Phi_{падi} = \mathrm{r}\,\Phi_{падi}$.

Очевидно,

$$\Phi_{падi} = \Phi_{погі} + \Phi_{отi}. \qquad (16.3)$$

5. Эффективный поток $\Phi_{эфi}$ – суммарный поток, посылаемый поверхностью тела в пространство. Он складывается из собственного и отраженного потоков

$$\Phi_{эфi} = \Phi_i + \Phi_{отi} \qquad (16.4)$$

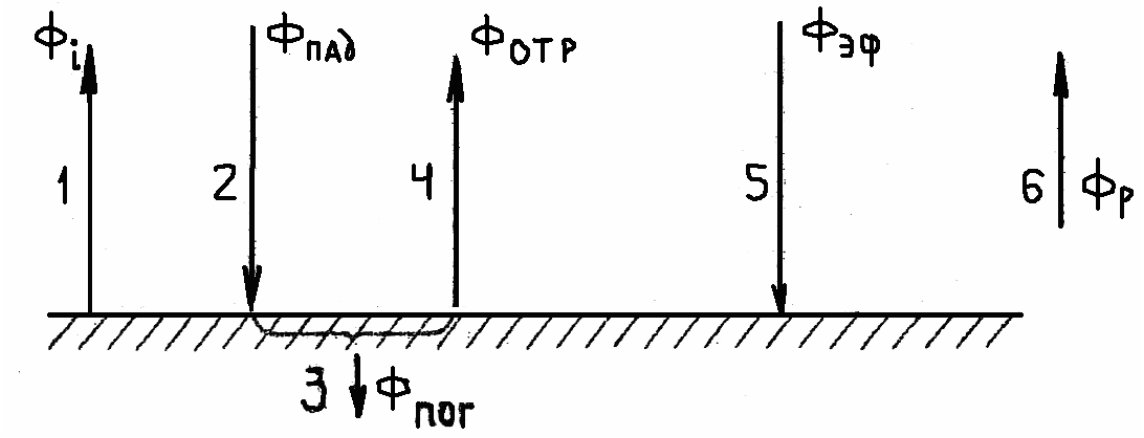


Рис.16.1. Виды лучистых потоков

6. Результирующий поток $\Phi_{рi}$ – разность потоков, входящий в тело и выходящих из него:

$$\Phi_{рi} = \Phi_{погi} - \Phi_i = \Phi_{падi} - \Phi_{эфi} . \qquad (16.5)$$

Итак, можно рассматривать шесть видов излучения. Они связаны между собою четырьмя независимыми соотношениями (16.2 – 16.5). Поэтому только два из шести видов излучения можно задавать, остальные четыре определяются из указанных уравнений.

16.2. Аналитические методы решения задачи

Исследование процессов лучистого теплообмена в различных излучающих системах, состоящих из реальных тел, базируется на двух основных методах: методе многократных отражений и методе сальдо. Метод многократных отражений основан на определении изменения величины лучистой энергии для какого либо тела по отдельным стадиям затухающих поглощений и отражений в процессе теплообмена с другими телами.

Этот метод наглядно вскрывает механизм лучистого переноса тепла в конкретных случаях. Однако будучи весьма детальным, метод многократных отражений связан с громоздкими вычислениями, и использование его для сложных геометрических систем затруднительно. Пример применения этого метода для двух бесконечных параллельных плоскостей приводится во многих книгах по теплопередаче, в частности, […].

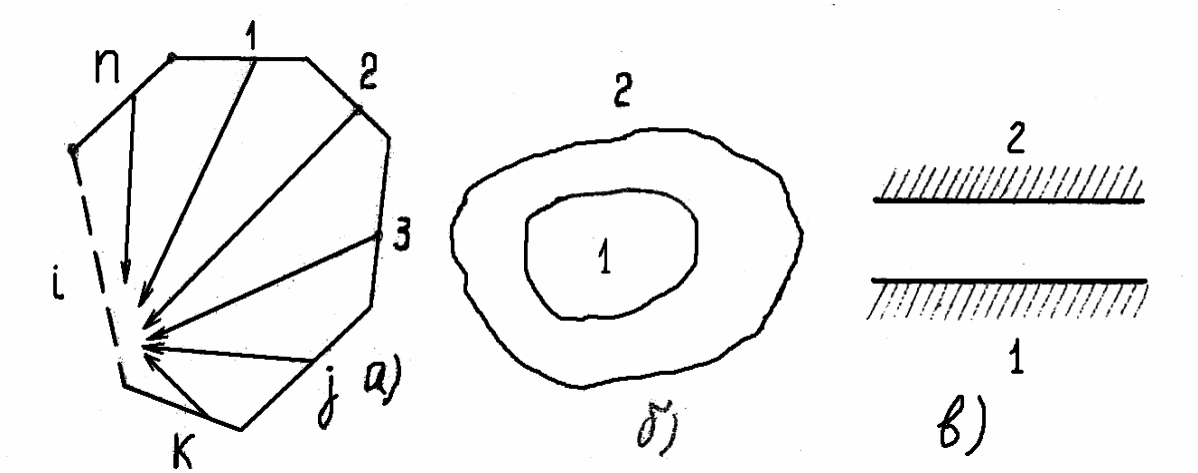


Рис.16.2. Системы тел

Метод сальдо состоит лишь в количественном анализе величин, характеризующие конечные эффекты теплообмена. Поэтому он не может наглядно вскрыть всю физическую картину протекания процесса лучистого переноса тепла, но зато позволяет получить результат без громоздких вычислений. Покажем применение этого метода к замкнутой системе тел. Пусть имеется замкнутая система n тел с известными температурами (рис.16.2,а). Считается, что известны также степени черноты, поглощательные способности, геометрические параметры тел и все угловые коэффициенты. Требуется определить лучистые потоки между телами. Собственные потоки известны, поскольку заданы температуры тел. В любой замкнутой системе n тел на некоторое тело i падает поток $\Phi_{пад i}$, который складывается из отдельных падающих потоков с каждого тела системы на тело i. Если тело i вогнутое, то оно излучает и само на себя, т.е.

$$\Phi_{пад i} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{пад k,i}, \qquad (16.6)$$

где k, в частности, может принимать значение k=i.

Но каждый поток $\Phi_{пад k,i}$, падающий с тела k на тело i, составляет определенную долю эффективного потока тела k, а именно: $\Phi_{пад k,i} = \Phi_{эф k} \varphi_{k,i}$. Тогда (16.6) можно переписать в виде

$$\Phi_{пад i} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{эф k} \varphi_{k,i} \,. \qquad (16.7)$$

Постараемся все неизвестные виды излучения ($\Phi_{пад}$, $\Phi_{пог}$, $\Phi_{от}$, $\Phi_{эф}$, $\Phi_{р}$) свести к $\Phi_{эф}$ (известным является Φ_i), т.к. наиболее простыми оказываются промежуточные выкладки, если уравнения записать относительно $\Phi_{эф}$. Представим $\Phi_{пад i}$ с помощью зависимостей (16.3) и (16.4) в виде

$$\Phi_{пад i} = \frac{\Phi_{от i}}{1 - a_i} = \frac{\Phi_{эф i} - \Phi_i}{1 - a_i}. \qquad (16.8)$$

Составим теперь выражения для результирующего потока, подставив в (16.5) вместо $\Phi_{пад}$ один раз выражение (16.7), а другой – (16.8):

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{p\,i} &= \Phi_{пад i} - \Phi_{эф\,i} = \frac{\Phi_{от\,i} - \Phi_i}{1-a_i} - \Phi_{эф\,i} = \frac{a_i\Phi_{эф\,i} - \Phi_i}{1-a_i}, \\ \Phi_{p\,i} &= \Phi_{пад\,i} - \Phi_{эф\,i} = \sum_{k=1}^{n}\Phi_{эф\,k}\varphi_{k,i} - \Phi_{эф\,i}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.9)$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$\Phi_{эфi} - (1-a_i)\sum_{k=1}^{n}\Phi_{эф\,к}\varphi_{к,i} = \Phi_i. \qquad (16.10)$$

Уравнение (16.10) содержит n неизвестных потоков $\Phi_{эф}$. Записав такие уравнения для каждого тела i, мы получим систему линейных алгебраических уравнений, которая имеет единственное решение. Итак, можно определить все эффективные потоки, а пользуясь выражениями (16.8) и (16.9), также и падающий, и результирующий.

Таким образом, задача в принципе решена. Трудность состоит в выборе метода решения системы уравнений. Для некоторых частных случаев результат может быть получен в простой форме. Рассмотрим, например, замкнутую систему двух тел. Для этого случая система уравнений (16.10) запишется в следующем виде

$$\Phi_{эф\,1} - (1-a_1)\,\Phi_{эф1}\varphi_{11} - (1-a_1)\Phi_{эф\,2}\varphi_{21} = \Phi_1,$$
$$\Phi_{эф\,2} - (1-a_2)\,\Phi_{эф1}\varphi_{12} - (1-a_2)\Phi_{эф\,2}\varphi_{22} = \Phi_2.$$

Учитывая, что $\varphi_{11} = 1-\varphi_{12}$; $\varphi_{22} = 1-\varphi_{21}$,

$$\begin{cases} \Phi_{эф1}[1-(1-a_1)(1-\varphi_{12})] - (1-a_1)\Phi_{эф\,2}\varphi_{21} = \Phi_1 \\ \Phi_{эф\,2}[1-(1-a_2)(1-\varphi_{21})] - (1-a_2)\Phi_{эф1}\varphi_{12} = \Phi_2. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$K_1 = 1-(1-a_1)(1-\varphi_{12}) = a_1 + \varphi_{12}(1-a_1);$$
$$K_2 = 1-(1-a_2)(1-\varphi_{21}) = a_2 + \varphi_{21}(1-a_2).$$

Тогда

$$\begin{cases} \Phi_{эф1}K_1 - (1-a_1)\Phi_{эф\,2}\varphi_{21} = \Phi_1 \\ -\Phi_{эф\,2}(1-a_2)\varphi_{12} + K_2\Phi_{эф\,2} = \Phi_2 \end{cases}$$

Решим эту систему методом определителей:

$$\Phi_{эф\,1} = \frac{D_1}{D} \quad ; \quad \Phi_{эф\,2} = \frac{D_2}{D} \quad ; \quad D = \begin{vmatrix} K_1 & -(1-a_1)\varphi_{21} \\ -(1-a_2)\varphi_{12} & K_2 \end{vmatrix} = \qquad (16.11)$$

$$= K_1K_2 - (1-a_1)(1-a_2)\varphi_{12}\varphi_{21} = a_1a_2 + \varphi_{12}a_2(1-a_1) + \varphi_{21}a_1(1-a_2)$$

$$D_1 = K_2\Phi_1 + \varphi_{21}(1-a_1)\Phi_2 \quad D_2 = K_1\Phi_2 + \varphi_{12}(1-a_2)\Phi_1.$$

Итак, выражения для эффективных потоков найдены. Теперь, пользуясь равенствами (16.8) и (16.9), нетрудно получить выражения для падающего и результирующего потоков. Последнее представляет особый интерес, т.к. дает возможность получить основную расчетную формулу теплообмена.

16.3. Расчетная формула теплообмена

На основании только что полученных результатов найдём выражение для результирующих потоков. При этом будем иметь в виду, что в состоянии равновесия $\sum \Phi_{pi} = 0$. Это уравнение является выражением закона сохранения энергии. В частности, для системы двух тел оно имеет вид $\Phi_{p1} = -\Phi_{p2} = -\Phi_{1,2}$, т.е. какой поток тепла теряет одно тело, такой получает второе. На основании уравнений (16.5) и (16.7) $\Phi_{p1} = \Phi_{пад1} - \Phi_{эф1}$, $\Phi_{пад1} = \Phi_{эф1}\varphi_{11} + \Phi_{эф2}\varphi_{21}$, поэтому $\Phi_{p1} = \Phi_{эф2}\varphi_{21} - \Phi_{эф1}(1-\varphi_{11}) = \Phi_{эф2}\varphi_{21} - \Phi_{эф1}\varphi_{12}$. Подставляя в это уравнение выражение (16.1), получаем

$$\Phi_{p1} = \frac{D_2\varphi_{21} - D_1\varphi_{12}}{D} = \frac{\Phi_2\varphi_{21}a_1 - a_1\varphi_{12}a_2}{a_1a_2 + \varphi_{12}a_2(1-a_1) + \varphi_{21}a_1(1-a_2)} =$$

$$= (e_{02} - e_{01})H_{12} \cdot \frac{1}{1 + \varphi_{12}\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) + \varphi_{21}\left(\frac{1}{a_2} - 1\right)}.$$

т.к. $H_{12} = \varphi_{12}A_1 = H_{12} = \varphi_{21}A_2$, а поскольку тела серые, - $\varepsilon_1 = a_1$; $\varepsilon_2 = a_2$.

Мы получили выражение для результирующего потока тела 1. Поток энергии, передаваемый с тела 1 на тело 2, равен

$$\Phi_{12} = \Phi_{p2} = -\Phi_{p1} = \widetilde{C}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]\varepsilon_{пр12}H_{12}\ , \qquad (16.12)$$

где $\widetilde{c} = 5{,}7\ \frac{Вт}{м^2K^4}$

$$\varepsilon_{пр12} = \frac{1}{1 + \varphi_{12}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) + \varphi_{21}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}. \qquad (16.13)$$

Выражение (16.12) и является основной формулой лучистого теплообмена. Она сохраняет свой вид и в случае теплообмена между телами 1 и 2, находящимися в системе трёх и более тел. При этом меняется выражение только для $\varepsilon_{пр}$. Величина, определяемая соотношениями (16.13) называется приведённой степенью черноты пары тел и является оптикогеометрическим параметром. Для системы, состоящей из трёх и более тел, эта величина имеет очень громоздкое выражение и зависит не только от свойств данной пары тел, но и от свойств всей системы в целом. Приведённая степень черноты может меняться в пределах $0 \div 1$. Она не имеет ничего общего с излучательной способностью тел.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) Система состоит из двух серых тел, одно из которых находится внутри другого (рис.16.3,в). Меньшее из тел не вогнуто. Все параметры, относящиеся к нему, снабжены индексом 1, а относящиеся ко второму телу – индексом 2. Для этого случая $\varphi_{11} = 0$. Тогда

$$\varphi_{12} = 1 - \varphi_{11} = 1;\ \varphi_{21} = \varphi_{12}\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1}{A_2};\ H_{12} = A_1. \qquad (16.14)$$

Для этого случая приведённая степень черноты

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)}. \qquad (16.15)$$

2) Система состоит из двух бесконечных параллельных пластин (рис.16.3,б). Здесь $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1;\ H_{12} = A_1 = A_2;$

$$\varepsilon_{пр} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \qquad (16.16)$$

Заметим, что формула (16.16) является частным случаем (16.15) при $A_1 \to A_2$. Следовательно, она применима для тех случаев, когда расстояние между телами много меньше размеров тела. Если в формуле (16.16) $\varepsilon_1 << \varepsilon_2$, то $\varepsilon_{пр} << \varepsilon_1$, т.е. приведённая степень черноты определяется наименьшей из двух степеней черноты. Если же ε_1 и $\varepsilon_2 \geq 0.85$, то $\varepsilon_{пр} \approx \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$.

16.4. Теплообмен излучением при наличии экранов

Во многих практических случаях требуется тепловая защита человека или аппаратуры от воздействия высокотемпературных источников тепла, таких как печи, топки и т.п. Лучистый теплообмен может быть существенно уменьшен за счет применения экранов. Экраны устанавливаются по нормали к направлению распространения теплового излучения и выполняются из материалов с большой отражательной способностью (полированный листовой металл). Рассмотрим влияние плоских экранов на теплообмен излучением между неограниченными пластинами (рис.16.3). Пусть температуры пластин - T_1, T_2 причем $T_1 > T_2$. Степени черноты пластин – ε_1 и ε_2, а степени черноты i-го по порядку экрана - $\varepsilon_{эi}$. Толщина экранов мала, так что их собственным тепловым сопротивлением можно пренебречь. Температуры экранов неизвестны. Расчеты выполним для единицы поверхности. Запишем выражения для удельных лучистых потоков $M_{1,Э1}$ между первой пластиной и первым экраном и т.д. Последний из рассматриваемых потоков – поток между экраном *n* и пластиной 2.

$$\frac{M_{1,э1}}{\widetilde{C}\varepsilon_{пр1,э1}} = \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{э1}}{100}\right)^4;\ \frac{M_{э1,э2}}{\widetilde{C}\varepsilon_{прэ1,э2}} = \left(\frac{T_{1э}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{э2}}{100}\right)^4;\ldots;\ \frac{M_{эп,2}}{\widetilde{C}\varepsilon_{прэп,2}} = \left(\frac{T_{эп}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4.$$

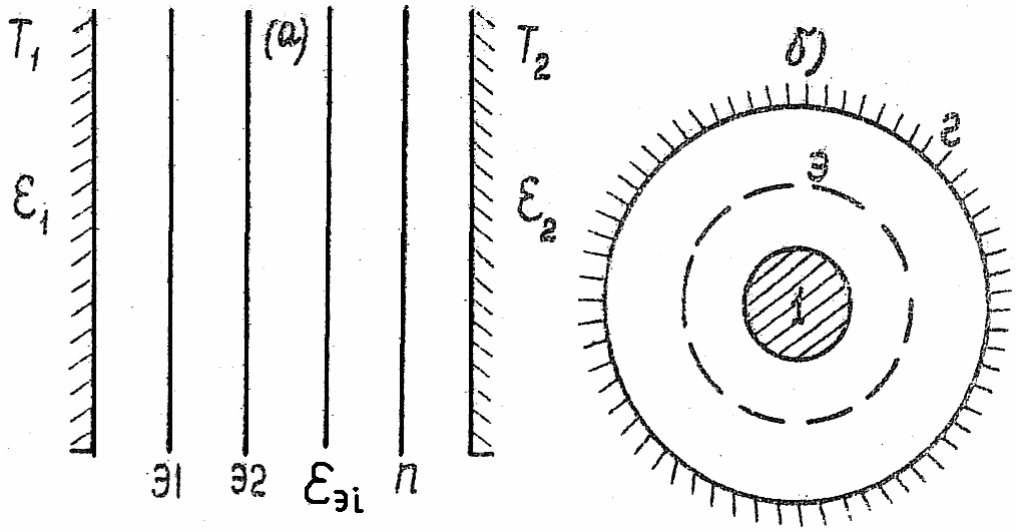


Рис.16.3. Расположение экранов

Сложим левые и правые части уравнений. Заметим, что при стационарном режиме имеет место равенство потоков

$$M_{1,э1} = M_{э1,э2} = ... = M_{эп,2} = (M_{12})_э,$$

где q_{12} - удельный поток между пластинами 1 и 2 при наличии экранов.

$$\frac{(M_{12})_э}{\widetilde{C}}\left(\frac{1}{\varepsilon_{пр1,э1}} + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\varepsilon_{прэi-1,эi}} + \frac{1}{\varepsilon_{прэп,2}}\right) = \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4$$

или $$(M_{12})_э = \widetilde{C}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right](\varepsilon_{пр12})_э$$

где $(\varepsilon_{пр1,2})_э = \left(\frac{1}{\varepsilon_{пр1,э1}} + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\varepsilon_{прэi-1,эi}} + \frac{1}{\varepsilon_{прэп,2}}\right)^{-1}$ - приведенная степень черноты между пластинами 1 и 2 при наличии экранов. На основании выражения (16.16)

$$\frac{1}{\varepsilon_{пр1,э1}} + \frac{1}{\varepsilon_{прэ1,э2}} + ... = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{э1}} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_{э1}} + \frac{1}{\varepsilon_{э2}} - 1 + ...$$

Поэтому окончательно

$$(\varepsilon_{пр1,2})_э = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\varepsilon_{эi}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - (n+1)}. \qquad (16.17)$$

В частном случае, когда степени черноты экранов и пластин одинаковы

$$(\varepsilon_{пр1,2})_э = \frac{1}{2(n+1)\frac{1}{\varepsilon} - (n+1)} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1}.$$

Но $\frac{1}{\frac{2}{\varepsilon} - 1} = \varepsilon_{пр1,2}$ при отсутствии экранов и при условии, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. В таком случае $(M_{1,2})_э = \frac{M_{1,2}}{n+1}$. Значит, при введении экранов, имеющих ту же

степень черноты, что и пластины, тепловой поток уменьшается в (n+1) раз. Экранирующее воздействие плоских экранов не зависит от их расположения относительно пластин.

Цилиндрические или сферические экраны (рис.16.3,б).

Результирующий поток при отсутствии экранов на основании (16.12) и (16.15) равен

$$\Phi_{1.2}= \varepsilon_{пр1,2}\widetilde{C}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]A_1, \qquad (16.18)$$

где $\varepsilon_{пр1,2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{F_1}{F_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}$.

Распишем потоки при наличии одного экрана:

$$\Phi'_{1.2}= \Phi_{1э} = \varepsilon_{пр1,э}\widetilde{C}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right]A_1 \ ; \qquad (16.19)$$

$$\Phi'_{1.2}= \Phi_{э2} = \varepsilon_{прэ,2}\widetilde{C}\left[\left(\frac{T_э}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]A_э \ ;$$

$$\varepsilon_{пр1,э}=\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_э}-1\right)} \ ; \ \varepsilon_{прэ,2}=\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_э}+\dfrac{A_э}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}.$$

Учитывая равенство потоков $\Phi_{1э}$ и $\Phi_{э2}$, можно записать

$$\varepsilon_{пр1,э}\widetilde{C}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_э}{100}\right)^4\right]A_1 = \varepsilon_{прэ,2}\widetilde{C}\left[\left(\frac{T_э}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]A_э;$$

$$\left(\frac{T_э}{100}\right)^4=\frac{\varepsilon_{пр1,э}\left(\dfrac{T_1}{100}\right)^4A_1+\varepsilon_{прэ,2}\left(\dfrac{T_2}{100}\right)^4A_э}{\varepsilon_{пр1,э}A_1+\varepsilon_{прэ,2}A_э}.$$

Подставим теперь это значение в любую из формул (16.19,а):

$$\Phi'_{1.2}=\frac{\varepsilon_{пр1,э}\varepsilon_{прэ,2}}{\varepsilon_{пр1,э}A_1+\varepsilon_{прэ,2}A_э}\widetilde{C}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]A_1A_э.$$

Сравнивая $\Phi'_{1,2}$ с $\Phi_{1,2}$ из (16.19), находим

$$(\varepsilon_{пр1,2})_э=\frac{\varepsilon_{пр1,э}\varepsilon_{прэ,2}}{\varepsilon_{пр1,э}A_1+\varepsilon_{прэ,2}A_э}.$$

Разделив числитель и знаменатель последнего выражения на $A_э\varepsilon_{пр1,э}\ \varepsilon_{прэ,2}$, получим

$$(\varepsilon_{пр1,2})_э=\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{A_1}{A_э}\left(\dfrac{2}{\varepsilon_э}-1\right)+\dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)} \ ; \ \frac{\Phi'_{1,2}}{\Phi_{1,2}}=\frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}+\dfrac{A_1}{A_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}\right)+\dfrac{A_1}{A_э}\left(\dfrac{2}{\varepsilon_2}-1\right)},$$

т.е. для цилиндрических и сферических экранов эффект экранирования будет тем больше, чем $\frac{\Phi'_{1,2}}{\Phi_{1,2}}$ будет меньше единицы, а для этого следует приближать площадь $A_э$ к площади A_1 путем расположения экрана как можно ближе к поверхности внутреннего тела.

16.5. Солнечное излучение

Благодаря высокой температуре Солнца примерно половина излучаемой им энергии приходится на световые лучи, остальная часть энергии – на инфракрасные. Удельный поток солнечной энергии, нормальный к поверхности, расположенной за пределами атмосферы, называется солнечной постоянной. Последняя зависит от расстояния между Землей и Солнцем и составляет $M_{s0} = 1280 - 1368 \frac{Вт}{м^2}$, в среднем $M_{s0} = 1325 \frac{Вт}{м^2}$.

Плотность нормального потока прямого солнечного излучения у земной поверхности M_s меньше M_{s0} и зависит от степени прозрачности атмосферы (в Москве в полдень в разные времена года величина M_s изменяется от 560 до 860 $\frac{Вт}{м^2}$). Плотность потока солнечного излучения M_s, падающего на горизонтальную поверхность Земли (рис.16.4), зависит от угловой высоты Солнца над горизонтом и равна

$$M'_s = M_s \sin\psi.$$

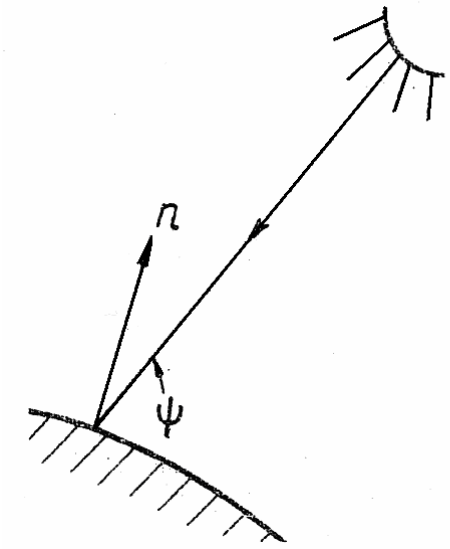


Рис.16.4. Ориентация Земли и Солнца

Следовательно, величина M_s' зависит от времени года и дня, от ориентации поверхности относительно сторон света. В табл.16.1 указаны ориентировочные значения величины M_s'.

Поглощательная способность a_s поверхности зависит от спектра падающего на нее излучения. Поэтому способность тел поглощать солнечное излучение может существенно отличаться от поглощательной способности обычного длинноволнового излучения. Например, для полированной меди поглощательная способность солнечного излучения a_s=0.26, тогда как поглощательная способность обычного излучения a=0.023. Белые поверхности поглощают солнечное излучение хуже, чем длинноволновое, например, белая краска имеет a_s=0.12-0.26, тогда как для длинноволнового излучения a>0.9. Формула для расчета лучистого теплообмена тела с окружающей средой с учетом солнечного излучения имеет вид

$$\Phi_{1c} = \alpha_{1сл}(t_1 - t_c)\mathrm{A}_1 - a_{1s}A_0M_s' \;;\; \alpha_{1сл} = \varepsilon_1 f(t_1, t_c), \qquad (16.20)$$

где t_1 и t_c - температуры поверхности тела и окружающей среды; ε_1 - степень черноты поверхности тела; A_1 - площадь поверхности тела, поглощающей энергию; A_0 - площадь поверхности тела, освещаемой Солнцем; a_{1s} - поглощательная способность тела по отношению к солнечным лучам; M_s' - облучательная способность Солнца (табл.16.1).

Таблица 16.1

Облучательная способность Солнца M_s' в ясный день на 40-й параллели, $\frac{Вт}{м^2}$

Время дня, ч	Ориентация вертикальной поверхности Горизонтальная поверхность			
	восток	юг	запад	
6	227	-	-	46.5
9	610	82	-	675
12	-	245	-	950
15	-	82	610	675
18	-	-	550	46.5

Значение поглощательной способности различных материалов по отношению к солнечным лучам представлены в табл.16.2.

Таблица 16.2

Поглощательная способность различных материалов по отношению к солнечным лучам

Наименование материала	Поглощательная способность
Алюминий полированный	0,26
Асфальт	0,89
Бумага белая	0,27
Железо полированное	0,45
Железо окисленное ржавое	0,74
Кирпич красный	0,70 - 0,77
Краска белая	0,I2 - 0,26
Краска черная	0,97 - 0,99
Медь полированная	0,26
Оцинкованное железо новое	0,66
Оцинкованное железо старое	0,89
Черепица красная и коричневая	0,65 - 0,74

Список рекомендуемой литературы

1. Дульнев Г.Н., механика жидкости и газа, учебное пособие СПб.; 2001.
2. Кондратьев Г.М., Дульнев Г.Н., Платунов Е.С., Ярышев Н.А., Теплообмен в приборостроении. Техническая физика, учебное пособие СПб.; ГУИТМО, 2004.
3. Богданов С.Н., Бучко Н.А., Гуйго Э.И., Дашкова Г.Н. и др., Теоретические основы хладотехники, ч. 2 Тепломассообмен, учебник, М.; Колос, 1994.
4. Юдаев Б.Н., Теплопередача, учебник, М.; ВШ, 1973.
5. Михеев М.А., Основы теплопередачи, учебник, М.; Энергоиздат, 1956.
6. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М., «Энергия», учебник 1975.
7. Исаченко В.П., Осипова В.А., Суномел А.С., Теплопередача. М., «Энергия», учебник 1975.
8. Болгарский А.В., Мухачёва Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и теплопередача. Учебник, М., «Высшая школа», 1964.
9. Григорьев Б.А., Цветков Ф.Ф., Тепломассообмен. Учебное пособие, М: МЭИ , 2005.
10. Дульнев Г.Н. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре, М.; ВШ, 1984.
11. Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. Л., «Энергия», 1971.
12. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. М.; Госэнергоиздат, 1961
13. Брюханов О.Н., Шевченко С.Н., Тепломассообмен. Учебное пособие, М: АСВ, 2005.

14. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1970.
15. Лыков А.В., Теория теплопроводности, М.; ВШ, 1917.
16. Кондратьев Г.М., Регулярный тепловой режим, М.: Госиздат технико-теоретическиой литературы, 1954.



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ И ЭНЕРГИФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958 гг.). В 1954 году вышла в свет его монография ″Регулярный тепловой режим". Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена. В начале 50-х годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов - оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, доктора технических наук Дульнева Г.Н., возглавлявшего кафедру с 1958 по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ признается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике. Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года - кафедрой теплофизики, с 1991 года - кафедрой

компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В. Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из который вышли доктора наук А.Н.Гордов, А.И.Лазарев, Г.Н.Дульнев, Б.Н.Олейник, Е.С.Платунов, О.А.Сергеев, Н.А.Ярышев, В.Н.Васильев, Ю.П.Заричняк, А.В.Шарков, и другие ученые-теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследовании термооптических явлений в астрокосмических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте "ВЕГА", при создании лазерного устройства в проекте "ФОБОС". Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов, работа которых использует явление сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работа по созданию принципиально новых композиционных материалов - особо прочных термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением. На базе ведущихся на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году. В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению - "Техническая физика". В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров.

На кафедре ведётся подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 – «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин». Сейчас коллектив кафедры

продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведёт поиск в новых областях науки и техники.

Дульнев Геннадий Николаевич
Теория тепло- и массообмена
Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ №
Тираж
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики
и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

