Библиотека СОК

учебное пособие

А. С. Ртищева

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ И ТЕПЛОТЕХНИКИ

Ульяновск 2007

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

А. С. Ртищева

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ И ТЕПЛОТЕХНИКИ

Учебное пособие

для студентов, обучающихся по специальности: 28020265 «Инженерная защита окружающей среды»

Ульяновск 2007

УДК 621
ББК 31.31
К 88

Рецензенты: к.ф-м.н., профессор Пугачев Ю. Ф. (Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации);
начальник сектора отдела развития теплового рынка ОАО «Волжская ТГК» Григорьев Н. В.

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Ртищева А. С.
Теоретические основы гидравлики и теплотехники: Учебное пособие. – Ульяновск, УлГТУ, 2007. – 171 с.
ISBN 5-06-003712-6

Изложены основы гидравлики, технической термодинамики, теории теплообмена. Рассмотрены основы гидростатики, кинематика и динамика движущихся потоков, термические и энергетические характеристики идеальных и реальных газов, основные виды теплообмена, теория подобия гидродинамических и теплообменных процессов.
Пособие предназначено для студентов обучающихся по специальностям: 28020265 «Инженерная защита окружающей среды». Оно может быть использовано студентами других специальностей, изучающих дисциплины «Гидравлика» и «Теплотехника».

УДК 621
ББК 31.31

ISBN 5-06-003712-6 © Оформление. УлГТУ, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие..... 6
Основные обозначения..... 7
Введение..... 8
Часть I. ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ..... 9
1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ..... 9
1.1. Основные физические свойства жидкостей..... 9
1.2. Модели жидкости..... 12
2. ГИДРОСТАТИКА..... 13
2.1. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости..... 13
2.2. Гидростатический закон. Гидростатическое давление..... 14
2.3. Условия равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах..... 15
2.4. Простейшие гидравлические машины..... 16
2.5. Основные методы и приборы измерения давления..... 17
2.6. Закон Архимеда..... 19
2.7. Равновесие и устойчивость тел, погруженных в жидкость. Равновесие тела, плавающего на поверхности жидкости..... 19
2.8. Равновесие земной атмосферы..... 22
3. ГИДРОДИНАМИКА..... 23
3.1. Основы кинематики..... 23
3.1.1. Линии и трубки тока. Уравнение расхода..... 23
3.1.2. Движение жидкой частицы сплошной среды..... 24
3.1.3. Вихревое и безвихревое течение..... 27
3.1.4. Циркуляция скорости..... 28
3.2. Основы динамики..... 29
3.2.1. Силы, действующие на частицу сплошной среды. Напряженное состояние элементарного объема. Закон трения Стокса..... 29
3.2.2. Дифференциальное уравнение неразрывности..... 31
3.2.3. Дифференциальные уравнения переноса количества движения. Уравнения Эйлера и Навье-Стокса..... 33
3.2.4. Дифференциальное уравнение энергии..... 38
3.3. Движение вязкого потока..... 41
3.3.1. Режимы течения жидкости..... 41
3.3.2. Особенности турбулентного течения..... 43
3.3.3. Уравнения движения и энергии для ламинарного и турбулентного режима течения жидкости..... 44
3.3.4. Модели турбулентности..... 48
3.4. Движение жидкости с малой вязкостью..... 51
3.4.1. Пограничный слой..... 51
3.4.2. Движение невязкого потока..... 57
4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ..... 67
4.1. Сопротивления по длине..... 67

4.2. Местные гидравлические сопротивления……... 69
Часть II. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ…….. 71
5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЕЕ ПАРАМЕТРЫ……. 71
5.1. Термодинамическая система и ее состояние…….. 71
5.2. Термические параметры состояния…….. 71
6. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ……... 74
6.1. Уравнение состояния идеального газа……. 74
6.2. Смеси идеальных газов……. 74
7. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ…… 76
7.1. Внутренняя энергия. Энтальпия……... 76
7.2. Работа. Теплота…….. 76
7.3. Теплоемкость…….. 78
8. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ……. 80
8.1. Формулировка первого начала термодинамики……. 80
8.2. Первое начало термодинамики для основных термодинамических процессов……. 81
9. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ……. 88
9.1. Формулировка второго начала термодинамики……. 88
9.2. Цикл Карно……. 88
9.3. Интеграл Клаузиуса……... 92
9.4. Энтропия и термодинамическая вероятность……. 94
10. РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ…….. 95
10.1. Уравнения состояния реальных газов…….. 95
10.2. Пары. Парообразование при постоянном давлении……... 97
10.3. Уравнение Клайперона-Клаузиуса……... 100
10.4. *pT*-диаграмма фазовых переходов……... 101
Часть III. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА…… 102
11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА…… 103
11.1. Виды теплообмена……. 103
11.2. Основные понятия и законы молекулярного и конвективного теплообмена…… 104
12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ…….. 108
12.1. Математическая формулировка задач гидрогазодинамики и теплопередачи…… 108
12.2. Основы теории подобия физических процессов……. 108
12.3. Определяющий размер и определяющая температура…….. 111
12.4. Выявление обобщенных переменных из математической формулировки задачи…… 112
12.5. Получение чисел подобия на основе анализа размерностей……. 115
13. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ……. 118
13.1. Теплопроводность веществ……... 118

13.2. Теплопроводность и теплопередача через плоскую стенку…… 119
13.3. Теплопроводность и теплопередача через цилиндрическую стенку…….. 122
13.4. Теплопроводность и теплопередача через шаровую стенку……. 125
14. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ…… 128
14.1. Условия подобия нестационарных температурных полей…… 128
14.2. Нестационарная теплопроводность плоской стенки…….. 129
15. ТЕПЛООТДАЧА……..…… 133
15.1. Факторы, влияющие на интенсивность теплоотдачи……. 133
15.2. Связь между теплоотдачей и трением……. 134
15.3. Законы трения и теплообмена для турбулентного пограничного слоя…….. 137
15.4. Теплоотдача при вынужденной конвекции плоской пластины… 138
15.4.1. Теплоотдача пластины при ламинарном пограничном слое…….. 138
15.4.2. Теплоотдача пластины при турбулентном пограничном слое……... 142
15.5. Теплоотдача при внешнем обтекании одиночной трубы и трубных пучков……... 144
15.6. Теплоотдача при течении жидкости в трубах и каналах…… 147
15.7. Теплоотдача при свободной конвекции……... 149
15.8. Теплоотдача при фазовых превращениях…… 150
15.8.1. Теплоотдача при конденсации…….. 150
15.8.2. Теплоотдача при кипении…….. 153
15.8.3. Теплоотдача при кипении в условиях движения жидкости по трубам……... 155
15.9. Интенсификация теплоотдачи……..…… 156
16. РАДИАЦИОННЫЙ ТЕПЛООБМЕН……... 158
16.1. Основные понятия и определения…… 158
16.2. Основные законы радиационного теплообмена…….. 160
16.3. Радиационный теплообмен между твердыми телами, разделенными прозрачной средой…… 162
16.4. Защитные экраны…… 163
16.5. Радиационный теплообмен между газом и оболочкой……... 164
17. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ…….. 165
17.1. Основные виды теплообменных аппаратов……. 165
17.2. Тепловой расчет рекуперативного теплообменного аппарата….. 165
17.3. О гидравлическом расчете рекуперативного теплообменного аппарата……... 169
17.4. Способы повышения эффективности теплообменных аппаратов……. 170
Список литературы…… 171

ПРЕДИСЛОВИЕ

Высокие темпы развития техники, тесная связь научных исследований с современной промышленностью делают необходимым подготовку высококвалифицированных кадров по специальности 28020265 «Инженерная защита окружающей среды». Специалистам в этой области часто приходится иметь дело с движущимися потоками жидкости и газа в различных системах, в том числе системах очистки. В предлагаемом учебном пособии содержится необходимый теоретический материал для расчетов течения и теплоотдачи потоков жидкости и газа.

Существующая в настоящее время литература, которая может быть использована в учебном процессе, либо не ориентирована на студентов специальности 28020265 «Инженерная защита окружающей среды», либо отражает лишь некоторые разделы дисциплины.

Предлагаемое учебное пособие в определенной степени призвано восполнить этот пробел. Оно написано на основе прочитанного автором курса «Гидравлика и теплотехника» для студентов энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета. Пособие предназначено для студентов специальности 28020265 «Инженерная защита окружающей среды». Оно также может быть использовано студентами других направлений.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, y, z – координаты декартовой системы;
w_x, w_y, w_z – проекции скорости на координатные оси x, y, z соответственно;
α – коэффициент теплоотдачи;
ρ – плотность;
λ – коэффициент теплопроводности;
μ – динамический коэффициент вязкости;
ν – кинематический коэффициент вязкости;
τ – время; касательное напряжение трения;
σ – нормальное напряжение трения;
a – коэффициент температуропроводности; скорость звука;
u – удельная внутренняя энергия (внутренняя энергия 1 *кг* вещества);
h – удельная энтальпия (энтальпия 1 *кг* вещества);
q – удельный тепловой поток (плотность теплового потока);
q_τ – удельное количество теплоты (количество теплоты 1 *кг* вещества);
l – удельная работа (работа 1 *кг* вещества);
c – теплоемкость;
p – давление;
υ – удельный объем (объем 1 *кг* вещества);
t – температура в ^0C;
T – температура в K;
R – газовая постоянная;
R_μ – универсальная газовая постоянная;
Q – тепловой поток;
Q_τ – количество теплоты;
L – работа;
Ar – число Архимеда;
Gr – число Грасгофа;
Fo – число Фурье;
Kn – число Кнудсена;
Eu – число Эйлера;
Re – число Рейнольдса;
Nu – число Нуссельта;
M – число Маха;
Pe – число Пекле;
Pr – число Прандтля;
Sh – Число Струхаля;
St – число Стантона.

ВВЕДЕНИЕ

Гидравлика – это наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей. Гидравлику подразделяют на гидростатику и гидродинамику. Гидростатика изучает законы равновесия жидкостей, а гидродинамика – законы движения жидкости.

Основоположником гидравлики считается Архимед (250 г. до н. э.), который занимался вопросами гидростатики и плавания. Знаменитые открытия и изобретения, такие как центробежный насос, парашют, анемометр были сделаны еще в эпоху Возрождения знаменитым художником и инженером Леонардо да Винчи. Большой вклад в становлении гидравлики как науки сделан Галилеем, Торричелли, Паскалем, Бернулли, Эйлером, Рейнольдсом, Прантлем, Колмогоровым и др.

Гидравлика непосредственно связана с интенсивно развивающейся в настоящее время наукой – теплотехникой. Основу теплотехники составляют термодинамика и теория тепломассообмена.

Термодинамика – это наука, которая изучает законы взаимопреобразования и передачи энергии.

Исторически термодинамика возникла в результате изучения сравнительно узкого круга вопросов, связанных с теорией работы тепловых двигателей. Большой вклад в становление и развитие термодинамики был сделан Карно, Клапейроном, Клаузиусом, Менделеевым и др.

Теория тепломассообмена рассматривает процессы переноса теплоты в пространстве с неоднородным распределением температур, часто сопровождающееся при этом переносом вещества. Основы теории тепломассообмена были заложены в XVIII – XIX вв. Большой вклад в становлении и развитии науки был сделан Михеевым, Кутателадзе, Леонтьевым и др.

Часть I. ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ

1. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

1.1. Основные физические свойства жидкостей

Обычно под общим названием *жидкости* объединяют капельные жидкости (вода, спирт, керосин и др.) и газы (воздух, метан и др.).

Плотность

Плотностью называется физическая величина, численно равная отношению массы тела к его объему:

$$\rho = \frac{m}{V}, \tag{1.1}$$

где m – масса жидкости, кг; V – объем сосуда, который занимает жидкость, $м^3$.

Сжимаемость

Сжимаемостью называется свойство жидкости изменять свой объем при изменении давления и температуры.

Сжимаемость характеризуется *коэффициентом объемного сжатия* β_V, которое определяет относительное уменьшение объема жидкости при увеличении давления:

$$\beta_V = \frac{dV}{V_0 dp}, \tag{1.2}$$

где V_0 – начальный объем, $м^3$; dV – элементарное изменение объема, $м^3$; dp – элементарное изменение давления, *Па*.

Температурное расширение

Температурное расширение жидкостей характеризуется *коэффициентом температурного расширения* β_T, определяющим увеличение объема жидкости при повышении температуры:

$$\beta_T = \frac{dV}{V_0 dT}, \tag{1.3}$$

где dT – элементарное изменение температуры, *К*.

Силы внутреннего трения (силы вязкости)

При движении реальных жидкостей возникают касательные силы трения.

В плоском потоке с поперечным сдвигом касательное напряжение трения выражается *законом Ньютона*:

$$\tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}, \tag{1.4}$$

где μ – динамический коэффициент вязкости, $Па \cdot с$. Для реальных жидкостей и газов μ зависит от температуры и давления (рис. 1.1).

Зависимость μ от температуры представлена *формулой Сатерленда*:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1,5} \frac{T_0 + T_S}{T + T_S}, \qquad (1.5)$$

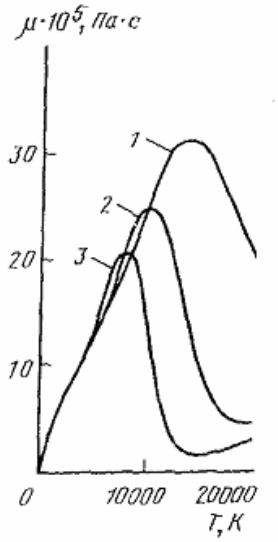


Рис. 1.1. Зависимость μ от температуры и давления для воздуха: 1 – p = 10^7Па; 2 – p = 10^5Па; 3 – p = 10^3Па

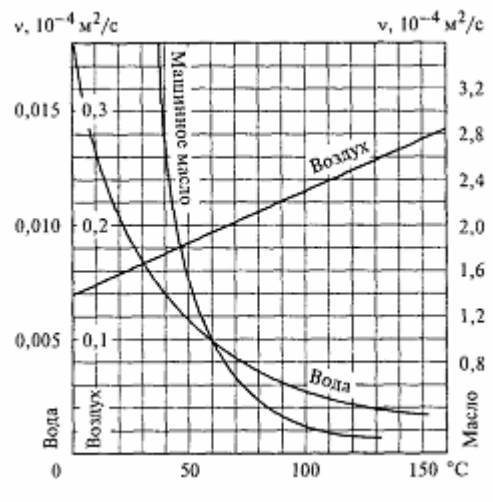


Рис. 1.2. Зависимость ν от температуры для различных веществ

где μ_0 – динамический коэффициент вязкости при некоторой температуре T_0; T_S – постоянная Сатерленда. К примеру, для воздуха $T_S = 122K$.

Кроме динамического коэффициента вязкости при анализе потоков жидкости и газа используется кинематический коэффициент вязкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \qquad (1.5)$$

Кинематический коэффициент вязкости также зависит от температуры (рис. 1.2) и более существенно зависит от давления, в отличие от μ.

Теплопроводность

Теплопроводность представляет собой физическую величину, определяющую способность тел проводить тепло. Теплопроводность зависит от природы вещества, его структуры, температуры и других факторов.

Теплопроводность жидкостей меняется в диапазоне от 0,06 $\frac{Вт}{м \cdot К}$ до 0,7 $\frac{Вт}{м \cdot К}$ (рис. 1.3). С увеличением температуры теплопроводность у всех жидкостей, за исключением воды и глицерина, уменьшается.

Теплопроводность газов примерно меняется в диапазоне от 0,006 $\frac{Вт}{м \cdot К}$ до 0,1 $\frac{Вт}{м \cdot К}$ (рис. 1.4). Исключение составляют водород и гелий, теплопроводность которых в 5 – 10 раз выше, чем у остальных газов.

Согласно молекулярно-кинетической теории теплопроводность определяется формулой

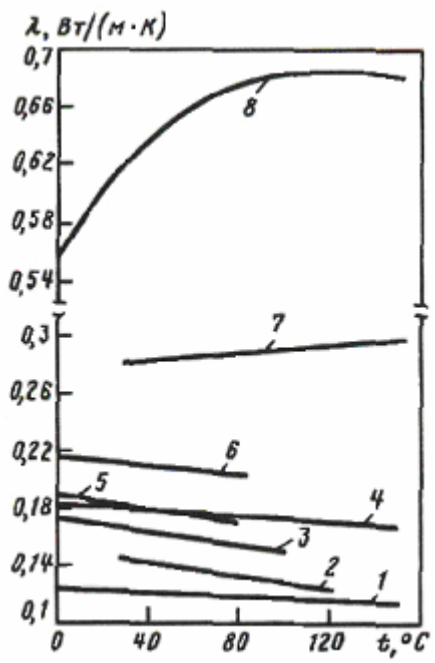


Рис. 1.3. Изменение теплопроводности жидкостей в зависимости от температуры: вазелиновое масло – 1; бензол – 2; ацетон – 3; касторовое масло – 4; этиловый спирт – 5; метиловый спирт – 6; глицерин – 7; вода - 8

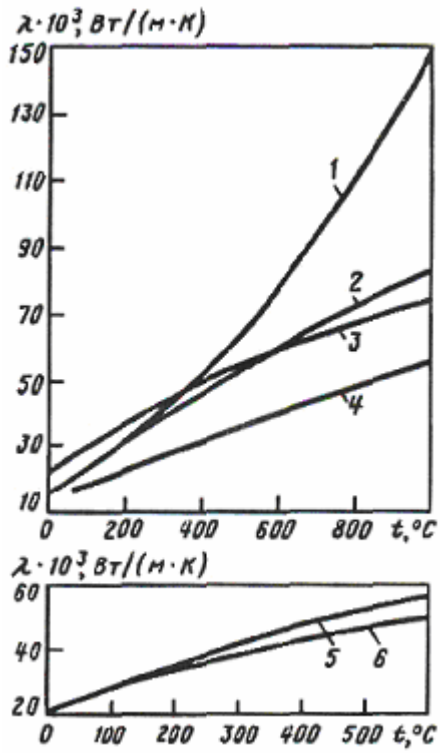


Рис. 1.4. Зависимость теплопроводности от температуры некоторых газообразных веществ: водяной пар – 1; углекислый газ – 2; воздух – 3; аргон – 4; кислород – 5; азот - 6

$$\lambda = \frac{\overline{w}\,\overline{l}\,c_v \rho}{3}, \qquad (1.6)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, $\frac{Вт}{м \cdot К}$; $\overline{w}$ – средняя скорость перемещения молекул, *м/с*; $\overline{l}$ – средняя длина свободного пробега молекул, *м*; c_v – удельная (массовая) изохорная теплоемкость газа $\frac{Дж}{кг \cdot К}$; ρ – плотность.

С увеличением температуры средняя скорость перемещения молекул газа увеличивается и согласно формуле (1.6) увеличивается его теплопроводность.

Более точные результаты зависимости теплопроводности от температуры дает интерполяционная формула

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{273} \right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (1.7)$$

где λ_0 – теплопроводность при $T = 273K$.

Теплопроводность водяного пара и других реальных газов, существенно отличающихся от идеальных, сильно зависит также и от давления.

1.2. Модели жидкости

С целью упрощения решения многих задач вместо реальной жидкости рассматривают ту или иную модель жидкости, которая обладает лишь некоторыми свойствами реальных жидкостей. Эти свойства являются определяющими в решаемой задаче, поэтому подобные упрощения не дают существенных погрешностей определения искомых величин.

Рассмотрим основные существующие модели жидкости.

Идеальная жидкость – это жидкость, лишенная вязкости.

Несжимаемая жидкость – это жидкость, не изменяющая плотности при изменении давления.

Совершенная жидкость – это несжимаемая жидкость, в которой силы сцепления между молекулами отсутствуют, а собственный объем молекул равен нулю.

Совершенный газ – это сжимаемая жидкость (газ), в которой силы сцепления между молекулами отсутствуют, а собственный объем молекул равен нулю.

Идеальный газ – совершенный газ, лишенный вязкости.

Бароклинная жидкость – это газ, плотность которого является функцией давления и температуры.

Баротропная жидкость – это газ, у которого плотность зависит только от давления.

2. ГИДРОСТАТИКА

2.1. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

В покоящейся жидкости выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 2.1). На выделенный объем, в общем случае, действуют внешние массовые (гравитационные или инерционные) и поверхностные силы.

Проанализируем поверхностные силы. На грань *ABFE*, перпендикулярную оси *x*, действует внешняя поверхностная сила $\vec{P}_x(x)$, а на противоположную грань *DCGH* (и в противоположном направлении) – сила $\vec{P}_x(x+dx)$.

$$\vec{P}_x(x) = \vec{p}_x dydz;\ \vec{P}_x(x+dx) = \left(\vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x}dx\right)dydz. \tag{2.1}$$

В уравнении (2.1) $\vec{p}_x$ − вектор результирующего давления, действующего на площадку, перпендикулярную оси *x*.

Таким образом, результирующая поверхностная сила, действующая на перпендикулярные оси *x* грани выделенного объема, равна:

$$\vec{P}_x = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x}dxdydz. \tag{2.2}$$

Аналогично для граней, перпендикулярных осям *y* и *z* можно записать, что

$$\vec{P}_y = \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y}dxdydz; \tag{2.3}$$

$$\vec{P}_z = \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}dxdydz. \tag{2.4}$$

Также на выделенный объем жидкости будет действовать некоторая массовая сила $\vec{R} = \vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z$.

Чтобы жидкость находилась в покое необходимо, чтобы все действующие на выделенный объем жидкости силы компенсировали друг друга:

$$R_x = \frac{\partial p_x}{\partial x}dxdydz;$$

$$R_y = \frac{\partial p_y}{\partial y}dxdydz; \tag{2.5}$$

$$R_z = \frac{\partial p_z}{\partial z}dxdydz.$$

Если проекции массовой силы записать в виде

$$R_x = Xdxdydz;\ R_y = Ydxdydz;\ R_z = Zdxdydz. \tag{2.6}$$

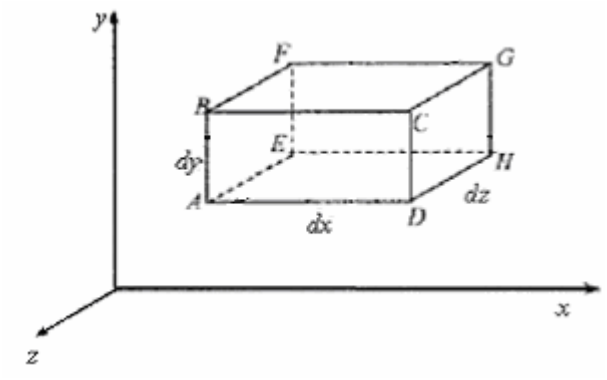


Рис. 2.1. Выделение элементарного объема

Тогда уравнения (2.9) будут иметь вид

$$X = \frac{\partial p_x}{\partial x};\ Y = \frac{\partial p_y}{\partial y};\ Z = \frac{\partial p_z}{\partial z}. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.7) представляют собой *уравнения равновесия* сплошной среды. При отсутствии массовых сил ($X = 0;\ Y = 0;\ Z = 0$) выражения (2.7) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{2.8}$$

Выражения (2.8) представляют собой математическую запись *закона Паскаля*, который гласит, что *при отсутствии массовых сил давление жидкости или газа остается постоянным во всех точках анализируемой области*.

2.2. Гидростатический закон. Гидростатическое давление

Рассмотрим случай массовой силы представляющей собой силу тяжести и направим ось x по нормали к поверхности Земли, противоположно этой силе, тогда

$$X = -\rho g;\ Y = 0;\ Z = 0, \tag{2.9}$$

где g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости. Знак минус свидетельствует о противоположном направлении оси x и вектора силы тяжести.

Тогда уравнение равновесия будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g. \tag{2.10}$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$p - p_0 = -\rho g(x - x_0), \tag{2.11}$$

где p_0 – давление жидкости в сечении $x = x_0$.

Если за исходное сечение принять поверхность уровня жидкости ($x_0 = 0$), а за $h = x - x_0$ – высоту столба жидкости, то получим выражение, представляющее собой *гидростатический закон*:

$$p = p_0 + \rho g h . \qquad (2.12)$$

В уравнение (2.12) давление, пропорциональное плотности жидкости и высоте столба жидкости ($p = \rho g h$), представляет собой *гидростатическое давление*.

Гидростатическим давлением называют давление, которое оказывает жидкость на некоторую опору или поверхность, выделенную в толще жидкости.

Выделяют следующие свойства гидростатического давления:

1. *Гидростатическое давление направлено всегда по внутренней нормали к площадке, на которую давление действует*;

2. *Гидростатическое давление в любой точке жидкости (на одной высоте) по всем направлениям одинаково*.

Следует отметить, что выражение (2.12) имеет место не только в поле силы тяжести, но и любой другой внешней массовой силы, имеющей потенциал *U*. Таким образом, все рассмотренные выражения преобразуются в выражения вида

$$X = \frac{\partial U}{\partial x};\ Y = \frac{\partial U}{\partial y};\ Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x};\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y};\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (2.14)$$

После интегрирования (2.14) получаем

$$U - U_0 = p - p_0, \qquad (2.15)$$

или

$$p - U = const . \qquad (2.16)$$

Уравнение (2.16) называют *основным уравнением равновесия* сплошной среды.

2.3. Условия равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах

Сообщающимися сосудами называют сосуды, соединенные друг с другом таким образом, чтобы жидкость свободно перетекала из одного сосуда в другой.

Закон сообщающихся сосудов гласит: *в открытых сообщающихся сосудах при равновесии жидкости давление на любом горизонтальной уровне одинаково.*

Если в открытые сообщающиеся сосуды налита одинаковая жидкость, то независимо от формы сосудов жидкость в обоих сосудах жидкость будет находится на одном уровне (рис. 2.2).

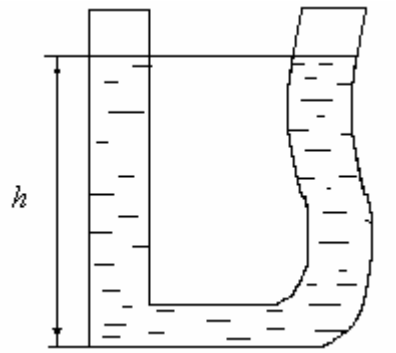


Рис. 2.2. Сообщающиеся сосуды с одинаковой жидкостью

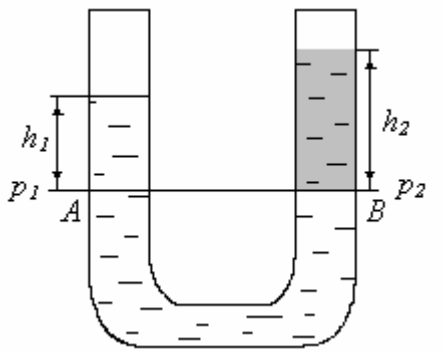


Рис. 2.3. Сообщающиеся сосуды с двумя несмешивающимися жидкостями

Если заполнить открытые сообщающиеся сосуды двумя несмешивающимися жидкостями, имеющими плотности ρ_1 и ρ_2, например, ртутью и водой (рис. 2.3), то жидкость также распределится таким образом, чтобы давления этих жидкостей на любом горизонтальной уровне в обоих сосудах было одинаково. Выберем горизонтальный уровень жидкости AB, ниже которого жидкость однородна (рис. 2.3). Тогда $p_1 = p_2$.

$$p_1 = p_{атм} + \rho_1 g h_1;$$
$$p_2 = p_{атм} + \rho_2 g h_2. \qquad (2.17)$$

Откуда следует, что

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}. \qquad (2.18)$$

Уравнение (2.18) представляет собой *условие равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах*.

На законе сообщающихся сосудов основано действие шлюзов, фонтанов и других устройств.

2.4. Простейшие гидравлические машины

Передача давления и энергии при помощи жидкости часто находит применение в практике машиностроения. Встречаются следующие так называемые простейшие гидравлические машины: гидравлические прессы, домкраты, подъемники и др. во всех этих машинах, имеющих разное назначение и различную конструкцию, используется один и тот же гидравлический принцип.

На рис. 2.4. показана схема гидравлического пресса.

Если к поршню, имеющему площадь F_1, приложить некоторую силу, то эта сила будет передаваться на жидкость, и с такой же силой жидкость будет действовать на поршень, площадью F_2.

Таким образом, из равенства сил давления следует, что

$$p_1 F_1 = p_2 F_2. \qquad (2.19)$$

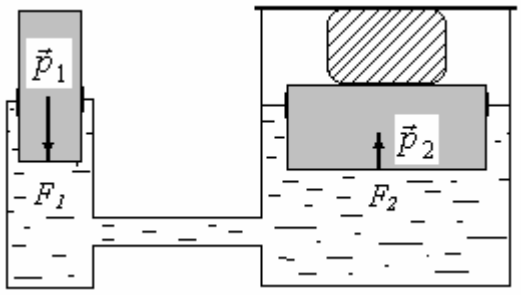


Рис. 2.4. Схема гидравлического пресса

Тогда

$$p_2 = p_1 \frac{F_1}{F_2}. \tag{2.20}$$

Следовательно, сжатие тела будет происходить под действием некоторого давления p_2, которое непосредственно будет зависеть от отношения площадей двух поршней.

2.5. Основные методы и приборы измерения давления

Одним из первых измерил атмосферное давление итальянский ученый Торричелли. Метод его измерения состоял в следующем. Стеклянная трубка наполнялась жидкостью (чаще всего ртутью), затем трубка закрывалась и переворачивалась в открытую чашу с той же жидкостью (рис. 2.5). Под действием силы тяжести часть жидкости выливалась, а когда давление жидкости в трубке на уровне открытой поверхности жидкости в чаше становилось равным атмосферному давлению, жидкость переставала выливаться. Таким образом, устанавливалась определенная высота столба жидкости, по которой можно было судить о величине атмосферного давления

$$p_{атм} = \rho g h, \tag{2.21}$$

где $p_{атм}$ – атмосферное давление; ρ – плотность жидкости; h – высота столба жидкости (пьезометрическая высота).

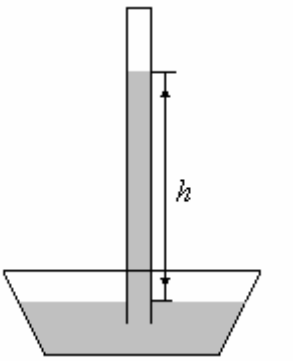


Рис. 2.5. Принцип действия жидкостного барометра

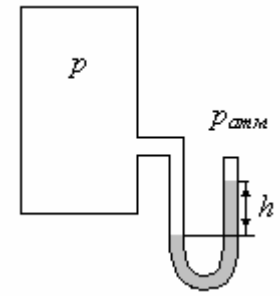


Рис. 2.6. Принцип действия жидкостного манометра

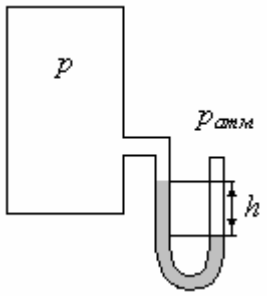


Рис. 2.7. Принцип действия жидкостного вакуумметра

Подобные приборы получили название *жидкостных барометров*, они предназначены для измерения атмосферного (барометрического) давления.

Также для измерения атмосферного давления применяют металлический барометр – *анероид*. Основной частью анероида является металлическая коробочка с гофрированной поверхностью. Из коробочки частично откачен воздух, вследствие чего она реагирует на малейшее изменение атмосферного давления. Прибор градуируется и по величине прогиба поверхности коробочки судят о величине атмосферного давления.

Измерение давления, которое больше атмосферного, можно производить следующим образом. Если требуется измерить давление газа в некотором закрытом баллоне (рис. 2.6), то к баллону присоединяют U-образную стеклянную трубку с некоторой жидкостью (в основном, с ртутью). Так как $p > p_{атм}$, то по закону сообщающихся сосудов, чтобы жидкость находилась в равновесии под действием силы давления атмосферы с одной стороны и под действием силы давления газа с другой, необходимо, чтобы часть жидкости из одной трубки перетекла в другую и давления на любом горизонтальном уровне жидкости выровнялись.

Прибор, измеряющий избыточное (относительно атмосферного) давление, называется *манометром*. В данном случае был рассмотрен принцип действия жидкостного манометра.

Абсолютное давление газа p в баллоне будет вычисляться по формуле:

$$p = p_{атм} + p_{м}; \tag{2.22}$$

$$p_{м} = \rho g h, \tag{2.23}$$

где h – разность уровней жидкости в U-образном жидкостном манометре.

В настоящее время существует большое количество различных манометров. Большое распространение в последнее время получили манометры, работающие на пьезоэффекте, так называемые датчики давления. Принцип действия большинства датчиков давления основан на том, что чувствительная к изменению давления пьезоэлектрическая пластинка вырабатывает электричество. Электрический сигнал при этом фиксируется и по его величине судят о давлении.

Измерение давления, которое меньше атмосферного (вакуум), можно производить аналогичным образом. К закрытому баллону присоединяют U-образную стеклянную трубку с некоторой жидкостью (в основном, с ртутью). Так как $p < p_{атм}$, то разность уровней жидкостей в U-образной трубке h будет показывать недостаточное (относительно атмосферного) давление (рис. 2.7).

Прибор, измеряющий недостаточное давление, называется *вакуумметром*. В данном случае был рассмотрен принцип действия жидкостного вакуумметра.

Абсолютное давление газа p в баллоне будет вычисляться по формуле:

$$p = p_{атм} - p_{в}; \tag{2.24}$$

$$p_{в} = \rho g h, \tag{2.25}$$

где h – разность уровней жидкости в U-образном жидкостном вакуумметре.

2.6. Закон Архимеда

Пусть тело цилиндрической формы погружено в жидкость плотностью ρ так, что его нижнее основание находится на уровне h_2, а верхнее – на уровне h_1 (рис. 2.8). Тогда на верхнее основание цилиндра действует со стороны жидкости сила гидростатического давления $\vec{P}_1$, направленная вертикально вниз, а на нижнее основание цилиндра сила гидростатического давления $\vec{P}_2$, направленная вертикально вверх. Результирующая сил давления $\vec{P}$ будет направлена вверх и равна:

$$P = P_2 - P_1; \tag{2.26}$$

$$P_1 = p_1 F;\ P_2 = p_2 F, \tag{2.27}$$

где p_1, p_2 – гидростатические давления на уровнях h_1 и h_2 соответственно; F – площадь основания цилиндра.

Силы давления можно представить в виде

$$P_1 = \rho g h_1 F;\ P_2 = \rho g h_2 F. \tag{2.28}$$

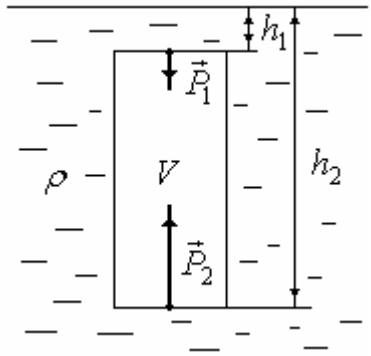


Рис. 2.8. Тело, погруженное в жидкость

Таким образом, результирующая сила

$$P = \rho g F\left(h_2 - h_1\right) = \rho g V, \tag{2.29}$$

где V – объем тела, погруженного в жидкость.

Сила $\vec{P}$ будет представлять собой выталкивающую силу, которую называют *силой Архимеда*.

Закон Архимеда гласит: *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила $\vec{P}$, направленная вертикально вверх и численно равная весу вытесненной жидкости.*

2.7. Равновесие и устойчивость тел, погруженных в жидкость. Равновесие тела, плавающего на поверхности жидкости

Рассмотрим тело, которое погружено в жидкость. При этом на тело будут действовать сила Архимеда $\vec{P}$ и внешняя массовая сила $\vec{G}$.

Точка, к которой приложена сила Архимеда называется *центром давления*.

Внешняя массовая сила приложена к *центру масс* рассматриваемого тела.

Силы $\vec{P}$ и $\vec{G}$, направленные вдоль одной прямой, но в разные стороны (рис. 2.9, а).

Если $G > P$, очевидно, что тело будет двигаться вниз и опуститься на дно. Если $G < P$, то тело будет двигаться вверх и всплывет на поверхность. Если $G = P$, то тело находится в равновесии в толще жидкости.

При условии, что центр давления *D* полностью погруженного в жидкость и находящегося в равновесии тела располагается выше центра масс *C*, то равновесие является *устойчивым* (рис. 2.9, б). В этом случае, если вывести тело из равновесия, то пара сил $\vec{P}$ и $\vec{G}$ создадут момент, возвращающее тело в исходное положение.

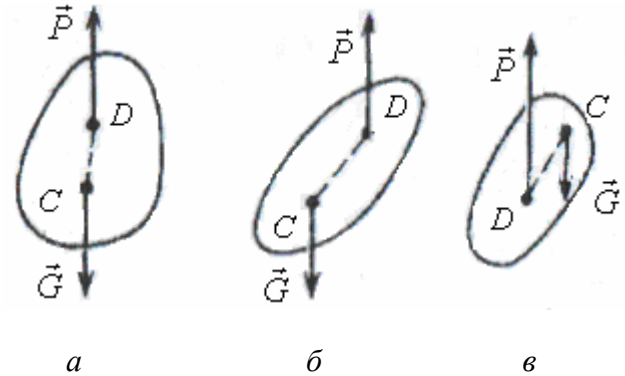
Если центр давления располагается ниже центра масс (рис. 2.9, в), то равновесие является *неустойчивым* и при небольшом отклонении тела от положения равновесия, возникающая пара сил создает *опрокидывающий момент*, способствующий большему отклонению тела от положения равновесия.

Рассмотрим равновесие тела, плавающего на поверхности жидкости (рис. 2.10).

Линия пересечения поверхности тела плоскостью уровня жидкости называется *ватерлинией*, а плоскость, в которой расположена ватерлиния – *плоскостью плавания*.

Нормаль к плоскости плавания, проходящая через центр масс *C* и центр давления *D* называется *осью плавания*.

Необходимым условием равновесия плавающего на поверхности жидкости тела является равенство веса тела архимедовой силе ($G = P$). В этом случае устойчивое равновесие возможно, когда центр давления расположен ниже центра масс.



а *б* *в*

Рис. 2.9. Равновесие тела, погруженного в жидкость

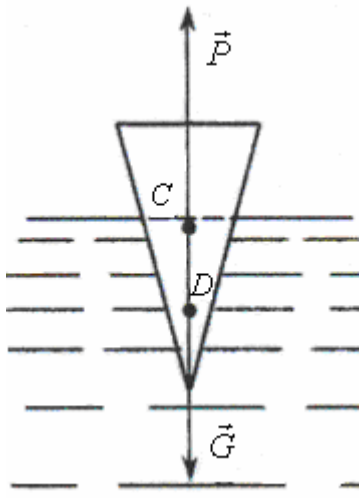


Рис. 2.10. Равновесие тела, плавающего на поверхности жидкости

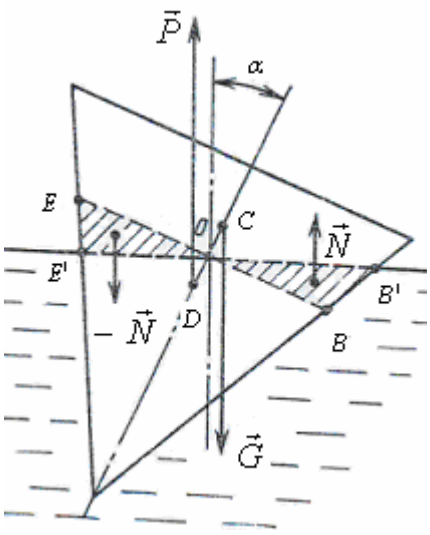


Рис. 2.11. Равновесие наклоненного плавающего на поверхности жидкости тела

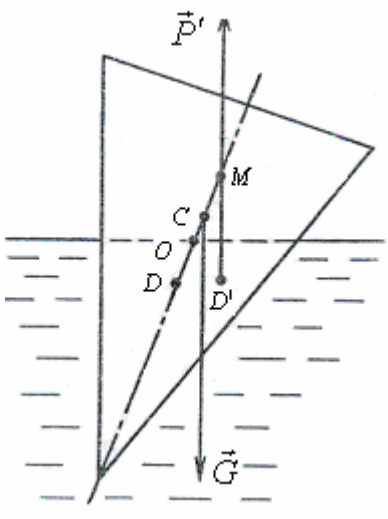


Рис. 2.12. Метацентр и метацентрическая высота плавающего тела

Для определения условий устойчивого равновесия рассмотрим тело (рис. 2.11), отклонившееся от положения равновесия на угол α. В этом случае на затопленную часть тела $BOB^{\backslash}$ действует дополнительная архимедова сила $\vec{N}$, а на осушенную часть – равная по величине силе $\vec{N}$, но противоположно направленная ей сила веса этой части.

В результате на выведенное из положения равновесия тело будут действовать две пары сил ($\vec{P}$, $\vec{G}$), создающая *опрокидывающий момент*, и пара сил ($\vec{N}, -\vec{N}$), создающая *восстанавливающий момент*. Равновесие будет устойчивым, если восстанавливающий момент больше опрокидывающего.

Условие устойчивого равновесия плавающего тела можно сформулировать следующим образом. При отклонении тела от исходного положения центр давления переместится из точки D в точку $D^{\backslash}$ (рис. 2.12). На тело при этом действует пара сил ($\vec{P}'$, $\vec{G}$), где $\vec{P}'$ – архимедова сила, действующая на выведенное из положения равновесия тело. Если прямая, в направлении которой действует сила $\vec{G}$, пересечет ось плавания в точке, расположенной выше центра масс C, то возникшая пара сил создает восстанавливающий момент и равновесие будет устойчивым.

Точка M называется *метацентром*, а отрезок CM – *метацентрической высотой*.

Для устойчивого равновесия плавающего на поверхности тела необходимо и достаточно, чтобы метацентр располагался выше центра масс. Метацентрическая высота при этом принимает положительное значение.

2.8. Равновесие земной атмосферы

Уравнение равновесия атмосферы Земли можно представить уравнением (2.10). Считая воздух идеальным газом и воспользовавшись уравнением состояния идеального газа в виде

$$\rho = \frac{p}{RT}, \tag{2.30}$$

уравнение равновесия можно представить как

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\frac{dx}{T}. \tag{2.31}$$

Если считать, что температура воздуха с высотой не меняется, то интегрирование уравнения (2.31) приводит к уравнению вида

$$ln\frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT}(h - h_0), \tag{2.32}$$

где p_0 – давление на высоте h_0.

Уравнение (2.32) можно записать в виде

$$p = p_0\, exp\left[-\frac{g}{RT}(h - h_0)\right]. \tag{2.33}$$

Если считать, что температура с высотой меняется, то для адиабатного процесса такого изменения, уравнение равновесия будет иметь вид

$$\frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} = -gdx, \tag{2.34}$$

где k – показатель адиабаты (для воздуха k = 1,4).

Интегрируя выражение (2.34) получим

$$p = \left[p_0^{\frac{k-1}{k}} - g\frac{k-1}{k}(h - h_0)\right]^{\frac{k}{k-1}}. \tag{2.35}$$

Возможны и другие зависимости изменения давления с высотой в случае, если температура с высотой изменяется более сложным образом.

3. ГИДРОДИНАМИКА

3.1. Основы кинематики

3.1.1. Линии и трубки тока. Уравнение расхода

Выделим некоторую область пространства, заполненную сплошной средой. Пусть в каждой точке пространства в данный момент времени известны направление и величина скорости. Выберем некоторую точку 1 (рис. 3.1), вектор скорости которой обозначим $\vec{W}_1$. Возьмем точку 2, расположенную на векторе $\vec{W}_1$ вблизи точки 1. Вектор скорости в точке 2 обозначим $\vec{W}_2$. Таким же образом возьмем точку 3 с вектором скорости $\vec{W}_3$ и т. д.

Отрезки между точками 1, 2, 3 образуют ломанную линию. Если провести огибающую векторов скорости, то получим линию, которая называется *линией тока*.

Линия тока – это геометрическое место точек, в которых в данный момент времени различные частицы имеют скорости, направленные по касательной к ней.

Различие между линией тока и траекторией заключается в том, что на линии тока скорости различных частиц среды в данный момент времени направлены по касательным к ней, а на траектории скорость одной и той же частицы в разные моменты времени направлена по касательной к ней (рис. 3.2). При установившемся движении линии тока совпадают с траекториями.

Выделим на линии тока элементарный отрезок *ds*. Найдем проекции на координатные оси *x*, *y*, *z* – *dx*, *dy*, *dz*:

$$cos\left(x\vec{W}\right)=\frac{w_x}{W}=\frac{dx}{ds};\ cos\left(y\vec{W}\right)=\frac{w_y}{W}=\frac{dy}{ds};\ cos\left(z\vec{W}\right)=\frac{w_z}{W}=\frac{dz}{ds}. \qquad (3.1)$$

Таким образом,

$$\frac{ds}{W}=\frac{dx}{w_x}=\frac{dy}{w_y}=\frac{dz}{w_z}. \qquad (3.2)$$

Выражение (3.2) называют *уравнением линии тока*.

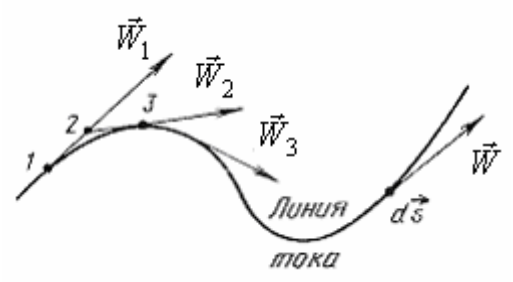


Рис. 3.1. Линия тока

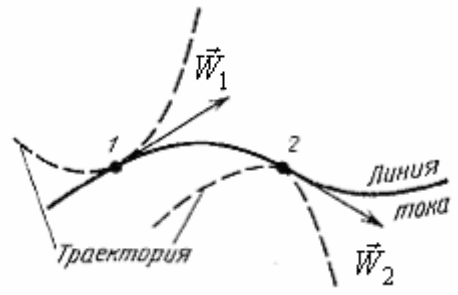


Рис. 3.2. Линия тока и траектория

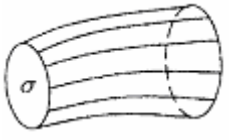


Рис. 3.3. Трубка тока

Выделим в движущейся жидкости замкнутый элементарный контур σ (рис. 3.3) и проведем через каждую его точку линию тока.

Совокупность всех линий тока образует некоторую замкнутую поверхность, которая называется *трубкой тока*.

Жидкость, движущаяся внутри трубки тока, называется *элементарной струйкой*.

В любом сечении элементарной струйки массовый расход жидкости остается неизменным:

$$G = \rho W \sigma = const\,. \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) называют *уравнением массового расхода в элементарной струйке*.

Для несжимаемой жидкости ($\rho = const$):

$$W\sigma = const\,. \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.4) называют *уравнением объемного расхода в элементарной струйке.*

3.1.2. Движение жидкой частицы сплошной среды

Каждый элементарный объем движущейся жидкости участвует в сложном движении. Это движение складывается из *поступательного* движения по траектории, *вращательного* движения относительно собственных осей, *деформационного* движения, обусловленного подвижностью частиц жидкости и возможностью их смещения относительно друг друга.

Теорема Гельмгольца:

Скорость перемещения элементарного объема складывается из скоростей поступательного, вращательного и деформационного движений.

Определим скорости деформаций и вращения частицы.

Рассмотрим элементарный объем жидкости, взятый в форме прямоугольного параллелепипеда. Проекции этого объема на координатную плоскость *xy* в моменты времени, разделенные элементарным промежутком $d\tau$, показаны на рис. 3.4.

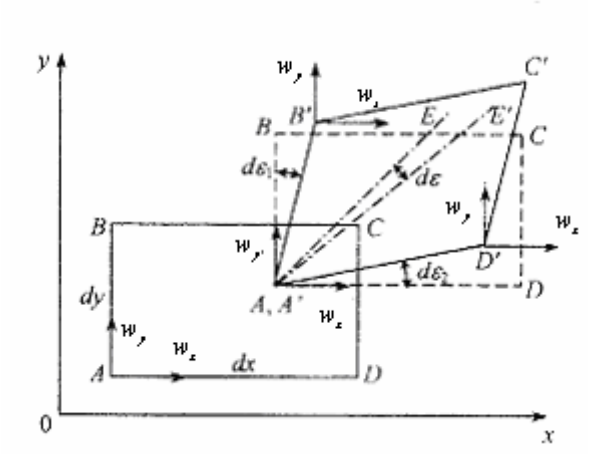


Рис. 3.4. Деформация частицы в процессе движения

На рис. 3.4 $ABCD$ – исходное положение элементарного объема; $A'B'C'D'$ – его положение по истечении времени $d\tau$.

Совместим точки A и A'. В точке A', имеющей координаты x, y, z, составляющие скорости жидкости могут быть выражены как

$$w_{x\,A'} = w_x(x,y,z);\ w_{y\,A'} = w_y(x,y,z);\ w_{z\,A'} = w_z(x,y,z). \tag{3.5}$$

Разложим функции (3.5) в ряд Тейлора с сохранением двух первых членов и выразим продольную и поперечную составляющие скорости жидкости в точках B' и D':

$$w_{x\,B'} = w_{x\,A'} + \frac{\partial w_x}{\partial y}dy;\ w_{y\,B'} = w_{y\,A'} + \frac{\partial w_y}{\partial y}dy. \tag{3.6}$$

$$w_{x\,D'} = w_{x\,A'} + \frac{\partial w_x}{\partial x}dx;\ w_{y\,D'} = w_{y\,A'} + \frac{\partial w_y}{\partial x}dx. \tag{3.7}$$

Скорости линейной деформации частицы в направлении оси x ε_x, оси y ε_y, оси z ε_z представляют собой изменение в единицу времени ее линейных размеров в направлении соответствующих осей, отнесенное к исходному размеру. Для координатных осей x и y, в плоскости xy имеем

$$\varepsilon_x = \frac{(w_{x\,D'} - w_{x\,A'})d\tau}{d\tau\,dx} = \frac{\partial w_x}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{(w_{y\,B'} - w_{y\,A'})d\tau}{d\tau\,dy} = \frac{\partial w_y}{\partial y}. \tag{3.8}$$

По аналогии

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z}. \tag{3.9}$$

Найдем углы $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$. Учитывая малость каждого из них, имеем

$$d\varepsilon_1 = tg(d\varepsilon_1) = \frac{(w_{x\,B'} - w_{x\,A'})d\tau}{dy} = \frac{\partial w_x}{\partial y}d\tau; \tag{3.10}$$

$$d\varepsilon_2 = tg(d\varepsilon_2) = \frac{(w_{y\,D'} - w_{y\,A'})d\tau}{dx} = \frac{\partial w_y}{\partial x}d\tau. \tag{3.11}$$

Скорость угловой деформации частицы ε_{xy}, в плоскости xy представляет собой изменение полусуммы углов $d\varepsilon_1$ и $d\varepsilon_2$ в единицу времени.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2)}{2d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right). \tag{3.12}$$

Аналогично для плоскостей yz и xz.

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right); \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right). \tag{3.14}$$

Совокупность всех скоростей деформации можно представить в виде матрицы *M*, которую называют *тензором скоростей деформации*:

$$M = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial w_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_y}{\partial x} + \dfrac{\partial w_x}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_z}{\partial x} + \dfrac{\partial w_x}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_x}{\partial y} + \dfrac{\partial w_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial w_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_z}{\partial y} + \dfrac{\partial w_y}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_x}{\partial z} + \dfrac{\partial w_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_y}{\partial z} + \dfrac{\partial w_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w_z}{\partial z} \end{Vmatrix}; \qquad (3.15)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx};\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx};\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}. \qquad (3.16)$$

Угловая скорость вращения частицы вокруг оси *z* представляет собой изменение в единицу времени угла поворота $d\varepsilon$ биссектрисы *AE*. Угол принято считать положительным, если поворот осуществляется против часовой стрелки и отрицательным – по часовой стрелки. С учетом принятой системы знаков:

$$d\varepsilon_1 + \angle B'AE' + d\varepsilon = \frac{\pi}{4}; \qquad (3.17)$$

$$d\varepsilon_2 + \angle D'AE' - d\varepsilon = \frac{\pi}{4}. \qquad (3.18)$$

Так как $\angle B'AE' = \angle D'AE'$, получаем

$$d\varepsilon = \frac{\left(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1\right)}{2}. \qquad (3.19)$$

Таким образом, угловая скорость ω_z будет равна

$$\omega_z = \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right). \qquad (3.20)$$

Аналогично определяются угловые скорости ω_x и ω_y:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right); \qquad (3.21)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right). \qquad (3.22)$$

Вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ можно выразить соотношением

$$\vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z. \qquad (3.23)$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен по нормали к плоскости вращения. Удвоенное значение вектора $\vec{\omega}$ называют *вихрем* скорости и обозначают символом $\vec{\Omega}$.

$$\vec{\Omega} = rot\vec{W}. \qquad (3.24)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\Omega};\ \omega_x = \frac{1}{2}\Omega_x;\ \omega_y = \frac{1}{2}\Omega_y;\ \omega_z = \frac{1}{2}\Omega_z. \qquad (3.25)$$

Выразим скорости в произвольной точке 1 через скорости поступательного, деформационного и вращательного движения. Для этого

выразим скорости w_{x1}, w_{y1}, w_{z1} в точке 1 с координатами $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ через скорости w_{x0}, w_{y0}, w_{z0} в точке 0 с координатами x, y, z. Разложим функции w_{x1}, w_{y1}, w_{z1} в ряд Тейлора в окрестности точки 0, ограничившись членами первого порядка, получим

$$\begin{aligned} w_{x1} &= w_{x0} + \frac{\partial w_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w_x}{\partial z}\Delta z; \\ w_{y_1} &= w_{y_0} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w_y}{\partial z}\Delta z; \\ w_{z1} &= w_{z0} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w_z}{\partial z}\Delta z. \end{aligned} \qquad (3.26)$$

Используя предыдущие выражения из (3.26) получаем

$$\begin{aligned} w_{x1} &= w_{x0} + \varepsilon_{xx}\Delta x + \varepsilon_{xy}\Delta y + \varepsilon_{xz}\Delta z + \omega_y\Delta z - \omega_z\Delta y; \\ w_{y_1} &= w_{y_0} + \varepsilon_{yx}\Delta x + \varepsilon_{yy}\Delta y + \varepsilon_{yz}\Delta z + \omega_z\Delta x - \omega_x\Delta z; \\ w_{z1} &= w_{z0} + \varepsilon_{zx}\Delta x + \varepsilon_{zy}\Delta y + \varepsilon_{zz}\Delta z + \omega_x\Delta y - \omega_y\Delta x. \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Формулы (3.27) выражают скорость в произвольной точке 1 потока через скорости поступательного, деформационного и вращательного движения.

3.1.3. Вихревое и безвихревое течение

В зависимости от того, какую величину имеет вектор угловой скорости вращения частиц, течение сплошной среды можно разделить на *вихревое* и *безвихревое (потенциальное)* течение. Вихревое течение имеет место при $\vec{\omega} \neq 0$ ($\vec{\Omega} \neq 0$), а безвихревое – при $\vec{\omega} = 0$ ($\vec{\Omega} = 0$).

Движение вязкой среды всегда является вихревым: из-за внутреннего трения в вязкой жидкости образуются вихревые области, однако при течении вдали от обтекаемой поверхности поток по свойствам приближается к потенциальному.

Для вихревого течения по аналогии с линией тока можно ввести понятие *вихревой линии*. Вихревая линия представляет собой геометрическое место точек, в которых направление вектора угловой скорости вращения частиц (вектора вихря) совпадает с направлением касательной.

Дифференциальное уравнение вихревой линии можно представить в виде

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}. \qquad (3.28)$$

Замкнутую поверхность, образованную вихревыми линиями называют *вихревой трубкой*. Жидкость внутри вихревой трубки образует *вихревой шнур*.

Для безвихревого течения, из условия $\vec{\omega} = 0$, следует

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \qquad (3.29)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}=0;\ \frac{\partial w_z}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial z}=0;\ \frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}=0. \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial y}=\frac{\partial w_y}{\partial z};\ \frac{\partial w_z}{\partial y}=\frac{\partial w_y}{\partial z};\ \frac{\partial w_y}{\partial x}=\frac{\partial w_x}{\partial y}. \tag{3.31}$$

Рассмотрим дифференциальный трехчлен $w_x dx + w_y dy + w_z dz$. Равенства (3.31) являются необходимым и достаточным условиями для того, чтобы этот дифференциальный трехчлен был полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x,y,z)$:

$$w_x dx + w_y dy + w_z dz = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz. \tag{3.32}$$

Таким образом,

$$w_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x};\ w_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};\ w_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{3.33}$$

Функцию $\varphi(x,y,z)$ называют *потенциалом скорости*.

$$\vec{W} = \vec{i}\,w_x + \vec{j}w_y + \vec{k}w_z = \vec{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla\varphi = grad\varphi. \tag{3.34}$$

Практическая важность потенциальных течений видна на примере несжимаемой среды. В уравнение неразрывности, представленной в форме

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{dy}+\frac{\partial w_z}{dz}=0, \tag{3.35}$$

подставим выражения (3.33) и получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=\nabla\varphi=0. \tag{3.36}$$

Уравнение (3.36) называется *уравнением Лапласа*. Таким образом, чтобы определить поле скоростей, достаточно решить это уравнение при соответствующих граничных условиях.

3.1.4. Циркуляция скорости

Внутри конечных объемов жидкости различные частицы вращаются с разными скоростями и могут вращаться даже в разные стороны. Поэтому, в отличие от твердого тела, во всех точках которого угловая скорость одинакова, вращательное движение жидкости нельзя характеризовать вектором угловой скорости. Для этой цели вводится специальная величина, называемая *циркуляцией скорости*.

Циркуляцию скорости можно вычислять по любому участку произвольной кривой, проведенной в жидкости, или по замкнутой кривой. В первом случае ее называют *циркуляцией скорости по дуге*, во втором – *циркуляцией по замкнутому контуру*.

Выделим в движущейся среде замкнутый контур C (рис. 3.5) и выберем на нем точку M, в которой вектор скорости равен $\vec{W}$.

Циркуляция скорости Γ_{AB} по дуге AB определяется выражением

$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{W} d\vec{s} = \int_{AB} W \cos ds . \tag{3.37}$$

Циркуляция скорости Γ_C по замкнутому контуру C определяется выражением

$$\Gamma_C = \oint \vec{W} d\vec{s} = \oint \left(w_x dx + w_y dy + w_z dz \right). \tag{3.38}$$

При вычислении циркуляции по выражениям (3.37) и (3.38) направление интегрирования остается положительным, если ограниченная контуром область интегрирования остается слева.

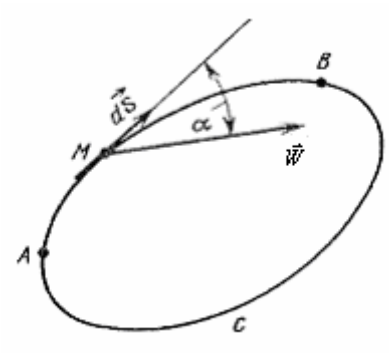


Рис. 3.5. Деформация частицы в процессе движения

В случае потенциального движения

$$\Gamma = \int_{AB} grad\varphi \, d\vec{s} = \int_{AB} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_{AB} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A . \tag{3.39}$$

Таким образом, в этом случае циркуляция скорости не зависит от формы пути интегрирования, а определяется значениями потенциала скорости на ее концах. Если контур замкнутый, то $\Gamma = 0$.

3.2. Основы динамики

3.2.1. Силы, действующие на частицу сплошной среды. Напряженное состояние элементарного объема. Закон трения Стокса

Динамика изучает движение потоков с учетом сил, действием которых оно обусловлено.

Среди сил, действующих на анализируемый объем сплошной среды, можно выделить силы *массовые (объемные)* и *поверхностные*.

Массовые силы действуют на каждую частицу выделенного объема (гравитационные, электромагнитные силы и т. д.).

Поверхностные силы действуют только на частицы, расположенные на поверхности анализируемого объема (сила поверхностного натяжения и т. д.).

Отношение силы к площади поверхности, на которую она действует, называется *напряжением*.

Напряжение называется *нормальным* σ, если оно направлено по нормали к анализируемой поверхности.

Напряжение называется *касательным* τ, если оно направлено по касательной к анализируемой поверхности.

Нормальное напряжение вдоль оси x (действующее на площадку, перпендикулярную оси x) обозначают σ_x. Аналогично σ_y, σ_z.

Касательные напряжения записываются с двумя индексами, например, τ_{xy}, первый индекс указывает, какой оси перпендикулярна выделенная площадка, а второй – в направлении какой координатной оси действует рассматриваемое касательное напряжение.

Таким образом, в направлении каждой координатной оси действуют нормальная и две касательных составляющих напряжения. Так в направлении осей x, y, z действуют следующие составляющие напряжения соответственно:

$$\begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Vmatrix}. \tag{3.40}$$

Выражение (3.40) представляет собой *тензор напряжений*.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \tau_{xz} = \tau_{zx};\ \tau_{zy} = \tau_{yz}. \tag{3.41}$$

Таким образом, тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали

$$\begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Vmatrix}. \tag{3.42}$$

В невязкой жидкости касательные напряжения равны нулю

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0. \tag{3.43}$$

Также уравнение (3.43) справедливо для вязкой, но покоящейся жидкости. Для этих случаев также верно

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \tag{3.44}$$

где p – давление, действующее на выделенный элемент противоположно по знаку напряжениям σ, поскольку давление создает напряжение сжатия, а положительными принято считать растягивающие напряжения.

Из формулы (3.44) следует, что

$$p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \tag{3.45}$$

Таким образом, в вязкой покоящейся или невязкой (покоящейся или движущейся) жидкости силы трения не возникают, напряжения определяются

гидростатическим давлением. Для этих случаев тензор напряжений принимает вид

$$\begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}. \tag{3.46}$$

Нормальные напряжения в движущейся вязкой жидкости можно выразить зависимостями:

$$\sigma_x = -p + \Delta p_x;\ \sigma_y = -p + \Delta p_y;\ \sigma_z = -p + \Delta p_z; \tag{3.47}$$

где Δp_x, Δp_y, Δp_z – дополнительные давления в направлении координатных осей *x, y, z*, обусловленное влиянием вязкости.

Таким образом, закон трения Ньютона (1.4) для плоского потока можно обобщить на пространственное течение.

Для *ньютоновской* жидкости, у которой связь между напряжением и скоростью деформации линейна, такой обобщенный закон трения можно представить в виде

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu div\vec{W} + 2\mu\frac{\partial w_x}{\partial x};\ \tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right);$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu div\vec{W} + 2\mu\frac{\partial w_y}{\partial y};\ \tau_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right); \tag{3.48}$$

$$\sigma_z = -p - \frac{2}{3}\mu div\vec{W} + 2\mu\frac{\partial w_z}{\partial z};\ \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right).$$

$$div\vec{W} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}. \tag{3.49}$$

Уравнения (3.48) носят название *закон трения Стокса*.

Для несжимаемой жидкости $div\vec{W} = 0$, поэтому выражения (3.48) упрощаются.

3.2.2. Дифференциальное уравнение неразрывности

Выделим в движущемся потоке элементарный объем в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.6) и определим изменение массы *dm* жидкости в выделенном объеме за элементарный промежуток времени $d\tau$. Это изменение массы определяется разностью между втекающей и вытекающей массой жидкости через грани элементарного объема. Поскольку объем выделенного элемента $V = dxdydz$ остается неизменным с течением времени, то изменение массы жидкости *dm* может быть обусловлено лишь изменением ее плотности $d\rho$

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{d(\rho V)}{d\tau} = V\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau}dxdydz. \tag{3.50}$$

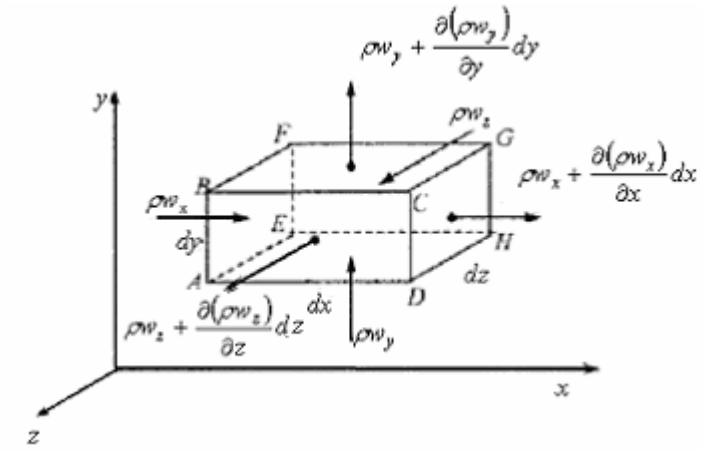


Рис. 3.6. Выделение элементарного объема в движущемся потоке

Определим массу жидкости, втекающую в выделенный объем за единицу времени.

Жидкость втекает через грани *ABFE*, *AEHD* и *EFGH* в следующих количествах: через грань *ABFE* – $\rho w_x dydz$; через грань *AEHD* – $\rho w_y dxdz$; через грань *EFGH* – $\rho w_z dxdy$.

Жидкость вытекает через грани *DCGF*, *BCGF* и *ABCD* в следующих количествах: через грань *DCGH* – $\left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}dx\right]dydz$; через грань *BCGF* – $\left[\rho w_y + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}dy\right]dxdz$; через грань *ABCD* – $\left[\rho w_z + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}dz\right]dxdy$.

Просуммировав количества втекающей и вытекающей жидкости по всем граням, найдем изменение массы жидкости в выделенном объеме:

$$\frac{d\rho}{d\tau}dxdydz = -\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right]dxdydz; \tag{3.51}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \tag{3.52}$$

Уравнение (3.52) называется *дифференциальным уравнением неразрывности* или *сплошности*. Оно также может быть записано в виде

$$\frac{d\rho}{d\tau} + div\left(\rho\vec{W}\right) = 0. \tag{3.53}$$

Для потоков несжимаемой жидкости (стационарных и нестационарных) уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{dy} + \frac{\partial w_z}{dz} = 0; \tag{3.54}$$

$$div\vec{W} = 0. \tag{3.55}$$

Для стационарных потоков газа (сжимаемой жидкости) уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=0; \tag{3.56}$$

$$div\left(\rho\vec{W}\right)=0. \tag{3.57}$$

Необходимо отметить, что существуют и другие способы вывода уравнения неразрывности.

3.2.3. Дифференциальные уравнения переноса количества движения. Уравнения Эйлера и Навье-Стокса

Рассмотрим движение сплошной среды, предполагая скорость, плотность, напряжения и массовые силы непрерывными функциями времени и координат. В декартовой системе координат выделим элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.6). К выделенному объему применяется закон сохранения количества движения, в соответствии с которым, изменение за определенный промежуток времени количества движения жидкости в элементарном объеме, равно импульсу внешних сил, действующих на этот объем.

Изменение количества движения в выделенном объеме происходит за счет изменения плотности жидкости и ее скорости, так и за счет разницы между втекающим и вытекающим количеством движения через границы этого объема.

Уравнение движения удобно рассматривать в проекциях на координатные оси *x, y, z*. Для получения проекций уравнения движения на каждую координатную ось применим закон сохранения количества движения к граням выделенного объема, перпендикулярным соответствующей оси.

Рассмотрим сначала грань *ABFE*, перпендикулярную оси *x*, и определим составляющие потока количества движения через нее за время $d\tau$ в направлении координатных осей *x, y, z*:

$$\begin{aligned} I_{xx}(x)&=\rho w_x w_x dydzd\tau=i_{xx}dydzd\tau;\\ I_{xy}(x)&=\rho w_x w_y dydzd\tau=i_{xy}dydzd\tau;\\ I_{xz}(x)&=\rho w_x w_z dydzd\tau=i_{xz}dydzd\tau. \end{aligned} \tag{3.58}$$

где i_{xx}, i_{xy}, i_{xz} – составляющие потока импульса через грань, имеющую площадь, равную 1 и перпендикулярную оси *x*, за единицу времени в направлении координатных осей *x, y, z* соответственно.

Потоки количества движения через грань *DCGH* можно выразить зависимостями:

$$I_{xx}(x+dx)=\left[\rho w_x w_x+\frac{\partial(\rho w_x w_x)}{\partial x}dx\right]dydzd\tau=\left(i_{xx}+\frac{\partial i_{xx}}{\partial x}dx\right)dydzd\tau;$$

$$I_{xy}(x+dx)=\left[\rho w_x w_y+\frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial x}dx\right]dydzd\tau=\left(i_{xy}+\frac{\partial i_{xy}}{\partial x}dx\right)dydzd\tau; \qquad (3.59)$$

$$I_{xz}(x+dx)=\left[\rho w_x w_z+\frac{\partial(\rho w_x w_z)}{\partial x}dx\right]dydzd\tau=\left(i_{xz}+\frac{\partial i_{xz}}{\partial x}dx\right)dydzd\tau.$$

Разница между втекающим (положительным) и вытекающим (отрицательным) количеством движения через грани, перпендикулярные оси *x*, в направлениях осей *x, y, z* определяется как

$$\Delta I_{xx}=I_{xx}(x)-I_{xx}(x+dx)=-\frac{\partial(\rho w_x w_x)}{\partial x}dxdydzd\tau;$$

$$\Delta I_{xy}=I_{xy}(x)-I_{xy}(x+dx)=-\frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial x}dxdydzd\tau; \qquad (3.60)$$

$$\Delta I_{xz}=I_{xz}(x)-I_{xz}(x+dx)=-\frac{\partial(\rho w_x w_z)}{\partial x}dxdydzd\tau.$$

Аналогично определяются изменения составляющих количества движения через грани перпендикулярные осям *y* и *z*:

$$\Delta I_{yx}=I_{yx}(y)-I_{yx}(y+dy)=-\frac{\partial(\rho w_y w_x)}{\partial y}dxdydzd\tau;$$

$$\Delta I_{yy}=I_{yy}(y)-I_{yy}(y+dy)=-\frac{\partial(\rho w_y w_y)}{\partial y}dxdydzd\tau; \qquad (3.61)$$

$$\Delta I_{yz}=I_{yz}(y)-I_{yz}(y+dy)=-\frac{\partial(\rho w_y w_z)}{\partial y}dxdydzd\tau.$$

$$\Delta I_{zx}=I_{zx}(z)-I_{zx}(z+dz)=-\frac{\partial(\rho w_z w_x)}{\partial z}dxdydzd\tau;$$

$$\Delta I_{zy}=I_{zy}(z)-I_{zy}(z+dz)=-\frac{\partial(\rho w_z w_y)}{\partial z}dxdydzd\tau; \qquad (3.62)$$

$$\Delta I_{zz}=I_{zz}(z)-I_{zz}(z+dz)=-\frac{\partial(\rho w_z w_z)}{\partial z}dxdydzd\tau.$$

Изменение за время $d\tau$ количеств движения в выделенном объеме ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z в направлении осей *x, y, z*, происходящее за счет изменения плотности жидкости и ее скорости, выразим соотношениями вида

$$\Delta I_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial \tau} dxdydzd\tau;$$
$$\Delta I_y = \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial \tau} dxdydzd\tau; \qquad (3.63)$$
$$\Delta I_z = \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial \tau} dxdydzd\tau.$$

На выделенный объем, в общем случае, действуют внешние массовые (гравитационные или инерционные) и поверхностные силы. Найдем проекции импульса массовых сил на оси *x, y, z* за время $d\tau$.

Для внешней массовой силы $\vec{R} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z$, отнесенной к единице объема, имеем

$$I_{Rx} = Xdxdydzd\tau;\ I_{Ry} = Ydxdydzd\tau;\ I_{Rz} = Zdxdydzd\tau. \qquad (3.64)$$

Проанализируем поверхностные силы. На грань *ABFE*, перпендикулярную оси *x*, действует внешняя поверхностная сила $\vec{P}_x(x)$, а на противоположную грань *DCGH* (и в противоположном направлении) – сила $\vec{P}_x(x+dx)$.

$$\vec{P}_x(x) = \vec{p}_x dydz;\ \vec{P}_x(x+dx) = \left(\vec{p}_x + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx\right) dydz. \qquad (3.65)$$

В уравнении (3.65) $\vec{p}_x$ – вектор результирующего напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную оси *x*.

Вектор импульса результирующей поверхностной силы, действующей на перпендикулярные оси *x* грани выделенного объема, $\vec{I}_{Px}$ определяется выражением

$$\vec{I}_{Px} = -\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dxdydzd\tau. \qquad (3.66)$$

Заметим, что направление результирующей поверхностной силы, действующей на перпендикулярные оси *x* грани, так же, как и направление ее импульса, не совпадает с осью *x*.

Аналогично получаются выражения для импульсов результирующей поверхностной силы, действующей на грани, перпендикулярные осям *y* и *z*:

$$\vec{I}_{Py} = -\frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dxdydzd\tau. \qquad (3.67)$$

$$\vec{I}_{Pz} = -\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dxdydzd\tau. \qquad (3.68)$$

Векторы напряжений $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, действующих на перпендикулярные осям *x, y, z* соответственно грани, можно выразить через составляющие тензора напряжений

$$\begin{aligned}\vec{p}_x &= \vec{i}\,\sigma_x + \vec{j}\,\tau_{xy} + \vec{k}\,\tau_{xz};\\ \vec{p}_y &= \vec{i}\,\tau_{xy} + \vec{j}\,\sigma_y + \vec{k}\,\tau_{yz};\\ \vec{p}_z &= \vec{i}\,\tau_{xz} + \vec{j}\,\tau_{yz} + \vec{k}\,\sigma_z.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Суммарный импульс поверхностных сил

$$\vec{I}_P = -\left[\begin{array}{l}\vec{i}\left(\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)+\\ \vec{k}\left(\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)\end{array}\right]\times dxdydzd\tau. \tag{3.70}$$

Таким образом, для различных составляющих закона сохранения количества движения, получаем

$$\begin{aligned}\Delta I_x-\left(\Delta I_{xx}+\Delta I_{yx}+\Delta I_{zx}\right) &= I_{Rx}-\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)dxdydzd\tau;\\ \Delta I_y-\left(\Delta I_{xy}+\Delta I_{yy}+\Delta I_{zy}\right) &= I_{Ry}-\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}\right)dxdydzd\tau;\\ \Delta I_z-\left(\Delta I_{xz}+\Delta I_{yz}+\Delta I_{zz}\right) &= I_{Rz}-\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)dxdydzd\tau.\end{aligned} \tag{3.71}$$

Преобразуя эти уравнения получаем *уравнения движения в напряжениях*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho w_x w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_x w_z)}{\partial z} &= X+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z};\\ \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_y w_z)}{\partial z} &= Y+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z};\\ \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho w_x w_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y w_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z w_z)}{\partial z} &= Z+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Левая часть уравнений (3.72) может быть преобразована как

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho w_x w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_x w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_x w_z)}{\partial z}=\rho\frac{\partial w_x}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+$$
$$+w_x\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_x\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\rho w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}+w_x\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=$$
$$=\rho\left(\frac{\partial w_x}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}\right)+ \qquad (3.73)$$
$$+w_x\left[\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right]$$

Аналогично преобразовываются и два других уравнения.

В соответствии с уравнением неразрывности (3.52) последняя сумма в выражении (3.73), стоящая в квадратных скобках, равна нулю. Обозначим

$$\frac{Dw_x}{d\tau}=\frac{\partial w_x}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}, \qquad (3.74)$$

где $\frac{Dw_x}{d\tau}$ – субстанциальная производная.

Таким образом, получаем уравнения движения в форме *уравнений Навье-Стокса*:

$$\rho\frac{Dw_x}{d\tau}=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial w_x}{\partial x}-\frac{2}{3}div\vec{W}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{dx}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{dx}\right)\right];$$
$$\rho\frac{Dw_y}{d\tau}=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{dx}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial w_y}{\partial y}-\frac{2}{3}div\vec{W}\right)\right]+ \qquad (3.75)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{dy}\right)\right];$$
$$\rho\frac{Dw_z}{d\tau}=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{dx}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{dy}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w_z}{\partial z}-\frac{2}{3}div\vec{W}\right)\right]$$

Система уравнений (3.75) описывает движение вязкой сжимаемой жидкости (газа). Для несжимаемой жидкости $div\vec{W}=0$, поэтому уравнения Навье-Стокса упрощаются

$$\rho\frac{Dw_x}{d\tau}=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right);$$
$$\rho\frac{Dw_y}{d\tau}=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right); \qquad (3.76)$$
$$\rho\frac{Dw_z}{d\tau}=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right).$$

Для идеальной среды $\mu=0$ из уравнений (3.76) получим

$$\rho\frac{Dw_x}{d\tau}=X-\frac{\partial p}{\partial x};\ \rho\frac{Dw_y}{d\tau}=Y-\frac{\partial p}{\partial y};\ \rho\frac{Dw_z}{d\tau}=Z-\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (3.77)$$

или

$$\frac{\partial w_x}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_x}{\partial z}=\frac{1}{\rho}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$
$$\frac{\partial w_y}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}=\frac{1}{\rho}Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad (3.78)$$
$$\frac{\partial w_z}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Эйлера* и описывают движение идеальной сплошной среды.

3.2.4. Дифференциальное уравнение энергии

Рассмотрим движение сплошной среды, полагая скорость, плотность, напряжения и массовые силы непрерывными функциями времени и координат. В декартовой системе координат выделим элемент в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.6). К выделенному объему применяется закон сохранения полной энергии E, включающий внутреннюю u и кинетическую $\frac{W^2}{2}$ энергию (энергия отнесена к единице массы среды). Изменение за определенный промежуток времени количества энергии жидкости в элементарном объеме равно работе L внешних сил, действующих на этот объем, подводимому (отводимому) количеству теплоты Q_τ и выделившемуся количеству теплоты при наличии внутренних источников тепла $Q_{V\tau}$:

$$\rho\frac{DE}{d\tau}dxdydz=L+Q_\tau+Q_{V\tau}. \qquad (3.79)$$

Работу внешних массовых сил выразим формулой вида

$$L_м = \left(Xw_x + Yw_y + Zw_z\right)dxdydzd\tau . \tag{3.80}$$

Определим работу нормальных и касательных сил, действующих на грани выделенного объема. Действие на грань *ABFE* нормальных напряжений обуславливает работу

$$L_{\sigma x}(x) = -\sigma_x w_x dydzd\tau . \tag{3.81}$$

На грань противоположную грань *DCGH*:

$$L_{\sigma x}(x+dx) = \left[\sigma_x w_x + \frac{\partial(\sigma_x w_x)}{\partial x}dx\right]dydzd\tau . \tag{3.82}$$

Работа сжимающих напряжений считается отрицательной, а растягивающих – положительной.

Результирующая работа нормальных напряжений, действующих на грани, перпендикулярные оси *x*:

$$L_{\sigma x} = L_{\sigma x}(x) + L_{\sigma x}(x+dx) = \frac{\partial(\sigma_x w_x)}{\partial x}dxdydzd\tau . \tag{3.83}$$

Аналогично определяется результирующая работа касательных напряжений, действующих на грани, перпендикулярные оси *x*:

$$L_{\tau xy} = \frac{\partial(\tau_{xy} w_y)}{\partial x}dxdydzd\tau ; \tag{3.84}$$

$$L_{\tau xz} = \frac{\partial(\tau_{xz} w_z)}{\partial x}dxdydzd\tau . \tag{3.85}$$

Аналогичные рассуждения проводятся применительно к граням, перпендикулярным осям *y* и *z*.

Таким образом, работа поверхностных сил будет определяться выражением вида

$$L_n = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x w_x + \tau_{xy} w_y + \tau_{xz} w_z\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy} w_x + \sigma_y w_y + \tau_{yz} w_z\right) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz} w_x + \tau_{yz} w_y + \sigma_z w_z\right) \end{array}\right] dxdydzd\tau . \tag{3.86}$$

Работа *L* внешних сил определяется как

$$L = L_м + L_n . \tag{3.87}$$

Количество теплоты, подведенное через к выделенному объему, перпендикулярно оси *x*, через грань *ABFE*:

$$Q_{\tau x}(x) = q_x dydzd\tau , \tag{3.88}$$

где q_x – плотность теплового потока, направленная вдоль оси *x*, $Вт/м^2$.

Количество теплоты, отведенное через грань *DCGH*:

$$Q_{\tau x}(x+dx) = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dydzd\tau . \tag{3.89}$$

Результирующее количество теплоты, подведенное через грани, перпендикулярные оси *x*:

$$Q_{\tau x} = Q_{\tau x}(x) - Q_{\tau x}(x+dx) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydzd\tau . \tag{3.90}$$

Аналогично определяется результирующее количество теплоты, подведенное через остальные грани, перпендикулярные осям *y* и *z*.

Результирующее количество теплоты, подведенное к выделенному объему будет иметь вид

$$Q_\tau = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dxdydzd\tau . \tag{3.91}$$

С учетом *закона Фурье*:

$$q = -\lambda \, gradT , \tag{3.92}$$

где λ – коэффициент теплопроводности; $gradT = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial x}\vec{k}$ – температурный градиент. Подробно закон Фурье будет рассмотрен в третьей части пособия, посвященной теории тепломассообмена.

Уравнение (3.91) можно представить в виде

$$Q_\tau = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dxdydzd\tau . \tag{3.93}$$

При наличии внутренних источников теплоты

$$Q_{V\tau} = q_V dxdyd\tau , \tag{3.94}$$

где q_V – мощность внутренних источников теплоты.

Таким образом, *дифференциальное уравнение энергии* будет иметь вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\left(u + \frac{W^2}{2} \right)}{d\tau} &= Xw_x + Yw_y + Zw_z + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x w_x + \tau_{xy} w_y + \tau_{xz} w_z \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy} w_x + \sigma_y w_y + \tau_{yz} w_z \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz} w_x + \tau_{yz} w_y + \sigma_z w_z \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V \end{aligned} . \tag{3.95}$$

Используя закон трения Стокса, а также пренебрегая изменением во времени кинетической энергии и действием массовых сил можно получить

$$\rho \frac{Du}{d\tau} = -p div\vec{W} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V + \Phi . \tag{3.96}$$

В уравнении (3.96) Φ – диссипативная функция, которая при $\mu = const$ определяется выражением вида

$$\Phi = \mu\left\{\begin{array}{l} 2\left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+ \\ +\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}+\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2 \end{array}\right\}. \quad (3.97)$$

Дифференциал внутренней энергии определяется как

$$du = d(cT), \quad (3.98)$$

где c – удельная теплоемкость жидкости.

Для несжимаемой среды $div\vec{W} = 0$, дифференциальное уравнение энергии будет иметь вид

$$\rho\frac{D(cT)}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V+\Phi. \quad (3.99)$$

Значение функции Φ обычно невелико и в большинстве случаев ей пренебрегают.

Для среды с постоянными теплофизическими свойствами дифференциальное уравнение энергии можно представить в виде

$$\rho c\frac{DT}{d\tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+q_V. \quad (3.100)$$

Обозначив за $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – *коэффициент температуропроводности*, получим

$$\frac{DT}{d\tau} = a\nabla^2 T+\frac{q_V}{\rho c}, \quad (3.101)$$

где $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

Следует отметить, что при условии рассмотрения закона сохранения и превращения энергии какого-либо газа, в уравнениях (3.99) – (3.101) используется удельная изобарная теплоемкость c_p.

При отсутствии внутренних источников тепла дифференциальное уравнение энергии упрощается за счет того, что $q_V = 0$.

3.3. Движение вязкого потока

3.3.1. Режимы течения жидкости

Известны два основных режима течения вязкой жидкости: *ламинарный* и *турбулентный*. Первое систематическое исследование этих режимов течения выполнил английский физик Рейнольдс (1883 г.).

Исследованиями Рейнольдса было установлено, что при относительно небольших скоростях движения потока каждая частица жидкости движется по своей траектории, не перемешиваясь с другими частицами. Такое течение было названо слоистым или *ламинарным*.

При достаточно больших скоростях движения потока на основное движение частиц накладываются хаотические поперечные перемещения (*пульсации*), приводящие к перемешиванию жидкости. Такое течение было названо *турбулентным*.

Исследования также показали, что при возрастании скорости ламинарного потока приводит к возникновению случайных возмущений, которые сначала гасятся или вызывают небольшие колебания струек, но в конечном счете равновесие нарушается и ламинарное течение переходит в турбулентное.

На рис. 3.7. представлены профили скорости при движение жидкости в трубе. При ламинарном режиме каждый слой жидкости движется со своей определенной скоростью, которая достигает максимума в среднем сечении трубы. При турбулентном режиме частицы жидкости движутся с некоторой одинаковой средней скоростью и лишь в пристеночной области скорость жидкости уменьшается.

Рейнольдсом впервые было установлено, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при достижении безразмерным комплексом $Re = \frac{wd}{\nu}$, названным впоследствии *числом Рейнольдса* некоторого предельного значения $Re_{кр}$. Число Рейнольдса включает в себя среднюю скорость движения жидкости w, характерный размер (в данном случае диаметр трубы d), коэффициент кинематической вязкости жидкости ν. Значение $Re_{кр}$ называется *критическим числом Рейнольдса*. Опытами установлено, что при течении жидкости по трубе $Re_{кр} \approx 2000$.

Таким образом, при $Re < Re_{кр}$ в трубе реализуется ламинарный режим течения, при $Re > Re_{кр}$ – турбулентный режим течения.

Дальнейшие исследования показали, что значение критического числа Рейнольдса зависят от условий на входе в трубу. Тщательным устранением возмущений потока на входе удалось сохранить ламинарное течение вплоть до $Re = 40000$.



а *б*

Рис. 3.7. Профиль скорости в трубе: при ламинарном течении жидкости, *а*; при турбулентном течении жидкости, *б*

Опытами установлено также, что при $Re < 2000$ даже самые сильные возмущения потока на входе со временем затухают, и течение остается ламинарным.

Полностью развитое турбулентное течение в трубе имеет место при $Re > 10^4$. В диапазоне $Re = 2000...10000$ режим течения в трубах является *переходным*. Переходный режим течения носит неустойчивый характер. Это означает, что в анализируемой точке пространства ламинарный и турбулентный режимы течения чередуются с некоторым периодом времени τ_n.

Для характеристики переходного режима используется *коэффициент перемежаемости*

$$\gamma = \frac{\tau_m}{\tau_n}, \tag{3.102}$$

где τ_m – продолжительность существования турбулентного режима в течении периода τ_n. Коэффициент перемежаемости изменяется в диапазоне $\gamma = 0...1$, при $\gamma = 0$ имеет место ламинарный режим течения, а при $\gamma = 1$ – турбулентный.

Аналогичные результаты получены при внешнем обтекании тел. Драйден установил, что при обтекании потоком плоской пластины критическое число Рейнольдса находится в пределах $Re_{кр} = (0{,}35...1{,}00) \cdot 10^6$.

3.3.2. Особенности турбулентного течения

Параметры турбулентного потока изменяются во времени неравномерно, поэтому для удобства исследования его параметры представляют как сумму осредненных во времени параметров и их пульсационных составляющих (рис. 3.8). Связь *актуальных* (действительных) величин параметров с осредненными и *пульсационными* составляющими выражается формулами

$$w = \overline{w} + w';\ p = \overline{p} + p';\ T = \overline{T} + T', \tag{3.103}$$

где w, p, T – актуальные значения скорости, давления и температуры соответственно; $\overline{w}$, $\overline{p}$, $\overline{T}$ – осредненные значения скорости, давления, температуры соответственно; w', p', T' – пульсационные составляющие скорости, давления, температуры соответственно.

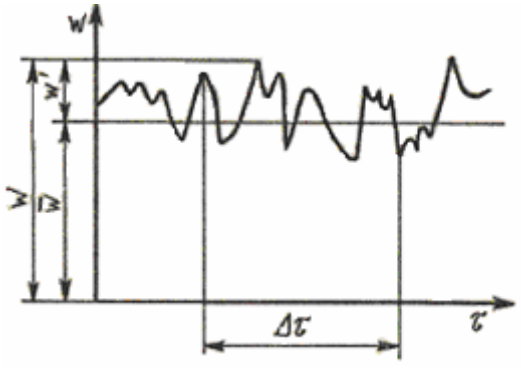


Рис. 3.8. Изменение во времени параметров турбулентного потока

Осредненное значение параметров определяется изменением актуальных параметров во времени

$$\overline{w} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} w d\tau\,;\ \overline{p} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} p d\tau\,;\ \overline{T} = \frac{1}{\Delta\tau}\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} T d\tau\,. \tag{3.104}$$

Из понятия осредненных параметров следует, что осредненные значения пульсационных составляющих параметров равны нулю ($\overline{w'}$, $\overline{T'}$ и т. д.), но среднее значение произведений пульсаций может быть не равно нулю. В этом случае между пульсациями существуют *корреляции* (зависимости), которые имеют важное значение для анализа характеристик потока. Так, произведение $\overline{w'_x w'_y}$ определяет турбулентные касательные напряжения, $\overline{w'_y T'}$ – плотность теплового потока, обусловленную турбулентным переносом теплоты.

Также следует отметить, что повторное осреднение не изменяет результата ($\overline{\overline{w}} = \overline{w}$, $\overline{\overline{T}} = \overline{T}$ и т. д.). Осредненные произведения средней величины и пульсационной также равны нулю ($\overline{\overline{w}w'} = 0$, $\overline{\overline{p}p'} = 0$ и т. д.).

Для количественной оценки пульсационных составляющих скорости движения используется параметр, называемый *степенью турбулентности Tu*. В общем случае неизотропной турбулентности

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{w'^2_x} + \overline{w'^2_y} + \overline{w'^2_z}\right)}}{\overline{w}}, \tag{3.105}$$

где $\overline{w'^2_x}$, $\overline{w'^2_y}$, $\overline{w'^2_z}$ – дисперсии пульсационных составляющих скорости, $\overline{w}$ – осредненная скорость потока.

Для изотропной турбулентности $\overline{w'^2_x} = \overline{w'^2_y} = \overline{w'^2_z} = \overline{w'^2}$

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{\overline{w}}. \tag{3.106}$$

В аэродинамических трубах $Tu \approx 0{,}0002...0{,}01$. В каналах значение *Tu* составляет несколько сотых долей.

Неоднородность скоростного поля может быть обусловлена диссипативными потерями при взаимодействии потока со стенкой. В этом случае турбулентность называют *пристенной*.

Поток может быть турбулентным и до начала взаимодействия его с рассматриваемой поверхностью. Такую турбулентность называют *внешней*.

3.3.3. Уравнения движения и энергии для ламинарного и турбулентного режима течения жидкости

При ламинарном режиме течения уравнения движения и энергии можно записать в форме (3.76), (3.99).

Эти уравнения будут верны и для турбулентного режима течения, при условии, что в уравнениях присутствуют мгновенные значения величин

(скорости, температуры, давления). При этом система дифференциальных уравнений (3.76) и (3.99) с учетом уравнения неразрывности является замкнутой, так как число неизвестных равно числу уравнений. Однако, математическая формулировка задачи остается незамкнутой из-за неопределенности начальных и граничных условий однозначности. Эта неопределенность и составляет физическую суть проблемы замыкания. Решение этой проблемы средствами математики сводится к появлению большого числа расчетов с разными вариантами задания начальных и граничных условий. При этом каждый такой вариант представляет собой совокупность случайных значений параметров, лежащих внутри заданного диапазона их изменения в турбулентном потоке. Этот подход требует выполнения чрезвычайного большого объема вычислительной работы.

Другой подход к проблеме замыкания математической формулировки задачи сводится к замене в дифференциальных уравнениях движения (в форме Навье-Стокса) и энергии, мгновенных значений параметров на сумму осредненных и пульсационных составляющих.

Рассмотрим турбулентное течение несжимаемой жидкости в прямоугольной системе координат. Найдем составляющие потока импульса dI_{xx}, dI_{xy}, dI_{xz} через элементарную площадку dF_x, перпендикулярную оси x, за единицу времени

$$dI_{xx} = \rho w_x w_x dF_x;\ dI_{xy} = \rho w_x w_y dF_x;\ dI_{xz} = \rho w_x w_z dF_x. \qquad (3.107)$$

Осредненные во времени значения потока импульса будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\overline{dI_{xx}} = \rho\overline{(\overline{w}_x + w'_x)(\overline{w}_x + w'_x)}dF_x = \rho\left(\overline{\overline{w}_x^2} + 2\overline{\overline{w}_x w'}_x + \overline{w_x'^2}\right)dF_x = \\
&= \rho\left(\overline{w}_x^2 + \overline{w_x'^2}\right)dF_x \\
&\overline{dI_{xy}} = \rho\overline{(\overline{w}_x + w'_x)(\overline{w}_y + w'_y)}dF_x = \rho\left(\overline{\overline{w}_x\overline{w}_y} + \overline{\overline{w}_x w'_y} + \overline{\overline{w}_y w'}_x + \overline{w'_x w'_y}\right)dF_x = \\
&= \rho\left(\overline{w_x w_y} + \overline{w'_x w'_y}\right)dF_x \\
&\overline{dI_{xz}} = \rho\overline{(\overline{w}_x + w'_x)(\overline{w}_z + w'_z)}dF_x = \rho\left(\overline{\overline{w}_x\overline{w}_z} + \overline{\overline{w}_x w'_z} + \overline{\overline{w}_z w'}_x + \overline{w'_x w'_z}\right)dF_x = \\
&= \rho\left(\overline{w_x w_z} + \overline{w'_x w'_z}\right)dF_x
\end{aligned} \qquad (3.108)$$

Разделив каждую составляющую потока импульса на площадь dF_x получим напряжения (одно нормальное и два касательных к выбранной площадке, перпендикулярной оси x):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\rho\left(\overline{w}_x^2 + \overline{w_x'^2}\right); \\
\tau_{xy} &= -\rho\left(\overline{w_x w_y} + \overline{w'_x w'_y}\right); \\
\tau_{xz} &= -\rho\left(\overline{w_x w_z} + \overline{w'_x w'_z}\right).
\end{aligned} \qquad (3.109)$$

Проводя аналогичные рассуждения для площадок dF_y и dF_z, перпендикулярных осям y и z соответственно, получим еще 6 составляющих напряжения.

Для площадки dF_y:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \tau_{xy} = -\rho\left(\overline{w_x w_y} + \overline{w'_x w'_y}\right);\\ \sigma_y &= -\rho\left(\overline{w}_y^2 + \overline{w'^2_y}\right);\\ \tau_{yz} &= -\rho\left(\overline{w_y w_z} + \overline{w'_y w'_z}\right).\end{aligned} \tag{3.110}$$

Для площадки dF_z:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \tau_{xz} = -\rho\left(\overline{w_x w_z} + \overline{w'_x w'_z}\right);\\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = -\rho\left(\overline{w_y w_z} + \overline{w'_y w'_z}\right);\\ \sigma_z &= -\rho\left(\overline{w}_z^2 + \overline{w'^2_z}\right).\end{aligned} \tag{3.111}$$

Таким образом, наложение пульсационного движения на осредненное приводит к появлению девяти дополнительных напряжений:

$$\begin{Vmatrix}\sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz}\\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz}\\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z\end{Vmatrix} = -\rho\begin{Vmatrix}\overline{w'^2_x} & \overline{w'_x w'_y} & \overline{w'_x w'_z}\\ \overline{w'_x w'_y} & \overline{w'^2_y} & \overline{w'_y w'_z}\\ \overline{w'_x w'_z} & \overline{w'_y w'_z} & \overline{w'^2_z}\end{Vmatrix}. \tag{3.112}$$

Совокупность этих девяти дополнительных напряжений, возникающих в турбулентном потоке, называют *тензором «кажущихся» напряжений* или *напряжениями Рейнольдса*.

Таким образом, уравнение движения для турбулентного потока примут вид

$$\begin{aligned}&\rho\frac{D\overline{w}_x}{d\tau} = X - \frac{\partial\overline{p}}{\partial x} +\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial x} - \rho\overline{w'^2_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial y} - \rho\overline{w'_x w'_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial z} - \rho\overline{w'_x w'_y}\right)\right];\\ &\rho\frac{D\overline{w}_y}{d\tau} = Y - \frac{\partial\overline{p}}{\partial y} +\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_y}{\partial x} - \rho\overline{w'_x w'_y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_y}{\partial y} - \rho\overline{w'^2_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_y}{\partial z} - \rho\overline{w'_y w'_z}\right)\right];\\ &\rho\frac{D\overline{w}_z}{d\tau} = Z - \frac{\partial\overline{p}}{\partial z} +\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial x} - \rho\overline{w'_x w'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial y} - \rho\overline{w'_y w'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\overline{w}_z}{\partial z} - \rho\overline{w'^2_z}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.113}$$

Уравнения (3.113) *уравнениями Рейнольдса*.

Воспользовавшись идеей Ж. Буссинеска, выразим компоненты тензора напряжений соотношениями:

$$\begin{Vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{Vmatrix} = \rho \begin{Vmatrix} \mu_{Txx}\dfrac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} & \mu_{Txy}\dfrac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} & \mu_{Txz}\dfrac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} \\ \mu_{Txy}\dfrac{\partial \overline{w}_y}{\partial x} & \mu_{Tyy}\dfrac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} & \mu_{Tyz}\dfrac{\partial \overline{w}_y}{\partial z} \\ \mu_{Txz}\dfrac{\partial \overline{w}_z}{\partial x} & \mu_{Tyz}\dfrac{\partial \overline{w}_z}{\partial y} & \mu_{Tzz}\dfrac{\partial \overline{w}_z}{\partial z} \end{Vmatrix}, \tag{3.114}$$

где μ_{Tij} – *коэффициенты турбулентного переноса количества движения*.

$$\begin{Vmatrix} \mu_{Txx} & \mu_{Txy} & \mu_{Txz} \\ \mu_{Txy} & \mu_{Tyy} & \mu_{Tyz} \\ \mu_{Txz} & \mu_{Tyz} & \mu_{Tzz} \end{Vmatrix} = -\rho \begin{Vmatrix} \dfrac{\overline{w'^2_x}}{\partial \overline{w}_x} & \dfrac{\overline{w'_x w'_y}}{\partial \overline{w}_x} & \dfrac{\overline{w'_x w'_z}}{\partial \overline{w}_x} \\ \dfrac{\partial x}{\overline{w'_x w'_y}} & \dfrac{\partial y}{\overline{w'^2_y}} & \dfrac{\partial z}{\overline{w'_y w'_z}} \\ \dfrac{\partial \overline{w}_y}{\partial x} & \dfrac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} & \dfrac{\partial \overline{w}_y}{\partial z} \\ \dfrac{\overline{w'_x w'_z}}{\partial \overline{w}_z} & \dfrac{\overline{w'_y w'_z}}{\partial \overline{w}_z} & \dfrac{\overline{w'^2_z}}{\partial \overline{w}_z} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \overline{w}_z} & \dfrac{\partial y}{\partial \overline{w}_z} & \dfrac{\partial z}{\partial \overline{w}_z} \end{Vmatrix}. \tag{3.115}$$

В отличие от динамического коэффициента вязкости μ коэффициент турбулентного переноса μ_{Tij} не является физическим свойством потока.

Таким образом, уравнения Рейнольдса можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho\frac{D\overline{w}_x}{d\tau} &= X - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \left[(\mu + \mu_{Txx})\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + (\mu + \mu_{Txy})\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} + (\mu + \mu_{Txz})\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} \right]; \\ \rho\frac{D\overline{w}_y}{d\tau} &= Y - \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \left[(\mu + \mu_{Txy})\frac{\partial \overline{w}_y}{\partial x} + (\mu + \mu_{Tyy})\frac{\partial \overline{w}_y}{\partial y} + (\mu + \mu_{Tyz})\frac{\partial \overline{w}_y}{\partial z} \right]; \\ \rho\frac{D\overline{w}_z}{d\tau} &= Z - \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \left[(\mu + \mu_{Txz})\frac{\partial \overline{w}_z}{\partial x} + (\mu + \mu_{Tyz})\frac{\partial \overline{w}_z}{\partial y} + (\mu + \mu_{Tzz})\frac{\partial \overline{w}_z}{\partial z} \right]. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Аналогично уравнению движения выводится дифференциальное уравнение энергии для осредненных параметров, при этом оно имеет вид

$$\rho c_p \frac{D\overline{T}}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda + \lambda_{Tx})\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + \lambda_{Ty})\frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda + \lambda_{Tz})\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right], \tag{3.117}$$

где λ_{Ti} – *коэффициенты турбулентного переноса энергии*, которые также не являются физическими свойствами потока.

Коэффициенты турбулентного переноса энергии определяются выражениями:

$$\lambda_{Tx} = -\frac{\rho c_p \overline{w'_x T'}}{\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial x}};\ \lambda_{Ty} = -\frac{\rho c_p \overline{w'_y T'}}{\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial y}};\ \lambda_{Tz} = -\frac{\rho c_p \overline{w'_z T'}}{\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial z}}. \qquad (3.118)$$

Следует отметить, что дифференциальное уравнение неразрывности для осредненных параметров имеет тот же вид, что и для мгновенных значений скоростей потока.

Коэффициенты турбулентного переноса являются величинами неизвестными, поэтому система уравнений для осредненных параметров турбулентного течения является незамкнутой, так как число уравнений больше числа неизвестных. При этом, для замыкания математической формулировки задачи, было разработано большое число эмпирических и полуэмпирических моделей турбулентности.

3.3.4. Модели турбулентности

Незамкнутость математической формулировки задачи турбулентного обмена из-за наличия пульсационных составляющих параметров потока делает невозможным использование чисто аналитического пути решения задачи. Существующие модели турбулентности не позволяют рассчитывать профиль осредненных скоростей и температур или уровень турбулентности в потоке без привлечения опытных данных.

В 1925 г. Л. Прандтль предложил теорию пути смешения, на основе которой характеристики турбулентного переноса удалось связь с распределением осредненной скорости потока.

Рассмотрим плоское движение жидкости, осредненная скорость которой $\overline{w}_x$ изменяется только по координате y (рис. 3.9).

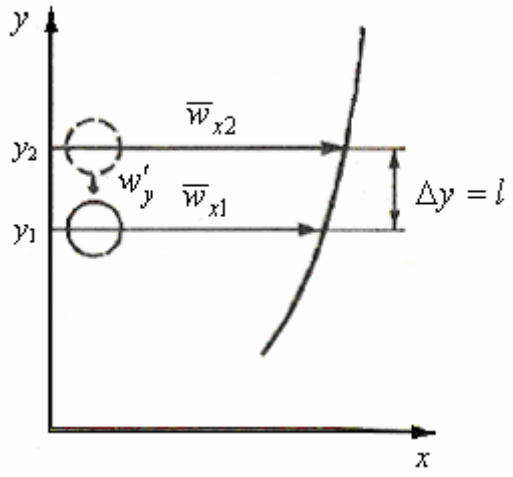


Рис. 3.9. Длина пути смешения

В соответствии с гипотезой Прандтля, комок жидкости, перемещающийся под действием пульсации вдоль оси y сохранит свою индивидуальность (не перемешивается с остальной жидкостью) на расстоянии l, после чего рассеивается. Величина l называется *длиной пути смешения*.

Выделим два слоя жидкости с координатами y_1 и y_2, отстоящие друг от друга на расстоянии $\Delta y = l$. Предположим, что в слое 1, имеющим скорость движения $\overline{w}_{x1}$, возник комок жидкости и, сохраняя x-составляющую своего импульса, в результате пульсации скорости переместился в слой жидкости 2, где жидкость имеет скорость $\overline{w}_{x2}$. В слое 2 разность между скоростью потока $\overline{w}_{x2}$ и $\overline{w}_{x1}$ можно рассматривать как пульсацию скорости w'_x.

$$\Delta\overline{w}_x = \overline{w}_{x2} - \overline{w}_{x1} = w'_x . \tag{3.119}$$

Величину $\overline{w}_{x2}$ найдем разложением ее в ряд Тейлора с сохранением двух членов ряда в предположении о малости величины $\Delta y = l$:

$$\overline{w}_{x2} = \overline{w}_{x1} + \frac{d\overline{w}_x}{dy}\Delta y = \overline{w}_{x1} + \frac{d\overline{w}_x}{dy} l . \tag{3.120}$$

Таким образом,

$$w'_x = l\frac{d\overline{w}_x}{dy} . \tag{3.121}$$

В слой, соответствующий y_2, из нижележащих слоев попадают комки жидкости со скоростью, меньше чем $\overline{w}_{x2}$, а из вышележащих слоев – со скоростью, превышающей $\overline{w}_{x2}$. Их столкновение приводит к возникновению поперечной пульсации скорости w'_y, которая пропорциональна w'_x.

$$-w'_x w'_y = l^2\left(\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right)^2 . \tag{3.122}$$

Знак минус отражает противоположность знаков w'_x и w'_y. Величина l в (3.122) изменяется во времени. Если под l понимать осредненную во времени величину, то равенство (3.122) будет иметь вид

$$-\overline{w'_x w'_y} = l^2\left(\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right)^2 . \tag{3.123}$$

Таким образом,

$$\tau'_{xy} = \rho l^2\left(\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right)^2 ; \tag{3.124}$$

$$\mu_{Txy} = \rho l^2\left|\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right| . \tag{3.125}$$

Аналогичные рассуждения относительно переноса теплоты за счет турбулентных пульсаций приводят к формулам:

$$-\overline{w'_y T'} = l_T^2 \left|\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right| \frac{d\overline{T}}{dy}; \tag{3.126}$$

$$q_T = \rho c_p \overline{w'_y T'} = -\rho c_p l_T^2 \left|\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right| \frac{d\overline{T}}{dy}; \tag{3.127}$$

$$\lambda_T = \rho c_p {l_T}^2 \left|\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right|. \tag{3.128}$$

Величины l и l_T могут иметь различные значения и рассматриваться как функции координат от точки.

Л. Прандтль предположил, что вблизи гладкой плоской стенки

$$l = æy, \tag{3.129}$$

где æ – константа, полученная опытным путем.

Т. Карман на основе гипотезы о подобии полей пульсационных скоростей в различных точках течения получил для длины пути смешения, что

$$l = \text{X}\left|\frac{\frac{d\overline{w}_x}{dy}}{\frac{d^2\overline{w}_x}{dy^2}}\right|, \tag{3.130}$$

где X – константа, полученная опытным путем.

Таким образом, теория пути смешения позволила решить ряд практически важных задач, но при этом она является полуэмпирической и имеет ограниченную область применимости, так как в ней существенным образом использованы экспериментальные данные. Также теория пути смешения не полностью отражает предысторию развития турбулентного потока.

В 1942 г. академик А. Н. Колмогоров, а затем независимо от него в 1945 г. Л. Прандтль предложили новую теорию турбулентных течений, в которой принимается, что турбулентная вязкость (коэффициент турбулентного переноса μ_{Tij}) зависит от кинетической энергии турбулентных пульсаций $k = \frac{1}{2}\left(\overline{w'^2_x} + \overline{w'^2_y} + \overline{w'^2_z}\right)$.

Наибольшее распространение в настоящее время получила предложенная Б. Лоундером двухпараметрическая модель $k - \varepsilon$ и ее модификации. За ε в этой модели принята скорость диссипации энергии турбулентности. При этом для замыкания системы уравнений турбулентного движения используются различные гипотезы. К примеру, согласно гипотезе Джонса-Лоундера:

$$-\overline{w'_x w'_y} = a\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{w}_x}{\partial y}. \tag{3.131}$$

$$\mu_T = a\rho\frac{k^2}{\varepsilon}, \qquad (3.132)$$

где a – эмпирическая константа.

Кроме $k - \varepsilon$ модели существуют и другие модели для описания турбулентного течения, в частности, более сложные модели, включающие в себя уравнения для переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса и др.

3.4. Движение жидкости с малой вязкостью

Если рассматривается движение жидкости с малой вязкостью, то для теоретического исследования все поле течения разбивают на две области: область тонкого пограничного слоя вблизи стенки, где силы инерции соизмеримы с силами трения и их следует учитывать; область вне пограничного слоя, в которой силами трения вследствие их малости по сравнению с силами инерции можно пренебречь и применять уравнения, полученные для невязких течений.

3.4.1. Пограничный слой

1. Формирование пограничного слоя

Пристенную область, в пределах которой наблюдается существенное изменение продольной скорости называют *динамическим пограничным слоем*. За пределами динамического пограничного слоя изменением продольной скорости можно пренебречь.

Аналогичным образом при протекании явления теплоотдачи можно выделить пристенную область, в пределах которой наблюдается существенное изменение температуры теплоносителя – это *тепловой пограничный слой*.

Под толщиной динамического пограничного слоя δ понимают расстояние от обтекаемой поверхности (где скорость жидкости равна нулю) до точки, где значение скорости отличается на 1% от скорости в потенциальном ядре потока (т. е. составляет $0{,}99w_\infty$).

Аналогично вводится понятие толщины теплового пограничного слоя δ_T.

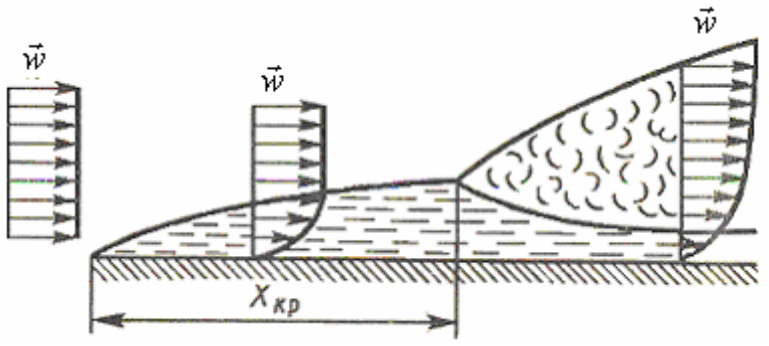


Рис. 3.11. Формирование пограничного слоя

При формировании пограничного слоя на начальном участке поверхности образуется ламинарный пограничный слой, толщина которого увеличивается по мере удаления от места начала его формирования (рис. 3.11).

Опыты показывают, что при высоких значениях числа Рейнольдса ламинарное течение в пограничном слое теряет устойчивость и на некотором расстоянии от входа $x_{кр}$ ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный. При этом у поверхности стенки образуется *вязкий подслой*.

2. Распределение скоростей и температур в пограничном слое

Изучение профилей скоростей и температур в турбулентном пограничном слое базируется на результатах экспериментального исследования структуры течения.

При изучении структуры турбулентного пограничного слоя используется понятие *динамической скорости*, которую также часто называют *скоростью сдвига (трения)*:

$$w_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \tag{3.133}$$

на основе которой записываются безразмерная скорость и безразмерная координата:

$$w_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \tag{3.134}$$

$$\eta = \frac{y}{\nu / w_*} = \frac{y}{\nu}\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \tag{3.135}$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; τ_w – касательное напряжение на поверхности стенки.

Безразмерный профиль скоростей:

$$\varphi = f(\eta) \tag{3.136}$$

пригоден для любого числа Рейнольдса *Re*, так как влияние этого числа заложено в величине τ_w. Поэтому зависимость (5.4) называют универсальным *законом распределения скорости* или *законом стенки*. Форма этого закона зависит от соотношения интенсивностей процессов молекулярного и турбулентного переноса.

В ламинарного пограничном слое и вязком подслое турбулентного пограничного слоя распределением скоростей можно считать линейный, а у поверхности стенки $w_x = 0$ и

$$\tau_w = \mu\frac{w_x}{y}, \tag{3.137}$$

выражение (3.136) при этом примет вид

$$\varphi = \eta. \tag{3.138}$$

Закон стенки для турбулентного пограничного слоя с учетом предположения о том, что $\tau = \tau_T = \tau_w$, а также используя теорию пути смешения Прандтля:

$$\tau_w = \rho æ^2 y^2 \left(\frac{dw_x}{dy} \right)^2 . \tag{3.139}$$

Из (3.139) следует

$$\frac{dw_x}{dy} = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{y} = \frac{w_*}{æ y} . \tag{3.140}$$

После интегрирования получим, что

$$\varphi = \frac{1}{æ} ln\, y + c = \frac{1}{æ} ln \frac{y w_*}{\nu} - \frac{1}{æ} ln \frac{w_*}{\nu} + c = \frac{1}{æ} ln\, \eta + c_1 . \tag{3.141}$$

Формула совпадает с опытно найденным распределением скоростей около плоской пластины и в гладких круглых трубах:

$$\varphi = 5{,}5 + 2{,}5 ln\, \eta ; \; \varphi = 5{,}5 + 5{,}75 lg\, \eta . \tag{3.142}$$

На рис. 3.12 показаны зависимости, построенные по приведенным формулам. На участке $\eta = 5...30$ ни одна из этих зависимостей не совпадает с опытными данными. Это переходная зона, в которой распределение скоростей формируется при существенной роли как молекулярного, так и турбулентного переноса. На этом участке опытные данные удовлетворительно описываются уравнением вида

$$\varphi = -3{,}05 + 11{,}5 lg\, \eta . \tag{3.143}$$

Таким образом, по толщине турбулентного пограничного слоя можно выделить три области: вязкий подслой ($\eta = 0...5$), переходную зону ($\eta = 5...30$) и турбулентное ядро ($\eta > 30$).

При получении закона стенки предполагалось, что профиль скоростей формируется только под воздействием турбулентного трения. Эта предпосылка реализуется только при больших числах *Re*.

Опытное изучение структуры турбулентного пограничного слоя показывает, что при умеренных числах *Re* распределение скоростей лучше описываются степенными законами вида

$$\varphi = c \eta^n ; \tag{3.144}$$

$$\frac{w_x}{w_\infty} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^n , \tag{3.145}$$

где δ – толщина динамического пограничного слоя.

Показатель степени n достаточно слабо, но зависит от числа *Re*. К примеру, для пластин при $Re = 5 \cdot 10^5 ... 10^7 \;\; n = 0{,}14$.

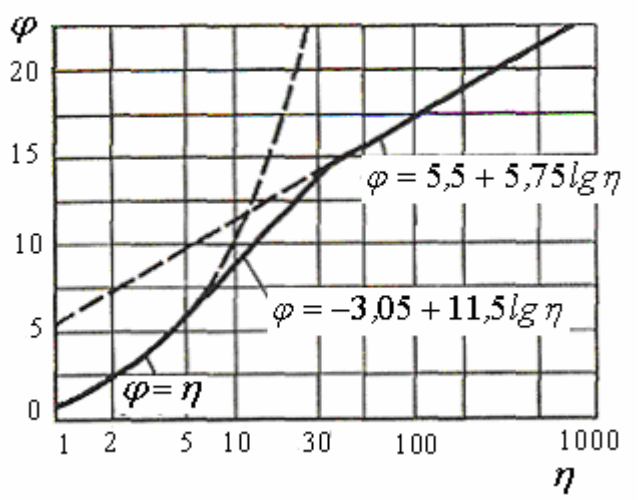


Рис. 3.12. Иллюстрация закона распределения скорости

Аналогичным путем может быть выявлено распределение температур по толще пограничного слоя. Для турбулентной части пограничного слоя при $\eta_T > 30$:

$$\varphi_T = 3{,}2 + 5{,}9 lg\, \eta_T, \qquad (3.146)$$

где φ_T – безразмерная температура теплового пограничного слоя; η_T – безразмерная координата теплового пограничного слоя.

На основе аналогии процессов переноса теплоты и импульса могут быть также построены степенные профили температур.

3. Дифференциальные уравнения и интегральные соотношения пограничного слоя

Дифференциальные уравнения неразрывности, движения и энергии для пограничного слоя будут иметь вид (3.54), (3.116) и (3.117) соответственно.

При этом для ламинарного пограничного слоя $\mu_{Tij} = 0$ и $\lambda_{Ti} = 0$.

Дифференциальные уравнения пограничного слоя включают частные производные, что ограничивает возможности их применения. Поэтому для построения приближенных методов расчета используются интегральные соотношения импульсов и энергии, которые не содержат частных производных и имеют одинаковую форму для ламинарного и турбулентного пограничного слоя.

Интегральное соотношение импульсов

Запишем уравнение движения для двумерного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами в виде

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \qquad (3.147)$$

где $\tau = \left(\mu + \mu_{Txy}\right)\dfrac{\partial w_x}{\partial x}$; для ламинарного пограничного слоя $\mu_{Txy} = 0$.

За пределами динамического пограничного слоя, толщина которого δ, $\frac{\partial w_x}{\partial x}=0$ и потому $\frac{\partial \tau}{\partial y}=0$. Для этой области уравнение движения приводится к виду

$$\rho w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.148}$$

где $w_\infty = f(x)$ – продольная скорость за пределами пограничного слоя.

Подставим (3.148) в (3.147):

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \rho w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}. \tag{3.149}$$

Умножим все члены уравнения на dy и проинтегрируем его в произвольном сечении от поверхности стенки до внешней границы пограничного слоя:

$$\int_0^\delta \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dy + \int_0^\delta \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} dy = \int_0^\delta \rho w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial \tau}{\partial y} dy, \tag{3.150}$$

$$\rho \frac{d}{dx}\left[w_\infty^2 \int_0^\delta \frac{w_x}{w_\infty}\left(1-\frac{w_x}{w_\infty}\right)dy \right] + \rho\left[w_\infty \int_0^\delta \left(1-\frac{w_x}{w_\infty}\right)dy \right]\frac{dw_\infty}{dx} = \tau_w, \tag{3.151}$$

где τ_w – касательное напряжение на поверхности стенки.

Обозначим условные толщины динамического пограничного слоя: *толщину вытеснения* через δ^* и *толщину потери импульса* через δ^{**}.

Поскольку скорость внутри пограничного слоя меньше, чем в невязком течении, то расход в пристеночной области ниже, чем в невязком потоке в том же сечении. В качестве меры уменьшения расхода и вводится *толщина вытеснения*.

Запишем соотношение для расхода в виде

$$\rho w_\infty \delta^* = \int_0^\delta \rho w_\infty dy - \int_0^\delta \rho w dy. \tag{3.152}$$

Из (3.152) следует, что

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1-\frac{w_x}{w_\infty}\right)dy. \tag{3.153}$$

Скорость движения жидкости внутри пограничного слоя меньше, чем в невязком потоке вне пограничного слоя, и количество движения соответственно меньше. Мерой этого уменьшения будет *толщина потери импульса*, которая будет определятся из соотношения:

$$\rho w_\infty^2 \delta^* = \int_0^\delta \rho w(w_\infty - w)dy, \tag{3.154}$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{w_x}{w_\infty}\left(1-\frac{w_x}{w_\infty}\right)dy. \tag{3.155}$$

Таким образом, уравнение (3.149) приобретает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+\frac{2\delta^{**}+\delta^{*}}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}=\frac{c_f}{2}, \tag{3.156}$$

$$\frac{d\,Re^{**}}{d\widetilde{x}}Re_L\left(2+H\right)f=\frac{c_f}{2}Re_L, \tag{3.157}$$

где c_f – коэффициент сопротивления трения; $Re^{**}=\frac{\rho w_\infty \delta^{**}}{\mu}$ – число Рейнольдса по толщине потери импульса δ^{*}; $\widetilde{x}=\frac{x}{L}$, где L – характерный геометрический размер поверхности; $H=\frac{\delta^{*}}{\delta^{**}}$ – формопараметр пограничного слоя; $f=\frac{\delta^{**}}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}$ – параметр продольного градиента давления; $Re_L=\frac{\rho w_\infty L}{\mu}$ – число Рейнольдса по характерному размеру поверхности.

Для безнапорного течения ($\frac{dw_\infty}{dx}=0$) уравнение (3.156) преобразуется к виду

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}=\frac{\tau_w}{\rho w_\infty^2}. \tag{3.158}$$

Интегральное соотношение энергии

Аналогично получается интегральное соотношение энергии

$$\frac{d\delta_T^{**}}{dx}+\frac{\delta_T^{**}}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}+\frac{\delta_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\left(\Delta T\right)}{dx}=St, \tag{3.159}$$

где $St=\frac{q_w}{\rho c_p w_\infty \Delta T}$ – число Стантона; q_w – плотность теплового потока на поверхности; $\Delta T=T_f-T_w=f\left(x\right)$; δ_T^{**} – толщина потери энергии:

$$\delta_T^{**}=\int_0^{\delta_T}\frac{w_x}{w_\infty}\left(1-\frac{T-T_w}{T_f-T_w}\right)dy, \tag{3.160}$$

где T – температура теплоносителя в пределах теплового пограничного слоя; T_f – температура за пределами пограничного слоя.

Уравнение (3.160) можно представить в виде

$$\frac{d\,Re_T^{**}}{d\widetilde{x}}+\frac{Re_T^{**}}{\Delta T}\frac{dw_\infty}{dx}+\frac{d\left(\Delta T\right)}{d\widetilde{x}}=St\,Re_L, \tag{3.161}$$

где $Re_T^{**}=\frac{\rho w_\infty \delta_T^{**}}{\mu}$ – число Рейнольдса по толщине потери энергии.

При безнапорном течении $\frac{dw_\infty}{dx}=0$ и неизменяющихся по длине поверхности температурах T_f и T_w $\left(\frac{d(\Delta T)}{dx}=0\right)$ уравнение (3.160) примет вид

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_T}(T_f-T)w_\infty dy=\frac{q_w}{\rho c_p}=a\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}, \qquad (3.162)$$

где a – температуропроводность.

3.4.2. Движение невязкого потока

1. Уравнение энергии невязкого потока

При выводе уравнений энергии и движения полагают, что невязкая жидкость представляет собой идеальный газ и вся область движения может быть разбита по потоку на элементарные участки, причем в каждом участке по всему сечению параметры потока остаются постоянными (стационарное или установившееся движение).

Рассмотрим поток в канале произвольной формы (рис. 3.13). Если движение установившееся, то

$$G=\frac{Fw}{\upsilon}=\frac{F_1w_1}{\upsilon_1}=\frac{F_2w_2}{\upsilon_2}=const, \qquad (3.163)$$

где G – массовый расход газа; F_1, F_2 – площади поперечных сечений канала 1 – 1 и 2 – 2; $\upsilon_1=\frac{1}{\rho_1}$, $\upsilon_2=\frac{1}{\rho_2}$ – удельные объемы в тех же поперечных сечениях; p_1, p_2 – давления, которые имеет движущийся газ в сечениях 1 – 1 и 2 – 2.

Таким образом, уравнение энергии для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\delta Q_\tau=dU+\delta L+G\frac{dw^2}{2}+Ggdz, \qquad (3.164)$$

где δQ_τ – элементарное количество теплоты, подводимое или отводимое на рассматриваемом участке движения; dU – приращение внутренней энергии газа в соответствующих сечениях; δL – элементарная работа газа против внешних сил; $G\frac{dw^2}{2}$ – приращение кинетической энергии газа при его перемещении на выделенном участке; $Ggdz$ – элементарная работа против сил тяжести (работой против сил тяжести для газов обычно пренебрегают).

Работа газа против внешних сил в движущемся газе является работой, затраченной на его проталкивание.

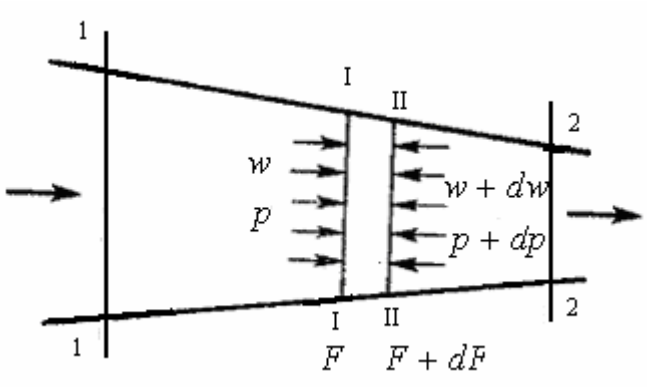


Рис. 3.13. Газовый поток в канале произвольной формы

Выделим сечениями I – I и II – II некоторую массу газа. На выделенный объем газа в канале действует слева сила pF, а справа – сила $(p+dp)(F+dF)$.

Работа проталкивания (перемещения) при этом будет равна

$$\delta L = (p+dp)(F+dF)(w+dw) - pFw. \tag{3.165}$$

После раскрытия скобок и отбрасывания малых величин второго и высшего порядков получаем, что

$$\delta L = pd(Fw) - Fwdp. \tag{3.166}$$

Применим уравнение (3.163), тогда

$$\delta L = G(pd\upsilon + \upsilon dp) = Gd(p\upsilon). \tag{3.167}$$

Для потока газа 1 кг/с, имеем

$$\delta l = (pd\upsilon + \upsilon dp) = d(p\upsilon). \tag{3.168}$$

Таким образом, уравнение энергии будет иметь вид

$$\delta q_\tau = du + \delta l + \frac{dw^2}{2} = du + d(p\upsilon) + \frac{dw^2}{2} = d(u + p\upsilon) + \frac{dw^2}{2} = dh + \frac{dw^2}{2}, \tag{3.169}$$

где dh – приращение энтальпии газового потока.

При достаточно больших скоростях движения газового потока теплообменом газа с окружающей средой можно пренебречь, тогда поток будет адиабатным. Уравнение энергии при этом примет вид

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} \tag{3.170}$$

или

$$h + \frac{w^2}{2} = const. \tag{3.171}$$

$$h + \frac{w^2}{2} = h^*, \tag{3.172}$$

где h^* – *энтальпия в точке торможения (при* $w = 0$*)*.

Так как приращение энтальпии можно представить в виде

$$\Delta h = c_p \Delta T, \tag{3.173}$$

где c_p – массовая изобарная теплоемкость газа, то

$$T + \frac{w^2}{2c_p} = T^*, \tag{3.174}$$

где T^* *– температура в точке торможения (при* $w = 0$*)*.

Уравнение (3.174) представляет собой *уравнение энергии одномерного потока невязкой жидкости*.

2. Уравнение движения невязкого потока

Рассмотрим стационарный поток в канале произвольной формы, у которого параметры меняются только вдоль оси *x*.

Считая вязкость $\mu = 0$ уравнения движения Навье-Стокса будут преобразованы к виду

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} = X - \frac{dp}{dx}. \tag{3.175}$$

В рассматриваемом случае субстанциальная производная будет иметь вид

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{dw_x}{d\tau} + w_x \frac{dw_x}{dx}. \tag{3.176}$$

Тогда

$$\frac{dw_x}{d\tau} + w_x \frac{dw_x}{dx} = \frac{1}{\rho}\left(X - \frac{dp}{dx} \right). \tag{3.177}$$

Так как поток стационарный, то $\frac{dw_x}{d\tau} = 0$. Также будем считать действие массовых сил пренебрежимо малым $X = 0$.

Тогда уравнение движения примет вид

$$w_x \frac{dw_x}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{3.178}$$

Из уравнения (3.178) следует, что

$$w_x dw_x = -\frac{dp}{\rho}. \tag{3.179}$$

После интегрирования уравнения движения получаем:

$$p + \frac{\rho w_x^2}{2} = const. \tag{3.180}$$

В более общем виде это уравнение будет иметь вид

$$p + \frac{\rho w^2}{2} = const. \tag{3.181}$$

Выражение (3.181) представляет собой *уравнение Бернулли*. Уравнение Бернулли, в основном, применяется для несжимаемых жидкостей.

Для идеального газа, движущегося с большой скоростью уравнение движения, учитывающее сжимаемость, можно получить из выражения (3.175), при этом используют *уравнение состояния идеального газа* ($p = \rho RT$); *уравнение Майера* ($c_p - c_\upsilon = R$) и выражение для показателя адиабаты ($\frac{c_p}{c_\upsilon} = k$, где k – постоянная адиабаты). Более подробно эти выражения будут рассмотрены второй части, посвященной основам термодинамики.

$$c_p T + \frac{w^2}{2} = const; \tag{3.182}$$

$$c_p \frac{p}{\rho R} + \frac{w^2}{2} = const; \tag{3.183}$$

$$\frac{c_p}{c_p - c_\upsilon}\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = const. \tag{3.184}$$

Поделив в умножив уравнение (3.184) на c_υ – массовую изохорную теплоемкость газа, получим выражение вида

$$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = const, \tag{3.185}$$

которое будет представлять собой *уравнение Бернулли для газа*, где соотношением $\frac{k}{k-1}$ учитывается сжимаемость среды.

3. Скорость звука

Если в несжимаемой среде в некоторой точке изменить давление на величину Δp, то во всей области, занятой несжимаемой средой, давление мгновенно измениться на ту же величину, т.е. скорость распространения возмущений равна бесконечности. Иначе обстоит дело с распространением малых возмущений в упругих средах. Эти возмущения распространяются как упругие волны со скоростью

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{3.186}$$

где E – модуль объемной упругой деформации среды.

В сжимаемой среде под влиянием изменения давления на величину Δp происходит изменение объема на величину ΔV.

Таким образом,

$$dp = -E\frac{dV}{V}. \tag{3.187}$$

Сжимаемость среды можно охарактеризовать коэффициентом сжимаемости β_V, поэтому модуль упругой деформации будет равен

$$E = \frac{1}{\beta_V}. \tag{3.188}$$

Следовательно скорость распространения малых возмущений

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta_V}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{3.189}$$

Величина a – называется *скоростью звука*. Из уравнения (3.189) следует, что скорость звука является мерой сжимаемости среды.

Применяя уравнение состояния идеального газа и дифференциальное уравнение адиабаты:

$$k\frac{d\upsilon}{\upsilon} + \frac{dp}{p} = 0, \tag{3.190}$$

получим, что

$$a = \sqrt{-\upsilon^2\left(\frac{dp}{d\upsilon}\right)} = \sqrt{kp\upsilon} = \sqrt{kRT}. \tag{3.191}$$

Безразмерная величина, которая является определяющим параметром при движении сжимаемых сред, называется *числом Маха* и определяется выражением вида

$$M = \frac{w}{a}. \tag{3.192}$$

Выражение (3.192) представляет собой отношение скорости потока к скорости звука.

4. Скорость и расход газа. Газодинамические функции

Рассмотрим адиабатное одномерное течение идеального газа. Воспользуемся уравнением энергии в форме (3.173). Разделим левую и правую часть этого уравнения на h^*:

$$\frac{h}{h^*} = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{w^2}{2h^*} = 1 - \frac{w^2}{w_{max}^2}, \tag{3.193}$$

где $w_{max} = \sqrt{2h^*}$ – максимально возможная скорость течения газа.

При $w = w_{max}$ $h = 0$, следовательно, $T = 0$ и $p = 0$, что соответствует условиям расширения потока до полного вакуума.

Из уравнения адиабаты в форме $p\upsilon^k = const$ следует

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.194}$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.193), получим

$$\frac{p}{p^*}=\left(1-\frac{w^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{k-1}{k}};\ \frac{\rho}{\rho^*}=\left(1-\frac{w^2}{w_{max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.195}$$

Таким образом, с ростом скорости от 0 до w_{max} параметры потока непрерывно уменьшаются и стремятся к 0 (рис. 3.14). Это обстоятельство существенно отличает движение газа от движения несжимаемой среды, где плотность при любом изменении скорости оставалась постоянной.

Найдем выражение для скорости звука при адиабатном течении газа. Используя выражение для скорости звука можно записать, что

$$a^2=kRT;\ a^{*2}=kRT^*; \tag{3.196}$$

$$\frac{a^2}{a^{*2}}=\frac{T}{T^*}; \tag{3.197}$$

$$\frac{a^2}{a^{*2}}=1-\frac{w^2}{w_{max}^2}; \tag{3.198}$$

$$\frac{p}{p^*}=\left(\frac{a^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{k}{k-1}};\ \frac{\rho}{\rho^*}=\left(\frac{a^2}{a^{*2}}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.199}$$

Из соотношений видно, что с увеличением скорости потока скорость звука в нем уменьшается. Скорость звука a^* – называется *местной скоростью звука*.

Установим зависимости параметров потока от числа *M*.

$$w_{max}^2=2h^*=2\frac{k}{k-1}\frac{p^*}{\rho^*}=\frac{2}{k-1}a^{*2}, \tag{3.200}$$

$$a^2=a^{*2}\left(1-\frac{w^2}{w_{max}^2}\right)=a^{*2}-\frac{k-1}{2}w^2. \tag{3.201}$$

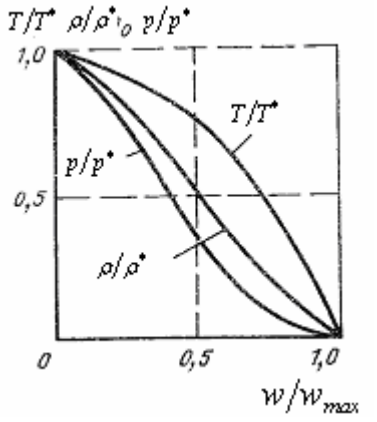


Рис. 3.14. Зависимость газодинамических параметров от скорости потока

Поделим обе части уравнения на a^2 получим

$$\frac{a^{*2}}{a^2} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 . \tag{3.202}$$

Тогда

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 . \tag{3.203}$$

Помимо приведенных зависимостей в технических расчетах используются формулы, которыми устанавливается связь между параметрами потока и числом $\lambda = \frac{w}{a_{кр}}$, называемым часто *коэффициентом скорости*. Здесь $a_{кр}$ – критическая скорость, под которой подразумевают скорость потока, равную скорости звука. При $w = a_{кр}$ числа $M = 1$ и $\lambda = 1$.

Из соотношения (3.202) следует, что

$$a_{кр}^2 = \frac{2}{k+1} a^{*2} = \frac{k-1}{k+1} w_{max}^2 ; \tag{3.204}$$

$$\frac{p_{кр}}{p^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_{кр}}{\rho^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad \frac{T_{кр}}{T^*} = \frac{2}{k+1} . \tag{3.205}$$

Таким образом, критические параметры зависят только от параметров торможения и показателя адиабаты, причем критические параметры всегда меньше параметров торможения.

Используя уравнение (3.204) получим выражения:

$$\lambda^2 = \frac{w^2}{a_{кр}^2} = \frac{k+1}{k-1} a_{кр}^2 \frac{w^2}{w_{max}^2}; \quad \frac{w^2}{w_{max}^2} = \frac{k+1}{k-1} \lambda^2 \frac{w^2}{w_{max}^2} . \tag{3.206}$$

Поэтому

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T^*} = \frac{a^2}{a^{*2}} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 ;$$

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}} ; \tag{3.207}$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} .$$

В уравнении (3.207) $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ представляют собой *газодинамические функции*. Эти функции широко используют в практических расчетах, их значения приведены в справочной литературе для различных значений показателя адиабаты k.

Из вышеприведенных уравнений следует, что связь между M и λ имеет следующий вид

$$\lambda = M\frac{\sqrt{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{k-1}{2}M^2}}. \tag{3.208}$$

Получим выражения для расхода газа. Из уравнения (3.163) можно выразить расход газа:

$$G = \frac{wF}{\upsilon} = \rho wF = \rho\frac{\rho^*}{\rho^*}w\frac{a_{кр}}{a_{кр}}F = \rho^* a_{кр}\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}F = \tag{3.209}$$

$$= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\rho^* a_{кр}Fq(\lambda) = \rho_{кр}a_{кр}Fq(\lambda)$$

где F – площадь сечения струи.

В формуле (3.209)

$$q(\lambda) = \frac{\rho w}{\rho_{кр}a_{кр}} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}\lambda\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3.210}$$

Из выражения (3.210) видно, что функция $q(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda = 0$ и при $\lambda = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, что соответствует $w = w_{max}$. Поэтому на основании *теоремы Ролля* в указанном интервале эта функция имеет хотя бы один экстремум.

Определим производную $q(\lambda)$ по λ и приравняем ее нулю. Находим, что максимум функции $q(\lambda)$ будет при $w = a_{кр}$.

Функция $q(\lambda)$ оказывается очень удобной при расчете площади струи. Из постоянства массового расхода при установившемся течении следует

$$\rho wF = \rho_{кр}w_{кр}F_{кр}, \tag{3.211}$$

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{1}{q(\lambda)}, \tag{3.212}$$

$$\frac{F}{F_{кр}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}\frac{1}{M}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}. \tag{3.213}$$

Изменение площади сечения струи в зависимости от числа M представлено на рис. 3.15.

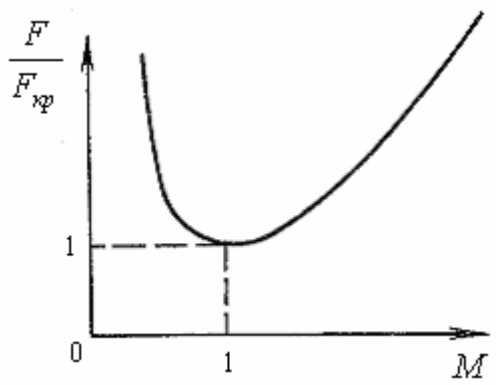


Рис. 3.15. Зависимость площади сечения струи от числа Маха

Из рис. 3.15 следует, что одному и тому же значению отношения площадей соответствуют два значения числа Маха: дозвуковое и сверхзвуковое.

5. Зависимость изменения площади сечения струи от скорости потока

Определим изменение площади сечения струи от скорости потока. Из уравнения (3.163) при постоянстве расхода, можно получить уравнение вида

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dF}{F}+\frac{dw}{w}=0. \tag{3.214}$$

На основании уравнений (3.179) и (3.189) следует, что

$$\frac{w^2}{a^2}\frac{dw}{w}=-\frac{d\rho}{\rho} \tag{3.215}$$

или

$$\frac{d\rho}{\rho}=-M^2\frac{dw}{w}. \tag{3.216}$$

Подставим выражение (3.216) в (3.214):

$$\frac{dF}{F}=\left(M^2-1\right)\frac{dw}{w}. \tag{3.217}$$

Соотношение (3.217) устанавливает связь между относительным изменением площади струи $\frac{dF}{F}$ и относительным изменением скорости $\frac{dw}{w}$.

Видно, что при ускоренном движении дозвукового потока ($M < 1$) площадь сечения струи уменьшается, в то время как при ($M > 1$) площадь ее сечения увеличивается. Замедление движения, наоборот, происходит в случае увеличения площади сечения струи дозвукового потока и при уменьшении ее для сверхзвукового.

Таким образом, чтобы получить сверхзвуковую скорость потока в струе, площадь ее сечения необходимо сначала уменьшать, а затем увеличивать. Канал с указанным изменением площади сечения называется *соплом Лаваля* (рис. 3.16).

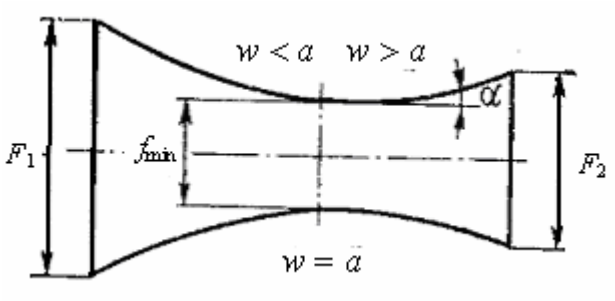


Рис. 3.16. Профиль сопла Лаваля

Соплами называются каналы, в которых происходит расширение газа с уменьшением давления ($dp < 0$) и увеличением скорости ($dw > 0$).

Таким образом, в сужающейся части сопла Лаваля $w < a$, при этом скорость стремится увеличится до скорости звука a. В самом узком сечении сопла Лаваля скорость потока равна скорости звука (критической скорости), поэтому это сечение называется *критическим*. В расширяющейся части сопла Лаваля газ продолжает расширяться, при этом $w > a$.

4. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

4.1. Сопротивления по длине

Первопричиной потерь энергии является сила внутреннего трения (вязкости), однако ее действие проявляется по-разному. Твердые неподвижные границы стенки всегда оказывают тормозящее действие на поток, которое называется *гидравлическим сопротивлением*. В общем случае потери энергии в гидравлических сопротивлениях слагаются из потерь в сопротивлениях по длине и в местных сопротивлениях.

Рассмотрим движение жидкости в прямой трубе постоянного сечения F с некоторой постоянной скоростью w (рис. 4.1). Из баланса сил, действующих на выделенный объем жидкости, ограниченный двумя поперечными сечениями и внутренней поверхностью трубы, имеем

$$(p_2 - p_1)F = \tau_w P l\,, \tag{4.1}$$

где p_1 и p_2 – давление потока в выбранных поперечных сечениях; τ_w – касательное напряжение трения на поверхности стенки; P – периметр проточной части в поперечном сечении; l – расстояние между выбранными сечениями.

Таким образом,

$$\tau_w = \frac{(p_2 - p_1)F}{Pl}\,. \tag{4.2}$$

А для труб круглого сечения

$$\tau_w = \frac{(p_2 - p_1)d}{4l}\,, \tag{4.3}$$

где d – диаметр трубы.

Напряжение трения τ_w принято выражать через коэффициент гидравлического сопротивления (коэффициент сопротивления трения) ζ и динамическое давление (скоростной напор) $\Delta p_д$

$$\tau_w = \frac{\xi}{4}\Delta p_д = \frac{\zeta}{4}\frac{\rho w^2}{2}\,. \tag{4.4}$$

Коэффициент сопротивления трения в общем случае зависит от конфигурации граничных поверхностей и *Re* (числа Рейнольдса). Понятие конфигурации включает в себя форму поперечного сечения и шероховатость стенок.

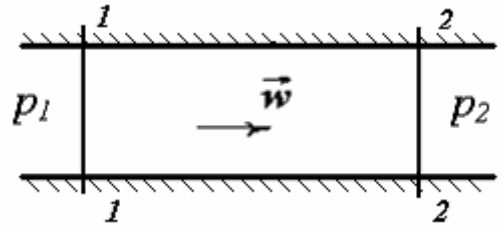


Рис. 4.1. Движение жидкости в трубе

Характер этих зависимостей исследовался Блазиусом, Прандтлем, Никурадзе, Альтшулем, Шевелевым и др.

По данным опытов Никурадзе для круглых труб зависимости ζ от числа *Re* и шероховатости стенок имеют вид, показанный на рис. 4.2. В опытах Никурадзе шероховатость создавалась искусственно (*песочная шероховатость* – плотная, однородная, равномерная) и оценивалась средним размером выступа Δ.

Исследования показали следующие возможные зависимости ζ от *Re* и шероховатости Δ.

При ламинарном режиме течения ($Re < 2300$) шероховатость поверхности не оказывает значимого влияния на ξ, при этом закон сопротивления имеет вид

$$\zeta = \frac{64}{Re}. \tag{4.5}$$

При турбулентном режиме течения ($Re > 10^4$) закон сопротивления зависит от соотношения между высотой элементов шероховатости и вязкого подслоя, сохраняющегося вблизи стенки.

При $0 \le \dfrac{\Delta \cdot \sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}}}{\nu} < 5$, где ν – кинематический коэффициент вязкости потока, элементы шероховатости расположены целиком внутри вязкого подслоя, а сама шероховатость не оказывает влияния на закон сопротивления. При этом реализуется гладкостенный турбулентный режим, для которого Блазиусом в 1913 г. был предложен закон сопротивления

$$\zeta = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}. \tag{4.6}$$

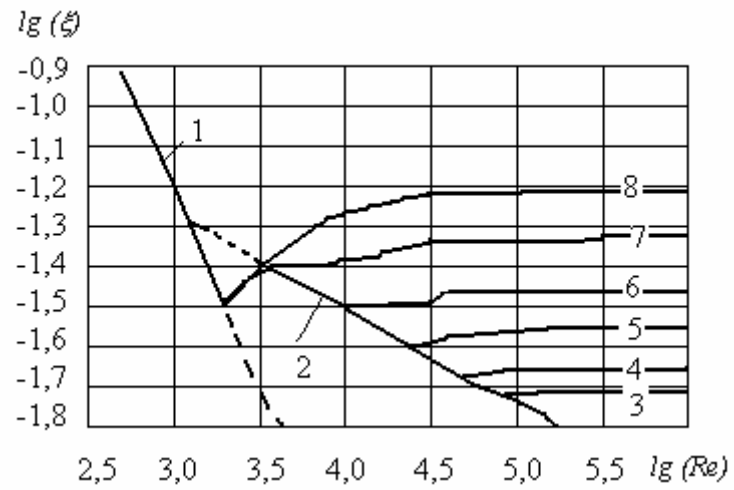


Рис. 4.2. Законы сопротивления потока в трубе: 1- ламинарный режим; 2 – гладкостенный турбулентный режим; 3…8 – доквадратичный турбулентный режим с возрастанием величины относительной шероховатости

При $5 \le \frac{\Delta \cdot \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\nu} \le 70$ размер шероховатости соизмерим с толщиной вязкого подслоя. Исследования показали, что в этом случае ζ от и от Re и от шероховатости Δ, при этом реализуется так называемый *доквадратичный* режим.

При $\frac{\Delta \cdot \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\nu} > 70$ размер шероховатости превышает толщину вязкого подслоя. При этом реализуется *квадратичный режим*. Коэффициент ξ практически не зависит от числа Re и определяется относительной шероховатостью $\frac{\Delta}{d}$. Шифринсон для квадратичного режима предложил закон сопротивления в виде

$$\zeta = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0{,}25}. \qquad (4.7)$$

Само понятие о квадратичном режиме основано на условии пропорциональности потери давления по длине трубы квадрату скорости потока.

Для расчета коэффициента гидравлического сопротивления всех возможных турбулентных режимов Альтшулем был предложен закон сопротивления в виде

$$\zeta = 0{,}11\left(\frac{68}{Re} + \frac{\Delta_э}{d}\right)^{0{,}25}, \qquad (4.8)$$

где $\Delta_э$ – «эквивалентная» шероховатость, под которой понимается такая песочная шероховатость, при которой в квадратичной области (где потери давления по длине трубы пропорциональны квадрату скорости потока) обеспечивается одинаковое с естественной шероховатостью значение коэффициента ζ.

4.2. Местные гидравлические сопротивления

К местным сопротивлениям относятся всякие резкие изменения формы граничных поверхностей потока (расширения, сужения, изгибы, изломы и др.). При этом потери давления составляют

$$\Delta p_м = \zeta_м \frac{\rho w^2}{2}. \qquad (4.9)$$

где $\zeta_м$ – коэффициент местного сопротивления.

Рассмотрим несколько случаев:

1. Местное сопротивление при расширении трубопровода

Исследования Борда показали, что при резком расширении (рис. 4.3) коэффициент местного сопротивления определяется формулой вида

$$\zeta_{р.р.} = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1 \right)^2, \tag{4.10}$$

где F_1, F_2 – площади сечений трубы до и после расширения соответственно.

Коэффициент местного сопротивления при выходе потока из трубы в бассейн больших размеров определяется формулой вида

$$\zeta_{вых} = \left(1 - \frac{w_2}{w_1} \right)^2, \tag{4.11}$$

где w_1, w_2 – скорости течения потока жидкости до и после расширения соответственно.

2. Местное сопротивление при сужении трубопровода

Исследования И. Е. Идельчика показали, что при наиболее резком сужении (рис. 4.4) коэффициент местного сопротивления определяется формулой вида

$$\zeta_{н.р.с.} = 1 - \frac{F_2}{F_1}, \tag{4.12}$$

где F_1, F_2 – площади сечений трубы до и после сужения соответственно.

При постепенном или плавном сужении (рис. 4.5) коэффициент местного сопротивления определяется формулой вида

$$\zeta_c = \xi \zeta_{н.р.с.}, \tag{4.13}$$

где ξ – коэффициент смягчения сужения, значения которого приведены в справочной литературе.

Если рассматривать случай входа в трубопровод из достаточно большого бассейна, то коэффициент местного сопротивления $\zeta_{вх} = 0{,}5$.

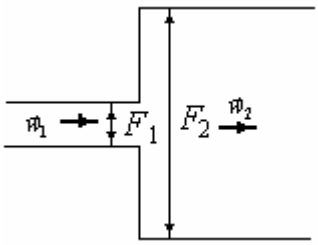


Рис. 4.3. Резкое расширение трубопровода

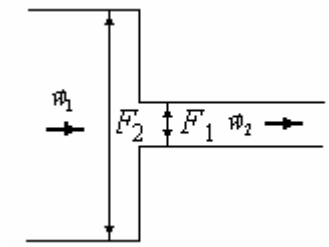


Рис. 4.4. Резкое сужение трубопровода

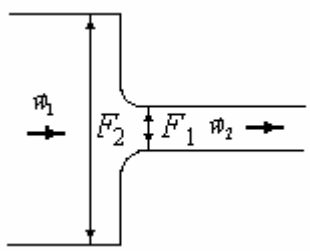


Рис. 4.5. Плавное сужение трубопровода

При наличии взаимного влияния местных сопротивлений они должны рассматриваться как одно сложное сопротивление. Коэффициент сопротивления в этом случае необходимо определять экспериментально.

Часть II. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЕЕ ПАРАМЕТРЫ

5.1. Термодинамическая система и ее состояние

Под *термодинамической системой* понимают тело или совокупность тел, выделенных из материального мира и являющиеся объектами исследования.

Выделяя термодинамическую систему из окружающего мира, обычно оценивают воздействие, которое оказывает термодинамическая система на окружающую среду (или какое влияние окружающая среда оказывает на систему). В термодинамике подобные воздействия сводятся к обмену энергией или веществом между термодинамической системой и окружающей средой.

Термодинамическая система, которая совершенно не взаимодействует с окружающей средой (не обменивается с ней веществом и энергией), называется *изолированной* или *замкнутой*.

Термодинамическая система, которая не обменивается с окружающей средой веществом, называется *закрытой*.

Термодинамическая система, которая обменивается с окружающей средой веществом, называется *открытой*.

Термодинамическая система, которая не обменивается с окружающей средой энергией в виде теплоты, называется *адиабатной*.

В термодинамике постулируется, что *изолированная система с течением времени всегда приходит в состояние термодинамического равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может*.

Состояние термодинамического равновесия характеризуется при постоянных внешних условиях неизменностью параметров во времени и отсутствием в системе потоков вещества, энергии и т. д.

Достаточными условия термодинамического равновесия являются:

1. равенство давлений термодинамической системы и окружающей среды;
2. равенство температур термодинамической системы и окружающей среды.

Под *термодинамическим процессом* понимают изменение состояния системы, которое возникает в ней под влиянием внешних воздействий.

Всякий термодинамический процесс может возникнуть только при нарушении состояния термодинамического равновесия.

Свойство процессов одинаково идти в противоположных направлениях называется *обратимостью*.

5.2. Термические параметры состояния

Под термическими параметрами состояния системы понимают давление, температуру и удельный объем.

Давление

Давлением называется величина, численно равная силе, действующей по нормали к поверхности тела и отнесенной к единице площади этой поверхности.

В практике применяются единицы измерения технической системы МКГСС и внесистемные единицы. Перевод единиц измерения давления представлен в табл. 5.1.

Таблица 5.1

единицы	*Па*	*бар*	*кг/см*^{2}	*мм рт. ст.*	*мм вод. ст.*
1 *Па*	1	10^{-5}	$1{,}02\cdot10^{-5}$	$7{,}5\cdot10^{-3}$	0,102
1 *бар*	10^5	1	1,02	$7{,}5\cdot10^2$	$1{,}02\cdot10^4$
1 *кг/см*^{2} (*ат*)	$9{,}8\cdot10^4$	0,98	1	735,6	10^4
1 *мм рт. ст.*	133,3	$1{,}33\cdot10^{-3}$	$1{,}36\cdot10^{-3}$	1	13,6
1 *мм вод. ст.*	9,8	$9{,}8\cdot10^{-5}$	10^{-4}	$7{,}356\cdot10^{-2}$	1

Атмосферное давление измеряют барометрами, избыточное (относительно атмосферного) давление измеряют манометрами, а недостаточное (относительно атмосферного) давление измеряют вакуумметрами. Принцип действия этих приборов был рассмотрен в первой части п. 2.5.

Температура

Температура является фундаментальным физическим понятием, которое не имеет строго определения.

Согласно молекулярно-кинетической теории газов *температура* представляет собой меру средней кинетической энергии движения молекул.

Количественное определение температуры связано с использованием любого, зависящего от степени нагретости свойства вещества. Так, например, работа газовых и жидкостных термометров основана на их тепловом расширении при увеличении температуры. Также для измерения температуры широко используют терморезисторы и термоэлектрические преобразователи.

Терморезистор (термопреобразователь сопротивления, активное сопротивление которого изменяется при изменении температуры) может быть металлическим или полупроводниковым.

Принцип действия металлических терморезисторов основан на увеличении сопротивления материала, из которого изготовлен терморезистор (в основном меди или платины), с увеличением температуры. Для металлов зависимость сопротивления от температуры имеет линейный характер.

Работа полупроводниковых термометров сопротивления основана на свойстве уменьшения сопротивления полупроводника с увеличением температуры. Это уменьшение сопротивления происходит по закону экспоненты.

Термоэлектрический преобразователь представляет собой обычную термопару действие которой основано на эффекте Зеебека.

Существуют различные единицы измерения температуры и соответствующие им температурные шкалы. Системной единицей измерения температуры является 1 *К*. Шкала Кельвина берет свое начало от абсолютного нуля температур. Связь температур по шкале Цельсия и Кельвина имеет вид

$$T = t + 273, \tag{5.1}$$

где T – температура, *К*; t – температура, ^0C.

Удельный объем

Удельный объем представляет собой объем 1 *кг* вещества.

$$\upsilon = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}, \tag{5.2}$$

где υ – удельный объем вещества, $м^3/кг$.

6. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

6.1. Уравнение состояния идеального газа

Определение *идеального газа* было рассмотрено в первой части п. 1.2. Следует отметить, что любой реальный газ тем ближе к идеальному, чем меньше его давление. Равновесное состояние идеального газа как термодинамической системы определяется параметрами T, p и υ. Между этими термическими параметрами существует связь, которая выражается термически уравнением состояния. Уравнение состояния идеального газа было получено Клапейроном и имеет вид

$$p\upsilon = RT\,, \tag{6.1}$$

где R – газовая постоянная, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$.

Уравнение (6.1) записано для массы идеального газа равной 1 *кг* и носит название *уравнения Клапейрона*.

Для массы газа m уравнение Клапейрона примет вид

$$pV = mRT\,. \tag{6.2}$$

Газовая постоянная связана с универсальной газовой постоянной $R_\mu = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ выражением вида

$$R = \frac{R_\mu}{\mu}, \tag{6.3}$$

где μ – молярная масса газа, *кг/моль*.

6.2. Смеси идеальных газов

Рассмотрим смесь идеальных газов. Давление смеси будем считать равной $p_{см}$, температуру равной $T_{см}$. Массы газов в смеси равны соответственно m_1, m_2, …, m_n.

По *закону Дальтона: давление смеси равно сумме парциальных давлений компонентов смеси*

$$p_{см} = \sum_{i=1}^{n} p_i\,. \tag{6.4}$$

Качественно состав газовой смеси оценивается различными способами. Может быть задан массовый или объемный состав смеси.

Массовая доля представляет собой отношение массы компонента к массе всей смеси:

$$g_i = \frac{m_i}{m_{см}}\,. \tag{6.5}$$

Объемная доля представляет собой отношение объема компоненты смеси при давлении смеси к объему всей смеси:

$$r_i = \frac{V_i}{V_{см}}. \tag{6.6}$$

Чтобы применить уравнение Клапейрона для смеси идеальных газов необходимо вычислить газовую постоянную смеси $R_{см}$ или молярную массу смеси $\mu_{см}$.

Существуют два способа расчета этих величин: массовый и объемный.

Если задан массовый состав смеси, т. е. заданы массовые доли каждого газа в смеси, тогда

$$R_{см} = \sum_{i=1}^{n} g_i R_i ; \tag{6.7}$$

$$\mu_{см} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{\mu_i}}. \tag{6.8}$$

Если задан объемный состав смеси, т. е. заданы объемные доли каждого газа в смеси, тогда

$$R_{см} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{R_i}}; \tag{6.9}$$

$$\mu_{см} = \sum_{i=1}^{n} r_i \mu_i . \tag{6.10}$$

Массовые и объемные доли связаны между собой соотношением вида

$$\frac{g_i}{r_i} = \frac{\mu_i}{\mu_{см}} = \frac{R_{см}}{R_i}. \tag{6.11}$$

После нахождения $R_{см}$ и $\mu_{см}$ смесь рассматривается как однородный газ.

7. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

7.1. Внутренняя энергия. Энтальпия

Внутренняя энергия U термодинамической системы представляет собой сумму всех видов энергии движения и взаимодействия частиц, составляющих систему.

Внутренняя энергия является *функцией состояния* термодинамической системы. Это означает, что независимо от предыстории системы ее энергия в данном состоянии имеет присущее этому состоянию значение, поэтому приращение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое всегда равно разности значений внутренней энергии в конечном и начальном состояниях независимо от пути перехода.

Таким образом,

$$\Delta U = U_2 - U_1. \tag{7.1}$$

Внутренняя энергия является величиной аддитивной, т. е. внутренняя энергия системы равна сумме внутренних энергий отдельных ее частей.

Под *энтальпией H* понимают энергию расширенной системы состоящей из макротела (газа) и поршня с грузом, уравновешивающего давление газа внутри сосуда, куда заключен газ. При этом энтальпия равна сумме внутренней энергии системы и потенциальной энергии поршня с грузом

$$H = U + pV\ . \tag{7.2}$$

В уравнении (7.2) произведение давления газа p на объем сосуда V, в который газ заключен численно равно потенциальной энергии поршня с грузом.

Энтальпия также является функцией состояния и обладает свойством аддитивности.

Единицей измерения внутренней энергии и энтальпии является 1 *Дж*.

В термодинамике также используются удельные величины внутренней энергии *u*, *Дж/кг* и энтальпии *h*, *Дж/кг* (внутренняя энергия и энтальпия для массы системы равной 1 *кг*).

7.2. Работа. Теплота.

В термодинамике рассматриваются два способа передачи энергии: по средствам совершения работы и передачи некоторого количества теплоты. Работа L и количество теплоты Q_τ являются функциями процесса, т. е. их значение будет зависеть от пути перехода (термодинамического процесса).

Элементарная работа, совершаемая газом определяется формулой вида

$$\delta L = pdV\ . \tag{7.3}$$

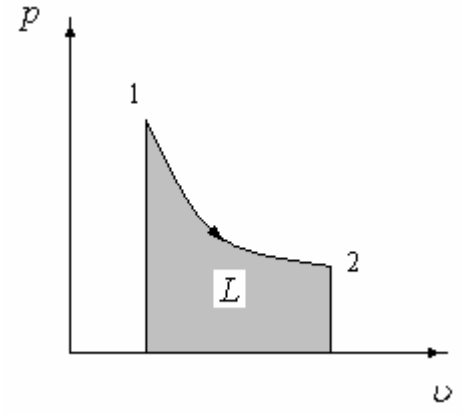


Рис. 7.1. Изображение работы в виде площади под кривой процесса на $p\upsilon$-диаграмме

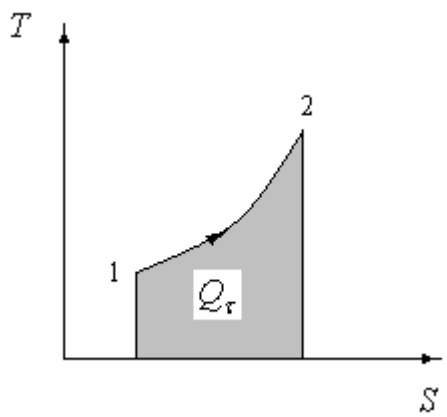


Рис. 7.2. Изображение количества теплоты в виде площади под кривой процесса на TS-диаграмме

Тогда

$$L = \int_{V_1}^{V_2} pdV \ . \tag{7.4}$$

Таким образом, работа численно будет равна площади под кривой процесса на $p\upsilon$-диаграмме (рис. 7.1).

Элементарное количество теплоты определяется формулой вида

$$\delta Q_\tau = cmdT \ , \tag{7.5}$$

где c – удельная (массовая) теплоемкость тела, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$.

$$Q_\tau = \int_{T_1}^{T_2} cmdT \ . \tag{7.6}$$

Также количество теплоты выражается формулой вида

$$\delta Q_\tau = TdS \ . \tag{7.7}$$

где S – энтропия термодинамической системы, *Дж/К*.

Энтропия термодинамической системы является функцией состояния системы и с точки зрения статистической физики служит мерой порядка в системе.

Согласно формуле (7.7) количество теплоты можно представить в виде площади под графиком термодинамического процесса на *TS*-диаграмме (рис. 7.2).

Единицей измерения работы и количества теплоты является 1 *Дж*.

В термодинамике также используются удельные величины работы l, *Дж/кг* и количества теплоты q, *Дж/кг* (работа и количество теплоты для массы системы равной 1 *кг*).

7.3. Теплоемкость

Теплоемкостью какого-либо тела называется физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на 1 *К*

$$C = \frac{\delta Q_\tau}{dT}. \tag{7.8}$$

Различают *удельную* (*массовую*) теплоемкость *с* – теплоемкость 1 *кг* вещества, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$; *молярную* теплоемкость c_μ – теплоемкость 1 *моля* вещества, $\frac{Дж}{моль \cdot К}$; объемную теплоемкость $c^{\backslash}$ – теплоемкость 1 $м^3$ вещества, $\frac{Дж}{м^3 \cdot К}$.

Теплоемкость является свойством вещества.

Для газов теплоемкость также зависит от процесса, при котором осуществляется теплоотдача, при этом выделяют *изобарную* c_p и *изохорную* теплоемкость c_υ. Такое разделение связано со свойством газов сильно расширяться при нагревании, тогда как жидкости и твердые тела расширяются при нагревании незначительно.

Если подводить некоторое количество теплоты к газу при постоянном объеме (изохорный процесс), то теплота будет затрачиваться только на приращение внутренней энергии газа (т.е. увеличивается только температура газа). Если подводить некоторое количество теплоты к газу при постоянном давлении (изобарный процесс), то теплота не только будет затрачиваться на приращение внутренней энергии газа (увеличение его температуры), но и на работу расширения (увеличение его объема). Таким образом, для увеличение температуры газа на 1 *К* в изобарном процессе понадобиться большее количество теплоты, чем в изохорном.

Разница между c_p и c_υ отражена *формулой Майера*:

$$c_{\mu p} - c_{\mu \upsilon} = R_\mu; \;\; c_p - c_\upsilon = R. \tag{7.9}$$

Также

$$\frac{c_p}{c_\upsilon} = k, \tag{7.10}$$

где *k* – показатель адиабаты.

Теплоемкость идеального газа можно вычислить теоретическим путем, применяя методы статистической физики. При этом вычисление теплоемкости сводится к вычислению средней энергии теплового движения отдельных молекул газа, которое складывается из поступательного и вращательного движения молекулы как целого и колебательного движения атомов внутри молекулы.

Закон равнораспределения гласит: *для статистистической системы (системы, состоящей из большого числа частиц) в состоянии термодинамического равновесия на каждую поступательную и на каждую*

вращательную степень свободы в среднем приходится кинетическая энергия $\frac{kT}{2}$*, а на каждую колебательную степень свободы – кинетическая энергия kT.*

Под *степенями свободы* понимают число независимых переменных, которыми однозначно можно описать движение частицы.

Кинетическая энергия теплового движения молекул составляет внутреннюю энергию идеального газа. А в изохорном процессе, как известно, передаваемое количество теплоты равно приращению внутренней энергии газа, поэтому молярная изохорная теплоемкость непосредственно связана с кинетической энергией теплового движения молекул.

Таким образом, согласно закону равнораспределения, *на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится молярная изохорная теплоемкость* $c_{\mu\upsilon} = \frac{R_\mu}{2}$*, на каждую колебательную степень свободы – молярная изохорная теплоемкость* $c_{\mu\upsilon} = R_\mu$.

Частица одноатомного газа обладает 3 степенями свободы поступательного движения. Таким образом, для одноатомного газа $c_{\mu\upsilon} = \frac{3}{2}R_\mu$.

Частица двухатомного газа обладает 3 степенями свободы поступательного, 2 степенями свободы вращательного и 1 степенью свободы колебательного движения. Таким образом, для двухатомного газа $c_{\mu\upsilon} = \frac{7}{2}R_\mu$. Однако, согласно экспериментальным данным $c_{\mu\upsilon} \approx \frac{5}{2}R_\mu$. Такое расхождение связано с тем, что энергии теплового движения молекул при обычных температурах недостаточно для возбуждения колебаний атомов в молекулах.

Аналогично и для трехатомного газа $c_{\mu\upsilon} \approx 3R_\mu$.

Теплоемкость с увеличением температуры увеличивается. Для идеальных газов эта зависимость имеет вид

$$c = c_0 + at + bt^2 + \ldots, \tag{7.11}$$

где c_0 – массовая теплоемкость газа при $t = 0^oC$; a, b – постоянные, полученные опытным путем.

Для технических расчетов ограничиваются зависимостью

$$c = c_0 + at\,. \tag{7.12}$$

Массовая теплоемкость газовой смеси определяется по формуле:

$$c_{см} = \sum_{i=1}^{n} g_i c_i\,, \tag{7.13}$$

где c_i – массовая теплоемкость i-го компонента газовой смеси; g_i – массовая для i-го компонента.

8. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1. Формулировка первого начала термодинамики

Закон сохранения и превращения энергии является фундаментальным законом, имеющим всеобщий характер. В термодинамике он трансформируется в первое начало термодинамики.

Первое начало термодинамики для закрытой системы формулируется следующим образом: *количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил.*

В дифференциальной форме первое начало термодинамики можно записать:

$$\delta Q_\tau = dU + \delta L, \tag{8.1}$$

где δQ_τ – элементарное количество теплоты, сообщенное системе; dU – приращение внутренней энергии системы; δL – элементарная работа против внешних сил (работа расширения).

Для массы термодинамической системы, равной 1 *кг*:

$$\delta q_\tau = du + \delta l \tag{8.2}$$

или

$$\delta q_\tau = du + pd\upsilon \tag{8.3}$$

Прибавим к правой части выражения (8.3) υdp и отнимем υdp, чтобы ничего не изменилось:

$$\delta q_\tau = du + pd\upsilon + \upsilon dp - \upsilon dp; \tag{8.4}$$

$$\delta q_\tau = du + \left(pd\upsilon + \upsilon dp\right) - \upsilon dp = du + d\left(p\upsilon\right) - \upsilon dp; \tag{8.5}$$

$$\delta q_\tau = d\left(u + p\upsilon\right) - \upsilon dp; \tag{8.6}$$

$$\delta q_\tau = dh - \upsilon dp; \tag{8.7}$$

$$\delta q_\tau = dh + \delta l'. \tag{8.8}$$

Выражение (8.8) тоже представляет собой первое начало термодинамики, при этом $\delta l' = -\upsilon dp$ называется технической работой.

Для газового потока уравнение первого начала термодинамики представлено выражением (3.164). Так как работой против сил тяжести обычно пренебрегают, то для массового расхода газ 1 *кг/с* будет справедливо выражение первого начала термодинамики в форме (3.169).

8.2. Первое начало термодинамики для основных термодинамических процессов

1. Изохорный процесс

В изохорном процессе изменения параметров идеального газа $\upsilon = const$, поэтому первое начало термодинамики для этого процесса будет иметь вид

$$\delta q_\tau = du \tag{8.9}$$

или

$$c_\upsilon dT = du\,. \tag{8.10}$$

Также первое начало термодинамики для изохорного процесса можно представить в виде

$$\delta q_\tau = dh + \delta l' \tag{8.11}$$

или

$$c_\upsilon dT = dh - \upsilon dp\,. \tag{8.12}$$

Дифференциал энтальпии можно выразить как

$$dh = du + d(p\upsilon) = c_\upsilon dT + d(RT) = c_\upsilon dT + RdT = (c_\upsilon + R)dT = c_p dT\,. \tag{8.13}$$

С учетом выражения (8.9) можно записать чему равен дифференциал удельной энтропии:

$$ds = \frac{dq_\tau}{T} = c_\upsilon \frac{dT}{T}\,. \tag{8.14}$$

В интегральной форме первое начало термодинамики для изохорного процесса будет иметь вид

$$q_\tau = \Delta u \tag{8.15}$$

или

$$q_\tau = \Delta h + l'\,. \tag{8.16}$$

Из (8.9) – (8.14) следует, что для изохорного процесса идеального газа ($\upsilon = const$):

$$\begin{gathered} q_\tau = c_\upsilon \Delta T = c_\upsilon (T_2 - T_1); \\ \Delta u = c_\upsilon \Delta T = c_\upsilon (T_2 - T_1); \\ l = 0; \\ \Delta h = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1); \\ l' = -\upsilon \Delta p = -\upsilon (p_2 - p_1); \\ \Delta s = c_\upsilon \, ln \frac{T_2}{T_1}, \end{gathered} \tag{8.17}$$

где T_1, T_2 – начальная и конечная температура газа в процессе соответственно; p_1, p_2 – начальное и конечное давление газа в процессе соответственно.

2. Изобарный процесс

В изобарном процессе изменения параметров идеального газа $p = const$, поэтому первое начало термодинамики для этого процесса будет иметь вид

$$\delta q_\tau = du + \delta l \tag{8.18}$$

или

$$c_p dT = c_\upsilon dT + pd\upsilon\,. \tag{8.19}$$

Также первое начало термодинамики для изобарного процесса можно представить в виде

$$\delta q_\tau = dh \tag{8.20}$$

или

$$c_\upsilon dT = dh\,. \tag{8.21}$$

Дифференциал удельной энтропии можно записать в виде:

$$ds = \frac{dq_\tau}{T} = c_\upsilon \frac{dT}{T}\,. \tag{8.22}$$

В интегральной форме первое начало термодинамики для изобарного процесса будет иметь вид

$$q_\tau = \Delta u + l \tag{8.23}$$

или

$$q_\tau = \Delta h\,. \tag{8.24}$$

Из (8.18) – (8.22) следует, что для изобарного процесса идеального газа ($p = const$):

$$\begin{gathered} q_\tau = c_p \Delta T = c_p \left(T_2 - T_1\right); \\ \Delta u = c_\upsilon \Delta T = c_\upsilon \left(T_2 - T_1\right); \\ l = p\Delta\upsilon = p\left(\upsilon_2 - \upsilon_1\right); \\ \Delta h = c_p \Delta T = c_p \left(T_2 - T_1\right); \\ l' = 0\,; \\ \Delta s = c_p \, ln \frac{T_2}{T_1}\,, \end{gathered} \tag{8.25}$$

где T_1, T_2 – начальная и конечная температура газа в процессе соответственно; υ_1, υ_2 – начальный и конечный удельный объем газа в процессе соответственно.

3. Изотермический процесс

В изотермическом процессе изменения параметров идеального газа $T = const$ или $p\upsilon = const$, поэтому первое начало термодинамики для этого процесса будет иметь вид

$$\delta q_\tau = \delta l \tag{8.26}$$

или

$$\delta q_\tau = pd\upsilon\,. \tag{8.27}$$

Также первое начало термодинамики для изотермического процесса можно представить в виде

$$\delta q_\tau = \delta l' \tag{8.28}$$

или

$$\delta q_\tau = -\upsilon dp\,. \tag{8.29}$$

С учетом выражения (8.27) и (6.1) можно записать чему равен дифференциал удельной энтропии:

$$ds = \frac{dq_\tau}{T} = \frac{pd\upsilon}{T} = R\frac{d\upsilon}{\upsilon}\,. \tag{8.30}$$

В интегральной форме первое начало термодинамики для изотермического процесса будет иметь вид

$$q_\tau = l \tag{8.31}$$

или

$$q_\tau = l' . \tag{8.32}$$

Из (8.31) – (8.32) следует, что для изотермического процесса идеального газа ($T = const$ или $p\upsilon = const$):

$$\begin{gathered} q_\tau = T\Delta s = RT\,ln\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = -RT\,ln\frac{p_2}{p_1}; \\ \Delta u = 0; \\ l = RT\,ln\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}; \\ \Delta h = 0; \\ l' = -RT\,ln\frac{p_2}{p_1}; \\ \Delta s = R\,ln\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}, \end{gathered} \tag{8.33}$$

где υ_1, υ_2 – начальный и конечный удельный объем газа в процессе соответственно; p_1, p_2 – начальное и конечное давление газа в процессе соответственно.

4. Адиабатный процесс

Адиабатный процесс характерен тем, что в нем $\delta q_\tau = 0$. Этот процесс также называют *изоэнтропным*, так как $s = const$.

Первое начало термодинамики для адиабатного процесса будет иметь вид

$$\delta l = -du \tag{8.34}$$

или

$$pd\upsilon = -c_\upsilon dT . \tag{8.35}$$

Также первое начало термодинамики для изобарного процесса можно представить в виде

$$\delta l' = -dh \tag{8.36}$$

или

$$\upsilon dp = c_p dT . \tag{8.37}$$

Из выражения первого начала термодинамики в форме (8.35) найдем уравнение адиабатного процесса.

$$c_\upsilon dT + pd\upsilon = 0 . \tag{8.35}$$

Найдем дифференциал температуры дифференцированием уравнения состояния идеального газа (6.1):

$$pd\upsilon + \upsilon dp = RdT . \tag{8.36}$$

Тогда

$$c_\upsilon\left(\frac{pd\upsilon+\upsilon dp}{R}\right)+pd\upsilon=\frac{c_\upsilon+R}{R}pd\upsilon+\frac{c_\upsilon}{R}\upsilon dp=0; \tag{8.37}$$

Согласно формуле Майера (7.9)

$$c_p pd\upsilon+c_\upsilon\upsilon dp=0. \tag{8.38}$$

Таким образом,

$$\frac{c_p}{c_\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{dp}{p}. \tag{8.39}$$

Обозначим отношение $\frac{c_p}{c_\upsilon}=k$, где k – показатель адиабаты, и проинтегрируем выражение (8.39). Получим, что

$$k\,ln\upsilon=-ln\,p+const \tag{8.40}$$

или

$$ln\left(p\upsilon^k\right)=const. \tag{8.41}$$

Таким образом, если логарифм некоторой функции величина постоянная, то и сама функция является постоянной величиной

$$p\upsilon^k=const. \tag{8.42}$$

Выражение (8.42) представляет собой *уравнение адиабатного процесса*.

В интегральной форме первое начало термодинамики для адиабатного процесса будет иметь вид

$$l=-\Delta u \tag{8.43}$$

или

$$l'=\Delta h. \tag{8.44}$$

Из (8.34) – (8.42) следует, что для адиабатного процесса идеального газа ($p\upsilon^k=const$):

$$\begin{gathered}
q_\tau=0;\\
\Delta u=c_\upsilon\Delta T=c_\upsilon\left(T_2-T_1\right);\\
l=-\frac{1}{k-1}\left(p_2\upsilon_2-p_1\upsilon_1\right);\\
\Delta h=c_p\Delta T=c_p\left(T_2-T_1\right);\\
l'=-\frac{k}{k-1}\left(p_2\upsilon_2-p_1\upsilon_1\right);\\
\Delta s=0,
\end{gathered} \tag{8.45}$$

где T_1, T_2 – начальная и конечная температура газа в процессе соответственно; υ_1, υ_2 – начальный и конечный удельный объем газа в процессе соответственно; p_1, p_2 – начальное и конечное давление газа в процессе соответственно.

5. Политропный процесс

Политропный процесс можно определить как термодинамический процесс изменения параметров идеального газа при постоянной теплоемкости $c=const$.

Все основные термодинамические процессы (изохорный, изобарный, изотермический, адиабатный) являются частными случаями политропного процесса.

Для политропного процесса первое начало термодинамики имеет вид

$$\delta q_\tau = du + \delta l \tag{8.46}$$

или

$$cdT = c_\upsilon dT + pd\upsilon, \tag{8.47}$$

где c – массовая теплоемкость газа в политропном процессе.

Также первое начало термодинамики для политропного процесса можно представить в виде

$$\delta q_\tau = dh + \delta l' \tag{8.48}$$

или

$$cdT = c_p dT - \upsilon dp. \tag{8.49}$$

Из выражения первого начала термодинамики в форме (8.47) найдем уравнение политропного процесса.

$$cdT - c_\upsilon dT - pd\upsilon = 0; \tag{8.50}$$

$$(c - c_\upsilon)dT - pd\upsilon = 0; \tag{8.51}$$

Воспользуемся выражением (8.36), тогда

$$(c - c_\upsilon)\left(\frac{pd\upsilon + \upsilon dp}{R}\right) - pd\upsilon = 0; \tag{8.52}$$

$$\frac{c - c_\upsilon}{R} pd\upsilon + \frac{c - c_\upsilon}{R}\upsilon dp - pd\upsilon = 0; \tag{8.53}$$

$$\frac{c - c_\upsilon - R}{R} pd\upsilon + \frac{c - c_\upsilon}{R}\upsilon dp = 0. \tag{8.54}$$

Согласно формуле Майера (7.9)

$$(c - c_\upsilon - c_p + c_\upsilon)pd\upsilon + (c - c_\upsilon)\upsilon dp = 0; \tag{8.55}$$

$$\frac{c - c_p}{c - c_\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{dp}{p}. \tag{8.56}$$

Обозначим отношение $\frac{c - c_p}{c - c_\upsilon} = n$, где n – показатель политропы, и проинтегрируем выражение (8.56). Получим, что

$$n \ln\upsilon = -\ln p + const \tag{8.57}$$

или

$$\ln\left(p\upsilon^n\right) = const. \tag{8.58}$$

Таким образом, если логарифм некоторой функции величина постоянная, то и сама функция является постоянной величиной

$$p\upsilon^n = const. \tag{8.59}$$

Выражение (8.59) представляет собой *уравнение политропного процесса*.

Выразим теплоемкость идеального газа в политропном процессе через известную изохорную теплоемкость. Из выражения для показателя политропы $n = \frac{c - c_p}{c - c_\upsilon}$ и показателя адиабаты $k = \frac{c_p}{c_\upsilon}$ имеем, что

$$c = c_\upsilon \frac{n - k}{n - 1}. \tag{8.60}$$

С учетом выражений (8.47) и (6.1) можно записать чему равен дифференциал удельной энтропии:

$$ds = \frac{dq_\tau}{T} = \frac{c_\upsilon dT + pd\upsilon}{T} = c_\upsilon \frac{dT}{T} + R\frac{d\upsilon}{\upsilon}. \tag{8.61}$$

В интегральной форме первое начало термодинамики для политропного процесса будет иметь вид

$$q_\tau = \Delta u + l \tag{8.62}$$

или

$$q_\tau = \Delta h + l'. \tag{8.63}$$

Из (8.46) – (8.61) следует, что для политропного процесса идеального газа ($p\upsilon^n = const$):

$$\begin{gathered} q_\tau = c\Delta T = c(T_2 - T_1) = c_\upsilon \frac{n - k}{n - 1}(T_2 - T_1); \\ \Delta u = c_\upsilon \Delta T = c_\upsilon (T_2 - T_1); \\ l = -\frac{1}{n - 1}(p_2\upsilon_2 - p_1\upsilon_1); \\ \Delta h = c_p \Delta T = c_p (T_2 - T_1); \\ l' = -\frac{n}{n - 1}(p_2\upsilon_2 - p_1\upsilon_1); \\ \Delta s = c_\upsilon ln\frac{T_2}{T_1} + R ln\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}, \end{gathered} \tag{8.64}$$

где T_1, T_2 – начальная и конечная температура газа в процессе соответственно; υ_1, υ_2 – начальный и конечный удельный объем газа в процессе соответственно; p_1, p_2 – начальное и конечное давление газа в процессе соответственно.

Показатель политропы n может меняться от 0 до ∞. Рассмотрим частные случаи:

1. при n = 0 уравнение политропного процесса $p\upsilon^n = const$ переходит в уравнение изобарного процесса $p = const$;

2. при n = 1 уравнение политропного процесса $p\upsilon^n = const$ переходит в уравнение изотермического процесса $p\upsilon = const$;

3. при $n = k$ уравнение политропного процесса $p\upsilon^n = const$ переходит в уравнение адиабатного процесса $p\upsilon^k = const$;

4. при $n = \infty$ уравнение политропного процесса $p\upsilon^n = const$ переходит в уравнение изохорного процесса $\upsilon = const$.

На рис. 8.1 изображены все представленные термодинамические процессы на $p\upsilon$-диаграмме, а на рис. 8.2 изображены все представленные термодинамические процессы на Ts-диаграмме.

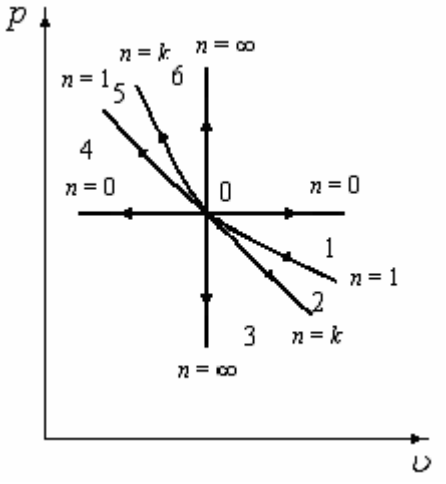


Рис. 8.1. Изображение на $p\upsilon$-диаграмме основных термодинамических процессов

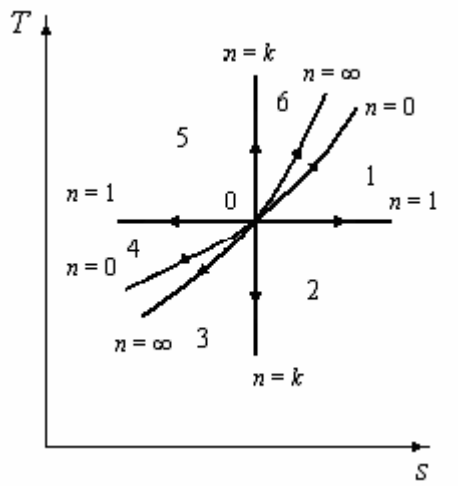


Рис. 8.2. Изображение на Ts –диаграмме основных термодинамических процессов

Таким образом все процессы можно разделить на несколько групп. Процессы 1 и 6 группы имеют показатель политропы $0 < n < 1$; 2 и 5 группы $1 < n < k$; 3 и 6 группы $k < n < \infty$. В процессах 1, 2, 3 групп происходит расширение газа, а в процессах 4, 5, 6 групп происходит сжатием газа.

9. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

9.1. Формулировка второго начала термодинамики

Первое начало термодинамики представляет собой математическое выражение закона сохранения и превращения энергии, но не определяет условий возможности таких преобразований. Согласно этому закону возможен переход теплоты от более «горячего» тела к более «холодному» и наоборот, от «холодного» к «горячему». Между тем реальные процессы, происходящие вокруг нас, необратимы, т. е. они самопроизвольно идут только в одном направлении (в направлении установления термодинамического равновесия в системе).

Утверждение о невозможности получения работы за счет энергии тел, находящихся в термодинамическом равновесии, составляет основное положение второго начала термодинамики.

Существует огромное количество формулировок второго начала термодинамики. Приведем лишь некоторые из них.

Формулировка Клаузиуса: *Тепло не может самопроизвольно переходить от менее нагретого тела к более нагретому.*

Формулировка Томпсона: *Невозможен процесс, единственный результат которого состоял бы в поглощении от нагревателя теплоты и полном преобразовании этой теплоты в работу.*

Формулировка Планка: *Невозможно построить периодически действующую машину, единственным результатом действия которой было бы совершение механической работы за счет охлаждения теплового резервуара.*

Таким образом, второе начало термодинамики исключает возможность построения «вечного двигателя второго рода», который совершал бы работу за счет энергии тел, находящихся в термодинамическом равновесии, подобно тому, как первое начало термодинамики исключает возможность построения «вечного двигателя первого рода», который совершал бы работу без внешнего источника энергии.

9.2. Цикл Карно

С. Карно предложил термодинамический цикл, дающий максимальное значение термического кпд тепловой машины.

Физическая картина явлений, происходящих в цикле Карно может быть представлена следующим образом.

В точке 1 находится рабочее тело (идеальный газ) двигателя, с параметрами p_1, υ_1, T_1 (рис. 9.1). К рабочему телу подводится нагреватель, температура которого также равна T_1. Под влиянием высокого давления поршень двигателя начинает двигаться вправо, при этом расширение рабочего тела происходит при постоянной температуре, которая поддерживается

нагревателем. В точке 2 рабочее тело имеет параметры p_2, υ_2, T_1. При этом рабочее тело изолируется от нагревателя, но продолжает расширяться адиабатно, двигая поршень вправо. В адиабатном процессе расширения температура рабочего тела понижается до T_2. В этот момент поршень достигает своего крайне правого положения. Параметры рабочего тела в точке 3 равны p_3, υ_3, T_2. Обратное движение поршня происходит под воздействием энергии, накопленной в маховике и передаваемой посредством кривошипно-ползункового механизма. Рабочее тело начинает сжиматься, при этом оно сообщается с охладителем, имеющим температуру T_2. Таким образом, сжатие происходит при постоянной температуре T_2. В точке 4 параметры рабочего тела достигают значений p_4, υ_4, T_2. Рабочее тело изолируется от охладителя и продолжает сжиматься адиабатно, при этом температура рабочего тела возрастает до T_1 и параметры рабочего тела вновь соответствуют параметрам в точке 1.

Термический кпд цикла определяется по формуле:

$$\eta = \frac{L_ц}{Q_{\tau подв}}, \tag{9.1}$$

где $L_ц$ – работа цикла; $Q_{\tau подв}$ – подводимое количество теплоты.

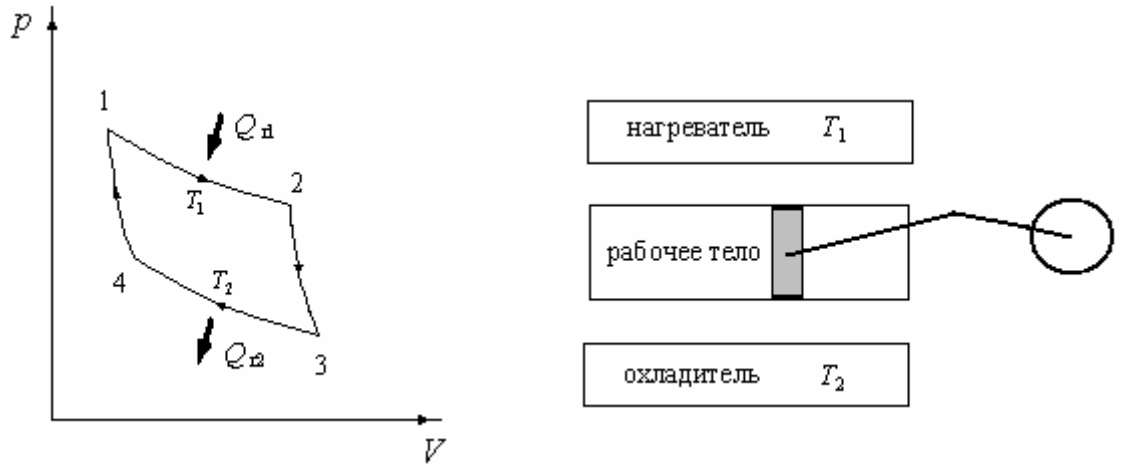


Рис. 9.1. Цикл Карно

Рассмотрим подробно термодинамические процессы цикла Карно.

1 – 2: *изотермический процесс*

$$Q_{\tau 1} = Q_{\tau 1-2} = L_{1-2} = mRT_1 \ln\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}. \tag{9.2}$$

2 – 3: *адиабатный процесс*

$$Q_{\tau 2-3} = 0;\ L_{2-3} = m\frac{1}{k-1}\left(p_1\upsilon_1 - p_2\upsilon_2\right) = \frac{mR}{k-1}\left(T_1 - T_2\right). \tag{9.3}$$

3 – 4: *изотермический процесс*

$$Q_{\tau 2} = Q_{\tau 3-4} = L_{3-4} = -mRT_2 \, ln\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}. \tag{9.4}$$

4 – 1: *адиабатный процесс*

$$Q_{\tau 4-1} = 0;\; L_{4-1} = m\frac{1}{k-1}\left(p_3\upsilon_3 - p_4\upsilon_4\right) = -\frac{mR}{k-1}\left(T_1 - T_2\right). \tag{9.5}$$

Таким образом,

$$L_ц = L_{1-2} + L_{2-3} + L_{3-4} + L_{4-1}; \tag{9.6}$$

$$L_ц = mRT_1 \, ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) + \frac{mR}{k-1}\left(T_1 - T_2\right) - mRT_2 \, ln\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right) - \frac{mR}{k-1}\left(T_1 - T_2\right); \tag{9.7}$$

$$L_ц = mRT_1 \, ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) - mRT_2 \, ln\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right). \tag{9.8}$$

Также

$$L_ц = Q_{\tau 1} - Q_{\tau 2}. \tag{9.9}$$

Подставляя выражение (9.9) в (9.1), получим формулу для расчета кпд цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_{\tau 1} - Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}}; \tag{9.10}$$

$$\eta = \frac{mRT_1 \, ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) - mRT_2 \, ln\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right)}{mRT_1 \, ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)} = \frac{T_1 \, ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) - T_2 \, ln\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right)}{T_1 \, ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)}. \tag{9.11}$$

С учетом (6.1) уравнение адиабаты может быть представлено в виде

$$p\upsilon^k = T\upsilon^{k-1} = const. \tag{9.12}$$

Запишем уравнения адиабаты для процессов 2 – 3 и 4 – 1:

$$T_1\upsilon_2^{k-1} = T_2\upsilon_3^{k-1} \tag{9.13}$$

и

$$T_1\upsilon_1^{k-1} = T_2\upsilon_4^{k-1}. \tag{9.14}$$

Поделив первое уравнение на второе получим, что

$$\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right)^{k-1}. \tag{9.15}$$

Прологарифмируем это уравнение:

$$\left(k-1\right) ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) = \left(k-1\right) ln\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right); \tag{9.16}$$

$$ln\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) = ln\left(\frac{\upsilon_3}{\upsilon_4}\right). \tag{9.17}$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{9.18}$$

Выражение для термического кпд можно получить, рассматривая цикл Карно в *Ts*-диаграмме (рис. 9.2). При этом

$$Q_{\tau 1} = T_1 \Delta s; \tag{9.19}$$

$$Q_{\tau 2} = T_2 \Delta s; \tag{9.20}$$

$$\eta = \frac{Q_{\tau 1} - Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}} = \frac{T_1 \Delta s - T_2 \Delta s}{T_1 \Delta s} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{9.21}$$

В дальнейшем Карно доказал, что формула (9.18) применима только для обратимого цикла Карно, а формула (9.10) может применяться для необратимого цикла Карно. При этом $\eta_{необр} < \eta_{обр}$.

Обратимым циклом называется цикл, все процессы в котором обратимы.

Необратимым циклом называется цикл, в котором хотя бы один процесс является необратимым.

Также Карно была сформулирована теорема: *Термический кпд цикла с двумя источниками теплоты (нагревателем и охладителем) не зависит от свойств рабочего тела цикла.*

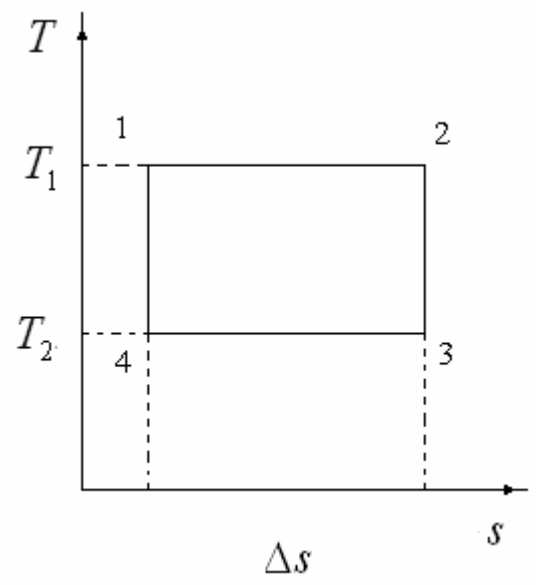


Рис. 9.2. Цикл Карно, представленный на *Ts*-диаграмме

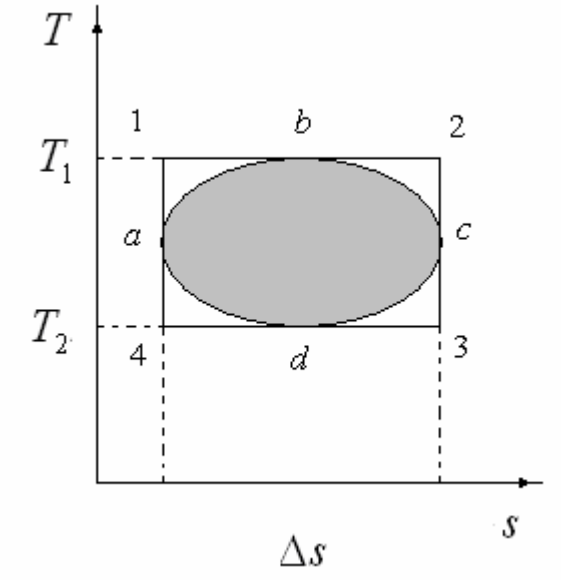


Рис. 9.3. Сравнение кпд произвольного цикла с кпд цикла Карно

При исследовании обратимых циклов, степень совершенства произвольного обратимого цикла определяется тем, насколько термический кпд

этого цикла близок к термическому кпд цикла Карно, осуществляемого между крайними температурами рассматриваемого цикла.

Такое сравнение удобно представлять на *Ts*-диаграмме (рис. 9.3).

Отношение площадей произвольного цикла к площади цикла Карно называют *коэффициентом заполнения цикла*. Чем больше коэффициент заполнения, тем ближе приближается рассматриваемый произвольный цикл к наиболее эффективному преобразованию теплоты в работу.

9.3. Интеграл Клаузиуса

Интегральным уравнением второго начала термодинамики для равновесных круговых процессов является интеграл Клаузиуса.

Для термического кпд обратимого цикла Карно можно записать:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}} \tag{9.22}$$

и

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{9.23}$$

Таким образом,

$$1 - \frac{Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \tag{9.24}$$

$$\frac{Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}} = \frac{T_2}{T_1}; \tag{9.25}$$

$$\frac{Q_{\tau 1}}{T_1} = \frac{Q_{\tau 2}}{T_2}. \tag{9.26}$$

Отметим, что $Q_{\tau 2}$ – величина отрицательная, поэтому с учетом знака можно записать, что

$$\frac{Q_{\tau 1}}{T_1} + \frac{Q_{\tau 2}}{T_2} = \sum_i \frac{Q_{\tau i}}{T_i} = 0. \tag{9.27}$$

Величина $\frac{Q_\tau}{T}$ называется *приведенной теплотой*.

Таким образом, в обратимом цикле Карно сумма приведенных теплот равна нулю.

Можно доказать, что полученное равенство верно не только для цикла Карно, но и для любого обратимого цикла. При этом рассматриваемый произвольный обратимый цикл разбивается на большое количество элементарных циклов Карно, для каждого из которых верно равенство:

$$\sum_i \frac{Q_{\tau i}}{T_i} = 0. \tag{9.28}$$

Если произвести разбивание на бесконечно большое количество элементарных циклов, то в пределе получим, что

$$\oint \frac{\delta Q_\tau}{T} = 0 . \tag{9.29}$$

Выражение (9.29) представляет собой интеграл Клаузиуса для обратимых круговых процессов.

Для необратимых циклов термический кпд можно вычислять только по формуле (9.22). Из неравенства $\eta_{необр} < \eta_{обр}$ следует, что

$$1 - \frac{Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}} < 1 - \frac{T_2}{T_1} . \tag{9.30}$$

$$\frac{Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 1}} > \frac{T_2}{T_1} . \tag{9.31}$$

Следовательно,

$$\frac{Q_{\tau 1}}{T_1} + \frac{Q_{\tau 2}}{T_2} = \sum_i \frac{Q_{\tau i}}{T_i} < 0 . \tag{9.32}$$

Для произвольного необратимого цикла по аналогии можно получить, что

$$\oint \frac{\delta Q_\tau}{T} < 0 . \tag{9.33}$$

Выражение (9.33) представляет собой интеграл Клаузиуса для необратимых круговых процессов.

Объединяя оба интеграла можно записать, что

$$\oint \frac{\delta Q_\tau}{T} \le 0 . \tag{9.34}$$

Подынтегральное выражение при этом представляет собой полный дифференциал некоторой функции. эта функция в термодинамике получила название *энтропии*.

Таким образом, для обратимых процессов

$$\frac{\delta Q_\tau}{T} = ds , \tag{9.35}$$

а для необратимых процессов

$$\frac{\delta Q_\tau}{T} < ds . \tag{9.36}$$

Обобщая выражения (9.35) и (9.36) получаем, что

$$\frac{\delta Q_\tau}{T} \le ds . \tag{9.37}$$

Следовательно для замкнутой системы, для которой которая $\delta Q_\tau = 0$:

$$ds \ge 0 . \tag{9.38}$$

Таким образом, энтропия замкнутой системы в необратимых процессах остается неизменной, а в обратимых процессах увеличивается.

9.4. Энтропия и термодинамическая вероятность

Согласно выражению (9.38) энтропия замкнутой термодинамической системы в необратимых процессах возрастает, при этом максимальное значение энтропии достигается тогда, когда система приходит в состояние термодинамического равновесия.

Молекулярно-кинетическое истолкование такой формулировки второго начала термодинамики было дано Больцманом, который ввел в теорию теплоты статистические представления, основанные на том, что необратимость тепловых процессов имеет вероятностный характер.

Переход из неравновесного состояния в равновесное представляет собой переход системы из состояния, которое может осуществляться меньшим числом способов в состояние, осуществляемое большим числом способов. Наиболее вероятным для системы будет то состояние, которое осуществляется наибольшим числом способов (состояние термодинамического равновесия). Поэтому маловероятным был бы самопроизвольный выход системы из состояния термодинамического равновесия.

Число способов, которыми может быть осуществляется данное равновесное состояние, называется *термодинамической вероятностью* и обозначается ω.

Число способов ω, которыми может осуществляется данное состояние системы, состоящее, например, из двух тел, равно произведению чисел способов ω_1 и ω_2, которыми могут быть осуществлены состояния каждого из этих тел в отдельности:

$$\omega_{сист} = \omega_1 \omega_2 . \tag{9.39}$$

Больцман предложил существование функциональной зависимости между энтропией и термодинамической вероятностью.

Для системы, состоящей из двух частей:

$$S_{сист} = S_1 + S_2 . \tag{9.40}$$

Таким образом,

$$S_{сист}(\omega_1 \omega_2) = S_1(\omega_1) + S_2(\omega_2). \tag{9.41}$$

Такому функциональному уравнению удовлетворяет логарифмическая функция, поэтому

$$S_{сист} = k \ln \omega , \tag{9.42}$$

где k – постоянная Больцмана.

Из этой формулы следует, что при возрастании вероятности состояния системы увеличивается и энтропия системы, значение которой при равновесии должно быть максимальным, как и значение ω.

С принципом возрастания энтропии в системах связаны представления о тепловой смерти Вселенной, выдвинутые Клаузиусом. Однако, современные представления говорят, что Вселенную нельзя рассматривать как конечную замкнутую систему.

10. РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

10.1. Уравнения состояния реальных газов

Все реальные газы являются парами тех или иных жидкостей, причем чем ближе газ к переходу в жидкое состояние, тем больше его свойства отклоняются от свойств идеального газа, состояние которого описывается уравнением Клапейрона. Рассмотрим область состояний газа, близкую к переходу в жидкое состояние.

Если сжимать газ при постоянной температуре, то можно достигнуть состояния насыщения (сжижения газа), соответствующего этой температуре и некоторому определенному давлению. При дальнейшем сжатии пар будет конденсироваться и в определенный момент превратится в жидкость. Процесс перехода пара в жидкость проходит при постоянных давлении и температуре, которая при данном давлении представляет собой температуру кипения.

На $p\upsilon$-диаграмме (рис. 10.1) область двухфазных состояний (пар и жидкость) лежит между кривыми кипящей жидкости и сухого насыщенного пара. При увеличении давления температура перехода пара в жидкость также увеличивается, при этом участок двухфазных состояний на $p\upsilon$-диаграмме располагается выше и при некотором определенном для рассматриваемой жидкости давлении превращается в точку. Эта точка называется *критической*, ей соответствуют критические параметры: давление $p_{кр}$, температура $T_{кр}$, удельный объем $\upsilon_{кр}$. В критической точке исчезают различия между жидкостью и паром. При температуре более высокой, чем критическая газ ни при каком давлении не может сконденсироваться, т. е. превратиться в жидкость.

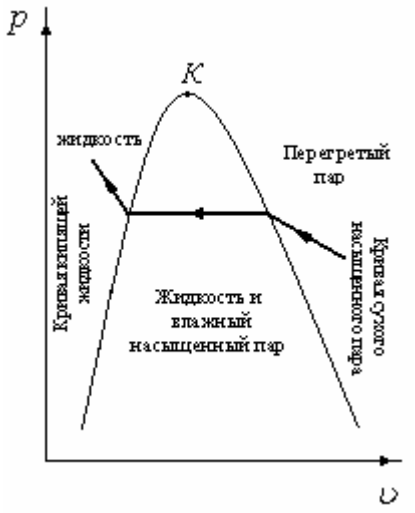


Рис. 10.1. Изотерма реального газа на $p\upsilon$-диаграмме

Широкое распространение в научных исследованиях получило *уравнение Ван-дер-Ваальса*, которое представляет собой уравнение состояния реального газа:

$$\left(p+\frac{a}{\upsilon^2}\right)(\upsilon-b)=RT\,. \tag{10.1}$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса отличается от уравнения Клапейрона двумя поправками: поправкой на объем самих молекул b и поправкой на так называемое внутреннее давление $\frac{a}{\upsilon^2}$, обусловленное взаимным притяжением молекул газа.

Теоретическая изотерма реального газа, построенная с учетом уравнения Ван-дер-Ваальса имеет вид, представленный на рис. 10.2. Таким образом, теоретическая изотерма отличается от реальной.

Участки *AB* и *CD* реализуются на практике только при использовании чистых веществ. На участке *AB* вещество находится в состоянии, которое называется *перегретая жидкость*. Чтобы жидкость достигла такого состояния, ее необходимо очистить от *центров кипения* (различных примесей, пылинок и т. д.). На участке *CD* вещество находится в состоянии, которое называется *перенасыщенный пар*. Чтобы пар достиг такого состояния, его необходимо очистить от *центров конденсации* (различных примесей, пылинок и т. д.). Участок *BC* на практике не реализуется.

При критической температуре максимум и минимум на изотерме сливаются в критическую точку *K*, которая является точкой перегиба. Для критической точки выполняются условия:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \upsilon}\right)_{T_{кр}}=0;\ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \upsilon^2}\right)_{T_{кр}}=0\,. \tag{10.2}$$

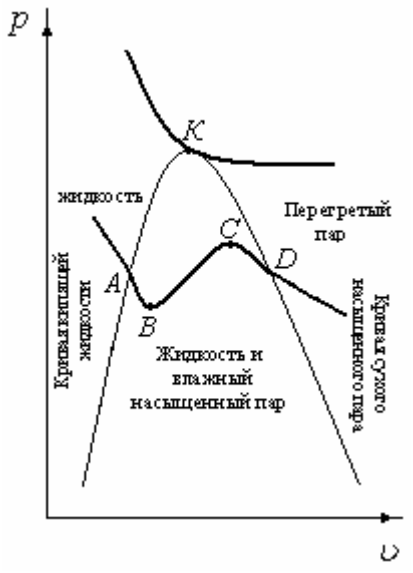


Рис. 10.2. Теоретическая изотерма реального газа на $p\upsilon$-диаграмме

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \upsilon}\right)_T = -\frac{RT}{(\upsilon - b)^2} + \frac{2a}{\upsilon^3} = 0; \tag{10.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \upsilon^2}\right)_T = \frac{RT}{(\upsilon - b)^2} - \frac{ba}{\upsilon^4} = 0. \tag{10.4}$$

Из уравнений (8.3), (8.4) получаем, что

$$T_{кр} = \frac{8a}{27Rb};\ \upsilon_{кр} = 3b;\ p_{кр} = \frac{a}{27b^2}. \tag{10.5}$$

$$a = \frac{27}{64}\frac{R^2 T_{кр}}{p_{кр}};\ b = \frac{\upsilon_{кр}}{3}. \tag{10.6}$$

Предпринимались попытки усовершенствования уравнения Ван-дер-Ваальса за счет того, что коэффициенты a и b принимались не постоянными, а зависящими от температуры и объема. Но эти попытки не привели к созданию уравнения состояния, описывающего свойства газа в широком диапазоне изменения параметров. Поэтому появилось большое количество уравнений состояния, которые предсказывают поведение реальных газов в достаточно большом диапазоне условий. Наиболее известны из них *уравнение Битти-Бриджмена* с пятью эмпирически определяемыми постоянными, *уравнение Бенедикта-Вебб-Рубина*, содержащее восемь эмпирических постоянных.

Хорошо согласуется с опытными данными *уравнение Вукаловича-Новикова*, учитывающее ассоциацию молекул. При учете столкновений двойных молекул это уравнение имеет вид

$$\left(p + \frac{a}{\upsilon^2}\right)(\upsilon - b) = R_1 T, \tag{10.7}$$

где $R_1 = R\left(1 - \frac{cp}{T^{\frac{5+2m}{2}}}\right)$; c и m – опытные константы.

В настоящее время теоретически обосновано уравнение состояния, представляющее собой разложение фактора сжимаемости z в бесконечный ряд по степеням $\frac{1}{\upsilon}$:

$$z = \frac{p\upsilon}{RT} = 1 + \frac{B_2(T)}{\upsilon} + \frac{B_3(T)}{\upsilon^2} + \frac{B_4(T)}{\upsilon^3} + \ldots, \tag{10.8}$$

где B_1, B_2, B_3, и т. д. – вириальные коэффициенты, учитывающие взаимодействие двух, трех, четырех и т. д. молекул.

10.2. Пары. Парообразование при постоянном давлении

Рассмотрим изменения состояния пара (реального газа), имеющего сравнительно высокую критическую температуру.

Положим, что жидкость заключена в цилиндре, закрытом свободно движущимся невесомым поршнем, на который действует постоянное внешнее давление, при температуре T_0 (рис. 10.3).

Если к жидкости подвести некоторое количество теплоты $q_{\tau 1}$, то жидкость достигнет *температуры кипения* $T_н$ (иногда ее называют *температурой насыщения*):

$$q_{\tau 1} = c_{жид}\left(T_н - T_0\right), \tag{10.9}$$

где $c_{жид}$ – теплоемкость жидкости. При этом объем жидкости изменится незначительно.

Если продолжать подводить теплоту, то начнется процесс парообразования, который будет происходить при постоянной температуре $T_н$. При условии, что вся жидкость перешла в сухой насыщенный пар, то для такого перехода потребуется количество теплоты

$$r = h'' - h' = T_н\left(s'' - s'\right), \tag{10.10}$$

где r – теплота парообразования; h'' – удельная энтальпия сухого насыщенного пара; h' – удельная энтальпия кипящей жидкости; s'' – удельная энтропия сухого насыщенного пара; s' – удельная энтропия кипящей жидкости. В процессе парообразования удельный объем вещества измениться от υ' – удельный объем кипящей жидкости; υ'' – удельный объем сухого насыщенного пара.

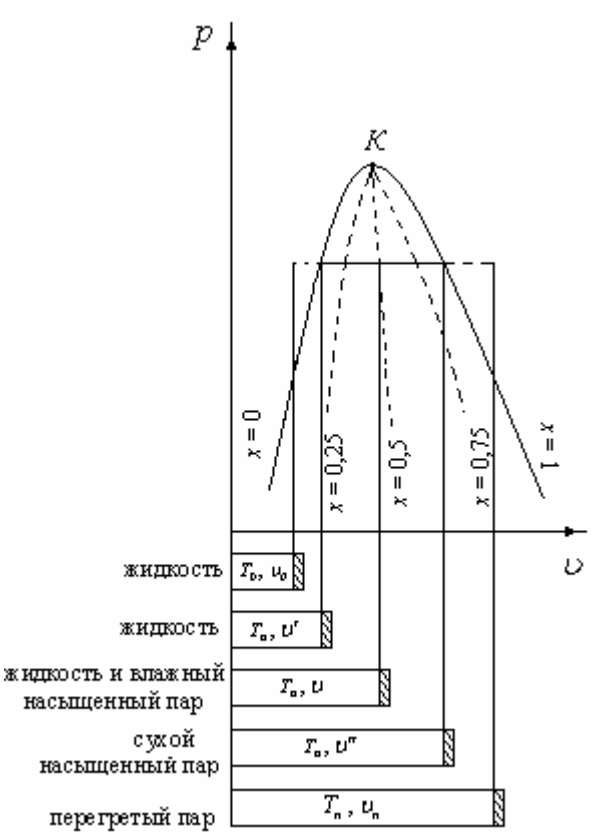


Рис. 10.3. Процесс парообразования

Значения параметров влажного насыщенного пара можно найти по формулам:

$$\upsilon = \upsilon'' x + \upsilon'(1 - x); \tag{10.11}$$

$$h = h'' x + h'(1 - x); \tag{10.12}$$

$$s = s'' x + s'(1 - x), \tag{10.13}$$

где x – степень сухости пара.

Степень сухости пара представляет собой отношение:

$$x = \frac{m_{пара}}{m}, \tag{10.14}$$

где $m_{пара}$ – масса насыщенного пара; m – масса всего вещества.

Таким образом, x влажного насыщенного пара меняется в пределах от 0 до 1. Степень сухости $x = 0$ соответствует кипящей жидкости, а $x = 1$ – сухому насыщенному пару.

Сухой насыщенный пар также имеет температуру $T_н$. Таким образом, если продолжать подвод теплоты при постоянном давлении, то температура пара увеличится. Пар при этом называется *перегретым*.

$$q_{\tau 2} = c_p(T - T_н), \tag{10.15}$$

где c_p – массовая изобарная теплоемкость пара; T – температура перегретого пара.

Процесс парообразования также удобно рассматривать на *Ts*- и *hs*-диаграмме (рис. 10.4, 10.5).

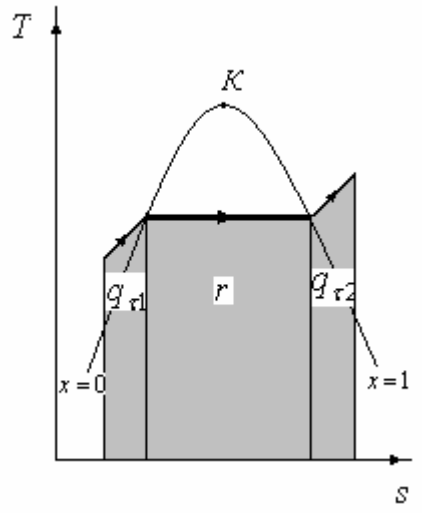


Рис. 10.4. *Ts*-диаграмма пара

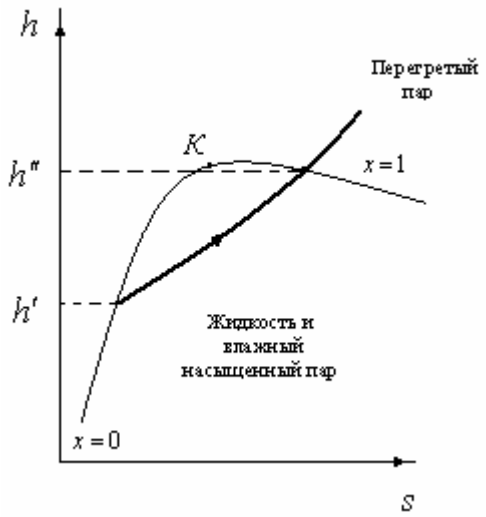


Рис. 10.5. *hs*-диаграмма пара

Ts-диаграмма пара удобна тем, что теплоту парообразования можно представить в виде площади под кривой процесса. На *hs*-диаграмме пара теплота парообразования представляется в виде отрезка $r = h'' - h'$.

10.3. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса

На $p\upsilon$-диаграмме в двухфазной области состояний построим две близко расположенные друг к другу изотермы реального газа, температуры и давления которых соответствуют значениям T, p и $T + dT$, $p + dp$. Отрезки кривых кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, соединяющие изотермы, приближенно считать адиабатами. Таким образом, на рис. 10.6 изображен цикл Карно, рабочим телом которого является реальный газ. Термический кпд этого цикла будет определяться по формуле (9.1), а также если цикл обратимый по формуле (9.18), представленной в виде

$$\eta = \frac{(T + dT) - T}{T} = \frac{dT}{T}. \tag{10.16}$$

Работа цикла будет определяться как

$$L_ц = m dp(\upsilon'' - \upsilon'), \tag{10.17}$$

где m – масса всего вещества.

Количество теплоты, которое требуется для перехода жидкости в пар, будет определяться по формуле

$$Q_{\tau\,подв} = mr. \tag{10.18}$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{dp(\upsilon'' - \upsilon')}{r}. \tag{10.19}$$

Приравнивая выражения (10.18) и (10.19) получим, что

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp(\upsilon'' - \upsilon')}{r}; \tag{10.20}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(\upsilon'' - \upsilon')}. \tag{10.21}$$

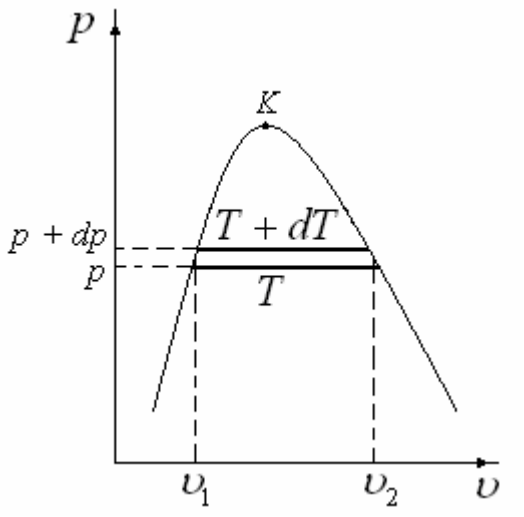


Рис. 10.6. Цикл Карно в двухфазной области состояний

Согласно формуле (10.21), температура фазового перехода жидкости в пар (или пара в жидкость) возрастает с увеличением давления.

Формулу (10.21) можно обобщить и на другие фазовые переходы (твердое тело в жидкость, твердое тело в газ, и наоборот):

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{\tau 1-2}}{T(\upsilon_2 - \upsilon_1)}, \qquad (10.22)$$

где $q_{\tau 1-2}$ – удельная теплота фазового перехода; υ_1 – удельный объем вещества до перехода при температуре фазового перехода; υ_2 – удельный объем вещества после перехода при температуре фазового перехода.

Уравнение (10.22) называется *уравнением Клапейрона-Клаузиуса*.

10.4. *pT*-диаграмма фазовых переходов

Переход из одного агрегатного состояния в другое удобно рассматривать на *pT*-диаграмме (рис. 10.7).

На *pT*-диаграмме кривая *AK* представляет собой зависимость между давлением сухого насыщенного пара и температурой кипения $p = f(T_н)$, поэтому эта кривая называется *кривой парообразования (кипения)*. Конечной точкой этой кривой является критическая точка *K*.

Если от жидкости отбиралась теплота при постоянном внешнем давлении, то при определенной температуре жидкость переходит в твердое состояние. Температура, при которой осуществляется этот переход, называется *температурой затвердевания (плавления)*, а количество теплоты, отбираемое в этом процессе называется теплотой плавления. При осуществлении процесса плавления вещество также находится в двух состояниях: жидком и твердом.

Аналогично кривой парообразования можно построить кривую плавления, которая однозначно определяется зависимостью $p = f(T_{пл})$.

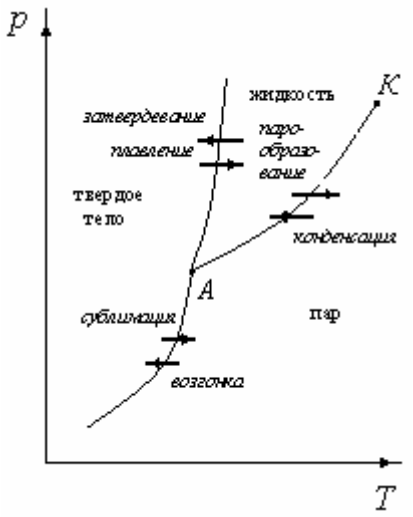


Рис. 10.7. *pT*-диаграмма фазовых переходов

Вещество также может переходить из твердой фазы в газообразную минуя жидкую при подводе некоторого количества теплоты. Такой переход называется *сублимацией*. Кривая сублимации представляет собой зависимость $p = f(T_c)$.

Все три кривые равновесия пересекаются в некоторой характерной для каждого вещества точке *A – тройной точке*. В этой точке газообразная, жидкая и твердая фазы вещества находятся в термодинамическом равновесии.

Часть III. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

11.1. Виды теплообмена

Различают три простых вида передачи теплоты: теплопроводность, конвекцию и тепловое излучение.

Теплопроводностью называется перенос теплоты структурными частицами вещества вследствие их теплового движения. Этот процесс возникает при неравномерном распределении температур в среде. В жидкостях и в твердых диэлектриках перенос теплоты осуществляется по средствам теплового движения молекул и атомов вещества. В газообразных средах теплота передается путем непосредственного соприкосновения молекул, имеющих различную скорость. В металлах теплопроводность осуществляется вследствие движения свободных электронов.

Конвекцией называется перенос теплоты при перемещении объемов газа или жидкости в пространстве из области с более низкой температурой в область с более высокой температурой. Конвективный перенос может осуществляться в результате свободного или вынужденного движения теплоносителя (газа или жидкости).

Свободное движение теплоносителя возникает тогда, когда его макрочастицы (небольшие объемы) в различных участках системы находятся под действием неоднородного поля массовых сил.

Вынужденное движение происходит под действием внешних поверхностных сил. Разность давлений, под действием которой перемещается теплоноситель, создается с помощью насосов, эжекторов и других устройств.

Также теплообмен между движущейся средой и поверхностью какого-либо тела называется *теплоотдачей*.

Тепловое излучение – процесс переноса теплоты электромагнитными волнами. Этот вид передачи теплоты обусловлен превращением внутренней энергии вещества в энергию излучения и его поглощением веществом.

Теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты излучением, теплопроводностью и конвекцией, называется *радиационно-конвективным теплообменом*.

Теплообмен между двумя жидкостями или газообразными средами, разделенными твердой стенкой, называется *теплопередачей*.

Явление теплопередачи можно наблюдать в теплообменных аппаратах.

11.2. Основные понятия и законы молекулярного и конвективного теплообмена

Под *температурным полем* понимают совокупность мгновенных значений температур во всех точках изучаемого пространства.

Математически уравнение температурного поля записывается следующим образом:

$$T = f(x, y, z, \tau). \tag{11.1}$$

Температурное поле, которое изменяется во времени называется *нестационарным*. Уравнение нестационарного температурного поля соответствует уравнению (11.1). Если температурное поле не изменяется во времени, то такое поле называется *стационарным*. Уравнение стационарного температурного поля выгладит следующим образом:

$$T = f(x, y, z). \tag{11.2}$$

Температура может изменяться по направлению одной, двух или трех координат. В соответствии с этим различают *одномерные*, *двумерные* и *трехмерные* температурные поля:

$$T = f(x, y, z, \tau);\ T = f(x, y, \tau);\ T = f(x, \tau);$$
$$T = f(x, y, z);\ T = f(x, y);\ T = f(x). \tag{11.3}$$

Температурное поле можно охарактеризовать с помощью серий изотермических поверхностей.

Изотермическая поверхность – это геометрическое место точек с одинаковой температурой.

Изотермические поверхности или замкнуты или выходят за границы тела. Изотермические поверхности, соответствующие разным температурам, не могут пересекаться друг с другом (рис. 11.1). Если тело рассечь плоскостью, то изотермические поверхности на этой плоскости изобразятся в виде их следов – *изотермических линий*, которые называются *изотермами*. По расположению изотерм оценивают интенсивность изменения температуры в различных направлениях: чем гуще расположены изотермы, тем интенсивнее изменяется температура.

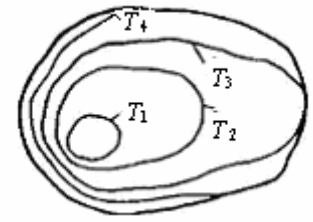


Рис. 11.1. Пример расположения изотермических поверхностей

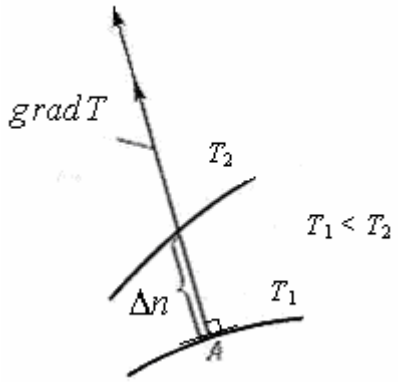


Рис. 11.2. Температурный градиент

Выделим вблизи *т.А* две изотермы с разностью температур ΔT и расстоянием по нормали Δn между ними (рис. 11.2). Отношение $\frac{\Delta T}{\Delta n}$ характеризует среднюю интенсивность изменения температуры между изотермами. Предел этого отношения при $\Delta n \to 0$ позволяет оценить интенсивность изменения температуры вблизи *т.А* и представляет собой *температурный градиент*:

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n} = grad T , \tag{11.4}$$

где $\vec{n}_0$ – единичный вектор, направленный в сторону возрастания температуры нормально к изотермической поверхности.

Температурный градиент – векторная величина, направленная по нормали к изотермической поверхности в сторону увеличения температуры.

$$grad T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} , \tag{11.5}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы.

Основным понятием теории теплообмена является *тепловой поток*.

Тепловой поток Q, *Вт* – это физическая величина, численно равная количеству теплоты, передаваемого в единицу времени через произвольную поверхность.

Плотностью теплового потока q, $\frac{Вт}{м^2}$ называется тепловой поток, отнесенный к единице площади поверхности.

Рассмотрим явление теплопроводности. Выделим на изотермической поверхности вблизи *т.А* площадку *dF* (рис. 11.3) и построим вектор температурного градиента. В соответствии с гипотезой Био-Фурье количество теплоты dQ_τ, которое пройдет через эту площадку за время $d\tau$ будет равно:

$$dQ_\tau = -\lambda \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n} dF d\tau . \tag{11.6}$$

где λ – *коэффициент теплопроводности вещества*, $\frac{Вт}{м \cdot К}$.

Закон Фурье можно записать и через плотность теплового потока

$$\vec{q} = -\lambda \vec{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n} . \tag{11.7}$$

Плотность теплового потока – векторная величина. Вектор $\vec{q}$ направлен в сторону уменьшения температуры, тогда как градиент температуры направлен в сторону увеличения температуры. Знак минус в уравнении (11.7) отражает противоположность направлений векторов плотности теплового потока и температурного градиента.

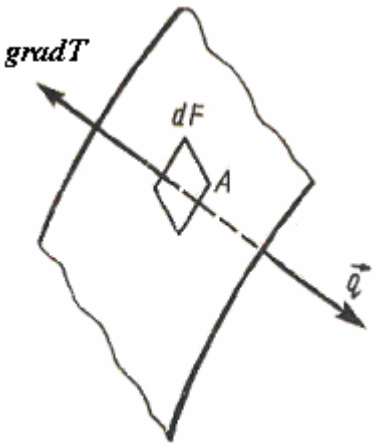


Рис. 11.3. Иллюстрация закона Фурье

При расчете теплоотдачи используют *формулу Ньютона-Рихмана*:

$$q = \alpha\left(T_f - T_w\right), \tag{11.8}$$

где T_f – температура теплоносителя; T_w – температура поверхности стенки; α – *коэффициент теплоотдачи*, $\frac{Вт}{м^2 \cdot К}$.

Коэффициент теплоотдачи представляет собой плотность теплового потока между теплоносителем и стенкой при разности температур $1К$.

Значение коэффициента теплоотдачи зависит от многих факторов. Наиболее существенными из них являются: причина движения жидкости (естественная или вынужденная конвекция), режим течения жидкости (ламинарный или турбулентный), скорость жидкости, теплофизические параметры жидкости, геометрические форма и размеры тела, наличие фазовых переходов.

Если газ обменивается со стенкой теплотой одновременно путем соприкосновения и излучения, то общая плотность теплового потока рассчитывается по формуле вида

$$q = q_к + q_{рад}, \tag{11.9}$$

где $q_к$ – плотность конвективного теплового потока, вычисляемая по уравнению Ньютона-Рихмана; $q_{рад}$ – плотность радиационного теплового потока.

$$q_{рад} = \alpha_{рад}\left(T_f - T_w\right). \tag{11.10}$$

Таким образом, *коэффициент радиационно-конвективного теплообмена* α будет равен

$$\alpha = \alpha_к + \alpha_{рад}, \tag{11.11}$$

где $\alpha_{рад}$ – поправка на теплообмен излучением.

Явление теплообмена обычно сопровождается переносом вещества – *массообменном*.

Плотность потока массы g для бинарной смеси определяется *законом Фика*:

$$\vec{g} = -D_C \vec{n}_0 \frac{\partial C}{\partial n}, \tag{11.12}$$

где D_C – коэффициент молекулярной диффузии; $\frac{\partial C}{\partial n}$ – градиент концентрации диффундирующего вещества.

Плотность потока массы от стенки в теплоноситель или в обратном направлении можно определить также по формуле:

$$g = \beta_C \left(C_w - C_f\right). \tag{11.13}$$

где β_C – коэффициент массоотдачи, $\frac{м}{с}$; C_f и C_w – концентрации диффундирующего вещества около стенки и в потоке, $\frac{кг}{м^3}$.

12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

12.1. Математическая формулировка задач гидрогазодинамики и теплопередачи

Для многих физических явлений математическая формулировка задачи является основой ее научного исследования. Она включает в себя уравнение или систему уравнений, описывающих изучаемое явление, и *краевые условия* (*условия однозначности*), отражающие его частные особенности.

Дифференциальные уравнения, формулирующие задачу, описывают целый класс явлений, а краевые условия выделяют из этого класса конкретный вид явления. Краевые условия, заданные в виде численных значений, определяют конкретное явление.

В самом общем случае движение сплошной среды описывается системой уравнений, включающей в себя: дифференциальное уравнение неразрывности, дифференциальное уравнение движения и дифференциальное уравнение энергии, а также уравнение состояния.

Индивидуальные особенности явления отражены заданием краевых условий, среди которых выделяют: *геометрические условия* (отражают форму и размеры участвующих в процессе тел или их поверхностей); *физические условия* (характеризуют физические свойства участвующих в процессе тел); *граничные условия* (определяют особенности протекания явления на границах изучаемой системы); *временные условия* (определяют начальное состояние систем и изменение граничных условий во времени); *динамические условия* (характеризуют ускорение, определяющее массовую сил, или связь этого ускорения с характеристиками движения всей системы или жидкости в ней).

Временные условия однозначности задаются только при изучении нестационарных процессов.

Граничные условия формулируются для каждого уравнения в отдельности.

Численное решение задачи, основанное на использовании ее математической формулировки, дает информацию только о конкретном физическом состоянии изучаемой системы, соответствующем численно заданной совокупности краевых условий. Такие же частные результаты дает натуральный эксперимент. Количественным результатам исследования единичных явлений можно придать более общую форму, если их представить с помощью обобщенных переменных. В таком обобщенном виде эти результаты могут быть использованы не только для исследованного явления, но и для целой группы явлений, подобных исследованному.

12.2. Основы теории подобия физических процессов

Теория подобия применяется в науке и технике как теоретическая основа моделирования различных физических процессов и технических устройств.

Теория подобия также позволяет обобщить результаты исследования единичных явлений на целую группу подобных явлений.

Подобными называют физические процессы (явления) одинаковой природы, протекающие в геометрически подобных системах, у которых во всех сходственных точках в сходственные моменты времени отношения одноименных величин есть постоянные числа. Эти постоянные числа называются *константами подобия*.

Одноименными называются величины, имеющие одинаковый физический смысл и одинаковую размерность.

Сходственными называются такие точки систем, координаты которых удовлетворяют геометрическому подобию:

$$C_l = \frac{l''_1}{l'_1} = \frac{l''_2}{l'_2} = ... = \frac{l''_i}{l'_i}, \qquad (12.1)$$

где l'_1, l'_2, …,l'_i – линейные размеры, характеризующие геометрию первой системы; l''_1, l''_2, …,l''_i – линейные размеры, характеризующие геометрию второй системы; C_l – константа геометрического подобия.

Сходственные моменты времени наступают по истечении периодов времени τ' и τ'', имеющих общее начало отсчета и связанных между собой константой подобия времени C_τ:

$$C_\tau = \frac{\tau''}{\tau'}. \qquad (12.2)$$

Одноименными называются величины, имеющие одинаковый физический смысл и одинаковую размерность.

Таким образом, для подобия двух явлений гидрогазодинамики и теплопередачи необходимо выполнения условий:

$$C_p = \frac{p''}{p'};\ C_\rho = \frac{\rho''}{\rho'};\ C_w = \frac{w''}{w'};\ C_\mu = \frac{\mu''}{\mu'};\ C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'};\ C_T = \frac{T''}{T'};\ C_l = \frac{l''}{l'};\ \ldots \qquad (12.3)$$

Следует отметить, что подобными могут быть только процессы одинаковой природы, описывающиеся одинаковыми аналитическими зависимостями.

Процессы, описывающиеся одинаковыми по форме уравнениями, но имеющие различную физическую природу, называются *аналогичными*. Примером аналогичных явлений могут служить явления теплоотдачи и массоотдачи.

Константы подобия, представленные в выражениях (12.3) связаны между собой, поскольку определяющие физический процесс параметры также взаимосвязаны. Связь между параметрами выражается математической формулировкой задачи. Уравнения, входящие в математическую формулировку задачи могут быть преобразованы к безразмерному виду, именно в такой форме они будут отражать связь между безразмерными комплексами, характеризующими процесс.

Пусть математическая формулировка задачи описывается уравнением

$$D_1 + D_2 + ... + D_i + ... + D_n = 0, \tag{12.4}$$

где D_i – некоторые операторы, обычно дифференциальные, каждый из которых определяет какой-либо физический эффект, существенный для изучаемого процесса.

Для приведения этого уравнения к безразмерному виду умножим и разделим каждый из параметров, входящих в оператор, на его масштабное значение и выявим масштабы каждого эффекта. Например, если

$$D_i = \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{12.5}$$

где p – давление среды, x – координата. Выберем в качестве масштаба для давления некоторое давление в системе p_0, а для координаты – линейный размер системы l_0. Тогда выражение (4.5) можно представить как

$$D_i = \frac{p_0}{l_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \Pi_i d_i, \tag{12.6}$$

где $\overline{p} = \frac{p}{p_0}$, $\overline{x} = \frac{x}{l_0}$ – безразмерные величины; $\Pi_i = \frac{p_0}{l_0}$ – масштаб эффекта; $d_i = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}$ – безразмерный оператор.

Таким образом, уравнение (4.4) можно записать в форме

$$\Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + ... + \Pi_i d_i + ... + \Pi_n d_n = 0. \tag{12.7}$$

Все члены этого уравнения, а значит и масштабы эффектов имеют одинаковую размерность. Разделим уравнение (4.7) на один из масштабов Π_i, при этом уравнение будет приведено к безразмерному виду

$$\pi_1 d_1 + \pi_2 d_2 + ... + \pi_i d_i + ... + \pi_n d_n = 0, \tag{12.8}$$

где π_1, π_2, π_i, π_n – безразмерные (относительные) комплексы физических величин, число которых меньше числа операторов, входящих в уравнение, на единицу.

Среди относительных параметров, которые входят в приведенные к безразмерному виду уравнения, имеются независимые переменные (относительные координаты $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ и относительные время $\overline{\tau}$) и зависимые переменные ($\overline{\varphi}$).

Краевые условия задачи также приводятся к безразмерному виду, при этом появляются дополнительные безразмерные комплексы.

Совокупность численных значений безразмерных комплексов определяет множество подобных явлений, так как одному и тому же численному значению комплекса соответствует бесконечное множество сочетаний входящих в него конкретных параметров процесса. Поэтому относительные переменные и безразмерные комплексы представляют собой *обобщенные переменные*.

Безразмерные комплексы, конкретная совокупность численных значений которых выделяет группу подобных между собой явлений, называют *числами подобия*.

Числа подобия, составленные из условий однозначности, называют *критериями подобия*.

Критерии подобия, представляющие собой соотношение одноименных величин, называют *параметрическими*.

Числа подобия могут содержать линейный размер. Линейный размер, по которому определяются значения чисел подобия, называется *определяющим*.

В некоторые числа подобия входят теплофизические свойства среды, которые обычно зависят от температуры. Температура, по которой определяются теплофизические свойства, подставляемые в числа подобия, называется *определяющей*.

Группа подобных между собой явлений характеризуется одинаковыми числами подобия, поэтому произведения чисел подобия или частное от их деления будут в подобных процессах также иметь одинаковые значения и также будут представлять собой числа подобия.

Решение системы уравнений анализируемого процесса, согласованное с краевыми условиями, можно представить в виде функциональной зависимости, определяющей поле исследуемой величины:

$$\overline{\varphi} = f\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \pi_1, \pi_2, ... P_1, P_2, ...\right), \tag{12.9}$$

где π_1, π_2, … – критерии подобия; P_1, P_2, … – параметрические критерии подобия.

При приведении уравнения к безразмерному виду искомую величину не всегда удается представить в виде соотношения одноименных величин. В этом случае решение представляется в форме

$$\pi = f\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \pi_1, \pi_2, ... P_1, P_2, ...\right), \tag{12.10}$$

где π – число подобия, содержащее искомую зависимую переменную.

Уравнения (12.9) и (12.10) называются *уравнениями подобия*.

Обычно, уравнения подобия приводят к следующему виду

$$\pi = C\pi_1^k \pi_2^m ... P_1^n P_2^h ... \tag{12.11}$$

Таким образом, для анализа подобных процессов используются константы подобия и числа подобия. Константы подобия сохраняют числовое значение только для пары подобных явлений, но они остаются одинаковыми для всех сходственных точек рассматриваемых систем. Числа подобия сохраняют свое значение в сходственных точках всех подобных между собой систем, но в различных точках одной и той же системы числа имеют разные значения.

12.3. Определяющий размер и определяющая температура

За определяющий размер, входящий в критерий подобия, выбирают наиболее характерный размер системы. Для круглой трубы, например, в качестве характерного размера принимают ее диаметр d. Для каналов некруглого сечения в качестве определяющего размера обычно принимают эквивалентный диаметр

$$d_{экв} = \frac{4F}{p}, \qquad (12.12)$$

где F – площадь поперечного сечения канала; p – полный периметр канала.

При поперечном обтекании одиночной трубы или пучка труб в качестве определяющего размера обычно принимают внешний диаметр трубы, а при обтекании плиты – ее длину в направлении течения. В отдельных случаях в качестве определяющего размера может быть использована комбинация физических величин из условий однозначности, имеющая размерность длины.

За определяющую температуру обычно принимается одна из следующих температур: температура поверхности (стенки) T_w, средняя температура жидкости вдали от стенки T_f, а также средняя температура (средняя температура пограничного слоя) $T_m = \frac{T_w + T_f}{2}$. Этим фактом часто объясняется то обстоятельство, что различные авторы получают различные эмпирические формулы. Разнообразие, существующее в выборе определяющей температуры заставляет внимательно относится к расчетам критериев подобия, входящих в уравнения. В уравнениях критерии обычно имеют индексы «*w*», «*f*» и «*m*», указывающие на то, какая температура принята за определяющую.

12.4. Выявление обобщенных переменных из математической формулировки задачи

Рассмотрим два подобных явления, движение жидкости (стационарное изотермическое), при условии, что влияние массовых сил и сжимаемости пренебрежимо мало. Для такой задачи в прямоугольной системе координат запишем уравнения движения (только для координаты *x*):

$$\rho'\left(w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_y}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_z}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu'\left(\frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'_z}{\partial z'^2} \right), \qquad (12.13)$$

$$\rho''\left(w''_x \frac{\partial w''_x}{\partial x''} + w''_y \frac{\partial w''_y}{\partial y''} + w''_z \frac{\partial w''_z}{\partial z''} \right) = -\frac{\partial p''}{\partial x''} + \mu''\left(\frac{\partial^2 w''_x}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 w''_y}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2 w''_z}{\partial z''^2} \right). \qquad (12.14)$$

Константы подобия этих явлений следующие:

$$C_p = \frac{p''}{p'};\ C_\rho = \frac{\rho''}{\rho'};\ C_w = \frac{w''}{w'};\ C_\mu = \frac{\mu''}{\mu'};\ C_l = \frac{l''}{l'}. \qquad (12.15)$$

Таким образом, параметры одной системы можно выразить через параметры другой системы:

$$p'' = C_p p';\ \rho'' = C_\rho \rho';\ w'' = C_w w';\ C_\mu = \frac{\mu''}{\mu'};\ C_l = \frac{l''}{l'}. \qquad (12.16)$$

Подставим в формулу (12.14) выражения (12.16), при этом

$$\frac{C_\rho C_w^2}{C_l}\rho'\left(w_x'\frac{\partial w_x'}{\partial x'}+w_y'\frac{\partial w_y'}{\partial y'}+w_z'\frac{\partial w_z'}{\partial z'}\right)=-\frac{C_p}{C_l}\frac{\partial p'}{\partial x'}+$$
$$+\frac{C_\mu C_w}{C_l^2}\mu'\left(\frac{\partial^2 w_x'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w_y'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 w_z'}{\partial z'^2}\right) \quad ; \tag{12.17}$$

$$\rho'\left(w_x'\frac{\partial w_x'}{\partial x'}+w_y'\frac{\partial w_y'}{\partial y'}+w_z'\frac{\partial w_z'}{\partial z'}\right)=-\frac{C_p}{C_\rho C_w^2}\frac{\partial p'}{\partial x'}+$$
$$+\frac{C_\mu}{C_l C_w C_\rho}\mu'\left(\frac{\partial^2 w_x'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 w_y'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 w_z'}{\partial z'^2}\right) \quad . \tag{12.18}$$

Уравнения (12.18) и (12.14) тождественны, поэтому

$$\frac{C_p}{C_\rho C_w^2}=1;\ \frac{C_\mu}{C_l C_w C_\rho}=1. \tag{12.19}$$

Таким образом,

$$\frac{p'}{\rho' w'^2}=\frac{p''}{\rho'' w''^2};\ \frac{\mu'}{\rho' w' l'}=\frac{\mu''}{\rho'' w'' l''}. \tag{12.20}$$

Безразмерные комплексы (12.20) представляют собой числа подобия:

$$Eu=\frac{p}{\rho w^2}; \tag{12.21}$$

$$Re=\frac{\rho w l}{\mu}=\frac{w l}{\nu}. \tag{12.22}$$

Число Эйлера Eu устанавливает соотношение между силой давления и инерционной силой в рассматриваемом явлении.

Число Рейнольдса Re представляет собой отношение сил инерции к силам вязкости и определяет характер (режим) течения.

Аналогичным образом можно выявить другие числа подобия.

Дифференциальное уравнение энергии для двух сходственных точек при $q_V=0$ и $\frac{\partial T}{\partial \tau}=0$ запишем в виде:

$$w_x'\frac{\partial T'}{\partial x'}+w_y'\frac{\partial T'}{\partial y'}+w_z'\frac{\partial T'}{\partial z'}=a'\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}\right); \tag{12.23}$$

$$w_x''\frac{\partial T''}{\partial x''}+w_y''\frac{\partial T''}{\partial y''}+w_z''\frac{\partial T''}{\partial z''}=a''\left(\frac{\partial^2 T''}{\partial x''^2}+\frac{\partial^2 T''}{\partial y''^2}+\frac{\partial^2 T''}{\partial z''^2}\right). \tag{12.24}$$

Обозначим константы подобия:

$$C_w=\frac{w''}{w'};\ C_l=\frac{l''}{l'};\ C_t=\frac{T''}{T'};\ C_a=\frac{a''}{a'}. \tag{12.25}$$

Проведем замену параметров второй системы, на параметры первой с помощью уравнений (12.25).

После преобразований имеем

$$\frac{C_w C_l}{C_a}\left(w'_x\frac{\partial T'}{\partial x'}+w'_y\frac{\partial T'}{\partial y'}+w'_z\frac{\partial T'}{\partial z'}\right)=a'\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}\right). \tag{12.26}$$

Из тождества равенств (12.26) и (12.23) имеем

$$\frac{C_w C_l}{C_a}=1; \tag{12.27}$$

$$\frac{w'l'}{a'}=\frac{w''l''}{a''}; \tag{12.28}$$

$$Pe=\frac{w\,l}{a}; \tag{12.29}$$

где *Pe – число Пекле*, выражающее соотношение между интенсивностью переноса теплоты конвекцией и интенсивностью переноса теплоты теплопроводностью.

При исследовании теплоотдачи вместо числа Пекле часто используют *число Прандтля*

$$Pr=\frac{Pe}{Re}=\frac{\nu}{a}. \tag{12.30}$$

Анализ процессов теплоотдачи позволяет получить *число Нуссельта Nu*, которое характеризует соотношение между конвективным переносом теплоты от жидкости к поверхности тела и переносом теплоты теплопроводностью через слой жидкости:

$$Nu=\frac{\alpha\,l}{\lambda}. \tag{12.31}$$

Вместо числа Нуссельта иногда используют *число Стантона*

$$St=\frac{Nu}{Re\,Pr}=\frac{\alpha}{c\rho w}. \tag{12.32}$$

При анализе процессов, протекающих в поле гравитационных массовых сил используется *число Архимеда*

$$Ar=\frac{g\,l^3}{\nu^2}\Delta\rho, \tag{12.33}$$

где $\Delta\rho$ – максимальная разность плотностей среды в системе; g – ускорение свободного падения.

В однофазных неизотермических потоках вместо числа Архимеда используется *число Грасгофа*, характеризующее отношение подъемных сил к силам вязкости. *Число Грасгофа*

$$Gr = \frac{g l^3}{\nu^2} \beta_T \Delta T , \tag{12.34}$$

где g – ускорение свободного падения; ΔT – разность между температурой поверхности и жидкости.

При течении газа с большой скоростью (околозвуковой или сверхзвуковой) энтальпия потока изменяется в результате не только теплообмена, но и изменения кинетической энергии. В этом случае из анализа уравнения энергии появляется дополнительное число подобия, характеризующее сжимаемость среды – *число Маха*

$$M = \frac{w}{a}, \tag{12.35}$$

где a – скорость звука.

При анализе динамически и термически нестационарных процессов из соответствующих уравнений движения и энергии выявляются дополнительные критерии. Динамическая нестационарность процессов характеризуется *числом гомохромности Но* или *числом Струхаля Sh*

$$Ho = \frac{w\tau}{l}; \; Sh = \frac{1}{Ho}. \tag{12.36}$$

Тепловую нестационарность процессов характеризует *число Фурье*

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2}. \tag{12.37}$$

В системах с высокой степенью неизотермичности развитие тепловых и гидродинамических процессов зависит от диапазона изменения всех физических свойств в системе. Анализ физических условий однозначности для уравнений движения и энергии показывает, что в этом случае появляются дополнительные параметрические критерии вида

$$P_n = \frac{n_f}{n_w}, \tag{12.38}$$

где n – физическое свойство жидкости (вязкость, теплопроводность и др.) при температуре жидкости (обозначено индексом «*f*») и при температуре стенки (обозначено индексом «*w*»).

12.5. Получение чисел подобия на основе анализа размерностей

Математическая формулировка задачи является надежным основанием для выявления перечня и структуры чисел подобия, определяющих исследуемое явление. Однако часто возникает необходимость исследовать явление, которое не имеет математического описания. В этом случае перечень и структуру чисел подобия можно выявить на основе анализа размерностей. Сущность метода состоит в том, что составляется перечень размерных величин, которые могут влиять на протекание процесса, и из этих величин формируются безразмерные комплексы. Надежность полученных этим методом результатов зависит от

правильности и полноты выявления перечня влияющих на явление величин. Число безразмерных комплексов, которое получается на основе анализа размерностей, определяется на основании *π-теоремы*. Согласно этой теореме, величины, характеризующие явление, связаны между собой элементарными соотношениями (например, скорость выражается через длину и время). Поэтому единицы измерения можно выбрать только для некоторых основных величин, а для остальных они будут производными. Принятые для основных величин размерности называют *первичными* (*основными*), а для остальных – *вторичными* (*производными*). Если общее число физических параметров, характеризующих явление, составляет m, а число первичных размерностей n, то число независимых безразмерных комплексов z, которое можно образовать из m параметров, определяется равенством

$$z = m - n. \tag{12.39}$$

Для получения чисел подобия на основе анализа размерностей используют различные методы. Наиболее простой и удобный из них – *метод Рэлея*. В соответствии с этим методом, искомая величина выражается через влияющие на нее параметры с помощью степенного комплекса, включающего безразмерный коэффициент и все используемые в анализе параметры в различных степенях.

Например, при выявлении чисел подобия, которые можно использовать для обобщения опытных данных, полученных при исследовании теплоотдачи в трубе при вынужденном течении, искомая величина – коэффициент теплоотдачи α. Качественный анализ этого явления показывает, что если не учитывать влияния массовых сил и других усложняющих факторов на процесс теплоотдачи, то α должен определяться линейным размером системы l_0, скоростью жидкости w_0, плотностью ρ, удельной теплоемкостью c, коэффициентом теплопроводности λ и динамическим коэффициентом вязкости μ. Для анализа размерности связь между характеристиками изучаемого процесса можно представить в виде

$$\alpha = C l_0^{\beta} w_0^{\gamma} \rho^{\delta} c^{\varepsilon} \lambda^{\eta} \mu^{\kappa}. \tag{12.40}$$

Примем в качестве основных размерности длины L, времени T, массы M, температуры θ. Тогда

$$[\alpha] = MT^{-3}\theta^{-1};\ [l_0] = L;\ [\rho] = ML^{-3};\ [c] = L^2T^{-2}\theta^{-1};\ [\lambda] = LMT^{-3}\theta^{-1};$$
$$[w_0] = LT^{-1};\ [\mu] = ML^{-1}T^{-1}. \tag{12.41}$$

Размерности правой и левой частей уравнения (12.40) одинаковы

$$MT^{-3}\theta^{-1} = L^{\beta}\left(LT^{-1}\right)^{\gamma}\left(ML^{-3}\right)^{\delta}\left(L^2T^{-2}\theta^{-1}\right)^{\varepsilon}\left(LMT^{-3}\theta^{-1}\right)^{\eta}\left(ML^{-1}T^{-1}\right)^{\kappa}. \tag{12.42}$$

Приравняв показатели степеней при каждой размерности в правой и левой частях равенства, получим

$$1 = \delta + \eta + \kappa;\ -3 = -\gamma - 2\varepsilon - 3\eta - \kappa;\ -1 = -\varepsilon - \eta;$$
$$0 = \beta + \gamma - 3\delta + 2\varepsilon + \eta - \kappa. \tag{12.43}$$

Таким образом, из шести показателей степени четыре можно выразить через два остальных.

$$\beta = \delta - 1;\ \gamma = \delta;\ \eta = 1 - \varepsilon;\ \kappa = \varepsilon - \delta. \tag{12.44}$$

Уравнение (12.40) примет вид

$$\alpha = C l_0^{\delta-1} w_0^{\delta} \rho^{\delta} c^{\varepsilon} \lambda^{1-\varepsilon} \mu^{\varepsilon-\delta} = C\left(\frac{l_0^{\delta}}{l_0}\right) w_0^{\delta} \rho^{\delta} c^{\varepsilon} \left(\frac{\lambda}{\lambda^{\varepsilon}}\right)\left(\frac{\mu^{\varepsilon}}{\mu^{\delta}}\right). \tag{12.45}$$

Объединив параметры с одинаковыми показателями степени, выражение (12.45) примет вид

$$Nu = C Re^{\delta} Pr^{\varepsilon}, \tag{12.46}$$

где $Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda};\ Re = \frac{w_0 \rho l_0}{\mu};\ Pr = \frac{\mu c}{\lambda}.$

Число полученных безразмерных комплексов соответствует π-теореме, так как $m = 7$, $n = 4$, следовательно $z = 3$.

13. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

13.1. Теплопроводность веществ

В п. 1.1 была рассмотрена теплопроводность жидкостей и газов. Рассмотрим теплопроводность твердых тел.

Теплопроводность металлов и сплавов находится в диапазоне от 2 $\frac{Вт}{мК}$ до 450 $\frac{Вт}{мК}$ (рис. 13.1). С увеличением температуры теплопроводность практически у всех чистых металлов уменьшается. Исключение составляют кобальт, бериллий и некоторые другие металлы. Теплопроводность металлов определяется, в основном, диффузией свободных электронов. Зависимость теплопроводности металлических сплавов от температуры имеет довольно сложный характер. Большое влияние при этом оказывают примеси.

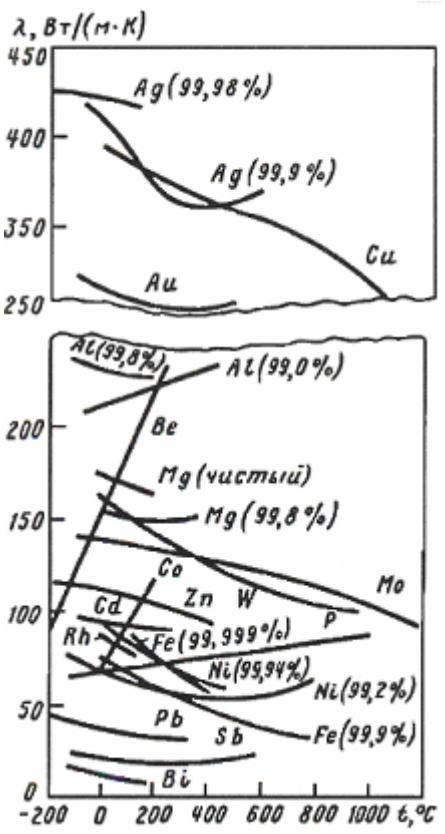


Рис. 13.1. Изменение теплопроводности металлов в зависимости от температуры

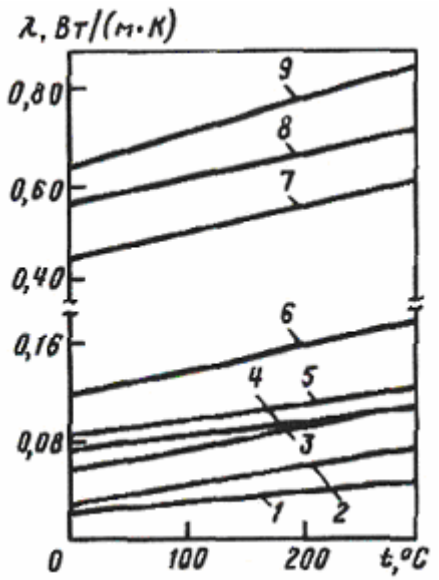


Рис. 13.2. Изменение теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов: воздух – 1; минеральная вата – 2; шлаковая вата – 3; ньювель – 4; совелит – 5; диатомовый кирпич – 6; красный кирпич – 7; шлакобетонный кирпич – 8; шамотный кирпич – 9

Материалы с низким значением теплопроводности (меньше 0,25 $\frac{Вт}{мК}$) называются *теплоизоляционными*. Некоторые теплоизоляторы используются в их естественном состоянии, другие получают искусственно. Из естественных теплоизоляторов широко применяется асбест, слюда, дерево, пробка, опилки и др., из искусственных – минеральная вата, стеклянная вата и др.

Некоторые неметаллические материалы, также являющиеся теплоизоляторами обладают анизотропией. Так, дуб проводит теплоту вдоль волокон примерно в 2 раза лучше, чем поперек волокон.

Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для некоторых теплоизоляционных материалов представлена на рис. 13.2.

13.2. Теплопроводность и теплопередача через плоскую стенку

Рассмотрим плоскую стенку, боковые поверхности которой изотермические (рис. 13.3). Температурное поле стенки будет одномерным. Пусть стенка имеет толщину δ и одинаковую для всей стенки теплопроводность λ. Температуры на границах стенки соответственно равны T_{w1} и T_{w2}. Дифференциальное уравнение энергии для стационарной одномерной задачи о теплопроводности плоской стенки без внутренних источников теплоты приводится к виду

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0. \tag{13.1}$$

Проинтегрировав это уравнение дважды, получим

$$\frac{dT}{dx} = C_1; \tag{13.2}$$

$$T = C_1 x + C_2. \tag{13.3}$$

Определим константы интегрирования C_1 и C_2 в уравнении температурного поля. Граничные условия первого рода для рассматриваемой задачи будут следующими:

при $x = 0 \quad T = T_{w1}$;

при $x = \delta \quad T = T_{w2}$.

Подстановка этих условий в формулу (13.3) дает

$$C_1 = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta};\ C_2 = T_{w1}. \tag{13.4}$$

Таким образом, получим уравнение температурного поля в виде

$$T = T_{w1} - \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta} x. \tag{13.5}$$

Определим плотность теплового потока через плоскую стенку.

В соответствии с законом Фурье (11.7), плотность теплового потока будет иметь вид

$$q = \lambda \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta}. \tag{13.6}$$

Соотношение $\frac{\lambda}{\delta}$ называется *тепловой проводимостью* плоской стенки, а обратная величина $\frac{\delta}{\lambda}$ – *внутренним термическим сопротивлением*.

Рассмотрим теперь теплопроводность плоской многослойной стенки, состоящей из *n* слоев (рис. 13.4).

На границе раздела соседних слоев возникает *контактное термическое сопротивление*, обусловленное неплотным соприкосновением поверхностей.

Термическое сопротивление контакта в отдельных случаях может быть пренебрежимо мало, но иногда общее тепловое сопротивление многослойной стенки благодаря сопротивлению в местах контакта увеличивается в несколько раз.

Плотность теплового потока через поверхность контакта можно выразить формулой вида

$$q = \frac{1}{R_к}(T' - T''), \tag{13.7}$$

где $R_к$ – контактное термическое сопротивление; T' и T'' – температуры контактирующих поверхностей.

Рассмотрим теплопроводность плоской многослойной стенки при условии идеального контакта между слоями. При стационарном режиме плотность теплового потока через все слои пластины одинакова.

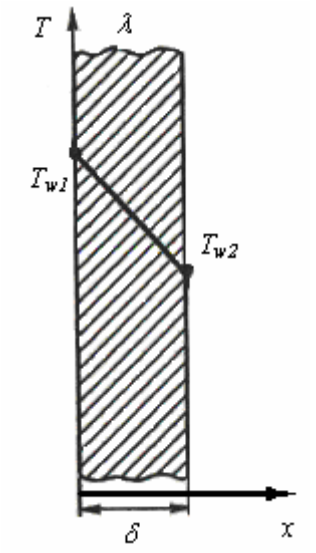


Рис. 13.3. Теплопроводность через плоскую однослойную стенку

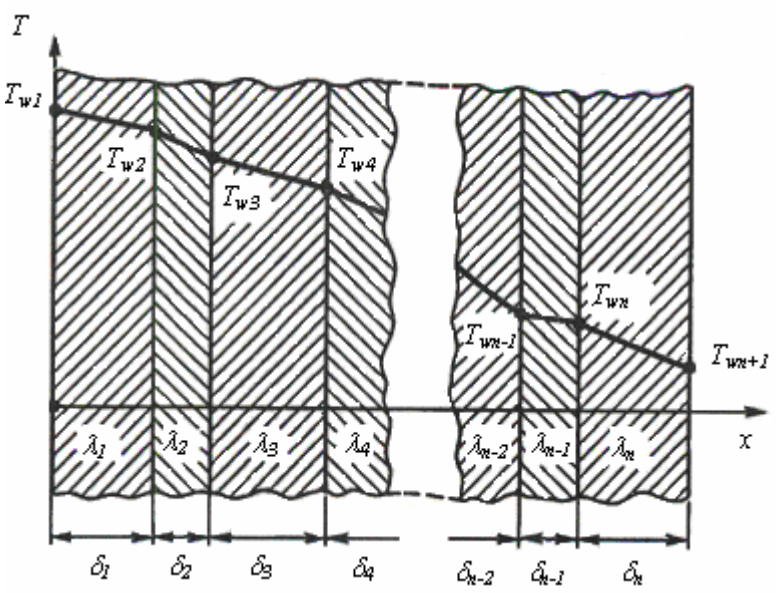


Рис. 13.4. Теплопроводность через плоскую многослойную стенку

Таким образом, можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1}\left(T_{w1} - T_{w2}\right); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2}\left(T_{w2} - T_{w3}\right); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ q &= \frac{\lambda_n}{\delta_n}\left(T_{wn} - T_{wn+1}\right). \end{aligned} \tag{13.8}$$

При этом

$$T_{w1} - T_{wn+1} = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right); \tag{13.9}$$

$$q = \frac{T_{w1} - T_{wn+1}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{T_{w1} - T_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}}. \tag{13.10}$$

Величина $\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}$, равная сумме термических сопротивлений n слоев, называется *полным термическим сопротивлением теплопроводности* многослойной стенки.

В условиях неплотного контакта слоев плотность теплового потока будет выражаться формулой вида

$$q = \frac{T_{w1} - T_{wn+1}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1}R_{\kappa i}}, \tag{13.11}$$

где $R_{\kappa i}$ – контактное термическое сопротивление между слоями стенки.

Рассмотрим теперь передачу теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их твердую стенку (рис. 13.5). Для неограниченной плоской однослойной стенки согласно закону Фурье и формуле Ньютона-Рихмана для явления теплоотдачи можно записать:

$$\begin{aligned} q &= \alpha_1\left(T_{f1} - T_{w1}\right); \\ q &= \frac{\lambda}{\delta}\left(T_{w1} - T_{w2}\right); \\ q &= \alpha_2\left(T_{w2} - T_{f2}\right). \end{aligned} \tag{13.12}$$

Если коэффициенты теплоотдачи α_1, α_2 известны, то

$$q = k\left(T_{f1} - T_{f2}\right), \tag{13.13}$$

где $k = \dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ – коэффициент теплопередачи.

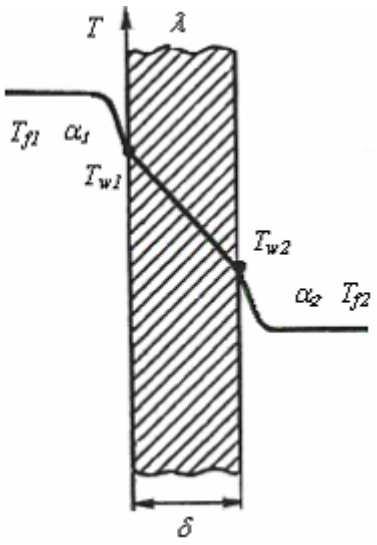


Рис. 13.5. Теплопроводность и теплопередача через плоскую стенку

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется *полным термическим сопротивлением теплопередачи*

$$R = \frac{1}{k}. \tag{13.14}$$

При теплопередачи через плоскую многослойную стенку плотность теплового потока также будет выражаться формулой (13.13), где $k = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$. В условиях неплотного контакта между слоями коэффициент теплопередачи будет равен $k = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{\kappa i} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$.

13.3. Теплопроводность и теплопередача через цилиндрическую стенку

Для стационарной одномерной задачи о теплопроводности цилиндрической стенки без внутренних источников теплоты (рис. 13.6) дифференциальное уравнение энергии в цилиндрической системе координат будет иметь вид

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0. \tag{13.15}$$

Решением этого уравнения будет выражение вида

$$T = C_1 \ln r + C_2. \tag{13.16}$$

Определим константы интегрирования C_1 и C_2 в уравнении температурного поля (13.16).

Граничные условия первого рода для рассматриваемой задачи:

при $r = r_1 \quad T = T_{w1}$;

при $r = r_2 \quad T = T_{w2}$.

Подстановка этих условий в формулу (13.16) показывает, что

$$C_1 = T_{w1} - (T_{w1} - T_{w2})\frac{ln\, r_1}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)};\; C_2 = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{ln\frac{r_1}{r_2}}. \tag{13.17}$$

Если радиусы внутренних и внешних поверхностей цилиндрической стенки заменить на соответствующие диаметры, то уравнение температурного поля будет иметь вид

$$T = T_{w1} - \frac{T_{w1} - T_{w2}}{ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} ln\left(\frac{d}{d_1}\right), \tag{13.18}$$

где d_1 и d_2 – внутренний и наружный диаметр цилиндра соответственно.

Температурный градиент

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}\frac{2}{d}. \tag{13.19}$$

Тепловой поток, проходящее через цилиндрическую поверхность F равен:

$$Q = \lambda\frac{T_{w1} - T_{w2}}{ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}\frac{2}{d}F. \tag{13.20}$$

где $F = 2\pi rl = \pi dl$.

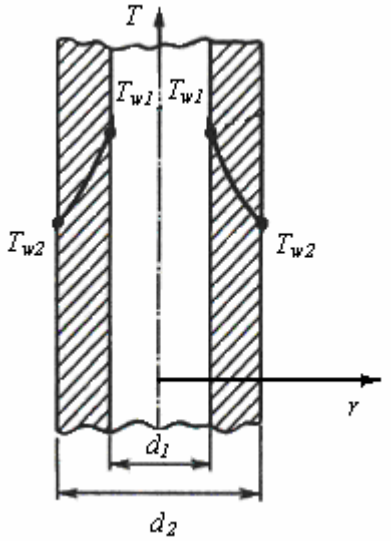


Рис. 13.6. Теплопроводность через цилиндрическую однослойную стенку

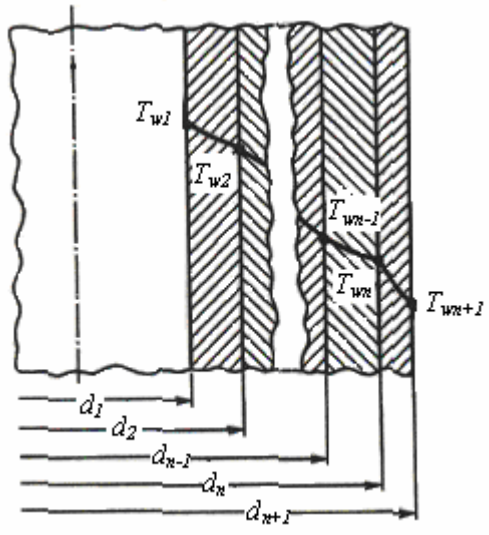


Рис. 13.7. Теплопроводность через цилиндрическую многослойную стенку

Тепловой поток можно отнести к длине трубы l:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi\left(T_{w_1} - T_{w2}\right)}{\frac{1}{2\lambda} ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}, \tag{13.21}$$

а также к единице внутренней или внешней поверхности:

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda\left(T_{w_1} - T_{w2}\right)}{d_1 ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)};\ q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda\left(T_{w_1} - T_{w2}\right)}{d_2 ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}. \tag{13.22}$$

Все рассмотренные удельные тепловые потоки связаны между собой следующим соотношением:

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2. \tag{13.23}$$

По аналогии с выводом формулы для теплового потока плоской многослойной стенки, для многослойной цилиндрической стенки (рис. 13.7) удельный тепловой поток будет иметь вид

$$q_l = \frac{\pi\left(T_{w1} - T_{wn+1}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}. \tag{13.23}$$

Рассмотрим передачу теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую цилиндрическую стенку.

Для однослойной стенки (рис. 13.8) можно записать формулы для явлений теплоотдачи двух поверхностей, соприкасающихся с теплоносителем и формулу для теплопроводности цилиндрической стенки:

$$\begin{gathered} q_l = \pi d_1 \alpha_1 \left(T_{f1} - T_{w1}\right); \\ q_l = \frac{\pi\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}{\frac{1}{2\lambda} ln \frac{d_2}{d_1}}; \\ q_l = \pi d_2 \alpha_2 \left(T_{w2} - T_{f2}\right). \end{gathered} \tag{13.24}$$

Если коэффициенты теплоотдачи α_1, α_2 известны, то

$$q_l = \pi k_l \left(T_{f1} - T_{f2}\right), \tag{13.25}$$

где $k_l = \dfrac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}$ – коэффициент теплопередачи.

При теплопередачи через плоскую многослойную стенку плотность теплового потока также будет выражаться формулой (13.25), где

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$

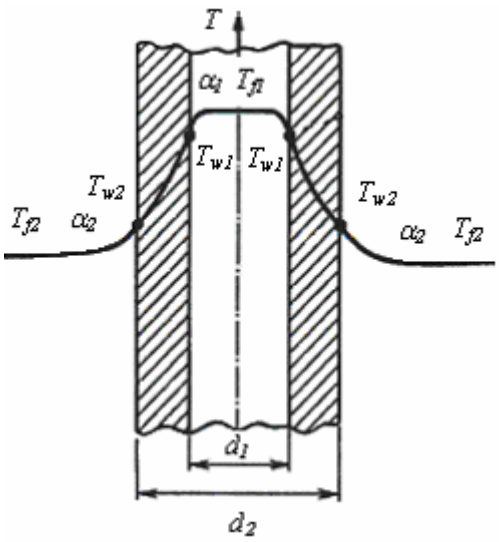


Рис. 13.8. Теплопроводность и теплопередача через цилиндрическую стенку

Тепловые потоки при наличии контактного термического сопротивления вычисляются по аналогичным формулам, приведенным для плоской стенки.

13.4. Теплопроводность и теплопередача через шаровую стенку

Для стационарной одномерной задачи о теплопроводности шаровой стенки без внутренних источников теплоты (рис. 13.9) дифференциальное уравнение энергии будет иметь вид

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0, \qquad (13.26)$$

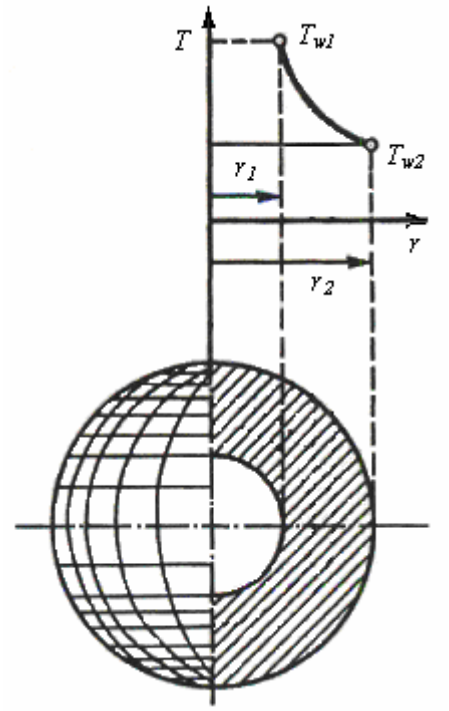


Рис. 13.9. Теплопроводность через шаровую стенку

Граничные условия первого рода для рассматриваемой задачи:

при $r = r_1 \;\; T = T_{w1}$;

при $r = r_2 \;\; T = T_{w2}$.

Таким образом, после интегрирования получаем уравнение температурного поля в виде

$$T = T_{w1} - \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), \tag{13.27}$$

где r_1 и r_2 – внутренний и наружный радиус стенки соответственно.

Температурный градиент

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r^2}. \tag{13.28}$$

Тепловой поток, проходящий через поверхность F равен:

$$Q = \lambda \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r^2} F, \tag{13.29}$$

где $F = 4\pi r^2 = \pi d^2$.

Таким образом, формула (13.29), будет иметь вид

$$Q = \frac{4\pi\lambda\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}. \tag{13.30}$$

Для случая многослойной стенки формула для теплового потока будет иметь вид

$$Q = \frac{\pi\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}} \right)}. \tag{13.31}$$

Рассмотрим передачу теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их однослойную шаровую стенку.

Для однослойной шаровой стенки можно записать:

$$\begin{gathered} Q = \pi d_1^2 \alpha_1 \left(T_{f1} - T_{w1}\right); \\ Q = \frac{2\pi\lambda\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}; \\ Q = \pi d_2^2 \alpha_1 \left(T_{w2} - T_{f2}\right). \end{gathered} \tag{13.32}$$

Если коэффициенты теплоотдачи α_1, α_2 известны, то

$$Q = \pi k_{ш} \left(T_{f1} - T_{f2}\right), \tag{13.33}$$

где $k_ш = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \dfrac{1}{2\lambda}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$ – коэффициент теплопередачи.

Для многослойной шаровой стенки применима формула (13.33), где $k_ш = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2\lambda_i}\left(\dfrac{1}{d_i} - \dfrac{1}{d_{i+1}}\right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$.

14. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

14.1. Условия подобия нестационарных температурных полей

Основной задачей расчета теплопроводности при нестационарном режиме является определение зависимости температурного поля от времени, а также количества полученной (отданной) телом теплоты по истечении определенного времени.

Дифференциальное уравнение энергии в твердом теле без внутренних источников теплоты имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{14.1}$$

Характер взаимодействия тела с окружающей средой опишем граничными условиями третьего рода

$$\alpha\left(T_w - T_f\right) = -\lambda_{cm}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{n=0}. \tag{14.2}$$

где λ_{cm} – теплопроводность стенки; $\frac{\partial T}{\partial n}$ – температурный градиент в твердом теле.

При равномерном температурном поле в начальный момент процесса теплообмена временные условия имеют вид:

при $\tau = 0 \;\; T = T^{/}$.

Обозначим избыточную температуры в любой точке тела в произвольный момент времени через θ:

$$\theta = T - T_f. \tag{14.3}$$

Для точек расположенных на поверхности и в центре стенки:

$$\theta_w = T_w - T_f;\; \theta_0 = T_0 - T_f. \tag{14.4}$$

Для начального момента времени:

$$\theta^{/} = T^{/} - T_f. \tag{14.5}$$

Безразмерная избыточная температура

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta^{/}}. \tag{14.6}$$

Обозначим безразмерные координаты: $\widetilde{x} = \frac{x}{l};\;\; \widetilde{y} = \frac{y}{l};\;\; \widetilde{z} = \frac{z}{l}$, где l – характерный размер тела.

Приведем уравнение (14.1) к безразмерному виду.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\theta^{/}}{l^2}\frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{x}^2};\; \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\theta^{/}}{l^2}\frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{y}^2};\; \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\theta^{/}}{l^2}\frac{\partial^2 \widetilde{\theta}}{\partial \widetilde{z}^2};\; \frac{\partial T}{\partial \tau} = \theta^{/}\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \tau}. \tag{14.7}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\left(\frac{a\tau}{l^2}\right)}=\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial\tilde{z}^2}. \qquad (14.8)$$

Следовательно, для сходственных точек, безразмерная температура $\tilde{\theta}$ зависит от *числа Фурье* $Fo=\frac{a\tau}{l^2}$. Однако, связь безразмерной температуры и числа Фурье неоднозначна, так как конкретная форма связи зависит от краевых условий.

Анализ уравнения (14.2), определяющего условия теплообмена на границах, методами теории подобия показывает, что подобие процессов теплообмена на границах тела определяется *числом Био*

$$Bi=\frac{\alpha l}{\lambda_{cm}}. \qquad (14.9)$$

Таким образом, температурное поле при нестационарной теплопроводности определяется обобщенным выражением:

$$\tilde{\theta}=f\left(Fo,Bi,\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\right), \qquad (14.10)$$

вид функции в котором зависит от формы тела.

14.2. Нестационарная теплопроводность плоской стенки

Рассмотрим плоскую стенку, размеры которой вдоль осей *y* и *z* настолько велики, что теплообменом с торцов можно пренебречь. Будем считать условия теплообмена с обеих поверхностей одинаковыми (T_f = *const* и α = *const*), температуру – зависящей только от одной координаты *x*. Тогда температурное поле будет симметричным относительно середины стенки, поэтому ее толщину обозначим как 2δ (рис. 14.1).

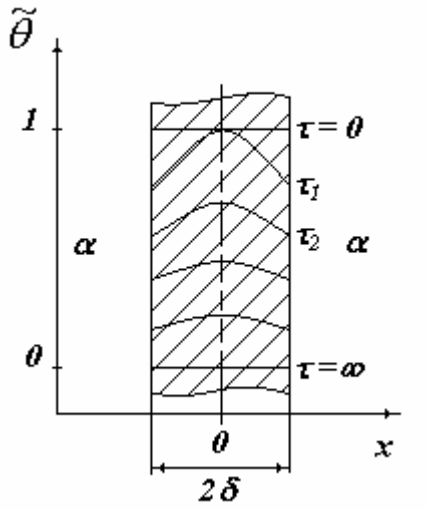


Рис. 14.1. Температурное поле плоской стенки

В приложении к одномерной задаче о плоской стенке дифференциальное уравнение энергии сводится к виду

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{14.11}$$

Граничные условия для обеих поверхностей при $x = \pm\delta$:

$$\mp\lambda_{cm}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta} = \alpha\theta_w. \tag{14.12}$$

Начальное условие: при $\tau = 0$ $\theta = \theta^{/}$.

Решим задачу методом разделения переменных. Представим искомую функцию θ в виде произведения переменных $T(\tau)$ и $X(x)$, из которых первая зависит только от времени, а вторая только от координаты:

$$\theta = TX. \tag{14.13}$$

Дифференцируем это выражение

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = X\frac{dT}{d\tau};\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = T\frac{dX}{dx};\ \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = T\frac{d^2X}{dx^2}. \tag{14.14}$$

Подставив эти выражения в уравнение (14.11), получим

$$X\frac{dT}{d\tau} = aT\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \tag{14.15}$$

или

$$\frac{1}{a}\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\beta^2, \tag{14.16}$$

где β^2 – постоянная разделения переменных.

Из выражения (14.16) получается два дифференциальных уравнения:

$$\frac{dT}{d\tau} + a\beta^2 T = 0; \tag{14.17}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \beta^2 X = 0, \tag{14.18}$$

решения которых известны:

$$T = Ae^{-a\beta^2\tau}; \tag{14.19}$$

$$X = B\cos\beta x + C\sin\beta x. \tag{14.20}$$

Эти формулы позволяют записать выражение (14.13) в виде

$$\theta = \left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)e^{-a\beta^2\tau}. \tag{14.21}$$

В силу симметрии температурного поля замена x на $–x$ не должна отражаться на значении θ. Это условие выполняется при $C_2 = 0$ и поэтому решение уравнения (14.21) приводится к виду

$$\theta = C_1 e^{-a\beta^2\tau}\cos\beta x. \tag{14.22}$$

Значение постоянной разделения переменных найдем из граничного условия:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{x=\pm\delta} = \mp C\beta e^{-a\beta^2\tau}\sin\beta\delta; \tag{14.23}$$

$$\theta_w = Ce^{-a\beta^2\tau}\cos\beta\delta. \tag{14.24}$$

Подставив эти выражения в условие (14.12), получим

$$\beta\sin\beta\delta = \frac{\alpha}{\lambda_{cm}}\cos\beta\delta \tag{14.25}$$

или

$$ctg\varphi = \frac{\varphi}{Bi}, \tag{14.26}$$

где $\varphi = \beta\delta$; $Bi = \dfrac{\alpha\delta}{\lambda_{cm}}$.

Это трансцендентное уравнение решается обычно графическим путем. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\varphi_i^2 Fo}\cos\frac{\varphi_i x}{\delta}. \tag{14.27}$$

При записи этого уравнения сделана следующая замена:

$$a\beta^2\tau = a\frac{\varphi^2}{\delta^2}\tau = \varphi^2\frac{a\tau}{\delta^2} = \varphi^2 Fo. \tag{14.28}$$

Коэффициенты ряда C_i определяются из начального условия:

$$C_i = 2\theta^{/}\frac{\sin\varphi_i}{\varphi_i + \sin\varphi_i\cos\varphi_i}. \tag{14.29}$$

Таким образом,

$$\theta = 2\theta^{/}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\varphi_i\cos\varphi_i\tilde{x}}{\varphi_i + \sin\varphi_i\cos\varphi_i}e^{-\varphi_i^2 Fo} \tag{14.30}$$

или

$$\tilde{\theta} = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\varphi_i\cos\varphi_i\tilde{x}}{\varphi_i + \sin\varphi_i\cos\varphi_i}e^{-\varphi_i^2 Fo}, \tag{14.31}$$

где $\tilde{x} = \dfrac{x}{\delta}$.

Результаты решения задач нестационарной теплопроводности для одномерного температурного поля могут быть применены при расчете температуры тел с двумерными и трехмерными температурными полями.

В качестве примера рассмотрим охлаждение бруса бесконечной длины с прямоугольным сечением (рис. 14.2).

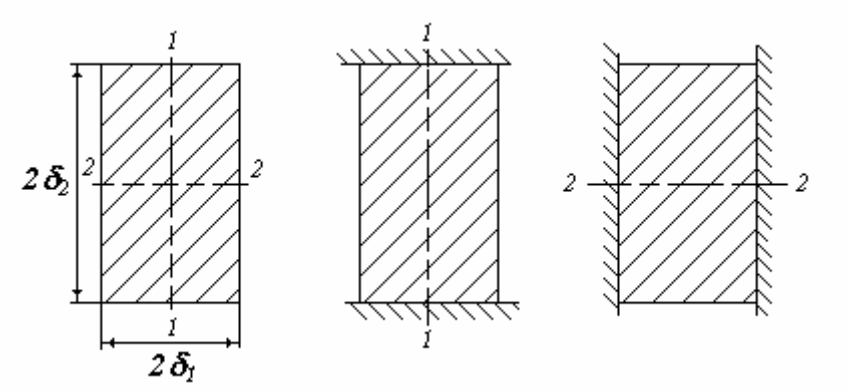


Рис. 14.2. Изображение сечений бруса бесконечной длины

Теплота передается брусом в окружающую среду через вертикальные и горизонтальные грани. Предположим, что горизонтальные грани бруса теплоизолированы. Тогда безразмерную температуру $\widetilde{\theta}_1$ любой плоскости, параллельной плоскости 1 – 1, можно определить по формуле (14.31). При этом в качестве характерного следует взять размер δ_1.

Если предположить, что теплоизолированы вертикальные грани, то аналогично определиться безразмерная температура $\widetilde{\theta}_2$ плоскости, параллельной сечению 2 – 2. В этом случае характерным размером будет δ_2.

Величина $\widetilde{\theta}_1$ характеризует уменьшение избыточной температуры рассматриваемой вертикальной плоскости к заданному моменту времени по сравнению с начальной избыточной температурой благодаря теплообмену вертикальных поверхностей. Аналогично $\widetilde{\theta}_2$ характеризует уменьшение избыточной температуры рассматриваемой горизонтальной плоскости благодаря теплообмену горизонтальных поверхностей.

Когда в теплообмене участвуют все боковые поверхности бруса, безразмерная температура

$$\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_1 \widetilde{\theta}_2 . \qquad (14.32)$$

Аналогичным образом можно также рассмотреть и трехмерные температурные поля.

15. ТЕПЛООТДАЧА

15.1. Факторы, влияющие на интенсивность теплоотдачи

Как было рассмотрено ранее, интенсивность теплоотдачи зависит от вида течения или пограничного слоя у поверхности теплообмена. При турбулентном пограничном слое интенсивность теплоотдачи значительно выше, чем при ламинарном.

Толщина пограничного слоя и его структура зависят от скорости потока относительно поверхности теплообмена, поэтому от скорости существенно зависит интенсивность теплоотдачи. При прочих равных условиях увеличение скорости за пределами динамического пограничного слоя или средней скорости движения в канале ведет к уменьшению толщины пограничного слоя, создает более благоприятные условия для возникновения турбулентности и тем самым способствует повышению интенсивности теплоотдачи.

Теплопроводность жидкости влияет на термическое сопротивление ламинарной части потока жидкости. Чем больше теплопроводность, тем интенсивнее теплоотдача.

Вязкость жидкости оказывает влияние на толщину пограничного слоя и на условия перемешивания жидкости. При прочих равных условиях и более вязкой жидкости образуется более толстый пограничный слой, а условия перемешивания становятся менее благоприятными. Поэтому в вязких жидкостях теплоотдача протекает менее интенсивно.

Плотность теплоносителя также влияет на условия формирования пограничного слоя. Уменьшение плотности газа ведет к увеличению коэффициента кинематической вязкости, благодаря чему увеличивается толщина пограничного слоя. Поэтому уменьшение плотности газа ведет к уменьшению интенсивности теплоотдачи.

Теплоемкость жидкости влияет на интенсивность конвективного переноса теплоты. При одинаковых условиях перемешивания жидкость с большей теплоемкостью переносит больше теплоты, поэтому интенсивность теплоотдачи возрастает.

Поля массовых сил вызывают образование в потоке вихревых структур, изменяют уровень турбулентности и потому влияют на интенсивность теплоотдачи. Степень влияния массовых сил зависит от ускорения, определяющего массовую силу.

Форма продольного сечения обтекаемого тела в значительной мере определяет условия формирования пограничного слоя, а следовательно влияет на интенсивность теплоотдачи.

Заметное влияние на интенсивность теплоотдачи может оказывать внешняя турбулентность, так как от уровня внешней турбулентности зависят условия перехода ламинарного течения в турбулентное и уровень турбулентности в турбулентном пограничном слое.

Дополнительными факторами, усложняющими явление теплоотдачи и изменяющие его интенсивность, являются химические реакции и фазовые переходы в теплоносителе.

Тепловой поток при теплоотдаче определяется *формулой Ньютона-Рихмана* (11.8), но эта формула не отражает в явном виде влияние всего многообразия факторов на интенсивность теплоотдачи. Все эти факторы учитываются коэффициентом теплоотдачи, что в свою очередь затрудняет получение расчетных соотношений для его определения.

Система дифференциальных уравнений, описывающая процесс теплоотдачи, решена аналитическим путем для ряда простейших задач, при этом она оказывается замкнутой только для ламинарного течения. При турбулентном течении для замыкания системы дифференциальных уравнений необходимо сформулировать дополнительные условия, отражающие связь пульсационных и осредненных характеристик потока. Во многих случаях натуральный эксперимент остается единственным способом получения закономерностей, определяющих теплоотдачу.

Расчетные соотношения теплоотдачи, полученные на основании аналитического метода, обладают наибольшей общностью. Натуральный и математический эксперименты позволяют определить коэффициенты теплоотдачи только для конкретных краевых условий. Для того, чтобы результаты экспериментов можно было использовать для расчетов не только исследованных явлений, но и для всех явлений, подобных исследованным, их представляют в форме уравнений подобия.

15.2. Связь между теплоотдачей и трением

Взаимодействие потока жидкости с поверхностью твердого тела сопровождается молекулярным и конвективным переносом импульса и теплоты по нормали к стенке. Эти процессы переноса осуществляются одними и теми же материальными частицами, поэтому трение на поверхности теплообмена и перенос теплоты через эту поверхность оказываются связанными между собой.

Рассмотрим стационарное безнапорное ламинарное течение жидкости, физические свойства которой не зависят от температуры. Если ось *x* совместить с поверхностью, то проекцию уравнения движения на эту ось можно записать в виде

$$w_x \frac{\partial \widetilde{w}_x}{\partial \widetilde{x}} + w_y \frac{\partial \widetilde{w}_x}{\partial \widetilde{y}} + w_z \frac{\partial \widetilde{w}_x}{\partial \widetilde{z}} = \frac{\nu}{l}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{w}_x}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{w}_x}{\partial \widetilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{w}_x}{\partial \widetilde{z}^2} \right), \qquad (15.1)$$

где $\widetilde{w}_x = \frac{w_x}{w_\infty}$; $\widetilde{x} = \frac{x}{l}$; $\widetilde{y} = \frac{y}{l}$; $\widetilde{z} = \frac{z}{l}$; w_∞ – скорость потока вдали от стенки; l – характерный размер системы.

При стационарном процессе теплоотдачи в ламинарном потоке жидкости без внутренних источников теплоты с теплофизическими свойствами, не

зависящими от температуры, распределение температуры около поверхности теплообмена определяется дифференциальным уравнением энергии в виде

$$w_x \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \widetilde{x}} + w_y \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \widetilde{y}} + w_z \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \widetilde{z}} = \frac{a}{l}\left(\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial \widetilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial \widetilde{z}^2} \right), \tag{15.2}$$

где $\widetilde{T} = \dfrac{(T - T_w)}{(T_f - T_w)}$.

При $\nu = a$ $Pr = 1$, уравнения (15.1) и (15.2) тождественны относительно величин $\widetilde{w}_x$ и $\widetilde{T}$, а граничные значения этих величин численно одинаковы: на поверхности теплообмена, а вдали от этой поверхности $\widetilde{T} = \widetilde{w}_x = 1$.

Следовательно,

$$\frac{w_x}{w_\infty} = \frac{(T - T_w)}{(T_f - T_w)}. \tag{15.3}$$

Из этого равенства следует, что при рассмотренных выше условиях распределения величин $w_x = f(n)$ и $T - T_w = \varphi(n)$ в одной и той же системе подобны.

Если для анализа связи между теплоотдачей и трением использовать дифференциальные уравнения энергии и движения, записанные для турбулентного течения, то при тех же упрощающих предпосылках уравнения, записанные в безразмерной форме оказываются тождественными, а распределения скоростей и избыточных температур подобными при условии

$$c_p(\mu + \mu_T) = \lambda + \lambda_T. \tag{15.4}$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы $Pr = 1$ и $Pr_T = \dfrac{c\mu_T}{\lambda_T} = 1$ (Pr_T – турбулентное число Прандтля). Следовательно, выражение (15.3) может применяться для турбулентных потоков без каких-либо дополнительных ограничений.

Используем подобие скоростных и температурных полей для получения количественной связи между интенсивностью теплоотдачи и трением.

В непосредственной близости от стенки теплота передается через жидкость теплопроводностью, поэтому

$$q_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}. \tag{15.5}$$

Напряжение трения на поверхности выражается через градиент скорости у поверхности стенки и динамическую вязкость по закону Ньютона

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial n} \right)_{n=0}. \tag{15.6}$$

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0}}{\left(\frac{\partial w_x}{\partial n}\right)_{n=0}}. \tag{15.7}$$

Дифференцирование выражения (15.3) можно получить

$$\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n=0}}{\left(\frac{\partial w_x}{\partial n}\right)_{n=0}} = \frac{T_f - T_w}{w_\infty}. \tag{15.8}$$

Таким образом,

$$q_w = \tau_w \frac{\lambda}{\mu} \frac{T_f - T_w}{w_\infty}. \tag{15.9}$$

Из (15.9) могут быть получены конкретные формулы связи коэффициента теплоотдачи с коэффициентом сопротивления трения при внешнем обтекании тел c_f и при течении жидкости в канале ζ.

При внешнем обтекании тел напряжение трения определяется через коэффициент сопротивления трения выражением вида

$$\tau_w = c_f \frac{\rho w_\infty^2}{2}, \tag{15.10}$$

а плотность теплового потока формулой:

$$q_w = \alpha\left(T_f - T_w\right). \tag{15.11}$$

Подстановка выражений (15.10) и (15.11) в формулу (15.9) дает выражение для вычисления коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{c_f}{2} \frac{\lambda}{\nu} w_\infty \tag{15.12}$$

или

$$Nu_x = \frac{c_f}{2} Re_x, \tag{15.13}$$

где $Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda}$; $Re_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$.

Влияние физических свойств жидкости при $Pr \neq 1$ можно учесть в этом уравнении множителем Pr^n.

Таким образом, для внешнего обтекания тел получается, что

$$Nu_x = \frac{c_f}{2} Re_x \, Pr^n. \tag{15.14}$$

При течении жидкости в трубах и каналах температура T_f и скорость w_∞ заменяются на средние значения, поэтому

$$\tau_n = \frac{\zeta}{8}\rho\overline{w}^2. \tag{15.15}$$

$$q_w = \alpha\left(\overline{T}_f - T_w\right). \tag{15.16}$$

При этом

$$\alpha = \frac{\zeta}{8}\frac{\lambda}{\nu}\overline{w} \tag{15.17}$$

или

$$Nu = \frac{\zeta}{8}Re, \tag{15.18}$$

где $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$; $Re = \frac{\overline{w}d}{\nu}$.

Распространяя полученное решения для случая $Pr \neq 1$ получаем выражение вида

$$Nu_x = \frac{\zeta}{8}Re\,Pr^n. \tag{15.19}$$

Теоретические и опытные исследования показывают, что в формулах (15.14) и (15.19) n = 0,33…0,43.

15.3. Законы трения и теплообмена для турбулентного пограничного слоя

Для турбулентного пограничного слоя законы трения и теплообмена получены на основе обобщения опытных данных или с привлечением полуэмпирических теорий турбулентности.

Основываясь на степенных законах распределения скоростей и температур по толщине турбулентного пограничного слоя и опытных данных по теплоотдаче, С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьев получили законы трения и теплообмена для безнапорного обтекания плоской пластины в квазиизотермических условиях:

$$c_{f0} = A\,Re^{**-m}; \tag{15.20}$$

$$St_0 = \frac{A}{2}Re^{**-m}\,Pr^{-0,75}. \tag{15.21}$$

Условия, при которых получены эти законы, называются стандартными, что в формулах отражено индексом 0.

Для сложных условий течения и теплообмена С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьев предложили использовать принцип суперпозиции, который хоть и не является строгим, но дает удовлетворительное согласование с экспериментальными данными в некотором диапазоне изменения режимных параметров. С учетом этого принципа законы трения и теплообмена записываются в виде

$$\left(\frac{c_f}{c_{f0}}\right)_{Re^{**}} = \Psi^*; \tag{15.22}$$

$$\left(\frac{St}{St_0}\right)_{Re^{**}} = \Psi, \tag{15.23}$$

где $\Psi^* = \Psi_T^*\Psi_M^*\ldots$; $\Psi = \Psi_T\Psi_M\ldots$; Ψ_T^*, Ψ_M^*, Ψ_T, Ψ_M – относительные функции, отражающие влияние возмущающих факторов – неизотермичности, сжимаемости и др.

Для дозвуковых потоков С. С. Кутателадзе и А. И. Леонтьев предложили формулу вида

$$\Psi_T^* = \Psi_T = \left(\frac{2}{\sqrt{\frac{T_w}{T_f}}+1}\right)^2. \tag{15.24}$$

Эта зависимость отражает влияние неизотермичности на теплоотдачу.

15.4. Теплоотдача при вынужденной конвекции плоской пластины

15.4.1. Теплоотдача пластины при ламинарном пограничном слое

Решение на основе теории динамического пограничного слоя

Все теплофизические свойства теплоносителя, омывающего пластину (рис. 15.1) будем считать независящими от температуры. Зададим форму профиля скоростей в пограничном слое относительно оси *x*:

$$\frac{w_x}{w_\infty} = a_0 + a_1\frac{y}{\delta} + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \tag{15.25}$$

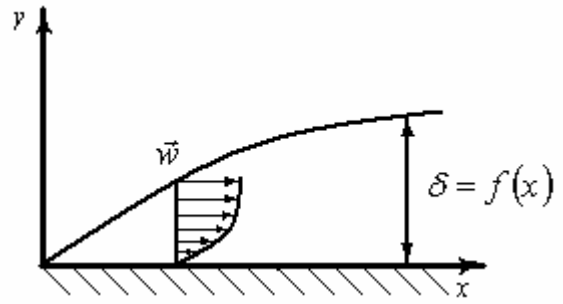


Рис. 15.1. Формирование пограничного слоя вдоль плоской пластины

Для определения коэффициентов используем граничные условия:

при $y = 0$ $w_x = 0$ и $\frac{d^2 w_x}{dy^2} = 0$;

при $y = \delta$ $w_x = w_\infty$ и $\frac{dw_x}{dy} = 0$.

Подстановка этих условий в уравнение (15.25) дает: $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{w_x}{w_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \tag{15.26}$$

Как известно, толщина потери импульса равна $\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{w_x}{w_\infty}\left(1 - \frac{w_x}{w_\infty}\right)dy$, поэтому после соответствующей подстановки получится выражение вида

$$\delta^{**} = \frac{39}{280}\delta. \tag{15.27}$$

Напряжение трения по закону Ньютона на поверхности пластины

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{15.28}$$

Из формулы (15.26) следует, что

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{w_\infty}{\delta}. \tag{15.29}$$

Таким образом,

$$\tau_w = \frac{3}{2}\mu\frac{w_\infty}{\delta}. \tag{15.30}$$

Для безнапорного течения интегральное соотношение импульсов (3.156) примет вид

$$\frac{3}{2}\mu\frac{w_\infty}{\rho w_\infty^2}\frac{280}{39}dx = \delta d\delta. \tag{15.31}$$

После интегрирования этого выражения от 0 до x получим, что

$$\delta = 4{,}64\sqrt{\frac{\mu x}{\rho w_\infty}} \tag{15.32}$$

или

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{\frac{\rho w_\infty x}{\mu}}} = \frac{4{,}64}{\sqrt{Re_x}}. \tag{15.33}$$

Эта формула показывает, что при увеличении значения Re_x толщина теплового и динамического пограничных слоев уменьшается.

Таким образом, формулу (15.30) можно преобразовать к виду

$$\tau_w = \frac{0{,}33\rho w_\infty^2}{\sqrt{Re_x}} \tag{15.34}$$

или

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0{,}33}{\sqrt{Re_x}}. \tag{15.35}$$

Уравнение подобия для нахождения местного коэффициента теплоотдачи (15.14) примет вид

$$Nu_x = 0{,}33\, Re_x^{0,5}\, Pr^{0,33}. \tag{15.36}$$

при этом, как показывают опытные данные, $n = 0{,}33$.

Средний коэффициент теплоотдачи пластины длиной l равен:

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{l}\int_0^l \alpha dx = \frac{1}{l}\int_0^l 0{,}33\frac{\alpha}{x} Re_x^{0,5}\, Pr^{0,33}\, dx = \frac{1}{l}\int_0^l 0{,}33\lambda\left(\frac{w_\infty}{\nu x}\right)^{0,5} Pr^{0,33}\, dx = \tag{15.37}$$

$$= 0{,}66\frac{\lambda}{l} Re_l^{0,5}\, Pr^{0,33}$$

Следовательно,

$$\overline{Nu_l} = 0{,}66\, Re_l^{0,5}\, Pr^{0,33}. \tag{15.38}$$

Таким образом, средний коэффициент теплоотдачи больше местного.

Решение на основе теории теплового пограничного слоя

Все теплофизические свойства теплоносителя, омывающего пластину, будем считать независящими от температуры. Обозначим, $\theta = T - T_w$ и $\theta_\infty = T_f - T_w$. Связь между температурой и координатой также представим в форме степенного многочлена вида

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = b_0 + b_1\frac{y}{\delta_T} + b_2\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^2 + b_3\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3, \tag{15.39}$$

где δ_m – толщина теплового пограничного слоя.

Граничные условия теплообмена можно сформулировать следующим образом:

при $y = 0$ $\theta = 0$, $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0$;

при $y = \delta_m$ $\theta = \theta_\infty$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0$.

Подстановка граничных условий в уравнение (15.39) позволяет найти значение четырех коэффициентов и представить уравнение в виде

$$\frac{\theta}{\theta_\infty}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta_T}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3. \tag{15.40}$$

Из этой формулы следует, что

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{3}{2}\frac{\theta_\infty}{\delta_T}. \tag{15.41}$$

Применяя закон Фурье и формулу Ньютона-Рихмана можно записать, что

$$-\alpha\theta_\infty=-\lambda\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{15.42}$$

После соответствующей подстановки получаем

$$\alpha=\frac{3}{2}\frac{\lambda}{\delta_T}. \tag{15.43}$$

Дальнейшее решение задачи связано с определением величины δ_T. Для этого используют интегральное соотношение теплового пограничного слоя, при этом получают соотношение между толщинами теплового и динамического пограничного слоев:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\delta_T}(T_f-T)w_x dy=\int_0^{\delta_T}(\theta_\infty-\theta)w_x dy=\theta_\infty w_\infty\int_0^{\delta_T}\left(1-\frac{\theta}{\theta_\infty}\right)\frac{w_x}{w_\infty}dy=\\
&=\theta_\infty w_\infty\int_0^{\delta_T}\left[1-\frac{3}{2}\frac{y}{\delta_T}+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_T}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy=\\
&=\theta_\infty w_\infty\delta\left[\frac{3}{20}\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2-\frac{3}{280}\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^4\right]
\end{aligned}. \tag{15.44}$$

При $\delta_m\le\delta$ вторым членом в (15.44) можно пренебречь. Преобразуя уравнение (3.159), получим выражение вида

$$\frac{1}{10}w_\infty\frac{d}{dx}\left[\delta\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2\right]=\frac{a}{\delta_T}. \tag{15.45}$$

Продифференцируем это выражение:

$$\frac{w_\infty}{10}\left[2\delta_T\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)+\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2\frac{d\delta}{dx}\right]=\frac{a}{\delta_T}. \tag{15.46}$$

Будем считать, что соотношение $\frac{\delta_T}{\delta}$ не зависит от координаты x.

$$\frac{w_\infty}{10}\left(\frac{\delta_T}{\delta}\right)^2\frac{d\delta}{dx}=\frac{a}{\delta_T} \tag{15.47}$$

или

$$\frac{w_\infty}{10}\left(\frac{\delta_m}{\delta}\right)^3 \delta \frac{d\delta}{dx} = a\,. \tag{15.48}$$

Из формулы (15.33) после дифференцирования, получим

$$\frac{d\delta}{dx} = 2{,}32\sqrt{\frac{\nu}{w_\infty x}}\,. \tag{15.49}$$

Используя равенство (15.32), найдем

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = 10{,}7\frac{\nu}{w_\infty}\,. \tag{15.50}$$

Подставив выражение (15.50) в (15.48), получим выражение вида

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{a}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}, \tag{15.51}$$

считая, что $\sqrt{1{,}07} \approx 1$.

Коэффициент теплоотдачи при этом будет рассчитываться по формуле вида

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{4{,}64x} Re_x^{0,5}\, Pr^{0,33} \tag{15.52}$$

или

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0{,}33\, Re_x^{0,5}\, Pr^{0,33}\,. \tag{15.53}$$

Таким образом, теория теплового и динамического пограничным слоев приводит к одинаковым результатам.

Экспериментальное решение этой задачи также дает аналогичные результаты. При $T_w = const$:

$$\overline{Nu_l} = 0{,}66\, Re_{l\text{ж}}^{0,5}\, Pr_{\text{ж}}^{0,33}\left(\frac{Pr_{\text{ж}}}{Pr_{cm}}\right)^{0,25}\,. \tag{15.54}$$

Сопоставление (15.38) и (15.54) говорит об удовлетворительном согласовании теории и эксперимента.

15.4.2. Теплоотдача пластины при турбулентном пограничном слое

Рассмотрим задачу безнапорного обтекания плоской пластины несжимаемым неизотермичным потоком при турбулентном пограничном слое.

Интегральное соотношение импульсов для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{d\, Re^{**}}{d\tilde{x}} = \frac{c_f}{2} Re_L\,. \tag{15.55}$$

Закон трения для рассматриваемого случая имеет вид

$$c_f = A\,Re^{**-m}\,\Psi_T^*. \tag{15.56}$$

Подставим (15.56) в (15.55):

$$\frac{d\,Re^{**}}{d\widetilde{x}} = \frac{A}{2} Re_L\,Re^{**-m}\,\Psi_T^*. \tag{15.57}$$

После интегрирования этого выражения, получим

$$Re^{**} = \left[\frac{A}{2}(1+m)Re_L\int_0^x \Psi_T^* d\widetilde{x}\right]^{\frac{1}{1+m}}. \tag{15.58}$$

Подставим (15.58) в (15.56):

$$c_f = A\left[\frac{A}{2}(1+m)Re_L\int_0^x \Psi_T^* d\widetilde{x}\right]^{-\frac{m}{1+m}}\Psi_T^*. \tag{15.59}$$

В случае, когда $T_w = const$ $\left(\Psi_T^* = const\right)$ при $Re^{**} < 10^4$ ($A = 0{,}0256$ и $m = 0{,}25$):

$$c_f = 0{,}0578\,Re_x^{-0,2}\,\Psi_T^{*0,8}, \tag{15.60}$$

где $Re_x = \dfrac{\rho_\infty w_\infty x}{\mu}$.

Подстановка выражения (15.60) в (15.14) приводит к уравнению вида

$$Nu_x = 0{,}0289\,Re_x^{0,8}\,Pr^{0,4}\,\Psi_T^{*0,8}. \tag{15.61}$$

Решим ту же задачу на основе интегрального соотношения энергии в форме (3.161) и закона теплообмена в виде

$$St = \frac{A}{2} Re_T^{**-m}\,Pr^{-0,75}\,\Psi_T. \tag{15.62}$$

Совместное решение этих уравнений с последующим интегрирование от 0 до $\widetilde{x}$ приводит к выражению вида

$$St = \left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{1+m}}(1+m)^{\frac{-m}{1+m}}\,Re_L^{\frac{-m}{1+m}}\,Pr^{\frac{-0,75}{1+m}}\,\Psi_T\Delta T^m\left[\int_0^{\widetilde{x}}\Psi_T\Delta t^{1+m}d\widetilde{x}\right]^{\frac{-m}{1+m}}. \tag{15.63}$$

В случае, когда $T_w = const$ $\left(\Psi_T = const, \Delta T = const\right)$ при $Re_T^{**} < 10^4$:

$$St = 0{,}0289\,Re_x^{-0,2}\,Pr^{-0,6}\,\Psi_T^{0,8}. \tag{15.64}$$

Этому выражению можно придать вид

$$Nu_x = 0{,}0289\,Re_x^{0,8}\,Pr^{0,4}\,\Psi_T^{0,8}. \tag{15.65}$$

После осреднения коэффициента теплоотдачи по поверхности пластины получим

$$\overline{Nu_l} = 0{,}0361\,Re_l^{0,8}\,Pr^{0,4}\,\Psi_T^{0,8}. \tag{15.66}$$

Экспериментальное исследование местных коэффициентов теплоотдачи при $Re = 10^5 ... 2\cdot 10^6$ позволило получить следующие формулы.

Для расчета местного коэффициента теплоотдачи:

$$Nu_{xf} = 0{,}0296\, Re_{xf}^{0,8}\, Pr_f^{0,43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} . \qquad (15.67)$$

Для расчета среднего коэффициента теплоотдачи:

$$\overline{Nu_{lf}} = 0{,}037\, Re_{lf}^{0,8}\, Pr_f^{0,43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} . \qquad (15.68)$$

Таким образом, результаты, полученные теоретическим и экспериментальным путем, согласуются.

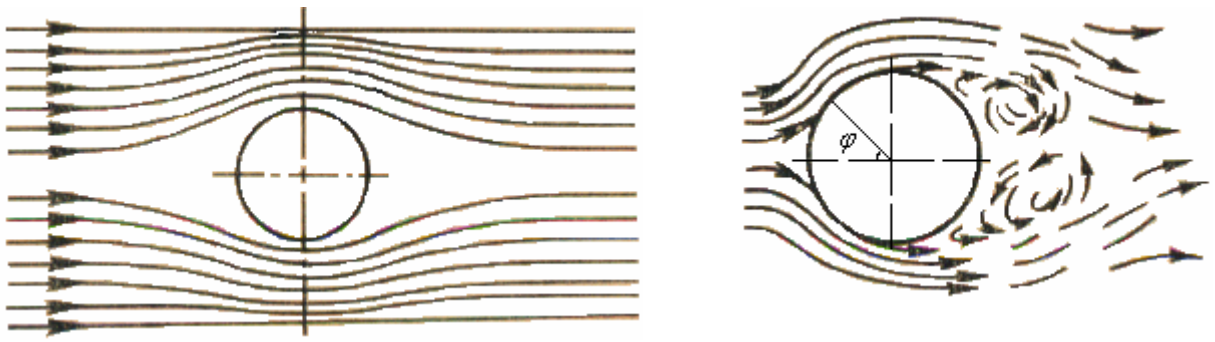
15.5. Теплоотдача при внешнем обтекании одиночной трубы и трубных пучков

Рассмотрим поперечное обтекание теплоносителем одиночной трубы (рис. 15.2, *а*). При этом возможны различные режимы обтекания. Вблизи передней критической точки (линии) образуется ламинарный пограничный слой, толщина которого увеличивается по мере увеличения угла φ (рис. 15.2, *б*).

При $Re = \frac{w_\infty d}{\nu} < 5$, где d – внешний диаметр трубы, имеет место безотрывное обтекание (рис. 15.2, *а*).

При $Re > 5$, происходит отрыв пограничного слоя (рис. 15.2, *б*). Отрыв потока приводит к образованию двух симметричных вихрей. При ламинарном пограничном слое отрыв потока наблюдается при $\varphi \approx 82^0$, а для турбулентного пограничного слоя при $\varphi = 110^0 ... 140^0$. Турбулентный пограничный слой возникает при $Re = 10^5 ... 4 \cdot 10^5$.

Изменение коэффициента теплоотдачи по поверхности зависит от режима обтекания. При ламинарном пограничном слое местный коэффициент теплоотдачи α_φ изменяется при изменении φ по кривой (пунктирная линия на рис. 15.3), где $\overline{\alpha}$ – средний по окружности коэффициент теплоотдачи.



а *б*

Рис. 15.2. Обтекание одиночной трубы: безотрывное обтекание, *а*; обтекание с отрывом пограничного слоя, *б*

Уменьшение коэффициента теплоотдачи на лобовой части обусловлено увеличением толщины ламинарного пограничного слоя, а последующее возрастание – разрушением пограничного слоя из-за отрыва потока.

При турбулентном пограничном слое (сплошная линия на рис. 15.3) первое увеличение коэффициента теплоотдачи обусловлено переходом ламинарного пограничного слоя в турбулентный, а второе отрывом потока.

Средний коэффициент теплоотдачи одиночной трубы при внешнем обтекании рассчитывается по формулам, полученным обобщением опытных данных. Расчетная формула имеет вид

$$\overline{Nu_f} = c\, Re_f^m\, Pr_f^n \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} . \qquad (15.69)$$

По данным А. А. Жукаускаса и др.:

при $Re_f = 5...10^3$ $c = 0{,}5$, $m = 0{,}5$, $n = 0{,}38$;

при $Re_f = 10^3...2\cdot10^5$ $c = 0{,}25$, $m = 0{,}6$, $n = 0{,}43$.

Процесс теплоотдачи еще более усложняется, если в поперечном потоке находятся не одна, а пучок труб. В технике распространены два основных типа трубных пучков – коридорный и шахматный (рис. 15.4, 15.5). Теплоотдача труб, составляющих трубный пучок, зависит от расположения труб в пучке и от номера ряда, в котором труба находится.

Характеристиками пучков труб являются диаметр труб d и относительные шаги: поперечный $\frac{S_1}{d}$ и продольный $\frac{S_2}{d}$. Для случая обтекания пучка труб в уравнение (15.69) вводится поправка ε_s, равная:

для коридорного пучка: $\varepsilon_s = \left(\frac{S_2}{d}\right)^{-0,15}$;

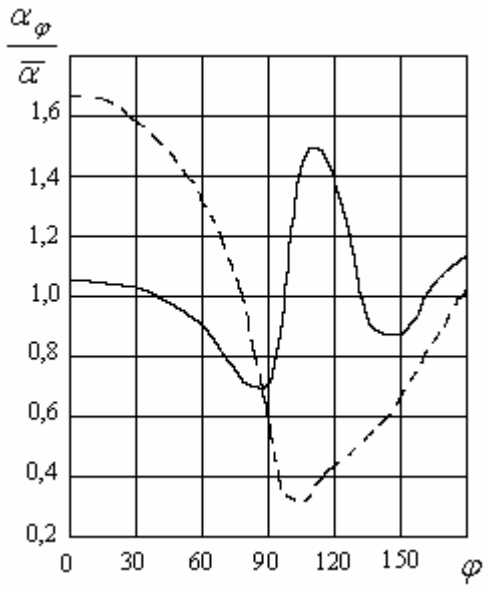


Рис. 15.3. Изменение коэффициента теплоотдачи по поверхности одиночной трубы

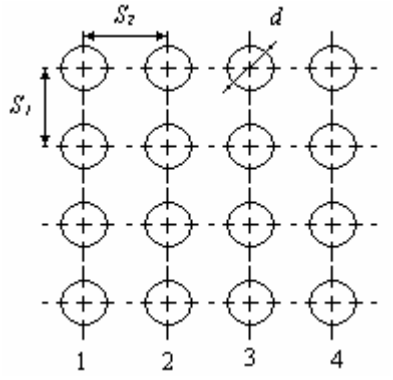


Рис. 15.4. Коридорный пучок труб

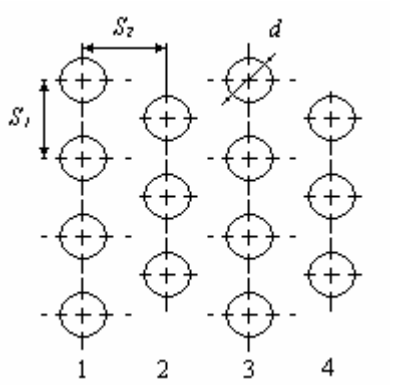


Рис. 15.5. Шахматный пучок труб

для шахматного пучка: $\varepsilon_s = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{0,167}$ при $\frac{S_1}{S_2} < 2$,

$$\varepsilon_s = 1{,}12 \text{ при } \frac{S_1}{S_2} \geq 2 .$$

Первый ряд труб омывается невозмущенным потоком жидкости и поэтому этот ряд имеет наименьший коэффициент теплоотдачи. В последующих рядах труб теплоотдача протекает более интенсивно, но с достаточной точностью можно считать, что третий и последующие ряды труб имеют одинаковый средний коэффициент теплоотдачи. Поэтому для случая обтекания пучка труб в уравнение (15.68) вводится поправка ε_i, равная:

для коридорного пучка: первый ряд $\varepsilon_1 = 0{,}6$; второй ряд $\varepsilon_2 = 0{,}9$; последующие ряды $\varepsilon_i = 1$;

для шахматного пучка: первый ряд $\varepsilon_1 = 0{,}6$; второй ряд $\varepsilon_2 = 0{,}7$; последующие ряды $\varepsilon_i = 1$.

Таким образом, коэффициенты теплоотдачи для труб первого и второго рядов можно найти, зная коэффициент теплоотдачи труб третьего (или любого другого последующего) ряда:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \alpha_3 ;$$
$$\alpha_2 = \varepsilon_2 \alpha_3 . \qquad (15.70)$$

Также при обтекании теплоносителем одиночной трубы или пучка труб коэффициент теплоотдачи будет зависеть также от угла атаки ψ (угла между направлением потока и осью трубы). Такая зависимость учитывается введением в формулу (15.69) поправочного коэффициента ε_ψ. Значения этого поправочного коэффициента в зависимости от угла ψ приведены в табл. 15.1.

Таким образом, для пучков труб уравнение подобия будет иметь вид

$$\overline{Nu_f} = c\, Re_f^m\, Pr_f^n \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \varepsilon_i \varepsilon_s \varepsilon_\psi . \qquad (15.71)$$

Таблица 15.1.

	ψ	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Одиночная труба	ε_ψ	0,55	0,60	0,67	0,77	0,87	0,95	0,98	1,00	1,00
Пучки труб	ε_ψ	0,42	0,52	0,67	0,78	0,88	0,94	0,98	1,00	1,00

Для коридорного пучка:

при $Re_f = 5...10^3$ $c = 0{,}56$, $m = 0{,}5$, $n = 0{,}36$;

при $Re_f = 10^3...2 \cdot 10^5$ $c = 0{,}26$, $m = 0{,}65$, $n = 0{,}33$.

Для шахматного пучка:

при $Re_f = 5...10^3$ $c = 0{,}56$, $m = 0{,}5$, $n = 0{,}36$;

при $Re_f = 10^3...2 \cdot 10^5$ $c = 0{,}41$, $m = 0{,}60$, $n = 0{,}33$.

Средний коэффициент теплоотдачи для всего пучка определяется по формуле, которая имеет вид

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 \left(F_3 + ... + F_n\right)}{F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n}, \tag{15.72}$$

где α_1, α_2, α_3 – коэффициенты теплоотдачи по рядам; F_1, F_2, F_3, ...- поверхности нагрева всех труб в ряду.

При равенстве $F_1 = F_2 = F_3 = \ldots$

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \left(n - 2\right)}{n}, \tag{15.73}$$

где n – количество рядов в пучке.

15.6. Теплоотдача при течении жидкости в трубах и каналах

На рис. 15.6 показана картина формирования турбулентного пограничного слоя. На некотором расстоянии от входа пограничные слои смыкаются и после этого в поперечном сечении устанавливается стабильное распределение скоростей, которое в ламинарном потоке имеет параболический характер; при турбулентном потоке распределение скоростей зависит от *Re*.

Расстояние от входа в трубу или канал до сечения, в котором динамические и пограничные слои смыкаются, называется *гидродинамическим начальным участком* или *участком гидродинамической стабилизации*.

Аналогично развивается тепловой пограничный слой. Участок от начала трубы до смыкания тепловых пограничных слоев называется *тепловым начальным участком*.

Режим течения жидкости в трубе зависит от $Re_f = \dfrac{\overline{w} d}{\nu}$, где $\overline{w}$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости, d – диаметр трубы.

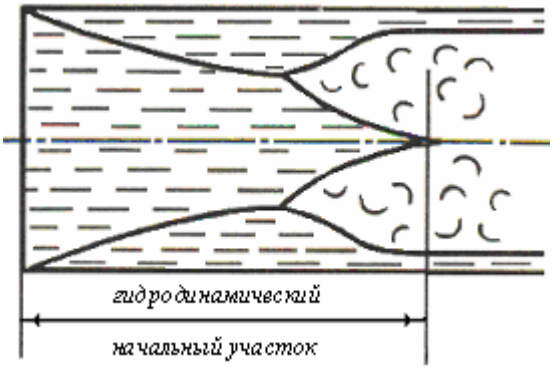


Рис. 15.6. Картина формирования турбулентного пограничного слоя

При $Re_f \le 2\cdot 10^3$ наблюдается ламинарное течение жидкости. Однако, при большом температурном напоре в поперечном сечении ламинарного потока может возникнуть свободное движение, обусловленное гравитационными силами. Поэтому различают *вязкостный* и *вязкостно-гравитационный* режимы течения.

При $Re_f \ge 10^4$ поток становиться турбулентным, но в начале трубы по-прежнему сохраняется участок с ламинарным пограничным слоем. При $Re_f > 1{,}5\cdot 10^5$ турбулентный пограничный слой начинает формироваться практически с начала трубы.

При $Re_f = 2\cdot 10^3 ... 10^4$ наблюдается переходный режим течения и теплообмена.

М.А. Михеев обработал опытные данные по средней теплоотдаче при вязкостно-гравитационном течении с учетом неизотермичности:

$$\overline{Nu_f} = 0{,}15\, Re_f^{0{,}33}\, Pr_f^{0{,}43}\, Gr_f^{0{,}1} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0{,}25} \varepsilon_l, \qquad (15.74)$$

где ε_l – поправка на длину трубы:

при $\frac{l}{d} \ge 50$ $\varepsilon_l = 1$;

при $\frac{l}{d} < 50$ $\varepsilon_l > 1$ (точные значения ε_l приводятся в справочной литературе).

При вязкостном режиме М.А. Михеев рекомендует формулу для расчета коэффициента теплоотдачи, которая имеет вид

$$\overline{Nu_f} = 0{,}15\, Re_f^{0{,}33}\, Pr_f^{0{,}43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0{,}25} \varepsilon_l. \qquad (15.75)$$

Для расчета средних коэффициентов теплоотдачи при турбулентном течении М.А. Михеев предложил формулу, которая имеет вид

$$\overline{Nu_f} = 0{,}021\, Re_f^{0,8}\, Pr_f^{0,43}\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \varepsilon_l . \qquad (15.76)$$

Представленные формулы можно также использовать для труб и каналов некруглого сечения. При этом в качестве определяющего размера выбирается эквивалентный диаметр канала $d_э = \frac{4f}{u}$, где f –площадь поперечного сечения канала; u – периметр поперечного сечения канала.

15.7. Теплоотдача при свободной конвекции

Теплоотдача при свободной конвекции встречается как в технике (нагрев воды в котельных агрегатах), так и в быту (нагрев воздуха в помещении от нагревательных приборов). Причина свободной конвекции – разность плотностей в различных частях жидкости или газа при нагреве или охлаждении.

Для расчета теплоотдачи при свободном движении теплоносителя существует единое уравнение подобия для тел различной конфигурации:

$$\overline{Nu_m} = cRa_m^n , \qquad (15.77)$$

где $Ra_m = Gr_m\, Pr_m$ – число Рэлея, при этом определяющую температуру для расчета числа Рэлея принята средняя температура пограничного слоя $T_m = \frac{T_f + T_w}{2}$. Определяющий размер зависит от формы и расположения поверхности теплообмена: для труб и шаров за определяющий размер следует принимать их диаметр, для вертикальных плит – их высоту, для горизонтальных поверхностей – наименьший горизонтальный размер. Значения коэффициентов c и n в этом уравнении зависят от числа Рэлея и приведены в табл. 15.2.

Таблица 15.2

Ra	$10^{-3}…5\cdot10^{2}$	$5\cdot10^{2}…2\cdot10^{7}$	$2\cdot10^{7}…10^{13}$
c	1,18	0,54	0,135
n	0,13	0,25	0,33

При расчете теплоотдачи горизонтальных поверхностей следует учитывать, что если поверхность обращена кверху, полученные из уравнения (15.77) значение коэффициента теплоотдачи α следует увеличить на 30%, если книзу – уменьшить на 30%.

Три диапазона изменения числа Ra соответствуют различным режимам теплообмена. При $Ra = 10^{-3}...5\cdot10^{2}$ имеет место режим псевдотеплопроводности, при котором движение среды почти не отражается на

переносе теплоты. При $Ra = 5 \cdot 10^2 ... 2 \cdot 10^7$ течение носит ламинарный, а при $Ra = 2 \cdot 10^7 ... 10^{13}$ – турбулентный характер.

В строительной теплотехнике встречаются случаи свободной конвекции в ограниченном объеме (воздушные прослойки в стенах, оконных проемах и т.д.). Движение среды из-за наложения восходящих и нисходящих потоков усложняется, поэтому в практических расчетах процесс теплоотдачи заменяют эквивалентным процессом теплопроводности. Для плоского слоя

$$q = \frac{\lambda_{экв}\left(T_{w1} - T_{w2}\right)}{\delta}, \tag{15.78}$$

где $\lambda_{экв}$ – эквивалентный коэффициент теплопроводности, учитывающий перенос теплоты как теплопроводностью, так и конвекцией; δ – толщина прослойки; T_{w1}, T_{w2} – соответственно температура горячей и холодной поверхностей стенок.

Эквивалентная теплопроводность учитывает циркуляции в прослойке и определяется через теплопроводность теплоносителя выражением вида

$$\lambda_{экв} = \varphi_к \lambda, \tag{15.79}$$

где $\varphi_к$ – коэффициент конвекции; λ – коэффициент теплопроводности жидкости (газа).

Опытное исследование теплоотдачи в замкнутом пространстве показало, что независимо от формы прослойки коэффициент конвекции можно определить из выражения вида

$$\varphi_к = cRa_f^n, \tag{15.80}$$

Значения коэффициентов *c* и *n* представлены в табл. 15.3.

Таблица 15.3

Ra_f	c	n
$<10^3$	1	0
$10^3 \ldots 10^6$	0,105	0,3
$10^6 \ldots 10^{10}$	0,4	0,2

Определяющей температурой для *Ra* является $T_f = \frac{T_{w1} + T_{w2}}{2}$.

15.8. Теплоотдача при фазовых превращениях

15.8.1. Теплоотдача при конденсации

Различают пленочную и капельную конденсацию. При пленочной конденсации пар отделен от стенки слоем конденсата, который создает значительное термическое сопротивление тепловому потоку. При капельной конденсации возможен непосредственный контакт пара со стенкой, и потому

теплообмен протекает во много раз более интенсивно, чем при пленочной конденсации. На рис. 15.7 показано температурное поле при пленочной конденсации перегретого пара около вертикальной стенки. Температура поверхности конденсата несколько ниже температуры насыщенного пара, из-за термического сопротивления, обусловленного фазовым переходом. Для водяного пара эта разница составляет 0,02…0,05 *К* при атмосферном давлении.

Ламинарное течение пленки наблюдается только в верхней части вертикальной стенки. Затем на поверхности пленки возникают микроволны, благодаря которым средняя толщина пленки и ее термическое сопротивление уменьшаются. Однако сама пленка на некотором участке поверхности остается ламинарной. При дальнейшем увеличении толщины пленки микроволны приводят к возникновению турбулентных пульсаций и течение в пленке становится турбулентным.

Режим течения пленки можно оценить числом Рейнольдса:

$$Re_\delta = \frac{\overline{w}\,\overline{\delta}}{\nu}. \tag{15.81}$$

где $\overline{w}$ – средняя скорость жидкости; $\overline{\delta}$ – средняя толщина пленки.

При стационарном режиме теплообмена теплота конденсации равна теплоте, переданной стенке. Поэтому для поверхности высотой *x* и шириной 1*м* для насыщенного пара можно записать, что

$$\overline{\alpha}\left(T_s - T_w\right)x = \overline{w}\,\overline{\delta}\rho r, \tag{15.82}$$

где *r* – теплота парообразования, T_s – температура насыщения.

Таким образом,

$$Re_\delta = \frac{\overline{\alpha}\left(T_s - T_w\right)x}{\mu r}. \tag{15.83}$$

Ламинарное течение без волн реализуется при $Re_\delta < 10$. При $Re_\delta \geq 400$ течение пленки носит турбулентный характер.

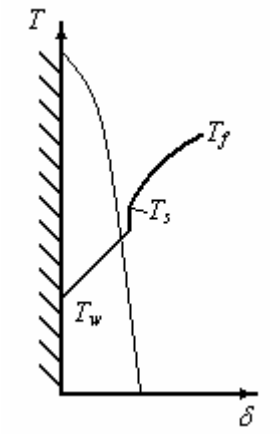


Рис. 15.7. Вид температурного поля при конденсации у вертикальной стенки

При ламинарном течении пленки плотность теплового потока

$$q = \frac{\lambda}{\delta}(T_s - T_w). \tag{15.84}$$

где δ – толщина пленки; λ – теплопроводность конденсата.

Можно также записать, что

$$q_w = \alpha(T_s - T_w). \tag{15.85}$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta}. \tag{15.86}$$

Из этой формулы видно, что уменьшение толщины пленки конденсата приводит к интенсификации теплоотдачи.

Для вертикальной стенки при ламинарном режиме течения пленки местный и средний коэффициенты теплоотдачи вычисляются по формулам:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{g\rho^2\lambda^3 r}{4\mu(t_s - t_w)x}}; \tag{15.87}$$

$$\overline{\alpha} = 0{,}943\ \sqrt[4]{\frac{g\rho^2\lambda^3 r}{\mu(t_s - t_w)h}}, \tag{15.88}$$

где g – ускорение свободного падения; ρ, λ, μ – плотность, теплопроводность и динамическая вязкость конденсата, x – расстояние до рассматриваемого сечения; h – высота стенки.

При учете микроволн коэффициент теплоотдачи должен быть умножен на поправку ε_ν:

$$\overline{\alpha}_\nu = \overline{\alpha}\varepsilon_\nu, \tag{15.89}$$

где $\varepsilon_\nu = \left(\frac{Re_\delta}{4}\right)^{0{,}04}$. Для более грубых расчетов принимают $\varepsilon_\nu = 1{,}21$.

Полученные формулы можно также использовать для вертикальных труб.

Для горизонтальных труб при ламинарном течении конденсата средний коэффициент теплоотдачи

$$\overline{\alpha} = 0{,}728\ \sqrt[4]{\frac{g\rho^2\lambda^3 r}{\mu(t_s - t_w)d}}, \tag{15.90}$$

где d – наружный диаметр трубы.

Для вертикальной стенки при турбулентном режиме течения конденсата применимо выражение вида

$$Nu_s = 0{,}023\, Re_s^{0{,}8}\, Pr_s^{0{,}4} \sqrt{1 + \varphi\left(\frac{\rho'}{\rho''} - 1\right)}, \tag{15.91}$$

где φ – массовое паросодержание; ρ' – плотность жидкости при температуре насыщения; ρ'' – плотность пара при температуре насыщения. Индекс s

свидетельствует о том, что определяющей температурой для расчета является температура насыщения (кипения).

15.8.2. Теплоотдача при кипении

При кипении процесс теплообмена между жидкостью и поверхностью нагрева сопровождается превращением жидкости в пар. На рис. 15.8 показано изменение температуры по толще слоя воды, кипящей в большом объеме при нормальном давлении. В пристеночном слое жидкость перегревается: ее температура выше температуры насыщенного пара. Перегрев жидкости вблизи стенки оказывается возможным потому, что здесь нет постоянной поверхности раздела жидкости и пара, а процесс парообразования может происходить только после возникновения паровых пузырьков. Такие пузырьки возникают в центрах парообразования. Вероятность возникновения паровых пузырьков увеличивается с ростом степени перегрева жидкости. Поэтому наиболее благоприятные условия для возникновения пузырьков создаются на поверхности нагрева. При этом центрами парообразования служат, в основном, шероховатости поверхности нагрева. Размеры пузырька быстро растут, и под влиянием подъемной силы и конвективных потоков он отрывается от стенки и поднимается к свободной поверхности жидкости. Этот процесс периодически повторяется.

Зародившийся в центре парообразования пузырек находится под действием подъемной силы, обусловленной разностью плотностей жидкости и пара, гидродинамической силы и силы поверхностного натяжения. Две первые силы стремятся оторвать пузырек от поверхности нагрева, а последняя сила препятствует этому. В процессе роста пузырька соотношение между силами меняется в пользу подъемной и гидродинамической сил.

Наблюдение за процессом кипения воды показывает, что около 95% пара образуется во время движения пузырей и только 5% − во время пребывания их на поверхность нагрева. Температурный напор

$$\Delta T = T_w - T_f = T_w - T_s \qquad (15.92)$$

определяет механизм парообразования и интенсивность теплообмена.

На рис. 15.9 изображена зависимость коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока от температурного напора. При небольших температурных напорах количество отделяющихся от поверхности нагрева пузырьков невелико, и они не способны еще вызвать существенное возмущение пограничного слоя. В этих условиях интенсивность теплоотдачи определяется только свободным движением жидкости и коэффициент теплоотдачи слабо увеличивается с ростом ΔT. Такой режим кипения называется *конвективным*.

При увеличении температурного напора растет число действующих центров парообразования, увеличивается частота отрыва пузырьков. Наступает режим *развитого пузырькового кипения*, при котором коэффициент теплоотдачи и тепловой поток резко возрастают.

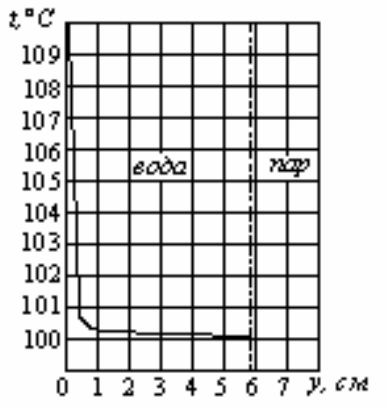


Рис. 15.8. Изменение температуры в толще слоя воды при кипении

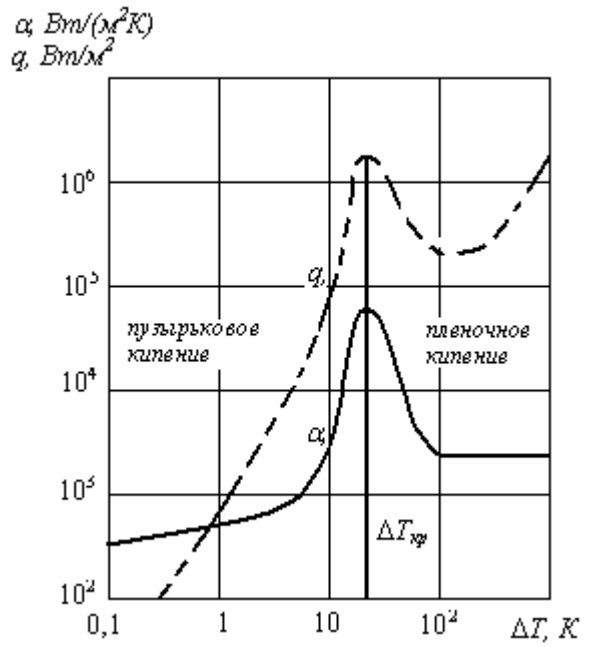


Рис. 15.9. Зависимость коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока от температурного напора

При некоторой плотности теплового потока благодаря большому числу действующих центров парообразования, паровые пузырьки объединяются в пленку, которая покрывает сначала отдельные участки поверхности, а затем полностью отделяет жидкость от поверхности нагрева. Такое кипение называется *пленочным*. Так как теплопроводность пара значительно меньше теплопроводности жидкости, то появление паровой пленки резко уменьшает коэффициент теплоотдачи. Когда пленка покрывает всю поверхность нагрева, условия теплообмена стабилизируются.

Режим, отвечающий максимальному значению теплового потока и коэффициента теплоотдачи при кипении называется критическим. Критические значения температурного напора, коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока зависят от природы жидкости, а также от давления, при котором жидкость находится.

Рассмотрим результаты обобщения опытных данных по теплоотдаче при пузырьковом кипении на основе системы чисел подобия, предложенных Д. А. Лабунцовым. Обобщение опытных данных по теплоотдаче при пузырьковом кипении привело к уравнению вида

$$Nu_s = cK_s^n \, Pr_s^{1/3}, \tag{15.93}$$

где $Nu_s = \dfrac{\alpha l^*}{\lambda}$; $K_s = \dfrac{q l^*}{r\rho'' \nu}$; r – теплота парообразования; λ, ν – теплопроводность и кинематическая вязкость жидкости; $l^* = \dfrac{\sigma T_s \rho' c'}{(r\rho'')^2}$ –

характерный размер; T_s – температура сухого насыщенного пара (температура кипения); ρ' и c' – плотность и теплоемкость кипящей жидкости.

Уравнение (15.93) обобщает опытные данные при $K_s = 10^{-5}...10^{4}$ и $Pr_s = 0{,}86...7{,}6$. При $K_s > 10^{-2}$ $c = 0{,}125$, $n = 0{,}65$. При $K_s < 10^{-2}$ $c = 0{,}0625$, $n = 0{,}5$.

Форма и размеры поверхности нагрева практически не влияют на коэффициент теплоотдачи. Материал и состояние поверхности влияют на интенсивность теплоотдачи только в начальный период кипения.

15.8.3. Теплоотдача при кипении в условиях движения жидкости по трубам

Теплоотдача при кипении жидкости, движущейся по трубам и каналам имеет ряд особенностей, которые обусловлены изменением температуры стенки и жидкости вдоль трубы. Температура насыщения по длине трубы уменьшается благодаря уменьшению давления из-за гидравлического сопротивления.

По условиям теплообмена трубу можно разделить на ряд участков. Во входном участке температура стенки трубы меньше температуры насыщения. Проходя через этот участок, жидкость подогревается, причем теплообмен не сопровождается кипением. На втором участке трубы температура стенки превышает температуру насыщения, но ядро потока не достигло еще этой температуры. Поэтому отделяющиеся от поверхности нагрева пузырьки пара частично или полностью конденсируются в центральной части потока. Такое явление называют *кипением недогретой жидкости*.

К началу третьего участка центральная часть потока достигает температуры насыщения. На этом участке происходит развитое пузырьковое кипение. Здесь паросодержание может достигать большой величины, и по трубе движется, по существу, двухфазный поток.

Увеличение паросодержания сопровождается ростом скорости потока и градиента давления вдоль трубы. При этом пузырьки пара сначала распределяются по всему поперечному сечению трубы (*эмульсионный режим*), затем они сливаются в крупные паровые пробки (*пробковый режим*), затем пробки сливаются в общий паровой поток, (*стержневой режим*).

Характер влияния скорости потока на коэффициент теплоотдачи при кипении зависит от плотности теплового потока. При небольшом тепловом потоке коэффициент теплоотдачи целиком определяется условиями движения. При очень больших тепловых нагрузках влиянием условий движения на интенсивность теплообмена можно пренебречь, так как коэффициент теплоотдачи целиком определяется процессом кипения и подчиняется таким же закономерностям, как и при кипении в большом объеме.

Д. А. Лабунцов обработал опытные данные по теплоотдаче кипящих жидкостей, движущихся по трубам, при паросодержании, не превышающем 70%. Он предложил зависимость:

$$\frac{\alpha}{\alpha_w} = f\left(\frac{\alpha_q}{\alpha_w}\right), \tag{15.94}$$

где α – коэффициент теплоотдачи кипящей жидкости с учетом ее движения; α_w – коэффициент теплоотдачи однофазной жидкости при скорости w; α_q – коэффициент теплоотдачи при развитом пузырьковом кипении в большом объеме.

Опыты показывают, что при $\frac{\alpha_q}{\alpha_w} < 0{,}5$ процесс кипения не влияет на теплообмен и $\alpha = \alpha_w$. При $\frac{\alpha_q}{\alpha_w} > 2$ интенсивность теплоотдачи определяется только кипением и поэтому $\alpha = \alpha_q$. Для области, где коэффициент теплоотдачи зависит от скорости потока и тепловой нагрузки $\frac{\alpha_q}{\alpha_w} = 0{,}5...2$ рекомендуется формула вида

$$\frac{\alpha}{\alpha_w} = \frac{4\alpha_w + \alpha_q}{5\alpha_w - \alpha_q}. \tag{15.95}$$

Коэффициент теплоотдачи при кипении зависит также от содержания растворенных в жидкости газов. Пузырьки газа служат дополнительными центрами парообразования и потому интенсифицируют теплоотдачу. Рассмотренные выше уравнения относились к дегазированной жидкости.

15.9. Интенсификация теплоотдачи

Простейший способ увеличения коэффициента теплоотдачи состоит в увеличении скорости теплоносителя относительно поверхности, но при этом резко возрастает гидравлическое сопротивление. Поэтому чаще пользуются другими способами, при которых интенсификация теплоотдачи достигается без изменения продольной скорости теплоносителя. Одним из способов, при этом, является искусственная турбулизация потока, которая может быть достигнута установкой турбулизаторов перед входом в канал или созданием на поверхности теплообмена искусственной шероховатости, периодически повторяющихся выступов и углублений. Турбулизаторы, расположенные на поверхности более экономичны, так как они возмущают только пристенную часть потока и создают возмущения по всей поверхности, а не только на ее начальном участке.

За выступами при обтекании их теплоносителем возникает отрыв потока с образованием вихрей, энергия которых расходуется на повышение уровня

турбулентности. При обтекании углублений также возникают вихревые зоны и повышается уровень турбулентности.

Уровень интенсификации теплоотдачи газообразных теплоносителей можно существенно увеличить за счет добавки в газ твердых частиц, например, частиц графита.

Тепловое и гидродинамическое воздействие частиц на пристенную часть потока с целью интенсификации теплоотдачи можно существенно увеличить с помощью инерционных массовых сил.

16. РАДИАЦИОННЫЙ ТЕПЛООБМЕН

16.1. Основные понятия и определения

Температура всех тел отлична от абсолютного нуля, поэтому все тела излучают и поглощают энергию излучения. Количественные характеристики радиационного теплообмена построены на представлении об энергии излучения как энергии электромагнитных волн инфракрасного диапазона (длины волн составляют $\lambda = 0{,}8...800$ *мк*).

Суммарное излучение, проходящее через произвольную поверхность площади F в единицу времени, называется *потоком излучения* Q, *Вт*.

Поток излучения, отнесенный к площади поверхности, через которую он проходит, называется *плотностью потока изучения* или *излучательной способностью*

$$E = \frac{dQ}{dF}. \tag{16.1}$$

Плотность потока излучения учитывает излучение во всех направлениях и при всех длинах волн.

В диапазоне длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ во всех направлениях излучается энергия dE. Отношение

$$E_\lambda = \frac{dE}{d\lambda} \tag{16.2}$$

характеризует энергию электромагнитных волн с длиной волны λ и называется *спектральной плотностью потока излучения*.

В общем случае плотность потока излучения изменяется в зависимости от направления, которое можно охарактеризовать углом φ между этим направлением и нормалью к поверхности излучения. Излучение от площадки dF по определенному направлению можно охарактеризовать *угловой плотностью потока излучения*, которую для интегрального (при всех динах волн) и спектрального излучения можно записать выражениями вида

$$J_\varphi = \frac{d^2 Q_\varphi}{d\Omega dF}; \tag{16.3}$$

$$J_{\varphi\lambda} = \frac{d^2 Q_{\varphi\lambda}}{d\Omega dF}, \tag{16.4}$$

где dQ_φ и $dQ_{\varphi\lambda}$ − элементарные потоки интегрального и спектрального излучения от площадки dF по направлению, составляющему с нормалью угол φ в пределах некоторого элементарного телесного угла $d\Omega$.

К важным понятиям теории излучения относится *интенсивность (яркость) излучения*.

Интенсивностью излучения называется количество лучистой энергии, испускаемое в направлении угла φ в единицу времени элементарной площадкой в пределах единичного элементарного телесного угла, отнесенное к

проекции этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению излучения:

$$J = \frac{J_\varphi}{\cos\varphi}; \tag{16.5}$$

$$J_\lambda = \frac{J_{\varphi\lambda}}{\cos\varphi}. \tag{16.6}$$

Интенсивность излучения определяется природой тела, его температурой и состоянием поверхностей, а спектральная интенсивность еще и длиной волны.

Теперь рассмотрим что происходит с потоком излучения, который падает на поверхность некоторого тела.

Поток излучения, падающий на поверхность тела Q, поглощается не полностью: часть энергии отражается, часть может проходить сквозь тело (рис. 16.1).

Таким образом,

$$Q = Q_A + Q_R + Q_D \tag{16.7}$$

или

$$A + R + D = 1, \tag{16.8}$$

где $A = \frac{Q_A}{Q}$ – поглощательная способность тела; $R = \frac{Q_R}{Q}$ – отражательная способность тела; $D = \frac{Q_D}{Q}$ – пропускательная способность тела.

Тело, поглощающее всю падающую на него энергию, называется *абсолютно черным*. Для такого тела $A = 1$ и $R = D = 0$.

Тело, отражающее всю падающую на него энергию, называется *абсолютно белым*. Для такого тела $R = 1$ и $A = D = 0$.

Тело, пропускающее всю падающую на него энергию излучения, называется *диатермичным* или *абсолютно прозрачным*. Для такого тела $D = 1$ и $A = R = 0$.

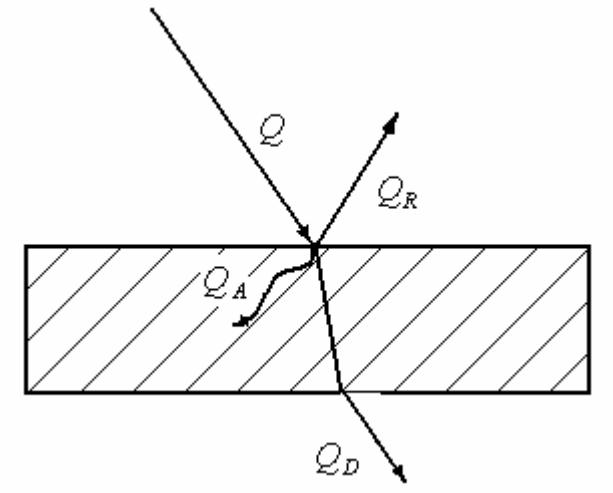


Рис. 16.1. Поглощение, отражение и пропускание потока излучения, падающего на поверхность тела

Следует отметить, что в природе абсолютно черных, абсолютно белых и абсолютно прозрачных тел нет. Реальные тела обычно называют *серыми*.

16.2. Основные законы радиационного теплообмена

Закон Планка

Закон Планка устанавливает зависимость спектральной плотности потока излучения абсолютно черного тела $E_{0\lambda}$ от длины волны λ и температуры T. Используя представления о квантах энергии, Планк теоретическим путем получил закон:

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1}, \tag{16.9}$$

где C_1 и C_2 – константы; e – основание натурального логарифма.

Графическое изображение этого закона представлено на рис. 16.2. Из графика видно, что увеличение температуры способствует увеличению плотности потока излучения, при этом максимум излучения смещается в сторону более коротких длин волн.

Закон смещения Вина

Закон смещения вина является частным случаем закона Планка. Он показывает как длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности потока излучения λ_{max} зависит от температуры излучающего тела. Для абсолютно черного тела имеет место выражение вида

$$\lambda_{max} T = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \, мК. \tag{16.10}$$

Закон Стефана-Больцмана

Закон Стефана-Больцмана устанавливает связь между интегральной плотностью потока излучения E_0 и температурой тела.

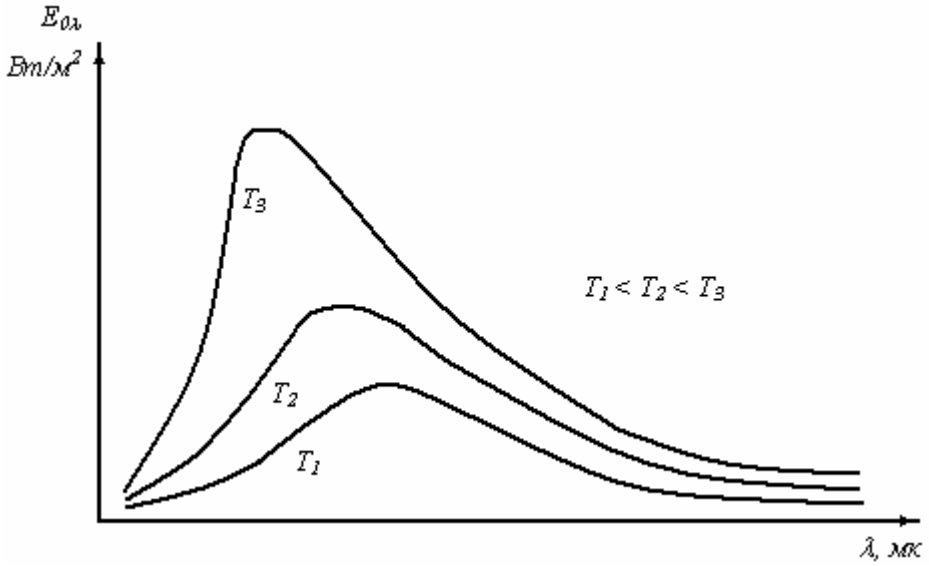


Рис. 16.2. Иллюстрация закона Планка и закона смещения Вина

Закон Стефана-Больцмана имеет вид

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \tag{16.11}$$

где σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана.

Для удобства практических расчетов закон Стефана-Больцмана представляют в виде

$$E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \tag{16.12}$$

где $C_0 = 5{,}67 \frac{Вт}{м^2 К}$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела.

Закон Стефана-Больцмана в формах (16.11) и (16.12) также применим только для абсолютно черных тел. Чтобы применить этот закон к серым телам необходимо использовать положение о том, что у серых тел, также как и у черных, собственное излучение пропорционально абсолютной температуре в четверной степени, но энергия излучения меньше, чем энергия излучения черного тела при той же температуре. Тогда для серых тел закон Стефана-Больцмана примет вид

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 = C \left(\frac{T}{100} \right)^4, \tag{16.13}$$

где $\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{C}{C_0}$ – степень черноты серого тела; C – коэффициент излучения серого тела.

Таким образом, *степенью черноты* называется отношение поверхностной плотности потока собственного интегрального излучения к его величине для абсолютно черного тела при той же температуре.

Из определения следуют, что для обычных серых тел степень черноты имеет значение в пределах: $0 < \varepsilon < 1$.

Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа устанавливает связь между способностями излучать и поглощать энергию излучения. Для тел, находящихся в термодинамическом равновесии (когда количество излученной и поглощенной телом энергии одинаково), поверхностная плотность потока излучения и поглощательная способность однозначно связаны.

Рассмотрим систему, состоящую из двух тел. Пусть для первого тела поверхностная плотность потока излучения равна E_1, а поглощательная способность равна A_1, второе тело представляет собой абсолютно черное тело (E_0, $A_0 = 1$). В состоянии термодинамического равновесия

$$E_1 = A_1 E_0 \tag{16.14}$$

или

$$\frac{E_1}{A_1} = E_0 . \tag{16.15}$$

Для системы, состоящей из большего количества тел:

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = ... = E_0 . \tag{16.16}$$

Поверхностную плотность потока излучения для серых тел системы можно выразить через степень черноты и поверхностную плотность потока излучения абсолютно черного тела:

$$E_1 = \varepsilon_1 E_0 . \tag{16.17}$$

Таким образом, выражение (16.16) примет вид

$$\frac{\varepsilon_1}{A_1} = \frac{\varepsilon_2}{A_2} = ... = 1 . \tag{16.18}$$

Следовательно, в условия термодинамического равновесия, для любых тел $\varepsilon = A$, а для абсолютно черного тела $\varepsilon = A = 1$.

16.3. Радиационный теплообмен между твердыми телами, разделенными прозрачной средой

Рассмотрим теплообмен излучением при стационарном режиме для простых случаев.

Две параллельные друг другу стенки

При наличии двух параллельных стенок (рис. 16.3), излучение каждой стенки будет частично поглощаться, частично отражаться. Этот процесс, многократно повторяясь, имеет затухающий характер. Обозначим через q_1 плотность потока эффективного излучения от первой стенки ко второй, включающую как собственное излучение первой стенки, так и все ее отражения. Аналогично для второй стенки – q_2.

Из потока излучения q_2, падающего на первую стенку, будет поглощено $A_1\, q_2$ и отражено $(1 - A_1)\, q_2$ (стенки считаются непрозрачными). Следовательно,

$$q_1 = E_1 + (1 - A_1) q_2 ; \tag{16.19}$$

$$q_2 = E_2 + (1 - A_2) q_1 . \tag{16.20}$$

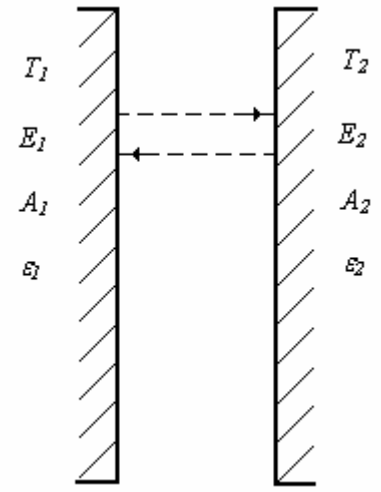


Рис. 16.3. Две параллельные стенки

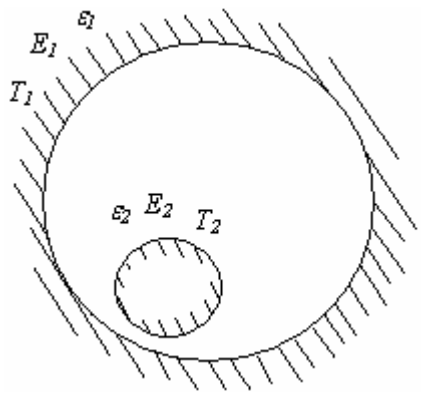


Рис. 16.4. Одно тело окружено поверхностью другого

Решая совместно уравнения (16.19) и (16.20), получим

$$q_1 = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}; \tag{16.21}$$

$$q_2 = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \tag{16.22}$$

Результирующий поток

$$q = q_1 - q_2 = \frac{A_2 E_1 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \tag{16.23}$$

Согласно закону Стефана-Больцмана и учитывая, что $\varepsilon = A$, получим

$$q = \varepsilon_{пр} C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \tag{16.24}$$

где $\varepsilon_{пр} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ – приведенная степень черноты системы.

Одно тело окружено поверхностью другого

В случае, когда одно тело окружено поверхностью другого тела (рис. 16.4) результирующий удельный лучистый тепловой поток также определяется формулой (16.24), но $\varepsilon_{пр} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{F_2}{F_1}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$, где F_1 – площадь окружающей тело поверхности; F_2 – площадь поверхности тела, окруженного некоторой поверхностью.

16.4. Защитные экраны

Поскольку излучение определяется температурой, количество радиационной энергии можно регулировать, воздействуя на температуру излучателя. Но нередко бывают случаи, когда нельзя снизить температуру тела, чтобы ослабить действие лучистого потока. Тогда используют экраны. Экраны для защиты от теплового излучения выполняют из материалов с большой отражательной и малой поглощательной способностью.

Рассмотрим простейший случай двух параллельных друг другу стенок, между которыми установлено m экранов. Плотность лучистого теплового потока при этом рассчитывается с помощью формулы (16.24), однако $\varepsilon_{пр} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\dfrac{1}{\varepsilon'_{эi}} + \dfrac{1}{\varepsilon''_{эi}} - 1 \right)}$, где ε_1 и ε_2 – степени черноты излучающих поверхностей; $\varepsilon'_{эi}$ и $\varepsilon''_{эi}$ – степени черноты поверхностей i-го экрана.

Расстояние до экрана от излучающих поверхностей для определения лучистого теплообмена значения не имеет.

16.5. Радиационный теплообмен между газом и оболочкой

Количество теплоты, которое от излучающего газа передается на каждый квадратный метр поверхности оболочки в единицу времени, определяется по формуле

$$q = \varepsilon'_w C_0 \left[\varepsilon_г \left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - A_г \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right], \tag{16.25}$$

где ε'_w – эффективная степень черноты стенки; $A_г$ – поглощательная способность газа при температуре стенки.

Как известно, лучше всего излучают трехатомные газы. Наиболее хорошо изучен теплообмен изучением для H_2O и для CO_2, которые содержатся в продуктах сгорания углеводородных топлив. Для смеси, содержащей эти газы, степень черноты определяется формулой

$$\varepsilon_г = \varepsilon_{CO_2} + \varepsilon_{H_2O} - \varepsilon_{CO_2}\varepsilon_{H_2O}. \tag{16.26}$$

Последний член в этой формуле отражает эффект взаимного поглощения.

Эффективная степень черноты стенки больше действительного ее значения ε_w, так как стенка не только излучает, но и отражает часть излучения газа. Эффективную степень черноты можно рассчитать по формуле

$$\varepsilon'_w = \varepsilon_w \left[1 + (1 - \varepsilon_w)(1 - \varepsilon_г) \right]. \tag{16.27}$$

Поглощательную способность газа $A_г$ можно принять равной степени черноты газа $\varepsilon_г$.

Таким образом, формулу (16.25) можно записать в виде

$$q = \varepsilon_{пр} C_0 \left[\left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right], \tag{16.28}$$

где $\varepsilon_{пр} = \varepsilon'_w \varepsilon'_г$ – приведенная степень черноты системы.

17. ТЕПЛООБМЕННЫЕ АППАРАТЫ

17.1. Основные виды теплообменных аппаратов

Теплообменными аппаратами называются устройства, предназначенные для передачи теплоты от одного теплоносителя к другому.

По принципу действия теплообменные аппараты подразделяются на *поверхностные* и *смесительные*.

К поверхностным теплообменным аппаратам относятся *рекуперативные* и *регенеративные* теплообменные аппараты.

В рекуперативных теплообменниках теплоносители омывают стенку с двух сторон и обмениваются при этом теплотой. Процесс теплообмена протекает непрерывно и имеет обычно стационарный характер.

Стенка, которая омывается с обеих сторон теплоносителями, называется *рабочей поверхностью*.

Рекуперативные теплообменные аппараты подразделяются в зависимости от направления движения теплоносителей. Если теплоносители движутся параллельно друг другу в одном направлении, то теплообменный аппарат называется *прямоточным*, при противоположных направлениях движения теплоносителя – *противоточным*. В теплообменнике с *перекрестным током* теплоносители движутся во взаимно перпендикулярных направлениях.

Конструктивно рекуперативные теплообменники могут выполняться с трубчатыми и пластинчатыми рабочими поверхностями.

В регенеративном теплообменнике одна и та же поверхность поочередно омывается то горячим, то холодным теплоносителем. При соприкосновении с горячим теплоносителем стенка аккумулирует теплоту, а затем отдает ее холодному теплоносителю. Для удовлетворительной работы теплообменника его рабочие стенки должны обладать значительной теплоемкостью. Характерной особенностью регенеративного теплообменника является нестационарный режим теплообмена.

В смесительных теплообменниках процесс теплообмена сопровождается перемешивание теплоносителей, т. е. теплоносители непосредственно соприкасаются друг с другом. Поэтому смесительные теплообменники называют также *контактными*. Процесс теплообмена в таком аппарате имеет стационарный характер и сопровождается испарением жидкости.

17.2. Тепловой расчет рекуперативного теплообменного аппарата

Наибольшее распространение в энергетике и промышленности нашли рекуперативные теплообменные аппараты. Рассмотрим каким образом может быть произведен тепловой расчет рекуперативного теплообменника.

Различают проектировочный и поверочный тепловой расчет. Цель проектировочного расчета состоит в определении площади рабочей поверхности теплообменника. При этом должно быть известно передаваемое

количество теплоты или массовые расходы теплоносителей и изменение их температуры.

Поверочный расчет выполняется для теплообменника с известной площадью поверхности. Цель расчета состоит в определении температур теплоносителя на выходе из теплообменника и передаваемого количества теплоты.

На рис. 17.1 и 17.2 представлены температурные поля для прямоточного и противоточного теплообменников.

Рабочий процесс рекуперативного теплообменника при стационарном режиме работы описывается уравнением теплового баланса и уравнением теплопередачи.

Уравнение теплового баланса имеет вид

$$G_1 c_{p1}\left(T_1' - T_1''\right)\eta_{пот} = G_2 c_{p2}\left(T_2' - T_2''\right), \qquad (17.1)$$

где G_1 и G_2 – массовые расходы греющего и нагреваемого теплоносителей соответственно; $\eta_{пот}$ – коэффициент потерь теплоты в окружающую среду (составляет примерно 0,97, в идеальном случае, который будет рассмотрен далее, $\eta_{пот} = 1$); c_{p1} и c_{p2} – средние удельные теплоемкости греющего и нагреваемого теплоносителей соответственно; T_1' и T_2' – температуры на входе греющего и нагреваемого теплоносителей соответственно; T_1'' и T_2'' – температуры на выходе греющего и нагреваемого теплоносителей соответственно.

Разность температур между теплоносителями изменяется по длине теплообменного аппарата, поэтому уравнение теплопередачи имеет вид

$$Q = \int_0^F k_l \Delta T dF = kF\overline{\Delta T}, \qquad (17.2)$$

где k и $\overline{\Delta T}$ – средние значения коэффициента теплопередачи и температурного напора всего теплообменного аппарата.

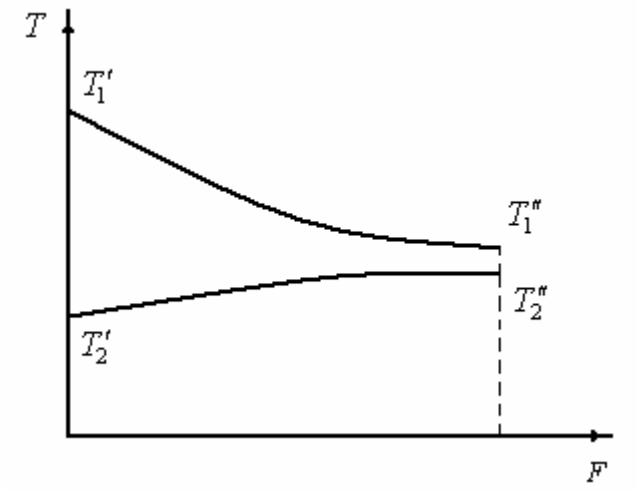


Рис. 17.1. Температурное поле прямоточного рекуперативного теплообменного аппарата

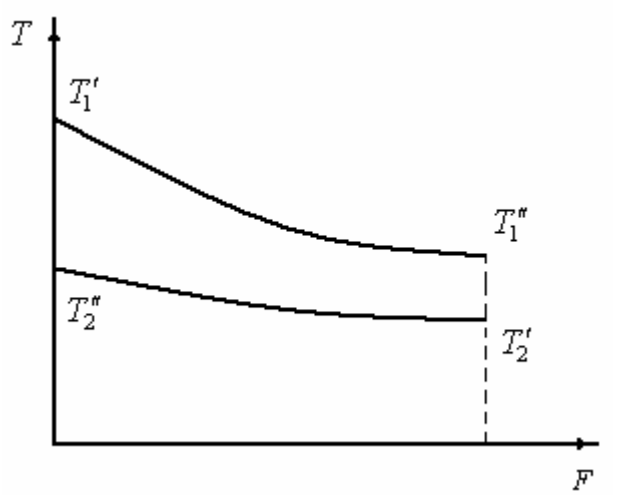


Рис. 17.2. Температурное поле противоточного рекуперативного теплообменного аппарата

При проектировочном расчете площадь рабочей поверхности теплообменника определяется из уравнения теплопередачи

$$F = \frac{Q}{k\overline{\Delta T}}. \tag{17.3}$$

Если тепловой поток Q неизвестен, он определяется из уравнения (17.1).

Запишем уравнения теплопередачи и теплового баланса для элемента рабочей поверхности теплообменного аппарата:

Из уравнений теплового баланса и теплопередачи можно выразить средний температурный напор.

$$dQ = k\Delta T dF; \tag{17.4}$$

$$dQ = -G_1 c_{p1} dT_1 = G_2 c_{p2} dT_2. \tag{17.5}$$

Из уравнения (17.5) следует, что

$$dT_1 = -\frac{dQ}{G_1 c_{p1}};\ dT_2 = -\frac{dQ}{G_2 c_{p2}}. \tag{17.6}$$

Вычитая правые и левые части

$$d\Delta T = -dQ\left(\frac{1}{G_1 c_{p1}} + \frac{1}{G_2 c_{p2}}\right); \tag{17.7}$$

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\left(\frac{1}{G_1 c_{p1}} + \frac{1}{G_2 c_{p2}}\right) k dF. \tag{17.8}$$

После интегрирования этого выражения от входного до выходного сечения теплообменного аппарата, получим

$$ln\frac{\Delta T''}{\Delta T'} = -\left(\frac{1}{G_1 c_{p1}} + \frac{1}{G_2 c_{p2}}\right) kF. \tag{17.9}$$

где $\Delta T' = T_1' - T_2'$ и $\Delta T'' = T_1'' - T_2''$ – для прямоточного теплообменного аппарата; $\Delta T' = T_1' - T_2''$ и $\Delta T'' = T_1'' - T_2'$ – для противоточного теплообменного аппарата.

Используя уравнение теплового баланса, для прямоточного теплообменного аппарата найдем

$$\frac{1}{G_1 c_{p1}} + \frac{1}{G_2 c_{p2}} = \frac{T_1' - T_1''}{Q} + \frac{T_2' - T_2''}{Q} = \frac{\Delta T' - \Delta T''}{Q}. \tag{17.10}$$

Подставим (13.10) в (13.9), таким образом, средний температурный напор

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T' - \Delta T''}{ln\frac{\Delta T'}{\Delta T''}}, \tag{17.11}$$

Формула (17.3) одинаково пригодна для прямоточного и противоточного теплообменного аппарата.

Оценка среднего температурного напора для теплообменных аппаратов с перекрестным током приводит к более громоздким формулам, поэтому средний

температурный напор рассчитывается через поправки, значение которых приводится в справочной литературе.

Сравнение средних температурных напоров прямоточного и противоточного теплообменников при одинаковых температурах теплоносителей на входе и выходе показывает, что в противоточном теплообменном аппарате температурный напор больше, чем в прямоточном. Благодаря этому площадь рабочей поверхности противоточного теплообменного аппарата при прочих равных условиях будет меньше.

При сравнении противоточной и перекрестных схем принимают во внимание, что поперечное обтекание труб приводит к больших значениям коэффициента теплоотдачи, чем при продольно обтекании трубы.

Если величины $\Delta T'$ и $\Delta T''$ близки по своим значениям, то вместо выражения (17.11) можно воспользоваться более простой формулой вида

$$\overline{\Delta T} = \frac{\Delta T' + \Delta T''}{2}. \qquad (17.12)$$

Получим расчетные соотношения для выполнения поверочного расчета прямоточного теплообменного аппарата.

Введем обозначение $\frac{1}{G_1 c_{p1}} + \frac{1}{G_2 c_{p2}} = m$, тогда уравнение (17.9) примет вид

$$\frac{T_1'' - T_2''}{T_1' - T_2'} = e^{-mkF}. \qquad (17.13)$$

Прибавим и отнимем из правой части равенства 1, в результате получим уравнение вида

$$(T_1' - T_1'') + (T_2'' - T_2') = (T_1' - T_2')(1 - e^{-mkF}). \qquad (17.14)$$

Из уравнения теплового баланса следует, что

$$T_2'' - T_2' = (T_1' - T_1'')\frac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}}. \qquad (17.15)$$

Таким образом,

$$T_1'' = T_1' - (T_1' - T_2')П, \qquad (17.16)$$

где $П = \dfrac{1 - e^{-\left(1 + \frac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}}\right)\frac{kF}{G_1 c_{p1}}}}{1 + \dfrac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}}}$.

$$T_2'' = T_2' + (T_1' - T_2')\frac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}} П. \qquad (17.17)$$

Аналогично для противоточного теплообменного аппарата:

$$T_1'' = T_1' - (T_1' - T_2')Z; \qquad (17.18)$$

$$T_2'' = T_2' + (T_1' - T_2')\frac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}} Z\,, \tag{17.19}$$

где $Z = \dfrac{1 - e^{-\left(1+\frac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}}\right)\frac{kF}{G_1 c_{p1}}}}{1 - \dfrac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}} e^{-\left(1+\frac{G_1 c_{p1}}{G_2 c_{p2}}\right)\frac{kF}{G_1 c_{p1}}}}$.

Для определения функций $П$ и Z составлены таблицы. После определения конечных температур тепловой поток может быть рассчитан по формуле (17.1).

17.3. О гидравлическом расчете рекуперативного теплообменного аппарата

Целью гидравлического расчета теплообменного аппарата является определение затрат механической энергии на перемещение теплоносителей в аппарате.

При гидравлическом расчете теплообменного аппарата надо учитывать сопротивление трения, местные сопротивления и тепловое сопротивление.

Для несжимаемой жидкости сопротивление трения определяется по формуле вида

$$\Delta p_\tau = \zeta \frac{l}{d}\frac{\rho \overline{w}^2}{2}, \tag{17.20}$$

где l и d – длина и диаметр канала; ζ– коэффициент сопротивления трения.

При неизотермическом турбулентном режиме течения жидкости:

$$\xi = \frac{0{,}3164}{Re_f^{0{,}25}}\left(\frac{Pr_w}{Pr_f}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{17.21}$$

При течении сжимаемой жидкости в теплообменнике возникает тепловое сопротивление

$$\Delta p_{тепл} = 2\left(\frac{\rho_2 \overline{w}_2^2}{2} - \frac{\rho_1 \overline{w}_1^2}{2}\right). \tag{17.22}$$

Общее сопротивление каждого теплоносителя определяется формулой вида

$$\Delta p = \sum \Delta p_\tau + \sum \Delta p_м + \sum \Delta p_{тепл}\,. \tag{17.23}$$

Формула (17.23) является приближенной, поэтому в особо важных случаях гидравлическое сопротивление определяется путем гидравлических испытаний.

17.4. Способы повышения эффективности теплообменных аппаратов

Эффективность теплообменного аппарата можно оценить различными способами. Важным критерием оценки являются затраты, связанные с изготовлением и эксплуатацией теплообменного аппарата. Затраты на изготовление зависят главным образом от площади рабочей поверхности, а затраты на эксплуатацию – от мощности для перемещения теплоносителей.

Для транспортных теплообменных аппаратов важным критерием являются масса и габариты. Компактность теплообменника можно оценить удельной поверхностью нагрева, которая представляет собой площадь рабочей поверхности, приходящуюся на единицу объема аппарата. При выборе вида поверхности нагрева следует иметь ввиду, что трубчатые поверхности позволяют создать жесткую конструкцию и более удобны в эксплуатации (для отчистки). Пластинчатые теплообменники более компактны.

Выбор скоростей теплоносителей должен обеспечить наибольшую эффективность работы теплообменного аппарата. Для получения высокой интенсивности теплообмена необходимо при течении теплоносителя реализовывать турбулентный режим.

Увеличение скоростей теплоносителей сопровождается уменьшением рабочей поверхности теплообменника и ростом гидравлических потерь.

Диаметр труб и шаг трубного пучка также существенно влияют на компактность и массу теплообменника. Удельная поверхность нагрева обратно пропорциональна диаметру трубы. Однако, использование мелких трубок увеличивает затраты на эксплуатацию, поэтому в теплообменниках обычно применяют трубки диаметром больше 12 *мм*. Уменьшение шага трубного пучка также является средством уменьшения массы и размеров теплообменника, однако имеет технологические ограничения.

Для повышения компактности и снижения массы теплообменных аппаратов используются различные средства интенсификации теплообмена и оребрение рабочих поверхностей, которое может использоваться как в пластинчатых, так и в трубчатых теплообменных аппаратах.

В трубчатом теплообменнике ребра устанавливают обычно только с наружной стороны, а в пластинчатом – с обеих сторон рабочей поверхности.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ГИДРАВЛИКИ И ТЕПЛОТЕХНИКИ
Учебное пособие

Составитель РТИЩЕВА Алена Сергеевна

Редактор
Подписано в печать .10.2007. Формат 60×84.16.
Бумага писчая. Усл. печ.л. 10,69.
Тираж 100 экз. Заказ
Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.
Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.