

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Председатель

Л.А. ПУЧКОВ — *ректор МГГУ, чл.-корр. РАН*

Зам. председателя

Л.Х. ГИТИС — *директор Издательства МГГУ*

Члены редсовета

И.В. ДЕМЕНТЬЕВ — *академик РАЕН*

А.П. ДМИТРИЕВ — *академик РАЕН*

Б.А. КАРТОЗИЯ — *академик РАЕН*

В.В. КУРЕХИН — *академик РАЕН*

М.В. КУРЛЕНЯ — *академик РАН*

В.И. ОСИПОВ — *академик РАН*

Э.М. СОКОЛОВ — *академик МАН ВШ*

К.Н. ТРУБЕЦКОЙ — *академик РАН*

В.В. ХРОНИН — *профессор*

В.А. ЧАНТУРИЯ — *академик РАН*

Е.И. ШЕМЯКИН — *академик РАН*

ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В.А. Винников
Г.Г. Каркашадзе

ГИДРО-МЕХАНИКА

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров «Горное дело» и по направлению подготовки дипломированных специалистов «Горное дело»

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

2003

УДК 532.5 (075.8): 622.5
ББК 33.17
В 48

ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«КУЛЬТУРА РОССИИ»

Экспертное заключение кафедры Гидромеханики, гидропривода и гидропневмоавтоматики (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Рецензенты:

- д-р геол.-минерал. наук *А.А. Пэк* (ИГЕМ РАН),
- д-р техн. наук, проф. *К.В. Халкечев* (Карачаево-Черкесский государственный технологический институт)

Винников В.А., Каркашадзе Г.Г.

В 48 Гидромеханика: Учебник для вузов. – М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2003. – 302 с.: ил.

ISBN 5-7418-0245-1 (в пер.)

Рассмотрены основные закономерности статики, кинематики и динамики идеальных и реальных жидкостей. Даны описания основных приборов для измерения гидромеханических характеристик. Изложены основы моделирования гидромеханических процессов. Приведены основные методы расчета потерь напора при течении жидкостей в различных условиях, а также диффузионных процессов и типичных для горного производства фильтрационных задач.

В.А. Винников – канд. техн. наук, доцент кафедры «Физика горных пород и процессов» МГГУ.

Г.Г. Каркашадзе – д-р техн. наук, профессор кафедры «Физика горных пород и процессов» МГГУ.

Для студентов горных вузов и факультетов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров и магистров «Горное дело» и по направлению подготовки дипломированных специалистов «Горное дело».

УДК 532.5 (075.8): 622.5
ББК 33.17

ISBN 5-7418-0245-1

© В.А. Винников, Г.Г. Каркашадзе, 2003
© Издательство МГГУ, 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении различных процессов горного производства, так же как и при конструировании современных машин и устройств, необходимы глубокие знания механики жидкостей и газов. Гидромеханика, являясь общенаучной дисциплиной, служит связующим звеном между общетеоретическими предметами – физикой, математикой, теоретической механикой – и специальными курсами, посвященными изучению процессов движения жидкостей и газов в горных породах.

Движение жидкостей и газов определяется процессами переноса импульса, тепла и вещества, поэтому в данном учебнике показывается общность уравнений этих переносов, рассматриваются элементы теории подобия и закономерности движения жидких сред в трубах. Такое изложение приближает курс к механике сплошных сред.

Ряд глав учебника посвящен вопросам прикладной гидромеханики, а в гл. 9 изложены основы теории фильтрации жидкостей в породных массивах, являющиеся базой для изучения последующих специальных курсов.

В основу учебника положен одноименный курс лекций, много лет читавшийся авторами на физико-техническом и других факультетах Московского государственного горного университета.

Введение и гл. 1 – 5 подготовлены к печати доц., канд. техн. наук В.А. Винниковым, а гл. 6 – 9 – проф., д-ром техн. наук Г.Г. Каркашадзе.

ГИДРО-МЕХАНИКА: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Предмет гидромеханики Цели и задачи курса

Одна из частей физики – механика – изучает общие закономерности, присущие механическому движению и взаимодействию тел, находящихся в любом из возможных агрегатных состояний (твердом, жидком или газообразном). В соответствии с состоянием тел механику разделяют на различные области. В механике твердого тела (и сплошных сред) рассматриваются абсолютно твердые и деформируемые тела (как упругие, так и пластические), и дисциплины, изучающие эти тела, называются соответственно теоретической механикой и теорией упругости и пластичности. Законы же движения жидких сред изучает механика жидкостей, или ***гидромеханика***.

В гидромеханике как науке различают два крупных раздела: теоретическую гидромеханику, исследующую основные закономерности движения жидкостей в различных условиях, и прикладную гидромеханику, или гидравлику, – прикладную инженерную науку о равновесии и движении жидкостей и газов, основанную преимущественно на экспериментальных данных и разрабатывающую приближенные методы расчета течения жидкостей и газов в различных технических устройствах. Заметим, что там, где это необходимо и где законы движения газов подобны законам движения жидкостей, мы будем приводить примеры движения газообразных сред. В гидромеханике в качестве основного метода исследований используется строгий математический анализ, и базой для изучения гидромеханики являются курсы математики, физики, механики сплошных сред. В то же время курс гидромеханики является основой для изучения студентами в дальнейшем специальных дисциплин, таких, как гидравлика и гидропривод, трубопроводный транспорт.

История развития гидромеханики как науки

Зарождение гидромеханики как науки происходило в древние времена, как только люди научились создавать оросительные каналы и водопроводы: в Китае 2500 лет назад был построен Великий канал протяженностью около 1800 км; не менее грандиозные по тем временам гидротехнические сооружения были известны в древнем Египте и Индии, а первый водопровод появился в Риме 2300 лет назад.

Еще в IV веке до н.э. древнегреческий философ и ученый Аристотель сделал ряд наблюдений над движением жидкостей. Первым научным трудом в области гидромеханики считается знаменитый трактат Архимеда «О плавающих телах» (III век до н.э.), однако подлинное развитие гидромеханики как науки началось лишь после XIX века. Большой вклад в развитие гидромеханики как науки внесли такие известные ученые, как Леонардо да Винчи (работа «О движении и измерении воды», начало XVI века), С. Стевин («Начала гидростатики»), Галилео Галилей («Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся»). Исаак Ньютон в своем известном труде «Математические начала натуральной философии» установил, основываясь на собственных опытах, что сопротивление движению тел в жидкости пропорционально квадрату их скорости. Блез Паскаль открыл закон о передаче давления в жидкости, вследствие чего появилось большое число простых гидравлических машин (типа гидравлических прессов, домкратов и т.д.). Э. Торричелли получил формулу скорости истечения невязкой жидкости из резервуаров через отверстия.

Однако все перечисленные открытия можно отнести лишь к отдельным разделам гидромеханики. Формирование

же гидромеханики как науки стало возможным только после появления фундаментальных научных трудов М.В. Ломоносова, Д. Бернулли и Л. Эйлера.

М.В. Ломоносов в диссертации «Рассуждение о твердости и жидкости тел» (1760 г.) сформулировал открытые им законы сохранения вещества и энергии. Кроме того, им были опубликованы труды «О вольном движении воздуха, в рудниках примеченном», «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих», «Попытка упругой силы воздуха» и др.; он изобрел универсальный барометр, вискозиметр (прибор для определения вязкости жидкости), прибор для измерения скорости и направления ветра, прибор для определения скорости и направлений течения в море, «аэродрольную» машину – прообраз современного вертолета.

Даниил Бернулли вывел важнейшее уравнение взаимосвязи удельных энергий при движении жидкости, служащее основой теоретических построений и практических расчетов в области гидравлики (впоследствии уравнение было названо его именем). В 1738 г. он опубликовал книгу «Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей», где впервые ввел термин «гидромеханика». Д. Бернулли изобрел водоподъемник, установленный под Архангельском, поднимавший воду на высоту до 30 м.

Леонард Эйлер в 1755 г. вывел системы дифференциальных уравнений равновесия и движения жидкостей и газов; он указал некоторые интегралы этих уравнений и сформулировал закон сохранения массы применительно к жидкости; предложил конструкцию турбины, написал основополагающие труды по теории корабля.

Перечисленные теоретические работы положили начало интенсивному развитию гидромеханики в различных странах.

В области истечения жидкости через отверстия, насадки и водосливы работали Д. Полени (1685 – 1761) и Д. Вентури (1746 – 1822); равномерное движение жидкости изучали А. Шези (1718 – 1798) и Э. Базен (1829 – 1897); в области изучения сопротивлений движению жидкости работали Ю. Вейсбах (1806 – 1871) и П. Дюбуа (1734 – 1809). Большой вклад в изучение ламинарных и турбулентных потоков внес английский физик О. Рейнольдс (1842 – 1912). Основы теории движения вязких жидкостей были заложены французским ученым Л. Навье (1785 – 1836) и английским ученым Дж. Стоксом (1819 – 1903).

Во второй половине XIX века появился ряд работ, оказавших большое влияние на последующее развитие гидромеханики. В 1881 г. профессор Казанского университета И.С. Громека опубликовал работу «Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости», в которой предложил новую форму уравнений движения жидкости, удобную для получения энергетических зависимостей. Им же впервые было проведено теоретическое исследование нестационарного движения жидкости в капиллярах, он также заложил основы теории винтовых потоков и потоков с поперечной циркуляцией.

Н.Е. Жуковский разработал теорию гидравлического удара в водопроводных трубах, теорию движения наносов в реках и основополагающие положения в области фильтрации. Однако выдающиеся результаты им были получены при создании теории подъемной силы крыла и воздушного винта, имеющей большое значение не только для авиации, но и для современного машиностроения. Н.Е. Жуковский известен всему миру как создатель экспериментальной аэромеханики (он основал ЦАГИ – Центральный аэрогидродинамический институт в Москве). Дальнейшие исследования в области аэ-

ромеханики связаны с именами С.А. Чаплыгина (1869–1942), К.Э. Циолковского (1857–1935) и А.А. Фридмана (1888–1925). Современный этап развития гидромеханики характеризуется появлением новых разделов, таких как физико-химическая, электромагнитная и космическая гидродинамика.

Значение гидромеханики для горного производства, ее взаимосвязь с другими дисциплинами

В настоящее время в горном производстве применяются машины и агрегаты, использующие гидравлические системы и приводы; дальнейшее развитие получает гидромеханизация, при которой выемка угля и проходка горных выработок осуществляются гидромониторами, а транспортировка и подъем горной массы – гидротранспортом. Значительная часть угля и руд добывается с использованием пневматической энергии. Следовательно, специалисты в области горного дела должны обладать глубокими знаниями в области гидромеханики как основы для расчета гидравлических устройств и агрегатов, а также процессов гидромеханизации. Таким образом, гидромеханика является основой для изучения гидромеханизации горных работ; процессов осушения, водопонижения и водоотлива при открытых и подземных горных работах; гидрогеологии; гидросистем; гидроприводов горных машин и комплексов; насосных, вентиляторных и компрессорных установок; рудничной аэрологии, вентиляции и дегазации шахт; обогащения полезных ископаемых.

Гипотеза сплошной среды

Система материальных точек, непрерывно заполняющая часть пространства, называется ***континуумом*** (сплошной средой). Именно такая сплошная среда используется как модель реально существующих материалов. Безусловно, это идеализация, которая, однако, оказывается полезной при решении многих практических задач. Такой моделью удобно пользоваться для описания не только жидких (вода, нефть, рассолы и т.д.), но и твердых тел (горные породы), а также газообразных сред (воздух, природный газ). Мы будем рассматривать жидкость как деформируемую систему материальных частиц, непрерывно заполняющих пространство, в котором она движется. Правомерность подобного подхода подтверждается сравнением размеров молекулы воды и некоторого реального объема: если взять кубик воды со стороной 0,01 мм, то в нем будет находиться $3{,}3 \cdot 10^{13}$ молекул. Таким образом, можно считать размеры частиц движущейся жидкости достаточно малыми по сравнению с размерами области, занятой ею. Правомерность применения модели жидкость – сплошная среда подтверждается всей практикой гидромеханики.

Основные свойства жидкостей

Плотность

Плотность – характеристика распределения массы в пространстве, занятом жидкостью или газом. Среднее значение плотности среды в некотором малом объеме определяется как отношение массы Δm, заключенной в этом объеме, к самому объему $\Delta\Omega$:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta\Omega}. \qquad (1)$$

В произвольной точке жидкости плотность определяется по формуле

$$\rho = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \Omega}. \qquad (2)$$

Плотность движущейся среды зависит от температуры и давления, а последнее – от характера движения среды.

Размерность плотности в системе СИ – кг/м^3.

Плотность всех жидкостей, кроме воды, с ростом температуры t уменьшается. Для воды при $t = 4$ °С существует точка с аномально высокой плотностью (*табл. 1*).

Таблица 1

Зависимость плотности воды от ее температуры при нормальном атмосферном давлении

Плотность	Температура t, °С					
	0	2	4	6	8	10
ρ, кг/м^3	999,87	999,97	1000,0	999,97	999,88	999,75

Продолжение табл. 1

Плотность	Температура t, °С					
	15	20	25	30	35	40
ρ, кг/м^3	999,15	998,26	997,12	995,76	994,13	992,35

Окончание табл. 1

Плотность	Температура t, °С					
	50	60	70	80	90	100
ρ, кг/м^3	988,20	983,38	977,94	971,94	965,56	958,65

Сжимаемость

Сжимаемость – свойство жидкостей изменять объем при изменении давления – характеризуется коэффициентом объемного сжатия (сжимаемости) β_Ω, Па$^{-1}$, представляющим

собой относительное изменение объема жидкости $\Delta\Omega / \Omega$ ($м^3/м^3$) при приращении давления ΔP (Па) на единицу:

$$\beta_\Omega = -\frac{1}{\Omega}\frac{\Delta\Omega}{\Delta P}. \qquad (3)$$

Знак «–» в формуле указывает, что при увеличении давления объем жидкости уменьшается.

По закону изменения параметров состояния жидкости различают изотермическую и адиабатическую сжимаемость. Учитывая, что при неизменной массе

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta\rho}{\rho}, \qquad (4)$$

получим

$$\beta_\Omega = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta P}. \qquad (5)$$

Коэффициент объемного сжатия β_Ω определяет также относительное изменение плотности жидкости при изменении давления на единицу. Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется ***модулем упругости жидкости*** (E_0, Па):

$$E_0 = \frac{1}{\beta_\Omega}, \qquad (6)$$

или

$$E_0 = \frac{\rho}{\Delta\rho}\Delta P. \qquad (7)$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta P}{E_0}. \qquad (8)$$

Соотношение (8) представляет собой закон Гука для жидкостей в условиях всестороннего сжатия.

Величина модуля упругости E_0 зависит от температуры и давления, поэтому жидкости не точно «следуют» закону Гука. В *табл. 2* даны значения модуля упругости воды E_0 при различной ее температуре (диапазон давлений – от нормального до 50 атм).

Модуль упругости минеральных масел, используемых в механизмах с гидравлическим приводом, при $t = 20\,°C$ составляет 1,35–1,75 ГПа (меньшее значение относится к более легкому маслу), бензина и керосина – приблизительно 1,3 Гпа, глицерина – 4,4 ГПа, ртути – в среднем 3,2 ГПа. Глинистые растворы, применяемые при бурении, имеют $E_0 = 2{,}5$ ГПа.

Таблица 2

Значения модуля упругости воды

Модуль упругости	Температура, °С			
	0	10	20	30
E_0, ГПа	999,87	999,97	1000,0	999,97

Сжимаемость воды весьма незначительна. При увеличении давления на 9,81 МПа объем воды уменьшается на 0,0005 % первоначального объема. В то же время сжимаемость воды примерно в 100 раз больше сжимаемости стали.

Как правило, воду считают несжимаемой средой. Но не следует забывать, что такое допущение правомерно лишь в тех случаях, когда изменения давления невелики. Так, сжимаемость воды существенно сказывается на положении уровня водной поверхности Мирового океана. Если бы вода была абсолютно несжимаемой, то отметки уровня воды в океанах поднялись бы примерно на 30 м.

В практике эксплуатации гидравлических систем отмечаются случаи, когда вследствие действия того или иного

возмущения (например, резкое закрытие или открытие запорного устройства в трубопроводе) в жидкости значительно изменяется давление. В таких случаях пренебрежение сжимаемостью жидкости приводит к существенным погрешностям.

Поскольку в безграничной однородной жидкости или в объеме, ограниченном абсолютно жесткими стенками, скорость распространения звука

$$c^2 = \frac{E_0}{\rho}, \tag{9}$$

то с учетом соотношения (7)

$$\Delta\rho = \frac{\Delta P}{c^2}. \tag{10}$$

Если допустить, что жидкость несжимаема, $\Delta\rho \to 0$, то $c \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом объеме жидкости или достаточно быстром изменении давления использование в расчетах значения $c \to \infty$ приводит к ошибкам.

Коэффициент температурного расширения

Температурное расширение – свойство жидкостей изменять объем при изменении температуры – характеризуется температурным коэффициентом β_t объемного расширения, представляющим относительное изменение объема жидкости при приращении температуры на единицу (на 1 °С) и при постоянном давлении:

$$\beta_t = \frac{1}{\Omega}\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}. \tag{11}$$

Для большинства жидкостей коэффициент β_t с увеличением давления уменьшается. Для воды с увеличением давления при температуре до 50 °С коэффициент β_t растет, а при температуре выше 50 °С – уменьшается. В *табл. 3* приведены значения β_t для некоторых жидкостей при 20 °С и нормальном атмосферном давлении.

Коэффициент β_t при уменьшении плотности нефтепродуктов с 920 до 700 кг/м^3 увеличивается от 0,0006 до 0,0008; для рабочих жидкостей гидросистем коэффициент β_t обычно принимают не зависящим от температуры. Для этих жидкостей рост давления от атмосферного до 60 МПа приводит к увеличению коэффициента β_t примерно на 10 – 20 % , причем чем выше температура рабочей жидкости, тем значительнее увеличение коэффициента β_t.

Таблица 3

Температурный коэффициент объемного расширения β_t для различных жидкостей

Коэффициент	Вода	Глицерин	Спирт	Нефть	Ртуть
$\beta_t, 10^{-3}$ К$^{-1}$	0,15	0,50	1,10	0,60	0,18

В *табл. 4* приведены значения коэффициента β_t для воды при нормальном атмосферном давлении.

Таблица 4

Температурный коэффициент объемного расширения β_t для воды

Давление P, атм	$\beta_t \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$ при температуре t, °С				
	1–10	10–20	40–50	60–70	90–100
1	140	150	420	556	719
100	430	165	422	548	Н/д
500	1490	236	429	523	661

Плотность жидкости в результате увеличения ее объема при нагревании уменьшается. Это уменьшение определяется по формуле Д.И. Менделеева:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1+\beta_t\left(t-t_0\right)}. \qquad (12)$$

Вязкость

Вязкость – свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев. Вязкость проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые ***силами внутреннего трения, или силами вязкости***. Благодаря этим силам медленнее движущийся слой жидкости «тормозит» соседний слой, движущийся быстрее, и наоборот. Силы внутреннего трения появляются при наличии межмолекулярных связей между движущимися слоями.

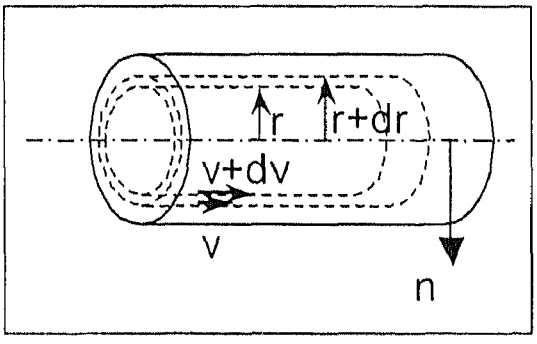
Силы внутреннего трения в жидкости впервые были обнаружены Ньютоном. Он установил пропорциональность между силой внутреннего трения, площадью соприкосновения слоев и относительной скоростью перемещения слоев. Дальнейшие исследования показали, что численное значение касательного напряжения, возникающего вследствие действия силы внутреннего трения, равно

$$\tau = \mu\frac{d\Theta}{dt}, \qquad (13)$$

где μ – коэффициент пропорциональности (называется ***динамической вязкостью жидкости***), учитывает особенности конкретных жидкостей;

$\frac{d\Theta}{dt}$ – скорость деформации сдвига.

Рассмотрим слоистое прямолинейное движение жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения (*рис. 1*). Жидкость движется кольцевыми концентрическими цилиндрическими слоями толщиной *dr*, скорость слоев уменьшается от оси к стенкам трубы. Разность скоростей в соседних слоях равна *dV*. На поверхностях соприкосновения слоев возникают силы внутреннего трения. Рассмотрим элементарный объем жидкости (*рис. 2*).



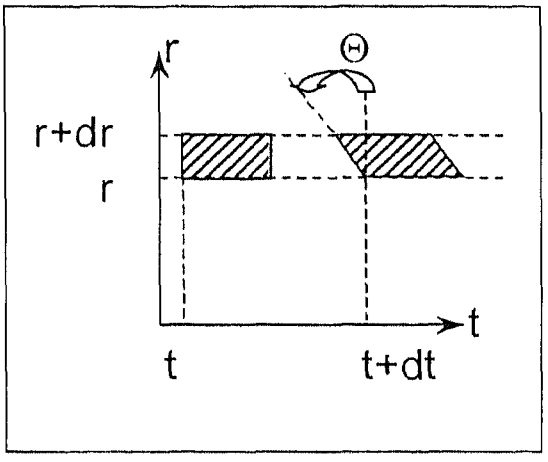


Рис. 1

Схема слоистого прямолинейного движения жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения

Рис. 2

Схема деформации элементарного объема жидкости при движении в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения

При слоистом движении вследствие различия скоростей, с которыми перемещаются верхняя и нижняя поверхности выделенного объема, произойдет деформация сдвига, скорость которой определяется по формуле

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{dt}\frac{dV}{dn}dt, \qquad (14)$$

так как

$$d\Theta \approx \mathrm{tg}(d\Theta) = \frac{dV}{dn}dt, \qquad (15)$$

где $\frac{\partial V}{\partial n}$ – градиент скорости по нормали к оси потока.



НЬЮТОН Исаак
(1643 – 1727)

Английский физик, механик, астроном и математик, член Лондонского королевского общества и его президент, иностранный член Парижской академии наук. Родился в Вулсторпе, в семье бедного фермера. С 12 лет учился в школе в Грантеме, затем – в Кембриджском университете. С 1669 по 1701 г. работал в этом университете, возглавляя кафедру математики и физики. В 1695 г. был назначен смотрителем, а с 1699 г. – главным директором Монетного двора в Лондоне. Похоронен в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве.

Известен фундаментальными достижениями в области основ дифференциального и интегрального исчислений, теории всемирного тяготения, оптики и др.

При слоистом движении скорость деформации сдвига равна градиенту скорости:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{d\Theta}{dt}. \qquad (16)$$

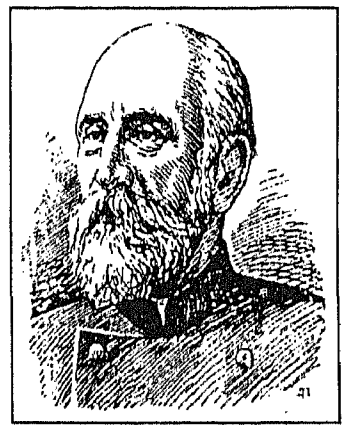
Тогда согласно закону внутреннего трения, открытому Ньютоном, касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau = \pm \mu \frac{dV}{dn}. \qquad (17)$$

В зависимости от выбора направления отсчета расстояний по нормали (от стенки рассматриваемой трубы или от ее оси) градиент скорости может быть положительным (расстояние отсчитывается от стенки) или отрицательным (расстояние отсчитывается от оси трубы). Знак в формуле (17) принимается таким, чтобы касательное напряжение было положительным. Закон внутреннего трения (17) экспериментально подтвержден и математически оформлен в 80-е годы XIX в. основоположником гидродинамической теории смазки Н.П. Петровым.

ПЕТРОВ Николай Павлович
(1836 – 1920)

Русский ученый, почетный член Петербургской академии наук (с 1894 г.), инженер-генерал. Разработал основы гидродинамической теории смазки, за что был награжден Ломоносовской премией (1884 г.). Известен также трудами по теории машин и механизмов, железнодорожной технике. Участвовал в строительстве Транссибирской магистрали.



Динамическая вязкость μ зависит от температуры и давления. Для чистой воды зависимость динамической вязкости от температуры, предложенная Ж. Пуазёйлем, имеет вид

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}0337t + 0{,}000221t^2)^{-1}, \qquad (18)$$

где t – температура, $t = 0 - 90$ °С;

μ_0 – динамическая вязкость при $t = 0$ °С, Па · с.

В *табл. 5* приведены значения динамической вязкости μ для воды при различной температуре.

Таблица 5

Зависимость динамической вязкости воды μ *от температуры*

Динамическая вязкость	Температура *t*, °С					
	0	5	10	15	20	30
μ, мПа·с	1,78	1,52	1,31	1,14	1,01	0,80

Окончание табл. 1

Динамическая вязкость	Температура *t*, °С					
	40	50	60	70	80	90
μ, мПа·с	0,66	0,55	0,47	0,41	0,36	0,32

В память французского ученого Ж. Пуазёйля единица динамической вязкости была названа «пуаз». В системе СГС 1 П = 1 г/(см·с). Единица динамической вязкости в СИ: Па·с; 1 Па·с = 10 П.

ПУАЗЁЙЛЬ Жан Луи Мари
(1799 – 1869)

Французский физиолог, врач и физик. Родился в Париже. Учился в политехнической школе.

Открыл закон истечения жидкости через тонкую цилиндрическую трубку (закон Пуазёйля), получивший широкое распространение для определения вязкости и скорости течения жидкости в капиллярах. Изобрел вискозиметр. Первым применил (1828 г.) ртутный манометр для измерения кровяного давления животных.

Кроме динамической вязкости в расчетах широко используется ***кинематическая вязкость***, равная отношению динамической вязкости к плотности жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \qquad (19)$$

где $\rho = \rho_0 \frac{T_0 P}{P_0 T}$ (индекс «0» относится к нормальным атмосферным условиям).

Название «кинематическая вязкость» отражает тот факт, что в размерность ν входят только кинематические (а не динамические) величины. В СИ единица кинематической вязкости – $м^2/с$. Применяется и внесистемная единица – $см^2/с$ – стокс (Ст). 1 Ст = 10^{-4} $м^2/с$.

СТОКС Джордж Габриель
(1819 – 1903)



Английский физик и математик, член Лондонского королевского общества, в течение 30 лет был его секретарем и 5 лет – президентом. Родился в Ирландии, в Скрине. Окончил Кембриджский университет, где и работал с 1849 г. профессором.

Научные работы относятся к гидродинамике, оптике, спектроскопии и математической физике. Разработал теорию вязкости жидкостей, математическую теорию движения вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса, 1845 г.). Вывел в 1851 г. формулу, определяющую силу сопротивления, действующую на твердый шар при его медленном равномерном поступательном движении в неограниченной вязкой жидкости (закон Стокса), заложив тем самым основы научной гидродинамики. За научные труды получил титул баронета.

В *табл. 6* приведены значения кинематической вязкости пресной воды при различной ее температуре.

У минеральных масел изменение давления от атмосферного до 40 МПа приводит к росту кинематической вязкости в 2 раза при 80 °С и в 3 раза при 40 °С. Влияние давления на вязкость у воды проявляется в меньшей степени.

Таблица 6

Зависимость кинематической вязкости ν воды от ее температуры t

Кинематическая вязкость	Температура *t*, °С					
	0	5	10	15	20	30
ν, сСт	1,78	1,52	1,31	1,14	1,01	0,80

Окончание табл.6

Кинематическая вязкость	Температура *t*, °С					
	40	50	60	70	80	90
ν, сСт	0,66	0,55	0,47	0,41	0,36	0,32

В *табл. 7* приведены значения кинематической вязкости ν для некоторых веществ.

Таблица 7

Кинематическая вязкость ν различных веществ при конкретной температуре t

Вещество	*t*, °С	ν, Ст
Воздух	0	0,133
Нефтепродукты*:		
нефть легкая	18	0,25
нефть тяжелая	18	1,40
керосин	15	0,027
мазут	18	20,0
Масло АМГ-10	50	0,10
Сталь жидкая	1550	0,0037
Ртуть	15	0,0011
* Для нефтепродуктов – осредненные данные.		

Кинематическая вязкость воды, содержащей достаточное количество мелких (менее 0,05 мм) взвешенных твердых частиц, может существенно увеличиваться по сравнению с чистой (без взвеси) водой (*табл. 8*). В связи с этим при изучении движения воды, несущей большое количество мелких наносов (особенно в придонной области потока в реке или канале), часто учитывают изменение кинематической вязкости в

зависимости от положения движущегося относительно дна слоя.

Вязкость жидкостей измеряют с помощью вискозиметров различных типов и конструкций.

Таблица 8

Кинематическая вязкость загрязненной воды ν, 10^{-8} $м^2/с$

t, °С	Количество взвешенных частиц, мг/л						
	< 100	100	200	300	400	500	600
5	152	160	168	176	184	192	200
10	131	133	135	137	139	141	143
15	114	115	116	117	118	118	119
20	101	102	102	102	103	103	104
25	90	90	91	91	91	92	92

Жидкости, для которых справедлив закон внутреннего трения Ньютона (17), называются ньютоновскими. Существуют жидкости (коллоидные суспензии, растворы полимеров, гидросмеси из глины, мела, цемента, сапропелей, илов, бетонные гидросмеси, строительные растворы и т. п.), для которых связь между касательным напряжением τ и скоростью сдвиговой деформации $\frac{dV}{dn}$ выражается другими соотношениями.

Такие жидкости относятся к неньютоновским. Например, если соотношение между τ и $\frac{dV}{dn}$ имеет вид

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dV}{dn}, \qquad (20)$$

то жидкости называются вязкопластичными, и их движение начинается лишь после того, как внешней силой будет преодолено напряжение сдвига τ_0 (*рис. 3*). Таким образом, вязкопластичные жидкости отличаются от ньютоновских наличием касательного напряжения в состоянии покоя τ_0. Для

других неньютоновских жидкостей динамическая вязкость может зависеть от градиента скорости, времени и т. д.

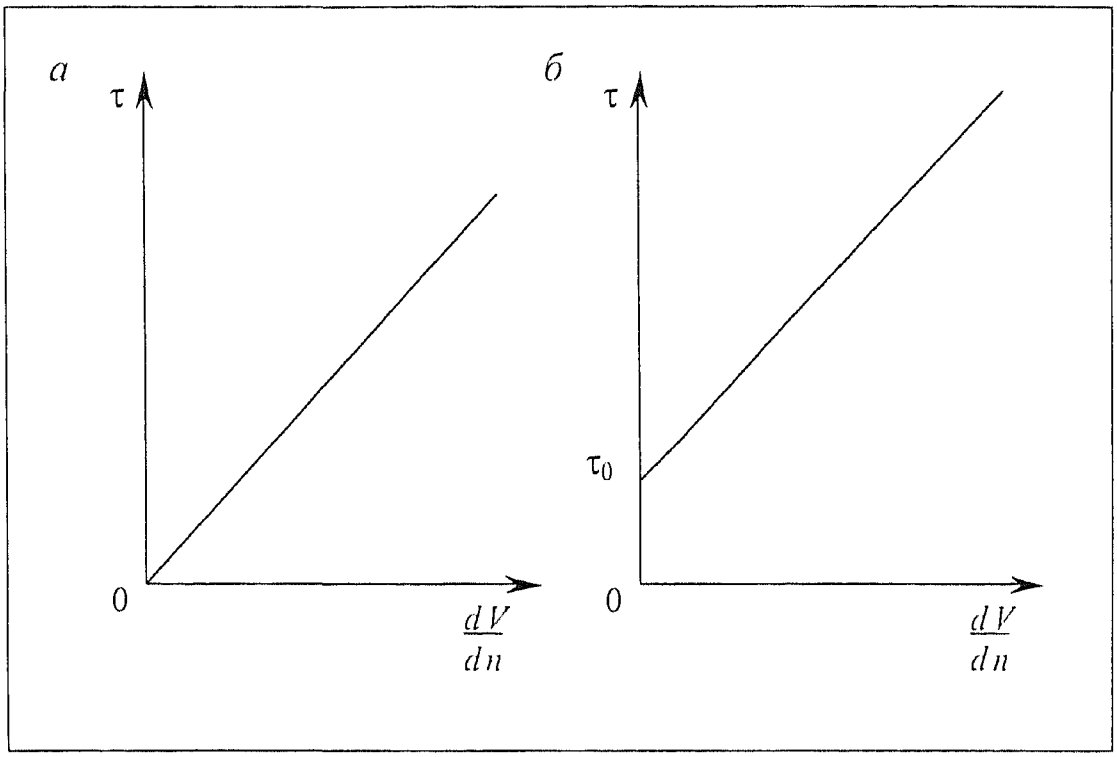


Рис. 3

Зависимость касательного напряжения τ от скорости сдвиговой деформации $\frac{dV}{dn}$ для ньютоновских (*а*) и неньютоновских, в частности вязкопластичных (*б*), жидкостей

Растворение газов

Все жидкости в той или иной мере поглощают и растворяют газы. Согласно закону растворимости Дальтона, при давлениях до 30 МПа и постоянной температуре относительный объем $\Omega_г / \Omega_ж$ растворенного газа равен постоянной величине $k_р$, называемой ***коэффициентом растворимости*** (константой Генри).

Коэффициент растворимости зависит от температуры:

$$\frac{d \ln k_{\text{р}}}{dT} = \frac{\Delta H}{RT^2}, \qquad (21)$$

где ΔH – изменение энтальпии при растворении;

R – универсальная газовая постоянная.

ДАЛЬТОН Джон
(1766 – 1844)



Английский физик и химик, создатель химического атомизма. Член Лондонского королевского общества. Родился в Иглсфилде. Образование получил самостоятельно. Был учителем математики в Манчестере.

Установил закон кратных отношений, ввел понятие «атомный вес», первым определил атомные веса (массы) ряда элементов и составил первую таблицу атомных весов элементов. Открыл газовые законы, которые впоследствии были названы его именем. Однако, будучи метафизиком и механистом, не признавал молекулярной гипотезы. Первым в 1794 г. описал дефект зрения (которым страдал сам), позже названный дальтонизмом.

Если процесс растворения происходит при давлении p_2, то, пересчитав объем газа на некоторое эталонное давление p_1 (например, на атмосферное), получим соотношение

$$\frac{\Omega_{\text{г}_{p_1}}}{\Omega_{\text{ж}_{p_2}}} = k_{\text{р}} \frac{p_2}{p_1}, \qquad (22)$$

где $\Omega_{\text{г}_{p_1}}$ – объем растворенного газа при давлении p_1 и температуре t;

$\Omega_{\text{ж}_{p_2}}$ – объем жидкости при давлении p_2 и температуре t;

$k_р$ – коэффициент растворимости данного газа в данной жидкости при температуре t.

При температуре 20 °С и атмосферном давлении в воде содержится 1,6 % по объему растворенного воздуха ($k_р = 0,16$).

При увеличении температуры от 0 до 30 °С коэффициент растворимости воздуха в воде уменьшается. Коэффициент растворимости воздуха в маслах при температуре 20 °С равен примерно 0,08 – 0,1. Кислород отличается более высокой растворимостью, чем воздух, поэтому содержание кислорода в воздухе, растворенном в жидкости, примерно на 50 % выше, чем в атмосферном воздухе.

При уменьшении давления из жидкости выделяется объем газа, определяемый в соответствии с (22). Процесс выделения газа протекает интенсивнее, чем его растворение.

Кипение

Кипение – процесс перехода жидкости в газообразное состояние, происходящий внутри жидкости. Жидкость можно довести до кипения повышением температуры до значений, бóльших температуры кипения при данном давлении, или понижением давления до значений, меньших давления насыщенных паров $p_{нп}$ жидкости при данной температуре. Обычно при понижении давления до давления насыщенных паров жидкости (при данной температуре) в жидкости образуются пузырьки, заполненные парами жидкости или газами, выделившимися из жидкости, т. е. происходит так называемое «холодное кипение». При наличии в жидкости свободной поверхности эти пузырьки всплывают и выходят через нее.

В том случае, когда капельная жидкость находится в замкнутом пространстве и не имеет свободной поверхности, эти пузырьки могут, перемещаясь вместе с жидкостью, попасть в область более низкой температуры или более высокого давления. Тогда пары газов конденсируются, газы снова растворяются в жидкости, в образовавшиеся пустоты проникают частицы жидкости, что приводит к практически мгновенному «схлопыванию» пузырьков. В результате этого происходит резкое повышение давления в местах схлопывания пузырьков, а также местное повышение температуры. Такое явление называется ***кавитацией***.

Схлопывание кавитационного пузырька сопровождается звуковым импульсом, тем более сильным, чем меньше газа содержал пузырек до схлопывания. Такие многократно повторяющиеся звуковые удары могут привести к разрушению (кавитационной эрозии) поверхности, у которой возникает кавитация (например, стенки трубопровода, лопастей турбин и др.).

В жидкости, из которой удален растворенный и не растворенный в ней газ, т. е. в дегазированной жидкости, кипение не возникает и при температуре, большей температуры кипения при данном давлении.

В *табл. 9* приведены значения давления насыщенных паров воды $p_{\text{нп}}$ при нормальном атмосферном давлении.

Газы могут находиться в жидкости в растворенном и нерастворенном виде. Присутствие в жидкости нерастворенного воздуха (газа) в виде пузырьков существенно уменьшает модуль упругости жидкости, причем это уменьшение не зависит от размеров пузырьков воздуха.

Таблица 9

Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры при нормальном атмосферном давлении

Давление	Температура t, °С				
	5	10	15	20	25
$p_{нп}$, кПа	0,87	1,23	1,70	2,33	3,20

Окончание табл. 9

Давление	Температура t, °С				
	30	40	60	80	100
$p_{нп}$, кПа	4,3	7,4	20,3	48,3	103,3

Сопротивление растяжению жидкостей

Сопротивление растяжению может возникать только в дегазированных жидкостях. В опытах удавалось при центрифугировании дегазированной дистиллированной воды получить на очень короткое время напряжения растяжения в воде, доходившие приблизительно до 25 МПа. Технические жидкости не сопротивляются растягивающим усилиям.

Поверхностное натяжение

Известно, что молекулы жидкости, находящиеся на границе с газом, твердым телом или между двумя несмешивающимися жидкостями, испытывают со стороны остальных молекул жидкости не уравновешенное извне воздействие. Под влиянием этого воздействия поверхность жидкости стремится принять форму, соответствующую наименьшей площади. Малые массы жидкости в воздухе, образуя капли, стремятся к шарообразной форме.

Чтобы увеличить поверхность жидкости, необходимо часть внутренних молекул вывести на поверхность, для чего

придется совершить работу. Это можно представить как наличие сопротивления граничной поверхности жидкости растяжению и считать, что по поверхности распределены силы, препятствующие растяжению. Данные силы действуют по касательным к поверхности направлениям и называются ***силами поверхностного натяжения.***

Поверхностное натяжение σ представляет собой отнесенную к единице площади дополнительную энергию, которой обладают молекулы поверхностного слоя, или силу поверхностного натяжения, отнесенную к единице длины на свободной поверхности. Размерность поверхностного натяжения в СИ – Н/м.

Величина поверхностного натяжения σ зависит от природы соприкасающихся сред и температуры. С увеличением температуры поверхностное натяжение σ уменьшается. При 20 °С и контакте с воздухом: $\sigma = 0{,}0726$ Н/м для воды; $\sigma = 0{,}486$ – для ртути; $\sigma = 0{,}022$ – для этилового спирта; $\sigma = 0{,}0235 - 0{,}038$ – для сырой нефти; $\sigma = 0{,}035 - 0{,}038$ Н/м – для смазочного масла.

На границе с воздухом у расплавленной стали при $t = 1550$ °С $\sigma = 1{,}86$ Н/м, у расплавленного чугуна при $t = 1200 - 1450$ °С $\sigma = 0{,}9 - 1{,}0$ Н/м. Для границы вода – ртуть при 20 °С $\sigma = 0{,}378$ Н/м.

Добавка в жидкость поверхностно-активных веществ (ПАВ) может заметно уменьшить поверхностное натяжение. Влияние поверхностного натяжения необходимо учитывать при изучении потоков с малой глубиной, при захвате окружающего воздуха движущейся жидкостью (аэрации жидкости), в капиллярах и т. д.

В трубках малого диаметра (капиллярах) наблюдается искривление свободной поверхности, граничащей с газом или с парами этой же жидкости. Если поверхность трубки смачи-

вается, свободная поверхность жидкости в капилляре вогнутая, если нет смачивания, свободная поверхность – выпуклая. В этих случаях силы поверхностного натяжения обусловливают дополнительные напряжения в жидкости.

Под действием дополнительных напряжений в трубках малого диаметра происходит капиллярное поднятие (при смачивании) или опускание (если нет смачивания) жидкости на высоту, определяемую по формуле Жюрена:

$$h_{\text{кап}} = \frac{4\sigma\cos\Theta}{\rho g d}\ , \qquad (23)$$

где Θ – краевой угол смачивания (острый угол между касательной к свободной поверхности в точке пересечения со стенкой и самой стенкой капилляра);

d – диаметр капилляра.

Для чистой воды и стекла $\Theta \approx 0\,^\circ$, для ртути и стекла $\Theta \approx 50\,^\circ$. При $t = 20\,^\circ$C для воды и спирта высота капиллярного поднятия равна соответственно $30/d$ и $11{,}5/d$, а для ртути высота капиллярного опускания составляет $10{,}15/d$ (если d выражено в миллиметрах).

Одна и та же жидкость в капиллярах одного и того же диаметра может подниматься (при смачивании) или опускаться (если нет смачивания) в зависимости от материала, из которого изготовлена капиллярная трубка.

Поднятие воды в капиллярах почвы и грунтов является важным фактором ее распространения. Высота капиллярного поднятия в грунтах изменяется от 0 (галечники) до почти 5 м (глины с тонкими «волосяными» трещинами-капиллярами). При этом с увеличением минерализации воды увеличивается высота капиллярного поднятия.

Поверхностное натяжение и капиллярные эффекты определяют закономерности движения жидкости в условиях невесомости.

Особые свойства воды

Известно, что в понятие «вода» следует включать вещества, состоящие не только из молекул H_2O. Различные комбинации изотопов водорода и кислорода обусловливают существование 36 разновидностей воды. В природной воде 99,7 % – молекулы H_2O, на долю остальных разновидностей молекул воды приходится лишь 0,3 %. Однако это не означает, что влияние других разновидностей молекул на свойства воды пропорционально их доле в общем объеме воды.

Вода – аномальное вещество. Прежде всего, это – единственное вещество на нашей планете, которое при обычных температуре и давлении может находиться в одном из трех агрегатных состояний: твердом (лед), жидком и газообразном (пар). Плавление воды сопровождается не расширением, как у подавляющего большинства жидкостей, а сжатием. Аномально изменяется также плотность воды при возрастании температуры (см. *табл. 1*). Если при плавлении твердых тел теплоемкость вещества изменяется незначительно, то при плавлении льда она увеличивается скачком более чем вдвое – от 2,052 до 4,224 кДж/кг. Вода имеет аномально большую удельную теплоемкость ($C_p = 4{,}18$ Дж /(кг·К)): примерно в 9 раз больше, чем железо, в 33 раза больше, чем ртуть, в 5 раз больше, чем известняк, и т. д. При нагревании воды ее теплоемкость сначала падает, достигая минимума 4,1809 кДж/кг при температуре 34,5 °С, а затем вновь увеличивается. Появление этого минимума объясняется разрушением ассоциаций

(групп) молекул воды примерно при этой температуре. Предполагается, что вода представляет собой смесь двух структур: рыхлой льдоподобной и плотно упакованной, и все аномальные свойства воды могут объясняться переходом от одной структуры к другой.

Таким образом, вода, например, в озере при одинаковой температуре воздуха и одинаковом получаемом ею солнечном тепле нагреется в 5 раз меньше, чем сухой песчаный пляж на берегу озера, но во столько же раз вода будет дольше сохранять полученное тепло, чем почва.

При замерзании объем воды увеличивается примерно на 10 %. Температура замерзания воды с увеличением давления (до 19,6 МПа) понижается, а затем повышается.

Известно, что перемещение воды в вертикальном направлении в водоемах (с пресной водой) прекращается при 4 °С. При этой температуре вода оказывается стратифицированной: в нижних слоях находится вода с большей плотностью, чем в верхних слоях.

Морская вода замерзает при температуре –1,9 °С. Вода в капиллярах почвы иногда может замерзать и при температуре +4,4 °С.

Вода обладает высокой теплотой испарения ($22{,}6 \cdot 10^5$ Дж/кг) и скрытой теплотой плавления ($3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг). При атмосферном давлении для перехода воды в пар из окружающей среды требуется в 6,75 раза больше теплоты, чем при плавлении льда при том же давлении.

При конденсации влаги (образовании тумана) выделяется значительное количество теплоты. Это используется в установках, создающих искусственный туман; такие установки помимо орошения могут использоваться для предохранения растений от заморозков.

Электропроводность сухого льда и снега гораздо меньше электропроводности воды, причем электропроводность воды сильно зависит от наличия примесей, а на электропроводность льда они влияют очень мало. Электропроводность воды зависит от концентрации растворенных в ней солей. Поэтому электропроводность морской воды на 2–3 порядка больше, чем электропроводность пресной речной воды, и больше примерно в 12000 раз, чем электропроводность химически чистой воды (при 18 °С).

Вода является сильным растворителем. Эта способность воды характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью, которая довольно высока и для дистиллированной воды при 0 °С составляет около 87, с ростом температуры она уменьшается – до 55,7 при 100 °С. Для сравнения можно указать, что у большинства других растворителей диэлектрическая проницаемость значительно меньше и меняется от 10 до 50, а у так называемых неполярных жидкостей, вообще не обладающих способностью растворять электролиты, она составляет 2 – 2,5. Таким образом, по сравнению с воздухом, диэлектрическая проницаемость которого равна 1, эта характеристика воды гораздо больше (для льда она равна 3,2).

Из-за присутствия в воде растворенного воздуха, богатого кислородом, и ряда агрессивных компонентов вода воздействует на материалы, из которых возведены сооружения. При этом может происходить коррозия, в том числе и электрохимическая. Растворенные в воде соли и взвешенные в ней твердые частицы могут привести к «зарастанию» стенок, например, трубопровода, вследствие чего пропускная способность таких труб может существенно уменьшиться.

Задачи

Задача 1

Можно ли при помощи термометра измерить атмосферное давление?

Решение

Вода закипает при 100 °С только при нормальном атмосферном давлении, которое равно 0,1013 МПа. Доведя воду до кипения и измерив ее температуру, можно сравнить атмосферное давление с нормальным. По таблице зависимости давления насыщенных паров воды от температуры (см. *табл. 9*) при измеренной температуре кипения определяем давление насыщенного пара. Оно равно атмосферному давлению.

Задача 2

В вертикальном цилиндрическом резервуаре диаметром d, равном 3 м, хранится 100 т топлива, плотность ρ_0 которого при 0 °С составляет $\rho_0 = 825$ кг/м^3. Определить изменение уровня топлива в резервуаре Δh при нагреве топлива от 0 до 30 °С. Принять $\beta_t = 0{,}0007$ 1/К. Расширением резервуара пренебречь.

Решение

Объем, занимаемый топливом при 0 °С:

$$\Omega = \frac{m}{\rho_0} = \frac{100 \cdot 10^3}{825} = 121{,}21 \text{ м}^3.$$

В соответствии с формулой (11) уменьшение объема топлива при изменении температуры на 30 °С составит

$$\Delta\Omega = \beta_t \Delta t = 0,0007 \cdot 121,21 = 2,55 \text{ м}^3.$$

Изменение уровня топлива в резервуаре:

$$\Delta h = \frac{4\Delta\Omega}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2,55}{\pi \cdot 3^2} = 0,360 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta h = 0,360$ м.

Задача 3

При опрессовке трубопровода (проверке его на прочность при повышении давления) в него закачивается некоторое дополнительное количество воды $\Delta\Omega$. Определить этот объем воды. Диаметр трубопровода $d = 0,5$ м, его длина $L = 4$ км, требуемое превышение давления по сравнению с начальным ($p_{\text{нач}} = 98,1$ кПа) составляет $\Delta p = 1$ МПа. Считать, что стенки трубопровода не деформируются.

Решение

Объем воды в трубопроводе до опрессовки:

$$\Omega_0 = \frac{1}{4}\pi d^2 L = \frac{\pi}{4} 0,5^2 \cdot 4000 = 785,4 \text{ м}^3.$$

Из выражения для коэффициента объемного сжатия имеем

$$\beta_\Omega = -\frac{d\Omega}{\Omega dp} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0 + \Delta\Omega} \frac{1}{\Delta p} = \frac{1}{2,1 \cdot 10^9} = 4,76 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

Дополнительный объем воды:

$$\Delta\Omega = \frac{\beta_\Omega \Omega_0 \Delta p}{1 - \beta_\Omega \Delta p} = \frac{4,76 \cdot 10^{-10} \cdot 785,4 \cdot 10^6}{1 - 4,76 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6} = 0,374 \text{ м}^3.$$

Ответ: $\Delta\Omega = 0,374$ м^3.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается гипотеза сплошной среды?
2. Какие основные свойства жидкостей вам известны?
3. Что называется плотностью и каковы единицы ее измерения?
4. Какова взаимосвязь сжимаемости и модуля упругости жидкости? Что характеризуют эти параметры?
5. Как ведут себя жидкости с повышением температуры?
6. Какова взаимосвязь между кинематической и динамической вязкостью? В каких единицах они измеряются?
7. Что такое ньютоновские и неньютоновские жидкости?
8. Какими параметрами характеризуется процесс растворения газов?
9. Что такое «холодное кипение» и чем оно отличается от обычного кипения?
10. Что такое кавитация?
11. Существует ли сопротивление растяжению у жидкостей?
12. Какова природа явления поверхностного натяжения? Что называется капиллярным поднятием или опусканием жидкости?
13. С чем связано существование особых свойств воды и каковы они?

Глава 1

ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

1.1. Гидростатическое давление и его свойства

Гидростатика – раздел гидромеханики, изучающий законы равновесия жидкостей и газов. Основное понятие гидростатики – это гидростатическое давление. Для выяснения его сущности рассмотрим некоторый объем покоящейся жидкости (*рис. 1.1, а*). Рассечем его произвольной поверхностью *abcd* на две части и мысленно отбросим одну из них, например верхнюю (*рис. 1.1, б*).

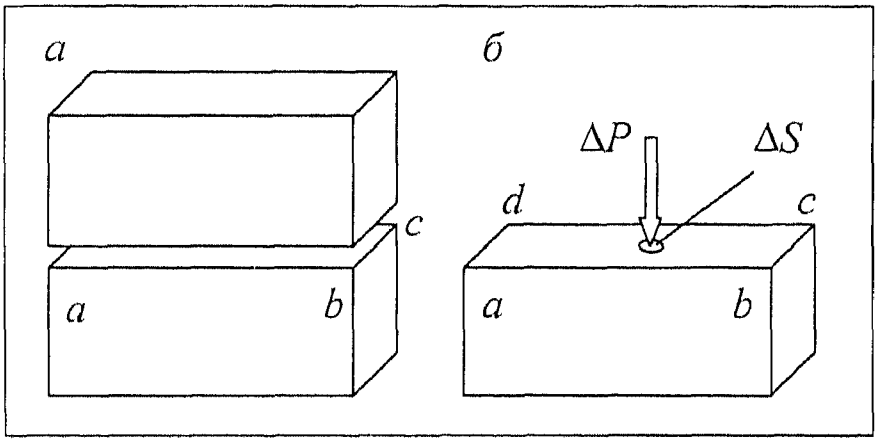


Рис. 1.1
Схема к расчету гидростатического давления

При этом мы должны приложить ко всей поверхности *abcd* силы, действие которых будет эквивалентно взаимодействию отброшенной и оставшейся частей объема. Выделим на поверхности *abcd* замкнутый контур площадью ΔS с некоторой произвольной точкой A внутри него. Обозначим силу взаимодействия, приходящуюся на эту площадь, через ΔP. Отношение

$$p_{ср} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \qquad (1.1)$$

выражает силу, приходящуюся в среднем на единицу площади, и называется ***средним гидростатическим давлением***. Разница между истинным давлением в точке A и средним давлением в пределах площадки ΔS будет тем меньше, чем меньше площадка. Если уменьшать площадку ΔS, то предел отношения ΔP к ΔS выразит величину истинного гидростатического давления в точке:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S}. \qquad (1.2)$$

Гидростатическое давление измеряется в единицах силы, отнесенных к единице площади. Единица измерения гидростатического давления в системе СИ – ньютон на квадратный метр (Н/м^2), обозначается Па (паскаль). Обычно применяют более крупные единицы – мегапаскали (МПа) и бары. Соотношения между этими единицами:

1 МПа = 10^6 Н/м^2, 1 бар = 10^5 Н/м^2.

Давление, равное 1 кгс/см^2, называют ***технической атмосферой*** (атм). Между единицами измерения давления в разных системах существуют следующие соотношения:

1 атм = 1 кгс/см^2 = 0,981 бар = 98066,5 Па.

Гидростатическое давление обладает следующими свойствами:

- гидростатическое давление действует по нормали к площадке действия и является сжимающим, т.е. направлено внутрь того объема жидкости, давление на который рассматривается (поскольку в жидкостях отсутствует сопротивление сдвигающим усилиям);

- величина гидростатического давления в данной точке зависит не от направления (угла наклона) площадки действия, а от положения точки в пространстве.

Докажем второе свойство. Для этого через точку A (*рис. 1.2*) проведем три взаимно перпендикулярные плоскости, которые и примем за координатные. Затем проведем какую-либо плоскость (например, abc), находящуюся на бесконечно близком расстоянии от начала координат. Этими четырьмя плоскостями вблизи точки A выделен элементарный тетраэдр с ребрами dx, dy, dz.

На этот тетраэдр действуют следующие силы:

- объемные, приложенные к каждой точке жидкости в объеме тетраэдра (такой силой обычно является сила тяжести), величину которых будем относить к единице массы (размерность – Н/кг); их проекции на координатные оси равны x, y и z;
- силы давления, действующие на грани тетраэдра с внешней стороны нормально к его граням; величины гидростатических давлений, обусловленные этими силами, обозначим p_x, p_y, p_z для площадок, расположенных в координатных плоскостях в окрестности точки A, и p_n – для площадки abc. Очевидно, что средние напряжения для граней тетраэдра отличаются от величин гидростатических давлений бесконечно малыми величинами ε_x, ε_y, ε_z и ε_n.

Составим условие равновесия всех вышеперечисленных сил. Прежде всего определим сумму их проекций на ось x.

Давления на грани bAc и bAa имеют проекции на ось x, равные нулю. Давление на грань aAc дает проекцию

$$\left(p_x + \varepsilon_x\right)\frac{1}{2}dy\,dz\,. \qquad (1.3)$$

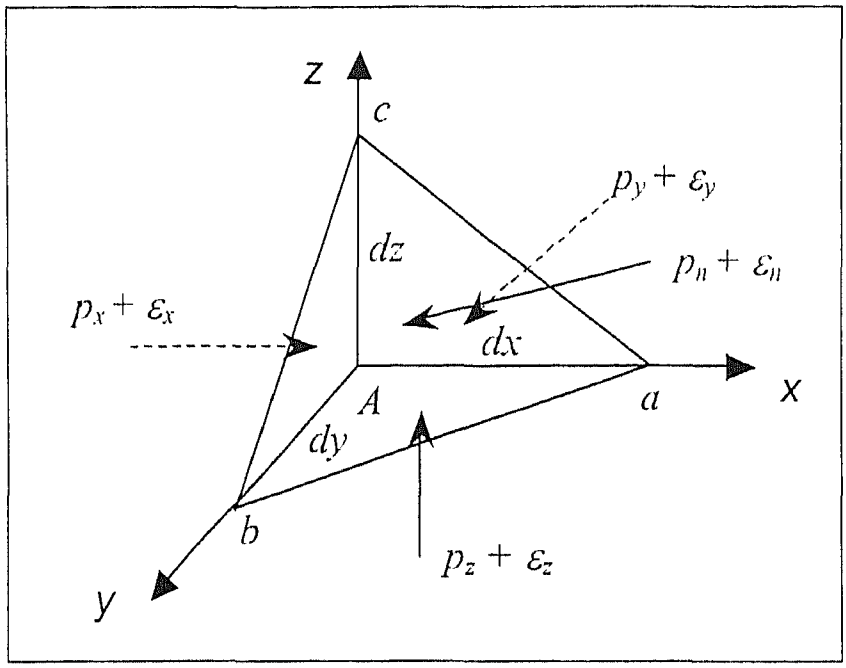


Рис. 1.2
Силы, действующие на площадку общего положения в покоящейся жидкости

Проектируя на ось x давление, действующее на наклонную плоскость abc, получим

$$-\left(p_n + \varepsilon_n\right) d\omega \cos\left(n, x\right), \tag{1.4}$$

где $d\omega$ – площадь грани abc;

n – внешняя нормаль.

Проекция объемных сил равна массе выделенного тетраэдра, умноженной на величину массовой силы X:

$$p\frac{1}{6}dx\,dy\,dz\,X\,. \tag{1.5}$$

Так как проекция этих сил на ось x при равновесии равна нулю, то

$$\left(p_x+\varepsilon_x\right)\frac{1}{2}dy\,dz-\left(p_n+\varepsilon_n\right)d\omega\cos\left(n,x\right)+$$

$$+p\frac{1}{6}dx\,dy\,dz\,X=0. \qquad (1.6)$$

В выражении (1.6) первые два члена есть бесконечно малые величины второго порядка, а третий член – бесконечно малая величина третьего порядка, которой можно в дальнейшем пренебречь. Кроме того, так как площадь aAc есть проекция площади abc на координатную плоскость yz, то справедливо равенство

$$\frac{1}{2}dy\,dz=d\omega\cos\left(n,x\right). \qquad (1.7)$$

Таким образом, сократив на $\frac{1}{2}dy\,dz$, из выражений (1.6) и (1.7) получим

$$\left(p_x+\varepsilon_x\right)-\left(p_n+\varepsilon_n\right)=0, \qquad (1.8)$$

или

$$p_x-p_n=\varepsilon_n-\varepsilon_x. \qquad (1.9)$$

При уменьшении размеров тетраэдра в пределе до нуля правая часть уравнения (1.9) будет стремиться к нулю, поэтому $p_x=p_n$. Аналогичным способом подобные равенства могут быть получены и для давлений p_y и p_z. Так как направление n наклонной площадки abc было выбрано совершенно произвольно, то действительно давление в точке покоящейся жидкости определяется только положением точки в пространстве ($p_x=p_y=p_z=p_n$) и не зависит от направления, что и требовалось доказать.

Следствием второго свойства является ***закон Паскаля***, который гласит, что давление, производимое на жидкость, передается внутри нее во все стороны (независимо от направления) с одинаковой силой. На этом законе основаны расчеты машин, работающих под гидростатическим давлением (гидравлические прессы, домкраты и др.).



ПАСКАЛЬ Блез
(1623 – 1662)

Французский математик, физик и философ. Родился в Клермон-Ферране. С детства проявил незаурядные математические способности: в 16 лет сформулировал одну из основных теорем проективной геометрии (названа впоследствии его именем).

Физические исследования ученого относятся в основном к гидростатике: им сформулирован закон (впоследствии назван в честь Б. Паскаля), установлен принцип действия гидравлического пресса. Б. Паскаль подтвердил опыт Э. Торричелли о существовании атмосферного давления, продемонстрировал упругость воздуха; открыл, что показания барометра зависят от влажности и температуры воздуха, поэтому его можно использовать для предсказания погоды. Изобрел счетную машину.

1.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости и их интегралы

Выделим вблизи некоторой точки A покоящейся жидкости элементарный параллелепипед (*рис. 1.3*). Будем считать, что давление в центре этого параллелепипеда равно p. Соста-

вим условия равновесия для выделенного параллелепипеда в проекции, например, на ось x.

Будем считать, что приращение давления на участке dx в направлении оси x равно dp, поэтому величины давлений на левую и правую грани параллелепипеда составят соответственно:

$$p_{\text{лев}} = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \quad \text{и} \quad p_{\text{прав}} = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\,. \tag{1.10}$$

Сила, действующая на параллелепипед в направлении оси x и обусловленная разностью давлений на рассматриваемых гранях, будет равна разности этих давлений, умноженной на площади соответствующих граней:

$$\begin{aligned}&\left(p_{\text{лев}} - p_{\text{прав}}\right)dydz = \\ &= \left[\left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right) - \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dydz = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Это выражение представляет собой проекцию всех сил, действующих на грани параллелепипеда, на ось x.

Проекция объемных сил на ось x:

$$\rho X\,dxdydz\,. \tag{1.12}$$

Сумма выражений (1.11) и (1.12) при равновесии должна быть равна нулю (как сумма всех сил, действующих на элементарный параллелепипед в направлении оси x), поэтому

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz + \rho X\,dxdydz = 0\,, \tag{1.13}$$

ИЛИ

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X=0. \qquad (1.14)$$

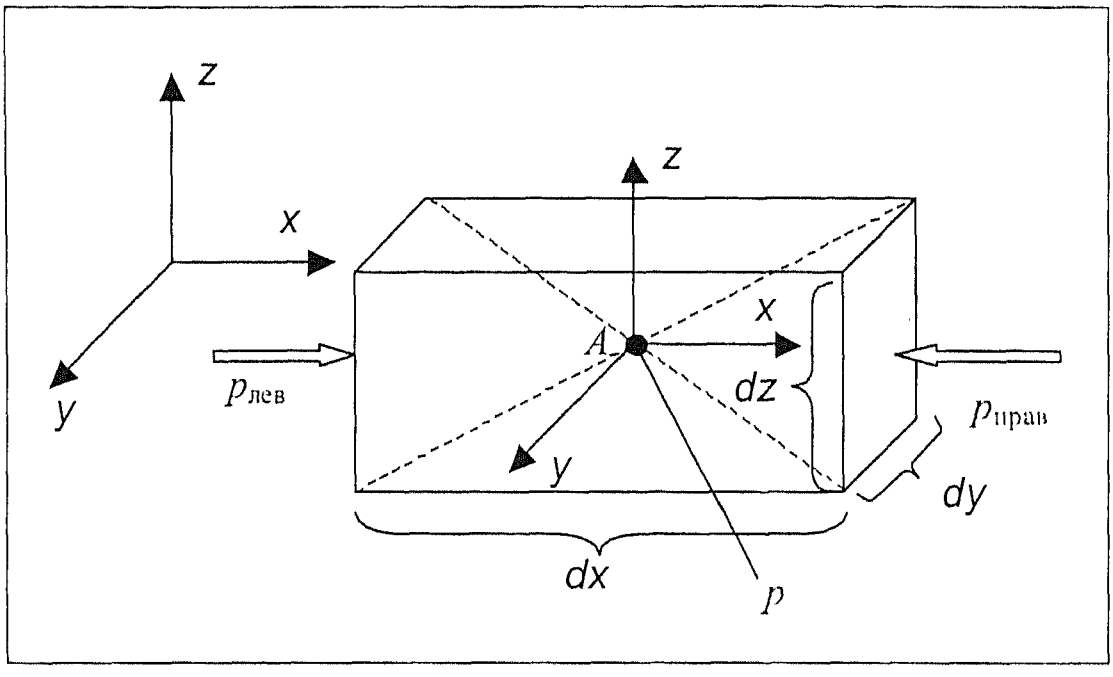


Рис. 1.3
Схема к выводу дифференциального уравнения равновесия жидкости

Точно так же можно получить аналогичные выражения для проекций на оси соответственно y и z:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho Y=0,\\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\rho Z=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1.15)$$

Переписывая эти уравнения в форме, предложенной Л. Эйлером, получим ***дифференциальные уравнения равновесия жидкости***:

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Умножим выражения (1.16) соответственно на dx, dy и dz, а затем сложим их:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0, \qquad (1.17)$$

или при $\dfrac{\partial p}{\partial x}dx + \dfrac{\partial p}{\partial y}dy + \dfrac{\partial p}{\partial z}dz = dp$ и $Xdx + Ydy + Zdz = \partial П$

$$dp = \rho d П. \qquad (1.18)$$

Ранее нами уже было установлено, что гидростатическое давление является лишь функцией координат x, y и z, поэтому левая часть выражения (1.18) является полным дифференциалом давления dp. Для выполнения равенства (1.18) необходимо, чтобы в правой его части стоял полный дифференциал, значит, должна существовать такая функция $П(x,y,z)$, частные производные которой по x, y, z соответственно равны X, Y, Z, т.е.

$$\frac{\partial П}{\partial x} = X; \qquad \frac{\partial П}{\partial y} = Y; \qquad \frac{\partial П}{\partial z} = Z. \qquad (1.19)$$

Следовательно, жидкость может находиться в равновесии лишь под действием потенциальных сил (сил, работа которых зависит только от начального и конечного положений

точек их приложения и не зависит ни от вида траектории, ни от закона движения точек).

В наиболее важном для нас частном случае – действия лишь силы тяжести – потенциал последней можно записать так:

$$\Pi(x, y, z) = -gz, \tag{1.20}$$

поскольку проекции объемных сил будут равны

$$X = 0; \qquad Y = 0; \qquad Z = -g. \tag{1.21}$$

Тогда уравнение (1.18) преобразуется в следующее:

$$dp = \rho g dz. \tag{1.22}$$

Интегрируя (1.18) для несжимаемой (ρ = const) жидкости, получим

$$p = \rho\Pi + C, \tag{1.23}$$

где C – постоянная интегрирования.

Для двух точек одного и того же объема однородной несжимаемой жидкости уравнение (1.22) запишется следующим образом:

$$p_1 - \rho\Pi_1 = p_2 - \rho\Pi_2. \tag{1.24}$$

Из выражения (1.24) несложно определить величину гидростатического давления в разных точках. Поверхность, давление во всех точках которой постоянно, называется поверхностью равного давления. Очевидно, таких поверхностей можно построить сколь угодно и их уравнение имеет вид

$$P(x, y, z) = \text{const}. \tag{1.25}$$

Отсюда с учетом (1.23) понятно, что поверхность равного давления является и эквипотенциальной поверхностью. При равновесии жидкости массовая сила в любой точке жидкости ориентирована по нормали к поверхности равного давления, проходящей через эту точку.

В рассматриваемом нами частном случае действия лишь сил тяжести интеграл уравнения (1.22) будет иметь такой вид (в предположении, что ось z направлена вертикально вверх):

$$p + \rho g z = C, \tag{1.26}$$

где C – произвольная постоянная.

Для двух точек одного и того же объема однородной несжимаемой жидкости уравнение (1.26) запишется следующим образом:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2. \tag{1.27}$$

Это и есть ***основное уравнение гидростатики.***

1.3. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики

Основное уравнение гидростатики можно переписать в таком виде:

$$p_0 + \rho g h = \text{const}. \tag{1.28}$$

Произведение $\rho g h$ называется ***весовым давлением*** $p_{\text{вес}}$, оно создается весом самой жидкости; p_0 есть не что иное, как внешнее давление. Таким образом, полное, или ***абсолютное, гидростатическое давление*** равно сумме внешнего и весового давлений:

$$p_{\text{абс}} = p_0 + p_{\text{вес}}. \tag{1.29}$$

На практике часто пользуются не полным гидростатическим давлением $p_{\text{абс}}$, а только избытком его над атмосферным давлением $p_{\text{атм}}$. Это избыточное, или ***манометрическое, давление*** $p_{\text{ман}}$ определяется так:

$$p_{\text{ман}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{атм}} = p_0 + \rho g h - p_{\text{атм}}. \qquad (1.30)$$

В частном случае, когда внешнее давление равно атмосферному, например в открытых сосудах или в водоемах, манометрическое давление в жидкости равно весовому.

Встречаются также случаи, когда полное гидростатическое давление меньше атмосферного. Тогда говорят, что в жидкости имеется ***вакуум*** (разрежение). Величина вакуума определяется по выражению

$$p_{\text{вак}} = \left| p_{\text{ман}} \right| \qquad \text{при} \quad p_{\text{ман}} < 0 \qquad (1.31)$$

и лежит в пределах от нуля до атмосферного давления.

На практике вакуум, равный атмосферному давлению, создать невозможно, так как при разрежении пространства над жидкостью в него неизбежно будут выделяться пары и растворенный в жидкости газ.

Вернемся к основному уравнению гидростатики [см. (1.26)] и обратимся к *рис. 1.4*. Из этого уравнения можно определить, что отношение гидростатического давления к удельному весу жидкости имеет размерность длины (высоты). Его называют ***пьезометрической высотой давления*** и используют для измерения давления.

Рассмотрим закрытый сосуд с жидкостью (*рис. 1.4*), находящийся на определенной высоте z над некоторой горизонтальной плоскостью сравнения 0–0. К стенкам сосуда присоединены две трубки. Трубка AA' – открытая, поверхность жидкости в ней подвержена атмосферному давлению $p_{\text{атм}}$. Трубка BB' – закрытая, из нее выкачан воздух, и давление на свободной поверхности жидкости в ней равно нулю. Давление на свободной поверхности жидкости в сосуде равно p_0, причем $p_0 > p_{\text{атм}}$. Тогда уровни жидкости в трубках поднимутся выше уровня жидкости в сосуде и в трубках установятся столбы жидкости высотой H_{pA} и H_{pB}. Определим эти высоты.

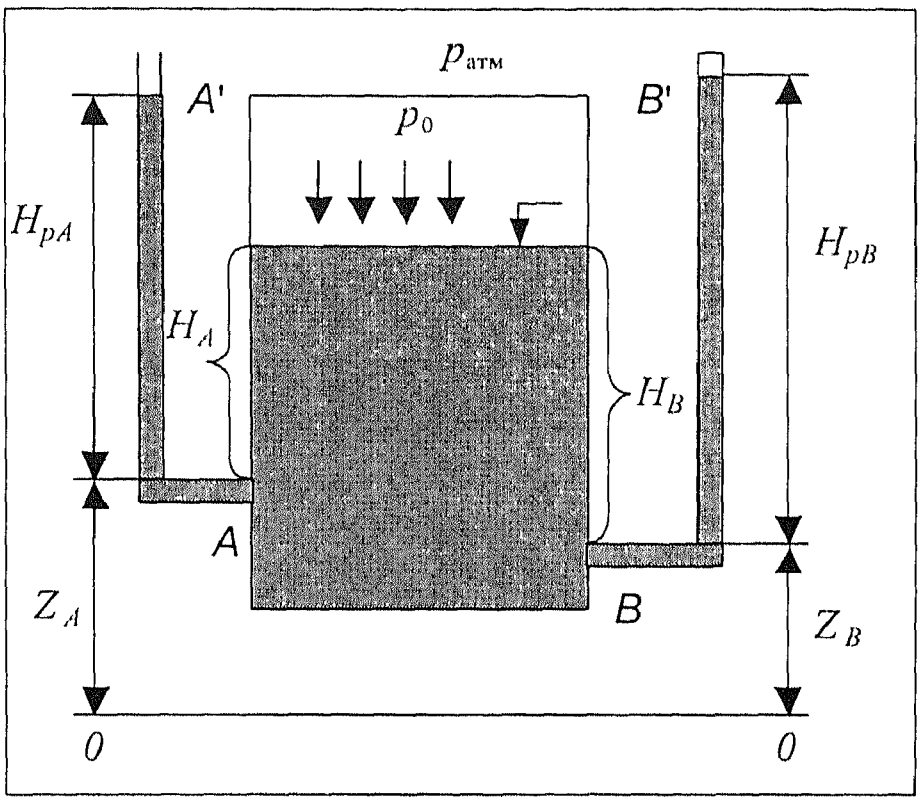


Рис. 1.4
Схема к определению понятий
«пьезометрическая высота» и «напор жидкости»

Давление в точке A можно выразить, определив давление в сосуде ($p_A = p_0 + \rho g H_A$) и в открытой трубке ($p_A = p_{атм} + \rho g H_{pA}$). Приравнивая правые части полученных выражений, определим высоту столба жидкости в открытой трубке AA':

$$H_{pA} = \frac{1}{\rho g}\left(p_0 + \rho g H_A - p_{атм}\right) = \frac{p_{ман}}{\rho g}. \qquad (1.32)$$

Таким образом, высота столба жидкости в открытой трубке является мерой манометрического давления жидкости в данной точке, она называется ***пьезометрической высотой манометрического давления***.

Рассуждая аналогично, определим высоту столба жидкости в закрытой трубке BB':

$$H_{pB} = \frac{1}{\rho g}\left(p_0 + \rho g H_B\right) = \frac{p_{\text{абс}}}{\rho g}. \qquad (1.33)$$

Таким образом, в закрытых трубках уровень жидкости будет выше, чем в открытых трубках, на величину $p_{\text{атм}}/(\rho g)$. Высота подъема жидкости в закрытой трубке называется ***пьезометрической высотой абсолютного давления***.

В общем случае можно записать:

$$H = \frac{p}{\rho g}, \qquad (1.34)$$

где p может быть любым давлением (абсолютным, избыточным или весовым), которому соответствует определенная пьезометрическая высота.

Пьезометрическая высота давления меняется в зависимости от глубины погружения точки под уровень свободной поверхности жидкости. Однако сумма пьезометрической высоты H и геометрической высоты Z данной точки над горизонтальной плоскостью сравнения 0–0 есть величина постоянная. Эта сумма называется ***напором*** h жидкости:

$$h = H + Z = \text{const}. \qquad (1.35)$$

Докажем это положение для пьезометрического напора в открытых трубках AA' и BB', присоединенных к сосуду в произвольных точках A и B аналогично тому, как показано на *рис. 1.4*. Для точки A пьезометрический напор $h_A = H_{pA} + Z_A$, а высота свободной поверхности жидкости над плоскостью сравнения $Z = H_A + Z_A$. Тогда

$$h_A = \frac{p_0 - p_{\text{атм}}}{\rho g} + Z\,. \qquad (1.36)$$

Очевидно, что все члены правой части этого уравнения есть постоянные величины.

Для точки B аналогично получаем

$$h_B = \frac{p_0 - p_{\text{атм}}}{\rho g} + Z\,, \qquad (1.37)$$

где $Z = H_B + Z_B$.

Правые части выражений (1.36) и (1.37) одинаковы, следовательно, $h_A = h_B$. Но поскольку точки A и B выбраны произвольно, то уравнение (1.35) справедливо для любой точки.

Постоянство пьезометрического напора является основным и достаточным признаком того, что данная жидкость находится в состоянии покоя.

Пьезометрический напор имеет не только геометрический, но и энергетический смысл, являясь мерой удельной потенциальной энергии жидкости.

Рассмотрим частицу жидкости в точке A (см. *рис. 1.4*). Пусть ее масса равна m. Если бы эта частица опустилась до плоскости сравнения 0–0 на расстояние Z_A, то она произвела бы работу mgZ_A, равную ее потенциальной энергии. Кроме того, под действием гидростатического давления p_0 эта частица может подняться на высоту $H_{pA} = p_A/(\rho g)$, тогда ее потенциальная энергия составит $mgp_A/\rho g$. Таким образом, полная потенциальная энергия частицы жидкости массой m будет равна $mgZ_A + mgh_{pA}$.

Чтобы определить удельную (приходящуюся на единицу силы тяжести) потенциальную энергию, необходимо пол-

ный запас энергии отнести к единице силы тяжести, т. е. разделить на mg:

$$\frac{mgZ_A + mg\dfrac{p_A}{\rho g}}{mg} = Z_A + H_{pA} = h_A . \qquad (1.38)$$

Таким образом, доказано, что пьезометрический напор является мерой удельной потенциальной энергии жидкости.

1.4. Определение давления жидкости при относительном равновесии

Равновесие жидкости относительно движущегося сосуда, в котором она заключена, называется ***относительным равновесием***.

Такое равновесие можно наблюдать, например, при равноускоренном (или равнозамедленном) движении сосуда с жидкостью, а также при равномерном вращении последнего.

Согласно основному уравнению гидростатики, гидростатическое давление в любой точке определяется глубиной погружения этой точки под уровнем свободной поверхности жидкости. Если сосуд с жидкостью неподвижен или движется равномерно и прямолинейно, то свободная поверхность жидкости является горизонтальной плоскостью и тогда давление во всех точках любого горизонтального сечения одинаково. В случае же равномерного вращения или неравномерного движения сосуда свободная поверхность находящейся в нем жидкости уже не будет горизонтальной и для определения давления в произвольной точке необходимо знать положение свободной поверхности в сосуде.

На основании уравнения (1.18) с учетом того факта, что на свободной поверхности жидкости изменение давления dp равно нулю, запишем

$$\rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) = 0\,. \qquad (1.39)$$

Рассмотрим теперь некоторые примеры использования уравнения (1.39) в частных задачах.

1.4.1. Движение сосуда по горизонтали с постоянным ускорением

Пусть движение сосуда с жидкостью происходит вдоль оси x с ускорением a (*рис. 1.5*). Тогда составляющие объемной силы вдоль соответствующих осей будут следующими:

$$X = a; \qquad Y = 0; \qquad Z = -g \qquad (1.40)$$

(ускорение a направлено вдоль оси x, а ускорение g – против положительного направления оси z). Подставив эти значения в уравнение (1.39), получим

$$adx - gdz = 0\,. \qquad (1.41)$$

Интегрируя, получим уравнение свободной поверхности жидкости (в предположении, что a = const и g = const):

$$ax - gz = \text{const}\,. \qquad (1.42)$$

Значение постоянной интегрирования определим из условия, что при $x = 0$ и $z = 0$ const = 0. Окончательно имеем

$$ax - gz = 0\,. \qquad (1.43)$$

Следовательно, при движении жидкости с постоянным ускорением ее свободная поверхность представляет собой

плоскость, наклоненную к горизонту под углом α, тангенс которого определяется соотношением $\operatorname{tg}\alpha = a/g$.

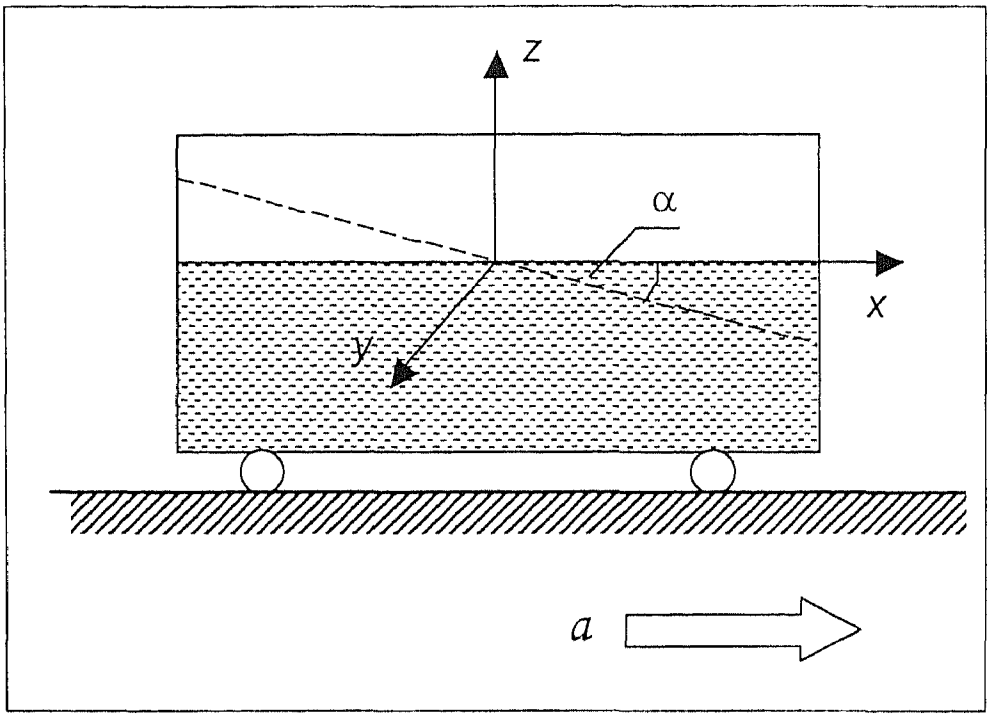


Рис. 1.5

Форма свободной поверхности в сосуде, движущемся горизонтально с постоянным ускорением

Таким образом, давление в любой точке жидкости в сосуде, движущемся с постоянным ускорением, можно определить по формуле

$$p = \rho g\left(H + \frac{a}{g}x\right), \qquad (1.44)$$

где H – глубина погружения точки с координатой x под свободной поверхностью жидкости в состоянии покоя.

1.4.2. Равномерное вращение сосуда вокруг вертикальной оси

При равномерном вращении сосуда вокруг вертикальной оси на жидкость в сосуде действуют две силы: сила тяжести mg и центробежная сила $m\omega^2 r$. Составляющие массовой силы вдоль соответствующих осей:

$$X = \omega^2 x; \qquad Y = \omega^2 y; \qquad Z = -g\,. \tag{1.45}$$

Подставив эти значения в уравнение (1.39), получим

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0\,. \tag{1.46}$$

Интегрируя, получим уравнение эквипотенциальной поверхности жидкости:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g z = \text{const}\,. \tag{1.47}$$

Значение постоянной интегрирования для свободной поверхности определим из условия, что при $x = 0$ и $y = 0$ должно быть и $z = 0$, следовательно, и $\text{const} = 0$ (*рис. 1.6*). Окончательно имеем (учтя, что $x^2 + y^2 = r^2$):

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}\,. \tag{1.48}$$

Следовательно, при равномерном вращении сосуда с жидкостью вокруг собственной оси свободная поверхность жидкости представляет собой параболоид вращения, высота которого определяется по формуле

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{2g}, \tag{1.49}$$

где R – радиус сосуда.

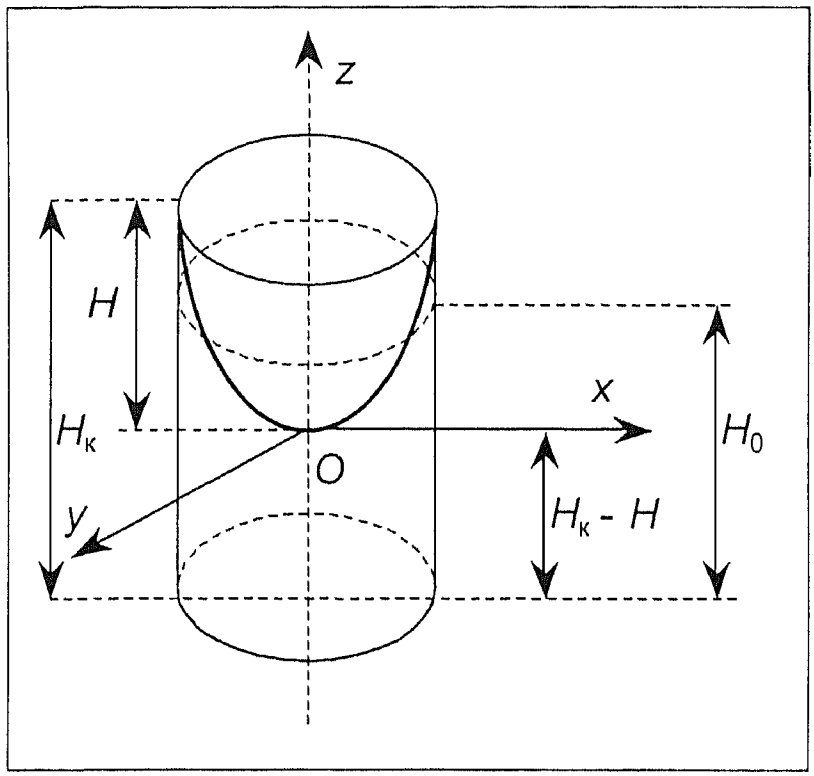


Рис. 1.6

Форма свободной поверхности жидкости
в равномерно вращающемся сосуде

Рассмотрим подробнее равновесие жидкости во вращающемся сосуде. Пусть H_0 – высота жидкости в сосуде в состоянии покоя; $H_к$ – высота жидкости у края сосуда при его вращении (см. *рис. 1.6*). Так как объемы жидкости в сосуде в состоянии его покоя и при его вращении должны быть одинаковыми, то можно составить условие равенства объемов:

$$\pi R^2 H_0 = \pi\left(R^2 H_к - \int_0^H r^2 dz \right) = \pi R^2 H_к - \frac{\pi R^2 H}{2}, \qquad (1.50)$$

или

$$H_0 = H_к - \frac{H}{2}. \qquad (1.51)$$

Следовательно, параболоид вращения делится исходным уровнем жидкости по высоте пополам.

Тогда расстояние h от вершины параболоида вращения до дна сосуда определяется по формуле

$$h = H_0 - \frac{H}{2} = H_0 - \frac{(\omega R)^2}{4g}. \qquad (1.52)$$

Очевидно, гидростатическое давление на дно вращающегося сосуда неодинаково в различных точках и может быть определено по формуле

$$p = \rho g\left[H_0 - \frac{(\omega R)^2}{4g} + \frac{(\omega r)^2}{2g}\right]. \qquad (1.53)$$

Формулы (1.52) – (1.53) используются при расчете, например, рабочих режимов в гидроциклонах и некоторых других устройствах, реализующих равномерное вращение сосуда с жидкостью вокруг некоторой вертикальной оси.

1.5. Равновесие газа

Уравнения гидромеханики можно использовать и при решении ряда аэромеханических задач, однако при этом необходимо учитывать, что плотность газа есть величина, определяемая его термодинамическими характеристиками (давлением и температурой). В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии столба газа.

При небольшой высоте столба газа его плотность можно считать практически постоянной и для определения давления газа можно использовать уравнение (1.26). Однако если высота столба газа достаточно велика (достигает нескольких сот метров или одного километра и более), величину плотности

газа уже нельзя считать постоянной по высоте и указанный способ определения давления газа окажется неверным. Для вывода уравнения равновесия тяжелого газа предположим, что газ идеальный, т.е. для него справедливо уравнение Клапейрона – Менделеева:

$$p\Omega = \frac{m}{\mu} RT, \tag{1.54}$$

где p – давление газа;

Ω – объем газа;

m/μ – число молей газа;

R – универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}314$ Дж/(моль·К);

T – абсолютная температура газа.

Тогда при условии постоянства температуры можно считать, что плотность есть линейная функция давления:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}, \tag{1.55}$$

где индекс «0» относится к условиям нормального атмосферного давления.

Подставив найденное соотношение в дифференциальное уравнение равновесия жидкости (1.22), получим для газа дифференциальное уравнение равновесия в следующем виде:

$$dp = -\frac{p\mu}{RT} g\, dz. \tag{1.56}$$

Разделяя переменные и интегрируя при $T = \text{const}$, получим

$$\int_0^z dz = z = \frac{p_0}{\rho_0 g} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right). \tag{1.57}$$

Разрешив это выражение относительно давления, получим:

$$p = p_0 \, e^{-\frac{z}{h_0}}, \qquad (1.58)$$

где $h_0 = \dfrac{p_0}{\rho_0 g}$. Это и есть уравнение равновесия газа.

Применив уравнение (1.57) к двум высотам (z_1 и z_2), получим ***барометрическую формулу Галлея***, служащую для измерения разности высот по заданным значениям давлений p_1 и p_2:

$$z_1 - z_2 = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right). \qquad (1.59)$$

ГАЛЛЕЙ Эдмунд
(1656 – 1742)



Английский астроном, геофизик и математик, член Лондонского королевского общества. Родился в Хаггерстоне. Учился в Оксфорде, с 1703 г. – профессор Оксфордского университета, с 1721 г. – директор Гринвичской обсерватории. Был близким другом Исаака Ньютона, впервые издал его труд «Математические начала натуральной философии».

Научные работы посвящены преимущественно астрономии (открыл первую периодическую комету, вековое ускорение Луны, собственное движение звезд) и геофизике (теория вариации магнитного поля Земли). В 1685 г. вывел барометрическую формулу, в которой, однако, не были учтены изменения температуры.

Как показывают многочисленные наблюдения, в нижних слоях атмосферы температура не является постоянной

величиной, а уменьшается при возрастании высоты приблизительно по линейному закону. Если считать, что $T = T_0 - \beta z$ (β – температурный градиент), то формула (1.58) преобразуется в так называемую формулу Бьёркнесса:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right) e^{-\frac{T_0 \rho_0 g}{\beta p_0}}. \qquad (1.60)$$

На практике часто вместо достаточно точной формулы Галлея используют приближенную формулу, получаемую из (1.59) разложением в ряд члена, содержащего логарифм:

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = 2\left[\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1}\right)^3 + \ldots\right]. \qquad (1.61)$$

Отбрасывая в полученном разложении все слагаемые, кроме первого, мы сделаем, таким образом, ошибку менее 0,1%, и выражение (1.59) превратится в формулу Лапласа – Бабине:

$$z_2 - z_1 = \frac{\overline{p} - p_1}{\overline{\gamma}}, \qquad (1.62)$$

где $\overline{p} = \frac{p_2 + p_1}{2}$ – среднее давление в двух измеряемых точках;

$\overline{\gamma} = \frac{\overline{p}}{RT}$ – средний удельный вес атмосферного воздуха.

1.6. Давление жидкости на плоские стенки

При строительстве резервуаров, плотин, подпорных стенок и других сооружений, имеющих плоские или криволинейные поверхности, необходимо знать давление жидкости на эти стенки. Найти полную ***силу давления*** – это значит определить ее величину, направление и точку приложения.

Рассмотрим плоскую стенку *ab* (*рис. 1.7*). Она наклонена к горизонту под некоторым углом θ и ее смоченная площадь равна ω. Разобьем площадку ω на элементарные площадки $d\omega$, в пределах которых давление будем считать неизменным, и выразим значение силы давления dP на элементарную площадку:

$$dP = p d\omega . \tag{1.63}$$

Очевидно, что вектор dP будет направлен со стороны жидкости по нормали к стенке. Полная сила давления равна сумме сил давления на элементарные площадки и определяется как интеграл уравнения (1.63):

$$P_{\text{абс}} = \int_{\omega} (p_0 + \rho g h)\, d\omega = p_0 \omega + \int_{\omega} \rho g h\, d\omega . \tag{1.64}$$

Из *рис. 1.7* видно, что расстояние L от свободной поверхности жидкости до элементарной площадки $d\omega$ выражается через глубину погружения этой площадки h следующим образом: $L \sin\theta = h$. Тогда стоящий в правой части выражения (1.64) интеграл можно записать так:

$$\int_{\omega} \rho g h\, d\omega = \rho g \sin\theta \int_{\omega} L\, d\omega = \rho g I_y , \tag{1.65}$$

где I_y – статический момент площади ω относительно оси Y (линии, идущей вдоль свободной поверхности жидкости и перпендикулярной оси x, т.е. плоскости *рис. 1.7*), который равен произведению площади ω на плечо момента:

$$I_y = \int_{\omega} H d\omega = H_т \omega , \qquad (1.66)$$

а $H_т$ – глубина погружения центра тяжести смоченной площади.

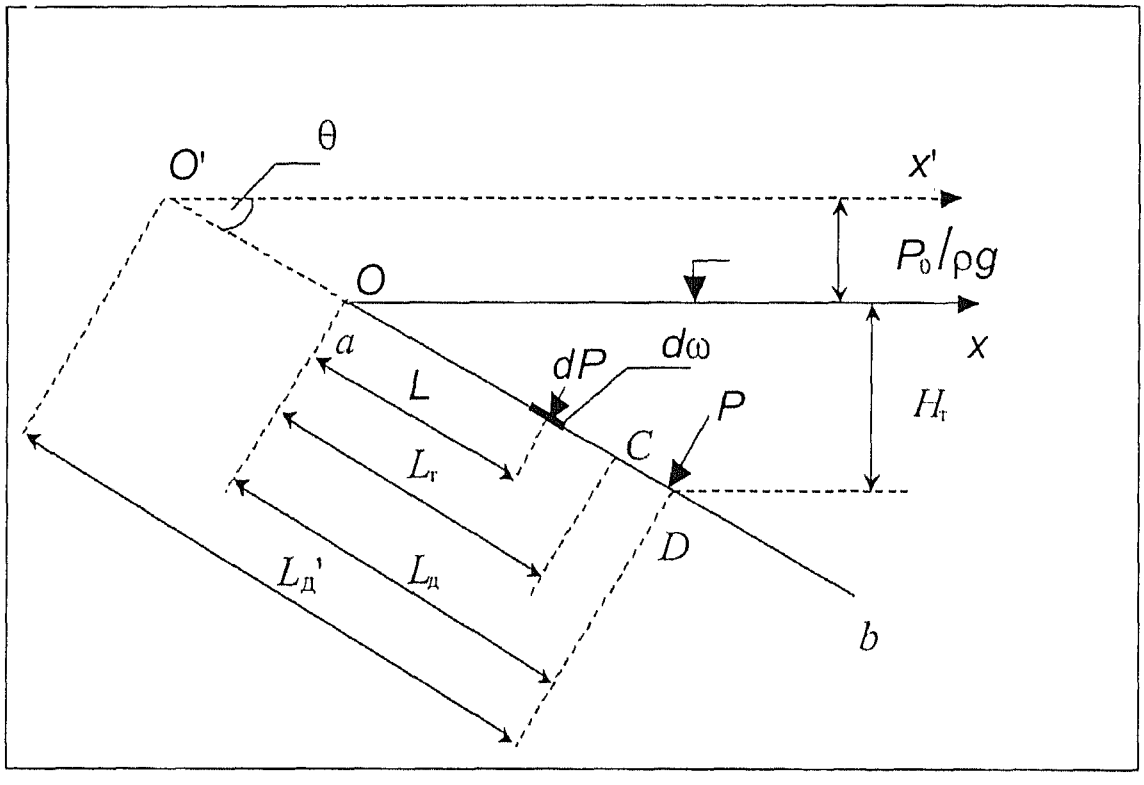


Рис. 1.7
К расчету силы давления жидкости на плоские стенки

Тогда выражение (1.64) примет такой вид:

$$P_{абс} = \left(p_0 + \rho g H_т\right)\omega . \qquad (1.67)$$

Точка приложения силы $P_{абс}$ называется центром давления. Определим координату центра давления $L'_д$.

Для каждой элементарной площадки $d\omega$ и соответствующей ей силы dP составим уравнение моментов относительно оси y. Момент силы dP (координата L' отсчитывается от точки $0'$):

$$dM_{P_y} = \rho g L' H' d\omega, \tag{1.68}$$

а момент силы давления $P_{абс}$:

$$M_{P_{абс\,y}} = P_{абс} \cdot L'_{д} = \rho\, g\, H_{т} L'_{д}. \tag{1.69}$$

Тогда из равенства моментов

$$\int_{\omega} dM_{P_y} = M_{P_{абс\,y}} \tag{1.70}$$

следует, что

$$L'_{д} = \frac{\rho\, g \sin\theta \int_{\omega} (L')^2 d\omega}{\rho g L'_{т} \omega} = \frac{J_y}{L'_{т}\omega}, \tag{1.71}$$

где J_y представляет собой момент инерции площади ω относительно оси Y. Но так как известно, что момент инерции некоторой площади ω относительно заданной оси равен моменту инерции этой же площади относительно центральной оси (т. е. проходящей через центр тяжести) и параллельной заданной оси плюс произведение площади ω на квадрат расстояния между этими осями, то

$$J_y = J_0 + (L'_{т})^2 \omega. \tag{1.72}$$

Таким образом, имеем

$$L'_{д} = \frac{J_0}{L'_{т}\omega} + L'_{т} = \varepsilon + L'_{т}, \tag{1.73}$$

где ε – расстояние между центром давления и горизонтальной осью, проходящей через центр тяжести площади ω, называемое ***эксцентриситетом***,

$$\varepsilon = \frac{J_0}{L'_т \omega}.$$

Так как эксцентриситет – величина неотрицательная, то центр давления лежит всегда более глубоко, чем центр тяжести площади ω. Очевидно, что эксцентриситет равен нулю и центры давления и тяжести совпадают только в следующих двух случаях: когда площадка ω расположена бесконечно глубоко ($H_д \to \infty$) или когда площадка ω расположена горизонтально.

По аналогии с предыдущими рассуждениями для координаты $X'_д$ можно записать:

$$X'_д = \frac{\int_\omega ZXd\omega}{L'_т d\omega}. \qquad (1.74)$$

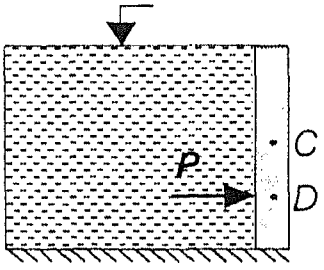
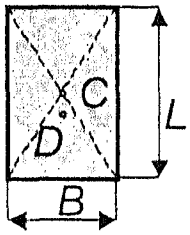
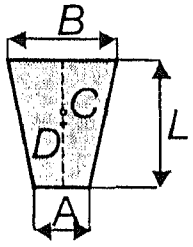
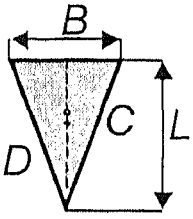
На практике, как правило, определяются центры давления для площадок, имеющих правильную форму, что существенно упрощает расчеты.

В *табл. 1.1* приведены координаты центров тяжести и давления для некоторых простых плоских фигур.

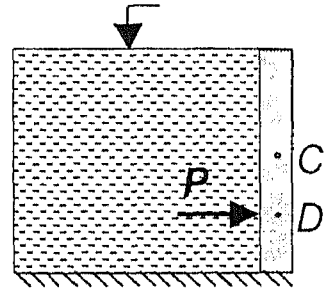
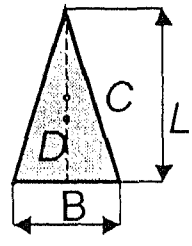
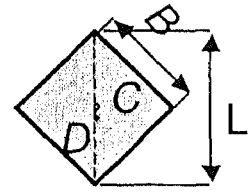
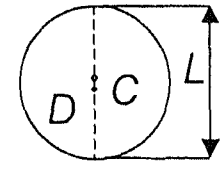
Следует отметить, что в соответствии с формулой (1.67) в выражение для расчета силы давления на дно открытых сосудов не входят ни объем, ни форма сосуда, поэтому в самых разных сосудах, имеющих одинаковую площадь дна, при равном уровне жидкости сила давления на дно будет одинаковой. Это свойство жидкости, на первый взгляд противоречащее обычным представлениям, называется ***гидростатическим парадоксом***.

Таблица 1.1

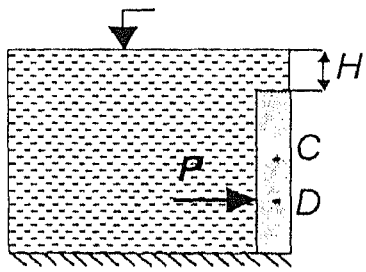
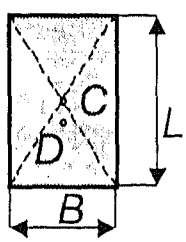
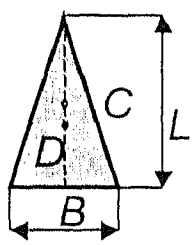
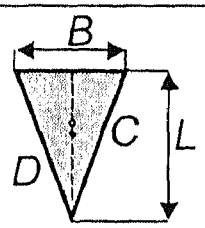
Координаты центров тяжести и давления для некоторых плоских фигур

Схема расположения площадки			
Форма площадки			
Центральный момент инерции J_0 площадки относительно оси X	$\frac{BL^3}{12}$	$\frac{L^3}{36}\left(A+B+\frac{2BA}{B+A}\right)$	$\frac{BL^3}{36}$
Координата центра тяжести площадки C	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{3}\frac{B+2A}{B+A}$	$\frac{L}{3}$
Координата центра давления D	$\frac{2}{3}L$	$\frac{L}{2}\frac{B+3A}{B+2A}$	$\frac{L}{2}$
Сила давления жидкости на плоскую площадку P	$\frac{\rho g B L^2}{2}$	$\frac{\rho g L^2}{6}(B+2A)$	$\frac{\rho g B L^2}{6}$

Продолжение табл. 1.1

Схема расположения площадки			
Форма площадки			
Центральный момент инерции J_0 площадки относительно оси X	$\frac{BL^3}{36}$	$\frac{B^4}{12}$	$\frac{\pi L^4}{64}$
Координата центра тяжести площадки C	$\frac{2}{3}L$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$
Координата центра давления D	$\frac{3}{4}L$	$\frac{7}{2}L$	$\frac{5}{8}L$
Сила давления жидкости на плоскую площадку P	$\frac{\rho g B L^3}{3}$	$\frac{\rho g L B^2}{2}$	$\frac{\rho g \pi d^3}{8}$

Окончание табл. 1.1

Схема расположения площадки			
Форма площадки			
Центральный момент инерции J_0 площадки относительно оси X	$\frac{BL^3}{12}$	$\frac{BL^3}{36}$	$\frac{BL^3}{36}$
Координата центра тяжести площадки C	$H+\frac{L}{2}$	$H+\frac{2}{3}L$	$H+\frac{L}{3}$
Координата центра давления D	$H+\frac{L}{3}\frac{2L+3H}{L+2H}$	$H+\frac{L}{2}\frac{3L+4H}{2L+3H}$	$H+\frac{L}{2}\frac{L+2H}{L+3H}$
Сила давления жидкости на плоскую площадку P	$\rho gBL\left(H+\frac{L}{2}\right)$	$\rho gBL\left(H+\frac{2L}{3}\right)$	$\rho gBL\left(H+\frac{L}{3}\right)$

1.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности

Расположим координатные оси x и y в плоскости свободной поверхности покоящейся жидкости, а ось z направим вертикально вниз (*рис. 1.8*). Рассмотрим равновесие расположенной внутри этой жидкости некоторой невесомой абсолютно тонкой пластинки ω. Очевидно, что силы давления на верхнюю и нижнюю стороны этой пластинки должны быть равны между собой ($R = R'$).

Сила R является равнодействующей элементарных сил dR, которые в общем случае не параллельны друг другу.

Чтобы определить силу R, разложим элементарные силы dR на составляющие по координатным осям:

$$\begin{cases} dR_x = \rho g H \cos\alpha, \\ dR_y = \rho g H \cos\beta, \\ dR_z = \rho g H \cos\gamma, \end{cases} \tag{1.75}$$

где углы α, β и γ характеризуют положение элементарной площадки $d\omega$. Суммируя проекции элементарных сил, определим соответствующие проекции искомой равнодействующей R:

$$\begin{cases} R_x = \sum dR_x = \int\limits_{\omega} \rho g H \cos\alpha \, d\omega, \\ R_y = \sum dR_y = \int\limits_{\omega} \rho g H \cos\beta \, d\omega, \\ R_z = \sum dR_z = \int\limits_{\omega} \rho g H \cos\gamma \, d\omega. \end{cases} \tag{1.76}$$

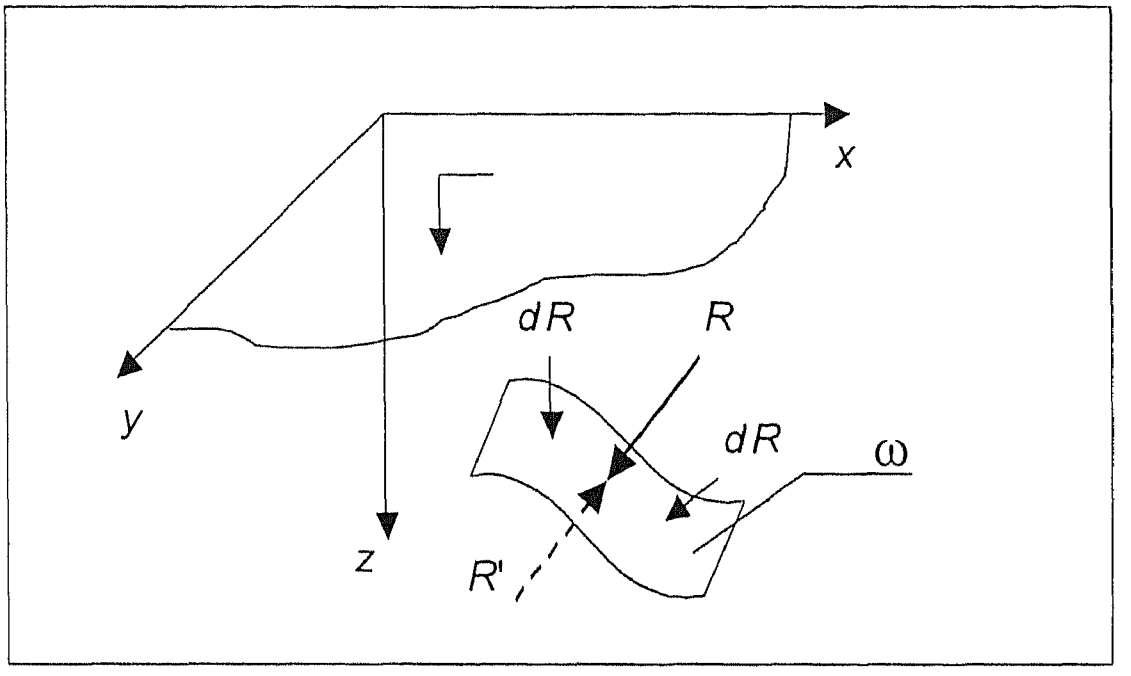


Рис. 1.8
К определению силы давления на криволинейную поверхность

Тогда искомая сила R определится по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \,. \qquad (1.77)$$

Рассмотрим некоторые важные частные случаи применения полученного аналитического решения к практическим задачам.

1.7.1. Цилиндрическая поверхность с горизонтальной образующей

Будем рассматривать цилиндрические поверхности кругового очертания как наиболее часто встречающиеся в практике. Для этих поверхностей элементарные силы давления, будучи нормальными к элементарным площадкам, должны быть на-

правлены вдоль радиусов и, следовательно, пересекутся в центре сферы или круга (поперечного сечения цилиндра).

Пусть оси x, y и z направлены так, как показано на *рис. 1.9*, и пусть равнодействующая R элементарных сил избыточного давления dR направлена под углом α к горизонту.

Определим горизонтальную и вертикальную составляющие силы R.

Для каждой элементарной силы dR ее составляющие будут равны

$$\begin{cases} dR_x = dR\cos\alpha = \rho g H d\omega\cos\alpha = \rho g H d\omega_x, \\ dR_z = dR\sin\alpha = \rho g H d\omega\sin\alpha = \rho g H d\omega_z, \end{cases} \tag{1.78}$$

где $d\omega_x$ и $d\omega_z$ – проекции элементарной площадки $d\omega$ на плоскости, перпендикулярные осям x и z соответственно.

Проинтегрировав (1.78), получим для горизонтальной составляющей силы R:

$$R_x = \int\limits_{\omega_x} \rho g H d\omega = \rho g H_т \omega_x, \tag{1.79}$$

где $H_т$ – расстояние от центра тяжести проекции ω_x до пьезометрической поверхности;

ω_x – проекция всей цилиндрической поверхности ω на плоскость, перпендикулярную оси x.

Для вертикальной составляющей силы R получим

$$R_z = \rho g \int\limits_{\omega_z} H d\omega = \rho g \Omega_д, \tag{1.80}$$

где величина $\Omega_д$ представляет собой объем призмы, ограниченной снизу цилиндрической поверхностью, а сверху

– проекцией этой поверхности на пьезометрическую плоскость, называемой ***телом давления.***

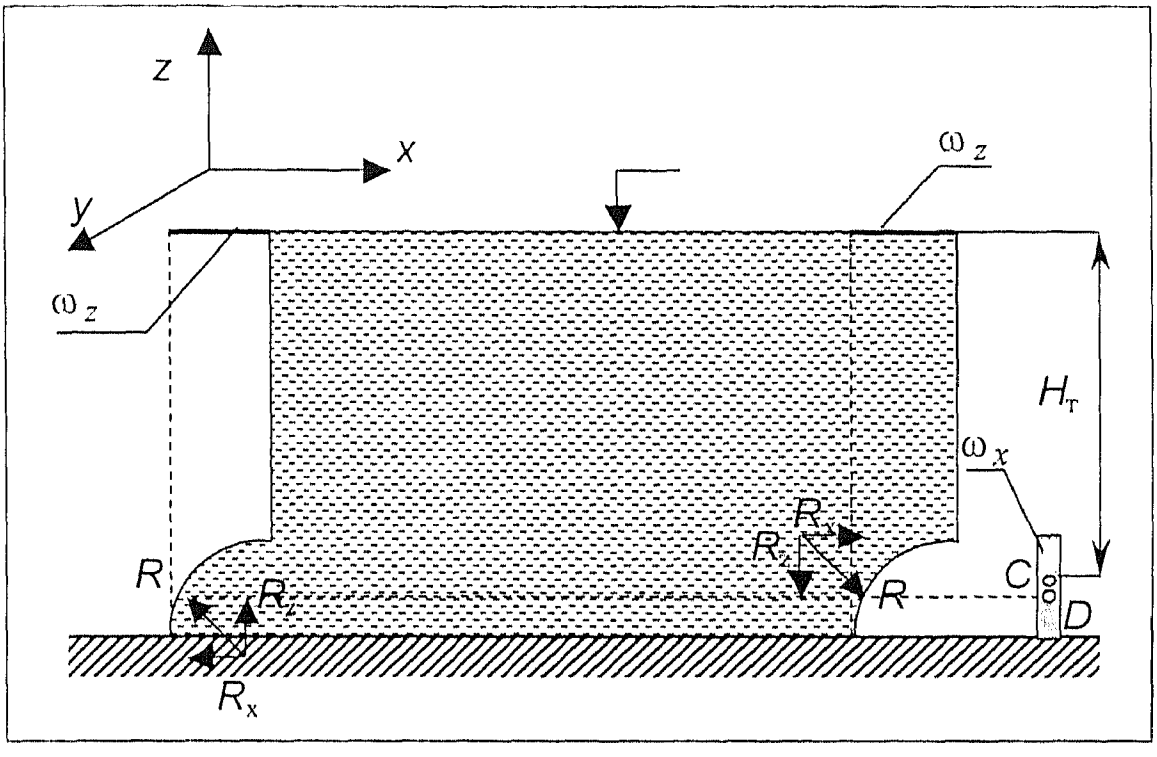


Рис. 1.9

К расчету силы давления на цилиндрическую поверхность с горизонтальной образующей

Горизонтальная составляющая R_x проходит через центр давления проекции ω_x, а вертикальная составляющая R_z – через центр тяжести тела давления; причем для левой стенки (см. *рис. 1.9*) вертикальная составляющая направлена вверх, а для правой стенки – вниз. Тогда значение силы давления на цилиндрическую поверхность с горизонтальной образующей можно с учетом (1.79) и (1.80) вычислить следующим образом:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2}\ . \qquad (1.81)$$

1.7.2. Цилиндрическая поверхность с вертикальной образующей

Рассуждения, аналогичные проведенным в подразд. 1.7.1, позволяют сразу записать результат (*рис. 1.10*):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\ ; \tag{1.82}$$

$$\begin{cases} R_x = \rho g H_т \omega_x\ , \\ R_y = \rho g H_т \omega_y\ , \end{cases} \tag{1.83}$$

где ω_x и ω_y – проекции цилиндрической поверхности ω на плоскости, перпендикулярные осям x и y соответственно;

$H_т$ – расстояние от пьезометрической плоскости до центров тяжести проекций ω_x и ω_y.

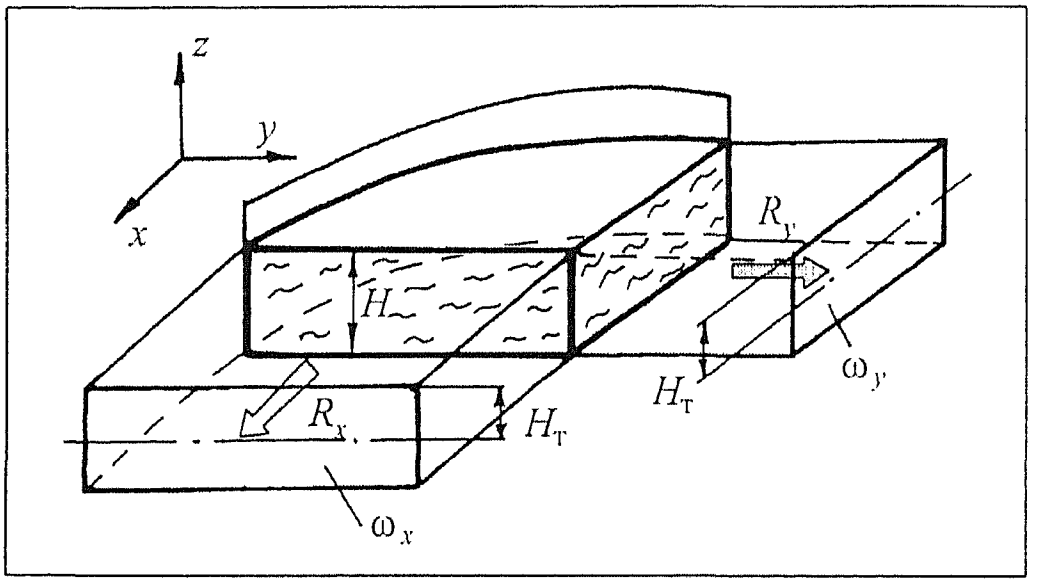


Рис. 1.10

К расчету силы давления на цилиндрическую поверхность с вертикальной образующей

1.7.3. Вертикально расположенная труба круглого поперечного сечения, заполненная покоящейся жидкостью под постоянным давлением

Горизонтальную силу R_x, растягивающую цилиндрическую трубу, заполненную жидкостью под давлением p, можно определить по формуле

$$R_x(z) = \frac{1}{2} p(z)\, z\, D, \tag{1.84}$$

где $p(z)$ – зависимость величины давления внутри трубы от вертикальной координаты z;

D – диаметр трубы.

Окружные растягивающие напряжения σ в стенках трубы рассчитываются по формуле Мариотта:

$$\sigma = \frac{p(z)\, D}{2\delta}, \tag{1.85}$$

где δ – толщина стенки трубы.

Очевидно, по этой формуле можно рассчитать максимальную высоту наполнения вертикальной трубы жидкостью, при которой не происходит разрыва трубы.

1.7.4. Колено трубы, изогнутой под некоторым углом и заполненной покоящейся жидкостью под постоянным давлением

При определении сил давления на колено трубы диаметром D, изогнутое под углом β, будем учитывать лишь

давление p и пренебрегать весом заключенной в трубе жидкости. Искомая сила R может быть определена как равнодействующая сил давлений R_1 и R_2, действующих на правую и левую части колена. Так как

$$R_1 = R_2 = p\frac{\pi d^2}{4}, \tag{1.86}$$

то

$$R = 2R_1 \sin\frac{\beta}{2} = p\frac{\pi d^2}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \tag{1.87}$$

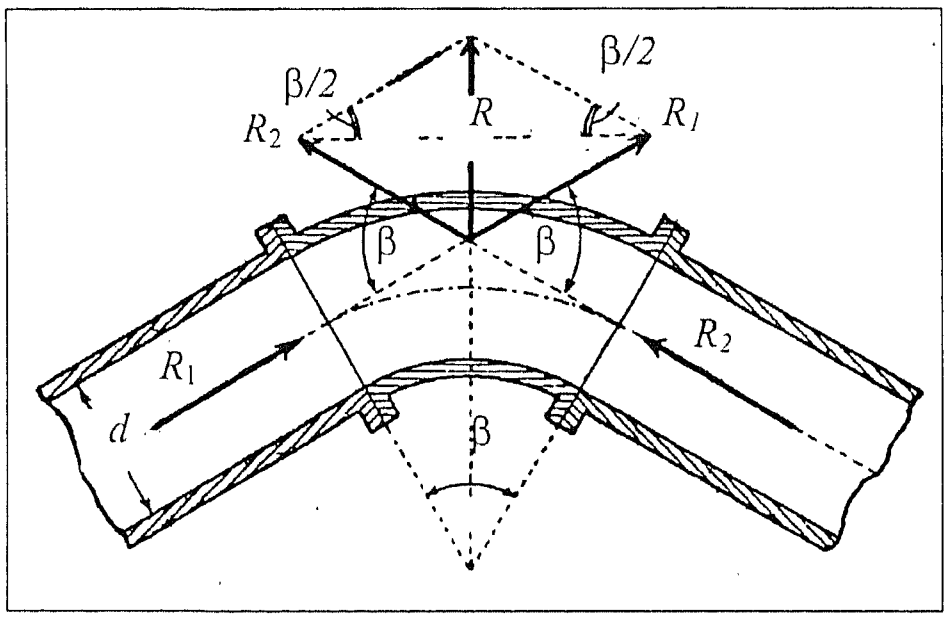


Рис. 1.11
К определению силы давления, действующей на колено трубы

1.8. Закон Архимеда. Плавание тел

Рассмотрим некоторое тело, погруженное в воду. Если разбить все это тело на ряд элементарных цилиндров с поперечным сечением $d\omega$ (*рис. 1.12*), то нетрудно убедиться в том, что на каждый из таких цилиндров действует подъемная сила dF, равная весу жидкости в объеме цилиндра.

Равнодействующая этих элементарных сил равна полной подъемной силе F, приложенной в центре давления тела D и направленной вертикально вверх.

Очевидно, что в общем случае центр давления тела D и центр его тяжести C не совпадают.

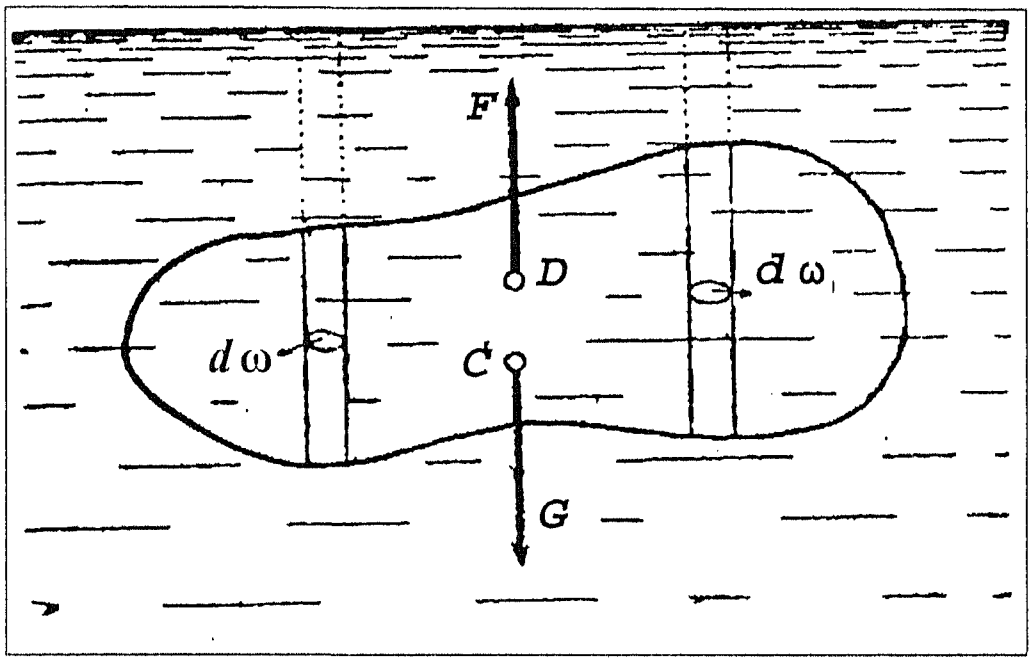


Рис. 1.12
К выводу закона Архимеда

Таким образом, всякое тело, погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость (***закон Архимеда***).



АРХИМЕД
(287–212 до н.э.)

Выдающийся древнегреческий ученый, математик и физик. Полученные у своего отца Фидия познания в области математики и астрономии углубил и расширил в Александрии – центре науки и культуры тогдашнего мира. Там он сблизился с учениками Эвклида и директором знаменитой александрийской библиотеки Эратосфеном, с которыми потом поддерживал оживленную переписку.

В историю науки вошел как автор открытия, называемого законом Архимеда (изложенным в работе «О плавающих телах»). Легенда приписывает ему спуск на воду с помощью системы блоков громадного корабля, а также изобретение огромных кранов и других военных машин, топивших вражеские корабли. Погиб в родных Сиракузах при штурме города римлянами.

Сопоставляя между собой силу F и вес тела G, можно установить следующее:

при $F < G$ тело тонет;

при $F = G$ тело плавает в погруженном состоянии;

при $F > G$ тело всплывает.

Необходимым условием равновесия плавающего тела является равенство $F = G$. Однако, как видно из *рис. 1.13*, это условие – необходимое, но не достаточное: при наличии опрокидывающего момента тело будет вращаться. Достаточным условием равновесия является вертикальность линии AA', соединяющей точки приложения сил F и G, т. е. центр тяжести C и центр давления D. При этом возможны следующие варианты равновесия:

- если центр тяжести C тела лежит ниже центра давления D, то равновесие является устойчивым;

- если центр тяжести C тела лежит выше центра давления D, то равновесие является неустойчивым;
- если центр тяжести C тела совпадает с центром давления D, то равновесие является безразличным (например, плавающий на глубине шар).

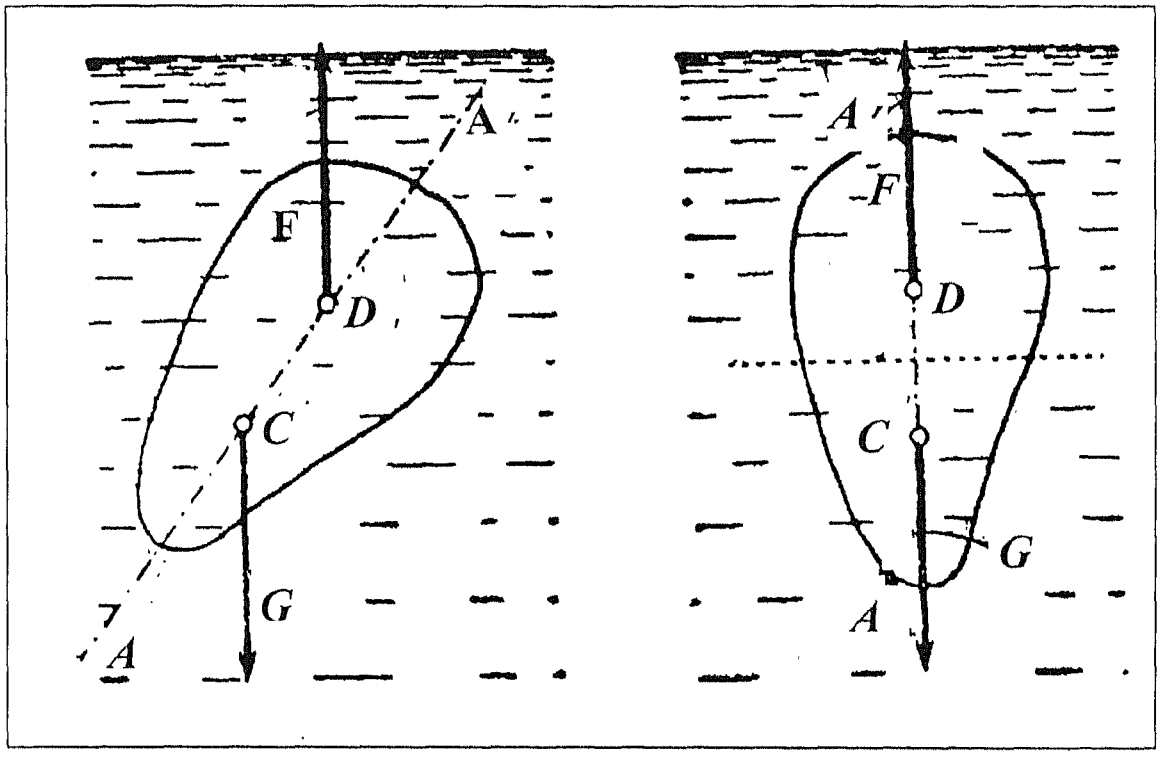


Рис. 1.13

К определению условий плавания тел и их равновесия в воде

1.9. Задачи

Задача 1.1

Избыточное давление, измеренное в море на глубине $h = 300$ м, равно $p = 3{,}1$ МПа. Определить плотность ρ морской воды.

Решение

Избыточное гидростатическое давление $p = \rho g h$, откуда искомая плотность

$$\rho = \frac{p}{gh} = \frac{3{,}1 \cdot 10^6}{9{,}81 \cdot 300} = 1053 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho = 1053$ кг/м^3.

Задача 1.2

Два сообщающихся сосуда диаметрами $D_1 = 0{,}10$ м и $D_2 = 0{,}15$ м закрыты сверху поршнями. На поршень первого сосуда поставлен груз весом $G_1 = 200$ Н, на поршень второго – груз весом $G_2 = 300$ Н. Определить разность высот поршней H.

Решение

Определим величины давлений под первым и вторым поршнями:

$$P_1 = \frac{4G_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 200}{3{,}14 \cdot 0{,}10^2} = 25{,}48 \text{ кПа};$$

$$P_2 = \frac{4G_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 300}{3{,}14 \cdot 0{,}15^2} = 16{,}99 \text{ кПа}.$$

Тогда $P_1 = P_2 + \rho g H$, откуда

$$H = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{(25{,}48 - 16{,}99)10^3}{1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}87 \text{ м}.$$

Ответ: $H = 0{,}87$ м.

Задача 1.3

Определить максимально возможный объем песка $\Omega_п$ плотностью $\rho = 2400$ кг/м^3, который сможет перевозить баржа шириной $B = 5$ м и длиной $L = 20$ м при осадке $H = 1{,}5$ м. Собственный вес баржи составляет $G = 250$ кН.

Решение

По закону Архимеда вес баржи с грузом при максимальном погружении равен выталкивающей силе, поэтому вес песка

$$G_п = \rho g HBL - G = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 \cdot 5 \cdot 20 - 250000 =$$
$$= 1{,}22 \text{ МН}.$$

Тогда искомый максимальный объем песка

$$\Omega_п = \frac{G_п}{\rho_п g} = \frac{1{,}22 \cdot 10^6}{2400 \cdot 9{,}81} = 51{,}9 \text{ м}^3.$$

Ответ: $\Omega_п = 51{,}9$ м^3.

Задача 1.4

Для предохранения баков от переполнения применяется автоматический запорный клапан – поплавок диаметром D и весом G, соединенный с пробкой диаметром d, установленной в дне бака и открывающейся при заполнении бака более чем на $H = 5$ м (*рис. 1.14*). Определить величину абсолютного гидростатического давления X под пробкой в момент срабатывания клапана (т. е. открытия пробки), если известно, что $D = 0{,}55$ м, $d = 0{,}25$ м, а глубина погружения поплавка $h = 0{,}3$ м. Принять плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м^3 и величину атмосферного давления $P_{атм} = 0{,}1$ МПа. Пробку считать невесомой.

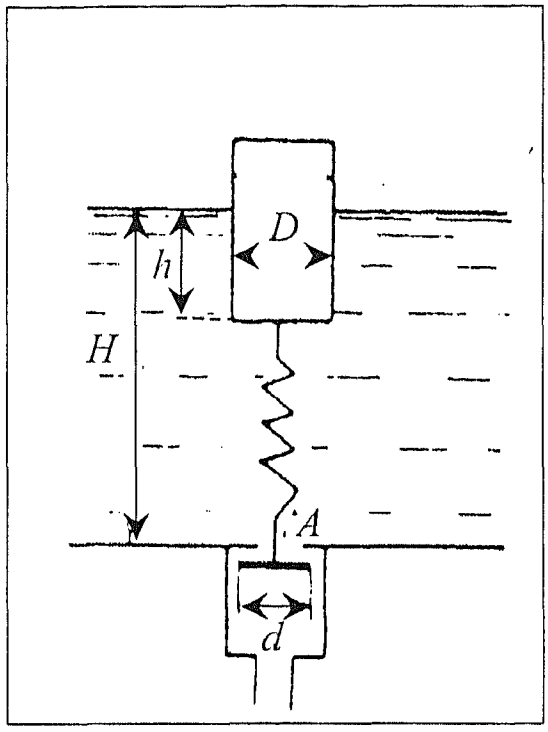


Рис. 1.14
Автоматический запорный клапан

Решение

Очевидно, что в момент срабатывания клапана должно иметь место равенство сил, действующих на него в направлении снизу вверх и сверху вниз. Снизу вверх действуют выталкивающая сила $\rho g h \pi D^2/4$ и сила давления под пробкой $X \cdot S$ ($S = \pi d^2/4$ – площадь сечения поплавка), а в противоположном направлении – вес поплавка и сила давления на пробку, обусловленная атмосферным давлением $P_{атм}$ и весом вышележащей толщи воды $\rho g H$. Тогда

$$\left(P_{атм} + \rho g H\right)\frac{\pi d^2}{4} + G = \rho g H \frac{\pi D^2}{4} + X\frac{\pi d^2}{4},$$

откуда

$$X = \frac{\left(P_{\text{атм}} + \rho g H\right)\dfrac{\pi d^2}{4} + G - \rho g H \dfrac{\pi D^2}{4}}{\dfrac{\pi d^2}{4}} =$$

$$= P_{\text{атм}} + \rho g H + \frac{4G}{\pi d^2} - \rho g H \left(\frac{D}{d}\right)^2 =$$

$$= 10^5 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 100}{3{,}14 \cdot 0{,}25^2} -$$

$$-1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3\left(\frac{0{,}55}{0{,}25}\right)^2 = 136\,844 \text{ Па} \approx 0{,}137 \text{ МПа}.$$

Ответ: $X \approx 0{,}137$ МПа.

Контрольные вопросы

1. Что такое гидростатическое давление? В каких единицах оно измеряется и как направлено?
2. Каковы свойства гидростатического давления? Сформулируйте закон Паскаля.
3. Каковы условия равновесия жидкости? Сформулируйте условия устойчивого равновесного состояния газа.
4. Каково уравнение поверхности равного давления?
5. Может ли быть вакуумметрическое давление больше атмосферного? меньше нуля?
6. Какая из пьезометрических высот больше: манометрического или абсолютного давления?
7. О чем говорит постоянство пьезометрического напора?
8. Справедливо ли основное уравнение гидростатики в различных случаях относительного покоя жидкости?

9. Какую форму имеют поверхности равного давления в равномерно вращающемся сосуде с жидкостью?
10. Что такое центр давления и как он определяется?
11. Что такое эксцентриситет?
12. В каких случаях центры давления и тяжести совпадают?
13. В чем заключается гидростатический парадокс?
14. Как определяется объем тела давления?
15. В чем заключается закон Архимеда?
16. Сформулируйте условия равновесия при плавании тел. Какие виды равновесия вам известны?

Глава 2

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

2.1. Описание движения жидкости по Лагранжу и Эйлеру

В кинематике жидкостей и газов исследуется положение частиц жидкости и газа в пространстве в зависимости от времени без выяснения причин возникновения движения. Существует два метода описания движения частиц жидкости и газа: ***метод Лагранжа*** – изучает движение в пространстве каждой отдельной частицы, и ***метод Эйлера*** – изучает характеристики движения (компоненты скорости, ускорения и др.) в каждой точке пространства в любой момент времени, а поведением каждой отдельной частицы не занимается.

ЛАГРАНЖ Жозеф Луи
(1736 – 1813)



Выдающийся французский математик и механик, член Туринской и Берлинской академий наук, основатель Туринской академии. Родился в Турине. Там же закончил артиллерийское училище и еще до окончания начал преподавать в нем математику. С 1766 по 1787 г. был президентом Берлинской АН.

Получил важные результаты в диофантовом анализе, теории алгебраических уравнений, вариационном исчислении, аналитической и небесной механике, теории колебаний, интегрировании уравнений с частными производными, сферической астрономии, картографии и т.д. В 1788 г. опубликовал «Аналитическую механику», в которой изложил классические положения механики в виде общих дифференциальных уравнений движения произвольных материальных систем. Сочинения Лагранжа по математике, механике и астрономии составляют 14 томов. Совместно с П. Лапласом и Г. Монжем разработал метрическую систему мер.

2.1.1. Метод Лагранжа

При изучении движения по методу Лагранжа должна быть задана следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x = f_1(x_0, y_0, z_0, t), \\ y = f_2(x_0, y_0, z_0, t), \\ z = f_3(x_0, y_0, z_0, t), \end{cases} \tag{2.1}$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты рассматриваемой частицы в момент времени $t = t_0$ (переменные x_0, y_0, z_0 и t называют ***переменными Лагранжа***). Составляющие скорости этой частицы могут быть определены как первые производные по времени:

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \\ V_y = \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \\ V_z = \dfrac{\partial f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \end{cases} \tag{2.2}$$

а составляющие ускорения этой частицы могут быть определены как вторые производные по времени:

$$\begin{cases} U_x = \dfrac{\partial^2 f_1(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}, \\ U_y = \dfrac{\partial^2 f_2(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}, \\ U_z = \dfrac{\partial^2 f_3(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Значения полной скорости и полного ускорения могут быть определены по формулам

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{2.4}$$

и

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}\,, \tag{2.5}$$

а их направляющие косинусы – по выражениям

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V}; \qquad \cos\beta = \frac{V_y}{V}; \qquad \cos\gamma = \frac{V_z}{V}; \tag{2.6}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{U_x}{U}; \qquad \cos\beta_1 = \frac{U_y}{U}; \qquad \cos\gamma_1 = \frac{U_z}{U}. \tag{2.7}$$

Способ Лагранжа находит применение при решении ряда специальных задач, например при расчете волновых движений. Однако в большинстве инженерных приложений необходимо знать, с какими скоростями различные частицы жидкости или газа подходят к тем или иным элементам конструкций или сооружений, поэтому чаще всего в кинематике применяют способ описания движения Эйлера.

2.1.2. Метод Эйлера

По методу Эйлера считается, что в каждой точке некоторой области в данный момент времени частицы потока имеют заданные компоненты скорости:

$$\begin{cases} V_x = F_1(x, y, z, t), \\ V_y = F_2(x, y, z, t), \\ V_z = F_3(x, y, z, t), \end{cases} \tag{2.8}$$

где x, y и z – пространственные координаты точки;

t – время.

Переменные x, y, z и t называются ***переменными Эйлера***.



ЭЙЛЕР Леонард
(1707 – 1783)

Выдающийся математик, механик и физик, член Петербургской, Парижской и Берлинской академий наук, Лондонского королевского общества. Родился в Швейцарии. Окончил Базельскую гимназию и Базельский университет. Почти 30 лет прожил в России.

Опубликовал более 865 научных работ. Внес значительный вклад в развитие акустики, сопротивления материалов, теории устойчивости кораблей, навигации, баллистики, математической физики. Совместно с Д. Бернулли создал механику жидкостей и газов, а также гидродинамику как науку. Имя Л. Эйлера встречается во всех областях математики, механики и их приложениях.

Для получения компонент ускорения проделаем элементарные преобразования на примере одной компоненты:

$$U_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x}V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y}V_y + \frac{\partial V_x}{\partial z}V_z, \qquad (2.9)$$

где компонента $\frac{\partial V_x}{\partial t}$ представляет собой ускорение в данной точке, обусловленное неустановившимся движением (называемое локальной составляющей), а оставшаяся в правой части сумма представляет собой ускорение, связанное с нерав-

номерностью движения частиц в пространстве (называемое конвективной составляющей).

Тогда компоненты ускорения определятся так:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{\partial V_x}{\partial t} + \dfrac{\partial V_x}{\partial x} V_x + \dfrac{\partial V_x}{\partial y} V_y + \dfrac{\partial V_x}{\partial z} V_z, \\ \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{\partial V_y}{\partial t} + \dfrac{\partial V_y}{\partial x} V_x + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} V_y + \dfrac{\partial V_y}{\partial z} V_z, \\ \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{\partial V_z}{\partial t} + \dfrac{\partial V_z}{\partial x} V_x + \dfrac{\partial V_z}{\partial y} V_y + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} V_z. \end{cases} \tag{2.10}$$

Значения полных скорости и ускорения рассчитываются по формулам (2.4) и (2.5), а направляющие косинусы – по формулам (2.6) и (2.7).

Заметим, что переход от координат Лагранжа к координатам Эйлера возможен всегда (он производится путем дифференцирования), а обратный переход (производимый путем интегрирования), вообще говоря, возможен не всегда.

Будем называть движение ***установившимся*** (стационарным), если локальное ускорение всегда равно нулю, то есть если выполняется равенство

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0. \tag{2.11}$$

При нестационарном движении локальное ускорение может обращаться в нуль только тогда, когда скорость в данной точке имеет максимальное или минимальное во времени значение.

В отличие от локального, конвективное ускорение может обращаться в нуль лишь тогда, когда средняя скорость не зависит от координат, и, в общем случае, отлично от нуля и при стационарном, и при нестационарном движении.

2.2. Основные понятия теории поля и векторного анализа, используемые в гидромеханике

Векторной линией в поле векторов будем называть линию, в каждой точке которой в рассматриваемый момент времени вектор направлен по касательной к ней.

Совокупность векторных линий, проходящих через все точки некоторого замкнутого контура, называется ***векторной трубкой***.

Применительно к полю скоростей векторная линия называется ***линией тока***, а векторная трубка – ***трубкой тока***.

Для того чтобы вектор скорости был касателен к линии тока, необходимо равенство нулю векторного произведения скорости и элементарного вектора линии тока. Тогда, очевидно, уравнение линии тока будет иметь следующий вид:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}. \qquad (2.12)$$

Линия, по которой двигалась частица в некоторый промежуток времени, называется ***траекторией***. При стационарном движении линия тока и траектория совпадают друг с другом.

В общем случае через каждую точку потока в каждый момент времени можно провести лишь одну линию тока. Однако существуют точки, называемые ***особыми точками***, в которых это условие не выполняется. Очевидно, что в этих точках скорость потока должна быть равна либо нулю, либо бесконечности.

При обтекании непроницаемого тела линия тока, идущая по поверхности, имеет особые точки, в которых скорость

равна нулю (точки A и B, *рис. 2.1,а*). При вытекании среды из одной точки или, наоборот, при ее втекании в точку в этих особых точках скорость бесконечно велика, а сами точки называются соответственно источником (*рис. 2.1,б*) и стоком (*рис. 2.1,в*).

Потоком вектора через некоторую поверхность называется интеграл по этой поверхности от проекции вектора на нормаль в каждой точке, поэтому поток вектора скорости через поверхность ω есть скалярная величина

$$Q = \int_{\omega} V_n \, d\omega = \int_{\omega} \left(V_x \, dy \, dz + V_y \, dx \, dz + V_z \, dx \, dy \right). \qquad (2.13)$$

С физической точки зрения поток вектора скорости представляет собой объемный расход жидкости через поверхность ω, и его размерность $[Q] = [V][\omega] =$ м/с. Если поверхность ω замкнута и внутри нее нет ни источников, ни стоков, то поток вектора скорости через такую поверхность равен нулю. При наличии источника поток вектора скорости через такую поверхность положителен, а при наличии стока – отрицателен.

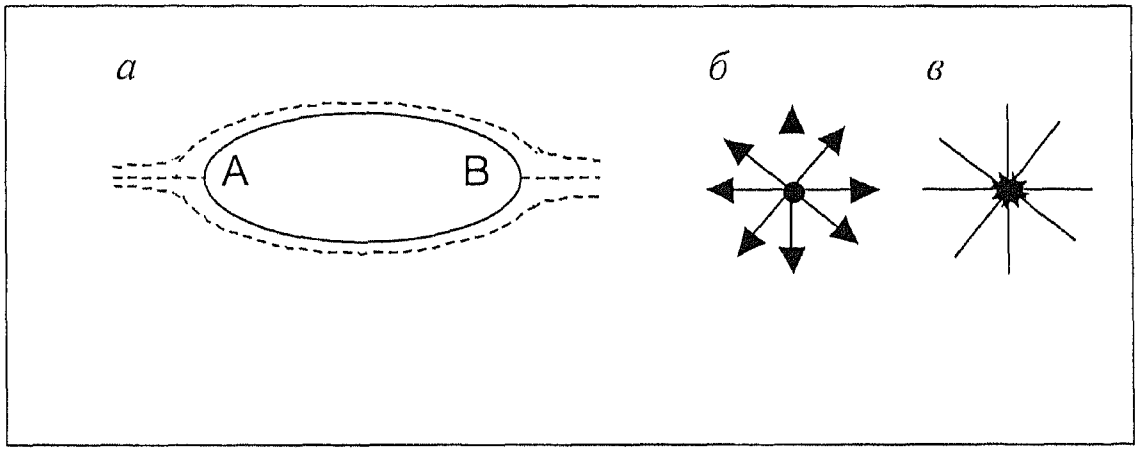


Рис. 2.1
Особые точки потока

Градиентом скалярной функции φ называется вектор, направленный по нормали к линии постоянного значения скалярной функции в сторону ее увеличения и равный производной по направлению той нормали:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (2.14)$$

Скалярная величина, равная скалярному произведению оператора ∇ на вектор скорости, называется ***дивергенцией*** вектора скорости:

$$\operatorname{div}\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\,. \qquad (2.15)$$

Физический смысл дивергенции вектора скорости заключается в том, что она представляет собой скорость относительного изменения элементарного объема в рассматриваемой точке поля скоростей.

Известна ***теорема Остроградского – Гаусса***, которая применительно к вектору скорости запишется так:

$$\int_{\omega}\left(V_x\,dy\,dz + V_y\,dx\,dz + V_z\,dx\,dy\right) =$$

$$= \int_{\Omega}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,, \qquad (2.16)$$

или в векторной форме

$$\int_{\omega} V_n\,d\omega = \int_{\Omega}\operatorname{div}\vec{V}\,d\Omega\,, \qquad (2.17)$$

где Ω – объем, заключенный внутри поверхности ω.

Циркуляцией скорости будем называть криволинейный интеграл по некоторой кривой AB, проведенной в век-

торном поле скоростей, равный скалярному произведению $\vec{V}$ на $d\vec{r}$:

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \left(\vec{V} \cdot d\vec{r}\right) = \int_A^B \left(V_x\, dx + V_y\, dy + V_z\, dz\right), \qquad (2.18)$$

причем в случае замкнутого контура AB циркуляция будет определяться интегралом по замкнутому контуру S:

$$\Gamma_S = \oint_S \left(V_x\, dx + V_y\, dy + V_z\, dz\right). \qquad (2.19)$$

Величина, равная векторному произведению оператора ∇ на вектор скорости, называется ***ротором вектора скорости***:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \left[\nabla \times \vec{V}\right] = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \qquad (2.20)$$

Если рассмотреть некоторую вращающуюся вокруг, например, оси z с угловой скоростью ω частицу, то нетрудно убедиться в том, что $V_x = -\omega_z y$ и $V_y = -\omega_z x$, поэтому величина $\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}$ равна $2\omega_z$ и ротор вектора скорости частицы может быть определен вектором ее угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V}. \qquad (2.21)$$

Таким образом, равенство нулю ротора вектора скорости означает, что в рассматриваемой точке потока отсутствует вращение элементарного объема, и такое течение называ-

ется ***безвихревым***. При этом в соответствии с формулой (2.20) должно соблюдаться следующее условие:

$$\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}=\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}=\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}=0. \qquad (2.22)$$

Выполнение этого условия возможно только в том случае, если существует некоторая функция $\varphi(x, y, z)$, называемая ***потенциалом вектора скорости***, такая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=V_x; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=V_y; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=V_z. \qquad (2.23)$$

Такое течение называется ***потенциальным***.

Из курса математической физики известно, что для любого векторного поля, в том числе и для поля скоростей, справедливы следующие соотношения:

$$\text{rot grad}\,\varphi=\left[\nabla\times\nabla\varphi\right]=0, \qquad (2.24)$$

$$\text{div rot}\,\vec{V}=\nabla\cdot\left[\nabla\times\vec{V}\right]=0. \qquad (2.25)$$

Тогда очевидно, что если вектор скорости имеет потенциал, то

$$\text{rot}\,\vec{V}=\text{rot grad}\,\varphi=0. \qquad (2.26)$$

Кроме того, при наличии потенциала скорости ее циркуляция определится разностью потенциалов скорости в точках A и B:

$$\int_A^B\left(V_x\,dx+V_y\,dy+V_z\,dz\right)=$$

$$=\int_A^B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz\right)=\int_A^B d\varphi=\varphi_B-\varphi_A. \qquad (2.27)$$

2.3. Характеристики потоков

До сих пор мы пользовались интуитивным понятием потока. В дальнейшем будем считать **потоком** движущуюся массу жидкости или газа, ограниченную либо некоторыми направляющими твердыми поверхностями, либо поверхностями раздела фаз, либо свободными поверхностями.

Будем называть ***поток напорным***, если движение осуществляется между твердыми поверхностями, движущееся вещество полностью заполняет отведенное для движения пространство и твердые поверхности испытывают давление со стороны потока, отличное от давления окружающей среды. В противном случае поток – ***безнапорный***.

Кроме того, если поток жидкости ограничен только жидкостью или газовой средой, то такой поток принято называть ***гидравлической струей***.

Сечение потока, во всех своих точках нормальное к линиям тока, называется ***живым сечением потока***. Длина линии, по которой происходит соприкосновение с твердыми поверхностями в живом сечении потока, называется ***смоченным периметром***, а отношение площади живого сечения к смоченному периметру называется ***гидравлическим радиусом***.

Расходом потока называется количество жидкости или газа, проходящее через живое сечение потока в единицу времени. ***Средней скоростью потока*** называют отношение расхода потока к площади живого сечения.

По характеру изменения скоростей в потоке различают ***установившиеся*** (стационарные) и ***неустановившиеся*** потоки [условие стационарности приведено в уравнении (2.11)]. Установившийся поток считается ***равномерным***, если его линии тока параллельны и прямолинейны.

В неравномерных потоках в отличие от равномерных площади живых сечений и средние скорости непостоянны по длине потока, а линии тока непараллельны.

С геометрической точки зрения все потоки можно подразделить на трехмерные, двумерные (плоские) и одномерные (движение жидкости или газа зависит соответственно от трех, двух или одной координаты).

В потоках жидкостей или газов принято различать режимы движения. Движение, при котором линии тока прямолинейны и устойчивы и при котором не происходит пульсации местных скоростей, называется ***ламинарным***. Потоки, в которых происходит перемешивание жидкости или газа, называются ***турбулентными***.

Опытными исследованиями, проводившимися в конце XIX – начале XX веков, было установлено, что разделить ламинарные и турбулентные потоки можно, вычислив некоторую величину и сравнив ее с эталонной. Эта величина (безразмерная) называется ***числом Рейнольдса*** и характеризует соотношение сил инерции и сил трения в потоке.

В общем случае режим движения определяется сравнением числа Рейнольдса Re с критическим значением $Re_{кр}$, при этом

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \qquad (2.28)$$

где V – скорость движения потока;

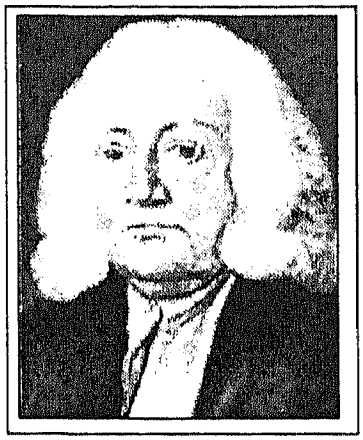
L – характерный геометрический размер живого сечения потока (обычно в качестве этого параметра выбирают диаметр трубы, гидравлический радиус канала или трещины, глубину жидкости в открытом русле и т.д.);

ν – кинематическая вязкость.

Считается, что при $Re > Re_{кр}$ движение является турбулентным, а при $Re < Re_{кр}$ – ламинарным.

Опытным путем установлено, что для движения жидкости по трубам цилиндрической формы $Re_{кр} = 2320$, для открытых русл $Re_{кр} \approx 580$.

РЕЙНОЛЬДС Осборн
(1842 – 1912)



Английский физик и инженер, член Лондонского королевского общества (с 1877 г.). Родился в Ирландии, в Белфасте. В 1867 г. окончил Кембриджский университет. Профессор Манчестерского университета с 1868 г. В 1888 г. возглавил Витвортскую инженерную лабораторию.

Основные труды по теории динамического подобия течению вязкой жидкости, по теориям турбулентности и смазки. В 1876 – 1883 гг. экспериментально установил критерий перехода ламинарного течения в цилиндрических трубах в турбулентное. Предложил дифференциальные уравнения для осредненного движения жидкости, учитывающие дополнительные напряжения (турбулентные напряжения). Внес большой вклад в развитие гидродинамической теории смазки. Исследовал явление кавитации на лопасти вращающегося винта, атмосферную рефракцию звука, групповую скорость распространения волн на свободной поверхности воды, теплопередачу от твердых стенок к жидкости и т. д.

2.4. Задачи

Задача 2.1

Вычислить гидравлический радиус R для следующих живых сечений потоков:

а) трубы диаметром D, целиком заполненной жидкостью;

б) трубы диаметром D, заполненной жидкостью наполовину;

в) пространства между трубами диаметрами D_1 и D_2, целиком заполненного жидкостью;

г) трубы квадратного сечения $B \times B$, целиком заполненной жидкостью;

д) прямоугольного русла глубиной B и шириной H.

Решение

Гидравлический радиус определяется как отношение площади живого сечения потока к смоченному периметру, поэтому получим следующие выражения для каждого из пунктов задания:

а) $R = \dfrac{\frac{\pi}{4}D^2}{\pi D} = \dfrac{D}{4}$; б) $R = \dfrac{\frac{\pi}{8}D^2}{\frac{\pi}{2}D} = \dfrac{D}{4}$;

в) $R = \dfrac{\frac{\pi}{4}\left(D_1^2 - D_2^2\right)^2}{\pi\left(D_1 - D_2\right)} = \dfrac{D_1 + D_2}{4}$;

г) $R = \dfrac{B^2}{4B} = \dfrac{B}{4}$; д) $R = \dfrac{BH}{2H + B}$.

Ответ: а) $R = \dfrac{D}{4}$; б) $R = \dfrac{D}{4}$; в) $R = \dfrac{D_1 + D_2}{4}$; г) $R = \dfrac{B}{4}$;

д) $R = \dfrac{BH}{2H + B}$.

Задача 2.2

Вода при температуре $t = 10$ °С движется в круглой трубе диаметром $d = 0{,}2$ м со средней скоростью $V = 1{,}5$ м/с. Определить режим движения жидкости в этих условиях.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой (2.28), куда необходимо подставить из *табл. 6* значение кинематической вязкости воды при заданной температуре. Получим

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}2}{1{,}31 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}231 \cdot 10^6.$$

Так как полученное значение числа Рейнольдса $Re > Re_{кр} = 2320$, то режим движения жидкости в трубе в этих условиях – турбулентный.

Ответ: турбулентный.

Задача 2.3

Вода при температуре $t = 10$ °С движется в открытом канале с гидравлическим радиусом $r = 3{,}0$ м со средней скоростью $V = 0{,}5$ м/с. Определить режим движения жидкости в этих условиях.

Решение

Для решения задачи снова воспользуемся формулой (2.28), куда необходимо подставить из *табл. 6* значение кинематической вязкости воды при заданной температуре. Получим

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}5 \cdot 3{,}0}{1{,}31 \cdot 10^{-6}} \approx 1{,}145 \cdot 10^{6}.$$

Так как полученное значение числа Рейнольдса $Re > Re_{кр} = 580$, то режим движения жидкости в открытом канале в этих условиях – турбулентный.

Ответ: турбулентный.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается описание движения по Лагранжу от описания по Эйлеру?
2. Что такое векторная трубка и трубка тока?
3. Что такое линия тока и каково ее уравнение?
4. Могут ли совпадать линия тока и траектория?

5. Что такое особые точки потока?
6. Каковы отличительные признаки вихревого и безвихревого потоков?
7. Какое течение называется потенциальным?
8. Что называется живым сечением потока? Расходом потока?
9. Какие режимы движения вам известны?
10. Что такое гидравлический радиус потока?

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Динамика жидкости и газа (гидродинамика) – раздел гидромеханики, изучающий законы движения объектов в зависимости от приложенных к ним сил. В этой главе будут приведены в основном уравнения динамики, относящиеся к идеальным (т.е. невязким, лишенным внутреннего трения) жидкостям и газовым средам.

Как известно, общие законы сохранения энергии и массы были сформулированы еще М.В. Ломоносовым. В гидромеханике все законы сохранения (кроме вышеназванных еще и законы сохранения импульса и момента импульса), безусловно, справедливы и имеют собственную специфическую форму записи.

3.1. Уравнение неразрывности – закон сохранения массы

Для изолированной системы (т. е. не взаимодействующей с внешней средой) ее масса должна оставаться неизменной, что математически выражается так:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \qquad (3.1)$$

Для неизолированной системы при условии постоянства ее объема Ω изменение массы этого объема в единицу времени возможно либо за счет неравенства количеств втекающей в него и вытекающей из него жидкости, либо за счет изменения плотности жидкости внутри этого объема.

Изменение массы за счет вариации плотности в единицу времени в единице объема составит

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega, \qquad (3.2)$$

а за счет неравенства количества втекающей и вытекающей из этого объема жидкости

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\int_{\omega} \rho V_n \, d\omega, \tag{3.3}$$

где V_n – проекция вектора скорости на нормаль к площадке $d\omega$ поверхности ω, ограничивающей объем Ω.

Из очевидного равенства выражений (3.2) и (3.3) следует условие:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = \int_{\omega} \rho V_n \, d\omega. \tag{3.4}$$

Для приведения интеграла по поверхности к интегралу по объему воспользуемся теоремой Остроградского Гаусса (2.16). Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{\omega} \rho V_n \, d\omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho V_z)}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \tag{3.5}$$

и выражение (3.4) примет следующий вид:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega, \tag{3.6}$$

или с переносом всего выражения в одну часть равенства:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) \right) d\Omega = 0. \tag{3.7}$$

Так как (3.7) справедливо для любого объема Ω, то значение подынтегральной функции должно быть тождественно равно нулю, поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) = 0. \qquad (3.8)$$

Это и есть ***уравнение неразрывности***, выражающее закон сохранения массы.

В частных случаях уравнение неразрывности существенно упрощается. Так, при стационарном движении оно принимает вид

$$\operatorname{div}\left(\rho \vec{V}\right) = 0, \qquad (3.9)$$

а в случае несжимаемой жидкости (при ρ = const)

$$\operatorname{div}\left(\vec{V}\right) = 0, \qquad (3.10)$$

т. е. поток скорости через любую замкнутую поверхность равен нулю.

3.2. Уравнение движения в напряжениях – закон сохранения импульса

Рассмотрим некоторый конечный объем Ω с поверхностью, имеющей площадь ω, заполненный жидкостью или газом с плотностью ρ. Количество движения для такого объема запишется следующим образом:

$$\vec{P} = \int_{\Omega} \rho \vec{V}\, d\Omega, \qquad (3.11)$$

где $\vec{V}$ – вектор скорости.

Внешние силы, действующие на рассматриваемый объем, складываются, как отмечалось в разд. 1.1, из объемных $\vec{F}$ и поверхностных $\vec{p}_n$ и могут быть представлены следующим образом:

$$\vec{R} = \int_{\Omega} \rho \vec{F}\, d\Omega + \int_{\omega} \vec{p}_n\, d\omega . \tag{3.12}$$

Согласно закону сохранения импульса должно выполняться равенство

$$\frac{d\vec{P}}{dt} - \vec{R} = 0 . \tag{3.13}$$

Подставив (3.11) и (3.12) в (3.13), получим

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho \vec{V}\, d\Omega - \int_{\Omega} \rho \vec{F}\, d\Omega - \int_{\omega} \vec{p}_n\, d\omega = 0 . \tag{3.14}$$

Воспользовавшись векторным равенством

$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z , \tag{3.15}$$

где n_i – направляющие косинусы, перепишем уравнение (3.14) так:

$$\int_{\Omega} \rho \left(\frac{d}{dt} \vec{V} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \vec{F}\, d\Omega -$$

$$- \int_{\omega} \left(n_x \vec{p}_x + n_{xy} \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z \right) d\omega = 0. \tag{3.16}$$

С учетом формулы Остроградского – Гаусса

$$\int_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{d}{dt} \vec{V} \right) - \rho \vec{F} - \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] d\Omega = 0 . \tag{3.17}$$

В силу произвольности выбора рассматриваемого объема Ω подынтегральную функцию следует приравнять нулю:

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\vec{V}\right)-\rho\vec{F}-\left(n_x\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x}+n_y\frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y}+n_z\frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}\right)=0, \qquad (3.18)$$

или

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=\rho\vec{F}+\operatorname{div}\vec{P}. \qquad (3.19)$$

Уравнение (3.19) в проекциях на оси координат запишется так:

$$\begin{cases}\rho\dfrac{d\vec{V}_x}{dt}=\rho\vec{F}_x+\left(\dfrac{\partial\vec{p}_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\vec{p}_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\vec{p}_{zx}}{\partial z}\right),\\ \rho\dfrac{d\vec{V}_y}{dt}=\rho\vec{F}_y+\left(\dfrac{\partial\vec{p}_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\vec{p}_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\vec{p}_{zy}}{\partial z}\right),\\ \rho\dfrac{d\vec{V}_z}{dt}=\rho\vec{F}_z+\left(\dfrac{\partial\vec{p}_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\vec{p}_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\vec{p}_{zz}}{\partial z}\right),\end{cases} \qquad (3.20)$$

где p_{ij} есть не что иное, как компоненты тензора напряжений. Сами уравнения (3.19) и (3.20) называются ***дифференциальными уравнениями движения в напряжениях***.

Для идеальной среды, где отсутствуют касательные поверхностные силы, недиагональные элементы тензора напряжений должны обратиться в нуль. Следовательно, все ненулевые компоненты этого тензора будут равны друг другу:

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_n=-p. \qquad (3.21)$$

Таким образом, при движении идеальной жидкости или газа, так же как и при их равновесии, нормальное напряжение в произвольной точке потока не зависит от направления пло-

щадки, к которой оно приложено. Дифференциальные уравнения движения существенно упростятся:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{dV_x}{dt} = \rho F_x - \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \dfrac{dV_y}{dt} = \rho F_y - \dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \dfrac{dV_z}{dt} = \rho F_z - \dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \tag{3.22}$$

или в векторной форме:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\,. \tag{3.23}$$

Уравнение движения в виде (3.23) называется ***уравнением Эйлера***. Это уравнение в проекциях на координатные оси через компоненты скорости запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \dfrac{\partial V_x}{\partial z} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \dfrac{\partial V_y}{\partial z} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \dfrac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \dfrac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \dfrac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \tag{3.24}$$

В конкретных задачах для интегрирования этих уравнений задаются некоторыми начальными и граничными условиями. Как правило, на неподвижной границе нормальная составляющая вектора скорости равна нулю, а касательная – отлична от нуля. Начальные условия обычно задаются в виде значений составляющих скорости в потоке в начальный мо-

мент времени. Кроме того, как правило, в некоторой точке потока должна быть известна величина давления. Уравнению Эйлера бывает удобно придать несколько иной вид. Для этого формально преобразуем левую часть, например, первого из уравнений (3.24) таким образом [с учетом равенства (2.20)]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}=\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+$$

$$+V_y\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)+V_z\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x^2}{\partial x}+\frac{\partial V_y^2}{\partial x}+\frac{\partial V_z^2}{\partial x}\right)-V_y\left(\operatorname{rot}\vec{V}\right)_z-V_z\left(\operatorname{rot}\vec{V}\right)_y=$$

$$=\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(V_x^2+V_y^2+V_z^2\right)+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_x=$$

$$=\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_x,$$

где $\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_x$ – проекция векторного произведения векторов $\operatorname{rot}\vec{V}$ и $\vec{V}$ на ось x, а $V^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2$.

Таким образом, уравнения Эйлера могут быть записаны в ***форме Громека***:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_x}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V^2}{\partial x}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_x=F_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \dfrac{\partial V_y}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V^2}{\partial y}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_y=F_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V^2}{\partial z}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_z=F_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}.\end{cases}\qquad(3.25)$$

ГРОМЕКА Ипполит Степанович
(1851 – 1889)

Русский физик. В 1873 г. окончил Московский университет, с 1880 г. работал в Казанском университете.

Разработал основы современной математической теории капиллярности (за работу «Очерки теории капиллярных явлений; теория поверхностного сцепления жидкости» получил степень магистра прикладной математики). Кроме того, изучал винтовые потоки и потоки с поперечной циркуляцией, имеющие большое практическое значение в гидротехнике. За работу «Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости» получил степень доктора и звание профессора. Исследовал также распространение ударных волн жидкости в упругих трубках, вихревые движения жидкости на поверхности сферы и др.

В случае идеальной жидкости плотность можно считать постоянной величиной. Кроме того, для большинства практических приложений массовые силы F (напомним, что чаще всего это – сила тяжести) имеют потенциал Ф. Как известно, потенциал векторного поля $a(r)$ есть такая скалярная функция $\varphi(r)$, что выполняется равенство $a = \operatorname{grad}\varphi$. Следовательно, правомочна следующая запись компонент массовых сил:

$$F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{3.26}$$

или

$$d\,\Phi = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\,. \tag{3.27}$$

Тогда уравнения Эйлера в форме Громека для потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости запишутся так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_x}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\left(V^2+2\Phi+2\dfrac{p}{\rho}\right)}{\partial x}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_x=0, \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\left(V^2+2\Phi+2\dfrac{p}{\rho}\right)}{\partial x}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_y=0, \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\left(V^2+2\Phi+2\dfrac{p}{\rho}\right)}{\partial x}+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]_z=0, \end{cases} \qquad (3.28)$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\operatorname{grad}\left(\frac{V^2}{2}+\Phi+\frac{p}{\rho}\right)+\left[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}\right]=0. \qquad (3.29)$$

Заметим, что уравнения (3.28) содержат последний член в левой части, в который в явном виде входит вихрь скорости. Этот член уравнения становится равным нулю в тех случаях, когда:

- вихрь скорости равен нулю (то есть при потенциальном, или безвихревом, движении);
- скорость потока равна нулю (вырожденный случай движения);
- векторное произведение равно нулю (редко встречающийся в практике случай винтового движения).

Во всех этих случаях уравнения Эйлера в форме Громека для движения идеальной несжимаемой жидкости значительно упростятся:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0. \qquad (3.30)$$

3.3. Интегралы Коши – Лагранжа и Бернулли

Предположим, что рассматриваемый нами поток является потенциальным, у скорости этого потока существует потенциал, описываемый выражениями (2.23):

$$\vec{V} = \text{grad}\,\varphi. \qquad (3.31)$$

Тогда уравнения Эйлера в форме Громека для потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости еще более упростятся:

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{grad}\,\varphi + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0, \qquad (3.32)$$

или

$$\text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0. \qquad (3.33)$$

Очевидно, что выражение под градиентом должно зависеть лишь от времени t, а не от положения в пространстве, т.е. интеграл уравнения (3.33) будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho} = f(t). \qquad (3.34)$$

Этот интеграл уравнения Эйлера называется ***интегралом Коши – Лагранжа*** для потенциального движения.

КОШИ Огюстен Луи
(1789 – 1857)



Французский математик. Родился в Париже. В 1807 г. окончил Политехническую школу, а в 1810 г. – Школу мостов и дорог в Париже. Некоторое время работал инженером путей сообщения, а с 1813 г. занялся преподаванием и увлекся научной работой. В 1816 г. за мемуары по теории волн на поверхности тяжелой жидкости на конкурсе Парижской АН получил первую премию. После этого был приглашен в Политехническую школу, Сорбонну и Колледж де Франс. Из-за неприязни к царившему тогда режиму отказался от этих предложений и почти 10 лет путешествовал по Европе.

Коши опубликовал более 800 работ по арифметике и теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теоретической и небесной механике, математической физике и др. В области дифференциальных уравнений ему принадлежат постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных уравнений (задача Коши), основные теоремы существования решений и метод решения уравнений в частных производных первого порядка. Член Парижской и Петербургской АН.

Если в качестве массовых сил на рассматриваемый поток действует только сила тяжести, обладающая, как известно, потенциалом $\Phi = gz$, то интеграл Коши – Лагранжа примет такой вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + g z + \frac{p}{\rho} = f(t). \qquad (3.35)$$

В полученном уравнении имеются две неизвестные величины – потенциал φ и давление p, поэтому в соответствии с выражением (2.24) для всякого потенциального потока справедливо уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \qquad (3.36)$$

Решив уравнение Лапласа, получим потенциал скорости φ, после подстановки которого в (3.35) можно определить давление p. Так как

$$V^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2, \qquad (3.37)$$

то при стационарном движении (при выполнении условия $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$) интеграл уравнения Эйлера примет вид

$$\frac{V^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=\text{const}. \qquad (3.38)$$

Этот интеграл называется ***интегралом Бернулли***. Из уравнения (3.38) следует, что сумма удельной кинетической (первое слагаемое), удельной потенциальной (второе слагаемое) энергий и удельной работы сил давления (третье слагаемое) для безвихревого потока — величина постоянная.

Для того чтобы записать интеграл Бернулли в размерностях давления, умножим обе части выражения (3.38) на плотность ρ и получим

$$\frac{\rho V^2}{2}+\rho gz+p=\text{const}_1, \qquad (3.39)$$

где $\frac{\rho V^2}{2}$ – скоростной напор;

ρgz – геометрический напор;

p – пьезометрический напор;

p_0 – полный напор.

БЕРНУЛЛИ Даниил
(1700 – 1782)



Физик и математик, один из представителей известной династии Бернулли. Родился в Гронингене. В 1716 г. окончил Базельский университет. С 1725 по 1733 г. работал в Петербургской АН, занимаясь физиологией и чистой математикой. В 1733 г. возвратился в Базель, где возглавил сначала кафедру анатомии и ботаники, а затем кафедру опытной физики. Почетный член Петербургской, Берлинской и Парижской АН, а также Лондонского королевского общества.

Его самый значимый труд в физике – «Гидродинамика», изданная в 1738 г. в Страсбурге, в которой он вывел уравнение стационарного движения идеальной жидкости – основное уравнение гидро- и газодинамики. Совместно с Л. Эйлером является создателем теоретической гидромеханики. Кроме того, внес важный вклад в различные области математики: вывел предельные теоремы теории вероятностей, позже названные теоремами Муавра – Лапласа, в работе о колебании струны впервые применил тригонометрические ряды, позже названные рядами Фурье. Парижская АН 10 раз присуждала ему премии за лучшие работы в области математики и физики.

Если разделить обе части выражения (3.38) на ускорение свободного падения, то получим интеграл Бернулли в размерностях длины:

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}_2, \qquad (3.40)$$

где $\frac{V^2}{2g}$ – динамическая высота;

z – геометрическая высота;

$\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрическая высота.

Эта форма интеграла Бернулли имеет наиболее важное значение и применяется чаще всего.

Следует отметить, что интеграл Бернулли в виде (3.39) справедлив не только для потенциального потока, но и для каждой линии тока. Однако при потенциальном потоке стоящая в правой части константа сохраняет свое значение для всей области потока, а в случае вихревого движения – лишь для рассматриваемой линии тока.

3.4. Основы газовой динамики

Почти все проведенные выше выкладки справедливы и для газов, за исключением того момента, когда плотность газов непостоянна и является функцией давления:

$$\rho = f(p). \tag{3.41}$$

Будем считать, что плотность газа зависит только от давления, равновесие газа является баротропным. Тогда для стационарного потока баротропного газа при наличии потенциала массовых сил уравнение (3.30) можно записать так:

$$d\left(\frac{V^2}{2} + \Phi\right) + \frac{dp}{f(p)} = 0. \tag{3.42}$$

Если ввести функцию давления

$$\Re = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)}, \tag{3.43}$$

то интеграл Бернулли примет вид

$$\frac{V^2}{2} + \Phi + \Re = \text{const}. \tag{3.44}$$

Вид функции давления определяется процессом, по которому происходит изменение состояния газа или баротропной жидкости.

При движении газа по трубопроводу обычно относительное изменение скоростей незначительно, поэтому можно считать, что по длине потока температура есть величина постоянная, т.е. процесс изменения состояния газа или баротропной жидкости – изотермический.

При изотермическом процессе $T = \text{const}$, поэтому отношение давления к плотности газа есть величина постоянная и функция давления имеет вид

$$\Re = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}. \qquad (3.45)$$

Интеграл Бернулли для поля сил тяжести тогда запишется так:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} + gz = \text{const}, \qquad (3.46)$$

где индекс «0» относится к определенным начальным условиям (для воздуха это, как правило, давление p_0 и плотность ρ_0 на уровне моря, $p_0 = 0{,}1013$ МПа и $\rho_0 = 1{,}225$ кг/м^3).

В большинстве случаев, однако, считать происходящие в газе процессы изотермическими не совсем верно, но поскольку все эти процессы являются быстро протекающими, т.е. теплообмен с внешней средой не успевает происходить, то исключительно важное значение в гидромеханике приобретают адиабатические процессы.

Как известно, при адиабатическом процессе

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \qquad \text{или } p=L\rho^k, \tag{3.47}$$

где $k=\frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты;

$$L=\frac{p_0}{\rho_0^k}.$$

Функция давления при адиабатическом процессе будет иметь следующий вид:

$$\Re=\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0}\int_{p_0}^{p}p^{-1/k}dp=\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{\rho}-\frac{p_0}{\rho_0}\right), \tag{3.48}$$

а интеграл Бернулли для поля сил тяжести запишется так:

$$\frac{V^2}{2}+gz+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{const}. \tag{3.49}$$

Если воспользоваться принятой в газовой динамике энтальпией $i=c_pT$, то интеграл Бернулли примет следующий вид:

$$\frac{V^2}{2}+gz+i=\text{const}. \tag{3.50}$$

3.5. Частные случаи применения интеграла Бернулли

3.5.1. Действие на идеальную жидкость сил тяжести, центробежных и кориолисовых сил инерции

Рассматриваемый случай описывает движение идеальных жидкостей в различных обогатительных устройствах (гидроциклонах, классификаторах и др.), где имеет место вращение жидкости вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью u и поступательное движение вдоль той же оси со скоростью u_0.

Выберем прямоугольную систему координат, вертикальная ось Z которой совпадает с осью вращения (*рис. 3.1*). Очевидно, что отнесенные к единице массы проекции сил инерции на координатные оси будут иметь следующий вид:

$$F_x = u^2 x; \qquad F_y = u^2 y; \qquad F_z = -g\,. \tag{3.51}$$

Потенциал этих массовых сил в соответствии с (3.26):

$$\Phi = -\frac{1}{2}u^2\left(x^2 + y^2\right) + gz + \text{const}_1, \tag{3.52}$$

или

$$\Phi = -\frac{1}{2}u^2 r^2 + gz + \text{const}_1, \tag{3.53}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Тогда интеграл Бернулли в соответствии с (3.35) для рассматриваемого случая будет иметь такой вид:

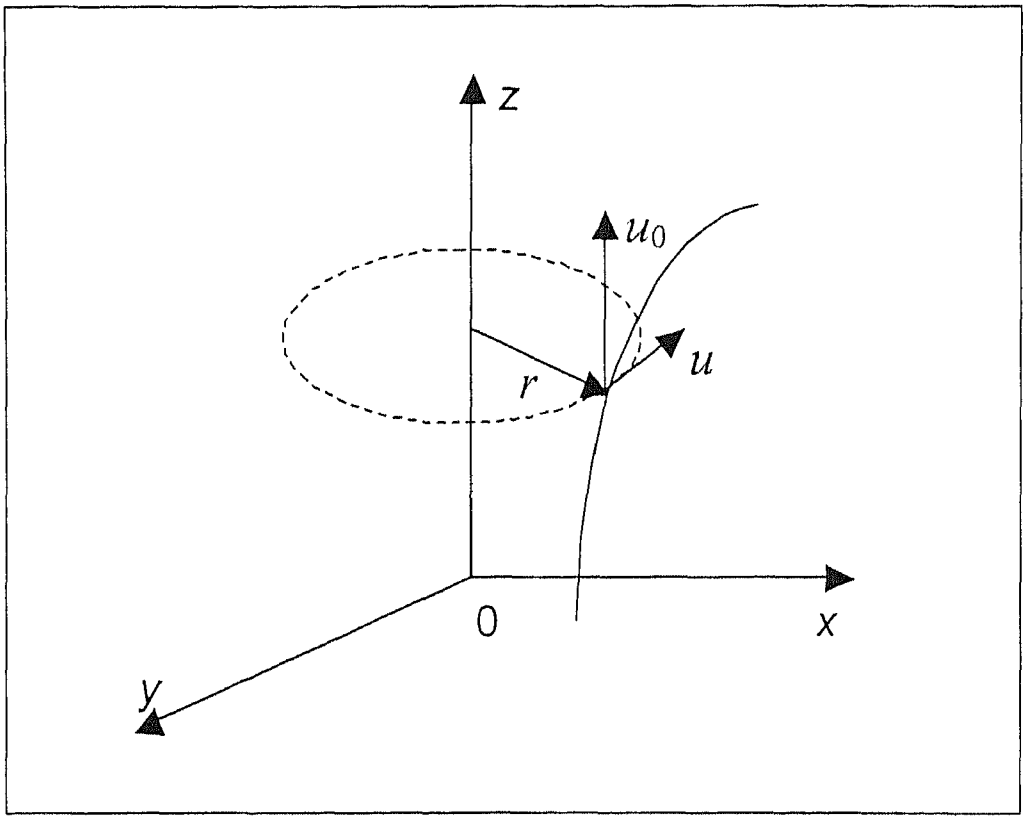


Рис.3.1

Схема к применению интеграла Бернулли для описания относительного движения идеальной жидкости

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}-\frac{1}{2}u^2r^2+gz=\text{const}_2, \tag{3.54}$$

или, поделив на величину ускорения силы тяжести g и приведя тем самым выражение к размерности длины, получим зависимость

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}-\frac{u^2r^2}{2g}+z=\text{const}. \tag{3.55}$$

3.5.2. Истечение идеальной жидкости из отверстий

Рассмотрим сначала задачу об истечении жидкости через малое круглое отверстие, расположенное в боковой стенке некоторого сосуда значительных размеров. Подобные задачи часто возникают в инженерной практике при расчетах, например, необходимого времени опорожнения емкостей или, наоборот, их заполнения. Малым мы будем называть такое отверстие, вертикальный размер которого не менее чем в 10 раз меньше, чем величина напора на входе в него (в этом случае, как показывают опытные данные, давление во всех точках этого отверстия оказывается практически одинаковым).

Пусть в сосуде поддерживается постоянный уровень жидкости H (*рис. 3.2*). Предположим, что давление окружающей среды в сосуде p_1, а в атмосфере p_2. Запишем интеграл Бернулли для сечений *I–I* (поверхность воды в сосуде) и *II–II* (струя жидкости на выходе из сосуда в так называемом сжатом сечении, имеющем минимальную площадь):

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2. \qquad (3.56)$$

В силу малости поперечного сечения отверстия в сравнении с площадью сосуда можно считать, что скорость движения жидкости в сосуде равна нулю. Тогда скорость истечения жидкости из малого отверстия

$$V_2^2=2g\left[\left(z_1-z_2\right)+\frac{p_1-p_2}{\rho g}\right]=2g\left[H+\frac{p_1-p_2}{\rho g}\right]. \qquad (3.57)$$

Если давление в сосуде равно атмосферному, то равенство (3.57) превращается в известную ***формулу Торричелли***:

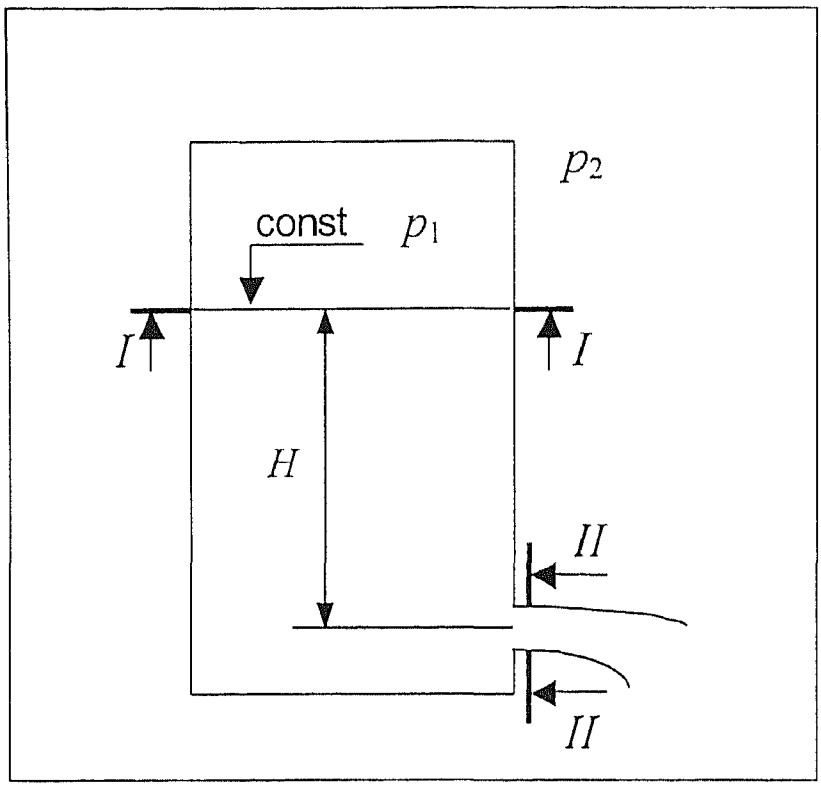


Рис. 3.2
К выводу формулы Торричелли

$$V_2 = \sqrt{2gH}\,. \tag{3.58}$$

В действительности скорость истечения жидкости зависит от геометрических характеристик сечения отверстия и числа Рейнольдса, поэтому в формулы (3.57) и (3.58) приходится вводить перед знаком корня поправочный коэффициент μ, называемый коэффициентом расхода. Подробнее об этом см. в гл. 7.

Отметим, что при истечении жидкости из отверстий в случае переменного напора (непостоянства уровня жидкости в сосуде) интеграл Бернулли, вообще говоря, неприменимо.

ТОРРИЧЕЛЛИ Эванджелиста
(1608 – 1647)



Итальянский физик и математик. Родился в Фаэнце. Учился в Риме у Кастелли, ученика Галилея. Был придворным математиком. Профессор математики и физики Флорентийского университета.

Изобрел ртутный барометр и с его помощью открыл существование атмосферного давления. Первым смог объяснить ветер перепадами атмосферного давления. Установил параболический характер траектории движения тел, брошенных под углом к горизонту. Сформулировал закон истечения жидкостей из отверстий в сосудах. Достиг совершенства в конструировании микроскопов и шлифовании линз телескопов.

3.5.3. Истечение газа из отверстия в сосуде

Задача об истечении газа из сосуда возникает при расчете различных пневмосистем, терморазрушающих устройств и др.; постановка ее абсолютно аналогична рассмотренной в предыдущем подразделе задаче об истечении идеальной жидкости из сосуда. Так же, как и в рассмотренной выше задаче, будем пренебрегать скоростью газа внутри сосуда в сравнении со скоростью газа в выходном сечении. Таким образом, можно считать, что внутри сосуда газ находится в состоянии покоя при адиабатическом процессе без потерь энергии. Такое состояние газа принято называть заторможенным, а его параметры – параметрами заторможенного газа (обычно они обозначаются нулевым индексом).

Для определения скорости истечения газа из сосуда воспользуемся интегралом Бернулли в виде (3.49):

$$\frac{V^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}, \tag{3.59}$$

откуда

$$V^2=\frac{2k}{k-1}\left(-\frac{p}{\rho}+\frac{p_0}{\rho_0}\right)=\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]. \tag{3.60}$$

Из полученной формулы видно, что максимальная скорость истечения газа достигается при $p = 0$, т. е. при истечении в абсолютный вакуум:

$$V_{\max}^2=\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{2k}{k-1}RT_0=\frac{2a_0^2}{k-1}, \tag{3.61}$$

где $a_0=\sqrt{kRT_0}$ – адиабатическая скорость звука заторможенного газа.

Для случая истечения воздуха, находящегося в резервуаре под атмосферным давлением при температуре 288 К, в абсолютный вакуум максимальная скорость истечения составит ≈ 760 м/с.

Если переписать интеграл Бернулли через скорость звука в газе

$$\frac{V^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho_0}=\frac{a_0^2}{k-1}, \tag{3.62}$$

то нетрудно получить такую взаимосвязь скоростей звука и течения газа:

$$a^2=a_0^2-\frac{1}{2}(k-1)V^2. \tag{3.63}$$

Из уравнения (3.63) следует, что с увеличением скорости истечения скорость звука должна уменьшаться. Теоретически при достаточно большом перепаде давлений в сосуде и вне его (и, как показывает практика, сужающемся насадке) скорость истечения может достигнуть скорости звука. Скорость потока, равная местной скорости звука, называется критической скоростью потока.

При достижении критической скорости дальнейшее увеличение разности давлений в сосуде и вне его не приводит к увеличению скорости истечения; говорят, что сосуд заперт потоком со звуковой скоростью. Очевидно, критическая скорость определится из равенства

$$a_*^2 = \frac{2a_0^2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0}. \tag{3.64}$$

Комбинируя выражения (3.61) и (3.64), получим

$$V_{\max}^2 = \frac{k+1}{k-1}a_*^2. \tag{3.65}$$

Если подставить критическое значение скорости в интеграл Бернулли, то можно для адиабатического процесса получить выражения для определения критических параметров газа (приведем их здесь без детального вывода):

$$\begin{cases} \dfrac{T_*}{T_0} = \dfrac{2}{k+1}, \\ \dfrac{p_*}{p_0} = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}, \\ \dfrac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{cases} \tag{3.66}$$

Формулы (3.66) весьма важны для расчетов терморазрушающих инструментов и различных устройств типа сопел, принцип работы которых основан на истечении газа.

3.5.4. Клепсидра

Клепсидрой называется форма сосуда, употребляемого для водяных часов, в которых уровень жидкости должен уменьшаться равномерно с постоянной скоростью V (*рис. 3.3*). Найдем уравнение образующей клепсидры.

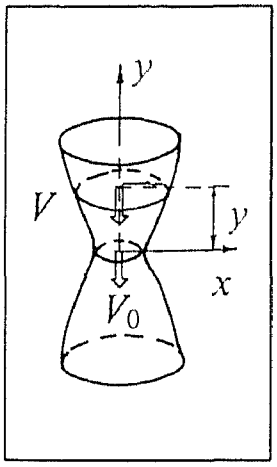


Рис. 3.3
Клепсидра

Обозначим площадь переменного уровня жидкости через ω, площадь отверстия в нижней части сосуда ω_0 и скорость истечения жидкости из отверстия V_0. Согласно уравнению неразрывности

$$\omega V = \omega_0 V_0 . \qquad (3.67)$$

По формуле Торричелли (3.58)

$$V_0 = \sqrt{2gy} , \qquad (3.68)$$

а площадь сечения в верхней части сосуда $\omega = \pi x^2$. Подставляя эти выражения в (3.67), получим

$$V\pi x^2 = \omega_0 \sqrt{2gy} , \qquad (3.69)$$

отсюда уравнение клепсидры имеет вид параболы четвертой степени:

$$y = x^4 \left(\frac{\pi^2 V^2}{2g\omega_0^2} \right) . \qquad (3.70)$$

3.5.5. Распределение давления при взрыве сферического заряда под водой

Будем считать, что взрыв происходит в безграничной среде и действие его распространяется одинаково по всем направлениям, исходящим от центра взрыва. Распределение скоростей в потоке, возникающем от взрыва, будет, очевидно, таким же, как от источника с центром в точке взрыва и расходом Q, определяемым формулой

$$V = \frac{Q}{4\pi r^2}. \tag{3.71}$$

Возникающее при взрыве движение является неустановившимся, так как в начальный момент времени скорости во всех точках пространства были равны нулю, а по истечении весьма малого отрезка времени от начального момента частицы среды, находящиеся близко к центру взрыва, должны уже иметь ненулевую скорость, определяемую формулой (3.71). Будем определять распределение давлений именно в этот период времени, когда движение является еще неустановившимся.

Очевидно, для такого движения применить напрямую интеграл Бернулли не удастся, поэтому воспользуемся непосредственно интегралом Коши – Лагранжа (3.34), тем более что поле скоростей в соответствии с (3.71) имеет потенциал

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}. \tag{3.72}$$

Тогда

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho}, \tag{3.73}$$

где p_∞ – давление в пространстве до взрыва.

Величину частной производной потенциала по времени оценим следующим образом: в некоторой точке до взрыва потенциал φ был равен нулю, а после взрыва через промежуток времени Δt стал определяться выражением (3.72), поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{-\frac{Q}{4\pi r} - 0}{\Delta t} = -\frac{Q}{4\pi r}\frac{1}{\Delta t}. \qquad (3.74)$$

Подставляя (3.74) и (3.72) в (3.73), получим

$$p - p_\infty = \frac{Q\rho}{4\pi r}\frac{1}{\Delta t} - \frac{\rho Q^2}{2\left(4\pi r^2\right)^2}. \qquad (3.75)$$

Пренебрегая квадратичным членом в (3.71) для не очень маленьких значений расстояния от центра взрыва r, получим окончательное выражение для распределения давлений:

$$p - p_\infty = \frac{Q\rho}{4\pi r}\frac{1}{\Delta t}. \qquad (3.76)$$

Таким образом, давление при подводном взрыве сферического заряда возрастает при приближении к центру взрыва обратно пропорционально расстоянию до центра взрыва.

3.6. Задача

Аэродинамическая труба имеет открытую рабочую часть диаметром $d = 400$ мм (*рис. 3.4*). Спиртовой чашечный манометр присоединен к широкой части трубы, диаметр которой $D = 1$ м. Определить скорость V потока воздуха в рабочей части

аэродинамической трубы. Показание манометра $h = 150$ мм, объемный вес воздуха $\gamma_в = 12,7\ Н/м^3$, объемный вес спирта $\gamma_с = 8,0\ кН/м^3$.

Решение

Разность давлений, измеренная чашечным манометром:

$$p_1 - p_{атм} = \gamma_с h = 8000 \cdot 0,150 = 1200\ Па.$$

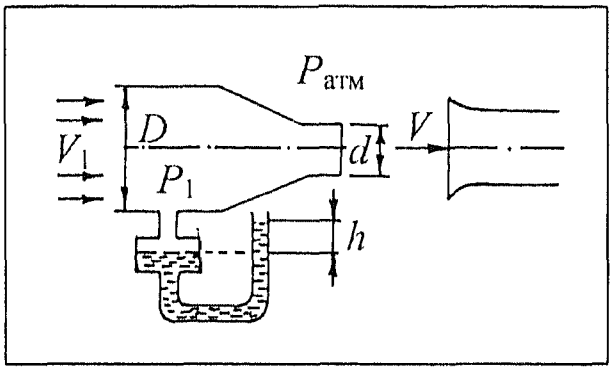


Рис. 3.4
Расчетная схема к задаче 3.1

Составим интеграл Бернулли для двух сечений потока воздуха, одно из которых – широкая часть аэродинамической трубы, другое – на входе в трубу, но перед ней, где скорость потока можно считать нулевой:

$$\frac{p_{атм}}{\gamma_в} = \frac{p_1}{\gamma_в} + \frac{V_1^2}{2g}.$$

Отсюда видно, что разность давлений, измеренная спиртовым чашечным манометром, обусловлена скоростным напором в широкой части аэродинамической трубы:

$$\frac{p_1 - p_{атм}}{\gamma_в} = \frac{V_1^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{\frac{2g}{\gamma_в}(p_1 - p_{атм})};$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81}{12,7} 1200} = 43,06\ м/с.$$

Из равенства расходов в широкой и узкой частях трубы $V_1\omega = V\omega_0$ следует, что искомая скорость потока воздуха в рабочей части трубы

$$V = V_1 \frac{\omega}{\omega_0} = V_1 \frac{D^2}{d^2} = 43,06\left(\frac{1,0}{0,4}\right)^2 = 269,1 \text{ м/с}.$$

Ответ: $V = 269,1$ м/с.

Контрольные вопросы

1. Какой фундаментальный физический закон выражается уравнением неразрывности?
2. Какой фундаментальный физический закон выражается уравнением движения в напряжениях?
3. Каким уравнением замыкается система уравнений Эйлера? Какие величины в них известны (задаются), а какие нет?
4. Что показывают уравнения Эйлера в форме Громека?
5. Как выглядит интеграл Коши – Лагранжа в общем виде? для потенциального движения?
6. Справедлив ли интеграл Бернулли для всего потока в случае вихревого движения?
7. Как выглядит интеграл Бернулли для изотермического и адиабатического газовых потоков?
8. Что называется заторможенным газом? Что такое критическая скорость потока?
9. Как выглядит интеграл Бернулли применительно к движению жидкости в гидроциклонах?
10. Частным случаем какого фундаментального физического закона является интеграл Бернулли для идеальной жидкости?

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ (ВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ

Физической причиной вязкости являются молекулярные взаимодействия между частицами жидкости или между молекулами разных жидкостей и твердых тел. Условия на границе вязкой жидкости с твердым телом отличаются от подобных же условий в идеальной жидкости.

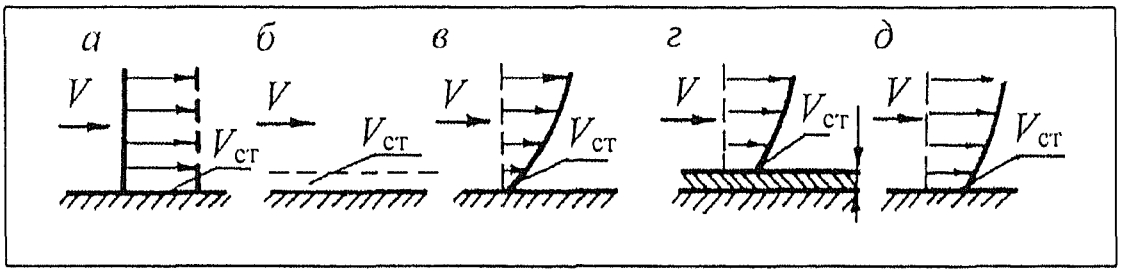


Рис. 4.1

Гипотезы распределения скоростей
на границе потока с твердым телом

Как известно, в идеальной жидкости предполагается свободное ее скольжение без трения, и эпюра распределения скоростей потока вблизи твердой поверхности представлена прямой линией при постоянстве величины самой скорости (*рис. 4.1, а*).

Для вязкой жидкости было выдвинуто несколько гипотез распределения скоростей движения по сечению потока. Так, по предположению Кулона, при отсутствии скольжения эпюра распределения скоростей потока представлена квадратичной параболой (*рис. 4.1, б*); по гипотезе Жирара и Прони (имеется связанный со стенкой неподвижный слой жидкости) – усеченной квадратичной параболой с началом на границе неподвижного слоя (*рис. 4.1, в*), а по гипотезе Навье, которая в настоящее время рассматривается как основополагающая, – усеченной квадратичной параболой с началом на границе твердого тела (*рис. 4.1, г*).

При рассмотрении закономерностей движения реальной (обладающей вязкими свойствами) жидкости будем основы-

ваться на общем уравнении движения в напряжениях в виде (3.20) и основных закономерностях Ньютона, приведенных во введении [см. (13) – (17)].

4.1. Анализ уравнений движения реальной жидкости в напряжениях. Уравнения Навье – Стокса

Перепишем уравнения движения реальной жидкости в напряжениях (3.20) таким образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = F_x + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right), \\ \dfrac{dV_y}{dt} = F_y + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial z}\right), \\ \dfrac{dV_z}{dt} = F_z + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right). \end{cases} \qquad (4.1)$$

Нетрудно видеть, что в этой системе из трех уравнений имеется как минимум десять независимых переменных: три проекции скорости, шесть компонент тензора напряжений и плотность. Следовательно, эта система является незамкнутой. Для того чтобы получить интеграл этой системы дифференциальных уравнений, необходимо кроме известного уравнения неразрывности воспользоваться и некоторыми другими соотношениями (как правило, экспериментальными). Одним из таких соотношений является закон внутреннего трения Ньютона (17).

Если записать этот закон для трехмерного движения, то для касательных компонент напряжений получим

$$\begin{cases} p_{xy} = \mu\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} + \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right), \\ p_{xz} = \mu\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial x} + \dfrac{\partial V_x}{\partial z}\right), \\ p_{yz} = \mu\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y} + \dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{4.2}$$

Для нормальных же компонент напряжений известно, что их сумма является инвариантом и не зависит от выбора направления элементарных площадок, т. е.

$$p = -\frac{1}{3}\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right). \tag{4.3}$$

Выразим нормальные напряжения через величину давления и некоторые добавочные напряжения, зависящие только от направления действия и пропорциональные соответствующим скоростям деформаций (в отличие от твердых тел, где напряжения пропорциональны соответствующим относительным деформациям):

$$\begin{cases} p_{xx} = -p + \delta p_{xx} = -p + 2\mu\dfrac{\partial V_x}{\partial x}, \\ p_{yy} = -p + \delta p_{yy} = -p + 2\mu\dfrac{\partial V_y}{\partial y}, \\ p_{zz} = -p + \delta p_{zz} = -p + 2\mu\dfrac{\partial V_z}{\partial z}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Таким образом, шесть уравнений [(4.2) и (4.4)] определяют компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости. Подставив выражения (4.2) и (4.4) в (4.1), получим

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{dV_y}{dt} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{dV_z}{dt} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \end{cases} \tag{4.5}$$

или в сокращенной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 V_x, \\ \dfrac{dV_y}{dt} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 V_y, \\ \dfrac{dV_z}{dt} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 V_z, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Если считать, что плотности распределения массовых сил F известны, а плотность и кинематическая вязкость постоянны, то система уравнений (4.5) становится замкнутой при добавлении в нее уравнения неразрывности и должна быть разрешимой относительно давления и трех компонент вектора скорости.

Уравнения в виде (4.5) носят название по имени ученых, впервые получивших их: ***уравнения Навье – Стокса.***

Общее решение уравнений Навье – Стокса не найдено, однако известно довольно большое количество его частных решений. При их отыскании необходимо задаваться некоторыми начальными и граничными условиями. В качестве на-

чальных условий обычно принимается распределение скоростей потока, а в качестве граничных – скорости или величины давлений на границах потока. При неподвижной твердой границе принимают скорость потока на ней равной нулю, а при границе, являющейся свободной поверхностью жидкости, считают давление на этой поверхности равным давлению внешней среды.

НАВЬЕ Клод Луи Мари Анри
(1785 – 1836)

Французский инженер и ученый. Образование получил в Париже, в Школе мостов и путей. С 1820 г. работал профессором в этой школе, а с 1831 г. – в Политехнической школе. В 1824 г. стал членом Парижской академии наук.

Ему принадлежат труды по строительной механике, сопротивлению материалов, теории упругости, гидравлике и гидромеханике. В 1822 г. вывел дифференциальные уравнения движения несжимаемой жидкости, а также уравнения упругости для трехмерного пространства.

Выделив в уравнениях (4.5) вихревую часть так же, как и для идеальной жидкости, запишем ***уравнения Навье – Стокса в форме Громека***, предполагая, что движение жидкости – установившееся, а массовые силы обладают потенциалом:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Phi+\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{V^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 V_x = 2\left(V_z\,\mathrm{rot}\,\vec{V}_y - V_y\,\mathrm{rot}\,\vec{V}_z\right), \\ -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Phi+\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{V^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 V_y = 2\left(V_x\,\mathrm{rot}\,\vec{V}_z - V_z\,\mathrm{rot}\,\vec{V}_x\right), \\ -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\Phi+\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{V^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 V_z = 2\left(V_y\,\mathrm{rot}\,\vec{V}_x - V_x\,\mathrm{rot}\,\vec{V}_y\right). \end{cases} \quad (4.7)$$

4.2. Интеграл Бернулли для вязкой жидкости при установившемся движении

Будем рассматривать движение жидкости вдоль линии тока. Предположим, что элементарные перемещения жидкости вдоль соответствующих осей равны dx, dy и dz. Умножим каждое из уравнений (4.7) на соответствующие проекции элементарного перемещения вдоль линии тока и просуммируем полученные выражения:

$$d\left(\Phi+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)-\nu\left(\nabla^2V_x\,dx+\nabla^2V_y\,dy+\nabla^2V_z\,dz\right)=$$

$$=-2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \operatorname{rot}V_x & \operatorname{rot}V_y & \operatorname{rot}V_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \qquad (4.8)$$

Очевидно, что определитель, стоящий в правой части выражения (4.8), равен нулю в силу пропорциональности первой и третьей строк [см. уравнение (2.11)]. Будем рассматривать последний член, стоящий в левой части выражения (4.8), как работу сил вязкости при элементарном перемещении вдоль линии тока, отнесенную к единице массы:

$$-\nu\left(\nabla^2V_x\,dx+\nabla^2V_y\,dy+\nabla^2V_z\,dz\right)=dA\,. \qquad (4.9)$$

Тогда выражение (4.8) преобразуется таким образом:

$$d\left(\Phi+\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+A\right)=0\,. \qquad (4.10)$$

Интегрируя, получим

$$\Phi + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A = \text{const}. \qquad (4.11)$$

В случае если из массовых сил действует только сила тяжести, выражение (4.11) существенно упростится:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + A = \text{const}, \qquad (4.12)$$

или, записав его для двух точек одной линии тока и отнеся все члены выражения (4.12) к единице веса, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{A_1}{g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{A_2}{g}. \qquad (4.13)$$

Обычно разность удельных работ сил вязкости, отнесенная к величине g, называется потерей напора (потерей удельной энергии) на рассматриваемом участке линии тока и обозначается $h_{\text{тр}}$. Тогда уравнение (4.13) превратится в интеграл Бернулли для установившегося движения несжимаемой вязкой жидкости:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{\text{тр}}. \qquad (4.14)$$

Однако переход от линии тока к потоку в случае вязкой жидкости оказывается совсем непростым. Дело в том, что поток вязкой жидкости является плавно изменяющимся, т.е. для него справедливы следующие условия:

$$V_x \approx V; \qquad V_y \approx 0; \qquad V_z \approx 0; \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

В этом случае в живом сечении потока местные скорости, вообще говоря, непостоянны и приходится говорить о некото-

рой средней скорости потока. Математически это приводит к тому, что в уравнении (4.12) член, ответственный за кинетическую энергию, необходимо умножить на коэффициент Кориолиса α (коэффициент кинетической энергии), равный отношению кинетических энергий потока, вычисленных по местным скоростям и по средней по живому сечению скорости:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha V^2}{2} + A = \text{const}, \qquad (4.15)$$

или, записав его для двух точек одной линии тока и отнеся все члены к единице веса, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{тр}. \qquad (4.16)$$

Следует отметить, что условиям плавной изменяемости должны удовлетворять только те сечения потока, для которых записано уравнение вида (4.16), на участке между рассматриваемыми сечениями поток может быть и не плавно изменяющимся.

Удельная кинетическая энергия массы жидкости, протекающей через живое сечение потока в единицу времени, вычисленная по местным скоростям V потока и отнесенная к единице веса движущейся жидкости:

$$E_{местн} = \frac{\int_{\omega} \frac{V^2}{2} \rho V \, d\omega}{\rho g Q} = \frac{1}{2gQ} \int_{\omega} V^3 d\omega, \qquad (4.17)$$

где Q – расход потока;

ω – площадь живого сечения.

Удельная кинетическая энергия массы жидкости, протекающей через живое сечение потока в единицу времени, вычисленная по средней скорости потока $V_{ср}$ и отнесенная к

единице веса движущейся жидкости:

$$E_{ср} = \frac{\rho Q \frac{V_{ср}^2}{2}}{\rho g Q} = \frac{V_{ср}^2}{2g}. \qquad (4.18)$$

Тогда коэффициент Кориолиса

$$\alpha = \frac{E_{местн}}{E_{ср}} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega} \left(\frac{V}{V_{ср}} \right)^3 d\omega. \qquad (4.19)$$

КОРИОЛИС Гюстав Гаспар
(1792 – 1843)



Французский механик и математик. Образование получил в Париже, в Политехнической школе, в которой с 1838 г. в качестве директора руководил занятиями. В 1836 г. стал членом Парижской академии наук.

Ему принадлежат труды «Трактат о механике твердых тел и о расчете действия машин» и «Об уравнениях относительного движения системы тел», в которых он дал окончательное оформление теории относительного движения на базе введенной им «силы инерции». Кроме того, открыл явление ползучести.

Если рассматривать местную скорость как сумму средней $V_{ср}$ и некоторой знакопеременной добавки ΔV, то подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\left(1 + \frac{\Delta V}{V_{ср}}\right)^3 = 1 + 3\left(\frac{\Delta V}{V_{ср}}\right)^2 + 3\left(\frac{\Delta V}{V_{ср}}\right) + \left(\frac{\Delta V}{V_{ср}}\right)^3. \qquad (4.20)$$

Очевидно (в силу знакопеременности величины ΔV), что интегралы от двух последних членов выражения (4.20) должны быть равны нулю, поэтому коэффициент Кориолиса можно выразить так:

$$\alpha = 1 + \frac{3}{\omega}\int_{\omega}\left(\frac{\Delta V}{V_{ср}}\right)^2 d\omega, \qquad (4.21)$$

откуда понятно, что он не может быть меньше единицы.

Коэффициент Кориолиса определяется экспериментально. Обычно для прямолинейного турбулентного движения жидкости в трубах $\alpha \approx 1{,}05 - 1{,}10$, для прямолинейного турбулентного движения жидкости в каналах $\alpha \approx 1{,}10 - 1{,}25$, для прямолинейного ламинарного движения жидкости в трубах $\alpha \approx 2{,}0$. В криволинейных потоках коэффициент Кориолиса может принимать существенно бóльшие значения.

4.3. Кавитация

Представим себе движение реальной жидкости в сужающейся горизонтальной трубе. В соответствии с интегралом Бернулли (4.16) величина давления в узком сечении трубы (характеристики с индексом 2), выраженная через характеристики широкого сечения (индекс 1), будет следующей:

$$p_2 = p_1 - \frac{\alpha\rho}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right). \qquad (4.22)$$

Очевидно, что в соответствии с выражением (4.22) в некотором сечении потока может возникнуть нулевое, а возможно и отрицательное, давление. Однако в реальных условиях этого не происходит, ибо при пониженном давлении, возникающем в результате возрастания скорости потока, про-

исходит закипание жидкости и образование в ее потоке полостей, заполненных паром или газом. Это явление называется ***кавитацией***.

Появление кавитации всегда вызывает потерю энергии, т.е. добавочное сопротивление движению жидкости. Это явление сопровождается появлением так называемых кавитационных шумов. При кавитации происходит разрушение стенок труб, направляющих поток жидкости. Вообще говоря, кавитация может возникать не только при движении жидкости в сужающихся трубах, но и при внешнем обтекании тел потоком (известно кавитационное разрушение лопастей гребных винтов кораблей и колес турбин).

В качестве критерия, определяющего кавитационные свойства, применяют так называемое число кавитации:

$$\sigma = \frac{p - p_k}{\frac{1}{2}\rho V^2}, \qquad (4.23)$$

где p_k – давление парообразования.

4.4. Задача

Для забора водно-грунтовой смеси из резервуара при разработке грунтов гидромонитором используется водоструйный насос (его устройство показано на *рис. 4.2*). Определить высоту h, на которую можно поднять водно-грунтовую смесь плотностью $\rho_0 = 1100$ кг/м^3 из резервуара при пропускании через водоструйный насос чистой воды в количестве $Q = 20$ л/с под абсолютным давлением $p_1 = 120$ кН/м^3, если диаметр подводящей трубы $d_1 = 20$ см, а выходного сечения сопла $d_2 = 5$ см? Потерями напора на трение пренебречь.

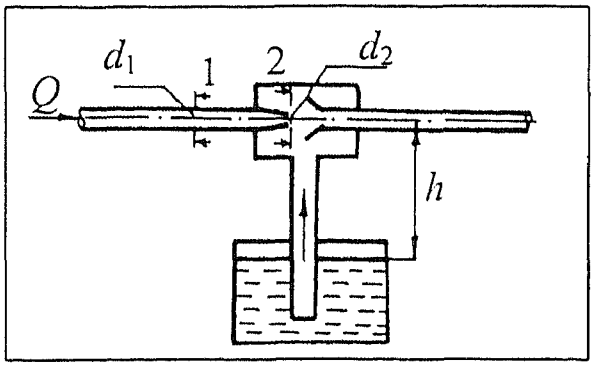


Рис. 4.2
Бодоструйный насос

Решение

Запишем интеграл Бернулли для двух сечений потока чистой воды (см. *рис. 4.2*) в подводящей трубе *1*, в выходном сечении сопла *2*:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{тр}.$$

В этом уравнении $z_1 = z_2 = 0$, а $h_{тр} = 0$ по условию. Тогда

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}.$$

Определим скорости V_1 и V_2:

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,020}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,64 \text{ м/с};$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0,020}{\pi \cdot 0,05^2} = 10,19 \text{ м/с}.$$

При этом числа Рейнольдса в каждом из сечений превышают критическую величину:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{V_1 d_1}{\nu} = \frac{0,64 \cdot 0,20}{1 \cdot 10^{-6}} \approx 127\,300 \gg 2320;$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{V_2 d_2}{\nu} = \frac{10{,}19 \cdot 0{,}05}{1 \cdot 10^{-6}} \approx 509300 \gg 2320 ,$$

поэтому коэффициенты Кориолиса в интеграле Бернулли можно принять следующими: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Тогда давление на выходе из сопла:

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = 120 + \frac{0{,}64^2 - 10{,}19^2}{2} = 68{,}3 \text{ кПа}.$$

Так как давление на выходе из сопла оказалось меньше атмосферного, то в корпусе насоса возникает вакуум, за счет чего насос и сможет поднимать водно-грунтовую смесь. Величина вакуума:

$$p_{\text{вак}} = p_{\text{атм}} - p_2 = 101{,}3 - 68{,}3 = 33 \text{ кПа} ,$$

искомая высота:

$$h = \frac{p_{\text{вак}}}{\rho_0 g} = \frac{33000}{1100 \cdot 9{,}81} = 3{,}06 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 3{,}06$ м.

Контрольные вопросы

1. Какие законы распределения скоростей движения по сечению потока вам известны?
2. Замкнута ли система уравнений Навье – Стокса? Относительно каких переменных она разрешима?
3. Что обычно выбирают в качестве начальных и граничных условий для решения системы уравнений Навье – Стокса?
4. Как выглядит интеграл Бернулли для установившегося движения несжимаемой вязкой жидкости и в чем его отличие от такого же интеграла для идеальной жидкости?

5. Что называется коэффициентом Кориолиса и какова его физическая сущность?
6. Может ли коэффициент Кориолиса быть меньше единицы? равен единице? больше единицы?

Глава 5

ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

При выполнении различных гидромеханических исследований на практике часто приходится измерять величины таких гидромеханических характеристик, как уровень жидкости (в резервуарах, открытых водоемах, скважинах и т.д.), давление жидкости или газа, местные скорости потока, расход жидкости или газа. Описанию принципов действия соответствующих приборов и методов измерений и посвящена данная глава.

5.1. Уровнемеры (приборы для измерения уровня жидкости)

Уровнемерное (водомерное) стекло (*рис. 5.1*) представляет собой стеклянную трубку, присоединенную к резервуару, в котором измеряется высота уровня жидкости, и снабженную шкалой, отградуированной в линейных единицах. Нуль шкалы расположен на высоте, от которой производится отсчет уровня. Так как давление на поверхности жидкости в резервуаре и трубке одинаково, то измерение сводится к определению уровня в трубке. Недостаток уровнемерных стекол – связь высоты места наблюдения с положением измеряемого уровня жидкости, а основная систематическая погрешность прибора обусловлена капиллярностью. Для уменьшения влияния капиллярности на показания прибора уровнемерные стекла изготовляются из трубок достаточно большого диаметра (при измерении уровня воды – не менее 12–15 мм). Поправка на влияние капиллярности может быть учтена установкой нуля шкалы на уровне мениска в трубке при начальном уровне в резервуаре (т. е. смещением нуля шкалы вверх на величину капиллярного подъема жидкости).

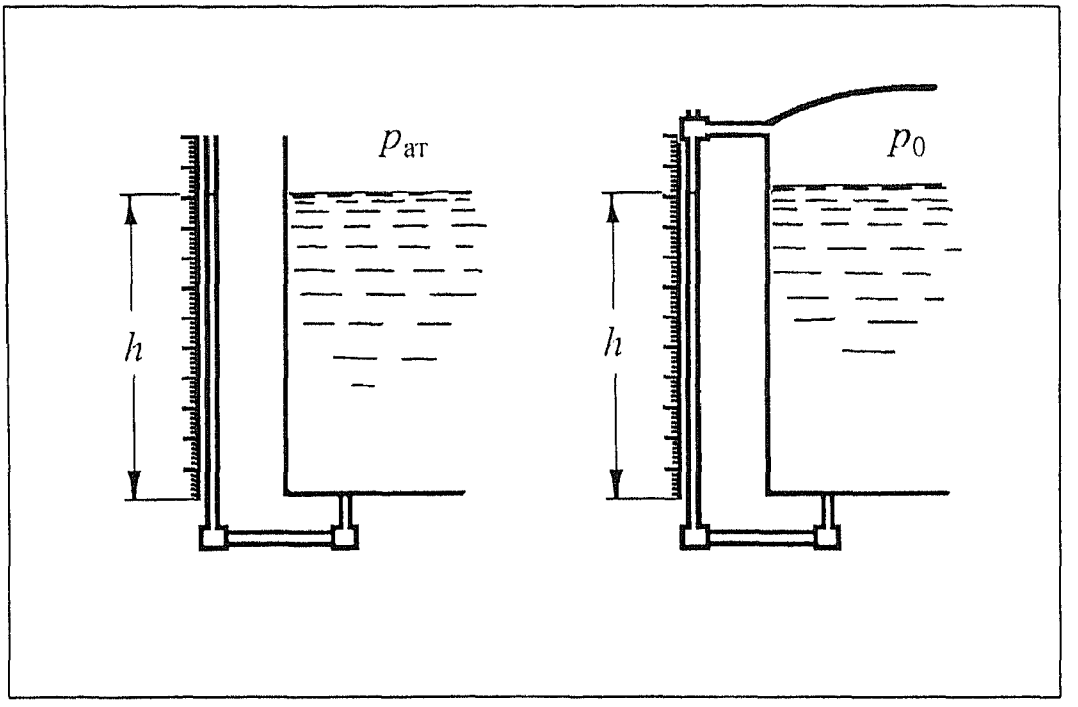


Рис. 5.1
Конструкция уровнемерных (водомерных) стекол

Игольчатый уровнемер (*рис. 5.2*) представляет собой иглу, укрепленную на нижнем конце штанги, снабженной указателем, и имеющую возможность перемещаться по вертикали. При измерении острие иглы устанавливают на уровень жидкости и снимают отсчет по линейной шкале. На *рис. 5.2* изображена одна из возможных конструктивных схем игольчатого уровнемера. Штанга *1* с иглой и указателем *2* перемещается в направляющих отверстиях ползуна *3*. С помощью микрометрического винта *4* ползун может перемещаться в направляющем пазе неподвижного кронштейна *5*. При перемещении штанги или ползуна указатель скользит по шкале *6*. Положение штанги фиксируется упорным винтом *7*. При измерении отпускается упорный винт, перемещением штанги от руки игла подводится к свободной поверхности жидкости и фиксируется упорным винтом; с помощью винта *4*

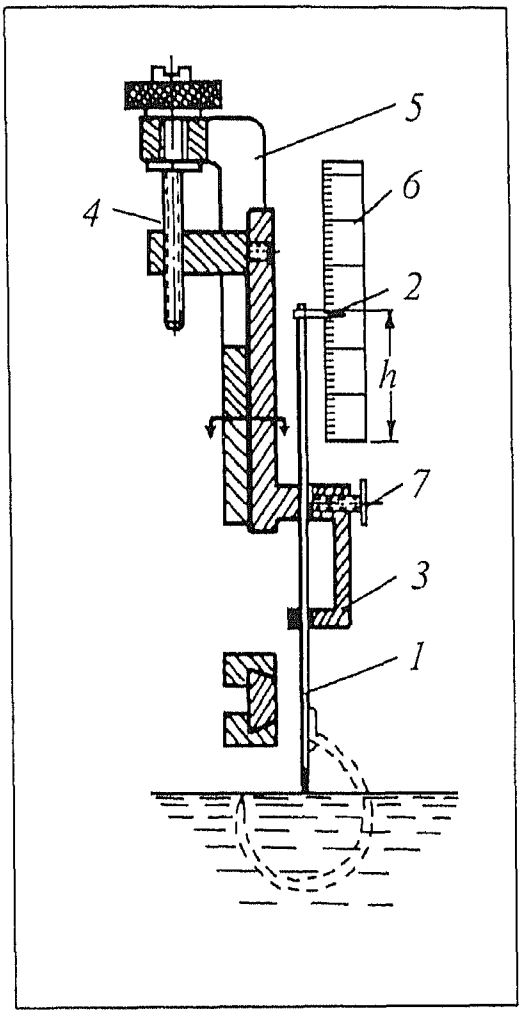


Рис. 5.2
Игольчатый уровнемер

острие иглы доводится до соприкосновения с поверхностью жидкости и производится отсчет по шкале прибора.

Источником случайных погрешностей при измерениях игольчатым уровнемером является не только несовершенство органов чувств наблюдателя, но и прилипание жидкости к острию иглы, вызывающее некоторую неточность установки острия на уровень. Для увеличения точности обычно применяют иглу с двумя разнонаправленными остриями: одно – вверх, другое – вниз.

Поплавковый уровнемер (*рис. 5.3*) представляет собой поплавок *1*, помещенный на измеряемый уровень жидкости и снабженный вертикальной штангой с указателем *2*, который при перемещении уровня скользит вдоль неподвижной линейной шкалы *3*. Горизонтальные перемещения поплавка ограничиваются различными направляющими устройствами *4*. В тех случаях, когда неудобно установить поплавок непосредственно на измеряемый уровень, его помещают в специальный колодец, сообщающийся с резервуаром, в котором измеряется уровень. Точность измерений сильно зависит от точности градуировки шкал, температурных колебаний, а также

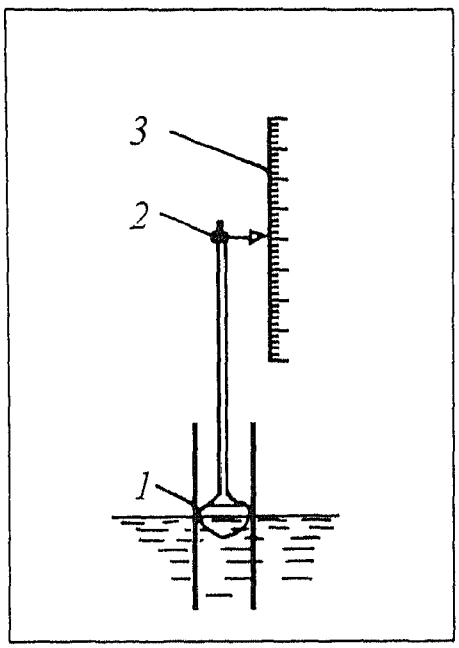


Рис. 5.3
Поплавковый уровнемер

от механических сопротивлений в направляющих устройствах.

Все вышеописанные приборы позволяют проводить измерения лишь в том случае, если обеспечен непосредственный доступ к свободной поверхности жидкости. Однако в практике горного дела такие случаи нечасты, и для измерения уровня воды, например, в скважине приходится пользоваться специальными приспособлениями.

Для измерения уровня воды в водоносном пласте и эксплуатируемой скважине могут быть применены принципиально одни и те же методы. Правда, площадь сечения скважины (фактически она сама является водомерной трубкой), которая может быть для этого использована, сильно ограничена. Для указанных целей существует несколько типов приборов измерения уровня воды.

Пневматический прибор. При замере уровня в открытую мерную трубу, помещенную ниже уровня воды, нагнетается насосом воздух, вытесняющий из нее воду. Создаваемое при этом давление воздуха в трубе соответствует глубине ее погружения. Манометр, применяемый для измерения избыточного давления воздуха, должен иметь шкалу по возможности большого диаметра с тем, чтобы обеспечить надежные показания и при малой высоте столба воды (около 0,5 м). Точность измерений этим методом составляет примерно 3 %.

Прибор типа «Aegir». Принцип действия прибора основан на том, что колебания уровня воды в скважине вызывают пропорциональные изменения силы тока в электрических датчиках сопротивлений, помещенных в скважину. Благодаря электропроводности вода замыкает контакты и шунтирует находящуюся под водой часть сопротивлений.

Поплавковый прибор. Принцип действия прибора основан на использовании гидростатической подъемной силы воды. Изменение уровня воды в скважине приводит в движение поплавок, помещенный в скважину, и его перемещение передается с помощью троса на индикаторное устройство. Благодаря относительно малому конструктивному размеру поплавка этот прибор может с успехом использоваться в трубах диаметром не менее 50 мм.

5.2. Приборы для измерения давления

Приборы для измерения давления делятся на группы по различным признакам.

По характеру определяемой величины они делятся на приборы для измерения:

- атмосферного давления – барометры;
- разности абсолютного и атмосферного давлений, т. е. избыточного давления или вакуума, называемые соответственно манометрами или вакуумметрами. Приборы, измеряющие как избыточное давление, так и вакуум, называют мановакуумметрами;
- абсолютного давления – манометры абсолютного давления. Абсолютное давление измеряется в технике обычно с помощью двух приборов – манометра и баро-

метра, если измеряемое давление больше атмосферного, и барометра и вакуумметра, если измеряемое давление меньше атмосферного;

- разности давлений – дифференциальные манометры.

По принципу действия приборы делятся на жидкостные, пружинные, грузопоршневые, электрические и комбинированные.

К жидкостным относятся приборы, основанные на гидростатическом принципе действия, заключающемся в том, что измеряемое давление уравновешивается давлением столба жидкости, высота которого служит мерой давления. В пружинных приборах действию измеряемого давления подвергается упругий элемент (трубка, мембрана, сильфон). Под действием давления возникает деформация упругого элемента, величина которой служит мерой давления. В грузопоршневых приборах измеряемое давление, действующее на поршень, уравновешивается приложенной к нему внешней силой (обычно грузом), которая и служит мерой давления. Действие электрических приборов основано на изменении под давлением электрических свойств некоторых материалов (например, зависимость омического сопротивления некоторых сплавов от давления среды, окружающей проводник, используется при измерении высоких давлений; появление электрических зарядов на поверхности кристаллического диэлектрика при сжатии и растяжении кристалла используется при измерении быстроизменяющихся давлений). К комбинированным приборам относятся приборы, принцип действия которых носит смешанный характер (например, электромеханические приборы). Рассмотрим лишь наиболее часто употребляющиеся в практике приборы.

Самый простой жидкостный прибор для измерения давления – ***ртутный барометр*** (*рис. 5.4*) – состоит из открытой в

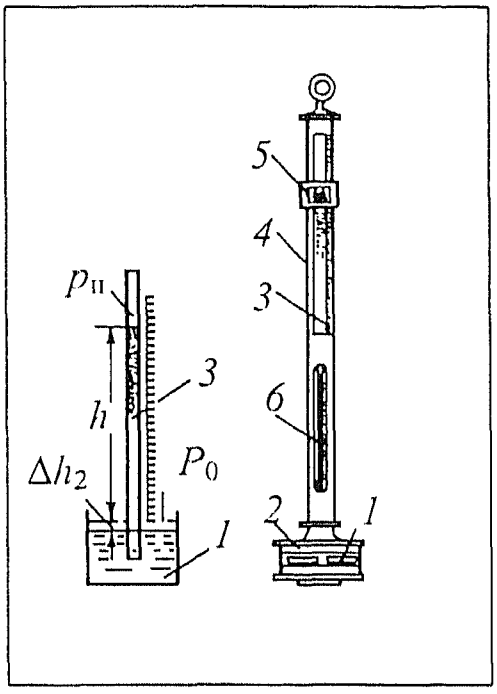


Рис.5.4
Ртутный барометр

атмосферу чашки *1*, заполненной ртутью, и стеклянной трубки *2*, верхний конец которой запаян, а нижний опущен ниже уровня ртути. Воздух из трубки удален, вследствие чего трубка заполняется насыщенными парами ртути, давление которых $p_п$ мало (при 20 °С оно составляет доли паскаля). Атмосферное давление p_0, действуя на поверхность ртути в чашке, поднимает ртуть в трубке на такую высоту h, при которой сумма давлений столба ртути и ее паров $p_п$ уравновешивается атмосферным давлением. Эта высота отсчитывается по обычной линейной шкале *3*. Атмосферное давление определяется по формуле

$$p_{атм} = p_п + \rho g\left(h + \Delta h_1 + \Delta h_2\right), \qquad (5.1)$$

где ρ – плотность ртути;

Δh_1 – поправка на капиллярность, $\Delta h_1 = 0{,}01/d$;

Δh_2 – поправка на опускание ртути в чашке (d и D – диаметры соответственно чашки и сосуда),

$$\Delta h_2 = \frac{h}{\left(D/d\right)^2 - 1}.$$

Обычно все описанные поправки учитываются сразу при градуировке линейной шкалы барометра.

Пьезометр применяется для измерения избыточного давления и представляет собой стеклянную, установленную

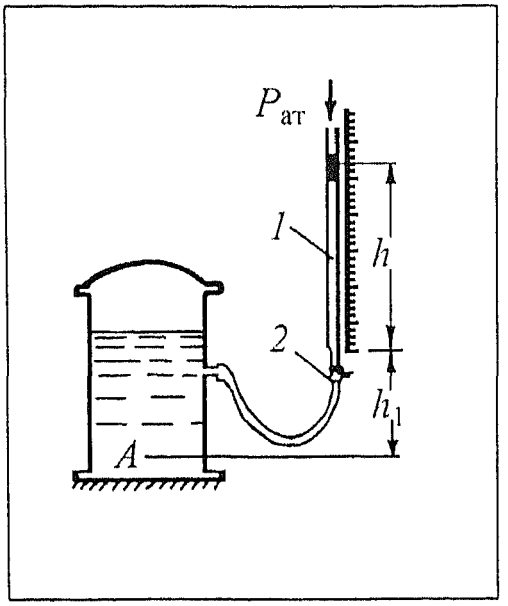


Рис. 5.5
Пьезометр

строго вертикально трубку *1* (*рис. 5.5*) с открытым в атмосферу верхним концом. Нижний конец трубки соединяется с местом измерения давления. Для отключения прибора и удаления из соединительной трубки воздуха устанавливается трехходовой кран *2*. Под действием давления жидкость в трубке поднимается на высоту h, измеряемую по линейной шкале.

Величина избыточного давления в любой точке A жидкости определяется по формуле

$$p_{изб} = \rho g\left(h - h_A\right), \qquad (5.2)$$

где ρ – удельный вес жидкости;

h – показание пьезометра;

h_A – глубина точки A относительно уровня нуля шкалы прибора.

U-образный мановакуумметр (*рис. 5.6*), также предназначенный для измерения избыточного давления, представляет собой U-образную стеклянную трубку *1*, заполненную частично жидкостью, плотность которой выше, чем плотность той жидкости, давление которой измеряется. Одно из колен трубки соединяется с тем местом, где измеряется давление, другое – имеет выход в атмосферу. Разность высот уровней жидкости в коленах и является показанием прибора.

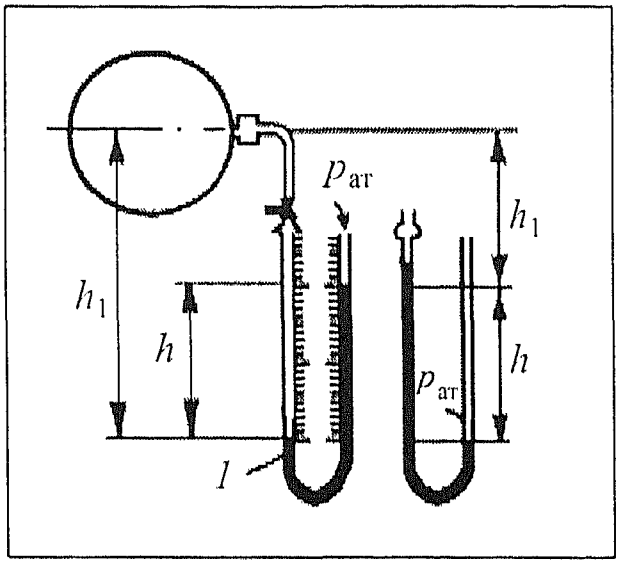


Рис. 5.6

U-образный мановакуумметр

ВИВИАНИ Винченцо
(1622 – 1703)



Итальянский ученый, член Флорентийской академии опытов, ученик Галилео Галилея. Был математиком у герцога Тосканского Фердинанда II, член Лондонского королевского общества и Парижской академии наук.

По поручению Э. Торричелли выполнил опыт, доказывающий существование атмосферного давления, и сконструировал, исходя из идеи того же Торричелли, ***первый барометр.*** В 1656 г. совместно с Дж. Борелли определил скорость звука в воздухе, получив более точные результаты, чем его предшественники. По идее Галилея построил маятниковые часы.

Величина избыточного давления в произвольной точке жидкости *A* при этом составит

$$p_{изб} = \pm \rho g h \pm \rho_{рт} g h_1, \qquad (5.3)$$

где ρ – плотность жидкости, заполняющей сосуд;

$\rho_{рт}$ – плотность ртути.

Знак «+» в этой формуле соответствует избыточному давлению, а знак «–» – разрежению (вакууму).

Левая часть *рис. 5.6* соответствует избыточному давлению жидкости в сосуде, а правая часть – вакууму в сосуде.

Чашечный манометр и вакуумметр принципиально представляют собой тот же *U*-образный мановакуумметр, у которого одно из колен трубки заменено чашкой, и поэтому подробно рассматриваться нами не будут.

Для измерения разности давлений применяется ***дифференциальный манометр***. Вообще говоря, разность давлений может быть легко вычислена по показаниям двух приборов для измерения давления, подключенных в интересующих нас точках. На первый взгляд, надобность в специальном приборе для измерения именно разности давлений неочевидна. Однако оказывается, что предложенная схема измерений двумя приборами не позволяет измерить разность давлений в том случае, когда разность давлений мала, а сами давления весьма велики.

Принципиальная схема дифференциального манометра приведена на *рис. 5.7*. Дифференциальный манометр состоит из *U*-образной стеклянной трубки, примерно до середины заполненной рабочей жидкостью. Колена трубки присоединяются к местам измерения давления. Под действием разности давлений рабочая жидкость в коленах перемещается. Показание h манометра связано с разностью давлений $p_{ман_1} - p_{ман_2}$ на уровнях рабочей жидкости в коленах соотношением

$$p_{ман_1} - p_{ман_2} = \rho_{ж} g h, \qquad (5.4)$$

где $\rho_ж$ – плотность рабочей жидкости.

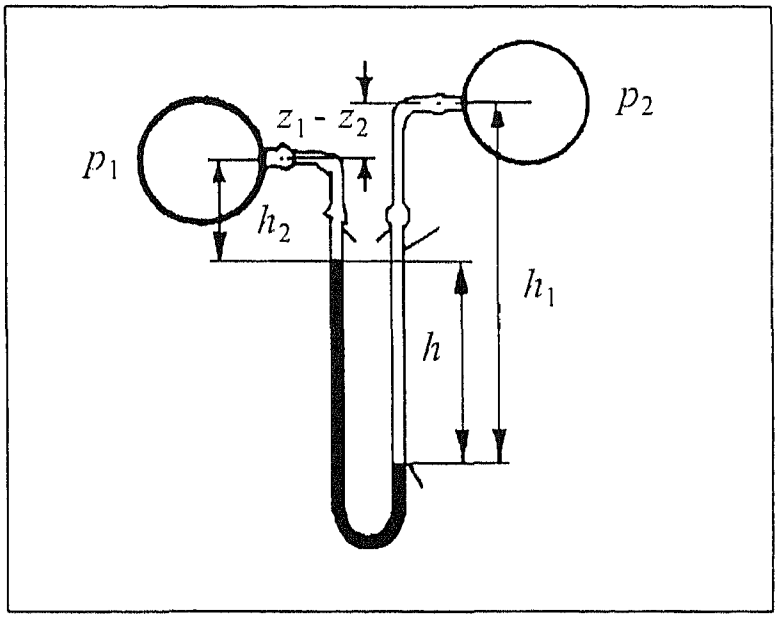


Рис. 5.7
Дифференциальный манометр

Чтобы определить разность давлений, нужно выразить давления p_1 и p_2 через давления $p_{ман_1}$ и $p_{ман_2}$:

$$p_1 = p_{ман_1} - \rho g h_1; \qquad p_2 = p_{ман_2} - \rho g h_2, \tag{5.5}$$

где ρ – удельный вес жидкости, заполняющей соединительные трубки прибора.

Из этих соотношений следует, что

$$p_1 - p_2 = g h \left(\rho_ж - \rho\right). \tag{5.6}$$

Таким образом, по показанию h прибора можно вычислить разность гидростатических напоров в двух точках, к которым подключены колена трубки дифференциального манометра.

Дифференциальный пьезометр (*рис. 5.8*) представляет собой две стеклянные трубки *1* и *2*, присоединенные нижними концами к местам замера давлений. Верхние концы трубок укреплены в колодке *3*, имеющей канал *4*, с помощью которого трубки сообщаются. Канал *4* через вентиль сообщается с воздушной линией, из которой в трубки подводится воздух под давлением p, меньшим, чем давления p_1 и p_2. Для отключения прибора и удаления воздуха из жидкости в трубках установлены трехходовые краны *5* и *6*.

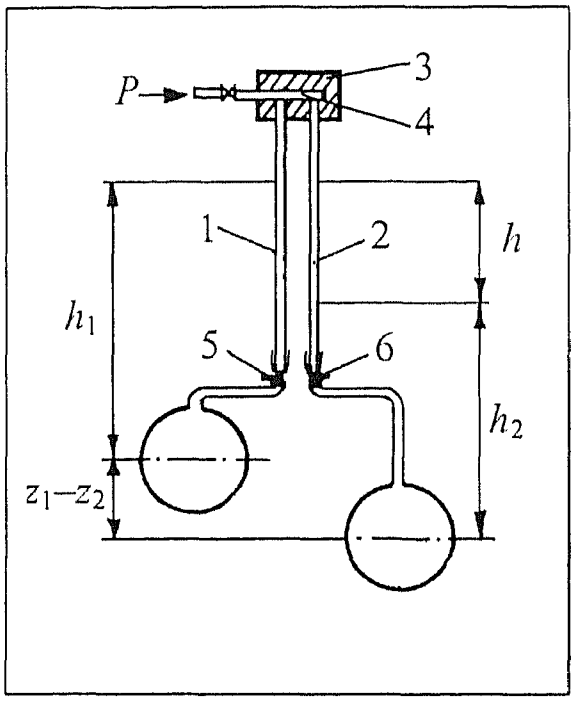


Рис. 5.8
Дифференциальный пьезометр

Под действием разных по величине давлений p_1 и p_2 жидкость с плотностью ρ в трубках устанавливается на разных высотах h_1 и h_2, причем

$$p_1 = \rho g h_1 \quad \text{и} \quad p_2 = \rho g h_2 . \tag{5.7}$$

Тогда

$$p_1 - p_2 = \rho g h - \rho g (z_1 - z_2), \qquad (5.8)$$

где h – показание прибора (разность уровней жидкости в пьезометрах);

$z_1 - z_2$ – разность высотных отметок точек измерения.

Из приведенных формул видно, что показание h прибора не зависит от величины давления p воздуха, который подводится к прибору лишь для того, чтобы понизить уровень жидкости в трубках до приемлемой высоты.

У ***пружинных приборов*** для измерения давления, принцип действия которых аналогичен жидкостным приборам, конструктивное исполнение несколько иное. Они подразделяются на приборы с трубчатой пружиной и мембранные приборы.

Основной деталью прибора с *трубчатой пружиной* (*рис. 5.9*) является согнутая по дуге окружности полая трубка, имеющая в сечении овальную форму. Большая ось овала перпендикулярна плоскости трубки. Один конец трубки запаян, а измеряемое давление подводится через ее открытый конец. Под действием давления трубка деформируется: большая ось овала уменьшается, а малая – увеличивается. В силу возникающих в трубке напряжений появляется момент, раскручивающий трубку, и стрелка прибора, связанная со свободным концом трубки через передаточный механизм, поворачивается на определенный угол, по которому и судят о величине измеряемого давления.

Упругим элементом *мембранного прибора* является мембрана *1* (*рис. 5.10*), представляющая собой гофрированную металлическую пластинку, закрепленную между фланцами нижней и верхней частей корпуса прибора. На мембрану через канал штуцера *2* передается давление, под действием

которого мембрана прогибается. Через поводок *3*, зубчатый сектор *4* и трубку прогиб передается на стрелку прибора, скользящую по шкале. Мембранные приборы применяются для измерения вакуума и избыточного давления, не превышающего 25 атм.

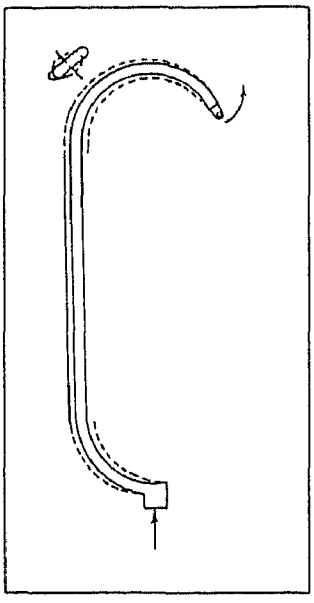


Рис. 5.9
Прибор с трубчатой пружиной

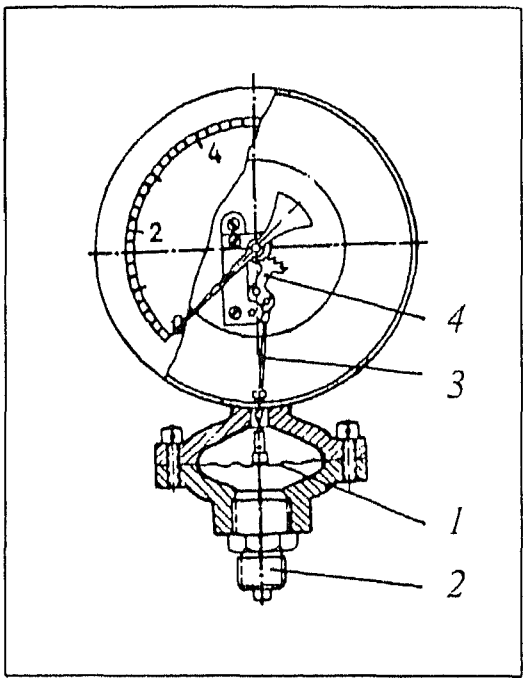


Рис. 5.10
Мембранный манометр

Портативность, универсальность, простота устройства и применения, огромный диапазон измеряемых давлений являются ценными качествами пружинных приборов, обусловившими их широкое применение. Основной недостаток пружинных приборов – непостоянство их показаний (при одной и той же величине измеряемого давления), вызываемое рядом причин: упругим последействием деформируемого элемента,

постепенным изменением упругих свойств этого элемента, возможным возникновением остаточной деформации в нем, износом передаточного механизма.

Особую группу составляют ***грузопоршневые приборы*** для измерения давления. Простейший грузопоршневой манометр (*рис. 5.11*) состоит из цилиндра *1* и плунжера *2*, в верхней части которого расположена тарелка *3* для установки грузов. Плунжер тщательно пришлифован к внутреннему каналу цилиндра. Цилиндр заполнен жидкостью и соединяется с мостом измерения трубкой *4* с трехходовым краном *5*. Силу давления жидкости на плунжер уравновешивают грузами. Зная вес грузов, можно вычислить величину давления под плунжером.

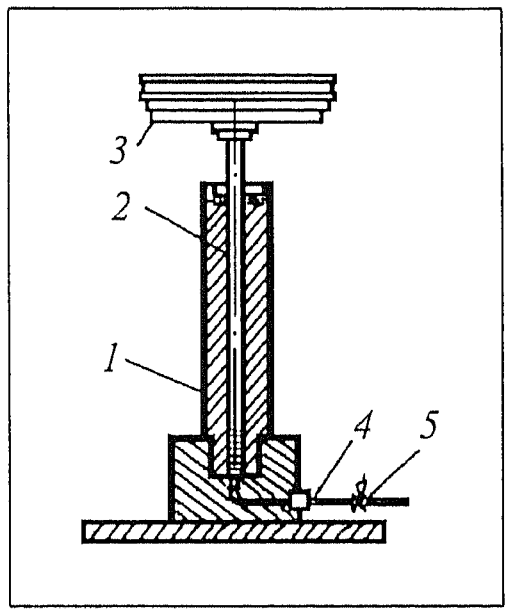


Рис. 5.11
Грузопоршневой манометр

Грузопоршневые манометры являются наиболее точными приборами для измерения больших давлений, в силу

чего они широко применяются как образцовые для поверок других приборов.

5.3. Приборы для измерения скорости потока

В экспериментальной механике жидкостей и газов чаще всего необходимо измерять скорость потока. Разработано много методов определения скоростей, для этого создано огромное количество различных приборов. Из всех методов, применяемых для измерения скоростей, отметим некоторые.

Механический метод (используются приборы типа вертушек, анемометров, доски Вильда и пр.). В основе метода лежит непосредственное механическое воздействие потока на приемный элемент прибора.

Пневматический метод (применяется большое число различных насадков – трубки, цилиндрические и шаровые зонды и др.). В этих приборах принимающим и передающим элементом является некоторый объем жидкости или газа, а скорость вычисляется по величине измеренного давления.

Кинематический метод (используются приборы, позволяющие определять скорость переноса ионизированных или нагретых объемов среды, освещенных или светящихся частиц и др.). Метод основан на определении скорости движения частиц среды или субстанции.

Способ измерения скоростей ***по количеству тепла***, снятого с приемника. К приборам, основанным на этом методе, относятся прежде всего различного вида термоанемометры.

Электрический метод (используются пьезоэлектрические, индуктивные, емкостные, магнитострикционные и другие датчики). Скорость потока определяют измерением давлений электрическими датчиками.

Акустический метод. Скорость потока определяют по распространению в нем звука.

Оптический метод измерения основан на оптических явлениях в движущейся жидкости.

Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Выбор метода измерения зависит от особенностей поставленной задачи. Так, для измерения местных скоростей, быстро изменяющихся во времени, нельзя использовать приборы, работающие по первым трем способам. Акустический и оптический методы наиболее эффективны при изучении потоков со сверхзвуковыми скоростями. Кинематический метод может с успехом применяться как абсолютный метод при тарировке приборов.

Рассмотрим методы измерения скорости потока трубками и термоанемометрами.

5.3.1. Трубки для измерения скорости потока

При расчете скоростей потока по показаниям трубок для измерения скорости используется уравнение Бернулли.

Измерение скорости ***гидродинамической трубкой*** основано на следующем принципе (*рис. 5.12*): если в поток поместить изогнутую под углом трубку *1*, направив один из ее концов навстречу потоку (входное отверстие — в заданной мерной точке *A*), а другой конец открыть в атмосферу, то в такой трубке (трубке полного напора) жидкость поднимется до высоты h_1 и давление p_1, создаваемое столбом жидкости в трубке, уравновесит полное давление в точке торможения потока перед трубкой

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho V^2}{2}, \qquad (5.9)$$

где ρ – плотность жидкости;

V – скорость потока в мерной точке;

p_0 – избыточное статическое давление в мерной точке.

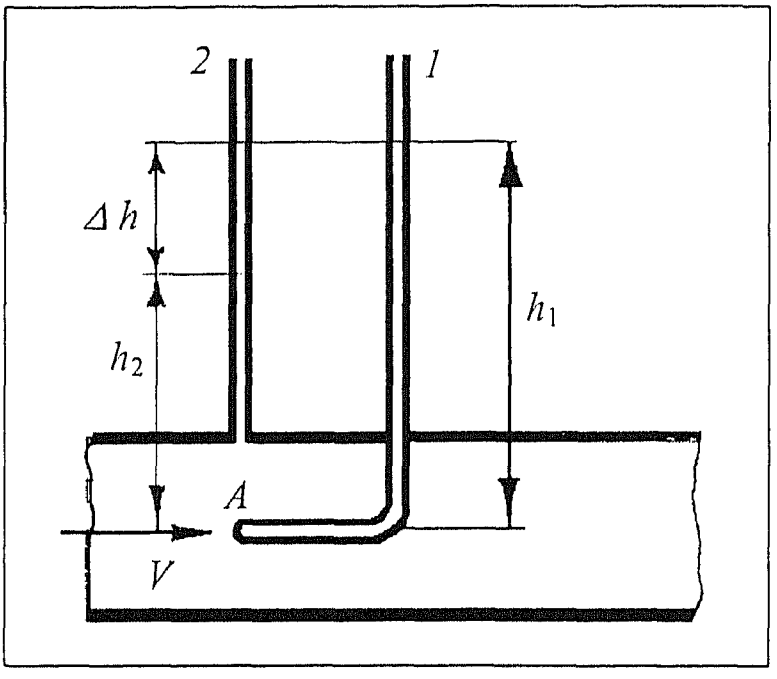


Рис. 5.12

Гидродинамическая трубка:
1 – трубка полного напора; *2* – трубка статического напора

Давление p_2 можно измерить с помощью трубки *2* статического напора (пьезометрической трубки). Измерив разность уровней жидкости в трубках, можно вычислить скорость потока в месте установки трубок:

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V^2}{2g}, \qquad (5.10)$$

откуда

$$V = \sqrt{2gh}\,. \qquad (5.11)$$

Гидродинамическая трубка представляет собой комбинацию двух указанных трубок в одном приборе, и ее конструкция приведена на *рис. 5.13*.

5.3.2. Термоанемометры

Принцип измерения скорости ***термоэлектрическим анемометром*** основан на изменении электрического сопротивления проволоки при изменении температуры. Термоанемометр представляет собой помещенную в поток тонкую проволоку, через которую пропускается электрический ток. Измерение скорости возможно двумя способами: при первом способе температура проволоки при помощи регулируемого сопротивления поддерживается постоянной и измеряется мощность нагревателя, возмещающего потерю тепла; при втором способе мощность нагревателя поддерживается постоянной и измеряется температура проволоки. Зависимость между измеренной величиной и скоростью потока устанавливается предварительным тарированием прибора. Термоанемометры дают возможность измерять малые скорости, скорости вблизи твердых границ и переменные во времени скорости, измерение которых гидродинамической трубкой связано с большими погрешностями.

Впервые трубки для измерения скорости потока воды были применены в 1732 г. французским ученым Пито. Он показал, что обычная стеклянная трубка, опущенная в поток, позволяет определить полный напор и величину скорости. Поэтому трубки, имеющие лишь одно отверстие в критической точке, т. е. трубки для измерения полного напора, называют трубками Пито.

Трубки, имеющие отверстия в критической точке и статическое отверстие, называют трубками Пито – Прандтля (*рис. 5.13*).

Формулы (5.10) – (5.11) справедливы для потоков с небольшими скоростями. При измерениях в потоках газа с большими скоростями плотность его будет переменной и для расчета скорости надо пользоваться формулой Сен-Венана (индекс «0» относится к нормальным условиям, k – показатель адиабаты):

$$V = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}\frac{2k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \qquad (5.12)$$

Эта формула пригодна не для всех случаев, а лишь для движения газа с дозвуковыми скоростями.

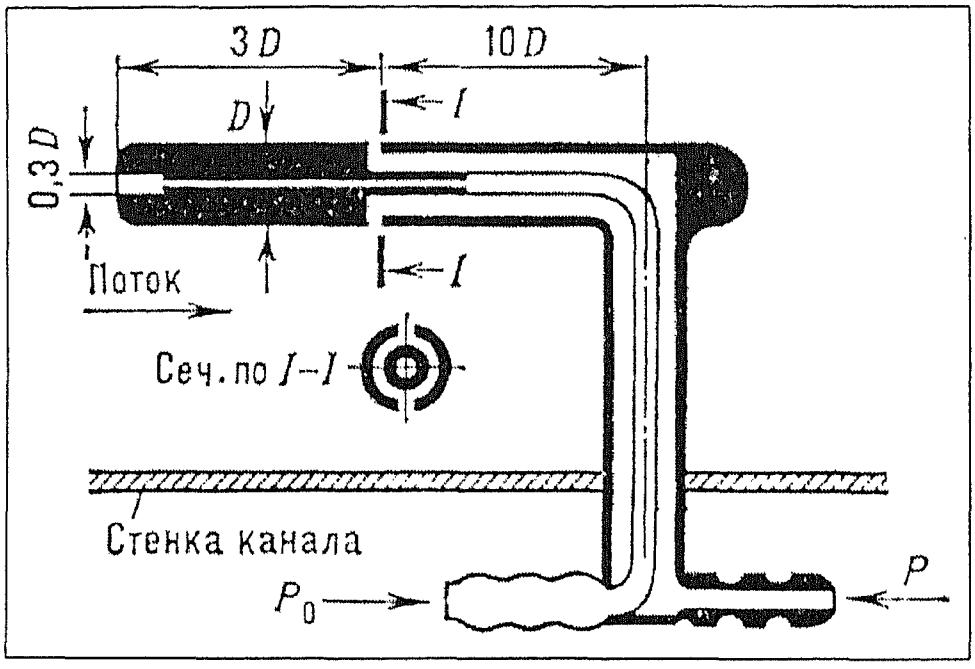


Рис. 5.13

Трубка Пито – Прандтля

5.4. Приборы для измерения расхода жидкостей

На практике часто приходится измерять расход жидкостей. Приборы для измерения их расхода можно разделить на следующие группы:

- ***объемные мерники*** жидкости (замеряется время заполнения определенного сосуда), пригодны для жидких сред;
- ***приборы для измерения скорости потока*** (тахометры), перерасчет расхода осуществляется путем умножения определенной прибором скорости потока на площадь его сечения;
- ***сужающие устройства*** (диафрагмы, сопла, трубы Вентури);
- ***расходомеры обтекания*** (ротаметры), положение измерителя определяется динамическим давлением обтекающего его потока.

Подробнее рассмотрим принцип измерения расхода с помощью трубы Вентури. Расходомер (труба) Вентури представляет собой вставку в основную трубу диаметром D участка трубы меньшего диаметра d, соединенного с основной частью коническими переходами (*рис. 5.14*). В основной трубе и в узкой вставке имеются пьезометры, по показаниям которых определяется расход потока в соответствии с интегралом Бернулли (для простоты выкладок будем считать, что труба имеет круглое сечение, точки *1* и *2* расположены на оси потока и расстояние между сечениями весьма мало, в силу чего можно пренебречь потерями напора в сужении потока и считать, что характер течения не меняется от сечения к сечению). Тогда составляя интеграл Бернулли для широкой (сечение *1*) и узкой (сечение *2*) частей расходомера, получим

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g}, \qquad (5.13)$$

или, если $\alpha = 1$,

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}. \qquad (5.14)$$

Поскольку

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = h, \qquad (5.15)$$

то верно соотношение

$$h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}. \qquad (5.16)$$

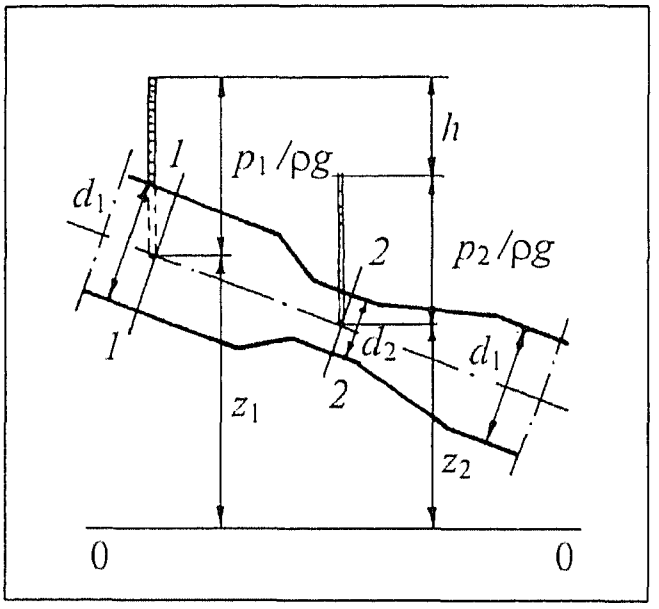


Рис. 5.14
Расходомер Вентури

Из уравнения неразрывности следует (ω_1 и ω_2 – площади сечений широкой и узкой частей расходомера):

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2 \qquad (5.17)$$

и окончательно

$$V_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}. \qquad (5.18)$$

Итоговая формула для определения искомого расхода потока имеет вид

$$Q = V_2\omega_2 = A\sqrt{h}, \qquad (5.19)$$

где постоянная A водомера:

$$A = \frac{\omega_2\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} = \frac{\frac{\pi}{4}d^2\sqrt{2g}}{\sqrt{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}.$$

На самом деле истинная величина расхода несколько отличается от вычисленной по формуле (5.19) величины, что вызвано неравномерностью распределения скоростей по сечению потока и имеющих место в действительности потерь напора в сужении. Эта погрешность обычно учитывается введением в формулу некоторого поправочного коэффициента. Тем не менее вид зависимости расхода от перепада напоров h сохраняется, и обычно в практике пользуются формулой

$$Q = \text{const}\, A\sqrt{h}, \qquad (5.20)$$

где const – постоянная для данного расходомера величина.

Контрольные вопросы

1. На каких физических принципах основана работа уровнемеров? Какие типы уровнемеров вам известны?
2. На каких физических принципах основана работа приборов для измерения давления?
3. Чем отличается пьезометр от вакуумметра и манометра?
4. Какие существуют способы измерения скорости потока?
5. Какие приборы для измерения расхода вам известны?
6. Расчет показаний каких приборов основан на уравнении Бернулли?
7. Как можно измерить разность давлений в различных точках потока жидкости?
8. Каким прибором можно измерить разность близких по значению и очень больших по величине давлений?

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ ПОДОБИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

6.1. Геометрическое и физическое подобие явлений

Многие формулы гидромеханики, полученные теоретическим путем, требуют экспериментального подтверждения. Опыты в лабораторных условиях проводят в тех случаях, когда теоретическое решение задачи затруднено. В этом случае исследователи обращаются к лабораторному моделированию: создают лабораторную модель и измеряют различные физические характеристики (давление, скорость, температуру и т. п.). Затем полученные в лабораторных условиях экспериментальные результаты переносят на действительное сооружение (натурный объект). При выполнении таких работ необходимо правильно подбирать геометрические параметры модели и режим движения жидкости (скорость, расход и т. п.).

Различают два вида моделей: теоретические (воображаемые) и физические (материальные). При теоретическом моделировании логическим путем реальную жидкость заменяют на подобную и формулируют аналитическую модель, которая с известными допущениями отражает реальный объект. По этой причине иногда получаются неточные результаты.

При физическом моделировании воспроизводят в определенном масштабе, при помощи различных материальных устройств процесс, имеющий место в действительности (в натуре).

Основой физического моделирования является теория подобия, которая опирается на понятия о размерностях физических величин. При физическом моделировании гидромеханических явлений различают условия геометрического, кинематического и динамического подобия.

Геометрическое подобие можно считать выполненным, если между сходственными размерами модели $l_м$ и натуры $l_н$ существует постоянное соотношение:

$$\frac{l_м}{l_н} = a_l = \text{const}, \tag{6.1}$$

где a_l – масштаб длины.

Для геометрически подобных систем соотношения площадей ω и объемов Ω соответственно составляют

$$\frac{\omega_м}{\omega_н} = a_l^2; \qquad \frac{\Omega_м}{\Omega_н} = a_l^3. \tag{6.2}$$

Кинематическое подобие выполняется при условии, если:

- траектории движения частиц жидкости геометрически подобны и одинаково ориентированы по отношению к границам модели и натуры;
- скорости V и ускорения a в сходственных точках в соответствующие моменты времени связаны постоянными соотношениями:

$$\frac{V_м}{V_н} = a_V = \text{const}, \tag{6.3}$$

$$\frac{a_м}{a_н} = a_a = \text{const}, \tag{6.4}$$

где a_V – масштаб скорости;

a_a – масштаб ускорения.

Для кинематически подобных систем выполняется условие постоянства масштаба времени a_t по всему объему:

$$\frac{t_м}{t_н} = a_t = \text{const}. \tag{6.5}$$

Динамическое подобие выполняется, если:

- в любой паре сходственных точек действуют одноименные силы;
- соотношение величин сил, действующих в сходственных точках, постоянно (по всему объему):

$$\frac{F_{\text{м}}}{F_{\text{н}}} = a_F = \text{const}, \tag{6.6}$$

где a_F – масштаб сил.

Силы, действующие на сравниваемые гидромеханические системы, ориентированы одинаково к границам модели и натуры.

При динамическом подобии гидромеханических систем используют также масштаб плотности жидкости:

$$a_{\rho} = \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{н}}}. \tag{6.7}$$

6.2. Критерии подобия

Для достижения динамического подобия, когда на жидкость действуют только силы тяжести G и инерции I, должно выполняться условие

$$\frac{I_{\text{м}}}{I_{\text{н}}} = \frac{G_{\text{м}}}{G_{\text{н}}} = a_F. \tag{6.8}$$

Сила инерции пропорциональна динамической составляющей давления в интеграле Бернулли, поэтому

$$I_{\text{м}} = \frac{\rho V^2}{2}\omega \approx \rho V^2 l^2. \tag{6.9}$$

Сила тяжести жидкости определяется по формуле

$$G = mg \approx \rho l^3 g \,. \tag{6.10}$$

После подстановки формул (6.9) и (6.10) в условие (6.8) получим

$$a_F = \frac{\rho_м V_м^2 l_м^2}{\rho_н V_н^2 l_н^2} = \frac{\rho_м l_м^3 g_м}{\rho_н l_н^3 g_н} \,. \tag{6.11}$$

Отсюда следует

$$\frac{V_м^2}{g_м l_м} = \frac{V_н^2}{g_н l_н} \,. \tag{6.12}$$

Величина

$$\frac{V}{\sqrt{gl}} = \mathrm{Fr} \tag{6.13}$$

является безразмерной и представляет собой меру отношения сил тяжести к силам инерции. Эту величину называют ***числом Фруда***.

В случае когда на жидкость действуют только силы трения (вязкости), влиянием сил тяжести можно пренебречь, для соблюдения динамического подобия масштаб сил (6.8) должен быть постоянным. Принимая во внимание, что сила внутреннего трения в параллельном потоке в соответствии с законом Ньютона прямо пропорциональна градиенту скорости $|dV/dn|$, площади поверхности ω соприкосновения движущихся слоев жидкости и динамическому коэффициенту вязкости $(\mu = \nu\rho)$, т. е.

$$T = \rho \nu \omega \left| \frac{dV}{dn} \right| , \tag{6.14}$$

можно записать следующую комбинацию параметров, составляющих размерность этой величины:

$$[T]=[\rho][\nu][l]^2\frac{[V]}{[l]}=[\rho][\nu][l][V]. \qquad (6.15)$$

Поэтому масштаб сил a_F, обеспечивающий динамическое подобие, примет вид

$$a_F=\frac{T_м}{T_н}=\frac{\nu_м\rho_м l_м V_м}{\nu_н\rho_н l_н V_н}. \qquad (6.16)$$

Приравнивая (6.16) и отношение сил инерции в (6.11), получим

$$\frac{\rho_м V_м^2 l_м^2}{\rho_н V_н^2 l_н^2}=\frac{\nu_м\rho_м l_м V_м}{\nu_н\rho_н l_н V_н}.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$\frac{V_м l_м}{\nu_м}=\frac{V_н l_н}{\nu_н}, \qquad (6.17)$$

где V – скорость в данной точке, м/с;

l – характерный размер объекта, например диаметр трубы, гидравлический радиус и т. п., м;

ν – кинематическая вязкость, м^2/с.

Величина

$$\frac{Vl}{\nu}=\mathrm{Re} \qquad (6.18)$$

является безразмерной, называется ***числом Рейнольдса*** и представляет собой меру отношения сил инерции к силам трения.

При расчетах используют также безразмерную величину, представляющую собой отношение параметра давления

(например, перепады давления Δp) к удвоенной величине динамического (скоростного) напора ρV^2, т.е.

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = \mathrm{Eu}. \qquad (6.19)$$

Этот комплекс называют ***числом Эйлера.***

6.3. Критерии подобия при течении вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение движения в критериальной форме

Для определения условий, при которых движения вязких несжимаемых жидкостей будут подобны, рассмотрим уравнение Навье – Стокса (4.5) в векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p - \nu\nabla^2\vec{V}. \qquad (6.20)$$

Введем безразмерные величины, которые обозначим теми же буквами, но с индексом «0», и произведем следующую замену:

$$x = l_м x_0; \quad y = l_м y_0; \quad z = l_м z_0;$$
$$\rho = \rho_м \rho_0; \quad \nu = \nu_м \nu_0; \quad t = t_м t_0;$$
$$\vec{F} = F_м \vec{F_0}; \quad p = p_м p_0; \quad \vec{V} = V_м \vec{V_0},$$

где $l_м, \rho_м, \nu_м, p_м, F_м, V_м$ – параметры, характеризующие процесс в модели.

После подстановки этих выражений в уравнение Навье – Стокса (6.20) получим

$$\frac{V_м}{t_м}\frac{\partial \overrightarrow{V_0}}{\partial t_0} = F_м \overrightarrow{F_0} - \frac{p_м}{\rho_м l_м}\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p_0 - \frac{V_м \nu_м}{l_м^2}\nu_0 \nabla^2 \overrightarrow{V_0}. \qquad (6.21)$$

Разделив уравнение (6.21) на $V_м^2/l_м$, получим

$$\frac{l_м}{V_м t_м}\frac{\partial \overrightarrow{V_0}}{\partial t_0} = \frac{F_м l_м}{V_м^2}\overrightarrow{F_0} - \frac{p_м}{\rho_м V_м^2}\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p_0 -$$

$$-\frac{\nu_м}{V_м l_м}\nu_0 \nabla^2 \overrightarrow{V_0}. \qquad (6.22)$$

Примем во внимание, что два потока можно считать подобными только в том случае, если они описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют одинаковые начальные и граничные условия. Для подобных потоков коэффициенты, стоящие перед безразмерными параметрами, должны принимать одинаковые значения:

$\frac{V_м l_м}{\nu_м} = \mathrm{Re}$ – число Рейнольдса;

$\frac{P_м}{\rho_м V_м^2} = \mathrm{Eu}$ – число Эйлера;

$\frac{V_м}{\sqrt{g_м l_м}} = \mathrm{Fr}$ – число Фруда;

$\frac{l_м}{V_м t_м} = \mathrm{Sh}$ – число Струхаля.

С учетом указанных чисел уравнение движения ***Навье – Стокса*** в критериальной форме принимает следующий вид:

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \overrightarrow{V_0}}{\partial t_0} = \frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\overrightarrow{F_0} - \mathrm{Eu}\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p_0 - \frac{1}{\mathrm{Re}}\nu_0 \nabla^2 \overrightarrow{V_0}. \qquad (6.23)$$

Физический смысл чисел подобия устанавливается из рассмотрения содержания входящих в них величин. Так, например, как отмечено выше, число Рейнольдса выражает отношение сил инерции к силам трения (вязкости); число Фруда – отношение сил инерции к объемным силам (в частности, к силам гравитации); число Эйлера – отношение нормальных сил давления к силам инерции, а число Струхаля характеризует отношение конвективной составляющей сил инерции к локальной составляющей этих сил.

6.4. Основные принципы анализа размерностей. π-теорема

Каждая физическая величина характеризуется размерностью. Различают первичные и вторичные величины размерностей. Например, длина, измеряемая в метрах (м), является первичной величиной, а объем, измеряемый в кубических метрах ($м^3$) – вторичной. Совокупность размерностей принято записывать в виде формулы размерности. Установившейся является форма записи формулы размерности в виде символического уравнения, в котором множители преобразований замещают их символами (причем обычно символ вторичной величины берется в прямые скобки). Например, формула размерности для скорости (символ V) запишется в виде

$$[V] = L T^{-1}, \tag{6.24}$$

где L – символ длины;

T – символ времени.

Понятие размерности сохраняет свой смысл независимо от того, определяется ли вторичная величина непосредствен-

но через первичные или для ее определения привлекаются вторичные величины. Преобразования формул размерности выполняются по таким же правилам, как и действия над числами. Например, для силы (символ F) имеем

$$[F] = M[A] = MLT^{-2}. \tag{6.25}$$

Для динамического напора $\left(P_д = \frac{\rho V^2}{2}\right)$

$$[P_д] = [\rho][V^2] = \frac{M}{LT^2}. \tag{6.26}$$

Особый интерес представляет случай, когда в результате символических действий все показатели степени в формуле размерности обращаются в нуль. В этом случае говорят, что определяемая величина имеет нулевую размерность, или является безразмерной.

Величины с нулевой размерностью обладают важным свойством инвариантности по отношению к метрическим преобразованиям, их численное значение не изменяется при переходе к другим единицам измерений. Примером безразмерных величин являются описанные выше числа Фруда, Рейнольдса, Эйлера и др.

Рассмотрим характер связей, которые сообщает степенному комплексу величин свойство безразмерности. Пусть комплекс π составлен из первичных величин $x_1, x_2, ..., x_m$ (общим числом m) и вторичных величин $y_1, y_2, ..., y_r$ (общим числом r) в виде степенного выражения

$$\pi = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \cdots y_z^{\beta_z}. \tag{6.27}$$

Инвариантность комплекса по отношению к метрическим преобразованиям достигается при условии его безраз-

мерности, когда показатели степени в комплексе равны нулю. В этом случае

$$\pi = 1. \tag{6.28}$$

По определению вторичной величины каждый из множителей $y_j \left(j = 1, 2, ..., r\right)$ связан с множителями из первичных величин $x_i \left(i = 1, 2, ..., m\right)$ уравнениями вида

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{\alpha_{11}} x_2^{\alpha_{12}} \cdots x_m^{\alpha_{1m}}; \\ y_2 = x_1^{\alpha_{21}} x_2^{\alpha_{22}} \cdots x_m^{\alpha_{2m}}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r = x_1^{\alpha_{r1}} x_2^{\alpha_{r2}} \cdots x_m^{\alpha_{rm}}. \end{cases} \tag{6.29}$$

В более компактном виде выражение (6.29) можно записать так:

$$y_j = x_1^{\alpha_{j1}} \cdot x_2^{\alpha_{j2}} \cdots x_m^{\alpha_{jm}}; \qquad j = 1, 2, ..., r. \tag{6.30}$$

Подставив эти значения в уравнение (6.27), после преобразований получим

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji} \beta_j} = 1. \tag{6.31}$$

Это уравнение удовлетворяется только в том случае, если показатели степени равны нулю:

$$\alpha_1 + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji} \beta_i = 0; \qquad i = 1, 2, ..., m. \tag{6.32}$$

Система уравнений (6.32) выражает совокупность условий, необходимых и достаточных для того, чтобы комплекс π

был безразмерным. В данной системе уравнений общее число неизвестных n равно сумме общего числа первичных m и вторичных r величин, т. е.

$$n = m + r . \tag{6.33}$$

Следовательно, количество вторичных комплексов r составляет

$$r = n - m . \tag{6.34}$$

Полученный результат, известный как ***π-теорема Бэкингема***, имеет очень важное значение.

В этой теореме утверждается, что число безразмерных комплексов равно числу всех величин, существенных для процесса, за вычетом числа первичных величин.

Таким образом, сформулировано общее правило определения числа безразмерных комплексов, характеризующих исследуемый процесс.

Рассмотрим в качестве примера применения π-теоремы задачу о гидродинамическом сопротивлении при стационарном течении жидкости по каналу. В данной задаче искомой величиной является потеря давления ΔP, которая зависит от длины пути перемещения l, скорости потока V, плотности жидкости ρ, ее вязкости μ. Таким образом, имеет место некоторая представляющая интерес функциональная зависимость:

$$\Delta P = f\left(l, V, \rho, \mu\right). \tag{6.35}$$

Количество первичных величин, на основе которых определяются все указанные параметры, составляет m (это масса M, расстояние L, время t). Общее число величин n, существенных для процесса, согласно зависимости (6.33): $n = 5$. Следовательно, в соответствии с π-теоремой число безразмерных комплексов, характеризующих процесс, будет равно

$$r = n - m = 5 - 3 = 2. \qquad (6.36)$$

Запишем формулы размерностей для каждого из анализируемых параметров в *табл. 6.1*.

Таблица 6.1

Формулы размерностей и приведенные комплексы для параметров задачи о гидродинамическом сопротивлении при течении жидкости по каналу

Величина	Формула размерности	Приведенный комплекс
Потеря давления ΔP	$[\Delta P] = M L^{-1} T^{-2}$	$\pi_1 = \dfrac{\Delta P l t^2}{m}$
Скорость V	$[V] = L T^{-1}$	$\pi_2 = \dfrac{V t}{l}$
Плотность ρ	$[\rho] = M L^{-3}$	$\pi_3 = \dfrac{\rho l^3}{m}$
Вязкость μ	$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$	$\pi_4 = \dfrac{\mu l t}{m}$
Длина l	Первичная величина	$\pi_5 = 1$

Первичные величины m и t не входят в число существенных и подлежат исключению. Выполнив эту операцию, получим два безразмерных комплекса, характеризующих исследуемый процесс:

$$\frac{\pi_1}{\pi_2^2 \pi_3} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \mathrm{Eu}; \qquad (6.37)$$

$$\frac{\pi_2 \pi_3}{\pi_4} = \frac{\rho V l}{\mu} = \mathrm{Re}. \qquad (6.38)$$

Таким образом, получены знакомые соотношения для чисел Эйлера и Рейнольдса, которые характеризуют процесс

гидродинамического сопротивления при стационарном течении несжимаемой жидкости по каналу.

6.5. Физическое моделирование гидромеханических процессов. Автомодельность

Для достижения динамического подобия, в случае когда на жидкость действуют силы тяжести и силы трения, необходимо помимо кинематического подобия выдержать требование о постоянстве чисел Фруда и Рейнольдса.

Первое требование ($\mathrm{Fr} = \mathrm{const}$) приводит к равенству

$$\frac{V_{\text{м}}^2}{g_{\text{м}} l_{\text{м}}} = \frac{V_{\text{н}}^2}{g_{\text{н}} l_{\text{н}}}. \qquad (6.39)$$

В случае если ускорение силы тяжести в натуре и модели одинаково, приходим к следующему соотношению скоростей:

$$\frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{н}}} = \left(\frac{l_{\text{м}}}{l_{\text{н}}}\right)^2 = a_l^{0,5}. \qquad (6.40)$$

Так как

$$V_{\text{м}} = \frac{l_{\text{м}}}{t_{\text{м}}}; \qquad V_{\text{н}} = \frac{l_{\text{н}}}{t_{\text{н}}}, \qquad (6.41)$$

то

$$\frac{V_{\text{м}}}{V_{\text{н}}} = \frac{l_{\text{м}}}{l_{\text{н}}} \frac{t_{\text{н}}}{t_{\text{м}}}. \qquad (6.42)$$

Следовательно, масштаб времени $a_t = \frac{t_{\text{м}}}{t_{\text{н}}}$ в соответствии с (6.40) и (6.42) составит

$$a_t = \frac{t_м}{t_н} = \frac{1}{\sqrt{a_l}} a_l = \sqrt{a_l}\,. \qquad (6.43)$$

Второе требование (Re=const) приводит к другому равенству:

$$\frac{V_м l_м}{\nu_м} = \frac{V_н l_н}{\nu_н}\,. \qquad (6.44)$$

Считая, что кинематические вязкости в натуре и модели одинаковы ($\nu_м = \nu_н$), из (6.44) получим выражение для отношения скоростей:

$$\frac{V_м}{V_н} = \frac{l_м}{l_н} = \frac{1}{a_l}\,. \qquad (6.45)$$

Для масштаба времени, по аналогии с приведенным выше примером, получим

$$a_t = \frac{t_м}{t_н} = \frac{V_м}{V_н}\frac{l_н}{l_м} = \frac{1}{a_l}\frac{1}{a_l} = \frac{1}{a_l^2}\,. \qquad (6.46)$$

Из рассмотренного примера видно, что условия постоянства масштабов скоростей и длин при одновременном соблюдении постоянства чисел Фруда и Рейнольдса невыполнимы. Действительно, один критерий подобия требует при переходе от натуры к модели изменения скорости в $\sqrt{a_l}$ раз (6.40), другой же критерий – в $1/a_l$ раз (6.45). Аналогична ситуация с масштабом времени.

В данном случае динамического подобия можно достигнуть, применив для модели другую жидкость, например с другим коэффициентом кинематической вязкости ν. Однако

практически использовать эту рекомендацию не всегда представляется возможным из-за отсутствия в природе жидкостей с соотношением $\nu_м/\nu_н$, существенно отличным от единицы. Поэтому абсолютно точное моделирование гидравлических явлений в общем случае невозможно.

При моделировании гидродинамических явлений возникают случаи, когда процесс определяется только одним числом Фруда или Рейнольдса. При этом автоматически выполняется условие динамического подобия. Область, где движение жидкости зависит только от одного числа, называется ***автомодельной***.

6.6. Аналоговое моделирование гидродинамических процессов

При исследовании гидродинамических процессов в случаях, когда аналитическое решение задачи невозможно, используют аналоговые модели. Тогда схему исследований можно представить в соответствии с *рис. 6.1*.

Если математические описания натуры и модели совпадают, то можно результаты моделирования другого физического процесса перенести на исследуемый процесс. Таким образом, при аналоговом моделировании используют подобие математических связей, а не физических процессов.

В качестве примера покажем сравнение движения подземных вод в условиях ламинарной фильтрации (формула Дарси) и движения заряженных частиц (электрического тока по закону Ома).

Согласно закону Дарси

$$q = K_ф \frac{\Delta h}{\Delta l} \omega, \qquad (6.47)$$

где q – расход воды, м^3/с;

$K_Ф$ – коэффициент фильтрации, м/с;

Δh – разность пьезометрических уровней на расстоянии Δl, м;

ω – сечение потока, м^2.

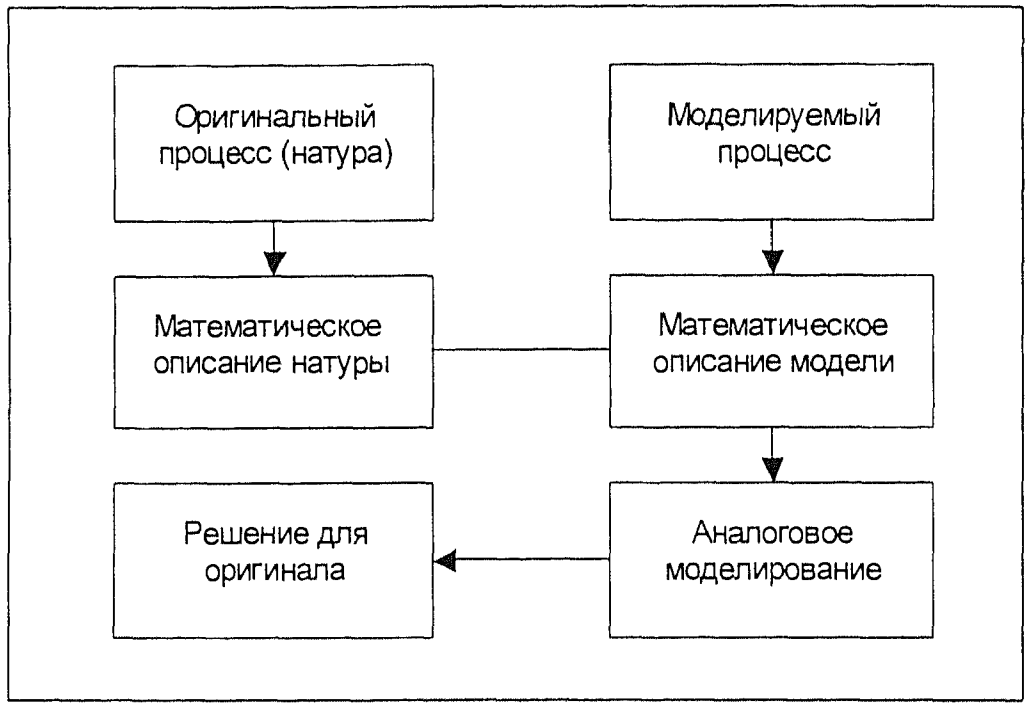


Рис. 6.1

Блок-схема исследований гидродинамических процессов

По закону Ома

$$\Delta U = R\,I = \left(\frac{\Delta l}{F\sigma}\right) I, \qquad (6.48)$$

где ΔU – падение напряжения, В;

Δl – длина проводника, м;

R – электрическое сопротивление, Ом;

I – электрический ток, A;

F – поперечное сечение проводника, м^2;

σ – удельная электропроводимость,1/(Ом·м).

После преобразований из (6.47) и (6.48) получим

$$\Delta h = \frac{q\Delta l}{\omega K_{\Phi}}; \qquad \Delta U = \frac{I\Delta l}{F\sigma}. \tag{6.49}$$

Следовательно, аналоговые связи существуют между расходом жидкостей (q, м^3/с) и величиной электрического тока (I, А), между коэффициентом фильтрации (K_{Φ}, м/с) и удельной электропроводимостью (σ, 1/(Ом·м)), а также между изменением пьезометрического уровня (Δh, м) и изменением падения напряжения (ΔU, В).

Поскольку оба уравнения (6.49) аналогичны по структуре, то, следовательно, процессы, описываемые законом Дарси, могут быть исследованы с помощью аналоговых электрических моделей.

Электролитические ванны представляют собой резервуар с токопроводящей жидкостью, в качестве которой используют водопроводную воду, растворы поваренной соли, соды или едкого кали. Жидкость в электролитической ванне служит в качестве токопроводящей среды, а ток является аналогом расхода воды. Измеряются сила тока, напряжение и сопротивление. Используют записывающие приборы. С помощью электролитических ванн можно исследовать трехмерный установившийся поток грунтовых вод.

Аналоговые модели на токопроводящей бумаге позволяют моделировать области плоских горизонтальных и плоских вертикальных потоков. Преимущество моделей на токопроводящей бумаге по сравнению с другими заключается в том, что они позволяют воспроизводить течение любой формы, когда математическое описание моделей весьма трудоемко. При таком моделировании можно создавать локальные неоднородности, удалив токопроводящие участки путем их вырезания. Основной недостаток – невозможность исследования неустановившихся процессов течения жидкости.

Электрические сетевые модели отличаются тем, что исследуемая область покрывается сетью с узловыми точками, между которыми находятся электрические сопротивления. Различают сетевые модели типа R (только с омическим сопротивлением), предназначенные для исследования стационарных процессов, и типа RC (с омическим и емкостным сопротивлением) – для исследования неустановившихся процессов. Электрические сетевые модели могут применяться при моделировании нестационарного процесса понижения грунтовых вод.

6.7. Задача

В процессе гидрорасчленения угольного пласта через скважину диаметром 100 мм нагнетается вода с расходом 40 л/с. При физическом моделировании этого процесса в лабораторных условиях планируется использовать трубу диаметром 24 мм.

Определить необходимый расход воды при условии соблюдения равенства чисел: а) Рейнольдса; б) Эйлера; в) Фруда.

Решение

1. Запишем условие равенства чисел Рейнольдса в модели и натуре:

$$\frac{V_м d_м}{\nu_м} = \frac{V_н d_н}{\nu_н}.$$

Из условия неразрывности потока следует, что скорость воды в цилиндрическом канале прямо пропорциональна объемному расходу G и обратно пропорциональна квадрату диаметра канала d, т. е.

$$V_{м} = \frac{4G_{м}}{\pi d_{м}^{2}}; \qquad V_{н} = \frac{4G_{н}}{\pi d_{н}^{2}}.$$

Сопоставляя уравнения неразрывности с условием равенства чисел Рейнольдса, получим

$$G_{м} = G_{н}\frac{d_{м}}{d_{н}}.$$

Следовательно, $G_{м} = 50\dfrac{24}{100} = 12$ л/с.

2. Из условия равенства чисел Эйлера (6.19) при равных значениях плотностей воды в натуре и модели, а также равенства давлений следует $V_{м} = V_{н}$, и с учетом уравнения неразрывности имеем другое соотношение:

$$G_{м} = G_{н}\frac{d_{м}^{2}}{d_{н}^{2}},$$

Следовательно, $G_{м} = 50\dfrac{24^{2}}{100^{2}} = 2{,}88$ л/с.

3. Из условия равенства чисел Фруда при постоянных гравитационных ускорениях имеем

$$\frac{V_{м}}{V_{н}} = \left(\frac{d_{м}}{d_{н}}\right)^{0,5}.$$

Также, используя уравнение неразрывности в сопоставлении с последним равенством, имеем

$$G_{м} = G_{н}\left(\frac{d_{м}}{d_{н}}\right)^{2,5}.$$

Следовательно, $G_{м} = 50\left(\dfrac{24}{100}\right)^{2,5} = 1{,}41$ л/с.

Ответ: 1. $G_{м} = 12$ л/с. 2. $G_{м} = 2{,}88$ л/с. 3. $G_{м} = 1{,}41$ л/с.

Контрольные вопросы

1. Возможно ли одновременное выполнение в натуре и модели критериев геометрического, кинематического и динамического подобия?
2. Какие физические параметры гидродинамического потока входят в числа Фруда, Рейнольдса, Эйлера?
3. Какими безразмерными числами однозначно описывается уравнение Навье – Стокса?
4. В чем состоит различие первичных и вторичных физических величин?
5. Какие безразмерные комплексы описывают процесс гидродинамического сопротивления при движении жидкости по каналу?
6. Сколько критериев подобия описывают автомодельную область моделирования?
7. В каких случаях применяют аналоговое моделирование гидродинамических процессов?
8. При каком условии возможна реализация аналогового моделирования?
9. Какие физические законы используют при моделировании фильтрационных процессов с помощью электрического тока?

Глава 7

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

7.1. Виды гидродинамических сопротивлений

К потоку жидкости или газа могут быть приложены различные внешние силы, которые совершают работу и изменяют величину удельной энергии самого потока. Потери энергии при движении жидкости обусловлены работой внешних и внутренних сил трения. Различают два вида потерь энергии:

- *потери напора по длине* – h_l, которые распределяются по всей длине потока равномерно или неравномерно в зависимости от диаметра канала и скорости движения потока;
- *местные потери напора* – h_j, возникающие только в отдельных местах потока вследствие изменения конфигурации канала и на поворотах потока.

В общем случае для участка трубопровода, заключенного между двумя сечениями, *полная потеря напора* h_f определяется по формуле

$$h_f = h_l + \sum h_j. \qquad (7.1)$$

При равномерном установившемся движении реальной (вязкой) жидкости работа внешних сил (поверхностных и объемных) всегда равна работе сил трения (внутренних и внешних). В результате работы сил трения кинетическая энергия жидкости переходит в тепловую энергию.

Между силами трения в жидкости и потерями напора существует определенная зависимость. В случае установившегося равномерного движения при отсутствии местных потерь напора эту зависимость принято называть ***основным уравнением установившегося движения жидкости.***

7.2. Основное уравнение установившегося равномерного движения жидкости

Рассмотрим напорную цилиндрическую трубу (*рис. 7.1*), в которой выделим элемент потока жидкости длиной Δl и сечением ω. Направление движения жидкости плотностью ρ ориентировано параллельно оси симметрии S и составляет с горизонтом угол β.

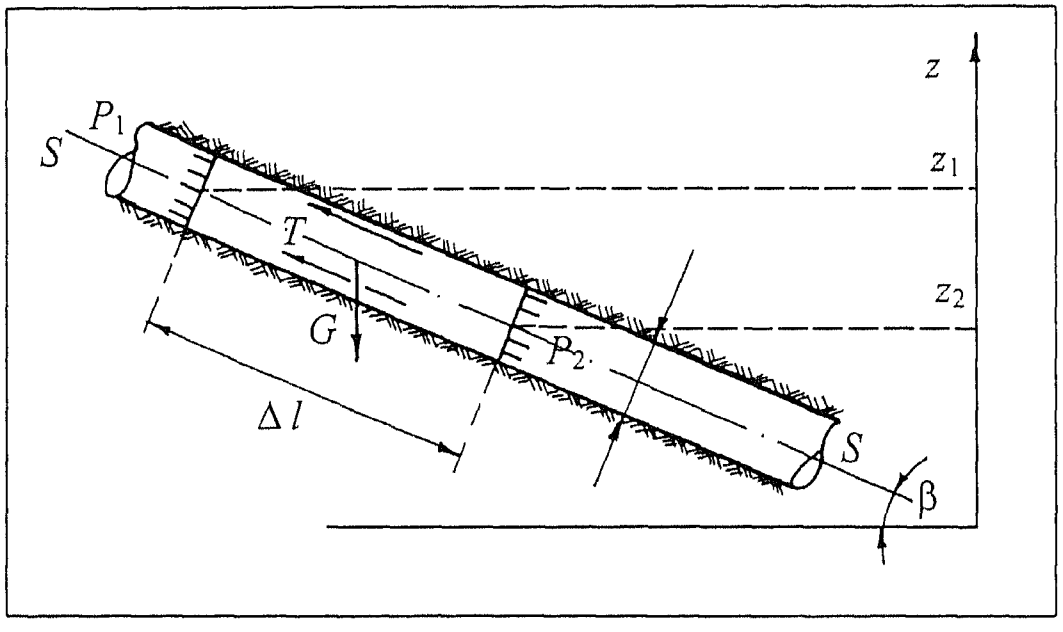


Рис. 7.1
Напорное течение жидкости в трубе

На выделенную часть параллельноструйного равномерного потока действуют следующие силы:

- собственный вес элемента струи жидкости

$$G = \rho g \omega \Delta l; \qquad (7.2)$$

- проекция этой силы на направление движения

$$G_s = \rho g \omega \Delta l \sin\beta. \qquad (7.3)$$

Принимая во внимание, что

$$\Delta l \sin\beta = \Delta Z, \qquad (7.4)$$

получим

$$G_s = \rho g \omega \Delta Z; \qquad (7.5)$$

- силы P_1 и P_2 давления на торцевые сечения рассматриваемого элемента струи:

$$P_1 = P\omega; \quad P_2 = (P - \Delta P)\omega, \qquad (7.6)$$

где P – давление на торцевое сечение струи в первом сечении;

ΔP – величина приращения давления во втором сечении относительно первого;

- сила трения T, возникающая на контакте потока с трубой, направленная против течения (проектируется на ось S без искажений):

$$T = \tau \chi \Delta l, \qquad (7.7)$$

где τ – касательное напряжение, действующее на цилиндрическую поверхность движущегося потока;

χ – периметр потока.

В случае равномерного движения сумма всех рассмотренных сил в проекции на направление движения (ось S) равна нулю:

$$G_s + P_1 - P_2 - T = 0. \qquad (7.8)$$

Подставив в это уравнение соотношения (7.3), (7.6) и (7.7), получим

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} + \rho g \sin\beta = \frac{\chi}{\omega}\tau . \qquad (7.9)$$

С учетом равенства (7.4) имеем

$$\frac{\Delta P}{\Delta Z} + \rho g = \frac{\chi}{\omega \sin\beta}\tau . \qquad (7.10)$$

Для рассматриваемого установившегося потока длиной Δl справедливо соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{P_1 - P_2}{Z_1 - Z_2} . \qquad (7.11)$$

Тогда уравнение (7.10) принимает вид

$$\left(Z_1 + \frac{P_1}{\rho g}\right) - \left(Z_2 + \frac{P_2}{\rho g}\right) = \frac{\chi \Delta l}{\omega}\frac{\tau}{\rho g} . \qquad (7.12)$$

Левая часть выражения (7.12) по физическому смыслу представляет собой потерю напора по длине h_l, поэтому это выражение можно переписать в следующем виде:

$$h_l = \frac{\chi \Delta l}{\omega}\frac{\tau}{\rho g} . \qquad (7.13)$$

Используя понятия гидравлического радиуса R и гидравлического уклона J,

$$R = \frac{\omega}{\chi}; \qquad J = \frac{h_l}{\Delta l}, \qquad (7.14)$$

получим другую форму записи уравнения (7.13):

$$\frac{\tau}{\rho g} = RJ . \qquad (7.15)$$

Уравнение (7.15) называется ***основным уравнением установившегося равномерного движения жидкости.***

По формуле (7.15) можно вычислить величину касательного напряжения трения на стенках трубы радиусом r_0 при известном гидравлическом уклоне. Учитывая, что в данном случае $R = \frac{r_0}{2}$, получим

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\rho g J r_0 . \qquad (7.16)$$

7.3. Распределение скоростей в потоке при ламинарном установившемся движении жидкости

При движении реальной (вязкой) жидкости в ней развиваются силы внутреннего трения, обусловленные неравномерным распределением скоростей в жидкости. Слой вязкой жидкости, который движется с большей скоростью, за счет трения по поверхности соприкосновения способствует ускорению движения второго слоя; второй же слой, наоборот, благодаря тому же трению тормозит первый слой.

Рассмотрим продольные касательные силы трения, действующие вдоль линий тока при движении параллельноструйного потока жидкости. Сила продольного внутреннего трения T, т. е. сила, возникающая при скольжении отдельных прямолинейных слоев жидкости друг по другу, в соответствии с законом Ньютона прямо пропорциональна градиенту скорости в направлении, перпендикулярном движению слоев, площади поверхности соприкосновения данных слоев жидкости и зависит от рода жидкости:

$$T = \mu\omega_c \left|\frac{dV}{dn}\right|, \qquad (7.17)$$

где T – модуль силы внутреннего трения, Н;

μ – динамический коэффициент вязкости, Па · с;

ω_c – площадь поверхности соприкосновения слоев, м^2;

$\frac{dV}{dn}$ – градиент скорости, 1/с.

Определим распределение скоростей продольного движения жидкости в напорной цилиндрической трубе (*рис. 7.2*), имеющей радиус r_0. Предположим, что на границе потока с твердой стенкой, вдоль которой происходит движение жидкости, имеется весьма тонкий неподвижный слой, как бы прилипший к стенке, по которому происходит скольжение жидкости. При этом непосредственно на стенке скорость потока равна нулю. Внутри данной трубы выделим цилиндрический элемент жидкости радиусом r. Касательное напряжение трения по боковой поверхности элемента в соответствии с основным уравнением установившегося равномерного движения жидкости (7.15) составляет

$$\tau = \rho g R J = \rho g \frac{\pi r^2}{2\pi r} J = \frac{1}{2}\rho g r J . \qquad (7.18)$$

С другой стороны, в соответствии с законом вязкого трения Ньютона имеем

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dr} . \qquad (7.19)$$

Знак «–» в формуле (7.19) указывает на тот факт, что в цилиндрической системе координат с увеличением радиуса продольная скорость элемента жидкости уменьшается.

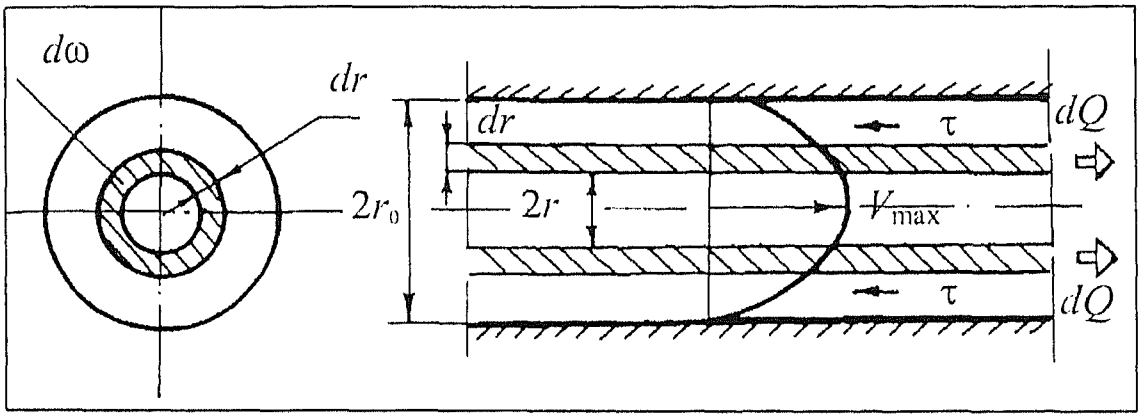


Рис. 7.2

Распределение скоростей при равномерном ламинарном течении жидкости в круглой трубе

Таким образом, приравнивая (7.18) и (7.19) друг к другу, получим

$$\frac{1}{2}\rho g r J = -\mu \frac{dV}{dr}. \qquad (7.20)$$

Используя граничное условие о равенстве нулю скорости жидкости на границе со стенкой трубы (при $r = r_0$ $V = 0$), после разделения переменных, при условии $J = \text{const}$, получим

$$\int_0^V dV = -\frac{1}{2}\frac{\rho g}{\mu} J \int_{r_0}^{r} r dr, \qquad (7.21)$$

откуда после интегрирования имеем

$$V = \frac{\rho g}{4\mu} J \left(r_0^2 - r^2\right). \qquad (7.22)$$

Как видно из (7.22), скорость в зависимости от радиуса меняется по параболе. Максимальная скорость достигается в центре трубы ($r = 0$):

$$V_{max} = \frac{1}{4}\frac{\rho g}{\mu} J r_0^2 . \qquad (7.23)$$

Аналогичным путем можно получить эпюру распределения скоростей в случае открытого прямоугольного канала. Тогда эпюра также ограничена параболой, а максимальная скорость движения достигается на свободной поверхности.

7.4. Потери напора по длине потока при ламинарном установившемся движении жидкости

Определим расход жидкости при ее движении в цилиндрической трубе (*рис. 7.2*). Выражение для объемного расхода жидкости dQ, проходящей через часть площади живого сечения $d\omega$ в виде кольца радиусом r и толщиной dr, имеет вид

$$dQ = Vd\omega = 2\pi r V dr . \qquad (7.24)$$

Подставив (7.22) в (7.24), получим

$$dQ = \frac{\rho g}{4\mu} J \left(r_0^2 - r^2\right) 2\pi r dr . \qquad (7.25)$$

Интегрируя это выражение по всей площади живого сечения, получим

$$Q = \frac{\pi}{2}\frac{\rho g}{\mu} J \int_0^{r_0} \left(r_0^2 - r^2\right) r dr = \frac{\pi}{8}\frac{\rho g}{\mu} J r_0^4 , \qquad (7.26)$$

или

$$Q = M J D^4 , \qquad (7.27)$$

где M – коэффициент, зависящий от свойств жидкости,

$$M = \frac{\pi}{128}\frac{\rho g}{\mu};$$

D – диаметр трубы, $D = 2r_0$.

Зависимость (7.27) носит название ***формулы Пуазёйля***.

Средняя скорость потока в трубе

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{1}{32}\frac{\rho g}{\mu} J D^2, \qquad (7.28)$$

или

$$V = \frac{1}{32}\frac{\rho g}{\mu} J D^2. \qquad (7.29)$$

Потерю напора по длине l в общем случае ламинарного или турбулентного движения принято представлять в виде формулы Дарси – Вейсбаха:

$$h_l = \lambda \frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}, \qquad (7.30)$$

где λ – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый ***коэффициентом гидравлического трения***.

При ламинарном движении коэффициент гидравлического трения рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}_D}, \qquad (7.31)$$

где $\mathrm{Re}_D = \frac{VD}{\mu}\rho$.

При турбулентном движении коэффициент гидравлического трения рассчитывается по эмпирическим формулам, приведенным ниже.

7.5. Потери напора по длине потока при турбулентном установившемся равномерном движении жидкости

Вывод законов распределения скоростей по сечению потока и определение потерь напора при турбулентном движении жидкости представляет собой непростую задачу, которая может быть решена только приближенно в результате использования различных допущений.

Одна из таких задач решена Л. Прандтлем. Был получен логарифмический закон распределения скоростей по живому сечению цилиндрической трубы. Зависимость Прандтля после введения некоторых эмпирических коэффициентов, вычисленных И. Никурадзе, имеет вид:

- для гладких труб

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{(r_0 - r)V_*}{\nu} + 5,5, \qquad (7.32)$$

где u – скорость в живом сечении цилиндрической трубы;

V_* – величина, называемая *скоростью трения*,

$$V_* = \sqrt{RJg}; \qquad (7.33)$$

- для шероховатых труб вместо (7.32) используют зависимость

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg \frac{r_0 - r}{\Delta} + A_{ш}, \qquad (7.34)$$

где Δ – средняя высота выступов шероховатости;

$A_{ш}$ – коэффициент, зависящий от типа шероховатости (например, для равнозернистой шероховатости $A_{ш} = 8,5$) [8].

Для расчетов потерь напора при турбулентном движении жидкости широко используют формулу Дарси – Вейсбаха (7.30).

Коэффициент гидравлического трения λ, входящий в формулу Дарси – Вейсбаха, определяется эмпирически и зависит в общем случае от числа Рейнольдса и шероховатости стенок трубы. Этот коэффициент определяется при известных эмпирических распределениях скорости потока по сечению. Приведем наиболее часто используемые в практических расчетах зависимости.

На основании обработки экспериментов по исследованию движения жидкости в гладких цилиндрических трубах при числах Рейнольдса Re_D от 4000 до 100 000 Блазиус установил эмпирическую зависимость

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}_D^{0{,}25}}, \tag{7.35}$$

где $\mathrm{Re}_D = \dfrac{VD}{\nu}$ (ν – кинематическая вязкость жидкости, м^2/с, $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$).

Коэффициент гидравлического трения весьма существенно зависит от шероховатости труб при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re}_D > 100\,000$). Таким образом,

$$\lambda = f\left(\mathrm{Re}_D, \Delta_r\right), \tag{7.36}$$

где Δ_r – относительная шероховатость,

$$\Delta_r = \frac{\Delta}{D} \tag{7.37}$$

(Δ – абсолютная шероховатость;
D – диаметр трубы).

Подробные исследования функции (7.36) выполнил в 1933 г. И. Никурадзе. Он доказал, что при выполнении гидравлических расчетов движение любой жидкости в автомодельной области характеризуется только безразмерным числом Рейнольдса.

При расчете коэффициента гидравлического трения удобно использовать формулу, предложенную А.Д. Альтшулем:

$$\lambda \approx 0{,}11\left(\Delta_r + \frac{68}{\mathrm{Re}_D}\right)^{0{,}25}. \qquad (7.38)$$

В *табл. 7.1* приведены значения шероховатости (см. [8]), которые используются при выполнении практических расчетов.

А.Д. Альтшуль выделил предельные числа Рейнольдса, определяющие области сопротивления в зависимости от значений относительной шероховатости (7.37). При условии

$$\mathrm{Re}_D < \mathrm{Re}'_d = \frac{10}{\Delta_r} \qquad (7.39)$$

труба может рассматриваться как практически гладкая, без влияния шероховатости.

Таблица 7.1

Шероховатость Δ труб и каналов

Характеристика поверхности труб и каналов	Абсолютная шероховатость Δ, мм
Цельнотянутые трубы:	
из латуни	0,0015 – 0,0100
новые стальные	0,020 – 0,100
стальные водопроводные, находящиеся в эксплуатации	1,20 – 1,50
Цельносварные стальные трубы:	
новые или старые в хорошем состоянии	0,04 – 0,10
бывшие в эксплуатации	0,10 – 0,15
с двойной поперечной клепкой, сильно корродированные	2,0

Окончание табл. 7.1

Характеристика поверхности труб и каналов	Абсолютная шероховатость Δ, мм
Чугунные трубы:	
новые	0,25 – 1,00
новые битумированные	0,10 – 0,15
асфальтированные	0,12 – 0,30
бывшие в эксплуатации, корродированные	1,0 – 1,5
Бетонные и асбестоцементные трубы:	
бетонные трубы при хорошей поверхности с затиркой	0,3 – 0,8
бетонные трубы при среднем качестве работ	2,5
бетонные трубы с грубой (шероховатой) поверхностью	3,0 – 9,0
асбестоцементные трубы новые	0,05 – 0,10
асбестоцементные трубы, бывшие в эксплуатации	0,60
Деревянные и стеклянные трубы:	
деревянные трубы из тщательно остроганных досок	0,15 } Ориентировочно
деревянные трубы из хорошо остроганных досок	0,30 } Ориентировочно
деревянные трубы из нестроганых, хорошо пригнанных досок	0,70 } Ориентировочно
трубы из чистого стекла	0,0015 – 0,0100
Облицовка каналов:	
хорошая штукатурка из чистого цемента	0,05 – 0,22
штукатурка цементным раствором с ожелезнением	0,5
штукатурка по металлической сетке	10 – 15
шлакобетонные плиты	1,5

В другом случае при условии

$$\mathrm{Re}_D > \mathrm{Re}''_d = \frac{500}{\Delta_r} \qquad (7.40)$$

коэффициент гидравлического сопротивления не зависит от числа Рейнольдса и определяется только влиянием шероховатости. В этой области можно использовать формулу

$$\lambda \approx 0{,}11\left(\Delta_r\right)^{0{,}25}. \qquad (7.41)$$

При больших скоростях движения воды реализуется турбулентный режим движения жидкости. Во многих практически важных случаях числа Рейнольдса превышают предельные значения:

$$\mathrm{Re}_D > \mathrm{Re}_D^{''}. \qquad (7.42)$$

В данном случае значения λ можно определить, например, по формуле (7.41), вычисляя предварительно скорость V потока.

Перепишем формулу Дарси – Вейсбаха (7.30) в виде

$$V = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\sqrt{R\frac{h_l}{l}}. \qquad (7.43)$$

Зависимость (7.43) по структуре аналогична формуле Шези, которую принято записывать в следующем виде:

$$V = C\sqrt{RJ}, \qquad (7.44)$$

где C – коэффициент Шези;

R – гидравлический радиус, м;

J – пьезометрический уклон.

Формулу Шези применяют при расчетах движения воды в руслах каналов. В отличие от формулы (7.43), полученной после преобразований формулы Дарси – Вейсбаха, в формуле Шези вместо потерь гидравлического напора h_l/l фигурирует пьезометрический уклон. Пьезометрический уклон представляет собой вертикальное падение пьезометрической линии, отнесенное к длине потока.

Коэффициент Шези при выполнении условия (7.42), так же как и λ, зависит не от скорости движения, а только от относительной шероховатости стенок русла.

Для расчета коэффициента Шези было предложено много эмпирических формул, удовлетворяющих практическим задачам. Рассмотрим формулу Гангилье – Куттера:

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{\sqrt{R} + 23}\sqrt{R}\,, \qquad (7.45)$$

где n – коэффициент шероховатости, определяемый по шкале Гангилье – Куттера (*табл. 7.2*) [8].

Таблица 7.2

Коэффициент шероховатости для различных водотоков

Вид водотока	Материал стенок русла	Коэффициент шероховатости		
		минимальный n_{min}	нормальный n	максимальный n_{max}
Трубы и туннели	Стекло	0,09	0,010	0,013
	Латунь	0,09	0,010	0,013
	Сталь:			
	фланцевые и сварные соединения	0,010	0,012	0,014
	клепаные и резьбовые соединения	0,013	0,016	0,017
	Чугун:			
	с покрытием битумом	0,010	0,013	0,014
	без покрытия	0,011	0,015	0,016
	Деревянная обработанная обшивка	0,015	0,017	0,020
	Цементный раствор	0,010	0,013	0,015
	Бетонная труба:			
	без засорения	0,010	0,011	0,013
	с некоторым засорением	0,011	0,013	0,014
	Дренажная труба (из обожженной глины)	0,011	0,013	0,017

Окончание табл. 7.2

Вид водотока	Материал стенок русла	Коэффициент шероховатости		
		минимальный n_{min}	нормальный n	максимальный n_{max}
Безнапорные каналы с облицовкой	Асфальт	0,013		0,016
	Сталь:			
	неокрашенная	0,011	0,012	0,014
	окрашенная	0,012	0,013	0,017
	Дерево:			
	строганое	0,010	0,012	0,014
	нестроганое	0,011	0,013	0,015
	Цементный раствор	0,011	0,013	0,015
	Бетон:			
	затертый	0,011	0,013	0,015
	по ровной скальной поверхности	0,017	0,020	
	по неровной скальной поверхности	0,022	0,027	
Безнапорные каналы без облицовки	Нескальный грунт:			
	чистый, только что выполненный	0,016	0,018	0,020
	чистый, после выветривания	0,018	0,022	0,025
	чистый, ложе канала гравелистое	0,022	0,025	0,030
	с небольшой растительностью	0,022	0,027	0,033
	заросший травой	0,025	0,030	0,033
	с густой травой и водорослями	0,030	0,035	0,040
	откопанный драглайном или землечерпалкой (без растительности)	0,025	0,028	0,033
	то же с растительностью	0,035	0,050	0,060
	не поддерживаемый в исправности (трава и кусты не расчищаются)	0,050	0,100	0,140

7.6. Потери энергии при изменении конфигурации канала и поворотах потока

Дополнительные потери энергии при движении возникают в результате возмущений потока от поворотов и изменения конфигурации канала. Эти потери называются ***местными сопротивлениями***. На *рис. 7.3* показан случай, когда труба, имеющая диаметр D_1, переходит в трубу, имеющую больший диаметр D_2. Струя, выходящая из первой трубы, расширяется и заполняет сечение второй трубы. На переходном участке образуется зона, вызывающая местные потери напора h_j. Эти потери называют ***потерями напора на резкое расширение потока*** $h_{\text{рр}}$. Используя интеграл Бернулли для сечений *1–1* и *2–2*, запишем величину потери напора для горизонтальной трубы:

$$h_{\text{рр}} = \left(\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g}\right) + \left(\frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g}\right). \qquad (7.46)$$

Разность давлений определяется на основе уравнения неразрывности:

$$\rho Q\left(V_2 - V_1\right) = \left(P_1 - P_2\right)\omega_2, \qquad (7.47)$$

где Q – объемный расход жидкости, м^3/с;

P_1 и P_2 – гидродинамическое давление в центрах сечений *1–1* и *2–2*, Па;

ω_2 – площадь трубы в сечении *2–2*, м^2.

Принимая во внимание, что

$$V_2 = \frac{Q}{\omega_2}, \qquad (7.48)$$

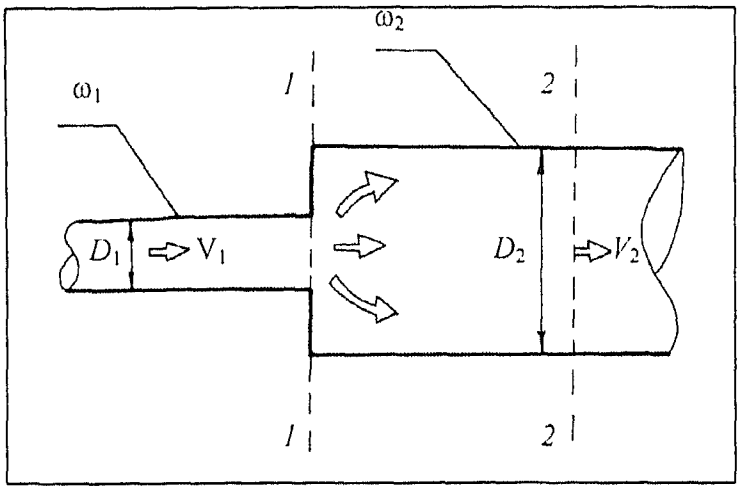


Рис. 7.3
К расчету потерь напора при внезапном расширении потока

после подстановки $(P_1 - P_2)$ из (7.47) в (7.46) и преобразований получим формулу Бордá, по которой определяется потеря напора:

$$h_{pp} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}, \qquad (7.49)$$

где разность $(V_1 - V_2)$ называется ***потерянной скоростью.***

Формулу (7.49) можно представить в другом виде:

$$h_{pp} = \xi_{pp} \frac{V_2^2}{2g}, \qquad (7.50)$$

где ξ_{pp} – коэффициент сопротивления при резком расширении потока,

$$\xi_{pp} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2.$$

Потери напора возникают при встрече потока с различными препятствиями (например, поворот потока по колену,

встреча с задвижкой, резкое расширение и т.д.). Представим трубопровод (*рис. 7.4*), имеющий указанные препятствия. Будем считать, что расстояние между препятствиями достаточно велико (более 20 – 30 диаметров трубы) и взаимным влиянием препятствий можно пренебречь.

Полная потеря напора h_f от сечения *1–1* до сечения *2–2* определяется по формуле:

$$h_f = h_l + h_к + h_з + h_{рр}, \qquad (7.51)$$

где h_l – потери напора по длине;

$h_к$ – потери напора в колене;

$h_з$ – потери напора в задвижке.

Потери напора в любом случае встречи потока с препятствием можно определить по аналогии с формулой Борда:

$$h_j = \xi_j \frac{V^2}{2g}, \qquad (7.52)$$

где ξ_j – коэффициент местного сопротивления, определяемый, как правило, экспериментально.

В рассматриваемом случае (см. *рис. 7.4*) имеем

$$h_к = \xi_к \frac{V^2}{2g}; \qquad (7.53)$$

$$h_з = \xi_з \frac{V^2}{2g}; \qquad (7.54)$$

$$h_{рр} = \xi_{рр} \frac{V^2}{2g}; \qquad (7.55)$$

$$h_l = \xi_l \frac{V^2}{2g}; \qquad \xi_l = \frac{\lambda_l}{D}. \qquad (7.56)$$

Таким образом, полные потери напора определяются по формуле

$$h_f = \xi_f \frac{V^2}{2g}, \tag{7.57}$$

где ξ_f – полный коэффициент сопротивления;

$$\xi_f = \xi_l + \sum \xi_j ; \tag{7.58}$$

$$\sum \xi_j = \xi_к + \xi_э + \xi_{рр} . \tag{7.59}$$

При расчете трубопроводов с переменным диаметром формула (7.57) остается в силе. Однако при этом все скорости движения потока на различных участках следует выразить через одну, используя условие обратной пропорциональности скорости и сечений. Так, например, скорость V_1 в трубопроводе сечением ω_1 можно выразить через скорость V в трубопроводе сечением ω (см. *рис. 7.4*):

$$V_1 = V \frac{\omega}{\omega_1} . \tag{7.60}$$

В этом случае необходимо изменить величину коэффициентов сопротивления, помножив их на квадрат отношения соответствующих площадей:

$$\xi_1 = \xi \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 . \tag{7.61}$$

В *табл. 7.3* приведены часто встречающиеся значения коэффициентов местного сопротивления.

Как следует из *табл. 7.3*, величины коэффициентов сопротивления, а следовательно, и потери напора можно умень-

шить за счет обустройства плавных переходов потока из одного сечения в другое. Однако и в этом случае в зависимости от геометрических параметров переходника возможны максимумы и минимумы потерь напора. Например, при резком расширении трубы от сечения ω_1 до сечения ω_2 (см. *табл. 7.3*)

$$\xi_j = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 .$$

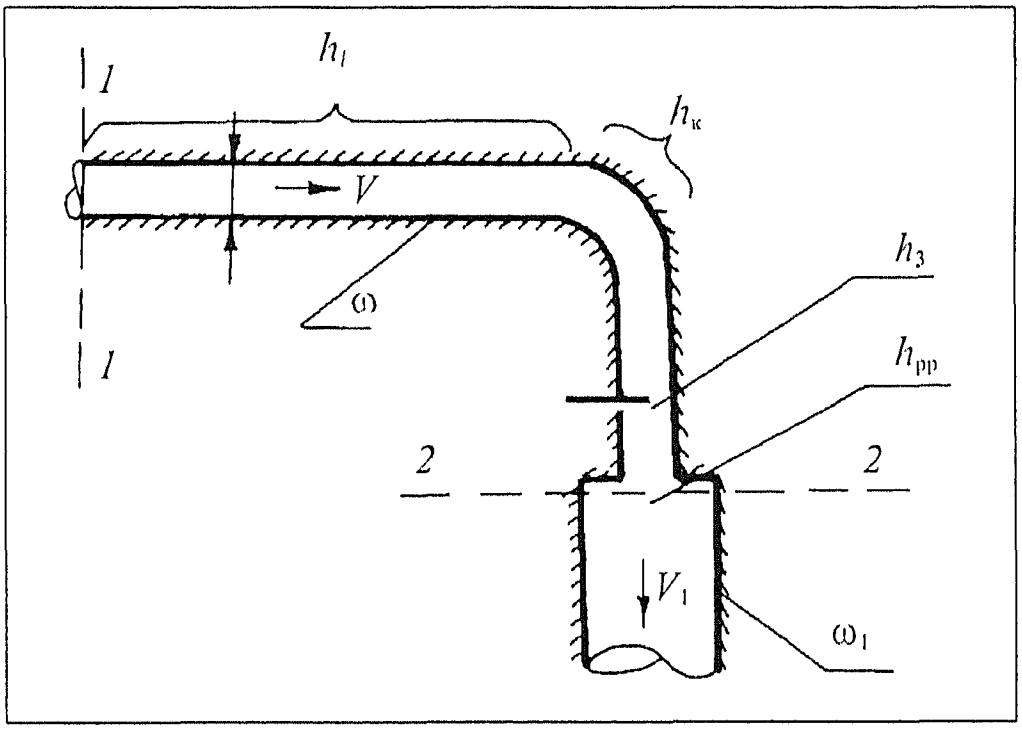


Рис. 7.4
К расчету потерь напора

С другой стороны, при постепенном расширении трубы (см. *табл. 7.3*) коэффициент сопротивления в зависимости от угла раствора диффузора имеет два экстремума: один (минимум сопротивления) – при $\beta = 6°$ $\varphi_y = 0{,}15$; другой

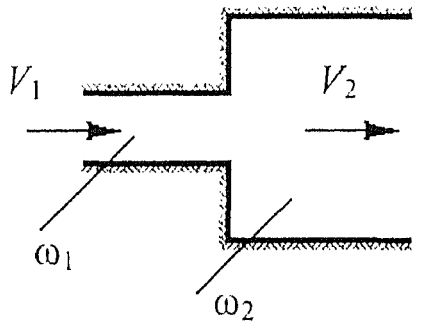
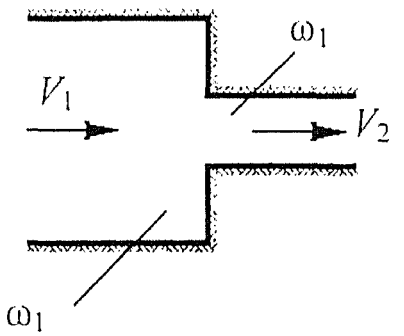
(максимум) – при $\beta = 70°$ $\varphi_y = 0{,}32$. Расчетная формула представляется в аналитическом виде:

$$\xi_j = \varphi_y \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2,$$

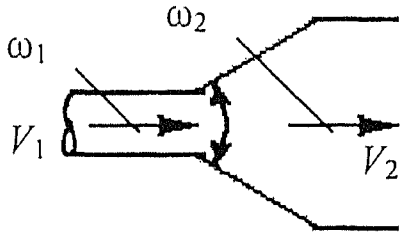
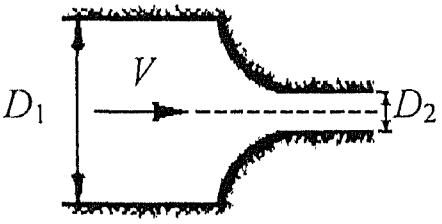
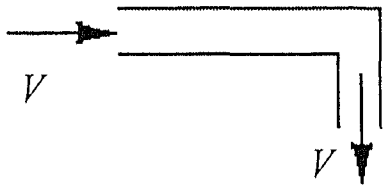
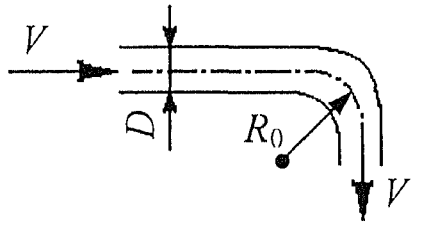
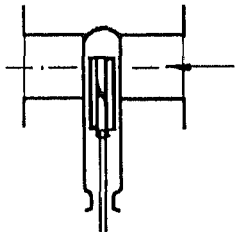
при этом если $\beta \in \left(70^0; 170^0\right)$, то $\varphi_y = 1{,}56 - 0{,}00329\beta$.

Таблица 7.3

Коэффициенты местных сопротивлений при различных изменениях конфигурации потока

Местное сопротивление	Схема изменения конфигурации потока	Коэффициент местного сопротивления ξ_j
Резкое расширение трубы		$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2$
Резкое сужение трубы		$0{,}5\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$

Окончание табл. 7.3

Местное сопротивление	Схема изменения конфигурации потока	Коэффициент местного сопротивления ξ_i
Постепенное расширение трубы (диффузор)		$\varphi_y\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}-1\right)^2$
Вход в трубу со скругленными кромками при $D_1 >> D_2$		~ 0,20
Резкий поворот трубы на 90°		1,1
Плавный поворот трубы на 90° при $\frac{D}{2R_0}=0,1$		~ 0,13
Задвижка Лудло при полном открытии		0,15

7.7. Принципы расчета потерь напора в сетях

Как показано в разд. 7.6, для участка трубопровода с последовательно расположенными препятствиями (например, последовательное соединение различных труб) полная потеря напора определяется путем суммирования потерь напора на отдельных участках.

При параллельном соединении труб формулу сложения (7.59) применять нельзя, поскольку результирующая потеря напора при параллельном соединении элементов всегда меньше, чем при последовательном. На *рис. 7.5* представлена схема параллельного соединения трех трубопроводов. Важно отметить, что ***разность напоров во всех трубах, соединенных параллельно, одинакова***. Этот вывод иллюстрируется *рис. 7.5*, на котором показано подключение двух пьезометров в начале (точка *A*) и в конце (точка *B*) разветвления. Поскольку все параллельные магистрали сходятся в точках *A* и *B*, то и разность напоров между точками *A* и *B* в каждой магистрали одинакова. Следовательно, одинаковы и потери напора:

$$h_{AB} = h_{l_1} = h_{l_2} = h_{l_3}. \qquad (7.62)$$

Перепишем формулу Дарси – Вейсбаха (7.30) в следующем виде:

$$h_l = \left(\frac{Q}{K}\right)^2 l, \qquad (7.63)$$

где Q – расход жидкости, м^3/с;

K – комплексный показатель, м^3/с;

$$K = \sqrt{\frac{2gD}{\lambda}}\omega; \qquad (7.64)$$

l – длина трубопровода, м.

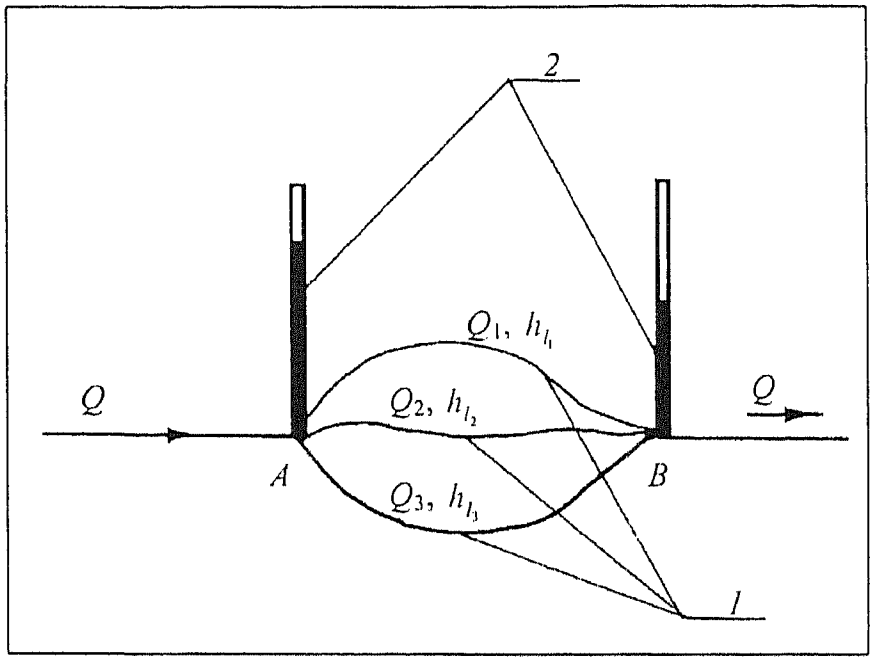


Рис. 7.5
Параллельное соединение трубопроводов:
1 – трубопроводы; *2* – пьезометры

Расходы жидкости в каждом трубопроводе с учетом (7.62) и (7.63):

$$\begin{cases} Q_1 = K_1\sqrt{\dfrac{h_{AB}}{l_1}}, \\ Q_2 = K_2\sqrt{\dfrac{h_{AB}}{l_2}}, \\ Q_3 = K_3\sqrt{\dfrac{h_{AB}}{l_3}}. \end{cases} \qquad (7.65)$$

Для решения этой системы необходимо четвертое уравнение – закон сохранения массы:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \qquad (7.66)$$

Решая систему из четырех уравнений с неизвестными Q_1, Q_2, Q_3 и h_{AB}, получим

$$h_{AB} = \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{K_i}{\sqrt{l_i}}\right)^2}; \qquad (7.67)$$

$$Q_j = \frac{K_j}{\sqrt{l_j}} \frac{Q}{\sum_{i=1}^{3} \frac{K_i}{\sqrt{l_i}}} \qquad (j = 1, 2, 3). \qquad (7.68)$$

Расчетные формулы (7.67) и (7.68) получены при анализе трех параллельных магистралей. Однако полученный результат распространяется на произвольное число n магистралей, при этом в указанных расчетных формулах вместо числа 3 следует использовать число n.

7.8. Истечение жидкости через отверстия

Рассмотрим истечение жидкости из малого отверстия в атмосферу (*рис. 7.6*). На поверхность жидкости в сосуде действует давление P_0, которое при открытом сосуде равно атмосферному давлению на уровне *1–1*. Жидкость истекает через отверстие площадью ω, заглубленное на расстоянии H от поверхности жидкости.

Струя жидкости при выходе из отверстия резко сжимается, что обусловлено инерцией частиц жидкости, подходящих к отверстию по криволинейным траекториям. Сечение струи на линии *2–2* называется ***сжатым сечением***. В сжатом сечении потока линии тока параллельны друг другу в отличие

от сечений левее и правее, поэтому в сечении *2–2* можно применить интеграл Бернулли.

Найдем среднюю скорость V_c и расход жидкости Q, вытекающей из сосуда. Запишем интеграл Бернулли для сечения *1–1*, которое находится на уровне свободной поверхности жидкости, и сжатого сечения *2–2*:

$$H + \frac{P_0}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_c^2}{2g} + h_f, \tag{7.69}$$

где P_a – атмосферное давление на уровне 0 – 0;

h_f – величина потерь напора от сечения *1–1* до сечения *2–2*, определяемая по формуле Дарси – Вейсбаха:

$$h_f = \xi \frac{V_c^2}{2g}, \tag{7.70}$$

ξ – коэффициент сопротивления, учитывающий потери напора при движении жидкости от сечения *1–1* до сечения *2–2*.

Введем понятие ***приведенного напора*** $H_{пр}$ в виде

$$H_{пр} = H + \left(\frac{P_0}{\rho g} - \frac{P_a}{\rho g} \right). \tag{7.71}$$

Подставляя (7.70) и (7.71) в (7.69), получим

$$H_{пр} = (1 + \xi) \frac{V_c^2}{2g}. \tag{7.72}$$

Из этого выражения определим скорость жидкости в сжатом сечении:

$$V_c = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \sqrt{2gH_{пр}}. \tag{7.73}$$

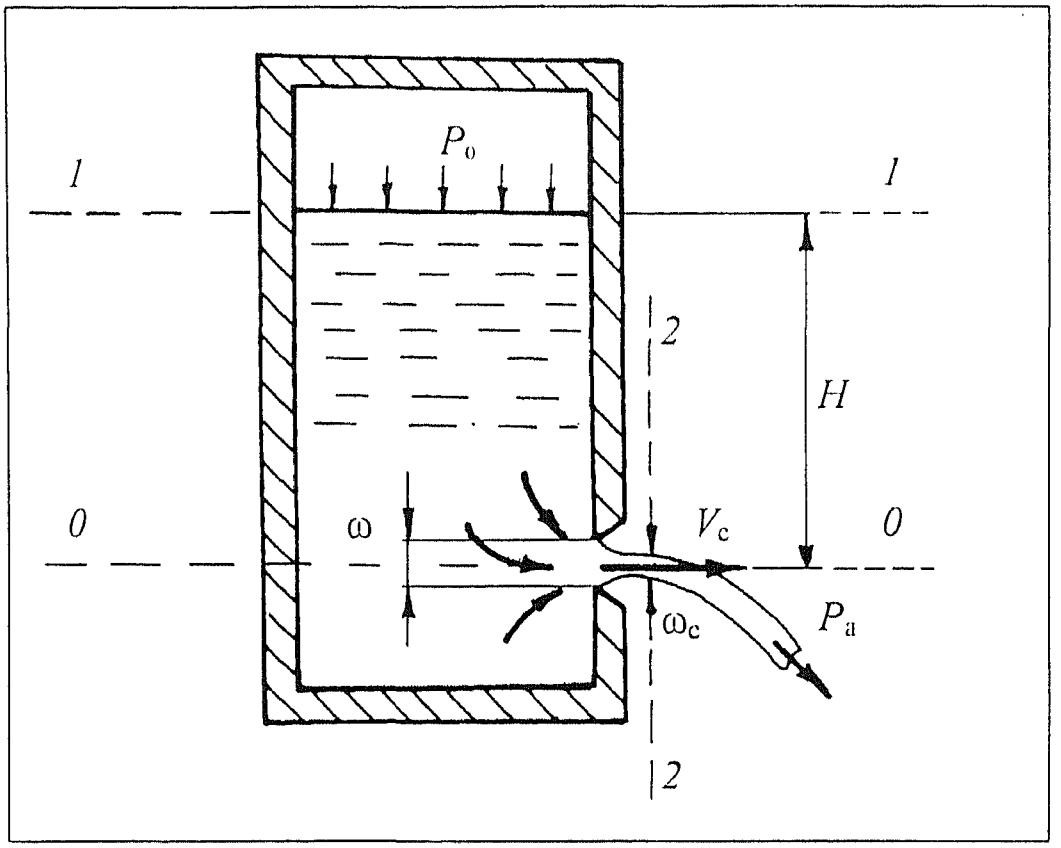


Рис. 7.6
Истечение жидкости из малого отверстия в атмосферу

Для идеальной жидкости $\xi = 0$, и вместо (7.73) получим формулу Торричелли:

$$V_c = \sqrt{2gH_{пр}} \,. \tag{7.74}$$

Зная скорость V_c в сжатом сечении ω_c, найдем расход для случая $P_0 = P_a$, когда напор определяется только высотой столба жидкости перед отверстием:

$$Q = \omega_c V_c = \omega_c \sqrt{\frac{1}{1+\xi}} \sqrt{2gH} \,. \tag{7.75}$$

Формулу (7.75) записывают и в другом виде:

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH}\,, \tag{7.76}$$

где μ_0 – коэффициент расхода отверстия,

$$\mu_0 = \varepsilon\varphi\,, \tag{7.77}$$

ε – коэффициент сжатия струи, $\varepsilon = \dfrac{\omega_c}{\omega}$;

φ – коэффициент скорости струи,

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}}\,; \tag{7.78}$$

ω – площадь сечения выходного отверстия.

7.9. Истечение жидкости через насадки

Насадком называется короткая напорная труба, предназначенная для истечения жидкости. Для того чтобы короткая напорная труба выполняла функцию насадка, должно соблюдаться условие

$$(3,5-4,0)D \le l_{\text{п}} \le (6-7)D\,, \tag{7.79}$$

где D – диаметр патрубка;

$l_{\text{п}}$ – длина патрубка.

За нижним пределом неравенства (7.79) жидкость не заполняет сечение патрубка и имеет место неустойчивое течение струи. За верхним пределом следует учитывать потери напора по длине трубы.

При гидравлическом расчете насадка пренебрегают потерями напора по длине и учитывают только местные потери. Различают следующие типы насадков (*рис. 7.7*):

- внешний цилиндрический насадок, или ***насадок Вентури***;
- внутренний цилиндрический насадок, или ***насадок Борда***;
- конические насадки (сходящиеся или расходящиеся);
- коноидальные насадки, т. е. насадки, имеющие форму истекающей струи.

Определим численные значения коэффициентов расхода для различных насадков.

При истечении через насадок Вентури коэффициент сжатия струи на выходе из насадка равен единице ($\varepsilon = 1$).

Коэффициент сопротивления ξ при истечении из насадка в атмосферу равен коэффициенту сопротивления *на входе в трубу* при нескругленных кромках (см. в табл. 7.3 «резкое сужение трубы» при $\omega_2/\omega_1 << 1$), $\xi = 0{,}5$.

Следовательно, для насадка Вентури имеем следующее значение коэффициента расхода:

$$\mu_0 = \varepsilon\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+0{,}5}} = 0{,}82. \qquad (7.80)$$

Насадок Борда отличается от насадка Вентури только условиями входа жидкости. Коэффициент сопротивления в выходном сечении $\xi = 1{,}0$, поэтому для насадка Борда имеем

$$\mu_0 = \varepsilon\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+1}} = 0{,}71. \qquad (7.81)$$

Таким образом, насадок Вентури обеспечивает увеличение расхода жидкости по сравнению с насадком Борда примерно на 15 %.

Для случая истечения жидкости через круглые отверстия (без насадков) численные значения коэффициентов ε, ξ, φ и μ_0, найденные опытным путем, составляют

$$\varepsilon = 0{,}63 - 0{,}64;\ \xi = 0{,}06 \text{ при } \varphi = 0{,}97;\ \mu_0 = 0{,}62. \qquad (7.82)$$

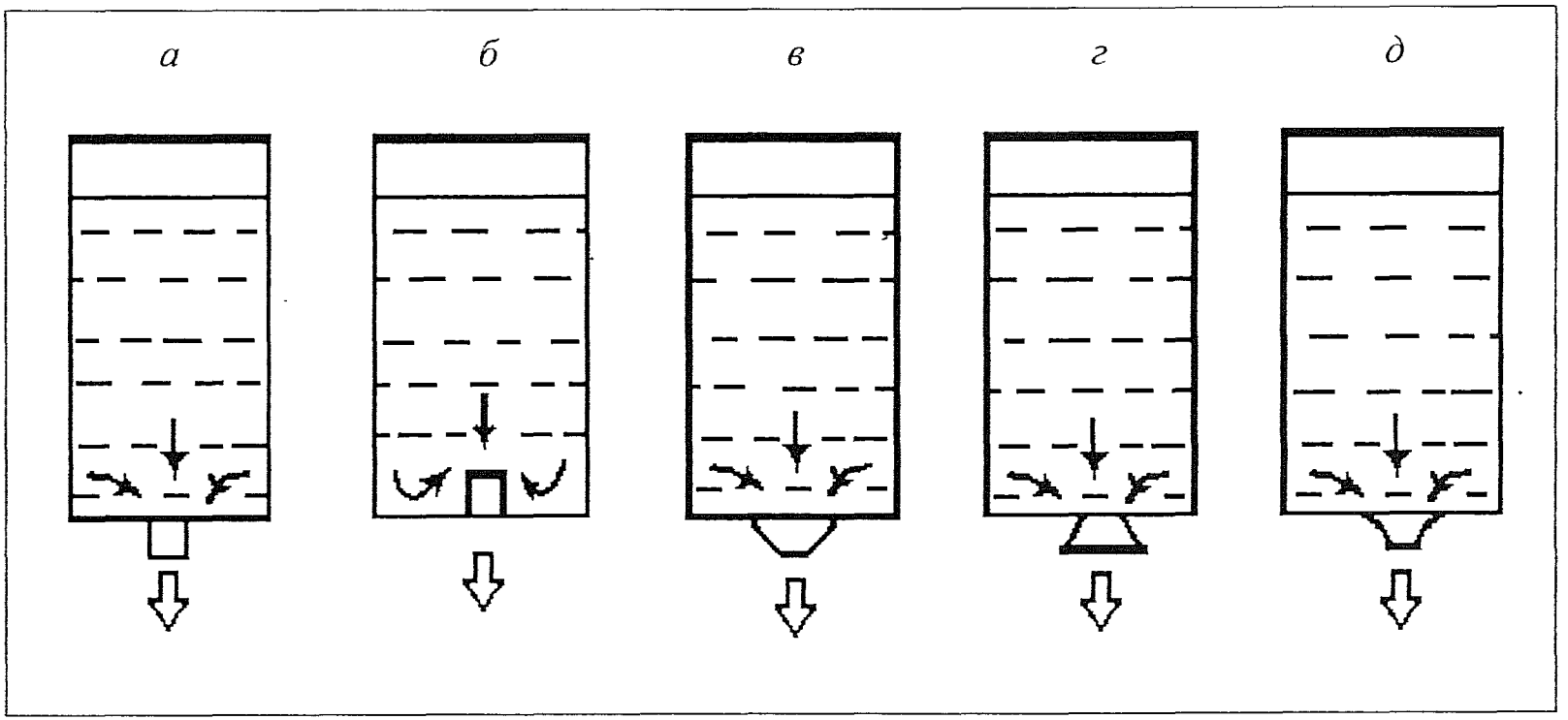


Рис. 7.7

Типы насадков: *а* – насадок Вентури; *б* – насадок Борда; *в* – сходящийся конический насадок; *г* – расходящийся конический насадок; *д* – коноидальный насадок

Если величины H и ω для отверстия и насадка одинаковы, то расход жидкости, например, через насадок Вентури будет больше, чем через круглое отверстие, в соответствии с отношением коэффициентов расхода

$$\frac{Q_{\text{нас}}}{Q_{\text{отв}}} = \frac{0,82}{0,62} = 1,34. \qquad (7.83)$$

Насадки со скругленными формами еще более могут увеличить расход жидкости. Как показывают опыты, путем округления кромок насадка коэффициент расхода можно довести до величины $\mu_0 = 0,95$.

Если сравнивать сходящиеся, цилиндрические и расходящиеся насадки, то, чтобы получить возможно больший расход при постоянном входном сечении, следует применять расходящийся насадок. Исследования показывают, что

$$Q_{\text{сход}} < Q_{\text{цил}} < Q_{\text{расх}}, \qquad (7.84)$$

т. е. наибольший расход жидкости имеет место при использовании конического расходящегося насадка. При постоянстве выходного сечения картина обратная, т. е. наибольший расход реализуется в сходящемся насадке.

7.10. Истечение жидкости через водосливы

Водосливом, по определению Р.Р. Чугаева, называется безнапорное отверстие (вырез, сделанный в стенке), через которое протекает вода.

В зависимости от геометрической формы водосливного отверстия различают водосливы: прямоугольные (*рис. 7.8, а*); треугольные (*рис. 7.8, б*); трапецеидальные (*рис. 7.8, в*); круго-

вые (*рис. 7.8, г*); параболические (*рис. 7.8, д*); с наклонным гребнем (*рис. 7.8, е*).

В зависимости от формы и размеров поперечного сечения водосливной стенки различают:

- водосливы с тонкой стенкой, когда

$$\delta \le (0{,}1 - 0{,}5)\,H, \tag{7.85}$$

где δ – толщина водосливной стенки, м;

H – величина геометрического напора на водосливе, м;

- водосливы с широким порогом, когда выполняется условие для прямоугольного водослива:

$$2H \le \delta \le 8H. \tag{7.86}$$

При $\delta > 8H$ имеем канал с горизонтальным дном, что требует учета потерь по его длине.

Для случая прямоугольного водослива расход жидкости Q ($м^3/с$)составляет

$$Q = \omega V, \tag{7.87}$$

где ω – площадь живого сечения струи, $м^2$; в случае прямоугольного сечения

$$\omega = bH; \tag{7.88}$$

V – скорость потока в рассматриваемом сечении, м/с,

$$V \approx \sqrt{2gH}. \tag{7.89}$$

Объединив (7.88) и (7.89), получим основную расчетную формулу для прямоугольного водослива:

$$Q = mb\sqrt{2g}\,H^{3/2}, \tag{7.90}$$

где m – поправочный коэффициент, называемый ***коэффициентом расхода водослива***.

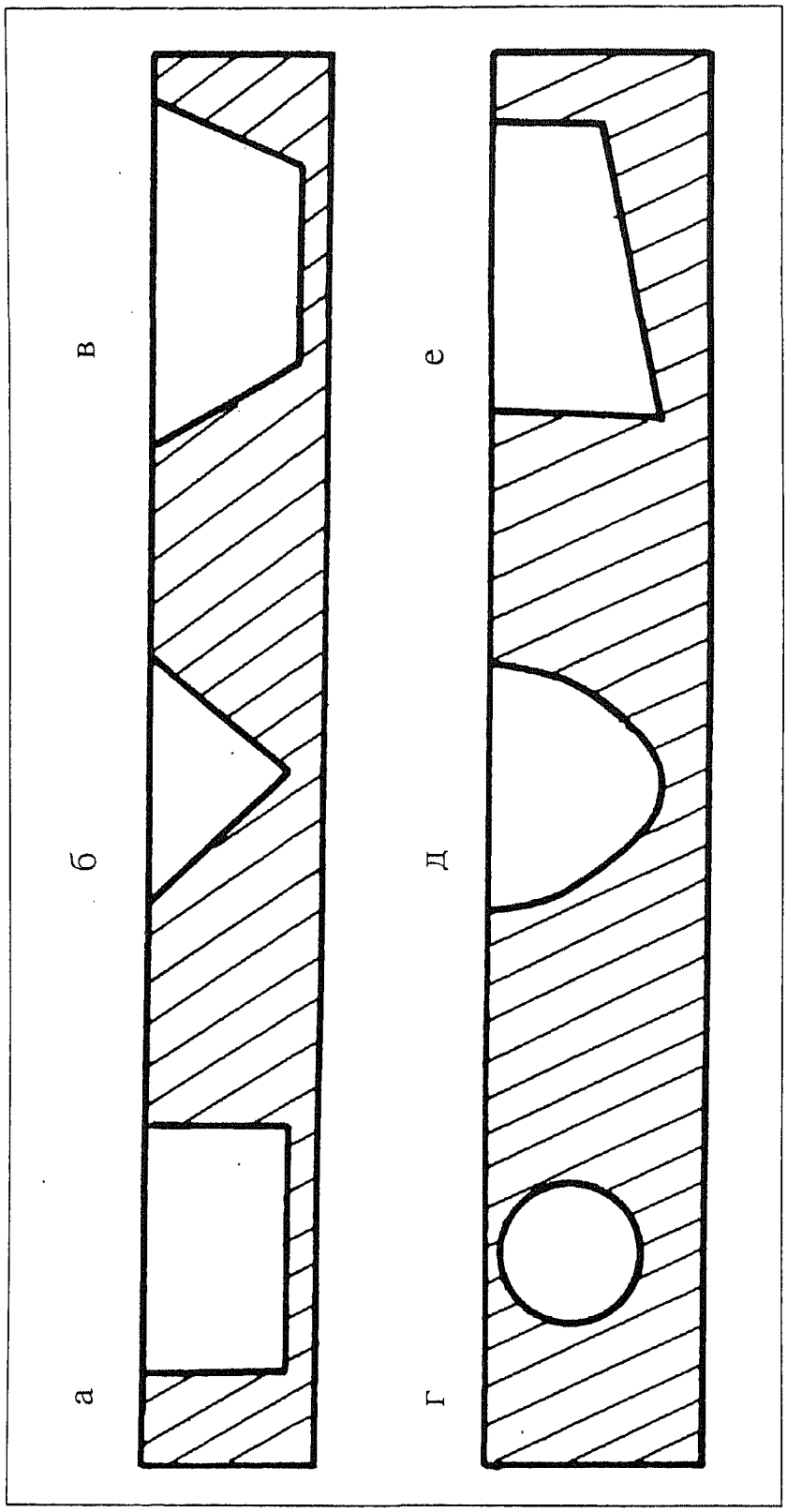


Рис. 7.8
Геометрические формы водосливов

Для расчета этого коэффициента можно использовать эмпирическую формулу, рекомендованную Р.Р. Чугаевым для *нормального* водослива:

$$m = 0,402 + 0,054\frac{H}{C_в}, \qquad (7.91)$$

которую можно применять при

$$C_в \geq 0,65H, \qquad H \geq 0,1\ м, \qquad (7.92)$$

где $C_в$ – высота водосливной стенки.

7.11. Задачи

Задача 7.1

Определить скорость воды в центре гладкой трубы радиусом $r_0 = 0,1$ м, если потеря напора на участке длиной $l = 20$ м составляет $h_l = 0,1$ м. Кинематическая вязкость воды $\nu = 10^{-6}$ м^2/с.

Решение

Гидравлический уклон трубы

$$J = \frac{h_l}{l} = \frac{0,1}{20} = 0,005.$$

Гидравлический радиус трубы

$$R = \frac{r_0}{2} = 0,05 \text{ м}.$$

Скорость трения согласно формуле (7.33)

$$V_* = \sqrt{0,05 \cdot 0,005 \cdot 9,81} = 0,0495 \text{ м/с}.$$

Относительная скорость в центре трубы при $r = 0$ [см. формулу (7.32)]

$$\frac{u}{V} = 5,75 \lg\left(\frac{0,1 \cdot 0,0495}{10^{-6}}\right) + 5,5 = 26,74.$$

Искомая скорость воды в центре трубы

$$u = 26,74 \cdot 0,0495 = 1,32 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 1,32$ м/с.

Задача 7.2

Определить скорость воды в центре шероховатой трубы радиусом $r_0 = 0,1$ м, если выступы равнозернистой шероховатости ($A_ш = 8,5$) составляют $\Delta = 0,12$ мм. Остальные условия течения – как и в предыдущей задаче, т.е. $V_* = 0,0495$ м/с.

Решение

Относительная скорость воды в центре трубы согласно формуле (7.34)

$$\frac{u}{V_*} = 5,75 \lg\frac{0,1}{0,12 \cdot 10^{-3}} + 8,5 = 25,29.$$

Скорость воды в центре трубы:

$$u = 25,29 \cdot 0,0495 = 1,25 \text{ м/с}.$$

Ответ: $u = 1,25$ м/с.

Задача 7.3

По горизонтальной стальной трубе длиной $l = 300$ м, диаметром $D = 0,10$ м, характеризуемой шероховатостью $\Delta = 0,15$ мм, перемещается вода температурой 20 °С (кинематическая вязкость воды при данной температуре $\nu = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м^2/с). Расход воды $Q = 0,02$ м^3/с. Требуется найти потери напора h_l по длине трубы.

Решение

Относительная шероховатость трубы

$$\Delta_r = \frac{0,15 \cdot 10^{-3}}{0,10} = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

Средняя скорость движения воды в трубе

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,02}{0,1^2} = 2,55 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_d = \frac{VD}{\nu} = \frac{2,55 \cdot 0,1}{1,006 \cdot 10^{-6}} = 2,53 \cdot 10^5.$$

Предельные числа Рейнольдса согласно (7.40) и (7.41):

$$(\mathrm{Re}_D)' = \frac{10}{\Delta_r} = \frac{10}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 6,7 \cdot 10^3;$$

$$(\mathrm{Re}_D)'' = \frac{500}{\Delta_r} = \frac{500}{1,5 \cdot 10^{-3}} = 3,3 \cdot 10^5.$$

Сопоставляя величину Re_D с предельными значениями чисел Рейнольдса, получим

$$(\mathrm{Re}_D)' < \mathrm{Re}_d < (\mathrm{Re}_D)''.$$

Выполним расчет λ по формуле Альтшуля (7.38):

$$\lambda = 0,11\left(1,5 \cdot 10^{-3} + \frac{68}{2,53 \cdot 10^5}\right)^{0,25} \approx 0,023.$$

Потеря напора

$$h_l = 0,023 \frac{300}{0,1} \frac{2,55^2}{2 \cdot 9,81} = 22,9 \text{ м}. \qquad (7.93)$$

Ответ: 22,9 м.

Задача 7.4

Определить среднюю скорость V (м/с) движения воды в цилиндрическом канале радиусом $r_0 = 0{,}3$ м, заполненному наполовину, при пьезометрическом уклоне, равном 0,1 м на 50 м длины потока. Материал канала – сталь неокрашенная.

Решение

Гидравлический радиус канала

$$R = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15 \text{ м}.$$

По табл. 7.2 определяем коэффициент шероховатости n канала, $n = 0{,}012$.

Величина пьезометрического уклона

$$J = \frac{0{,}1}{50} = 0{,}002 .$$

По формуле (7.45) вычисляем коэффициент Шези:

$$C = \frac{23 + \dfrac{1}{0{,}012}}{1 + 23\dfrac{0{,}012}{\sqrt{0{,}15}}} = 62{,}09 .$$

Среднюю скорость движения воды определяем по формуле Шези (7.44):

$$V = 62{,}09\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}002} = 1{,}08 \text{ м/с}.$$

Ответ: $V = 1{,}08$ м/с.

Задача 7.5

Определить потерю напора h_{AB}, мощность потока N и расходы воды Q_1 и Q_2 через две параллельные трубы. Сум-

марный расход воды Q составляет 0,6 м^3/мин (0,01 м^3/с). Параметры первой трубы: диаметр $D_1 = 70$ мм, длина $l_1 = 12$ м; второй трубы: $D_2 = 40$ мм, $l_2 = 8$ м. Трубы – бывшие в эксплуатации.

Решение

Шероховатость стенок трубы (см. табл. 7.1), $\Delta = 0{,}13$ мм. Относительная шероховатость труб

$$\Delta_{r_1} = \frac{\Delta}{D_1} = \frac{0{,}13}{70} = 1{,}86 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta_{r_2} = \frac{\Delta}{D_2} = \frac{0{,}13}{40} = 3{,}25 \cdot 10^{-3}.$$

Средняя скорость движения воды в двух трубах

$$\overline{V} = \frac{4Q}{\pi\left(D_1^2 + D_2^2\right)} = \frac{4 \cdot 0{,}01}{3{,}14\left(0{,}07^2 + 0{,}04^2\right)} = 1{,}96 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\overline{V} D_1}{\nu} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}07}{10^{-6}} = 137\,200;$$

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{\overline{V} D_2}{\nu} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}04}{10^{-6}} = 78\,400.$$

Коэффициенты трения согласно формуле Альтшуля:

$$\lambda_1 = 0{,}11\left(\Delta_{r_1} + \frac{68}{\mathrm{Re}_1}\right)^{0{,}25} =$$

$$= 0{,}11\left(1{,}86 \cdot 10^{-3} + \frac{68}{137\,200}\right)^{0{,}25} \approx 0{,}024;$$

$$\lambda_2 = 0,11\left(\Delta_{r_2} + \frac{68}{\mathrm{Re}_2}\right)^{0,25} =$$

$$= 0,11\left(3,25\cdot 10^{-3} + \frac{68}{78400}\right)^{0,25} \approx 0,028.$$

Соответствующие комплексные показатели по формуле (7.64):

$$K_1 = \sqrt{\frac{2gD_1}{\lambda_1}}\,\frac{\pi D_1^2}{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 9,81\cdot 0,07}{0,024}}\,\frac{3,14\cdot 0,07^2}{4} \approx 0,0293\ \text{м}^3/\text{с};$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{2gD_2}{\lambda_2}}\,\frac{\pi D_2^2}{4} =$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot 9,81\cdot 0,04}{0,028}}\,\frac{3,14\cdot 0,04^2}{4} \approx 0,0066\ \text{м}^3/\text{с}.$$

Потери напора на разветвлении при прохождении воды через две параллельные трубы определяются по формуле (7.67):

$$h_{AB} = \frac{Q^2}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}}\right)^2} = \frac{0,01^2}{\left(\frac{0,029}{\sqrt{12}} + \frac{0,0066}{\sqrt{8}}\right)^2} \approx 0,87\ \text{м}.$$

Расход воды в первой трубе:

$$Q_1 = \frac{\frac{K_1}{\sqrt{l_1}}}{\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}}}\,Q = \frac{0,029}{\sqrt{12}}\,\frac{0,01}{\frac{0,029}{\sqrt{12}} + \frac{0,0066}{\sqrt{8}}} =$$

$$= 7,82\cdot 10^{-3}\ \text{м}^3/\text{с} = 0,47\ \text{м}^3/\text{мин}.$$

Расход воды во второй трубе:

$$Q_2 = \frac{K_2}{\sqrt{l_2}} \frac{Q}{\frac{K_1}{\sqrt{l_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{l_2}}} = \frac{0,0066}{\sqrt{8}} \frac{0,01}{\frac{0,029}{\sqrt{12}} + \frac{0,0066}{\sqrt{8}}} =$$

$$= 2,18 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 0,13 \text{ м}^3/\text{мин}.$$

Потеря мощности потока при прохождении разветвления:

$$N = \rho g Q h_{AB} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,01 \cdot 0,87 = 85,3 \text{ Вт}.$$

Ответ: $Q_1 = 0,47 \text{ м}^3/\text{мин}$; $Q_2 = 0,13 \text{ м}^3/\text{мин}$; $h_{AB} = 0,87$ м; $N = 85,3$ Вт.

Примечание. В представленной методике расчета использовано значение средней скорости движения воды в трубах, которое составило $\bar{V} = 1,96$ м/с.

Эта величина в дальнейшем была принята при определении коэффициентов трения λ_1 и λ_2. Фактические скорости воды в трубах при вычисленных Q_1 и Q_2:

$$V_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 7,82 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,07^2} = 2,03 \text{ м/с};$$

$$V_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 2,18 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,04^2} = 1,74 \text{ м/с}.$$

Они отличаются от указанного среднего значения. Если различие скоростей очень существенно и необходимо получить более точный результат при определении h_{AB}, Q_1 и Q_2, то следует по той же методике выполнить аналогичный расчет, уточнив значения коэффициентов трения по формуле Альтшуля.

Задача 7.6

Определить скорость истечения струи воды V_c (м/с) из гидромонитора, динамическую мощность струи N (кВт) и расход воды Q (л/с), если манометрическое давление в магистрали составляет 6 атм, а диаметр выходного отверстия насадка Вентури со скругленными кромками 50 мм.

Решение

Величину приведенного напора при манометрическом давлении $P_0 - P_a = 6$ атм $= 6 \cdot 0,981 \cdot 10^5$ Па определяем по формуле (7.71):

$$H_{пр} = \frac{P_0 - P_a}{\rho g} = \frac{6 \cdot 0,981 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,81} = 60 \text{ м}.$$

Коэффициент сопротивления для насадка Вентури со скругленными кромками $\xi = 0,2$ (см. *табл. 7.3*). Тогда коэффициент скорости струи (7.78):

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,2}} = 0,91.$$

Коэффициент расхода отверстия μ_0 равен 0,91 при коэффициенте сжатия $\varepsilon = 1$.

Скорость истечения струи воды из гидромонитора:

$$V_c = \mu_0 \sqrt{2gH_{пр}} = 0,91\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 60} = 31,2 \text{ м/с}.$$

Расход воды (7.76):

$$Q = \mu_0 \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gH_{пр}} = 0,91 \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 60} =$$

$$= 0,0613 \text{ м}^3/\text{с} = 61,3 \text{ л/с}.$$

Динамическая мощность струи гидромонитора:

$$N = \frac{\rho Q V_c^2}{2} = \frac{1000 \cdot 0,0613 \cdot 31,2^2}{2} \approx 29836\,\text{Вт} \approx 29,8\,\text{кВт}.$$

Ответ: $V_c = 31,2$ м/с; $Q = 61,3$ л/с; $N = 29,8$ кВт.

Задача 7.7

Определить расход воды Q (м^3/ч) через прямоугольный водослив, имеющий геометрические параметры, соответствующие *рис. 7.9*.

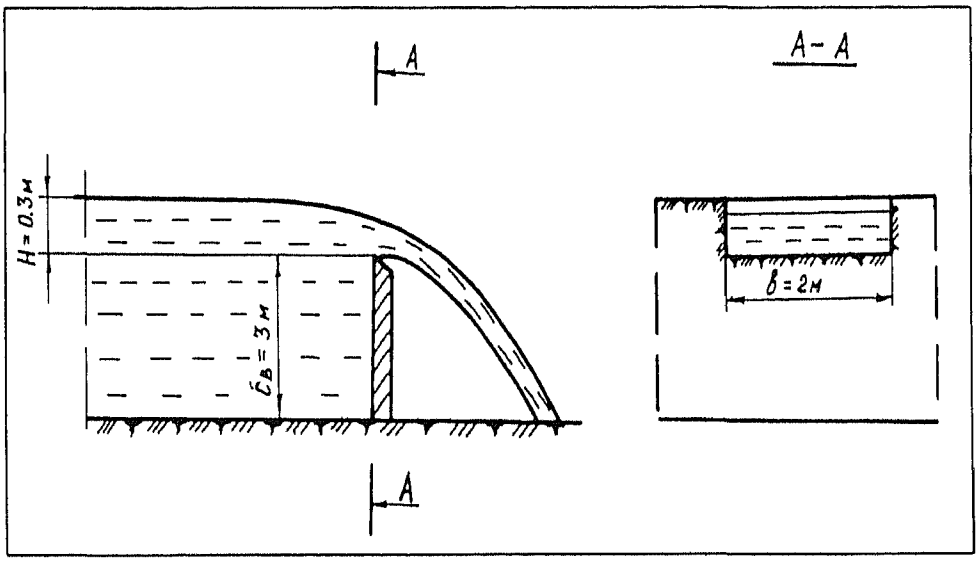


Рис. 7.9
К примеру расчета водослива

Решение

Условия (7.92) выполняются, поэтому используем формулу (7.91) для вычисления коэффициента расхода m:

$$m = 0,402 + 0,054\frac{0,3}{3} = 0,4074.$$

Расход воды определяем по формуле (7.90):

$Q = 0,4074 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 9,81}\, 0,3^{1,5} = 0,593$ м^3/ч.

Ответ: $Q = 0,593$ м^3/ч.

Контрольные вопросы

1. От каких параметров зависит полная потеря напора?
2. Какие силы действуют на элемент жидкости в напорной трубе?
3. Как вычисляют потерю напора жидкости в трубе при ламинарном движении?
4. Сформулируйте основное уравнение установившегося равномерного движения.
5. По какому закону распределена скорость при ламинарном движении жидкости в трубе? В какой точке скорость достигает максимального значения?
6. Из каких условий выводят формулу Пуазёйля?
7. Что вычисляют по формуле Дарси – Вейсбаха?
8. По какому закону распределена скорость при турбулентном движении жидкости в трубе?
9. В каких случаях применяют формулы Блазиуса и Альтшуля при расчете коэффициента гидравлического трения?
10. Как рассчитывают потери напора по длине трубы при турбулентном движении?
11. Какие параметры входят в формулу Шези?
12. Как рассчитывают потери напора при резком расширении потока?
13. На основе каких законов выводят формулу Борда?
14. Как рассчитывают потери напора в сетях?
15. В каком случае потери напора больше: при параллельном или последовательном соединении трубопроводов?
16. Как рассчитывают расход жидкости, истекающей через насадки?
17. Как рассчитывают расход жидкости через водослив?

Глава 8

ОСНОВЫ ДИФФУЗИОННОГО МАССОПЕРЕНОСА

8.1. Молекулярная диффузия. Законы Фика

Молекулярная диффузия представляет собой процесс переноса массы вещества соприкасающихся газов, жидкостей и твердых тел за счет непрерывного хаотического движения молекул. Молекулы вещества непрерывно сталкиваются друг с другом, в результате чего направление и скорость их движения постоянно меняются. В результате громадного числа столкновений происходят самопроизвольное медленное перемешивание молекул и взаимный перенос массы, а также передача энергии.

Скорость диффузии вещества зависит от градиента концентраций вещества $\frac{\partial C}{\partial Z}$ и коэффициента диффузии D (м^2/с). В соответствии с *первым законом Фика* для потока массы вещества q (кг/(м^2·с)) через единицу поверхности в единицу времени в направлении Z справедливо уравнение

$$q = -D\frac{\partial C}{\partial Z}. \qquad (8.1)$$

Концентрация C (кг·моль/м^3) представляет собой массу вещества в единице объема. Знак «–» в формуле (8.1) указывает на то, что поток вещества q направлен в противоположную от направления градиента концентрации сторону.

В процессе диффузионного переноса масса вещества Q (кг), прошедшая через площадь ω (м^2) за время t (с), составит

$$Q = q\,\omega\,t. \qquad (8.2)$$

В случае диффузии в двухкомпонентной среде уравнение диффузии для каждого вещества A и B принимает вид

$$q_A = -D_A \frac{\partial C_A}{\partial Z}; \tag{8.3}$$

$$q_B = -D_D \frac{\partial C_D}{\partial Z}. \tag{8.4}$$

В *табл. 8.1* приведены коэффициенты взаимной диффузии в бинарной смеси для газов при атмосферном давлении.

Таблица 8.1

Коэффициент взаимной диффузии для некоторых газов в нормальных условиях

Диффундирующий газ	Основной газ	Коэффициент взаимной диффузии D_{12}, 10^{-4} м^3/с
Водород	Кислород	0,679
Кислород	Азот	0,174
Оксид углерода	Кислород	0,183
Оксид углерода	Водород	0,642
Диоксид углерода	Водород	0,538
Диоксид углерода	Оксид углерода	0,136
Пары воды	Диоксид углерода	0,098
Метан	Воздух	0,196
Диоксид углерода	Воздух	0,142
Пары воды	Воздух	0,230

Диффузия в газах определяется средней длиной свободного пробега $\bar{l}$ молекул, которая значительно больше среднего расстояния между ними. Согласно кинетической теории газов коэффициент диффузии

$$D \approx \frac{\bar{l}\,\bar{V}}{3}, \tag{8.5}$$

где $\bar{V}$ – средняя скорость теплового движения частиц, м/с.

Коэффициент диффузии обратно пропорционален давлению газа $\left(\bar{l} \sim \frac{1}{P}\right)$ и прямо пропорционален корню из абсолютной температуры $\left(\bar{V} \sim \sqrt{T}\right)$.

В молекулярной физике доказано равенство коэффициентов самодиффузии газа D и его кинематической вязкости ($D = \nu$), что обусловлено одинаковой физической природой процессов переноса вещества.

В бинарной смеси газов, молекулы которых взаимодействуют как твердые сферы с диаметрами d_1 и d_2, коэффициент взаимной диффузии

$$D_{1,2} = \frac{1}{6\pi\left(n_1 + n_2\right)R^2}\sqrt{\frac{2kT}{\pi}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}, \qquad (8.6)$$

где n_1, n_2 – концентрация молекул в единице объема, м$^{-3}$;

$$n_1 + n_2 = \left(\frac{\rho_1}{\mu_1} + \frac{\rho_2}{\mu_2}\right)N_A; \qquad (8.7)$$

ρ_1, ρ_2 – плотность газов, кг/м^3;

μ_1, μ_2 – молекулярный вес газов, кг/моль;

N_A – число Авогадро, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ моль$^{-1}$;

R – средний радиус молекул (м), $R = 0{,}5(R_1 + R_2)$;

k – постоянная Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К;

T – абсолютная температура, К;

m_1, m_2 – масса молекул (кг), $m_1 = \mu_1 / N_A$; $m_2 = \mu_2 / N_A$.

Коэффициент диффузии в жидкостях определяется по формуле

$$D \simeq \frac{d^2}{6\tau_0} \exp\left(-\frac{W}{kT}\right), \tag{8.8}$$

где d – среднее расстояние между молекулами, м;

τ_0 – средний период колебаний молекулы, $\tau_0 = 10^{-12}$ с;

W – энергия активации, Дж.

Экспоненциальная зависимость (8.8) коэффициента диффузии от температуры жидкости подтверждается экспериментально.

Второй закон Фика связывает уравнение диффузии и закон сохранения массы. Рассмотрим элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy и dz (*рис. 8.1*) в диффузионном потоке вещества. Масса вещества, входящего (выходящего) в параллелепипед за счет молекулярной диффузии, составляет:

на входе

$$dQ_1 = -D\frac{\partial C}{\partial x} dy\, dz\, dt, \tag{8.9}$$

на выходе

$$dQ_2 = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(C + \frac{\partial C}{\partial x} dx\right) dy dz dt. \tag{8.10}$$

Разница между входящей и выходящей массой вещества:

$$dQ_1 - dQ_2 = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx dy dz dt. \tag{8.11}$$

Проделав аналогичные операции для всех граней параллелепипеда в направлении трех осей координат, получим общую массу вещества, которое вносится (выносится) в параллелепипед:

$$D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) dx dy dz dt. \tag{8.12}$$

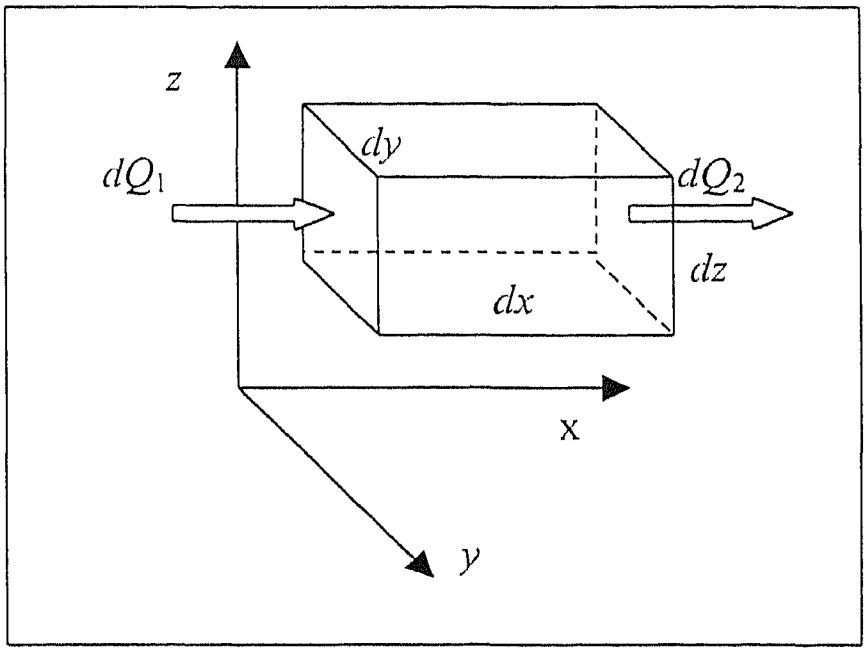


Рис. 8.1
К выводу второго закона Фика

С другой стороны, поток вещества, проходящий через параллелепипед объемом $dxdydz$ за время dt, изменяет концентрацию вещества на величину

$$dxdydzdt\frac{\partial C}{\partial t}. \tag{8.13}$$

Приравнивая выражения (8.12) и (8.13) друг другу, в соответствии с законом сохранения вещества получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right). \tag{8.14}$$

Это дифференциальное уравнение параболического типа носит название *второго закона Фика*, оно справедливо в том случае, если D не зависит от концентрации раствора и координат.

В общем случае, когда D является функцией концентрации и координат, второй закон Фика выражается так:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}\left(D \operatorname{grad} C\right). \tag{8.15}$$

8.2. Турбулентная диффузия

Турбулентная диффузия представляет собой процесс переноса вещества при турбулентном перемешивании жидкости и определяется гидродинамическим состоянием потока.

Масса вещества q (кг/(м^2·с)), которая переносится при турбулентной диффузии, определяется аналогично уравнению (8.1):

$$q = -D_{\text{т}} \frac{dC}{dz}, \tag{8.16}$$

где $D_{\text{т}}$ – коэффициент турбулентной диффузии, м^2/с.

Развитие турбулентного движения приводит к интенсивному поперечному переносу вещества и перемешиванию в потоке. Суммарный перенос вещества молекулярной и турбулентной диффузией:

$$q = q_{\text{м}} + q_{\text{в}} = -\left(D + D_{\text{т}}\right)\frac{\partial C}{\partial z}. \tag{8.17}$$

В практических расчетах процессов массопередачи известен искусственный прием, когда перенос вещества выражают уравнением

$$q = K_{\text{м}} \Delta C, \tag{8.18}$$

где $K_{\text{м}}$ – коэффициент массопередачи, м/с;

ΔC – осредненная разность концентраций, кг/м^3.

Из сопоставления (8.17) и (8.18) определим коэффициент массопередачи $K_м$ (м/с):

$$K_м \approx \frac{D + D_т}{\Delta Z}. \qquad (8.19)$$

Коэффициент массопередачи в виде (8.19) учитывает молекулярный и турбулентный механизмы переноса вещества.

В задачах по обтеканию тел потоком вещества величина плотности потока q (кг/(м^2·с)) может быть выражена аналогично зависимости для конвективного теплообмена между текучей средой и твердым телом в виде

$$q = K^* (C - C_т), \qquad (8.20)$$

где K^* – коэффициент массообмена, м/с;

C и $C_т$ – концентрации вещества соответственно в потоке и на поверхности обтекаемого тела, кг/м^3.

8.3. Диффузионный массоперенос в силовом поле

Формула (8.1) для диффузии вещества верна в случае, если в рассматриваемых средах имеет место разность концентраций при постоянных давлениях и температурах. Если в среде существуют градиенты давлений P и температур T, то перенос вещества должен рассчитываться по следующей формуле:

$$q = -D\left(\nabla C + \frac{K_p}{P}\nabla P + \frac{K_t}{T}\Delta T\right). \qquad (8.21)$$

Процесс переноса вещества, вызванного градиентом давления, называется ***бародиффузией***. Аналогично ***термо-***

диффузией называется процесс переноса вещества, вызванный разностью температур на единице длины.

Величины K_p и K_t называются коэффициентами соответственно баро- и термодиффузии.

Баро- и термодиффузии наблюдаются при постоянной концентрации вещества, когда чистая диффузия отсутствует. Коэффициенты K_p и K_t могут быть как положительными, так и отрицательными в отличие от коэффициента D, который всегда положителен.

Под действием внешних сил в жидкостях и газах могут иметь место другие виды диффузии. Например, в электролитах и плазме при наличии разности потенциалов будет происходить диффузия ионов, так называемая ***электродиффузия***.

Наибольшее значение коэффициента диффузии — в газах. Чем больше длина свободного пробега молекул газа, тем больше скорость диффузии.

Диффузия в жидкостях идет значительно медленнее, чем в газах. Особенно медленно диффузия протекает в твердых телах.

Коэффициент диффузии газа в газе имеет величину 10^{-5} м^2/с, для жидкостей (HCl и NH_3 в воде) – 10^{-6} м^2/с, а для твердых тел он составляет ~10^{-15} м^2/с.

8.4. Диффузия газового облака от непрерывно действующего источника

Дифференциальное уравнение диффузии в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C(r,t)}{\partial r}\right), \qquad (8.22)$$

где $C(r, t)$ – концентрация газа на расстоянии r от источника в момент времени t.

В данной постановке задачи разместим непрерывно действующий источник постоянной мощности Q_t (кг/с) в начале координат, а в остальном пространстве примем начальную концентрацию равной нулю:

$$C(r, 0) = 0 \qquad \text{при } r \neq 0. \tag{8.23}$$

Наличие диффузионного источника при $r = 0$ означает, что диффузионный поток газа через сферу площадью $4\pi r^2$ при $r \to 0$ равен Q_t, т. е.

$$\lim_{r \to 0} \left[-D \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} 4\pi r^2 \right] = Q_t. \tag{8.24}$$

Следовательно, функция концентрации в начале координат ($r \to 0$) стремится к бесконечности и имеет вид

$$C(r, t) = \frac{Q_t}{4\pi D r}. \tag{8.25}$$

Что касается произведения $r C(0, t)$, то оно является ограниченным и составляет

$$r C(0, t) = \frac{Q}{4\pi D}. \tag{8.26}$$

Обозначим

$$r C(r, t) = V(r, t). \tag{8.27}$$

Тогда вместо уравнения (8.22) получим

$$\frac{\partial V(r, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 V(r, t)}{\partial r^2}. \tag{8.28}$$

Начальные и граничные условия задачи:

$$V(r, 0) = 0; \tag{8.29}$$

$$V(0, t) = \frac{Qt}{4\pi D}. \tag{8.30}$$

Решение дифференциального уравнения (8.28) при указанных краевых условиях имеет вид

$$V(r, t) = \frac{Q_t}{4\pi D}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{8.31}$$

Следовательно, решение задачи о диффузионном распространении вещества при непрерывно действующем источнике мощностью Q_t, помещенном в начало координат $r = 0$, описывается выражением

$$C(r, t) = \frac{Q_t}{4\pi D}\frac{1}{r}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-x^2} dx. \tag{8.32}$$

8.5. Диффузия от мгновенного источника

Рассмотрим процесс диффузии газового облака от мгновенного точечного источника мощностью Q_t в неограниченном пространстве. За пределами источника концентрация газа в начальный момент времени равна нулю. Необходимо найти закон изменения концентрации в пространстве в различные моменты времени. Сформулированная задача отражает условия распространения газового облака, образующегося при взрыве в воздухе заряда взрывчатого вещества.

Используя решения задачи для непрерывного источника, можно перейти к случаю мгновенного источника, представив его в виде суперпозиции двух источников мощностью Q_t и $-Q_{t_0}$. Первый источник включается в момент времени $t = 0$, а второй – при $t = t_0$ ($t_0 \to 0$). За промежуток времени t_0 источником выделяется количество вещества $Q_t \cdot t_0 = G$.

Искомое решение задачи находится по принципу суперпозиции:

$$C_0(r,t) = C(r,t) - C(r,t-t_0). \tag{8.33}$$

Переходя к пределу при $t_0 \to 0$ и полагая $Q = \text{const}$, получим

$$C_0(r,t) = G\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right). \tag{8.34}$$

Процесс диффузии газового облака носит не молекулярный, а турбулентный характер. Этому процессу соответствует коэффициент турбулентной диффузии $D_т$. Если не учитывать первоначальный разброс газов при взрыве, несущественное влияние земли, в отсутствие ветра концентрация газа от мгновенного источника определяется зависимостью (8.34). Отметим, что при $r = 0$, т. е. в месте взрыва, концентрация дыма уменьшается во времени по следующему закону:

$$C_0(0,t) = G\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D_т t}}\right)^3. \tag{8.35}$$

С увеличением времени концентрация стремится к нулю. С удалением от центра взрыва в соответствии с (8.34) концентрация резко уменьшается.

8.6. Задача

Определить коэффициент взаимной диффузии $D_{1,2}$ (м/с) метана в азот при температуре 25 °С (298 К) и атмосферном давлении, если на контакте газов их плотность составляет: $\rho_1 = 0{,}2$ кг/м^3; $\rho_2 = 0{,}9$ кг/м^3.

Решение

Радиус молекулы метана $R_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ м, азота – $R_2 = 1{,}85 \cdot 10^{-10}$ м.

Средний радиус:

$$R = 0{,}5\left(R_1 + R_2\right) = 0{,}5\left(1{,}5+1{,}85\right)10^{-10} = 1{,}675 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Концентрация молекул на контакте газов (8.7):

$$n_1 + n_2 = \left(\frac{0{,}2}{16} + \frac{0{,}9}{28}\right)6{,}02 \cdot 10^{26} = 2{,}69 \cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}.$$

Масса молекул:

$$m_1 = \frac{16}{6{,}02 \cdot 10^{26}} = 2{,}66 \cdot 10^{-26}\ \text{кг};$$

$$m_2 = \frac{28}{6{,}02 \cdot 10^{26}} = 4{,}65 \cdot 10^{-26}\ \text{кг}.$$

Коэффициент взаимной диффузии:

$$D_{1,2} = \frac{1}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}69 \cdot 10^{25}\left(1{,}675 \cdot 10^{-10}\right)^2} \times$$

$$\times\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 298}{3{,}14}\left(\frac{1}{0{,}332\cdot 10^{-26}}+\frac{1}{5{,}31\cdot 10^{-26}}\right)}=$$

$$=6{,}44\cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}.$$

Ответ: $D_{1,2}=6{,}44\cdot 10^{-5}\ \text{м}^2/\text{с}$.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют виды диффузии?
2. От каких параметров зависит величина коэффициента диффузии?
3. Как изменяются с увеличением температуры коэффициенты диффузии газов, жидкостей и твердых тел?
4. Как рассчитывается коэффициент диффузии бинарных газов?
5. Какие уравнения лежат в основе второго закона Фика?
6. Каким образом можно управлять величиной диффузионного массопереноса?
7. Как рассчитывается величина концентрации вещества при диффузионном распространении от непрерывно действующего источника?
8. Как изменяется со временем концентрация вещества от мгновенного источника? Как можно интенсифицировать этот процесс?

Глава 9

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

9.1. Законы фильтрации

Основной закон фильтрации воды в пористой среде устанавливает связь между расходом потока и линейными потерями напора. В качестве кинематической характеристики такого потока используют скорость фильтрации V, представляющую собой отношение расхода потока Q к площади его поперечного сечения ω:

$$V = \frac{Q}{\omega}. \tag{9.1}$$

В этом случае величина V не является действительной скоростью элемента потока, поскольку при ее определении учитывается вся площадь сечения, а не площадь порового сечения, через которую движется жидкость. Действительная средняя скорость W движения рассчитывается с помощью показателя поверхностной пористости $k_{\text{п}}$, представляющего собой относительное содержание соединенных друг с другом пор в сечении потока:

$$k_{\text{п}} = \frac{\omega_{\text{пор}}}{\omega}. \tag{9.2}$$

Тогда действительная скорость определяется по формуле

$$W = \frac{V}{k_{\text{п}}}. \tag{9.3}$$

Проводя опыты в песках и глинах, французский гидравлик А. Дарси установил в 1856 г., что скорость фильтрации V в данной точке фильтрационного потока при ламинарном движении выражается зависимостью

$$V = kI, \tag{9.4}$$

где k – коэффициент фильтрации, м/с;

I – пьезометрический уклон в рассматриваемой точке.

Коэффициент фильтрации представляет собой скорость фильтрации при величине пьезометрического уклона, равной единице. В соответствии с законом Дарси скорость фильтрации прямо пропорциональна величине пьезометрического уклона в первой степени. В общем случае данная зависимость имеет более сложный вид, соответствующий экспериментальным результатам.

Граница применимости закона Дарси при фильтрации воды в песчаной породе в нормальных условиях определяется неравенством

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} < 1 \div 7, \tag{9.5}$$

где d – средний диаметр частицы грунта.

В случае турбулентной фильтрации вместо линейной зависимости можно использовать параболическую:

$$I = aV + bV^2, \tag{9.6}$$

где коэффициенты a и b определяются экспериментально.

В работе [9] предложена следующая зависимость:

$$I = \frac{V}{k}\left(1 + \alpha V\right), \tag{9.7}$$

где k – коэффициент фильтрации при ламинарном режиме;

α – коэффициент нелинейности фильтрации (с/м),

$$\alpha = \frac{0,09}{n_0^2\sqrt{1 - n_0}}\sqrt{\frac{k}{\nu g}}, \tag{9.8}$$

где n_0 – объемная эффективная пористость (отношение объема сообщающихся между собой пор к общему объему горной породы);

ν – кинематическая вязкость, $м^2/с$;

$g = 9{,}81$ $м/с^2$.

Экспериментальные данные показывают, что даже для пород с высоким (порядка 1000 м/сут) коэффициентом фильтрации закон Дарси часто выполняется в силу малых скоростей фильтрации воды при естественных напорных градиентах, встречающихся в гидрогеологической практике. Поэтому необходимость применения нелинейного закона фильтрации возникает редко.

При постоянном сечении потока его расход определяется по формуле

$$Q = kI\omega . \qquad (9.9)$$

Зависимость (9.9) называется также ***формулой Дарси***. Отметим, что при очень малых скоростях имеет место отклонение от закона Дарси, что объясняется действием сил молекулярного взаимодействия. При движении воды в тонкодисперсных средах выделяют три качественно отличающихся режима движения: первый, когда влиянием сил вязкости можно пренебречь; второй, когда проявляются вязкопластические и реологические свойства жидкости, при этом коэффициент фильтрации – величина переменная, зависящая от градиента; третий режим, когда вся связанная вода переходит в гравитационную воду и коэффициент фильтрации становится постоянным, а фильтрация происходит по закону Дарси.

9.2. Показатели фильтрации

Движение воды в пористой среде представляет значительный интерес применительно к задачам фильтрации в тон-

кодисперсных средах, например песках. Одна из распространенных моделей описывает вязкопластическое движение жидкости, в которой касательные напряжения характеризуются зависимостью, соответствующей закону Бингама – Шведова:

$$\tau = \tau_0 + \mu \left| \frac{du}{dr} \right|, \tag{9.10}$$

где τ_0 – начальное касательное напряжение сдвига, Па;

μ – динамическая вязкость, Па · с;

$\frac{du}{dr}$ – поперечный градиент скорости, 1/с.

В данной модели пористая среда представляется в виде системы капиллярных трубок радиусом $r_т$ с площадью поперечного сечения каждой трубки $\omega_т = \pi r_т^2$. При объемном расходе потока Q, поперечном сечении ω, пористости среды n число капиллярных трубок сечением $\omega_т$:

$$N = \frac{n\omega}{\omega_т}, \tag{9.11}$$

а расход в каждой из них

$$Q_т = \frac{Q}{N} = \frac{\pi r_т^2}{n} V, \tag{9.12}$$

где V – скорость движения жидкости в капилляре, м/с.

С другой стороны, для расчета расхода жидкости в трубке при ламинарном режиме движения применяется формула Пуазёйля:

$$Q_т = \frac{\pi \rho g r_т^4}{8\mu} I. \tag{9.13}$$

Приравняв (9.12) к (9.13), получим зависимость для скорости:

$$V = \frac{\rho g n r_т^2}{8\mu} I . \qquad (9.14)$$

Сопоставляя последнюю зависимость с законом Дарси, устанавливающим линейную связь между скоростью и градиентом напора ($V = kI$), находим теоретическую зависимость для коэффициента фильтрации k (м/с):

$$k = \frac{\rho g n r_т^2}{8\mu} . \qquad (9.15)$$

Наряду с коэффициентом фильтрации используют понятие проницаемости горных пород, характеризующей способность пропускать через себя жидкости и газы. В то же время используют водопроницаемость – способность пропускать свободную воду. Коэффициент проницаемости $K_п$ (м^2) характеризует геометрию порового пространства и вычисляется по формуле

$$K_п = \frac{k\mu}{\rho g} . \qquad (9.16)$$

Принимая во внимание зависимость (9.15), выразим коэффициент проницаемости $K_п$ (м^2) через пористость и радиус капилляров:

$$K_п = \frac{n r_т^2}{8} . \qquad (9.17)$$

В первом приближении проницаемость зависит не от свойств фильтрующейся жидкости, а только от пористости и радиуса капилляров. Однако, как свидетельствуют экспери-

менты, проницаемость различных жидкостей в одних и тех же породах неодинакова. Это является следствием физико-химических взаимодействий минерального скелета с фильтрующейся жидкостью. Например, проницаемость суглинков для пресной воды намного ниже, чем для соленой. Различие достигает двух порядков. С увеличением концентрации растворов NaCl и $CaCl_2$ проницаемость резко увеличивается до некоторого предела. Проницаемость для кислых растворов больше, чем для основных. Отсутствие учета этих особенностей может существенно отразиться на результатах расчетов.

9.3. Типы движения подземных вод

Пространственное движение подземных вод характеризуется формой линий тока, величиной напора и изменением этих величин во времени. В наиболее часто рассматриваемых задачах выделяют плоскопараллельные и радиальные линии токов. В первом случае линии токов параллельны между собой и поэтому процессы фильтрации описываются математическими моделями в одномерной постановке задачи. В радиальных потоках линии тока распространяются по радиусу и характеризуют процессы фильтрации относительно оси осушающей или нагнетательной скважины. Если линии напора представлены коаксиальными окружностями, то такой поток называется радиальносимметричным и он описывается математическими моделями в осесимметричной постановке задачи.

Различают стационарные потоки, когда гидродинамические характеристики потока не изменяются во времени, и нестационарные, в которых величина напора, расход и другие параметры являются функцией времени.

Если границы потока прорезают всю его мощность до водоупора, то поток называют ***совершенным***. Например, скважина, пробуренная до границы водоупора, формирует в процессе нагнетания или осушения совершенный поток, а сама скважина также называется ***совершенной***. В другом случае, когда скважина недобурена до границы водоупора, формируется несовершенный гидродинамический поток с линиями тока, сходящимися не только к стволу скважины, но и к ее нижней торцевой части. Такая скважина называется ***несовершенной.***

9.4. Уравнение неразрывности фильтрационного потока

Рассмотрим совершенный гидродинамический поток и выделим в водонасыщенном пласте бесконечно малый пространственный элемент в виде призмы высотой H с прямоугольным основанием $dxdy$ (*рис. 9.1*). Положим, что грань призмы расположена на водонепроницаемом основании, а высота фильтрационного потока относительно основания составляет H.

Воспользуемся также допущением Дюпюи, в соответствии с которым скорости горизонтального фильтрационного потока V_x и V_y постоянны по всей высоте H. В этом случае массовый расход потока, проходящего через грани призмы в направлениях x и y в течение времени dt, составляет

$$M_x + M_y = \rho V_x H\, dydt + \rho V_y H\, dxdt\,. \qquad (9.18)$$

При выходе потока из противоположных граней его расход изменяется на величину

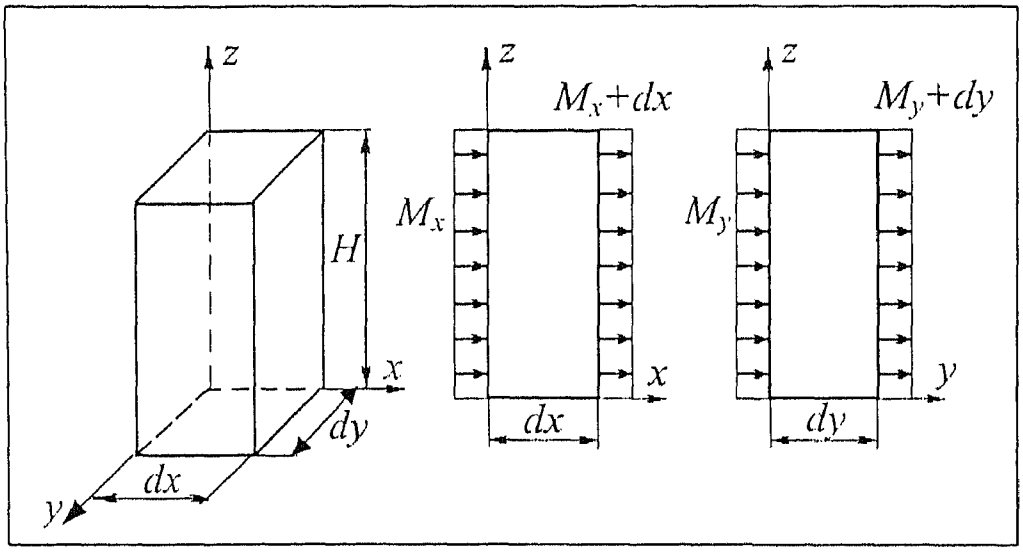


Рис. 9.1

К выводу уравнения неразрывности для фильтрующейся жидкости

$$d\left(M_x + M_y\right) = \frac{\partial\left(M_x + M_y\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(M_x + M_y\right)}{\partial y}dy =$$

$$= \frac{\partial\left(\rho V_x H\right)}{\partial x}dx\,dy\,dt + \frac{\partial\left(\rho V_y H\right)}{\partial y}dx\,dy\,dt =$$

$$= \left[\frac{\partial\left(\rho V_x H\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho V_y H\right)}{\partial y}\right]dx\,dy\,dt. \qquad (9.19)$$

С другой стороны, масса воды в объеме призмы с учетом пористости n определяется по формуле

$$M_t = n\rho H\,dx\,dy\ , \qquad (9.20)$$

а соответствующее изменение массы воды за время dt в указанном объеме

$$dM_t = -\frac{\partial M_t}{\partial t}dt = -\frac{\partial(n\rho H)}{\partial t}dxdydt\,. \qquad (9.21)$$

При отсутствии внутренних источников и стоков воды увеличение расхода потока, проходящего через грани призмы, равно уменьшению массы воды в объеме призмы. Приравнивая (9.19) к (9.21), получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial(\rho V_x H)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y H)}{\partial y} = -\frac{\partial(n\rho H)}{\partial t}\,. \qquad (9.22)$$

В частном случае безнапорной фильтрации, когда плотность воды и пористость минерального скелета не изменяются в течение процесса фильтрации, т. е. $n = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$, уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial(V_x H)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y H)}{\partial y} = -n\frac{\partial H}{\partial t}\,. \qquad (9.23)$$

При безнапорном движении несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) по всей площади пласта ($H = m = \text{const}$, m – мощность пласта) уравнение неразрывности описывает равномерное движение и имеет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0\,. \qquad (9.24)$$

При напорном движении жидкости по пласту выполняется условие постоянства высоты потока $H = \text{const}$. В то же время пористость и плотность являются переменными. В этом случае

$$\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}n, \qquad (9.25)$$

и уравнение неразрывности (9.22) приводится к виду

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=-\frac{\partial n}{\partial t}\rho-\frac{\partial \rho}{\partial t}n. \qquad (9.26)$$

С достаточной для расчетов точностью 0,1 % при давлении порядка 10 МПа справедлива линейная зависимость плотности от давления:

$$\rho=\rho_0\left[1+\beta_в\left(P-P_0\right)\right], \qquad (9.27)$$

где ρ_0 – плотность воды при давлении P_0, кг/м^3;

$\beta_в$ – коэффициент сжимаемости воды, $\beta_в = 0{,}5 \cdot 10^{-9}$ Па$^{-1}$;

P – давление воды, Па.

Для учета изменения пористости минерального скелета воспользуемся уравнением состояния

$$dn=\beta_c dP, \qquad (9.28)$$

где β_c – показатель удельного сжатия породы,

$\beta_c = (0{,}8–5)10^{-11}$ Па$^{-1}$.

После подстановки (9.27) и (9.28) в (9.26) получим

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}=-\beta_c\rho\frac{\partial P}{\partial t}-n\beta_в\rho_0\frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (9.29)$$

В случае когда абсолютное изменение плотности незначительно ($\rho \approx \rho_0$), получим

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=-\left(\beta_c+n\beta_в\right)\frac{\partial P}{\partial t}. \qquad (9.30)$$

Величина $\beta^* = \beta_c + n\,\beta_в$ называется ***коэффициентом упругой емкости породы.***

9.5. Дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации

Воспользовавшись зависимостью скорости фильтрации от градиента напора в виде закона Дарси и полагая, что скорости V_x и V_y не зависят от z (допущение Дюпюи), после подстановки значений V_x и V_y в (9.23) получим следующее уравнение безнапорной фильтрации:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-k_x H\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-k_y H\frac{\partial H}{\partial y}\right)=-n\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (9.31)$$

В однородных изотропных средах коэффициенты не зависят от направления движения потока ($k_x = k_y = k = \text{const}$). Тогда уравнение фильтрации запишется в виде

$$\frac{k}{n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right]=\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (9.32)$$

Эти нелинейные дифференциальные уравнения искусственным путем приводят к хорошо изученному линейному дифференциальному уравнению параболического тела, широко используемому при анализе процессов теплопроводности. В работе [11] по вопросам теории фильтрации описан способ линеаризации дифференциального уравнения (9.32), когда искомую величину H, зависящую от x и y, в нарушение правил дифференцирования выносят за знак производной, предполагая равенство:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right)&\approx H_0\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial H}{\partial y}\right)&\approx H_0\frac{\partial^2 H}{\partial y^2},\end{aligned}\right\} \qquad (9.33)$$

где H_0 – максимальная высота фильтрационного потока относительно водоупора, м.

В этом случае линеаризованное уравнение фильтрации принимает вид уравнения параболического типа

$$a\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (9.34)$$

Коэффициент a называют ***коэффициентом уровнепроводности*** и вычисляют по формуле

$$a=\frac{k H_0}{n}. \qquad (9.35)$$

С точки зрения математических преобразований приведенная выше выкладка (9.33) является некорректной. В то же время, как показал сравнительный анализ точного решения нелинейного дифференциального уравнения (9.32) и приближенного решения линеаризованного уравнения (9.34), при определенных условиях различия в конечных результатах оказываются не столь существенными. Так, например, при исследовании процессов осушения массива в уравнении (9.34) вместо величины H рекомендуется использовать H^2, а при насыщении массива водой уравнение (9.34) можно применять без изменений. В работе [11] показано, что величина ошибки при таком приближении не превышает 5 %, что вполне компенсируется наличием большого количества аналитических зависимостей из теории теплопроводности, которые легко адаптируются к задачам фильтрации.

В осесимметричной постановке задачи в полярной системе координат линеаризованное уравнение фильтрации имеет вид

$$\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)=\frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (9.36)$$

Для вывода уравнения фильтрации при напорных потоках воспользуемся следующей записью закона Дарси:

$$V_x = -\frac{k}{\rho g}\frac{\partial P}{\partial x}; \qquad V_y = -\frac{k}{\rho g}\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{9.37}$$

После подстановки (9.37) в (9.30) получим дифференциальное уравнение параболического типа, не требующее линеаризации:

$$a^*\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{9.38}$$

где a^* – коэффициент пьезопроводности – комплексный показатель, характеризующий фильтрационные свойства пласта, $a^* = \dfrac{K}{\rho g \beta^*}$, м^2/с.

Принимая во внимание $P = \rho g H^*$, где H^* – приведенная величина напора, получим уравнение

$$a^*\left(\frac{\partial^2 H^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H^*}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial H^*}{\partial t}, \tag{9.39}$$

которое отличается от уравнения (9.34) только коэффициентами уровнепроводности или пьезопроводности.

9.6. Стационарные задачи фильтрации

9.6.1. Фильтрационный расход через прямоугольную перемычку

Рассмотрим прямоугольную грунтовую перемычку, возведенную на горизонтальном водоупоре (*рис. 9.2*). По обе стороны перемычки находится вода с постоянными уровнями h_1 и h_2 относительно водоупора. Для того чтобы найти удельный расход воды, фильтрующийся через перемычку, воспользуемся уравнением (9.32). В одномерном случае ($\frac{\partial H}{\partial y} = 0$) при стационарных условиях установившегося режима фильтрации ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 . \qquad (9.40)$$

Граничные условия задачи:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } x = 0 \;\; H = h_1, \\ \text{при } x = L \;\; H = h_2. \end{array}\right\} \qquad (9.41)$$

После интегрирования (9.40) получим

$$H^2 = C_1 x + C_2. \qquad (9.42)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 находятся из граничных условий, с учетом которых получится следующее выражение для депрессионной кривой:

$$H = \sqrt{\left(h_2^2 - h_1^2 \right) \frac{x}{L} + h_1^2} . \qquad (9.43)$$

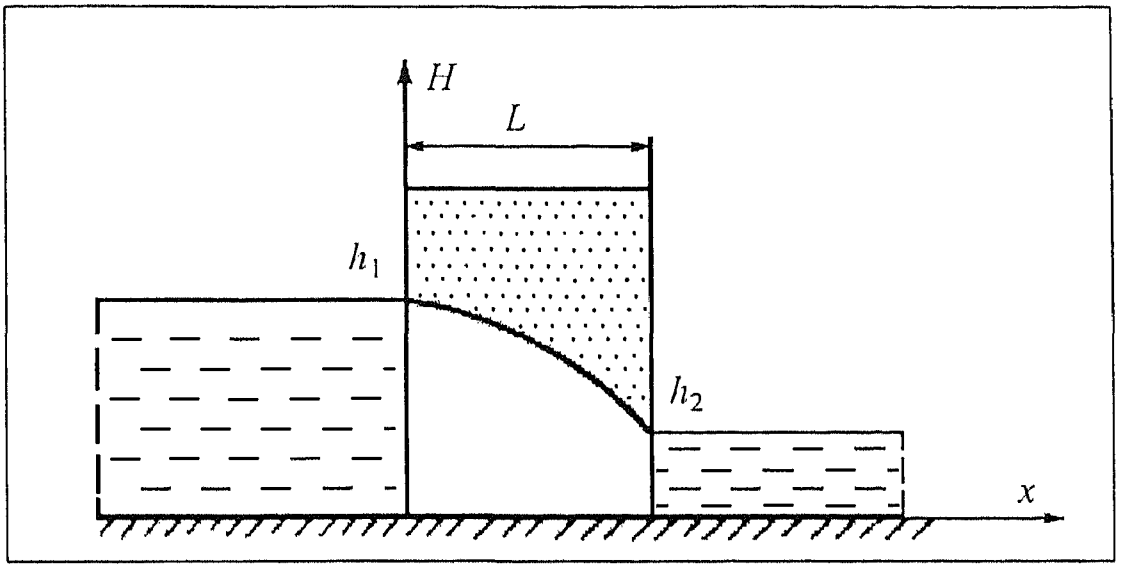


Рис. 9.2
Фильтрация воды через прямоугольную перемычку

Как видно, в уравнение (9.43) не входит коэффициент фильтрации. Таким образом, в случае стационарного потока кривая депрессии будет одинаковой для различных грунтов. Фильтрационный расход через единицу длины перемычки определим по формуле Дюпюи:

$$Q = -h_1 L \frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{x=h_1} . \qquad (9.44)$$

Он составит

$$Q = \frac{k\left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2L}, \text{ м}^3/(\text{м}\cdot\text{с}). \qquad (9.45)$$

9.6.2. Приток воды к совершенному круглому одиночному колодцу

Рассмотрим круглый одиночный колодец, доходящий до водоупора (*рис. 9.3*). В установившемся режиме, когда из колодца откачивают воду с постоянным расходом (Q = const), предполагается, что уровень воды установится на постоянной отметке h_0, что будет соответствовать стационарному режиму фильтрации грунтовой воды.

Расход воды Q (м^3/с), поступающей к одиночному колодцу по окружности радиусом r при высоте фильтрационного потока h, в соответствии с допущением Дюпюи составляет

$$Q = 2\pi r h k \frac{dh}{dr}. \tag{9.46}$$

Интегрируя это уравнение в пределах от r_0 до R, которым соответствуют уровни h_0 и H_0, получим

$$\frac{Q}{2\pi k}\int_{r_0}^{R}\frac{dr}{r} = \int_{h_0}^{H_0} h\,dh. \tag{9.47}$$

После интегрирования и преобразований получим формулу для определения дебита колодца Q (м^3/с):

$$Q = \pi k \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln\left(\dfrac{R}{r_0}\right)}. \tag{9.48}$$

При интегрировании уравнения (9.46) сделано допущение, что приток воды к колодцу не зависит от радиуса (Q = const). В действительности же установившийся режим поступления грунтовых вод к колодцу не реализуем, поскольку приток воды меняется с течением времени и при бесконечно больших

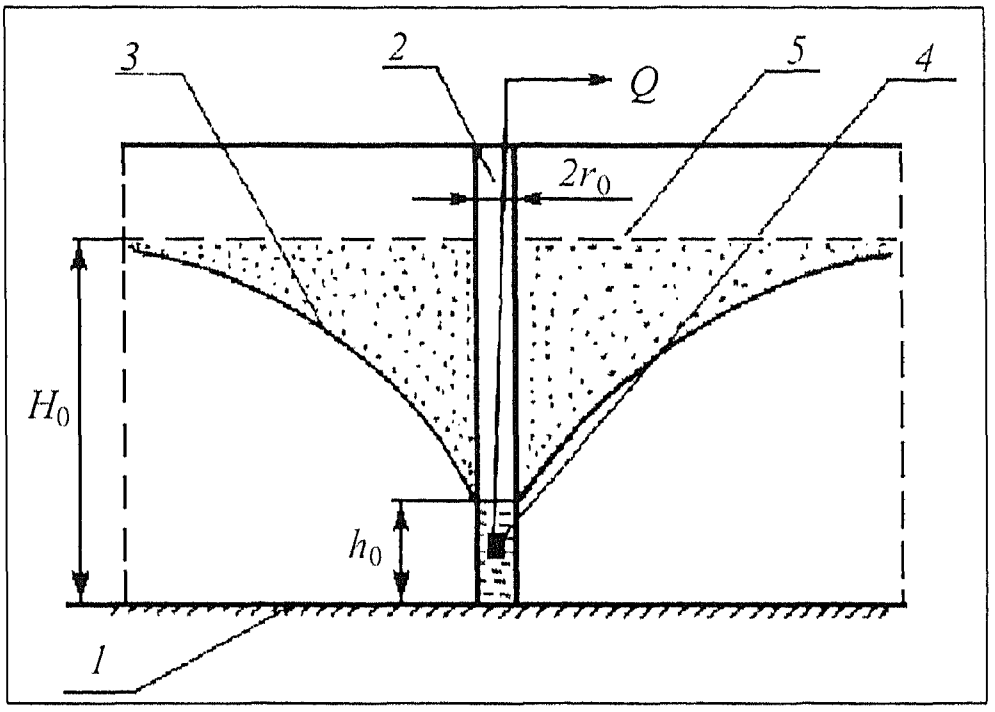


Рис. 9.3

Совершенный одиночный колодец: *1* – водоупор; *2* – колодец; *3* – депрессионная кривая; *4* – водяной насос; *5* – уровень грунтовых вод

временах стремится к нулю, т. е. $Q \to 0$, что соответствует полному осушению окружающего массива, а при $t = 0$ значение Q максимально. Исходя из этих соображений под величиной расхода, рассчитываемого по формуле (9.48), следует понимать некоторое средневзвешенное значение расхода, который реализуется при изменении радиуса границы питания от r_0 до R.

Эта задача описана во многих учебниках по теории фильтрации, и ее решение широко используется в практических расчетах. Однако, строго говоря, в постановке этой задачи ((9.46) и (9.47)) допущены два несовместимых предположения, а именно: постоянство расхода $Q = \text{const}$ и постоянство уровня $h_0 = \text{const}$. Такая ситуация для неограниченного пространства нереальна, поскольку в безграничной среде не-

возможно существование стационарного режима фильтрации. В данном случае фактическую форму депрессионной кривой надо привязывать к конкретному моменту времени, соответствующему экспериментальным данным. Тогда указанное допущение не столь существенно искажает истинный результат и вполне применимо в расчетах.

Таким образом, для определения дебита колодца нужно знать радиус границы питания R. Эта величина может быть определена только с учетом времени работы колодца, которое необходимо для решения нестационарной задачи фильтрации. Второй возможный подход к определению радиуса R базируется на данных гидрогеологических испытаний и основан на сопоставлении фактических данных с уравнением депрессии, полученным после преобразования (9.48):

$$R = r_0 \exp\left(\pi k \frac{H_0^2 - h_0^2}{Q} \right).$$

Изменив верхние пределы интегрирования в равенстве (9.47), т. е. положив $R = r$ и $H_0 = h$, после преобразований получим формулу для расчета глубины h (м) грунтового потока (уровень депрессионной кривой), используемую при известных результатах гидрогеологических испытаний:

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0}}. \qquad (9.49)$$

9.6.3. Приток воды к совершенному артезианскому колодцу

Особенностью совершенного артезианского колодца является то, что он пройден до водоупора, а напорное движение воды происходит в водоносном слое, расположенном между нижним водоупором и верхним водонепроницаемым слоем (*рис. 9.4*).

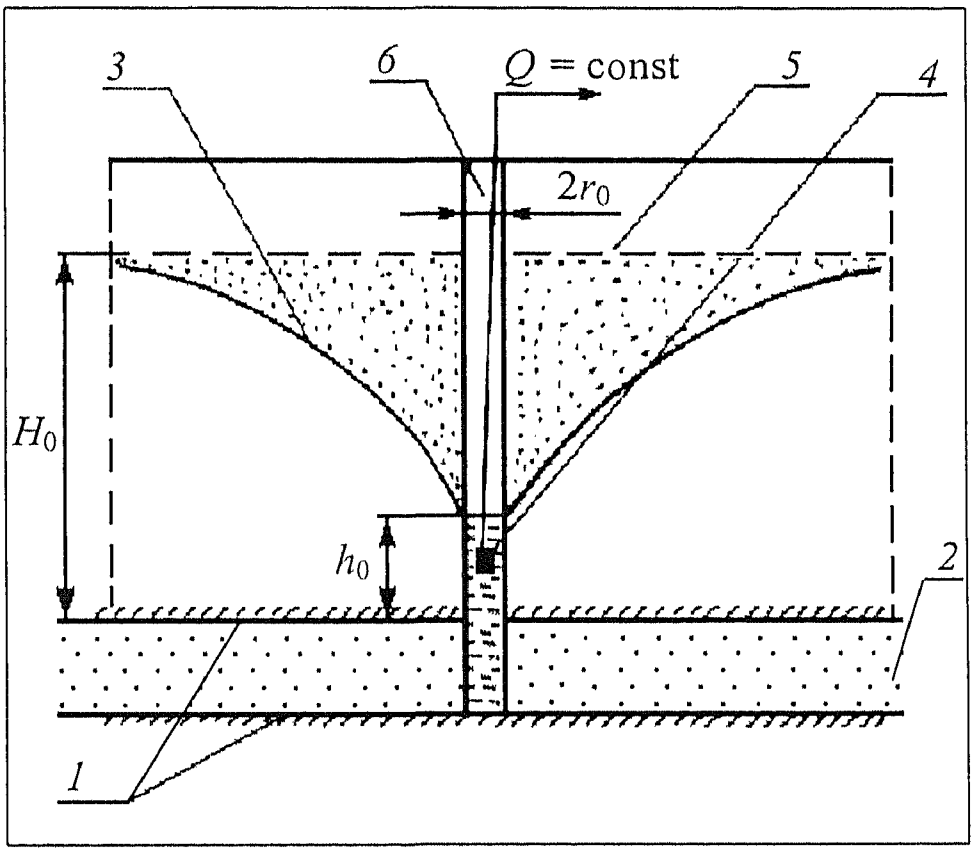


Рис. 9.4

Совершенный артезианский колодец с постоянным расходом воды (Q = const): *1* – водоупор; *2* – водоносный слой; *3* – пьезометрическая кривая; *4* – насос; *5* – уровень грунтовых вод; *6* – артезианский колодец

В отличие от предыдущего случая постоянство расхода воды (Q = const), поступающей по окружности радиусом r,

достигается при постоянной высоте фильтрационного потока, равной мощности водоносного слоя, $a_0 = \text{const}$:

$$Q = 2\pi r a_0 k \frac{dh}{dr}. \tag{9.50}$$

После интегрирования в пределах от r_0 (радиус колодца) до R (радиус зоны влияния) получим формулу для определения дебита Q (м^3/с) артезианского колодца:

$$\frac{Q}{2\pi a_0 k}\int_{r_0}^{R}\frac{dr}{r} = \int_{h_0}^{H_0} dh, \tag{9.51}$$

или

$$Q = 2\pi k \frac{a_0\left(H_0 - h_0\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)}, \tag{9.52}$$

где h_0 и H_0 – пьезометрические уровни воды в самом колодце ($r = r_0$) и на расстоянии радиуса влияния ($r = R$) соответственно.

При использовании формулы (9.52) основная погрешность вычислений обусловливается тем, насколько верно выбран радиус зоны влияния (или радиус границы питания). В строгой постановке задачи, как уже отмечалось, радиус зоны влияния не может быть постоянным, он является величиной переменной, зависящей от времени. Поэтому стационарный установившийся режим фильтрационного движения воды, принятый в задаче, является не вполне корректным допущением. Однако, так как параметр R стоит под логарифмом, его изменения слабо отражаются на результатах расчета. Формула (9.52) дает удовлетворительные результаты при наличии текущих измерений кривой депрессии.

9.7. Приток воды к галерее, расположенной на водоупоре (нестационарная задача)

Для определения удельного расхода воды, поступающей в галерею (*рис. 9.5*) (на 1 м ее длины) с одной ее стороны, воспользуемся дифференциальным уравнением фильтрации (одномерная задача):

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t};\qquad u=h^2;\qquad h=h(x,t). \tag{9.53}$$

Рассмотрим случай, когда галерея до осушения была полностью заполнена водой до уровня H_0, а затем в момент времени $t=0$ уровень воды резко понизился до величины h_0 и этот уровень поддерживается в течение всего времени фильтрации. Необходимо определить контур депрессионной кривой и расход воды, поступающей в галерею.

Краевые условия задачи:

при $x \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} &h(x,0)=H_0 \quad \text{или} \quad u(x,0)=H_0^2,\\ &h(0,t)=h_0 \quad \text{или} \quad u(0,t)=h_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.54}$$

При таких краевых условиях решением уравнения Фурье (9.53) будет безразмерная функция фильтрации θ, широко используемая в задачах теплопроводности:

$$\theta=\frac{h^2(x,t)-h_0^2}{H_0^2-h_0^2}=\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_x}}\right), \tag{9.55}$$

где Fo_x – критерий Фурье, $\mathrm{Fo}_x=\dfrac{at}{x^2}$;

$\operatorname{erf}(z)$ – интеграл вероятности,

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt.$$

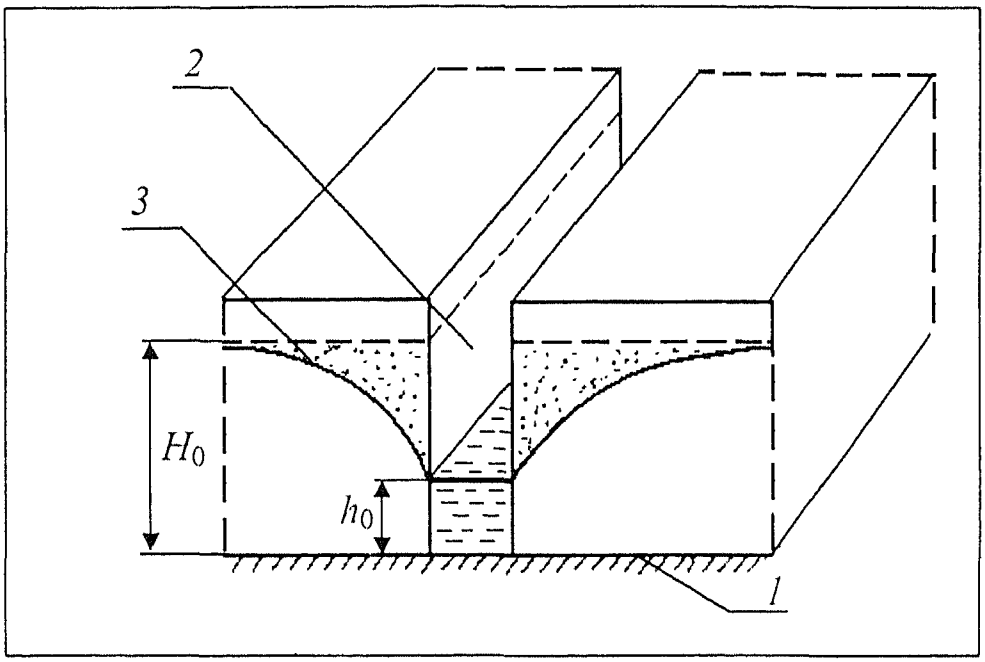


Рис. 9.5

Совершенная галерея:
1 – водоупор; *2* – галерея; *3* – депрессионная кривая

Удельный расход воды q (м^3/(м·с)), поступающей к галерее через вертикальную плоскость, расположенную на расстоянии x, определяется по формуле

$$q=kh\frac{dh}{dx}. \qquad (9.56)$$

Поскольку

$$h=\left[h_0^2+\left(H_0^2-h_0^2\right)\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{Fo}_x}}\right)\right]^{0,5},$$

после подстановки производной $\frac{dh}{dx}$ в (9.56) получим

$$q = \frac{kh}{2\sqrt{\pi at}} \frac{\left(H_0^2 - h_0^2\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)}{\sqrt{h_0^2 + \left(H_0^2 - h_0^2\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)}}. \qquad (9.57)$$

Тогда удельный расход воды, поступающей непосредственно в галерею с одной ее стороны, определим, подставив в (9.57) значения $x = 0$ и $h = h_0$:

$$q = \frac{k\left(H_0^2 - h_0^2\right)}{2\sqrt{\pi at}}. \qquad (9.58)$$

Наконец, расход воды, поступающей в галерею с двух ее сторон, очевидно, равен $2q$, т. е.

$$Q = 2q = \frac{k\left(H_0^2 - h_0^2\right)}{\sqrt{\pi at}}. \qquad (9.59)$$

9.8. Приток воды к совершенному колодцу, расположенному на водоупоре (нестационарная задача)

Рассмотрим уравнение фильтрации в полярной системе координат:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h(r,t)}{\partial r}\right). \qquad (9.60)$$

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ до начала откачки воды из колодца уровень грунтовых вод не зависит от радиуса и равен H_0 (см. *рис. 9.3*):

$$h(r, 0) = H_0 . \tag{9.61}$$

Положим, что в дальнейшем из колодца постоянно откачивается вода с переменным во времени расходом при выполнении условия, что уровень воды в колодце (при $r = r_0$) сохраняется постоянным:

$$h(r_0, t) = h_0 = \text{const}. \tag{9.62}$$

Для нахождения аналитического решения задачи введем новую переменную в виде комбинации независимых переменных [11]:

$$\xi = \frac{r^2}{4at} . \tag{9.63}$$

В этом случае уравнение фильтрации (9.60) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\xi \frac{d^2 h}{d\xi^2} + (1 + \xi) \frac{dh}{d\xi} = 0 , \tag{9.64}$$

решение которого имеет вид

$$h(r, t) = C_1 + C_2 \int_R^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi} , \tag{9.65}$$

где $R = \dfrac{r^2}{4at}$.

Из начального условия (9.61) находим постоянную величину:

$$C_1 = H_0.$$

Из граничного условия (9.62) находим C_2:

$$C_2 = \frac{h_0 - H_0}{\int\limits_{R_0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}}, \tag{9.66}$$

где $R_0 = \frac{r_0^2}{4at}$.

Таким образом, искомое решение поставленной задачи имеет вид

$$\frac{h(r,t) - h_0}{H_0 - h_0} = 1 - \frac{\int\limits_{R}^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}}{\int\limits_{R_0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}}. \tag{9.67}$$

Обозначим правую часть (9.67) через θ.

Как отмечалось выше, при использовании линеаризованного уравнения фильтрации по формуле (9.67) рекомендуется рассчитывать процесс насыщения породного массива водой. При расчете же процесса осушения следует использовать квадратичную зависимость:

$$\frac{h^2(r,t) - h_0^2}{H_0^2 - h_0^2} = \theta. \tag{9.68}$$

Водопоглощение, или дебит колодца Q (м^3/с), определяется по формуле

$$Q = 2\pi r_0 h_0 k \left.\frac{dh}{dr}\right|_{r=r_0}. \tag{9.69}$$

Вычислив производную $\frac{dh}{dr}$ от функции (9.67), получим расчетную зависимость для колодца, соответствующую процессу насыщения массива водой:

$$Q = 4\pi k h_0 \left(H_0 - h_0\right) \frac{e^{-\frac{r_0^2}{4at}}}{\int\limits_{R_0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}}. \qquad (9.70)$$

При выводе зависимости для дебита колодца, когда реализуется процесс осушения массива, производную $\frac{dh}{dr}$ следует брать от функции

$$h = \sqrt{H_0^2 - \left(H_0^2 - h_0^2\right)\theta},$$

которая выводится из формулы (9.68). После преобразований в соответствии с формулой (9.69) получим окончательное выражение для дебита колодца Q (м^3/с):

$$Q = 2\pi K \left(H_0^2 - h_0^2\right) \frac{e^{-\frac{r_0^2}{4at}}}{\int\limits_{R_0}^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}}. \qquad (9.71)$$

Отметим, что при выводе выражений (9.70) и (9.71) использовано следующее значение производной:

$$\frac{d}{dr}\left[\int\limits_{\frac{r^2}{4at}}^{\infty} e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}\right] = -\frac{2}{r} e^{-\frac{r^2}{4at}}. \qquad (9.72)$$

Выразим θ следующим образом:

$$\theta = 1 - \frac{\mathrm{Ei}(-R)}{\mathrm{Ei}(-R_0)}, \tag{9.73}$$

где $\mathrm{Ei}(-R)$, $\mathrm{Ei}(-R_0)$ – интегралы Эйлера [19]:

$$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}. \tag{9.74}$$

При малых значениях параметра x ($x < 0{,}1$) с ошибкой не более 6 % справедлива следующая приближенная зависимость:

$$\mathrm{Ei}(-x) \approx \ln(\gamma x), \tag{9.75}$$

где γ – постоянная Эйлера, $\gamma = 1{,}781$.

В последнем случае выражение (9.73) существенно упрощается:

$$\theta = \frac{\ln\left(\frac{R_0}{R}\right)}{\ln \gamma R_0}. \tag{9.76}$$

С учетом последних допущений при $R_0 < 0{,}1$ дебит колодца Q (м^3/с) может быть вычислен по формуле

$$Q = -2\pi k\left(H_0^2 - h_0^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-R_0}}{\ln(\gamma R_0)}. \tag{9.77}$$

9.9. Задачи

Задача 9.1

Определить фильтрационный расход воды Q (м^3/(м·сут)) через прямоугольную перемычку, возведенную на горизонтальном водоупоре. Грунт – плотная супесь с коэффициентом фильтрации $k = 0{,}35$ м/сут. Уровни воды за перемычкой: $h = 2{,}0$ м, $h_2 = 0{,}6$ м. Ширина перемычки $l = 9{,}1$ м.

Решение

Фильтрационный расход в установившемся режиме (см. *рис. 9.2*) рассчитываем по формуле (9.45):

$$Q = \frac{k\left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2l} = \frac{0{,}35\left(2^2 - 0{,}6^2\right)}{2 \cdot 9{,}1} = 0{,}07 \text{ м}^3/(\text{м}\cdot\text{сут}).$$

Ответ: $Q = 0{,}07$ м^3/(м·сут).

Задача 9.2

Грунтовой колодец (см. *рис. 9.3*) радиусом $r_0 = 0{,}125$ м доведен до водонепроницаемого подстилающего слоя. Мощность грунтового потока, залегающего в крупнозернистых песках, составляет $H_0 = 15$ м. Коэффициент фильтрации $k = 12{,}1$ м/сут. Радиус влияния колодца $R = 500$ м. Глубина воды в колодце $h_0 = 12$ м. Определить дебит колодца Q (м^3/сут) и вычислить глубину h (м) грунтового потока на расстоянии $r = 50$ м от оси колодца.

Решение

Дебит колодца вычисляем по формуле (9.48):

$$Q = \pi k \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} = \frac{3{,}14 \cdot 12{,}1\left(15^2 - 12^2\right)}{\ln\left(\frac{500}{0{,}125}\right)} = 371 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

Глубину грунтового потока на расстоянии 50 м от оси колодца определяем по формуле (9.49):

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{Q}{K}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} = \sqrt{12^2 + \frac{371}{3{,}14 \cdot 12{,}1}\ln\left(\frac{50}{0{,}125}\right)} = 14{,}23 \text{м}.$$

Ответ: Q = 371 м^3/сут; h = 14,23 м.

Задача 9.3

Определить дебит Q (м^3/сут) совершенного артезианского колодца. Напорные воды залегают в пласте из среднезернистого песка мощностью a_0 = 12 м; коэффициент фильтрации песка k = 7,0 м/сут; радиус колодца r_0 = 0,15 м; глубина откачки S = 4 м ($S = H_0 - h_0$); радиус влияния R = 100 м.

Решение

Дебит совершенного артезианского колодца при известном радиусе влияния вычисляем по формуле (9.52):

$$Q = 2\pi k \frac{a_0\left(H_0 - h_0\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 \frac{12 \cdot 4}{\ln\left(\frac{100}{0{,}15}\right)} = 324{,}5 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

Ответ: Q = 324,5 м^3/сут.

Задача 9.4

В мелкозернистых песках (коэффициент фильтрации k = 7 м/сут, эффективная пористость n = 0,07), расположен-

ных на горизонтальном водоупоре, сооружена совершенная протяженная галерея длиной $L = 300$ м. Установившийся на момент начала откачки уровень воды в галерее составляет $H_0 = 5$ м. Принято решение о водоотливе из галереи так, что в течение всего процесса в ней будет поддерживаться уровень воды $h_0 = 0{,}5$ м.

Определить расход воды Q_Σ (м^3/сут), поступающей в галерею, через 20 сут. после начала водоотлива. Найти соотношение расходов воды Q_{20}/Q_{40}, поступающей в галерею, через 20 и 40 сут. Определить уровень депрессионной кривой $h(x, t)$ (м) на расстоянии $x = 30$ м через $t = 15$ сут.

Решение

Коэффициент уровнепроводности массива:

$$a = \frac{kH_0}{n} = \frac{7 \cdot 5}{0{,}07} = 500 \text{ м}^2/\text{сут}.$$

Расход воды, поступающей в галерею на единицу ее длины (9.59), на 20-е сутки:

$$Q = \frac{k\left(H_0^2 - R_0^2\right)}{\sqrt{\pi a t}} = \frac{7\left(5^2 - 0{,}5^2\right)}{\sqrt{3{,}14 \cdot 500 \cdot 20}} \approx 0{,}978 \text{ м}^3/(\text{м}\cdot\text{сут}).$$

Расход воды, поступающей в галерею длиной $L = 300$ м, на 20-е сутки:

$$Q_\Sigma = QL = 0{,}978 \cdot 300 \approx 293{,}4 \text{ м}^3/\text{сут}.$$

Соотношение расходов воды, поступающей в галерею, через 20 и 40 сут определяем из сопоставления (9.59) в различные моменты времени:

$$\frac{Q_{20}}{Q_{40}} = \sqrt{\frac{40}{20}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$$

Число Фурье для момента времени $t = 15$ сут и расстояния $x = 30$ м:

$$\mathrm{Fo}_x = \frac{at}{x^2} = \frac{500 \cdot 15}{30^2} = 8,33.$$

Значение интеграла вероятности определяем по таблицам специальных функций [18]:

$$\theta = \mathrm{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{8,33}}\right) = 0,19.$$

Уровень депрессионной кривой на расстоянии 30 м через 15 сут находим из формулы (9.55):

$$h(x,t) = \sqrt{\left(H_0^2 - h_0^2\right)\theta + h_0^2} =$$

$$= \sqrt{\left(5^2 - 0,5^2\right)0,19 + 0,5^2} = 2,22 \text{ м}.$$

Ответ: $Q_\Sigma = 293,4$ м^3/сут; $Q_{20}/Q_{40} = 1,41$; $h(30, 15) = 2,22$ м.

Задача 9.5

Вычислить приток воды Q (м^3/сут) к совершенному колодцу через 40 сут после начала его функционирования, если мощность грунтового потока составляет $H_0 = 15$ м, а глубина воды в колодце поддерживается постоянной: $h_0 = 12$ м. Радиус колодца $r_0 = 0,125$ м, коэффициент фильтрации грунта $k = 12$ м/сут, эффективная пористость $n = 0,15$.

Решение

Определим коэффициент уровнепроводности:

$$a = \frac{kH_0}{n} = \frac{12,1 \cdot 15}{0,15} = 121 \text{ м}^2/\text{сут}.$$

Оценим значение безразмерного параметра R_0:

$$R_0 = \frac{r_0^2}{4at} = \frac{0{,}125^2}{4 \cdot 121 \cdot 40} = 8{,}07 \cdot 10^{-7}.$$

Принимая во внимание, что $R_0 << 0{,}1$, расчет дебита производим по формуле (9.77):

$$Q = -2\pi K\left(H_0^2 - h_0^2\right)\frac{e^{-R_0}}{\ln\left(\gamma R_0\right)} =$$

$$= -2 \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}1\left(15^2 - 12^2\right)\frac{\exp\left(-8{,}07 \cdot 10^{-7}\right)}{\ln\left(1{,}781 \cdot 8{,}07 \cdot 10^{-7}\right)} =$$

$$= 457{,}5 \text{ м}^3/\text{сут} \approx 5{,}3 \text{ л/с}.$$

Ответ: $Q = 5{,}3$ л/с.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой поверхностная и эффективная пористость?
2. Как рассчитывается скорость фильтрации при ламинарном и турбулентном движении? Границы применимости закона Дарси.
3. От каких параметров зависит коэффициент фильтрации?
4. Объясните физический смысл коэффициента проницаемости. От каких параметров зависит его величина?
5. В чем заключается основное отличие стационарных потоков от нестационарных?
6. Какой поток называют совершенным?
7. Объясните физический смысл уравнения неразрывности фильтрационного потока при напорном и безнапорном движении.

8. Что представляет собой коэффициент упругой емкости породы?
9. При каких условиях применяется линеаризованное дифференциальное уравнение фильтрации параболического типа?
10. Объясните физический смысл коэффициентов уровнепроводности и пьезопроводности.
11. В каких случаях используют осесимметричное уравнение фильтрации?
12. Каковы особенности применения уравнения фильтрации при осушении и насыщении массива водой?
13. Как рассчитывается фильтрационный расход через прямоугольную перемычку?
14. Зависит ли форма депрессионной кривой в установившемся режиме движения от коэффициента фильтрации грунтов?
15. Как рассчитывается приток воды к совершенному круглому колодцу в установившемся режиме фильтрации? Возможен ли такой режим?
16. Объясните физический смысл радиуса границы питания колодца.
17. Как рассчитывается приток воды к артезианскому колодцу?
18. Сформулируйте граничные условия для нестационарной задачи о притоке воды к совершенной галерее.
19. Как рассчитывается приток воды к совершенной галерее?
20. Сформулируйте граничные условия для нестационарной задачи о притоке воды к совершенному колодцу.
21. Как рассчитывается нестационарный приток воды к совершенному колодцу?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. –М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц В.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
3. *Ястребов К.Л., Кузуков И.М., Леонов С.Б.* Гидроаэромеханика процессов обогащения полезных ископаемых. – Иркутск: Изд-во ИрПИ, 1991. Разд. I – 223 с., разд. II – 174 с.
4. *Кафаров В.В.* Основы массопереноса. – М.: Высшая школа, 1972. – 493 с.
5. *Повх М.Л.* Техническая гидромеханика. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит. Ч. 1, 1963. – 583 с.; Ч. 2, 1963 . – 727 с.
7. *Бэтчелор Дж. К.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
8. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика: Учеб. для вузов. –Л.: Энергия, 1975. – 600 с.
9. *Шестаков В.М.* Динамика подземных вод. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 368 с.
10. *Виников В.А., Каркашадзе Г.Г.* Методы решения задач фильтрации газов и жидкостей в породных массивах: Учеб. пособие. – М.: МГИ, 1993. – 128 с.
11. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения подземных вод. – М.: Наука, 1977. – 644 с.
12. *Мироненко В.А., Мольский Е.В., Румынин В.Г.* Горнопромышленная гидрогеология: Учеб. для вузов. – М.: Недра, 1989. – 287 с.
13. *Гович И.К.* Гидрогеодинамика: Учеб. для вузов. – М.: Недра, 1988. – 349 с.
14. *Мироненко В.А., Румынин В.Г., Учаев В.Г.* Охрана подземных вод в горнодобывающих районах. – Л.: Недра, 1980. – 320 с.
15. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
16. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.И.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 275 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 5

ГИДРОМЕХАНИКА: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ 7

Предмет гидромеханики. Цели и задачи курса 9
История развития гидромеханики как науки 10
Значение гидромеханики для горного производства,
ее взаимосвязь с другими дисциплинами 13
Гипотеза сплошной среды 14
Основные свойства жидкостей 14
Плотность 14
Сжимаемость 15
Коэффициент температурного расширения 18
Вязкость 20
Растворение газов 28
Кипение 30
Сопротивление растяжению жидкостей 32
Поверхностное натяжение 32
Особые свойства воды 35
Задачи 38

Глава 1
ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ 41

1.1. Гидростатическое давление и его свойства 43
1.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости и их интегралы 48
1.3. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики 53
1.4. Определение давления жидкости при относительном равновесии 58
1.4.1. Движение сосуда по горизонтали с постоянным ускорением 59
1.4.2. Равномерное вращение сосуда вокруг вертикальной оси 61
1.5. Равновесие газа 63
1.6. Давление жидкости на плоские стенки 67
1.7. Давление жидкости на криволинейные поверхности 74
1.7.1. Цилиндрическая поверхность с горизонтальной образующей 75
1.7.2. Цилиндрическая поверхность с вертикальной образующей 78

1.7.3. Вертикально расположенная труба круглого поперечного сечения, заполненная покоящейся жидкостью под постоянным давлением ... 79
1.7.4. Колено трубы, изогнутой под некоторым углом и заполненной покоящейся жидкостью под постоянным давлением ... 79
1.8. Закон Архимеда. Плавание тел ... 81
1.9. Задачи ... 83

Глава 2
ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА ... 89

2.1. Описание движения жидкости по Лагранжу и Эйлеру ... 91
2.1.1. Метод Лагранжа ... 92
2.1.2. Метод Эйлера ... 93
2.2. Основные понятия теории поля и векторного анализа, используемые в гидромеханике ... 96
2.3. Характеристики потоков ... 101
2.4. Задачи ... 103

Глава 3
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ... 107

3.1. Уравнение неразрывности – закон сохранения массы ... 109
3.2. Уравнение движения в напряжениях – закон сохранения импульса ... 111
3.3. Интегралы Коши–Лагранжа и Бернулли ... 118
3.4. Основы газовой динамики ... 122
3.5. Частные случаи применения интеграла Бернулли ... 125
3.5.1. Действие на идеальную жидкость сил тяжести, центробежных и кориолисовых сил инерции ... 125
3.5.2. Истечение идеальной жидкости из отверстий ... 127
3.5.3. Истечение газа из отверстия в сосуде ... 129
3.5.4. Клепсидра ... 132
3.5.5. Распределение давления при взрыве сферического заряда под водой ... 133
3.6. Задача ... 134

Глава 4
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ (ВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ ... 137

4.1. Анализ уравнений движения реальной жидкости в напряжениях. Уравнения Навье–Стокса ... 140

4.2. Интеграл Бернулли для вязкой жидкости при установившемся движении ... 144
4.3. Кавитация ... 148
4.4. Задача ... 149

Глава 5
ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ... 153

5.1. Уровнемеры (приборы для измерения уровня жидкости) ... 155
5.2. Приборы для измерения давления ... 159
5.3. Приборы для измерения скорости потока ... 170
5.3.1. Трубки для измерения скорости потока ... 171
5.3.2. Термоанемометры ... 173
5.4. Приборы для измерения расхода жидкостей ... 175

Глава 6
ЭЛЕМЕНТЫ ПОДОБИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ... 179

6.1. Геометрическое и физическое подобие явлений ... 181
6.2. Критерии подобия ... 183
6.3. Критерии подобия при течении вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение движения в критериальной форме ... 186
6.4. Основные принципы анализа размерностей. π-теорема ... 188
6.5. Физическое моделирование гидромеханических процессов. Автомодельность ... 193
6.6. Аналоговое моделирование гидродинамических процессов ... 195
6.7. Задача ... 198

Глава 7
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ... 201

7.1. Виды гидродинамических сопротивлений ... 203
7.2. Основное уравнение установившегося равномерного движения жидкости ... 204
7.3. Распределение скоростей в потоке при ламинарном установившемся движении жидкости ... 207
7.4. Потери напора по длине потока при ламинарном установившемся движении жидкости ... 210

7.5. Потери напора по длине потока при турбулентном установившемся равномерном движении жидкости 212
7.6. Потери энергии при изменении конфигурации канала и поворотах потока 219
7.7. Принципы расчета потерь напора в сетях 226
7.8. Истечение жидкости через отверстия 228
7.9. Истечение жидкости через насадки 231
7.10. Истечение жидкости через водосливы 234
7.11. Задачи 237

Глава 8
ОСНОВЫ ДИФФУЗИОННОГО МАССОПЕРЕНОСА 247

8.1. Молекулярная диффузия. Законы Фика 249
8.2. Турбулентная диффузия 254
8.3. Диффузионный массоперенос в силовом поле 255
8.4. Диффузия газового облака от непрерывно действующего источника 256
8.5. Диффузия от мгновенного источника 258
8.6. Задача 260

Глава 9
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ 263

9.1. Законы фильтрации 265
9.2. Показатели фильтрации 267
9.3. Типы движения подземных вод 270
9.4. Уравнение неразрывности фильтрационного потока 271
9.5. Дифференциальное уравнение нестационарной фильтрации 275
9.6. Стационарные задачи фильтрации 278
9.6.1. Фильтрационный расход через прямоугольную перемычку 278
9.6.2. Приток воды к совершенному круглому одиночному колодцу 280
9.6.3. Приток воды к совершенному артезианскому колодцу 283
9.7. Приток воды к галерее, расположенной на водоупоре (нестационарная задача) 285
9.8. Приток воды к совершенному колодцу, расположенному на водоупоре (нестационарная задача) 287
9.9. Задачи 292

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 298

ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Валерий Александрович **Вишняков**
Гиоргий Григолович **Каркашадзе**

ГИДРОМЕХАНИКА

Режим выпуска «стандартный»

Редактор текста *А.Н. Сытдыкова*
Дизайн серии *Е.Б. Капралова*
Зав. производством *Н.Д. Уробушкина*

Диапозитивы изготовлены
в Издательстве МГГУ

Подписано в печать 11.02.2003. Формат 60×90/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Times». Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,0. Тираж 2000 экз. Заказ 543

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 062809
Код издательства 5Х7(03)

Отпечатано в ФГУП
«Московская типография № 6» Минпечати РФ
115088 Москва, ул. Южнопортовая, 24

Магниевые штампы изготовлены
в Первой Образцовой типографии

119991 Москва, ГСП-1, Ленинский проспект, 6, Издательство МГГУ;
тел. (095) 236-97-80; факс (095) 956-90-40;
тел./факс (095) 737-32-65



ВИННИКОВ
Владимир Александрович

В 1982 г. окончил Московский горный институт по специальности «Физические процессы горного производства» и поступил на работу на кафедру Физики горных пород и процессов. В 1988 г. защитил кандидатскую диссертацию. В настоящее время — доцент кафедры «Физика горных пород и процессов» Московского государственного горного университета. Область научных и педагогических интересов распространяется на вопросы математического моделирования задач физики горных пород, механики разрушения, гидро- и аэродинамических процессов на открытых горных работах.



КАРКАШАДЗЕ
Гиоргий Григолович

В 1975 г. окончил Московский горный институт по специальности «Физические процессы горного производства». В 1980 г. защитил кандидатскую диссертацию и стал заниматься преподавательской работой. В 1995 г. защитил докторскую диссертацию. В настоящее время — профессор кафедры «Физика горных пород и процессов» Московского государственного горного университета. Область научных и педагогических интересов распространяется на прикладные и фундаментальные задачи физики горных пород, механики разрушения, гидро- и аэродинамические процессы на открытых и подземных горных работах.