Библиотека СОК

Министерство Образования Украины
ДНЕПРОПЕТРОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Кудинов Павел Иванович

УДК 532.529

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА В ЗАДАЧАХ С КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ И НЕЕДИНСТВЕННЫМ РЕШЕНИЕМ

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Приходько Александр Анатольевич
доктор физ.-мат. наук, проф.

Днепропетровск – 1999

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ 2

ВВЕДЕНИЕ 4

РАЗДЕЛ 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЯ 10

1.1. Современное состояние численных методов моделирования процессов гидродинамики и тепломассообмена в несжимаемой жидкости 10
1.2. Методы оценки работоспособности и эффективности разностных схем и алгоритмов 15
1.3. Свободноконвективный теплообмен в горизонтальных кольцеобразных каналах с горячим внутренним элементом 16
1.4. Численное моделирование нестационарных отрывных течений 18
1.5. Особенности численного моделирования задач с неединственным решением 20
1.6. Выводы 23

РАЗДЕЛ 2 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНТРОЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ К РАСЧЕТУ ПРОЦЕССОВ ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ 26

2.1 Обобщенный закон сохранения физической величины в контрольном объеме 27
2.2. Дискретный аналог обобщенного закона сохранения в криволинейной неортогональной системе координат 29
2.2.1. Метод контрольного объема в случае осевой симметрии и при наличии закрутки потока 35
2.2.2. Особенности дискретизации уравнений сохранения количества движения в ортогональных криволинейных системах координат 39
2.3 SIMPLE методы в криволинейной неортогональной системе координат 41
2.3.1. Вывод конечно-разностных соотношений на разнесенной сетке 43
2.3.2. Процедуры SIMPLE, SIMPLEC, PISO и SIMPLER в криволинейной неортогональной системе координат 46
2.3.3. Вывод конечно-разностных соотношений на частично совмещенной сетке 49
2.3.4. Аппроксимация граничных условий 53
2.4. Влияние точности вычисления конвективного потока на решение тестовой задачи о сдвиговом течение в криволинейной системе координат 55
2.5. Разностные схемы для аппроксимации конвективного и диффузионного потока 59
2.5.1. Схема аппроксимации диффузионных потоков 59

2.5.2. Схема QUIC *61*
2.5.3. Схемы TVD для дозвуковых течений *64*
2.6. Основные результаты 67

РАЗДЕЛ 3 ВЕРИФИКАЦИЯ И АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ 69

3.1. Сравнение эффективности разностных схем и SIMPLE- подобных алгоритмов 69
3.1.1. Развитие циркуляционного течения в каверне *69*
3.1.2. Применение метода контрольного объема для описания свободноконвективного движения жидкости в приближении Буссинеска *77*
3.1.3. Развитие свободной конвекции в квадратной области при подогреве сбоку *80*
3.1.4. Оценка влияния кривизны сеточных линий на точность расчета локальных и интегральных характеристик течения и теплообмена *87*
3.2. Теплообмен в режиме свободной конвекции в горизонтальных кольцевых каналах 96
3.2.1. Свободная температурная конвекция в полости между горизонтальными цилиндрами *98*
3.2.2. Задача о свободной конвекции в горизонтальной цилиндрической полости с внутренним, концентрично расположенным стержнем *102*
3.3. Выводы. 108

РАЗДЕЛ 4. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ 110

4.1. Методики расчета стационарных и нестационарных задач. 110
4.1.1. Аппроксимация по времени и счет на установление. *110*
4.1.2. Развитие нестационарного отрыва потока при обтекании цилиндра. *112*
4.1.3. Периодическое течение за цилиндром. *145*
4.2. Выводы. 173

РАЗДЕЛ 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕЕДИНСТВЕННЫМ РЕШЕНИЕМ 174

5.1. Течение за симметричным внезапным расширением..... 176
5.2. Свободная конвекция в V-образных каналах. 191
5.3. Выводы. 212

ВЫВОДЫ 214

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 219

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Всестороннее исследование дозвуковых течений несжимаемой жидкости и газа является актуальной задачей гидромеханики, поскольку такие течения часто встречаются в научных и технических приложениях. Например, в различных теплообменниках [24], [8], [56], градирнях [94], [64], [63], камерах сгорания дисперсного топлива [118], [96], [119], [40], [89], вихревых устройствах [114], сепараторах и распылителях [128], [97], [119], [129], [130], [114], [6], [41]. Повышение отдачи таких устройств, может дать громадную экономию энергетических и других ресурсов в масштабах всей Украины.

При проектировании технологического оборудования часто возникают задачи, в которых течение теряет устойчивость, или существует возможность реализации нескольких режимов течения при одном и том же наборе критериальных параметров. Среди известных задач такого типа можно назвать развитие различного рода возмущений течения в неустойчивом пограничном слое [126], [177], [69], [71], свободноконвективные течения с неустойчивой стратификацией [24], [163], [126], [72], [186], [182], [126], [70], [153], [36], [68], [37], [15], течения в плоских симметричных диффузорах и внезапных расширениях [147], [175], [45], [126], [22], [20], неустойчивость во вращающихся цилиндрических и сферических течениях [20], [172], [69], [2], [28], [16], [43], [4], [3].

В условиях значительного сокращения финансирования научных исследований и фондов развития производства, экспериментальные работы по созданию новых технологий практически неосуществимы. В связи с этим, задача развития и совершенствования численных методов исследования течений вязкой несжимаемой жидкости становится особенно актуальной.

Наличие неединственности и неустойчивости решений задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости требует повышения точности и эффективности численных методов расчета гидродинамики и теплообмена в областях произвольной формы. Особенно важно обеспечить свойство консервативности и монотонности численного метода в произвольной системе координат, чтобы свести

к минимуму возмущения, вносимые методом в решение за счет особенностей разностной аппроксимации и кривизны сеточных линий. Для этой цели наиболее подходит семейство SIMPLE алгоритмов на основе метода контрольного объема [76], [161], [12], [59], [47] и схемы типа TVD, модифицированные для расчета несжимаемых течений [187].

Для оценки эффективности неявных методов, записанных в интегральной векторной форме для произвольной неортогональной системы координат, общепринятой методикой является решение тестовых задач. Существует необходимость в едином критерии эффективности, который позволял бы проводить сравнительную оценку, одновременно учитывающую точность, устойчивость и скорость сходимости метода.

Для изучения особенностей поведения течений с конвективной неустойчивостью и неединственным решением, был выбран ряд задач, имеющих практическое и теоретическое значение.

Свободная конвекция в кольцеобразных каналах [56], [121] вызывает интерес, поскольку в этой задаче одновременно существуют зоны с устойчивой и неустойчивой стратификацией, что может привести к достаточно резким изменениям структуры течения и теплообмена [15], [53].

Нестационарное обтекание цилиндра является ярким примером развития неустойчивого отрывного течения [177]. В настоящей работе численно исследуются причины и механизмы развития вихревой неустойчивости в данной задаче. Экспериментальные [171], [20], [150], [177], [181], [165] и расчетные данные [180], [142], [138], [115], [11], [149], [10] позволяют провести верификацию численного метода и подтвердить достоверность полученных результатов.

Экспериментальные данные [147], [148], [175], [146], [141] свидетельствуют о том, что течение за внезапным симметричным расширением имеет неединственное решение. Благодаря обширному экспериментальному материалу, а также результатам расчетов [147], [175] данная задача может быть использована как тестовая для проверки применимости численного метода решения задач с неустойчивостью и неединственным решением.

Свободная конвекция при неустойчивой стратификации в горизонтальных каналах с V-образным поперечным сечением возникает при анализе течений в

полости канала квадратного сечения с внутренним стержнем и продольными ребрами. Данная задача изучена мало, поэтому большой интерес представляет всестороннее исследование и поиск всех ее решений.

Для анализа ветвящихся решений задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в области произвольной формы представляет интерес вопрос о применимости различных экстремальных принципов типа минимума диссипации Гельмгольца [61], [174] и Пригожина [80] или теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия механической системы [120].

Связь работы с научными программами, планами

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Днепропетровского государственного университета.

Цели и задачи исследования

Цель работы - совершенствование численных методов решения задач гидродинамики и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости, разработка методик численного моделирования и исследование новых задач с неустойчивостью и неединственным решением, установление зависимостей интегральных и локальных характеристик от критериальных параметров.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**.

1. Выбрать универсальную форму записи исходных уравнений сохранения, независящую от используемой системы координат.
2. Обобщить SIMPLE- подобные алгоритмы на случай криволинейных неортогональных сеток.
3. Разработать методики уменьшения влияния кривизны сеточных линий на численное решение.
4. Разработать разностные алгоритмы с TVD свойствами для несжимаемых течений.
5. Создать и тестировать комплекс программ для расчета гидродинамики и тепломассообмена несжимаемых течений на основе уравнений Навье-Стокса.

6. Разработать методики верификации и сравнения эффективности разностных алгоритмов и программ. Провести сравнение и добиться повышения точности и эффективности разностных схем и SIMPLE- подобных алгоритмов.
7. Определить закономерности развития свободноконвективных течений в горизонтальных каналах при устойчивой и неустойчивой стратификации.
8. Выяснить причины и механизмы потери устойчивости нестационарных отрывных течений. Определить пределы применимости для данных задач уравнений пограничного слоя при больших числах Рейнольдса.
9. Разработать методики получения решений задач с неединственным решением. Исследовать зависимости интегральных характеристик течений от критериальных чисел в задачах с неединственным решением.

Научная новизна полученных результатов

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1) предложено обобщение класса методов типа SIMPLE на разнесенных сетках для случая криволинейной неортогональной системы координат, на основе метода контрольного объема и TVD схем высокого порядка точности для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости;
2) предложена поправка для вычисления конвективного потока через грань контрольного объема, благодаря которой линейное сдвиговое поле скорости тождественно удовлетворяет дискретным аналогам исходных уравнений;
3) численно исследована структура свободноконвективного течения в полости цилиндра с внутренним квадратным стержнем при числах Рэлея больше 10^5;
4) для задачи о нестационарном обтекании цилиндра при больших числах Рейнольдса исследованы пределы применимости уравнений пограничного слоя и механизмы развития неустойчивого течения в отрывной зоне;
5) исследовано влияние различных возмущений на процесс потери симметрии в задаче о течении за внезапным симметричным расширением, показано, что применение немонотонных схем может приводить к потере симметрии численного решения;
6) численно исследована задача о свободной конвекции с неустойчивой стратификацией в V-образных каналах, получено симметричное и два зеркальных несимметричных решения данной задачи, показано, что

симметричное решение неустойчиво при числах Грасгофа больших некоторого критического значения, при числах Грасгофа меньше критического было получено единственное симметричное решение, устойчивое к возмущениям с масштабами сравнимыми с масштабами основного течения;

7) исследован вопрос о применимости экстремальных принципов типа теоремы Лагранжа об устойчивости положения механической системы и принципов минимума диссипации Гельмгольца и Пригожина для анализа решений нелинейных задач гидродинамики с неединственным решением.

Практическое значение полученных результатов

Результаты настоящей работы могут найти широкое применение в области численного моделирования важных прикладных задач гидродинамики и теплообмена вязкой несжимаемой жидкости в областях произвольной формы, при наличии неустойчивости и неединственности решения.

Апробация результатов диссертации

Материалы диссертационной работы докладывались, обсуждались и получили положительную оценку на:

- международной конференции “Численные методы в гидравлике и гидродинамике” (г. Донецк, 1994 г.);
- международных конференциях ученых России, Белоруссии и Украины “Прикладные проблемы механики жидкости и газа” (г. Севастополь, 1995 – 1998 г.);
- международной конференции “Сучасні проблеми водопостачання і знешкодження стічних вод” (г. Львов, 1996 г.);
- международном симпозиуме “Advances in Computational Heat Transfer” (г. Чешме, Турция, 1997 г.);
- 2-й республиканской научно-технической конференции “Гидроаэромеханика в инженерной практике” (г. Киев-Черкассы, 1997 г.);
- 7-м международном симпозиуме “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики” (г. Феодоссия, 1997 г.);
- международной конференции “Наука і освіта - 98” (г. Днепропетровск, 1998 г.),
- итоговых конференциях Днепропетровского государственного университета (г. Днепропетровск, 1995 - 1999 г.);

- объединенном семинаре Института технической механики НАН Украины (г. Днепропетровск, 1998 - 1999 г.);
- объединенном семинаре кафедр аэрогидромеханики и прикладной газовой динамики Днепропетровского государственного университета (г. Днепропетровск, 1999 г.);
- семинаре кафедры технической механики Днепропетровского государственного университета (г. Днепропетровск, 1998 - 1999 г.);
- всеукраинской молодежной научно-практической конференции “Людина і космос” (г. Днепропетровск, 1999 г.);
- республиканском семинаре Института гидромеханики НАН Украины под руководством академика НАН Украины В.Т. Гринченко (г. Киев, 1999 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 18 работах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Она изложена на 229 страницах, из них 129 страниц текста, 131 рисунок и 6 таблиц, библиография содержит 188 наименований.

РАЗДЕЛ 1
Обзор литературы и выбор направлений исследования

Бурное развитие численных методов и постоянное увеличение мощности ЭВМ предоставляют все более широкие возможности для численного исследования задач механики жидкости и газа. В настоящем разделе дан краткий обзор численных методов расчета несжимаемых течений, методик оценки эффективности и точности численных алгоритмов, а также работ, посвященных актуальным вопросам гидромеханики, связанным с конвективной неустойчивостью и неединственностью решения.

1.1. Современное состояние численных методов моделирования процессов гидродинамики и тепломассообмена в несжимаемой жидкости

Течения жидкости и газа с дозвуковыми скоростями широко используются в науке и технике. На базе таких течений построены многочисленные теплообменники и технологические процессы [24], [8], [7], [79], [56], [123], [48], [90], [160], [55], [77], [87], [102], градирни и брызгальные бассейны [94], [64], [63]. Внутренние дозвуковые течения газовых смесей используются в химических лазерах [57], [58], при сжигании твердого и жидкого дисперсного топлива в энергетической промышленности [124], [118], [96], [119], [40], [89], [113] и т.д. Вихревые сепараторы, распылители и инерционные классификаторы полидисперсных сред также работают при дозвуковых скоростях несущей жидкости [128], [97], [119], [129], [130], [114], [107], [92], [66], [5], [112], [6], [41]. Актуальной задачей является расчет силы сопротивления в судостроении [59], а также аэродинамических характеристик автомобилей [117], [159].

Для интенсификации процессов тепломассообмена, снижения коэффициентов аэродинамического сопротивления летательных аппаратов и автомобилей, повышения эффективности сепарации и сжигания дисперсных сред определяющее значение имеют локальные характеристики течения, которые чаще всего невозможно получить интегральными методами расчета. Поэтому актуальной

задачей является создание надежного численного метода расчета течений вязкой несжимаемой жидкости, который позволял бы учитывать реальную геометрию промышленных установок [49], [47], [46], [48], [51], [86], [83], [53], [82], [81], [84], [85], [169].

Наиболее общей математической моделью для описания течений сплошной вязкой жидкости являются уравнения Навье-Стокса [61], [17], [79]. Несмотря на то, что реальные процессы чаще всего протекают с большими числами Рейнольдса, использование приближения пограничного слоя [126], [61], [117], [180], [142], [138], [184], [115], хотя и позволяет существенно снизить вычислительные затраты, но не всегда физически оправдано [62], [69]. Четкие границы применимости уравнений пограничного слоя для внутренних течений установить достаточно сложно. При решении конкретных задач часто проводится сравнение результатов с экспериментом или расчетом по уравнениям Навье-Стокса [62].

Модель несжимаемой жидкости обычно используется для описания течений с числом Маха много меньше единицы, поскольку прямое применение методов, основанных на модели сжимаемого газа, становится не эффективным, из-за жесткости исходной системы уравнений [116], [98], [57], [74].

Исторически так сложилось, что разработка методов расчета течений вязкой несжимаемой жидкости шла по двум направлениям. Методы, использующие преобразованные переменные завихренность-функция тока (ω-ψ) [30], [90] конкурировали с методами, основанными на записи исходных уравнений относительно естественных переменных скорость-давление (u, v, p) [116], [98], [57], [133], [76], [161], [12], [185], [157], [158], [154], [156], [23], [10]. Методы решения уравнений Навье-Стокса, записанные в преобразованных переменных (ω-ψ), позволяют уменьшить количество неизвестных в двумерных задачах, однако для трехмерных течений количество неизвестных значительно увеличивается [133] по сравнению с методами использующими переменные скорость - давление. В методах (ω-ψ) существуют определенные трудности с постановкой физически обоснованных граничных условий для завихренности на твердых стенках, а также для функции тока в многосвязных областях.

Методики расчета дозвуковых течений в переменных скорость - давление, основанные на модели несжимаемой жидкости и идее расщепления по физическим

процессам, в свою очередь делятся на SIMPLE подобные алгоритмы [76], [161], [185], [12], [157], [158], метод искусственной сжимаемости [116], [98], [57], [23], [10], и смешанные Лагранжево - Ейлеровы методы типа метода частиц в ячейках [154], [156], [159]. Подробный обзор работ и анализ данных методов можно найти, например, в [74].

Одной из главных проблем, как для методов (ω-ψ), так и методов (*u*, *v*, *p*), остается задача расчета поля давления. Источником трудностей является система уравнений несжимаемой жидкости, в которой отсутствует уравнение для давления. При переходе к переменным завихренность-функция тока давление исключается из расчетов, поэтому определение силового воздействия на профиль в рамках таких методов представляется проблематичным. В методах, использующих естественные переменные, для расчета давления обычно используется комбинация уравнения неразрывности и количества движения. В таких алгоритмах как SIMPLE [76], SIMPLEC [161], [185], PISO [12] и в методе искусственной сжимаемости [116], [98], [57], фактически ставится эволюционная задача для давления, при этом отбрасываются слагаемые, которые обеспечивают прямую связь между массовыми силами и полем давления. Из анализа системы уравнений несжимаемой жидкости следует, что поле давления мгновенно реагирует на изменение полей вектора скорости и массовой силы и не зависит явно от распределения давления в предыдущий момент времени. В алгоритме SIMPLER реализована именно такая схема взаимодействия полей. Это приводит к заметному повышению эффективности алгоритма SIMPLER по сравнению с другими методами [76], [161], [185], [12], [157], [158], [49], [50], особенно для задач, где определяющее значение имеют массовые силы, в частности, для свободной температурной и концентрационной конвекции, а также течений с закруткой потока. Недостатком алгоритма SIMPLER можно считать то, что он реализуется только на разнесенной шахматной сетке, в то время как методы искусственной сжимаемости [116], [98], [57] , [23], [10] и алгоритмы SIMPLE, SIMPLEC, PISO могут быть реализованы на совмещенных и частично совмещенных сетках [76], [161], [185], [12], [157], [158], [164], [140], [91], [144], [59], [31], [48]. На сегодняшний день наиболее популярным среди специалистов по вычислительной гидродинамике является семейство SIMPLE алгоритмов.

Реальная геометрия промышленных установок и устройств, требует, во-первых, возможности применения адаптивных сеток, а во-вторых, независимости свойств расчетного метода от выбранной системы координат [86], [83], [53], [82], [46], [47], [48], [49], [51]. С этой точки зрения наибольшей гибкостью обладает метод конечных элементов [167], [44], [159], [102], [21], [111]. Не смотря на последние достижения в области повышения точности аппроксимации в методе конечных элементов [44], [159], конечно-разностные алгоритмы, основанные на методе контрольного объема [76], превосходят метод конечных элементов по эффективности и точности [50]. В конечно-разностных алгоритмах проще реализуются возможности повышения точности результатов расчетов за счет применения TVD схем высокого порядка [42], [187], [155], [188], [178], [179].

Первая проблема, с которой столкнулись попытки применения SIMPLE процедур в неортогональных системах координат, было рассогласование полей скорости и давления с образованием так называемых шахматных полей давления и скорости [76], [12], [164]. Основная идея SIMPLE- подобных алгоритмов заключается в том, что для расчета давления используется разностное уравнение, полученное из дискретных аналогов уравнений количества движения и неразрывности. При этом большое значение имеет способ аппроксимации градиента давления в уравнении количества движения. В исходных алгоритмах [76], [161], [185], [12], [157], [158], записанных для декартовой системы координат на шахматной сетке, градиент давления вычисляется с помощью значений давления в двух соседних узлах. В этом случае не возникает рассогласование полей скорости и давления [164], а сеточный шаблон для давления включает $2D+1$ узел, где D – размерность задачи. В результате на регулярной сетке получается матрица системы алгебраических уравнений с $2D+1$ диагональю, а для решения таких систем разработаны эффективные итерационные методы [65], [110], [27], [106]. Если уравнение количества движения записывается в проекции на базисные векторы декартовой системы координат, то при переходе к неортогональной системе координат на сетке близкой к ортогональной система дискретных уравнений для скорости и давления рассыпается на две независимые системы. Большое число работ посвящено устранению этого эффекта. В [156] и [140] использована частично совмещенная сетка, где составляющие скорости хранятся в

углах контрольного объема для давления, при этом авторами отмечались трудности с получением сходящегося решения из-за осцилляций поля давления. В [91] предложен метод коррекции давления на полностью совмещенной сетке, использующий предположение о близости сетки к ортогональной. В работе [144] предложен метод конечных объемов, использующий в качестве зависимых переменных контравариантные составляющие скорости, однако уравнения движения записаны не в строго консервативной форме. В работе [31] дана формулировка метода SIMPLER для ортогональных криволинейных координат. В работах М.П. Лобачева [59] уравнения движения записаны в консервативной форме на частично совмещенной сетке относительно контравариантных составляющих вектора скорости. Однако, в разностном уравнении для давления часть членов перенесена в правую часть, что привело к необходимости введения внутреннего итерационного цикла для решения уравнения Пуассона на каждой глобальной итерации. В любом случае использование совмещенных сеток делает невозможным применение алгоритма SIMPLER, который, как будет показано ниже, по эффективности превосходит остальные SIMPLE методы.

Вторая проблема, которая возникает при переходе к криволинейным координатам это влияние кривизны сеточных линий на точность численного решения, и в частности выполнение преобразования Галилея (тест на невозмущение однородного потока) для дискретных уравнений движения. Можно показать, что при записи дискретных аналогов для дифференциальной формы исходных уравнений и использовании в качестве искомых переменных контра- или ковариантных компонент вектора скорости [131] однородный поток, в общем случае, не удовлетворяет дискретным аналогам. Кроме того, можно показать, что выполнение на дискретном уровне преобразования Галилея еще не гарантирует, что такое простейшее течение, как линейное сдвиговое течение Куэтта может быть точно рассчитано на произвольной неортогональной сетке.

В работе [162] Леонард предложил схему второго порядка QUIC, которая на протяжении многих лет была очень популярна среди исследователей вязких несжимаемых течений [162], [8], [7], [59], [147], [9].

Работы В.П. Колгана [42] положили начало развития схем, которые впоследствии получили название TVD (Total Variation Diminishing) схем. На

сегодняшний день монотонные схемы очень популярны среди специалистов по вычислительной аэродинамике сжимаемого газа [155], [188], [178]. Однако практически нет работ, в которых были бы отчетливо показаны преимущества схем типа TVD по сравнению с другими схемами для задач несжимаемой жидкости. В этом ключе также возникает задача разработки методологии сравнения различных разностных алгоритмов.

1.2. Методы оценки работоспособности и эффективности разностных схем и алгоритмов

На сегодняшний день создано огромное количество разностных алгоритмов. Каждый алгоритм обладает своими уникальными свойствами, которые играют решающую роль при численном исследовании прикладных задач. При создании нового численного метода или модификации существующего возникает вопрос об определении свойств метода.

В численном моделировании течений вязкой несжимаемой жидкости можно условно выделить два класса алгоритмов – итерационные методы решения нелинейных разностных уравнений, основанные на идеях расщепления по физическим процессам [76], [74] и разностные схемы аппроксимации исходных интегро-дифференциальных уравнений [93], [65], [74].

В качестве основной характеристики итерационных методов чаще всего используется скорость сходимости итерационного процесса решения нелинейных уравнений [161], [65], [166], [18], [48]. Для разностных схем наиболее важной оценкой является качество (точность) получаемого численного решения, при этом свойства схемы могут существенно влиять и на скорость сходимости (количество итераций) итерационного решения.

Качество численного решения определяется, в основном, не порядком аппроксимации разностной схемы [93], [65], а свойствами дифференциального приближения [127]. К сожалению, дифференциальное приближение трудно получить для нелинейных уравнений в криволинейной неортогональной системе координат [127]. Поэтому общепринятой практикой выяснения свойств разностных схем стало исследование на тестовых задачах, решение которых хорошо изучено. В частности, для внутренних двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости

такими тестовыми задачами стали: рециркуляционное течение в прямоугольной каверне с подвижной крышкой [7], [152], [18], [47], [137], [168], [135], [136], [145], [139], [173], [151], [122] и свободная конвекция в прямоугольной области при подогреве сбоку [99], [44], [79], [26]. Для задач внешнего обтекания – стационарное и нестационарное отрывное течение за круговым цилиндром [8], [7], [180], [142], [138], [184], [115], [20], [11], [149], [150], [159], [10], [151], [122], [177], [88], [33], [176], [181], [165], [171].

Обычным приемом при исследовании свойств разностных схем на тестовых задачах является сравнение по локальным и интегральным характеристикам решений, полученных на последовательно измельченных сетках [18].

Для сравнения итерационных алгоритмов и оценки влияния разностных схем на скорость сходимости строят зависимость от критериальных чисел количества итераций, необходимого для получения решения [161], [49], [47].

Отношение производительности к затратам является наиболее адекватной характеристикой эффективности любого вычислительного алгоритма. Количество итераций и оценка точности численного решения по отдельности не могут охарактеризовать эффективность алгоритма в целом, в терминах затраты – производительность. Поэтому нужны обобщенные критерии эффективности методов, основанные на характеристиках численного решения.

Важной с практической точки зрения задачей является определение степени влияния кривизны сеточных линий на расчет локальных и интегральных характеристик решения [101], [46], [47].

1.3. Свободноконвективный теплообмен в горизонтальных кольцеобразных каналах с горячим внутренним элементом

Свободная конвекция в горизонтальных кольцеобразных каналах с горячим внутренним стержнем имеет большое практическое значение. Подобные задачи представляют особый интерес при проектировании ядерных реакторов, электронного оборудования, теплоизоляции передающих кабелей, систем аккумулирования тепла с неоднородным нагревом трубопроводов по угловой координате, а также приемников солнечных коллекторов тепла.

Эта задача часто становилась предметом экспериментальных и теоретических исследований. Подробный обзор литературы, анализ и детальные экспериментальные и численные исследования естественноконвективного переноса в зазоре между горизонтальными цилиндрами можно найти в работах Кьюэна и Голдстейна [160], [56], [55]. С помощью интерферометра Маха-Цандера ими были установлены распределения температур и найдены местные коэффициенты теплопередачи для воздуха и воды. Картины конвективных течений для воздуха, а также зависимости возникающих режимов от числа Грасгофа и соотношения диаметров полости рассматривались в работе [77]. Численное исследование данной задачи, как в ламинарном, так и в турбулентном режиме можно найти в работах [78], [123], [108], [87]. Имеется значительное число теоретических и экспериментальных работ по проблемам переноса в эксцентрических цилиндрических кольцеобразных областях. Так, были проведены измерения полных коэффициентов теплопередачи в воздухе для различных значений вертикальной и горизонтальной эксцентричностей внутреннего цилиндра [35], экспериментальные исследования влияния эксцентриситета и числа Рэлея на коэффициенты средней и местной теплоотдачи [56]. В работе [132] показано, что аналогичная задача возникает при анализе процесса плавления среды вокруг нагретого горизонтального цилиндра. В [95] проведено исследование теплоотдачи в кольцевом канале при наличии инверсии плотности.

Задача о свободной конвекции между наружным круговым цилиндром и внутренним стержнем играет важную роль для понимания процесса развития свободноконвективного пограничного слоя за острыми кромками, а также влияния этих кромок на характеристики теплоотдачи. В работе [121] численно и экспериментально анализировалась структура течения около квадратного стержня, расположенного концентрично внутри горизонтального кругового цилиндра при числах Рэлея меньше 10^5. Было получено, что в исследованном диапазоне чисел Рэлея отсутствует отрыв пограничного слоя при обтекании острых кромок.

Основной особенностью свободноконвективных течений в кольцеобразных каналах является одновременное присутствие зон устойчивой и неустойчивой температурной стратификации. Как известно [99], [51], [24], [163], [26], [34], [72], [186], [182], [183], в задачах с неустойчивой стратификацией можно ожидать резких

изменений структуры течения, или даже ветвления решений при относительно малых приращениях числа Грасгофа. Другой особенностью течений с неустойчивой стратификацией является трехмерность течения, которая проявляется все интенсивнее с ростом числа Грасгофа и может существенно влиять на гидродинамику и теплообмен.

Наличие обширных экспериментальных данных по свободноконвективным течениям в горизонтальных кольцеобразных каналах [56], [123], [160], [55], [77], [78], [108], [35], [132], [95], [121], [87], [20] позволяет проверить работоспособность численного метода для различных критериальных чисел и геометрических размеров, и обоснованно делать численные прогнозы в неисследованных диапазонах изменения параметров [51].

1.4. Численное моделирование нестационарных отрывных течений

Широкий класс течений вязкой жидкости представляют собой нестационарные и периодические течения [122], [34], [126], [60] в которых малые возмущения могут привести к конечным изменениям структуры течения. К нестационарным течениям с неустойчивостью можно отнести турбулентные течения [104], [103], [105], [67], [20], нестационарный срыв потока [20], [122], слои смешения [104], [103], [105], [20], [122], [126], свободноконвективные течения с неустойчивой стратификацией [24], [34], [100], [25], [72], [186], [182], [183], [70], [153] и многие другие.

Описание механизма нестационарного срыва потока и зарождения турбулентного пограничного слоя является актуальной задачей для многих практически важных приложений [122], [34], [126], [60], [70], [153], [69], [172], [125]. В частности, резкие изменения аэродинамических характеристик профилей, крыльев, летательных аппаратов и автомобилей при малых изменениях угла атаки [122], [10], [159], [117], [88], [69], [125], а также динамические нагрузки на различные конструкции под действием постоянного и резко меняющегося набегающего потока [109], являются следствием нестационарного обтекания и срыва потока.

В качестве модельной задачи для данного класса течений часто используется развитие нестационарного пограничного слоя на поверхности

цилиндра, а также периодическое течение в следе за цилиндром. Экспериментальные и численные исследования различных аспектов этих задач можно найти во многих работах [8], [7], [180], [142], [138], [184], [115], [20], [11], [149], [150], [159], [10], [151], [122], [177], [88], [33], [176], [181], [165], [171].

Накопленный экспериментальный материал и в частности подробные исследования нестационарных течений с помощью визуализации потока [20], а также измерения нестационарных характеристик потока в периодических течениях [171], [181], [165], позволяют подтвердить работоспособность численного метода.

Для решения задачи о нестационарном обтекании цилиндра, мгновенно приведенного в движение из состояния покоя, при больших числах Рейнольдса часто используется приближение пограничного слоя [180], [142], [138], [184], [115], [33]. В связи с этим представляет интерес задача определения пределов применимости уравнений пограничного слоя при больших числах Рейнольдса.

Большой интерес представляют причины, характер и детали зарождения и развития вихревой неустойчивости при нестационарном обтекании затупленных тел. Если начальная стадия зарождения неустойчивости достаточно хорошо описывается в рамках теории устойчивости пограничного слоя и метода малых колебаний [126], [61], [34], [25], [47], [70], [153], [69], [172], то дальнейшее развитие неустойчивости и переход к турбулентности представляет собой достаточно сложную задачу [104], [103], [105]. Эта задача может быть рассмотрена с помощью численных методов, использующих уравнения Навье-Стокса [47] в рамках ламинарной модели течения, до тех пор, пока вихри подсеточного масштаба [74] не начнут оказывать заметное влияние на решение.

Интерес представляет определение влияния пространственных шагов сетки и шага по времени на расчет нестационарных характеристик течения в рамках уравнений Навье-Стокса. Такие оценки важны для нахождения пределов применимости расчетной методики без модели замыкания для вихрей подсеточного масштаба.

1.5. Особенности численного моделирования задач с неединственным решением

В прикладных задачах механики жидкости и газа самым распространенным видом движения сплошной среды является турбулентное течение, которое одновременно служит ярким примером неустойчивого взаимодействия вихревых структур различного масштаба [67], [126], [61], [104], [103], [105], [70], [153]. Практически любое ламинарное течение при увеличении числа Рейнольдса становится неустойчивым и малые возмущения, всегда присутствующие в реальных течениях, могут вызывать конечные изменения структуры потока и даже переход к турбулентному режиму течения [126], [122], [24], [34], [25], [99], [69], [172], [38]. К таким течениям можно отнести нестационарное обтекание цилиндра [171], [11], [177], [176], [181], [165], течение за симметричным внезапным расширением [147], [148], [170], [175], [146], [62], [141], [45] и в симметричном диффузоре [126], [22], [20], свободно-конвективные течения при неустойчивой стратификации [20], [24], [163], [186], [182], [183], [25], [47], [34], [100].

Отличительной особенностью перечисленных задач является возможность реализации нескольких решений при одном и том же наборе критериальных чисел. Учитывая огромную практическую ценность такого класса течений, актуальной задачей является создание вычислительных методов, позволяющих находить все возможные решения задачи и отмечать наиболее вероятные (устойчивые) ветки решения.

Значительные результаты в этом направлении были достигнуты с помощью теории устойчивости ламинарного пограничного слоя и метода малых колебаний [126], [61], [34], [25], [47], [70], [153], [69], [172]. Применение теории устойчивости и метода малых колебаний сводится к следующему [126], [172], [25], [47]: задается аналитическое представление течения, которое исследуется на устойчивость, на основное течение накладывается возмущение в виде колебания с определенной длинной волны, которое удовлетворяет уравнению типа Орра-Зоммерфельда [126], [172], [25], [47], ставится задача на отыскание собственных значений. В зависимости от величины найденных собственных значений делается вывод о затухании или возрастании данного возмущения с течением времени. Основным ограничением данного подхода является необходимость в аналитическом

представлении для решения, исследуемого на устойчивость [25]. Кроме того, существуют задачи, которые имеют несколько устойчивых к малым возмущениям решений при одном и том же наборе критериальных параметров (например, течение за внезапным симметричным расширением [147], [148], [170], [175], [146], [62], [141], [45] и свободная конвекция в квадратной области при подогреве снизу [47], [186]). Из анализа устойчивости одного из устойчивых решений таких задач не следует, что существуют или не существуют другие решения.

В механике твердого деформируемого тела методы решения задач с неединственным решением получили широкое развитие благодаря применению теории ветвлений решений нелинейных уравнений [19]. В частности, теория устойчивости оболочек при неосесимметричной деформации [1] позволяет строить решение во всем диапазоне нагрузок, определять и классифицировать особые точки решения, устанавливать их связь с критическими нагрузками и несущей способностью рассматриваемых конструкций.

Для нахождения точки ветвления решения используются идеи, заложенные в задаче о неявных функциях [19], [1]. Пусть $F(x,y)$ – нелинейный оператор, где x – искомое решение, y – параметр, и пусть (x_0,y_0) является решением уравнения $F(x_0,y_0)=0$. Возникает вопрос о решениях уравнения

$$F(x,y)=F(x_0+\delta x,y_0+\delta y)=0, \tag{1.1}$$

где $\delta x,\delta y$ – приращение (вариация) решения.

Запишем разложение Тейлора для оператора F в окрестности (x_0,y_0):

$$F(x_0+\delta x,y_0+\delta y)=F(x_0,y_0)+A\cdot\delta x+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}\delta y+N, \tag{1.2}$$

где $A=A(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}$ – матрица Якоби, N – высшие члены разложения по x и y.

Если матрица Якоби невырожденная, то (x_0,y_0) - неособая точка, и решение продолжается по параметру y единственным образом. В особой точке продолжение исходного решения неоднозначно, решение задачи (1.1)

неединственно и, согласно теореме о неявных функциях [19], матрица Якоби A – вырождена:

$$\det A = 0 . \qquad (1.3)$$

Если $F(x, y)$ сеточный оператор, а (1.2) представляет собой линеаризацию задачи (1.1) [1], явную относительно приращения сеточного решения, то матрица линейных алгебраических уравнений для приращения сеточного решения является матрицей Якоби A. Таким образом, в особой точке (x_0, y_0) определитель матрицы A обращается в ноль [1].

Когда найдена особая точка, можно построить решения выходящие из этой точки. В работе [1] приведены примеры построения решений, выходящих из точки ветвления для задач устойчивости оболочек.

Вернемся теперь к задачам с неединственным решением в механике жидкости. Наиболее эффективные численные методы вычислительной гидродинамики являются многошаговыми неявными или полунеявными [76], [161], [185], [12], [157], [158]. Поэтому возникает проблема построения матрицы Якоби для этих методов. Далее встает алгебраическая проблема вычисления определителей и собственных значений матриц большой размерности [110], [27], [106], которая тесно связана с общими ограничениями возможностей современных ЭВМ. В частности, обычная сетка для двумерной задачи насчитывает порядка 10^4 узлов. В зависимости от конкретной задачи, на каждом итерационном шаге в каждом узле должно хранится от 5 до 10-ти переменных. Учитывая, что матрица Якоби в случае неявного метода может быть полностью заполненной, то она будет сдержать от $2.5 \cdot 10^9$ до 10^{10} вещественных чисел. Даже если использовать одинарную машинную точность (что совершенно недопустимо при вычислении определителя матрицы такого размера [110], [27], [106]), то для хранения в памяти такой матрицы понадобится от 10^{10} до $4 \cdot 10^{10}$ байт, или от 10 до 40 гигабайт. Это примерно в тысячу раз больше, чем доступный объем оперативной памяти и в 2–10 раз больше чем объем всего дискового пространства современного персонального компьютера.

Учитывая все вышесказанное, представляется целесообразным разбить решение проблемы нахождения всех решений задачи о течении вязкой

несжимаемой жидкости в произвольной области на два направления. В рамках первого направления следует развивать и тестировать высокоэффективные численные методы, которые вносили бы минимальные возмущения в численное решение при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости в областях произвольной формы. В рамках второго направления следует разрабатывать методики применения теории ветвления решений нелинейных уравнений [19] для поиска особых точек и построения ветвящихся решений на базе, созданных в рамках первого направления, численных методов.

Важной с практической точки зрения задачей является сравнительный анализ устойчивости различных решений. А именно анализ возможности перехода с одной ветви решения на другую вследствие внешнего воздействия определенной формы и величины. В связи с этим возникает вопрос о применимости различного рода экстремальных принципов типа теоремы Лагранжа [120] об устойчивости положения равновесия механической системы, или ее аналога для механики твердого деформируемого тела [1], где устойчивость положения равновесия связана со знаком второй вариации потенциальной энергии деформации. Также возникает вопрос о применимости широко известных принципов минимума диссипации Гельмгольца [61], [174] и Пригожина [120].

1.6. Выводы

Проведенный анализ современного состояния численных методов расчета несжимаемых течений с конвективной неустойчивостью и неединственностью решения позволяет сделать следующие выводы.

1. Течения жидкости и газа с дозвуковыми скоростями часто встречаются в науке и технике, что делает актуальной задачу создании новых и совершенствование существующих численных методов расчета, позволяющих учитывать реальную геометрию промышленных установок.
2. Расчетные методы должны основываться на наиболее общей математической модели сплошной вязкой жидкости - уравнениях Навье-Стокса.
3. Наиболее перспективным направлением на пути создания универсальной вычислительной методики является обобщение семейства SIMPLE подобных алгоритмов на случай произвольной криволинейной системы координат, а также

повышение эффективности и точности алгоритмов, за счет применения TVD схем высокого порядка аппроксимации.

4. Актуальной задачей является исследование влияния кривизны сеточных линий на точность численного решения и разработка методик уменьшения этого влияния.
5. Необходимы методики адекватной и всесторонней оценки эффективности разностных алгоритмов, учитывающие одновременно точность, скорость сходимости по сетке и затраты машинного времени и памяти в виде единого универсального параметра эффективности.
6. Свободная конвекция в горизонтальных кольцеобразных каналах с горячим внутренним элементом имеет большую практическую важность. Основной особенностью таких течений является одновременное присутствие зон устойчивой и неустойчивой температурной стратификации, что может привести к резким изменениям структуры течения. Наличие обширных экспериментальных данных позволяет проверить работоспособность численного метода, и обоснованно делать численные прогнозы в неисследованных диапазонах изменения параметров.
7. Описание механизма нестационарного срыва потока и зарождения турбулентного пограничного слоя является актуальной задачей для многих практически важных приложений. В качестве модельной задачи для данного класса течений целесообразно использовать развитие нестационарного пограничного слоя на поверхности цилиндра. Большой интерес представляют собой причины, характер и детали развития неустойчивости в нестационарном течении, а также пределы применимости уравнений пограничного слоя для нестационарного обтекания цилиндра при больших числах Рейнольдса.
8. Прикладные задачи механики жидкости и газа часто связаны с течениями, в которых малые возмущения вызывают конечные изменения структуры потока. Отличительной особенностью таких задач является возможность реализации нескольких решений при одном и том же наборе критериальных чисел. Учитывая огромную практическую ценность такого класса течений, актуальной задачей является создание вычислительного аппарата, позволяющего находить все возможные решения задачи и отмечать наиболее вероятные (устойчивые)

варианты. Наиболее значительные результаты в этом направлении были достигнуты с помощью теории устойчивости ламинарного пограничного слоя и метода малых колебаний. Основным ограничением данного подхода является необходимость в аналитическом представлении для решения, исследуемого на устойчивость.

9. На пути применения теории ветвления решений нелинейных уравнений существуют многочисленные проблемы, связанные в частности с недостаточной мощностью современных ЭВМ. Поэтому решение проблемы нахождения всех решений задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в произвольной области предлагается разбить на два направления. Первое направление является одной из целей настоящей работы, а именно, создание высокоэффективных численных методов для расчета течении вязкой несжимаемой жидкости в областях произвольной формы. В рамках второго направления следует разработать методики применения теории ветвления решений нелинейных уравнений для поиска особых точек и построения решений на базе созданных численных методов.
10. Для анализа задач с неединственным решением интересным является вопрос о применимости и ценности различного рода экстремальных принципов типа теоремы Лагранжа и принципов минимума диссипации Гельмгольца и Пригожина.

РАЗДЕЛ 2
Применение метода контрольных объемов к расчету процессов гидродинамики и теплообмена в неортогональных криволинейных координатах

Большое число технологических процессов основано на использовании тепломассообмена в дозвуковом течении жидкости. Сложность реальной геометрии промышленных установок требует от метода расчета независимости от выбора системы координат.

В ряде работ [7], [164], [154], [156], [140], [91], [144], [59], [31] обсуждаются методы расчета дозвуковых течений областях сложной формы, и в частности с подвижными границами [154], [156]. В работах [7], [164], [140], [91], [144], [59], [31] обсуждается несколько вариантов обобщения методов типа SIMPLE на случай криволинейной системы координат. Основными недостатками предложенных подходов являются ограничения связанные с требованием ортогональности сетки и невозможность реализовать метод SIMPLER [76] на частично или полностью совмещенных сетках. Метод, используемый в работе [59], позволяет вести расчеты на неортогональной сетке, однако применение частично совмещенных сеток позволяет использовать только метод SIMPLE или SIMPLEC. В работе [31] дана формулировка метода SIMPLER для случая ортогональных криволинейных координат.

В настоящей работе предложено обобщение метода SIMPLER на случай неортогональной криволинейной системы координат. Дискретизация исходной системы уравнений сохранения проведена на основе метода контрольного объема таким образом, что дискретные аналоги удовлетворяют преобразованию Галилея. Исследовано влияние кривизны сеточных линий на точность численного решения. Показано, что линейное сдвиговое течение может быть точно рассчитано на произвольной неортогональной сетке, только при повышении порядка точности квадратурной формулы для вычисления конвективного потока через грани контрольного объема. Описаны различные схемы разностной аппроксимации конвективных и диффузионных потоков, в частности схема Леонарда QUIC и схемы TVD второго и третьего порядка.

2.1 Обобщенный закон сохранения физической величины в контрольном объеме

Для получения универсального алгоритма численного исследования процессов гидродинамики и тепломассообмена в криволинейных неортогональных координатах воспользуемся законами сохранения физических величин в контрольном объеме (КО).

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в области произвольной формы. В качестве исходных уравнений выберем законы сохранения, записанные в интегральной векторной форме.

$$\oiint_S (\mathbf{V}\mathbf{n}\rho)\,dS = 0, \tag{2.1}$$

$$\iiint_W \frac{d(\rho\mathbf{V})}{dt}\,dW = \oiint_S \mathbf{n}\mathbf{P}\,dS + \iiint_W \mathbf{G}\,dW, \tag{2.2}$$

где W – контрольный объем, S – поверхность W, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к S, $\mathbf{V}$ – вектор скорости, ρ – плотность (считается постоянной в рамках модели несжимаемой жидкости), $\mathbf{P}$ – тензор напряжений, $\mathbf{G}$ – вектор массовых сил.

Для реализации численных методов часто используется обобщенное уравнение переноса в дифференциальной форме [76], [7], [164], [140], [91], [144], [31]. При использовании криволинейных систем координат такой подход менее удобен [47], [59], [23], чем применение интегральной векторной формы записи исходных уравнений в виде обобщенного закона сохранения физической величины Ф в контрольном объеме W

$$\iiint_W \frac{\partial\rho\Phi}{\partial t}\,dW + \oiint_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\Phi) - \Gamma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\right] dS = \iiint_W S_\Phi\,dW, \tag{2.3}$$

где Γ – коэффициент диффузии, S_Φ – мощность источников Ф. Если в (2.3) положить Ф=1, Γ=0, S_Φ=0, то получим уравнение неразрывности (2.1), если Ф – внутренняя энергия, $\Gamma=\lambda$ – коэффициент теплопроводности, S_Φ – источники тепла, то (2.3) будет представлять собой закон сохранения внутренней энергии

несжимаемой жидкости. Покажем, что уравнение сохранения количества движения (2.2) также может быть записано в форме (2.3). Согласно обобщенной гипотезе Ньютона [61]

$$\mathbf{P} = 2\mu\left(\mathbf{S} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}\right) - \mathbf{I}\,p\,, \tag{2.4}$$

где μ – коэффициент вязкости, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, p – давление, $\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0$ в несжимаемой жидкости,

$$\mathbf{S} = \mathrm{def}\,\mathbf{V} = \frac{1}{2}\left[(\nabla\mathbf{V}) + (\nabla\mathbf{V})^{\mathrm{T}}\right] \tag{2.5}$$

– тензор скоростей деформаций. В произвольной системе координат контравариантные компоненты тензора скоростей деформаций равны

$$S^{ik} = g^{ia}\,g^{kb}\,S_{ab} = g^{ia}\,g^{kb}\,\frac{1}{2}\left(\nabla_a V_b + \nabla_b V_a\right)\,, \tag{2.6}$$

где g^{ik} – метрический тензор, V_i – ковариантные компоненты вектора скорости. Используя формулу Остроградского-Гаусса, выражения (2.4) и (2.6), преобразуем в (2.2) слагаемое с тензором напряжений

$$\oiint\limits_S \mathbf{n}\mathbf{P}\,dS = \iiint\limits_W \nabla\mathbf{P}\,dW = \iiint\limits_W \nabla_i\,\mu\left[g^{ia}\,g^{kb}\,\left(\nabla_a V_b + \nabla_b V_a\right) - g^{ik}\,p\right]dW\;=$$

$$= \iiint\limits_W \nabla_i\,\mu\left(g^{ia}\,g^{kb}\nabla_a V_b\right)dW + \iiint\limits_W \nabla_i\,\mu\left(g^{ia}\,g^{kb}\nabla_b V_a\right)dW - \iiint\limits_W \nabla_i g^{ik}\,p\,dW\,. \tag{2.7}$$

Учитывая, что ковариантная производная от контравариантного метрического тензора равна нулю [14], [39], а результат повторного ковариантного дифференцирования не зависит от последовательности действий дифференцирования [14], [39], получим

$$\iiint\limits_W \nabla_i\,\mu\left(g^{ia}\,g^{kb}\nabla_a V_b\right)dW = \iiint\limits_W \mathrm{div}\left(\mu\nabla\mathbf{V}\right)dW = \oiint\limits_S \mathbf{n}\,\mu\nabla\mathbf{V}\,dS = \oiint\limits_S \mu\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial n}\,dS\,. \tag{2.8}$$

Если вязкость μ постоянна и div**V**=0, то

$$\iiint\limits_W \nabla_i\ \mu\left(g^{ia}\ g^{kb}\nabla_b V_a\right) dW = \iiint\limits_W \mu\nabla_b g^{kb}\ \nabla_i\ g^{ia} V_a\ dW =$$

$$= \iiint\limits_W \mu\nabla_b\ g^{kb}\ \nabla_i\ V^i\ dW = \iiint\limits_W \mu\nabla_b\ g^{kb}\ \mathrm{div}\,\mathbf{V}\ dW = 0\,. \qquad (2.9)$$

Подставим (2.7)-(2.9) в (2.2) получим

$$\iiint\limits_W \frac{\partial \rho\mathbf{V}}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\mathbf{V}) - \mu\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}\right)\right] dS = -\iiint\limits_W \nabla p\ dW + \iiint\limits_W \mathbf{G}\, dW\,. \qquad (2.10)$$

Очевидно, если в (2.10) положить Φ=**V** и Γ=μ, то (2.10) по форме совпадает с (2.3).

Если коэффициент вязкости и плотность не постоянны, то в правую часть (2.10) следует добавить слагаемое

$$\iiint\limits_W \mathrm{div}\left[\mu\left(\nabla\mathbf{V}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}\mu\,\mathbf{I}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}\right] dW\,. \qquad (2.11)$$

Уравнение (2.3) это универсальная форма записи обобщенного закона сохранения физической величины (скалярной или векторной) в контрольном объеме. На основе уравнения (2.3) удобно строить унифицированные численные алгоритмы, которые существенно облегчают разработку многоцелевых пакетов программ.

2.2. Дискретный аналог обобщенного закона сохранения в криволинейной неортогональной системе координат

Будем требовать, чтобы дискретный аналог (ДА) уравнения (2.3) обладал свойством консервативности независимо от выбора системы координат. Тогда решение Φ=*const* должно тождественно удовлетворять дискретному аналогу (2.3) в произвольной системе координат. Нетрудно видеть, что для Φ=**V**=*const* это условие эквивалентно условию выполнения принципа Галилея. Кроме того, будем стремиться избегать появления в дискретном аналоге уравнения количества движения символов Кристоффеля, ибо погрешность в аппроксимации производных

от компонент метрического тензора может привести к нарушению принципа Галилея для разностного решения.

Пусть в расчетной области введена криволинейная неортогональная система координат x_i, $i=1,,D$, где D – размерность задачи. Разобьем расчетную область на множество непересекающихся контрольных объемов. Введем локальную нумерацию узлов и граней контрольного объема следующим образом: узлу в центре присвоим номер 0, узлу, смещенному относительно нулевого на шаг вперед вдоль i-ой координаты, присвоим номер $k=2i$, а узлу, смещенному на шаг назад номер $k=2i-1$, грань, лежащая между нулевым и k-ым узлом, будет иметь номер k. Таким образом, если в трехмерной области введена регулярная сетка, то узлу (l, m, n) соответствует локальный узел 0, аналогично для соседних узлов - ($l-1$, m, n)=1, ($l+1$, m, n)=2, (l, $m-1$, n)=3, (l, $m+1$, n)=4, (l, m, $n-1$)=5, (l, $m+1$, $n+1$)=6. В двумерной области узлу (n, m) соответствует локальный узел 0, для соседних узлов - ($n-1$, m)=1, ($n+1$, m)=2, (n, $m-1$)=3, (n, $m+1$)=4 см. рис.2.1.

Если область не односвязная, то можно применять блочные сетки, О сетки, или ставить условия периодичности.

Рассмотрим особенности построения дискретного аналога обобщенного закона сохранения (2.3). Запишем аппроксимацию слагаемого, отвечающего за конвективный перенос Ф

$$\oiint_S \mathbf{Vn}(\rho\Phi)dS \approx \sum_k \left(\mathbf{Vn}\rho\Phi\right)_k \Delta S_k \ , \qquad (2.12)$$

где $k=1,,2D$, ΔS_k – площадь грани с номером k, величины в скобках – $\left(\mathbf{Vn}\rho\Phi\right)_k$ должны вычисляться в центре k-ой грани.

Следует заметить, что от способа определения значения $(\Phi)_k$ на грани по значениям Φ_k в соседних узах во многом зависит точность и устойчивость метода. Для начала, примем линейную зависимость $(\Phi)_k$ от Φ_k

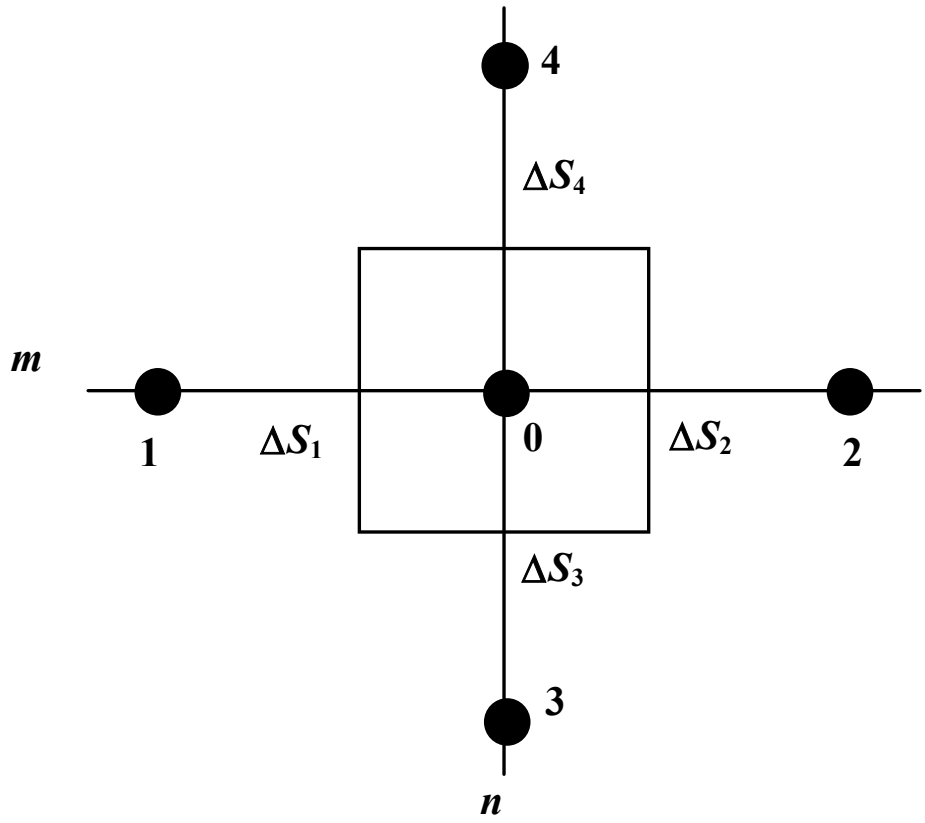
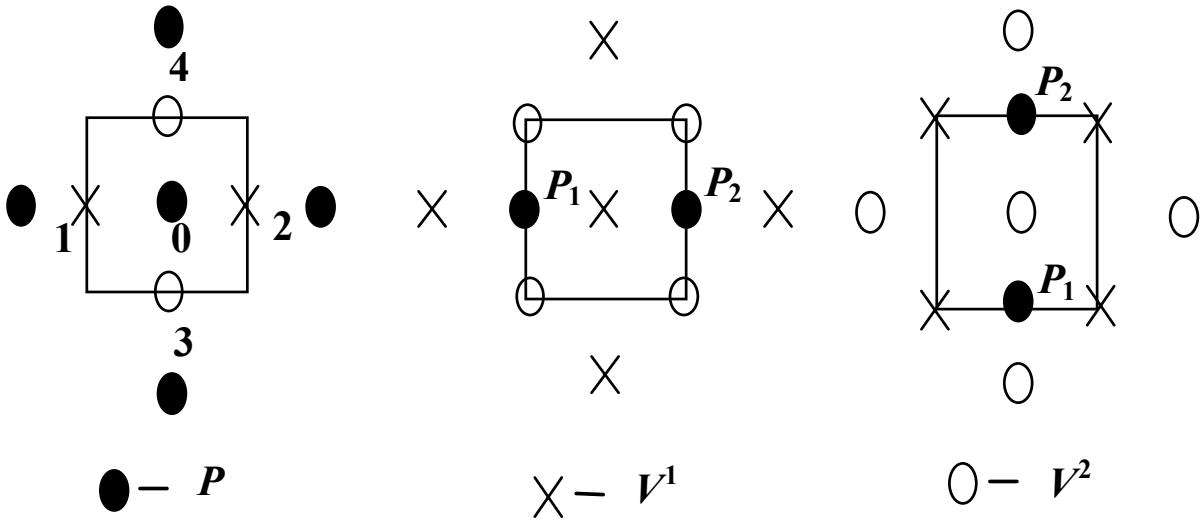


Рис.2.1. Нумерация узлов и граней контрольного объема



а б в

Рис.2.2. Контрольные объемы, схема расположения и нумерации узлов и граней.
а) - контрольный объем для давления *P*; б, в) - контрольные объемы для контравариантных компонент вектора скорости- V^1, V^2.
Черными точками обозначены узлы для давления *P*, крестиками - для V^1, кружками для V^2

$$(\Phi)_k = c_k \Phi_k + (1 - c_k)\Phi_0, \tag{2.13}$$

здесь c_k – коэффициент схемы, который может зависеть от локального сеточного числа Пекле

$$Pe_k = \frac{\rho(\mathbf{Vn})_k \Delta x_k}{\Gamma}. \tag{2.14}$$

Например, для центрально-разностной схемы

$$c_k = 0.5,$$

для противопоточной схемы имеет место зависимость

$$c_k = \begin{cases} 1, & Pe_k < 0 \\ 0, & Pe_k \geq 0 \end{cases}. \tag{2.15}$$

Центрально-разностная схема (CR) становится неустойчивой при сеточном числе Пекле больше 2. Противопоточная схема (UDS) вносит в решение чрезмерную схемную диффузию, но устойчива при любых числах Пекле и обеспечивает диагональное преобладание матрицы системы алгебраических уравнений. Поэтому неявную часть (2.12) запишем по противопоточной схеме (2.15), а повышения порядка аппроксимации [65], [93] можно добиться, корректируя источниковые члены [8], [7]. Например, центрально-разностная схема может быть записана следующим образом:

$$\sum_k \left[\mathbf{Vn}\rho\Phi_{UDS}^{n+1}\right]_k \Delta S_k = \sum_k \left[\mathbf{Vn}\rho\left(\Phi_{UDS}^{n} - \Phi_{CR}^{n}\right)\right]_k \Delta S_k, \tag{2.16}$$

где $\Phi_{UDS}^{n+1}, \Phi_{CR}^{n}$ – значения на текущей и предыдущей итерации, рассчитанные по (2.13) с помощью противопоточной и центрально-разностной схемы соответственно.

Представим вектор скорости в виде

$$\mathbf{V} = V^j \mathbf{e}_j, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{e}_j$ – контравариантные векторы локального базиса криволинейной системы координат, V^j – контравариантные компоненты вектора скорости. Вектор $(\mathbf{n})_k$ внешней единичной нормали к поверхности ΔS_k равен

$$(\mathbf{n})_k = (-1)^k \, \mathbf{e}^i \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right|, \tag{2.18}$$

где k=2i−1, 2i; $\mathbf{e}^i$ – i-ый ковариантный вектор локального базиса, суммирования по i нет. Проекция скорости на нормаль к поверхности ΔS_k будет равна

$$(\mathbf{Vn})_k = (-1)^k V^j \mathbf{e}_j \, \mathbf{e}^i \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right| = (-1)^k \, V^i \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right|. \tag{2.19}$$

Окончательно выражение для конвективного слагаемого будет иметь вид

$$\oiint_S \mathbf{Vn}(\rho\Phi) dS \approx \sum_k \left[(-1)^k V^i \rho \left(c_k \Phi_k + (1-c_k)\Phi_0\right)\right] \Delta S_k \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right|. \tag{2.20}$$

Рассмотрим слагаемое, отвечающее за диффузионный перенос Ф в (2.3)

$$\oiint_S \Gamma\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) dS = \oiint_S \Gamma \mathbf{n}(\nabla\Phi) \mathrm{dS} \approx$$

$$\approx \sum_k d_k \Gamma \left[(-1)^k \, \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \partial_j \Phi\right]_k \Delta S_k \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right| = \sum_k d_k \Gamma \left[(-1)^k \, g^{ij} \Delta_j \Phi\right]_k \Delta S_k \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right| =$$

$$= \sum_k d_k \Gamma \left[g^{ii} \left(\Phi_k - \Phi_0\right) / \Delta x_k\right]_k \Delta S_k \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right| + \sum_k d_k \Gamma \left[(-1)^k \, g^{ij} \Delta_j \Phi\right]_k \Delta S_k \Big/ \left|\mathbf{e}^i\right|, \tag{2.21}$$

здесь k=2i−1, 2i; в последнем слагаемом суммирование по j, $j \neq i$, d_k – схемный коэффициент, зависящий от сеточного числа Пекле (2.14); $g^{ij} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j$ – компоненты метрического тензора; $\left(\Delta_j \Phi\right)_k$ – конечно-разностная аппроксимация производных вдоль k-ой грани контрольного объема.

Используя выражения (2.20) и (2.21), запишем дискретный аналог (2.3)

$$A_0\Phi_0 = -\sum_k A_k\Phi_k + S_\Phi\Delta W + S'_\Phi + \frac{\rho\Delta W}{\Delta t}\Phi_0^{n-1}, \qquad (2.22)$$

где Φ_0^{n-1} - значение переменной на предыдущем временном слое,

$$A_k = \sum_k \left[(-1)^k V^i \rho\, c_k - d_k \Gamma \left(g^{ii} \frac{1}{\Delta x_k} \right)_k \right] \Delta S_k \Big/ \left| \mathbf{e}^i \right|, \qquad (2.23)$$

$$A_0 = -\sum_k A_k + \sum_k \left[(-1)^k V^i \rho \right] \Delta S_k \Big/ \left| \mathbf{e}^i \right| + \frac{\rho\Delta W}{\Delta t}, \qquad (2.24)$$

$$S'_\Phi = \sum_k d_k \Gamma \left((-1)^k g^{ij} \Delta_j \Phi \right)_k \Delta S_k \Big/ \left| \mathbf{e}^i \right|. \qquad (2.25)$$

Второе слагаемое в (2.24) представляет собой ДА уравнения неразрывности. В ходе итерационного решения нелинейной системы уравнений поле вектора скорости, в общем случае, не удовлетворяет уравнению неразрывности, т.е. второе слагаемое в (2.24) не равно нулю

$$\sum_k (-1)^k V^i \rho \Delta S_k \Big/ \left| \mathbf{e}^i \right| \neq 0. \qquad (2.26)$$

Для того чтобы матрица системы алгебраических уравнений (2.22) обладала свойством диагонального преобладания

$$\left| A_0 \right| \geq \left| \sum_k A_k \right| \qquad (2.27)$$

- необходимым условием сходимости итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, второе слагаемое в (2.24) перенесем в правую часть (2.22) [76]. Тогда (2.24) и (2.25) примут вид

$$A_0 = -\sum_k A_k + \frac{\rho\,\Delta W}{\Delta t}, \qquad (2.28)$$

$$S'_{\Phi} = -\Phi_0 \sum_k \left[\left(-1\right)^k V^i \rho \right] \Delta S_k \Big/ \left| \mathbf{e}^i \right| + \sum_k d_k \Gamma \left(\left(-1\right)^k g^{ij} \Delta_j \Phi \right)_k \Delta S_k \Big/ \left| \mathbf{e}^i \right| . \qquad (2.29)$$

Пусть источник Φ в обобщенном уравнении сохранения (2.3) S_Φ=0. Подставим $\Phi^{n-1} = \Phi = const$ в (2.22). Если поле скорости удовлетворяет уравнению неразрывности, то (2.22) обращается в тождество, независимо от выбора системы координат. Следовательно (2.22) обладает свойством консервативности. Отсюда также следует, что решение $\Phi = \mathbf{V} = const$ тождественно удовлетворяет дискретным аналогам уравнений количества движения и неразрывности на произвольной криволинейной неортогональной сетке, т.е. выполняется принцип Галилея для дискретного решения системы (2.22). Чтобы получить систему алгебраических уравнений относительно компонент вектора скорости в некотором базисе, следует спроектировать (2.22) на вектора этого базиса (см. раздел 2.3). При этом в уравнение (2.22) не входят символы Кристоффеля [131] (производные от компонент метрического тензора), которые трудно аппроксимировать с достаточной точностью на произвольной криволинейной сетке.

2.2.1. Метод контрольного объема в случае осевой симметрии и при наличии закрутки потока

Пусть имеет место осевая симметрия течения и угловая скорость вращения жидкости относительно оси симметрии не равна нулю. Рассмотрим уравнение сохранения количества движения (2.10). Из формулы Остроградского - Гаусса следует, что [61]:

$$\oiint_S a\mathbf{n}dS = \iint_S \left(an_x \mathbf{e}_x + an_r \mathbf{e}_r + an_\theta \mathbf{e}_\theta \right) dS =$$

$$= \iint_S \left(an_x \mathbf{e}_x + an_r \mathbf{e}_r \right) dS + \iiint_W \mathbf{e}_\theta \frac{\partial a}{r \partial \theta} \, r d\theta \, dx \, dr , \qquad (2.30)$$

где a - может быть скаляром или тензором.

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.10).

$$\oiint_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\mathbf{V}) - \mu\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}\right] dS = \iint_S \left[\left(V_x(\rho\mathbf{V}) - \mu\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\right) n_x + \left(V_r(\rho\mathbf{V}) - \mu\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r}\right) n_r \right] dS +$$

$$+ \iiint_W \frac{\partial}{r\partial\theta}\left[V_\theta \rho\mathbf{V} - \mu\frac{\partial \mathbf{V}}{r\partial\theta}\right] r d\theta dr dx . \qquad (2.31)$$

Первые два слагаемые в (2.31) по форме такие же, как и в декартовой прямоугольной системе координат, за исключением формулы для элементарной площадки:

$$n_x dS = n_x r d\theta dr ,$$
$$n_r dS = n_r r d\theta dx . \qquad (2.32)$$

Следовательно, и дискретный аналог этих слагаемых будет такой же как и для плоского случая, за исключением выражений для вычисления объемов и площадей. В случае осевой симметрии течения площадь грани, и объем вычисляются по формулам

$$\Delta S_k = 2\pi r_k \Delta l ,$$
$$\Delta W = 2\pi \int_{\Delta S} r dS , \qquad (2.33)$$

где Δl – ширина грани.

Учитывая, что $\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial\theta} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_r$ [61], [14], [39], распишем последнее слагаемое в (2.31) более подробно

$$\iiint_W \frac{\partial}{r\partial\theta}\left[V_\theta \rho\mathbf{V}\right] r d\theta dr dx = \iiint_W \left[\rho\mathbf{V}\frac{\partial V_\theta}{r\partial\theta} + V_\theta \frac{\partial \rho\mathbf{V}}{r\partial\theta}\right] r d\theta dr dx =$$

$$= \iiint_W \left[\rho\mathbf{V}\frac{\partial V_\theta}{r\partial\theta} + \rho\frac{V_\theta}{r}\left(\frac{\partial V_x}{\partial\theta}\mathbf{e}_x + \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\mathbf{e}_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta}V_r + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}V_\theta\right)\right] r d\theta dr dx =$$

$$= \iiint_W \left[\rho\mathbf{V}\frac{\partial V_\theta}{r\partial\theta} + \rho\frac{V_\theta}{r}\left(\frac{\partial V_x}{\partial\theta}\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - V_\theta\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + V_r\right)\mathbf{e}_\theta\right)\right] r d\theta dr dx , \qquad (2.34)$$

$$\iiint\limits_W \frac{\partial}{r\partial\theta}\left[\mu\frac{\partial \mathbf{V}}{r\partial\theta}\right] r d\theta dr dx = \iiint\limits_W \left[\mu\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{r^2\partial\theta^2}\right] r d\theta dr dx =$$

$$\iiint\limits_W \frac{\mu}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial\theta^2}\mathbf{e}_x + \frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}\mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}\mathbf{e}_\theta + 2\left(\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + V_r\frac{\partial^2 \mathbf{e}_r}{\partial\theta^2} + V_\theta\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta^2}\right] r d\theta dr dx =$$

$$= \iiint\limits_W \frac{\mu}{r^2}\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial\theta^2}\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2} - 2\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - V_r\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - V_\theta\right)\mathbf{e}_\theta\right] r d\theta dr dx . \qquad (2.35)$$

Если течение осесимметричное, то все производные по θ равны нулю, (за исключением производных от базисных векторов) и выражения (2.34) и (2.35) можно упростить.

$$\iiint\limits_W \frac{\partial}{r\partial\theta}\left[V_r\rho\mathbf{V} - \mu\frac{\partial \mathbf{V}}{r\partial\theta}\right] r d\theta dr dx =$$

$$= \iiint\limits_W \left[\mathbf{e}_r\left(-\rho\frac{{V_\theta}^2}{r} + \mu\frac{V_r}{r^2}\right) + \mathbf{e}_\theta\left(\rho\frac{V_\theta V_r}{r} + \mu\frac{V_\theta}{r^2}\right)\right] r d\theta dr dx . \qquad (2.36)$$

Таким образом, уравнение сохранения количества движения в случае осесимметричных течений с закруткой потока можно представить в виде

$$\iiint\limits_W \frac{\partial\rho\mathbf{V}}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\mathbf{V}) - \mu\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}}\right)\right] dS = \iiint\limits_W \mathbf{B} dW - \iiint\limits_W \nabla p dW + \iiint\limits_W \mathbf{G} dW , \qquad (2.37)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r\left(\rho\frac{{V_\theta}^2}{r} - \mu\frac{V_r}{r^2}\right) + \mathbf{e}_\theta\left(-\rho\frac{V_\theta V_r}{r} - \mu\frac{V_\theta}{r^2}\right). \qquad (2.38)$$

Введем в расчетной области цилиндрическую ортогональную систему координат (x, r, θ) с базисом ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$) и цилиндрическую неортогональную систему координат (x_1, x_2, θ) с базисом ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_\theta$). Используем выражения для компонент скорости в этих системах координат

$$V_x = \mathbf{V}\mathbf{e}_x = \left(V^i \mathbf{e}_i\right)\mathbf{e}_x = V^i e_{ix},$$
$$V_r = \mathbf{V}\mathbf{e}_r = \left(V^i \mathbf{e}_i\right)\mathbf{e}_r = V^i e_{ir},$$
$$V_\theta = V_\theta, \qquad (2.39)$$

здесь суммирование по i, а $e_{ix} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_x$, $e_{ir} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_r$ - проекции контравариантных векторов базиса криволинейной системы координат на базисные векторы цилиндрической системы координат.

Учитывая выражения (2.39) перепишем (2.38) в виде:

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r\left(-\rho\frac{V_\theta{}^2}{r} + \mu\frac{V^i e_{ir}}{r^2}\right) + \mathbf{e}_\theta\left(\rho\frac{V_\theta V^i e_{ir}}{r} + \mu\frac{V_\theta}{r^2}\right). \qquad (2.40)$$

Рассмотрим грань контрольного объема (в системе (x_1, x_2, θ) грани КО лежат на поверхностях x_i =*const*, угол между касательной к грани и направлением радиальной оси обозначим α)

$$x = x_k \pm \Delta l/2\, sin\,\alpha,$$
$$r = r_k \pm \Delta l/2\, cos\,\alpha,$$
$$\theta = \theta_k \pm \Delta\theta/2, \qquad (2.41)$$

где величины с индексом k определяют положение центра тяжести грани, Δl – ширина грани. Площадь грани равна

$$\Delta S_k = \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} d\theta \int_{-\Delta l/2}^{\Delta l/2} \left(r_k + l\cos\alpha\right)dl = r_k \Delta\theta\Delta l, \qquad (2.42)$$

а объем вычисляется по формуле (2.33).

Таким образом, в случае осевой симметрии течения с закруткой потока для вывода дискретного аналога можно применять уравнения сохранения количества движения в форме (2.37) с источниковым членом в форме (2.38) для ортогональной и (2.40) для неортогональной системы координат.

При выводе дискретного аналога обобщенного уравнения сохранения (2.22) в цилиндрической системе координат формулы (2.12)-(2.21) остаются в силе за исключением выражения для объема (2.33) и площади грани КО (2.42).

Если вязкость и плотность жидкости – переменные величины, то выражение (2.40) принимает вид

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r\left(-\rho\frac{{V_\theta}^2}{r}+\mu\frac{V^i e_{ir}}{r^2}\right)+\mathbf{e}_\theta\left(\rho\frac{V_\theta V^i e_{ir}}{r}+\mu\frac{V_\theta}{r^2}\right)+\operatorname{div}\left[\mu\left(\nabla\mathbf{V}\right)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3}\mu\mathbf{I}\operatorname{div}\mathbf{V}\right]. \qquad (2.43)$$

2.2.2. Особенности дискретизации уравнений сохранения количества движения в ортогональных криволинейных системах координат

Рассмотрим особенности дискретизации уравнений сохранения количества движения в ортогональных криволинейных системах координат. Покажем, что в общем случае, следуя традиционному подходу к построению дискретных аналогов на основе дифференциальной формы записи исходных уравнений, невозможно получить точное решение в виде невозмущенного течения **V**=const.

Пусть в расчетной области введена ортогональная криволинейная система координат $\mathbf{r}=\mathbf{r}\left(x^1,x^2,x^3\right)$. Для одномерного, равномерного потока **V**=const уравнение количества движения примет вид

$$\frac{d\,\mathbf{V}}{dt}=0, \qquad (2.44)$$

или в тензорной форме

$$\frac{\partial V^i}{\partial t}+\frac{V^k}{H_k}\frac{\partial V^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}V^jV^k=0, \qquad (2.45)$$

где $\Gamma^i_{jk}=\mathbf{e}^i\dfrac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^j\partial x^k}$ – символы Кристоффеля второго рода, $H_i=\sqrt{g_{ii}}$ – коэффициенты Ляме, $g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ – компоненты метрического тензора. Даже если **V**=const, компоненты вектора скорости в криволинейной системе координат V^i, в общем случае являются нелинейными функциями координат x^i. Заменяя частные производные в уравнении (2.45) центральными разностями мы получим дискретный аналог уравнения (2.45), решение которого, в общем случае, не будет совпадать с решением уравнения (2.45), поскольку центральные разности точно аппроксимируют производную для полинома второй степени. Т.е. **V**=const, в общем

случае, не будет удовлетворять дискретному аналогу уравнения сохранения количества движения.

Для примера рассмотрим случай, когда в расчетной области удобно ввести полярную систему координат (r, θ) (например, при обтекании кругового цилиндра). Запишем уравнения сохранения количества движения (2.10) в дифференциальной форме [61] для случая идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}. \tag{2.47}$$

Пусть имеет место стационарное, одномерное течение жидкости $V_x = 1$, $V_y = 0$. Тогда компоненты вектора скорости в полярной системе координат будут нелинейными функциями угла θ

$$V_r = \cos\theta, \tag{2.48}$$

$$V_\theta = -\sin\theta, \tag{2.49}$$

а уравнения (2.46) и (2.47) примут вид

$$\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} = 0, \tag{2.50}$$

$$\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} = 0. \tag{2.51}$$

Введем в расчетной области сетку ($R_i = R_0 + (i-1)\,\Delta R$; $\theta_k = \theta_0 + (k-1)\cdot\Delta\theta$) и заменим в (2.50), (2.51) производные конечными разностями

$$\frac{V_{\theta(i,k)}}{R_i}\frac{\left(V_{r(i,k+1/2)} - V_{r(i,k-1/2)}\right)}{\Delta\theta} - \frac{V_{\theta(i,k)}^2}{R_i} = 0, \tag{2.52}$$

$$\frac{V_{\theta(i,k)}}{R_i}\frac{\left(V_{\theta(i,k+1/2)} - V_{\theta(i,k-1/2)}\right)}{\Delta\theta} + \frac{V_{\theta(i,k)} V_{r(i,k)}}{R_i} = 0. \tag{2.53}$$

С помощью прямой подстановки нетрудно убедиться, что (2.48), (2.49) являются решением дифференциальных уравнений (2.50), (2.51). Проверим,

являются ли выражения (2.48), (2.49) решением дискретных аналогов (2.52), (2.53). Подставим (2.48), (2.49) в уравнения (2.52), (2.53), получим

$$\frac{-\sin\theta_k}{R_i}\frac{\left(\cos\left(\theta_k+\Delta\theta/2\right)-\cos\left(\theta_k-\Delta\theta/2\right)\right)}{\Delta\theta}-\frac{\sin^2\theta_k}{R_i}=$$

$$=\frac{-\sin\theta_k}{R_i}\frac{\left(\cos\theta_k\cos\Delta\theta/2-\sin\theta_k\sin\Delta\theta/2-\cos\theta_k\cos\Delta\theta/2-\sin\theta_k\sin\Delta\theta/2\right)}{\Delta\theta}-\frac{\sin^2\theta_k}{R_i}=$$

$$=\frac{\sin^2\theta_k}{R_i}\left(\frac{2\sin\Delta\theta/2}{\Delta\theta}-1\right)=\varepsilon=\mathrm{O}\left(\Delta\theta^2\right), \qquad (2.54)$$

$$\frac{-\sin\theta_k}{R_i}\frac{\left(\sin\left(\theta_k+\Delta\theta/2\right)-\sin\left(\theta_k-\Delta\theta/2\right)\right)}{\Delta\theta}-\frac{\sin^2\theta_k}{R_i}=$$

$$=-\frac{\cos\theta_k\sin\theta_k}{R_i}\left(\frac{2\sin\Delta\theta/2}{\Delta\theta}-1\right)=\varepsilon=\mathrm{O}\left(\Delta\theta^2\right). \qquad (2.55)$$

Из (2.54), (2.55) следует, что одномерный невозмущенный поток не является решением дискретных аналогов (2.52), (2.53). Как следствие нарушается свойство консервативности метода. Таким образом, применение стандартного подхода к выводу дискретного аналога может внести существенную погрешность в решение, особенно на грубых сетках.

Ранее было показано, что в случае применения, предлагаемого в настоящей работе подхода (пп.2.2), для получения дискретных аналогов исходных уравнений, решение в виде невозмущенного потока тождественно удовлетворяет разностным уравнениям (2.22), а метод обладает свойством консервативности на любой сетке. В пп.2.4 будет показано, что при минимальных поправках предлагаемая методика дает точное численное решение задачи о линейном сдвиговом течении на произвольной сетке.

2.3 SIMPLE методы в криволинейной неортогональной системе координат

Основная идея SIMPLE- подобных алгоритмов заключается в том, что для расчета давления используется разностное уравнение, полученное из дискретных аналогов уравнений количества движения и неразрывности. Большое значение

имеет способ аппроксимации градиента давления в уравнении количества движения. В исходных алгоритмах [76], [161], [185], [12], [157], [158], записанных для декартовой системы координат, на шахматной сетке градиент давления вычисляется с помощью значений давления в двух соседних узлах. В этом случае не возникает рассогласование полей скорости и давления [164], а сеточный шаблон для давления включает $2D+1$ узел, где D – размерность задачи. В результате на регулярной сетке получается матрица системы алгебраических уравнений с $2D+1$ диагональю, а для решения таких систем разработаны эффективные итерационные методы [65].

Если уравнение количества движения записывается в проекции на базисные векторы декартовой системы координат, то при переходе к неортогональной системе координат для аппроксимации градиента давления необходимо использовать более двух узловых точек. Увеличение количества узлов, участвующих в аппроксимации градиента давления, ведет к расширению сеточного шаблона уравнения для давления. В результате разностное уравнение Пуассона будет иметь матрицу с 3^D диагоналями. Прямое решение такой системы алгебраических уравнений может оказаться достаточно обременительным, поэтому часть членов обычно переносят в правую часть, чтобы получить матрицу с $2D+1$ диагональю. Однако в этом случае требуется введение внутреннего итерационного цикла для решения уравнения Пуассона, что также снижает эффективность алгоритма. Кроме того, без введения специальных поправок или процедур, поле давления оказывается слабо связанным с полем скорости, возникает эффект шахматного поля давления. Причина возникновения этого эффекта в том, что задача расчета сеточного поля давления по заданной величине градиента давления имеет бесконечное множество решений, если для аппроксимации градиента используется более двух сеточных узлов.

В настоящей работе уравнение количества движения записано относительно контравариантных компонент вектора скорости на шахматной разнесенной сетке. В этом случае градиент давления определяется по значениям давления в двух соседних узлах, что позволяет избежать рассогласования полей скорости и давления и без изменений перенести исходные алгоритмы [76], [161], [185], [12], [157], [158], разработанные и тестированные на декартовой сетке, на

случай областей сложной геометрической формы. Кроме того, появляется возможность применять метод SIMPLER [76] на криволинейных неортогональных сетках, который показал свою высокую надежность, устойчивость и эффективность [76], [161], [49], [47], [166].

2.3.1. Вывод конечно-разностных соотношений на разнесенной сетке

Рассмотрим метод, позволяющий получить разностное уравнение для давления на шаблоне с $2D+1$ узлом, в произвольной криволинейной системе координат. В выражении для дискретного аналога обобщенного закона сохранения (2.22) последовательно положим Ф=1, Г=0, и Ф=**V**, Г=μ, получим дискретный аналог исходной системы уравнений (2.1), (2.2)

$$\sum_k (\mathbf{V}\mathbf{n}\rho)_k \Delta S_k = 0, \tag{2.56}$$

$$A_0 \mathbf{V}_0 = -\sum_k A_k \mathbf{V}_k + \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_p, \tag{2.57}$$

где

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{G}_0 \Delta W + \mathbf{S}'\mathbf{V} + \frac{\rho \Delta W}{\Delta t}\mathbf{V}_0^{n-1}. \tag{2.58}$$

В случае осевой симметрии в (2.58) входит слагаемое (2.40), площади граней КО в (2.56), (2.57) вычисляются по формуле (2.42) а объем КО вычисляется по формуле (2.33).

Слагаемое $\mathbf{B}_p$ представляет собой дискретный аналог слагаемого с градиентом давления

$$\iiint_W \nabla p dW \approx \mathbf{B}_p. \tag{2.59}$$

Запишем проекции (2.59) на $\mathbf{e}_i$ – контравариантные векторы локального базиса криволинейной системы координат. Пусть область разбита сеткой с шахматной схемой расположения узлов [76], [154], показанной на рис.2.2.

Выберем в (2.59) в качестве W контрольные объемы для V^i (рис.2.2.б, рис.2.2.в) и умножим (2.59) на $(\mathbf{e}_i)_0$

$$\left(\mathbf{B}_p\mathbf{e}_i\right)_0 \approx (\mathbf{e}_i)_0 \iiint\limits_W \nabla p dW \approx \left(\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j \frac{\partial p}{\partial x^j}\right)_0 \Delta W = \left(\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)_0 \Delta W \approx \frac{\Delta W}{\Delta x_i}(P_2 - P_1),$$

или, вводя обозначение $\Delta Sm_i = \dfrac{\Delta W}{\Delta x_i}$, получим

$$\left(\mathbf{B}_p\mathbf{e}_i\right)_0 = \Delta Sm_i(P_2 - P_1), \tag{2.60}$$

где P_1, P_2 – значение давления в узлах на границах контрольных объемов рис.2.2.б, рис.2.2.в, Δx_i – расстояние между узлами P_1, P_2. Итак, если использовать разнесенную шахматную сетку и проектировать уравнения количества движения на контравариантные векторы локального базиса криволинейной системы координат, то градиент давления определяется по значениям давления в двух точках - P_1, P_2.

Учитывая выражение (2.60) запишем проекции (2.57) на $\left(\mathbf{e}_i\right)_0$

$$A_0\left(V^j\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\right)_0 = -\sum_k A_k\left(V^j\mathbf{e}_j\right)_k\left(\mathbf{e}_i\right)_0 + \left(\mathbf{B}\mathbf{e}_i\right)_0 - \Delta Sm_i\left(P_2 - P_1\right), \tag{2.61}$$

слагаемые с произведением $\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$, $j \neq i$ перенесем в источниковый член и введем обозначения

$$a_0 = A_0\left(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i\right)_0 = A_0,$$

$$a_k = A_k\left(\mathbf{e}_i\right)_k\left(\mathbf{e}_i\right)_0,$$

$$b_{i0} = \left(\mathbf{B}\mathbf{e}_i\right)_0 - A_0\left(V^j\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\right)_0 - \sum_k A_k\left(V^j\mathbf{e}_j\right)_k\left(\mathbf{e}_i\right)_0, \tag{2.62}$$

здесь $j \neq i$. Перепишем (2.61) с учетом обозначений (2.62) в виде

$$a_0 {V^i}_0 = -\sum_k a_k {V^i}_k + b_{i0} - \Delta Sm_i\left(P_2 - P_1\right). \tag{2.63}$$

Нетрудно видеть, что (2.56), (2.63) по форме совпадают с уравнениями, которые были использованы в [76], [161], [185], [12], [157], [158], для вывода SIMPLE- подобных алгоритмов в декартовой системе координат, что позволяет оставить эти алгоритмы без изменений для произвольной системы координат. Уравнения (2.63) обладают также и другими важными свойствами. Во-первых, **V**=*const* очевидно является решением (2.63), во вторых, в уравнениях не участвуют символы Кристоффеля, несмотря на то, что искомыми переменными являются контравариантные компоненты вектора скорости [131].

Введем обозначение

$$\widetilde{V}_0{}^i = \frac{-\sum_k a_k V_k^i + b_0}{a_0}, \tag{2.64}$$

тогда (2.63) примет вид

$$V^i{}_0 = \widetilde{V}_0{}^i - \frac{\Delta S m_i}{a_0}\left(P_2 - P_1\right). \tag{2.65}$$

Подставим (2.65) в уравнение неразрывности (2.56)

$$A_0\, P_0 = -\sum_k A_k\, P_k - \sum_k (\widetilde{\mathbf{V}}\mathbf{n}\rho)_k\, \Delta S_k\,, \tag{2.66}$$

где

$$A_k = -\frac{\Delta S m_i}{a_{0\,k}} \Delta S_k\,,$$

$$A_0 = -\sum_k A_k\,, \tag{2.67}$$

где $a_{0\,k}$ – коэффициент a_0 в (2.63), определенный на *k*- ой грани контрольного объема для давления.

Итак, задав начальное приближение для скорости **V** и поле массовых сил, мы можем непосредственно рассчитать давление P^* по (2.66). Возьмем в качестве P в (2.63) P^* и рассчитаем промежуточное поле скорости $\mathbf{V}^*$, которое

удовлетворяет разностному уравнению количества движения (2.63) и, в общем случае, может не удовлетворять уравнению неразрывности (2.56).

Пусть **V,** P удовлетворяют уравнениям (2.56), (2.63). Обозначим поправку давления

$$P' = P - P^*. \tag{2.68}$$

Последовательно подставим **V,** P и $\mathbf{V}^*, P^*$ в уравнение (2.63), а затем вычтем из первого получившегося уравнения второе

$$a_0 \left(V_0{}^i - V_0{}^{i*}\right) = \underline{-\sum_k a_k \left(V_k{}^i - V_k{}^{i*}\right)} - \Delta Sm_i \left(P_2' - P_1'\right). \tag{2.69}$$

Пренебрегая в (2.69) подчеркнутым членом получим

$$V^i{}_0 = V_0{}^{i*} - \frac{\Delta Sm_i}{a_0}\left(P_2' - P_1'\right). \tag{2.70}$$

Уравнение для поправки давления получим из уравнения (2.70) и уравнения неразрывности (2.56),

$$A_0 \, P_0' = \sum_k A_k \, P_k' - \sum_k \left(\mathbf{n}\mathbf{V}^*\right)_k \Delta S_k \ , \tag{2.71}$$

где A_0, A_k определяются по формулам (2.67).

2.3.2. Процедуры SIMPLE, SIMPLEC, PISO и SIMPLER в криволинейной неортогональной системе координат

Предложенный в предыдущем пункте подход позволяет оставить без изменения SIMPLE- подобные процедуры (детально описанные в [76], [185], [161], [157], [158], [12]) при переходе к криволинейным неортогональным координатам. Поэтому мы лишь кратко опишем данные процедуры, и остановимся более детально на их вычислительных свойствах.

Процедура SIMPLE состоит из следующих этапов [76]:

1. Задается начальное приближение для поля давления P*.
2. Рассчитывается $\mathbf{V}^*$ по формуле (2.63).

3. Вычисляется поправка давления P' по формуле (2.71).
4. Корректируется поле скорости по формуле (2.70) и поле давления по формуле (2.68).
5. Используя скорректированное давление в качестве P*, возвращаемся ко 2-му этапу. Цикл продолжается до достижения сходимости.

Процедура SIMPLEC отличается от SIMPLE только способом вычисления коэффициентов уравнения для поправки давления (2.71) [185], [161], [7]. В частности в (2.67)

$$A_k = -\frac{\Delta Sm_i}{a_{0k} - \sum_i a_{ik}} \Delta S_k ,$$

где a_{0k}, a_{ik} – коэффициенты в уравнении количества движения (2.63), рассчитанные на k- ой грани КО для давления.

В процедуре PISO [157], [158], [12] первая часть совпадает с пунктами 1-4 процедуры SIMPLE. После выполнения 4-го пункта процедуры SIMPLE поле скорости может не удовлетворять уравнению количества движения. Поэтому в [157], [158], [12] предложено проводить еще одну коррекцию, так, чтобы скорректированные поля скорости и давления удовлетворяли линеаризованному уравнению количества движения (2.63) и уравнению неразрывности (2.56).

Процедура SIMPLER [76]:

1. Задается начальное приближение для поля скорости **V.**
2. Рассчитывается P^* по формуле (2.66).
3. Рассчитывается $\mathbf{V}^*$ по формуле (2.63).
4. Вычисляется поправка давления P' по формуле (2.71).
5. Корректируется поле скорости по формуле (2.70) (поле давления не корректируется).
6. Если сходимость не достигнута, возвращаемся ко 2-му этапу. Цикл продолжается до достижения сходимости.

Исследуя свойства изложенных процедур можно разделить их на две группы. К первой группе можно отнести процедуру SIMPLER, в которой по заданному полю скорости и массовым силам непосредственно вычисляется давление. Во второй группе методов, к которой относятся SIMPLE, SIMPLEC, PISO, давление рассчитывается в результате последовательности поправок относительно начального приближения, которые вычисляются из условия выполнения уравнения неразрывности.

Из уравнений движения несжимаемой жидкости следует, что поле давления не имеет предыстории и мгновенно реагирует на изменение полей вектора скорости и массовой силы. В алгоритме SIMPLER реализована именно такая модель взаимодействия полей. Во второй группе методов фактически ставится эволюционная задача для давления, попутно отбрасываются члены, которые обеспечивают прямую связь между массовыми силами и давлением. В результате методы второй группы менее эффективны для нестационарных задач, задач типа проточного течения в канале или трубе переменного сечения с мягкими граничными условиями на выходе из области, течений, где определяющее значение имеют массовые силы, или источниковые члены отвечающие за переносное ускорение в цилиндрической системе координат. В частности, для задач о свободной температурной и концентрационной конвекции, а также для течений с закруткой потока и в задачах с мягкими граничными условиями для скорости и давления процедура SIMPLER обеспечивает большую устойчивость и скорость сходимости итерационного решения, по сравнению с остальными методами.

Следует отметить, что для стационарных задач решения, полученные по каждому из рассмотренных методов, между собой ничем не отличаются, поскольку решаются одни и те же разностные уравнения. Различия проявляются только в скорости сходимости (количество итераций необходимых для достижения заданной погрешности решения по отношению к решению, полученному на предыдущей итерации) и устойчивости итерационного процесса (способность получать сходящееся решение при минимальных значениях параметров релаксации). SIMPLEC и PISO, как улучшенные варианты процедуры SIMPLE, обладают более высокой скоростью сходимости. На простых задачах PISO приближается по

скорости сходимости к SIMPLER. Выигрыш в суммарном времени счета по методу SIMPLER достигается благодаря существенному уменьшению количества итераций по сравнению остальными методами, в то время как одна итерация SIMPLER требует не намного больше времени, чем SIMPLEC или PISO.

Недостатком алгоритма SIMPLER можно считать то, что он реализуется только на разнесенной шахматной сетке, в то время как методы второй группы могут быть реализованы на совмещенных и частично совмещенных сетках [164], [140], [91], [144], [59], что позволяет сократить требования к объему оперативной памяти ЭВМ. Однако, учитывая, что темпы удешевления микросхем памяти значительно опережают рост производительности процессоров, данный недостаток не следует считать существенным.

2.3.3. Вывод конечно-разностных соотношений на частично совмещенной сетке

При переходе к криволинейной системе координат объем вычислений существенно возрастает. Использование разнесенной сетки предполагает составление и решение системы алгебраических уравнений для каждой компоненты скорости отдельно, а также использование интерполяции для определения недостающих компонент скорости в узлах разнесенных сеток. Если все компоненты скорости будут храниться в одном узле, то разностные уравнения сохранения для компонент скорости будут отличаться только правыми частями, также отпадет необходимость в интерполяции вектора скорости с одной сетки на другую. К сожалению, в этом случае становится невозможным применение процедуры SIMPLER. Однако, для относительно простых задач, можно добиться некоторой экономии машиной памяти и времени счета, применяя SIMPLEC или PISO, записанные для частично совмещенной криволинейной сетки.

Приведем основные выражения, необходимые для реализации SIMPLE-подобных методов на частично совмещенной сетке, при условии, что матрица системы алгебраических уравнений для давления будет иметь $2D+1$ диагональ на регулярной сетке. Узлы для компонент скорости расположим в углах КО, а узлы для давления, температуры и других переменных в центре КО (рис.2.3).

Уравнения сохранения массы (2.56) и количества движения (2.57) не меняются. Выражение (2.60) для аппроксимации слагаемого с давлением запишем в виде

$$\left(\mathbf{e}_i\right)_0 \iiint\limits_W \nabla p dW = \left(\mathbf{e}_i\right)_0 \oiint\limits_S p\mathbf{n}dS \approx \left(\mathbf{e}_i\right)_0 \sum_k P_k \mathbf{n}_k \Delta S_k \,, \qquad (2.72)$$

где $P_k = \left(P_{k1} + P_{k2}\right)/2$ - среднее значение давления на k- ой грани КО для скорости (см. рис.2.3).

При выводе уравнения для поправки давления будем действовать аналогично подразделу 2.3.1. Вместо выражения (2.69), записанного в проекциях на базисные векторы запишем то же выражение, но в векторном виде (см. 2.3.2)

$$\mathrm{A}_0 \left(\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_0^*\right) = \underline{-\sum_k A_k \left(\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_k^*\right)} - \nabla P' \Delta W \,, \qquad (2.73)$$

где $\nabla P'$ – конечно-разностная аппроксимация градиента поправки давления.

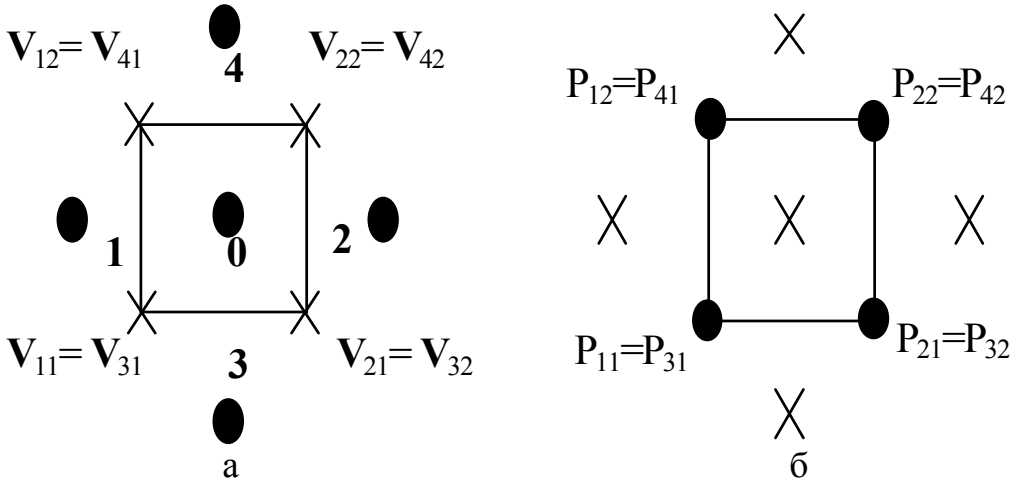


Рис.2.3. Контрольные объемы, схема расположения и нумерации узлов и граней.
а) - контрольный объем для давления *P*; б) - контрольный объем для вектора скорости- **V**.
Черными точками обозначены узлы для давления *P*, крестиками для вектора скорости **V**

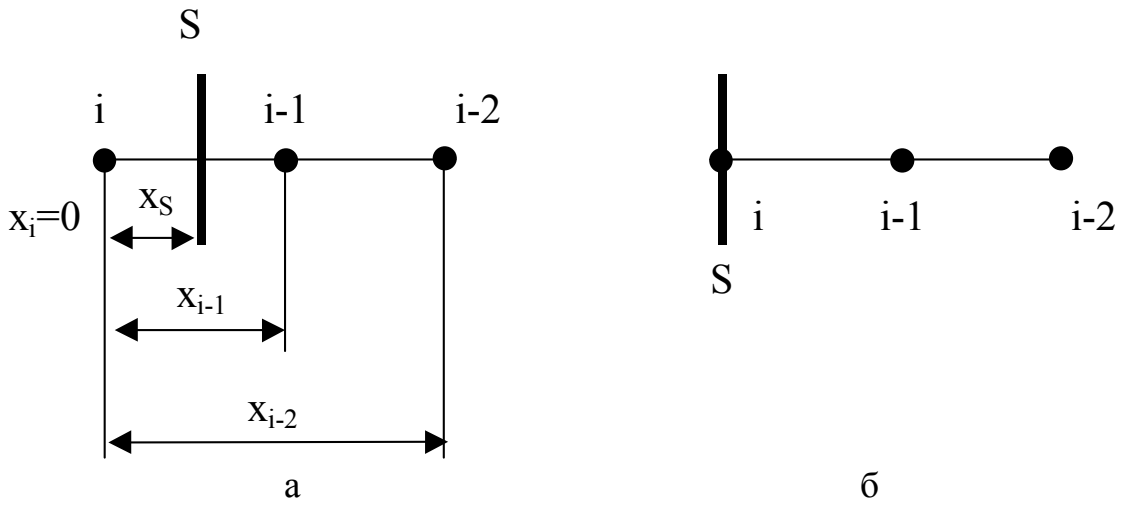


Рис.2.4. Схема нумерации узлов вблизи границы S расчетной области для двух типов контрольных объемов

Пренебрегая подчеркнутым слагаемым, интерполируем (2.73) в центр *k*- ой грани КО для давления (см. рис.2.3)

$$\frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{V}_0 \ -\mathbf{V}_0{}^*\right)_{k1}+\left(\mathbf{V}_0 \ -\mathbf{V}_0{}^*\right)_{k2}\right)=\mathbf{V}'_k=-\nabla P'\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta W_{k1}}{\mathrm{A}_{0k1}}+\frac{\Delta W_{k2}}{\mathrm{A}_{0k2}}\right). \qquad (2.74)$$

Умножим (2.74) на $(-1)^k \mathbf{e}_i \big/ \left|\mathbf{e}^i\right|$, i=1,2; k=2i−1, 2i, и проинтегрируем по поверхности КО для давления

$$\sum_k \left(V'^i + V'^j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i\right)_k (-1)^k \Delta S_k \big/ \left|\mathbf{e}^i\right| = \sum_k (P_0 - P_k)\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta W_{k1}}{\mathrm{A}_{0k1}}+\frac{\Delta W_{k2}}{\mathrm{A}_{0k2}}\right)\frac{\Delta S_k}{\left|\mathbf{e}^i\right|\Delta x_k}, \qquad (2.75)$$

здесь $i \neq j$. Заметим, что на сетке близкой к ортогональной произведение $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \to 0$. Если итерационный процесс сходится, то $\mathbf{V}' \to 0$ и вторым слагаемым в левой части (2.75) можно пренебречь [91], учитывая, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет уравнению неразрывности, получим уравнение для поправки давления на частично совмещенной сетке:

$$A_0 \ P'_0 = \sum_k A_k \ P'_k \ - \sum_k \left(\mathbf{n}\mathbf{V}^*\right)_k \ \Delta S_k \ , \qquad (2.76)$$

которое по форме полностью совпадает с (2.71) полученным для разнесенной сетки, и имеет 2D+1 диагональ на регулярной сетке. Коэффициенты в (2.76) вычисляются по формулам

$$A_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta W_{k1}}{\mathrm{A}_{0k1}}+\frac{\Delta W_{k2}}{\mathrm{A}_{0k2}}\right)\frac{\Delta S_k}{\left|\mathbf{e}^i\right|\Delta x_k},$$

$$A_0 = -\sum_k A_k \ . \qquad (2.77)$$

При реализации SIMPLE процедур на частично совмещенной сетке последовательность операций, изложенная в пункте 2.3.2, остается неизменной. Уравнения также не изменяются, за исключением двух формул: вместо выражения (2.60) следует использовать (2.72), а вместо уравнения для поправки давления

(2.71), используется уравнение (2.76), где коэффициенты рассчитываются по формулам (2.77).

2.3.4. Аппроксимация граничных условий

Точность численного решения во многом зависит от метода постановки граничных условий. Применительно к задачам конвективного тепломассообмена можно выделить условия в невозмущенном потоке, условия на твердой поверхности, условия симметрии течения и условия периодичности, которые применяются для расчета в областях с регулярно повторяющейся по пространству геометрией, например теплообменники с пакетами труб или пластин [8], [7], [9]. Подробное обсуждение особенностей постановки граничных условий при решении задач внешнего обтекания и течений в каналах с помощью SIMPLE методов можно найти в [76], [8], [7], [9].

Рассмотрим постановку граничных условий на твердой стенке. Основная проблема заключается в уменьшении толщины пограничного слоя по мере роста числа Рейнольдса, что приводит к необходимости использовать более подробные разностные сетки в пристеночной области.

На рис.2.4 изображены два возможных варианта взаимного расположения границы области и узлов расчетной сетки. В первом случае (см. рис.2.4,а) для задания значения скорости или температуры на твердой поверхности Φ_S, необходимо ввести аппроксимацию для профиля соответствующей искомой переменной Φ, вблизи границы. Наиболее распространенным является метод, основанный на линейной аппроксимации, т.е.

$$\Phi_i + \Phi_{i-1} = 2\Phi_S, \tag{2.78}$$

где Φ_i - значение функции в граничном узле, Φ_{i-1} - значение функции в ближайшем к границе узле (см. рис.2.4). Соотношение (2.78) имеет первый порядок точности и приводит к известному соотношению Тома для завихренности на стенке [90]. Повысить порядок точности можно, используя квадратичный или кубический полином, аппроксимирующий профиль Φ вблизи стенки [8], [7], [9]. В частности для квадратичной аппроксимации получаем

$$\Phi_i = \Phi_S f_S + \Phi_{i-1} f_{i-1} + \Phi_{i-2} f_{i-2}, \tag{2.79}$$

где

$$f_S = \frac{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})}{(x_S - x_{i-1})(x_S - x_{i-2})},$$

$$f_{i-1} = \frac{(x_i - x_S)(x_i - x_{i-2})}{(x_{i-1} - x_S)(x_{i-1} - x_{i-2})},$$

$$f_{i-2} = \frac{(x_i - x_S)(x_i - x_{i-1})}{(x_{i-2} - x_S)(x_{i-2} - x_{i-1})}, \qquad (2.80)$$

где x_i, x_{i-1}, x_{i-2} - координаты соответствующих узлов, а x_S координата границы (см. рис.2.4,а). В работах [8], [7], [9] приводится обзор более сложных вариантов постановки граничных условий, основанных на анализе уравнений пограничного слоя.

Матрица системы алгебраических уравнений для давления (2.66) составляется таким образом, что значение давления в граничном узле P_i не участвует в расчетной процедуре. Само значение P_i можно найти из условия равенства нулю нормального к стенке градиента давления [76], [8], [7], [9]. Отсюда следует, что методе в SIMPLER поправка давления в граничных узлах должна быть равна нулю, а в SIMPLE- подобных алгоритмах нужно задавать условие равенства нулю нормальной производной к границе от поправки давления.

Граничные условия в набегающем потоке ставятся в зависимости от типа задачи. Если расход известен заранее, то задается величина и направление вектора скорости на участке границы, где скалярное произведение скорости и внешней нормали к границе области меньше нуля. На той части границы, где жидкость вытекает из расчетной области, для вектора скорости и остальных неизвестных обычно ставятся так называемые "мягкие" граничные условия типа

$$\Phi_i = 2\Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}. \qquad (2.81)$$

Однако, в этом случае на выходной границе области поле скорости может не удовлетворять дискретному уравнению неразрывности (2.56), что в свою очередь, вносит в возмущение в расчет поля давления и течения во всей области.

Поэтому для аппроксимации граничных условий следует использовать комбинацию уравнений (2.81) и (2.56). Те компоненты вектора скорости, узлы которых находятся непосредственно на границе области рис.2.4.б, должны рассчитываться из дискретного уравнения неразрывности (2.56), а компоненты скорости, находящихся в фиктивных узлах рис.2.4.а – из уравнения (2.81).

Если известен перепад давления и требуется определить расход, то на внешней границе ставятся мягкие условия для скорости. Для давления можно применять итерационную процедуру типа

$$P_{i-1}^{n+1} = P_{i-1}^{n} + P_{\Sigma}, \tag{2.82}$$

где

$$P_{\Sigma} = \sum \left(P_S - P_{i-1}^{n} \right), \tag{2.83}$$

где P_S - известное среднее значение давления на некотором участке границы, суммирование в (2.83) ведется по всем узлам *i*-1 (см. рис.2.4), принадлежащим этому участку границы. Очевидно, в результате итерационного процесса (2.82) должно установится поле давления, такое, что $P_{\Sigma} = 0$ или $P_S = \sum P_{i-1}$. Подчеркнем, что граничные условия ставятся для значений давления в узлах *i*-1 (см. рис.2.4), поскольку вычислительная процедура построена таким образом, что поле давления не зависит от значения давления в граничных узлах *i* [76], [8], [7], [9].

2.4. Влияние точности вычисления конвективного потока на решение тестовой задачи о сдвиговом течение в криволинейной системе координат

Рассмотрим вопрос о влиянии точности формулы приближенного вычисления интегрального конвективного потока через грани КО на численное решение тестовой задачи о сдвиговом течение в криволинейной системе координат.

Пусть имеет место чисто сдвиговое стационарное течение при отсутствии градиента давления и массовых сил. Направление вектора скорости постоянно, а модуль является линейной функцией пространственных переменных. Потребуем,

чтобы сдвиговое течение точно удовлетворяло дискретному аналогу уравнения количества движения (2.3) при $\Phi = \mathbf{V}$, S_Φ=0 в криволинейной неортогональной системе координат. Нетрудно видеть, что для линейного сдвигового течения диффузионное слагаемое тождественно равно нулю, как в дифференциальной, так и в конечно-разностной форме. Тогда уравнение сохранения количества движения примет вид

$$\oiint_S [\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\mathbf{V})]\, dS = 0\,. \qquad (2.84)$$

При переходе к дискретному аналогу (2.84) необходимо аппроксимировать поверхностные интегралы по граням КО. Обычно для этого используется квадратурная формула прямоугольников, точная для полиномов первой степени, если значение подынтегральной функции вычислено в центре отрезка интегрирования.

В данном случае применение формулы прямоугольников будет вносить погрешность Δ_Φ, поскольку подынтегральная функция $\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\mathbf{V})$ представляет собой произведение линейно меняющихся функций

$$\oiint_S \mathbf{V}\mathbf{n}(\rho\mathbf{V})dS = \sum_k \left(\mathbf{V}\mathbf{n}\rho\mathbf{V}\right)_k \Delta S_k + \Delta_\Phi = 0\,, \qquad (2.85)$$

(суммирование ведется по граням КО).

В общем случае, величина $(\rho\mathbf{V})_k$ на *k*- ой грани вычисляется по значениям $\rho\mathbf{V}$ в центрах соседних с гранью ячеек. Для противопоточной схемы $(\rho\mathbf{V})_k$ равно значению $\rho\mathbf{V}$ в центре ячейки, находящейся вверх по потоку. В работе [101] в соответствии с принципом минимальных значений производной [42], для криволинейной системы координат, предложено брать в качестве $(\rho\mathbf{V})_k$ минимальное по модулю из вычисленных значений $\rho\mathbf{V}$ справа и слева в центре тяжести грани.

Найдем такую поправку к квадратурной формуле прямоугольников, чтобы формула была точной для произведения двух линейно меняющихся функций. Пусть *a* и *b* линейно зависят от переменной *s*, тогда

$$\int_{-\Delta S/2}^{+\Delta S/2} a(s)b(s)ds = \int_{-\Delta S/2}^{+\Delta S/2} \left(a_0 + \frac{\partial a}{\partial s}s\right)\left(b_0 + \frac{\partial b}{\partial s}s\right)ds = a_0 b_0 \Delta S + \frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial b}{\partial s}\frac{\Delta S^3}{12} =$$

$$= a_0 b_0 \Delta S + \left(a|_{\Delta S/2} - a|_{-\Delta S/2}\right)\left(b|_{\Delta S/2} - b|_{-\Delta S/2}\right)\frac{\Delta S}{12} = a_0 b_0 \Delta S + \Delta a \Delta b \frac{\Delta S}{12}, \qquad (2.86)$$

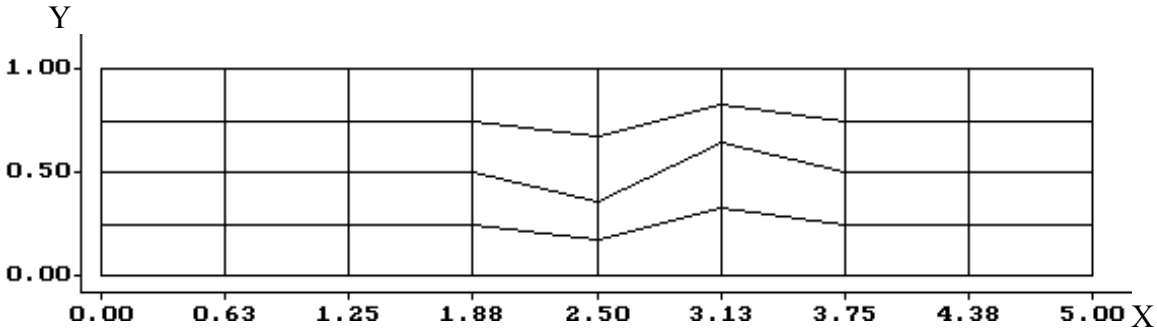
где первое слагаемое соответствует квадратурной формуле прямоугольников, а второе слагаемое представляет собой погрешность Δ_Φ.

С учетом (2.86) формула (2.85) в двумерном случае примет вид

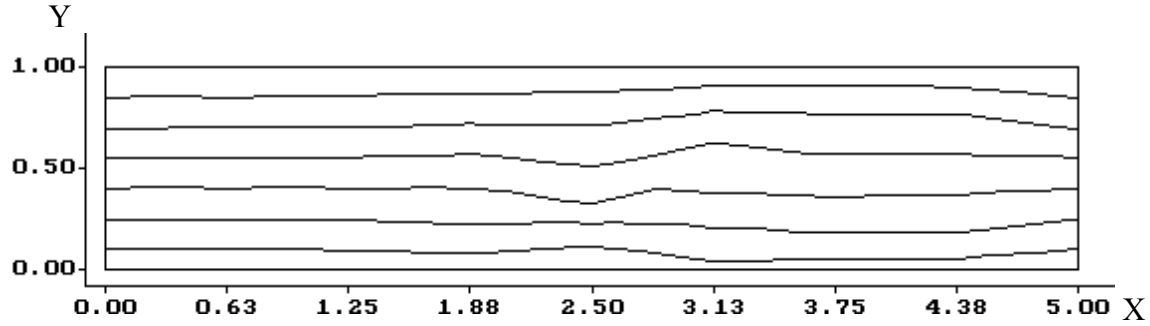
$$\oiint_S \mathbf{Vn}(\rho\mathbf{V})\,dS = \sum_k \left(\mathbf{Vn}\rho\mathbf{V} + \frac{\Delta(\mathbf{Vn})\Delta(\rho\mathbf{V})}{12}\right)_k \Delta S_k = 0, \qquad (2.87)$$

где $\left(\mathbf{Vn}\rho\mathbf{V}\right)_k$ определяются в центре тяжести грани, $\Delta(\mathbf{Vn})$, $\Delta(\rho\mathbf{V})$ – приращения вдоль грани, которые рассчитываются по формуле (2.86).

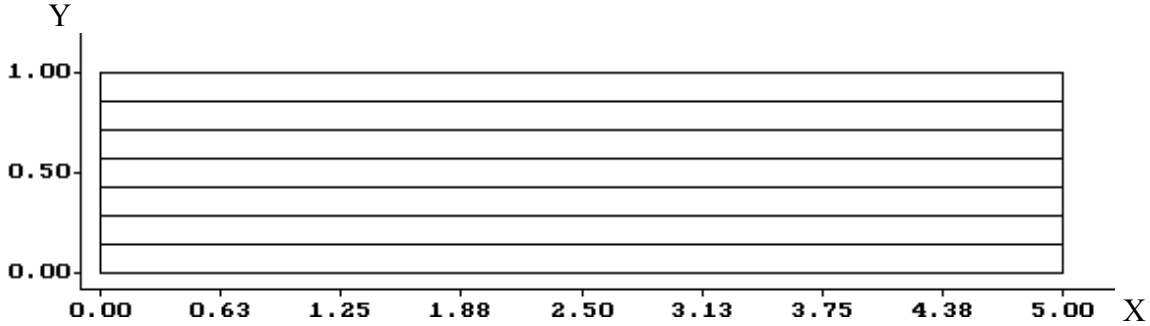
На рис.2.5 приведено решение тестовой задачи о течении Куэтта между параллельными пластинами. В центре области сетка была преднамеренно искривлена (рис.2.5.а). На рис.2.5.б отчетливо видны возмущения продольной составляющей скорости V_x при использовании обычной формулы прямоугольников. На рис.2.5.в видно, что изолинии V_x, полученные с использованием формулы (2.87), не зависят от кривизны сеточных линий.



а



б



в

Рис.2.5 Тест на не возмущение течения Куэтта на криволинейной сетке
а) – криволинейная сетка; б) изолинии V_x (формула прямоугольников);
в) изолинии V_x (скорректированная формула прямоугольников)

Из (2.87) следует, что после применения исходной формулы прямоугольников, независимо от порядка точности, с которым конечно-разностная схема аппроксимирует значение $\left(\rho\mathbf{V}\right)_k$, порядок аппроксимации конвективного потока будет не выше первого.

Погрешность порядка $\Delta(\mathbf{Vn})\Delta\left(\rho\mathbf{V}\right)\Delta S/12$ может стать существенной в областях с большими градиентами скорости. И даже при линейном изменении поля вектора скорости (как при чисто сдвиговом течении) на криволинейной сетке, или при не совпадении направления течения с направлением сеточных линий в декартовой системе координат, в решение будут вноситься возмущения, зависящие от кривизны сеточных линий. Применение поправки (2.87) позволяет точно рассчитывать конвективные потоки в случае сдвигового течения на криволинейной сетке.

2.5. Разностные схемы для аппроксимации конвективного и диффузионного потока

2.5.1. Схема аппроксимации диффузионных потоков

Повышения точности численного решения можно добиться двумя путями: с помощью увеличения количества сеточных узлов, и повышением порядка точности разностной аппроксимации [93], [65] исходных уравнений.

Для аппроксимации конвективных и диффузионных потоков нужно определить зависимость схемных коэффициентов d_k и c_k в (2.23) от сеточного числа Пекле. Для этого можно воспользоваться одномерной задачей конвективно-диффузионного переноса [76]

$$\begin{aligned} U\frac{d\Phi}{dx}-\Gamma\frac{d^2\Phi}{dx^2}&=0,\\ \Phi\big|_{x=0}&=\Phi_0,\\ \Phi\big|_{x=L}&=\Phi_L, \end{aligned} \qquad (2.88)$$

с решением

$$\Phi(x) = \Phi_0 + (\Phi_L - \Phi_0)\frac{\exp(Ux/\Gamma)-1}{\exp(UL/\Gamma)-1}, \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (\Phi_L - \Phi_0)\frac{U}{\Gamma}\frac{\exp(Ux/\Gamma)}{\exp(UL/\Gamma)-1}. \tag{2.90}$$

Из (2.89), (2.90) следует, что для линейной одномерной задачи конвективно-диффузионного переноса типа (2.88) на равномерной сетке схемные коэффициенты в (2.23) можно вычислять по формулам

$$c_k = \frac{\exp(Pe_k/2)-1}{\exp(Pe_k)-1}, \tag{2.91}$$

$$d_k = Pe_k \frac{\exp(Pe_k/2)}{\exp(Pe_k)-1}, \tag{2.92}$$

где Pe_k - сеточное число Пекле (2.14). При этом численное решение будет совпадать с аналитическим решением (2.89).

Выражения (2.91), (2.92) определяют “экспоненциальную” схему [76]. При $Pe_k \to 0$ эта схема переходит в центрально-разностную схему для конвективного слагаемого $c_k = 0.5$, а для диффузионного

$$d_k = 1. \tag{2.93}$$

При $Pe_k > 10$ экспоненциальная схема переходит в противопоточную схему (2.15) для конвективного слагаемого, а вкладом диффузионного потока в перенос можно пренебречь поскольку

$$d_k < 0.0674, \text{ при } Pe_k > 10. \tag{2.94}$$

Вычисление экспонент занимает много времени, и к тому же, для двумерной нелинейной задачи, решение (2.89), в общем случае, не является точным и вносит сильную численную диффузию в решение [8], [7]. Поэтому в [76] было предложено аппроксимировать решение (2.89), (2.90) полиномом 5-го порядка.

В настоящей работе предлагается вычислять приближенные значения (2.91), (2.92) с помощью полиномов первого и второго порядка

$$c_k = \begin{cases} 0.5\left(1-\dfrac{Pe_k}{Pe_{\max}}\right), & |Pe_k| \le Pe_{\max} \\ \\ 0.5\left(1-\dfrac{Pe_k}{|Pe_k|}\right), & |Pe_k| > Pe_{\max} \end{cases}, \tag{2.95}$$

$$d_k = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{Pe_k}{Pe_{\max}}\right)^2, & |Pe_k| \le Pe_{\max} \\ \\ 0 & |Pe_k| > Pe_{\max} \end{cases}, \tag{2.96}$$

$$Pe_{\max} = 12. \tag{2.97}$$

Выражения (2.95), (2.96), (2.97) определяют схему, которая обладает всеми свойствами экспоненциальной схемы. Эффект схемной вязкости особенно сильно проявляется в случае отрывных, циркуляционных течений, когда не удается адаптировать сетку к структуре потока, так чтобы одно из семейств сеточных линий повторяло форму линий тока.

Результаты серии тестовых расчетов циркуляционных течений подтвердили, что для вычисления диффузионного потока на грани КО выражение (2.96) дает приемлемые результаты, а для конвективного слагаемого в двумерных задачах необходимо применять другие подходы, нежели (2.91) или (2.95). Обзор литературы по разностным схемам для несжимаемых течений можно найти в работах [8], [7].

2.5.2. Схема QUIC

В работе [162] Леонард предложил схему второго порядка QUIC. В схеме QUIC для аппроксимации значения $(\Phi)_k$ на границе контрольного объема используется противопоточная квадратичная интерполяция, которая для одномерного случая имеет вид

$$\Phi(\xi) = \Phi(0) + c_1\xi + c_2\xi^2, \tag{2.98}$$

а в двумерном случае [8], [7], [147], [9]

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi(0,0) + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\eta + c_4\eta^2 + c_5\xi\eta, \tag{2.99}$$

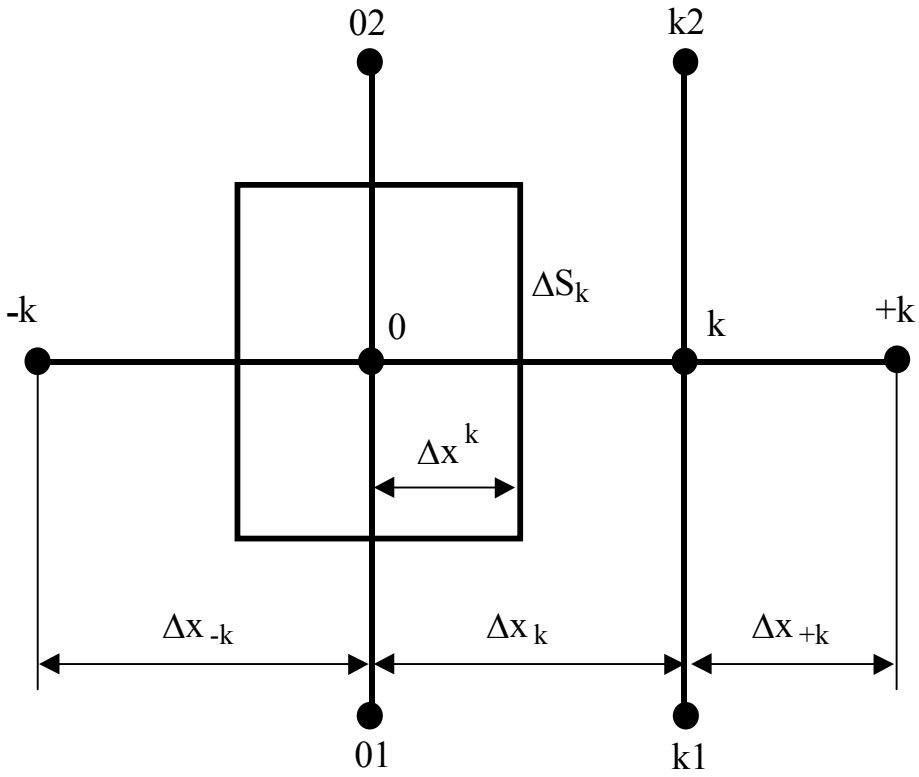


Рис.2.6. Нумерация узлов при вычислении ограничителя потоков на k-ой грани контрольного объема

где ξ, η - координаты локальной системы координат, начало которой находится в узле 0 при $(\mathbf{Vn})_k \geq 0$, и в узле k при $(\mathbf{Vn})_k < 0$ (см. рис.2.6). С помощью такого приема повышается устойчивость разностной схемы, поскольку коэффициенты интерполяционного многочлена (2.99) вычисляются с учетом того факта, что область влияния численного решения расположена вверх по потоку. Согласно схеме QUIC для двумерного случая (2.99) величина $(\Phi)_k$ вычисляется по формуле [162], [8], [7], [147], [9]

$$(\Phi)_k = \frac{\Phi_0 + \Phi_k}{2} + \begin{cases} -\dfrac{\Phi_k - 2\Phi_0 + \Phi_{-k}}{8} + \dfrac{\Phi_{01} - 2\Phi_0 + \Phi_{02}}{24}, & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ -\dfrac{\Phi_{+k} - 2\Phi_k + \Phi_0}{8} + \dfrac{\Phi_{k1} - 2\Phi_k + \Phi_{k2}}{24}, & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}. \qquad (2.100)$$

где нижние индексы соответствуют номерам узлов на рис.2.6.

Схема QUIC не монотонна и обладает слабо выраженным антидиффузионным эффектом. В [188] показано, что при расчете по схеме QUIC нестационарного одномерного уравнения конвективного переноса скаляра с разрывами в начальных условиях возникают осцилляции решения в окрестности разрывов. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости не допускают существования разрывных решений [61], поэтому антидиффузионные свойства схемы QUIC проявляются в виде завышения значений локальных максимумов, особенно на грубых сетках и в областях с большими градиентами искомых переменных. Причина этого явления заключается в завышенной или заниженной оценке конвективного потока в окрестности локального максимума или минимума, что приводит к неоправданному росту локального экстремума. Частично устранить данный эффект можно вводя ограничение на значения $(\Phi)_k$ в окрестности локального экстремума. В частности можно потребовать, чтобы $(\Phi)_k$ принадлежало промежутку значений Φ справа и слева от *k*-ой грани: $[\Phi_k, \Phi_0]$, если в узле 0 или k находится локальный экстремум функции Ф. Также можно вычислять $(\Phi)_k$ в окрестности локального экстремума по противопоточной схеме (2.15) или схеме (2.95). Однако даже после введения такой поправки схема QUIC дает заметную погрешность при расчете значений Ф в окрестности локальных экстремумов. Эта

погрешность становится особенно заметной в области вторичных течений с линейными размерами, сравнимыми с шагом сетки (см. рис.7.а). Кроме того, скорость сходимости численного метода при использовании схемы QUIC значительно (в зависимости от задачи в 2-4 раза) меньше, чем при использовании противопоточной схемы. На основании перечисленных недостатков схемы QUIC, можно сделать вывод, что эффективные численные алгоритмы следует строить, основываясь на монотонных схемах повышенного порядка точности.

2.5.3. Схемы TVD для дозвуковых течений

После публикации работы В.П. Колгана [42] в 1972 начало развиваться новое поколение схем аппроксимации конвективного потока, которые впоследствии получили название TVD (Total Variation Diminishing) схем. Отличительным свойством этих схем является монотонность получаемого решения. Сочетание повышенного порядка точности, высокой скорости сходимости и отсутствие осцилляций в окрестности разрывов сделало схемы TVD очень популярными среди специалистов по вычислительной газовой динамике [155], [188], [178]. Однако до недавнего времени для расчета несжимаемых течений чаще всего использовалась схема QUIC [162], [8], [7], [59], [147], [9], которая не обладает свойством монотонности.

Несмотря на то, что TVD схемы разрабатывались, прежде всего, для разрывных решений газовой динамики, они имеют большое будущее и в области численного моделирования гладких решений задач несжимаемой жидкости. При этом основным положительным качеством этих схем является свойство невозрастания полной вариации решения, которое обеспечивается благодаря соответствующей методике расчета конвективных потоков через грани контрольного объема. Свойство невозрастания локальных экстремумов численного решения очень важно для правильного расчета структур решения, линейные размеры которых сравнимы с шагом сетки. К таким структурам можно отнести зоны вторичного отрыва и вихревые дорожки в слоях смешения.

Можно показать [187], что практически любая схема TVD может быть записана в виде

$$(\Phi)_k = (\Phi_{UDS})_k + \Psi_k , \qquad (2.101)$$

где $(\Phi_{UDS})_k$ - значение функции на грани КО рассчитанное по противопоточной схеме (2.15), Ψ_k нелинейный ограничитель потоков (flux limiter [187] , [188], [178]), который является функцией значений Φ в окрестности k-ой грани контрольного объема (см. рис.2.6).

Запишем выражения для вычисления $(\Phi)_k$ по схеме Колгана MinMod [42]

$$(\Phi)_k = \begin{cases} \Phi_0 + \Delta x^k \cdot \mathrm{MinMod}\left(\dfrac{\Phi_k - \Phi_0}{\Delta x_k}, \dfrac{\Phi_0 - \Phi_{-k}}{\Delta x_{-k}} \right), & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ \Phi_k - \left(\Delta x_k - \Delta x^k\right) \cdot \mathrm{MinMod}\left(\dfrac{\Phi_{+k} - \Phi_k}{\Delta x_{+k}}, \dfrac{\Phi_k - \Phi_0}{\Delta x_k} \right), & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}. \qquad (2.102)$$

Обозначения см. на рис.2.6. Схема Колгана имеет второй порядок точности [42].

С учетом (2.100) ограничитель Ψ_k для схемы MinMod будет иметь вид

$$\Psi_k = \begin{cases} \Delta x^k \cdot \mathrm{MinMod}\left(\dfrac{\Phi_k - \Phi_0}{\Delta x_k}, \dfrac{\Phi_0 - \Phi_{-k}}{\Delta x_{-k}} \right), & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ -\left(\Delta x_k - \Delta x^k\right) \cdot \mathrm{MinMod}\left(\dfrac{\Phi_{+k} - \Phi_k}{\Delta x_{+k}}, \dfrac{\Phi_k - \Phi_0}{\Delta x_k} \right), & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}. \qquad (2.103)$$

Для схемы TVD третьего порядка точности ISNAS [187] ограничитель Ψ_k на равномерной сетке имеет вид

$$\Psi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Delta\Phi_0 \dfrac{\left(\Delta\Phi_1^2 + 3\,\Delta\Phi_0\,\Delta\Phi_1\right)}{\left(\Delta\Phi_0 + \Delta\Phi_1\right)^2}, & \Delta\Phi_1\Delta\Phi_0 > 0 \\ 0, & \Delta\Phi_1\Delta\Phi_0 \leq 0 \end{cases}, \qquad (2.104)$$

где

$$\Delta\Phi_0 = \begin{cases} (\Phi_k - \Phi_0), & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ (\Phi_0 - \Phi_k), & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}, \qquad (2.105)$$

$$\Delta\Phi_1 = \begin{cases} (\Phi_0 - \Phi_{-k}), & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ (\Phi_k - \Phi_{+k}), & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}. \qquad (2.106)$$

Условие $\Delta\Phi_1\Delta\Phi_0 < 0$ соответствует случаю, когда вверх по потоку от k-ой грани находится локальный экстремум. Как следует из (2.104) в этом случае $(\Phi)_k$ фактически вычисляется по противопоточной схеме, однако это не приводит к понижению порядка аппроксимации [187], и обеспечивает не возрастание локального экстремума. Аналогичную проверку следует внести и в схему MinMod (2.103). Введем обозначения

$$\Delta\Phi_0 = \begin{cases} \dfrac{\Phi_k - \Phi_0}{\Delta x_k}, & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ \\ \dfrac{\Phi_0 - \Phi_k}{\Delta x_k}, & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}, \tag{2.107}$$

$$\Delta\Phi_1 = \begin{cases} \dfrac{\Phi_0 - \Phi_{-k}}{\Delta x_{-k}}, & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ \\ \dfrac{\Phi_k - \Phi_{+k}}{\Delta x_{+k}}, & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}, \tag{2.108}$$

$$\Delta x = \begin{cases} \Delta x^k, & (\mathbf{Vn})_k \geq 0 \\ \\ \left(\Delta x_k - \Delta x^k\right), & (\mathbf{Vn})_k < 0 \end{cases}, \tag{2.109}$$

тогда (2.103) можно записать в более компактном виде

$$\Psi_k = \begin{cases} \Delta x \cdot \mathrm{MinMod}\left(\Delta\Phi_0, \Delta\Phi_1\right), & \Delta\Phi_0\Delta\Phi_1 > 0 \\ \\ 0, & \Delta\Phi_0\Delta\Phi_1 \leq 0 \end{cases}, \tag{2.110}$$

причем выполнение условия $\Delta\Phi_1\Delta\Phi_0 \leq 0$ будет обеспечивать невозрастание локального максимума.

Используя выражения (2.107), (2.108), (2.109) можно переписать ограничитель для схемы ISNAS (2.104) в виде

$$\Psi_k = \begin{cases} \Lambda x \cdot \Delta\Phi_0 \dfrac{\left(\Delta\Phi_1^2 + 3\,\Delta\Phi_0\,\Delta\Phi_1\right)}{\left(\Delta\Phi_0 + \Delta\Phi_1\right)^2}, & \Delta\Phi_1\Delta\Phi_0 > 0 \\ 0, & \Delta\Phi_1\Delta\Phi_0 \le 0 \end{cases}. \qquad (2.111)$$

Подробный анализ порядка точности различных TVD схем на основе диаграмм Свиби [178] и нормализованных переменных Леонарда можно найти в работах [187], [188], [178], [179].

2.6. Основные результаты

1. Исходные уравнения записаны в универсальной форме обобщенного закона сохранения физической величины Ф в контрольном объеме W (аналогично обобщенному уравнению переноса [76]). Рассмотрен случай переменной плотности и коэффициентов диффузии.
2. Дискретизация исходной системы уравнений сохранения массы, количества движения и энергии проведена на основе метода контрольного объема таким образом, что дискретные аналоги удовлетворяют тесту на невозмущенный поток в произвольной криволинейной неортогональной системе координат.
3. Описаны особенности реализации метода контрольного объема в случае осевой симметрии и при наличии закрутки потока.
4. Показано, что при выводе дискретных аналогов уравнений количества движения в дифференциальной форме для ортогональной криволинейной системы координат, в общем случае, не возможно получить численное решение в виде невозмущенного, однородного потока.
5. Предложено обобщение методов типа SIMPLE и в частности метода SIMPLER на случай неортогональной криволинейной системы координат. Уравнение количества движения записано относительно контравариантных компонент вектора скорости на шахматной разнесенной сетке. Также рассмотрена реализация методов SIMPLE на частично совмещенных сетках.
6. Описаны методики постановки разностных граничных условий в случае применения методов типа SIMPLE.
7. Исследовано влияние кривизны сеточных линий на точность численного решения. Показано, что линейное сдвиговое течение может быть точно

рассчитано на произвольной неортогональной сетке, только при повышении порядка точности квадратурной формулы для вычисления конвективного потока через грани контрольного объема.

8. Описаны различные схемы разностной аппроксимации конвективных и диффузионных потоков, в частности схема Леонарда QUIC и схемы TVD второго и третьего порядка.

РАЗДЕЛ 3
Верификация и анализ применимости разработанных методов и алгоритмов

3.1. Сравнение эффективности разностных схем и SIMPLE- подобных алгоритмов

В разделах 2.1-2.3 был дан вывод SIMPLE-подобных методов на разнесенных и частично совмещенных криволинейных неортогональных сетках. В разделе 2.4 предложено вводить поправку при вычислении интегралов по граням КО, а в разделе 2.5 описаны различные схемы аппроксимации конвективных и диффузионных потоков. Возникает естественный вопрос о проверке работоспособности и эффективности описанных методик. Рассмотрим решение этого вопроса на примере расчетов тестовых задач.

Развитие рециркуляционного течения в квадратной каверне с подвижной крышкой часто рассматривалось многими авторами [7], [152], [18], [47], [137], [168], [135], [136], [145], [139], [173], [29], [32], [13]. Решения, полученные на достаточно подробных сетках [152], позволяют оценивать точность численного метода.

Свободная конвекция в замкнутой полости определяется действием массовых сил обусловленных температурным расширением жидкости. Обзор экспериментальных и численных исследований задачи о развитии свободной конвекции в прямоугольной области при подогреве сбоку можно найти в [99], [44], [26], [79]. Свободная конвекция в горизонтальных кольцевых каналах между концентрическими и эксцентрическими цилиндрами была экспериментально исследована с помощью интерферометра Маха-Цендера в работе [56], численное решение данной задачи можно найти в работе [123].

3.1.1. Развитие циркуляционного течения в каверне

Задача о развитии циркуляционного течения в каверне давно и хорошо изучена, поэтому ее часто используют в качестве тестовой для подтверждения работоспособности предлагаемых методик. Подробный обзор литературы по данной задаче можно найти в [7]. Форма каверны и граничные условия показаны на

рис.3.1. Движение верхней стенки вследствие действия вязких напряжений вызывает вращение жидкости в направлении указанном стрелкой.

На рис.3.2 показана зависимость максимального значения функции тока Ψmax в центральном вихре и Ψmin во вторичном вихре от числа Рейнольдса. На рис.3.3 приведено распределение изолиний функции тока для чисел Рейнольдса Re=400, 1000, 3200. Анализируя рис.3.2, рис.3.3 можно сделать вывод о структуре течения в каверне: движение стенки индуцирует течение в центральном вихре, которое вызывает возникновение каскада вторичных вихрей в углах каверны, при этом количество вторичных вихрей определяется числом Рейнольдса. Режим автомодельности (когда интенсивность вихря уже не зависит от числа Re, посчитанного по максимальной скорости и линейному масштабу этого вихря) наступает, когда число Рейнольдса становится больше 2000. С увеличением Re интенсивность центрального вихря растет, а в углах каверны образуются вторичные циркуляционные зоны, течение в которых в свою очередь, индуцирует появление еще более мелких зон циркуляции. Процесс порождения в углах каверны вторичных вихрей прекращается, когда число Рейнольдса, посчитанное по максимальной скорости и линейному масштабу самого малого вихря, становится порядка 10. На рис.3.4 показано распределение компонент скорости в сечениях x=0.5 и y=0.5. На рисунке видно, что с увеличением числа Рейнольдса скорость жидкости в центральной зоне каверны практически не меняется. Вблизи стенок наблюдается тенденция к образованию пристенных течений с резкими изменениями профиля скорости.

При исследовании эффективности методов основное внимание отводится сходимости численного решения по сетке и по времени. Будем считать, что решение стационарной задачи сошлось с точностью Δ, если максимальная относительная погрешность в сеточной норме C_H между решениями полученными на двух последовательных итерациях не превышает по модулю величины Δ.

$$\Delta \geq \frac{\left\| \Phi^{n} - \Phi^{n-1} \right\| C_H}{\left| \Phi_{\max} \right|} = \frac{\max\limits_{i=1,,Np} \left({\Phi_i}^{n} - {\Phi_i}^{n-1} \right)}{\left| \Phi_{\max} \right|}, \qquad (3.1)$$

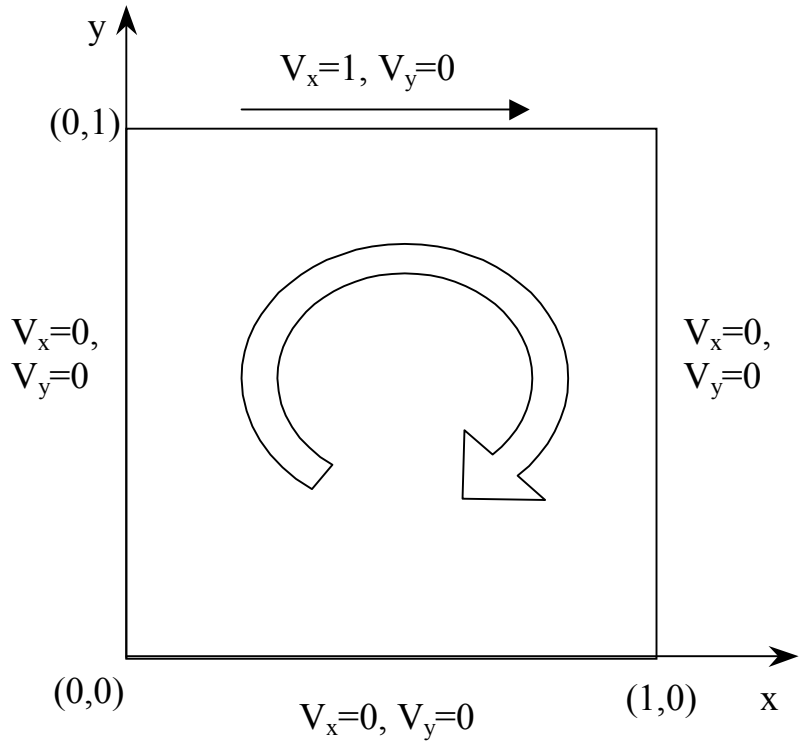


Рис.3.1. Течение в каверне. Постановка граничных условий

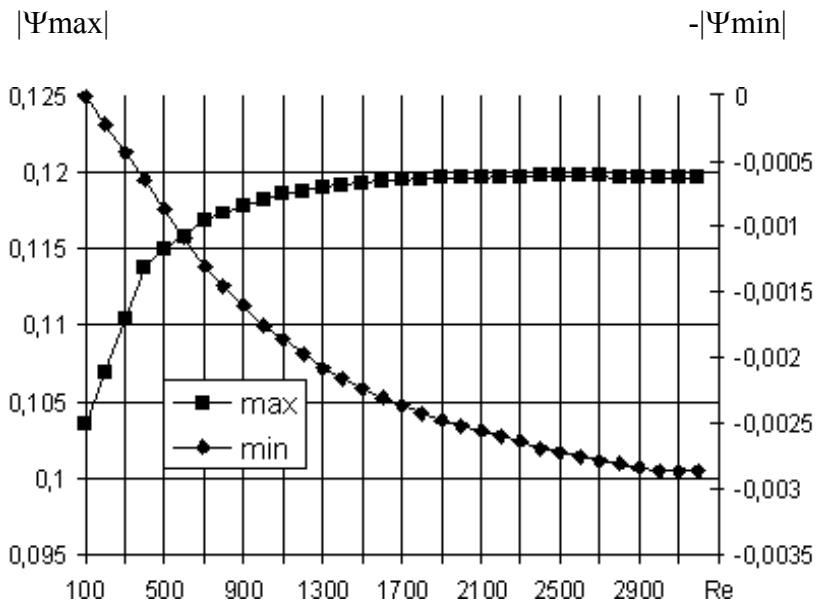


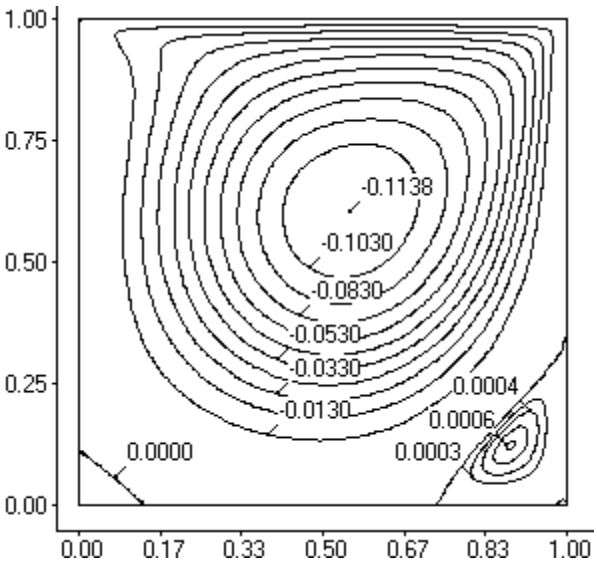
Рис.3.2. Зависимость от числа Re максимального и минимального значений Ψ (схема TVD ISNAS, сетка 160x160)

где $\left\|\Phi^n - \Phi^{n-1}\right\|_{C_H}$ – разность в норме C_H между решениями Φ^n, Φ^{n-1}, полученными на текущей и предыдущей итерации, Φ_i^n, Φ_i^{n-1} – значение решений в узле с номером i, Φ_{max} – максимальное по абсолютной величине значение функции Ф, Np – количество узлов сетки.

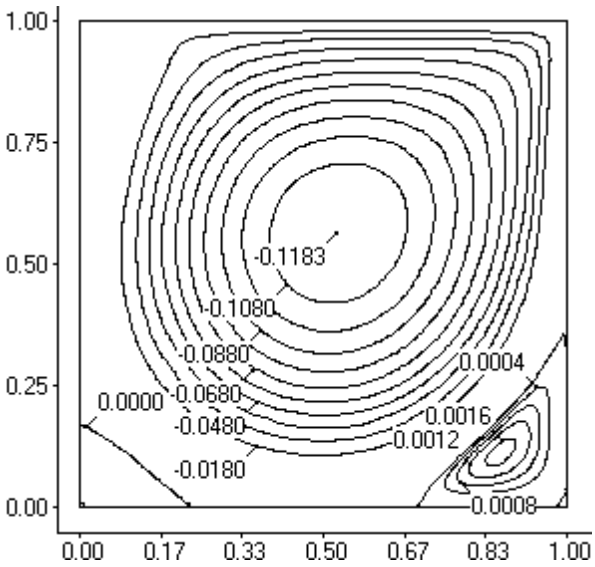
На рис.3.5 показана зависимость числа итераций, необходимых для того, чтобы решение сошлось с точностью 10^{-4} для трех методов SIMPLE, PISO, SIMPLER. Отчетливо видно, что SIMPLER сходится быстрее при любом числе Re. Решения, полученные с помощью данных методов, при разных параметрах релаксации практически не отличаются. Следует заметить, что количество итераций сильно зависит от параметров релаксации метода [7], [49]. Оптимальные значения параметров релаксации, в свою очередь, меняются в зависимости от максимальной величины сеточного числа Пекле и количества узлов сетки. В методе SIMPLER наблюдается самая слабая зависимость оптимальных значений параметров релаксации от условий задачи, по сравнению с остальными методами [49]. Кроме того, для метода SIMPLER величины параметров релаксации минимальны. Учитывая, что при расчете стационарной задачи, параметр релаксации обратно пропорционален шагу по времени при счете на установление (см. (2.22), (2.28)), можно сказать, что применение метода SIMPLER позволяет вести расчеты с большими шагами по времени, чем, например PISO или SIMPLE.

На рис.3.6 видно, что все три схемы (QUIC, Minmod и ISNAS) дают примерно одинаковую погрешность при вычислении значения Ψ_{max} в центральном вихре. Схема QUIC дает наибольшую погрешность в оценке интенсивности вторичного вихря Ψ_{min}. Погрешность с уменьшением шага сетки для всех схем становится примерно одного порядка.

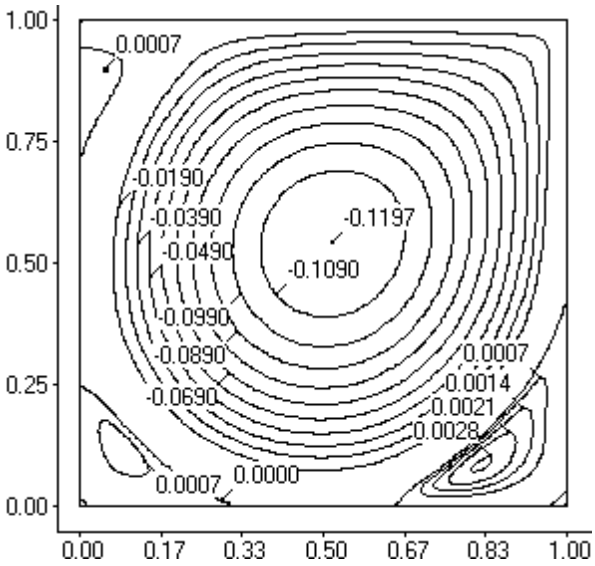
Результаты расчетов получены для трех схем. Для выбора оптимальной (наиболее эффективной) схемы необходимо ввести критерий эффективности схемы. Эффективность разностной схемы определим количественно в виде отношения качества полученного решения к затратам машинного времени на его получение.



Re=400

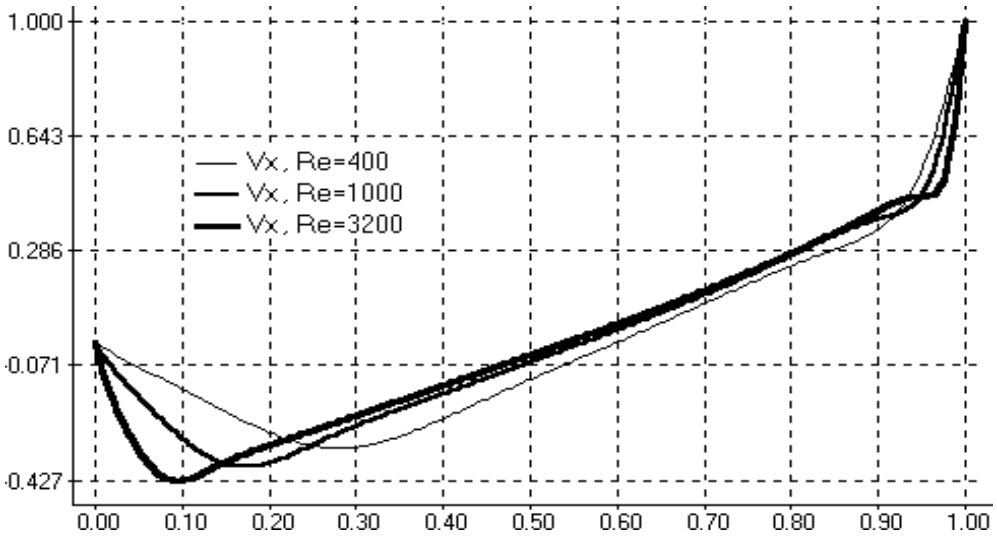


Re=1000

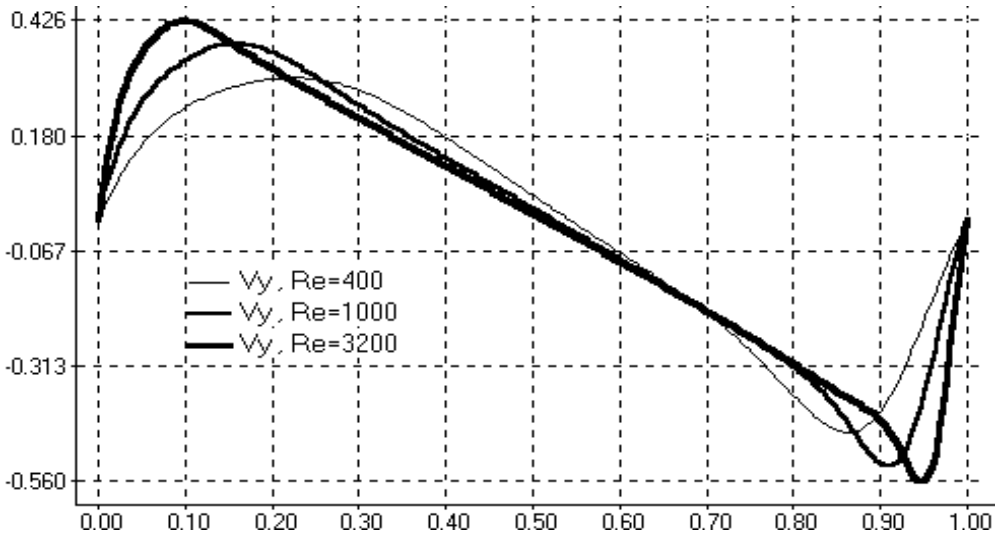


Re=3200

Рис.3.3. Течение в каверне. Линии тока



а



б

Рис.3.4. Распределение скорости в каверне (сетка 251x251);
а – скорость V_x в сечении x=0.5, б – скорость V_y в сечении y=0.5

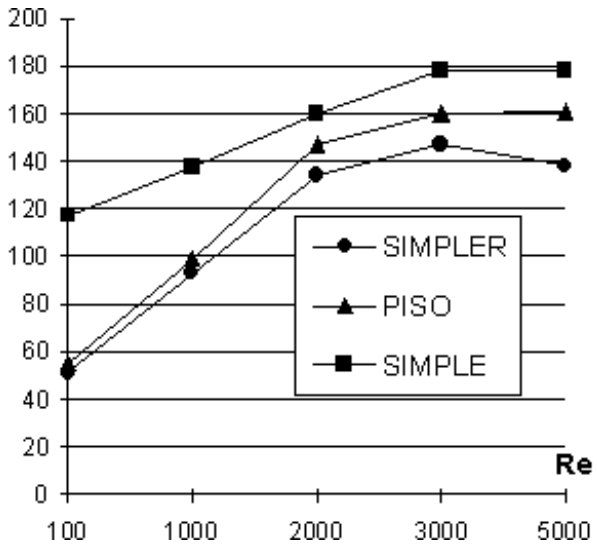
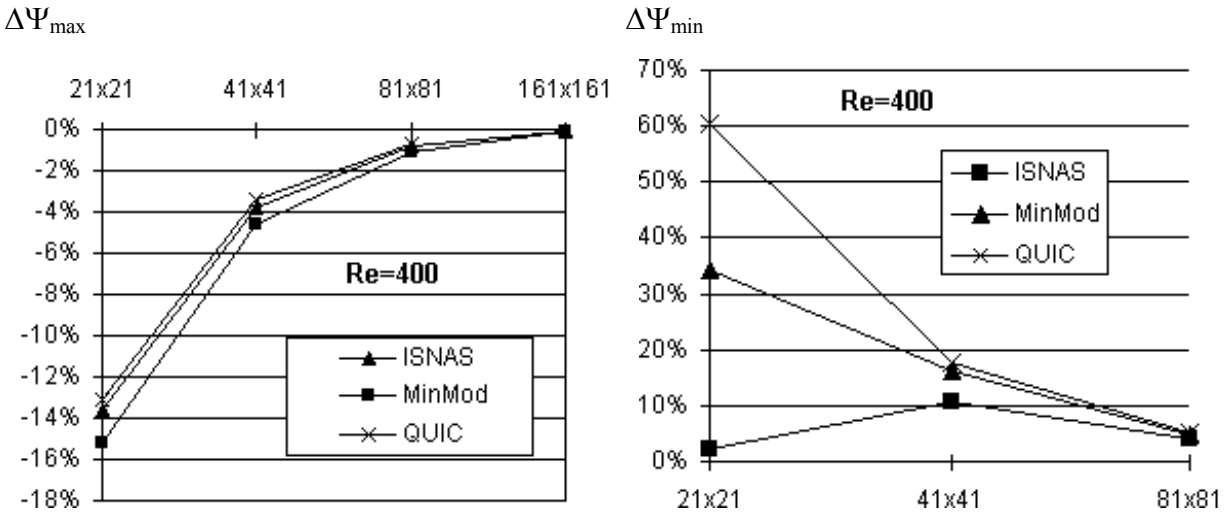


Рис.3.5. Зависимость количества итераций от числа Рейнольдса (сетка 31x31) при относительной погрешности между итерациями 10^{-4}



а б

Рис.3.6. Зависимость относительной погрешности определения а - Ψ_{max} и б - Ψ_{min} от количества узлов сетки для трех схем при Re=400

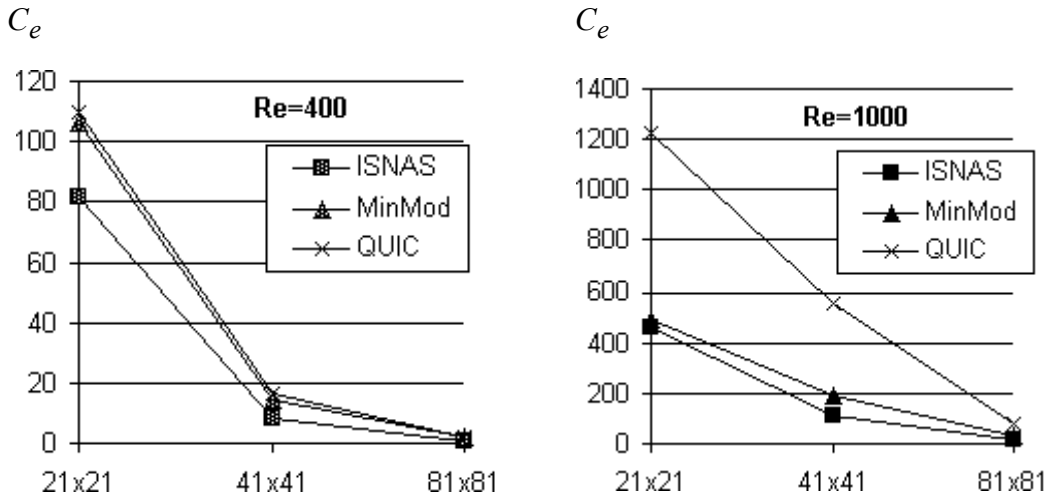


Рис.3.7. Зависимость C_e для Re=400, 1000

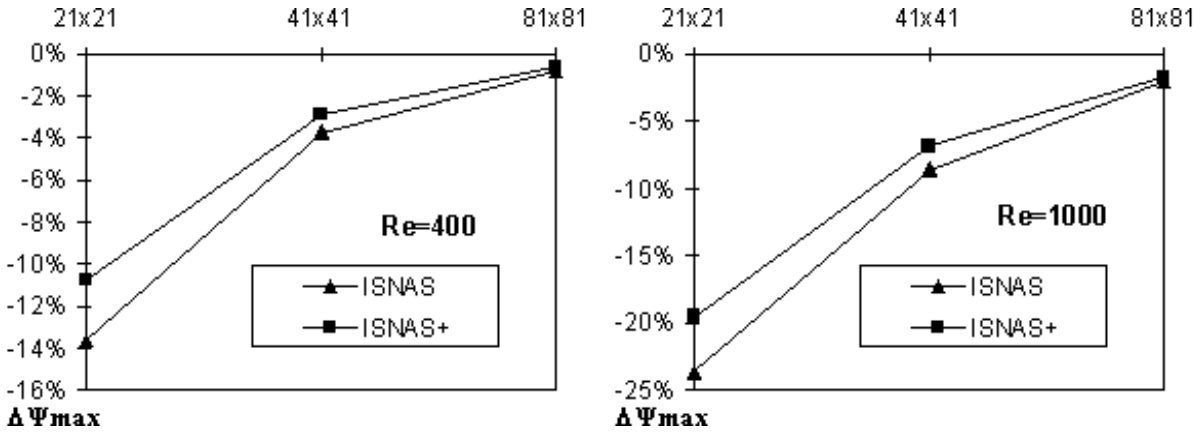


Рис.3.8. Зависимость относительной погрешности определения Ψ_{max} в центральном вихре от количества узлов сетки для Re=1000. ISNAS - схема TVD ISNAS; ISNAS+ то же с поправкой (2.87)

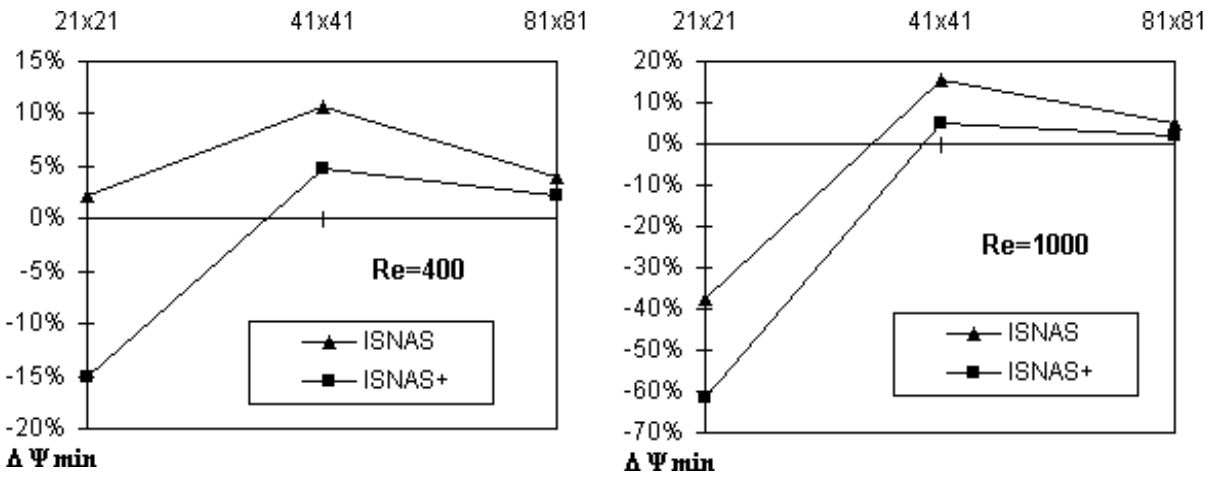


Рис.3.9. Зависимость от количества узлов сетки относительной погрешность определения Ψ_{min} для Re=1000. ISNAS - схема TVD ISNAS; ISNAS+ то же с поправкой (2.87)

Качество решения естественно определить как величину обратно пропорциональную погрешности решения в некоторой степени. Для сравнения эффективности схем на конкретной задаче предлагается использовать соотношение

$$C_e = N_i N_p \Delta, \tag{3.2}$$

где Δ – величина погрешности решения; N_i – количество итераций; N_p – количество сеточных узлов. Произведение $N_i N_p$ можно рассматривать как машинное время, необходимое для получения решения. Коэффициент C_e растет прямо пропорционально величине погрешности решения и затратам машинного времени, т.е., чем C_e меньше тем схема эффективнее. На рис.3.7 показана зависимость C_e от шага сетки для чисел Рейнольдса Re=400, 1000. Существенное уменьшение эффективности схемы QUIC при увеличении числа Рейнольдса обусловлено увеличением количества итераций необходимых для получения решения с заданной точностью. Из рисунка также следует, что наиболее эффективной для данной задачи является схема ISNAS.

На рис.3.8 и рис.3.9 показана зависимость от количества узлов сетки относительной погрешности определения Ψ_{max} а на рис.3.7 погрешности определения Ψ_{min} для Re=1000 и схемы TVD ISNAS с поправкой (2.87) и без нее. При вычислении погрешности, в качестве точного решения использовалось решение, полученное на равномерной сетке 251x251. На графике видно, что поправка (2.87) позволяет заметно повысить скорость сходимости решения по шагу сетки.

3.1.2. Применение метода контрольного объема для описания свободноконвективного движения жидкости в приближении Буссинеска

Течение в каверне с движущейся крышкой относится к классу течений, которые определяются действием сил вязкости. Рассмотрим класс течений, в которых решающую роль играют конвективно-диффузионный перенос тепла и действие массовых сил обусловленных температурным расширением жидкости.

Течение неизотермической вязкой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска [75], [25], [134]. Согласно этому

приближению неоднородность поля плотности следует учитывать только в слагаемом, которое отвечает за силы плавучести Архимеда в уравнении движения.

Запишем уравнение сохранения количества движения (2.10) в виде

$$\iiint\limits_W \frac{\partial \rho_0 \mathbf{V}}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho_0 \mathbf{V}) - \mu\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}\right)\right] dS = -\iiint\limits_W \nabla(p + p_0)\, dW + \iiint\limits_W \mathbf{g}\rho\, dW\,, \qquad (3.3)$$

где $\mathbf{g}$ - вектор ускорения свободного падения, ρ_0 - значение плотности жидкости ρ, такое, что $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} << 1$, p - избыточное давление по отношению к гидростатическому давлению p_0 в той же точке пространства. Гидростатическое давление определяется с помощью основного уравнения гидростатики

$$\nabla p_0 = \mathbf{g}\,\rho_0\,. \qquad (3.4)$$

Учитывая выражение (3.4) уравнение (3.3) перепишем в виде

$$\iiint\limits_W \frac{\partial \rho_0 \mathbf{V}}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho_0 \mathbf{V}) - \mu\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}\right)\right] dS = -\iiint\limits_W \nabla p\, dW + \iiint\limits_W \mathbf{g}(\rho - \rho_0) dW\,. \qquad (3.5)$$

Если зависимостью плотности от давления можно пренебречь, то приращение плотности можно представить в виде

$$\rho - \rho_0 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P (T - T_0)\,, \qquad (3.6)$$

где T - температура жидкости, T_0 - температура жидкости, при которой плотность равна ρ_0. Учитывая, что коэффициент температурного расширения жидкости равен

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P\,, \qquad (3.7)$$

перепишем уравнение (3.5) в виде

$$\iiint\limits_W \frac{\partial \rho_0 \mathbf{V}}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\rho_0 \mathbf{V}) - \mu\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}\right)\right] dS = -\iiint\limits_W \nabla p \; dW - \iiint\limits_W \rho_0 \mathbf{g} \beta_T \left(T - T_0\right) dW \,. \qquad (3.8)$$

Переходя к безразмерным переменным в (3.8) [99], [75], [25], [134], получим уравнения сохранения количества движения и энергии

$$\iiint\limits_W \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(\mathbf{V}) - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}\right] dS = -\iiint\limits_W \nabla p \; dW - \iiint\limits_W \mathbf{Gr}\, T \, dW \,, \qquad (3.9)$$

$$\iiint\limits_W \frac{\partial T}{\partial t} dW + \oiint\limits_S \left[\mathbf{V}\mathbf{n}(T) - \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial T}{\partial n}\right] dS = \iiint\limits_W Q \, dW \,, \qquad (3.10)$$

где (размерные величины обозначены штрихом) $\mathbf{V}' = \mathbf{V}\dfrac{\nu}{L}$ – вектор скорости, $t' = t\dfrac{L^2}{\nu}$ – время; $p' = \dfrac{p}{\rho_0}\left(\dfrac{L}{\nu}\right)^2$ – избыточное давление,

$$\mathbf{Gr} = \frac{\mathbf{g}\beta_T \left(T_1 - T_0\right) L^3}{\nu^2} \qquad (3.11)$$

– число Грасгофа, $T' = T_0 + T\left(T_1 - T_0\right)$ – температура жидкости

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} \qquad (3.12)$$

– число Прандтля, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, a – коэффициент температуропроводности жидкости, $Q = \dfrac{\rho_0 C_p \left(T_1 - T_0\right) L^2}{\nu}$ – удельная мощность источников тепла, $T_1 - T_0$ - характерная разность температур.

Учет неоднородности плотности лишь в слагаемом с подъемной силой в уравнении количества движения означает некоторую непоследовательность приближения Буссинеска [57], [25]. Однако сравнение многочисленных результатов полученных при помощи такого упрощения исходной системы уравнений [8], [7], [99], [75], [25] с обширным экспериментальным материалом и с решениями, полученными на основе более полных уравнений [57] свидетельствуют о том, что уравнения Буссинеска достаточно хорошо отражают особенности тепловой

конвекции. Относительно заметных отклонений от приближения Буссинеска можно ожидать при описании конвективных течений в газах, ввиду их значительной сжимаемости и большого значения коэффициента теплового расширения. Более общие уравнения, описывающие существенно дозвуковые течения газа, подчиняющегося уравнению состояния Менделеева-Клайперона, можно найти в работах [57], [73], [58].

3.1.3. Развитие свободной конвекции в квадратной области при подогреве сбоку

Конвективный перенос тепла в прямоугольной каверне при подогреве сбоку неоднократно исследовался экспериментальными и численными методами [99], [75], [79]. Наиболее полные результаты получены для зависимости теплового потока (числа Нуссельта) от безразмерных критериев подобия. Численно получены результаты по величине максимального значения функции тока в зависимости от числа Грасгофа и относительного удлинения области [99], [75], [79].

Будем искать стационарное решение уравнений (3.9), (3.10) в квадратной области безразмерная высота, которой равна единице. На границе области выполняется условие прилипания

$$\mathbf{V}\big|_S = 0\,. \tag{3.13}$$

На боковых границах безразмерная температура постоянна

$$T(0,y) = 1\,, \quad T(1,y) = 0\,, \tag{3.14}$$

а на горизонтальных участках возможны два варианта постановки граничных условий.

Задача А (рис.3.10) - задано линейное распределение температуры

$$T(x,0) = T(x,1) = 1 - x\,, \tag{3.15}$$

что соответствует бесконечной теплопроводности материала стенок.

Задача Б (рис.3.11) - задано условие теплоизоляции

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial T(x,1)}{\partial y} = 0\,. \tag{3.16}$$

В реальности теплообмен жидкости со стенками области подчиняется закону Ньютона, а (3.15), (3.16) являются предельными случаями [99].

Определяющими параметрами задач (3.9), (3.10), (3.13), (3.14), (3.15) и (3.16) являются числа Грасгофа и Прандтля. На рис.3.10 – рис.3.13 приведены картины линий тока и изотерм полученные в результате численного решения задачи А (условие (3.15)) при различных числах Грасгофа и числе Прандтля Pr=1. На рисунках отчетливо прослеживается эволюция течения, в ходе которой у границ формируются тепловые и скоростные пограничные слои, а в центре области изоградиентное ядро [99]. Отсутствие заметного движения в ядре (редкие линии тока) при $Gr>10^5$ объясняется тем, что уравнения конвекции (3.9), (3.10) допускают решение в виде покоящейся жидкости при устойчивой стратификации (подогрев сверху) [99].

На рис.3.14 – рис.3.17 приведены линии тока и изотермы для решения задачи Б (условие (3.16)). Проводя сравнение с решением задачи А, можно заметить, что постановка условия теплоизоляции на горизонтальных стенках приводит к относительному уменьшению толщины температурного пограничного слоя на вертикальных стенках и утолщению скоростного пограничного слоя на горизонтальных стенках. В задаче Б при $Gr>5\cdot10^5$ практически всю расчетную область занимает изоградиентное ядро с устойчиво стратифицированной жидкостью. Поэтому стационарное решение задачи Б сохраняет устойчивость при значительно больших значениях чисел Gr [99].

В качестве характеристики интенсивности течения выберем максимальное значение функции тока, которое представляет собой безразмерный расход жидкости при ее циркуляционном течении в расчетной области. На рис.3.18 приведены данные о зависимости максимального значения функции тока Ψ_{max} от чисел Грасгофа и Прандтля.

С увеличением числа Грасгофа величина максимума функции тока растет, причем в случае теплоизолированных горизонтальных стенок (задача Б) максимум растет медленнее, чем в случае бесконечной теплопроводности материала стенок (задача А). Результаты расчетов при числах Прандтля Pr=1 и Pr=0.71 показывают, что уменьшение числа Прандтля приводит к увеличению интенсивности течения.

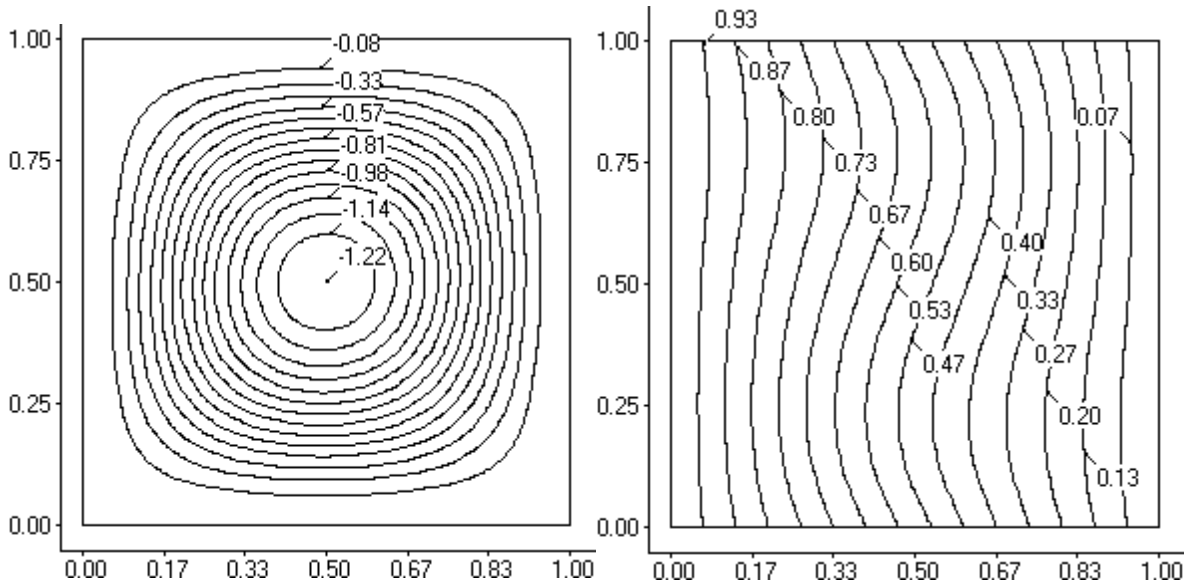


Рис.3.10. Задача А. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=1000, Pr=1

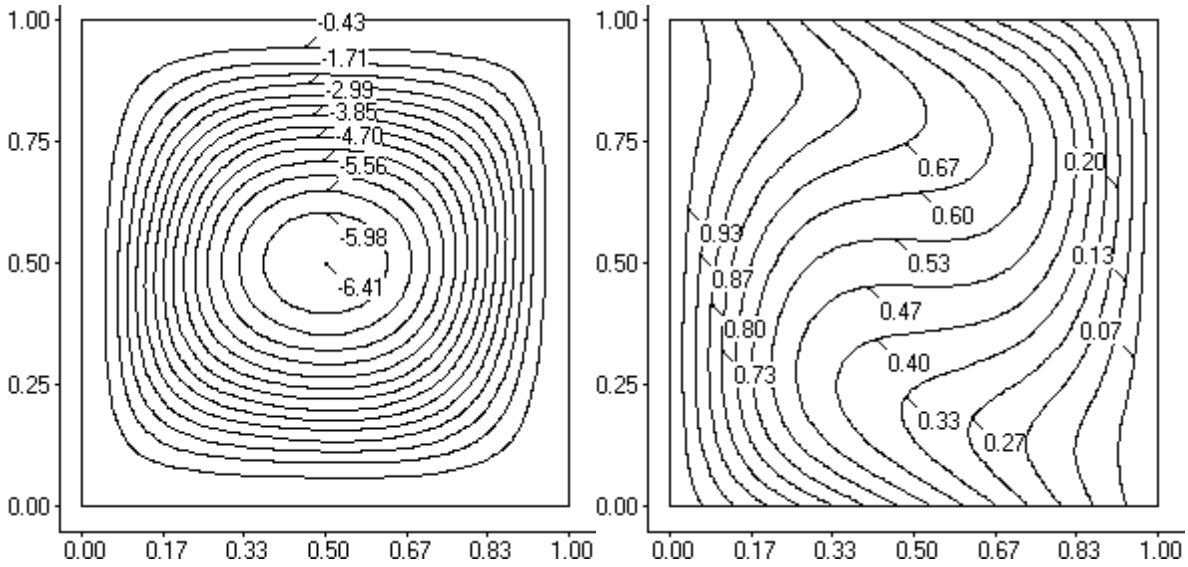


Рис.3.11. Задача А. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=10000, Pr=1

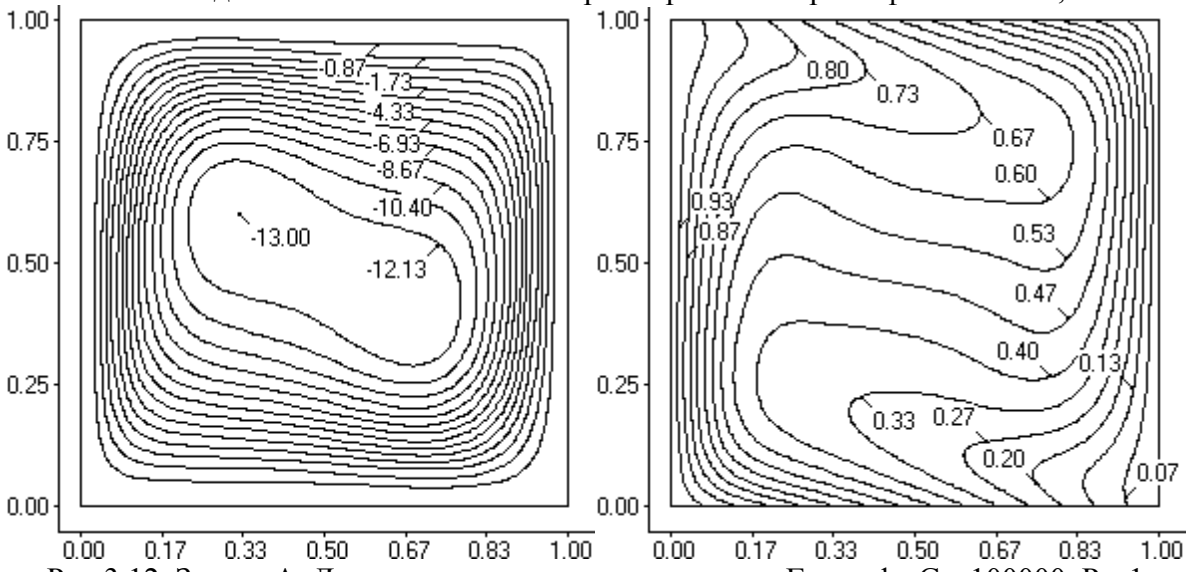


Рис.3.12. Задача А. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=100000, Pr=1

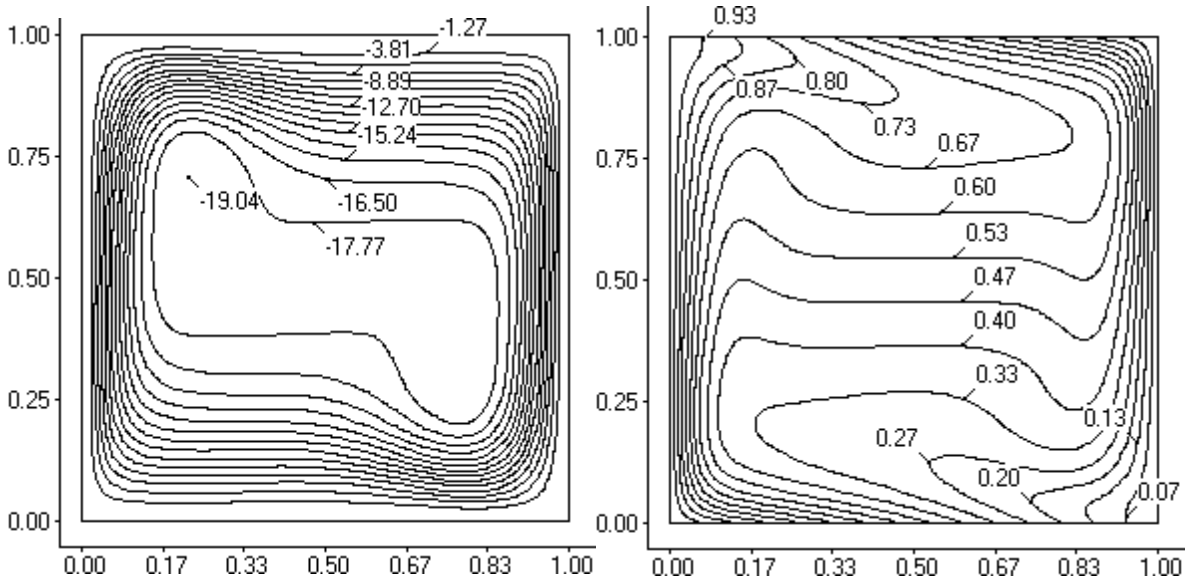


Рис.3.13. Задача А. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=500000, Pr=1

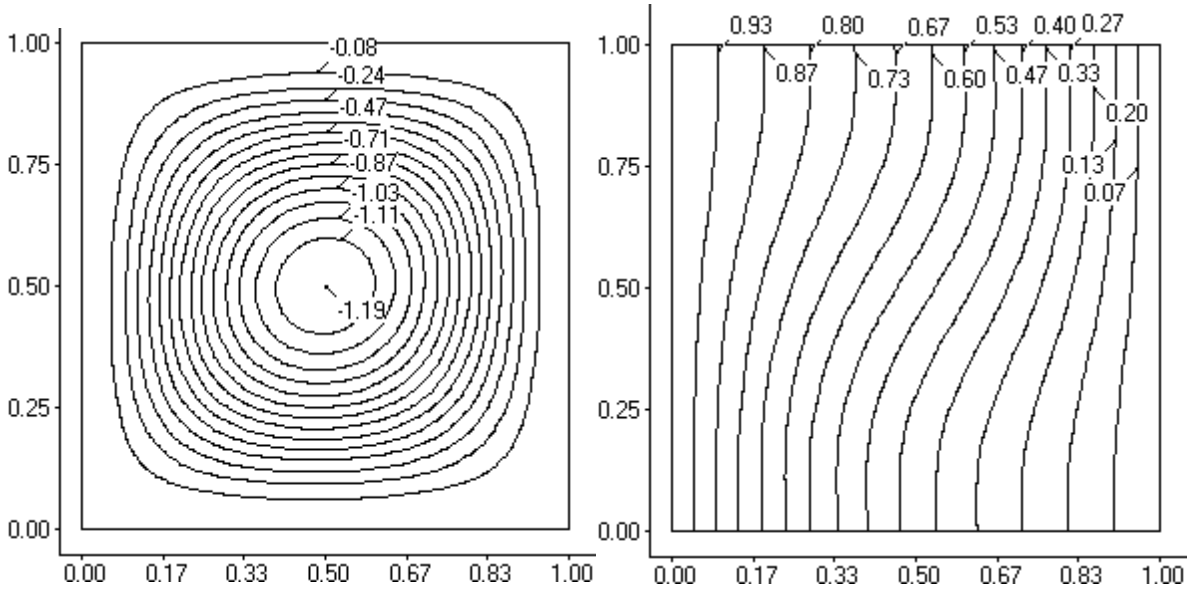


Рис.3.14. Задача Б. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=1000, Pr=1

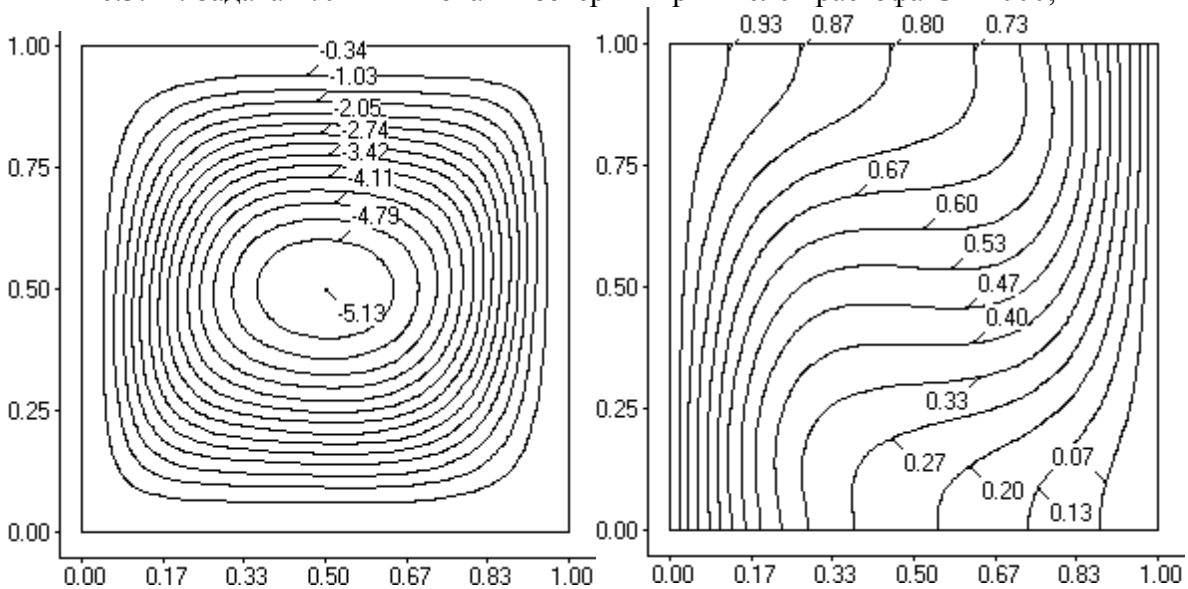


Рис.3.15. Задача Б. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=10000, Pr=1

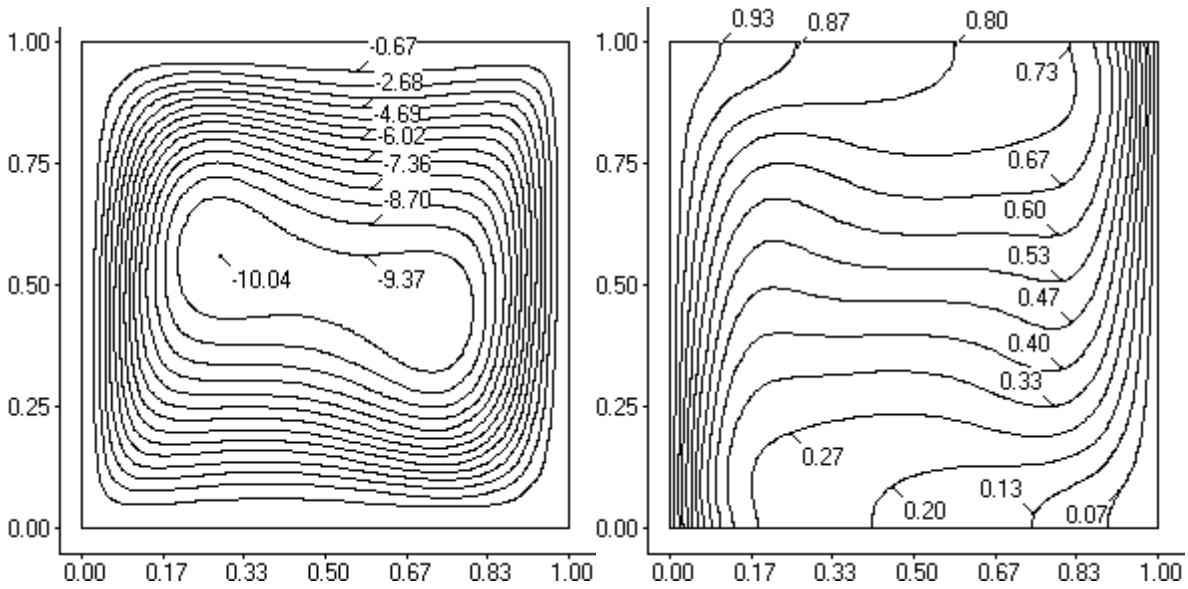


Рис.3.16. Задача Б. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=100000, Pr=1

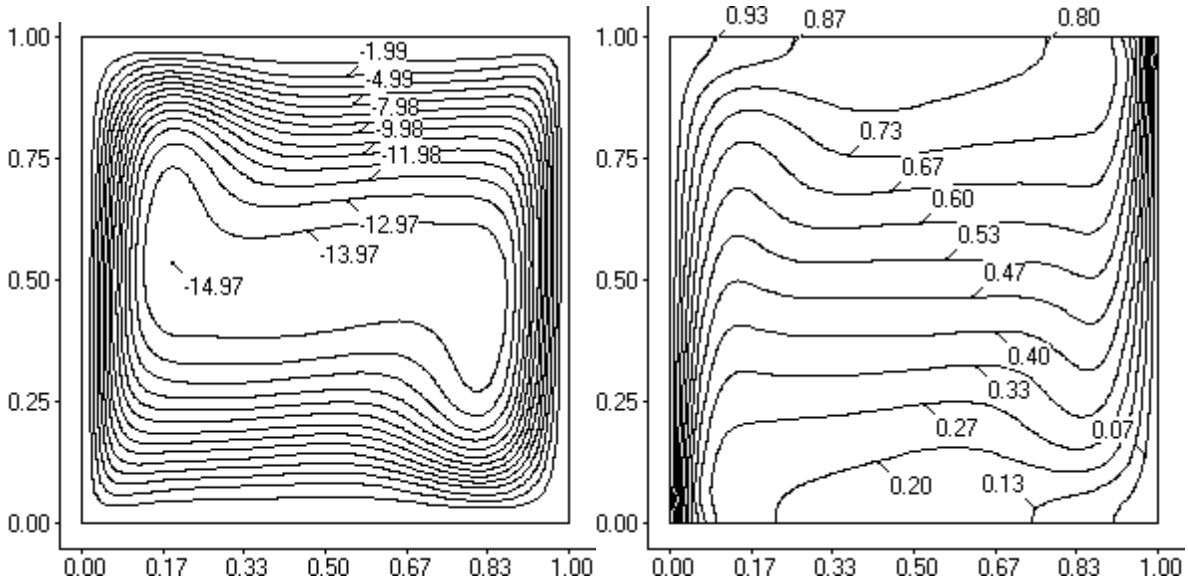


Рис.3.17. Задача Б. Линии тока и изотермы при числе Грасгофа Gr=500000, Pr=1

Рассмотрим влияние порядка аппроксимации граничных условий на точность численных результатов. В частности проведем сравнение результатов полученных при помощи постановки граничных условий с линейной аппроксимацией первого порядка точности (2.78) и с квадратичной аппроксимацией второго порядка точности (2.79). В качестве характерного интегрального параметра для сравнения решений выберем максимальное значение функции тока. На рис.3.19 и рис.3.20 приведена относительная погрешность $\Lambda\Psi_{max}$ в определении значения Ψ_{max} для задач А и Б на различных сетках при числах Грасгофа от 10^3 до $5\cdot10^5$

$$\Delta\Psi_{max} = \frac{\Psi'_{max} - \Psi_{max}}{\Psi_{max}} 100\%, \qquad (3.17)$$

где Ψ_{max} - "точное" значение, полученное на сетке 160x160 узлов, Ψ'_{max} - значение Ψ_{max}, полученное на более грубой сетке.

На рисунках видно, что использование квадратичной аппроксимации граничных условий позволяет заметно повысить точность разностного решения, особенно на грубых сетках, где величина шага сетки и толщина пограничного слоя являются величинами одного порядка. В табл.3.1 приведены данные о зависимости максимального значения функции тока от числа Грасгофа при Pr=1, полученные при использовании условий второго порядка точности (2.79) и схемы ISNAS третьего порядка точности (2.111).

Важной в практическом отношении характеристикой конвективного теплообмена является безразмерный тепловой поток - число Нуссельта

$$Nu = -\frac{\partial T}{\partial n}, \qquad (3.18)$$

а также средний тепловой поток, приходящийся на единицу площади - среднее число Нуссельта

$$Nu_S = -\frac{1}{S}\int_S \frac{\partial T}{\partial n} dS. \qquad (3.19)$$

На рис.3.21, рис.3.22 показана зависимость от числа Грасгофа безразмерного среднего теплового потока Nu_S на вертикальной горячей стенке каверны для задач А и Б соответственно. Для сравнения приведены результаты, полученные на сетке 160x160 и 20x20 узлов при использовании линейной и квадратичной аппроксимации граничных условий. Судя по рисункам, величина Nu_S определяется с удовлетворительной точностью даже на достаточно грубых сетках. Применение граничных условий второго порядка точности позволяет несколько повысить точность результатов.

Таблица 3.1.

Зависимость Ψ_{max} от числа Грасгофа для различных сеток

Задача	Gr	Сетка			
		20x20	40x40	80x80	160x160
А	1000	-1,22	-1,22	-1,22	-1,22
	10000	-6,38	-6,36	-6,36	-6,41
	100000	-13,56	-13,15	-13,11	-13,00
	500000	-20,34	-19,21	-19,06	-19,04
Б	1000	-1,17	-1,17	-1,18	-1,19
	10000	-5,11	-5,10	-5,09	-5,13
	100000	-10,36	-10,05	-10,02	-10,04
	500000	-16,25	-15,16	-14,96	-14,97

Рассмотрим вопрос о влиянии порядка аппроксимации граничных условий на точность расчета локальных значений теплового потока. На рис.3.23, рис.3.24 приведены распределения локального числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны для чисел Грасгофа $Gr=10^3$, 10^4, 10^5, $5\cdot10^5$, Pr=1. Для аппроксимации конвективных потоков использовалась схема ISNAS (2.111). Интересно отметить, что применение граничных условий 2-го порядка точности дает заметное увеличение точности расчета локального числа Нуссельта на грубой сетке 20x20 вплоть до чисел $Gr=10^5$. А при числе $Gr=5\cdot10^5$ лучшие результаты дает применение граничных условий первого порядка (2.78). Причем наибольшая погрешность наблюдается для задачи А в нижней части вертикальной стенки Y=0, где струя холодной жидкости ударяет в нагретую стенку и приводит к возникновению большого градиента температуры. Однако уже на сетке 40x40 узлов применение граничных условий второго порядка (2.79), улучшает точность результатов даже при $Gr=5\cdot10^5$.

3.1.4. Оценка влияния кривизны сеточных линий на точность расчета локальных и интегральных характеристик течения и теплообмена

Рассмотрим вопрос о влиянии кривизны сеточных линий на точность расчета локальных и интегральных характеристик течения и теплообмена при свободной конвекции в полости квадратного поперечного сечения. Граничные условия соответствуют постановке задачи А с линейным распределением температуры на горизонтальных стенках полости (3.15).

Для расчетов используем три типа сетки. Положение угловых точек контрольных объемов криволинейной сетки первого типа (рис.3.25,а) определяется уравнениями

$$x_{ij} = \xi(i) + 0{,}1 \cdot \sin 2\pi\xi(i) \cdot \sin 2\pi\eta(j), \tag{3.20}$$

$$y_{ij} = \eta(j) + 0{,}1 \cdot \sin 2\pi\xi(i) \cdot \sin 2\pi\eta(j), \tag{3.21}$$

где $\xi(i)=(i-1)/(N_X-2)$, $\eta(j)=(j-1)/(N_y-2)$, $i = \overline{0, N_x}$, $j = \overline{0, N_y}$, N_X, N_y – количество узлов сетки по координатам x и y соответственно. Сетка второго типа рис.3.27,б "улучшена" в том смысле, что вблизи стенок области узлы сетки расположены более равномерно, а сеточные линии пересекаются под углом близким к $\pi/2$. Положение угловых точек контрольных объемов в этом случае задано выражениями

$$x_{ij} = \xi(i) + 0{,}11 \cdot a(i) \cdot b(j) \cdot \sin 2\pi\xi(i) \cdot \sin 2\pi\eta(j), \tag{3.22}$$

$$y_{ij} = \eta(i) + 0{,}11 \cdot a(i) \cdot b(j) \cdot \sin 2\pi\xi(i) \cdot \sin 2\pi\eta(j), \tag{3.23}$$

где $a(i) = 1 - \left(N_x^2 - 2\,i\right)^2 \Big/ N_x^2$, $b(j) = 1 - \left(N_y^2 - 2\,j\right)^2 \Big/ N_y^2$.

В качестве интегральной характеристики интенсивности циркуляционного течения выберем максимальное значение функции тока $\Psi_{\max}$.

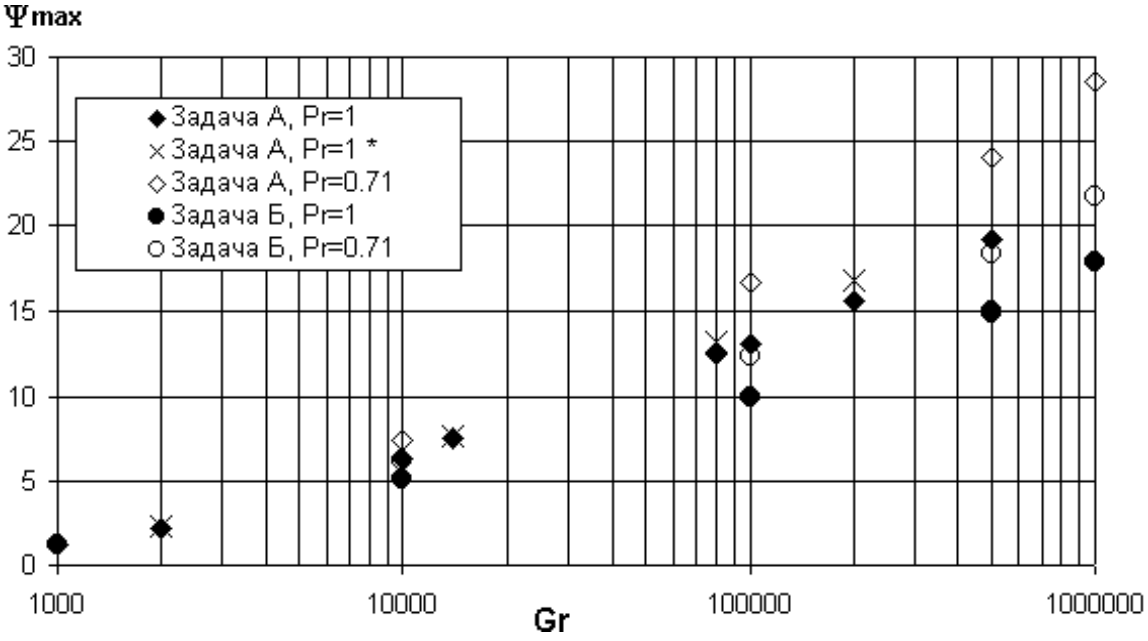
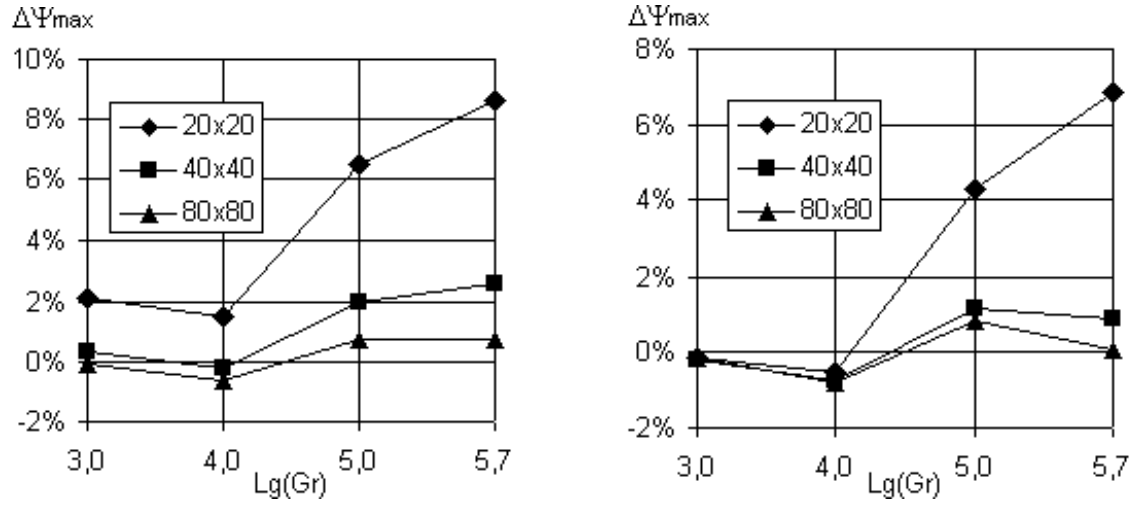
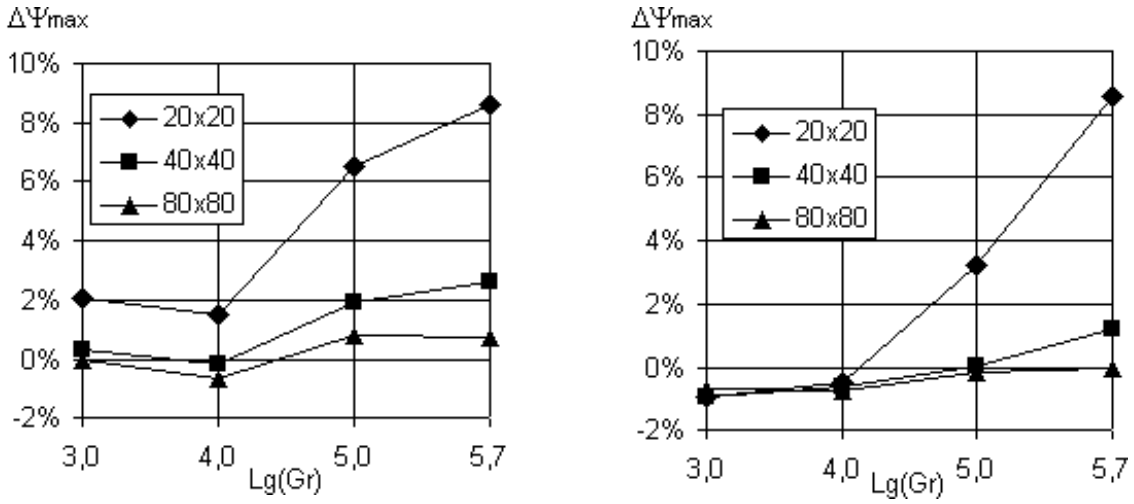


Рис.3.18. Свободная конвекция в квадратной области при подогреве сбоку. Зависимость максимального значения функции тока от чисел Грасгофа и Прандтля. Результаты получены на сетке 160x160 узлов по схеме TVD 3-го порядка ISNAS,
* - данные из работы [99]



а б

Рис.3.19. Задача А. Погрешность в определении максимального значения функции тока ΔΨmax для сеток 20x20, 40x40 и 80x80 по сравнению с решением, полученным на сетке 160x160. Во всех расчетах использовалась схема ISNAS. а - граничные условия первого порядка точности; б - квадратичные условия второго порядка точности



а б

Рис.3.20. Задача Б. Погрешность ΔΨmax для сеток 20x20, 40x40 и 80x80 по сравнению с решением, полученным на сетке 160x160. Схема ISNAS. а - граничные условия первого порядка точности; б - квадратичные условия второго порядка точности

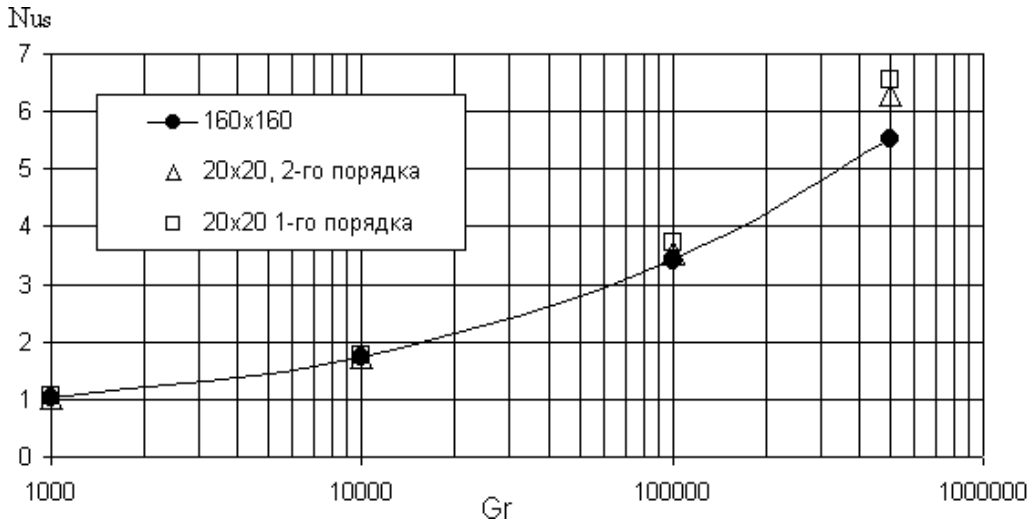


Рис.3.21. Задача А. Зависимость безразмерного среднего теплового потока Nu_s на вертикальной горячей стенке каверны от числа Грасгофа

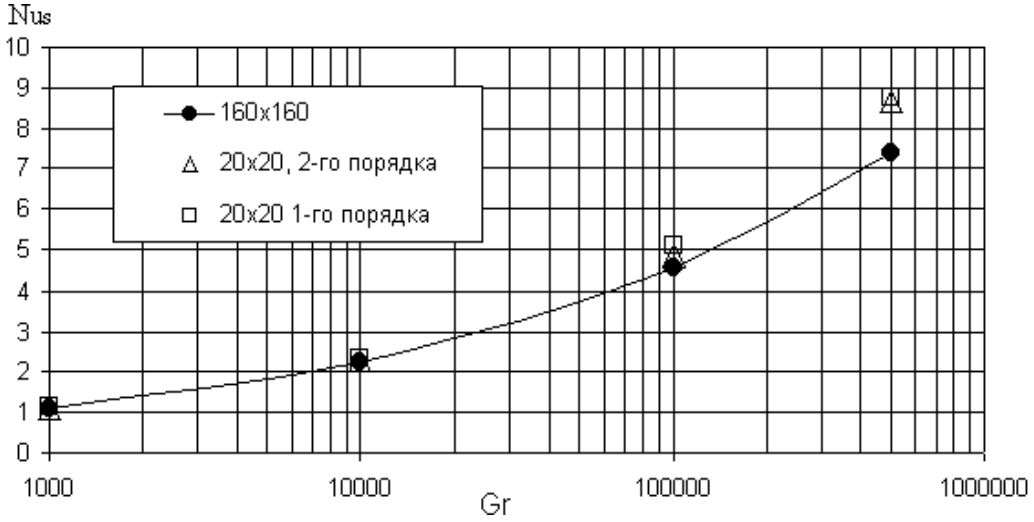


Рис.3.22. Задача Б. Зависимость безразмерного среднего теплового потока Nu_s на вертикальной горячей стенке каверны от числа Грасгофа

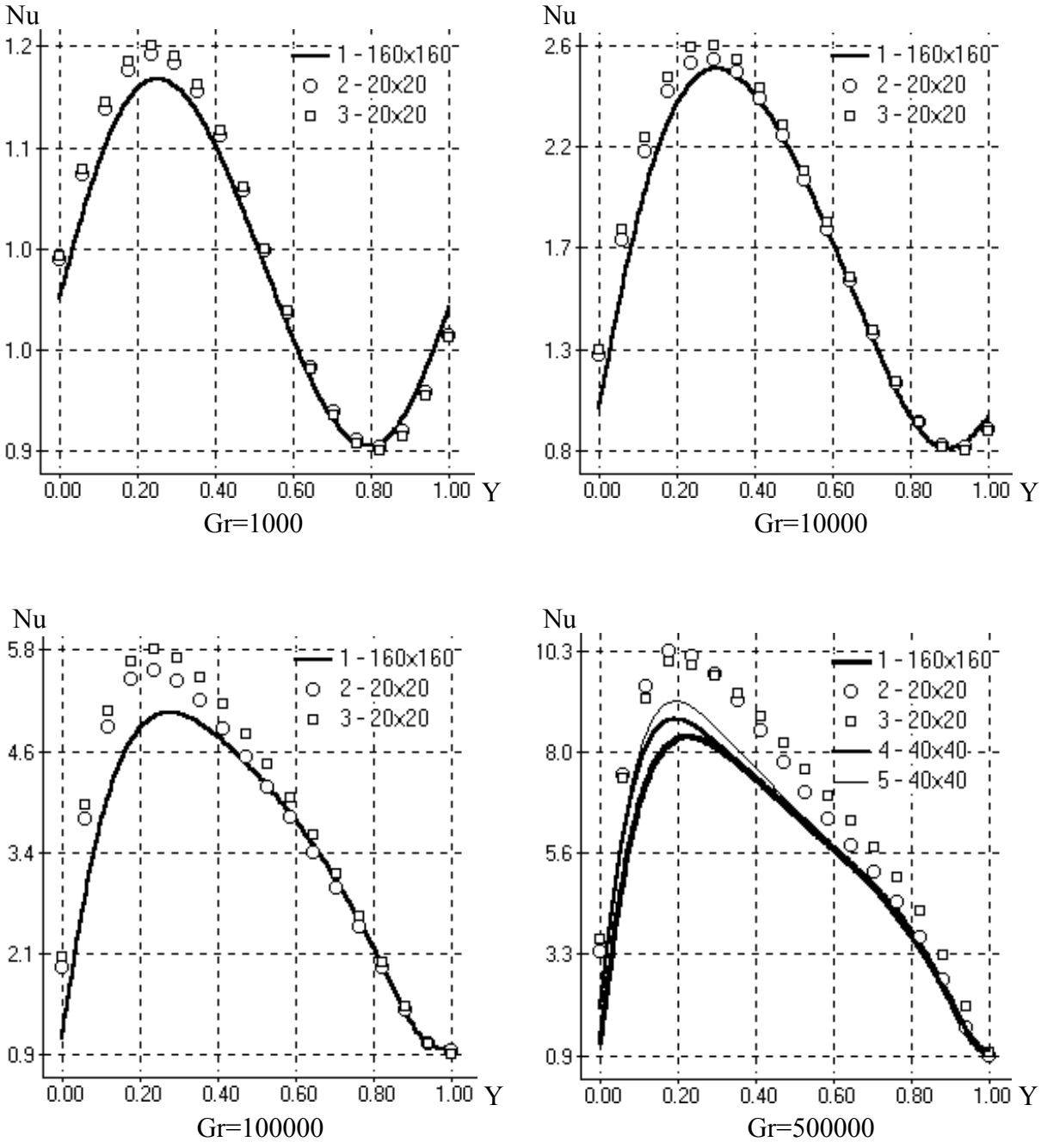


Рис.3.23. Задача А, Pr=1. Распределение числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны. Все результаты получены с помощью схемы ISNAS

1 - Сетка 160x160, граничные условия 2-го порядка точности;
2 - Сетка 20x20, граничные условия 2-го порядка точности;
3 - Сетка 20x20, граничные условия 1-го порядка точности;
4 - Сетка 40x40, граничные условия 2-го порядка точности;
5 - Сетка 40x40, граничные условия 1-го порядка точности

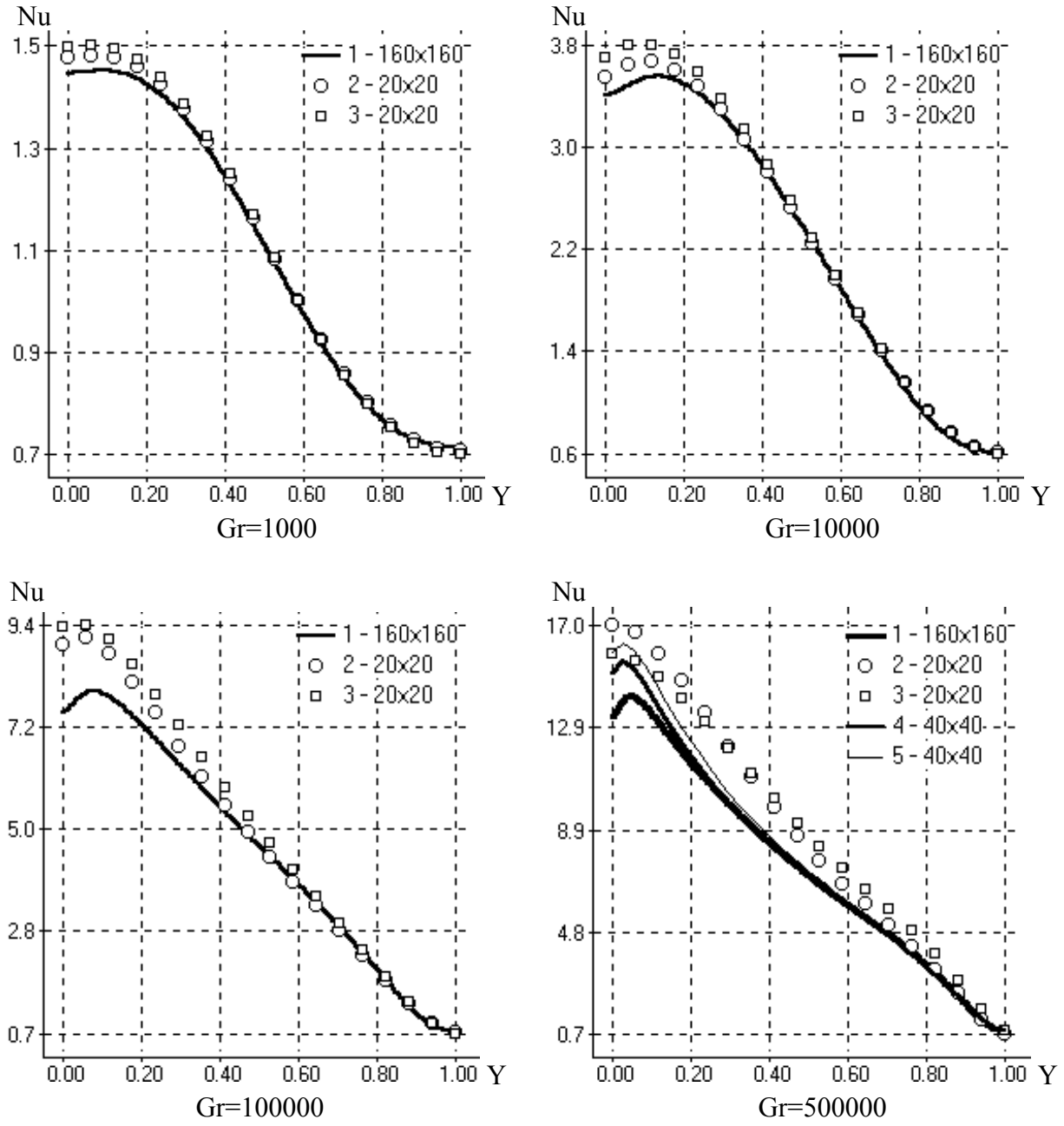


Рис.3.24. Задача Б, Pr=1. Распределение числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны. Все результаты получены с помощью схемы ISNAS

1 - Сетка 160x160, граничные условия 2-го порядка точности;
2 - Сетка 20x20, граничные условия 2-го порядка точности;
3 - Сетка 20x20, граничные условия 1-го порядка точности;
4 - Сетка 40x40, граничные условия 2-го порядка точности;
5 - Сетка 40x40, граничные условия 1-го порядка точности

Для определения влияния типа сетки на этот параметр сравним значения Ψ_{max}, полученные на сетках с одинаковым количеством узлов. В табл.3.2 приведены значения Ψ_{max}, полученные на декартовой сетке и криволинейных сетках (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) размером 20x20, 40x40, 80x80 узлов.

Таблица 3.2.

Зависимость Ψ_{max} от числа Грасгофа и количества узлов для декартовой и криволинейных сеток (задача А)

Сетка		Gr			
		1000	10000	100000	500000
20x20	Криволинейная а	-1,20	-6,55	-15,29	-24,97
	Криволинейная б	-1,23	-6,52	-14,33	-22,12
	Декартова	-1,22	-6,38	-13,56	-20,34
40x40	Криволинейная а	-1,21	-6,41	-13,65	-20,59
	Криволинейная б	-1,22	-6,40	-13,37	-19,71
	Декартова	-1,22	-6,36	-13,15	-19,21
80x80	Криволинейная а	-1,21	-6,37	-13,21	-19,27
	Криволинейная б	-1,22	-6,38	-13,16	-19,56
	Декартова	-1,22	-6,36	-13,11	-19,04

Результаты, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что отличие в определении величины Ψ_{max} на криволинейных сетках и декартовой сетке не превышает 1%-10% за исключением очень грубой криволинейной сетки типа а размером 20x20 узлов при числе Грасгофа $Gr=5\cdot10^5$, где погрешность составила 20%.

На рис.3.26 показана зависимость Nu_S для вертикальной горячей стенки от числа Gr. Номера графиков соответствуют 1 - декартовой сетке, 2 - криволинейной сетке (рис.3.25.а), 3 - "улучшенной" криволинейной сетке (рис.3.25.б). На графиках видно, что кривизна сетки слабо влияет на величину Nu_S.

Рассмотрим вопрос о влиянии кривизны сеточных линий на расчет локальных значений теплового потока на твердой стенке. На рис.3.27 - рис.3.30 приведены распределения локального числа Нуссельта по поверхности горячей стенки.

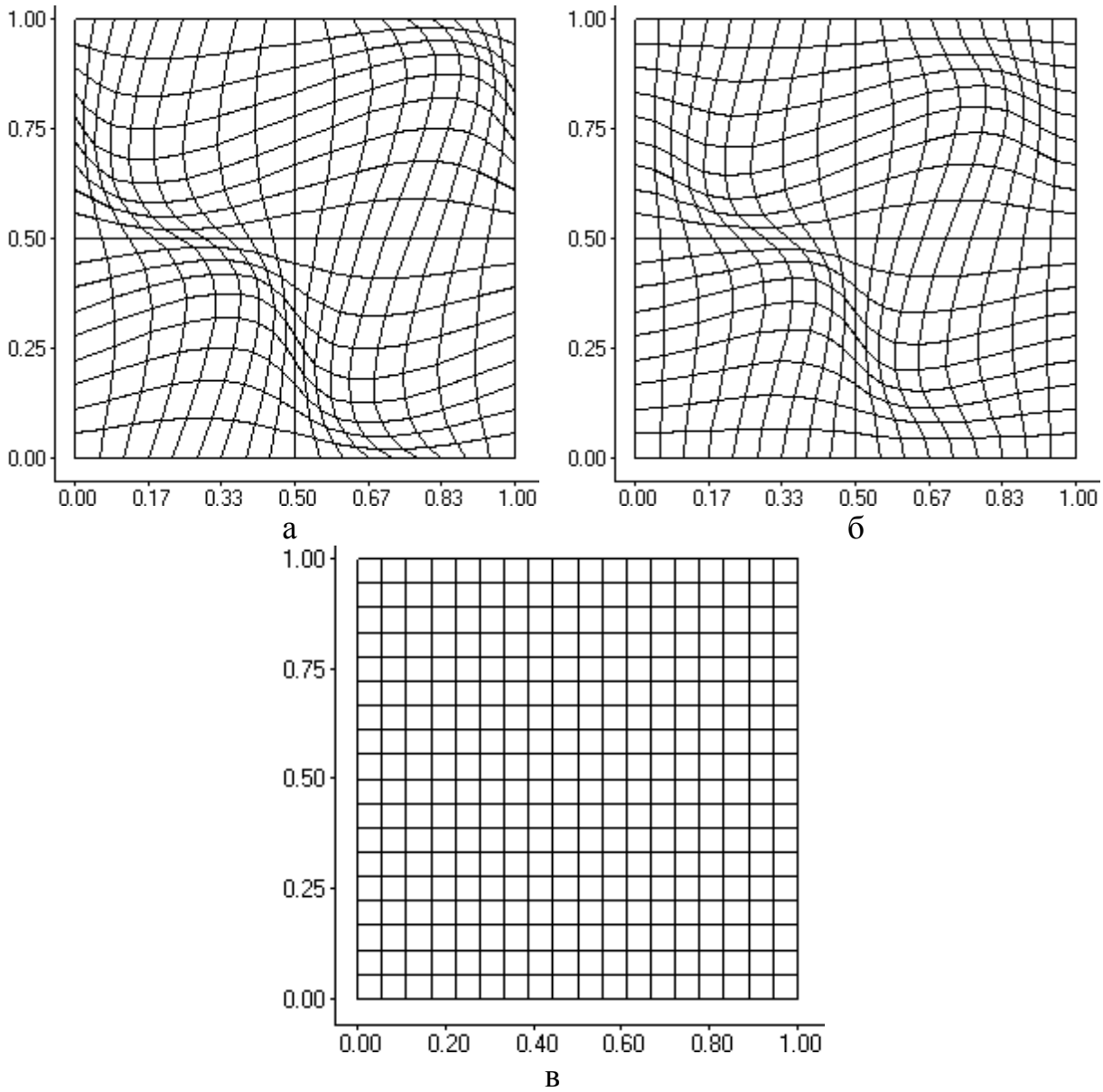


Рис.3.25. Линии сетки 20x20 узлов, а - криволинейная сетка, б – “ улучшенная ” криволинейная сетка, в - равномерная декартовая сетка

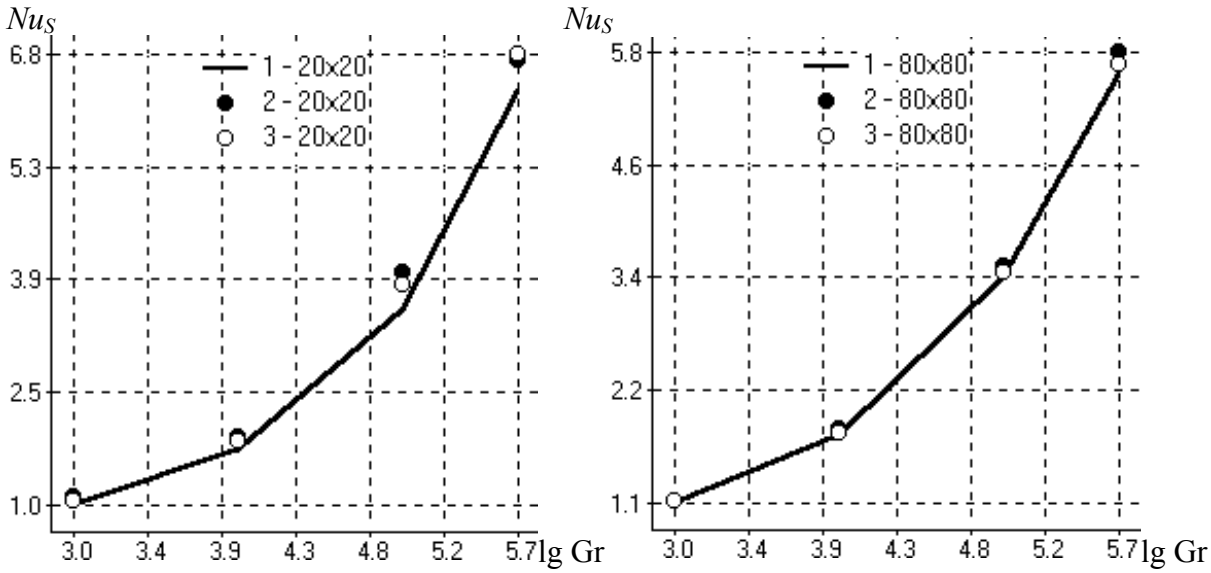
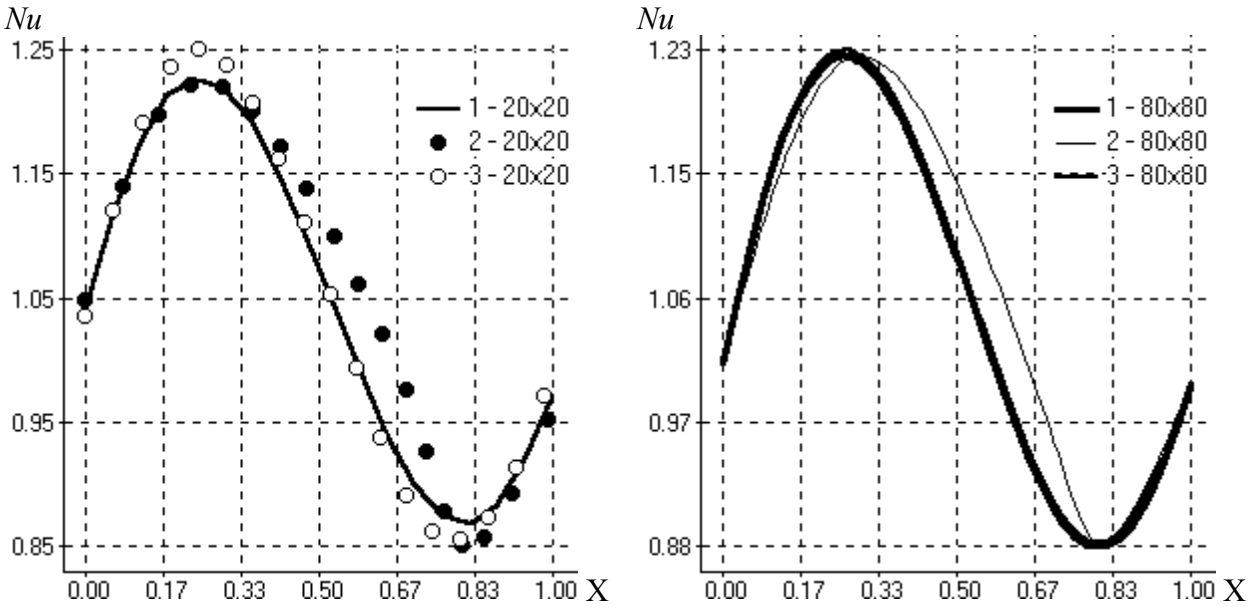
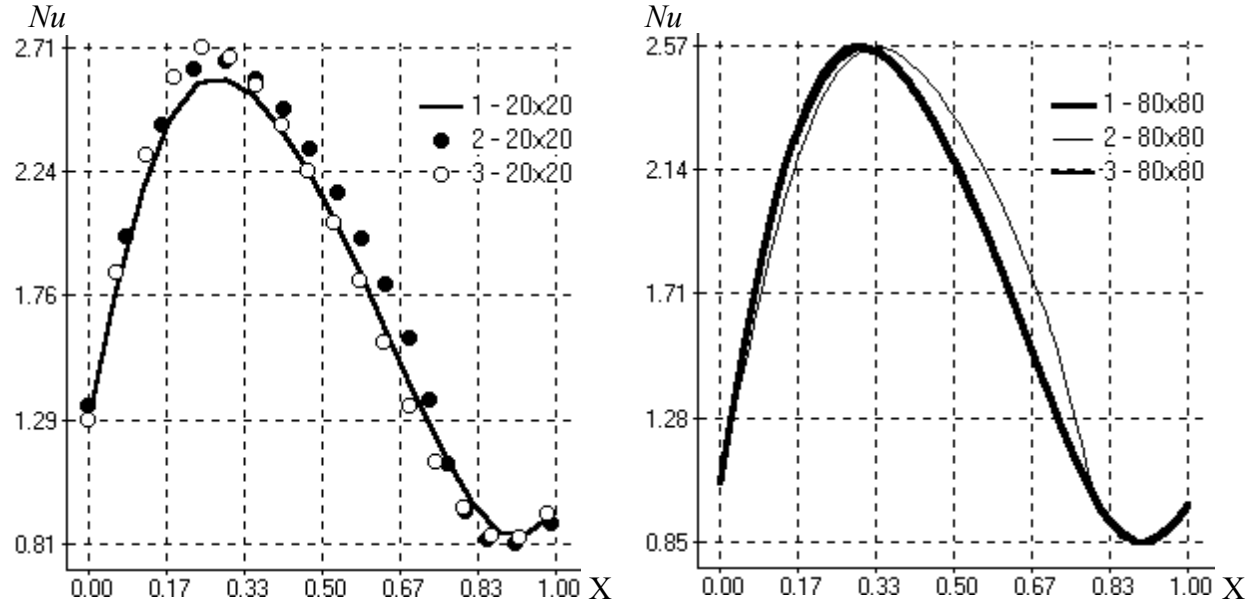


Рис.3.26. Зависимость среднего теплового потока на горячей стенке от числа Gr



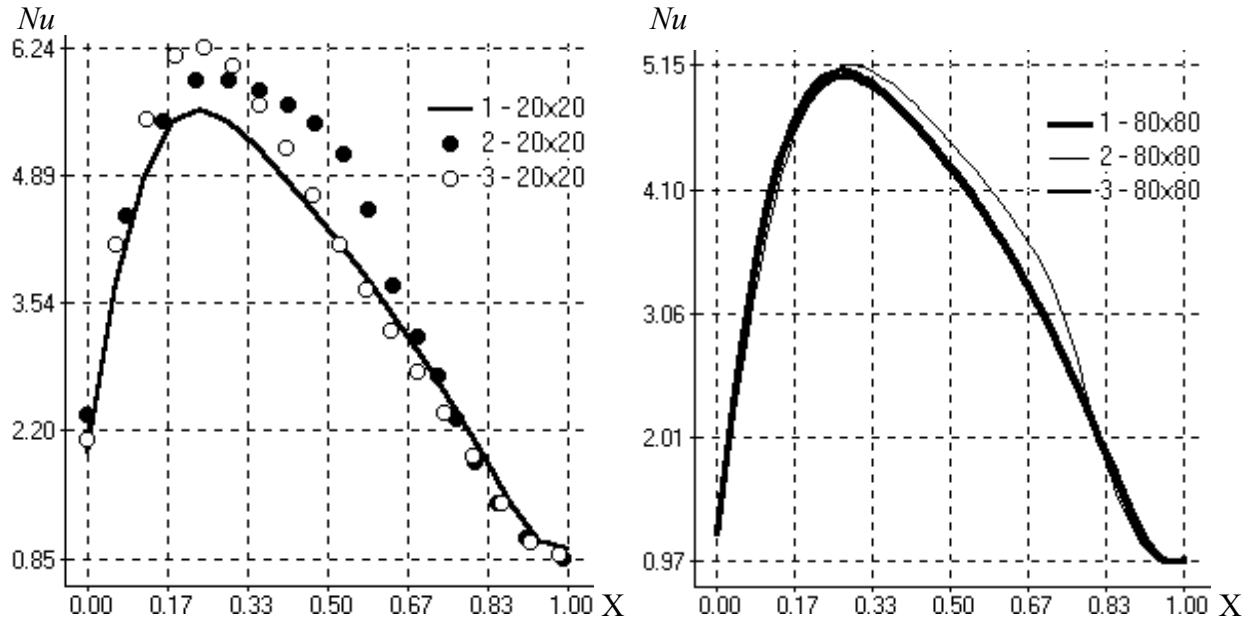
а б

Рис.3.27. Задача А, Pr=1, Gr=1000. Распределение числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны; 1 - декартова сетка, 2 - криволинейная сетка (рис.3.25.а), 3 - криволинейная сетка (рис.3.25.б) “улучшенная”



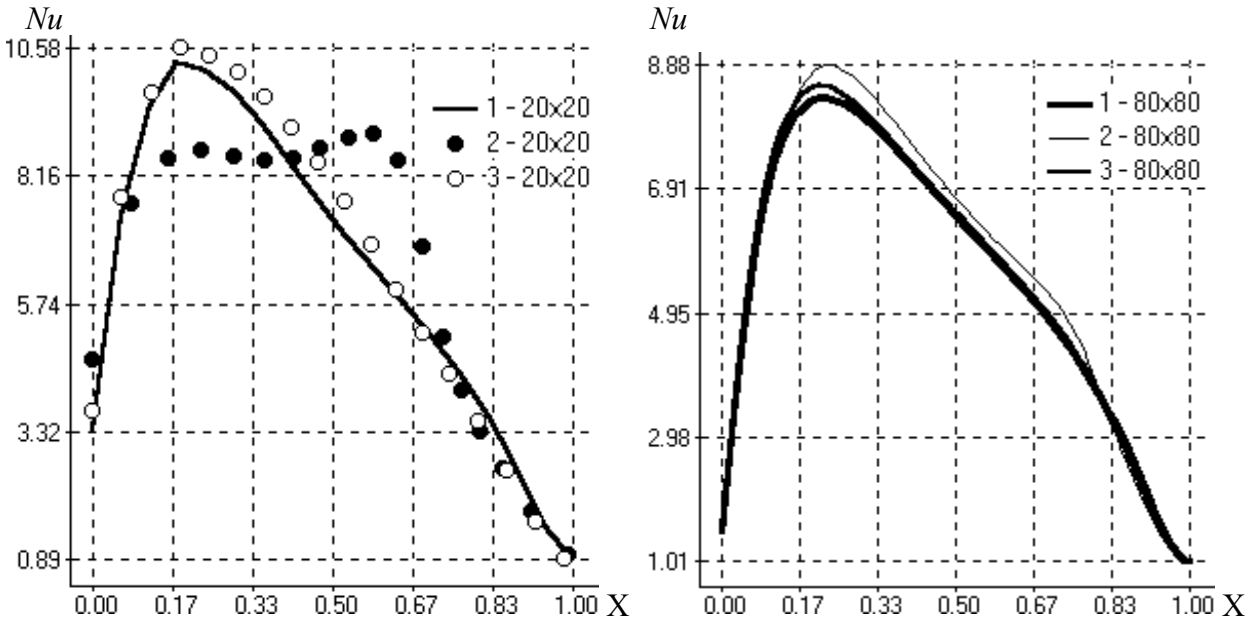
а б

Рис.3.28. Задача А, Pr=1, Gr=10000. Распределение числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны; 1 - декартова сетка, 2 - криволинейная сетка (рис.3.25.а), 3 - криволинейная сетка (рис.3.25.б) “улучшенная”



а б

Рис.3.29. Задача А, Pr=1, Gr=100000. Распределение числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны; 1 - декартова сетка, 2 - криволинейная сетка (рис.3.25.а), 3 - криволинейная сетка (рис.3.25.б) “улучшенная”



а б

Рис.3.30. Задача А, Pr=1, Gr=500000. Распределение числа Нуссельта на вертикальной горячей стенке каверны; 1 - декартова сетка, 2 - криволинейная сетка (рис.3.25.а), 3 - криволинейная сетка (рис.3.25.б) “улучшенная”

На рисунках просматривается довольно сильная зависимость величины *Nu* от кривизны сетки вблизи границы. Особенно отчетливо эта зависимость проявляется при использовании грубой криволинейной сетки (рис.3.25.а) при больших числах Грасгофа. "Улучшение" сетки рис.3.25.б повышает точность расчета распределения *Nu*. На сетке 80x80 узлов результаты, полученные на декартовой и "улучшенной" криволинейной сетке, практически не отличаются.

Таким образом, искривление сетки слабо сказывается на расчете интегральных характеристик течения и теплообмена в свободноконвективных течениях. Расчет локальных характеристик на криволинейных сетках требует крайней осторожности. Следует проводить ортогонализацию или существенное сгущение сетки, особенно вблизи твердых поверхностей, на которых вычисляются тепловые потоки.

3.2. Теплообмен в режиме свободной конвекции в горизонтальных кольцевых каналах

Свободная конвекция в горизонтальных кольцевых каналах между концентрическими или эксцентрическими цилиндрами вызывает повышенный интерес ввиду большой практической важности. Подобные задачи представляют особый интерес при проектировании ядерных реакторов, электронного оборудования, теплоизоляции передающих кабелей, систем аккумулирования тепла с неоднородным нагревом трубопроводов по угловой координате, а также приемников солнечных коллекторов тепла.

Весьма подробный обзор литературы и анализ свободной конвекции и теплообмена в зазоре между горизонтальными цилиндрами привели Кьюэн и Голдстейн [160], [56], [55]. Ими проведены детальные экспериментальные и численные исследования естественноконвективного переноса в кольцеобразных областях и с помощью интерферометра Маха-Цандера установлены распределения температур и найдены местные коэффициенты теплопередачи для воздуха и воды. Число Рэлея, рассчитанное по ширине кольца, менялось при этом от $2{,}11\cdot10^{1}$ до $9{,}76\cdot10^{5}$. Картины конвективных течений для воздуха, а также зависимости возникающих режимов от числа Грасгофа и соотношения диаметров полости рассматривались в работе [77]. Исследование данной задачи, как в ламинарном, так

и в турбулентном режиме с помощью конечно-разностных методов можно найти в работах [78], [123], [108], [87]. Имеется значительное число теоретических и экспериментальных работ по проблемам переноса в эксцентрических цилиндрических кольцеобразных областях. Так, были проведены измерения полных коэффициентов теплопередачи в воздухе для различных значений вертикальной и горизонтальной эксцентричностей внутреннего цилиндра [35]. Также проводились экспериментальные исследование влияния эксцентриситета и числа Рэлея на среднюю и местную теплоотдачу при свободной конвекции [56]. Эти результаты указывают на сильную зависимость местных коэффициентов теплоотдачи от степени эксцентричности поверхностей. Вместе с тем изменение полного коэффициента теплопередачи по сравнению с соответствующим коэффициентом, в случае концентрического расположения при степени эксцентричности $\varepsilon/L \le 2/3$ (где ε - расстояние, на которое смещается внутренний цилиндр от концентрического расположения, и $L = R_0 - R_i$, R_0 – радиус внешнего, а R_i – радиус внутреннего цилиндра) оказывается менее 10%. Смещение внутреннего цилиндра по вертикали вниз приводит к увеличению теплопередачи. Показано [132], что аналогичная задача возникает при анализе процесса плавления среды вокруг нагретого горизонтального цилиндра. В [95] проведено исследование теплоотдачи при наличии инверсии плотности.

Задаче о свободной конвекции между наружным круговым цилиндром и внутренним стержнем некругового сечения уделялось значительно меньше внимания. Эта задача играет важную роль для понимания процесса развития свободноконвективного пограничного слоя за острыми кромками внутреннего квадратного стержня, а также влияния этих кромок на характеристики теплоотдачи. В работе [121] численно и экспериментально анализировалась структура течения около квадратного стержня, расположенного концентрично внутри горизонтального кругового цилиндра при числах Рэлея меньше 10^5. В качестве численной методики использовался метод конечных элементов Галеркина. Экспериментальная проверка полученных решений проводилась посредством измерения температуры и визуализации линий тока. Было показано, что в исследованном диапазоне чисел Рэлея отсутствует отрыв пограничного слоя при обтекании острых кромок.

3.2.1. Свободная температурная конвекция в полости между горизонтальными цилиндрами

Проведем сравнение эффективности методов SIMPLE на совмещенной сетке [48] и SIMPLE и SIMPLER на разнесенной сетке [47] (см. пп.2.3.1, пп.2.3.3). В качестве тестовой задачи возьмем свободную конвекцию в горизонтальных кольцевых каналах между концентрическими и эксцентрическими цилиндрами.

На рис.3.31 приведены линии тока и изотермы, а также экспериментальные [56] и расчетные данные по распределение локального коэффициента эквивалентной проводимости по поверхности внутреннего k_{eqi} и внешнего k_{eq0} цилиндров

$$k_{eqi} = \frac{\partial T}{\partial n}\frac{D_i}{2L}\ln\left(\frac{D_0}{D_i}\right), \tag{3.24}$$

$$k_{eq0} = \frac{\partial T}{\partial n}\frac{D_0}{2L}\ln\left(\frac{D_0}{D_i}\right), \tag{3.25}$$

где $\frac{\partial T}{\partial n}$ - безразмерный тепловой поток, D_i, D_0 - диаметры внутреннего и наружного цилиндров соответственно, $L = (D_0 - D_i)/2$. Результаты приведены для числа Рэлея

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta L^3 (T_0 - T_i)}{\nu a} \tag{3.26}$$

равного $5\cdot10^4$ и при числе Прандтля Pr=0,706, $D_0/D_i = 2{,}6$.

Использование разнесенной сетки предполагает составление и решение системы алгебраических уравнений для каждой компоненты скорости отдельно. Если все компоненты скорости хранятся в одном узле, то разностные уравнения сохранения количества движения для компонент скорости отличаются только правыми частями, что примерно на треть уменьшает время одной итерации. К сожалению, в этом случае становится невозможным применение процедуры SIMPLER. На рис.3.32 сравнивается количество итераций, необходимых для достижения сходимости данной задачи с точностью 10^{-3} для метода SIMPLER на разнесенной сетке и методов SIMPLE на совмещенной и разнесенной сетке. На

рисунке видно, что метод SIMPLER на разнесенной сетке требует примерно в два раза меньше итераций, чем SIMPLE на разнесенной сетке и от 2-х до 20-ти раз меньше, чем SIMPLE на совмещенной сетке. В табл.3.3 приведено время счета данной задачи в секундах для сетки 60x30 узлов.

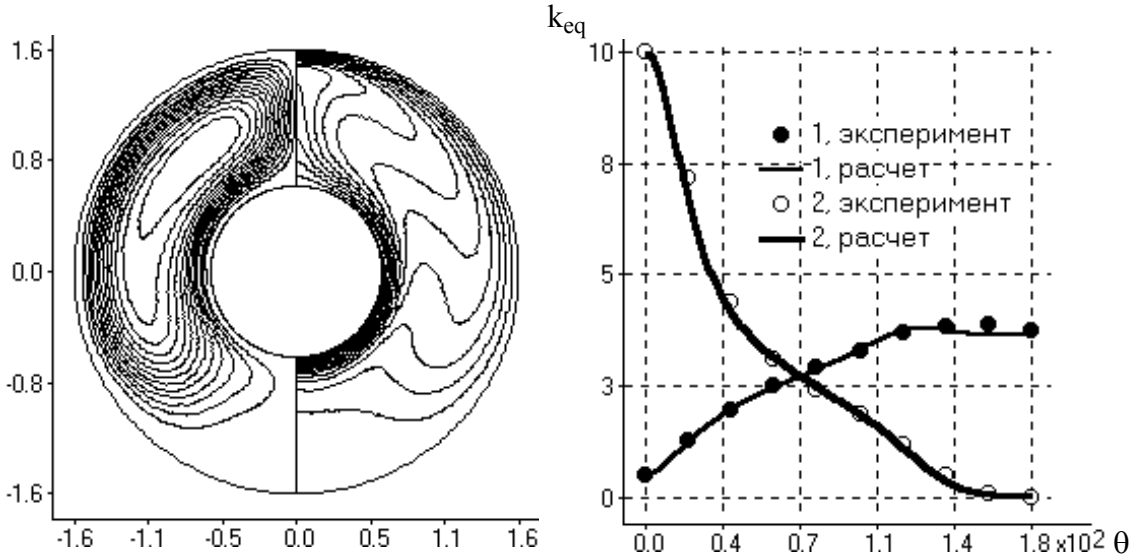
Таблица 3.3

Время счета в секундах.

Gr	SIMPLER разнесенная	SIMPLE разнесенная	SIMPLE совмещенная
1000	32	54	47
5000	40	57	70
10000	42	62	103
50000	66	110	732
100000	86	144	-

Из данных приведенных в таблице следует, что время счета на совмещенной сетке методом SIMPLE может в десять раз превосходить время счета той же задачи с помощью метода SIMPLER на разнесенной сетке. Поэтому, несмотря на то, что на одну итерацию SIMPLER тратится больше времени, метод SIMPLER оказывается более эффективным, чем SIMPLE за счет уменьшения общего количества итераций, особенно при больших числах Грасгофа.

На рис.3.33 и рис.3.34 приведены линии тока, изотермы и распределение локального коэффициента эквивалентной проводимости по поверхности внутреннего и внешнего цилиндров для степени эксцентричности ε/L=–0,623 и ε/L=0,652 соответственно. В работе [87] численно получено решение данной задачи в переменных завихренность-функция тока с использованием ортогональной биполярной системы координат. Там же проведен детальный анализ зависимости локального коэффициента теплоотдачи k_{eq} от степени эксцентриситета.



а б

Рис.3.31. Свободная конвекция между концентричными цилиндрами: а - линии тока и изотермы, б - распределение локальных коэффициентов эквивалентной проводимости k_{eq} в зависимости от θ - угла отсчитываемого от вертикали сверху вниз, 1- на внутреннем цилиндре, 2 – на внешнем цилиндре

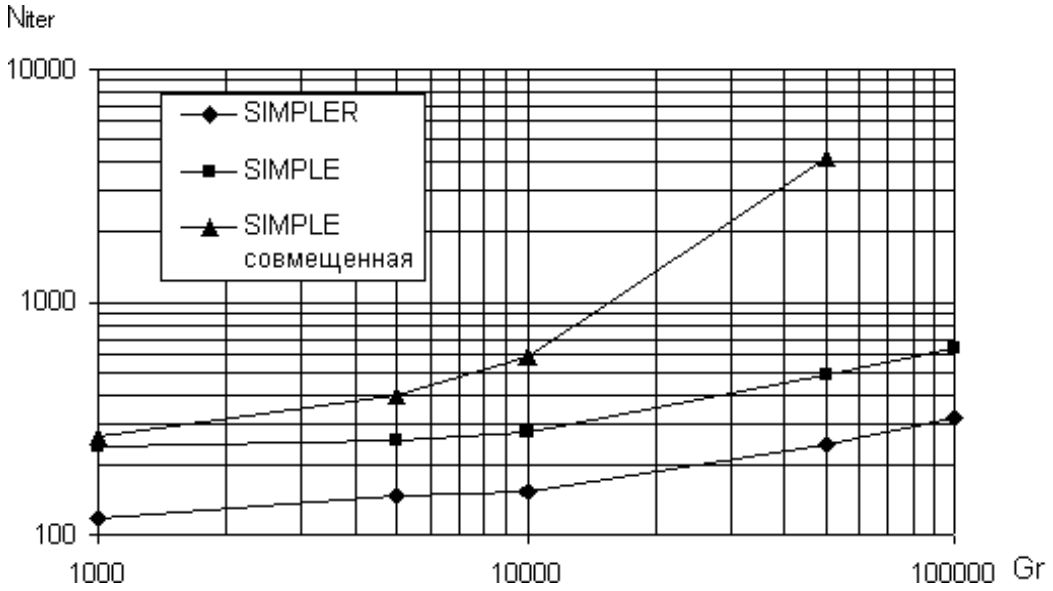


Рис.3.32. Количество итераций Niter, необходимых для уменьшения максимальной относительной погрешности между решениями на двух последовательных итерациях до 10^{-3} в зависимости от числа Gr для методов: SIMPLER разнесенная сетка, SIMPLE разнесенная сетка и SIMPLE совмещенная сетка

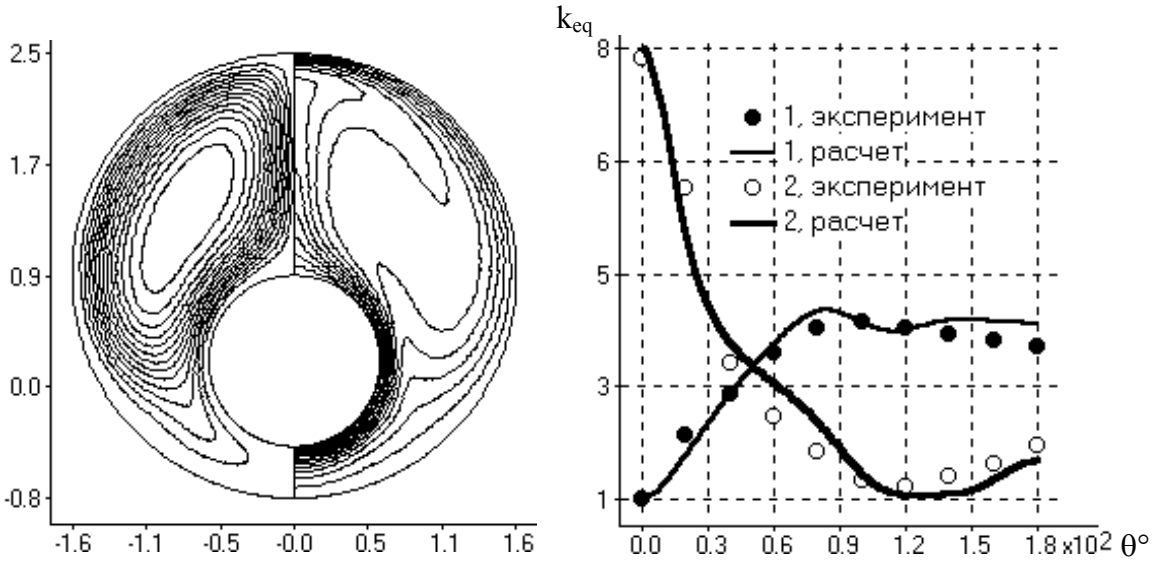


Рис.3.33. Эксцентрическое расположение цилиндров ε/L= –0,623 : а - линии тока и изотермы, б - распределение локальных коэффициентов эквивалентной проводимости k_{eq} в зависимости от θ - угла, отсчитываемого от вертикали сверху вниз, 1- на внутреннем цилиндре,
2 – на внешнем цилиндре

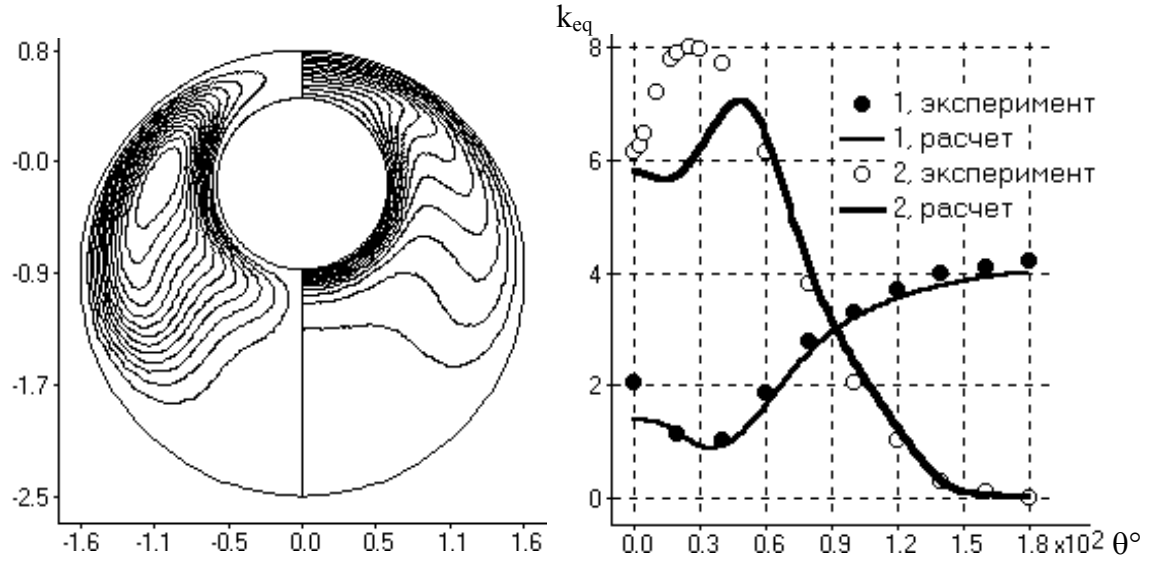


Рис.3.34. Эксцентрическое расположение цилиндров ε/L = 0,652 : а - линии тока и изотермы, б - распределение локальных коэффициентов эквивалентной проводимости k_{eq} в зависимости от θ - угла отсчитываемого от вертикали, 1- на внутреннем цилиндре,
2 – на внешнем цилиндре

Рассчитанные в настоящей работе значения k_{eq} практически совпадают с результатами, полученными в [87]. Наибольшее отличие рассчитанного в настоящей работе k_{eq} и измеренного [56] значения наблюдается при верхнем положении цилиндра (рис.3.34) на верхней поверхности наружного цилиндра. Аналогичный результат был получен в [87] при использовании совершенно другого метода расчета, поэтому можно предположить, что в этом случае не выполняется предположение о двумерном характере течения в верхней части области. Поскольку в эксперименте измерялись только температурные поля, то вопрос об интенсивности влияния концевых эффектов на решение данной задачи остается открытым. В целом сравнение с результатами измерений [56] (см. рис.3.31, рис.3.33, рис.3.34) показывает, что численное решение удовлетворительно соответствует экспериментальным данным.

3.2.2. Задача о свободной конвекции в горизонтальной цилиндрической полости с внутренним, концентрично расположенным стержнем

Свободная конвекция около вертикальных, горизонтальных и наклонных пластин часто становится предметом обсуждения в силу ее фундаментального значения [99], [25]. Можно провести аналогию и с рассматриваемой задачей, где перечисленные выше конфигурации воспроизводятся поверхностями внутреннего стержня при различной ориентации относительно вектора силы тяжести. Однако в данной задаче существует взаимодействие между соседними гранями, что может привести к возникновению новых эффектов. Кроме того, данная задача имеет интерес для сравнительной переоценки рабочих характеристик обычного кольцевого зазора между круговыми цилиндрами [121]. Подробное численное и экспериментальное исследование свободной конвекции вокруг горизонтального квадратного стержня, помещенного в трубу, проведено в работе [121] для диапазона чисел Рэлея $10^3 - 10^5$.

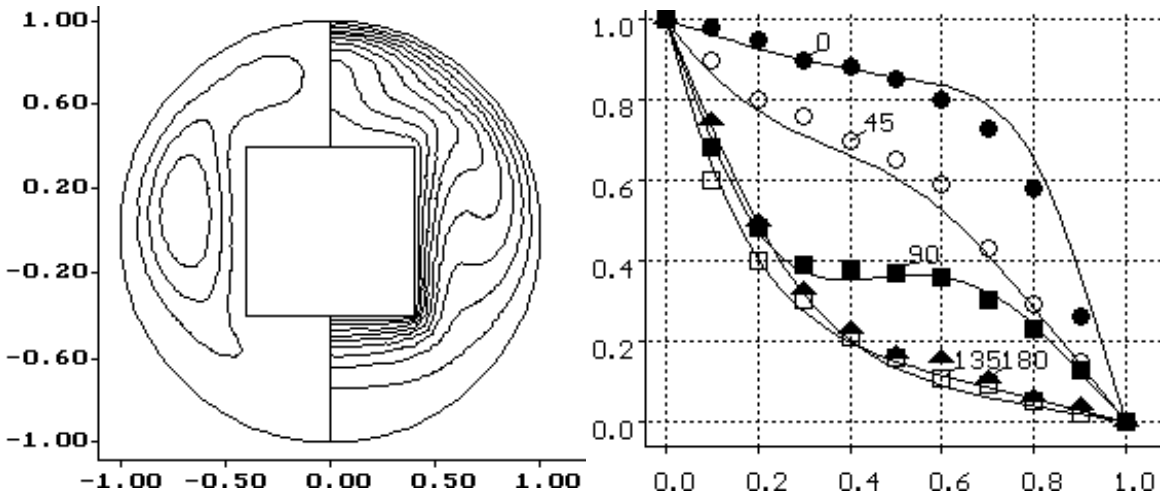
Рассмотрим вопрос о развитии структуры свободной конвекции при числах Рэлея $10^3 - 10^6$ [51]. Целью работы является подтвердить работоспособность разработанной методики для задач со свободной конвекцией в произвольных областях, а также определить характерные числа Рэлея, при которых происходит изменение структуры течения и распределения температуры в полости.

Из всех возможных положений внутреннего стержня выберем два [121]: положение 1 - грани стержня расположены строго горизонтально и вертикально рис.3.35; положение 2 - грани стержня расположены под углом 45° к горизонту рис.3.36. Рассмотрим стержень, с отношением длинны грани к диаметру цилиндра A/D=0,4. Стержень и цилиндр имеют постоянную температуру, причем температура стержня больше. Число Прандтля полагалось равным 0,708 [121]. Предварительные расчеты показали, что разница между решениями полученными на сетках 62x30 и 120x60 не превышает 3 %, поэтому все результаты были получены на сетке 62x30. На рис.3.35.а, б и рис.3.36.а, б приведено сравнение рассчитанного распределения безразмерной температуры (сплошные линии) с экспериментальными данными [121] (точки). Температура дана в зависимости от безразмерной координаты полости в радиальном сечении для углов наклона сечения 0°, 45°, 90°, 135° и 180° (угол отсчитывается от вертикали направленной вверх).

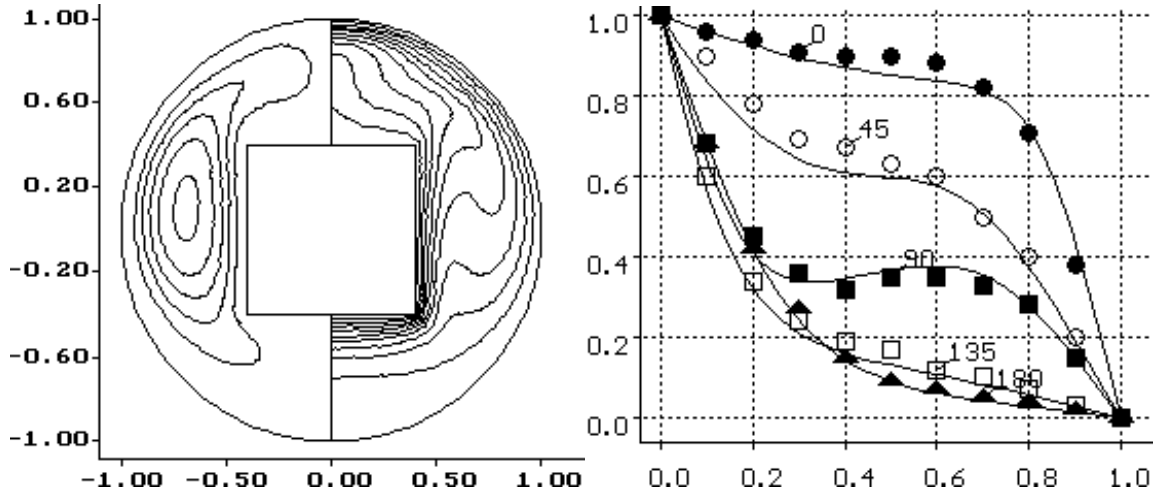
На рис.3.35.в отчетливо видно, что при числе Рэлея $5\cdot10^5$ поток горячей жидкости, движущийся вдоль вертикальной стенки, отрывается от поверхности стержня в острой кромке. Расчеты показали, что срыв потока возникает при $Ra=2{,}5\cdot10^5$, при этом образуется новая циркуляционная зона, интенсивность которой быстро растет с увеличением числа Рэлея. При $Ra=10^6$ интенсивность вторичной зоны циркуляции в полтора раза превосходит интенсивность зоны расположенной возле вертикальной стенки стержня. Течение во вторичной зоне циркуляции направлено, таким образом, что максимальные градиенты температуры достигаются в центре верхней горизонтальной грани стержня и в точке расположенной под углом примерно 45° на поверхности цилиндра.

На рис.3.36.в видно, что для положения 2 с увеличением числа Рэлея в структуре течения не происходит кардинальных изменений, по крайней мере, при $Ra<5\cdot10^5$. Максимальные градиенты температур достигаются на нижней наклонной грани стержня и в верхней части цилиндра.

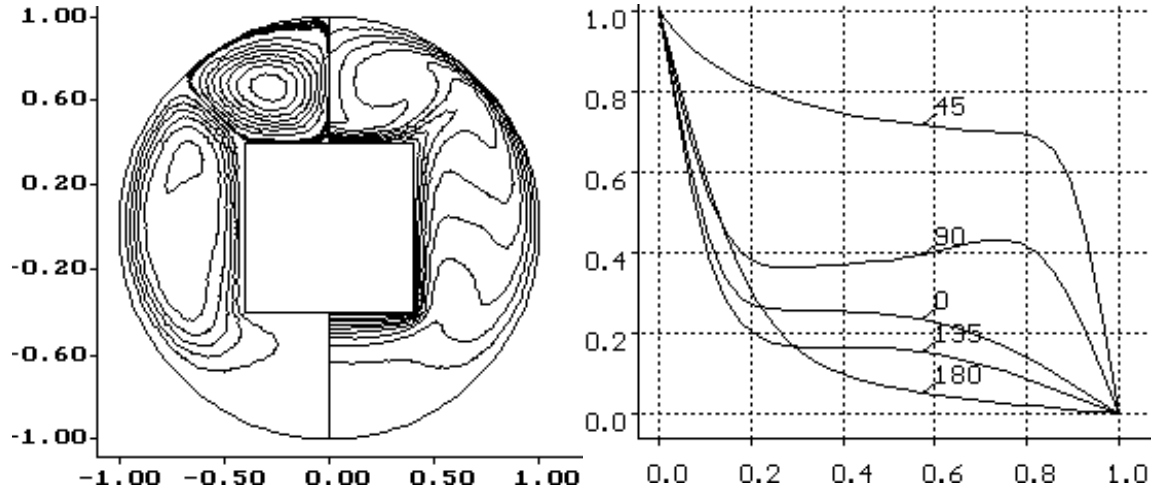
Рассмотрим теперь случай когда отношение длинны грани стержня к диаметру цилиндра A/D=0,2 (см. рис.3.37 и рис.3.38).



а

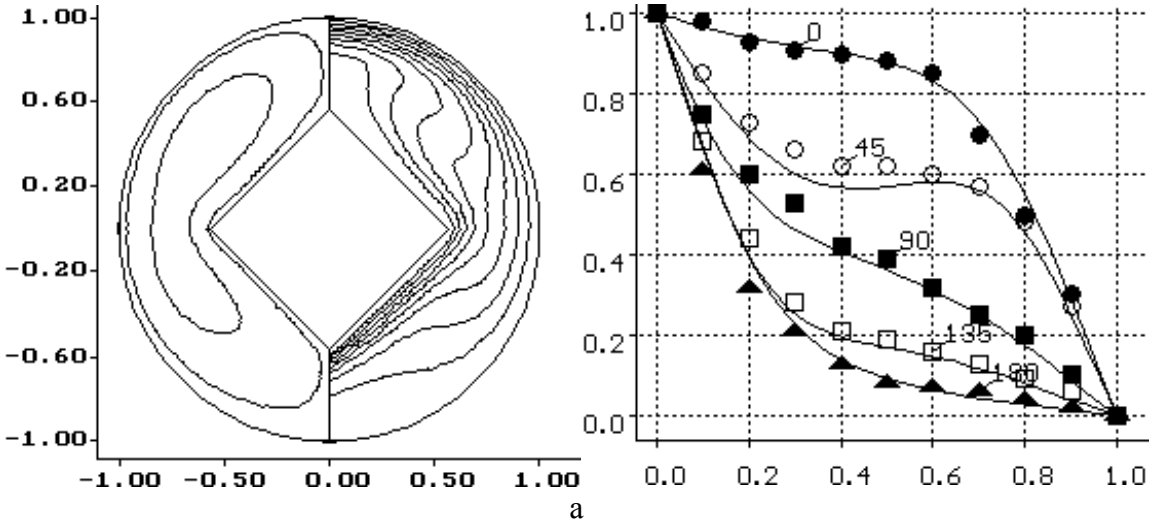


б

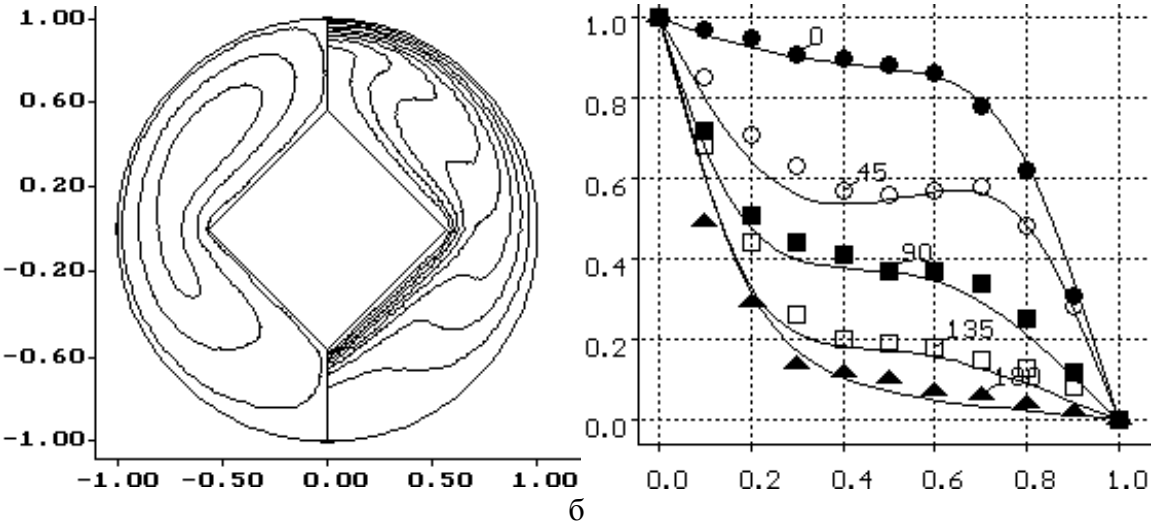


в

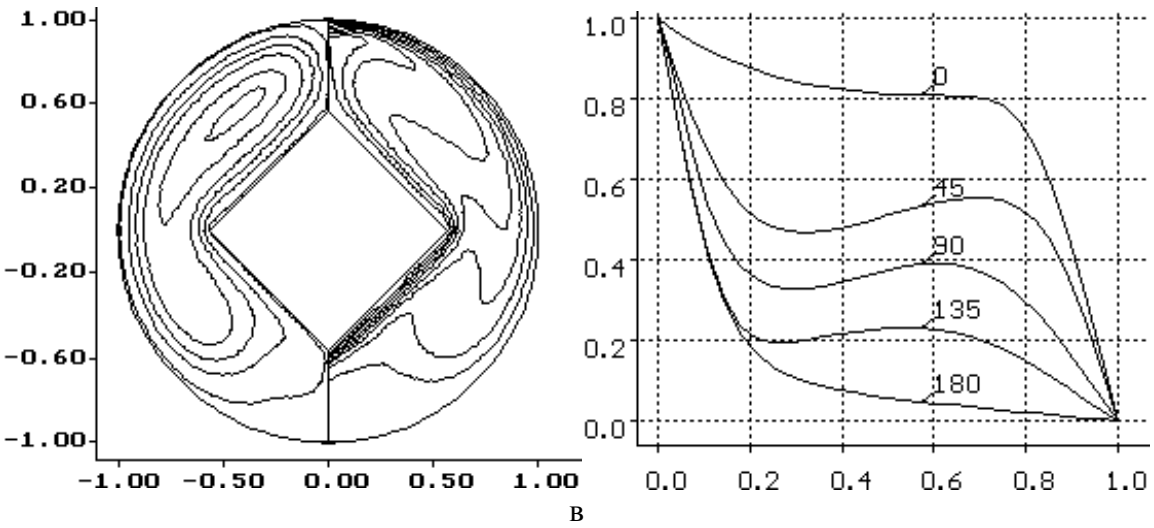
Рис.3.35. Линии тока, изотермы и распределение температуры по радиусу для чисел Рэлея
а – $Ra=5\cdot10^4$; б – $Ra=10^5$; в – $Ra=5\cdot10^5$



а



б



в

Рис.3.36. Линии тока, изотермы и распределение температуры по радиусу для чисел Рэлея
а – $Ra=5\ 10^4$; б – $Ra=10^5$; в – $Ra=5\ 10^5$

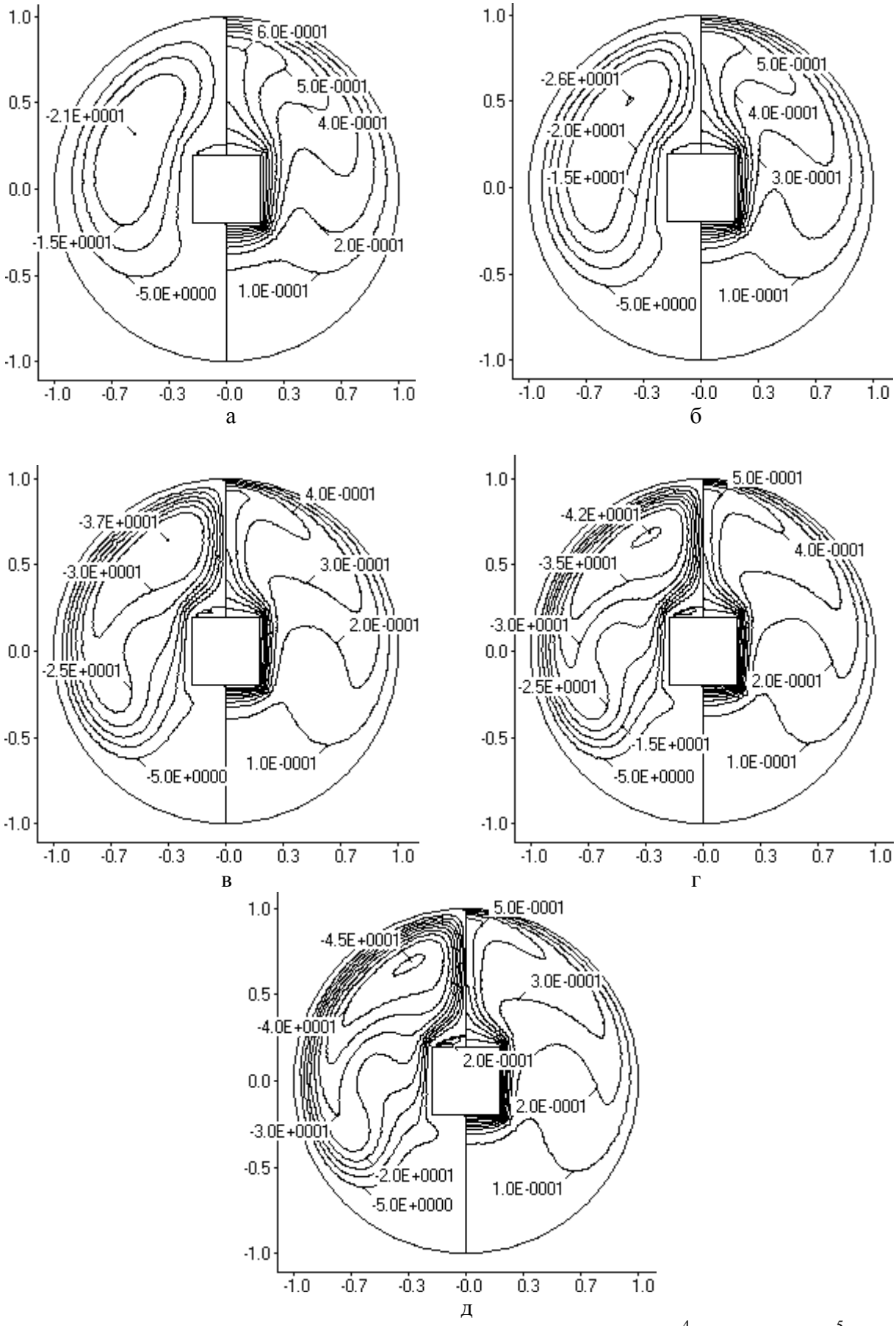


Рис.3.37. Линии тока и изотермы для чисел Рэлея а – $Ra=5{,}2\cdot10^4$; б – $Ra=1{,}1\cdot10^5$; в – $Ra=3{,}5\cdot10^5$, г – $Ra=5{,}7\cdot10^5$; д – $Ra=7\cdot10^5$

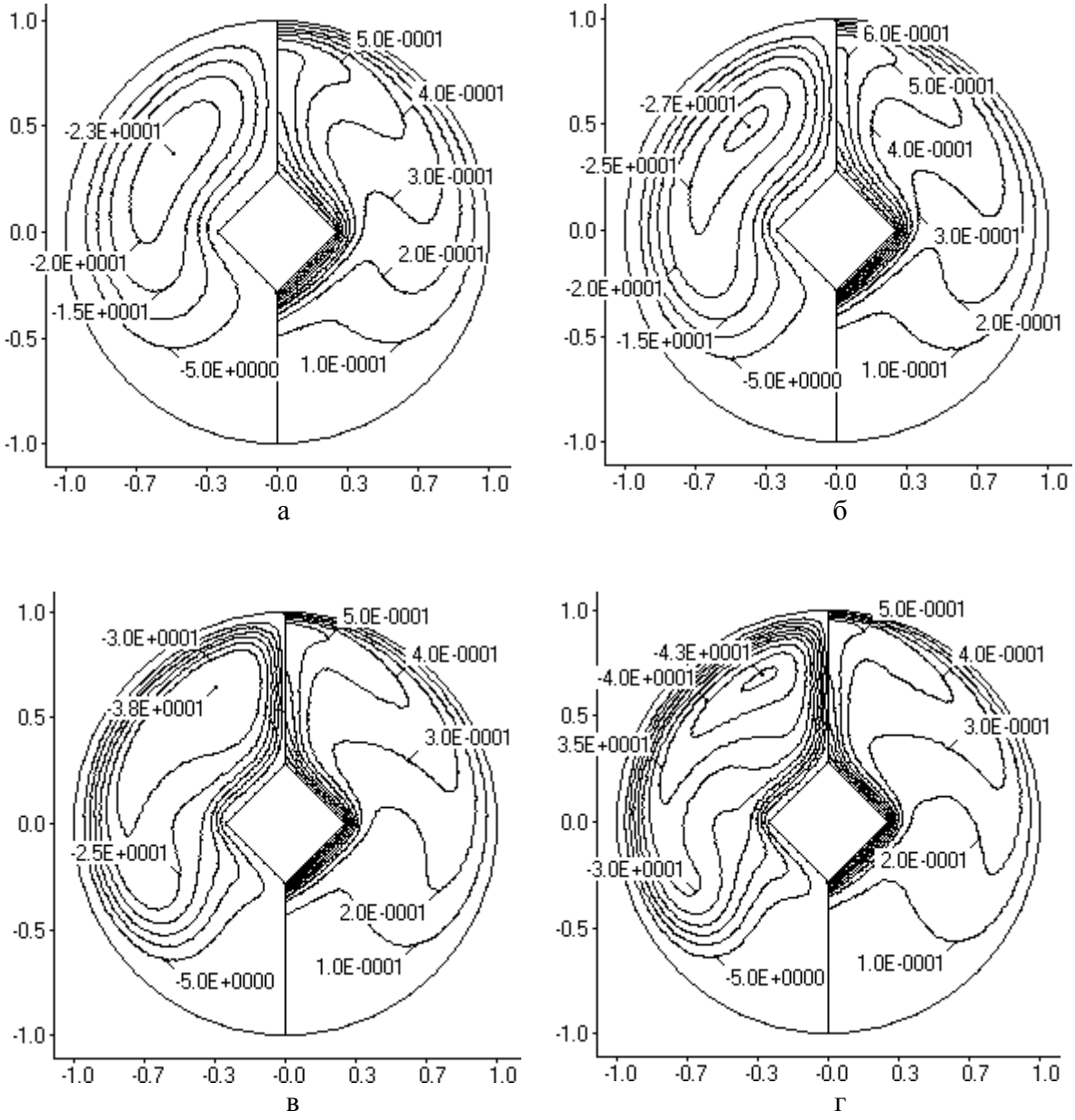


Рис.3.38. Линии тока и изотермы для чисел Рэлея а – $Ra=6\cdot10^4$; б – $Ra=1{,}1\cdot10^5$; в – $Ra=3{,}5\cdot10^5$, г – $Ra=5{,}7\cdot10^5$

В отличие от предыдущей геометрии, где течение больше напоминает движение жидкости в стесненном кольцевом канале, структура течения более напоминает свободную конвекцию вокруг квадратного стержня в безграничной жидкости. Из сравнения рис.3.37 и рис.3.38 следует, что можно выделить макро течение, параметры которого слабо зависят от ориентации стержня.

На рис.3.37 видно, что за верхней горизонтальной гранью стержня образуется небольшая изотермическая зона циркуляции. При положении стержня ребром вниз рис.3.38 острые кромки стержня обтекаются плавно без образования отрывных зон.

3.3. Выводы.

1. Проведено сравнение TVD схем – MinMod, ISNAS и схемы QUIC на задаче о развитии рециркуляционного течения в квадратной каверне. Показано, что схемы TVD обладают большим показателем эффективности, особенно при увеличении числа Рейнольдса.
2. На задаче о развитии свободной конвекции в квадратной области при подогреве сбоку исследовано влияние порядка аппроксимации граничных условий на точность расчета параметров течения и теплообмена. Также показана существенная зависимость локальных значений теплового потока от кривизны сеточных линий.
3. Проведено сравнение эффективности SIMPLE методов на разнесенной и совмещенной криволинейной сетке для задачи о свободноконвективном теплообмене в горизонтальной полости между соосно расположенными цилиндрами. Показаны преимущества метода SIMPLER на разнесенной сетке.
4. Проведено сравнение численного решения задачи о свободной конвекции в горизонтальных кольцевых каналах между концентрическими и эксцентрическими цилиндрами с расчетными и экспериментальными данными других авторов.
5. Получено удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных о структуре свободной конвекции в полости между цилиндром и квадратным стержнем при числах $Ra=5\cdot10^4 - 10^5$. Для положения стержня гранью вниз установлено значение $Ra^*=2{,}5\cdot10^5$, при котом начинается срыв

потока с верхней острой кромки с образованием второй циркуляционной зоны. С увеличением числа Рэлея интенсивность вторичной циркуляционной зоны растет и при $Ra=10^6$ в полтора раза превосходит интенсивность зоны расположенной возле вертикальной стенки, что значительно изменяет распределение тепловых потоков в полости. Показано, что для положения стержня ребром вниз структура течения остается постоянной, по крайней мере, при $Ra<5\cdot10^5$.

6. Для отношения длинны грани стержня к диаметру цилиндра A/D=0,2 картины течения напоминают свободную конвекцию вокруг квадратного стержня в безграничной жидкости, при этом ориентация стержня относительно вектора силы тяжести слабо влияет на параметры макро течения.

РАЗДЕЛ 4.
Особенности численного моделирования нестационарных отрывных течений

Описание механизма нестационарного срыва потока и зарождения турбулентного пограничного слоя является актуальной задачей для многих практически важных приложений. В частности изменение аэродинамических характеристик профилей при изменениях угла атаки [122], [88], [116], [159], и динамические нагрузки на строительные конструкции под действием ветра [109] являются в значительной мере следствием нестационарного срыва потока. В качестве модельной задачи для данного класса течений часто используется развитие нестационарного пограничного слоя на поверхности цилиндра [180], [142], [138], [184], [115]. В настоящей работе основное внимание отводится исследованию причин и характера развития неустойчивости данного течения.

4.1. Методики расчета стационарных и нестационарных задач.

4.1.1. Аппроксимация по времени и счет на установление.

Технологии, использующие процессы тепломассообмена в несжимаемой жидкости, можно условно разделить на две группы. В первой группе все процессы протекают стационарно, во второй – зависят от времени. Для получения решения стационарной задачи часто используется счет на установление. В этом случае дискретные аналоги законов сохранения записываются в виде (2.22), а стационарное решение поучается при $t \to \infty$. Величина шага по времени определяется из требования устойчивости решения. Обычно источником вычислительной неустойчивости является достаточно малая область с большими градиентами искомых функций. Во всей остальной расчетной области устойчивое решение может быть получено с гораздо большим шагом по времени. Тем не мене, при использовании аппроксимации (2.22) время во всех контрольных объемах течет одинаково, с минимальным шагом.

Повысить скорость сходимости решения стационарной задачи можно, используя тот факт, что корректно поставленная задача имеет единственное

решение, которое не зависит от начального приближения и пути, по которому оно получено. Тогда в каждом контрольном объеме можно использовать аппроксимацию (2.22) где шаги по времени для каждого объема могут быть различными, а их величина определяется из условия устойчивости. Поскольку для несжимаемой жидкости не существует таких явных критериев устойчивости, как критерий Куранта-Фридрихса-Леви [143] для сжимаемых течений, то можно использовать более простой подход. В частности, воспользовавшись свойством стационарного решения $\Phi_0 = \Phi_0^{n-1}$, перепишем (2.22) в виде

$$A_0(1+R)\Phi_0 = -\sum_k A_k \Phi_k + S_\Phi \Delta W + S'_\Phi + R\, A_0 \Phi_0^{n-1}, \tag{4.1}$$

где

$$A_0 = -\sum_k A_k \ . \tag{4.2}$$

Выражение (4.1) с одной стороны представляет собой метод нижней релаксации с параметром R для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, с другой стороны его можно рассматривать как аппроксимацию нестационарного закона сохранения, с переменным шагом по времени для каждого контрольного объема

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta W}{A_0 R}. \tag{4.3}$$

В настоящей работе решение всех стационарных задач было получено с помощью итерационной схемы (4.1), которая позволяет увеличить скорость сходимости и уменьшить суммарное время счета в полтора – два раза в зависимости от конкретной постановки задачи.

При расчете нестационарных задач использовалась аппроксимация (2.22) первого порядка точности по времени. Поскольку система уравнений (2.22) нелинейная (коэффициенты A_k зависят от Ф), то для повышения точности, а также для того, чтобы решение на каждом временном шаге удовлетворяло уравнению

сохранения массы переход с одного шага по времени на другой осуществлялся после нескольких итераций по неявной схеме

$$\Phi''_0 A_0(\Phi') = -\sum_k \Phi''_k A_k(\Phi') + S_\Phi(\Phi')\Delta W + S'_\Phi(\Phi') + \frac{\rho\Delta W}{\Delta t}\Phi_0^{n-1}, \qquad (4.4)$$

где Φ′, Φ″ - решение, полученное на предыдущей и текущей итерации соответственно.

4.1.2. Развитие нестационарного отрыва потока при обтекании цилиндра.

В качестве примера применения разработанного метода для расчета нестационарной задачи с неустойчивостью, рассмотрим развитие отрыва потока на поверхности кругового цилиндра [180], [142], [138], [184], [115], [11], [149], [181], [165], [150], [10], [159], [33], [176], [177], [88], [171], [122]. Исследование нестационарного пограничного слоя и отрыва потока представляет интерес для таких задач как зарождение отрыва и турбулентности, обтекание управляющих элементов летательных аппаратов, а также для технологий, использующих нестационарные процессы тепломассообмена.

Для расчета нестационарного обтекания цилиндра, внезапно приведенного в движение при больших числах Рейнольдса, часто используется приближение пограничного слоя [180], [142], [138], [184], [115] и следующая постановка задачи. Задано потенциальное внешнее обтекание цилиндра, а в начальный момент времени ставятся условия прилипания на поверхности цилиндра. Более близка к реальности физическая постановка задачи, в которой цилиндр разгоняется из состояния покоя с конечным ускорением. Для оценки влияния этих постановок задачи на дальнейшее развитие течения была проведена серия расчетов. Сравнение результатов, полученных в рамках двух постановок, показало, при использовании в качестве начальных условий потенциального течения, максимальное значение коэффициента трения на начальном этапе получается на 3-8% больше, чем при ускорении из состояния покоя. Поля давления в обоих случаях практически не отличаются. При дальнейшем развитии течение слабо зависит от начального приближения.

Поскольку одной из целей настоящей работы является определение пределов применимости приближения пограничного слоя, будем рассматривать постановку с начальным приближением в виде потенциального течения, использованную в работе [115], для решения задачи о нестационарном обтекании цилиндра в рамках приближения пограничного слоя.

Итак, рассмотрим нестационарное обтекание кругового цилиндра радиуса R без вращения. Пусть в начальный момент времени существует потенциальное течение. В полярной системе координат (r, θ) компоненты вектора скорости будут иметь вид

$$V_r = \cos\theta\left(1-\left(\frac{R}{r}\right)^2\right), \tag{4.5}$$

$$V_\theta = \sin\theta\left(1+\left(\frac{R}{r}\right)^2\right). \tag{4.6}$$

В начальный момент времени на поверхности цилиндра ставится условие прилипания

$$\mathbf{V}\big|_{r=R} = 0, \tag{4.7}$$

что становится причиной формирования пограничного слоя, а затем и отрыва потока.

На “бесконечности” при $0<\theta<\pi/2$ (где θ отсчитывается от лобовой точки) задается потенциальное течение (4.5), (4.6). На остальной части внешней границы задаются мягкие условия для скорости (2.81). Для давления “мягкие” условия (2.81) задаются на всей границе области.

Для решения данной задачи будем применять методику, описанную в п.п.2.2.2 и п.п.2.4, которая позволяет получать точное решение задачи о течении в виде линейного сдвига и минимизирует погрешность, вносимую в дискретное решение за счет кривизны сеточных линий.

Разделим уравнение сохранения количества движения (2.10) на $\rho U^2/\mathrm{R}$, где ρ – плотность, U – скорость на бесконечности, R – радиус цилиндра, и введем безразмерные переменные

$$t = t' \frac{U}{R}, \tag{4.8}$$

$$r = \frac{r'}{R}, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}'}{U}, \tag{4.10}$$

где размерные величины обозначены штрихом.

Аппроксимацию по времени будем проводить в соответствии со схемой (4.4). Величина шага по времени $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ подбиралась таким образом, чтобы результаты расчетов не менялись, при увеличении шага в 10 раз.

Рассмотрим решение задачи о развитии ламинарного в начальный момент времени течения при числе Рейнольдса $Re = UR/\nu = 10^5$. При таком числе Рейнольдса развитое течение вокруг цилиндра будет носить турбулентный характер. То есть, со временем, изначально ламинарное течение, должно постепенно потерять устойчивость. При этом течение проходит несколько стадий. Сначала начинают образовываться вихри определенного масштаба, которые впоследствии дробятся и сливаются, образуя весь спектр турбулентных вихрей от энергонесущих, крупномасштабных, квазиупорядоченных структур типа дорожки Кармана, вплоть до вихрей колмогоровского масштаба, диссипирующих кинетическую энергию в тепловую [104], [103], [105]. Будем рассматривать это течение как нестационарное ламинарное, то есть не будем вводить каких либо методов осреднения для мелкомасштабных вихрей и при расчете вязких напряжений будем использовать коэффициент физической вязкости. Для данной задачи такой подход напоминает методы прямого численного моделирования турбулентности [104], [103], [105]. Поскольку прямое моделирование турбулентности требует процедуры, которая учитывает влияние турбулентных вихрей подсеточных масштабов [104], [103], [105], следовательно, результаты, полученные по применяемой в настоящей работе методике, будут справедливы только до определенного момента времени, когда уже нельзя будет пренебрегать наличием мелких вихрей подсеточного масштаба.

Оценить величину промежутка времени, в течение которого расчеты, в рамках описанного подхода, будут справедливы, можно на основе сравнения решений, полученных на разностных сетках с различным количеством узлов. Если до определенного момента времени решения, полученные на разных сетках, совпадают, следовательно, мелкомасштабные вихри еще не оказывают заметного влияния на решение.

Поскольку число Рейнольдса достаточно большое, в расчетной области вводится сильно неравномерная сетка со сгущением вблизи поверхности цилиндра. При этом положение узлов сетки в радиальном направлении определяется по формуле

$$r_k = 1 + (R_\infty - 1)\frac{\exp(a\,k/N_r) - 1}{\exp(a) - 1}, \tag{4.11}$$

где R_∞ – радиус внешней границы расчетной области, a – параметр сгущения, N_r – количество узлов в радиальном направлении. Параметр сгущения a подбирался таким образом, что сеточное число Рейнольдса (2.14) вблизи поверхности цилиндра было порядка 6. Также было проведено сгущение узлов в кормовой части цилиндра

$$\theta_k = \frac{\pi}{2}\frac{\exp(1.2 \cdot k/N_\theta) - 1}{\exp(1.2) - 1}, \tag{4.12}$$

где угол отсчитывается от кормовой точки цилиндра, N_θ – количество узлов в тангенциальном направлении.

Для определения влияния на решение размеров расчетной области и количества узлов сетки было проведено сравнение решений данной задачи на сетках 40x60, 80x120 и 120x200 узлов с R_∞=4 и 8. На рис.4.1, рис.4.2 и рис.4.3 приведено распределение безразмерного коэффициента трения (4.13) на поверхности цилиндра в зависимости от угла, отсчитываемого от носовой точки, для моментов безразмерного времени t=0.5, t=1, и t=1.5, соответственно

$$C_f = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}, \tag{4.13}$$

где r, θ – безразмерные величины. На рисунках видно, что результаты практически совпадают, за исключением области образования вторичных вихрей рис.4.3, где схемная вязкость не позволяет правильно рассчитать детали течения на сетке 40x60. Отсюда можно сделать следующие выводы. На грубых сетках можно получать достоверные результаты вплоть до наступления неустойчивости и начала образования вторичных вихрей. Время зарождения неустойчивости также может быть определено на грубой сетке. Для промежутка времени t<1.3, решение слабо зависит от выбора R_∞.

На рис.4.4, рис.4.5, рис.4.6 приведено сравнение распределений коэффициента трения C_f, полученных на сетках 80x120 и 120x200. На графиках видно, что до момента времени t=3.0 положение и величина крупномасштабных максимумов и минимумов C_f, с удовлетворительной точностью совпадают для обеих сеток. Мелкомасштабные пульсации C_f, которые соответствуют движению мелких вихрей, начинают заметно отличаться при C_f >3.0 рис.4.5. При t>4.0 влияние мелкомасштабных вихрей становится существенным, что отчетливо видно на рис.4.6. Очевидно, расчет коэффициента трения C_f на сетке 80x120 будет давать заметную погрешность при t>3.0. Все дальнейшие результаты были получены на сетках 80x120 и 120x200 с R_∞=8.

Рассмотрим основные этапы развития нестационарного отрыва и зарождения крупномасштабных вихревых структур. После возникновения в начальный момент времени пограничного слоя, его толщина постепенно растет, особенно в кормовой части. Противодавление в области кормовой точки приводит к быстрому снижению тангенциальной скорости V_θ в пограничном слое. При t=0.32 в кормовой точке возникает отрыв потока, и точка отрыва начинает двигаться вверх по поверхности цилиндра, против направления движения основного потока.

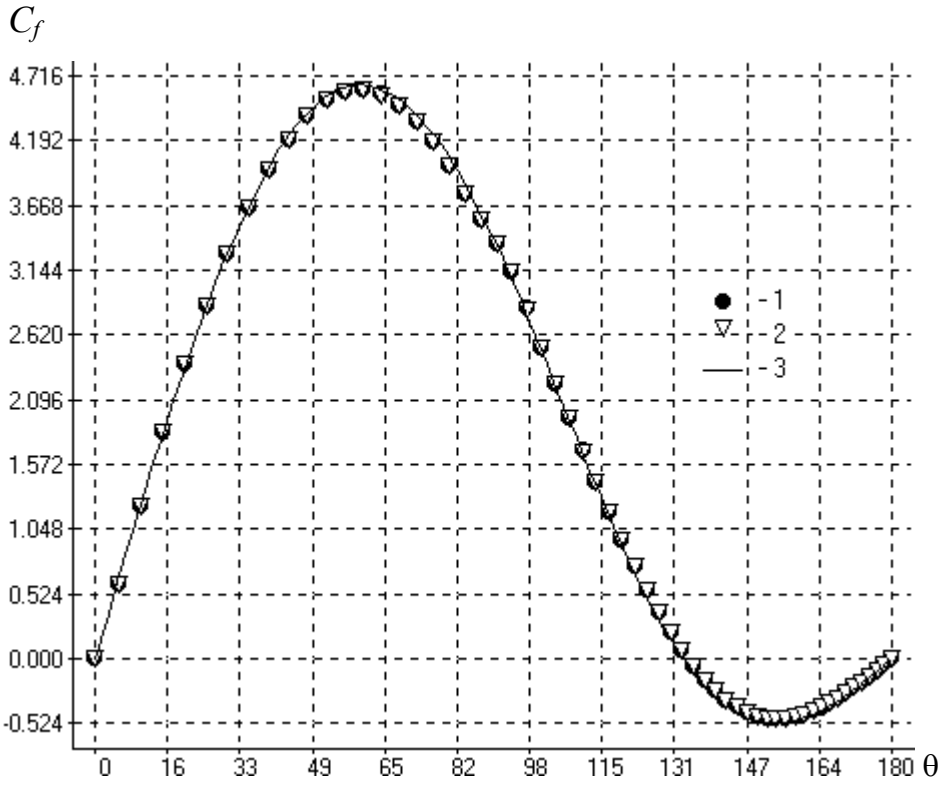


Рис.4.1. Распределение коэффициента трения C_f на поверхности цилиндра в момент времени t=0.5: 1 – 40x60, R_∞=4; 2 – 40x60, R_∞=8; 3 – 80x120, R_∞=8

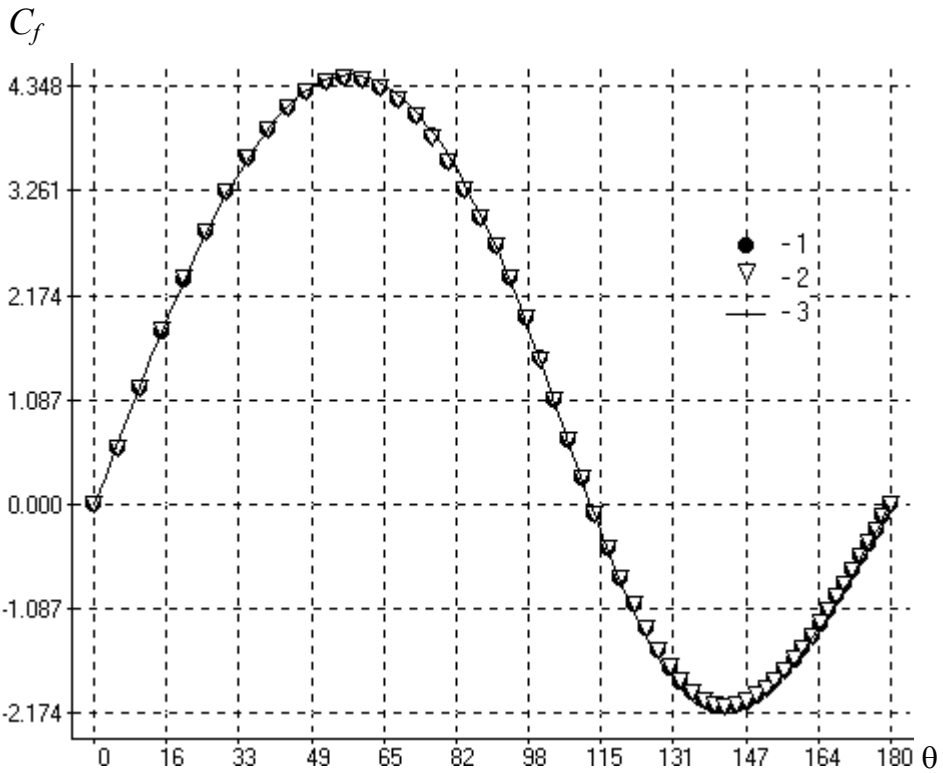


Рис.4.2. Распределение коэффициента трения C_f на поверхности цилиндра в момент времени t=1.0: 1 – 40x60, R_∞=4; 2 – 40x60, R_∞=8; 3 – 80x120, R_∞=8

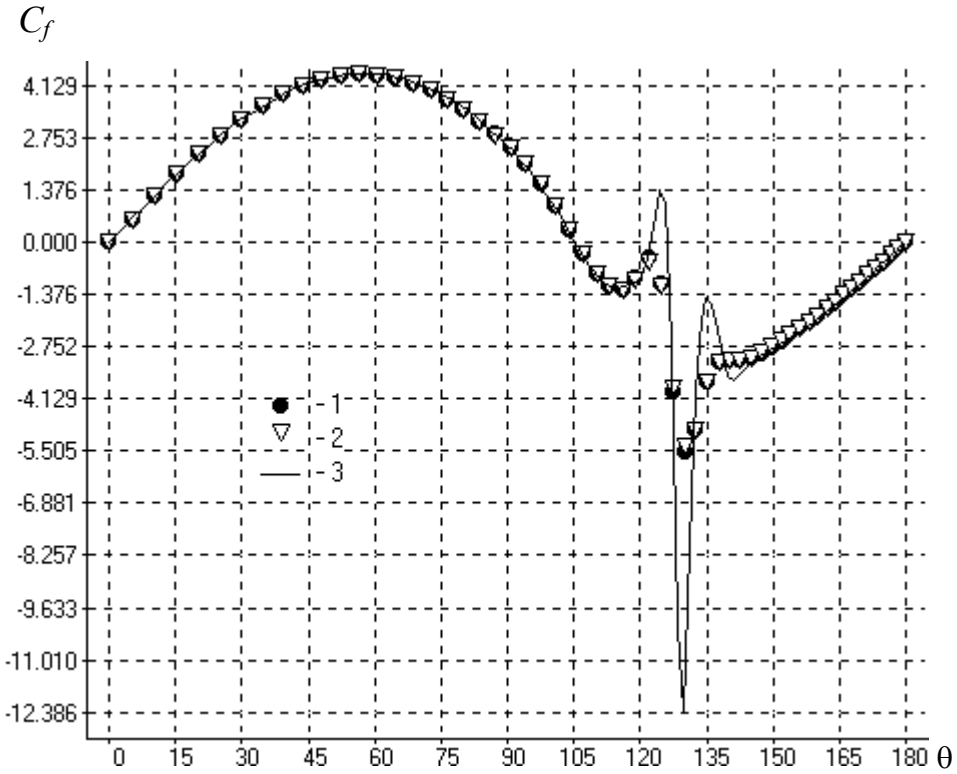


Рис.4.3. Распределение коэффициента трения C_f на поверхности цилиндра в момент времени t=1.5: 1 – 40x60, R_∞=4; 2 – 40x60, R_∞=8; 3 – 80x120, R_∞=8

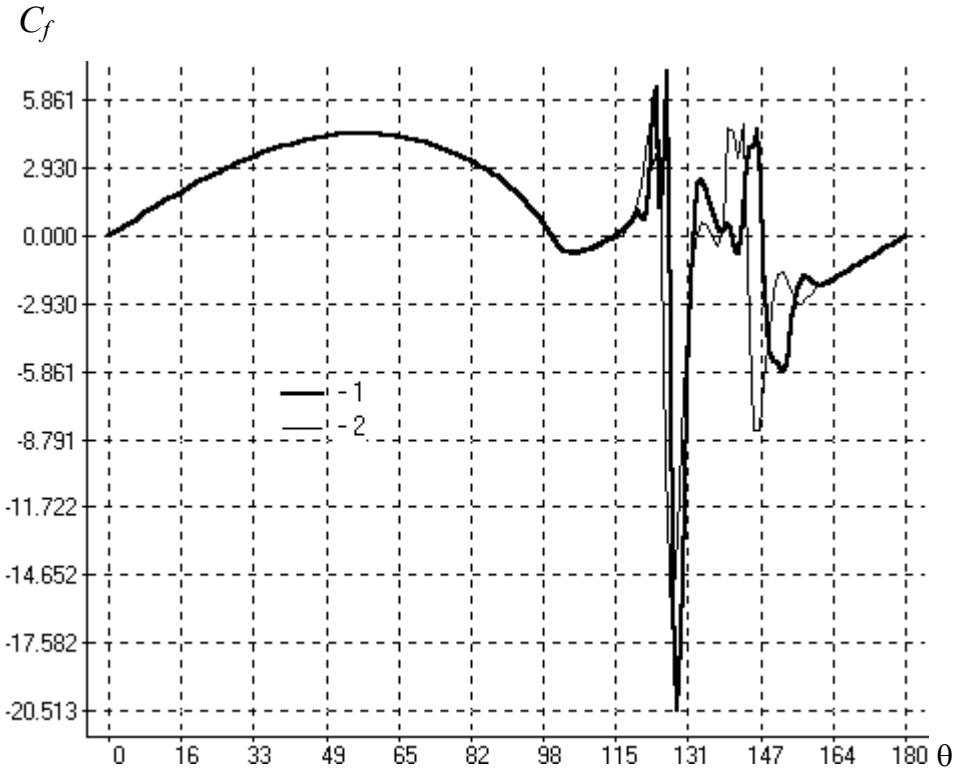


Рис.4.4. Распределение коэффициента трения C_f на поверхности цилиндра в момент времени t=2.0: 1 – 80x120, R_∞=8; 2 – 120x200, R_∞=8

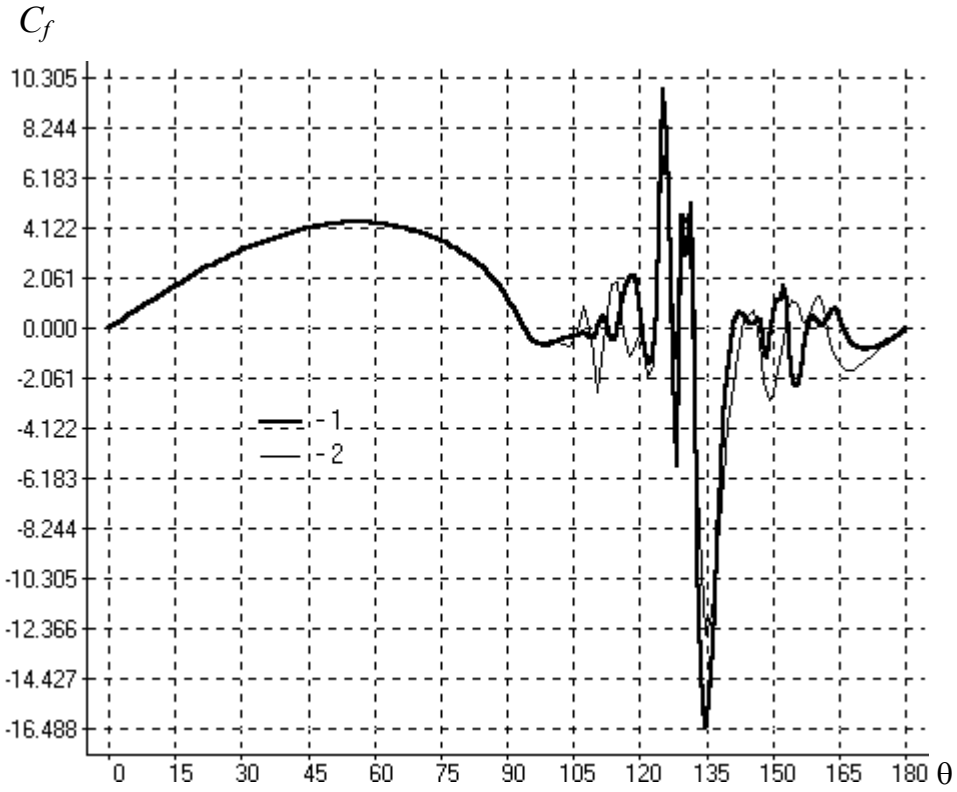


Рис.4.5. Распределение коэффициента трения C_f на поверхности цилиндра в момент времени t=3.0: 1 – 80x120, R_∞=8; 2 – 120x200, R_∞=8

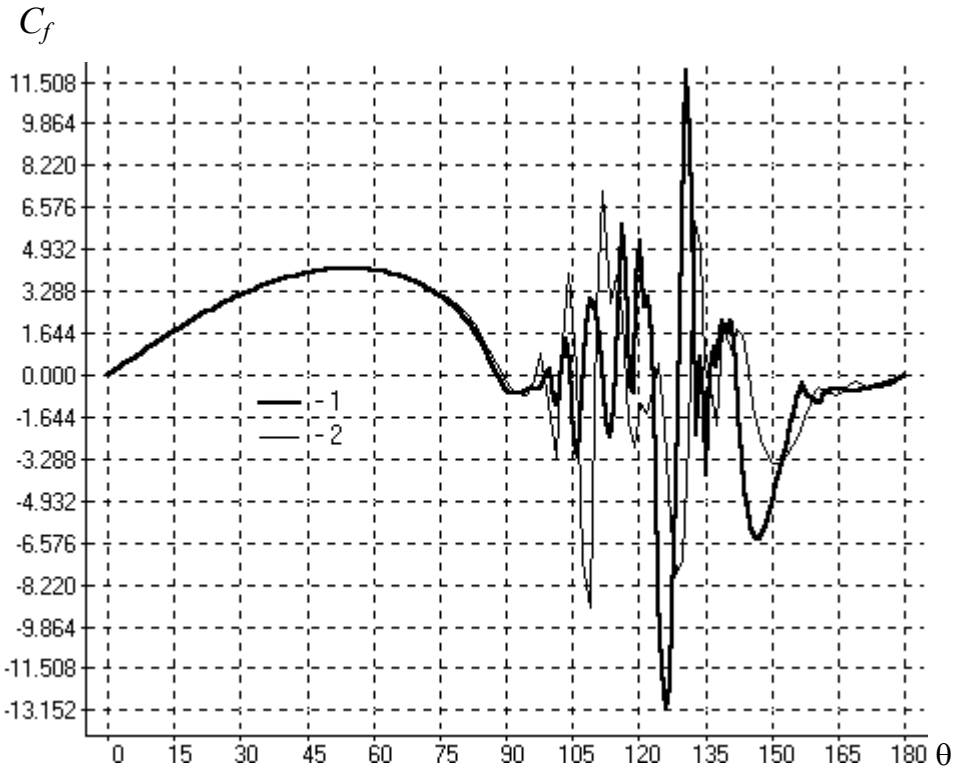


Рис.4.6. Распределение коэффициента трения C_f на поверхности цилиндра в момент времени t=4.0: 1 – 80x120, R_∞=8; 2 – 120x200, R_∞=8

На рис.4.7. приведены графики зависимости положения точки отрыва от безразмерного времени t для сеток 80x120 и 120x200. Заметные отличия в расчете положения точки отрыва потока проявляются при $t>3.5$. На рис.4.7. видно, что в начальный промежуток времени $0.3<t<1.0$ отрывная зона растет очень быстро. В дальнейшем положение точки отрыва медленно стремится к своему асимптотическому значению ~ 80°.

За точкой отрыва развивается и увеличивается по толщине течение в обратном токе. Обратное течение и внешний поток образуют скоростной слой смешения, который является неустойчивым к малым возмущениям. На рис.4.8 показан фрагмент поля вектора скорости для момента времени $t=1.5$. На рисунке отчетливо видно зарождение волнообразной неустойчивости Гельмгольца на границе внешнего течения и обратного тока. Образующиеся в результате развития неустойчивости вихри, захватывают все большее пространство пограничного слоя и достигают стенки, вызывая образование вторичных вихрей, отрыва потока и осцилляции коэффициента трения C_f. Таким образом, индикатором развития вихревой неустойчивости и, как следствие, вторичного отрыва, может служить распределение C_f. На рис.4.9 показано распределение коэффициента трения на поверхности цилиндра в моменты времени $t=0–1.3$. На рис.4.9 видно, что при $t=1.3$ граница неустойчивости достигает поверхности цилиндра. В дальнейшем неустойчивость быстро развивается, а коэффициент трения совершает нарастающие по амплитуде, периодические колебания за точкой отрыва потока рис.4.3. Со временем количество максимумов и минимумов растет (рис.4.4, рис.4.5), на крупномасштабные колебания накладываются высокочастотные осцилляции, при этом модуль максимального и минимального значения C_f примерно равны между собой (рис.4.6). Такое поведение коэффициента трения, обусловлено характером течения за точкой отрыва.

На рис.4.10 приведено сравнение результатов вычисления коэффициента трения по предлагаемой в настоящей работе методике и в рамках приближения пограничного слоя [115]. На рисунке видно, что результаты практически совпадают, вплоть до момента возникновения неустойчивости течения, при $t<1.5$. Хорошее совпадение результатов говорит о том, что до возникновения неустойчивости предположения, заложенные в основу теории пограничного слоя, справедливы для

данного течения. Аналогично причину рассогласования в определении коэффициента трения следует искать в нарушении постулатов приближения пограничного слоя. Рассмотрим механизм развития неустойчивости более детально.

На рис.4.11 - рис.4.20 показаны картины линий тока в различные моменты времени. На рисунках можно проследить основные этапы развития вихревой неустойчивости. Первое заметное возмущение в виде небольшого вихря возникает в области, где разница скоростей основного и обратного течения максимальна (примерно 130° от носовой точки рис.4.11). Распространение возмущения вниз по потоку приводит к возникновению второго вихря рис.4.12, который увеличивается в размерах быстрее, чем первый и спускается по направлению к кормовой точке цилиндра рис.4.13, рис.4.14. Вихревая неустойчивость распространяется также и вверх по потоку, но значительно медленнее, чем вниз (рис.4.15, рис.4.16). Продвижение границы неустойчивости к точке отрыва потока сопровождается образованием цепочки вихрей рис.4.16, рис.4.17, которые впоследствии попарно объединяются рис.4.17, рис.4.18, и сливаются в один большой вихрь в кормовой зоне рис.4.19, рис.4.20.

На рис.4.15, рис.4.16 видно, что влияние количества узлов на микроструктуру решения становится заметным при t>3.0. Накопление погрешности в неустойчивом течении приводит к отличиям в макроструктуре решения на разных сетках при t>4.0 рис.4.17, рис.4.18, рис.4.19, рис.4.20. Помимо накопления возмущений, причиной расхождения результатов на грубой и мелкой сетках является схемная вязкость. На рис.4.21 приведены изолинии сеточного числа Пекле для сетки 120x200. Темная полоска вблизи поверхности цилиндра – это область, в которой сеточное число Пекле меньше 30. Из рисунка следует, что точный учет вязких эффектов на данной сетке при числах $Re \sim 10^5$, возможен только в непосредственной близости от поверхности цилиндра, где $Pe_h < 6$.

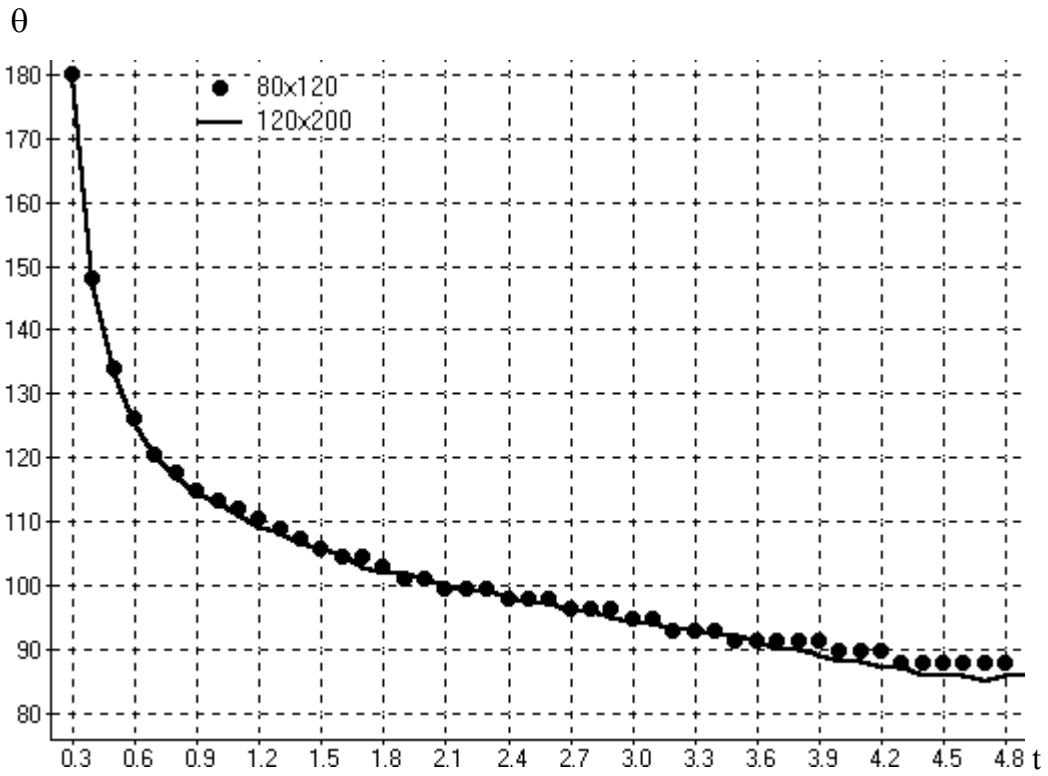


Рис.4.7. Зависимость от времени положения точки отрыва для сеток 80x120 и 120x200

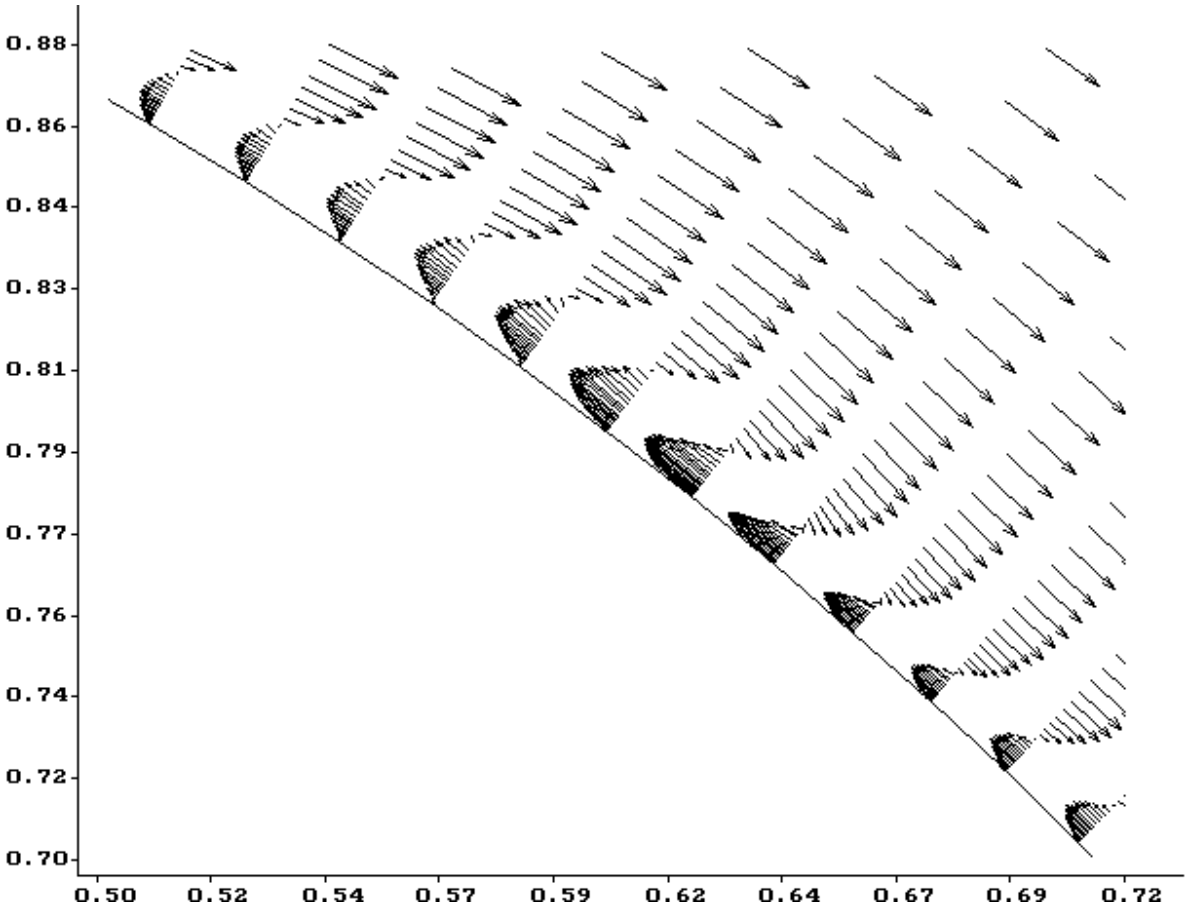


Рис.4.8. Поле вектора скорости вблизи поверхности цилиндра в момент времени t=1.5

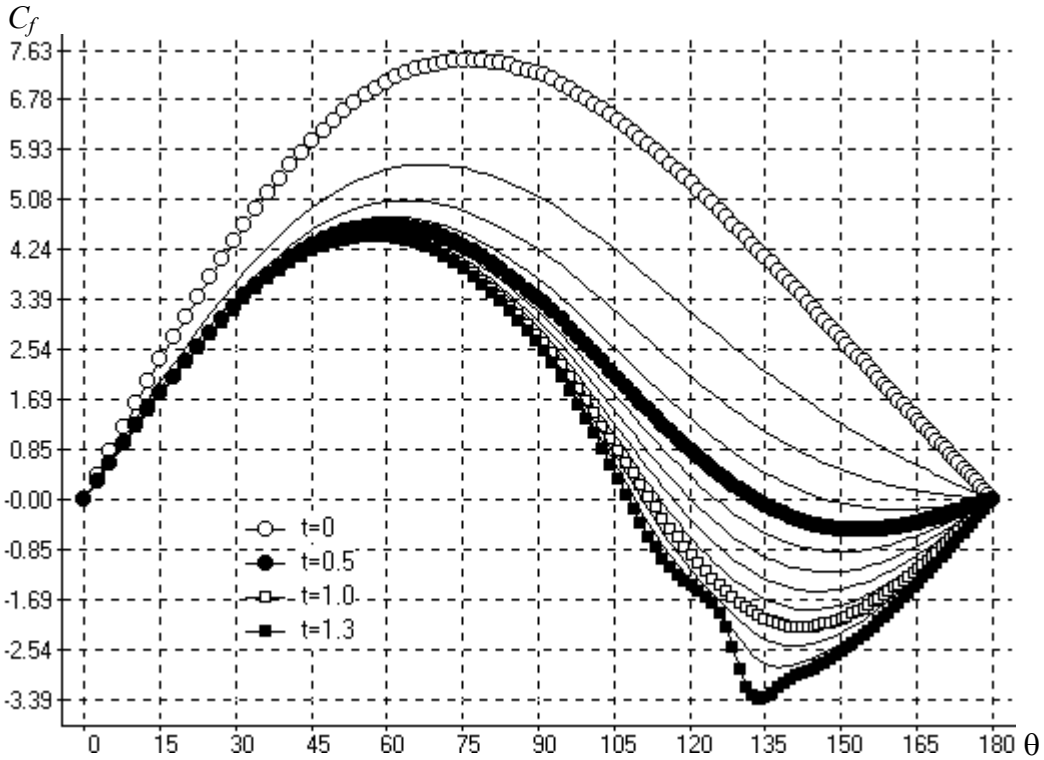


Рис.4.9. Распределение коэффициента трения на поверхности цилиндра в моменты времени t= 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3

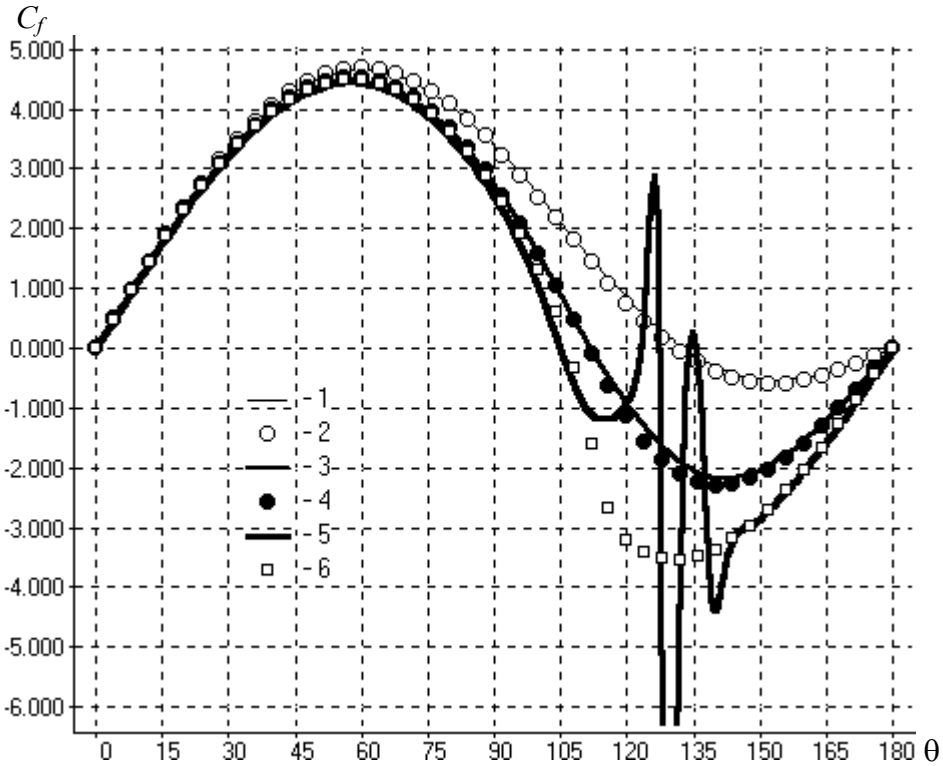
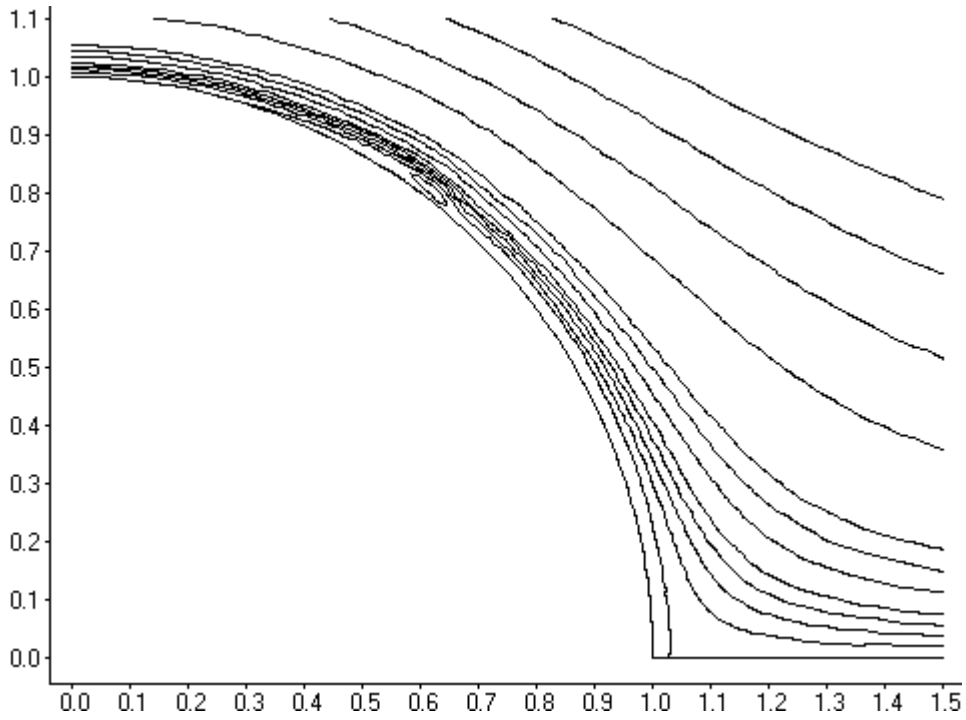
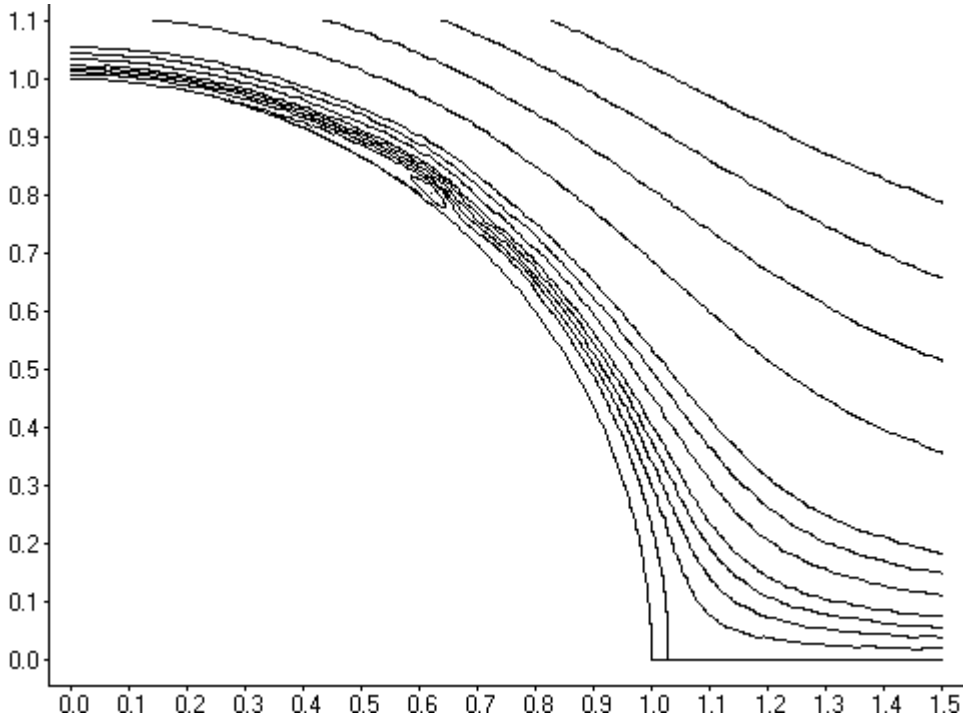


Рис.4.10. Распределение коэффициента трения на поверхности цилиндра в моменты времени t= 0.5: 1 – настоящая работа (сетка 120x200), 2 – пограничный слой; t= 1.0: 3 – настоящая работа (сетка 120x200), 4 – пограничный слой; t= 1.5: 5 – настоящая работа (сетка 120x200), 6 – пограничный слой

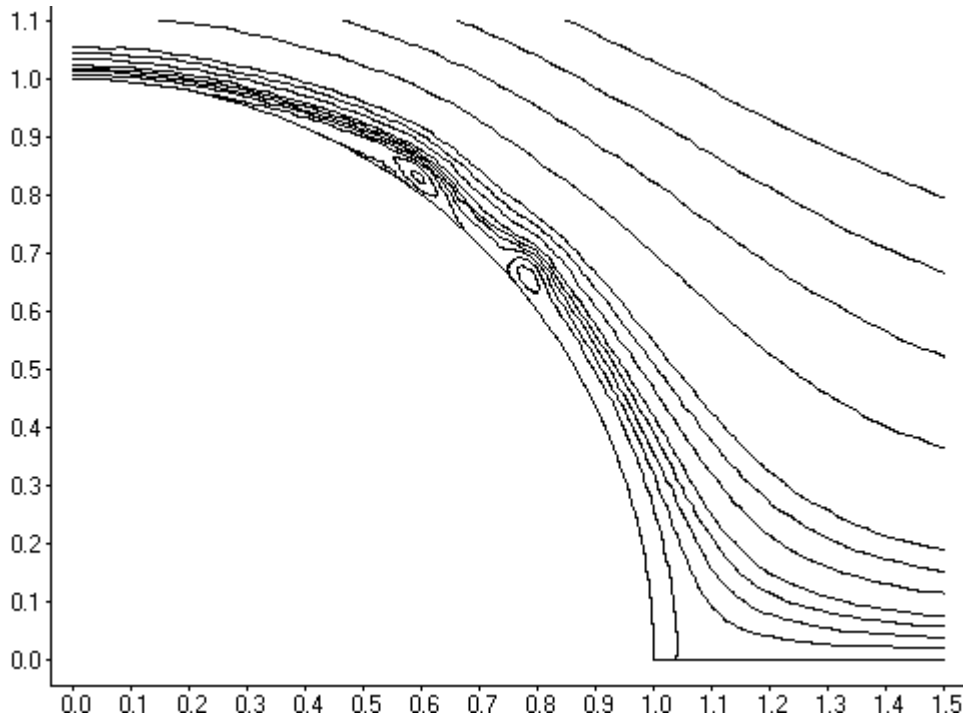


а

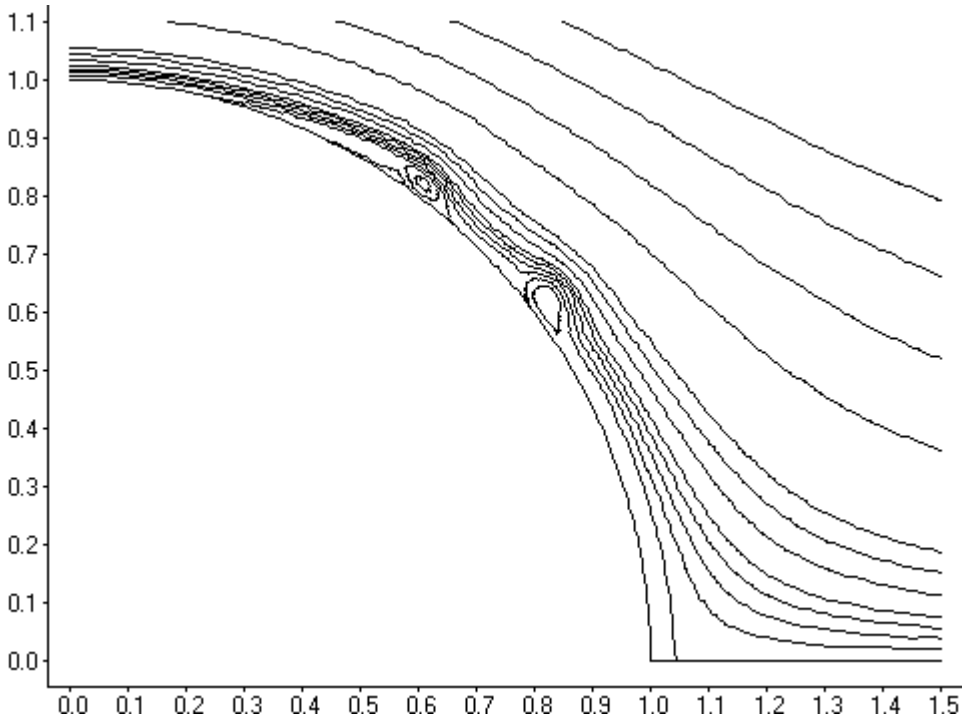


б

Рис.4.11. Линии тока в момент времени t=1.5,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

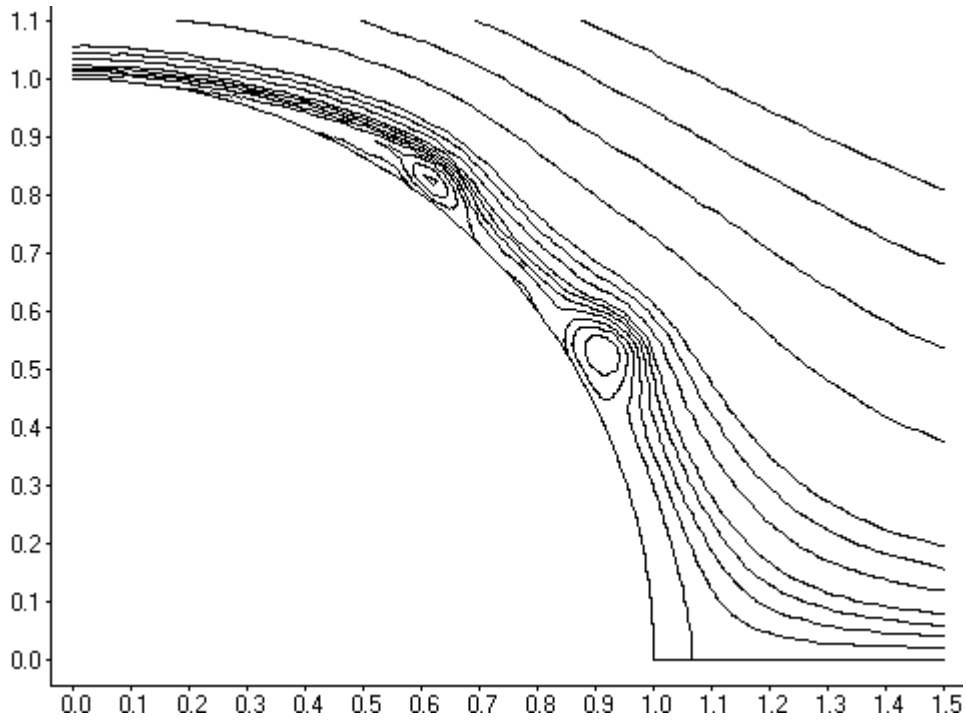


а

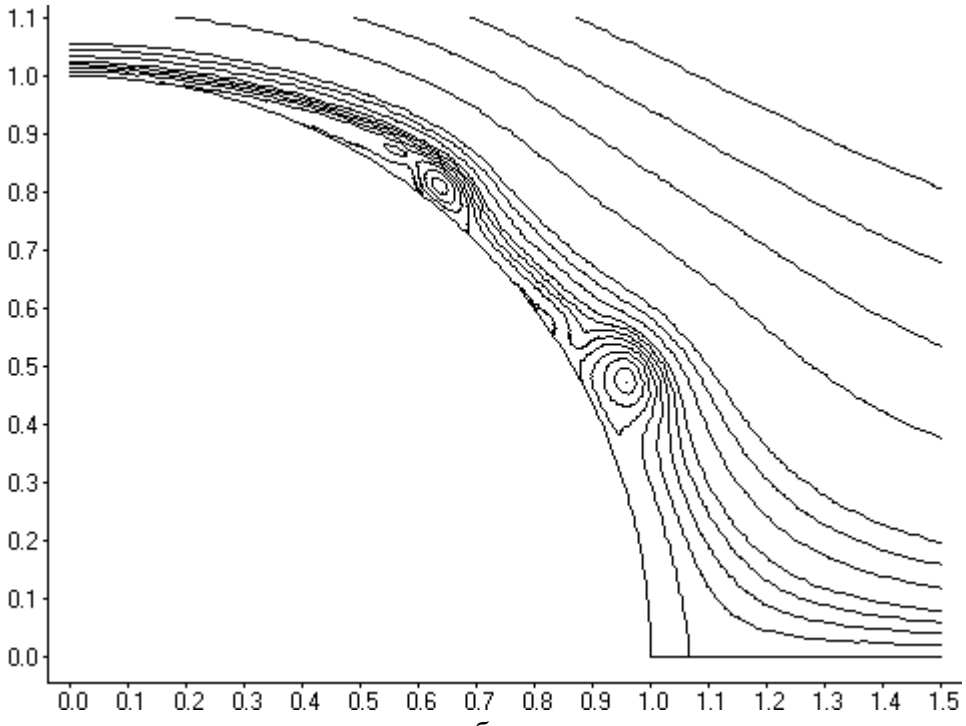


б

Рис.4.12. Линии тока в момент времени t=1.8,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

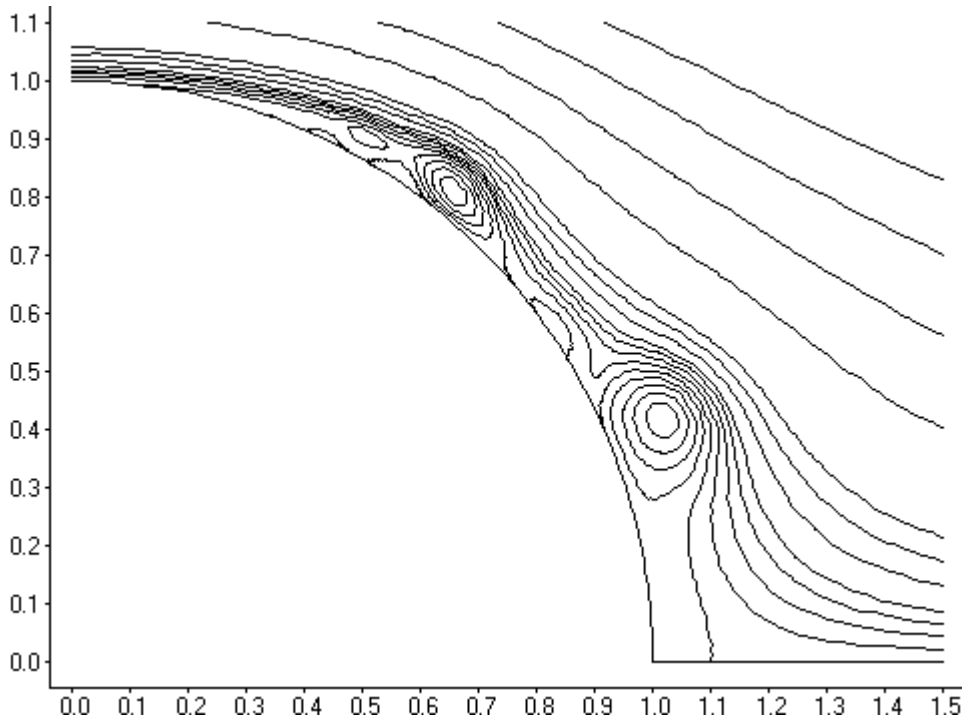


а

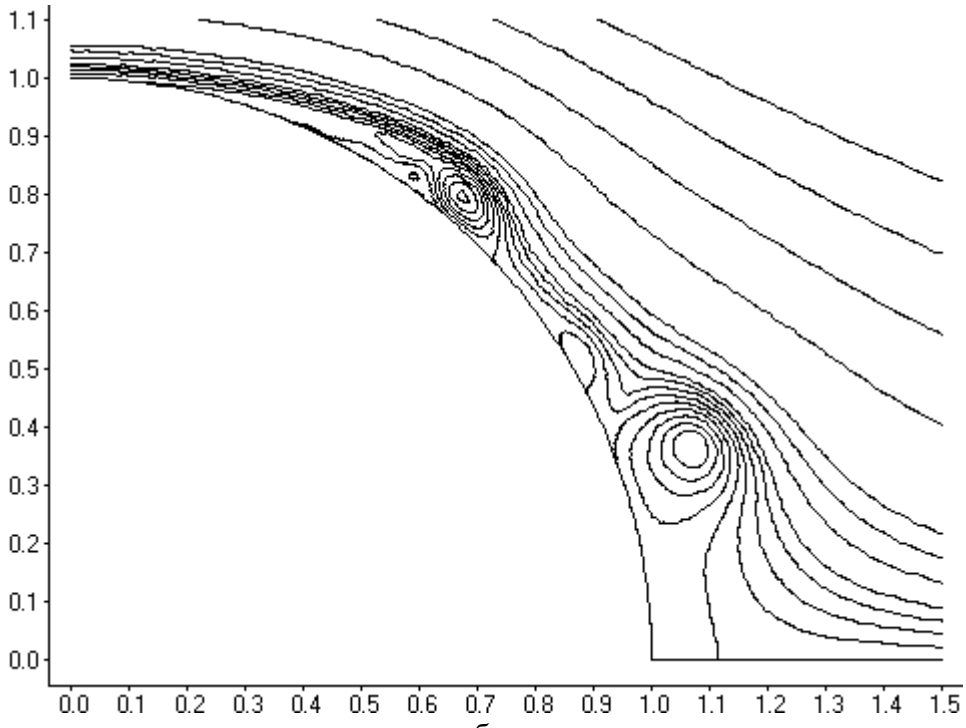


б

Рис.4.13. Линии тока в момент времени t=2.2,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

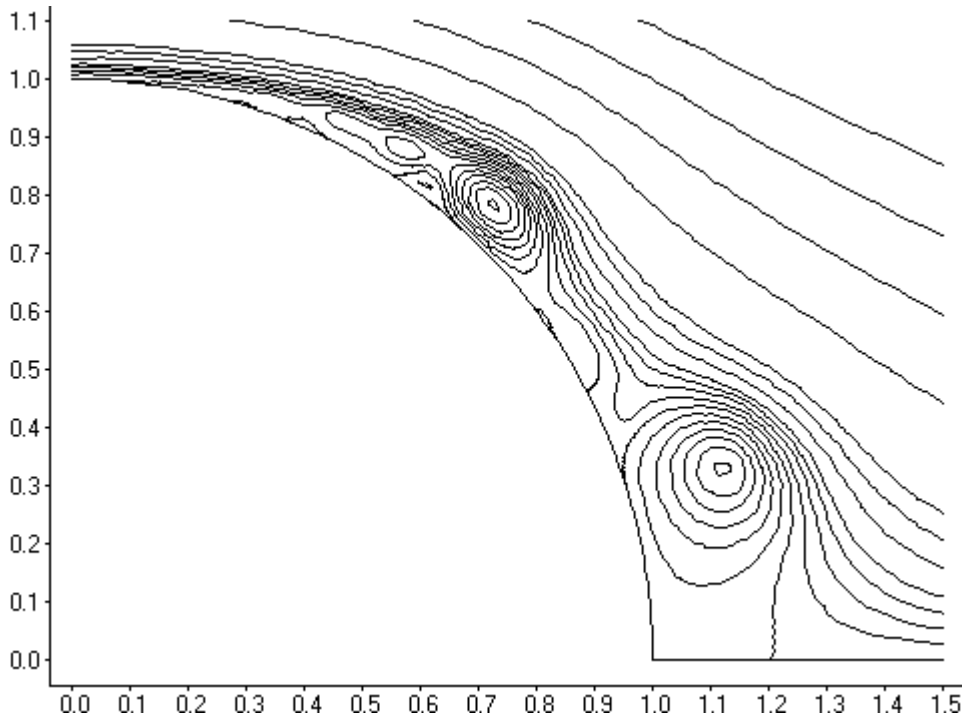


а

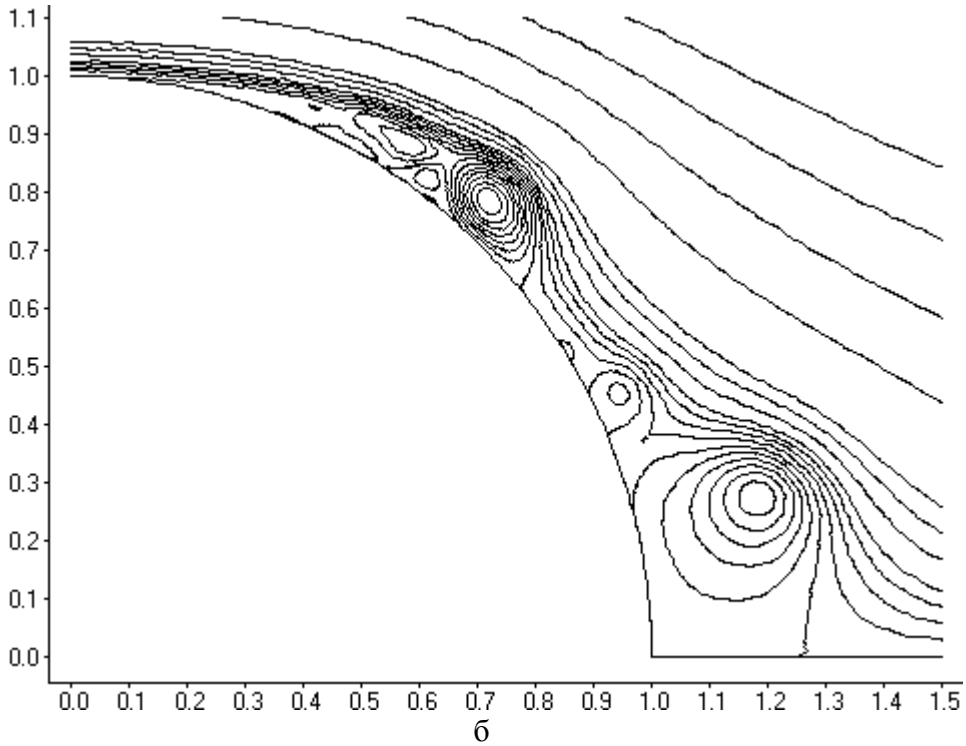


б

Рис.4.14. Линии тока в момент времени t=2.6,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

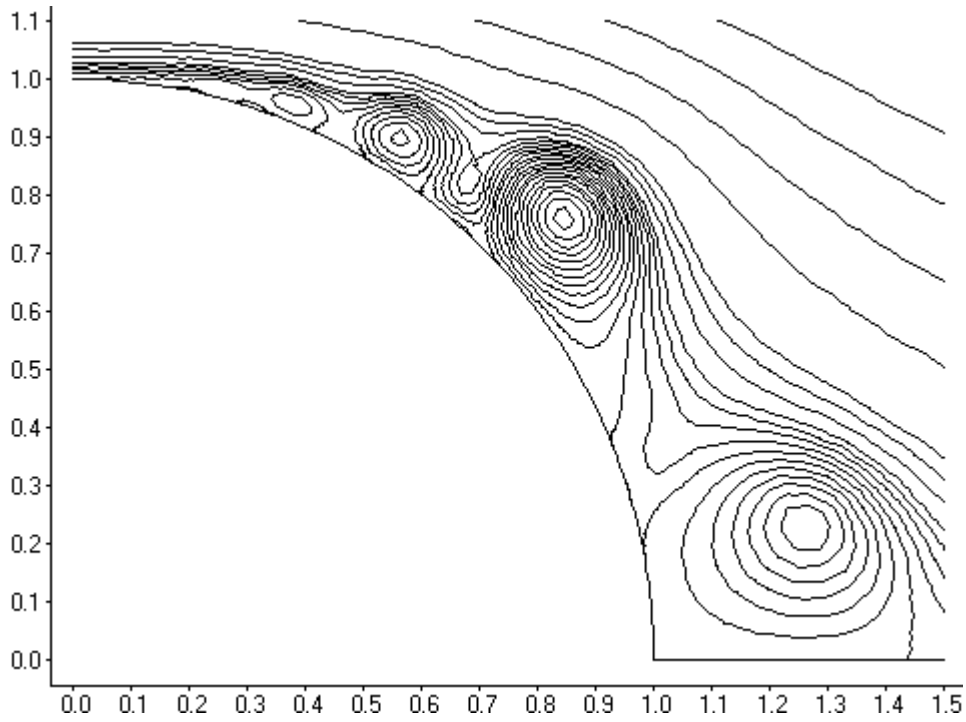


а

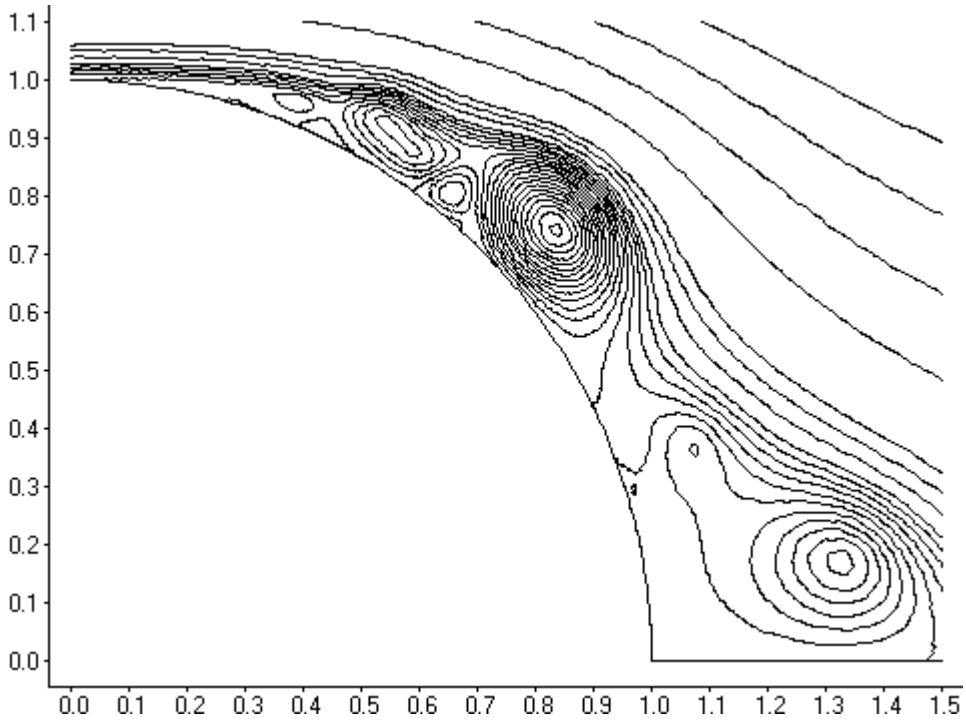


б

Рис.4.15. Линии тока в момент времени t=3.0,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

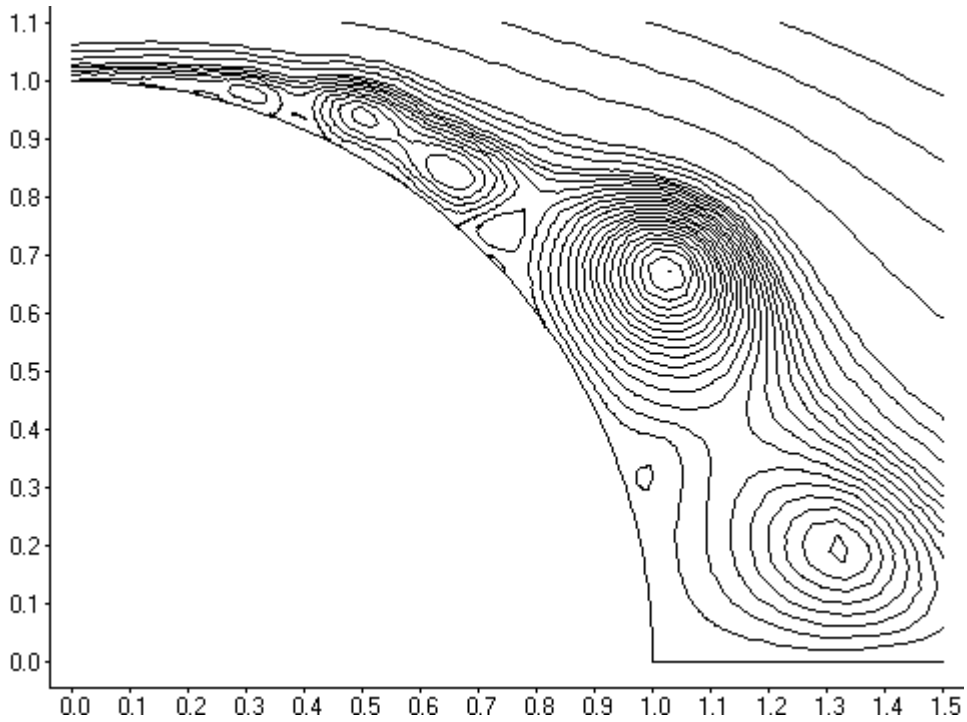


а

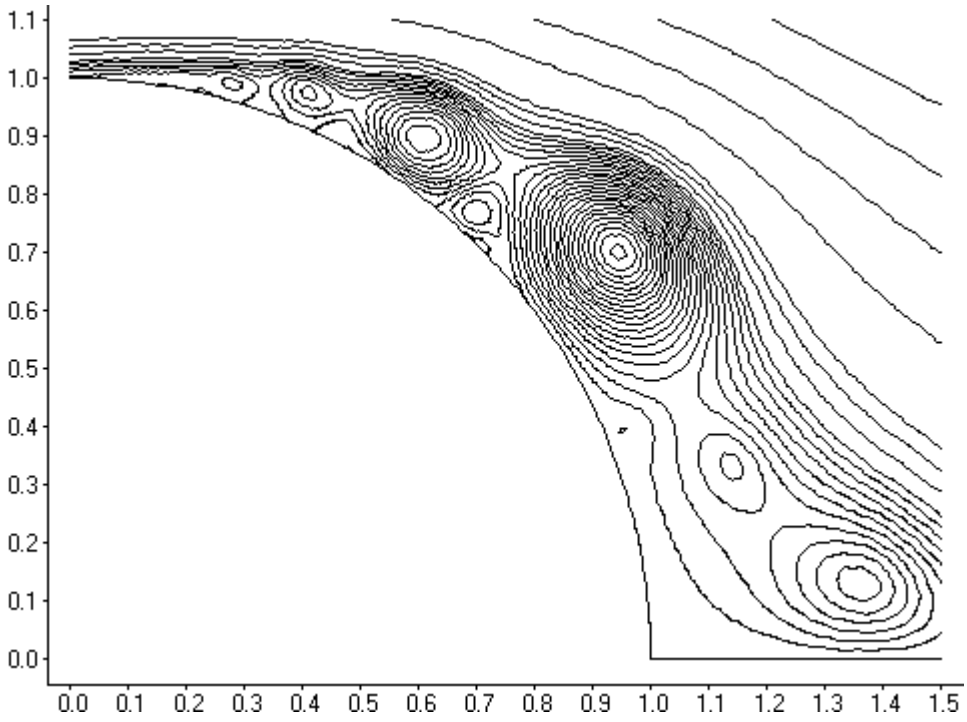


б

Рис.4.16. Линии тока в момент времени t=3.6,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

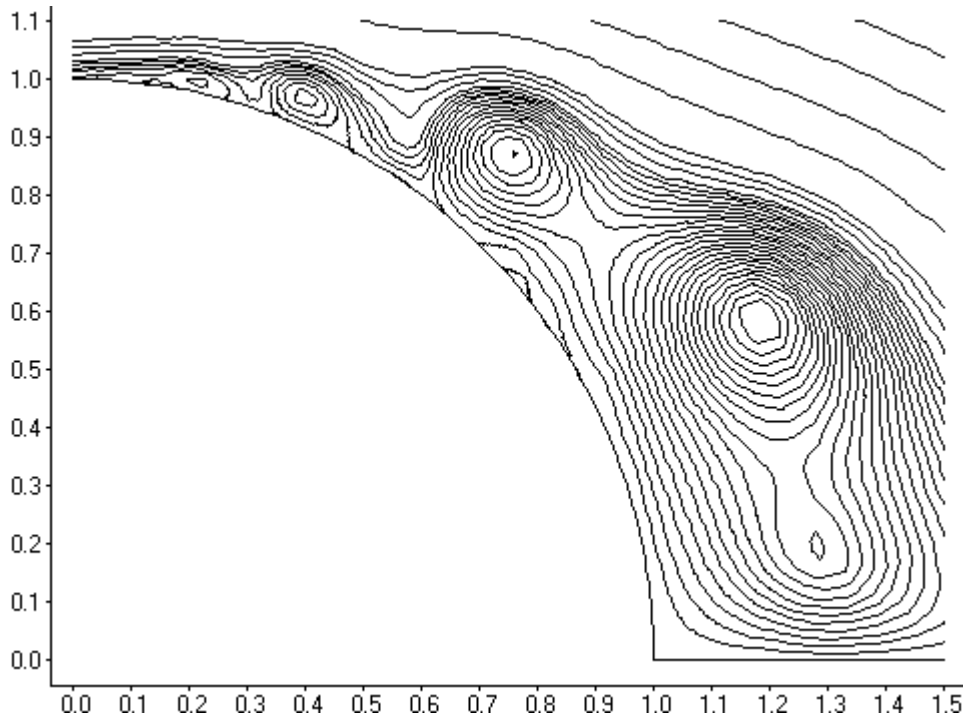


а

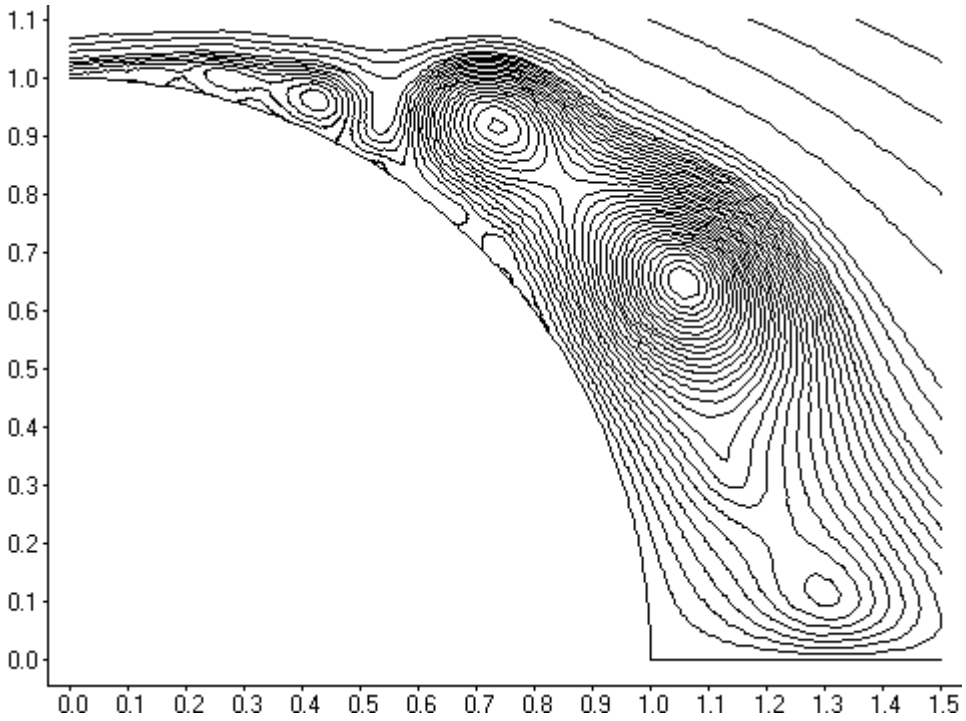


б

Рис.4.17. Линии тока в момент времени t=4.0,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

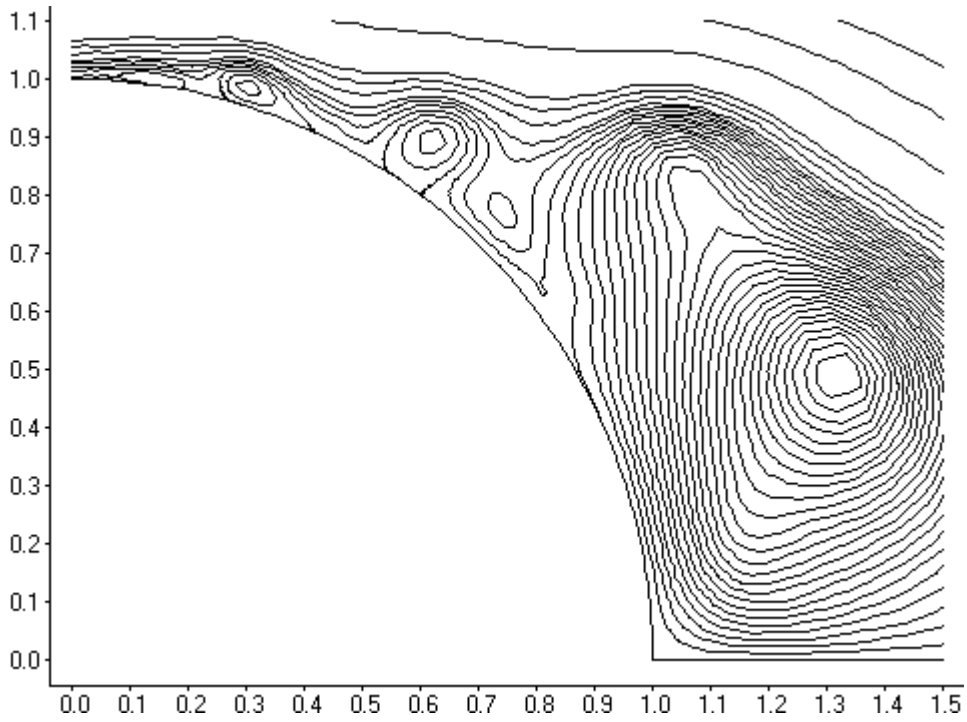


а

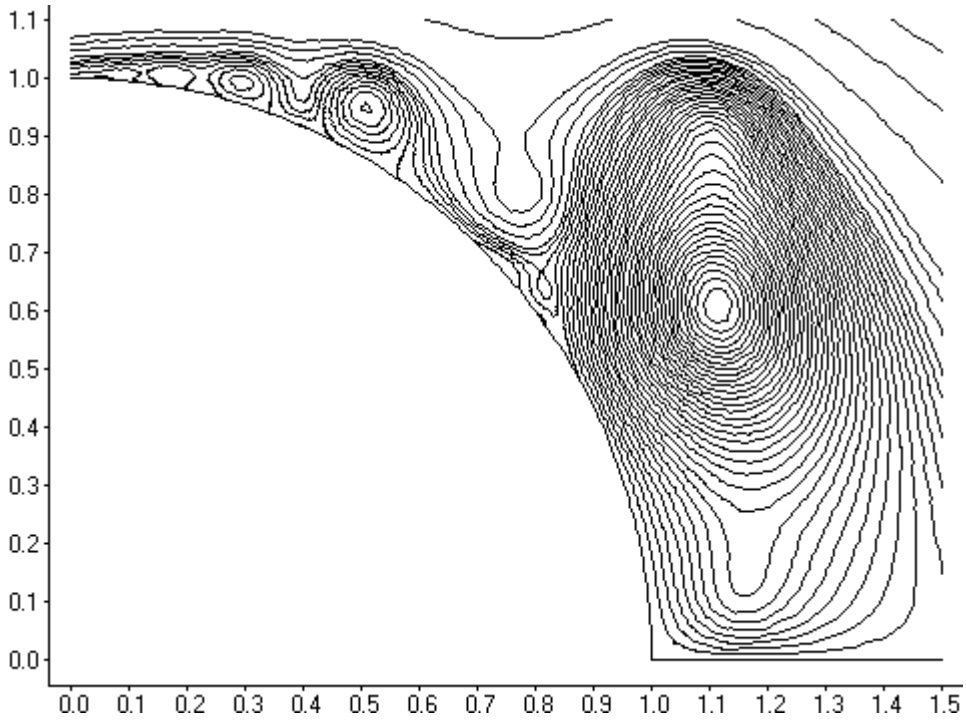


б

Рис.4.18. Линии тока в момент времени t=4.4,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

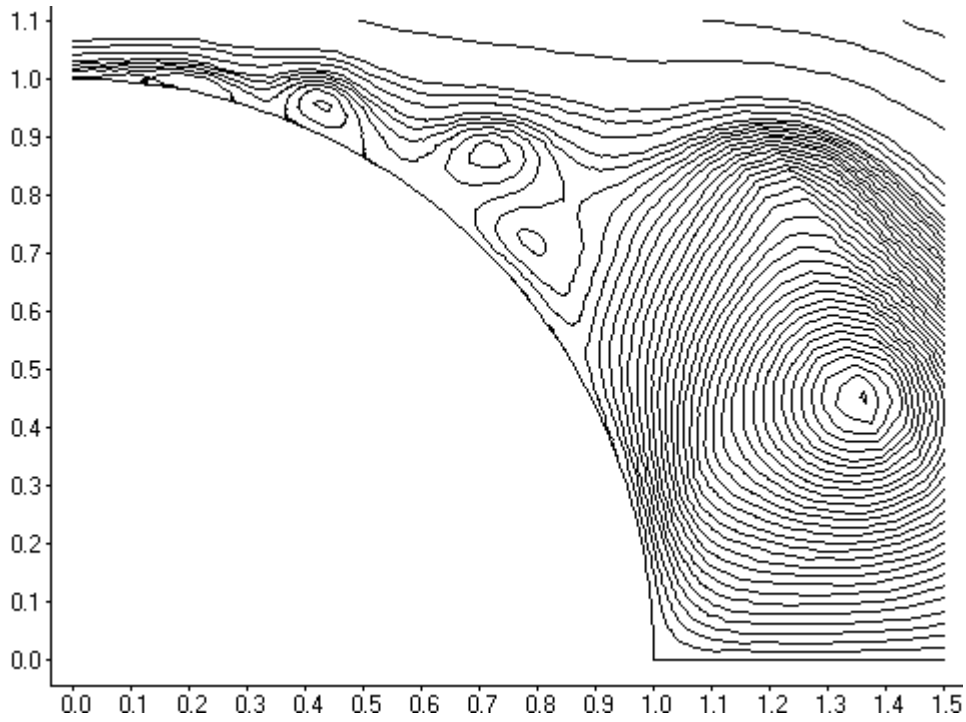


а

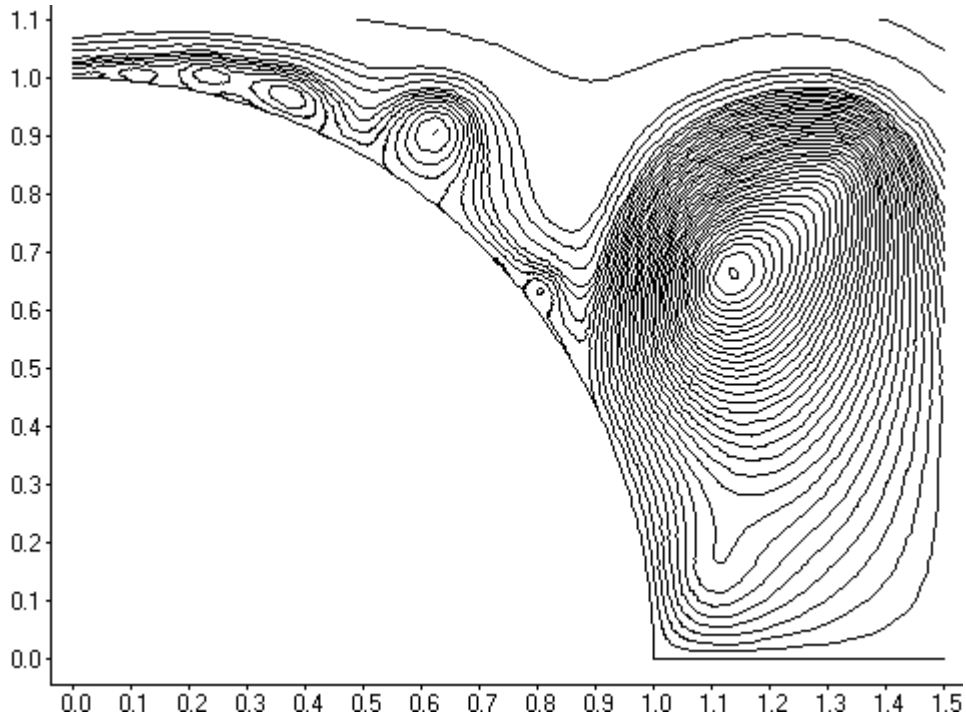


б

Рис.4.19. Линии тока в момент времени t=4.8,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200



а



б

Рис.4.20. Линии тока в момент времени t=5.0,
а – сетка 80x120, б – сетка 120x200

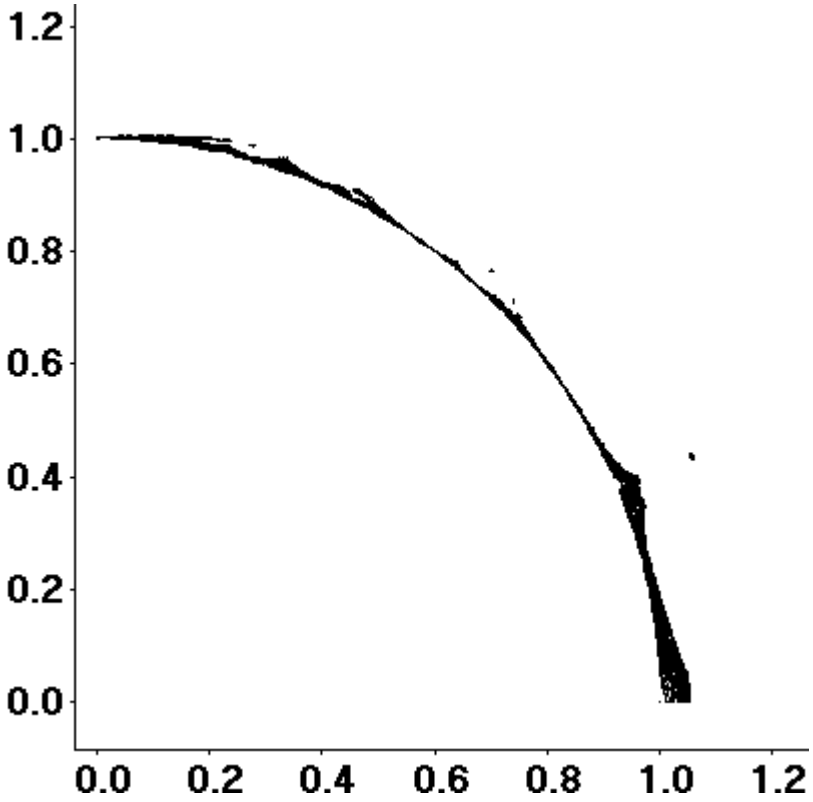


Рис.4.21. Изолинии сеточного числа Пекле при $Re=10^5$, t =4 (максимальное значение $Pe_h = 30$)

Рассмотрим вопрос об изменении поля давления в вихревой пелене и внешней области течения. В начальный момент времени поле давления соответствует потенциальному обтеканию цилиндра идеальной жидкостью рис.4.22. До момента возникновения неустойчивости давление меняется слабо рис.4.23. Образование вихревой пелены сначала приводит к локальному изменению давления в области отрыва потока рис.4.24, а затем и заметному изменению поля давления во внешнем потоке за цилиндром рис.4.25, рис.4.26. Центробежные силы создают разряжение в центре каждого вихря, при этом давление в центре вихря может упасть в 1.5 – 2.5 раза, по сравнению с давлением в той же точке при обтекании идеальной жидкостью. На рис.4.27, рис.4.28 и рис.4.29 можно проследить эволюцию вихревой пелены. Здесь положение каждого вихря можно проследить по характерным локальным минимумам давления.

Рассмотрим теперь начальный этап зарождения неустойчивости и возможные причины расхождения результатов расчетов в рамках теории пограничного слоя и по уравнениям Навье-Стокса. На рис.4.30 приведены изобары для моментов времени t=1.4 и t=1.5. На рисунке видно, что развитие неустойчивости сопровождается довольно быстрым, локальным изменением поля давления, что приводит к возникновению большого градиента давления рис.4.30,б. В рамках теории пограничного слоя отсутствует обратное влияние поля скорости в пограничном слое на распределение давление. Очевидно, что такое допущение для данной задачи справедливо только до момента возникновения вихревой неустойчивости, которая сильно влияет на распределение давления в отрывной зоне. Активное взаимодействие полей скорости и давления в пограничном слое лежит в основе механизма развития неустойчивости. Описание такого взаимодействия в рамках теории пограничного слоя представляется проблематичным. Следствием не учета этого взаимодействия является расхождения в расчете поля скорости и коэффициента трения на поверхности цилиндра при t>1.3.

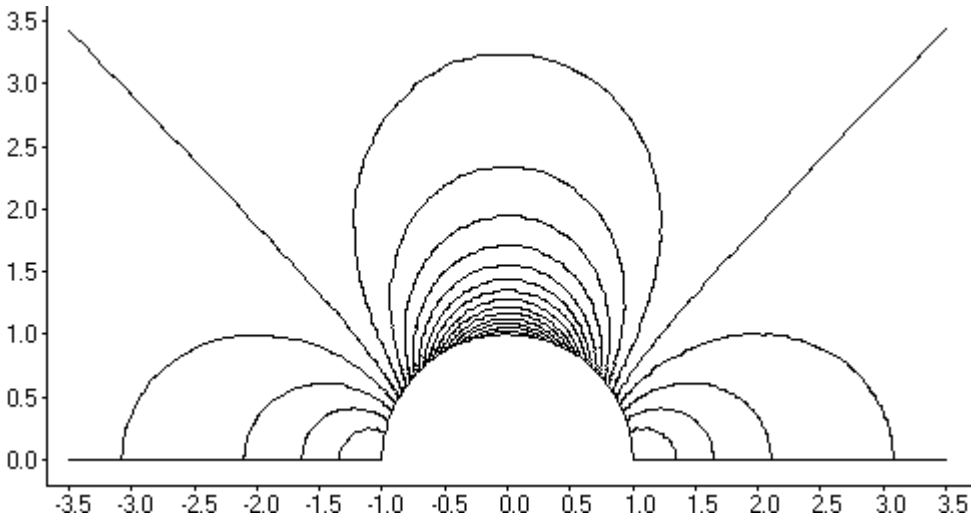


Рис.4.22. Изобары в момент времени t=0.0

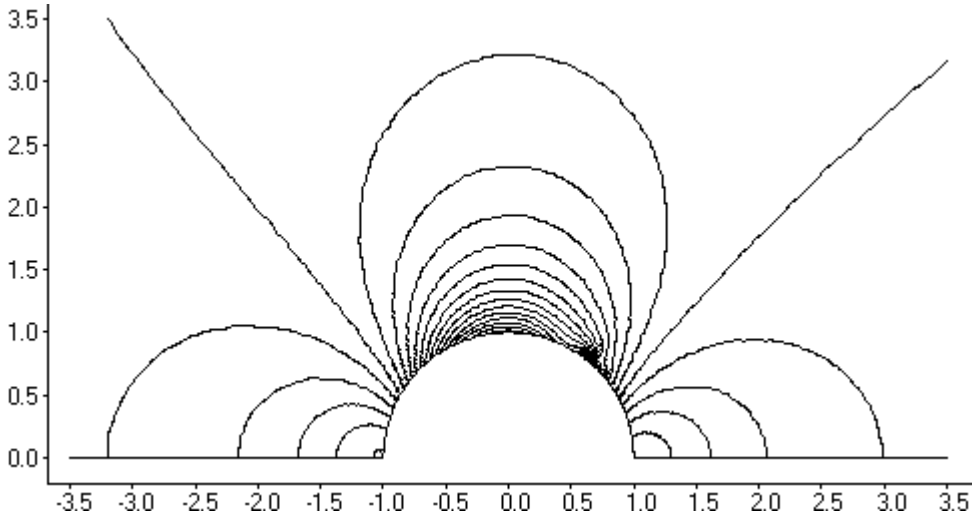


Рис.4.23. Изобары в момент времени t=1.5

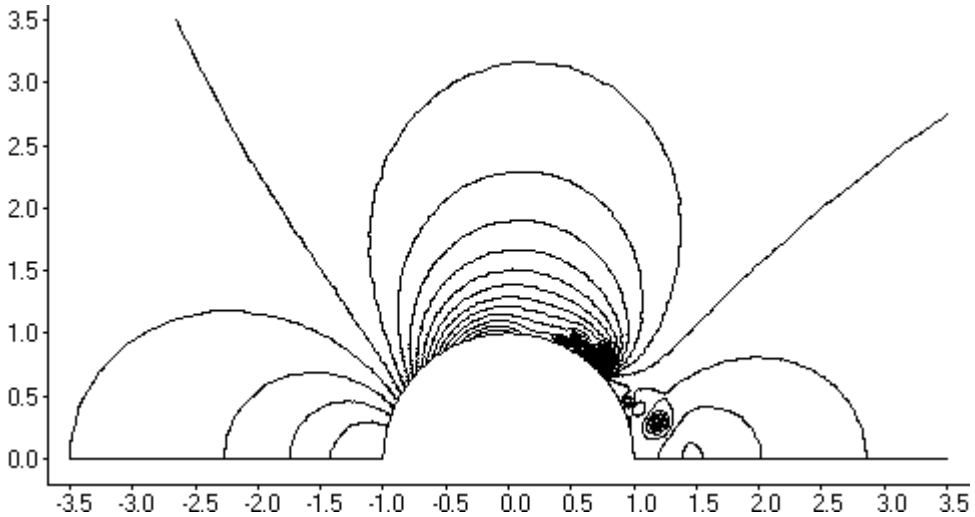


Рис.4.24. Изобары в момент времени t=3.0

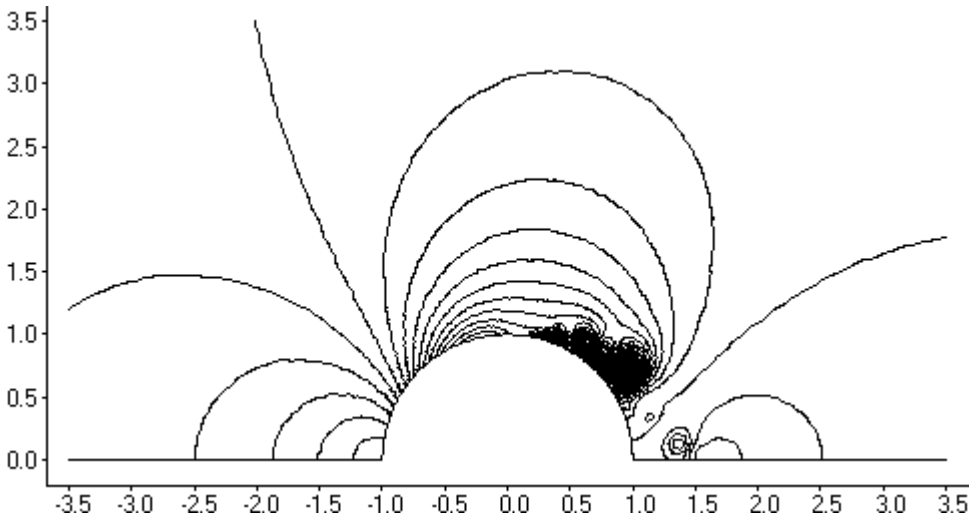


Рис.4.25. Изобары в момент времени t=4.0

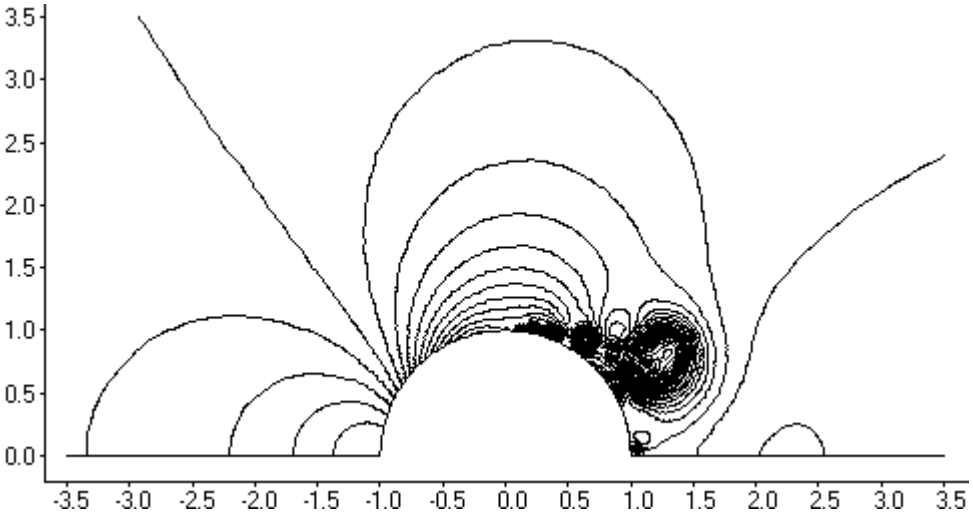


Рис.4.26. Изобары в момент времени t=5.0

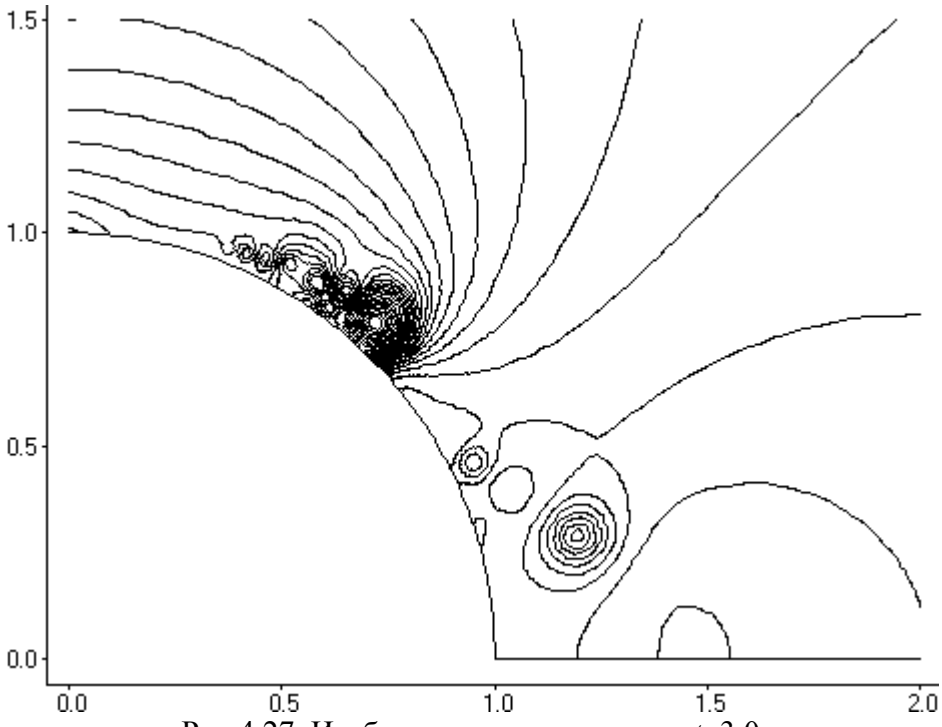


Рис.4.27. Изобары в момент времени t=3.0

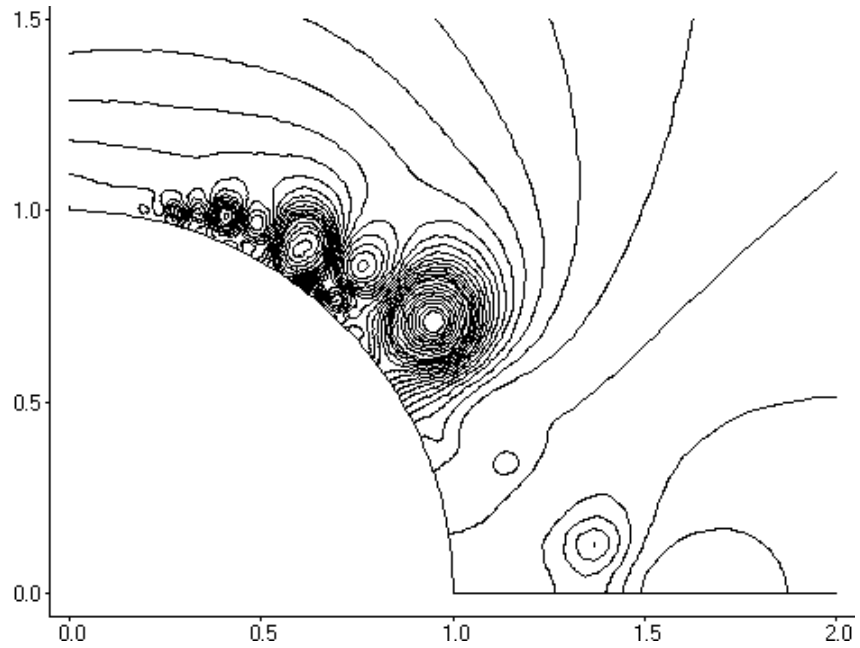


Рис.4.28. Изобары в момент времени t=4.0

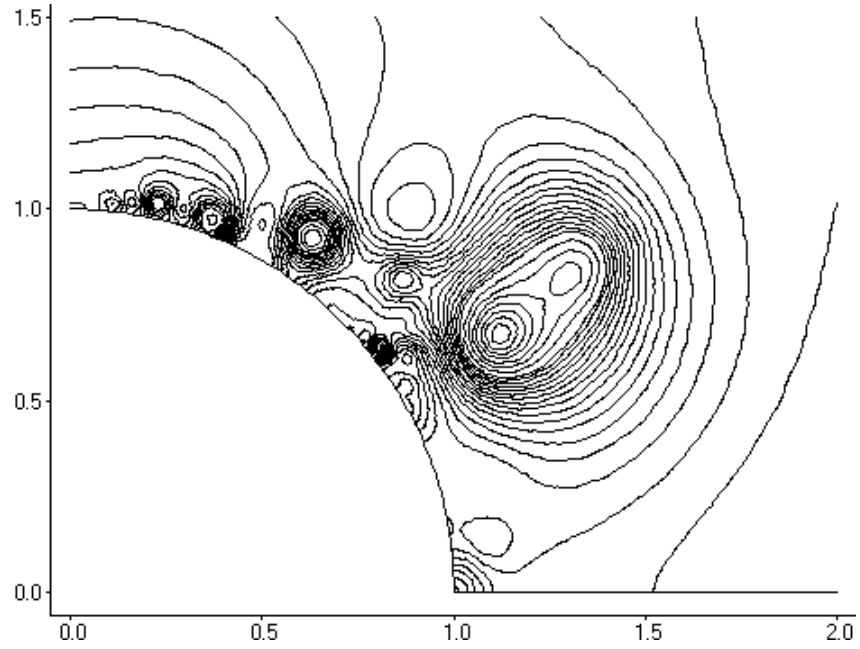
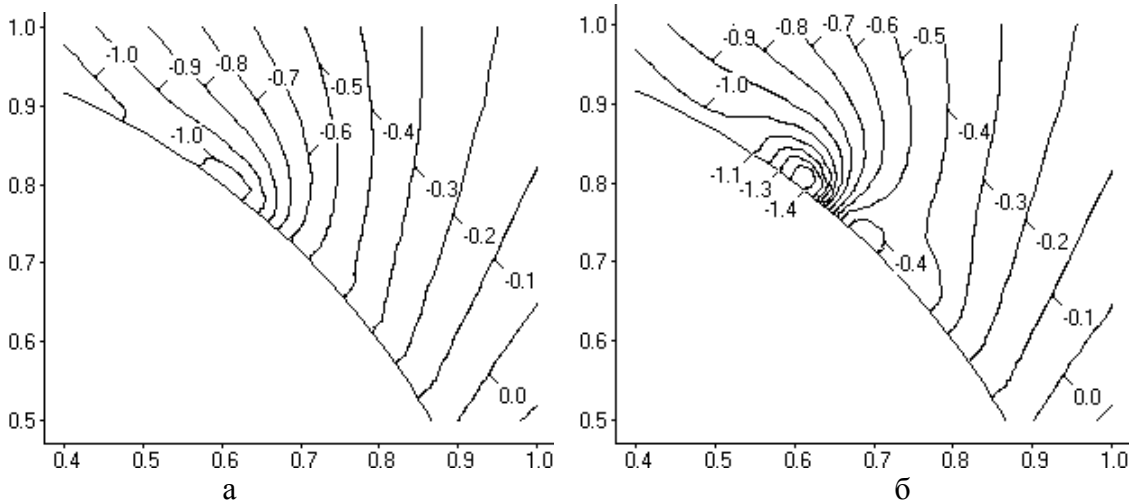
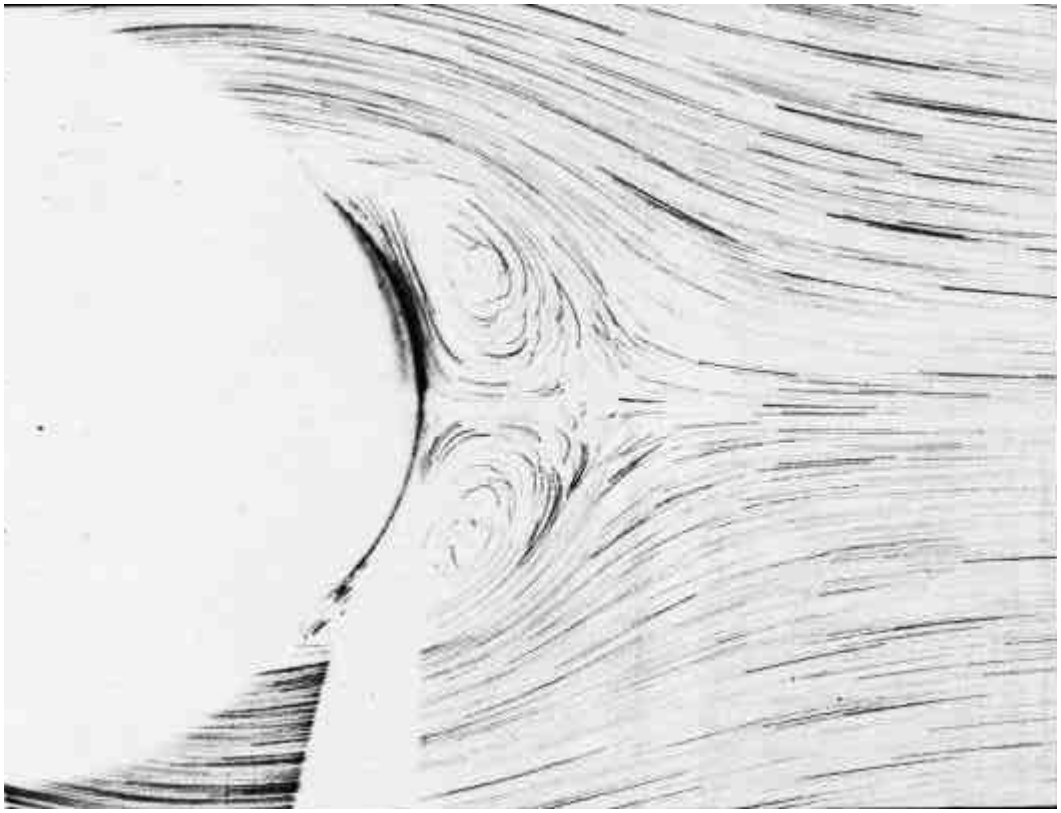


Рис.4.29. Изобары в момент времени t=5.0

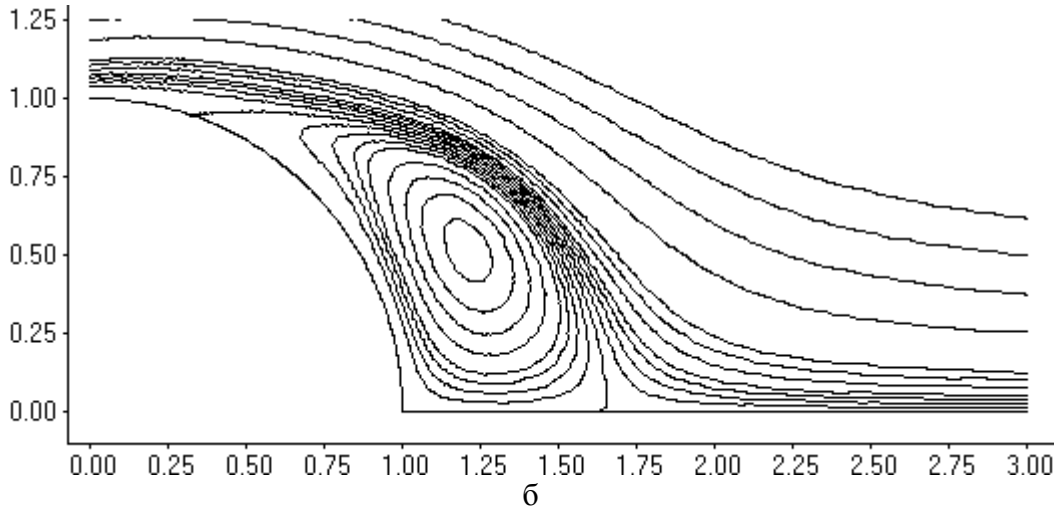


а б

Рис.4.30. Изобары в моменты времени: а – t=1.4, б – t=1.5

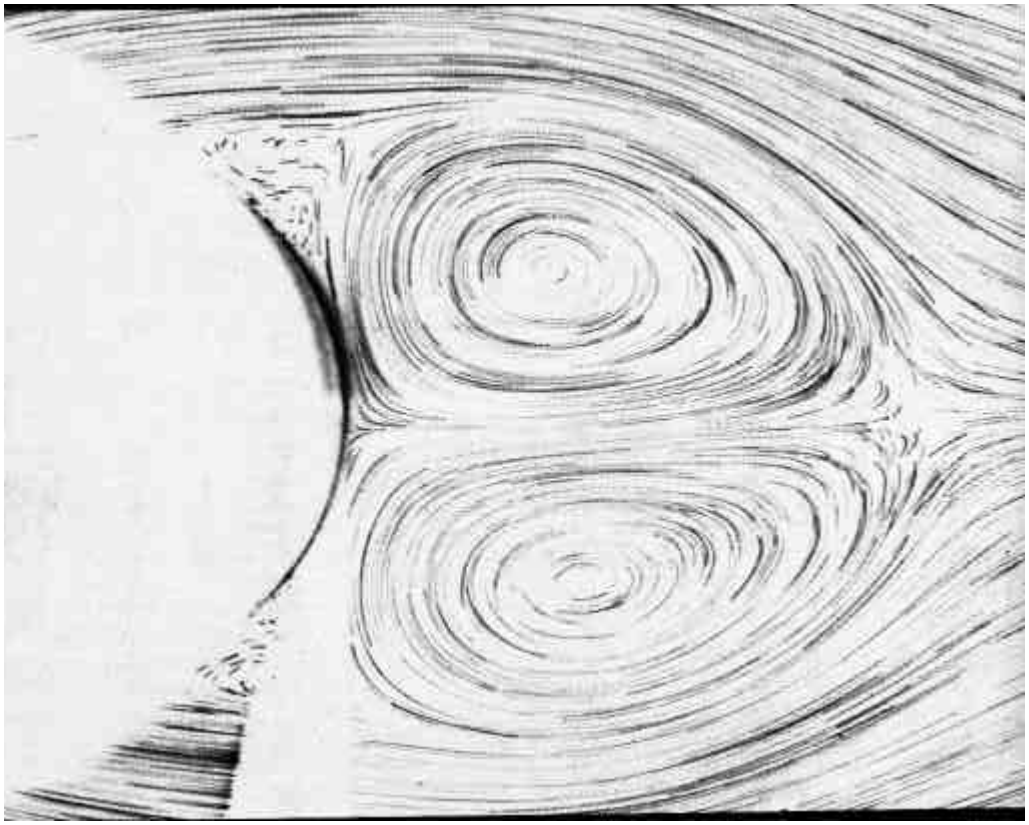


а

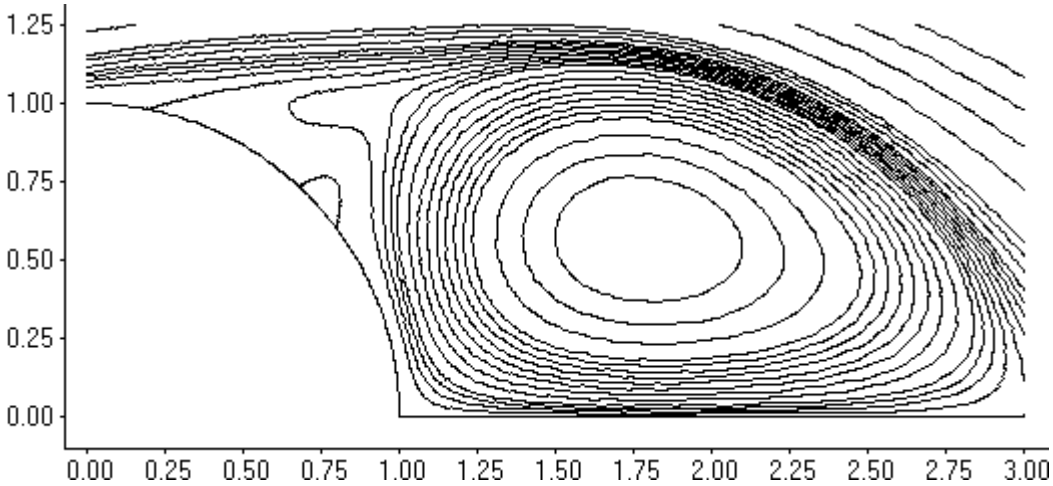


б

Рис.4.31.Линии тока при Re=500, t =1: а – эксперимент, б – расчет

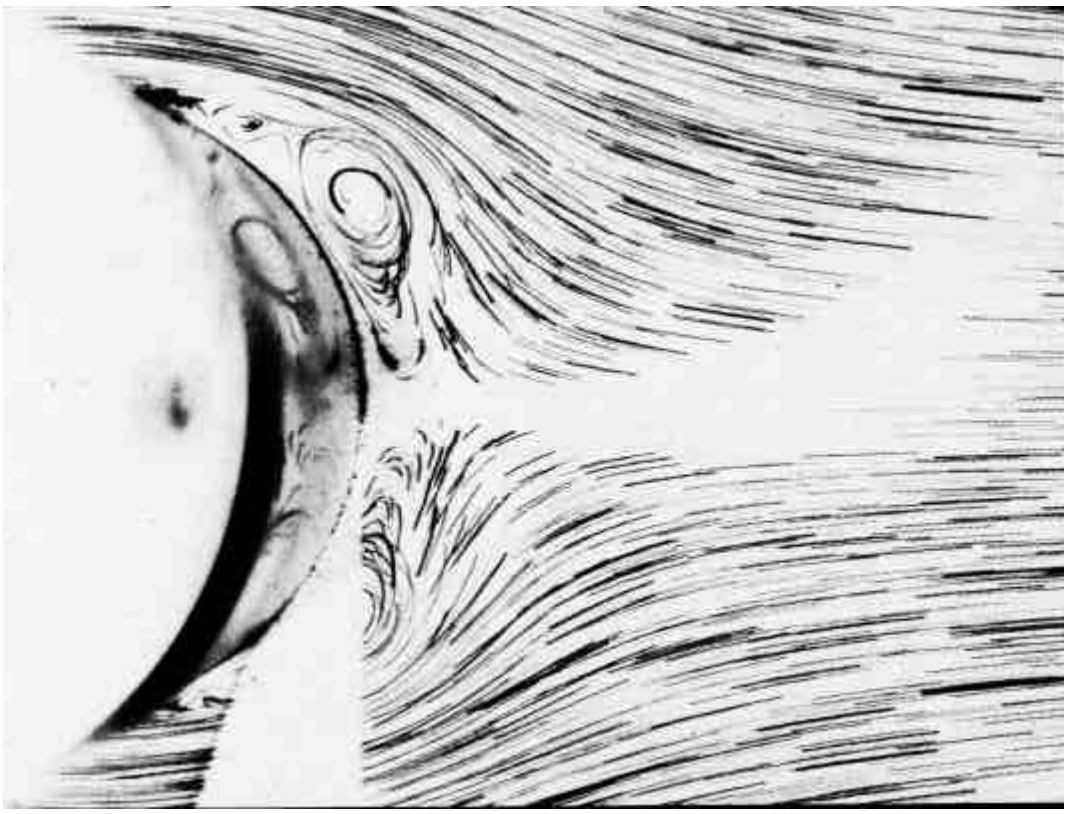


а

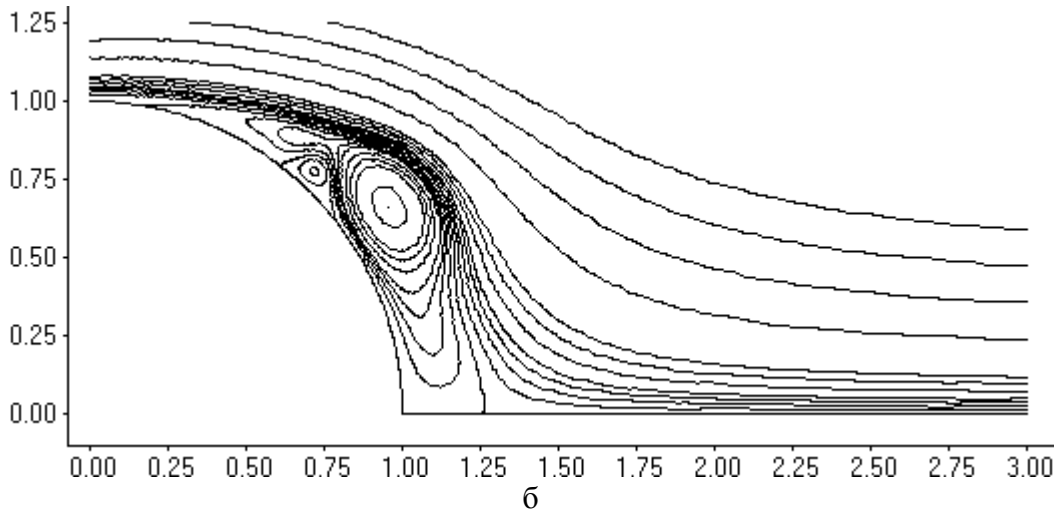


б

Рис.4.32.Линии тока при Re=500, t =3: а – эксперимент, б – расчет

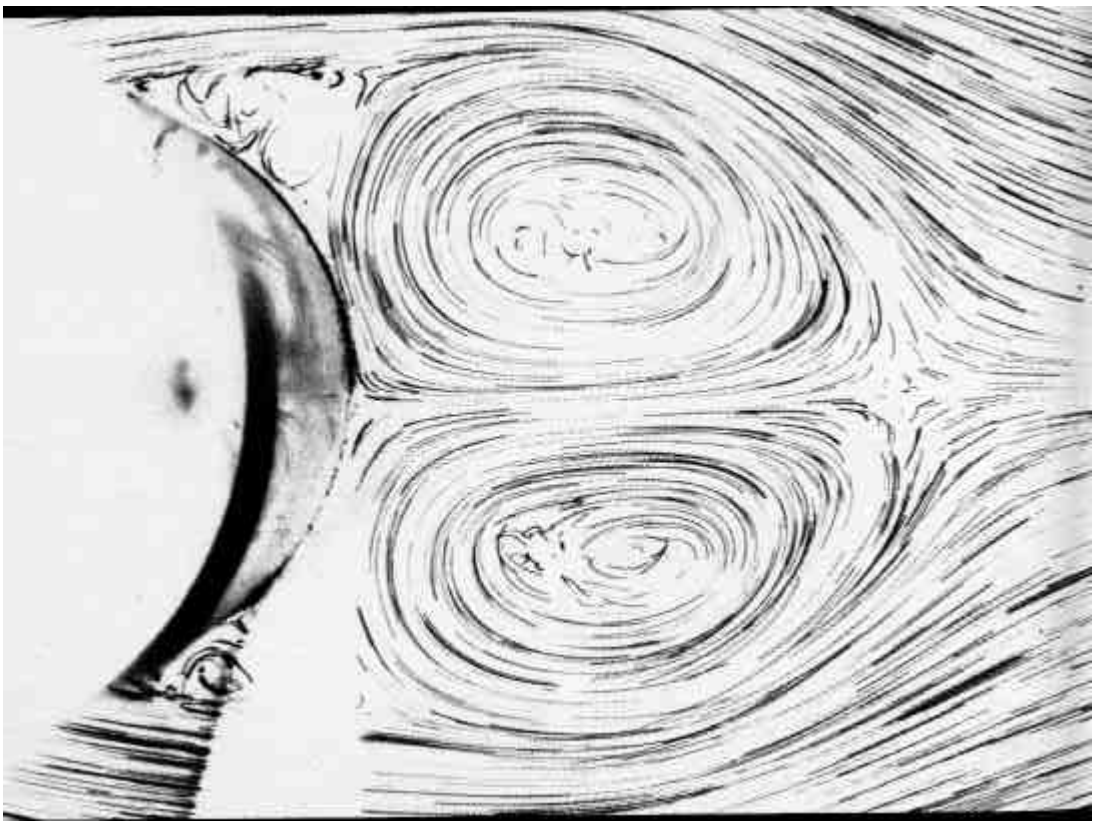


а

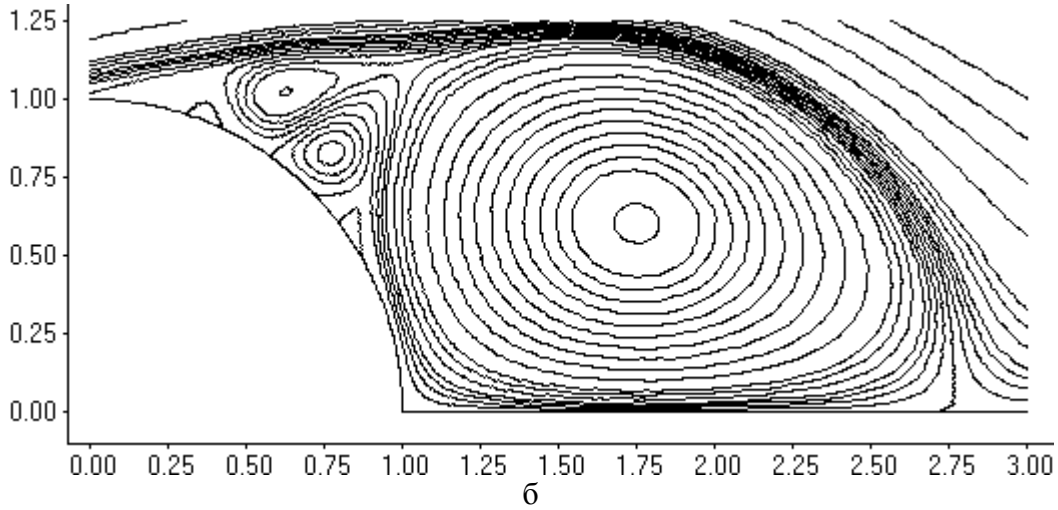


б

Рис.4.33.Линии тока при Re=5000, t =1: а – эксперимент, б – расчет



а



б

Рис.4.34.Линии тока при Re=5000, t =3: а – эксперимент, б – расчет

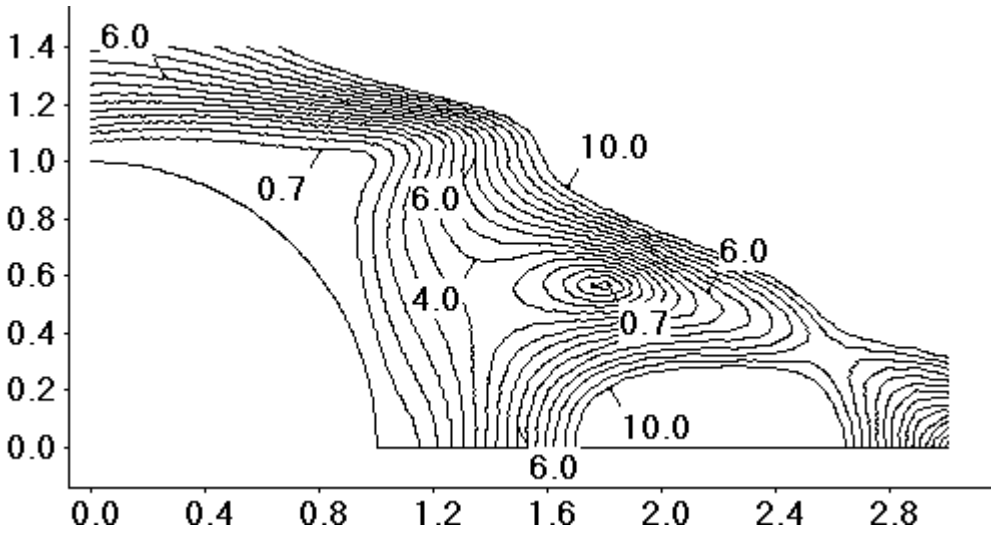


Рис.4.35. Изолинии сеточного числа Пекле при Re=5000, t =3

Обтекание цилиндра при движении из состояния покоя с числами Рейнольдса порядка 10^5 достаточно быстро переходит в турбулентный режим течения, кроме того, учет вязких эффектов затруднен в силу того, что практически во всей расчетной области сеточные числа Пекле больше 10. Рассмотрим нестационарное обтекание цилиндра при меньших числах Рейнольдса. На рис.4.31 – рис.4.34 приведено сравнение рассчитанных линий тока и визуализации течения [20] для чисел $Re=UD/\nu=500$, 5000, в различные моменты безразмерного времени $t=t'U/D$. На рисунках видно, что численное решение дает структуру течения, совпадающую со структурой, полученной в эксперименте. Хорошее совпадение наблюдается как для крупномасштабной рециркуляционной зоны, так и для мелкомасштабной вихревой структуры, находящейся непосредственно за точкой отрыва рис.4.33, рис.4.34.

На рис.4.35 приведены изолинии сеточного числа Пекле для сетки 120x200 и Re=5000. На рисунке видно, что вязкие эффекты могут быть адекватно рассчитаны не только у поверхности цилиндра, но и в ближнем следе, что подтверждается хорошим совпадением расчетных и экспериментальных данных.

В целом, на основании проведенных расчетов, можно сделать следующие выводы.

1. Получено численное решение задачи о развитии нестационарного, неустойчивого отрыва потока при обтекании цилиндра из состояния покоя. Сравнения расчетных и экспериментальных данных, полученных при числах Рейнольдса Re=500, 5000 [20] показывают хорошее согласование, как для крупномасштабных, так и для мелкомасштабных структур течения.
2. Показано, что источником неустойчивости в данной задаче является неустойчивость Гельмгольца в скоростном слое смешения внешнего течения и обратного тока.
3. Исследовано влияние шага сетки и размеров расчетной области на вычисление коэффициента трения. Показано, что влияние перечисленных факторов пренебрежимо мало вплоть до начала неустойчивости t=1.3.
4. Из сравнения решений, полученных на сетках 80x120 и 120x200, следует, что мелкомасштабные вихри не оказывают заметного влияния на решение вплоть до безразмерного времени t=4.0. Дальнейшие расчеты на указанных сетках без

применения моделей замыкания для вихрей подсеточного масштаба могут дать существенную погрешность. Кроме того, правильно учесть вязкие эффекты при числе Рейнольдса порядка 10^5, можно только непосредственно возле стенки цилиндра.

5. Расчеты показали, что, до момента возникновения неустойчивости, давление практически совпадает с давлением при потенциальном обтекании цилиндра. При этом рассчитанные распределения коэффициента трения, в рамках теории пограничного слоя [115] и по уравнениям Навье-Стокса практически не отличаются. Возникновение вихревой неустойчивости (при t>1.3, для $\mathrm{Re}=10^5$) приводит к существенному изменению распределения давления в пограничном слое, по сравнению с потенциальным течением. Пренебрежение взаимным влиянием полей скорости и давления в рамках теории пограничного слоя приводит к расхождению результатов, по сравнению с результатами полученными в настоящей работе по уравнениям Навье-Стокса.

4.1.3. Периодическое течение за цилиндром.

В заключение рассмотрим возможности разработанной методики на примере моделирования периодического отрывного течения за круговым цилиндром. Большое число работ посвящено экспериментальному изучению явления несимметричного периодического срыва вихрей, которое называют дорожкой Кармана [171], [20], [150], [122], [177], [181], [165]. Экспериментально установлены зависимости частоты срыва вихрей и числа Струхаля от числа Рейнольдса

$$\frac{nd^2}{\nu} = 0.212\frac{Ud}{\nu} - 4.5, \tag{4.14}$$

или

$$Sh = \frac{nd}{U} = \frac{d}{TU} = 0.212 - 4.5\frac{\nu}{Ud}, \tag{4.15}$$

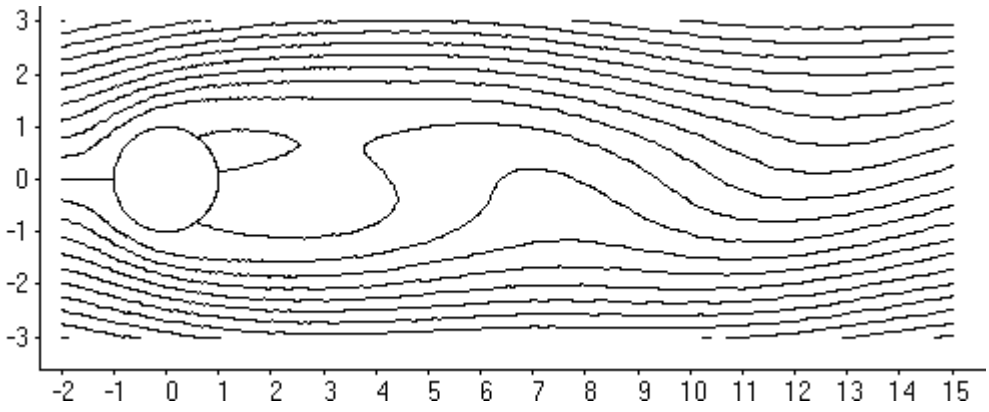
где Sh – число Струхаля, n – частота срыва вихрей, T – период срыва вихрей, U – скорость набегающего потока, d – диаметр цилиндра, ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости.

В работе [150] приводятся экспериментальные данные для конических цилиндров с малыми углами конусности. Оказалось, что для конических цилиндров зависимость числа Струхаля от числа Рейнольдса носит кусочно-гладкий характер. Существуют диапазоны чисел Рейнольдса, в которых зависимость числа Струхаля асимптотически стремится к (4.15), а на границе диапазонов частота срыва меняется скачком. Аналогичное явление наблюдалось и для параллельного кругового цилиндра, обтекаемого слабо неоднородным потоком жидкости [150].

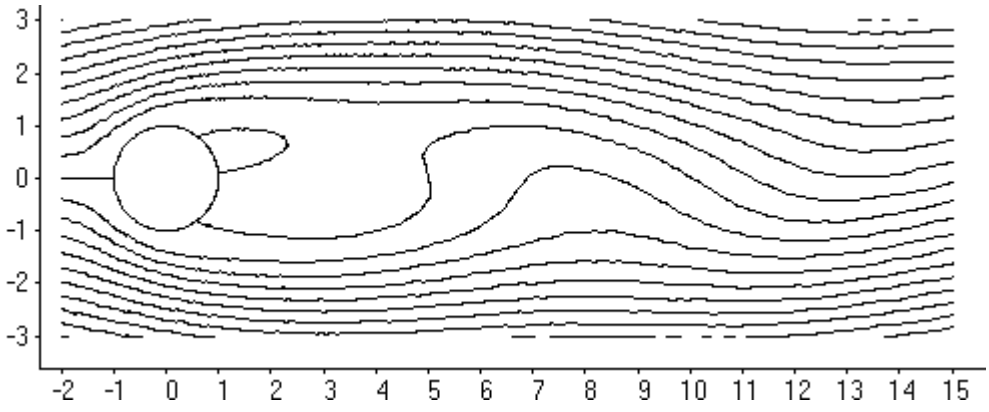
Численное решение задачи о периодическом течении вокруг цилиндра можно найти в работах [8], [11], [149], [159], [10], [151], [88]. Полученные различными авторами результаты свидетельствуют о том, что частота срыва вихрей или число Струхаля можно достаточно точно определить даже на относительно грубых сетках [11]. Детальный расчет течения в следе за цилиндром требует построения адаптивных сеток с максимальным количеством узлов вблизи поверхности цилиндра и в области следа [10], [151], [159].

В настоящей работе задача о периодическом течении за цилиндром решалась численно. При этом были использованы полярные сетки с количеством узлов 30x60, 60x120 и 120x240 узлов. Было проведено сгущение сетки к поверхности цилиндра и в области следа. Поскольку при симметричных начальных и граничных условиях численный метод дает симметричное стационарное решение данной задачи [11], то для получения периодического течения на начальном этапе вносилось асимметричное возмущение в граничные условия в виде вращения цилиндра. Было получено, что окончательно сформировавшееся периодическое течение не зависит от вида и интенсивности начального возмущения.

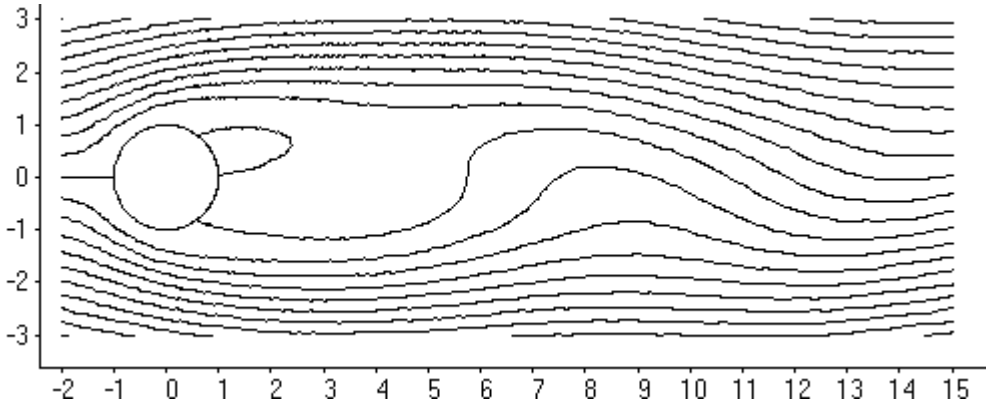
Расчеты проводились для трех чисел Рейнольдса, посчитанных по диаметру цилиндра. На рис.4.1.3.1 - рис.4.59 приведены мгновенные картины линий тока и изобар в различные моменты времени для чисел Re=50, 100, 200. На рисунках отчетливо просматривается периодический характер течения, который несколько отличается при разных числах Рейнольдса.



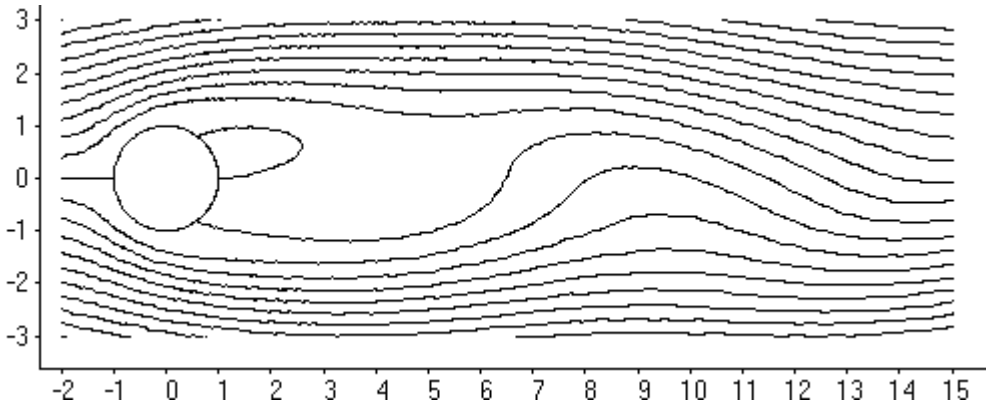
t=100



t=101

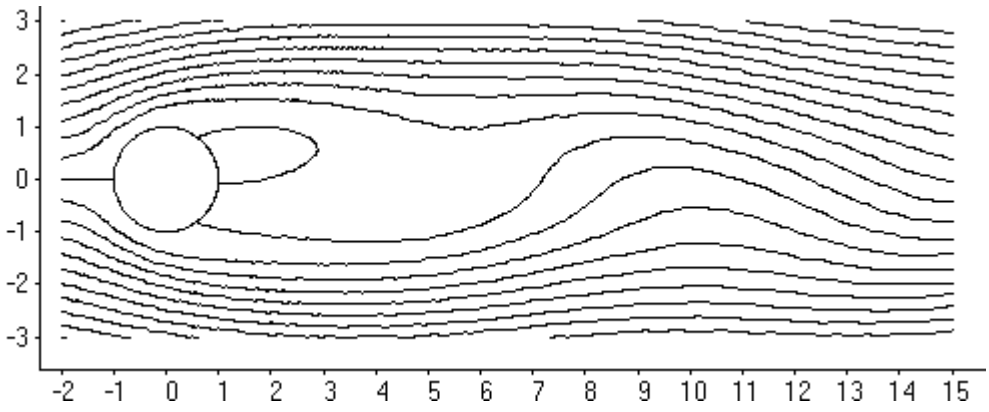


t=102

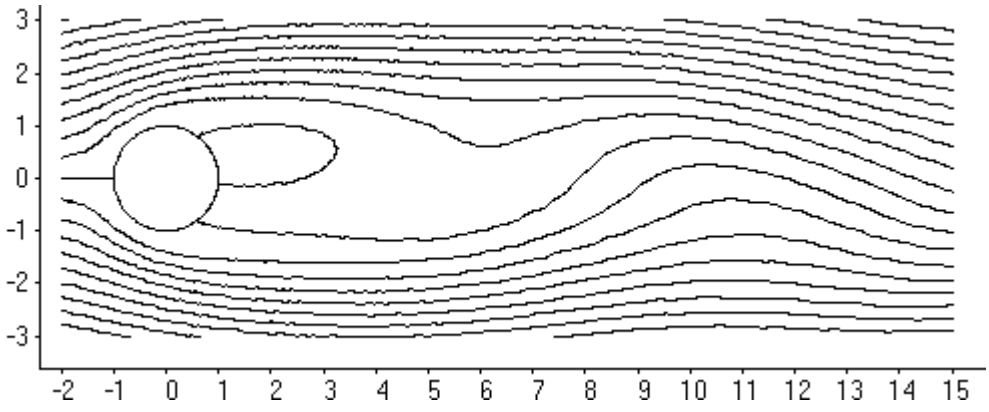


t=103

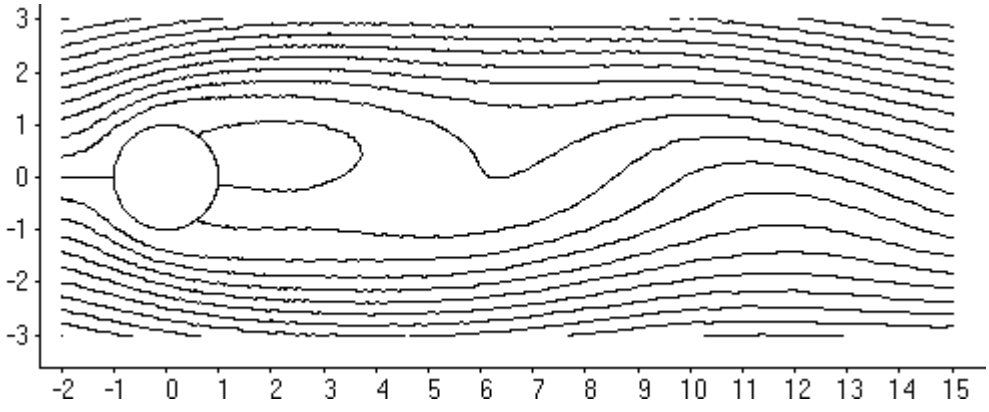
Рис.4.36. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Линии тока



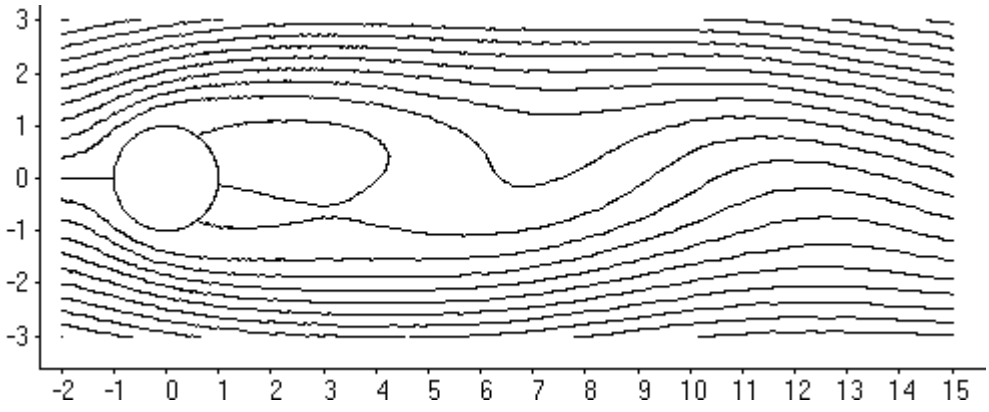
t=104



t=105

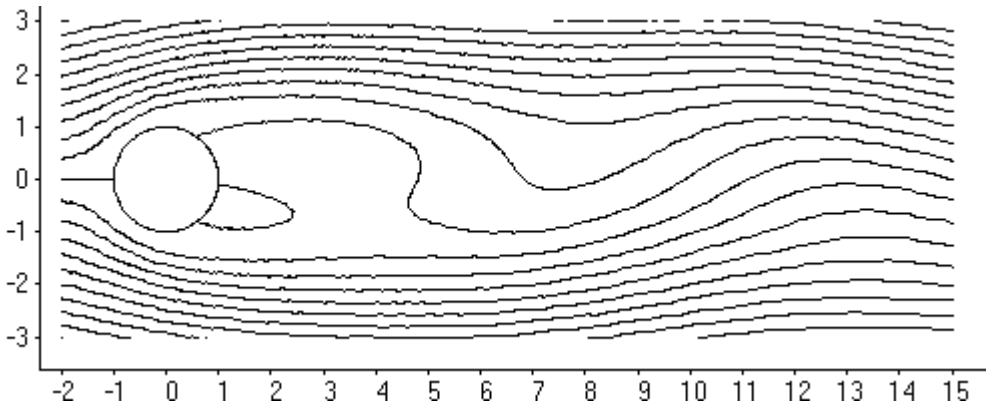


t=106

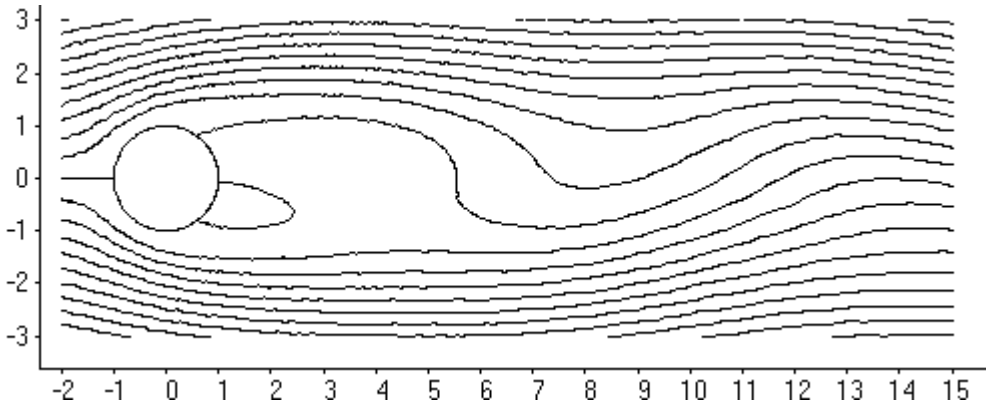


t=107

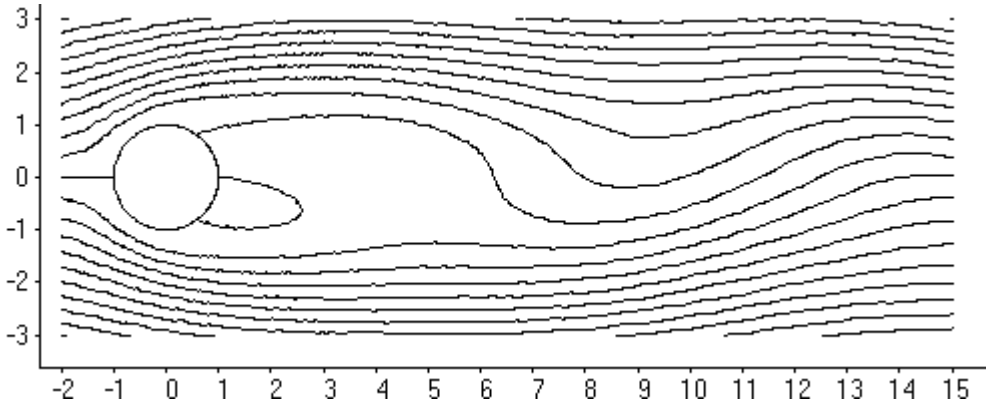
Рис.4.37. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Линии тока



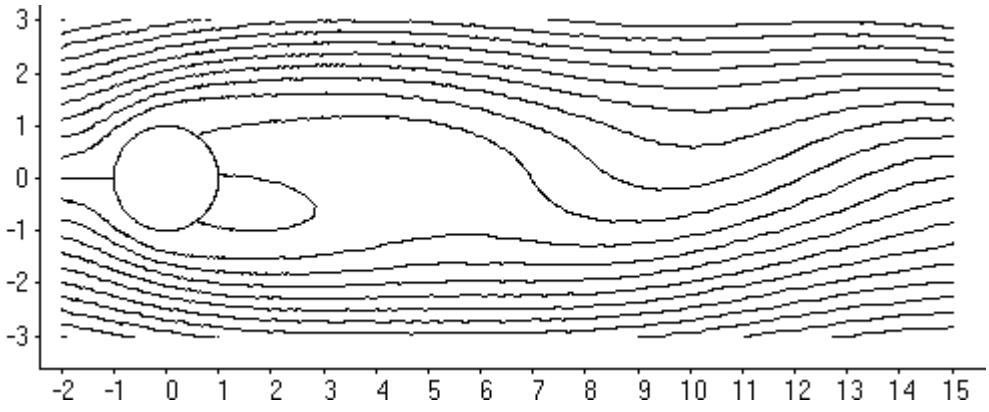
t=108



t=109

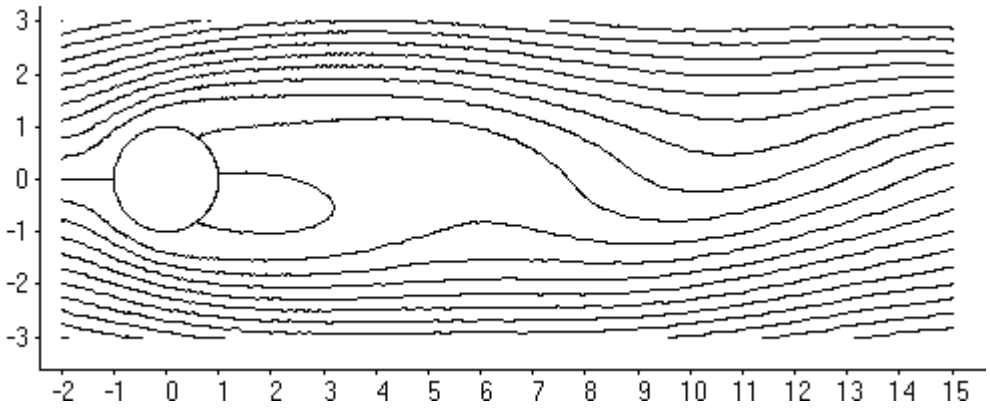


t=110

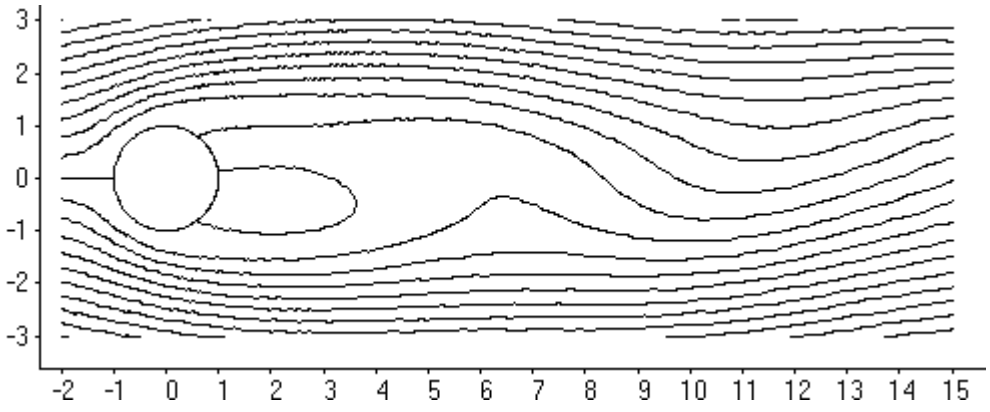


t=111

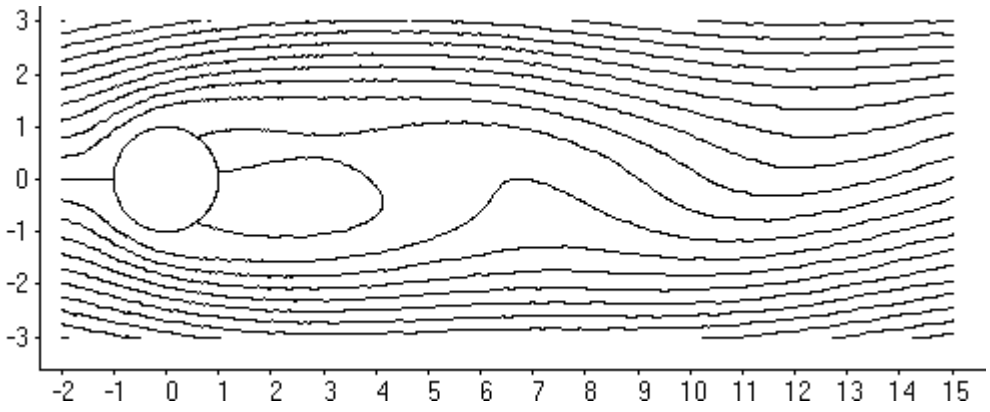
Рис.4.38. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Линии тока



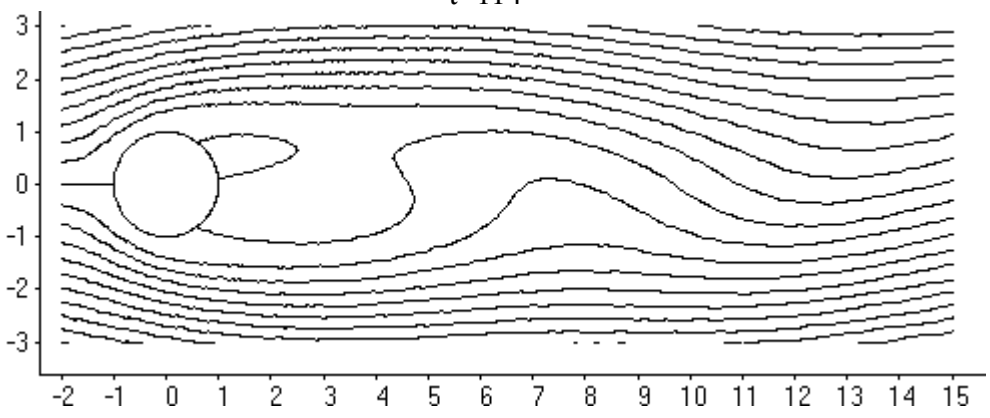
t=112



t=113

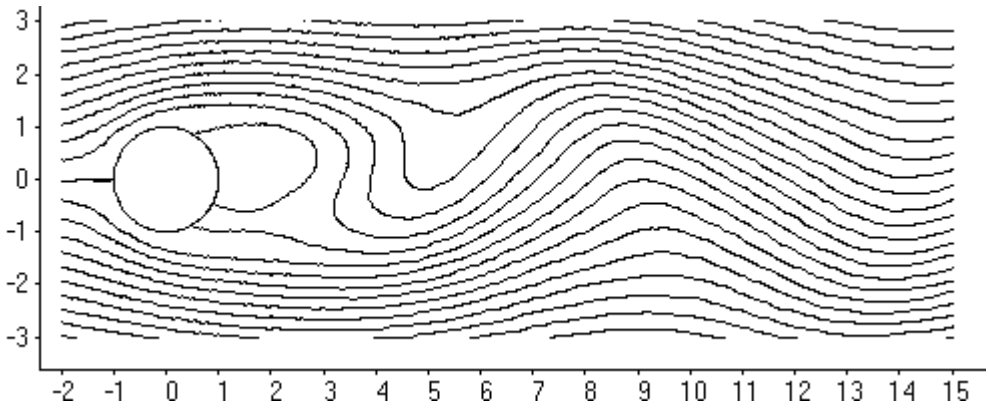


t=114

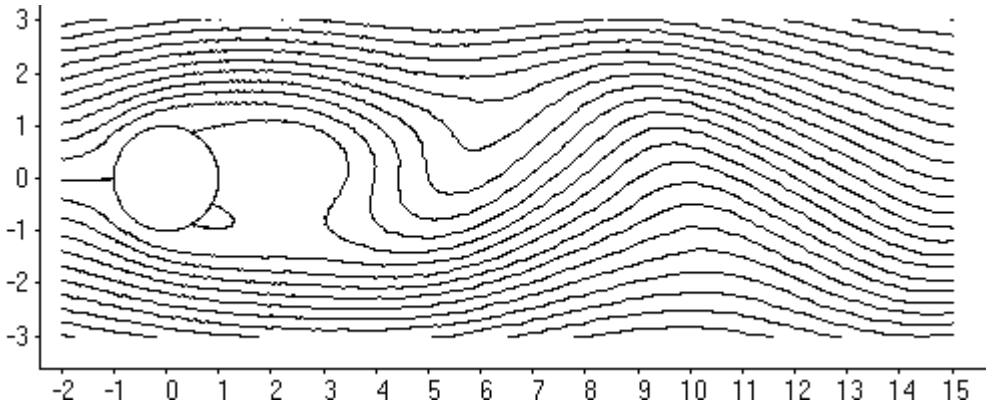


t=115

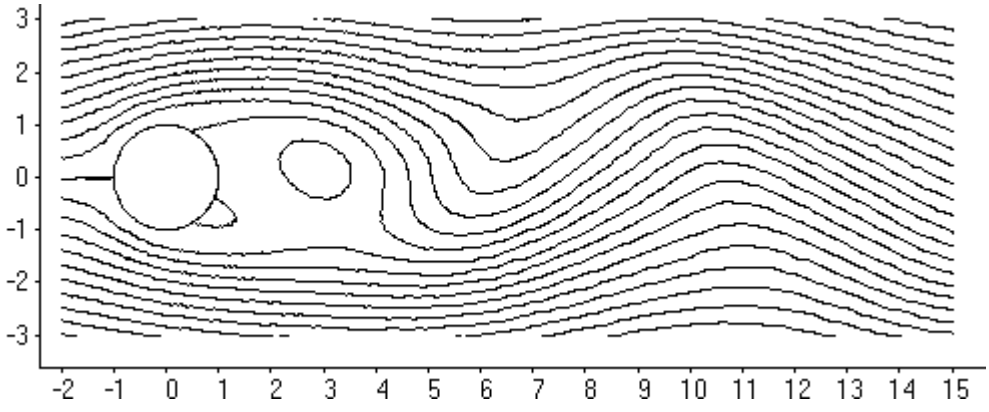
Рис.4.39. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Линии тока



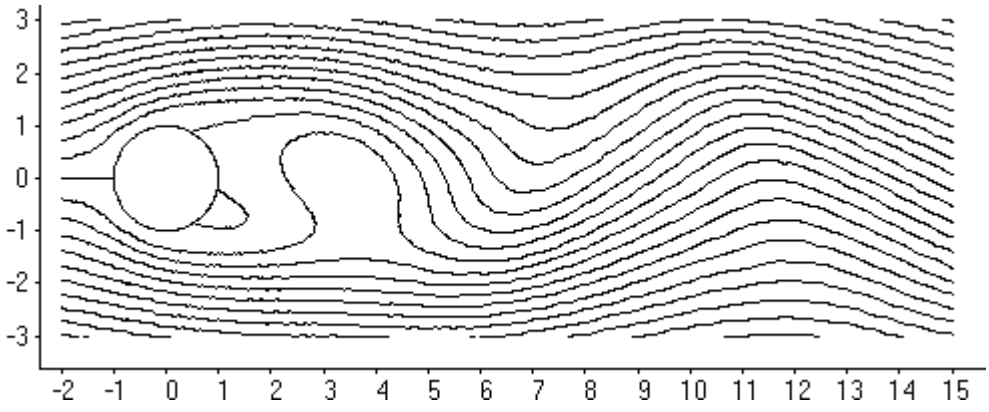
t=100



t=101

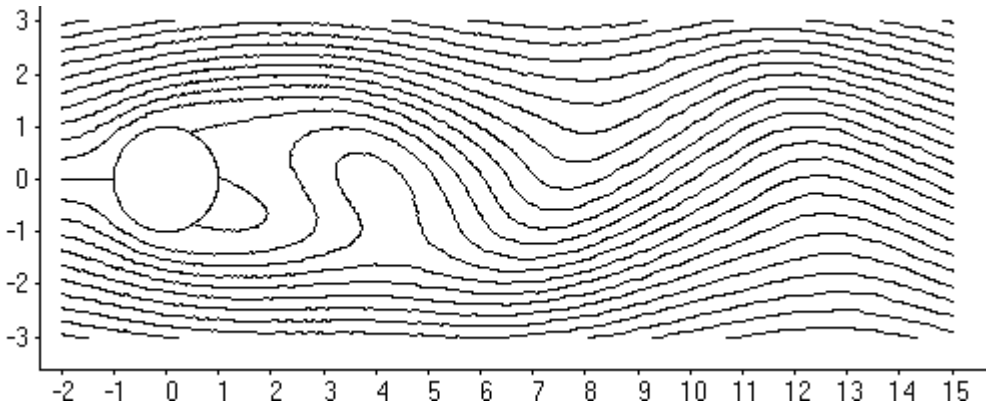


t=102

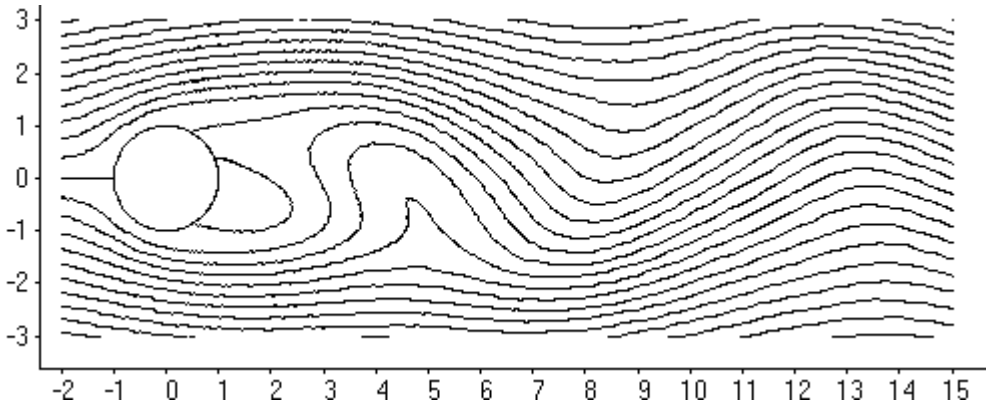


t=103

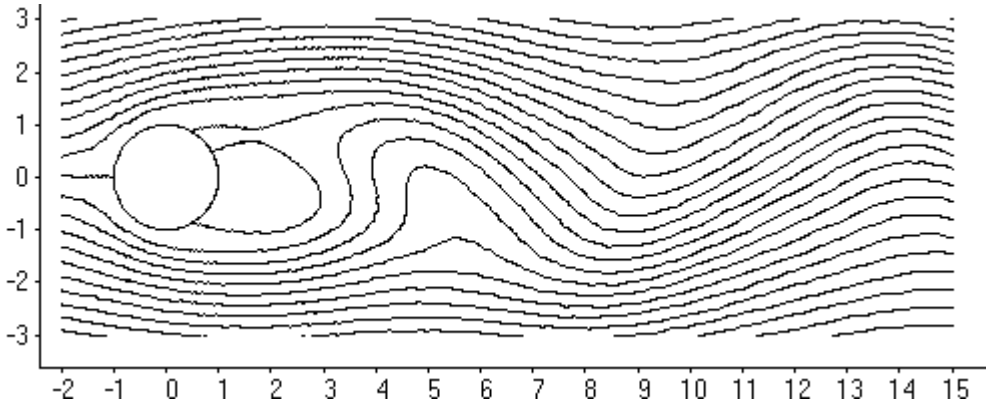
Рис.4.40. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Линии тока



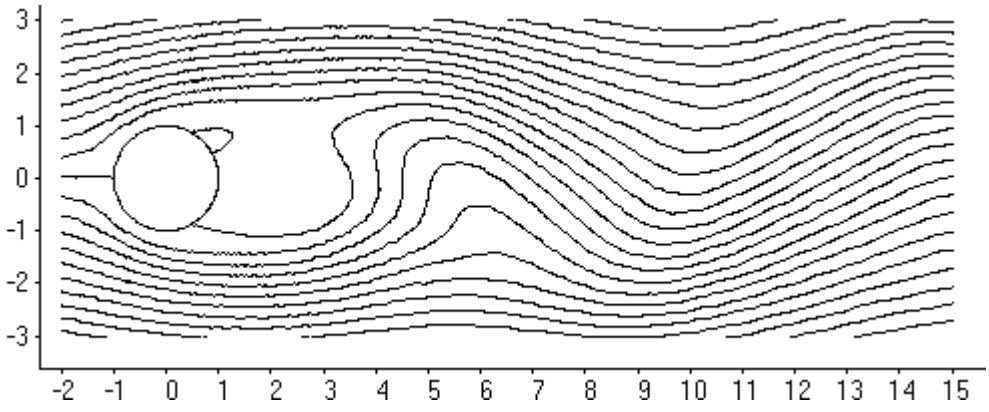
t=104



t=105

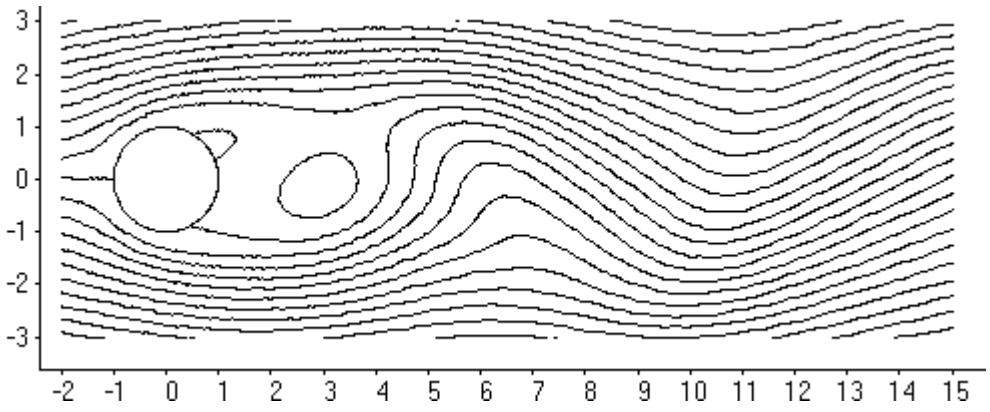


t=106

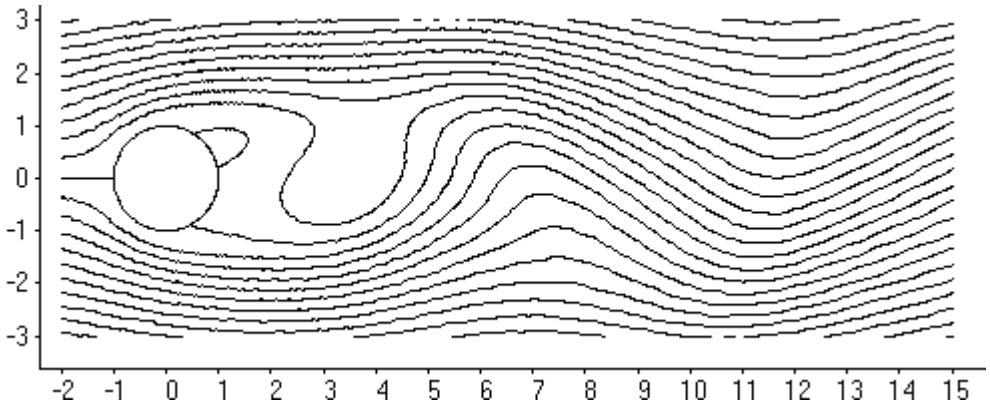


t=107

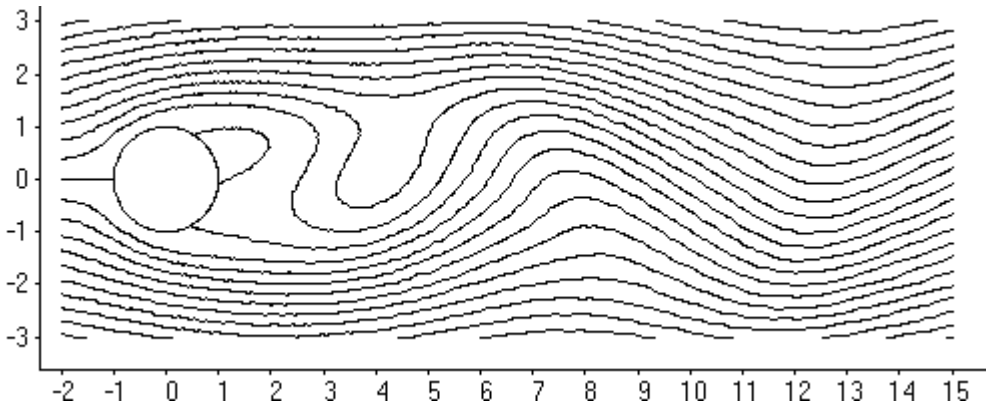
Рис.4.41. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Линии тока



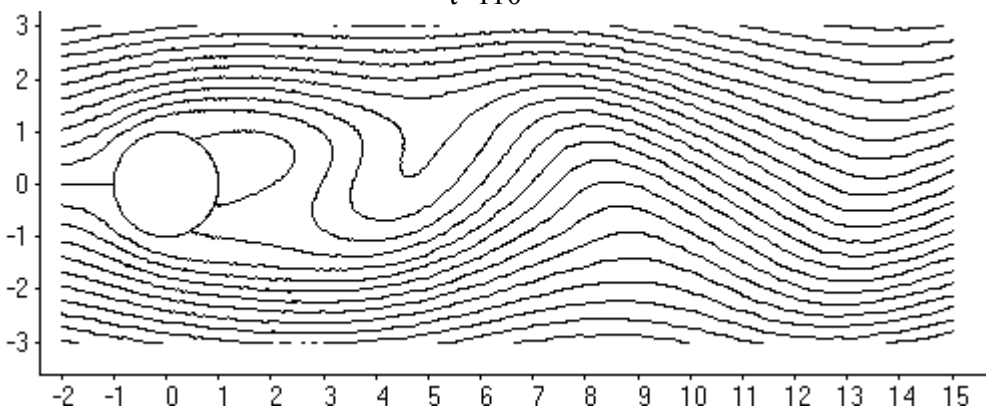
t=108



t=109

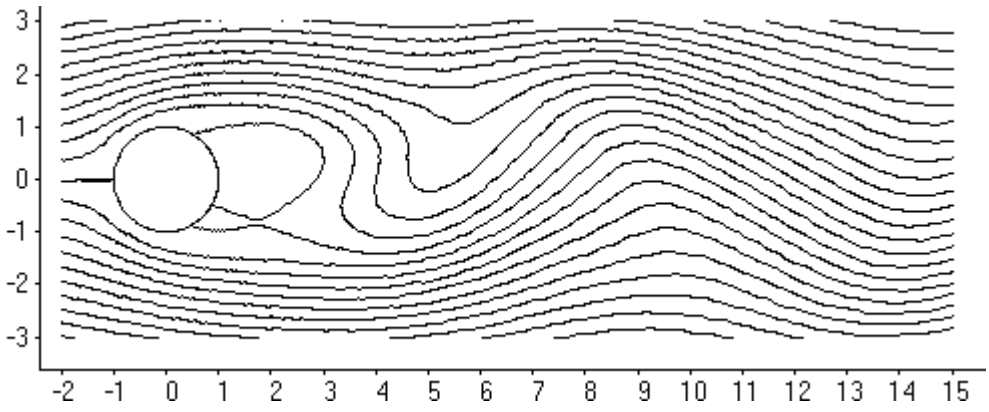


t=110

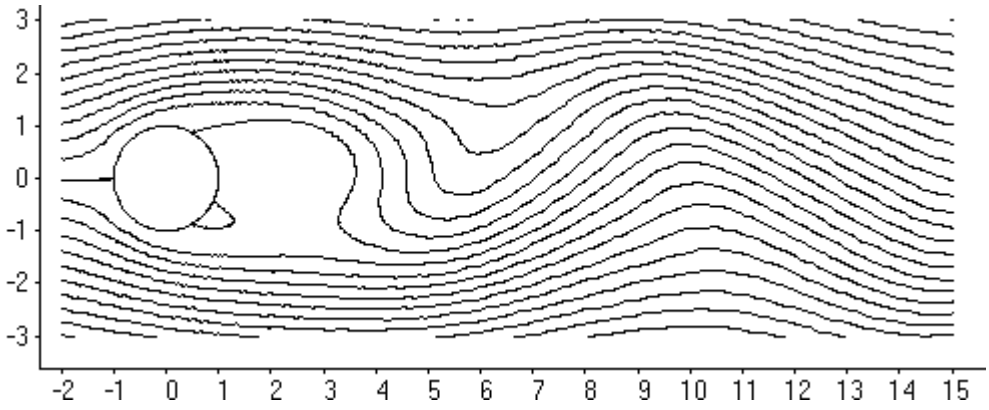


t=111

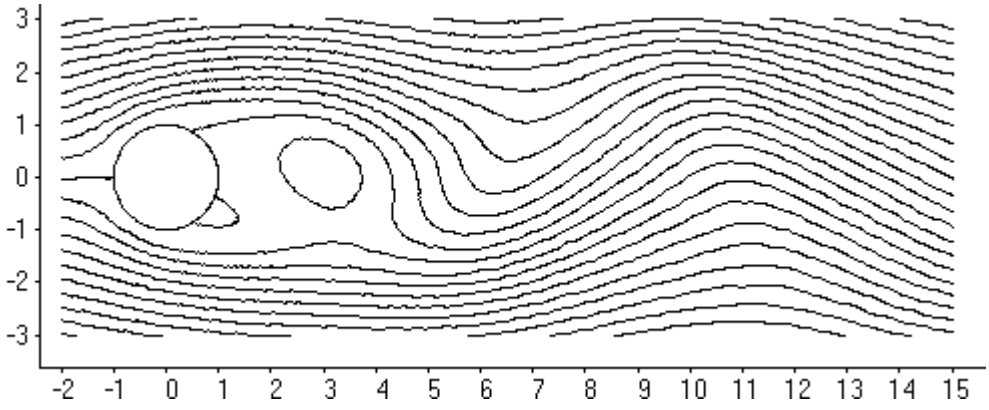
Рис.4.42. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Линии тока



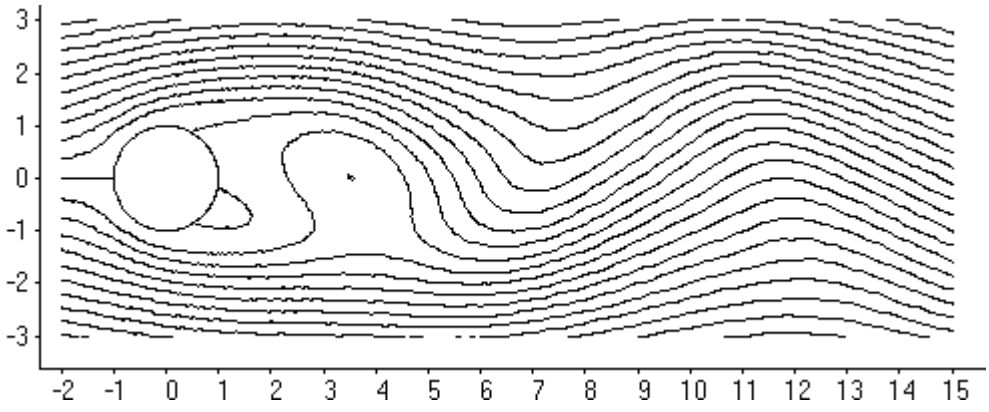
t=112



t=113

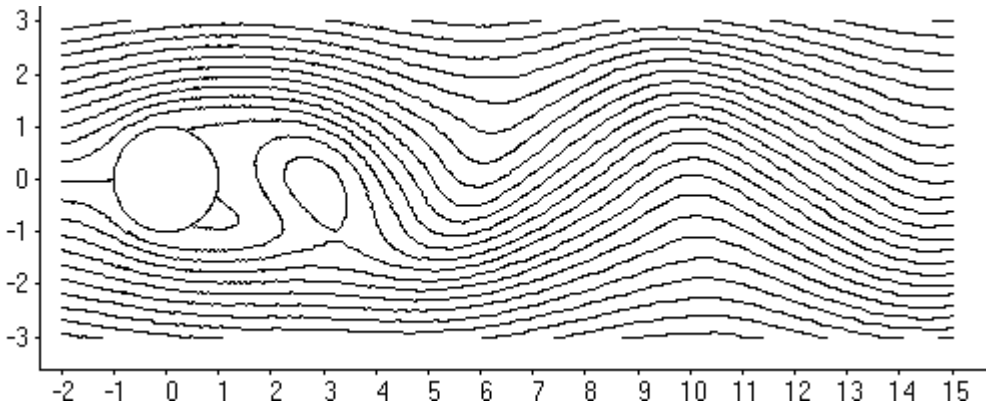


t=114

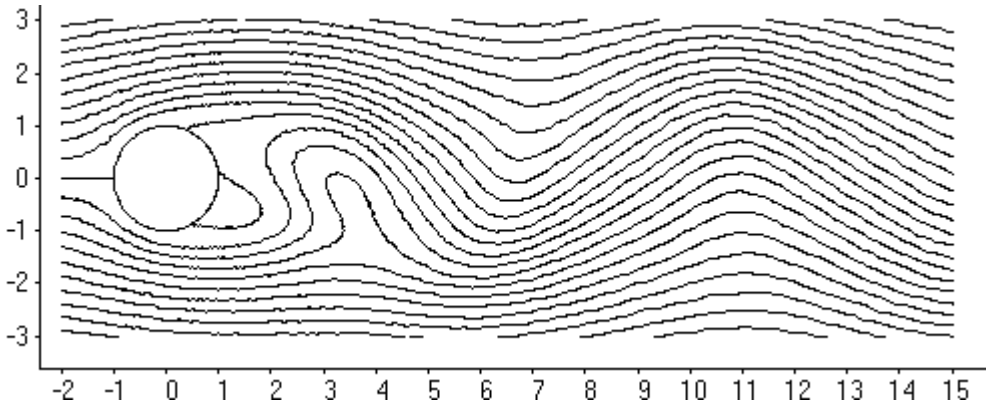


t=115

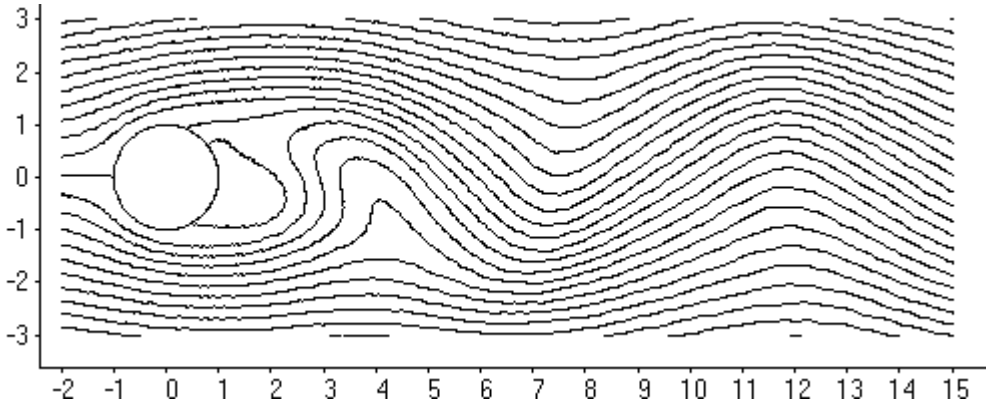
Рис.4.43. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Линии тока



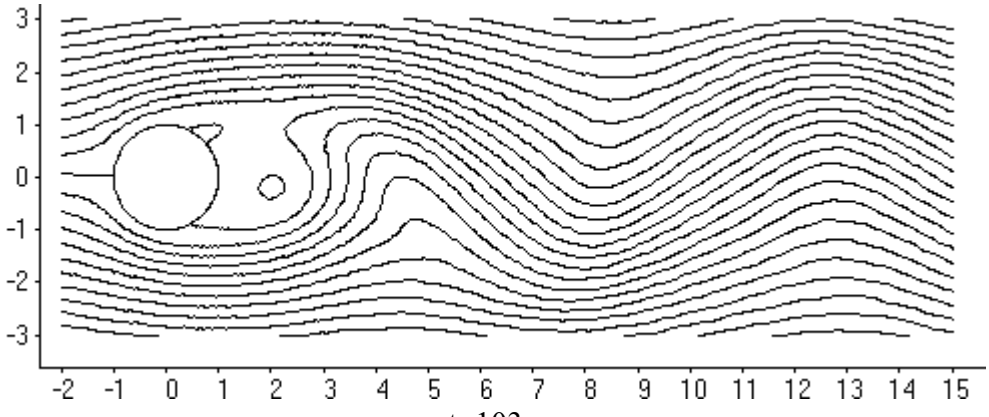
t=100



t=101

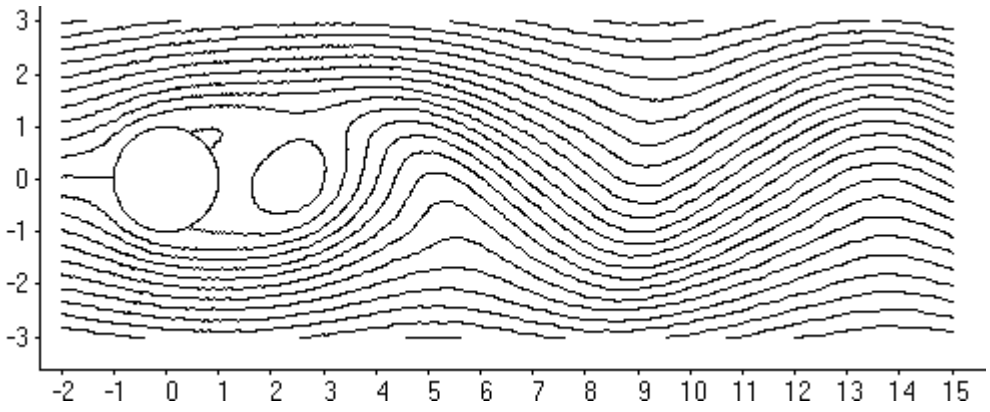


t=102

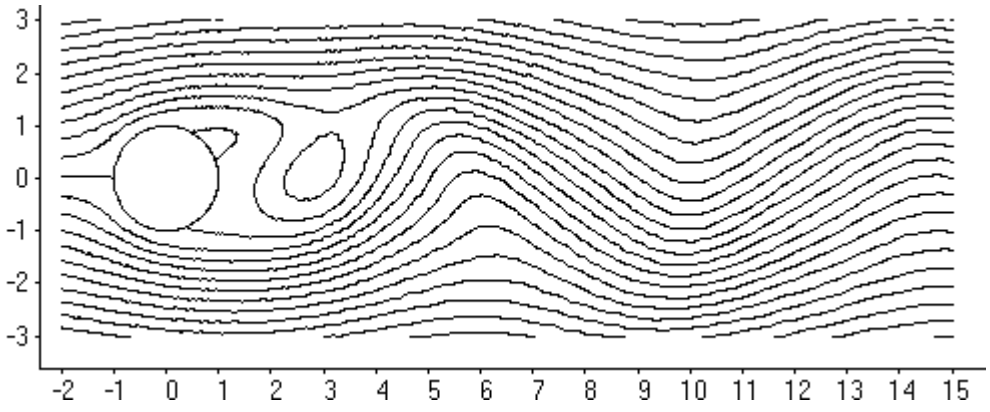


t=103

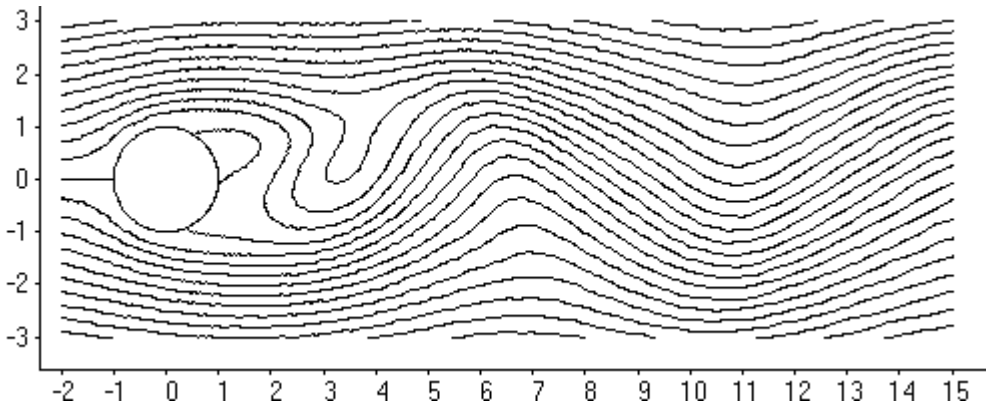
Рис.4.44. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Линии тока



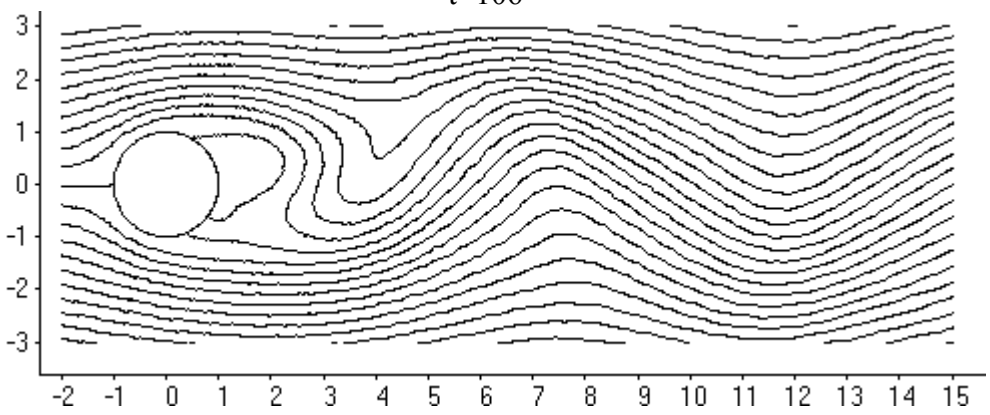
t=104



t=105

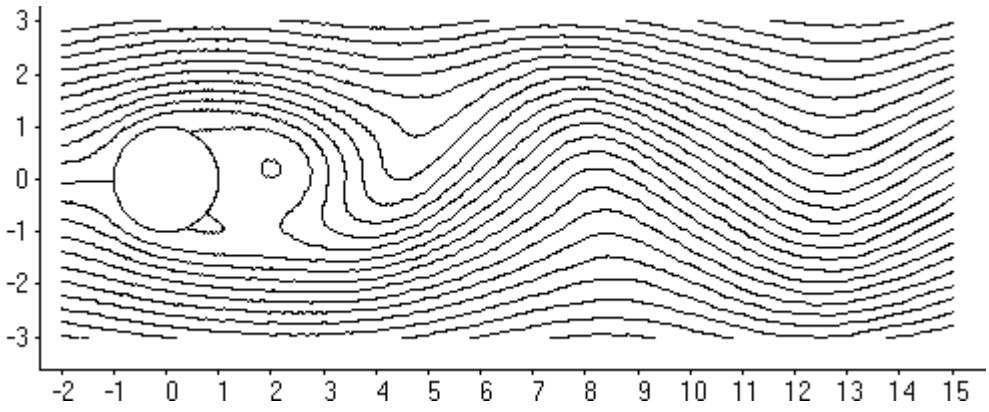


t=106

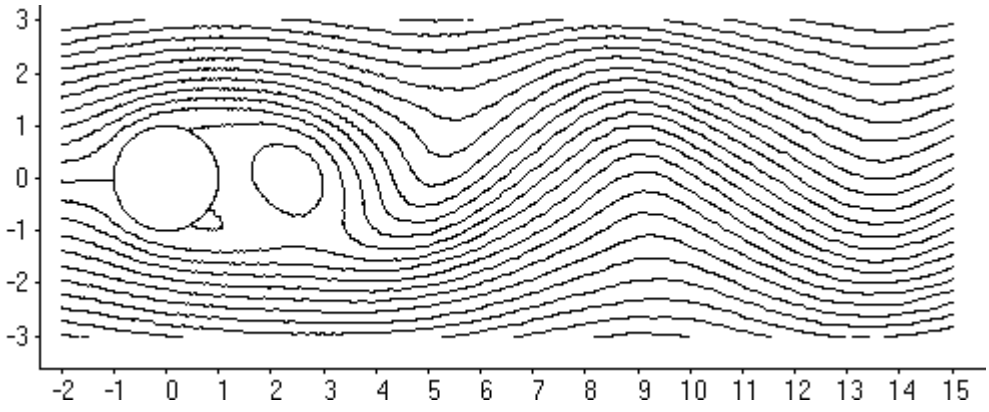


t=107

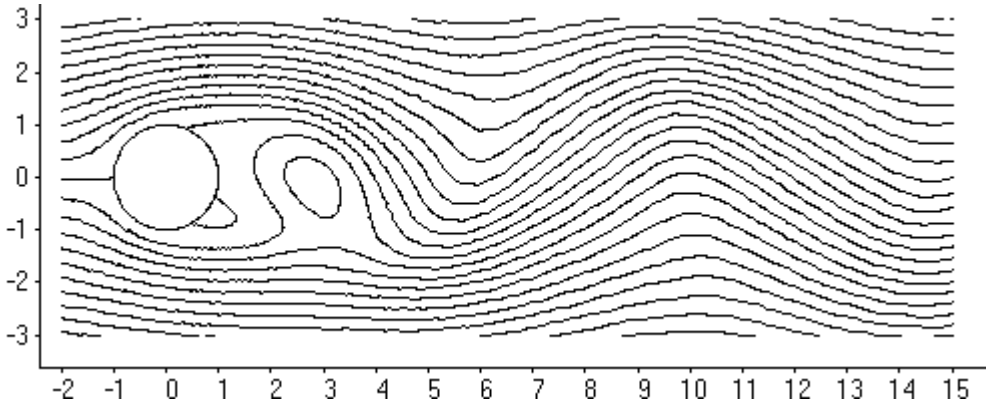
Рис.4.45. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Линии тока



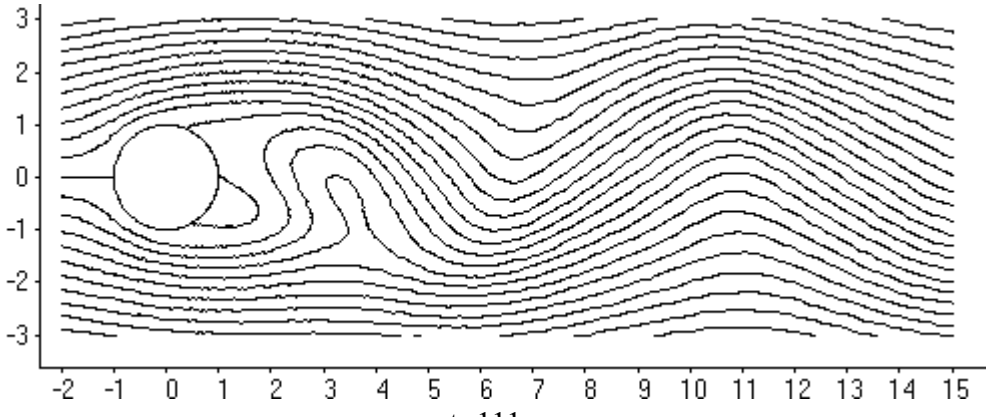
t=108



t=109

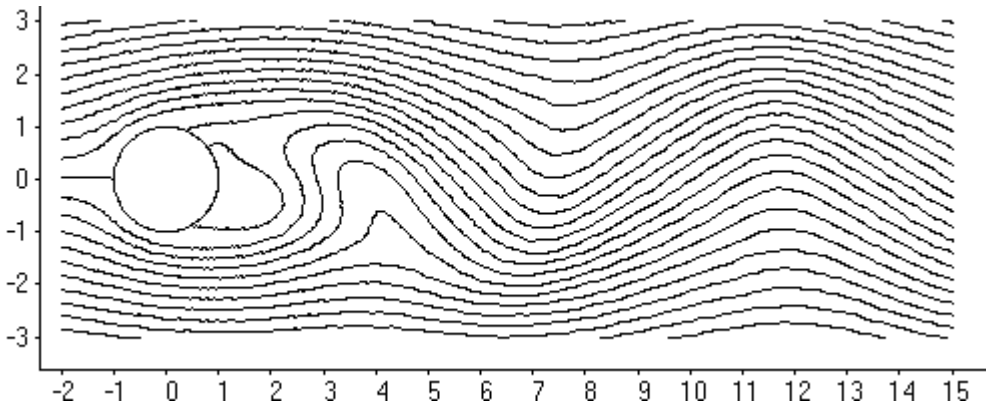


t=110

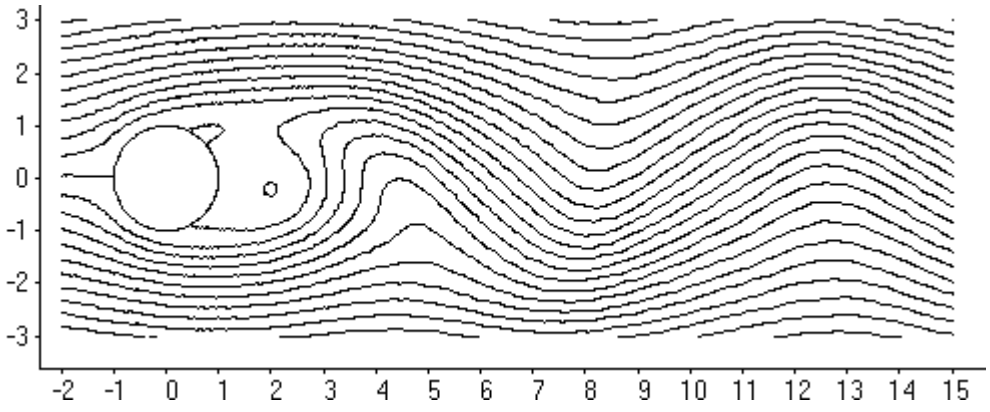


t=111

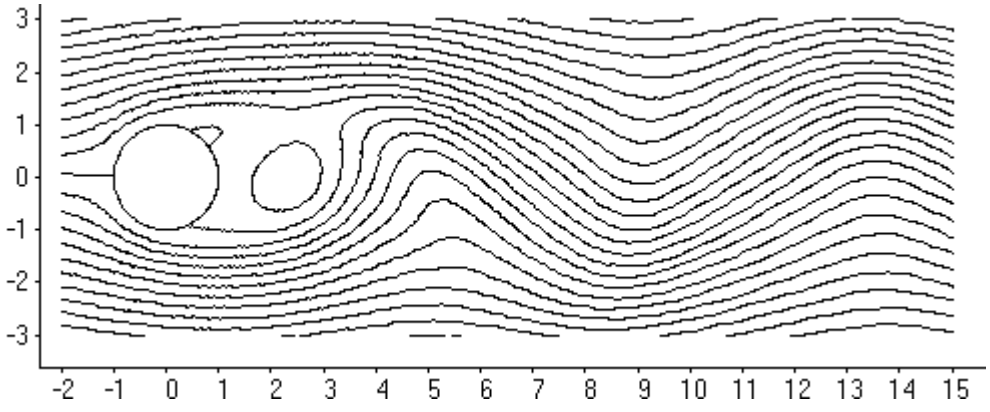
Рис.4.46. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Линии тока



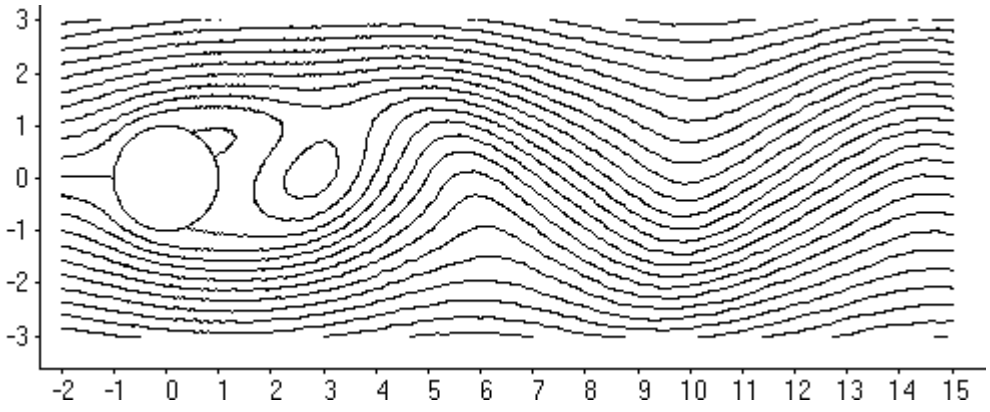
t=112



t=113

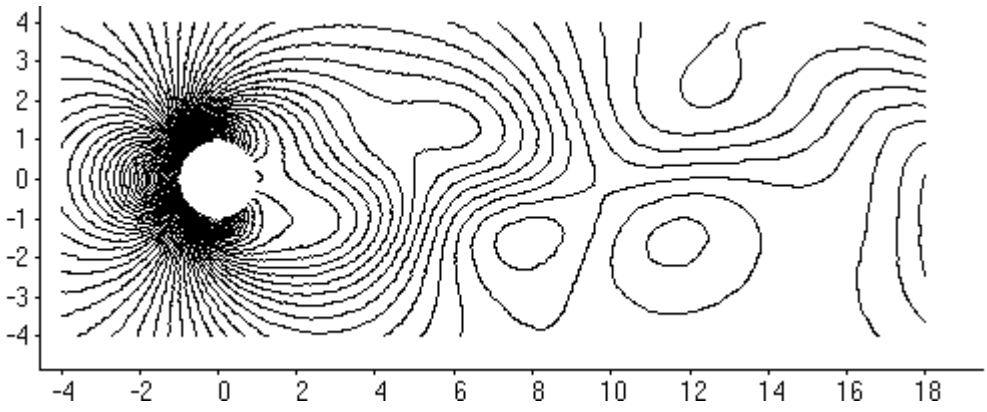


t=114

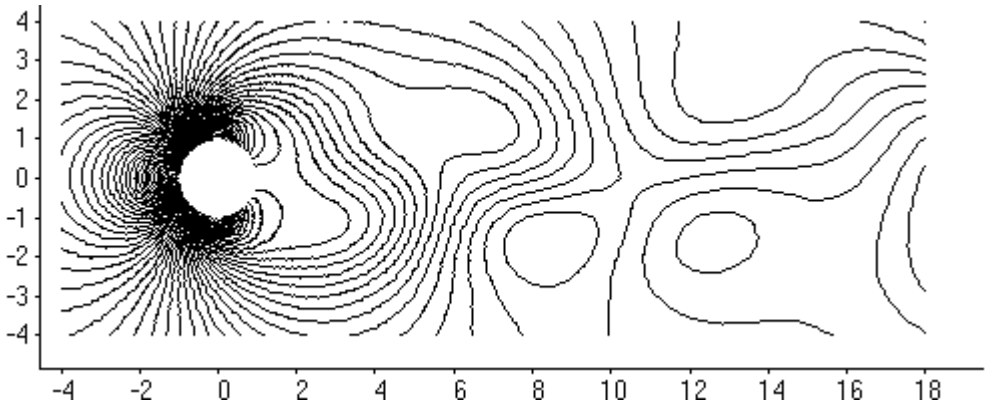


t=115

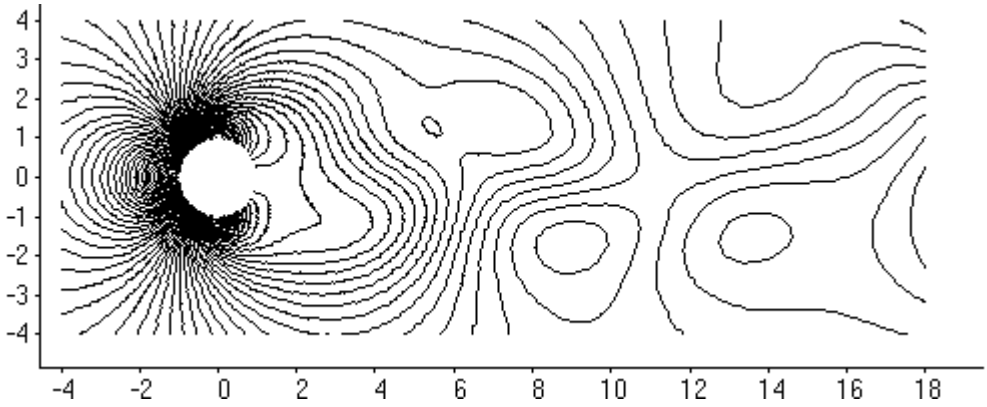
Рис.4.47. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Линии тока



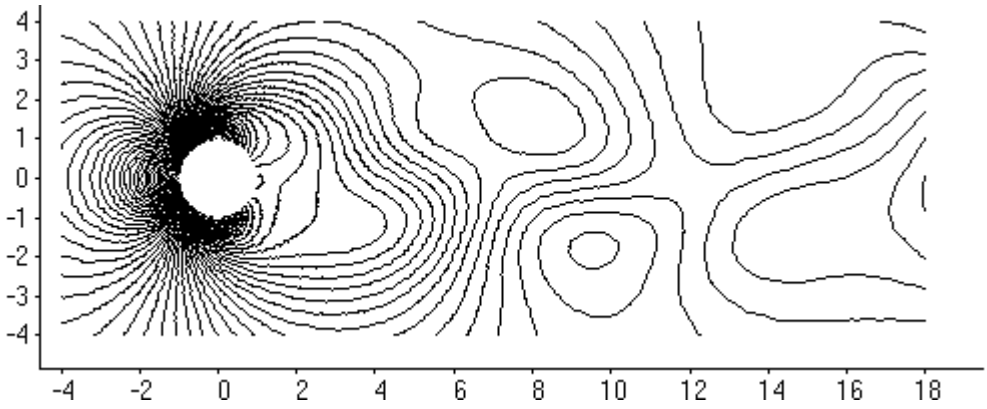
t=100



t=101

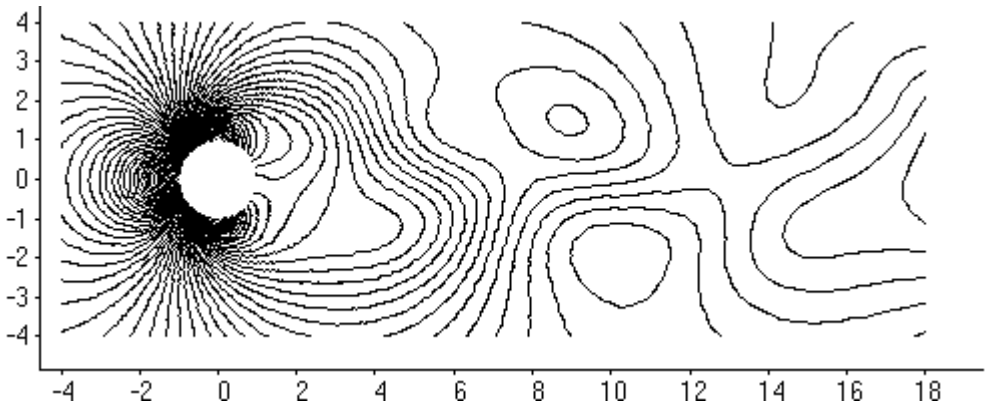


t=102

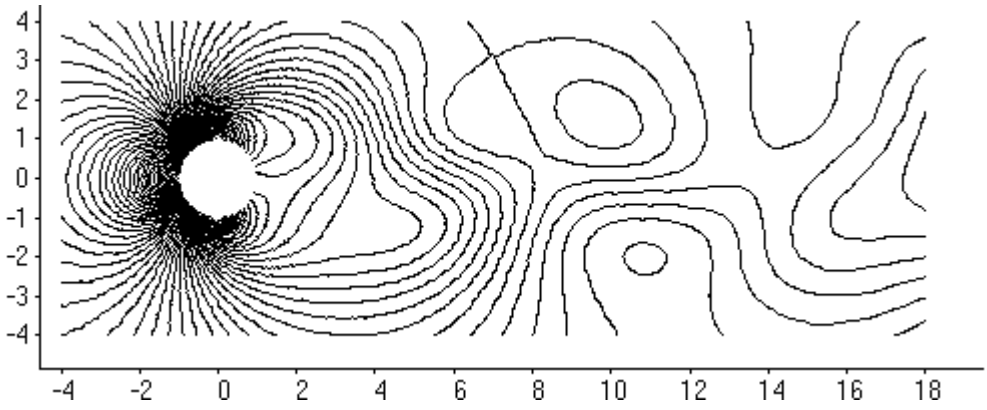


t=103

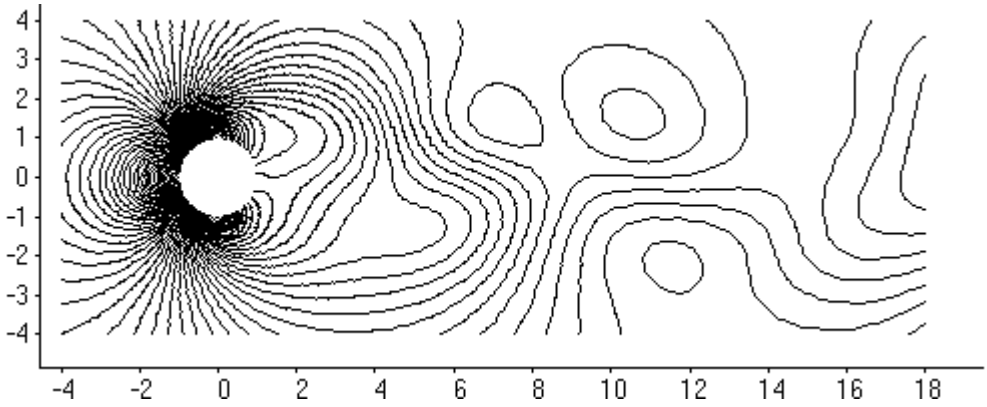
Рис.4.48. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Изобары



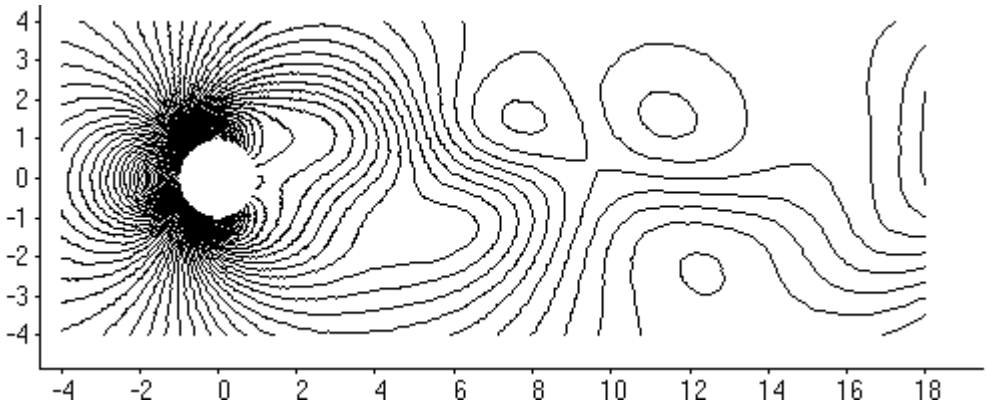
t=104



t=105

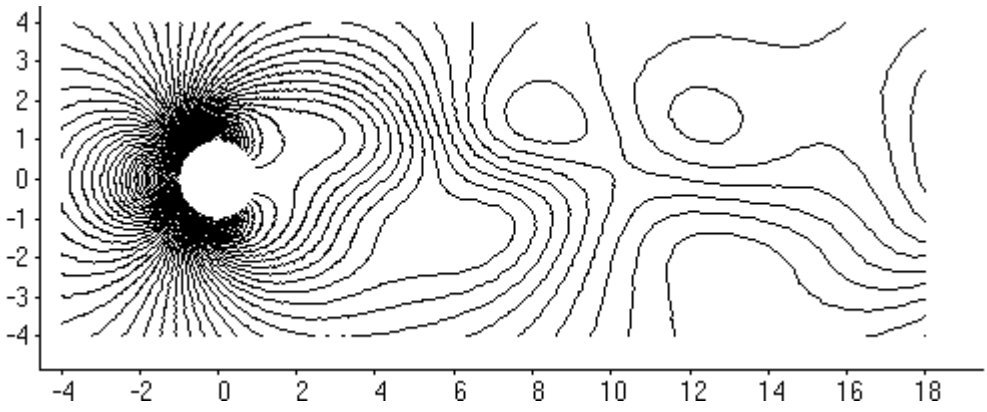


t=106

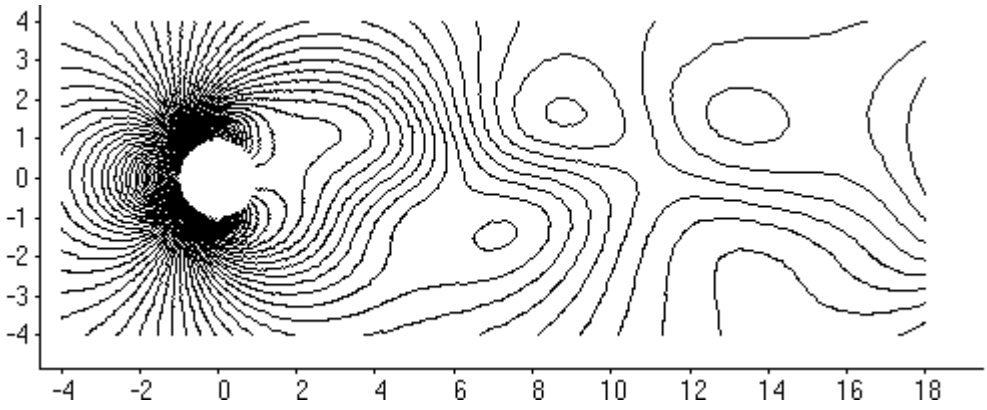


t=107

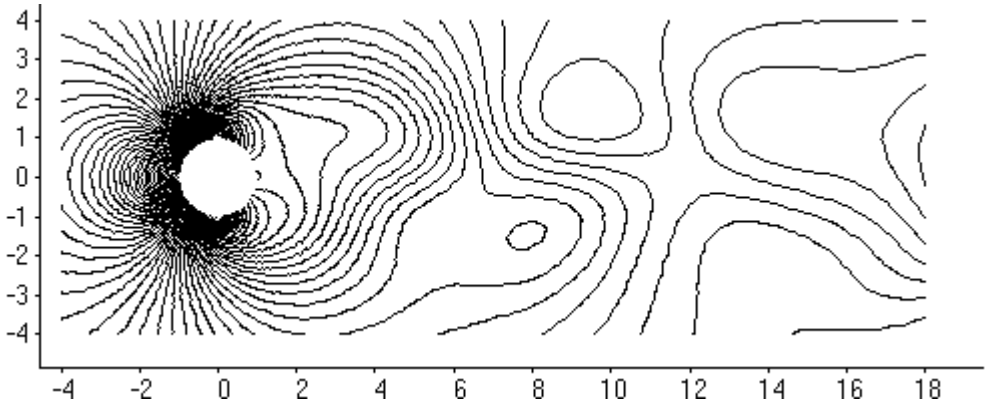
Рис.4.49. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Изобары



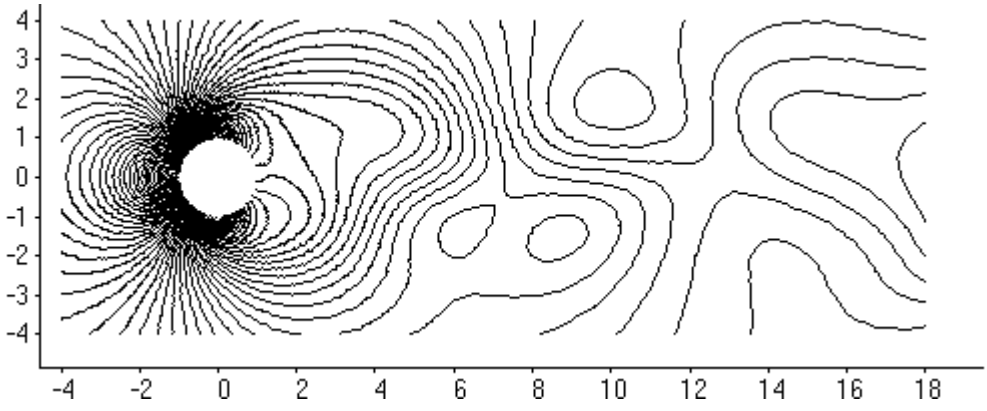
t=108



t=109

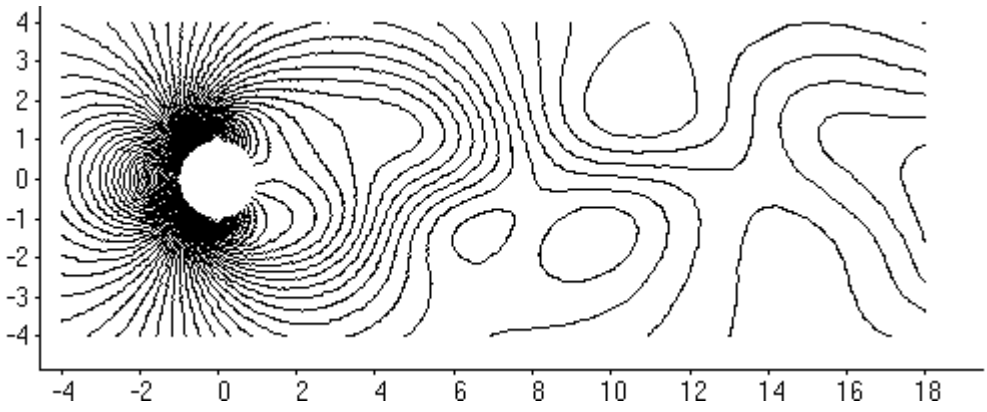


t=110

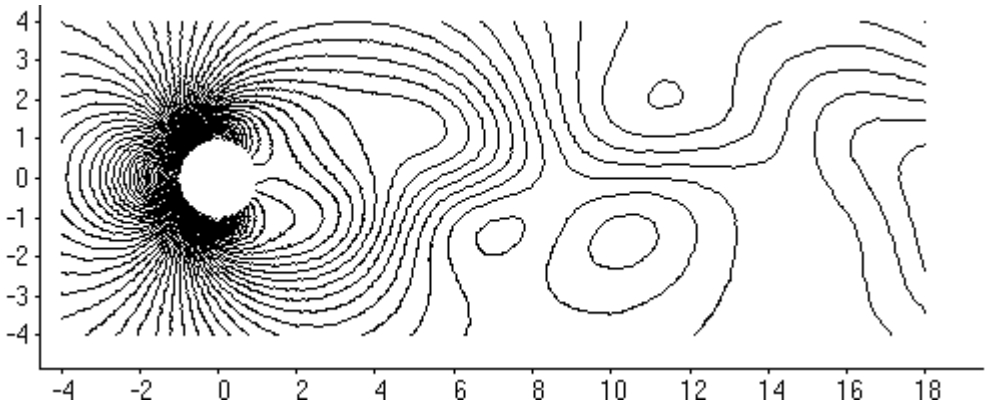


t=111

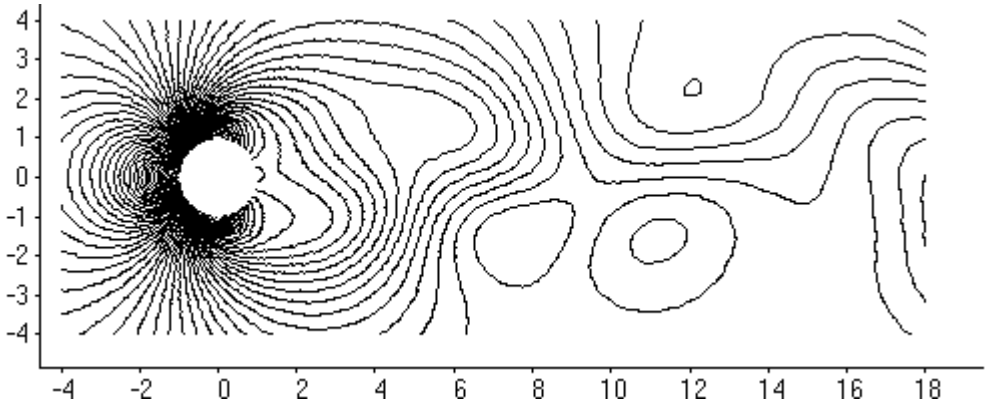
Рис.4.50. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Изобары



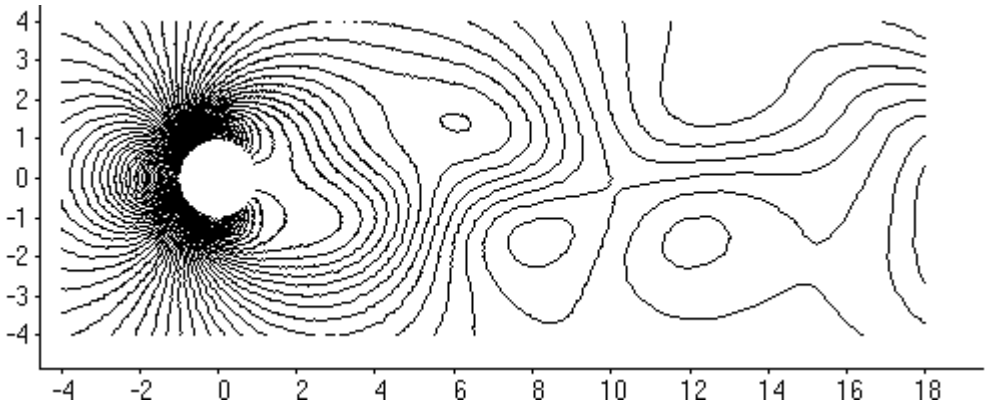
t=112



t=113



t=114



t=115

Рис.4.51. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=50. Изобары

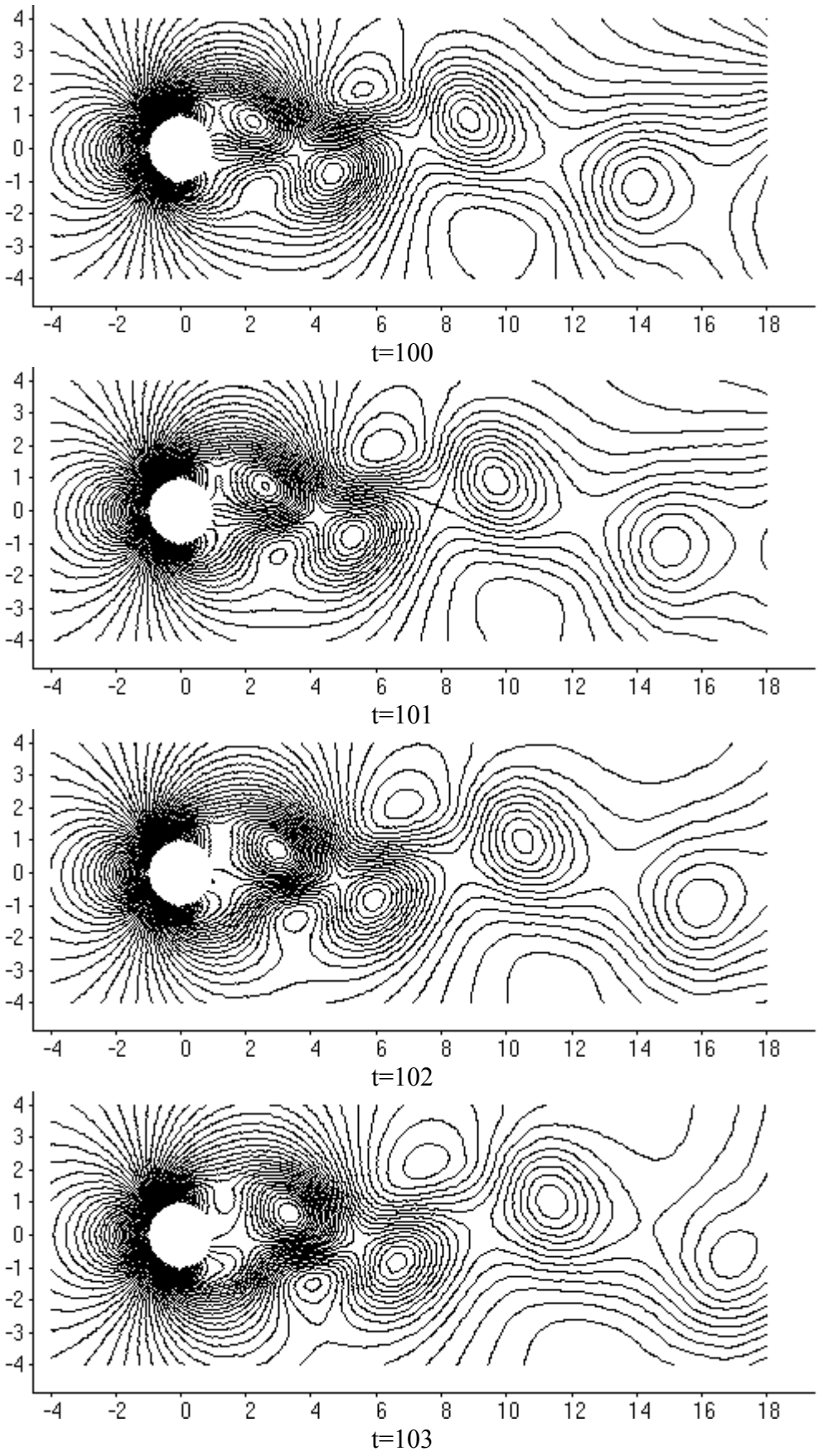
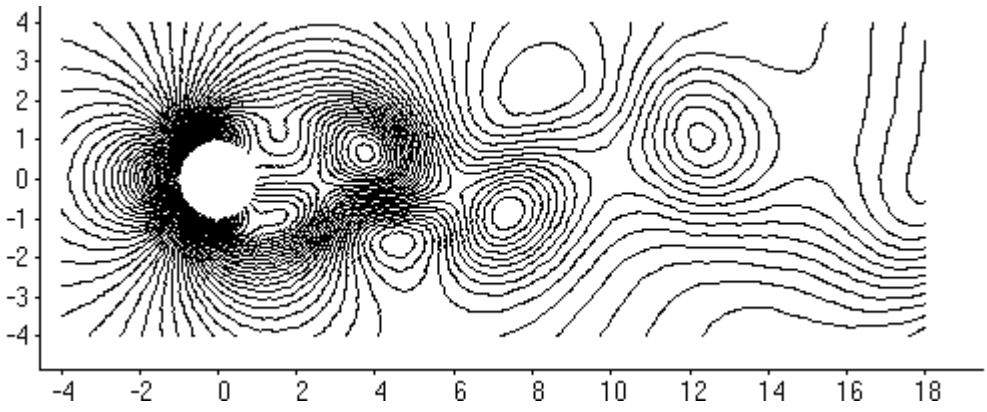
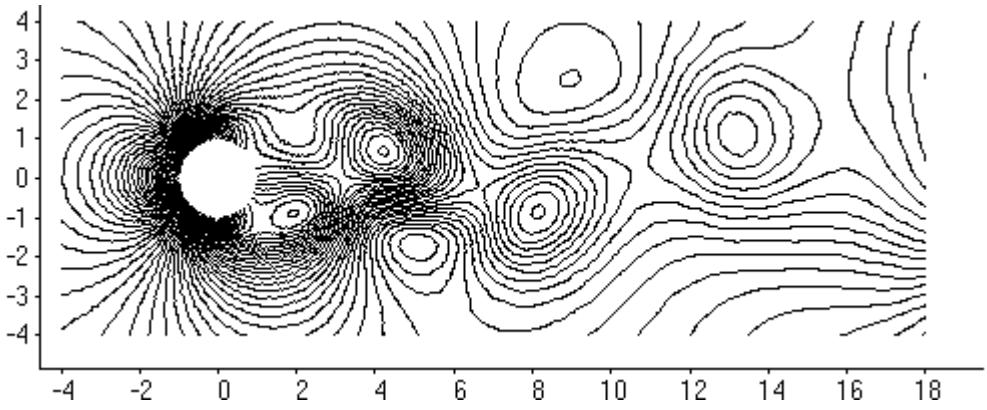


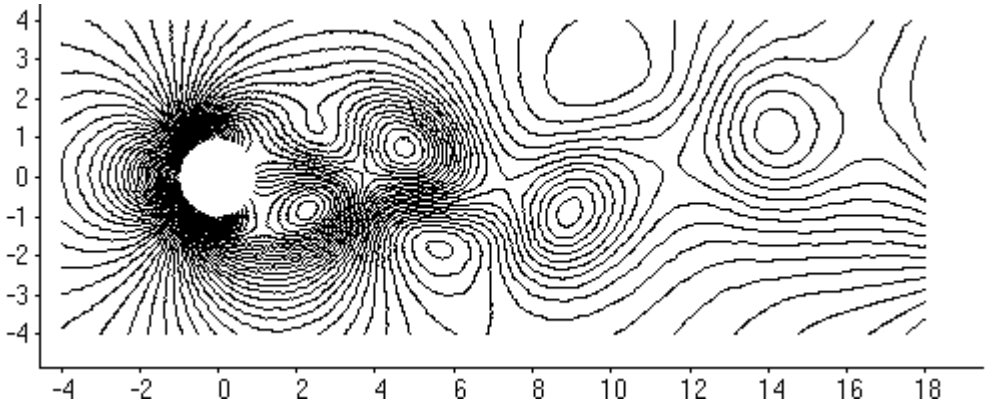
Рис.4.52. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Изобары



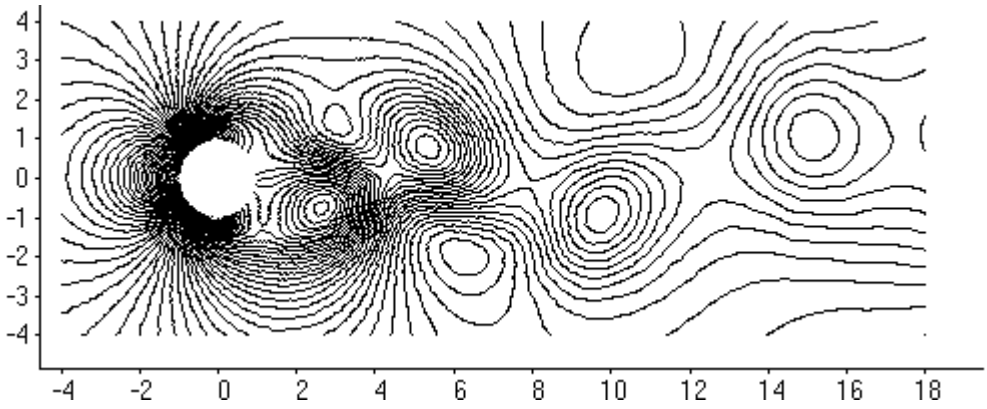
t=104



t=105

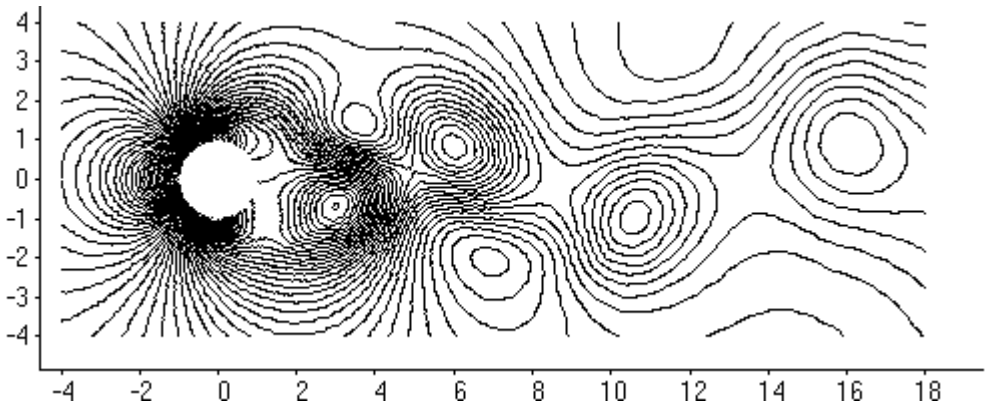


t=106

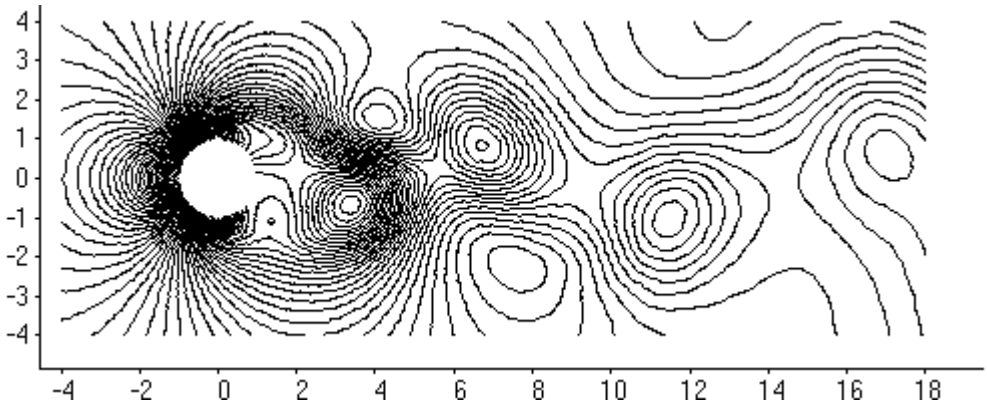


t=107

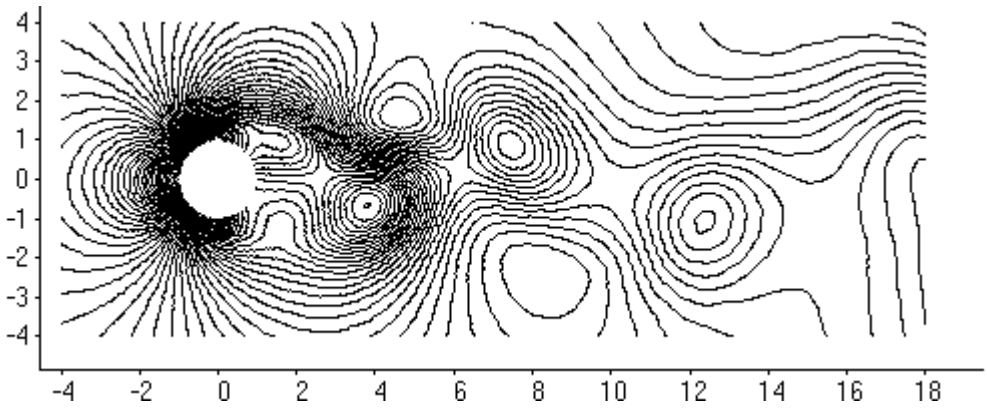
Рис.4.53. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Изобары



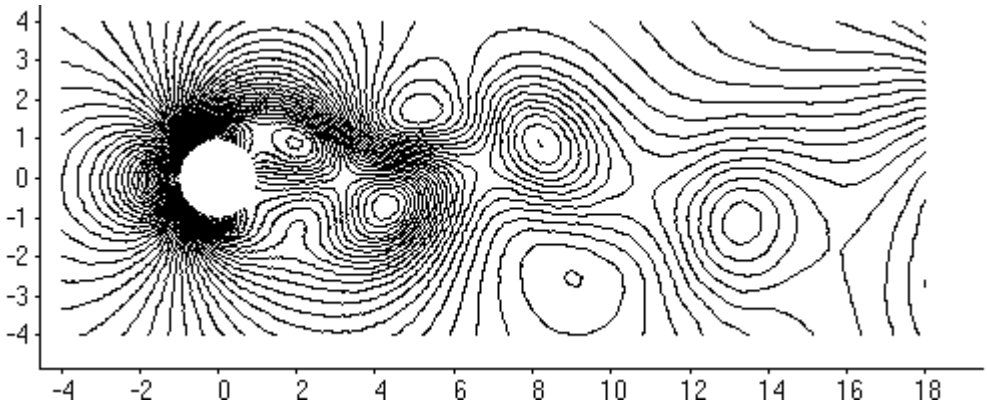
t=108



t=109



t=110



t=111

Рис.4.54. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Изобары

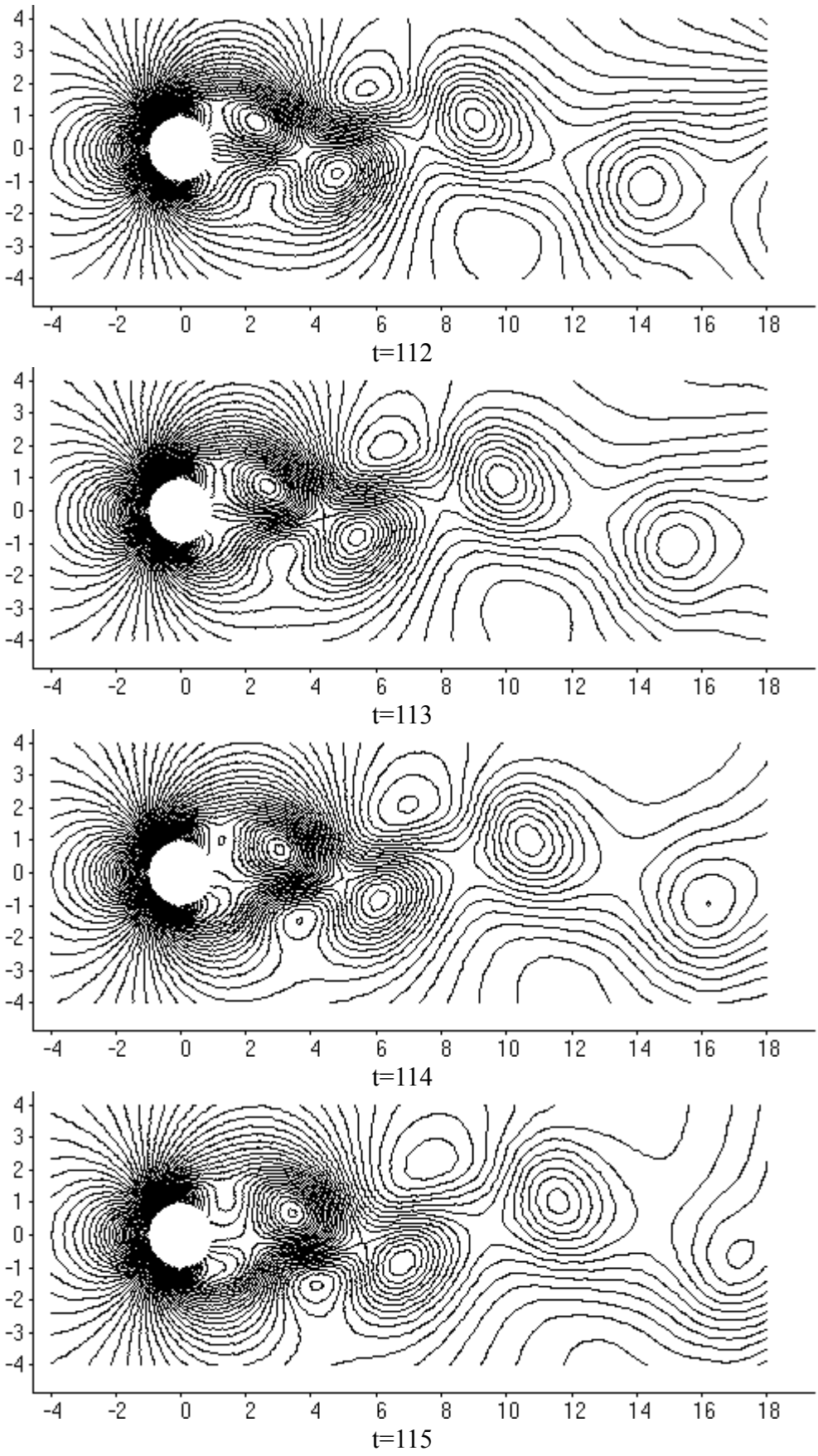


Рис.4.55. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=100. Изобары

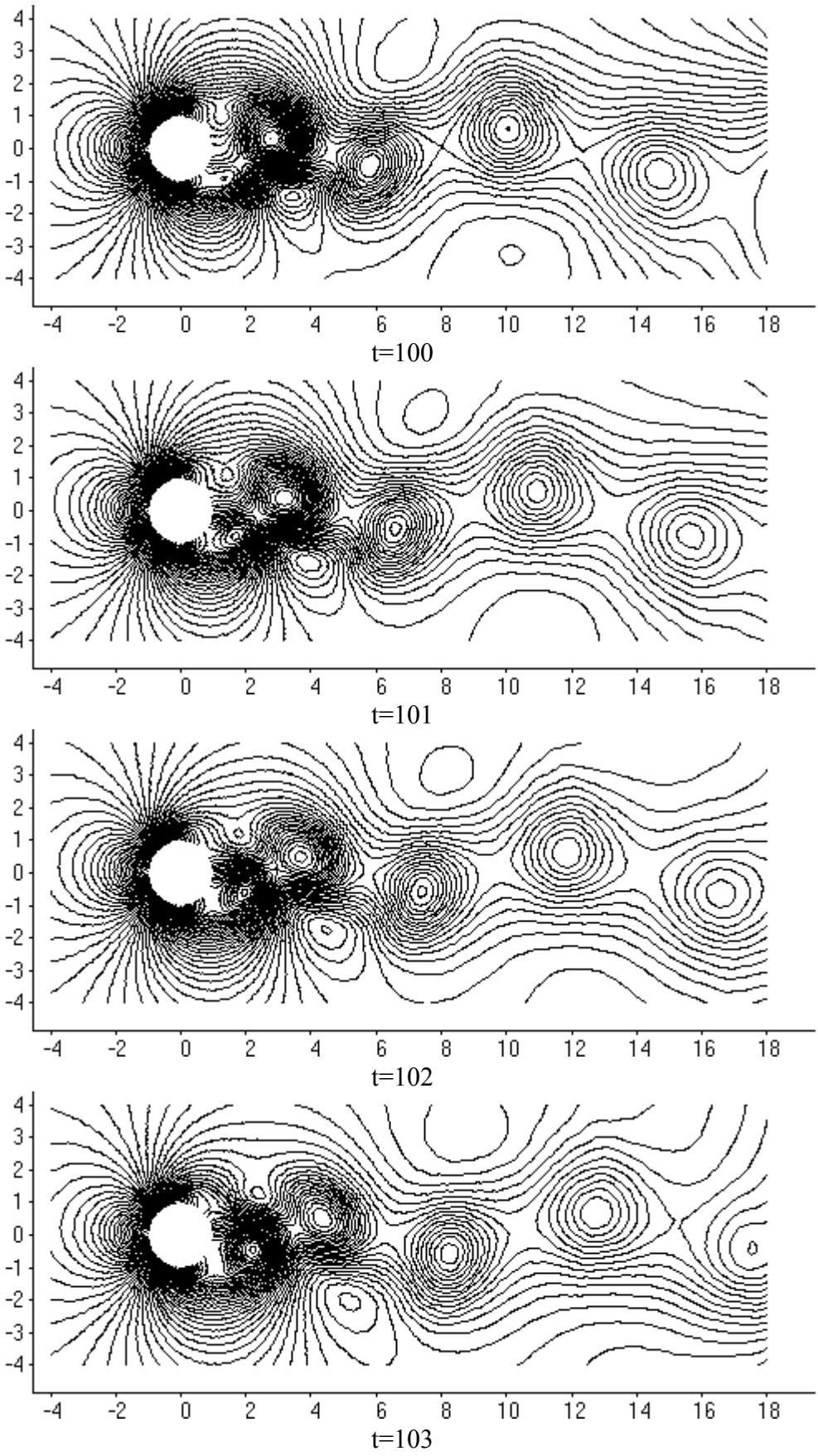
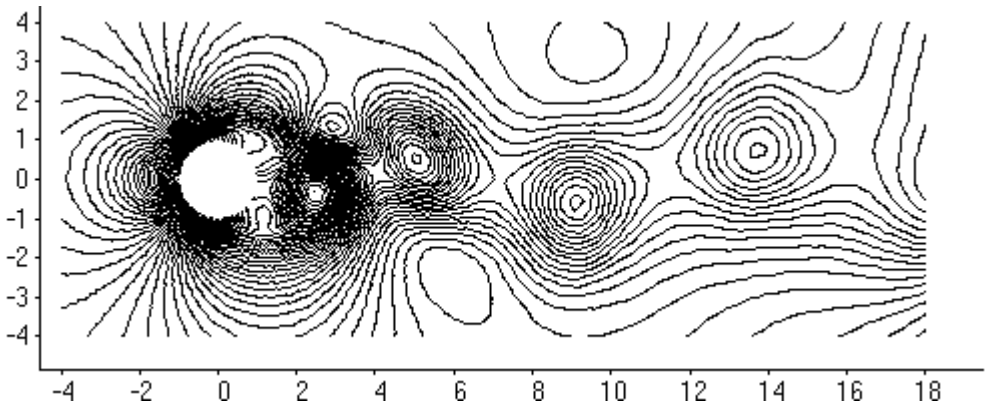
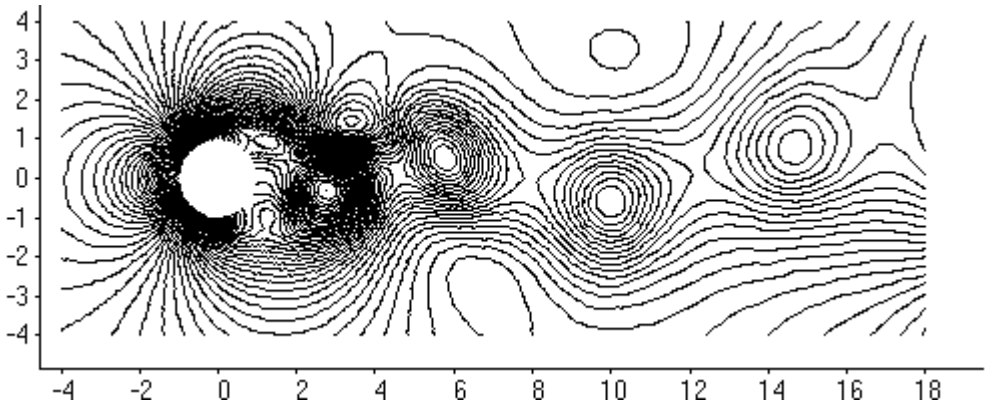


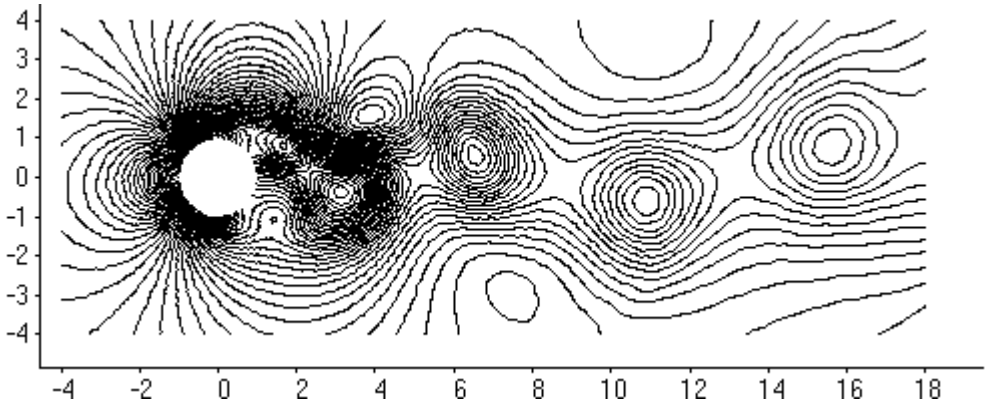
Рис.4.56. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Изобары



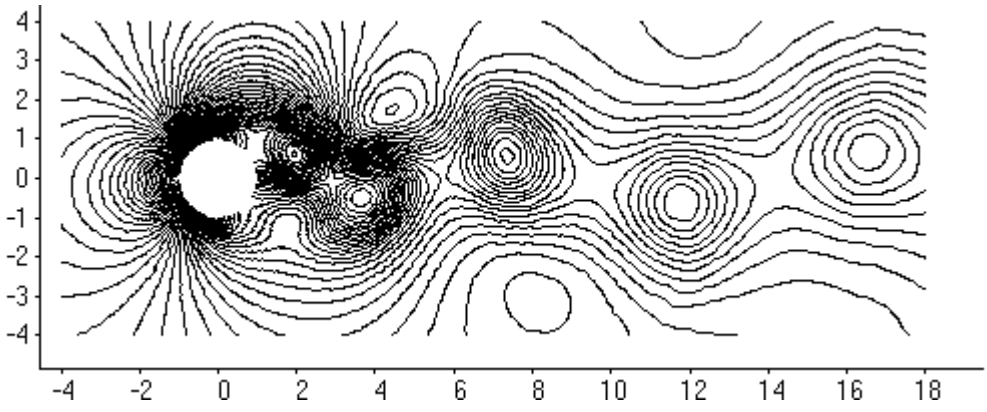
t=104



t=105

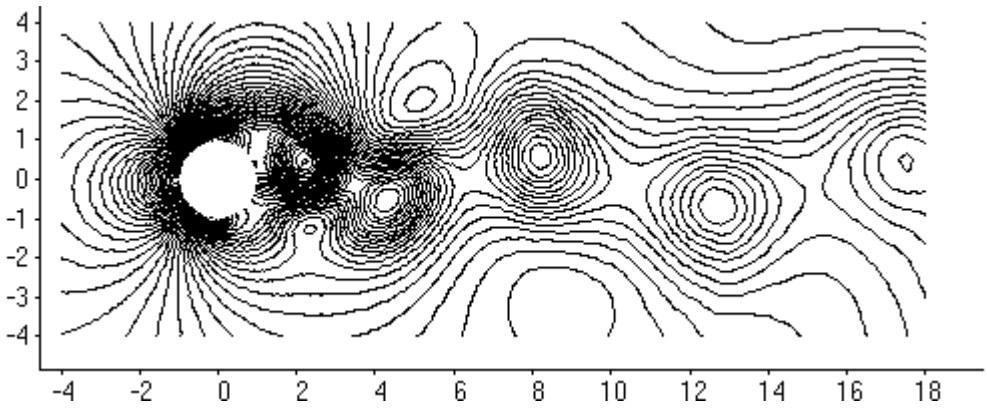


t=106

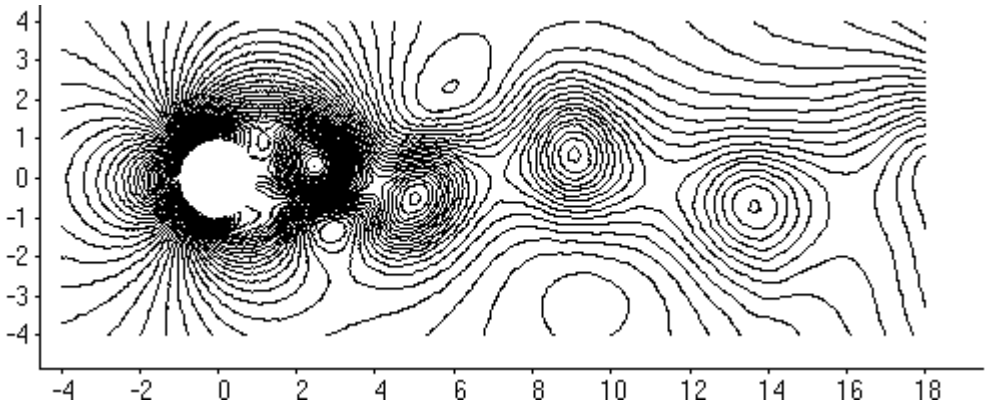


t=107

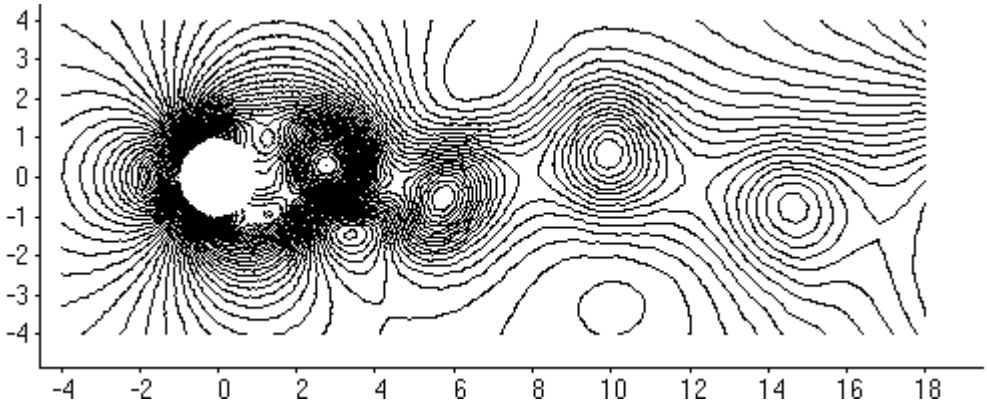
Рис.4.57. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Изобары



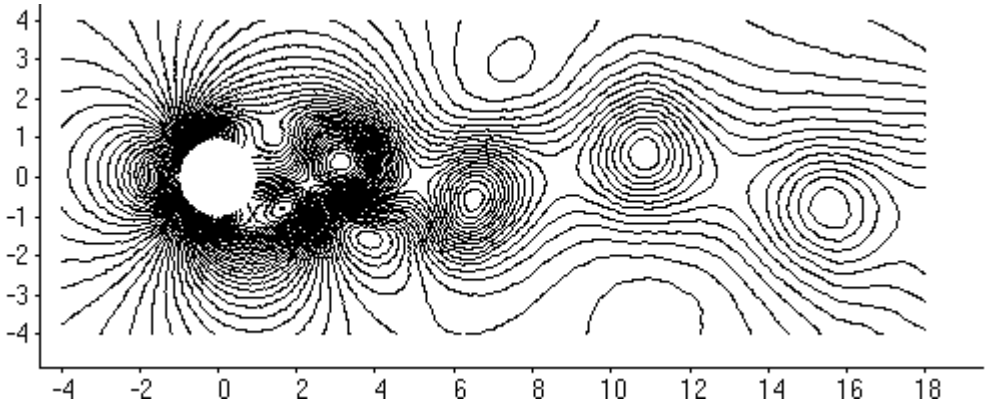
t=108



t=109

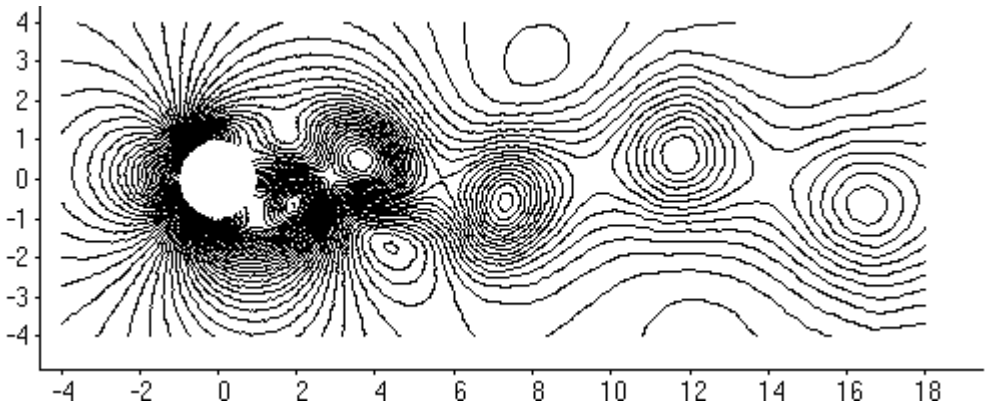


t=110

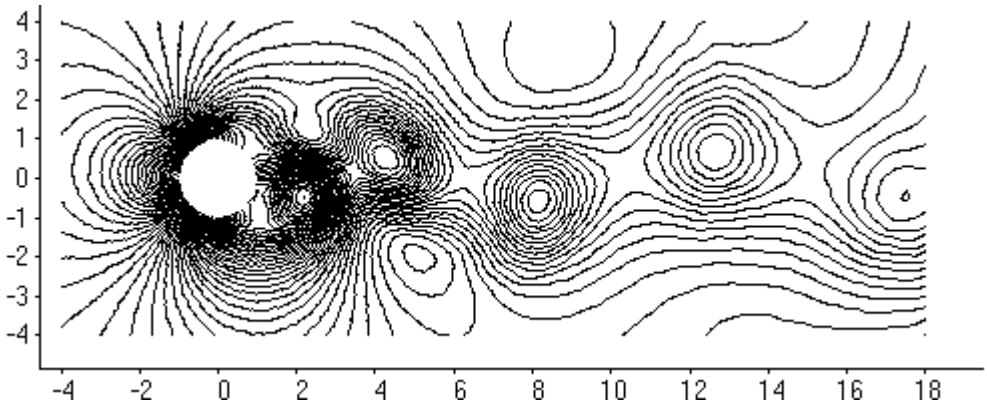


t=111

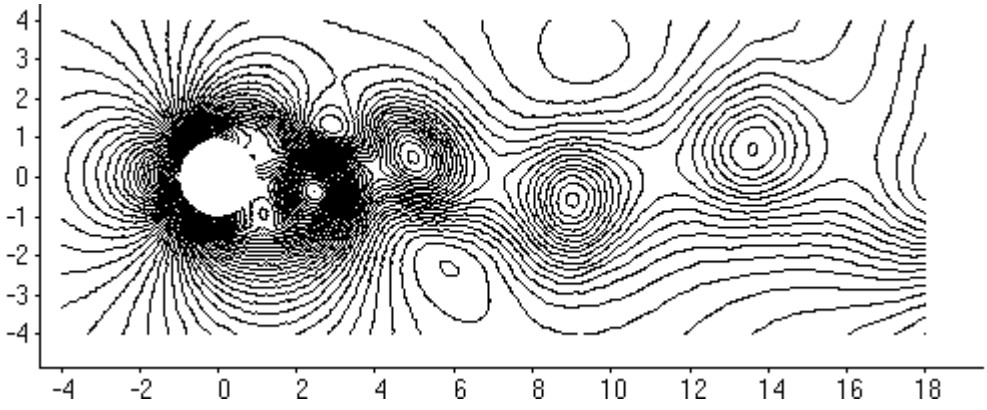
Рис.4.58. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Изобары



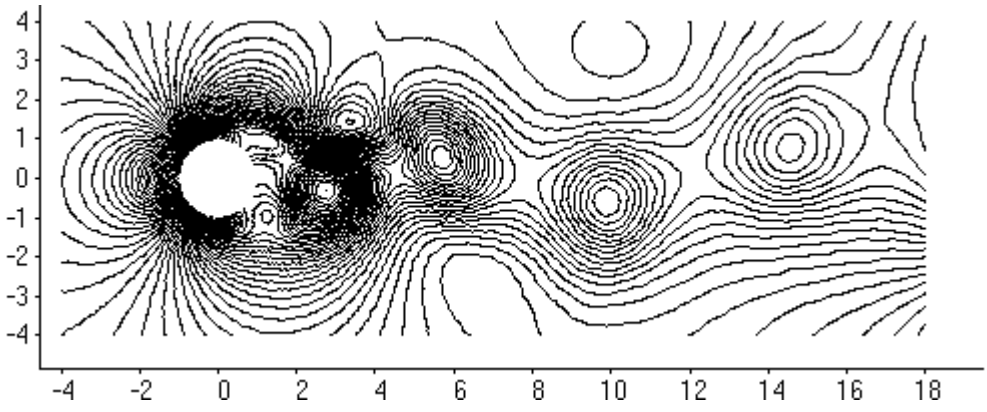
t=112



t=113



t=114



t=115

Рис.4.59. Нестационарное обтекание цилиндра при Re=200. Изобары

Рассмотрим нестационарное течение при Re=50. В некоторый момент времени на кормовой поверхности цилиндра образуется асимметричный отрывной пузырь рис.4.36. Он постепенно увеличивается в размерах, достигая полутора-двух диаметров по длине рис.4.37, а затем рвется на расстоянии примерно одного диаметра от кормовой точки цилиндра рис.4.37, что приводит к появлению нового отрывного пузыря рис.4.38. Затем процесс повторяется рис.4.39.

При числе Рейнольдса 200 картины течений картин напоминают картины, наблюдаемые при Re=50, но все же существуют качественные и количественные отличия. Во-первых, при Re=200 длина отрывного пузыря в два – три раза меньше рис.4.44, чем при Re=50. Во-вторых, характерный период времени, в течение которого поток приходит в исходное состояние заметно уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. В-третьих, отличается характер разрушения отрывного пузыря. Из анализа рисунков можно заметить, что при Re=200 пузырь отрывается от кормовой поверхности цилиндра рис.4.45, рис.4.46, а не рвется в потоке рис.4.39. После того как пузырь оторвался, он превращается в вихрь, интенсивность которого сначала резко растет, а потом убывает рис.4.46, рис.4.47.

Судя по мгновенным картинам линий тока рис.4.40, рис.4.41, рис.4.42, рис.4.43, характер течения при числе Рейнольдса 100 занимает промежуточное положение между Re=50 и Re=200.

Следует заметить, что для нестационарных течений более информативной характеристикой, чем мгновенные линии тока, может оказаться поле давления. На рис.4.48 – рис.4.59 показаны изобары в различные моменты времени для чисел Re=50, 100, 200. На рисунках отчетливо прослеживается положение и динамика вихрей в дорожке Кармана. Особенно четко вихревой след виден при Re=100, 200 (рис.4.52 – рис.4.59).

Рассмотрим теперь поведение таких интегральных характеристик течения, как число Струхаля Sh, и коэффициент подъемной силы C_y. На рис.4.60 приведен график изменения по времени C_y для трех чисел Рейнольдса. В табл.4.1 приведено сравнение величины числа Sh и характерного времени T, рассчитанных в соответствии с эмпирической формулой (4.15) и полученных в результате анализа численных решений на различных сетках.

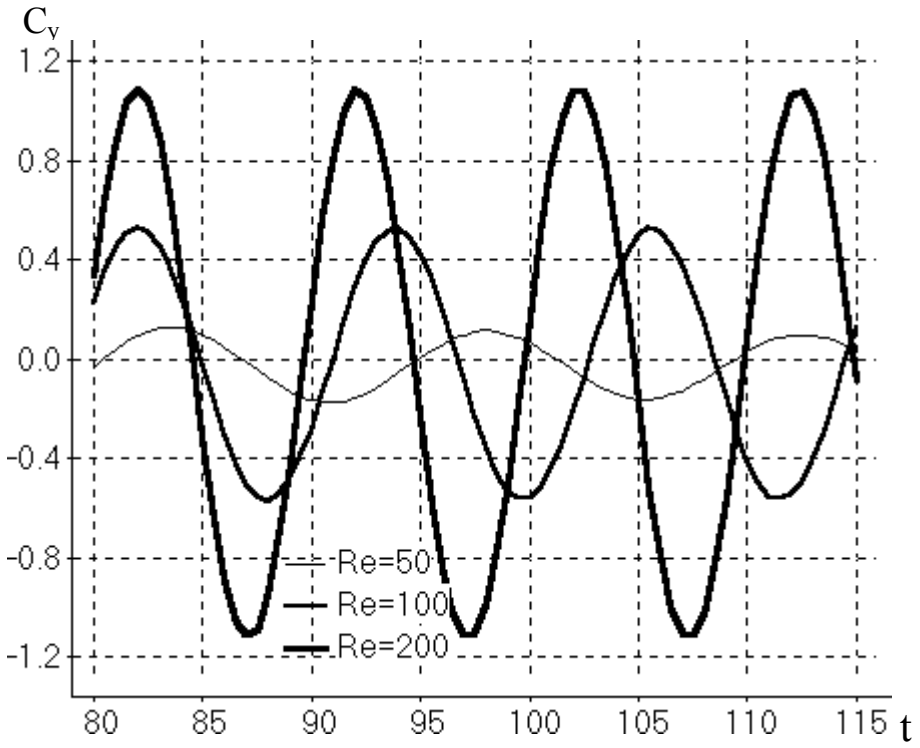


Рис.4.60. Изменение C_y в зависимости от времени для различных чисел Re

Таблица 4.1

Зависимость числа Sh и характерного периода времени T от Re

	Re	[150]	120x240	60x120	30x60
Sh	50	0.1220	0.1290	0.1270	0.1250
	100	0.1670	0.1702	0.1667	0.1600
	200	0.1895	0.1905	0.1887	0.1818
T	50	16.39	15.50	15.75	16.00
	100	11.98	11.75	12.00	12.50
	200	10.55	10.50	10.60	11.00

Анализ приведенных данных, показывает, что разработанная методика позволяет с удовлетворительной точностью оценивать нестационарные характеристики периодических течений даже на грубых сетках.

4.2. Выводы.

1. Получено решение задачи о развитии нестационарного, неустойчивого отрыва потока при обтекании цилиндра.
2. Показано, что источником неустойчивости в данной задаче является неустойчивость Гельмгольца в скоростном слое смешения внешнего течения и обратного тока.
3. Исследовано влияние шага сетки и размеров расчетной области на вычисление коэффициента трения. Показано, что влияние перечисленных факторов пренебрежимо мало вплоть до начала неустойчивости t=1.3.
4. Из сравнения решений, полученных на сетках 80x120 и 120x200, следует, что мелкомасштабные вихри не оказывают заметного влияния на решение вплоть до безразмерного времени t=4.0. Дальнейшие расчеты на указанных сетках без применения моделей замыкания для вихрей подсеточного масштаба могут дать существенную погрешность.
5. Расчеты показали, что, до момента возникновения неустойчивости, давление практически совпадает с давлением при потенциальном обтекании цилиндра. При этом рассчитанные распределения коэффициента трения, в рамках теории пограничного слоя [115] и по уравнениям Навье-Стокса практически не отличаются. Возникновение вихревой неустойчивости (при t>1.3, для $\mathrm{Re}=10^5$) приводит к существенному изменению распределения давления в пограничном слое, по сравнению с потенциальным течением. Пренебрежение взаимным влиянием полей скорости и давления в рамках теории пограничного слоя приводит к расхождению результатов, по сравнению с результатами, полученными в настоящей работе по уравнениям Навье-Стокса.

РАЗДЕЛ 5.
Численное моделирование неустойчивых течений с неединственным решением

Широкий класс течений вязкой жидкости представляют собой неустойчивые течения. К течениям с неустойчивостью можно отнести турбулентные течения, нестационарный срыв потока, слои смешения, свободноконвективные течения с неустойчивой стратификацией и многие другие.

Неустойчивость в симметричном слое смешения, со временем, приводит к потере симметрии. При этом может реализоваться несколько стационарных, устойчивых течений лишенных симметрии, как, например, в течении за плоским симметричным расширением [147], [148], [170], [175], [146], [141], [45], [54] или в симметричном диффузоре [22], [20].

Задачи о развитии свободноконвективных течений при неустойчивой стратификации часто имеют неединственное решение [99], [25], [24], [163], [52]. Характеристики теплообмена существенно зависят от структуры течения. Поэтому для решения конкретной задачи следует рассматривать все возможные режимы теплообмена. При этом следует отмечать наиболее вероятные (устойчивые) варианты решения.

Задачи с неединственным решением представляют большой интерес также и с теоретической точки зрения. Например, для решения уравнений в переменных завихренность-функция тока необходимо задать граничные условия для функции тока на всех твердых границах расчетной области. В случае задачи с многосвязной областью, например течение в решетке профилей или профиль над экраном, если значение функции тока на всех твердых поверхностях задано, то это означает, что расходы жидкости между профилями известны заранее. Таким образом, задавая различные значения функции тока на твердых поверхностях, можно получить бесконечное множество решений. Интересной с практической и теоретической точки зрения является задача отыскания критерия, по которому можно было бы выбирать из этого бесконечного множества решений, те, которые могут реализоваться в действительности. Для оценки устойчивости положения равновесия механической системы применяется теорема Лагранжа [120]. В

механике твердого деформируемого тела критерием устойчивости положения равновесия механической системы является знак второй вариации потенциальной энергии деформации [1]. В настоящей работе рассматриваются зависимости интегральных характеристик течения, таких как кинетическая энергия, диссипация энергии, работа сил давления от критериальных чисел.

Задача моделирования неустойчивых течений предъявляет высокие требования к свойствам численного метода. Любой численный метод содержит источники возмущений [65]. В некоторых случаях эти возмущения становятся настолько большими, что приводят к вычислительной неустойчивости решения, как, например, центрально-разностная схема при сеточном числе Пекле больше двух. В корректно поставленной, физически устойчивой задаче, решаемой устойчивым методом, малые возмущения взаимопоглощаются, демпфируются и не приводят к неустойчивости решения. В задаче, где неустойчивость заложена в физической постановке задачи (например, равновесие жидкости при подогреве снизу), даже устойчивый метод может вносить малые возмущения (ошибки округления, погрешность при итерационном методе решения систем алгебраических уравнений), которые могут затенить реальную картину развития неустойчивости. Поэтому метод, применяемый для решения задач с физической неустойчивостью, должен вносить минимальные вычислительные возмущения в решение. Описанный во втором разделе настоящей работы метод обладает указанным качеством. Выполнение принципа Галилея на разностном уровне, возможность точно рассчитать сдвиговое течение на произвольной криволинейной сетке, применение монотонных TVD схем высокого порядка точности, позволяет выявить особенности развития стационарных и нестационарных неустойчивых решений.

Особую роль в численном моделировании неустойчивых задач играет метод решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На сегодняшний день, наиболее часто применяются итерационные методы решения СЛАУ [7], [9]. В задачах, где неустойчивость проявляется в форме потери симметрии течения, основным источником возмущений может стать асимметрия решения системы алгебраических уравнений, которая является результатом преждевременного прекращения итерационного процесса вычислений. В настоящей работе для

решения СЛАУ использовался популярный в настоящее время метод линейного сканирования [8], [7]. Порядок перебора сеточных линий в этом методе выбирался таким образом, чтобы полученное разностное решение было симметричным.

5.1. Течение за симметричным внезапным расширением

Известно, что двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале за внезапным симметричным расширением, теряет симметрию при увеличении числа Рейнольдса. Экспериментальные исследования этого явления можно найти в работах [147], [148], [175], [146], [141]. В работе [170] показано, что асимметрия сохраняется и в турбулентном режиме течения. Эффект потери симметрии потока в симметричном канале также представляет интерес при проектировании симметричных дозвуковых диффузоров [22].

В работе Соби и Дреизина [175] аналитически, численно и экспериментально исследованы нестабильность и бифуркации двумерных течений в каналах. В частности было показано, что с ростом числа Рейнольдса в симметрично расширяющемся канале возможны несколько типов устойчивых решений – асимметричное двумерное стационарное решение, трехмерные конфигурации течения и, при больших числах Рейнольдса, нестационарные периодические решения, которые переходят в турбулентный режим течения. При малых числах Re структура течения симметрична, при этом существуют две одинаковые отрывные зоны. С ростом числа Re размеры отрывных зон увеличиваются линейно. Затем одна отрывная зона продолжает расти, а длинна другой зоны, остается примерно постоянной.

В работе [148] отмечается, что реальное течение лишь асимптотически стремится к симметрии при $Re \to 0$, а большая отрывная зона всегда образуется на одной стороне канала, если течение развивается непрерывно из состояния покоя. Если жидкость приводится в движение внезапно с некоторым числом $Re>Re_k$, то реализация любого из двух возможных положений отрывных зон становится равновероятной.

В работе [62] дан обзор экспериментальных и численных результатов, касающихся течения за внезапным расширением для плоской и осесимметричной постановки задачи. Там же указаны пределы применимости уравнений

пограничного слоя для расчета ламинарного течения за симметричным внезапным расширением, для случая симметричного течения в половине расчетной области. В частности было получено, что в плоском случае при стремлении числа Рейнольдса к значению, для которого течение можно рассчитать по уравнениям пограничного слоя, эксперименты показали, что течение стремится стать асимметричным. При исследовании влияния граничных условий авторами работы [62] было получено, что введение малой ненулевой скорости на поверхности уступа незначительно влияет на решение.

В работах [147], [148] приведены численные решения уравнений Навье-Стокса для данной задачи. Обнаружено, что решение теряет симметрию при задании симметричных граничных условий, если число Рейнольдса превышает критическую величину Re_k, близкую к значению, полученному в эксперименте. В качестве основных причин потери симметрии в реальном течении выдвигаются две: дефекты экспериментальной установки и трехмерность течения. Нарушение симметрии в численном решении объясняется ошибками округления [147].

Основываясь на результатах экспериментальных исследований можно сделать вывод [62], что с увеличением числа Рейнольдса течение становится несимметричным из-за возмущений, возникающих на кромке уступа и усиливающихся в вязком слое смешения между областью рециркуляции и основным потоком.

Если расчетная область имеет ось симметрии и граничные условия симметричны, то симметричное течение с отрывными зонами одинаковой длинны, очевидно, является решением данной задачи [175]. Это решение можно получить, рассматривая только половину области. Однако задача об отыскании симметричного решения в симметричном расширяющемся канале поставлена некорректно, поскольку малые возмущения могут вызвать заметное изменение структуры течения. С точки зрения численного моделирования неустойчивых течений, представляет интерес влияние различного рода возмущений на процесс потери симметрии и характеристики несимметричного решения. В качестве таких возмущений могут выступать искусственно вводимая асимметрия граничных условий, а также асимметричные возмущения, связанные с особенностями аппроксимации исходных уравнений. Для получения адекватного решения

неустойчивой задачи несимметричные возмущения, порождаемые разностной аппроксимацией, должны быть сведены к минимуму.

Для понимания физических причин неустойчивости того или иного решения необходима как детальная информация о полях скорости и давления, так и зависимости интегральных факторов, действующих на течение жидкости, от критериальных чисел.

Целью данной работы является исследование влияния возмущений различного типа и интенсивности на решение задачи о течении за внезапным симметричным расширением [45], а также определение зависимостей от числа Рейнольдса таких интегральных характеристик течения как кинетическая энергия, мощность действия сил давления и диссипация энергии.

Схема расчетной области показана на рис.5.1. Для исследования был выбран случай, когда отношение H/D=2. Безразмерная длина расчетной области L/D =100. Для численного решения уравнений Навье-Стокса использовалась методика, описанная во втором разделе настоящей работы. Для расчета конвективных потоков применялись схемы TVD MinMod (2.110) и схема третьего порядка точности ISNAS (2.111), а также схема QUIC (2.100), для расчета диффузионных потоков использовалась схема (2.96). Условия прилипания на твердых стенках ставились в предположении, что профиль скорости возле стенки можно представить полиномом третьего порядка. На входе в область задавался параболический профиль скорости на входе и мягкие условия (2.81) для давления. На выходе из области задавались мягкие граничные условия для всех переменных. Для расчетов применялась декартова неравномерная сетка с основным блоком 40x80 узлов.

Сначала была проведена серия расчетов с применением схем MinMod, ISNAS и QUIC, без введения искусственных асимметричных возмущений. Целью расчетов было сравнение величины асимметричных возмущений вносимых данными схемами.

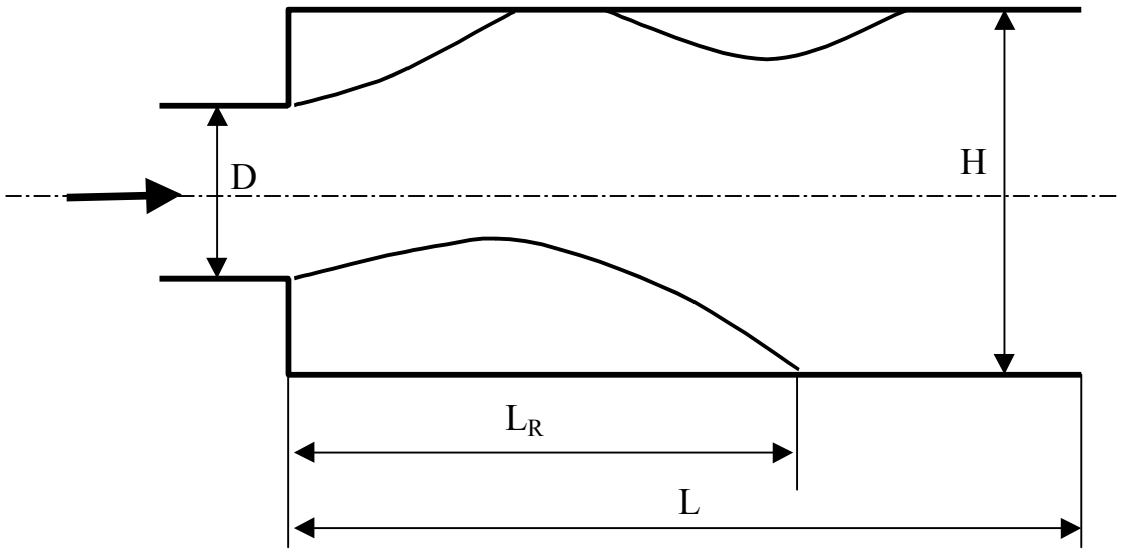


Рис.5.1. Схема расчетной области для течения за внезапным симметричным расширением

В результате было получено, что при использовании TVD схем MinMod и ISNAS решение остается симметричным, при условии, что итерационный метод решения алгебраических уравнений вносит малые возмущения. Численное решение, полученное по схеме QUIC, теряет симметрию при числах Re больше 130. Авторами работы [147] был получен аналогичный результат при использовании схемы QUIC. При этом причиной потери симметрии численного решения они сочли ошибки округления.

Из результатов данной серии расчетов следует, что TVD схемы вносят значительно меньшие асимметричные возмущения в численное решение, чем схема QUIC. То есть, при использовании TVD схем, появляется возможность рассматривать влияние искусственно вносимых возмущений “в чистом виде”, без наложения возмущений от разностной схемы аппроксимации. В дальнейшем все результаты были получены с помощью схемы ISNAS.

Для выяснения возможных причин неустойчивости численного решения были рассмотрены следующие типы искусственных возмущений:

1) в одной из угловых точек уступа расширяющегося канала задавалась асимметрия граничного условия для скорости;
2) на одной из стенок канала ставились условия прилипания исходя из предположения о линейном изменении профиля скорости возле стенки, а на другой кубические граничные условия;
3) нарушалась симметрия параболического профиля на входе в канал.

В ходе численных экспериментов были получены следующие результаты:

1) решающую роль в формировании структуры течения играют граничные условия в угловой точке уступа;
2) если граничные условия полностью симметричны, то реализуется симметричное течение (при использовании TVD схем), чтобы получить несимметричную структуру течения, необходимо ставить несимметричные граничные условия;

3) Продолжительность процесса перестройки течения и величина окончательной асимметрии слабо зависит от интенсивности возмущения, если асимметрия возмущения имеет величину порядка шага сетки;
4) После того, как течение перестроилось, возмущение можно убрать. При этом не происходит возврата к симметрии. Решение лишь незначительно изменяется, асимптотически стремясь к характерному для данного числа Рейнольдса течению, которое не зависит от величины начального возмущения.
5) изменение порядка аппроксимации граничных условий прилипания на одной из стенок канала вызывает потерю симметрии течения, но при значительно больших значениях числа Рейнольдса, чем в эксперименте;
6) возмущение параболического профиля скорости на входе в канал меньшее 0,1 от максимального значения модуля скорости не способно вызвать потерю симметрии.

Таким образом, в численном решении получено, что основной причиной потери симметрии потока является асимметрия течения на кромках уступов, которая развивается в вязком слое смешения между областью рециркуляции и основным потоком. Сильное влияние на этот процесс оказывают граничные условия в угловых точках уступов, так как именно там формируются слои смешения.

Эти результаты вполне соответствуют представлениям о причинах и механизмах потери симметрии в данной задаче, полученным в экспериментах [147], [148], [175], [146], [141]. Т.е. благодаря применению разработанных методик численного решения уравнений Навье-Стокса и TVD схем удалось адекватно моделировать развитие малых возмущений в неустойчивом течении, при этом интенсивность асимметричных возмущений вследствие разностной аппроксимации была сведена к минимуму.

На рис.5.2 и рис.5.3 приведены картины линий тока и изобары в несимметричном решении за внезапным расширением при различных числах Re. На рисунках отчетливо прослеживается развитие несимметричной структуры течения. При Re=50 течение практически симметричное, заметная асимметрия проявляется при Re=150. В дальнейшем меньшая отрывная зона практически не

меняется в размерах, а большая стремится принять такую форму, чтобы поперечное сечение основного потока оставалось неизменным. Тенденция к сохранению поперечного сечения основного потока приводит к появлению третьей отрывной зоны на верхней стенке канала при Re~400. Эта зона быстро увеличивается в размерах и при Re~600 она почти в два раза превышает малую отрывную зону.

На рис.5.4 и рис.5.5 приведены картины линий тока и изобары для симметричного решения данной задачи.

На рис.5.6 приведена зависимость от числа $Re=VH/\nu$ длин отрывных зон L_R отнесенных к высоте входного канала H. Нижняя ветвь на графике отвечает за меньшую отрывную зону, а верхняя за большую зону. Для сравнения приведены экспериментальные данные [147]. Наибольшее расхождение расчетных и экспериментальных данных наблюдается в окрестности точки бифуркации. Численное решение несколько позже переходит к асимметричному течению. Здесь следует отметить, что приведенное решение получено для случая, когда после потери симметрии асимметричное возмущение устранялось, и дальнейшие расчеты проводились для полностью симметричной постановки задачи.

Учитывая, что реальное течение носит существенно трехмерный характер [175], что является постоянным источником возмущений, совпадение данных можно считать удовлетворительным.

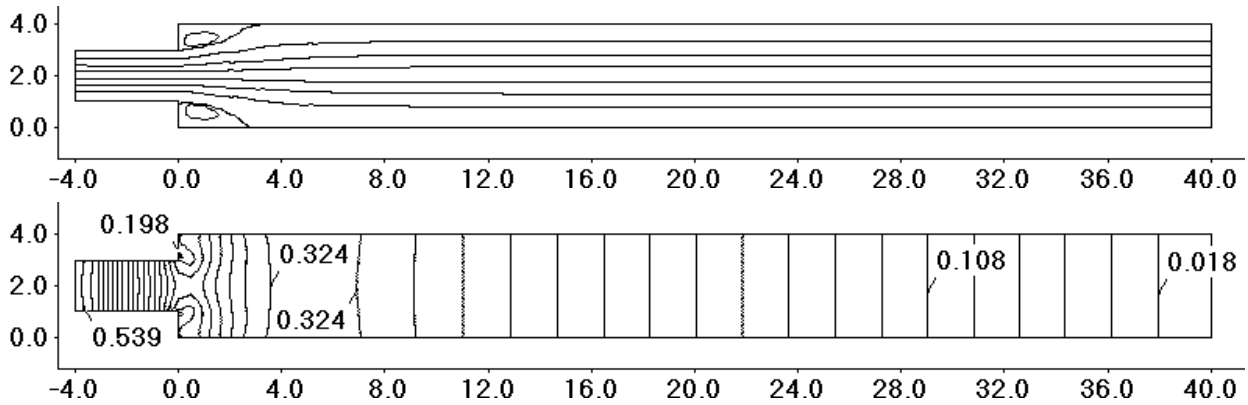
На рис.5.7 – рис.5.9 приведены зависимости от числа Рейнольдса среднеобъемных интегральных характеристик

кинетической энергии -

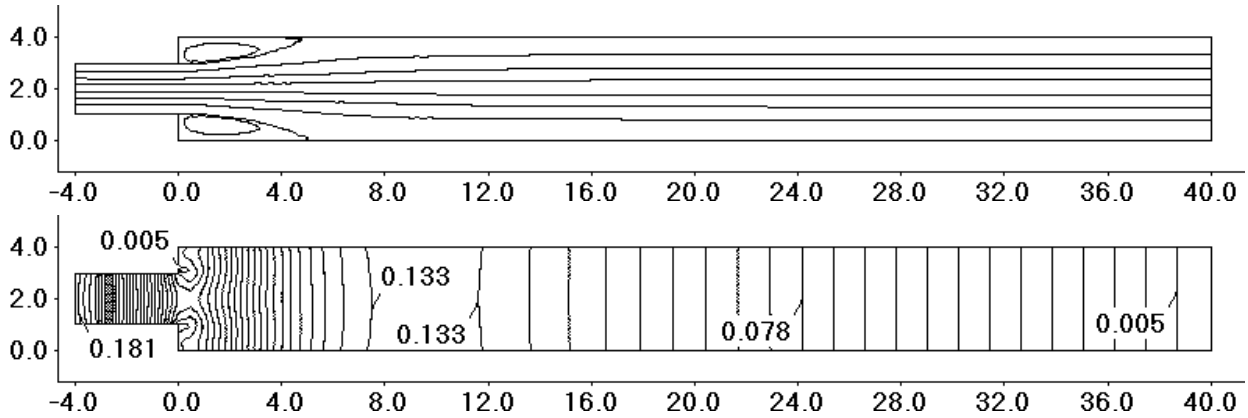
$$K = \frac{Re}{W}\int_W \frac{\mathbf{V}^2}{2}\,dW\,, \qquad (5.1)$$

мощности сил давления -

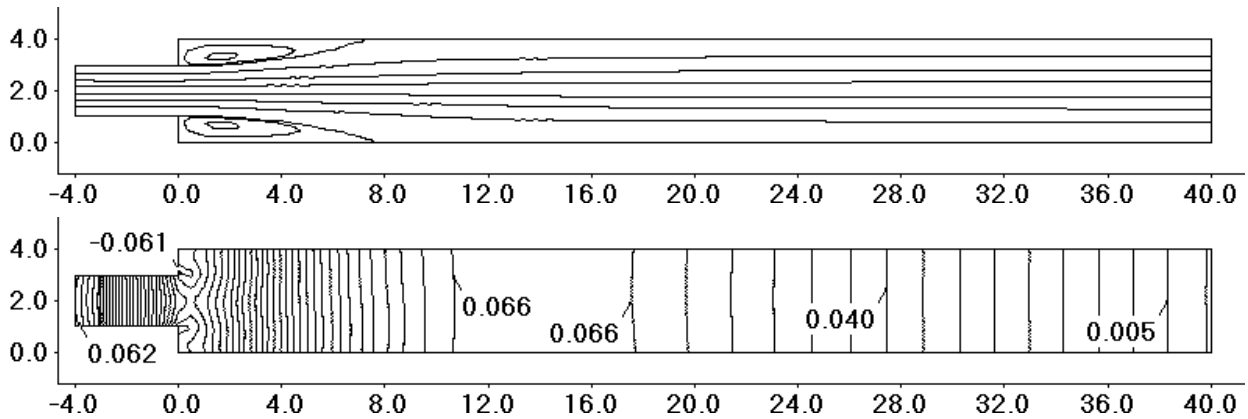
$$N_P = \frac{Re}{W}\int_W (-\nabla p)\,\mathbf{V}\,dW\,, \qquad (5.2)$$



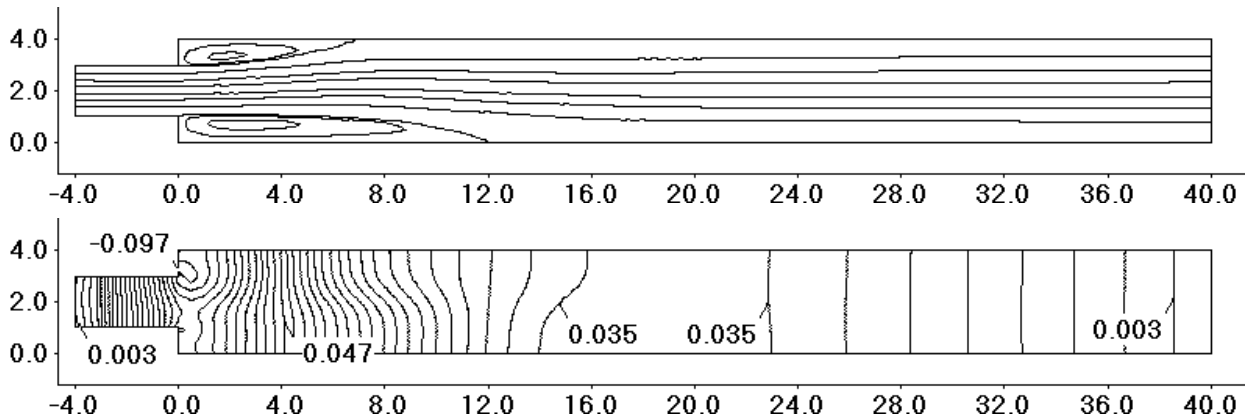
Re=50



Re=100

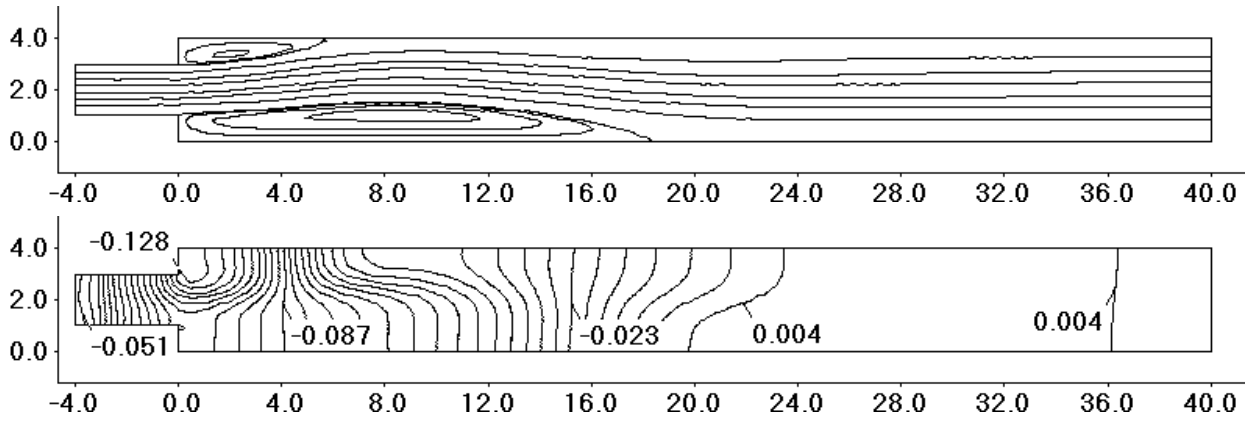


Re=150

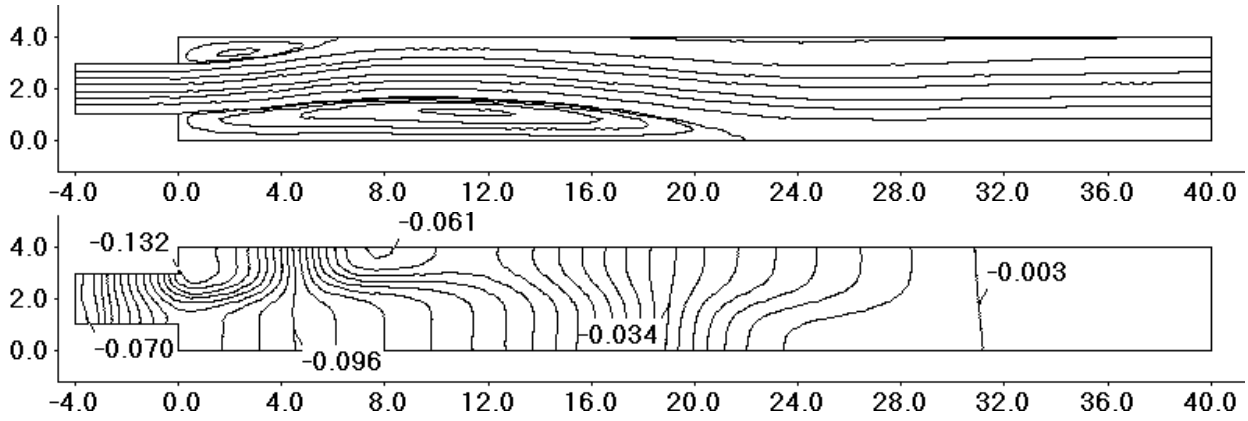


Re=200

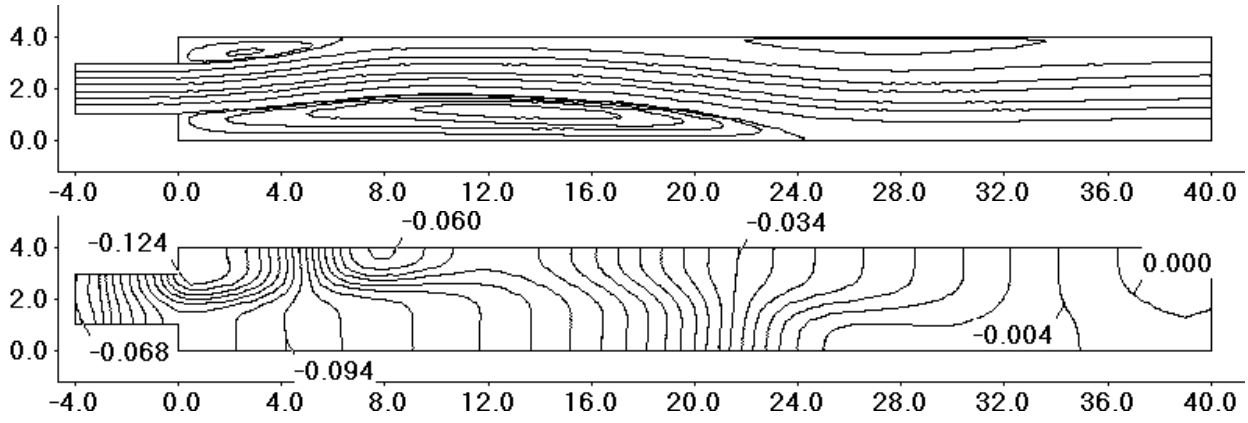
Рис.5.2. Линии тока и изобары в несимметричном решении за внезапным расширением при различных числах Re



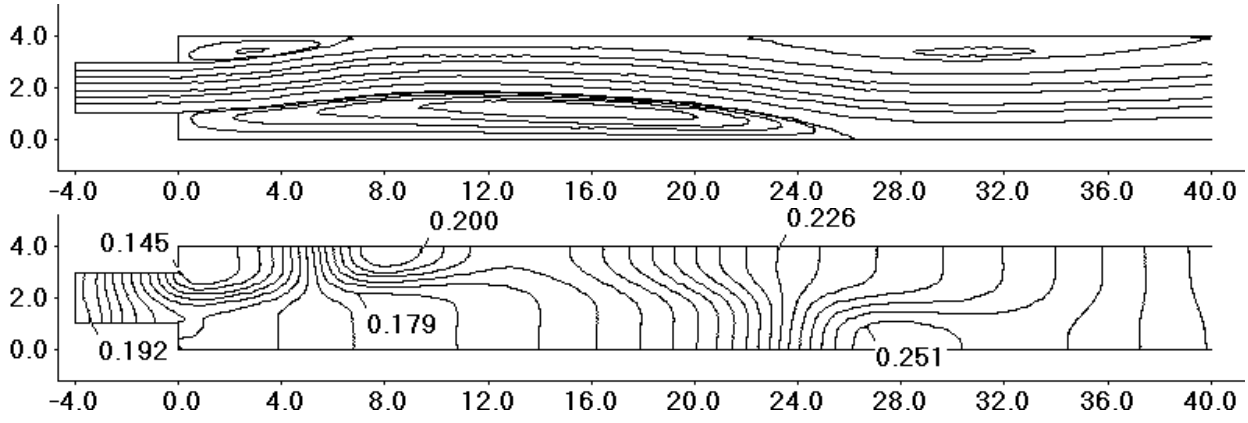
Re=300



Re=400

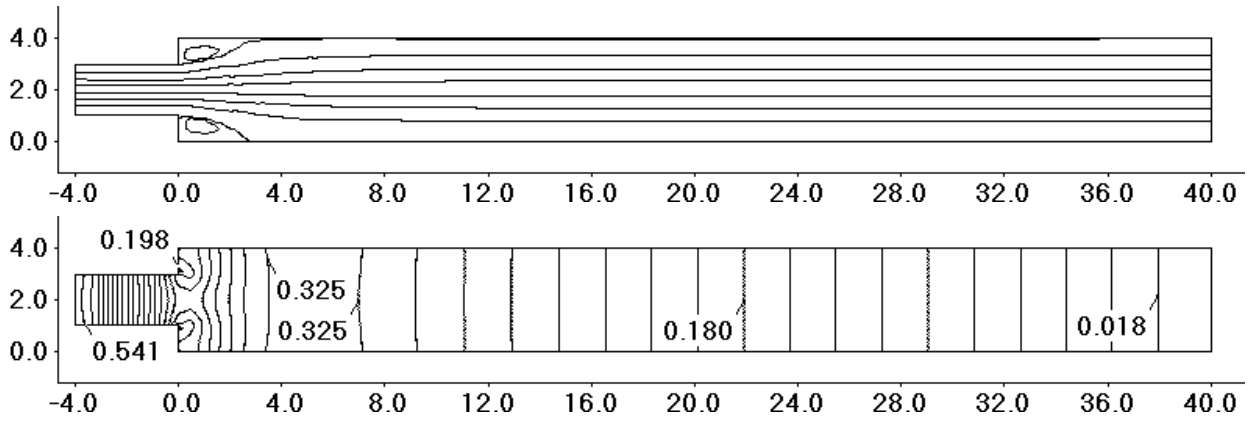


Re=500

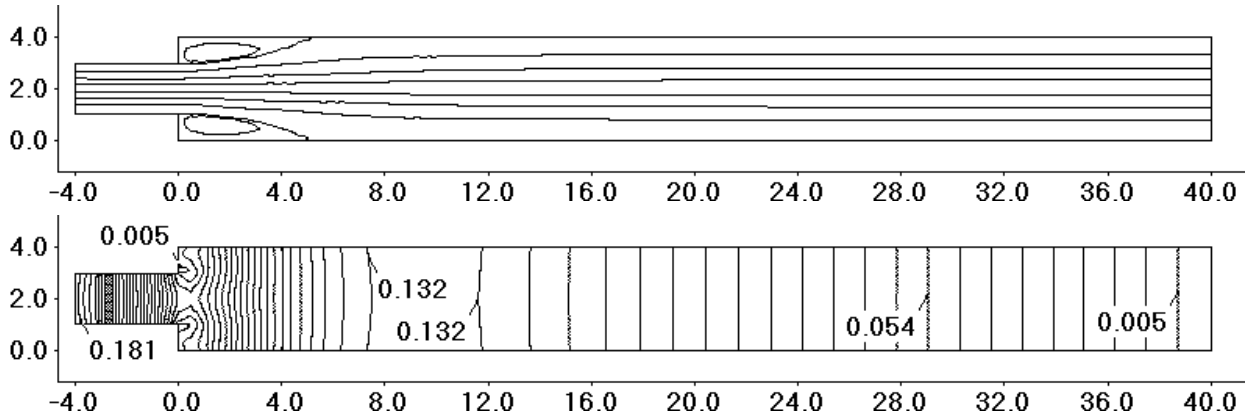


Re=600

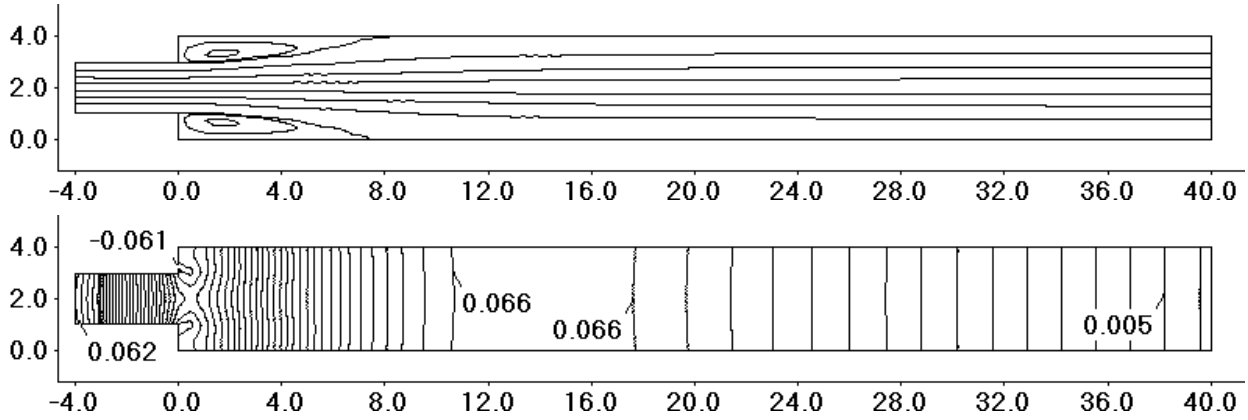
Рис.5.3. Линии тока и изобары в несимметричном решении за внезапным расширением при различных числах Re



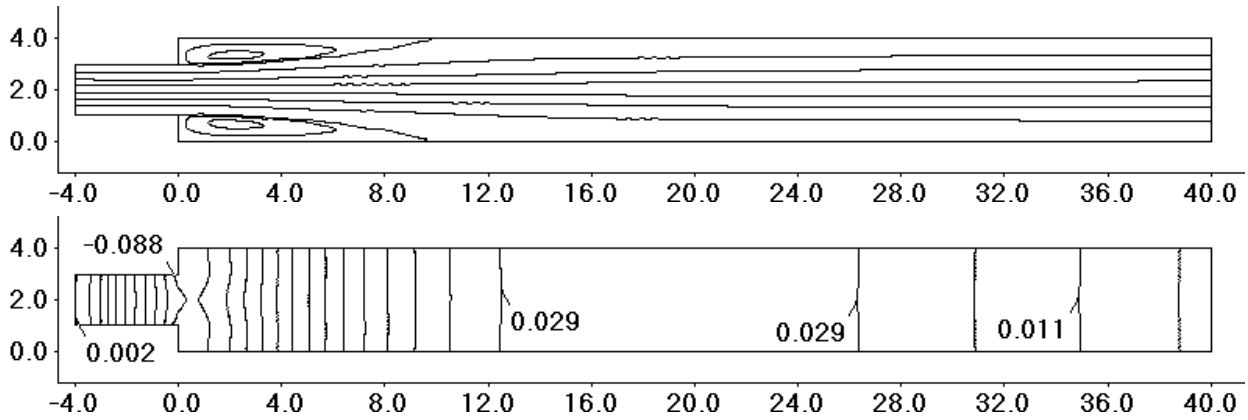
Re=50



Re=100

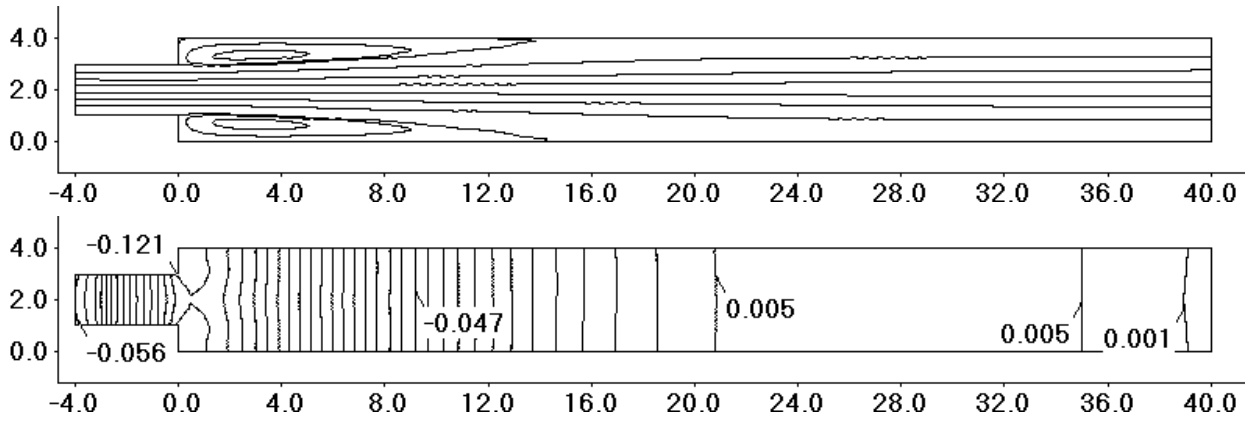


Re=150

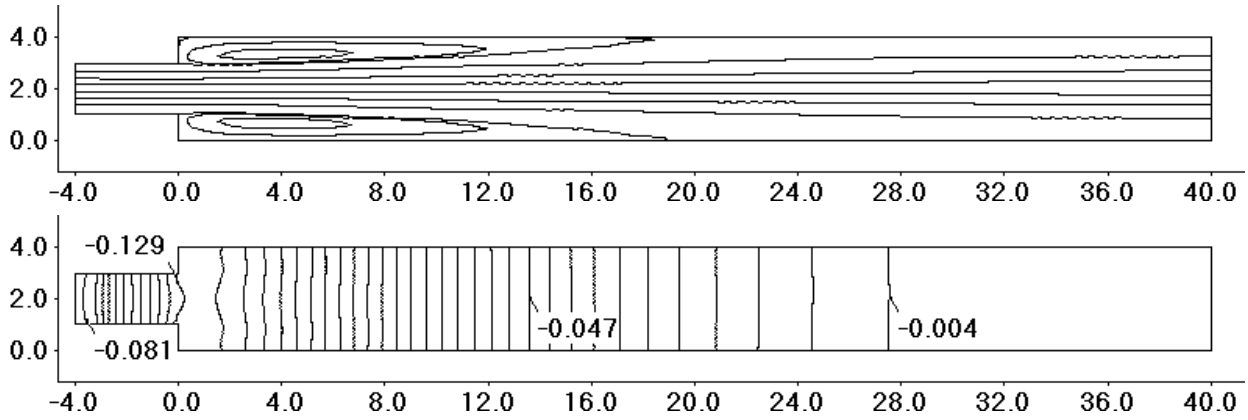


Re=200

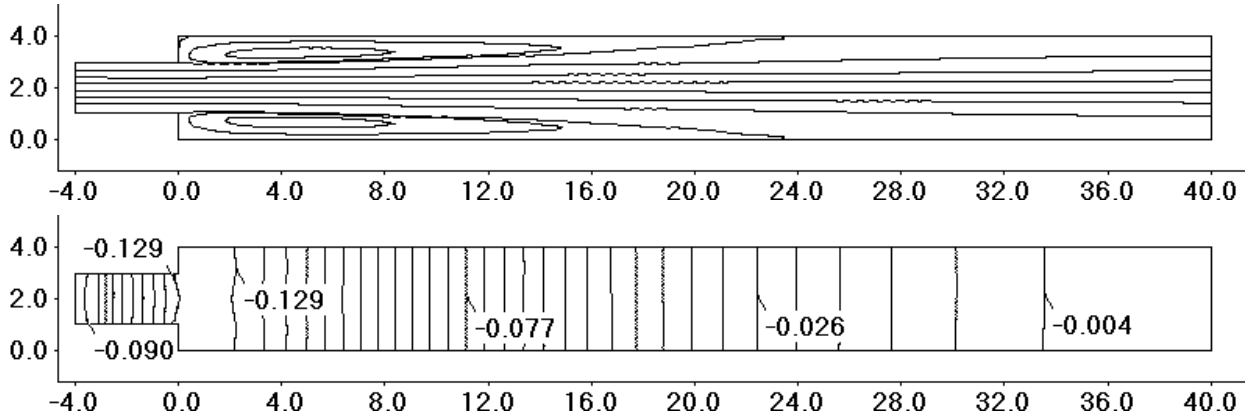
Рис.5.4. Линии тока и изобары в симметричном решении за внезапным расширением при различных числах Re



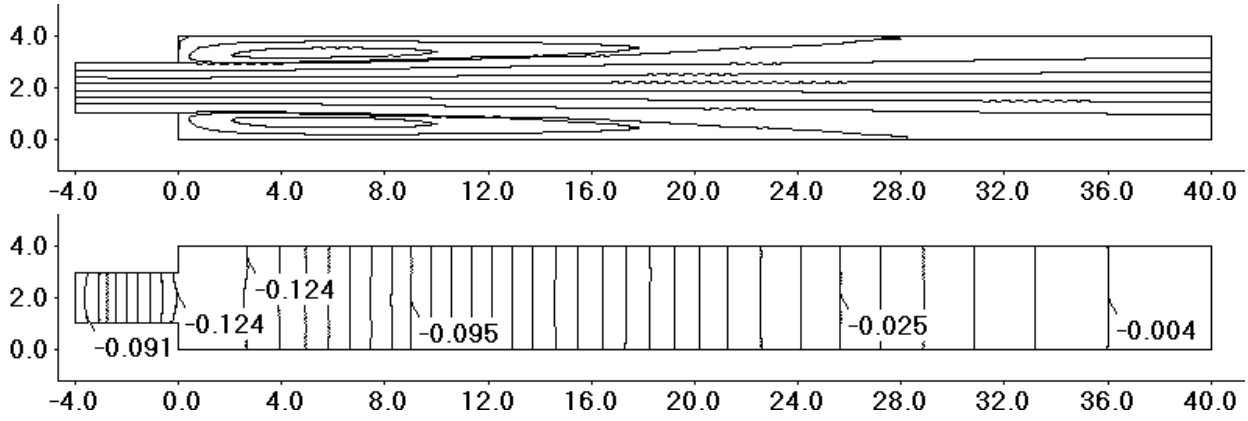
Re=300



Re=400



Re=500



Re=600

Рис.5.5. Линии тока и изобары в симметричном решении за внезапным расширением при различных числах Re

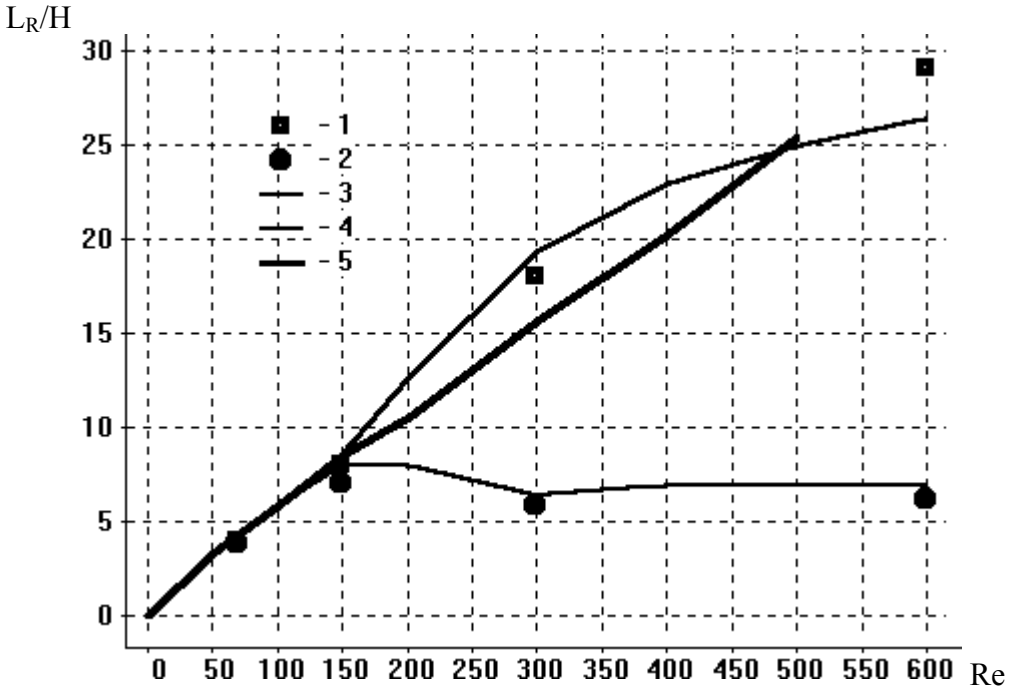


Рис.5.6. Зависимость положения точек присоединения потока от числа Re
1, 2 – эксперимент [147], 3, 4, 5 – расчет

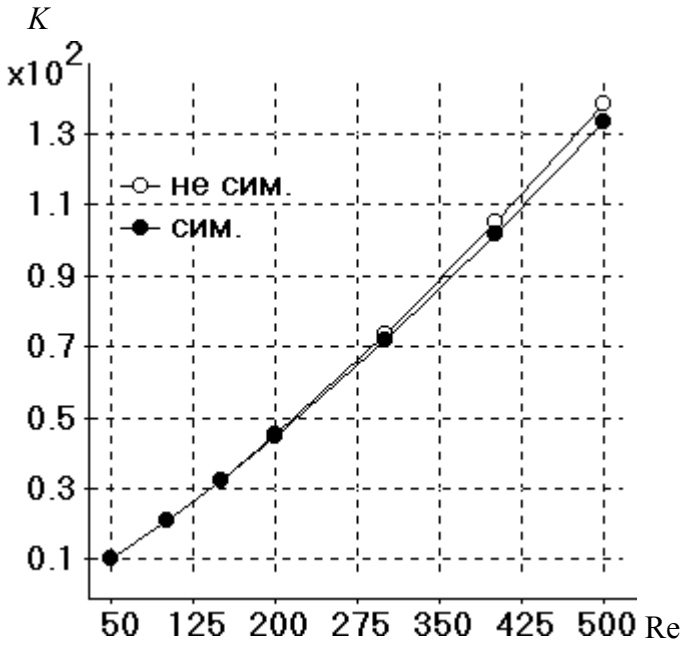


Рис.5.7. Зависимость среднеобъемной кинетической энергии от числа Re

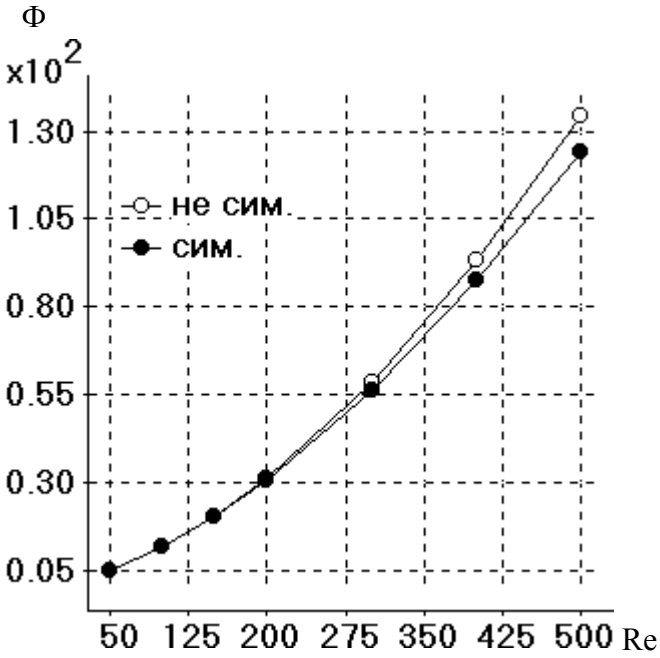


Рис.5.8. Зависимость среднеобъемной диссипации энергии от числа Re

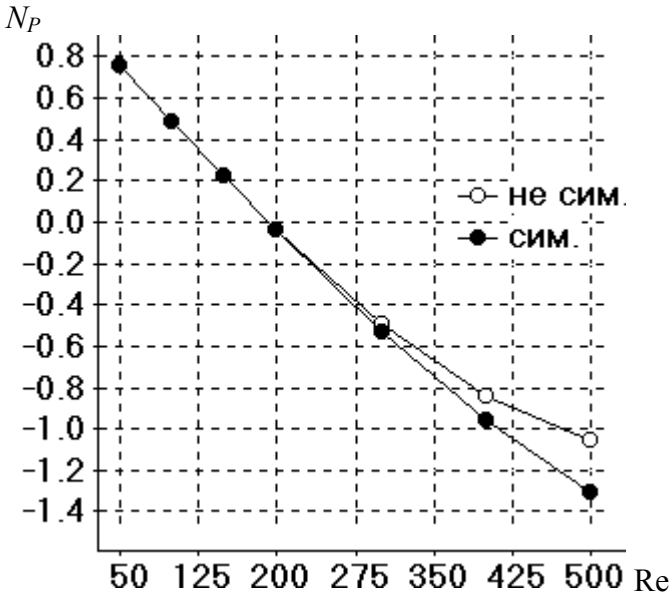


Рис.5.9. Зависимость среднеобъемной мощности сил давления от числа Re

вязкой диссипации энергии -

$$\Phi = \frac{Re}{W}\int_W \dot{S}^2\, dW, \qquad \dot{S}^{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \frac{\partial V^k}{\partial x^i}\right), \quad \text{i, k =1..2,} \tag{5.3}$$

для симметричного и несимметричного решений. В формулах (5.1) - (5.3) W – это участок канала между сечениями x=0 и x=40.

На рис.5.7 и рис.5.8 видно, что кинетическая энергия K и диссипация Ф растут с увеличением числа Рейнольдса, причем в несимметричном течении быстрее, чем в симметричном течении. Мощность сил давления N_P с увеличением Re убывает и становится отрицательной рис.5.9, при этом в несимметричном течении N_P, по абсолютной величине, меньше, чем в симметричном течении.

Для выяснения причин такого поведения интегральных характеристик течения рассмотрим более детально картины линий тока и поля давления при различных числах Рейнольдса.

Движение потока в расширяющемся канале сопровождается повышением давления, т.е. движение жидкости направлено против сил давления. В симметричном течении расширение поперечного сечения потока приводит к повышению давления с образованием локального максимума в той области, где линии тока становятся параллельны стенкам канала. С увеличением числа Рейнольдса положение максимума давления смещается вниз по потоку рис.5.4. После достижения максимума давление падает по линейному закону, в соответствии с законом сопротивления при ламинарном движении жидкости в прямолинейном плоском канале, что отчетливо видно на рис.5.4 при числах Рейнольдса 50 – 150. В окрестности угловых точек наблюдается область пониженного давления рис.5.4, рис.5.5. За исключением области в непосредственной близости от сечения, в котором происходит внезапное расширение потока, изобары, представляют собой прямые линии перпендикулярные продольной оси канала рис.5.4, рис.5.5. Таким образом, вектор сил давления практически во всей области параллелен вектору скорости.

В несимметричном течении картины поля давления более сложные рис.5.2, рис.5.3. Как и в случае симметричной структуры течения, расширение поперечного сечения потока сопровождается повышением давления, однако максимум давления

находится несколько ниже по потоку, по сравнению с симметричным течением при том же числе Рейнольдса рис.5.3. В окрестности точек присоединения отрывных зон наблюдаются локальные максимумы давления. В отличие от симметричного решения изобары в несимметричном течении имеют такую форму, что вектор скорости основного потока почти везде направлен поперек градиента давления. Эта тенденция становится все более заметной с увеличением числа Рейнольдса рис.5.3. В результате, интегральная мощность сил давления N_P (5.2) в несимметричном течении оказывается меньше по абсолютной величине, чем в симметричном течении. Учитывая, что при Re>200 N_P отрицательное (рис.5.7), можно говорить, что сопротивление движению жидкости, за счет сил давления в несимметричном течении меньше чем симметричном. Учитывая это, можно объяснить более быстрый рост кинетической энергии и диссипации в несимметричном решении, как следствие увеличения скорости при более низком сопротивлении.

В результате численного исследования задачи о потере симметрии за внезапным симметричным расширением можно сделать следующие выводы:

1. В результате исследования влияния TVD схем и схемы QUIC на процесс потери симметрии решения получено, что при задании симметричных граничных условий схема QUIC может генерировать несимметричное решение. Т.е. величина асимметричных возмущений, вносимых схемой QUIC, может затенить реальную картину процессов потери устойчивости при наличии малых возмущений.
2. Исследовано влияние различного типа искусственных возмущений на численное решение. Показано, что граничные условия в угловой точке уступа играют решающую роль в процессе потери симметрии, а в качестве усилителя возмущений выступает неустойчивое течение в слое смешения между основным течением и рециркуляционной зоной.
3. Построены зависимости интегральных характеристик симметричного и несимметричного решения от числа Рейнольдса. Получено, что с увеличением числа Рейнольдса кинетическая энергия, диссипация и сопротивление сил давления растут, причем в несимметричном решении сопротивление сил давления меньше, чем в симметричном решении. Как следствие, в

несимметричном решении происходит более быстрый рост кинетической энергии и диссипации, по сравнению с симметричным решением.

5.2. Свободная конвекция в V-образных каналах.

В данном разделе численно исследуется задача о развитии свободной конвекции при неустойчивой стратификации жидкости в замкнутых V-образных областях. Получено, что, при числах Грасгофа больших некоторого критического значения, данная задача имеет не единственное решение. Построены зависимости модуля максимального и минимального значений функции тока от числа Грасгофа. Оценено влияние структуры решения на характеристики локального теплообмена. Проведено сравнение интегральных величин кинетической энергии потока и мощности действия сил давления и гравитационной силы, а также энергии диссипации для устойчивого и неустойчивого решения.

Известно, что задача о равновесии жидкости при подогреве снизу является неустойчивой и, в общем случае, может иметь не единственное решение [99], [25], [24], [163]. Например, решение задачи о свободной конвекции в прямоугольной двумерной горизонтальной области с неустойчивой стратификацией жидкости зависит от вида начального возмущения [99].

В настоящей работе рассмотрена задача о развитии свободной конвекции в замкнутых V-образных областях с неустойчивой стратификацией. Такого рода задачи возникают в теплообменниках с внутренним стержнем и продольными ребрами, разделяющими рабочее пространство теплообменника на изолированные отсеки рис.5.2.1.

Исследованы два варианта геометрии V-образной области с острой кромкой (геометрия А) рис.5.10,а и скругленной кромкой (геометрия Б) рис.5.10,б. Нижние наклонные стенки имеют постоянную безразмерную температуру T=1, верхние T=0, а торцевые стенки теплоизолированы. В отличие от задачи о неустойчивом равновесии жидкости в прямоугольном горизонтальном канале, ненулевой угол наклона горячих стенок V-образной области приводит к тому, что жидкость приходит в движение при любом, отличном от нуля перепаде температур.

Для описания свободной конвекции использовалось приближение Буссинеска (3.9), (3.10). Коэффициенты вязкости и теплопроводности считались постоянными. Число Прандтля полагалось равным единице Pr=1.

Расчеты проводились с помощью метода SIMPLER модифицированного для использования на криволинейных, неортогональных разнесенных сетках [47] (см. раздел 2). Для аппроксимации конвективных потоков использовалась схема TVD MinMod (2.110), а для диффузионных потоков схема (2.96).

Поскольку граничные условия симметричны, и геометрия области имеет вертикальную ось симметрии, то при отсутствии несимметричных сил и возмущений должно реализоваться симметричное решение. Вообще говоря, наличие неустойчивости в физической постановке задачи не очевидно, но, если неустойчивость все-таки существует, то возможно наличие нескольких решений, при этом некоторые из них могут быть не симметричными.

Расчеты показали, что при $Gr>Gr_k$, где Gr_k – критическое число Грасгофа, эта задача имеет три решения: симметричное и два зеркальных не симметричных. Симметричное решение неустойчиво к малым начальным возмущениям при $Gr>Gr_k$, в то время как не симметричные решения устойчивы к малым возмущениям, по крайней мере, при числах Грасгофа $Gr<10^5$.

Для получения симметричного решения в области его неустойчивости ($Gr > Gr_k$) необходимо, чтобы метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) давал симметричное решение на каждой итерации. Поэтому при прогонках по вертикальным сеточным линиям применялась следующая последовательность перебора: от оси симметрии к краям области и обратно.

В результате расчетов с разными (симметричными и несимметричными) последовательностями прогонок было получено, что асимметрия прогонок является источником возмущений, которые могут стать причиной перехода от неустойчивого симметричного решения к несимметричному, но само стационарное асимметричное решение не зависит от реализации метода решения СЛАУ.

Сравнение результатов, полученных при использовании в качестве итерационной процедуры метода нижней релаксации (4.1) и результатов счета на установление (4.4) показало, что стационарное решение этой задачи не зависит от вида итерационной процедуры расчета. Однако следует заметить, что сходимость

итерационного решения по методу нижней релаксации была в полтора - два раза быстрее.

С точки зрения факта нарушения устойчивости решения, форма выступа не играет большой роли. Неустойчивость наблюдается и в случае выступа с острой кромкой (геометрия А) и в случае скругленной кромки (геометрия Б). Важным для неустойчивости фактором, является форма горячих нижних стенок. В частности, расчеты показали, что если нижняя стенка выполнена в форме дуги окружности, то величина Gr_k (при котором решение теряет устойчивость) на порядок больше, чем для геометрии А или Б.

В области с геометрией А расчеты велись как на криволинейной, так и на блочной декартовой сетке. На блочной сетке в угловой точке вводились два расчетных узла вместо одного, чтобы обеспечить разрыв производных от искомых параметров справа и слева от острой кромки. Расчеты показали, что решения, полученные на криволинейной и декартовой сетке, практически совпадают при одинаковых средних шагах обеих сеток.

Таблица 5.1.

Сравнение решений по интегральным характеристикам

Сетка	62x20	82x30	122x40	182x50	202x65	242x80
Ψ_{max}	33,74	33,05	33,03	32,95	32,87	32,85
$\Delta\Psi_{max}$	2,72%	0,62%	0,55%	0,32%	0,08%	0,00%
Ψ_{min}	29,34	28,07	27,71	27,58	27,39	27,32
$\Delta\Psi_{min}$	7,4%	2,7%	1,4%	0,9%	0,2%	0,0%
Pe_h	3,4	2,6	1,7	1,2	1,0	0,9

Таблица 5.2.

Сравнение решений на разных сетках в сеточной норме С

Сетка	62x20	82x30	122x40	182x50	202x65
$\{\Delta T\}_c$	10,73%	6,62%	3,44%	1,64%	0,70%
$\{\Delta U\}_c$	29,56%	16,24%	7,27%	3,30%	1,26%
$\{\Delta V\}_c$	20,24%	10,29%	4,47%	2,21%	0,79%

Для оценки влияния шага сетки на решение, была проведена серия расчетов на сетках с разным количеством узлов. В табл.5.1 приведено максимальное и минимальное по модулю значение функции тока Ψ_{max} , Ψ_{min} при $Gr=10^5$ в несимметричном решении для геометрии А (см. рис.5.10.а), полученное на

различных сетках. Там же приведено сеточное число Пекле $Pe_h = U_{max}h/\nu$ и погрешность в процентах $\Delta\Psi_{max}$, $\Delta\Psi_{min}$ по отношению к решению, полученному на сетке 242x80 узлов. В табл.5.2 приведена величина относительной погрешности в норме С для температуры, и декартовых компонент скорости. При вычислении погрешности, в качестве эталонного решения, использовалось несимметричное решение полученное при $Gr=10^5$ для геометрии А на сетке 242x80 узлов.

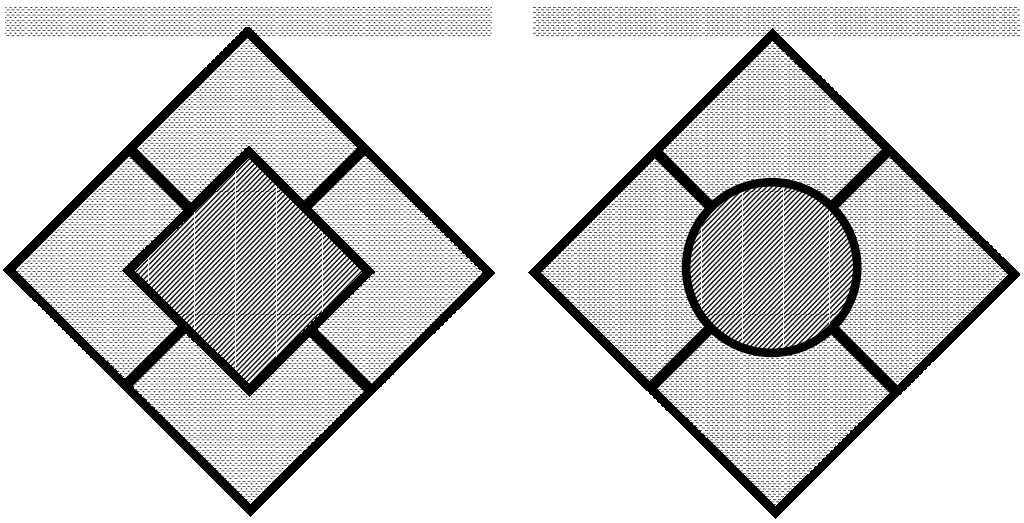
Из таблиц видно, что на криволинейной сетке 122x40 узлов максимальная погрешность норме С для компонент скорости не превышает 7,5%, а для температуры 3,5%, поэтому в дальнейшем все расчеты проводились на этой сетке.

На рис.5.10 показаны изотермы и линии тока для геометрии А и Б при числе $Gr=10^3$. На рис.5.11 показаны изотермы и линии тока для геометрии А, а на рис.5.12 геометрии Б при числе $Gr=7\cdot10^4$. На рис.5.10 видно, что при $Gr=10^3$ реализуется симметричное течение с двумя зонами циркуляции, вращающимися в противоположные стороны. Нагретая жидкость поднимается от нижнего угла области вдоль наклонных стенок, охлаждается у верхних стенок и опускается вдоль оси симметрии области.

Судя по кривизне изотерм (рис.5.10), интенсивность циркуляционного течения в области с геометрией Б больше, чем в области А. На рис.5.11, рис.5.12 симметрия течения заметно нарушена. Одна зона циркуляции увеличилась в размерах за счет другой и занимает около 2/3 всей области, причем в случае Б (см. рис.5.12) асимметрия несколько больше, чем в случае А (см. рис.5.11).

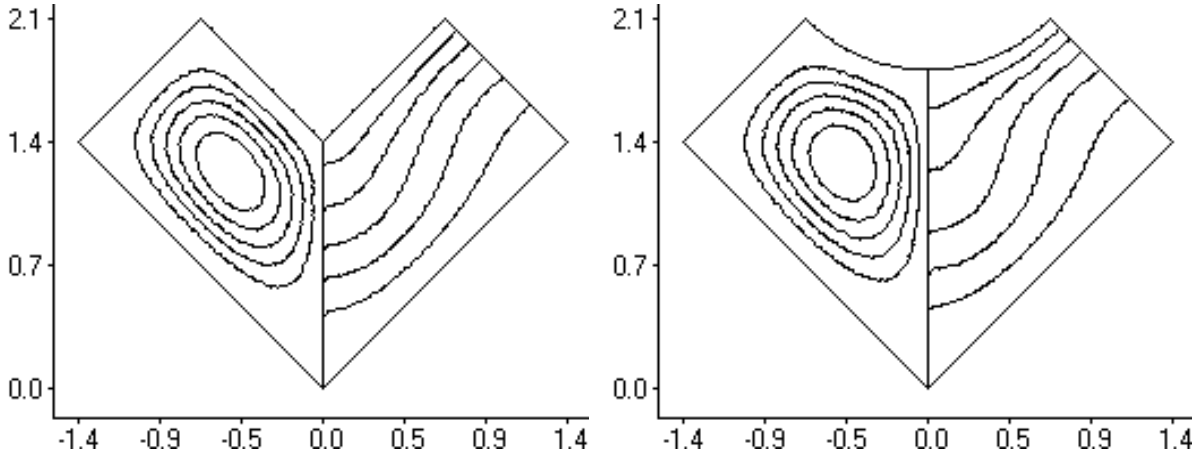
На рис.5.11 и рис.5.12 видно, что в области нижней угловой точки возникает зона вторичного отрыва потока. Интенсивность циркуляционного течения во вторичном отрыве мала, поэтому влияние вторичного отрыва на распределение температуры практически не заметно.

Рассмотрим вопрос о влиянии структуры течения на локальные характеристики теплообмена. На рис.5.13 – рис.5.20 приведены графики распределения числа Нуссельта (3.18) вдоль нижней и верхней поверхностей расчетной области.



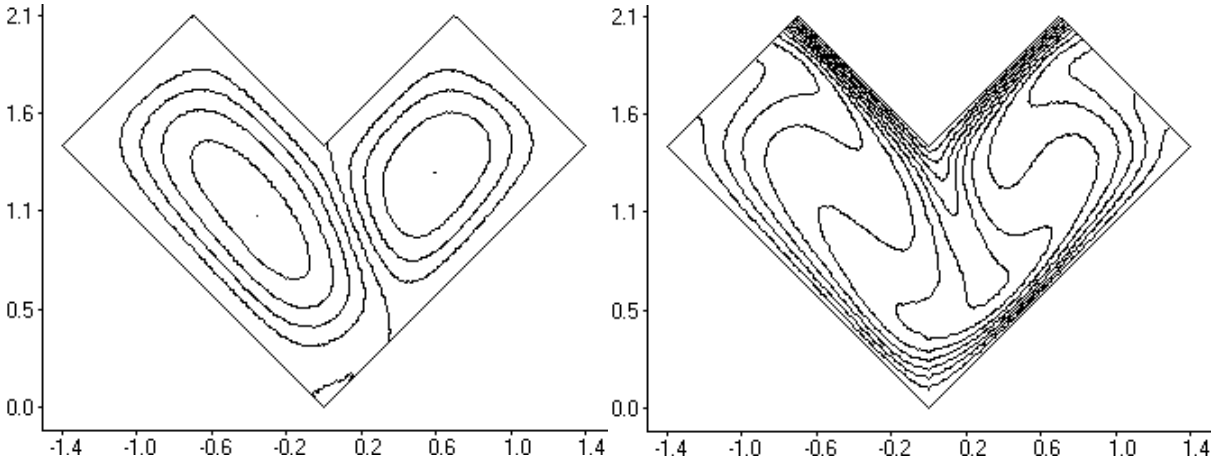
а б

Рис.5.2.1. Каналы с внутренним стержнем и продольными ребрами
а- геометрия А; б- геометрия Б

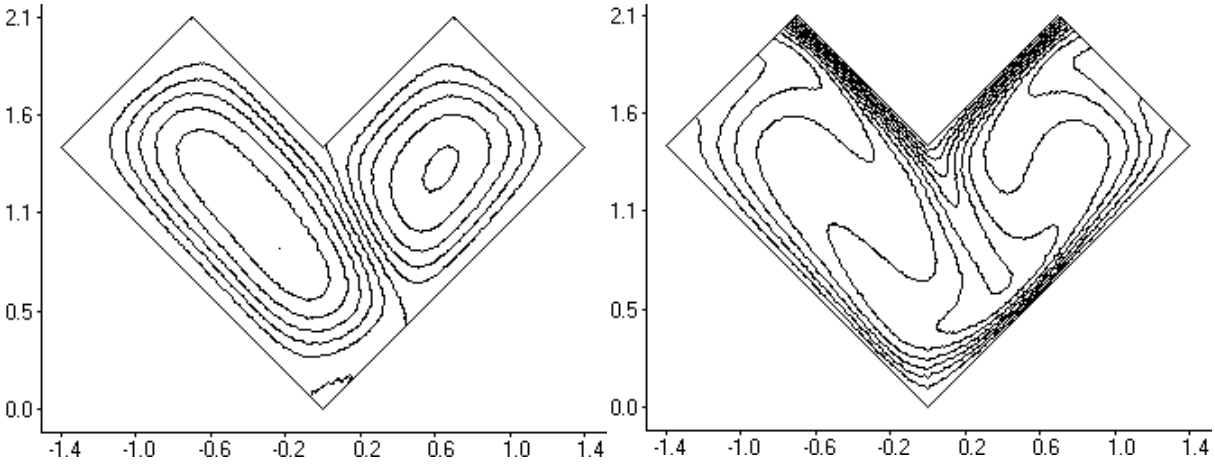


а б

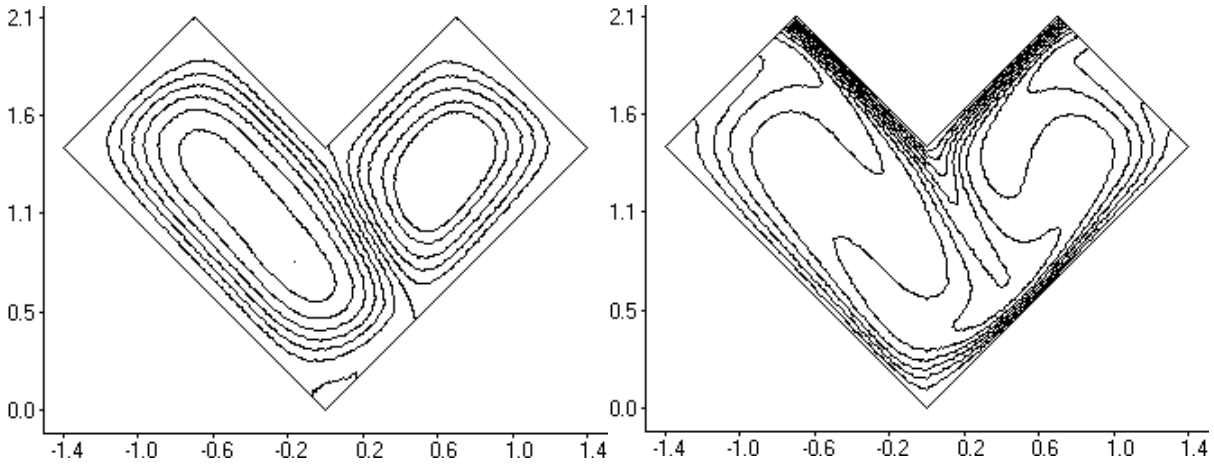
Рис.5.10.Линии тока и изотермы при числе $Gr=10^3$ для: а- геометрии А; б- геометрии Б



а



б



в

Рис.5.11. Линии тока (слева) и изотермы (справа) при числах Грасгофа а – $Gr=4\cdot10^4$; б – $Gr=7\cdot10^4$; в – $Gr=10^5$ (геометрия А)

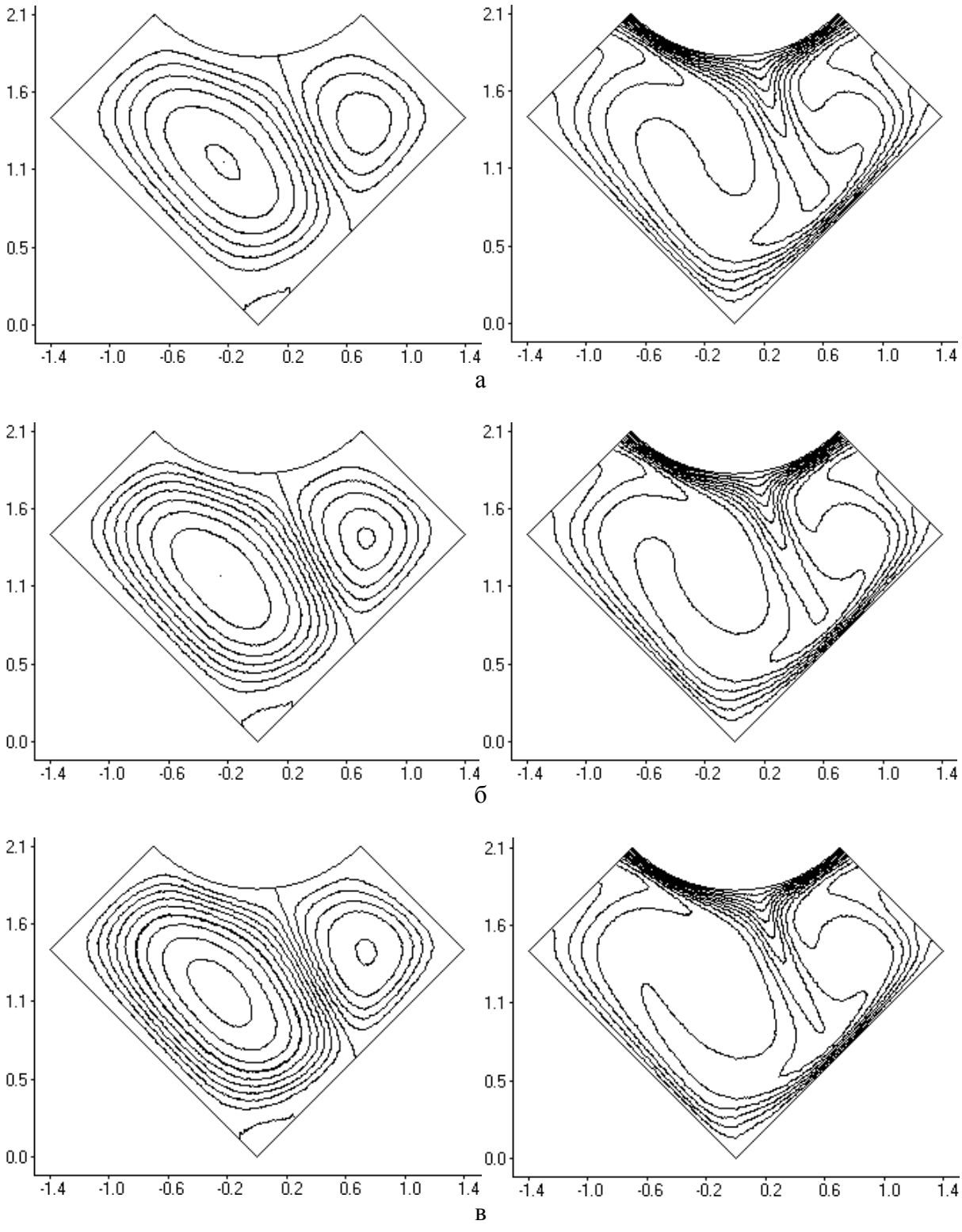


Рис.5.12. Линии тока (слева) и изотермы (справа) при числах Грасгофа а – $Gr=4\cdot10^4$; б – $Gr=7\cdot10^4$; в – $Gr=10^5$ (геометрия Б)

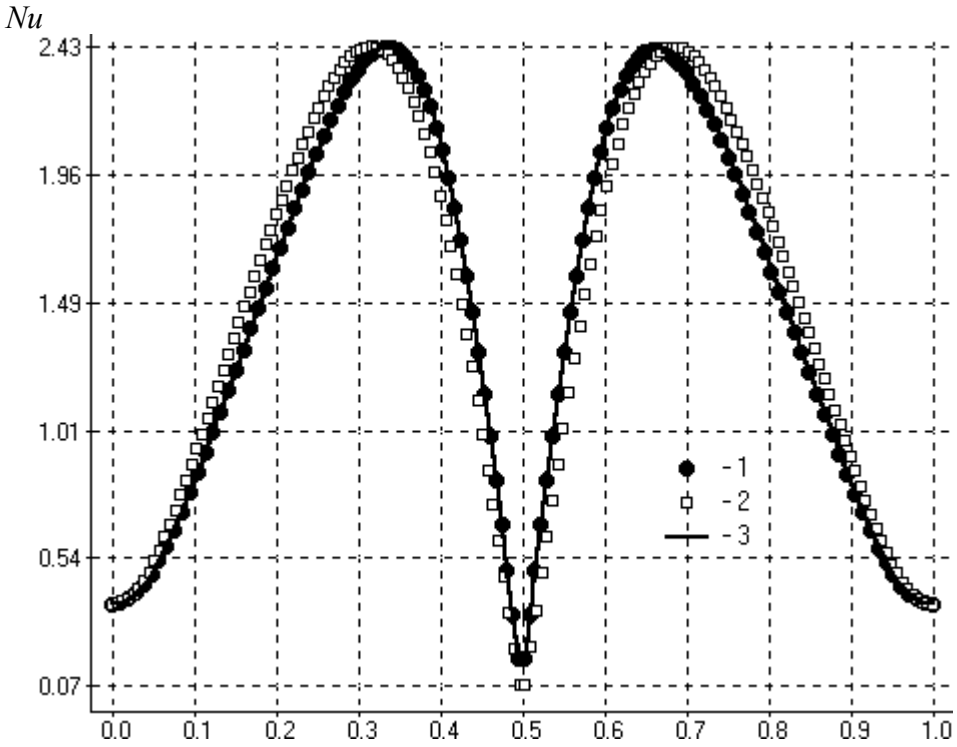


Рис.5.13. Распределение локального числа *Nu* по нижней поверхности (геометрия А) при числе Грассгофа $Gr=5\cdot10^3$, 1 – криволинейная сетка120х40; 2 – блочная декартова 120х40; 3 – криволинейная сетка 120х40 (симметричное решение)

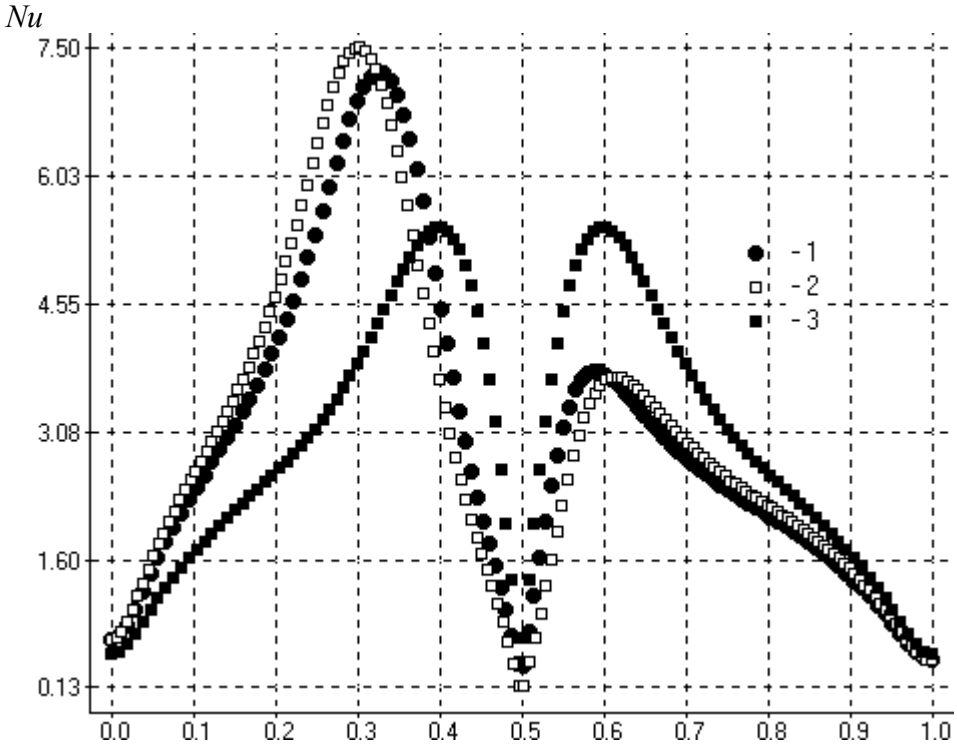


Рис.5.14. Распределение локального числа *Nu* по нижней поверхности (геометрия А) при числе Грассгофа $Gr=7\cdot10^4$, 1 – криволинейная сетка120х40; 2 – блочная декартова 120х40; 3 – криволинейная сетка 120х40 (симметричное решение)

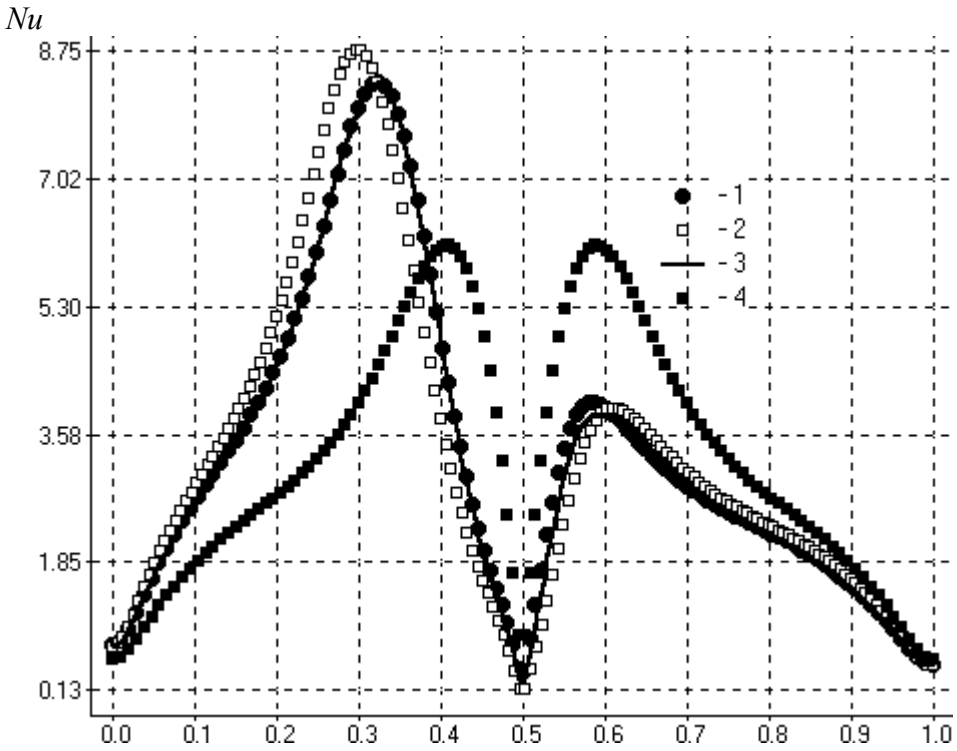


Рис.5.15. Распределение локального числа *Nu* по нижней поверхности (геометрия А) при числе Грассгофа $Gr=1\cdot10^5$, 1 – криволинейная сетка120х40; 2 – блочная декартова 120х30; 3 – криволинейная сетка 240х80; 4 – криволинейная сетка 120х40 (симметричное решение)

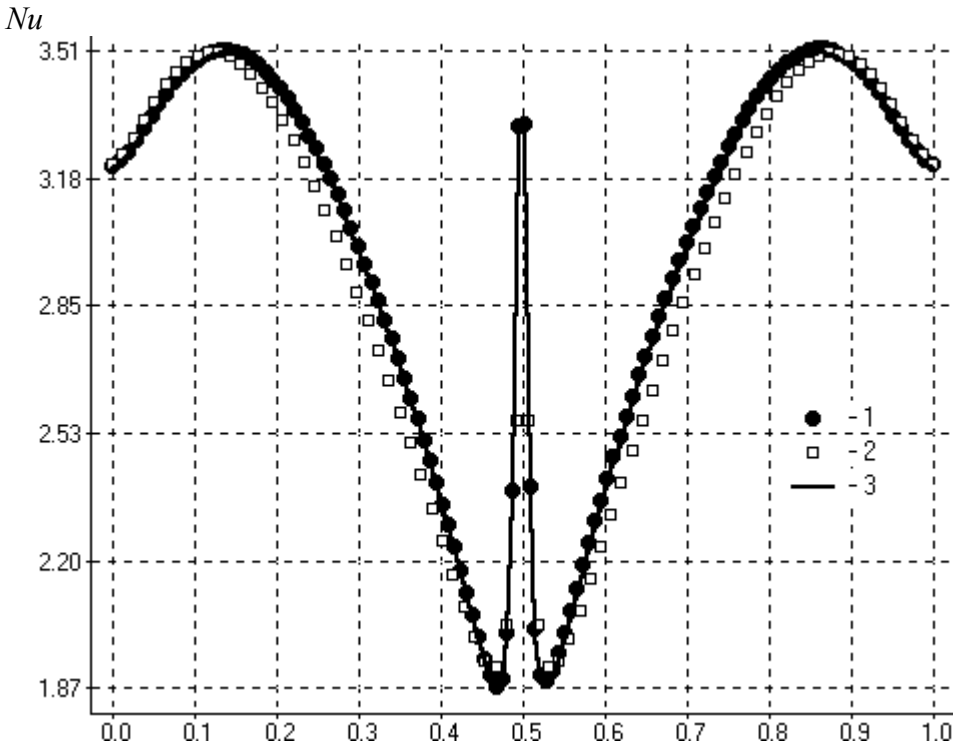


Рис.5.16. Распределение локального числа *Nu* по верхней поверхности (геометрия А) при числе Грассгофа $Gr=5\cdot10^3$, 1 – криволинейная сетка120х40; 2 – блочная декартова 120х40; 3 – криволинейная сетка 120х40 (симметричное решение)

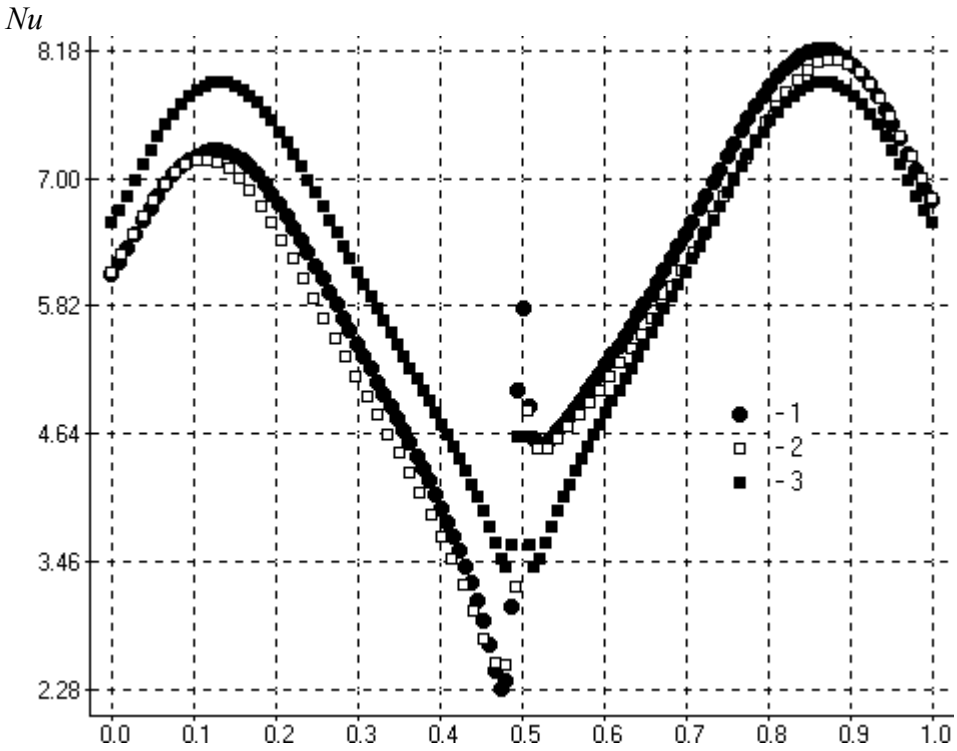


Рис.5.17. Распределение локального числа *Nu* по верхней поверхности (геометрия А) при числе Грассгофа $Gr=7\cdot10^4$, 1 – криволинейная сетка120х40; 2 – блочная декартова 120х40; 3 – криволинейная сетка 120х40 (симметричное решение)

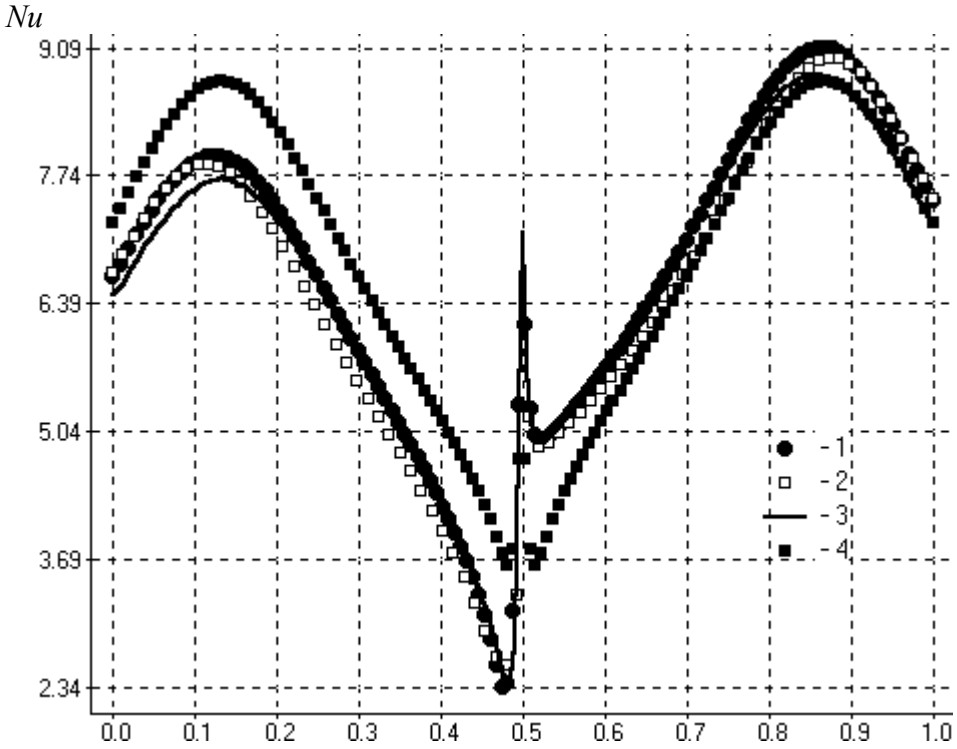


Рис.5.18. Распределение локального числа *Nu* по верхней поверхности (геометрия А) при числе Грассгофа $Gr=1\cdot10^5$, 1 – криволинейная сетка120х40; 2 – блочная декартова 120х30; 3 – криволинейная сетка 240х80; 4 – криволинейная сетка 120х40 (симметричное решение)

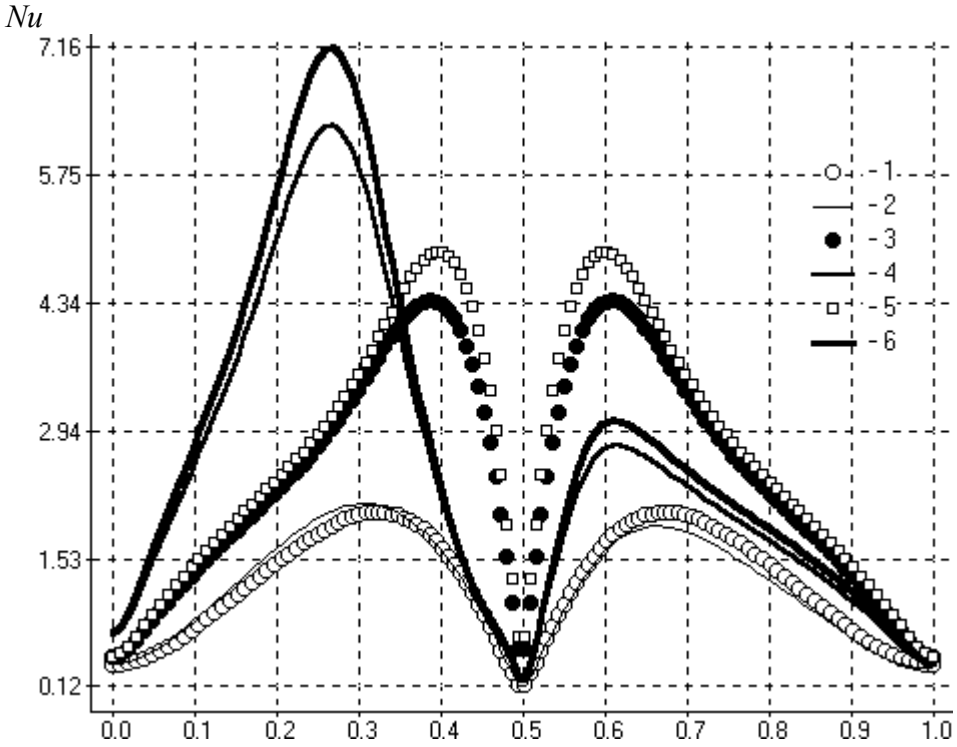


Рис.5.19. Распределение локального числа *Nu* по нижней поверхности (геометрия Б) при числах Грассгофа: 1 – $Gr=5\cdot10^3$(симметричное решение); 2 – $Gr=5\cdot10^3$; 3 – $Gr=7\cdot10^4$ (симметричное решение); 4 – $Gr=7\cdot10^4$; 5 – $Gr=10^5$ (симметричное решение); 6 – $Gr=10^5$

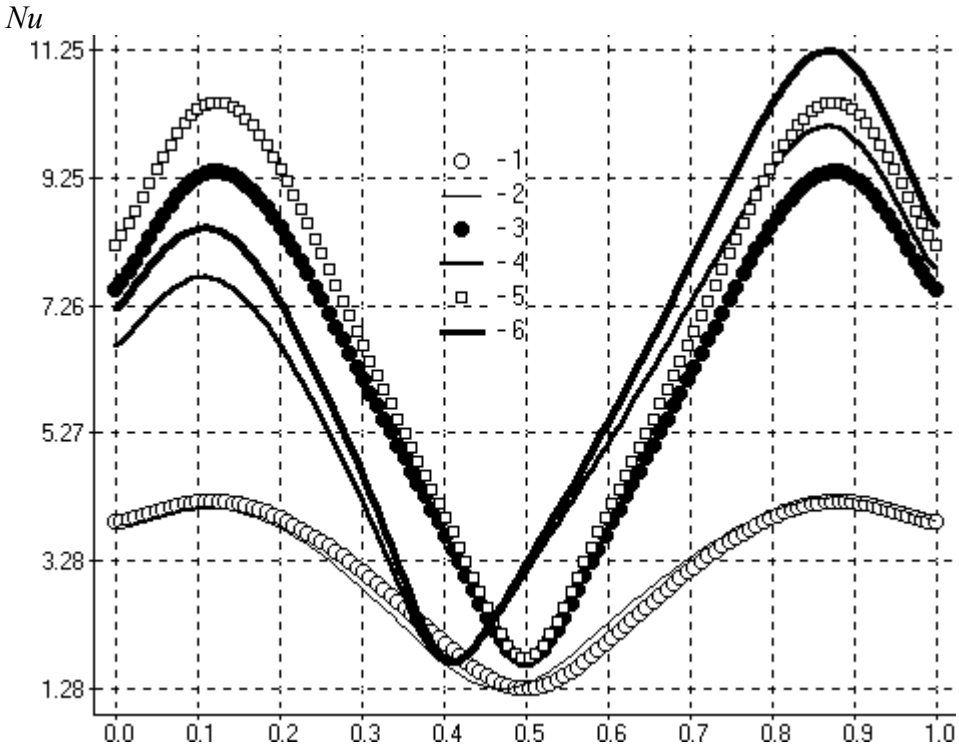


Рис.5.20. Распределение локального числа *Nu* по верхней поверхности (геометрия Б) при числах Грассгофа: 1 – $Gr=5\cdot10^3$(симметричное решение); 2 – $Gr=5\cdot10^3$; 3 – $Gr=7\cdot10^4$ (симметричное решение); 4 – $Gr=7\cdot10^4$; 5 – $Gr=10^5$ (симметричное решение); 6 – $Gr=10^5$

Для сравнения на рис.5.13 – рис.5.18 приведены результаты, полученные на декартовой и криволинейной сетках. На рисунках видно, что локальные характеристики теплообмена, рассчитанные на декартовой и криволинейной сетках, практически совпадают, за исключением небольшой области, где струя холодной жидкости ударяет в нижнюю, горячую стенку. Однако и здесь максимальное расхождение результатов не превышает нескольких процентов. Такое совпадение следует признать удовлетворительным, особенно с учетом того факта, что данная задача неустойчива, и малые возмущения могут приводить к значительным изменениям решения.

На рис.5.13 – рис.5.20 показаны результаты расчетов числа Нуссельта для симметричного и несимметричного решений в областях с геометрией А и Б. На рисунках видно, что потеря симметрии сильно сказывается на локальном распределении числа Нуссельта и, в целом, приводит к увеличению значений максимального локального теплового потока через нижнюю, горячую стенку области. Изменение локальных потоков тепла через верхнюю, холодную стенку вследствие асимметрии решения – незначительно. Сравнивая распределения теплового потока для геометрии А (рис.5.13 - рис.5.18) и Б (рис.5.19, рис.5.20), можно заметить, что максимальное значения локального теплового потока на нижней стенке достигается в области с геометрией А, а максимальный тепловой поток на верхней стенке получается в области с геометрией Б.

Следует отметить, что при обтекании острой кромки выступа (геометрия А) тепловой поток резко изменяется, достигая локального максимума (рис.5.25 - рис.5.18). При обтекании скругленной кромки (геометрия Б) такой эффект не наблюдается (рис.5.20).

На практике представляет интерес зависимость среднего теплового потока от числа Грасгофа, которая показана на рис.5.21. Анализ приведенных зависимостей показывает, что в области с геометрией А суммарный тепловой поток больше, чем в области с геометрией Б. Потеря симметрии решения в обоих случаях приводит к уменьшению потока тепла.

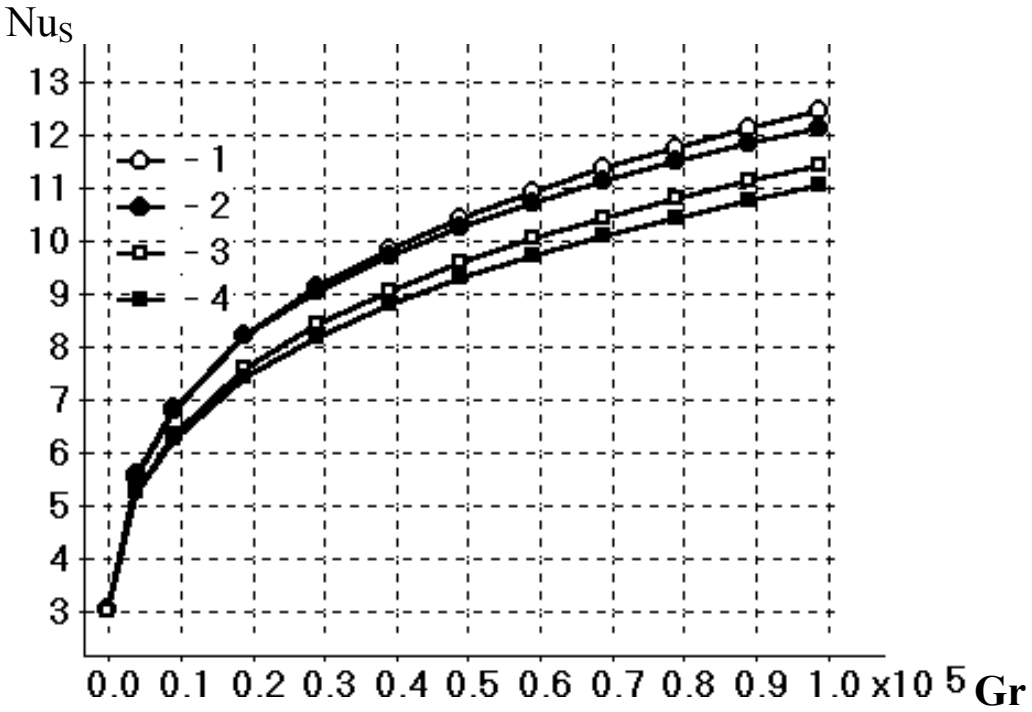


Рис.5.21. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грасгофа:
1, 2 – геометрия А; 3, 4 – геометрия В;
1, 3 – симметричное; 2, 4 – асимметричное течение

На рис.5.22 показана зависимость модуля максимального и минимального значений функции тока Ψ_{max}, Ψ_{min} от числа Gr для трех серий расчетов. Тонкая сплошная линия соответствует первой серии расчетов – симметричному решению ($|\Psi_{max}| = |\Psi_{min}|$), полученному с помощью дополнительных условий непротекания на оси симметрии. Толстые сплошные линии показывают результаты второй серии расчетов, в которой начальным приближением было несимметричное решение для $Gr=10^5$. В серии 3 (точки на графике) число Gr увеличивалось от 10^2 до 10^5 с шагом порядка $10^2 \div 10^3$, а в качестве начального приближения задавалось решение, полученное на предыдущем шаге. Решение считалось установившимся, если относительная погрешность в норме С между двумя решениями, полученными на двух последних итерациях, была меньше 10^{-5}. Однако дальнейшие расчеты показали, что продолжение счета при $Gr > Gr_k$ и несимметричной последовательности прогонок приводит к потере симметрии. Результаты серии 3 подтверждают, что при $Gr < Gr_k$ данная задача имеет единственное (симметричное) решение, устойчивое к несимметричным возмущениям, и независящее от начального приближения.

Анализируя зависимости, приведенные на рис.5.22, можно сделать вывод, что переход от неустойчивого симметричного к несимметричному решению зависит от трех факторов – числа Грасгофа, структуры начального приближения и величины несимметричных возмущений в ходе итерационного решения.

Следует заметить, что при качественно одинаковом поведении решений в областях А и Б, критические числа Грасгофа отличаются на порядок: для А $Gr_k = 2{,}1 \cdot 10^4$, для Б $Gr_k = 0{,}9 \cdot 10^3$. Интенсивность циркуляционного течения в области Б в полтора раза выше чем в А. Относительная разность между максимальным и минимальным значениями функции тока в области А порядка 15%, а в области Б ~ 40%.

Особый интерес представляет процесс сходимости итерационного решения при $Gr > Gr_k$. Для исследования этого вопроса была проведена серия расчетов, результаты которой (см. рис.5.23, рис.5.24, рис.5.25) позволяют сделать следующие выводы.

При $Gr > Gr_k$ и использовании симметричных прогонок реализуется симметричное решение. При $Gr > Gr_k$ и несимметричной последовательности

прогонок реализуется несимметричное решение. Причиной такого поведения решения являются асимметричные возмущения.

При симметричном начальном приближении реализация одного из двух несимметричных решений зависит от последовательности, в которой проводятся прогонки по сеточным линиям. Если вертикальные сеточные линии перебирались слева направо, то реализовывалось решение с большей левой циркуляционной зоной и наоборот.

При несимметричном начальном приближении реализация одного из двух несимметричных решений зависит только от асимметрии начального приближения и не зависит от метода решения СЛАУ.

Если в начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя, а затем число Грасгофа медленно увеличивается до определенного значения, то процесс установления решения состоит из трех этапов рис.5.23. На первом этапе развивается симметричное решение. Максимальное и минимальное значение функции тока $|\Psi_{max}| \cong |\Psi_{min}|$ растут, пока увеличивается число Gr. На втором этапе, когда число Gr достигает своего максимального значения (см. рис.5.23 N=2000 итераций), рост $|\Psi_{max}|$, $|\Psi_{min}|$ прекращается, симметрия сохраняется, а погрешность между итерациями убывает до величины порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$. На рис.5.23 видно, что второй этап выражен более отчетливо для геометрии А по сравнению с Б при том же числе Gr. На третьем этапе симметрия постепенно теряется, погрешность между итерациями сначала растет, а затем уменьшается до величины ошибок округления, и реализуется несимметричное установившееся решение.

Если в качестве начального приближения использовать несимметричное решение, полученное для другого числа Грасгофа, то решение остается несимметричным и плавно деформируется, а погрешность между итерациями квазимонотонно убывает до величины ошибок округления.

Если начальное приближение имеет структуру (например, вихрь на оси симметрии), отличную от структуры несимметричного решения (два вихря разной интенсивности (см. рис.5.11, рис.5.12)), то решение последовательно проходит три этапа. Вначале решение перестраивается и становится квазисимметричным $|\Psi_{max}| \sim |\Psi_{min}|$. На втором этапе погрешность между итерациями убывает до величины $10^{-4} \div 10^{-5}$. На третьем этапе погрешность начинает расти, а решение

деформируется и становится несимметричным. После того как сформируется новая несимметричная структура решения, погрешность между итерациями убывает до величины ошибок округления.

Рассмотрим возможные причины неустойчивости симметричного решения. Поскольку, движение жидкости подчиняется законам механики, то можно попытаться провести аналогию между стационарным решением данной задачи и положением динамического равновесия механической системы. Согласно теореме Лагранжа об устойчивости равновесия механической системы [120] если в положении равновесия силовая функция U, которая зависит только от независимых лагранжевых координат, имеет изолированный максимум, то такое положение равновесия устойчиво. К сожалению, в данной задаче теорема Лагранжа неприменима, поскольку не существует силовой функции U, зависящей только от лагранжевых координат. Однако можно предположить, что и в данном случае такие интегральные характеристики как мощность массовых сил и кинетическая энергия системы связаны с устойчивостью решения. В качестве меры суммарной кинетической энергии жидкости будем использовать величину

$$K = \int_W \frac{\mathbf{V}^2}{2}\, dW\,, \tag{5.4}$$

где интегрирование ведется по всей расчетной области W. Аналогично введем безразмерные мощность гравитационных сил N_T, сил давления N_P и суммарную мощность массовых сил N_{PT}.

$$N_T = \int_W \left(-\mathbf{Gr}\cdot T \right) \mathbf{V}\, dW\,, \tag{5.5}$$

$$N_P = \int_W \left(-\nabla p \right) \mathbf{V}\, dW\,, \tag{5.6}$$

$$N_{PT} = N_P + N_T \quad . \tag{5.7}$$

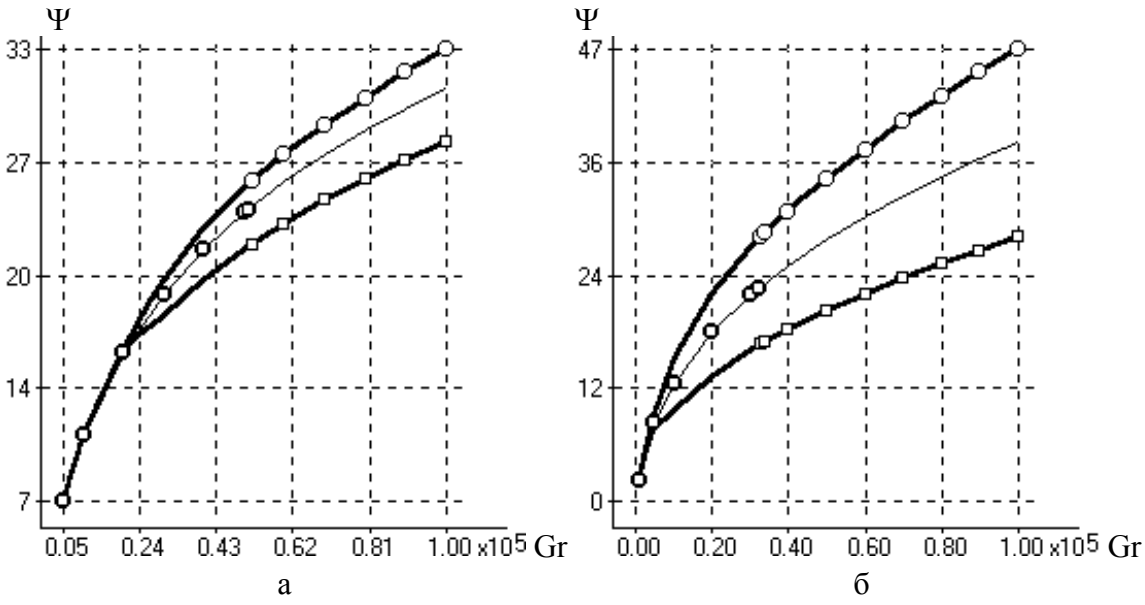


Рис.5.22. Абсолютные значения Ψ_{max}, Ψ_{min} в зависимости от числа Gr для:
а- геометрии А; б- геометрии Б

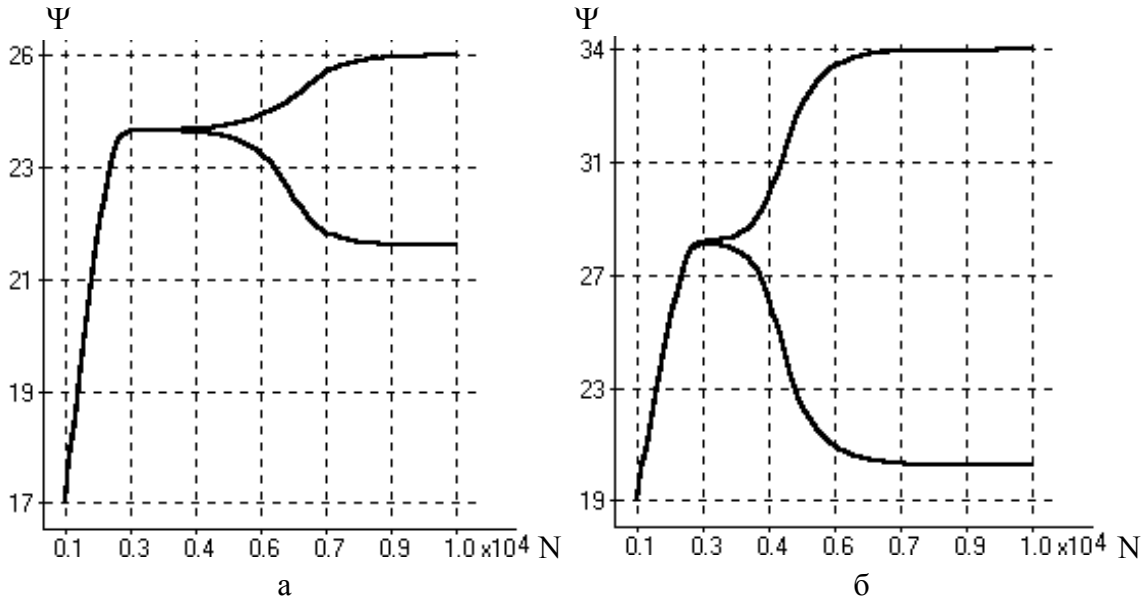


Рис.5.23. Абсолютные значения Ψ_{max}, Ψ_{min} в зависимости от числа итераций N при $Gr=5{,}2\cdot10^3$ для: а- геометрии А; б- геометрии Б

В данной задаче жидкость можно рассматривать и как термодинамическую систему, которая обменивается энергией с окружающей средой (твердыми стенками). Теорема о минимуме производства энтропии [80] говорит, что в области применимости соотношений Онсагера система эволюционирует к стационарному состоянию, характеризуемому минимальным производством энтропии, совместимым с наложенными на систему связями.

Аналогичное по смыслу утверждение содержится и в принципе Гельмгольца о "минимуме диссипированной энергии" [61], [174] а именно: в реальном медленном течении жидкости энергия вязкой диссипации минимальна по сравнению с произвольным течением в той же области при одинаковом распределении скорости на ее границе. Под медленным течением понимается такое течение, при котором в уравнении количества движения можно пренебречь конвективными слагаемыми.

В вязкой несжимаемой жидкости количество диссипированной энергии прямо пропорционально величине диссипативной функции

$$\Phi = \int_W \dot{S}^2 \, dW, \qquad \dot{S}^{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \frac{\partial V^k}{\partial x^i} \right), \quad i, k = 1..2, \tag{5.8}$$

где $\dot{S}$ – тензор скоростей деформаций.

Следует заметить, что это в данной задаче не выполняются условия, при которых перечисленные теоремы справедливы, поскольку задача существенно нелинейная.

Изменение величин K, N_{PT}, Ф и N_P в ходе установления решения с нулевым начальным приближением, когда число Gr постепенно увеличивается от 0 до $5{,}2 \cdot 10^3$ за 2000 итераций показано на рис.5.24, рис.5.25. Интересно сопоставить развитие структуры течения рис.5.23 и соответствующие значения K, N_{PT}, Ф и N_P. На рис.5.24 и рис.5.25,а видно, что с увеличением числа Грасгофа K, N_{PT} и Ф растут, достигают своего максимального значения одновременно с Gr, и остаются практически постоянными, пока решение сохраняет симметрию рис.5.23. Потеря симметрии сопровождается уменьшением значений K, N_{PT} и Ф.

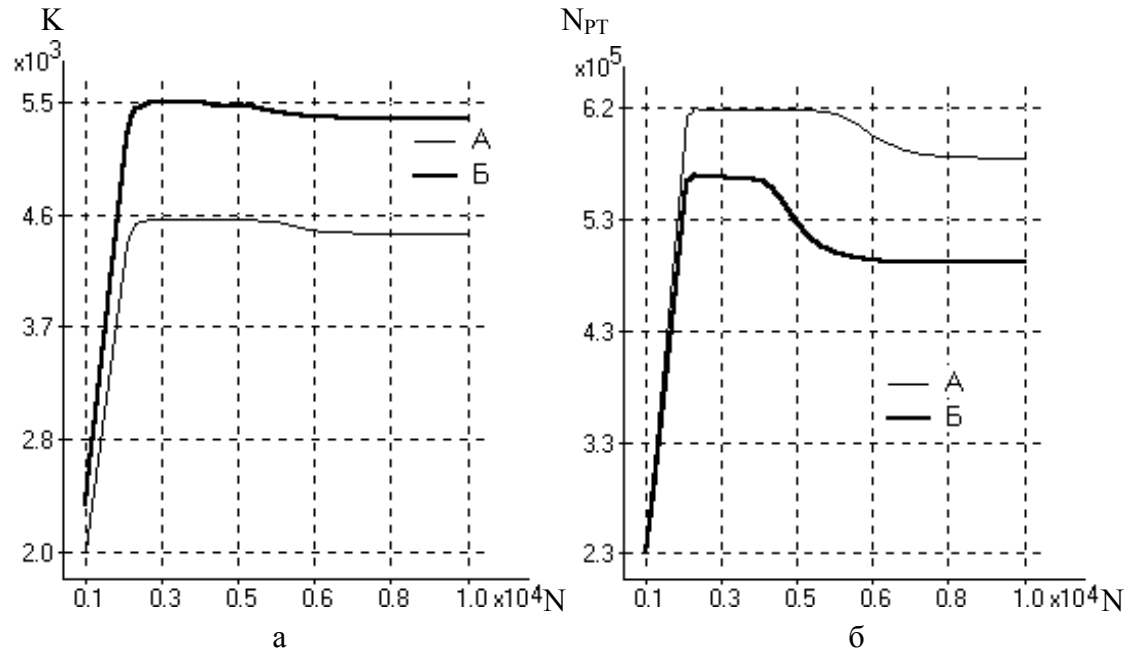


Рис.5.24. Кинетическая энергия K - а, и суммарная мощность действия гравитационной силы и сил давления N_{PT} - б в зависимости от числа итераций N при $Gr=5{,}2\cdot10^3$

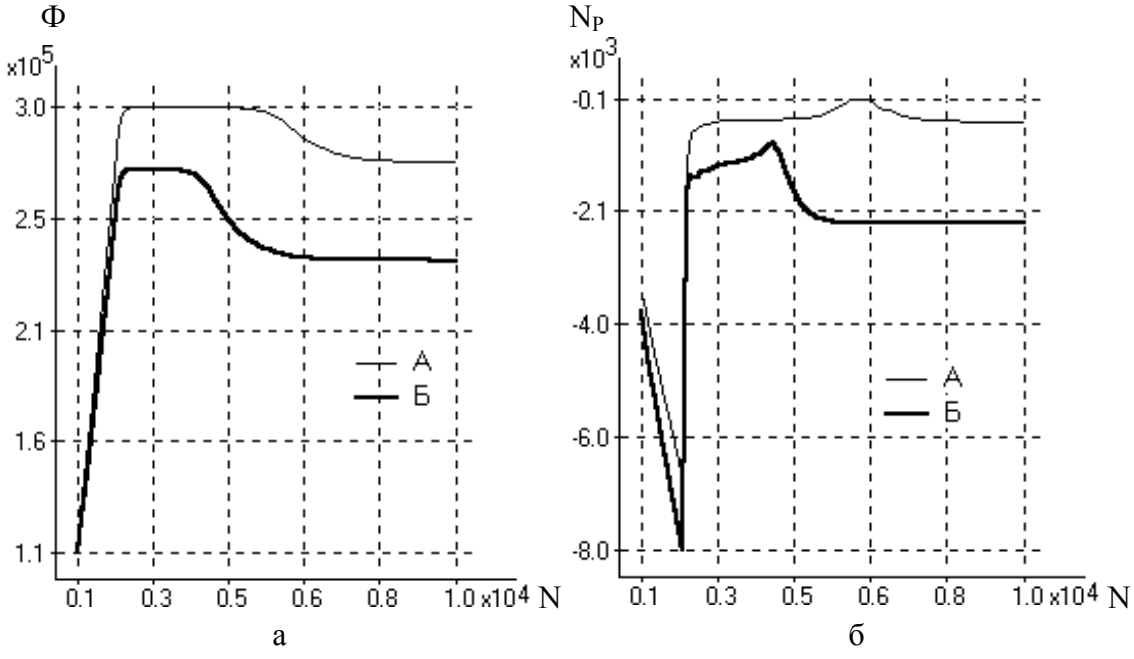


Рис.5.25. Функция диссипации Ф - а, и мощность действия сил давления N_P - б в зависимости от числа итераций N при $Gr=5{,}2\cdot10^3$

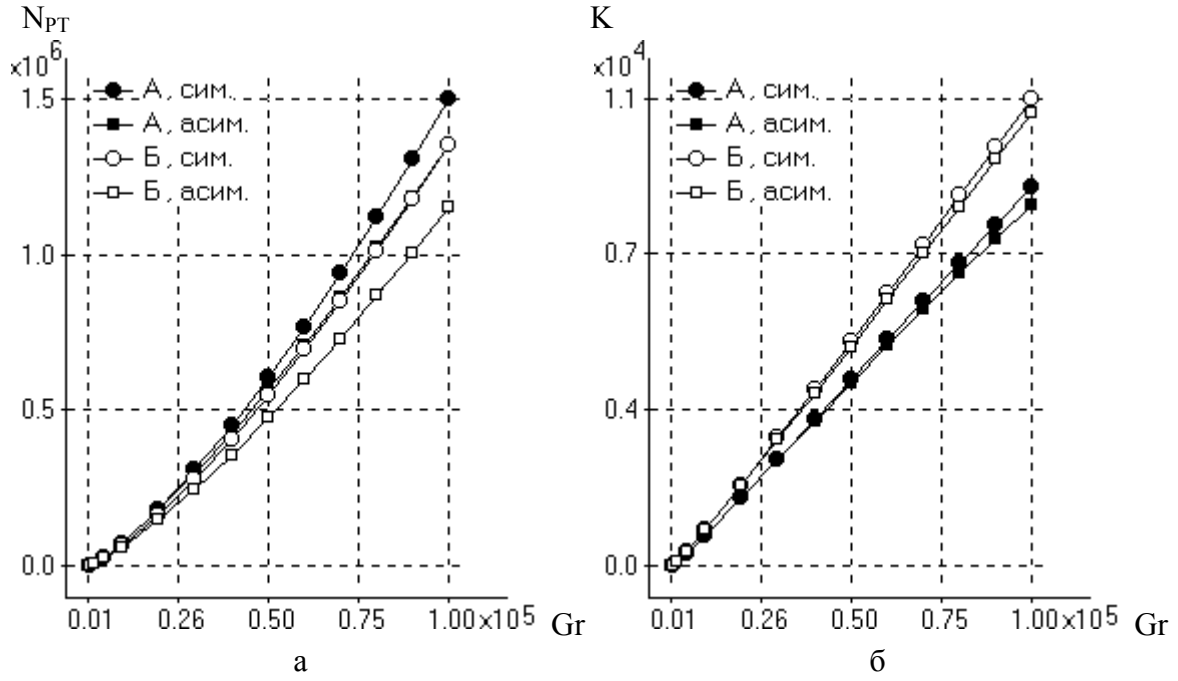


Рис.5.26. Зависимость суммарной мощности гравитационной силы и сил давления N_{PT} и кинетической энергии течения K от числа Gr для геометрии А и Б, а - N_{PT}; б - K

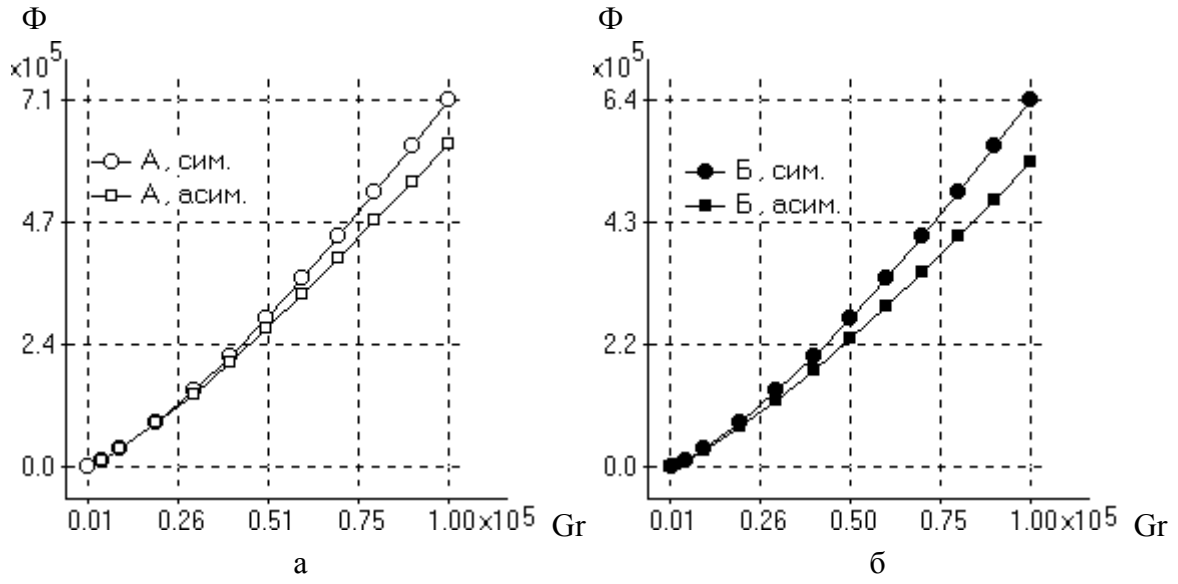


Рис.5.27. Функция диссипации Ф в зависимости от Gr для: а- геометрии А; б- геометрии Б

Мощность действия сил давления N_P ведет себя иначе. С увеличением числа Грасгофа $|N_P|$ достигает своего максимального значения. После прекращения роста Gr, $|N_P|$ резко уменьшается. На этапе когда решение сохраняет симметрию, $|N_P|$ плавно уменьшается, достигая своего минимального значения. При переходе к несимметричному решению $|N_P|$ увеличивается и принимает постоянное значение.

Зависимость K и N_{PT} от Gr для установившегося симметричного и несимметричного решения в областях А и Б показана на рис.5.26. На графиках отчетливо прослеживается следующая закономерность. В устойчивом несимметричном решении величины K и N_{PT} меньше чем в неустойчивом симметричном при том же числе Грасгофа.

На рис.5.27 приведена зависимость Ф от числа Gr. Из этой зависимости следует, что Диссипация меньше в устойчивом несимметричном решении.

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Получено три решения – неустойчивое (при $Gr > Gr_k$) симметричное и два устойчивых несимметричных для задачи о свободной конвекции в V-образных областях (рис.5.10.а, б) при неустойчивой стратификации жидкости. Значения Gr_k для геометрии А - $Gr_k = 2{,}1 \cdot 10^4$, для Б - $Gr_k = 0{,}9$.
2. В результате исследования процесса установления несимметричного решения при различных начальных приближениях, показано, что вероятность перехода от неустойчивого симметричного к несимметричному решению зависит от трех факторов – числа Грасгофа, структуры начального приближения и величины несимметричных возмущений в ходе итерационного решения.
3. Стационарное решение зависит только от числа Грассгофа и не зависит от пути, по которому оно было получено, и в частности от метода решения СЛАУ.
4. Исследован вопрос о влиянии структуры течения на характеристики теплообмена. Получено, что вторичный отрыв, возникающий в нижней угловой точке, практически не сказывается на распределении температуры. Переход к несимметричной структуре течения вызывает заметное увеличение локального и интегрального теплового потока через нижнюю, горячую стенку. Распределение локального теплового потока и его интегральная величина на верхней холодной стенке слабо зависит от структуры течения.

5. Построенные зависимости интегральных значений кинетической энергии, мощности действия массовых сил и функции диссипации от числа Грасгофа, дают возможность констатировать следующее. В несимметричном решении мощность действия массовых сил и кинетическая энергия меньше чем в симметричном. Количество диссипируемой энергии в устойчивом несимметричном решении меньше, чем в неустойчивом симметричном.

5.3. Выводы.

1. В результате исследования влияния TVD схем и схемы QUIC на процесс потери симметрии решения в задаче о течении за симметричным внезапным расширением получено, что при задании симметричных граничных условий схема QUIC может генерировать несимметричное решение. Т.е. величина асимметричных возмущений, вносимых схемой QUIC, может затенить реальную картину процессов потери устойчивости при наличии малых возмущений.
2. Исследовано влияние различного типа искусственных возмущений на численное решение. Показано, что граничные условия в угловой точке уступа играют решающую роль в процессе потери симметрии, а в качестве усилителя возмущений выступает неустойчивое течение в слое смешения между основным течением и рециркуляционной зоной.
3. Построены зависимости интегральных характеристик симметричного и несимметричного решения от числа Рейнольдса. Получено, что с увеличением числа Рейнольдса кинетическая энергия, диссипация и мощность сил давления растут, причем в несимметричном решении мощность (интегральное сопротивление) сил давления меньше, чем в симметричном решении. Как следствие, в несимметричном решении происходит более быстрый рост кинетической энергии и диссипации, по сравнению с симметричным решением.
4. В результате численного иследования задачи о свободной конвекции при неустойчивой стратификации в V-образных областях (рис.5.10.а, б) получено три решения – неустойчивое (при $Gr > Gr_k$) симметричное и два устойчивых несимметричных. Значения Gr_k для геометрии А - $Gr_k=2{,}1\cdot10^4$, для Б - $Gr_k=0{,}9\cdot10^3$.

5. Исследование процесса установления несимметричного решения при различных начальных приближениях, показало, что переход от неустойчивого симметричного к несимметричному решению зависит от трех факторов – числа Грасгофа, структуры начального приближения и величины несимметричных возмущений в ходе итерационного решения. Чем больше число Грасгофа при $Gr > Gr_k$, тем меньшее величина возмущения способного вызвать переход от симметричного решения к несимметричному. Стационарное решение зависит только от числа Грасгофа и не зависит от пути, по которому оно получено.
6. Исследован вопрос о влиянии структуры течения на характеристики теплообмена. Получено, что вторичный отрыв, возникающий в нижней угловой точке, практически не сказывается на распределении температуры. Переход к несимметричной структуре течения вызывает заметное увеличение максимального локального теплового потока на нижней горячей стенке. В области с геометрией А суммарный тепловой поток больше, чем в области с геометрией Б при том же числе Грасгофа. С потерей симметрии интегральный поток тепла уменьшается.
7. Построенные зависимости интегральных значений кинетической энергии, мощности действия массовых сил и функции диссипации от числа Грасгофа, дают возможность констатировать следующее. В несимметричном решении мощность действия массовых сил и кинетическая энергия меньше, чем в симметричном, что позволяет провести аналогию между устойчивостью решения данной задачи и устойчивостью механической системы. Количество диссипируемой энергии в устойчивом несимметричном решении меньше, чем в неустойчивом симметричном, что соответствует принципу минимума диссипации [120].

Выводы

Диссертационная работа является научным трудом, в котором разработаны методы и алгоритмы расчета гидродинамики и тепломассообмена вязкой несжимаемой жидкости, изучены особенности математического моделирования развития свободной и вынужденной конвекции, а также стационарных и нестационарных неустойчивых течений с неединственным решением, что в совокупности можно квалифицировать как решение научной задачи, которая имеет существенное значение для развития математического моделирования в механике жидкости и газа.

Основные научные и практические результаты исследования состоят в следующем:

1. Задача о течении вязкой жидкости в области произвольной формы может иметь неединственное решение. Некоторые решения могут терять устойчивость при изменении критериальных параметров. Все это предъявляет повышенные требования к таким свойствам численного метода как точность, монотонность, устойчивость и эффективность.
2. Предложено обобщение методов типа SIMPLE и в частности метода SIMPLER на случай неортогональной криволинейной системы координат. Уравнение количества движения записано относительно контравариантных компонент вектора скорости на шахматной разнесенной сетке. Рассмотрены особенности реализация методов SIMPLE на частично совмещенных сетках.
3. Исходные уравнения записаны в универсальной форме обобщенного закона сохранения физической величины в контрольном объеме. Рассмотрен случай переменной плотности и коэффициентов диффузии. Дискретизация исходной системы уравнений сохранения массы, количества движения и энергии проведена на основе метода контрольного объема. Дискретные аналоги обладают свойством консервативности в произвольной криволинейной неортогональной системе координат. Рассмотрены особенности реализации метода контрольного объема в случае осевой симметрии и при наличии закрутки потока.
4. Исследовано влияние кривизны сеточных линий на точность численного решения. Показано, что линейное сдвиговое течение может быть точно

рассчитано на произвольной неортогональной сетке, только при повышении порядка точности квадратурной формулы для вычисления конвективного потока через грани контрольного объема. Исследовано влияние предложенной поправки на скорость сходимости по сетке численного решения.

5. Рассмотрены особенности реализации различных схем разностной аппроксимации конвективных и диффузионных потоков, в частности схемы Леонарда QUIC и схем TVD второго и третьего порядка точности.
6. Проведено сравнение эффективности и скорости сходимости по сетке TVD схем – MinMod, ISNAS и схемы QUIC. Схемы TVD обладают сравнительно большим показателем эффективности и большей скоростью сходимости, особенно при увеличении числа Рейнольдса.
7. На задаче о развитии свободной конвекции в квадратной области при подогреве сбоку исследовано влияние порядка аппроксимации граничных условий на точность расчета параметров течения и теплообмена. Исследовано влияние локальной кривизны сеточных линий на вычисление значений теплового потока.
8. Сравнивается эффективность SIMPLE методов на разнесенной и совмещенной криволинейной сетке на задаче о свободноконвективном теплообмене в горизонтальной полости между концентрически расположенными цилиндрами. Показаны преимущества метода SIMPLER на разнесенной сетке.
9. Выполнено исследование особенностей развития структуры свободной конвекции в полости между цилиндром и квадратным стержнем при числах $Ra=5\cdot10^4 - 10^5$. Для положения стержня гранью вниз установлено значение числа $Ra^*=2{,}5\cdot10^5$, при котом начинается срыв потока с верхней острой кромки с образованием второй циркуляционной зоны. С увеличением числа Рэлея интенсивность вторичной циркуляционной зоны растет и при $Ra=10^6$ в полтора раза превосходит интенсивность зоны расположенной возле вертикальной стенки, что значительно изменяет распределение тепловых потоков в полости. Для положения стержня ребром вниз структура течения остается постоянной, по крайней мере, при $Ra<5\cdot10^5$. Для отношения длинны грани стержня к диаметру цилиндра A/D=0,2 картины течения напоминают свободную конвекцию вокруг квадратного стержня в безграничной жидкости, при этом ориентация стержня относительно вектора силы тяжести слабо влияет на параметры макро течения.

10. С помощью разработанных методик численно решена задача о развитии нестационарного, неустойчивого отрыва потока при обтекании цилиндра. Получено хорошее согласие с экспериментальными и расчетными данными других авторов этапа развития отрыва [20] и периодического течения в следе [150], [11]. Источником потери устойчивости в данной задаче является неустойчивость Гельмгольца в скоростном слое смешения внешнего течения и обратного тока. Влияние шага сетки и размеров расчетной области на вычисление коэффициента трения мало вплоть до начала неустойчивости t=1.3. Из сравнения решений, полученных на сетках 80x120 и 120x200, следует, что мелкомасштабные вихри не оказывают заметного влияния на решение вплоть до безразмерного времени t=4.0. Дальнейшие расчеты на указанных сетках без применения моделей замыкания для вихрей подсеточного масштаба могут дать существенную погрешность. Расчеты показали, что, до момента возникновения неустойчивости, давление практически совпадает с давлением при потенциальном обтекании цилиндра. При этом рассчитанные распределения коэффициента трения, в рамках теории пограничного слоя и по уравнениям Навье-Стокса практически не отличаются. Возникновение вихревой неустойчивости (при t>1.3, для $Re=10^5$) приводит к существенному изменению распределения давления в пограничном слое, по сравнению с потенциальным течением. Пренебрежение взаимным влиянием полей скорости и давления в рамках теории пограничного слоя приводит к расхождению результатов, по сравнению с результатами полученными в настоящей работе по уравнениям Навье-Стокса.
11. Численно исследована задача о течении за внезапным симметричным расширением. Исследовано влияние свойств разностных схем на процесс потери симметрии решения. При использовании TVD схем можно получать симметричное решение для чисел Рейнольдса значительно больших критического. Величина асимметричных возмущений, вносимых схемой QUIC, может затенить реальную картину процессов потери устойчивости течения. Исследовано влияние различного типа искусственных возмущений на численное решение. Показано, что граничные условия в угловой точке уступа играют решающую роль в процессе потери симметрии, а в качестве усилителя

возмущений выступает неустойчивое течение при наличии противодавления в слое смешения между основным течением и рециркуляционной зоной. Построены зависимости интегральных характеристик симметричного и несимметричного решения от числа Рейнольдса. Получено, что с увеличением числа Рейнольдса кинетическая энергия, диссипация и мощность сил давления растут, причем в несимметричном решении мощность (сопротивление) сил давления меньше, чем в симметричном решении. Как следствие, в несимметричном решении происходит более быстрый рост кинетической энергии и диссипации, по сравнению с симметричным решением.

12. В результате численного эксперимента получено три решения (неустойчивое (при $Gr > Gr_k$), симметричное и два устойчивых зеркально несимметричных) задачи о освободной конвекции в V-образных областях при неустойчивой стратификации жидкости. Значения Gr_k для геометрии А - $Gr_k = 2{,}1 \cdot 10^4$, для Б - $Gr_k = 0{,}9 \cdot 10^3$. В результате исследования процесса установления несимметричного решения при различных начальных приближениях, показано, что переход от неустойчивого симметричного к несимметричному решению зависит от трех факторов – числа Грасгофа, структуры начального приближения и величины несимметричных возмущений в ходе итерационного решения. Исследован вопрос о влиянии структуры течения на характеристики теплообмена. Вторичный отрыв, возникающий в нижней угловой точке, практически не сказывается на распределении температуры. Исследован вопрос о влиянии структуры течения на характеристики теплообмена. Переход к несимметричной структуре течения вызывает заметное увеличение локального теплового потока на нижней горячей стенке. В области с геометрией А суммарный тепловой поток больше, чем в области с геометрией Б при том же числе Грасгофа. Потеря симметрии решения приводит к уменьшению интегрального потока тепла. Построены зависимости интегральных значений кинетической энергии, мощности действия массовых сил и функции диссипации от числа Грасгофа. Диссипация энергии в устойчивом несимметричном решении меньше, чем в неустойчивом симметричном. В несимметричном решении мощность массовых сил и кинетическая энергия меньше, чем в симметричном, что позволяет провести аналогию между

устойчивостью решения данной задачи и устойчивостью механической системы.

13. В качестве интегральных параметров течения, которые могут быть связаны с устойчивостью решений задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости, были выбраны кинетическая энергия, функция диссипации и мощность массовых сил. На основе анализа зависимости этих величин от критериальных чисел в двух задачах с неединственным решением показано, что кинетическая энергия и вязкая диссипация в устойчивом решении могут быть как больше, так и меньше, чем в неустойчивом. Это говорит о том, что величины кинетической энергии и вязкой диссипации не могут быть использованы для анализа устойчивости решений. Мощность массовых сил в рассмотренных задачах была всегда меньше в устойчивых решениях. Таким образом, можно провести аналогию между устойчивостью положения равновесия механической системы [120], [1] и устойчивостью решения задачи о течении вязкой жидкости в области произвольной формы, где в качестве в качестве аналога потенциальной энергии механической системы [120] или второй вариации полной потенциальной энергии [1] может выступать некоторая функция мощности массовых сил. Для подтверждения данного предположения необходимы дополнительные исследования.
14. Достоверность полученных в работе результатов обеспечивается выбором адекватных математических моделей для рассматриваемого класса задач, а также всесторонним тестированием разработанных численных методов и алгоритмов, сравнением результатов с расчетными и экспериментальными данными других авторов. Результаты настоящей работы могут найти широкое применение в области численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. -М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит, 1988. -208с.
2. Аристов С.Н., Шварц К.Т. Об устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости // Изв. АН России, МЖГ. -1999. -№4. -С.3-11.
3. Астафьева Н.М. Анализ устойчивости течений во вращающихся сферических слоях (линейная теория) // Изв. АН России, МЖГ. -1997. -№6. -С.63-74.
4. Астафьева Н.М. Устойчивость и неединственность осесимметричных течений во вращающихся сферических слоях (нелинейная теория) // Изв. АН России, МЖГ. -1998. -№1. -С.75-86.
5. Ахмедов Р.Б. и др. Аэродинамика закрученной струи. -М.: Энергия, 1977. -240с.
6. Барон Ф., Зайчик Л.И., Першуков В.А. Сепарация мелкодисперсной влаги в прямоточных циклонах // Теплофизика и аэромеханика. -1996. -Т.3, №4. -С.353-360.
7. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости М.: Судостроение, 1989. -256 с.
8. Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплоотдача и сопротивление пакетов труб. Л.: Энергоатомиздат, 1987. -223с.
9. Белов И.А., Шеленкевич В.А, Шуб Л.И. Моделирование гидромеханических процессов в технологии изготовления полупроводниковых приборов и микросхем. -Л.: Политехника, 1991. -287с.
10. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 1994. -448с.
11. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.О., Гущин В.А. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром // Ж. вычисл. и матем. физ. -1984. -Т.24. -С.1207-1216.
12. Бенодекар Р.В., Годдард А.Дж.Г., Госман А.Д., Исса Р.И. Численный расчет обтекания выступов на плоскости // Аэрокосмическая Техника. -1986. -Т.4, № 2. С.125-134.
13. Бессонов О.А., Браиловская В.А, Ру Б. Численное моделирование трехмерного сдвигового течения в полости с движущимися крышками // Изв. АН России, МЖГ, -1998. -№3. -С.41-49.
14. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. -Х.: Вища школа. Издательство при Харьковском ун-те, 1986. -216с.
15. Браиловская В.А., Феоктистова Л.В. Структура течения и теплообмен в анизотропных пористых кольцевых прослойках // Изв. АН России, МЖГ. -1998. -№4. -С.122-128.
16. Буря А.Г., Шкадов В.Я. Неустойчивость и формирование нелинейных структур в осциллирующем вращательном течении между цилиндрами // Изв. АН России, МЖГ. -1999. -№3. -С.5-15.
17. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. -М.: Мир, 1973. -774с.
18. Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г. Численные методы решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных на

частично разнесенных сетках // Мат. моделирование. -1997. -Т.9, №4. -С.85-114.
19. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. -М.: Наука, гл. ред. физ. мат.-лит., 1969. -528с.
20. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. -М.: Мир, 1986. -184с.
21. Веселовский В.Б., Тимошенко М.В. Температурные поля газоводов сложной конфигурации // Техническая механика. -К.: Наук. думка, 1993. -Вып.1. -С.117-121.
22. Высоцкий, Казимирский. Анализ дозвуковых течений с несимметричным отрывом потока в диффузорах с прямолинейными стенками // Теоретические основы инженерных расчетов. -1986. -№2. -С.295-303.
23. Гаранжа В.А., Коньшин В.Н. Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // ЖВМ и МФ. -1999. -Т.39, №8. -С.1378-1392.
24. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен.- в 2-х книгах. -М.: Мир, 1991. 678 с., 528 с.
25. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. -М.: Наука, 1989. -320с.
26. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Тарунин Е.Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. -1966. -№5. -С.56-62.
27. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. -Новосибирск: Наука, 1980. -177с.
28. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. -Новосибирск: Наука, 1981. -336с.
29. Гомилко А.И., Шлапак Ю.В. Численное моделирование течений нелинейно - вязкой жидкости в плоской области // Прикладна гідромеханіка. -1999. -Т.1(73), №3. -С.11-16.
30. Госмен А.М., Пан В.М., Ранчел А.К. и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. -М.: Мир, 1972. -323с.
31. Грабарник С.Я., Цепов Д.С. Численный метод расчета вязкого течения в трехмерном канале произвольной формы // Мат. моделирование. -1998. -Т.10, №10. -С.103-111.
32. Грінченко В.Т., Ісаєва Т.Л., Мелешко В.В. Двовимірна течія в'язкої рідини у прямокутній порожнині при малому числі Рейнольдса // ДАН УРСР. -1991. -№6. -С.64-70.
33. Деннис С., Станифорд А. Численый метод для расчета начальной стадии течения вязкой жидкости около цилиндра // Численные методы в механике жидкостей / Под ред. О.М. Белоцерковского. -М.: Мир, 1973. -304с.
34. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. -М.: Мир, 1981. -638с.
35. Загромов Ю.А., Ляликов А.С. Свободноконвективный теплообмен в горизонтальной цилиндрической прослойке при различном положении тепловыделяющего элемента // ИФЖ. -1966, -Т.10, №5. -С.577.
36. Зубков П.Т., Климин В.Т. Численное исследование естественной конвекции чистой воды вблизи точки инверсии плотности // Изв. АН России, МЖГ, -1999. -№4. -С.171-176.
37. Зубков П.Т., Климин В.Т., Кравченко В.А. Конвекция замерзающей жидкости в квадратной ячейке при потере гидростатической устойчивости // Изв. АН России, МЖГ, -1998. -№5. -С.114-118.

38. Зуева Н.М., Соловьев Л.С. Особенности развития неустойчивости конвективного типа в плазме и газе // Мат. моделирование. -1998. -Т.10, №10. -С.88-103.
39. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. -К: Наук. думка, 1972. -148с.
40. Кнорре Г.Ф. Топочные процессы. -М.; -Л.: Госэнергоиздат, 1959. -396с.
41. Коваль В.П., Кудинов П.И. Движение взвесенесущей жидкости в вихревой камере и ее износ // Системні технології. Дніпропетровськ. -1998. -Випуск 2. -С.39-49
42. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. -1972. -Т.3, №6. -С.68-77.
43. Колесов В.В., Юдович В.И. Расчет колебательных режимов в течении Куэтта вблизи точки пересечения бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и амплитудных волн // Изв. АН России, МЖГ, -1998. -№4. -С.81-93.
44. Кочубей А.А., Рядно А.А. Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов. -Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. -223с.
45. Кудинов П.И. К вопросу о корректности задачи о течении за внезапным симметричным расширением // Придніпровський науковий вісник. -Дніпропетровськ. -1998. - №69(136). -С.58-60.
46. Кудинов П.И. К вопросу о точности расчета конвективного потока в криволинейных системах координат // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій:Збірник наукових праць. -Дніпропетровськ: Навчальна книга. -1998. -Т.3. -С.82-85.
47. Кудинов П.И. Метод расчета процессов гидродинамики и теплообмена в неортогональных криволинейных координатах // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. -1998. Випуск 1. -Т.1. -С.117-125.
48. Кудинов П.И. Методы SIMPLE на совмещенной неортогональной сетке // Матеріали Першої міжнпродної конференції “Наука і освіта 98”. Дніпропетровськ-Одеса-Кривий Ріг-Київ-Харків-Дніпродзержинськ 23-30 квітня 1998. -Т.10. –С.411.
49. Кудинов П.И. Повышение эффективности алгоритмов расчета течений несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье-Стокса // Придніпровський науковий вісник. -Дніпропетровськ. -1997. -№ 24(35). -С.17.
50. Кудинов П.И. Сравнение методов конечных элементов и контрольных объемов в произвольной криволинейной системе координат при численном решении уравнений Навье-Стокса // Придніпровський науковий вісник № 4. -Дніпропетровськ. -1996. -С.41.
51. Кудинов П.И. Структура свободной конвекции вокруг квадратного стержня в горизонтальном цилиндрическом отсеке // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. -Дніпропетровськ: Навчальна книга. -1998. -Т.1. -С.98-102.
52. Кудинов П.И. Структура свободноконвективного течения в V-образной области при неустойчивой стратификации жидкости // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. -1998. Випуск 2. -Т.1. -С.38-48.
53. Кудинов П.И. Численное моделирование процессов тепломассообмена несжимаемой жидкости в областях сложной формы // Прикладные проблемы

механики жидкости и газа: Материалы 5-ой научной конференции ученых России, Беларусии и Украины. -Севастополь: СевГТУ. -1996. -С.52.
54. Кудинов П.И. Численное моделирование неустойчивого течения за внезапным симметричным расширением // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць. -Дніпропетровськ: Навчальна книга. -1999. -Т.5. -С.101-114.
55. Кьюэн, Гольдстейн. Параметрическое исследование влияния числа Прандля и отношения диаметров на теплоотдачу при свободной конвекции в горизонтальных кольцевых каналах // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1980. -Т.102, №4. -С.196-198.
56. Кьюэн, Гольдстейн. Экспериментальное исследование теплоотдачи при свободной конвекции в зазорах между горизонтальными концентрическими и эксцентрическими цилиндрами // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1978. -Т.100, №4. -С.80-86.
57. Лапин Ю.В, Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. - М.: Наука, 1989. -368 с.
58. Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Поспелов В.А, Стрелец М.Х., Шур М.Л. Численное моделирование внутренних течений вязких химически реагирующих газовых смесей // Механика жидкости и газа. Т.19. -М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники). -1985. -С.86-185.
59. Лобачев М.П. Разработка алгоритма расчета поля давления в потоке вязкой жидкости конечно-разностным методом, Технический отчет ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова, вып. 35535, 1993, 21с.
60. Ловрентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. -М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. -1973. -416с.
61. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1978. -736с.
62. Льюис, Плетчер. Пределы применимости уравнений пограничного слоя для расчета ламинарных течений с симметричным внезапным расширением // Теоретические основы инженерных расчетов. -1986. -№2. -С.284-294.
63. Маджумдар, Сингхал, Рейли, Барц. Численное моделирование градирен. Часть 2. Применение модели к градирням с естественной и механической тягой // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1983. -Т.105, №4. -С.50-57.
64. Маджумдар, Сингхал, Сполдинг. Численное моделирование градирен. Часть 1. Математическая и физическая модели // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1983. -Т.105, №4. -С.41-49.
65. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1989. -608с.
66. Меркулов А.П. Вихревой эффект и его применение в технике. -М.: Машиностроение, 1969. -1984с.
67. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, части I и II. -М.: Наука, -1965.
68. Никитин Н.В., Полежаев В.И. Трехмерная конвективная неустойчивость и колебания температуры при выращивании кристаллов по методу Чохральского // Изв. АН России, МЖГ. -1999. -№3. -С.26-39.
69. Никифорович Е.И. Асимптотические пространственно-временные свойства ламинарных пограничных слоев над искривленными поверхностями // Прикладна гідромеханіка. -1999. -Т.1(73), №1. -С.38-51.

70. Никишов В.И., Христюк Р.В. О вырождении возмущений скорости в стратифицированной жидкости // Прикладна гідромеханіка. -1999. -Т.1(73), №2. -С.24-31.
71. Никишова О.Д., Никишов В.И., Олексюк В.В. Нестационарный конвективный перенос в пограничном слое неоднородной жидкости // Прикладна гідромеханіка. -1999. -Т.1(73), №3. -С.24-31.
72. Никишова О.Д., Олексюк В.В. Развитие конвекции в горизонтально неоднородном потоке жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. -1999. -Т.1(73), -№2. -С.32-37.
73. Никулин Д.А., Потехин Г.С., Стрелец М.Х. Приближенная система уравнений для описания нестационарной естественной конвекции в бинарных газовых смесях // Изв. АН СССР. МЖГ. -1980. -№5. -С.57-59.
74. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. -М.: -Мир, 1990. -661с.
75. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. -М.: Наука, 1984. -288с.
76. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984. -152 с.
77. Пау, Карли, Бишоп. Картины течения при свободной конвекции в цилиндрических кольцевых каналах // Труды амер. об-ва инж.-мех., Теплопередача. - 1969. - №3. - С.18-24.
78. Пау, Карли, Каррут. Численное решение задачи о свободной конвекции в цилиндрических каналах кольцевого сечения // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. - 1971. -Т.93, №2. -С.78.
79. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Верезуб Н.А. и др. Математическое моделирование тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса. -М.: Наука, 1987. -272с.
80. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой: Пер. с англ. /Общ. Ред. В.И.Аршинова, Ю.Л. Климонтовича и Ю.В. Сачкова. - М.: Прогресс, 1986. -432 с.
81. Приходько А.А., Зинченко А.В., Кудинов П.И. Компьютерное моделирование процессов механики гетерогенных сред на основе пакета прикладных программ // Сб. тезисов докладов конференции "Прикладные проблемы механики жидкости и газа". -Севастополь: СевГТУ. -1997. -С.81.
82. Приходько А.А., Зинченко А.В., Кудинов П.И. Математическое моделирование дискретных особенностей в многофазных средах // Труды VII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". Прикладная математика и математическое моделирование. –Киев: Институт математики НАН Украины, 1997. -С.165-167.
83. Приходько А.А., Зинченко А.В., Кудинов П.И. Пакет программ для моделирования тепломассообменных процессов в многофазных средах // Придніпровський науковий вісник. -Дніпропетровськ: 1996. -№ 9. -С.13.
84. Приходько А.А., Зинченко А.В., Кудинов П.И. Технологические аспекты разработки универсальных решателей для задач механики гетерогенных сред // Черкассы Труды П научно-технической конференции "Гидроаэромеханика в инженерной практике". - Киев-Черкассы : Изд-во НТУУ, 1997. - С.16-17.
85. Приходько А.А., Кудинов П.И., Саньков П.Н. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при создании экологически чистых технологи // Тезисы докладов 2-й региональной конференции "Экология и безопасность

жизнедеятельности". -Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 1996. -С.50.
86. Приходько О.А., Кудінов П.І. Перспективи застосування методів математичного моделювання до вирішення сучасних проблем водопостачання і знешкодження стічних вод // Сучасні проблеми водопостачання і знешкодження стічних вод.- Львів : ЛГПТУ, 1996. -С.49.
87. Пруса, Яо. Теплообмен между эксцентричными горизонтальными цилиндрами в режиме свободной конвекции. // Труды амер. об-ва инж.-мех., Теплопередача. -1983. -Т.105, №1. -С.103-114.
88. Рамзи Ч.Л., Томас Дж.Л., Уоррен Г.П., Лью Г.К. Расчеты периодических отрывных течений на основе уравнений Навье-Стокса с помощью схемы с разностями против потока // Аэрокосмическая Техника. -1988. -№2. -С.24-32.
89. Резняков А.Б. Теплотехнические основы циклонных топочных и технологических процессов. -Алма-Ата : Наука, 1974. -374с.
90. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. -М.: Мир, 1980. -616с.
91. Рхи С.М., Чоу У.Л. Численный расчет турбулентного обтекания профиля с отрывом у задней кромки // Аэрокосмическая Техника. -1984. -Т.2, № 7. -С.33-43.
92. Сабуров Э.Н. Аэродинамика и конвективный теплообмен в циклонных нагревательных устройствах. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. -240с.
93. Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977. -656с.
94. Сатерленд. Анализ работы градирен с противоточным движением воздуха и воды и механической тягой // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1983. -Т.105, №3. -С.129-137.
95. Секи, Фукусако, Накаока. Исследование теплоотдачи при свободной конвекции воды между двумя горизонтальными концентрическими цилиндрами при наличии инверсии плотности // Труды амер. об-ва инж.-мех., Теплопередача. -1976. -Т.98, №4. -С.149.
96. Сидельковский Л.Н., Шурыгин А.П. Циклонные энерготехнологические установки. -М.: ГЭИ, 1962. -80с.
97. Смухин П.Н., Коузов П.А. Центробежные пылеотделители-циклоны. -М.: ОНТИ, 1935.
98. Стегер, Кутлер. Неявные Конечно-разностные методы расчета вихревых следов // Ракетнокосмическая Техника. -1977. -№ 4. -С.161-173.
99. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. -Иркутск: ИГУ, 1990. - 228 с.
100. Тернер Дж.Эффекты плавучести в жидкостях. -М.: Мир, 1977. -431с.
101. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Ученые записки ЦАГИ. -1986. -Т.17, №2. -С.18-27.
102. Тимошенко М.В. Математичне моделювання теплообміну у багатошарових конструкціях з узагальненим неідеальним контактом: Автореф. Дис. Канд-та технічних наук: 05.13.02 / Київський Університет імені Тараса Шевченка. -Київ, 1996. -21с.
103. Турбулентность / Под ред. П.Бредшоу. - М.: Мир, 1980. -343с.
104. Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. У.Фроста, Т.Моулдена. - М.: Мир, 1980. - 535с.

105. Турбулентные сдвиговые течения 1. / Пер. с англ. под ред. А.С.Гиневского. - М.: Машиностоение, 1982. - 432с.
106. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. -М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. -564с.
107. Устименко Б.П. Процессы турбулентного переноса во вращающихся течениях. -Алма-Ата: Наука, 1977. -226с.
108. Фарук, Гюцери. Ламинарная и турбулентная свободная конвекция в зазоре между горизонтальными концентрическими цилиндрами // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. - 1982. - Т.104, №4. -С.55-60.
109. Феофанов А.Ф. Строительная механика авиационных конструкций. -М.: Машиностроение, 1964. -284с.
110. Форсайт Дж., Моллер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. -М.: Мир, 1969. -166с.
111. Харитонов А.А., Кудинов П.И., Загний В.В. Решение задач гидродинамики методом последовательных приближений // Численные методы в гидравлике и гидродинамике: Тезисы докл. -Донецк: ДонГУ. -1994. -С.60.
112. Хавкин Ю.И. Центробежные форсунки. -Л.: Машиностроение, 1976. -168с.
113. Хазмалян Д.М., Каган Я.А. Теория горения и топочные устройства. -М.: Энергия, 1979. -488с.
114. Халатов А.А. Теория и практика закрученных потоков. -Киев: Наук. думка, 1989. -192с.
115. Хаминич А.В. Вычислительный эксперимент в исследованиях структуры нестационарного пограничного слоя // Математические модели и современные информационные технологии. - Киев: НАН Украины, Ин-т математики. - 1998. -С.238-241.
116. Хартвич П. М., Су Ч.-Х. Односторонняя схема высокой точности для расчета несжимаемых трехмерных течений по уравнениям Навье-Стокса // Аэрокосмическая Техника. -1990. -№7. -С.95-105.
117. Хиршель Э., Кордулла В. Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. Численный расчет пограничного слоя. -М.: Мир, 1987. -248с.
118. Циклонные топки / под ред. Г.Ф.Кнорре, М.А.Наждарова. -М.:ГЭИ, 1958. -216с.
119. Циклонный принцип и его применение к технологическим процессам. // Алма-Ата: Изд. АН КазССР, 1962. -304с.
120. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. -М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990. -176 с.
121. Чжан, Уон, Чжо. Структура свободной конвекции около квадратного стержня, расположенного концентрически внутри горизонтального кругового цилиндра // Труды амер. об-ва инж.-мех., Теплопередача. -1983. -Т.105, №2. -С.64-72.
122. Чжен П. Отрывные течения. -М.: Мир, 1972-1973. Т.1. -300с. Т.2. -280с. Т.3. -334с.
123. Чо, Чан, Парк. Численное моделирование свободной конвекции в зазорах между горизонтальными концентрическими и эксцентрическими цилиндрами // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1982. -Т.104, №4. -С.47-54.
124. Шершнев А.А. Пневматические топки ЦКТИ системы Шершнева для котлов малой мощности. -М.:Машгиз, 1954. -104с.

125. Шеховцов А.В. Нелинейная математическая модель работы хвостового плавника дельфина // Прикладна гідромеханіка. -1999. -Т.1(73), №2. -С.71-88.
126. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. -М: Наука, 1974. -711с.
127. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. -Новосибирск: Наук, 1979. -219с.
128. Штым А.Н. Аэродинамика циклонно-вихревых камер. -Владивосток. Изд. Дальневосточного университета, 1984. -200с.
129. Щукин В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. -М.: Машиностроение, 1980. -240с.
130. Щукин В.К., Халатов А.А.Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. -М.: Машиностроение, 1982. -200с.
131. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. -Новосибирск: Наука, 1967. -197с.
132. Яо, Чен. Влияние свободной конвекции на процесс плавления вокруг нагретого горизонтального цилиндра // Труды амер. об-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача. -1980. -Т.102, №4. -С.80.
133. Aziz K., Hellums J.D. Numerical Solution of the Three-Dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection // Physics of Fluids. -1967. -Vol.10, Feb. -P.314-324.
134. Boussinesq J. Theorie analytique de la chaleur. T.2. -Paris: Gautheir-Villars, 1903, -625p.
135. Bozeman J.D., Dalton C. Numerical study of viscous flow in a cavity // Journ. Comput. Phys. -1973. -Vol.12, №3. -P.348-363.
136. Bruneau C.H., Jouron C. An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations // Journ. Comput. Phys. -1990. -Vol.89, №2. -P.389-413.
137. Burggraf O.R. Analytical and numerical studies of the steady separated flows // Journ. Fluid Mech. -1966. -Vol.24. -P.113-151.
138. Cebeci T. The laminar boundary layer on a circular cylinder started impulsively from rest // Journ. Comput. Phys. -1979. -V. 31, №2. -P.153-172.
139. Chen C.J., Chen H.J. Finite analitic numerical method for unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations // Journ. Comput. Phys. -1984. -Vol.53, №2. -P.209-226.
140. Chen Y.S. A numerical methods for three-dimensional incompressible flows using nonorthogonal body-fitted coordinate systems // AIAA Paper, 1986. -№ 86-1654. 9p.
141. Cherdon W., Durst F., Whitelaw J.H. Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions // Journ. Fluid Mech. -1978. -Vol.84. -P.13-31.
142. Collins W.M., Dennis S.C.R. Flow past an impulsively started circular cylinder // Journ. Fluid Mech. - 1973. -Vol.60. -P.105-127.
143. Courant R., Friderchs K.O., Supersonic Flow and Shock Waves. Interscience, New York, 1948.
144. Demirdzis I., Gosman A.D., Issa R.I. A finite-volume method for the prediction of turbulent flow in arbitrary geometries // Paper presented at 7th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Stanford University and NASA Ames, June

145. Deng G.B., Piquet J., Quertey P., Visonneau M. A new fully coupled solution of the Navier-Stokes equations // Int. J. for Numer. Meth. In Fluids. -1994. -Vol.19, №7. -P.605-639.
146. Durst F., Melling A., Whitelaw J.H. Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion flow // Jour. Fluid Mech. -1974. -Vol. 64. -P.111-128.
147. Durst F., Pereira J.C.F., Troperea C. The plane symmetric sudden - expansion flow at low Reynolds numbers // Jour. Fluid Mech., -1993. -Vol.248. -P.567-581.
148. Fearn R.M., Mullin T., Cliffe A.K. Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion // Journ. Fluid Mech. -1990. -Vol.211. -P.595-608.
149. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder // Journ. Fluid Mech. -1980. Vol.98. -P.819-855.
150. Gaster M.Vortex shedding from circular cylinder at low Reynolds numbers // Journ. Fluid Mech. -1971. -Vol.46, part 4. -P.751-756.
151. Gervasio P., Saleri F. Stabilized spectral element approximation for the Navier-Stokes equations // Numer. Meth. for Partial Differencial Equations. -1998. -Vol.14, №1. -P.115-141.
152. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid methods // Journ. Comput. Phys. -1982. -Vol.48, №4. -P.387-411.
153. Grinchenko V.I., Madernich V.S., Nikishov V.I. Mixing and restratification in stably stratified fluids // Proc. Of the coll. of oceanic vortices (ed. G.J.F. Van Heijst), Amsterdam, 11-13 May, 1993. -N.-H., Amsterdam, 1994. -P.75-83.
154. Harlow F.H. and Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. -1965. -Vol.8, №12. -P.2182-2189.
155. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journ. Comput. Phys. -1984. Vol.49. -P.357-393.
156. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speeds // Journal of Computational Physics. -1974. -Vol.14, №3. -P.227-253.
157. Issa R.I. Numerical methods for two- and three-dimensional recirculating flows // Comput. Meth. Turbulent Transonic and Viscous Flows. Berlin e.a. 1983. -P.183-211.
158. Issa R.I. Solution of the implicity discretised fluid flow in two-dimensional cavity // Journ. Comput. Phys. -1986. -Vol.62, №1. -P.40-65.
159. Kjellgren P., Hyvarinen J. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method // Comput. Mechanics. -1998. -Vol.21, №1. -P.81-90.
160. Kuehen T.H., Goldstein R. J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horisontal concentric cylinders // Journ. Fluid Mech. -1976. -Vol.74. -P.695-719.
161. Latimer B.R., Pollard A. Comparison of pressure-velocity coupling solution algorithms // Numer. Heat Transfer. -1985. -Vol.8, № 6. -P.635-652.
162. Leonard B.P. A Stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. -1979. -Vol.19, №1. -P.59-98.
163. Liang S.F., Vidal A., Acrivos A. Buoyancy-driven convection in cylindrical geometrics // Journ. Fluid Mech. -1969. -Vol.36. -P.239-257.

164. Maliska C.R., Rathby G.D. A method for computing three-dimensional flows using nonorthogonal boundary-fitted coordinates // Int. J. Numer. Meth. Fluids, -1984. -Vol 4, № 6. -P.87-95.
165. Morkovin M. Flow around circular cylinder - a kaleidoscope of challenging fluid phenomena // ASME Symposium on Fully Separated Flows. -1964. -P.102-118.
166. Neely G.M., Claus R.W. Accelerated convergence for incompressible flow calculations // AIAA Paper. 1985. № 86-0059. -7p.
167. Oden J.I., Carter Wellford L. Analysis of flow of viscous fluids by finite element method // AIAA Journ. -1972. -Vol.10, №12. -P.72-80.
168. Pan F., Acrivos A. Steady flows in rectangular cavities // Journ. Fluid Mech. -1967. -Vol.28. -P.643-655.
169. Prikhodko A.A., Zinchenko A.V., Kudinov P.I. Effective methods for heterogeneous flows computations. Models, algorithms and results // "International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer" Book of Abstracts May 26-30, 1997, Chesme, Izmir, Turkey, -P.315-316.
170. Restivo A., Wightlaw J.H. Turbulence characteristics of the flow downstream of a symmetric, plane sudden expansion // Trans ASME I: J. Fluids Engng. -1978. -Vol.100 -P.308.
171. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA TN-2913, 1953.
172. Saric W.S. Goertler vortices // Annu. Rev. Fluid Mech. -1999. -№26. -P.379-409.
173. Semin L.G., Shapeev V.P. Collocation-grid method for solving boundary problems for Navier-Stokes equations // Novosibirsk. ICMAR. -1998. -Part.III. -P.186-191.
174. Skalak R. Extensions of extremum principles for slow viscous flows // Journ. Fluid Mech. -1970. -Vol.42. -P.527-548.
175. Sobey I.J., Drasin P.G. Bifurcation of two-dimensional channel flows // Journ. Fluid Mech. -1986. -Vol.171. -P.263-287.
176. Son J.S., Hanratty J.T. Numerical solution for the flow around a cylinder at Reynolds numbers of 40, 200 and 500 // Journ. Fluid Mech. -1969. -Vol.35, part 2. -P.369-386.
177. Son J.S., Hanratty J.T. Velocity gradients at the wall for flow around a cylinder at Reynolds numbers from 5000 to 100000 // Journ. Fluid Mech. -1969. -Vol.35, part 2. -P.353-368.
178. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. -1984. -Vol.21. -P.995-1011.
179. Tamamidis P., Assanis D.N. Evaluation of various high-oder-accuracy schemes with and without flux limiters // Int. J. Numer. Meth. Fluids. -1993. -Vol.16. -P.931-948.
180. Telionis D.P., Tsahalis D.T. Unsteady laminar separation over impulsively moved cylinders // Acta Astronautica. - 1974. - Vol.1, №11-12. - P.1487-1505.
181. Thom A. The flow past circular cylinders at low speeds // Proceedings of the Royal Society of London Series A. -1933. -Vol.141. -P.651-669.
182. Torrance K.E., Orloff L., Rockett J.A. Experiments on natural convection in enclosures with localized heating from below // Journ. Fluid Mech. -1969. -Vol.36, part 1. -P.21-31.
183. Torrance K.E., Rockett J.A. Numerical study of natural convection in enclosure with localized heating from below - creeping flow to the onset of laminar instability // Journ. Fluid Mech. -1969. -Vol.36, part 1. -P.33-54.

184. Van Dommelen L.L., Shen S.F. The spontaneous generation of the singularity in a separating laminar boundary layer // Journ. Comp. Phys. -1980. -Vol.38, №2. -P.125-140.
185. Van Doormaal J.P., Raithby G.D. Enhancements of SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow// Numer. Heat Transfer. -1984. -Vol.7. -№2. -P.147-163.
186. Wesseling P. Laminar convection cells at high Raleigh number // Journ. Fluid Mech. -1969. -Vol.36, part 4. -P.625-637.
187. Zijlema M. On the construction of third-oder accurate TVD sheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains / Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-94-104. -1994. -25 p.
188. Zijlema M., Wesseling P. Higher order flux-limiting methods for steady-state, multidimensional, convection-dominated flow / Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-95-131, -1995. -28p.