РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Ю. Д. Шмыглевский

Аналитические исследования динамики газа и жидкости

Вариационные принципы
Законы сохранения
Вариационные задачи
Вязкие течения



Эдиторнал УРСС
Москва, 1999

Шмыглевский Юрий Дмитриевич. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 232 с.

Сборник объединяет работы, опубликованные автором в научных журналах в 1957–1998 гг. Предложены вариационные принципы газовой динамики без дополнительных ограничений и магнитной гидродинамики при бесконечной проводимости. Выведены полные системы законов сохранения газовой динамики и электромагнитной динамики совершенного газа. Дано аналитическое решение задач оптимизации формы тел, обтекаемых плоскопараллельным и осесимметричным потоками газа, а также формы сверхзвуковых сопел. Построены точные решения уравнений Навье—Стокса для стационарных течений несжимаемой жидкости, воспроизводящие вихревые кольца, пары колец, образования типа «разрушения вихря», цепочки таких образований и др.

РФФИ

Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-01-14006)

Группа подготовки издания:

Директор — Доминго Марин Рикой
Заместители директора — Наталья Финогенова, Ирина Макеева
Компьютерный дизайн — Виктор Романов, Василий Подобед
Верстка — Наталия Бекетова
Обработка текста и графики — Анна Тюрина, Наталья Аринчева, Елена Ефремова

Издательство «Эдиториал УРСС».
113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, ком. прав.
Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Подписано к печати 05.11.98 г.
Формат 60×88/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 14,5. Зак. № 364

Отпечатано в АООТ «Политех-4». 129110, г. Москва, Б. Переяславская, 46.

ISBN 5-901006-87-9

© Ю. Д. Шмыглевский, 1999
© Эдиториал УРСС, 1999

Оглавление

Предисловие 5

Глава 1. **Вариационные принципы** 7
1.1. Газовая динамика 7
1.2. Магнитная гидродинамика при бесконечной проводимости 11
Литература к главе 1 14

Глава 2. **Полные системы законов сохранения** 17
2.1. Динамика совершенного газа 18
2.2. Электромагнитная динамика совершенного газа 28
Литература к главе 2 43

Глава 3. **Вариационные задачи газовой динамики** 45
3.1. Предельные свойства сверхзвуковых течений 48
3.1.1. Непрерывные течения 48
3.1.2. Ударные волны 52
3.1.3. Предельные свойства течений разрежения 57
3.2. Вариационные задачи для безударных течений 63
3.2.1. Прямой подход к оптимизации 63
3.2.2. Метод контрольного контура 65
3.2.3. Первая вариация 71
3.2.4. Необходимые условия экстремума 75
3.2.5. Порядок расчета 80
3.2.6. Изэнтропические течения. Поля экстремалей 84
3.3. Вариационные задачи при допущении возрастания энтропии 89
3.3.1. Вариационная задача 89
3.3.2. Область безударных решений 93
3.3.3. Другой вид вариационных задач 95
3.3.4. Случай возрастания энтропии 103
3.4. Необходимое условие минимума сопротивления 108
3.4.1. Безударные течения 108
3.4.2. Концевые условия 115

3.4.3. Разрывные безударные решения 118
3.4.4. Области непрерывных и разрывных решений 124
3.4.5. Примеры расчетов 127
3.5. Оптимальные сопла Лаваля 132
3.5.1. Вариационные задачи для внутренних течений . . . 132
3.5.2. Задача с ограничением длины сопла 139
3.5.3. Сопла с плоскими торцами 140
3.5.4. Оптимальные сопла с закрученным потоком 143
3.6. Течения с головной ударной волной 148
3.6.1. Вариационная задача 148
3.6.2. Необходимые условия экстремума 152
3.6.3. Решения без дополнительных разрывов 159
3.7. Максимальное сопротивление в сверхзвуковом потоке . . 167
Дальнейшие исследования 174
Литература к главе 3 174

Глава 4. **Вязкие течения и вихревые образования** 179
4.1. Инверсия сингулярности уравнений Навье—Стокса . . . 179
4.2. Изобарические течения 183
4.2.1. Невязкие и вязкие трехмерные течения 183
4.2.2. Вязкие плоские течения 186
4.3. Вязкие течения, не зависящие от числа Рейнольдса 190
4.3.1. Плоские течения 191
4.3.2. Вихревые образования 197
4.3.3. Осесимметричные вихревые образования 202
4.4. Стоксовские течения у пластинок 217
Литература к главе 4 221

Приложение 1. **Осесимметричное трансзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской звуковой поверхностью** . . 224
Литература к Приложению 1 229

Приложение 2. **Осесимметричное изобарическое течение** 230
Литература к Приложению 2 231

Предисловие

Развитие гидродинамики привело в первой половине XX века к ее разделению в заголовках книг на экспериментальную и теоретическую динамику жидкости, а во второй половине века из теоретической сферы выделилась вычислительная гидродинамика. Данью этому процессу разделения явилось внесение в название этой книги слова «аналитический», хотя, конечно, наибольших плодов можно ожидать от объединения аналитических, численных и экспериментальных исследований. Первым из них посвящен этот сборник, но вторые и третьи так или иначе присутствуют в нем.

К вариационным принципам газовой динамики и магнитной гидродинамики, а также к полным системам законов сохранения газовой динамики и электромагнитной динамики газа автора привела неосознанная ранее жажда интегрирования и атмосфера научного поиска в Вычислительном центре Академии наук СССР. Эти результаты не требуют ни экспериментальной, ни численной поддержки.

Иначе дело обстоит с решением вариационных задач газовой динамики и с точными решениями уравнений Навье—Стокса. Эти результаты своеобразно и тесно переплетены с численными и экспериментальными исследованиями. Решение краевых задач при оптимизации формы тел в сверхзвуковом потоке газа первоначально проводилось численно, итерационным путем. Обращение в нуль одной из рассчитываемых функций подсказало путь аналитического решения и открыло путь к исследованию необходимых условий минимума и к получению новых решений. При использовании этих результатов для практики в потоках внутри сопел рассчитывался пограничный слой, а результирующая сила тяги была проверена на специальной опытной установке. Расхождение между расчетной силой тяги и ее экспериментальной величиной не превысило 0,1%.

Исследование вихревых образований в потоках вязкой жидкости оказалось в более выгодном положении, поскольку их экспериментальные наблюдения и многочисленные расчеты к моменту их аналитического представления были уже хорошо известны. Прежде всего это относится к «разрушению вихря» и к паре «разрушений вихря», которым посвящена обширная литература.

Изложенные здесь результаты порождены общением со многими людьми, горевшими или горящими творческим жаром. А. А. Дородницын всегда был образцом «железной хватки» в преодолении трудностей. А. А. Никольский удивлял оригинальностью исследований и простотой их результатов. Из-за болезни в 1949 г. он не смог закончить текст своей замечательной статьи об оптимизации формы тел вращения и, будто бы направляя мой взгляд на эту область, доверил завершение текста статьи мне. Д. Е. Охоцимский к моменту нашего знакомства уже разгадал тайну решения вырожденных вариационных задач, а после знакомства самозабвенно помогал мне в моих стараниях. Почти сорок лет моего сотрудничества с незабвенным П. И. Чушкиным были озарены сверканием его талантов и энтузиазма. Поглощенность научными размышлениями О. С. Рыжова сделала все обсуждения с ним неизменно содержательными. Внимание А. Н. Крайко к проблемам оптимизации придало исследованиям в этой области особую привлекательность. Е. Д. Терентьев проявил незабываемую страстность при получении законов сохранения в работе, которую мы вели вместе. Сотрудничество с более молодыми моими коллегами — В. В. Александровым, В. М. Борисовым, В. И. Зубовым, А. Н. Крайко, В. М. Кривцовым, И. Е. Михайловым и А. В. Шипилиным — влило в жизнь энергию молодости и всемерно обогатило меня. Моя жена И. Н. Наумова оказала неоценимую помощь на всех этапах работы. Всем этим прекрасным людям, да и многим другим, я безгранично благодарен за щедрость, с которой они делились своим стремлением к раскрытию секретов неизвестного, составляющим подлинное счастье.

Этот сборник выпущен по доброму совету. Произошло все так. После смерти П. И. Чушкина в 1990 г. и А. А. Дородницына в 1994 г. были напечатаны их избранные труды, и в обоих случаях я участвовал в проведении изданий. Наблюдая сложности этого процесса, мои коллеги Б. В. Пальцев и Л. И. Турчак, независимо друг от друга, порекомендовали мне после его завершения напечатать свой сборник, «чтобы *потом* не пришлось мучиться другим». Это были лестные слова подлинных друзей.

Глава 1

Вариационные принципы

Вариационные принципы, порождающие системы уравнений гидродинамики, используются как при исследовании задач математической физики, так и для построения численных методов решения таких задач. Этапы создания принципов отражены в публикациях [1–20] и в цитированных в них работах. Усилия в этой области направлены, с одной стороны, на построение интегральных функционалов, аккумулирующих в себе уравнения конкретных задач, а с другой стороны, — на достижение общности вариационных принципов.

1.1. Газовая динамика

Среди работ [1–14], посвященных вариационным принципам газовой динамики, можно различить отдельные ветви.

Манвелл [13] использовал функцию тока стационарных плоскопараллельных течений и построил принцип, из которого следуют как уравнения газовой динамики в изоэнергетическом случае, так и соотношения на ударных волнах, замыкающих область использования принципа. Крайко [14] отметил, что функционал работы [13] впервые был введен Лином и Рубиновым [3]. В статье [14] Крайко, используя две функции тока, предложил аналогичный вариационный принцип для стационарных трехмерных течений газа, порождающий как уравнения газовой динамики, так и соотношения на ударных волнах. Вместе с тем в работе [14] дана модификация одного принципа Бейтмена, воспроизводящая уравнения нестационарных трехмерных кусочно-изэнтропических и кусочно-изоэнергетических течений газа, а также соотношения на тангенциальных разрывах и на слабых ударных волнах.

Бейтмен [2] заложил основы подхода, получившего дальнейшее развитие в работах [6] и [12]. Вариационный принцип Бейтмена для трехмерных нестационарных течений баротропного газа имеет вид

$$\delta \int_W \rho\Big[\frac{V^2}{2} - f(\rho) + \frac{d\varphi}{dt} + \alpha\frac{d\mu}{dt}\Big]\, dt\, dx\, dy\, dz = 0,$$

где δ — знак вариации; t — время; x, y, z — декартовы координаты; ρ — плотность; V — вектор скорости; φ, μ — потенциалы Клебша; α — скалярная функция; f — заданная функция от ρ; W — произвольный объем в пространстве t, x, y, z; символ d/dt означает субстанциональную производную

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla.$$

Этот принцип справедлив для нестационарных трехмерных течений баротропного газа. Примером такого газа является газ с постоянной энтропией.

Ито [6] предложил обобщение принципа Бейтмена:

$$\delta \int_W \rho\Big[\frac{V^2}{2} - U(\rho, S) + \frac{d\varphi}{dt} + S\frac{d\mu}{dt}\Big]\, dt\, dx\, dy\, dz = 0, \tag{1.1}$$

где S — энтропия, U — внутренняя энергия, известным образом зависящая от ρ и S. Этот принцип справедлив при переменной энтропии S для изоэнергетических потоков. В случае стационарных течений функционал (1.1) сохраняет зависимость от времени. Покажем это.

Варьирование (1.1) в системе функций V, ρ, S, φ, μ приводит, соответственно, к уравнениям

$$V = -\nabla\varphi - S\nabla\mu, \tag{1.2a}$$

$$\frac{V^2}{2} - U - \rho U_\rho + \frac{d\varphi}{dt} + S\frac{d\mu}{dt} = 0, \tag{1.2b}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = U_S, \tag{1.2c}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho V = 0, \tag{1.2d}$$

$$\frac{\partial\rho S}{\partial t} + \operatorname{div}\rho S V = 0. \tag{1.2e}$$

Уравнение (1.2a) показывает, что только лишь при постоянной энтропии S вектор скорости оказывается потенциальной функцией, но в действительности для потенциальности течения требуется еще и изоэнергетичность. Отсюда следует, что принцип (1.1) справедлив только для изоэнергетических течений.

Традиционная форма уравнений газовой динамики содержит давление p. Для введения этой величины в систему уравнений (1.2) берется первое начало термодинамики в форме

$$dU = TdS + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho, \tag{1.3}$$

где T — температура.

Исключение функций φ, μ из (1.2) и использование (1.3) дает в дополнение к уравнениям (1.2d) и (1.2e) уравнение движения в привычной форме

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.2b) с учетом (1.2a), (1.3) можно записать в виде

$$G \equiv \frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{1.5}$$

В стационарном случае желательно, чтобы функции φ и μ не зависели от t. Но тогда в правой части равенства (1.5) стоит нуль, а в левой части — положительная величина. Отсюда следует непригодность принципа (1.1) для стационарных течений при φ и μ, не зависящих от времени.

В общем случае переменной энтропии S и полной энтальпии G при естественном переходе к стационарным течениям предлагается следующий вариационный принцип [12]:

$$\delta \int_W \rho\Big[\frac{V^2}{2} - U(\rho, S) + \frac{d\varphi}{dt} + S\frac{d\mu}{dt} + h\frac{d\lambda}{dt} + \frac{h^2}{2}\Big]\,dt\,dx\,dy\,dz = 0, \tag{1.6}$$

где h, λ — скалярные функции. Этот принцип, как будет показано, дает нестационарные уравнения газовой динамики, а при независимых от времени входящих в него функциях приводит к уравнениям стационарных течений, включая интеграл Бернулли.

Варьирование (1.6) в системе функций V, ρ, S, h, φ, μ, λ и интегрирование по частям членов с производными от вариаций $\delta\varphi$, $\delta\mu$, $\delta\lambda$ приводит к системе уравнений

$$V = -\nabla\varphi - S\nabla\mu - h\nabla\lambda, \tag{1.7a}$$

$$\frac{V^2}{2} - U - \rho U_\rho + \frac{d\varphi}{dt} + S\frac{d\mu}{dt} + h\frac{d\lambda}{dt} + \frac{h^2}{2} = 0, \tag{1.7b}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = U_S, \tag{1.7c}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -h, \tag{1.7d}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V = 0, \tag{1.7e}$$

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \operatorname{div} \rho S V = 0, \tag{1.7f}$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \operatorname{div} \rho h V = 0. \tag{1.7g}$$

Уравнение (1.7b) с учетом (1.7a), (1.3) дает

$$\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S\frac{\partial \mu}{\partial t} + h\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{h^2}{2}. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7e)–(1.7g) показывают, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V \cdot \nabla S = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \nabla h = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, величины S и h сохраняются в частице. В стационарном случае $\partial S/\partial t = \partial h/\partial t = 0$, и величины S и h неизменны вдоль линий тока. Равенство (1.8) переходит в интеграл Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{h^2}{2}. \tag{1.10}$$

Вычисление dV/dt с использованием тождества

$$\frac{dV}{dt} \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla\frac{V^2}{2} - V \times \operatorname{rot} V \tag{1.11}$$

и равенств (1.7) позволяет исключить φ, μ, λ и снова приводит к уравнению движения (1.4). Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = &-\frac{\partial S}{\partial t}\nabla\mu - \frac{\partial h}{\partial t}\nabla\lambda - \nabla(U + \rho U_\rho) + \frac{\partial \mu}{\partial t}\nabla S + \frac{\partial \lambda}{\partial t}\nabla h + \\ &+ h\nabla h + (V \cdot \nabla\mu)\nabla S - (V \cdot \nabla S)\nabla\mu + (V \cdot \nabla\lambda)\nabla h - (V \cdot \nabla h)\nabla\lambda = \\ = &-\nabla(U + \rho U_\rho) + \frac{d\mu}{dt}\nabla S + \frac{d\lambda}{dt}\nabla h + h\nabla h = \\ = &-\nabla(U + \rho U_\rho) + U_S \nabla S = -\frac{\nabla p}{\rho}.\end{aligned}$$

Легко видеть, что при выполнении равенств (1.7) вариационный принцип (1.6) означает равенство нулю вариации действия:

$$\delta \int_W p \, dt \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Итак, принцип (1.6) порождает уравнения газовой динамики нестационарных и стационарных течений с переменными энтропией и полным теплосодержанием, а в стационарном случае обеспечивает выполнение уравнения Бернулли.

1.2. Магнитная гидродинамика при бесконечной проводимости

Вариационным принципам магнитной гидродинамики посвящены публикации [15–20] и цитированные там статьи. Работа [20] является развитием принципа Бейтмена [2]. Предлагаемый вариационный принцип при бесконечной проводимости среды имеет вид

$$\delta \int_W \left\{ \rho \Big[\frac{V^2}{2} - U(\rho, S) + \frac{d\varphi}{dt} + S\frac{d\mu}{dt} + h\frac{d\lambda}{dt} + \frac{h^2}{2} + m\frac{d\alpha}{dt} + \right.$$

$$\left. + n\frac{d\beta}{dt} + c(m\alpha - n\beta) \Big] + \frac{H^2}{2} - \boldsymbol{H} \cdot (\nabla m \times \nabla n) \right\} dt\, dx\, dy\, dz = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в разделе 1.1, и, кроме того, $\boldsymbol{H}$ — вектор напряженности магнитного поля; m, n — скалярные функции; α, β — скалярные переменные типа потенциалов Клебша; c — отличная от нуля произвольная постоянная.

Варьирование (2.1) по переменным $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{H}$, ρ, S, h, m, n, φ, μ, λ, α, β, интегрирование по частям членов с производными от вариаций и приравнивание нулю коэффициентов при вариациях под знаком четырехмерного интеграла приводит к уравнениям

$$\boldsymbol{V} = -\nabla\varphi - S\nabla\mu - h\nabla\lambda - m\nabla\alpha - n\nabla\beta, \qquad (2.2)$$

$$\boldsymbol{H} = \nabla m \times \nabla n, \qquad (2.3)$$

$$\frac{V^2}{2} + U + \rho U_\rho = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + S\frac{\partial\mu}{\partial t} + h\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{h^2}{2} +$$

$$+ m\frac{\partial\alpha}{\partial t} + n\frac{\partial\beta}{\partial t} + c(m\alpha - n\beta), \qquad (2.4)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = U_S, \qquad (2.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -h, \qquad (2.6)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} + c\alpha = \frac{1}{\rho}\nabla n \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H}, \qquad (2.7)$$

$$\frac{d\beta}{dt} - c\beta = -\frac{1}{\rho}\nabla m \cdot \operatorname{rot} H, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \operatorname{div} \rho S V = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \operatorname{div} \rho h V = 0, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho m V = c\rho m, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \rho n}{\partial t} + \operatorname{div} \rho n V = -c\rho n. \tag{2.13}$$

Равенство (2.9) представляет собой уравнение неразрывности, (2.10) — уравнение сохранения энтропии в частице. Из них и из (2.11)–(2.13) следует, что

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 0, \quad \frac{dm}{dt} = cm, \quad \frac{dn}{dt} = -cn. \tag{2.14}$$

Из (2.3) видно, что $H = \operatorname{rot}(m\nabla n)$. Отсюда

$$\operatorname{div} H = 0. \tag{2.15}$$

Дифференцирование (2.3) по t и подстановка $\partial m/\partial t$ и $\partial n/\partial t$ из (2.14) дает с учетом (2.3)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla n \times \nabla(V \cdot \nabla m) - \nabla m \times \nabla(V \cdot \nabla n) = \operatorname{rot}(V \times H). \tag{2.16}$$

Для получения уравнения движения в привычной форме следует из уравнений (2.2)–(2.8), (2.11)–(2.13) исключить переменные h, m, n, φ, μ, λ, α, β. С этой целью используется тождество (1.11), в правую часть которого величина V подставляется из (2.2), а величина $V^2/2$ — из (2.4). В процессе преобразований используются другие из перечисленных уравнений или их следствия (2.14). Вычисления дают

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{dS}{dt}\nabla\mu - \frac{dh}{dt}\nabla\lambda - \frac{dm}{dt}\nabla\alpha - \frac{dn}{dt}\nabla\beta + \frac{d\mu}{dt}\nabla S +$$

$$+ \frac{d\lambda}{dt}\nabla h + \frac{d\alpha}{dt}\nabla m + \frac{d\beta}{dt}\nabla n - \nabla(U + \rho U_\rho) + h\nabla h + c\nabla(m\alpha - n\beta) =$$

$$= U_S \nabla S - \nabla(U + \rho U_\rho) + \frac{1}{\rho}(\nabla n \cdot \operatorname{rot} H)\nabla m -$$

$$- \frac{1}{\rho}(\nabla m \cdot \operatorname{rot} H)\nabla n = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{rot} H \times H.$$

На последнем этапе вычислений использовано снова равенство (2.3) и первое начало термодинамики (1.3) для введения в систему переменных давления p. Таким образом получена традиционная форма уравнения движения

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{rot} H \times H. \tag{2.17}$$

Равенства (2.9), (2.10), (2.15)–(2.17) образуют систему уравнений магнитной гидродинамики при бесконечной проводимости. Эта система с входящими в нее переменными должна быть дополнена зависимостью $p(\rho, S)$.

В стационарном случае вместо уравнений (2.4)–(2.13) из (2.1) следуют равенства

$$\begin{aligned}
&\frac{V^2}{2} + U + \rho U_\rho = \frac{h^2}{2} + c(m\alpha - n\beta),\\
&V \cdot \nabla\mu = U_S, \quad V \cdot \nabla\lambda = -h,\\
&V \cdot \nabla\alpha + c\alpha = \frac{1}{\rho}\nabla n \cdot \operatorname{rot} H,\\
&V \cdot \nabla\beta - c\beta = -\frac{1}{\rho}\nabla m \cdot \operatorname{rot} H,\\
&\operatorname{div}\rho V = 0, \quad \operatorname{div}\rho S V = 0, \quad \operatorname{div}\rho h V = 0,\\
&\operatorname{div}\rho m V = c\rho m, \quad \operatorname{div}\rho n V = -c\rho n.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Из последних пяти уравнений вытекают равенства

$$V \cdot \nabla S = V \cdot \nabla h = 0, \quad V \cdot \nabla m = cm, \quad V \cdot \nabla n = -cn.$$

Уравнение (2.15) выполняется в силу (2.3). Вычисление $V \times H$ на основе (2.2), (2.3) дает

$$V \times H = -\nabla cmn. \tag{2.19}$$

Отсюда

$$\operatorname{rot}(V \times H) = 0. \tag{2.20}$$

Вычисление субстанциональной производной от V приводит к равенству

$$(V \cdot \nabla)V = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{rot} H \times H. \tag{2.21}$$

Шестое и седьмое уравнения из (2.18) и равенства (2.15), (2.20), (2.21) образуют систему уравнений магнитной гидродинамики в стационарном случае. И здесь должна быть задана зависимость $p(\rho, S)$.

Исключение величины c из (2.4) можно провести следующим образом. Почленное умножение (2.7) на cm, равенства (2.8) на $-cn$,

третьего равенства из (2.14) на $c\alpha$, четвертого на $-c\beta$ и сложение полученных результатов с учетом (2.19) дает

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\rho}(H \times V) \cdot \operatorname{rot} H, \quad N = c(m\alpha - n\beta).$$

В стационарном случае

$$V \cdot \nabla N = \frac{1}{\rho}(H \times V) \cdot \operatorname{rot} H. \tag{2.22}$$

Первое равенство из (2.18) с учетом (1.3) принимает вид

$$\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{h^2}{2} + N.$$

Это уравнение является интегралом системы уравнений магнитной гидродинамики при бесконечной проводимости, если эта система дополнена уравнениями (2.22) и $V \cdot \nabla h = 0$.

Литература к главе 1

[1] *Bateman H.* Notes on a differential equation which occurs in the two-dimensional motion of a compressible fluid and the associated variational problems // Proc. Roy. Soc. 1929. A. V. 125. № 799. P. 598–618.

[2] *Bateman H.* Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge. University Press. 1932.

[3] *Lin C. C., Rubinov S. I.* On the flow behind curved shocks // J. Math. Phys. 1948. V. 27. № 2. P. 105–129.

[4] *Giese J. H.* Stream functions for three-dimensional flows // J. Math. Phys. 1951. V. 30. № 1. P. 31–35.

[5] *Lin C. C.* A new variational principle for isoenergetic flows // Quart. J. Appl. Math. 1952. V. 9. № 4. P. 421–423.

[6] *Ito H.* Variational principle in hydrodynamics // Progr. Theoret. Phys. 1953. V. 9. № 2. P. 117–131.

[7] *Lush P. E., Cherry T. M.* The variational method in hydrodynamics // Quart. Mech. Appl. Math. 1956. V. 9. Pt. 1. P. 6–21.

[8] *Serrin J.* Mathematical principles of classical fluid mechanics. Berlin, Göttingen, Heidelberg. Handbuch der Physik. Bd.8/1. Strömungsmechanik I. 1959.

[9] *Кузнецов Б. Г.* К вопросу о втором вариационном принципе Бейтмена // Тр. Томского университета. 1959. Т. 144. С. 117–124.

[10] *Sewell M.J.* On reciprocal variational principles for perfect fluids // J. Math. Mech. 1963. V. 12. № 4. P. 495–504.

[11] *Заславский М. М., Перфильев В. А.* Принцип Гамильтона для модели невязкой сжимаемой жидкости в эйлеровых координатах // Изв. АН СССР. Механ. жидк. и газа. 1969. № 1. С. 105–109.

[12] *Шмыглевский Ю. Д.* Вариационный принцип газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1598–1600.

[13] *Manwell A. R.* A variational principle for steady homenergetic compressible flow with finite shocks // Wave motion. 1980. V. 2. № 1. P. 83–95.

[14] *Крайко А. Н.* Вариационные принципы для течений идеального газа с сильными разрывами, записываемые в эйлеровых переменных // Прикл. матем. и механ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 256–265.

[15] *Половин Р. В., Ахиезер И. О.* Вариационный принцип в магнитной гидродинамике //Укр. фіз. журн. 1959. Т. 4. № 5. С. 677–678.

[16] *Landgren T. S.* Hamilton's variational principle for perfectly conducting plasma continuum // Phys. of Fluids. 1963. V. 6. № 7. P. 898–904.

[17] *Casal P.* Principes variationnels en fluide compressible et en magnétodynamique des fluides // J. Mécanique. 1966. V. 5. № 2. P. 149–161.

[18] *Merdos J.* Variational principle in magnetohydrodynamics // Phys. of Fluids. 1969. V. 12. № 10. P. 2225–2227.

[19] *Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П.* Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 2. С. 409–422.

[20] *Шмыглевский Ю. Д.* Вариационный принцип магнитной гидродинамики при бесконечной проводимости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 1. С. 241–243.

Глава 2

Полные системы законов сохранения

Законы сохранения (дивергентные формы уравнений) широко применяются в методе интегральных соотношений, при построении консервативных разностных схем и при постановке вариационных задач газовой динамики. Примерами являются публикации [1–4]. Теорема Нётер и ее обобщение [5] позволяют находить законы сохранения для систем дифференциальных уравнений второго порядка. Для применения этих теорем необходимо изучить групповые свойства исходных уравнений [6] и использовать вариационный принцип, из которого эти уравнения следуют. Для вырожденных функционалов, порождающих уравнения первого порядка, теряется взаимно однозначное соответствие между группами, допускаемыми уравнениями, и законами сохранения: некоторым группам могут соответствовать дивергентные уравнения, состоящие из нулей [5]. Теорема Нётер использована, например, Ибрагимовым [7] для получения полной системы законов сохранения безвихревых течений газа, описываемых уравнением второго порядка для потенциала скоростей.

Уравнения газовой динамики в общем случае имеют первый порядок. Для получения полной системы законов сохранения здесь используется прямой подход [8, 9], в котором не нужны ни групповые свойства уравнений, ни вариационный принцип.

В процессе исследования возникает большое количество произвольных функций своих аргументов. Для упрощения формул эти функции обозначаются готическими или греческими буквами. Появление в тексте новой такой буквы означает введение новой произвольной функции, а соответствующая оговорка, как правило, не делается. Независимые переменные, искомые функции и константы в этой главе обозначаются только латинскими буквами.

2.1. Динамика совершенного газа

Уравнения динамики совершенного газа имеют вид

$$\begin{aligned} &n_t + u_x + v_y + w_z + un_x + vn_y + wn_z = 0,\\ &u_t + uu_x + vu_y + wu_z + lin_x + li_x = 0,\\ &v_t + uv_x + vv_y + wv_z + lin_y + li_y = 0,\\ &w_t + uw_x + vw_y + ww_z + lin_z + li_z = 0,\\ &i_t + ui_x + vi_y + wi_z + li(u_x + v_y + w_z) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь t — время; x, y, z — составляющие декартовых координат; u, v, w — соответствующие составляющие вектора скорости; i — внутренняя энергия; $n = \ln m$; m — плотность; $l = k - 1$; k — отношение удельных теплоемкостей газа.

Уравнение состояния для давления p имеет вид $p = lmi$.

В дальнейшем для краткости записи используются приведенные здесь зависимости $n(m)$, $l(k)$, $p(mi)$. С той же целью совокупность t, x, y, z обозначается через s. Буква c используется для произвольных постоянных.

Отыскиваются дивергентные формы, вытекающие из системы (1.1),

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = 0, \tag{1.2}$$

где каждая из функций A, B, C, D зависит от s, u, v, w, n, i, а каждая из переменных u, v, w, n, i, в свою очередь, зависит от s. Символ ∂/∂ означает дифференцирование в системе независимых переменных t, x, y, z. Индексами в дальнейшем отмечаются производные в системе независимых переменных $t, x, y, z, u, v, w, n, i$. Дифференцирование (1.2) приводит к равенству

$$\begin{aligned} A_t + A_u u_t + \ldots + A_i i_t + B_x + B_u u_x + \ldots + B_i i_x +\\ + C_y + C_u u_y + \ldots + C_i i_y + D_z + D_u u_z + \ldots + D_i i_z = 0. \end{aligned}$$

Исключение из этого равенства производных от u, v, w, n, i по t с помощью (1.1) приводит к равенству, линейно зависящему от производных функций u, v, w, n, i по x, y, z. Проведенное исключение производных по t исчерпывает все имеющиеся связи между производными. Поэтому полученное равенство выполняется лишь при обращении в нуль всех коэффициентов при производных и свободного члена. В результате возникает система шестнадцати уравнений для определения функций A, B, C, D с независимыми переменными $t, x, y, z, u, v, w, n, i$:

$$A_t + B_x + C_y + D_z = 0, \tag{1.3}$$

$$B_u - uA_u - A_n - liA_i = 0, \tag{1.4}$$
$$B_v - uA_v = 0, \tag{1.5}$$
$$B_w - uA_w = 0, \tag{1.6}$$
$$B_n - liA_u - uA_n = 0, \tag{1.7}$$
$$B_i - lA_u - uA_i = 0, \tag{1.8}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.9) - (1.13)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.14) - (1.18)$$

Две группы уравнений (1.9)–(1.13) и (1.14)–(1.18) могут быть получены из уравнений (1.4)–(1.8) соответственной циклической перестановкой в тройках переменных (x, y, z), (u, v, w), (B, C, D).

Замечание. Интегрирование уравнений (1.3)–(1.18) должно дать все возможные законы сохранения, отвечающие системе уравнений (1.1). Добавление к системе (1.1) не противоречащих ей новых связей может расширить систему законов сохранения. Это ясно из следующего примера. Уравнение (1.5) получено приравниванием нулю коэффициента при v_x. Уравнение $C_u - vA_u = 0$, имеющее номер (1.11), является результатом приравнивания нулю коэффициента при u_y. Пусть теперь к уравнениям (1.1) добавлено равенство $u_y = v_x$. Вместо уравнений (1.5) и (1.11) возникает одно уравнение

$$B_v - uA_v + C_u - vA_u = 0.$$

Все решения уравнений (1.5) и (1.11) удовлетворяют последнему уравнению, но среди решений этого последнего уравнения могут быть не удовлетворяющие уравнениям (1.5) и (1.11). Это и может породить новые законы сохранения, не вытекающие из системы (1.3)–(1.18).

Приступим к интегрированию системы уравнений (1.3)–(1.18).

Интегрирование уравнения (1.5) по v и уравнения (1.6) по w дает

$$B = uA + \mathfrak{a}(s, u, w, n, i), \quad B = uA + \mathfrak{b}(s, u, v, n, i).$$

Сопоставление этих двух равенств приводит к равенству

$$B = uA + \mathfrak{g}(s, u, n, i). \tag{1.19}$$

Подстановка полученного результата в (1.4), (1.7), (1.8) дает

$$A - A_n - liA_i + \mathfrak{g}_u = 0, \tag{1.20}$$
$$liA_u - \mathfrak{g}_n = 0, \tag{1.21}$$
$$lA_u - \mathfrak{g}_i = 0. \tag{1.22}$$

Исключение A_u из уравнений (1.21), (1.22) приводит к уравнению

$$\mathfrak{g}_n - i\mathfrak{g}_i = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{d}(s, u, p). \tag{1.23}$$

Исключение A из (1.20)–(1.22) проводится следующим образом. Выражение для $\mathfrak{g}$ из (1.23) подставляется в (1.20)–(1.22). Полученные уравнения дифференцируются почленно, соответственно, по u, n, i. Найденные из (1.21), (1.22) выражения для A_{ui}, A_{un} и выражение для A_u из (1.22) подставляются в (1.20). Это дает

$$(1 + l)p^2\mathfrak{d}_{pp} - li\mathfrak{d}_{uu} = 0.$$

Полученное уравнение содержит переменную i, но функция $\mathfrak{d}$ от нее не зависит. Это приводит к двум уравнениям:

$$\mathfrak{d}_{pp} = 0, \quad \mathfrak{d}_{uu} = 0.$$

Интегрирование дает, соответственно,

$$\mathfrak{d} = p\mathfrak{e}(s, u) + \mathfrak{f}(s, u), \quad \mathfrak{d} = u\mathfrak{h}(s, p) + \mathfrak{j}(s, p).$$

Последние равенства совместны только при

$$\mathfrak{d} = l\big[\mathfrak{u}(s)\, umi + \mathfrak{k}(s)\, mi + \mathfrak{l}(s)\, u + \mathfrak{m}(s)\big]. \tag{1.24}$$

Интегрирование уравнения (1.22) по u с учетом (1.23), (1.24) дает

$$A = \frac{1}{2}um u^2 + \mathfrak{k}mu + \mathfrak{n}(s, v, w, n, i). \tag{1.25}$$

Подстановка (1.23)–(1.25) в (1.20) приводит к уравнению

$$\mathfrak{n}_n + li\mathfrak{n}_i - \mathfrak{n} - lumi - ll = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\mathfrak{n} = umi - ll + mq(s, v, w, L), \quad L = mi^{-1/l}.$$

Подстановка этого выражения в (1.25) дает

$$A = um\Big(\frac{u^2}{2} + i\Big) + \mathfrak{k}mu - ll + mq(s, v, w, L). \tag{1.26}$$

Равенство (1.19) с учетом (1.23), (1.24), (1.26) дает выражение для B:

$$B = uum\Big(\frac{u^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{k}m(u^2 + li) + l\mathfrak{m} + umq. \tag{1.27}$$

Замечание о связи уравнений (1.9)–(1.18) с уравнениями (1.4)–(1.8) позволяет получить с помощью циклической перестановки в (1.26), (1.27) равенства

$$
\begin{aligned}
A &= \mathfrak{r}(s)\, m\Big(\frac{v^2}{2} + i\Big) + s(s)\, mv + l\mathfrak{t}(s) + m\mathfrak{w}(s, u, w, L),\\
C &= \mathfrak{r}vm\Big(\frac{v^2}{2} + ki\Big) + sm(v^2 + li) + l\mathfrak{x}(s) + vm\mathfrak{w},\\
A &= \mathfrak{v}(s)\, m\Big(\frac{w^2}{2} + i\Big) + \mathfrak{z}(s)\, mw - l\mathfrak{G}(s) + m\mathfrak{D}(s, u, v, L),\\
D &= \mathfrak{v}wm\Big(\frac{w^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{z}m(w^2 + li) + l\mathfrak{U}(s) + wm\mathfrak{D}.
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Сопоставление (1.26) с (1.28) дает с использованием (1.27)

$$
\begin{aligned}
A &= \mathfrak{u}(s)\, m\Big(\frac{V^2}{2} + i\Big) + \mathfrak{k}(s)\, mu +\\
&\quad + s(s)\, mv + \mathfrak{z}(s)\, mw - l\mathfrak{l}(s) + m\mathfrak{L}(s, L),\\
B &= \mathfrak{u}um\Big(\frac{V^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{k}m(u^2 + li) + smuv +\\
&\quad + \mathfrak{z}muw + l\mathfrak{m}(s) + mu\mathfrak{L},\\
C &= \mathfrak{u}vm\Big(\frac{V^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{k}muv + sm(v^2 + li) +\\
&\quad + \mathfrak{z}mvw + l\mathfrak{x}(s) + mv\mathfrak{L},\\
D &= \mathfrak{u}wm\Big(\frac{V^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{k}muw + smvw +\\
&\quad + \mathfrak{z}m(w^2 + li) + l\mathfrak{Z}(s) + mw\mathfrak{L},
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

где $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$.

К настоящему моменту подсистема уравнений (1.4)–(1.18) удовлетворена, и равенства (1.29) представляют ее общий интеграл. Входящие в него функции от s должны быть определены из уравнения (1.3). Подстановка (1.29) в (1.3) приводит к равенству

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{u}_t m\Big(\frac{V^2}{2} + i\Big) + \mathfrak{k}_t mu + s_t mv + \mathfrak{z}_t mw - l\mathfrak{l}_t + m\mathfrak{L}_t +\\
&\quad + \mathfrak{u}_x mu\Big(\frac{V^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{k}_x m(u^2 + li) + s_x muv + \mathfrak{z}_x muw +\\
&\quad + l\mathfrak{m}_x + mu\mathfrak{L}_x + \mathfrak{u}_y mv\Big(\frac{V^2}{2} + ki\Big) + \mathfrak{k}_y muv +
\end{aligned}
$$

$$+ s_y m(v^2 + li) + \mathfrak{z}_y mvw + l\mathfrak{x}_y + mv\mathfrak{L}_y + u_z mw\Big(\frac{V^2}{2} + ki\Big) +$$

$$+ \mathfrak{k}_z muw + s_z mvw + \mathfrak{z}_z m(w^2 + li) + l\mathfrak{Z}_z + mw\mathfrak{L}_z = 0. \tag{1.30}$$

В случае $k = 5/3$ выполняется равенство

$$2\Big(\frac{V^2}{2} + i\Big) = (u^2 + li) + (v^2 + li) + (w^2 + li).$$

Равенство (1.30) выполняется при обращении в нуль коэффициентов при линейно-независимых комбинациях величин u, v, w, m, i. Это приводит к системе уравнений

$$u_x = u_y = u_z = 0, \tag{1.31}$$

$$\mathfrak{k}_x = s_y = \mathfrak{z}_z, \tag{1.32}$$

$$u_t + 2\mathfrak{k}_x = 0, \quad u_t + 2s_y = 0, \quad u_t + 2\mathfrak{z}_z = 0, \tag{1.33}$$

$$\mathfrak{k}_t + \mathfrak{L}_x = 0, \quad s_t + \mathfrak{L}_y = 0, \quad \mathfrak{z}_t + \mathfrak{L}_z = 0, \tag{1.34}$$

$$s_x + \mathfrak{k}_y = 0, \quad \mathfrak{z}_x + \mathfrak{k}_z = 0, \quad \mathfrak{z}_y + s_z = 0, \tag{1.35}$$

$$\mathfrak{L}_t = 0, \tag{1.36}$$

$$-\mathfrak{l}_t + \mathfrak{m}_x + \mathfrak{x}_y + \mathfrak{Z}_z = 0. \tag{1.37}$$

В случае $k \neq 5/3$ к уравнениям (1.31)–(1.36) следует добавить условие

$$u_t = 0. \tag{1.38}$$

Уравнения (1.31) дают

$$u = \mathfrak{M}(t). \tag{1.39}$$

Интегрирование уравнений (1.33), соответственно, по x, y, z позволяет получить

$$\mathfrak{k} = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_t x + \mathfrak{N}(t, y, z), \quad s = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_t y + \mathfrak{P}(t, x, z),$$
$$\mathfrak{z} = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_t z + \mathfrak{R}(t, x, y). \tag{1.40}$$

Подстановка этих выражений в (1.35) дает уравнения

$$\mathfrak{P}_x + \mathfrak{N}_y = 0, \quad \mathfrak{N}_z + \mathfrak{R}_x = 0, \quad \mathfrak{R}_y + \mathfrak{P}_z = 0.$$

Из этих уравнений и из зависимости $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$ от аргументов t, x, y, z следует, что, в соответствии с равенствами (1.40),

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_t x + \mathfrak{S}(t)y - \mathfrak{T}(t)z + \mathfrak{Y}(t), \\ \mathfrak{s} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_t y + \mathfrak{W}(t)z - \mathfrak{S}(t)x + \mathfrak{X}(t), \\ \mathfrak{z} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_t z + \mathfrak{T}(t)x - \mathfrak{W}(t)y + \mathfrak{V}(t). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Подстановка последних выражений в (1.34) дает

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{tt}x + \mathfrak{S}_t y - \mathfrak{T}_t z + \mathfrak{Y}_t + \mathfrak{L}_x &= 0, \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{tt}y + \mathfrak{W}_t z - \mathfrak{S}_t x + \mathfrak{X}_t + \mathfrak{L}_y &= 0, \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{tt}z + \mathfrak{T}_t x - \mathfrak{W}_t y + \mathfrak{V}_t + \mathfrak{L}_z &= 0. \end{aligned}$$

Интегрирование этих уравнений, соответственно, по x, y, z с учетом независимости $\mathfrak{L}$ от t, вытекающей из (1.36), приводит к трем выражениям для $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} = \begin{cases} \frac{1}{4}\mathfrak{M}_{tt}x^2 - \mathfrak{S}_t xy + \mathfrak{T}_t xz - \mathfrak{Y}_t x + \mathfrak{C}(y,z,L), \\ \frac{1}{4}\mathfrak{M}_{tt}y^2 - \mathfrak{W}_t yz + \mathfrak{S}_t xy - \mathfrak{X}_t y + \mathfrak{H}(x,z,L), \\ \frac{1}{4}\mathfrak{M}_{tt}z^2 - \mathfrak{T}_t xz + \mathfrak{W}_t yz - \mathfrak{V}_t z + \mathfrak{R}(x,y,L). \end{cases}$$

Сопоставление этих равенств приводит к условиям

$$\mathfrak{S}_t = \mathfrak{T}_t = \mathfrak{W}_t = 0, \tag{1.42}$$

$$\mathfrak{M}_{tt} = 4c_{11}, \quad \mathfrak{Y}_t = c_5, \quad \mathfrak{X}_t = c_6, \quad \mathfrak{V}_t = c_7, \tag{1.43}$$

$$\mathfrak{L} = c_{11}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - c_5 x - c_6 y - c_7 z + \mathfrak{F}(L). \tag{1.44}$$

Предположение о том, что $\mathfrak{M}_{tt} \neq \text{const}$, при сопоставлении выражений для $\mathfrak{L}$ приводит к равенству

$$\mathfrak{L} = -\mathfrak{Y}_t x - \mathfrak{X}_t y - \mathfrak{V}_t z + \mathfrak{F}(L).$$

При сопоставлении этого равенства с (1.44) оказывается, что $\mathfrak{M}_{tt} = 0$, а это противоречит сделанному предположению.

Равенство (1.44) удовлетворяет уравнению (1.36).

Интегрирование (1.43) и (1.42) дает

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M} = 2(c_1 + c_{11}t^2 + c_{12}t), \\ &\mathfrak{Y} = c_5 t + c_2, \quad \mathfrak{X} = c_6 t + c_3, \quad \mathfrak{V} = c_7 t + c_4, \\ &\mathfrak{S} = c_8, \quad \mathfrak{T} = c_9, \quad \mathfrak{W} = c_{10}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Подстановка (1.45) в (1.39), (1.41) вместе с (1.44) показывает, что

$$\begin{aligned} u &= 2(c_1 + c_{11}t^2 + c_{12}t),\\ \mathfrak{t} &= c_2 - 2c_{11}tx - c_{12}x + c_8y - c_9z + c_5t,\\ \mathfrak{s} &= c_3 - 2c_{11}ty - c_{12}y + c_{10}z - c_8x + c_6t,\\ \mathfrak{z} &= c_4 - 2c_{11}tz - c_{12}z + c_9x - c_{10}y + c_7t,\\ \mathfrak{L} &= c_{11}(x^2 + y^2 + z^2) - c_5x - c_6y - c_7z + \mathfrak{F}(mi^{-1/l}). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Из (1.37) следует

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} &= \int (\mathfrak{m}_x + \mathfrak{x}_y + \mathfrak{Z}_z)\,dt + \tilde{\mathfrak{l}}(x,y,z),\\ \mathfrak{m} &= \mathfrak{m}(t,x,y,z), \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t,x,y,z), \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(t,x,y,z). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Формулы (1.46), (1.47) дают выражения для искомых величин при $k = 5/3$. В случае $k \neq 5/3$ равенства (1.38) и (1.46) показывают, что

$$\begin{aligned} u &= 2c_1,\\ \mathfrak{t} &= c_8y - c_9z + c_5t + c_2,\\ \mathfrak{s} &= c_{10}z - c_8x + c_6t + c_3,\\ \mathfrak{z} &= c_9x - c_{10}y + c_7t + c_4,\\ \mathfrak{L} &= \mathfrak{F}(mi^{-1/l}) - c_5x - c_6y - c_7z. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Итак, интегрирование системы уравнений (1.3)–(1.18) закончено. Полный закон сохранения (1.2), отвечающий системе уравнений (1.1), представлен при $k \neq 5/3$ равенствами (1.29), (1.47), (1.48), а при $k = 5/3$ — равенствами (1.29), (1.47), (1.46). Величины $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{Z}$, определенные в (1.47), зависят только от независимых переменных t, x, y, z, соответствующие им слагаемые в (1.29) обращают (1.2) в тождество и ввиду их тривиальности в дальнейшем упоминаться не будут.

При $k \neq 5/3$ полный закон сохранения помимо функций u, v, w, m, i содержит произвольные постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ и произвольную функцию $\mathfrak{F}$ от энтропии. Частные законы сохранения, допускающие простую физическую интерпретацию, могут быть получены, если все эти произвольные величины, кроме одной, положить равными нулю. Это приводит к одиннадцати законам сохранения с величинами A, B, C, D, отмеченными теперь индексами:

$$\begin{aligned} &A_1 = m(V^2 + 2i), \quad B_1 = mu(V^2 + 2ki),\\ &C_1 = mv(V^2 + 2ki), \quad D_1 = mw(V^2 + 2ki),\\ &A_2 = mu, \quad B_2 = m(u^2 + li), \quad C_2 = muv, \quad D_2 = muw, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&A_3 = mv, \quad B_3 = muv, \quad C_3 = m(v^2 + li), \quad D_3 = mvw,\\
&A_4 = mw, \quad B_4 = muw, \quad C_4 = mvw, \quad D_4 = m(w^2 + li),\\
&A_5 = mut - mx, \quad B_5 = m(u^2 + li)\,t - mux,\\
&C_5 = muvt - mvx, \quad D_5 = muwt - mwx,\\
&A_6 = mvt - my, \quad B_6 = muvt - muy,\\
&C_6 = m(v^2 + li)\,t - mvy, \quad D_6 = mvwt - mwy,\\
&A_7 = mwt - mz, \quad B_7 = muwt - muz,\\
&C_7 = mvwt - mvz, \quad D_7 = m(w^2 + li)\,t - mwz,\\
&A_8 = muy - mvx, \quad B_8 = m(u^2 + li)\,y - muvx,\\
&C_8 = muvy - m(v^2 + li)\,x, \quad D_8 = muwy - mvwx,\\
&A_9 = mwx - muz, \quad B_9 = muwx - m(u^2 + li)\,z,\\
&C_9 = mvwx - muvz, \quad D_9 = m(w^2 + li)\,x - muwz,\\
&A_{10} = mvz - mwy, \quad B_{10} = muvz - muwy,\\
&C_{10} = m(v^2 + li)\,z - mvwy, \quad D_{10} = mvwz - m(w^2 + li)\,y,\\
&A_{11} = m\mathfrak{F}(mi^{-1/l}), \quad B_{11} = uA_{11}, \quad C_{11} = vA_{11}, \quad D_{11} = wA_{11}.
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

При $\mathfrak{F} = \text{const}$ последняя дивергентная форма дает закон сохранения массы.

В случае $k = 5/3$, как уже отмечалось, вместо (1.48) должны быть использованы формулы (1.46). В дополнение к (1.49) при $\mathfrak{F} = 1$, $c_{12} = 1$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{11}$, равных нулю, а также при $\mathfrak{F} = 1$, $c_{11} = 1$ и $c_1, c_2, \ldots, c_{10}, c_{12}$, равных нулю, образуются законы сохранения с составляющими

$$
\begin{aligned}
&A_{12} = m(V^2 + 2i)\,t - mux - mvy - mwz,\\
&B_{12} = mu\Big(V^2 + \frac{10i}{3}\Big)\,t - m\Big(u^2 + \frac{2i}{3}\Big)\,x - muvy - muwz,\\
&C_{12} = mv\Big(V^2 + \frac{10i}{3}\Big)\,t - muvx - m\Big(v^2 + \frac{2i}{3}\Big)\,y - mvwz,\\
&D_{12} = mw\Big(V^2 + \frac{10i}{3}\Big)\,t - muwx - mvwy - m\Big(w^2 + \frac{2i}{3}\Big)\,z,\\
&A_{13} = m(V^2 + 2i)\,t^2 - 2mutx - 2mvty - 2mwtz + m(x^2 + y^2 + z^2),\\
&B_{13} = mu\Big(V^2 + \frac{10i}{3}\Big)\,t^2 - 2m\Big(u^2 + \frac{2i}{3}\Big)\,tx -\\
&\qquad - 2muvty - 2muwtz + mu(x^2 + y^2 + z^2),
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

$$C_{13} = mv\Big(V^2 + \frac{10i}{3}\Big)\,t^2 - 2muvtx -$$
$$- 2m\Big(v^2 + \frac{2i}{3}\Big)\,ty - 2mvwtz + mv(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$D_{13} = mw\Big(V^2 + \frac{10i}{3}\Big)\,t^2 - 2muwtx - 2mvwty -$$
$$- 2m\Big(w^2 + \frac{2i}{3}\Big)\,tz + mw(x^2 + y^2 + z^2).$$

Дивергентные уравнения с индексами 1–10, 12, 13 и уравнение с индексом 11 при $\mathfrak{F} = \text{const}$ можно интегрировать через сильные разрывы.

Законы сохранения (1.50) были получены Ибрагимовым [7] для безвихревых течений с использованием теоремы Нётер.

В случае зависимости искомых функций от меньшего числа независимых переменных определение полной системы законов сохранения должно проводиться заново.

Уравнения стационарных движений совершенного газа получаются из (1.1) заменой нулями всех производных по времени. Вывод полной системы законов сохранения

$$\frac{\partial B^\circ}{\partial x} + \frac{\partial C^\circ}{\partial y} + \frac{\partial D^\circ}{\partial z} = 0$$

здесь не приводится. Результаты вывода таковы:

$$B_1^\circ = m(u^2 + li), \quad C_1^\circ = muv, \quad D_1^\circ = muw,$$
$$B_2^\circ = muv, \quad C_2^\circ = m(v^2 + li), \quad D_2^\circ = mvw,$$
$$B_3^\circ = muw, \quad C_3^\circ = mvw, \quad D_3^\circ = m(w^2 + li),$$
$$B_4^\circ = m(u^2 + li)\,y - muvx, \quad C_4^\circ = muvy - m(v^2 + li)\,x,$$
$$D_4^\circ = muwy - mvwx,$$
$$B_5^\circ = muwx - m(u^2 + li)\,z, \quad C_5^\circ = mvwx - muvz,$$
$$D_5^\circ = m(w^2 + li)\,x - muwz,$$
$$B_6^\circ = muvz - muwy, \quad C_6^\circ = m(v^2 + li)\,z - mvwy,$$
$$D_6^\circ = mvwz - m(w^2 + li)\,y,$$
$$B_7^\circ = mu\mathfrak{y}, \quad C_7^\circ = mv\mathfrak{y}, \quad D_7^\circ = mw\mathfrak{y},$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(V^2 + 2ki, mi^{-1/l}).$$

В случае нестационарных плоских течений (t, x, y) особые законы сохранения типа (1.50) имеют место при $k = 2$. Для нестационарных

одномерных движений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами (t, x) особые формы реализуются, соответственно, при $k = 3, 2, 5/3$.

Некоторый интерес представляют интегралы от дивергентных уравнений (1.2). Рассматривается четырехмерный объем W, ограниченный трехмерной поверхностью S, определяемой уравнением $f(t, x, y, z) = 0$. Интегрирование уравнения (1.2) по этому объему с использованием формулы Остроградского дает

$$\int_W \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z}\right) dW = \int_S G\left(f_t A + f_x B + f_y C + f_z D\right) dS = 0,$$

$$G = \left(f_t^2 + f_x^2 + f_y^2 + f_z^2\right)^{-1/2}.$$

Пусть часть поверхности S, обозначенная в дальнейшем через R, является непротекаемой. Условия непротекания имеют вид

$$dt = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

В силу этого условия в интеграле

$$J = \int_R G\left(f_t A + f_x B + f_y C + f_z D\right) dS \tag{1.51}$$

сумма $f_t + f_x u + f_y v + f_z w = 0$. С учетом этого обстоятельства использование выражений (1.49) и (1.50) в равенстве (1.51) дает

$$J_1 = -2\int_R G f_t p\, dS, \quad J_2 = \int_R G f_x p\, dS, \quad J_3 = \int_R G f_y p\, dS,$$

$$J_4 = \int_R G f_z p\, dS, \quad J_5 = \int_R G f_x t p\, dS, \quad J_6 = \int_R G f_y t p\, dS,$$

$$J_7 = \int_R G f_z t p\, dS, \quad J_8 = \int_R G(f_x y - f_y x) p\, dS,$$

$$J_9 = \int_R G(f_x x - f_z z) p\, dS, \quad J_{10} = \int_R G(f_y z - f_z y) p\, dS, \quad J_{11} = 0,$$

$$J_{12} = -\int_R G(2 f_t t + f_x x + f_y y + f_z z) p\, dS, \quad k = 5/3,$$

$$J_{13} = -2\int_R G(f_t t + f_x x + f_y y + f_z z) t p\, dS, \quad k = 5/3.$$

Все величины J содержат из гидродинамических величин только давление. В величинах J_2, J_3, J_4 при $f_t = 0$ легко видеть интегралы сил давления на поверхность R в направлении осей x, y, z соответственно. Величины J_8, J_9, J_{10} представляют собой интегралы моментов сил давления на поверхность R при $f_t = 0$ относительно осей z, y, x соответственно.

Дивергентные уравнения (1.2) при замене величин A, B, C, D величинами A_r, B_r, C_r, D_r при $r = 5, 6, \ldots, 10$, а также при $r = 12, 13$ в случае $k = 5/3$ являются простыми следствиями уравнений (1.2) при $r = 1, 2, 3, 4, 11$. В то же время интегральные уравнения

$$\int_S G(f_t A_r + f_x B_r + f_y C_r + f_z D_r) dS = 0$$

при $r = 1, 2, \ldots, 13$, $\mathfrak{F} = 1$ и $k = 5/3$ независимы. Они содержат линейно 13 величин:

$$m,\quad mu,\quad mv,\quad mw,\quad muv,\quad mvw,\quad mwu,$$
$$mu\left(V^2 + \frac{10i}{3}\right),\quad mv\left(V^2 + \frac{10i}{3}\right),\quad mw\left(V^2 + \frac{10i}{3}\right),$$
$$m\left(u^2 + \frac{2i}{3}\right),\quad m\left(v^2 + \frac{2i}{3}\right),\quad m\left(w^2 + \frac{2i}{3}\right).$$

Ранее отмечалось, что величина $m(V^2 + 2i)$ является суммой последних трех величин.

При решении, например, задачи Коши с заданными u, v, w, m, i в некотором трехмерном объеме x, y, z в момент времени $t = t_0$ все перечисленные 13 величин определяются. Возникает задача для 13 линейных интегральных уравнений с линейными начальными данными.

2.2. Электромагнитная динамика совершенного газа

Уравнения электромагнитной динамики совершенного газа с уравнением состояния $p = Sm^k$ имеют вид

$$\begin{aligned}
m_t &= -m \operatorname{div} V - V \cdot \nabla m, \quad S_t = -V \cdot \nabla S + (k-1) b m^{-k} F^2, \\
V_t &= -(V \cdot \nabla) V - m^{k-1} \nabla S - kSm^{k-2} \nabla m + \\
&\quad + m^{-1}(aF \operatorname{div} E + bF \times H), \\
H_t &= -\operatorname{rot} E, \quad \operatorname{div} H = 0, \\
E_t &= \operatorname{rot} H - V \operatorname{div} E - \frac{b}{a} F, \quad F = E + V \times H.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь k — показатель адиабаты; b — проводимость среды, отнесенная к скорости света в пустоте c; $a = 1/4\pi$; t — время, умноженное на c; p — давление, деленное на c^2; m — плотность газа; S — энтропийная функция, деленная на c^2; V — вектор скорости, отнесенный к c; H — вектор напряженности магнитного поля, отнесенный к c; E — вектор напряженности электрического поля, отнесенный к c.

Составляющие вектора V по осям x, y, z декартовых координат обозначим через u, v, w, составляющие H — через $G-J, K-L, M-N$, составляющие E — через f, g, h. Для выполнения равенства $\operatorname{div} H = 0$ потребуем

$$G_x = L_y, \quad K_y = N_z, \quad M_z = J_x. \tag{2.2}$$

Выбранное представление вектора H через шесть скаляров с тремя связями (2.2) проведено для того, чтобы количество скалярных уравнений, отвечающих системе (2.1), (2.2), равнялось количеству искомых функций. Величины m, S, u, v, w, G, J, K, L, M, N, f, g, h являются функциями от t, x, y, z. В дальнейшем индексами будут обозначаться частные производные в системе переменных t, x, y, z, m, S, u, v, w, G, J, K, L, M, N, f, g, h.

Дивергентные формы уравнений (2.1)–(2.2) отыскиваются в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} = 0. \tag{2.3}$$

Здесь A, B, C, D являются искомыми функциями переменных t, x, y, z, m, S, u, v, w, G, J, K, L, M, N, f, g, h. Символ ∂/∂ означает частную производную сложной функции в системе переменных t, x, y, z.

Отыскание форм (2.3) здесь проводится тем же путем, который в разделе 2.1 привел к полной системе законов сохранения динамики совершенного газа (1.49). Дифференцирование приводит к подробной записи уравнения (2.3):

$$A_t + A_m m_t + A_S S_t + \ldots + D_g g_z + D_h h_z = 0. \tag{2.4}$$

Величины m_t, S_t, u_t, v_t, w_t, G_t, K_t, M_t, f_t, g_t, h_t, G_x, K_y, M_z с помощью уравнений (2.1), (2.2) исключаются из уравнения (2.4). Ввиду произвольности оставшихся после исключения производных суммы коэффициентов при них должны обращаться в нуль. В соответствии с производными 1, J_t, L_t, N_t, J_x, L_y, N_z, m_x, S_x, u_x, v_x, w_x, K_x, L_x, M_x, N_x, f_x, g_x, h_x, $\ldots$, h_z возникает система 43 уравнений для определения функций A, B, C, D:

$$A_t + (k-1)bm^{-k}(P^2+Q^2+R^2)A_s + bm^{-1}\left[Q(M-N) - R(K-L)\right]A_u +$$

$$+ bm^{-1}\big[R(G-J) - P(M-N)\big]A_v +$$
$$+ bm^{-1}\big[P(K-L) - Q(G-J)\big]A_w -$$
$$- \frac{b}{a}\big(PA_f + QA_g + RA_h\big) + B_x + C_y + D_z = 0, \tag{2.5}$$
$$A_G + A_J = 0, \quad A_K + A_L = 0, \quad A_M + A_N = 0, \tag{2.6}$$
$$B_J + D_M = 0, \quad C_L + B_G = 0, \quad D_N + C_K = 0, \tag{2.7}$$
$$- uA_m - kSm^{k-2}A_u + B_m = 0, \tag{2.8}$$
$$- uA_S - m^{k-1}A_u + B_S = 0, \tag{2.9}$$
$$- mA_m - uA_u + B_u = 0, \tag{2.10}$$
$$- uA_v + B_v = 0, \tag{2.11}$$
$$- uA_w + B_w = 0, \tag{2.12}$$
$$A_h + B_K = 0, \quad -A_h + B_L = 0, \tag{2.13}$$
$$- A_g + B_M = 0, \quad A_g + B_N = 0, \tag{2.14}$$
$$am^{-1}\big(PA_u + QA_v + RA_w\big) - uA_f - vA_g - wA_h + B_f = 0, \tag{2.15}$$
$$- A_M + B_g = 0, \quad A_K + B_h = 0, \tag{2.16}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{2.17 – 2.25}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \tag{2.26 – 2.34}$$

где $P = f + v(M-N) - w(K-L)$, $Q = g + w(G-J) - u(M-N)$, $R = h + u(K-L) - v(G-J)$. Здесь не приводятся уравнения с номерами (2.17)–(2.34), так как уравнения (2.17)–(2.25), а затем и уравнения (2.26)–(2.34) получаются из (2.8)–(2.16) циклической перестановкой в тройках величин (x,y,z), (u,v,w), (G,K,M), (J,L,N), (f,g,h), (B,C,D).

Уравнения (2.8)–(2.12), (2.17)–(2.21), (2.26)–(2.30) эквивалентны уравнениям (1.4)–(1.8), (1.9)–(1.13), (1.14)–(1.18) раздела 2.1., если считать, что в последних s зависит дополнительно от G, J, K, L, M, N, f, g, h. Общий интеграл уравнений (1.4)–(1.18) приведен в формулах (1.29). В переменных этого раздела он имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \alpha U + \beta mu + \gamma mv + \delta mw + \varepsilon m + \zeta, \\ B &= \alpha Wu + \beta(mu^2 + Sm^k) + \gamma muv + \delta muw + \varepsilon mu + \eta, \\ C &= \alpha Wv + \beta muv + \gamma(mv^2 + Sm^k) + \delta mvw + \varepsilon mv + \theta, \\ D &= \alpha Ww + \beta muw + \gamma mvw + \delta(mw^2 + Sm^k) + \varepsilon mw + \vartheta, \end{aligned} \tag{2.35}$$

где

$$U = m\frac{V^2}{2} + \frac{Sm^k}{k-1}, \quad W = m\frac{V^2}{2} + \frac{kSm^k}{k-1}, \quad V^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Здесь функции $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \theta, \vartheta$ произвольно зависят от аргументов t, x, y, z, G, J, K, L, M, N, f, g, h, а функция ε произвольно зависит от t, x, y, z, S, G, J, K, L, M, N, f, g, h.

Почленное суммирование уравнений (2.13), а также (2.14) дает

$$B_K + B_L = 0, \quad B_M + B_N = 0.$$

Отсюда и из (2.6) следует, что B зависит от разностей $K - L$, $M - N$, а функция A зависит от разностей $G - J$, $K - L$, $M - N$. На основании уравнений (2.22), (2.23) или из соображений симметрии можно заключить, что C зависит от $G - J$, $M - N$. Точно так же устанавливается зависимость D от $G - J$, $K - L$. В дальнейшем используются обозначения

$$d = G - J, \quad n = K - L, \quad q = M - N. \tag{2.36}$$

Полученные результаты с использованием (2.36) приводят к зависимостям

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha(t, x, y, z, d, n, q, f, g, h),\\
\beta &= \beta(t, x, y, z, d, n, q, f, g, h),\\
\gamma &= \gamma(t, x, y, z, d, n, q, f, g, h),\\
\delta &= \delta(t, x, y, z, d, n, q, f, g, h),\\
\varepsilon &= \varepsilon(t, x, y, z, S, d, n, q, f, g, h),\\
\zeta &= \zeta(t, x, y, z, d, n, q, f, g, h),\\
\eta &= \eta(t, x, y, z, G, J, n, q, f, g, h),\\
\theta &= \theta(t, x, y, z, d, K, L, q, f, g, h),\\
\vartheta &= \vartheta(t, x, y, z, d, n, M, N, f, g, h).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Подстановка (2.35) в уравнения (2.7) дает с учетом (2.36), (2.37)

$$\begin{aligned}
&-\alpha_d W u - \beta_d(mu^2 + Sm^k) - \gamma_d muv - \delta_d muw -\\
&\quad - \varepsilon_d mu + \eta_J + \alpha_q W w + \beta_q muw + \gamma_q mvw +\\
&\quad + \delta_q(mw^2 + Sm^k) + \varepsilon_q mw + \vartheta_M = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\alpha_n W v - \beta_n muv - \gamma_n(mv^2 + Sm^k) - \delta_n muw -\\
&\quad - \varepsilon_n mv + \theta_L + \alpha_d W u + \beta_d(mu^2 + Sm^k) +\\
&\quad + \gamma_d muv + \delta_d muw + \varepsilon_d mu + \eta_G = 0,
\end{aligned}$$

$$-\alpha_q W w - \beta_q muw - \gamma_q mvw - \delta_q(mw^2 + Sm^k) -$$

$$-\varepsilon_q mw + \vartheta_N + \alpha_n Wv + \beta_n muv +$$
$$+\gamma_n(mv^2 + Sm^k) + \delta_n mvw + \varepsilon_n mv + \theta_K = 0.$$

В последних уравнениях должны обращаться в нуль суммы коэффициентов при взаимно независимых комбинациях переменных m, S, u, v, w. Это приводит к следующим различным уравнениям:

$$\alpha_d = \alpha_n = \alpha_q = 0, \quad \beta_d = \beta_n = \beta_q = 0, \quad \gamma_d = \gamma_n = \gamma_q = 0,$$
$$\delta_d = \delta_n = \delta_q = 0, \quad \varepsilon_d = \varepsilon_n = \varepsilon_q = 0; \tag{2.38}$$

$$\eta_G + \theta_L = 0, \quad \theta_K + \vartheta_N = 0, \quad \vartheta_M + \eta_J = 0. \tag{2.39}$$

Из (2.38) о учетом (2.37) следуют зависимости

$$\alpha = \alpha(t,x,y,z,f,g,h), \quad \beta = \beta(t,x,y,z,f,g,h),$$
$$\gamma = \gamma(t,x,y,z,f,g,h), \quad \delta = \delta(t,x,y,z,f,g,h), \tag{2.40}$$
$$\varepsilon = \varepsilon(t,x,y,z,S,f,g,h).$$

Здесь значения символов α, β, γ, δ, ε, конечно, отличаются от их значений в (2.37), но к формулам (2.37) в связи с этими величинами обращения больше не будет и сохранение обозначений α, β, γ, δ, ε не должно вызвать недоразумений.

Почленное дифференцирование уравнений (2.39) и исключение θ, ϑ позволяет получить равенство

$$\eta_{GKM} + \eta_{JLN} = 0. \tag{2.41}$$

Из зависимости η от n, q, приведенной в (2.37), и из (2.36) следует, что

$$\eta_K = -\eta_L, \quad \eta_M = -\eta_N.$$

Это позволяет преобразовать (2.41) к виду

$$\eta_{nqG} + \eta_{nqJ} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\eta_{nq} = \varkappa_{nq}(t,x,y,z,d,n,q,f,g,h).$$

Здесь $\varkappa_{nq}$ означает произвольную функцию своих аргументов, а записана она в виде производной по n и q ради удобства. Интегрирование последнего равенства по n и q с учетом зависимости η из (2.37) дает равенство, к которому можно добавить равенства для θ, ϑ, вытекающие из соображений симметрии:

$$\eta = \varkappa(t,x,y,z,d,n,q,f,g,h) + \\ + \lambda(t,x,y,z,G,J,q,f,g,h) + \mu(t,x,y,z,G,J,n,f,g,h),$$

$$\theta = \nu(t,x,y,z,d,n,q,f,g,h) + \\ + \xi(t,x,y,z,d,K,L,f,g,h) + \pi(t,x,y,z,K,L,q,f,g,h), \tag{2.42}$$

$$\vartheta = \rho(t,x,y,z,d,n,q,f,g,h) + \\ + \sigma(t,x,y,z,n,M,N,f,g,h) + \tau(t,x,y,z,d,M,N,f,g,h).$$

Эти равенства получены из уравнений, возникших в результате дифференцирований. Для определения зависимостей, удовлетворяющих исходным уравнениям (2.39), найденные выражения для η, θ, ϑ должны быть подставлены в (2.39). Это дает

$$\varkappa_d + \lambda_G + \mu_G - \nu_n + \xi_L + \pi_L = 0,$$
$$\nu_n + \xi_K + \pi_K - \rho_q + \sigma_N + \tau_N = 0,$$
$$\rho_q + \sigma_M + \tau_M - \varkappa_d + \lambda_J + \mu_J = 0.$$

С учетом зависимостей входящих сюда функций от своих аргументов последняя система уравнений распадается на уравнения

$$\begin{aligned} &\varkappa_d - \nu_n = 0, && \lambda_G = \mu_G = \xi_L = \pi_L = 0, \\ &\nu_n - \rho_q = 0, && \xi_K = \pi_K = \sigma_N = \tau_N = 0, \\ &\rho_q - \varkappa_d = 0, && \sigma_M = \tau_M = \lambda_J = \mu_J = 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Отсюда прежде всего следует, что

$$\begin{aligned} &\lambda = \lambda(t,x,y,z,q,f,g,h), && \mu = \mu(t,x,y,z,n,f,g,h), \\ &\xi = \xi(t,x,y,z,d,f,g,h), && \pi = \pi(t,x,y,z,q,f,g,h), \\ &\sigma = \sigma(t,x,y,z,n,f,g,h), && \tau = \tau(t,x,y,z,d,f,g,h). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Здесь для новых функций λ, μ, ξ, π, σ, τ для наглядности сохранены прежние обозначения.

Уравнения для $\varkappa$, ν, ρ из (2.43) показывают, что

$$\varkappa = \int \omega\, dl, \quad \nu = \int \omega\, dn, \quad \rho = \int \omega\, dq, \\ \omega = \omega(t,x,y,z,d,n,q,f,g,h). \tag{2.45}$$

Равенства (2.42) следует записать заново:

$$\eta = \varkappa + \lambda + \mu, \quad \theta = \nu + \xi + \pi, \quad \vartheta = \rho + \sigma + \tau. \tag{2.46}$$

Теперь зависимости λ, μ, ξ, π, σ, τ, $\varkappa$, ν, ρ определены в (2.44), (2.45).

Равенства (2.44)–(2.46) определяют взаимную зависимость величин θ, ϑ, η от аргументов. В дальнейшем, применяя уравнения, содержащие только A и B, достаточно пользоваться тем, что вместо зависимости η из (2.37) на основании уравнений (2.7) установлена зависимость

$$\eta = \eta(t, x, y, z, d, n, q, f, g, h). \tag{2.47}$$

На данном этапе зависимости α, β, γ, δ, ε определены в (2.40), зависимость ζ — в (2.37) и зависимость η — в (2.47).

Подстановка (2.35) в уравнения (2.16), (2.15) с учетом (2.36) дает, соответственно,

$$\begin{aligned}
&-\zeta_q + \alpha_g W u + \beta_g (m u^2 + S m^k) + \gamma_g m u v + \delta_g m u w + \varepsilon_g m u + \eta_g = 0,\\
&\zeta_n + \alpha_h W u + \beta_h (m u^2 + S m^k) + \gamma_h m u v + \delta_h m u w + \varepsilon_h m u + \eta_h = 0,\\
&a(f + vq - wn)(\alpha u + \beta) + a(g + wd - uq)(\alpha v + \gamma) +\\
&\quad + a(h + un - vd)(\alpha w + \delta) - u\zeta_f + \beta_f S m^k -\\
&\quad - v(\alpha_g U + \beta_g m u + \gamma_g m v + \delta_g m w + \varepsilon_g m + \zeta_g) -\\
&\quad - w(\alpha_h U + \beta_h m u + \gamma_h m v + \delta_h m w + \varepsilon_h m + \zeta_h) + \eta_f = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Уравнения (2.48) выполняются при условии обращения в нуль сумм коэффициентов при различных комбинациях функций m, S, u, v, w. В первых двух уравнениях такими комбинациями являются

$$1,\ Wu,\ mu^2 + Sm^k,\ muv,\ muw,\ mu.$$

В третьем уравнении независимы

$$1,\ u,\ v,\ w,\ muv,\ mvw,\ muw,\ Sm^k,\ mv^2,\ mw^2,\ mv,\ mw,\ Uv,\ Uw.$$

Возникающие таким образом уравнения имеют вид

$$-\zeta_q + \eta_g = 0, \tag{2.49}$$
$$\alpha_g = \beta_g = \gamma_g = \delta_g = \varepsilon_g = 0, \tag{2.50}$$
$$\zeta_n + \eta_h = 0, \tag{2.51}$$
$$\alpha_h = \beta_h = \gamma_h = \delta_h = \varepsilon_h = 0, \tag{2.52}$$
$$\eta_f + a(\beta f + \gamma g + \delta h) = 0, \tag{2.53}$$
$$a(\alpha f - \gamma q + \delta n) - \zeta_f = 0, \tag{2.54}$$
$$a(\alpha g - \delta d + \beta q) - \zeta_g = 0, \tag{2.55}$$
$$a(\alpha h - \beta n + \gamma d) - \zeta_h = 0, \tag{2.56}$$
$$\beta_g - \gamma_f = 0, \quad \gamma_h - \delta_g = 0, \quad \delta_f - \beta_h = 0, \tag{2.57}$$
$$\beta_f = \gamma_g = \delta_h = 0, \tag{2.58}$$
$$\varepsilon_g = \varepsilon_h = 0, \tag{2.59}$$
$$\alpha_g = \alpha_h = 0. \tag{2.60}$$

Уравнения (2.49), (2.51), (2.56)–(2.59) показывают, что величины α, β, γ, δ, ε не зависят от g, h и что величины β, γ, δ, кроме того, не зависят от f. Из соображений симметрии следует, что α, ε также не зависят от f. Поэтому

$$\begin{aligned} &\alpha = \alpha(t,x,y,z), \qquad \beta = \beta(t,x,y,z), \qquad \gamma = \gamma(t,x,y,z), \\ &\delta = \delta(t,x,y,z), \qquad \varepsilon = \varepsilon(t,x,y,z,S). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Уравнения (2.54)–(2.56) с учетом (2.61) могут быть проинтегрированы по f, g, h, соответственно. Это дает

$$\zeta = a\Big(\alpha\frac{f^2}{2} - \gamma q f + \delta n f\Big) + \varphi(t,x,y,z,d,n,q,g,h),$$

$$\zeta = a\Big(\alpha\frac{g^2}{2} - \delta d g + \beta q g\Big) + \chi(t,x,y,z,d,n,q,f,h),$$

$$\zeta = a\,Big(\alpha\frac{h^2}{2} - \beta n h + \gamma d h\Big) + \psi(t,x,y,z,d,n,q,f,g).$$

Сопоставление последних трех выражений для ζ показывает, что

$$\zeta = \frac{a}{2}\alpha(f^2+g^2+h^2) + a(\delta n f - \gamma q f + \beta q g - \\ - \delta d g + \gamma d h - \beta n h) + \Gamma(t,x,y,z,d,n,q). \tag{2.62}$$

Равенства (2.61), (2.62) позволяют проинтегрировать уравнения (2.53), (2.49), (2.50) по f, g, h, соответственно. Это дает

$$\eta = -a\Big(\beta\frac{f^2}{2} + \gamma f g + \delta f h\Big) + \Delta(t,x,y,z,d,n,q,g,h),$$

$$\eta = -a\Big(-\beta\frac{g^2}{2} + \gamma f g\Big) + g\Gamma_q + \mathrm{Z}(t,x,y,z,d,n,q,f,h),$$

$$\eta = -a\Big(-\beta\frac{h^2}{2} + \delta f h\Big) - h\Gamma_n + \Lambda(t,x,y,z,d,n,q,f,g).$$

Сопоставление этих трех выражений для η приводит к равенству

$$\eta = \frac{a}{2}\beta(-f^2+g^2+h^2) - a\gamma f g - a\delta f h + \\ + g\Gamma_q - h\Gamma_n + \Pi(t,x,y,z,d,n,q). \tag{2.63}$$

Подстановка A, B из (2.35) в первые или вторые уравнения из (2.13), (2.14) с использованием (2.36), (2.47), (2.61) дает

$$\zeta_h + \eta_n = 0, \quad \zeta_g - \eta_q = 0.$$

В подробной записи с использованием (2.62), (2.63) эти равенства имеют вид

$$a(\alpha h + \gamma d - \beta n) + g\Gamma_{nq} - h\Gamma_{nn} + \Pi_n = 0,$$
$$a(\alpha g + \beta q - \delta d) - g\Gamma_{qq} + h\Gamma_{nq} - \Pi_q = 0.$$

Требование обращения в нуль сумм коэффициентов при 1, g, h приводит к системе уравнений

$$a(\gamma d - \beta n) + \Pi_n = 0, \quad a(\beta q - \delta d) - \Pi_q = 0, \tag{2.64}$$
$$\Gamma_{nq} = 0, \quad a\alpha - \Gamma_{nn} = 0, \quad a\alpha - \Gamma_{qq} = 0. \tag{2.65}$$

Интегрирование уравнений (2.64) дает

$$\Pi = a\left(\beta\frac{n^2}{2} - \gamma\, dn\right) + \mathrm{P}(t,x,y,z,d,q),$$
$$\Pi = a\left(\beta\frac{q^2}{2} - \delta\, dq\right) + \Sigma(t,x,y,z,d,n).$$

Из сопоставления этих двух равенств вытекает зависимость

$$\Pi = \frac{a}{2}\beta(n^2+q^2) - ad(\gamma n + \delta q) + \mathrm{T}(t,x,y,z,d). \tag{2.66}$$

Интегрирование последних двух уравнений из (2.65) с учетом первого уравнения из (2.65) дает

$$\Gamma = \frac{a}{2}\alpha(n^2+q^2) + n\Phi(t,x,y,z,d) + q\Upsilon(t,x,y,z,d) + \mathrm{X}(t,x,y,z,d). \tag{2.67}$$

Подстановка (2.66), (2.67) в (2.62), (2.63) приводит к равенствам

$$\zeta = \frac{a}{2}\alpha(f^2+g^2+h^2+n^2+q^2) + n\Phi + q\Upsilon + \mathrm{X} + $$
$$+ a(\delta nf - \gamma qf + \beta qg - \delta dg + \gamma dh - \beta nh), \tag{2.68}$$
$$\eta = \frac{a}{2}\beta(-f^2+g^2+h^2+n^2+q^2) + g\Upsilon - h\Phi + \mathrm{T} + $$
$$+ a(-\gamma fg - \delta fh + \gamma dn - \delta dq + \alpha gq - \alpha hn). \tag{2.69}$$

Циклическая перестановка в тройках величин (η,θ,ϑ), (β,γ,δ), (f,g,h), (d,n,q), $(\mathrm{K}(t,x,y,z,d),\Phi,\Upsilon)$ позволяет получить на основании последнего равенства

$$\theta = \frac{a}{2}\gamma(f^2-g^2+h^2+d^2+q^2) + $$
$$+ a(-\delta gh - \beta gf - \delta nq - \beta nd + \alpha hd - \alpha fq) + $$
$$+ h\mathrm{K}(t,x,y,z,n) - f\Upsilon(t,x,y,z,n) + \mathrm{T}(t,x,y,z,n), \tag{2.70}$$

$$\vartheta = \frac{a}{2}\delta(f^2+g^2-h^2+d^2+n^2) + \\ + a(-\beta hf - \gamma hg - \beta qd - \gamma nq + \alpha fn - \alpha gd) + \\ + f\Phi(t,x,y,z,q) - g\mathrm{K}(t,x,y,z,q) + \mathrm{T}(t,x,y,z,q). \qquad (2.71)$$

Подстановка B, C, D из (2.35) в уравнения (2.7) с учетом (2.36) дает

$$\eta_d = \theta_n = \vartheta_q.$$

Подстановка (2.69)–(2.71) в эти равенства, в свою очередь, дает

$$-a\gamma n - a\delta q + g\Upsilon_d(t,x,y,z,d) - h\Phi_d(t,x,y,z,d) + \mathrm{T}_d(t,x,y,z,d) = \\ = -a\delta q - a\beta d + h\mathrm{K}_n(t,x,y,z,n) - f\Upsilon_n(t,x,y,z,n) + \mathrm{T}_n(t,x,y,z,n) = \\ = -a\beta d - a\gamma n + f\Phi_q(t,x,y,z,q) - g\mathrm{K}_q(t,x,y,z,q) + \mathrm{T}_q(t,x,y,z,q).$$

В эти уравнения входят не зависящие друг от друга члены. Поэтому последняя система распадается на уравнения

$$\mathrm{T}_d(t,x,y,z,d) = -a\beta d + \Psi(t,x,y,z), \\ \Upsilon_d(t,x,y,z,d) = 0, \quad \Phi_d(t,x,y,z,d) = 0$$

и уравнения, которые можно получить из последних трех циклической перестановкой в тройках величин (β,γ,δ), (d,n,q), $(\mathrm{K},\Phi,\Upsilon)$.

Интегрирование последних уравнений дает

$$\mathrm{T}(t,x,y,z,d) = -\frac{a}{2}\beta d^2 + d\Psi + \Omega(t,x,y,z), \\ \Upsilon = \Upsilon(t,x,y,z), \quad \Phi = \Phi(t,x,y,z). \qquad (2.72)$$

Соображения симметрии позволяют установить на основании (2.68) окончательную зависимость ζ от d, n, q, f, g, h:

$$\zeta = \frac{a}{2}\alpha(d^2+n^2+q^2+f^2+g^2+h^2) + d\mathrm{K} + n\Phi + q\Upsilon + \\ + a(\beta qg - \beta nh + \gamma dh - \gamma qf + \delta nf - \delta dg) + \mathrm{M}(t,x,y,z), \qquad (2.73)$$

где α, β, γ, δ определены в (2.61), зависимости Υ, Φ даны в (2.72) и, кроме того, $\mathrm{K} = \mathrm{K}(t,x,y,z)$.

Равенства (2.35) с учетом (2.73), (2.68)–(2.72) принимают вид

$$A = \alpha\left[U + \frac{a}{2}(d^2+n^2+q^2+f^2+g^2+h^2)\right] + \\ + \beta(mu + aqg - anh) + \gamma(mv + adh - aqf) + \\ + \delta(mw + anf - adg) + \varepsilon m + d\mathrm{K} + n\Phi + q\Upsilon + \mathrm{M}, \qquad (2.74)$$

$$B = \alpha(Wu + agq - anh) +$$

$$+\beta\Big[mu^2+Sm^k+\frac{a}{2}\big(-d^2+n^2+q^2-f^2+g^2+h^2\big)\Big]+$$
$$+\gamma(muv-adn-afg)+\delta(muw-adq-afh)+$$
$$+\varepsilon mu+g\Upsilon-h\Phi+d\Psi+\Omega, \tag{2.75}$$

$$C=\alpha(Wv+adh-aqf)+\gamma\Big[mv^2+Sm^k+$$
$$+\frac{a}{2}\big(d^2-n^2+q^2+f^2-g^2+h^2\big)\Big]+$$
$$+\beta(muv-adn-afg)+\delta(mvw-anq-agh)+$$
$$+\varepsilon mv+h\mathrm{K}-f\Upsilon+n\Psi+\mathrm{N}(t,x,y,z), \tag{2.76}$$

$$D=\alpha(Ww+anf-adg)+\delta\Big[mw^2+Sm^k+$$
$$+\frac{a}{2}\big(d^2+n^2-q^2+f^2+g^2-h^2\big)\Big]+$$
$$+\beta(muw-adq-afh)+\gamma(mvw-anq-agh)+$$
$$+\varepsilon mw+f\Phi-g\mathrm{K}+q\Psi+\Xi(t,x,y,z). \tag{2.77}$$

В последних выражениях для A, B, C, D величины α, β, γ, δ, Ω, Υ, Φ, Ψ, M являются произвольными функциями от t, x, y, z, а величина ε — произвольной функцией от t, x, y, z, S.

Определение α, β, γ, δ, ε, K, M, N, Ξ, Υ, Φ, Ψ, Ω производится с помощью уравнения (2.5). Подстановка (2.74)–(2.77) в уравнение (2.5) приводит к равенству, содержащему искомые величины и следующие взаимно независимые комбинации переменных m, S, u, v, w, d, n, q, f, g, h:

$$1,\ m^{1-k}(P^2+Q^2+R^2),\ U,\ Wu,\ Wv,\ Ww,$$
$$Sm^k,\ m,\ mu,\ mv,\ mw,\ mu^2,\ mv^2,\ mw^2,\ d,\ n,\ q,$$
$$f,\ g,\ h,\ d^2+f^2,\ n^2+g^2,\ q^2+h^2,\ qg-nh,$$
$$dh-qf,\ nf-dg,\ muv-adn-afg,$$
$$mvw-anq-agh,\ muw-adq-afh.$$

Обращение в нуль сумм коэффициентов при этих комбинациях дает систему уравнений

$$\mathrm{M}_t+\Omega_x+\mathrm{N}_y+\Xi_z=0, \tag{2.78}$$
$$\varepsilon_S=0, \tag{2.79}$$
$$\alpha_t=\alpha_x=\alpha_y=\alpha_z=0, \tag{2.80}$$

$$\frac{1}{k-1}\alpha_t + \beta_x + \gamma_y + \delta_z = 0, \tag{2.81}$$

$$\varepsilon_t = 0, \tag{2.82}$$

$$\beta_t + \varepsilon_x = 0, \quad \gamma_t + \varepsilon_y = 0, \quad \delta_t + \varepsilon_z = 0, \tag{2.83}$$

$$\beta_x = \gamma_y = \delta_z = 0, \tag{2.84}$$

$$\mathrm{K}_t + \Psi_x = 0, \quad \Phi_t + \Psi_y = 0, \quad \Upsilon_t + \Psi_z = 0, \tag{2.85}$$

$$\Phi_z - \Upsilon_y = 0, \quad \Upsilon_x - \mathrm{K}_z = 0, \quad \mathrm{K}_y - \Phi_x = 0, \tag{2.86}$$

$$\alpha_t - \beta_x + \gamma_y + \delta_z = 0, \tag{2.87}$$

$$\alpha_t + \beta_x - \gamma_y + \delta_z = 0, \tag{2.88}$$

$$\alpha_t + \beta_x + \gamma_y - \delta_z = 0, \tag{2.89}$$

$$\beta_t + \alpha_x = 0, \quad \gamma_t + \alpha_y = 0, \quad \delta_t + \alpha_z = 0, \tag{2.90}$$

$$\gamma_x + \beta_y = 0, \quad \delta_y + \gamma_z = 0, \quad \beta_z + \delta_x = 0. \tag{2.91}$$

При интегрировании уравнений (2.78)–(2.91) буквой c с индексами будут обозначаться произвольные постоянные.

Из (2.80) следует

$$\alpha = c_1. \tag{2.92}$$

Уравнения (2.87)–(2.89) удовлетворяются в силу (2.80), (2.84).

Из (2.90), (2.80), (2.84) вытекает

$$\beta = \beta(y,z), \quad \gamma = \gamma(x,z), \quad \delta = \delta(x,y). \tag{2.93}$$

Из (2.79), (2.82), (2.83), (2.92) следует

$$\varepsilon = c_2. \tag{2.94}$$

Уравнения (2.91) с учетом (2.93) имеют общий интеграл

$$\beta = c_3 + c_6 y - c_7 z, \quad \gamma = c_4 + c_8 z - c_6 x, \quad \delta = c_5 + c_7 x - c_8 y. \tag{2.95}$$

Уравнение (2.81) выполняется в силу (2.92), (2.95).

Из уравнений (2.86) следует, что

$$\mathrm{K} = \tilde{\lambda}_x, \quad \Phi = \tilde{\lambda}_y, \quad \Upsilon = \tilde{\lambda}_z, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t,x,y,z). \tag{2.96}$$

Подстановка (2.96) в (2.85) показывает, что

$$\Psi = -\tilde{\lambda}_t + \tilde{\mu}(t). \tag{2.97}$$

Интегрирование (2.78) по t дает

$$\mathrm{M} = -\int (\Omega_x + \mathrm{N}_y + \Xi_z)\, dt + \tilde{\nu}(x,y,z). \tag{2.98}$$

Функции M, Ω, N, Ξ от t, x, y, z в (2.74)–(2.77) образуют тривиальную дивергентную форму и в дальнейшем будут отброшены.

Таким образом, все искомые функции определены. Подстановка в (2.3) выражений (2.74)–(2.77) с учетом (2.92), (2.94)–(2.98) дает искомую полную дивергентную форму уравнений (2.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big\{c_1\Big[\frac{m}{2}(u^2+v^2+w^2)+\frac{Sm^k}{k-1}+\frac{a}{2}\big(d^2+n^2+q^2+f^2+g^2+h^2\big)\Big]+$$
$$+c_2m+(c_3+c_6y-c_7z)(mu+aqg-anh)+$$
$$+(c_4+c_8z-c_6x)(mv+adh-aqf)+$$
$$+(c_5+c_7x-c_8y)(mw+anf-adg)+$$
$$+\tilde\lambda_z d+\tilde\lambda_y n+\tilde\lambda_z q\Big\}+\frac{\partial}{\partial x}\Big\{c_1\Big[\frac{m}{2}u\big(u^2+v^2+w^2\big)+$$
$$+\frac{kuSm^k}{k-1}+aqg-anh)\Big]+c_2mu+(c_3+c_6y-c_7z)\Big[mu^2+$$
$$+Sm^k+\frac{a}{2}\big(-d^2+n^2+q^2-f^2+g^2+h^2\big)\Big]+$$
$$+(c_4+c_8z-c_6x)(muv+adn-afg)+$$
$$+(c_5+c_7x-c_8y)(muw-adq-afh)+$$
$$+\tilde\lambda_z g-\tilde\lambda_y h-(\tilde\lambda_t-\tilde\mu)\,d\Big\}+\frac{\partial}{\partial y}\Big\{c_1\Big[\frac{m}{2}v\big(u^2+v^2+w^2\big)+$$
$$+\frac{kvSm^k}{k-1}+adh-aqf\Big]+c_2mv+(c_4+c_8z-$$
$$-c_6x)\Big[mv^2+Sm^k+\frac{a}{2}\big(d^2-n^2+q^2+f^2-g^2+h^2\big)\Big]+$$
$$+(c_3+c_6y-c_7z)(muv-adn-afg)+$$
$$+(c_5+c_7x-c_8y)(mvw-anq-agh)+$$
$$+\tilde\lambda_z h-\tilde\lambda_z f-(\tilde\lambda_t-\tilde\mu)\,n\Big\}+\frac{\partial}{\partial z}\Big\{c_1\Big[\frac{m}{2}w\big(u^2+v^2+w^2\big)+$$
$$+\frac{kwSm^k}{k-1}+anf-adg\Big]+c_2mw+(c_5+c_7x-$$
$$-c_8y)\Big[mw^2+Sm^k+\frac{a}{2}\big(d^2+n^2-q^2+f^2+g^2-h^2\big)\Big]+$$
$$+(c_3+c_6y-c_7z)(muw-adq-afh)+(c_4+c_8z-c_6x)\times$$
$$\times(mvw-anq-agh)+\tilde\lambda_y f-\tilde\lambda_x g-(\tilde\lambda_t-\tilde\mu)\,q\Big\}=0. \qquad (2.99)$$

Напомним, что d, n, q являются составляющими вектора H по осям x, y, z, и $\tilde\lambda=\tilde\lambda(t,x,y,z)$, $\tilde\mu=\tilde\mu(t)$.

Общий закон сохранения (2.99) с использованием векторной и тензорной записи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{c_1\left[\frac{mV^2}{2}+\frac{Sm^k}{k-1}+\frac{a}{2}(H^2+E^2)\right]+c_2 m+\right.$$
$$\left.+(c_3+c_4\times r)\cdot(mV-aH\times E)+H\cdot\nabla\tilde{\lambda}\right\}+$$
$$+\operatorname{div}\left\{c_1\left[\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{kSm^k}{k-1}\right)V-aH\times E\right]+c_2 mV+\right.$$
$$+(c_3+c_4\times r)\cdot\left[mVV-aHH-aEE+\left(Sm^k+\frac{a}{2}H^2+\frac{a}{2}E^2\right)I\right]+$$
$$\left.+E\times\nabla\tilde{\lambda}+(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}_t)H\right\}=0. \qquad (2.100)$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в (2.99), но теперь c_3, c_4 — произвольные постоянные векторы; r — радиус-вектор точки пространства; VV, HH, EE — диады; I — единичный тензор.

Следует отметить, что законы сохранения электромагнитной динамики совершенного газа (2.99) или (2.100) не содержат проводимости среды b, которая в уравнениях (2.1) фигурирует только в членах без производных.

Для магнитной динамики совершенного газа с конечной проводимостью исходная система дифференциальных уравнений в прежних обозначениях имеет вид

$$m_t=-m\operatorname{div}V-V\cdot\nabla m,\quad S_t=-V\cdot\nabla S+(k-1)\,bm^{-k}F^2,$$
$$V_t=-(V\cdot\nabla)V-m^{k-1}\nabla S-kSm^{k-2}\nabla m+bm^{-1}F\times H, \qquad (2.101)$$
$$H_t=-\operatorname{rot}E,\quad \operatorname{div}H=0,\quad a\operatorname{rot}H-bF=0,\quad F=E+V\times H.$$

Проведя вычисления для системы (2.101), аналогичные вычислениям для системы (2.1), получим все законы сохранения магнитной газовой динамики совершенного газа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{c_1\left[\frac{mV^2}{2}+\frac{Sm^k}{k-1}+\frac{aH^2}{2}\right]+(c_2-c_{21}\cdot r)m+\right.$$
$$\left.+(c_{21}t+c_3+c_4\times r)\cdot mV+H\cdot\nabla\tilde{\lambda}\right\}+$$
$$+\operatorname{div}\left\{c_1\left[\left(\frac{mV^2}{2}+\frac{kSm^k}{k-1}\right)V-aH\times E\right]+(c_2-c_{21}\cdot r)\,mV+\right.$$

$$+(c_{21}t+c_3+c_4\times r)\cdot\Big[mVV-aHH+\Big(Sm^k+\frac{a}{2}H^2\Big)I\Big]+$$

$$+E\times\nabla\tilde{\lambda}+(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}_t)H\Big\}=0, \qquad (2.102)$$

где c_{21} — произвольный постоянный вектор.

Система уравнений магнитной гидродинамики с бесконечной проводимостью имеет вид

$$m_t=-m\operatorname{div}V-V\cdot\nabla m,\quad S_t=-V\cdot\nabla S,$$

$$V_t=-(V\cdot\nabla)V-m^{k-1}\nabla S-kSm^{k-2}\nabla m+am^{-1}\operatorname{rot}H\times H, \qquad (2.103)$$

$$H_t=\operatorname{rot}(V\times H),\quad \operatorname{div}H=0.$$

Анализ системы уравнений (2.103) приводит к следующему полному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big\{c_1\Big(\frac{mV^2}{2}+\frac{Sm^k}{k-1}+\frac{aH^2}{2}\Big)+(c_2-c_{21}\cdot r)m+$$

$$+m\tilde{\Lambda}(S)+(c_{21}t+c_3+c_4\times r)\cdot mV+H\cdot\nabla\tilde{\lambda}\Big\}+$$

$$+\operatorname{div}\Big\{c_1\Big[\Big(\frac{mV^2}{2}+\frac{kSm^k}{k-1}\Big)V-a(V\times H)\times H\Big]+$$

$$+(c_2-c_{21}\cdot r)mV+m\tilde{\Lambda}(S)V+$$

$$+(c_{21}t+c_3+c_4\times r)\cdot\Big[mVV-aHH+\Big(Sm^k+\frac{a}{2}H^2\Big)I\Big]-$$

$$-(V\times H)\times\nabla\tilde{\lambda}+(\tilde{\mu}-\tilde{\lambda}_t)H\Big\}=0. \qquad (2.104)$$

Здесь $\tilde{\Lambda}(S)$ — произвольная функция энтропии.

Сравнивая между собой дивергентные уравнения (2.100), (2.102) и (2.104), следует отметить, что количество законов сохранения возрастает по мере упрощения соответствующих систем (2.1), (2.101), (2.103). В то же время дивергентные формы, связанные с законами механики для массы, импульса, момента количества движения и энергии, имеют место для каждой из рассмотренных систем уравнений.

Литература к главе 2

[1] *Дородницын А. А.* Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики // Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда. 1956. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 447–453.

[2] *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики //Матем. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.

[3] *Попов Ю. П., Самарский А. А.* Полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 953–958.

[4] *Шмыглевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Прикл. матем. и механ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 195–206.

[5] *Ибрагимов Н. Х.* Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ГУ, 1972.

[6] *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

[7] *Ибрагимов Н. Х.* Законы сохранения в гидродинамике // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 6. С. 1307–1309.

[8] *Терентьев Е. Д., Шмыглевский Ю. Д.* Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1535–1544.

[9] *Терентьев Е. Д., Шмыглевский Ю. Д.* Полная система дивергентных уравнений электромагнитной динамики совершенного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 3. С. 725–737.

Глава 3

Вариационные задачи газовой динамики

Рассматриваемые здесь вариационные задачи заключаются в определении формы тел, обладающих минимальным волновым сопротивлением в плоскопараллельном или осесимметричном сверхзвуковом потоке газа, и контуров сопел, реализующих максимальную силу тяги при некоторых ограничениях. Силы, действующие на тела при течениях невязкого газа, определяются давлением на стенки. Величина давления находится из решения граничных задач для нелинейных уравнений газовой динамики. Такие задачи в настоящее время решаются численно. Нахождение решения вариационных задач со связями в виде уравнений с частными производными приводит к сложным численным процессам. О таком прямом подходе к оптимизации формы тел будет сказано в послесловии к этой главе. Здесь будет рассмотрен подход, который в плоскопараллельном и осесимметричном случаях допускает точную одномерную постановку ряда вариационных задач и их простое решение.

Такой подход был предложен Никольским [1]. В его работе предлагается постановка вариационной задачи для функций на контрольном контуре, состоящем из двух характеристик уравнений газовой динамики разных семейств. В этом случае функционал, выражающий сопротивление тела и некоторые дополнительные условия, выписывается явно. После определения функций на контрольном контуре остается решить задачу Гурса с известными функциями на характеристиках. Никольский [1] решил вариационную задачу об оптимальной форме тела вращения на основе линеаризованных уравнений газовой динамики, однако, основная идея этой работы применима и к точным уравнениям.

В большинстве случаев вариационные задачи механики оказываются вырожденными. Это приводит к тому, что их решение частично или полностью совпадает с границами области допустимых функций. Метод решения таких задач был разработан и опубликован в ряде статей Охоцимским. Первой из них была работа [2].

Постановка вариационной задачи для плоскопараллельных и осесимметричных сверхзвуковых течений газа на основе полных нелинейных уравнений с использованием контрольного контура принадлежит Гудерлею и Хантшу [3], которые рассмотрели задачу об оптимизации формы сопла Лаваля для случая стационарного течения несовершенного газа. Результаты этой работы приводят к краевой задаче для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих искомые функции на контрольном контуре. К тем же результатам при решении задач внешнего обтекания независимо пришли Зандберген и Валле [4]. Несколько раньше в работах [5, 6] было опубликовано решение ряда вариационных задач газовой динамики для внешних и внутренних сверхзвуковых течений совершенного газа. В этих работах решена краевая задача для нелинейных дифференциальных уравнений на характеристике контрольного контура. В случае безвихревых потоков решение представлено в явном виде. В случае вихревых течений решение сведено к задаче Коши для дифференциального уравнения. Стернин [7] обратил внимание на то, что в одной точке характеристики контрольного контура, построенной на основе необходимых условий экстремума, ускорение может стать бесконечно большим, и нашел геометрическое место таких точек в плоскости годографа скоростей. Это геометрическое место встретилось в дальнейшем при исследовании необходимых условий минимума сопротивления.

Результаты работ [5, 6] несколько позже были получены Рао [8] для несовершенного газа. Подход Рао отличается от использованного в работах [3-6]. Его обоснование было дано Гудерлеем [9], а объяснение причины удачи Рао — в статье [10]. В работе [9] приведено также решение задачи в случае вихревых течений, когда плотность и давление представимы в виде произведений функций от энтропии на функции от энтальпии. Определению оптимальной формы сопла с учетом веса его стенок посвящена статья Стернина [11]. Один вариант задачи о наилучшей форме тела вращения рассмотрен Рао [12]. Перечисленные результаты получены на основе необходимых условий экстремума.

При решении вариационных задач газовой динамики необходимо знать предельные (определяемые граничными условиями) свойства сверхзвуковых течений. Исследование таких свойств для осесимметричных течений разрежения проведено в [13], а для течений сжатия — в [14].

Дальнейшие исследования посвящены необходимым условиям минимума сопротивления (максимума силы тяги). Фанселау [15] обратился к исследованию достаточных условий максимума. В статье [10] в связи с тем, что необходимое условие минимума Лежандра для изучаемых вырожденных функционалов Лагранжа не информативно, выведены два иных необходимых условия минимума. Первое из них получено при допущении возрастания энтропии. Второе отвечает специальной вариа-

ции функций на контрольной характеристике. Оба условия позволили выделить в плоскости годографа скоростей область, в которой экстремали рассмотренного функционала непригодны: они не обеспечивают минимума сопротивления. Тем самым установлено, что непрерывные решения, полученные в работах [3–6, 8, 11, 12], могут быть пригодны только в ограниченной области задаваемых габаритов тел. В статье [10] найдена новая схема решения, расширяющая эту область. В новом решении в одной точке экстремальной характеристики функции имеют разрыв. Он обусловлен фокусировкой в этой точке характеристик, исходящих от обтекаемого контура тела. Из точки разрыва выходят ударная волна и тангенциальный разрыв, располагающиеся вне области влияния решения, а также пучок характеристик, часть которого попадает на оптимизируемый контур тела. Перечисленные результаты автора объединены в книге [16] и обобщены Крайко [17] на случай несовершенного газа. Найденные таким образом непрерывные и разрывные решения все еще не дают возможности строить оптимальные формы тел при всех возможных габаритах. Проблема исчерпана в работе [18], где в рассмотрение вводятся, как допустимые, торцевые плоскости с заранее известным на них давлением (например, нулевым).

Отсутствие азимутальной составляющей вектора скорости в рассмотренных вариационных задачах при осевой симметрии является ограничением, которое может, например, снизить силу тяги оптимального сопла. В работах [19, 20] на примере присутствия потенциальной закрутки потока вокруг оси симметрии выведены необходимые условия экстремума и продемонстрировано увеличение силы тяги. Дальнейшие исследования в этом направлении проведены Гудерлеем, Табаком, Брейтером и Бхутани [21]. Систематическое сравнение оптимальных сопел этого типа выполнено Тилляевой [22].

Параллельно с исследованием безударных решений велось изучение задач о построении оптимальных профилей и тел вращения, вызывающих появление головных ударных волн. Черный [23] исследовал малые вариации течений около клина. Это позволило выделить те случаи, когда прямолинейная образующая обеспечивает минимальное сопротивление профиля с фиксированными концевыми точками. В работах [24, 17] найден класс решений задачи о наилучшей форме тел вращения с протоком, обтекаемых с головной ударной волной. Гудерлей и Эрмитейдж [25] получили тот же класс решений.

На основе необходимых условий экстремума найдена [26, 27] величина максимального сопротивления одной осесимметричной конфигурации, обтекаемой сверхзвуковым потоком.

В этой главе воспроизводятся результаты работ [5, 6, 13, 14, 16, 18–20, 24, 26, 27].

3.1. Предельные свойства сверхзвуковых течений

3.1.1. Непрерывные течения

Наиболее общей является интегральная форма уравнений газовой динамики. Уравнения в этой форме допускают разрывные решения, представляющие течения самого общего вида. Законы сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии в случае плоских и осесимметричных стационарных течений совершенного газа соответственно могут быть записаны в виде

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial y^\nu \rho w \cos\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu \rho w \sin\vartheta}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

$$\iint_\Sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} y^\nu (p + \rho w^2 \cos^2\vartheta) + \frac{\partial}{\partial y} y^\nu \rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\right] dx\,dy = 0,$$

$$\iint_\Sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} y^\nu \rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\partial}{\partial y} y^\nu (p + \rho w^2 \sin^2\vartheta) - \nu p\right] dx\,dy = 0, \quad (1.1)$$

$$\iint_\Sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} y^\nu \rho w \cos\vartheta \left(\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} y^\nu \rho w \sin\vartheta \left(\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho}\right)\right] dx\,dy = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения: x, y — составляющие декартовых координат (рис. 3.1), причем в осесимметричном случае ось x является осью симметрии; Σ — произвольная область в плоскости x, y, ограниченная контуром L; $\nu = 0$ в плоском случае, и $\nu = 1$ в осесимметричном случае; ρ — безразмерная плотность газа, отнесенная к некоторой постоянной плотности ρ_∞; p — давление, отнесенное к произведению $\rho_\infty a_*^2$, где a_* — некоторая постоянная скорость; w — модуль скорости, отнесенный к a_*; ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x; $\varkappa$ — показатель адиабаты ($\varkappa > 1$).

Здесь будут рассматриваться течения газа с постоянным теплосодержанием, носящие название изоэнергетических. Критическая скорость таких течений постоянна, поэтому ее можно использовать в качестве величины a_*. Если течение начинается с равномерного потока, то в качестве величины ρ_∞ может быть взята плотность газа в исходном течении.

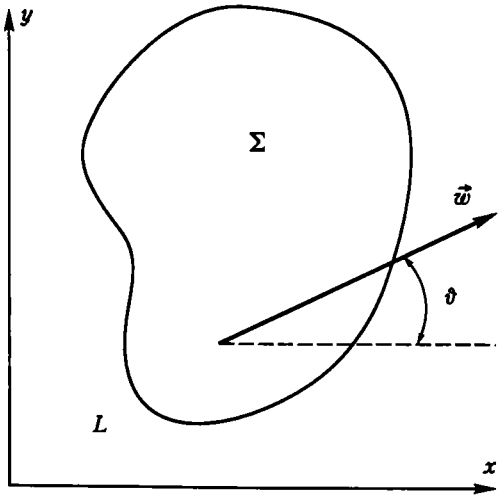


Рис. 3.1

Воспользуемся формулой Грина для перехода от интегралов по области Σ в уравнениях (1.1) к интегралам по контуру L. Это дает, соответственно,

$$\oint_L y^\nu \rho w(\cos\vartheta\, dy - \sin\vartheta\, dx) = 0, \tag{1.2}$$

$$\oint_L y^\nu \left[(p + \rho w^2 \cos^2\vartheta)\, dy - \rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\, dx\right] = 0, \tag{1.3}$$

$$\oint_L y^\nu \left[\rho w^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\, dy - (p + \rho w^2 \sin^2\vartheta)\, dx\right] = \nu \iint_\Sigma p\, dx\, dy, \tag{1.4}$$

$$\oint_L y^\nu \rho w \left(\frac{w^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho}\right)\left(\cos\vartheta\, dy - \sin\vartheta\, dx\right) = 0. \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1) позволяют получить также дифференциальные уравнения для тех областей течения, в которых функции $w(x,y)$, $\vartheta(x,y)$, $p(x,y)$, $\rho(x,y)$ непрерывны. Ввиду произвольности области Σ в этом случае должны быть равны нулю подынтегральные выражения в (1.1). Таким образом получаем

$$\frac{\partial y^\nu \rho w\cos\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu \rho w\sin\vartheta}{\partial y} = 0, \tag{1.6}$$

$$w\cos\vartheta\frac{\partial w\cos\vartheta}{\partial x}+w\sin\vartheta\frac{\partial w\cos\vartheta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{1.7}$$

$$w\cos\vartheta\frac{\partial w\sin\vartheta}{\partial x}+w\sin\vartheta\frac{\partial w\sin\vartheta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}y^{\nu}\rho w\cos\vartheta\left(\frac{w^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\rho w\sin\vartheta\left(\frac{w^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\right)=0. \tag{1.9}$$

Уравнения (1.7), (1.8) здесь преобразованы при помощи уравнения (1.6).

Уравнение (1.6) позволяет ввести функцию тока ψ, дифференциал которой определяется равенством

$$d\psi=y^{\nu}\rho w(\cos\vartheta\,dy-\sin\vartheta\,dx). \tag{1.10}$$

Хорошо известны два интеграла уравнений (1.6)–(1.9). В случае постоянного теплосодержания они имеют вид:

интеграл Бернулли

$$\frac{w^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}=\frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}, \tag{1.11}$$

условие постоянства энтропии вдоль линий тока

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}}=\varphi(\psi). \tag{1.12}$$

Величина φ связана с энтропией S формулой

$$S=c_v\ln\varphi,$$

где c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме.

В безвихревых течениях величина φ постоянна, поэтому такие потоки называются еще изэнтропическими.

Система уравнений (1.6)–(1.9) в случае рассматриваемых здесь течений может быть заменена системой (1.6), (1.7), (1.10)–(1.12). Величины ρ и p легко выражаются через w, φ при помощи равенств (1.11) и (1.12):

$$\begin{aligned}\rho&=\left[\frac{\varkappa+1}{2\varkappa\varphi}\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}w^2\right)\right]^{1/(\varkappa-1)},\\ p&=\varphi\left[\frac{\varkappa+1}{2\varkappa\varphi}\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}w^2\right)\right]^{\varkappa/(\varkappa-1)}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

В сверхзвуковых областях течения, где $w\geqslant 1$, система уравнений (1.6), (1.7), (1.13) имеет действительные характеристики. В этой случае вводится угол Маха α по формуле

$$\sin^2\alpha = \frac{\varkappa p}{\rho w^2} \quad \text{или} \quad w^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-\cos 2\alpha}. \tag{1.14}$$

Уравнения характеристик имеют вид: первое семейство

$$dy = \operatorname{tg}(\vartheta+\alpha)\,dx, \tag{1.15}$$

$$d\vartheta - df(\alpha) + \frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y\sin(\vartheta+\alpha)}\,dy - \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\,d\ln\varphi = 0, \tag{1.16}$$

второе семейство

$$dy = \operatorname{tg}(\vartheta-\alpha)\,dx, \tag{1.17}$$

$$d\vartheta + df(\alpha) - \frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y\sin(\vartheta-\alpha)}\,dy + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\,d\ln\varphi = 0, \tag{1.18}$$

где

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{ctg}\alpha\right) + \alpha, \\ df(\alpha) &= -\frac{1+\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\,d\alpha. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Если φ является известной функцией от ψ, то системе уравнений (1.6), (1.7), (1.10), (1.13) эквивалентна каноническая система уравнений, выведенная Дородницыным [28]:

$$\begin{aligned} &y_\eta = \operatorname{tg}(\vartheta+\alpha)\,x_\eta, \quad y_\xi = \operatorname{tg}(\vartheta-\alpha)\,x_\xi, \\ &\vartheta_\eta - f_\eta + \frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y\sin(\vartheta+\alpha)}y_\eta - \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\varphi_\eta = 0, \\ &\vartheta_\xi + f_\xi - \frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y\sin(\vartheta-\alpha)}y_\xi + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\varphi_\xi = 0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

В этой системе уравнений ξ и η являются характеристическими переменными. Величины ξ и η постоянны, соответственно, вдоль характеристик первого и второго семейства. Индексы ξ и η означают частные производные по этим переменным.

Уравнения газовой динамики необходимо дополнить условием неубывания энтропии в частице, выражающим второе начало термодинамики. Это условие приводит к тому, что в потоке газа могут существовать ударные волны т.е. такие линии разрыва функций w, ϑ, p, ρ, которые приводят к увеличению энтропии и плотности газа, но не существуют линии разрыва, за которыми энтропия и плотность потока уменьшаются.

Здесь будут рассматриваться течения, ограниченные только одной жесткой стенкой. Примерами таких границ являются поверхности цилиндрических крыльев и тел вращения или стенки сопел Лаваля.

Иными словами, будут рассматриваться решения уравнений (1.2)–(1.5), или (1.6)–(1.9), или (1.20) с граничными условиями непротекания только на одной непрерывной линии. Поскольку жесткая стенка является линией тока, граничные условия на ней имеют вид

$$d\psi = 0, \quad d\varphi = 0$$

или, как это следует из (1.10),

$$\cos\vartheta\, dy - \sin\vartheta\, dx = 0, \quad d\varphi = 0. \tag{1.21}$$

При постановке задач о наилучшей форме тел в сверхзвуковом потоке возникнет необходимость определения условий, которым функции w, ϑ, p, ρ или их часть, подчиняются на характеристиках. Предельно быстрое увеличение плотности приводит к соответствующим разрывам функций на ударных волнах, предельно быстрое уменьшение — к конечным скоростям изменения ρ на характеристиках с возможной бесконечной скоростью изменения ρ в точке или даже с разрывом в точке фокусировки характеристик (как, например, в течении Прандтля—Майера).

Следующие два подраздела будут посвящены выявлению предельных свойств сверхзвуковых течений.

3.1.2. Ударные волны

Форма обтекаемого тела может быть такова, что в потоке образуются ударные волны. Если контур обтекаемого тела имеет такой излом, что при движении по жесткой границе в направлении течения величина ϑ скачком увеличивается, то ударная волна начинается в точке излома контура. Гладкие контуры тел могут приводить к возникновению ударных волн начинающихся внутри поля течения.

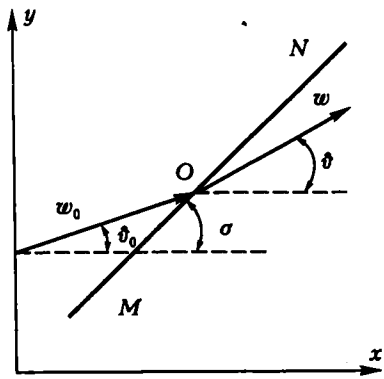


Рис. 3.2

Рассмотрим соотношения на таких линиях разрыва (рис. 3.2). Пусть газ в точке O имеет плотность ρ_0, давление p_0 и скорость w_0, а угол между направлением вектора скорости и осью x равен ϑ_0. Пусть, далее, газ проходит через ударную волну MN, угол наклона которой в точке O к оси x равен σ. В этом случае величины w, ρ, ϑ, p в точке O за ударной волной связаны с w_0, ρ_0, ϑ_0, σ равенствами

$$
\begin{aligned}
w^2 &= w_0^2\cos^2(\sigma-\vartheta_0)+\frac{1}{w_0^2\sin^2(\sigma-\vartheta_0)}\left[1-W_0^2\cos^2(\sigma-\vartheta_0)\right]^2,\\
\rho &= \frac{\rho_0 w_0^2\sin^2(\sigma-\vartheta_0)}{1-W_0^2\cos^2(\sigma-\vartheta_0)},\\
\vartheta &= \sigma-\operatorname{arctg}\left[\frac{\rho_0\operatorname{tg}(\sigma-\vartheta_0)}{\rho}\right],\\
p &= \rho_0\left[\frac{2w_0^2}{\varkappa+1}\sin^2(\sigma-\vartheta_0)-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(1-W_0^2)\right],
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

где

$$W=\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}w.$$

Если ударная волна отделяет область возмущенного течения от области с равномерным исходным потоком, вектор скорости которого параллелен оси x, то $w_0=w_\infty$, $\vartheta_0=0$, $\rho_0=1$ и соотношения (1.22) принимают более простую форму

$$
\begin{aligned}
w^2 &= w_\infty^2\cos^2\sigma+\frac{1}{w_\infty^2\sin^2\sigma}\left(1-W_\infty^2\cos^2\sigma\right)^2,\\
\rho &= \frac{w_\infty^2\sin^2\sigma}{1-W_\infty^2\cos^2\sigma},\\
\vartheta &= \sigma-\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\rho}\right),\\
p &= \frac{2w_\infty^2}{\varkappa+1}\sin^2\sigma-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(1-W_\infty^2).
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Энтропия за ударной волной не убывает в том случае, если угол наклона ударной волны σ не меньше угла наклона характеристики первого семейства набегающего потока. Иными словами, должно выполняться неравенство

$$\sigma\geqslant\vartheta_0+\alpha_0.$$

Величина α_0 может быть выражена через w_0 при помощи (1.14) формулой

$$\alpha_0=\arcsin\sqrt{\frac{\varkappa-1}{2w_0^2}\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}-w_0^2\right)}.$$

Определение 1. Функции α, ϑ, φ на некоторой характеристике второго семейства имеют разрыв класса P^1, если в точке разрыва выполнены соотношения (1.22) при некотором значении σ, удовлетворяющем условию неубывания энтропии.

Изэнтропические разрывы. Энтропия газа S при прохождении через ударную волну увеличивается, вместе с ней увеличивается и величина φ. В дальнейшем появится необходимость построения разрывных течений с постоянной энтропией. Такого вида разрывы могут быть получены только в отдельных точках потока фокусировкой характеристик, начинающихся выше по потоку (рис. 3.3). Области течений с непрерывным сжатием, содержащие фокусирующиеся характеристики, иногда называют волнами сжатия.

Для получения соотношений между функциями в точке фокусировки характеристик h достаточно рассмотреть плоское течение. Это объясняется тем, что и в осесимметричном течении бесконечно малая окрестность точки, находящейся вне оси симметрии, подчиняется уравнениям плоских течений.

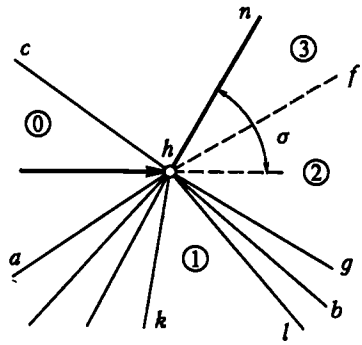


Рис. 3.3

Пусть в точке h фокусируются характеристики пучка ahk. Пересечение характеристик вызывает возникновение ударной волны hn. Отражение возмущений реализуется либо в виде пучка характеристик lhg, либо в виде ударной волны, идущей в том же направлении [29]. Второй случай здесь рассматриваться не будет. Линия hf представляет контактный разрыв. Величины α, ϑ, p постоянны в областях ahn, khl, ghf и fhn, если иметь в виду бесконечно малую окрестность точки h. Для функций в этих областях будем использовать, соответственно, индексы 0, 1, 2 и 3.

В областях ahk и lhg справедливо решение Прандтля—Майера, которое дает связи

$$\vartheta_0 + f(\alpha_0) = \vartheta_1 + f(\alpha_1), \quad \vartheta_1 - f(\alpha_1) = \vartheta_2 - f(\alpha_2). \tag{1.24}$$

Функция $f(\alpha)$ определяется формулой (1.19). При прохождении через область ahk газ сжимается, при прохождении области lhg — расширяется. Таким образом,

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1, \quad \alpha_1 \geqslant \alpha_2. \tag{1.25}$$

Параметры течения за ударной волной hn могут быть найдены из соотношений (1.22). Если давление отнесено к произведению плотности газа в области O на квадрат критической скорости, то для величин ϑ_3 и p_3 получаем с учетом (1.14) формулы

$$\vartheta_3 = \sigma - \operatorname{arctg} \frac{\varkappa - \cos 2\alpha_0 - (\varkappa - 1)\cos^2(\sigma - \vartheta_0)}{(\varkappa + 1)\sin(\sigma - \vartheta_0)\cos(\sigma - \vartheta_0)},$$
$$p_3 = \frac{2\sin^2(\sigma - \vartheta_0)}{\varkappa - \cos 2\alpha_0} - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}\frac{1 - \cos 2\alpha_0}{\varkappa - \cos 2\alpha_0}. \tag{1.26}$$

Давление p_2 при помощи равенств (1.11)–(1.13) выражается через α_0 и α_2 формулой

$$p_2 = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\left(\frac{1 - \cos 2\alpha_0}{\varkappa - \cos 2\alpha_0}\right)^{-1/(\varkappa-1)}\left(\frac{1 - \cos 2\alpha_2}{\varkappa - \cos 2\alpha_2}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}. \tag{1.27}$$

На линии hf контактного разрыва выполняются равенства

$$\vartheta_2 = \vartheta_3, \quad p_2 = p_3. \tag{1.28}$$

Десять величин α_0, ϑ_0, α_1, ϑ_1, α_2, ϑ_2, p_2, ϑ_3, p_3, σ связаны семью равенствами (1.24), (1.26)–(1.28). Задание, например, значений α_0, ϑ_0, α_1 определяет остальные величины. Параметр ϑ_0 несуществен, поскольку его изменение осуществляет поворот всего течения.

Течение рассмотренного здесь вида может существовать при выполнении следующих условий.

а) Скорость газа в области khl является сверхзвуковой или звуковой, то есть

$$\alpha_1 \leqslant \pi/2.$$

б) Система уравнений (1.24), (1.26)–(1.28) при заданных трех величинах из числа α_0, ϑ_0, α_1, ϑ_1, α_2, ϑ_2, p_2, ϑ_3, p_3, σ или при трех соотношениях между ними имеет действительное решение. Действительного решения может не быть, например, если α_0 и $\vartheta_3 - \vartheta_0$ заданы так, что разность $\vartheta_3 - \vartheta_0$ превышает наибольшее значение, достижимое за ударной волной.

в) Энтропия за ударной волной не уменьшается, то есть

$$\sigma - \vartheta_0 \leqslant \alpha_0.$$

Обозначим величину α на некоторой характеристике hb, принадлежащей волне разрежения lhg, через α_4. Величина α_4 подчиняется неравенствам

$$\alpha_2 \leqslant \alpha_4 \leqslant \alpha_1. \tag{1.29}$$

Определение 2. Функции на характеристике второго семейства имеют разрыв класса P^2, если в точке разрыва выполнены уравнения (1.24), (1.26)–(1.28), неравенства (1.25), (1.29) и условия а), б), в) этого подраздела.

Результаты расчетов по указанным соотношениям для $\varkappa = 1{,}4$ приведены на рис. 3.4. Пусть при данном α_0 и некотором угле $\sigma_*(\alpha_0) = \sigma - \vartheta_0$ за ударной волной достигается скорость звука. Тогда в соответствие различным комбинациям α_0 и α_1 будем ставить величину параметра

$$q^\circ = \frac{\sigma - \vartheta_0 - \alpha_0}{\sigma_* - \alpha_0}.$$

Если поток непрерывен, то есть $\sigma - \vartheta_0 = \alpha_0$, то $q^\circ = 0$. Если за ударной волной hn скорость равна скорости звука, то $q^\circ = 1$.

На рис. 3.4 изображена зависимость α_2 от величин α_0 и q°. Величина α_1 нанесена там, где она заметно больше α_2. Там же приведена зависимость $\sigma_*(\alpha_0)$. Пунктирные линии mm соответствуют $\alpha_1(\alpha_0, q^\circ) = \alpha_2(\alpha_0, q^\circ)$ и ограничивают область существования решений

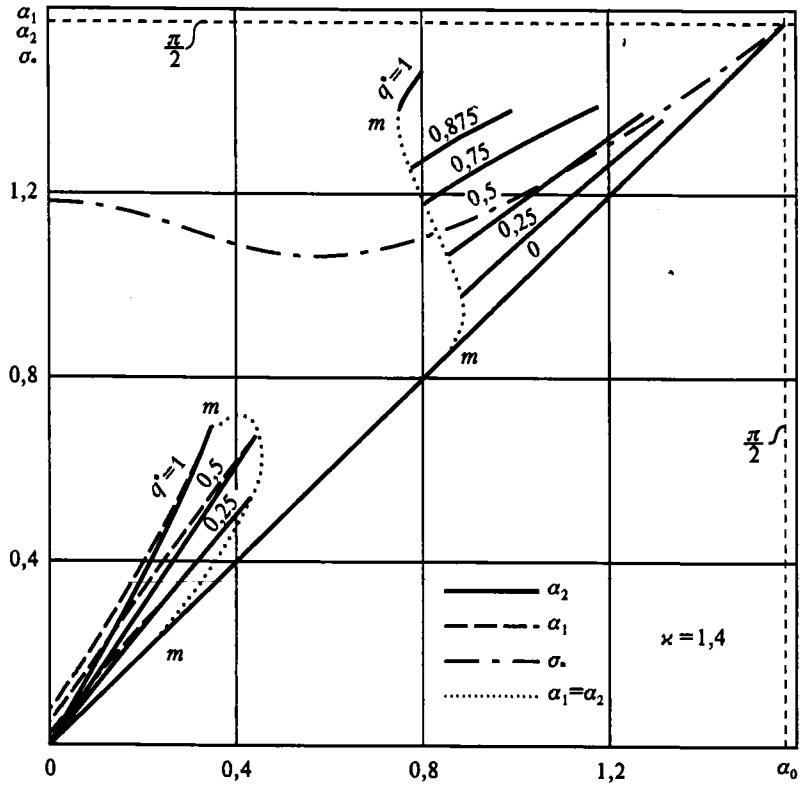


Рис. 3.4

рассмотренного вида. Незаполненная кривыми область соответствует возникновению отраженных ударных волн.

Более сложные виды разрывов могут быть получены фокусировкой в одной точке ряда ударных волн и изэнтропических волн сжатия. Эти виды разрывов здесь не будут рассматриваться подробно. Поэтому введем определение 3, не детализируя его.

Определение 3. Функции на характеристике второго семейства имеют разрыв класса P^3, если этот разрыв определяется фокусировкой в одной точке ударных волн и волн сжатия.

Разрывы классов P^1 и P^2 являются одновременно разрывами класса P^3.

3.1.3. Предельные свойства течений разрежения

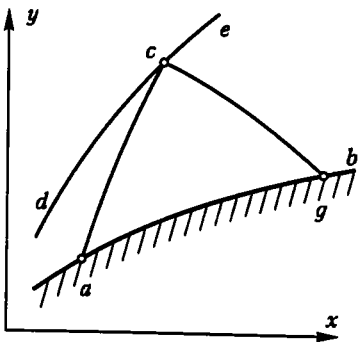


Рис. 3.5

Выясним влияние формы обтекаемой жесткой границы на течение газа. Для этого возьмем (рис. 3.5) контур тела ab и характеристику первого семейства ac. Предположим, что характеристика ac полностью определена вместе с величинами $x(\psi)$, $y(\psi)$, $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\varphi(\psi)$ на ней. Пусть через точку c проходит ударная волна de, участок ce которой неизвестен.

Если уравнение линии ab задано, например, в виде $g = R(x)$, то величина ϑ на ab равна $\operatorname{arctg} R'(x)$. Если теперь каким-либо образом определить величины ξ и η, то функции $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$, $\alpha(\xi,\eta)$, $\vartheta(\xi,\eta)$ в треугольнике acg, где cg — характеристика второго семейства, определяются уравнениями (1.20), (1.10), (1.12)–(1.14) и перечисленными граничными условиями. Если дополнительно задано течение слева от ударной волны de, то дополнительными граничными условиями для определения x, y, α, ϑ вниз по течению от ломаной gce являются соотношения (1.22) на линии ударной волны $dy = \operatorname{tg}\sigma\, dx$.

Поле течения. Определим ξ и η так, что $\xi = x$ на линии ab, а $\eta = \psi$ на характеристике ac.

Подставим в выражение (1.13) для ρ величину w^2 из (1.14), а найденное выражение вместе с выражением для w из (1.14) подставим в (1.10). Тогда, учитывая уравнение (1.15), получаем, что на характеристике первого семейства

$$d\psi = \frac{y^\nu\,\omega\,dy}{\sin(\vartheta+\alpha)}, \quad \omega = \left(\frac{1/\varkappa}{\varphi}\right)^{1/(\varkappa-1)} \left(\frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{1-\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))}.$$

Найдем зависимость между кривизной линии ab в точке a и производными от функций α и ϑ по направлению характеристик второго семейства в точках характеристики ac. Длину дуги произвольной характеристики второго семейства, отсчитываемую вниз по потоку от точки пересечения этой характеристики с линией ac, обозначим через l. Производную по l вдоль характеристики второго семейства будем обозначать символом d/dl.

Из (1.17) следует, что характеристика второго семейства образует с осью x угол $\vartheta-\alpha$. Следовательно, $dy = \sin(\vartheta-\alpha)\,dl$. Обозначим производную df/dl через $\bar f$. Тогда

$$\bar f = \frac{f_\xi}{y_\xi}\sin(\vartheta-\alpha). \tag{1.30}$$

Найдем частную производную от $\bar f$ по η

$$\bar f_\eta = \left(\frac{f_{\xi\eta}}{y_\xi} - \frac{f_\xi y_{\xi\eta}}{y_\xi^2}\right)\sin(\vartheta-\alpha) + \frac{f_\xi}{y_\xi}(\vartheta_\eta-\alpha_\eta)\cos(\vartheta-\alpha). \tag{1.31}$$

Выражения для $f_{\xi\eta}$ и $y_{\xi\eta}$, входящие в последнее равенство, находятся из системы уравнений (1.20). Подставляя эти выражения в (1.31), получаем после громоздких, но элементарных преобразований уравнение Рикатти

$$\bar f_\eta = -Q_1\bar f^2 - Q_2\bar f - Q_3, \tag{1.32}$$

где

$$Q_1 = \frac{\varkappa+1}{\omega y^\nu(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha},$$

$$Q_2 = \frac{(\varkappa+1)\operatorname{ctg}2\alpha}{1+\cos 2\alpha} f_\eta - \frac{\varkappa\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)(1+\cos 2\alpha)\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\psi} - \frac{\nu(3\sin\vartheta\cos\alpha - \cos\vartheta\sin\alpha)}{\omega y^{\nu+1}},$$

$$Q_3 = \frac{\nu(\nu+1)\sin^2\vartheta\sin\alpha\cos\alpha}{\omega y^{\nu+2}} - \frac{\nu\sin(\vartheta+\alpha)}{2y} f_\eta - \frac{\nu\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\vartheta}{\varkappa(\varkappa-1)y\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\psi} + \frac{(\varkappa-\cos 2\alpha)\cos 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)(1+\cos 2\alpha)\varphi} \times \omega y^\nu f_\eta \frac{d\varphi}{d\psi} - \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\,\omega y^\nu \frac{d^2\ln\varphi}{d\psi^2}.$$

Обозначим производную dl/df вдоль линии $\eta = \text{const}$ через γ, если значение этой производной берется в точках характеристики ac. Имея в виду, что $\bar{f} = 1/\gamma$, из (1.32) найдем уравнение для γ

$$\frac{d\gamma}{d\eta} = Q_1 + Q_2\gamma + Q_3\gamma^2, \tag{1.33}$$

где через $d/d\eta$ обозначена полная производная вдоль характеристики ac. Отметим, что в случае плоских безвихревых течений, то есть если $\nu = 0$, $\varphi = \text{const}$, уравнения (1.32) и (1.33) интегрируются в квадратурах, поскольку $Q_3 = 0$.

Установим граничное условие для функции γ в точке a. Вспомним, что уравнением образующей ab является $y = R(x)$. Из выражений для полных производных вдоль линии ab получим

$$x_\xi + x_\eta\frac{d\eta}{d\xi} = 1, \quad y_\xi + y_\eta\frac{d\eta}{d\xi} = R', \quad \vartheta_\xi + \vartheta_\eta\frac{d\eta}{d\xi} = R''(1+R'^2)^{-1}, \tag{1.34}$$

где производная $d\eta/d\xi$ берется вдоль линии ab.

Используем эти равенства в точке a. В этом случае x_η, y_η, ϑ_η, R', R'' являются известными величинами. Неизвестны x_ξ, y_ξ, ϑ_ξ и $d\eta/d\xi$ в точке a. Присоединим к равенствам (1.34) второе уравнение из (1.20). Это позволит вычислить все неизвестные величины, входящие в (1.34). В частности,

$$\begin{aligned} y_\xi &= \frac{\sin(\vartheta-\alpha)}{2\cos\alpha\cos\vartheta}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{y^\nu\omega}{2\cos\alpha\cos\vartheta}, \\ \vartheta_\xi &= \frac{R''}{1+R'^2} - \frac{y^\nu\omega\vartheta_\eta}{2\cos\alpha\cos\vartheta}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Найдем величины ϑ_η и ϑ_ξ из двух последних уравнений (1.20) и подставим их выражения в последнее равенство из (1.35). Равенство (1.30) позволяет выразить f_ξ через $\bar{f} = 1/\gamma$. Окончательно получим в точке a, то есть при $\xi = x_a$, $\eta = \psi_a$,

$$\begin{aligned} \gamma &= \Delta\mathscr{R}, \\ \Delta^{-1} &= \mathscr{R}\,y^\nu\omega\left[f_\eta + \frac{\sin 2\alpha}{\varkappa(\varkappa-1)}\frac{d\varphi}{d\psi}\right] - 2\cos\alpha, \end{aligned} \tag{1.36}$$

где $\mathscr{R}$ — радиус кривизны образующей ab в точке a при стремлении к точке a со стороны точки b.

Для выяснения зависимости γ от $\mathscr{R}$ проварьируем уравнение (1.33) и граничное условие (1.36) по $\mathscr{R}$, имея в виду, что в равенствах (1.33) и (1.36) от $\mathscr{R}$ зависит только величина γ. Получим, что вариация $\delta\gamma$ определяется линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\delta\gamma}{d\eta} = (Q_2 + 2Q_3\gamma)\,\delta\gamma$$

и граничным условием при $\eta = \psi_a$

$$\delta\gamma = -2\Delta^2 \cos\alpha\,\delta\mathscr{R}.$$

Интегрирование дает

$$\delta\gamma = -\left[2\Delta_a^2 \cos\alpha_a \exp \int_{\eta=\psi_a}^{\eta} (Q_2 + 2Q_3\gamma)\,d\eta\right] \delta\mathscr{R}. \tag{1.37}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции f_η, $f_\eta(\ln\varphi)_\psi$, $(\ln\varphi)_{\psi\psi}$ интегрируемы на ac. Предположим также, что интегрируемы и функции γ, γf_η, $\gamma f_\eta(\ln\varphi)_\psi$, $\gamma(\ln\varphi)_{\psi\psi}$, однако, из дальнейшего будет видно, что последнее предположение излишне.

Равенство (1.37) позволяет заключить, что $\delta\gamma < 0$ при $\delta\mathscr{R} > 0$, если $0 < \alpha < \pi/2$ и при $\nu = 1$ выполняется неравенство $y > 0$. Вспоминая (1.19), получаем, что при тех же условиях

$$\delta\frac{d\alpha}{dl} < 0 \quad \text{при} \quad \delta\mathscr{R} > 0. \tag{1.38}$$

Умножим теперь все члены последнего уравнения из (1.20) на $\sin(\vartheta - \alpha)/y_\xi$. С учетом (1.19) найдем

$$\frac{d\vartheta}{dl} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{\varkappa - \cos 2\alpha}\frac{d\alpha}{dl} - \frac{\nu \sin\vartheta \sin\alpha}{y} - \frac{\omega y^\nu \sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa - 1)\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi} = 0.$$

При изменении величины радиуса кривизны $\mathscr{R}$ характеристика ac остается неизменной, и в последнем равенстве варьируются только величины $d\vartheta/dl$ и $d\alpha/dl$, то есть

$$\delta\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\varkappa - \cos 2\alpha}\,\delta\frac{d\alpha}{dl}.$$

Отсюда и из (1.38) получаем, что и

$$\delta\frac{d\vartheta}{dl} < 0 \quad \text{при} \quad \delta\mathscr{R} > 0. \tag{1.39}$$

Отметим, что в частном случае равенства $\Delta^{-1} = 0$ для анализа необходимо воспользоваться уравнением (1.32) и граничным условием при $\eta = \psi_a$

$$\bar{f} = y^\nu\omega\left[f_\eta + \frac{\sin 2\alpha}{\varkappa(\varkappa - 1)}\frac{d\varphi}{d\psi}\right] - \frac{2\cos\alpha}{\mathscr{R}}, \tag{1.40}$$

вытекающим из (1.36). Варьируя уравнение (1.32) и граничное условие (1.40), получаем

$$\frac{d\delta\bar{f}}{d\eta} = -(2Q_1\bar{f} + Q_2)\,\delta\bar{f}, \qquad \delta\bar{f}|_{\eta=\psi_*} = \frac{2\cos\alpha_a}{\mathscr{R}^2}\,\delta\mathscr{R}. \tag{1.41}$$

Из решения задачи (1.41) снова вытекает справедливость (1.38) и (1.39), поскольку $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Однако, на этот раз, казалось бы, необходимо потребовать, чтобы дополнительно была интегрируема и функция $\bar{f}$ на ac. На самом деле предположения об интегрируемости γ, γf_η, $\gamma(\ln\varphi)_\psi$, $\gamma(\ln\varphi)_{\psi\psi}$, с одной стороны, и $\bar{f}$, с другой стороны, излишни, поскольку $\bar{f} = 1/\gamma$, и в сомнительных случаях один путь вывода зависимости между $\delta(d\alpha/dl)$ и $\delta\mathscr{R}$ может быть заменен другим.

Таким образом, справедливо следующее свойство.

Свойство 1. В плоском или осесимметричном сверхзвуковом течении газа увеличение радиуса кривизны $\mathscr{R}$ образующей ab тела в точке a приводит к уменьшению производных $d\alpha/dl$ и $d\vartheta/dl$ в точках заданной характеристики ac (с учетом знаков).

Из свойства 1 вытекает что при кривизне ab в точке a равной $-\infty$ производные $d\alpha/dl$ и $d\vartheta/dl$ имеют минимальные значения.

Определение 4. Пусть в задаче сверхзвукового обтекания одного жесткого контура рассматривается некоторая характеристика второго семейства η_*. Пусть, далее, из произвольной точки M контура проведена характеристика первого семейства до пересечения с характеристикой η_* в точке N. Функция $\alpha(\psi)$ на характеристике η_* принадлежит классу D_2, если производная $d\alpha/dl$ вдоль этой характеристики в каждой точке N не меньше, чем производная при кривизне в точке M равной $-\infty$.

Точки обтекаемого контура $y = R(x)$, в которых функция $R(x)$ непрерывна, а производная $R'(x)$ имеет разрыв, называются точками излома контура.

Определение 5. Функция $\alpha(\psi)$ на характеристике второго семейства принадлежит классу D_2^i, если она кусочно непрерывна, на участках непрерывности принадлежит классу D_2, а ее разрывы принадлежат классу P^i.

В отношении функции $\varphi(\psi)$ на характеристике второго семейства в задаче обтекания одного контура предположим, что она кусочно непрерывна.

Ударная волна. Рассмотрим теперь связь между кривизнами образующей ab и линии ударной волны ce. Для простоты предположим, что набегающий поток равномерен и параллелен оси x. Скорость набегающего газа равна w_∞.

Прежде всего, найдем связь между производной $d\vartheta/dl$ вдоль характеристики cg в точке c и кривизной $\mathscr{R}_b$ линии ударной волны в точке c.

Продифференцируем почленно по x соотношения на ударной волне (1.23). Если дифференцирование ведется вдоль линии ударной волны, то $dy/dx = \operatorname{tg}\sigma$ и $\mathscr{R}_b = (\cos\sigma\, d\sigma/dx)^{-1}$, а полные производные от w, ρ, ϑ, p по x могут быть выражены через $\mathscr{R}_b$.

Присоединим к уравнениям (1.6)–(1.9) четыре тождества

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

для функций w, ϑ, p, ρ. Последние восемь уравнений при известных dw/dx, $d\vartheta/dx$, dp/dx, $d\rho/dx$, dy/dx позволяют определить частные производные от w, ϑ, p, ρ по x и y, которые, в свою очередь, позволяют вычислить полные производные от этих функций вдоль характеристики cg. В частности, для $d\vartheta/dl$ получаем выражение

$$\frac{d\vartheta}{dl} = \frac{\nu \sin\vartheta \sin^2\alpha \cos(\sigma-\vartheta)}{y\sin(\vartheta+\alpha-\sigma)} + \frac{1}{\mathscr{R}_b}\frac{\sin 2\alpha}{\sin(\vartheta+\alpha-\sigma)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2}\frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{2(\varkappa-\cos 2\alpha)}{(\varkappa+1)^2}\left(1 - W_\infty^2\cos^2\sigma\right)\operatorname{ctg}\sigma\operatorname{ctg}\alpha\right], \qquad (1.42)$$

где $d\theta/d\sigma$ есть производная от ϑ по σ, полученная из (1.23).

Если скорость газа, прошедшего через ударную волну конечной интенсивности, остается сверхзвуковой, то на ударной волне выполняются известные неравенства

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \sigma < \vartheta + \alpha, \quad \sigma < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{d\sigma} > 0.$$

Кроме того, всегда $W_\infty \leqslant 1$. Из этих неравенств следует, что выражение, стоящее множителем при $1/\mathscr{R}_b$ в формуле (1.42), положительно. Тогда из (1.42) заключаем, что уменьшение $d\vartheta/dl$ приводит к увеличению $\mathscr{R}_b$. Отсюда и из свойства 1 в свою очередь вытекает

Свойство 2. При плоском и осесимметричном сверхзвуковом обтекании тела увеличение радиуса кривизны $\mathscr{R}$ образующей ab тела в точке a приводит к увеличению радиуса кривизны $\mathscr{R}_b$ линии ударной волны ce в точке c, если точки a и c соединены характеристикой первого семейства.

Свойство 2 позволяет заключить, что при кривизне ab в точке a, равной $-\infty$, кривизна линии ударной волны ce в точке c является минимальной.

Определение 6. Пусть в задаче сверхзвукового обтекания одного жесткого контура рассматривается ударная волна. Касательная к ударной волне образует положительный угол σ с направлением вектора скорости набегающего потока, но этот угол меньше того, при котором скорость за ударной волной равна скорости звука. Пусть, далее, из произвольной точки M контура проведена характеристика первого семейства до пересечения с ударной волной в точке N. Функция $\sigma = \operatorname{arctg} y'$, где $y = Y_b(x)$ определяет линию ударной волны, принадлежит классу E, если кривизна линии $y = Y_b(x)$ в каждой точке N не меньше, чем ее значение, отвечающее кривизне контура в точке M равной $-\infty$.

3.2. Вариационные задачи для безударных течений

3.2.1. Прямой подход к оптимизации

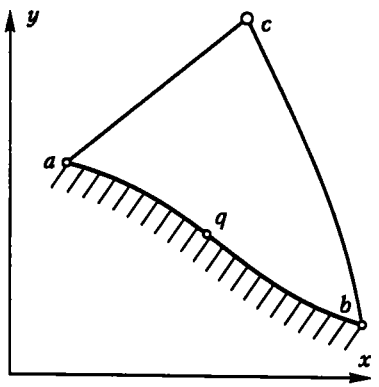


Рис. 3.6

Оптимальными будут называться те формы профилей, которые обладают минимальным волновым сопротивлением при некоторых дополнительных условиях.

Пусть задан набегающий поток газа, то есть функции $w(x,y)$, $\vartheta(x,y)$, $p(x,y)$, $\rho(x,y)$, удовлетворяющие системе уравнений (1.6)–(1.9). В поток (рис. 3.6) помещается некоторое тело с образующей $y = R(x)$, которая соединяет точки a и b. Поскольку рассматриваются только сверхзвуковые течения, обтекание верхней и нижней поверхностей плоского профиля можно изучать независимо друг от друга, а в осесимметричном случае достаточно рассмотреть одну меридиональную плоскость течения. Волновое сопротивление χ тела с контуром ab, то есть проекция равнодействующей сил давления на ось x, выражается формулой

$$\chi = (2\pi)^{\nu} \int_{R=R_a}^{R_b} p R^{\nu} \, dR, \tag{2.1}$$

где p — давление газа на контуре при соответствующем значении R.

Если контур ab задан, а задача обтекания этого профиля решена, то p на поверхности профиля можно рассматривать как известную функцию от R. В этом случае формула (2.1) может быть использована для вычисления χ.

Для плоских течений ($\nu = 0$) известен один частный случай, в котором задача построения оптимального профиля при непосредственном использовании формулы (2.1) является сравнительно простой. Пусть линии ac и bc являются, соответственно, характеристиками первого и второго семейства. Если на ac вектор скорости постоянен, то линия ac оказывается прямой. Предположим, что угол наклона вектора скорости на ac к оси x не меньше, чем угол касательной к контуру ab в точке a. Наконец допустим, что набегающий поток изэнтропичен, а в треугольнике abc не образуются ударные волны. В этом случае течение в abc является также изэнтропическим, то есть $\varphi = \text{const}$. Из последнего уравнения (1.20) и постоянства α и ϑ на ac следует, что $\vartheta + f(\alpha) = c_0 = \text{const}$ в треугольнике abc. Вспоминая формулы (1.13) и (1.14), связывающие величины p, w и α, а также равенство $\vartheta = \operatorname{arctg} R'(x)$ на линии ab, получаем

$$\chi = \varphi^{-(1/(\varkappa-1))} \int_{x=x_a}^{x_b} \left[\frac{\varkappa+1}{2\varkappa} \frac{1-\cos 2\alpha(R')}{\varkappa-\cos 2\alpha(R')}\right]^{\varkappa/(\varkappa-1)} R'\,dx. \qquad (2.2)$$

Зависимость $\alpha(R')$ оказывается неявной и определяется уравнением

$$\operatorname{arctg} R' + f(\alpha) = c_0. \qquad (2.3)$$

Наиболее существенным моментом здесь является то, что зависимость p от $R'(x)$ на профиле является известной. Величина p есть функция от $R'(x)$, и это упрощает задачу построения наилучшего профиля, поскольку интеграл в (2.2) является функционалом хорошо изученного вида.

Формула (2.2) позволяет поставить, например, следующую вариационную задачу. Для заданных величин x_a, $R(x_a)$, x_b, $R(x_b)$ найти непрерывную функцию $R(x)$, реализующую минимум функционала χ при связи (2.3). Решение этой задачи дает оптимальный профиль ab при фиксированном положении его концевых точек.

Решение сформулированной задачи здесь отыскиваться не будет, поскольку ее постановка имеет крайне ограниченный характер. Действительно, выражение (2.1) было преобразовано к виду (2.2) благодаря ряду жестких ограничений. Та же задача будет решена в дальнейшем в иной постановке. В общем случае, когда набегающий поток неравномерен, а форма контура ab может вызывать появление ударных волн в поле

течения, необходимо решить задачу обтекания произвольного профиля и определить давление p на этом профиле. Иными словами, необходимо найти решение уравнений (1.6)–(1.9) при заданном поле $w(x,y)$, $\vartheta(x,y)$, $p(x,y)$, $\rho(x,y)$ набегающего потока, условиях (1.22) на ударной волне, если таковая имеет место, и граничных условиях (1.21) на линии ab. Только в этом случае можно использовать формулу (2.1). К сожалению, в настоящее время решение упомянутой задачи обтекания неизвестно. В общем случае давление в некоторой промежуточной точке q контура ab является функционалом от $R(x)$ на участке aq, что само по себе должно затруднить решение вариационной задачи.

Совершенно иной подход к постановке вариационных задач газовой динамики предложил в 1950 г. Никольский [1]. Решая вариационную задачу для осесимметричных течений в линейной постановке, Никольский вводит контрольный контур из характеристик первого и второго семейств, проходящих, соответственно, через переднюю и заднюю точки искомого контура. При этом характеристика первого семейства полностью известна, а вариационная задача ставится для функций на характеристике второго семейства. Сама вариационная задача оказывается одномерной, а исследуемый функционал относится к хорошо изученному типу. После определения искомых функций на характеристике второго семейства течение около искомого контура находится решением задачи Гурса. Искомый контур является линией тока найденного течения. Таким образом, подход Никольского избавляет от необходимости предварительного решения задачи обтекания произвольного контура и приводит лишь к необходимости решения конкретной задачи Гурса.

Именно такой подход будет использован здесь для решения вариационных задач газовой динамики в точной постановке.

После определения функций на контрольном контуре расчет течения будет сводиться, вообще говоря, к решению двумерных задач Коши и Гурса. Для уравнений газовой динамики эти задачи успешно решаются методом характеристик. Рабочая форма этого метода в применении к быстродействующим вычислительным машинам изложена в работе Чушкина [30] и в [31].

3.2.2. Метод контрольного контура

Все рассматриваемые здесь задачи будут сводиться к определению оптимального контура ab, помещенного в заданный набегающий поток газа. В течениях со сверхзвуковыми скоростями из передней точки a искомого контура (рис. 3.7) начинается, вообще говоря, ударная волна ac. Предположение о наличии такой ударной волны не ограничивает общности постановки задачи, поскольку соотношения (1.22) справедливы и

для характеристики первого семейства, когда $\sigma = \alpha_0 + \vartheta_0$. Линия ac принимается за часть контрольного контура.

В точку b может приходить ударная волна $c'b$. Однако, в этом случае в ту же точку должна прийти некоторая характеристика второго семейства cb. Малые изменения потока внутри области $c'bc$ не влияют на обтекание контура ab в силу гиперболичности уравнений течения. Это позволяет во всех случаях за замыкающую часть контрольного контура принимать характеристику второго семейства.

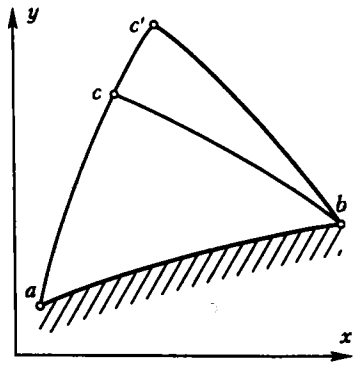


Рис. 3.7

Итак, в качестве контрольного контура выбирается замкнутая линия, состоящая из линии тока ab, характеристики bc и ударной волны (или характеристики) ca. Область, ограниченную контрольным контуром, будем называть областью влияния. Следует помнить, что последняя является областью влияния с точки зрения слабых возмущений. В то же время, если допустимо накапливание слабых возмущении, приводящее к конечным возмущениям, то область влияния должна быть ограничена ударной волной $c'b$. Примером сосредоточения слабых возмущений является фокусировка характеристик первого семейства в некоторой точке c', из которой вниз по течению идут две ударных волны $c'n$ и $c'b$ (см. 3.1.2).

В зависимости от исходных данных, как покажет решение задач об оптимальных формах контуров, течения около искомых тел будут делиться на два вида. В одном случае участок характеристики ac набегающего потока остается неизменным, в другом из точки a выходит ударная волна, а характеристика ac набегающего потока разрушается. Например, в случае равномерного набегающего потока параллельного оси x первая возможность реализуется при $y_b \leqslant y_a$, вторая — при $y_b > y_a$. В этом разделе и в разделах 3.3–3.5 будут рассмотрены задачи первого типа. Задачи второго типа изучаются в разделе 3.6. Здесь будет дан путь выявления типа решения.

Замкнутый контур L в уравнениях (1.2)–(1.5) произволен. Выберем в качестве L контрольный контур abc.

Вдоль линии ab дифференциалы dx и dy связаны первым равенством из (1.21). Связь (1.15) на характеристике первого семейства позволяет найти из (1.10) равенства

$$dx = \frac{\cos(\vartheta + \alpha)}{y^\nu \rho w \sin\alpha}\, d\psi, \quad dy = \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{y^\nu \rho w \sin\alpha}\, d\psi. \tag{2.4}$$

Аналогично из (1.17) и (1.10) находим на характеристике второго семейства

$$dx = -\frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{y^\nu \rho w \sin\alpha}\, d\psi, \quad dy = -\frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{y^\nu \rho w \sin\alpha}\, d\psi. \tag{2.5}$$

Каждый из интегралов (1.2), (1.3) и (1.4) в соответствии с выбором контура L разбивается на интегралы по линиям ab, bc и ca. Выразим в интегралах по линии ab величину dx через dy при помощи формулы (1.21). Равенства (2.4) и (2.5) позволяют проделать то же самое, соответственно, в интегралах по линиям ac и bc. В результате для интегралов (1.3), (1.2) и (1.4) получим, соответственно,

$$\bar{\chi} = \frac{\chi}{(2\pi)^\nu} = \int\limits_{Y=y_a}^{y_c} F_1(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY + \int\limits_{y=y_b}^{y_c} \Phi_1(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy, \tag{2.6}$$

$$\Psi \equiv 0 = \int\limits_{Y=y_a}^{y_c} F_2(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY + \int\limits_{y=y_b}^{y_c} \Phi_2(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy, \tag{2.7}$$

$$(1-\nu)\zeta = (1-\nu) \int\limits_{Y=y_a}^{y_c} F_3(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY +$$

$$+ (1-\nu) \int\limits_{y=y_b}^{y_c} \Phi_3(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy. \tag{2.8}$$

Здесь через χ обозначена величина волнового сопротивления (2.1), через Ψ — равный нулю расход газа сквозь контур ab, через ζ — подъемная сила плоского профиля, равная интегралу по контуру ab

$$\zeta = -\int\limits_{x=x_a}^{x_b} p\, dx.$$

Подъемная сила тела вращения при осесимметричном течении равна нулю. Поэтому равенство (2.8) записано в такой форме, что оно имеет смысл только для плоских течений, а в осесимметричном случае превращается в тождество.

Величины Y, $A(Y)$, $\Theta(Y)$, $\varphi_0(Y)$ представляют, соответственно, величины y, α, ϑ, φ на характеристике ac. Подынтегральные выражения в (2.6)–(2.8) вычисляются указанным выше путем. Используя для ρ и p равенства (1.13), а для w — равенство (1.14), после несложных преобразований получаем

$$F_1 \equiv \sqrt{\varkappa}\varphi_0^k Z(A)w(A)\left[\frac{\cos\Theta}{\sin(\Theta+A)}+\frac{\sin A}{\varkappa}\right]Y^\nu,$$

$$F_2 \equiv \sqrt{\varkappa}\varphi_0^k Z(A)\frac{Y^\nu}{\sin(\Theta+A)},$$

$$F_3 \equiv -\sqrt{\varkappa}\varphi_0^k Z(A)w(A)\left[\frac{\sin\Theta}{\sin(\Theta+A)}-\frac{\sin A\operatorname{ctg}(\Theta+A)}{\varkappa}\right]Y^\nu,$$

$$\Phi_1 \equiv \sqrt{\varkappa}\varphi^k Z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right]y^\nu,$$

$$\Phi_2 \equiv \sqrt{\varkappa}\varphi^k Z(\alpha)\frac{y^\nu}{\sin(\vartheta-\alpha)},$$

$$\Phi_3 \equiv -\sqrt{\varkappa}\varphi^k Z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)}+\frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{\varkappa}\right]y^\nu,$$

$$Z(\alpha) \equiv \left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\,\frac{1-\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))},$$

$$w(\alpha) \equiv \left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-\cos 2\alpha}\right)^{1/2}, \quad k=-\frac{1}{\varkappa-1}.$$

Предполагается, что в общем случае $\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi)$.

Длина X проекции контура ab на ось x также может быть выражена через контурные интегралы по ac и bc. Воспользуемся равенствами (1.15), (1.17) и после интегрирования получим

$$X = \int_{Y=y_a}^{y_c} F_4(A,\Theta)\,dY + \int_{y=y_b}^{y_c} \Phi_4(\alpha,\vartheta)\,dy, \tag{2.9}$$

где

$$F_4 \equiv \operatorname{ctg}(\Theta+A), \quad \Phi_4 \equiv -\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha).$$

Соотношение (1.18) на характеристике второго семейства можно переписать в виде

$$\Phi_5 \equiv \frac{d\vartheta}{dy}+\frac{df(\alpha)}{dy}-\frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y\sin(\vartheta-\alpha)}+\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\,\frac{d\ln\varphi}{dy}=0. \tag{2.10}$$

Пусть необходимо найти форму контура, имеющего минимальное волновое сопротивление χ при заданных концевых точках a и b, при заданной подъемной силе ζ и определенной характеристике ac набегающего потока газа. Существенно, что все необходимые величины, а также условия задачи теперь выражены через функции на характеристиках ac и bc. Величина χ, например, при заданных функциях $A(Y)$, $\Theta(Y)$, $\varphi_0(Y)$

является функционалом от $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\varphi(y)$, причем подынтегральное выражение Φ_1 является известной функцией от α, ϑ, φ.

Равенству (2.7) эквивалентно вытекающее из (2.5) дифференциальное уравнение

$$\bar{\Phi}_2 \equiv \frac{d\psi}{dy} + \Phi_2(y, \alpha, \vartheta, \varphi) = 0 \tag{2.11}$$

с граничными условиями

$$\psi(y_b) = \psi(y_a), \quad \psi(y_c) = \psi_a + \int_{Y=y_a}^{y_c} F_2(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY. \tag{2.12}$$

Величина ψ на характеристике ac определяется равенством

$$\psi = \psi_a + \int_{Y=y_a}^{Y} F_2(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY. \tag{2.13}$$

В правых частях равенства (2.6)–(2.9) стоят интегралы по линиям ac и bc. Поскольку функции на ac полностью определены, интегралы по ac являются функциями от y_c. Интегралы по bc содержат подлежащие определению функции и являются функционалами от них.

Введем функцию β по формуле

$$d\beta = d\vartheta + df(\alpha)$$

или

$$\beta = \vartheta + f(\alpha), \tag{2.14}$$

где $f(\alpha)$ определено в (1.19). Равенства (2.11) и (2.14) позволяют переписать (2.10) в следующих двух формах

$$\bar{\Phi}_5 \equiv \frac{d\beta}{dy} - \frac{\nu \sin\vartheta \sin\alpha}{y \sin(\vartheta - \alpha)} - \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa - 1)\varphi}\, \Phi_2 \frac{d\varphi}{d\psi} = 0, \tag{2.15}$$

$$\bar{\Phi}_5 \equiv \frac{d\beta}{dy} - \frac{\nu \sin\vartheta \sin\alpha}{y \sin(\vartheta - \alpha)} + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa - 1)\varphi}\, \frac{d\varphi}{dy} = 0. \tag{2.16}$$

В дальнейшем будет принята система переменных y, α, β, φ, но для наглядности формулы будут приводиться в переменных y, α, ϑ, φ.

Предположения $\varphi(\psi) = \varphi_0(\psi)$ и $\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi)$ приводят к различным вариационным задачам. Первое предположение указывает на недопустимость ударных волн в области abc, второе допускает возникновение ударных волн в этой области. Обе задачи имеют определенный смысл. Сформулируем их и рассмотрим каждую в отдельности.

Задача 1. Найти функцию $\alpha(y)$, реализующую минимум функционала (2.6) при изопериметрических условиях (2.8) и (2.9), при дифференциальных связях (2.11) и (2.15), при заданных величинах y_a, y_b, $(1-\nu)\zeta$, X и функциях $A(Y)$, $\Theta(Y)$, $\varphi_0(Y)$, при условии

$$\varphi(\psi) = \varphi_0(\psi) \tag{2.17}$$

и при граничных условиях (2.12). Допустимыми $\alpha[y(\psi)]$, рассматриваемыми как функции от ψ, являются функции класса D_2^2. Величина ψ на линии ac определяется равенством (2.13). Непрерывность в точке c, если она имеет место, выражается равенствами

$$\alpha(y_c) = A(y_c), \quad \vartheta(y_c) = \Theta(y_c). \tag{2.18}$$

Если эта задача, предполагающая двусторонний экстремум на всей характеристике cb, окажется неразрешимой, то ее можно модифицировать, допуская участок одностороннего экстремума.

Подчинение функции α классу D_2^2 в процессе решения задачи потребовало бы использования уравнений газовой динамики в области влияния и привело бы к двумерной задаче. Вместо этого здесь задача решается без ограничения на α на участке двустороннего экстремума, а после ее решения, решения задачи Гурса и определения контура это ограничение проверяется. Подобный подход используется и при решении всех последующих задач.

Задача 2. Найти функции $\alpha(y)$ и $\varphi(y)$, из которых $\alpha[y(\psi)]$ как функция от ψ принадлежит классу D_2^3, а $\varphi[y(\psi)]$ кусочно непрерывна, реализующие минимум функционала (2.6) при изопериметрических условиях (2.7)–(2.9), при дифференциальной связи (2.16), при заданных величинах y_a, y_b, $(1-\nu)\zeta$, X и функциях $A(Y)$, $\Theta(Y)$, $\varphi_0(Y)$ и при условии

$$\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi). \tag{2.19}$$

Величина ψ на ac определяется равенством (2.13). Непрерывность в точке c, если таковая имеет место, выражается равенствами (2.18).

В связи с вариационными задачами 1 и 2 следует заметить, что величина подъемной силы ζ не может задаваться совершенно произвольно, а должна быть заключена в некоторых пределах. Это следует из того, что интегралы, входящие в выражение (2.8), ограничены при конечных пределах.

На основании принципа взаимности [32] решение задач 1 и 2 совпадает с решением задач, в которых χ задано, а отыскивается экстремум, например, величины X или ζ.

Необходимо отметить, что сформулированные вариационные задачи являются вырожденными. Действительно, функции Φ_1, $\bar{\Phi}_2$, Φ_3, Φ_4, $\bar{\Phi}_5$

не содержат производной $d\alpha/dy$, а производные $d\beta/dy$, $d\psi/dy$ содержат линейно. Обычно это приводит к тому, что при условиях задачи двусторонний экстремум не имеет места. Решение задачи полностью или частично может не совпадать с интегралом системы уравнений Эйлера. Вместо двустороннего экстремума может иметь место односторонний (краевой) экстремум, определяемый ограничениями типа неравенств.

В этом разделе будет рассматриваться задача 1. Решение задачи 2 будет дано в разделе 3.3.

3.2.3. Первая вариация

Для решения вариационной задачи 1 воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим сумму

$$I = \int_{Y=y_a}^{y_c} F(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY + \int_{y=y_b}^{y_c} \Phi(y, \alpha, \beta, \beta', \psi, \psi', \lambda_2, \lambda_5)\, dy. \qquad (2.20)$$

Здесь

$$F = \bar{\lambda}_1 F_1 + \bar{\lambda}_3(1-\nu)F_3 + \lambda_4 F_4,$$
$$\Phi = \bar{\lambda}_1 \Phi_1 + \bar{\lambda}_2(y)\bar{\Phi}_2 + \bar{\lambda}_3(1-\nu)\Phi_3 + \lambda_4 \Phi_4 + \lambda_5(y)\bar{\Phi}_5,$$

где

$$\bar{\lambda}_1 = K, \quad \bar{\lambda}_2(y) = K\lambda_2(y), \quad \bar{\lambda}_3 = K\lambda_3,$$
$$K = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{2}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))}.$$

Величины λ_3 и λ_4 являются постоянными, а $\lambda_2(y)$ и $\lambda_5(y)$ — переменными множителями Лагранжа. При постановке частных вариационных задач некоторые из условий задачи 1 могут не использоваться. Например, в задаче о плоском профиле может не задаваться подъемная сила ζ. В этом случае в сумме (2.20) достаточно положить равным нулю соответствующий множитель Лагранжа.

Вычислим первую вариацию функционала I. При этом необходимо учесть следующее. Первый интеграл в (2.20) есть функция от y_c. Вариации $\delta\beta_c$, $\delta\psi_c$, δy_c связаны, поскольку характеристика ac задана. Вариации δy_b и $\delta\psi_b$ равны нулю, поскольку величины y_b и ψ_b фиксированы. Учитывая все это, получаем

$$\delta I = (F_c + \Phi_c)\delta y_{c1} + \int_{y=y_b}^{y_c} (\Phi_\alpha \delta\alpha + \Phi_\beta \delta\beta + \Phi_{\beta'}\delta\beta' + \Phi_\psi \delta\psi + \Phi_{\psi'}\delta\psi')\, dy. \qquad (2.21)$$

Индексом 1 здесь отмечено, что вариация берется вдоль характеристики первого семейства. Индексы 1 и 2 будут использоваться для указания семейств характеристик, вдоль которых вычисляются вариации и производные.

Проинтегрируем по частям члены с $\delta\beta'$ и $\delta\psi'$, стоящие под интегралом в (2.21). Используя обычный процесс вывода условий трансверсальности [32] с учетом (2.12), (2.13), (2.15) и (2.18), получаем

$$\delta I = \left[F + \Phi + \lambda_5\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 - \lambda_5\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_2 + \bar{\lambda}_2 F_2 + \bar{\lambda}_2\Phi_2\right]_{y=y_c} \delta y_{c1} -$$

$$- \lambda_5(y_b)\delta\beta_b + \int_{y=y_b}^{y_c}\left[\Phi_\alpha\delta\alpha + \left(\Phi_\beta - \frac{d}{dy}\Phi_{\beta'}\right)\delta\beta + \left(\Phi_\psi - \frac{d}{dy}\Phi_{\psi'}\right)\delta\psi\right] dy. \quad (2.22)$$

Выясним теперь, достижим ли в задаче 1 двусторонний экстремум.

Ввиду произвольности вариации δy_{c1} необходимо приравнять нулю множитель при δy_{c1} в (2.22):

$$\left[F + \Phi + \lambda_5\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 - \lambda_5\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_2 + \lambda_2 K F_2 + \lambda_2 K\Phi_2\right]_{y=y_c} = 0. \quad (2.23)$$

По поводу последнего условия необходимо сделать следующее замечание. Если рассматриваемое течение является изэнтропическим, то вместо дифференциальной связи (2.11) с граничными условиями (2.12) можно использовать одно изопериметрическое условие (2.7). Это показывает, что соответствующий множитель Лагранжа λ_2 будет постоянен, а его величина определяется из условия (2.7). В этом случае равенство (2.23) является условием трансверсальности. Если же течение неизэнтропично, то величина λ_2 переменна, а равенство (2.23) можно рассматривать как граничное условие для λ_2. Последнее означает, что условие (2.23) выполняется на всех функциях сравнения. Это различие в смысле равенства (2.23) при изэнтропических и неизэнтропических течениях несущественно при рассмотрении необходимых условий экстремума, но оно должно быть использовано при выводе необходимых условий минимума.

При условии $\bar{\Phi}_5 = 0$ сумма I отличается от $\bar{\chi}$ на постоянную величину, поскольку $(1-\nu)\zeta = \text{const}$, $X = \text{const}$. Если это условие выполняется при варьировании, то вариация δI совпадает с $\delta\bar{\chi}$, поскольку $\delta\bar{\Phi}_5 = \delta\zeta = \delta X = 0$. Тождественное выполнение условий (2.8), (2.9) и (2.15) приводит к тому, что вариации δI и $\delta\bar{\chi}$ совпадают при любых функциях $\lambda_2(y)$ и $\lambda_5(y)$. Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\lambda_5(y_b) = 0, \quad (2.24)$$

а функции $\lambda_2(y)$ и $\lambda_5(y)$ выберем так, чтобы в формуле (2.22) были равны нулю члены с $\delta\beta$ и $\delta\psi$. Это даст уравнения

$$\Phi_\beta - \frac{d\lambda_5}{dy} = 0, \tag{2.25}$$

$$\Phi_\psi - K\frac{d\lambda_2}{dy} = 0. \tag{2.26}$$

Вариация суммы (2.20) при выполнении условий (2.23)–(2.26) принимает вид

$$\delta\bar{\chi} = \int_{y=y_b}^{y_c} \Phi_\alpha\,\delta\alpha\,dy. \tag{2.27}$$

Условия (2.23) и (2.24) становятся дополнительными граничными условиями для определения искомых функций.

Для получения двустороннего экстремума необходимо приравнять нулю выражение при вариации $\delta\alpha$ в формуле (2.27). Вместе с (2.25) и (2.26) это дает систему уравнений Эйлера

$$\Phi_\alpha = 0, \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha \equiv\ & \frac{1}{(\varkappa - \cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta-\alpha)}\Big\{\frac{z(\alpha)w(\alpha)}{2\sin\alpha}\big[(\varkappa+1)\sin 2\vartheta - \\
& - 2(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\big]\,y^\nu\varphi^k - \\
& - \lambda_2(y)z(\alpha)\big[(1-\varkappa+2\cos 2\alpha)\cos(\vartheta-\alpha) - \\
& - (\varkappa+1)\operatorname{ctg}\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\big]\,y^\nu\varphi^k - \\
& - \lambda_3(1-\nu)\frac{(\varkappa+1)z(\alpha)w(\alpha)}{2\varkappa\sin\alpha}(\varkappa - 1 - \cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha - \\
& - \varkappa\cos 2\vartheta)\,y^\nu\varphi^k + \lambda_4(1-\varkappa+2\cos 2\alpha) + \lambda_5(y)L\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L \equiv\ & \frac{\nu}{2y}\big[\sin^2 2\alpha - (\varkappa - \cos 2\alpha)(1-\cos 2\vartheta)\big] + \\
& + \big\{(1-\varkappa+2\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\cos(\vartheta-\alpha) - \\
& - [\varkappa+1+(3\varkappa+1)\cos 2\alpha - \\
& - 2\cos^2 2\alpha]\sin(\vartheta-\alpha)\big\}\frac{z(\alpha)\,y^\nu\varphi^{k-1}}{2K\varkappa(\varkappa-1)}\frac{d\varphi}{d\psi},
\end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_5}{dy} = \Phi_\beta, \tag{2.29}$$

$$\Phi_\beta \equiv -\frac{1}{\sin^2(\vartheta-\alpha)}\Big\{z(\alpha)\Big[w(\alpha)\cos\alpha+\lambda_2(y)\cos(\vartheta-\alpha)-$$
$$-\lambda_3(1-\nu)\frac{\varkappa+1}{\varkappa}w(\alpha)\sin\alpha\Big]y^\nu\varphi^k-\lambda_4-$$
$$-\lambda_5(y)\Big[\frac{\nu\sin^2\alpha}{y}+\frac{\sin 2\alpha\cos(\vartheta-\alpha)}{2K\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}\Big]\Big\},$$

$$K\frac{d\lambda_2}{dy}=\Phi_\psi, \tag{2.30}$$

$$\Phi_\psi \equiv -\frac{y^\nu\varphi^k}{\varkappa-1}\frac{d\ln\varphi}{d\psi}\Big\{z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)}-\frac{\sin\alpha}{\varkappa}\Big]+$$
$$+\lambda_2(y)\frac{z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)}-$$
$$-\lambda_3(1-\nu)z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)}+\frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{\varkappa}\Big]\Big\}+$$
$$+\lambda_5(y)\frac{z(\alpha)\,y^\nu\varphi^k\sin 2\alpha}{2K\varkappa(\varkappa-1)\sin(\vartheta-\alpha)}\Big[\frac{1}{\varkappa-1}\Big(\frac{d\ln\varphi}{d\psi}\Big)^2-\frac{d^2\ln\varphi}{d\psi^2}\Big],$$

$$z(\alpha)=\Big(\frac{1-\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\Big)^{\frac{1}{2}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))}.$$

Гудерлей и Хантш в работе [3] изучали вариационную задачу об оптимальном сопле Лаваля в плоском и осесимметричном случаях для равновесных изэнтропических течений реального газа. Решение было сведено к краевой задаче для дифференциальных уравнений, аналогичных уравнениям (2.15), (2.28)–(2.30) при $\zeta=0$.

Подсчитаем количество условий и произволов в определении функций, предполагая, что двусторонний экстремум осуществим. Необходимо найти решение уравнений (2.11), (2.15), (2.28)–(2.30), определяющих функции $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\psi(y)$, $\lambda_2(y)$, $\lambda_5(y)$. Граничными условиями являются шесть равенств (2.12), (2.18), (2.23) и (2.24). Величины y_c, λ_3 и λ_4 произвольны. Кроме того, должны выполняться изопериметрические условия (2.8) и (2.9).

Уравнение (2.28) не является дифференциальным. Уравнения (2.11), (2.15), (2.29), (2.30) дают четыре произвола в определении функций. Всего задача содержит семь произволов при восьми условиях, и следовательно, она неразрешима. Отсюда заключаем, что двусторонний экстремум недостижим. Искомая функция $\alpha(y)$ в решении может частично или полностью совпадать с границей области допустимых функций. Свобода

выбора точки перехода с такой границы на экстремаль может дать недостающий произвол. Итак, необходимо рассмотреть границы области допустимых функций.

3.2.4. Необходимые условия экстремума

В вариационной задаче 1 свободна только функция $\alpha(y)$. Поэтому удобно рассмотреть (рис. 3.8) плоскость y, α.

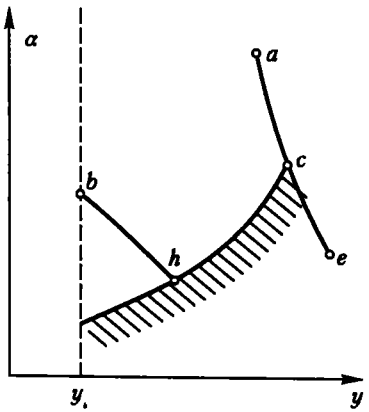


Рис. 3.8

Зависимость $\alpha = A(y)$ на характеристике ae изображается на рис. 3.8 кривой с теми же обозначениями. Выберем на ae, произвольную точку c. Из точки c проведем кривую ch на которой $d\alpha/dl$ имеет минимальное значение (см. 3.1.3). Эта кривая изображает зависимость $\alpha(y)$ на характеристике ch в том случае, когда кривизна образующей ab в точке a равна $-\infty$, то есть, когда контур ab имеет излом [28, 33] в точке a. Течение, которому принадлежит характеристика ch, аналогично течению Прандтля—Майера и полностью определяется характеристикой ac и изломом образующей в точке a. В области cah характеристики первого семейства образуют пучок с центром в a. Если на всей характеристике ch имеет место неравенство $\vartheta - \alpha < 0$, кривая ch имеет вид, приведенный на рис. 3.8.

Принадлежность $\alpha[y(\psi)]$ классу D_2^2 означает, в частности, следующее. Если кривая $\alpha(y)$ совпадает с ch, то допустимой является только вариация $\delta\alpha > 0$. Изменение $\delta\alpha < 0$, не может быть обусловлено никаким непрерывным контуром ab.

Предположим, что кривая hb определяется решением уравнений Эйлера задачи и дает двусторонний экстремум. Покажем, что при такой схеме количество произволов в определении функций совпадает с количеством условий. В дальнейшем будет определена область существования решений этого вида (3.3 и 3.4).

Перепишем формулу (2.20) в виде

$$I = \int_{Y=y_a}^{y_c} F\,dY + \int_{y=y_h}^{y_c} \Phi\,dy + \int_{y=y_b}^{y_h} \Phi\,dy. \qquad (2.31)$$

Следует иметь в виду, что

$$\int_{Y=y_a}^{y_c} F\,dY + \int_{y=y_h}^{y_c} \Phi\,dy = \int_{Y=y_a}^{y_h} F\,dY, \qquad (2.32)$$

где F в последнем интеграле определено на характеристике первого семейства ah, а сам интеграл берется вдоль этой линии (рис. 3.9). Равенство (2.32) следует из уравнений (1.2)–(1.4), если в них за контур L принять ahc, и из равенств (1.15)–(1.18), выполняющихся на соответствующих частях этого контура.

Вычислим первую вариацию функционала (2.31). Отметим важное различие между вычислением вариации исходного функционала (2.20) и записанного здесь функционала (2.31). В первом случае варьирование производилось без учета ограничений, налагаемых на функции класса D_2^2. Во второй случае искомая функция $\alpha(y)$ уже не свободна на участке ch. Она остается свободной только на отрезке bh, а конец h этой экстремали лежит в области cah с заранее определенными функциями $\alpha(x,y)$, $\vartheta(x,y)$. Таким образом, первое слагаемое правой части (2.31) является функцией от y_c, а второе слагаемое — функцией от x_h, y_h. Если во втором случае удастся добиться обращения в нуль первой вариации, то это не означает, что первая вариация функционала (2.20) также обратится в нуль. Наоборот, она, вообще говоря, не равна нулю, поскольку $\Phi_\alpha \neq 0$ на ch. На характеристике ch допустима односторонняя вариация $\delta\alpha$. Необходимым условием минимума χ является увеличение χ при допустимых вариациях $\delta\alpha$.

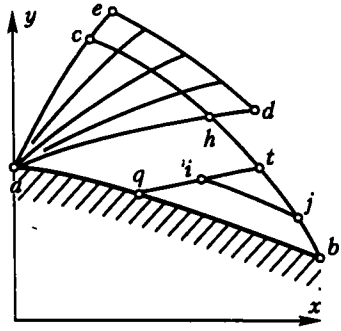


Рис. 3.9

Точка h в плоскостях x,y и y,α свободна (задача Больца). Течение в области cah неизменно, произвольным является только выбор границ ah и hc этой области. На участке bh функция $\alpha(y)$ свободна, но принадлежит классу D_2^2. Таким образом, среди концевых значений произвольными являются две координаты точки h, полностью определяющие область cah.

В качестве направлений, по которым варьируется положение точки h, выберем касательные к характеристикам первого и второго семейства в точке h. Соответствующие вариации величины y в точке h обозначим через δy_{h1} и δy_{h2}.

При варьировании δy_{h1} происходит переход от характеристики ch к другой характеристике второго семейства той же области cah. Учитывая равенство (2.32), приращение первых двух членов в (2.31) можно записать как $F_h \delta y_{h1}$. Приращение третьего члена в (2.31) равно $\Phi_h \delta y_{h1}$.

Варьирование по направлению характеристики второго семейства проведем для I в форме (2.31). При этом первый член в (2.31) остается неизменным, второй уменьшается на $\Phi_h \delta y_{h2}$, а третий возрастает на ту же величину, поскольку функция Φ непрерывна при непрерывной зависимости α от y.

Первая вариация I принимает вид совершенно аналогичный (2.22):

$$\delta I = \left[F + \Phi + \lambda_5\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 - \lambda_5\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_2 + \lambda_2 K F_2 + \lambda_2 K \Phi_2\right]_{y=y_h} \delta y_{h1} -$$

$$- \lambda_5(y_b)\delta\beta_b + \int_{y=y_b}^{y_h}\left[\Phi_\alpha \delta\alpha + \left(\Phi_\beta - \frac{d}{dy}\Phi_{\beta'}\right)\delta\beta + \left(\Phi_\psi - \frac{d}{dy}\Phi_{\psi'}\right)\delta\psi\right] dy. \quad (2.33)$$

Обращение в нуль δI приводит к условиям, совпадающим с (2.23) и (2.24), если в (2.23) величину y_c заменить на y_h. Условие при $y = y_h$ с учетом (2.11) и (2.18) в развернутой форме имеет вид

$$\varkappa y^\nu \varphi^k z(\alpha)\left[\frac{1}{\sin(\vartheta + \alpha)} + \frac{1}{\sin(\vartheta - \alpha)}\right] \times$$
$$\times \left[w(\alpha)\cos\vartheta + \lambda_2 - \lambda_3(1-\nu)w(\alpha)\sin\vartheta\right] +$$
$$+ \left[\operatorname{ctg}(\vartheta + \alpha) - \operatorname{ctg}(\vartheta - \alpha)\right] \times$$
$$\times \left[\lambda_3(1-\nu)\, y^\nu \varphi^k z(\alpha) w(\alpha)\sin\alpha + \varkappa\lambda_4\right] + \lambda_5 \bar{L} = 0. \quad (2.34)$$

Конкретный вид величины $\bar{L}$ для дальнейшего несуществен. Из (2.33) по-прежнему могут быть получены уравнения Эйлера. Они в точности совпадают с (2.28)–(2.30).

В рассматриваемой схеме (рис. 3.9) свобода выбора характеристики ah дает недостающий произвол. В то же время соответствующее произволу в выборе δy_{h2} условие трансверсальности оказалось тождеством. Таким образом, количество произволов в определении функций совпадает с количеством условий. Конечно, окончательное заключение о разрешимости задачи требует более детального ее изучения.

Теперь, когда выяснена возможность удовлетворения необходимых условий экстремума, вернемся к рис. 3.8 и выясним условия, при которых достигается минимум сопротивления χ.

Допустим, что необходимые условия экстремума удовлетворены. На кривой bh имеем $\Phi_\alpha = 0$. Пусть над кривой bh (при $\delta\alpha > 0$)

выполняется неравенство $\Phi_\alpha > 0$, а ниже bh (при $\delta\alpha < 0$) — неравенство $\Phi_\alpha < 0$. Кроме того, пусть $\Phi_\alpha \geqslant 0$ на hc. В этом случае равенство (2.27) приводит к следующим выводам. При любом знаке вариации $\delta\alpha$ на участке bh имеем $\delta\bar{\chi} > 0$. На участке hc вариация $\delta\alpha > 0$ также приводит к $\delta\bar{\chi} > 0$, поскольку $\Phi_\alpha > 0$ на hc. Вариация $\delta\alpha < 0$ на hc недопустима. Таким образом, если и варьирование на границах ведет к $\delta\bar{\chi} > 0$, то при сделанных предположениях достигается минимум сопротивления χ. В общем случае удобно ввести длину l (см. 3.1.3) и преобразовать равенство (2.27) к виду

$$\delta\bar{\chi} = -\int_{l=0}^{l_b} \Phi_\alpha \sin(\vartheta - \alpha)\,\delta\alpha\,dl,$$

где принято, что $l = 0$ в точке h. Тогда вместо условия $\Phi_\alpha \geqslant 0$ на hc необходимо потребовать выполнения неравенства $\Phi_\alpha \sin(\vartheta - \alpha) \leqslant 0$. Подчеркнем еще раз, что в решении этой задачи первая вариация I не равна нулю, поскольку на отрезке hc функция Φ_α равна нулю только в точке h.

На участке bh характеристики второго семейства (рис. 3.9) должны выполняться уравнения (2.15), (2.28)–(2.30) при граничных условиях (2.12), (2.18), (2.24), (2.34).

Решение краевой задачи. Введем произвольную характеристику первого семейства qt. В силу того, что при сверхзвуковых скоростях уравнения (1.6)–(1.9) имеют гиперболический тип, форма отрезка qb не влияет на обтекание отрезка aq. Поэтому, если контур ab обладает минимальным сопротивлением при заданной характеристике ae и определенных величинах Ψ, ζ, X, то и отрезок qb должен иметь минимальное сопротивление при фиксированной характеристике qt и своих фиксированных величинах Ψ, ζ, X. В противном случае уменьшение сопротивления отрезка qb привело бы к уменьшению сопротивления всего контура ab. На участке tb выполняются уравнения (2.15), (2.28)–(2.30), а в точке b — граничное условие (2.24). Условия непрерывности функций α, ϑ, ψ в точке t и первое условие из (2.12) также удовлетворяются. Но если участок qb контура обладает минимальным сопротивлением, то в точке t должно выполняться и условие трансверсальности (2.34), записанное для $y = y_t$. Это условие в силу произвольности выбранной характеристики qt должно выполняться на всей характеристике bh. Поэтому оно должно являться интегралом системы уравнений (2.11), (2.15), (2.28)–(2.30).

Исключим из равенств (2.28), (2.29), (2.34) величины $\lambda_2(y)$ и λ_4. В результате получим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка для определения $\lambda_5(y)$. Вспоминая условие (2.24), сразу заключаем, что

$$\lambda_5(y) \equiv 0 \tag{2.35}$$

на экстремальном участке bh искомой характеристики bc. Напомним, что величина $\lambda_5(y)$ на участке характеристики hc как и на bh, определяется дифференциальным уравнением (2.29). На hc функция $\lambda_5(y)$, вообще говоря, не равна нулю.

Равенства (2.28), (2.34), (2.35) являются интегралом системы уравнений (2.11), (2.15), (2.28)–(2.30), удовлетворяющим граничным условиям (2.24) при $y = y_b$ и (2.34) при $y = y_h$. Равенство (2.28) может быть заменено более простым равенством (2.29) при $\lambda_5(y) \equiv 0$.

Эвристические рассуждения, которые привели к этому результату требуют проверки.

Проверка решения. Исключение величины λ_2 из (2.29) и (2.34) с учетом (2.35) дает

$$z(\alpha)w(\alpha)\,y^{\nu}\varphi^{k}\left[\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} + \lambda_3(1-\nu)\left(\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right)\right] = \lambda_4. \tag{2.36}$$

Исключая из тех же равенств величину λ_4, получаем

$$\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\left[\lambda_3(1-\nu)\sin(\vartheta+\alpha) - \cos(\vartheta+\alpha)\right] = \lambda_2(y). \tag{2.37}$$

Продифференцируем почленно по y равенство (2.36):

$$\begin{aligned}
&\left[2\operatorname{ctg}\vartheta\frac{d\vartheta}{dy} + \frac{2(\varkappa+\cos^2 2\alpha)}{(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}\frac{d\alpha}{dy} -\right.\\
&\left. - \frac{1}{\varkappa-1}\frac{d\ln\varphi}{dy} + \frac{\nu}{y}\right]\sin^2\vartheta + \lambda_3(1-\nu)\left[\cos 2\vartheta\frac{d\vartheta}{dy} +\right.\\
&+ \frac{(\varkappa+\cos^2 2\alpha)\sin 2\vartheta - (1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}\frac{d\alpha}{dy} -\\
&\left. - \frac{\varkappa\sin 2\vartheta - \sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\frac{d\ln\varphi}{dy} + \frac{\nu(\varkappa\sin 2\vartheta - \sin 2\alpha)}{2\varkappa y}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Дифференцируя почленно равенство (2.37) и подставляя выражение для производной от λ_2 из (2.30), находим

$$\begin{aligned}
&\sin(\vartheta+\alpha)\frac{d\vartheta}{dy} +\\
&+ \left[\sin(\vartheta+\alpha) - \frac{(\varkappa-1-2\cos 2\alpha)(1-\cos 2\alpha)}{(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}\cos(\vartheta+\alpha)\right]\frac{d\alpha}{dy} -\\
&- \frac{\sin\alpha}{\varkappa-1}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\cos\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right]\frac{d\ln\varphi}{dy} +
\end{aligned}$$

$$+\lambda_3(1-\nu)\Big\{\cos(\vartheta+\alpha)\frac{d\vartheta}{dy}+$$

$$+\Big[\cos(\vartheta+\alpha)+\frac{(\varkappa-1-2\cos 2\alpha)(1-\cos 2\alpha)}{(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}\sin(\vartheta+\alpha)\Big]\frac{d\alpha}{dy}-$$

$$-\frac{\sin\alpha}{\varkappa-1}\Big[\cos\vartheta-\frac{1}{\varkappa}\cos\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\Big]\frac{d\ln\varphi}{dy}\Big\}=0. \qquad (2.39)$$

Умножим почленно равенство (2.38) на величину $-\sin\alpha[\sin\vartheta\times\sin(\vartheta-\alpha)]^{-1}$, а равенство (2.39) — на $[\sin(\vartheta-\alpha)]^{-1}$. Результаты умножения сложим. Получим

$$\frac{d\vartheta}{dy}-\frac{1+\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\frac{d\alpha}{dy}-\frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y\sin(\vartheta-\alpha)}+\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\frac{d\ln\varphi}{dy}+\lambda_3(1-\nu)\operatorname{ctg}\vartheta\times$$

$$\times\Big[\frac{d\vartheta}{dy}-\frac{1+\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\frac{d\ln\varphi}{dy}-\frac{\nu(\varkappa\sin 2\vartheta-\sin 2\alpha)\sin\alpha}{2\varkappa y\cos\vartheta\sin(\vartheta-\alpha)}\Big]=0.$$

Отсюда видим, что действительно равенство (2.15) или, что то же самое, равенство (1.18) выполняется при $\nu=0$ и $\nu=1$.

3.2.5. Порядок расчета

Полученное решение представляет, с одной стороны, осесимметричное течение, в котором подъемная сила ζ обязательно равна нулю, с другой стороны — плоское течение, в котором подъемная сила может быть задана. Таким образом, здесь нельзя говорить о самой общей вариационной задаче. В связи с этим рассмотрим различные конкретные случаи.

Порядок расчета при $\lambda_3(1-\nu)=0$. Этот случай представляет либо плоское течение, в котором величина подъемной силы не задается, либо осесимметричное течение.

Характеристика ae и точки a и b заданы (рис. 3.9). Первоначально строится течение в области ead. Построение течения в ead сводится к решению задачи Гурса для уравнений (1.20) при известной функции $\varphi(\psi)$, функциях α и ϑ на характеристике первого семейства ae и известных равенствах

$$x=x_a,\quad y=y_a,\quad \vartheta+f(\alpha)=\Theta_a+f(A_a),$$

выполняющихся на характеристике второго семейства, выродившейся в точку a. Такой расчет может быть произведен методом характеристик [30, 31]. Попутно в области ead вычисляется функция ψ.

Затем надлежит определить положение точки h. Однако вначале будем говорить о некоторой случайно выбранной точке h.

Система уравнений (2.36), (2.37), (2.30), (2.11) для определения $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\lambda_2(y)$, $\psi(y)$ при $\lambda_3(1-\nu)=0$ и $\lambda_5(y)\equiv 0$ имеет вид

$$z(\alpha)w(\alpha)y^{\nu}\varphi^{k}\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha}=\lambda_4, \tag{2.40}$$

$$-\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\cos(\vartheta+\alpha)=\lambda_2(y), \tag{2.41}$$

$$K\frac{d\lambda_2}{dy}=-\frac{y^{\nu}\varphi^{k}z(\alpha)w(\alpha)}{\varkappa-1}\,\frac{d\ln\varphi}{d\psi}\left[\frac{\sin\vartheta\sin\alpha}{\sin(\vartheta-\alpha)\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right], \tag{2.42}$$

$$K\frac{d\psi}{dy}=-\frac{y^{\nu}\varphi^{k}z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)}. \tag{2.43}$$

Уравнение (2.42) подучено из (2.30) и (2.41) исключением λ_2. Равенства (2.40), (2.41) позволяют вычислить λ_4, $\lambda_2(y_h)$ по известным величинам y_h, α_h, ϑ_h, ψ_h.

Систему уравнений (2.40)–(2.43) следует интегрировать с начальными данными $\alpha(y_h)=\alpha_h$, $\vartheta(y_h)=\vartheta_h$, $\lambda_2(y_h)$, $\psi(y_h)=\psi_h$. Интегрирование производится от $y=y_h$ до такого $y=y_*$, при котором $\psi(y_*)=\psi_a$. Формулы (2.9) и (2.6) позволяют вычислить X и χ при $y_b=y_*$.

Если точку b_* с координатами $x_*=x_a+X$, y_* рассматривать как заданную точку b, то для нее найдены все необходимые функции на экстремали hb и соответствующее минимальное сопротивление χ.

В действительности координаты точки h определяются из условия выполнения равенств $x_*=x_b$, $y_*=y_b$.

После определения искомой точки h и построения характеристики hb выделяется характеристика первого семейства ah. Течение в области ahb определяется решением задачи Гурса для уравнений (1.20) и граничных условий на характеристиках ah и hb. Искомый контур ab представляет собой линию тока $d\psi=0$, проходящую через точку a и определяемую при помощи равенства (1.10).

Вместе с тем желательно убедиться в том, что характеристика hb, построенная на основе необходимых условий экстремума, удовлетворяет хотя бы каким-то необходимым условиям минимума. С этой целью в 3.3 и 3.4 будут выведены некоторые необходимые условия минимума.

Замечания. Если в качестве точки h выбрать точку на характеристике ae, то ей, вообще говоря, соответствует некоторая точка b_* и контур ab_*. Всем точкам характеристики ae соответствует в этом смысле некоторая кривая b_*b_*. Очевидно, что если заданная точка b лежит выше по течению от кривой b_*b_*, то решение без разрушения характеристики ae невозможно. Это и есть тот путь, который позволяет выявить тип решения задачи при $\lambda_3(1-\nu)=0$.

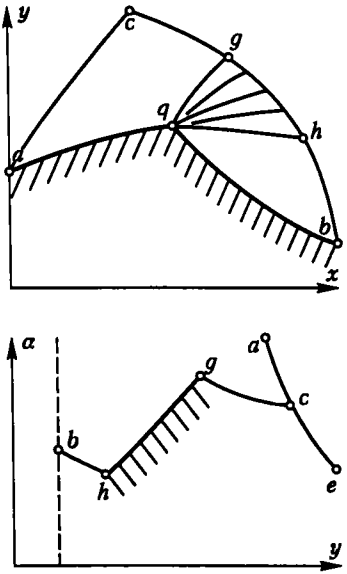


Рис. 3.10

Покажем, что образующая ab должна иметь излом в точке a. Для этого используем соображения о разрешимости задачи и будем помнить, что при наличии излома в точке a задача разрешима, то есть количество произволов в определении функций равно количеству условий. Предположим, что излом имеет место (рис. 3.10) в некоторой точке q контура ab. В этом случае отрезок gh характеристики второго семейства должен обеспечивать краевой экстремум, а отрезки cg и hb — двусторонний экстремум. Неопределенность положения точки g дает задаче один дополнительный произвол.

На участке bh имеем $\lambda_5(y) \equiv 0$. В точке h величина $\lambda_5(y_h) = 0$, а величина λ_2 имеет некоторое значение $\lambda_2(y_h)$. На отрезке hg функции $\lambda_2(y)$ и $\lambda_5(y)$ подчиняются дифференциальным уравнениям (2.30) и (2.29) при $\lambda_3(1-\nu) = 0$. Тем самым величины α_g, ϑ_g, $\lambda_2(y_g)$ и $\lambda_5(y_g)$ определены и зависят только от y_g. Точка g принадлежит экстремали gc, то есть в ней должны выполняться, в частности, равенства (2.28) и (2.34). Эти равенства связывают величины y_g, α_g, ϑ_g, $\lambda_2(y_g)$, $\lambda_5(y_g)$. Один произвол, который может рассматриваться как свобода в выборе y_g, вообще говоря, не позволяет удовлетворить уравнениям (2.28) и (2.34). Следовательно, предположение о том, что точка излома контура ab не совпадает с точкой a, приводит к неразрешимости задачи.

Порядок расчета при $\nu = 0$. Так же, как и в предыдущем случае строится течение в области ead (рис. 3.9).

Система уравнений (2.36), (2.37), (2.30), (2.11), определяющая на экстремали функции $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\lambda_2(y)$, $\psi(y)$, при $\nu = 0$ и $\lambda_5(y) \equiv 0$ имеет вид

$$z(\alpha)w(\alpha)\varphi^k\left[\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} + \lambda_3\left(\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right)\right] = \lambda_4, \qquad (2.44)$$

$$\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\left[\lambda_3\sin(\vartheta+\alpha) - \cos(\vartheta+\alpha)\right] = \lambda_2(y), \qquad (2.45)$$

$$K\frac{d\lambda_2}{dy} = -\frac{\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)}{\varkappa - 1}\,\frac{d\ln\varphi}{d\psi}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin(\vartheta-\alpha)} \times$$

$$\times \left\{ \left[\sin\vartheta - \frac{1}{\varkappa} \cos\alpha \sin(\vartheta - \alpha) \right] + \right.$$

$$\left. + \lambda_3 \left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa} \cos\alpha \cos(\vartheta - \alpha) \right] \right\}, \tag{2.46}$$

$$K \frac{d\psi}{dy} = - \frac{\varphi^k z(\alpha)}{\sin(\vartheta - \alpha)}. \tag{2.47}$$

Уравнение (2.46) получено исключением величины λ_2 из уравнений (2.30) и (2.45).

Выберем (вначале произвольно) некоторую точку h в области ead и некоторое значение λ_3. Равенства (2.44), (2.45) позволяют вычислить λ_4 и $\lambda_2(y_h)$ по известным величинам α_h, ϑ_h, ψ_h. Система уравнений (2.44)–(2.47) с начальными данными $\alpha(y_h) = \alpha_h$, $\delta(y_h) = \vartheta_h$, $\lambda_2(y_h)$, $\psi(y_h) = \psi_h$ интегрируется от $y = y_h$ до такого $y = y_*$, при котором $\psi(y_*) = \psi_a$. Формулы (2.8) и (2.9) позволяют вычислить значения ζ и X, если в качестве величины y_b взять y_*. В результате такого расчета величины y_*, ζ, X отличаются от заданных.

Две координаты точки h и величина λ_3 должны быть выбраны так, чтобы выполнялось равенство $y_* = y_b$, а величины ζ и X равнялись заданным.

Область существования решений без разрушения характеристики ae определяется здесь в зависимости от заданной величины ζ.

Необходимость излома контура ab в точке a показывается аналогично тому, как это было сделано при $\lambda_3(1 - \nu) = 0$.

Особый случай $\nu = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $d\varphi = 0$. Система уравнений (2.44)–(2.47) вырождается в изэнтропическом случае, когда $\varphi = \text{const}$. В этом случае из уравнения (2.46) следует, что $\lambda_2 = \text{const}$. Уравнения (2.44) и (2.45) помимо величин $\alpha(y)$ и $\vartheta(y)$ содержат только постоянные величины φ, λ_2, λ_3, λ_4. Следовательно, на экстремали hb величины α и ϑ постоянны. Интегрируя (2.47) на интервале bh и используя (2.12), получаем

$$\psi_h - \psi_a = \frac{\varphi^k z(\alpha)}{K \sin(\vartheta - \alpha)} (y_b - y_h),$$

где величина ψ_h определяется интегрированием (1.10) по любой кривой ah, например, по характеристике ah. Количество произволов в задаче по-прежнему равно количеству условий при определении функций. Однако, никаким выбором величины λ_3 нельзя, вообще говоря, при условии непрерывности функций добиться получения заданной величины ζ. Это следует из того, что в рассматриваемом особом случае три величины λ_2, λ_3, λ_4 связаны только двумя уравнениями (2.44) и (2.45).

Произвольное задание одной из этих величин не меняет величин α и ϑ на экстремали. Только при некоторых частных соотношениях исходных данных решение имеет ранее рассмотренный вид (рис. 3.9).

Задача оказывается разрешимой, если искомые функции имеют разрыв в точке h. Этот разрыв должен принадлежать классу P^2, поскольку рассматриваются течения без ударных волн в треугольнике abc. Решение этой задачи будет получено в 3.4.3.

Свойства решений. Вспомним, что необходимыми условиями экстремума при непрерывном решении задачи 1 являются уравнения (2.11), (2.15), (2.28)–(2.30), определяющие функции $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\lambda_2(y)$, $\lambda_5(y)$, $\psi(y)$, и граничные условия (2.12), (2.18), (2.24), (2.34). После проведенного интегрирования необходимые условия экстремума сводятся к уравнениям (2.30), (2.35)–(2.37), (2.43) и граничным условиям (2.12), (2.18).

Пусть найдено решение некоторой задачи (рис. 3.9). Выберем произвольную характеристику первого семейства qt и линию тока ij, лежащие в треугольнике abh. Будем считать характеристику it и точку j, лежащую на характеристике bh, заданными. На характеристике второго семейства jt выполняются все необходимые условия экстремума. Действительно, на jt выполняются уравнения (2.11), (2.15), (2.28)–(2.30), поскольку jt есть часть характеристики bh, в точке t, как отмечалось в 3.2.4, выполняется условие (2.34), а в точке j — условие (2.24). Выполнены и прочие условия, поскольку треугольник ijt является частью треугольника abh, в котором построено течение. Следовательно, если величины ζ, X, y_j, x_i, y_i для отрезка линии тока ij считать заданными вместе с характеристикой it, то контур ij обладает минимальным волновым сопротивлением.

При $\lambda_3(1-\nu)=0$ из (2.36) следует, что $\lambda_4 > 0$, если на всей экстремали $\vartheta \neq 0$, $\alpha \neq \pi/2$. При этих условиях величина ϑ не меняет знак на экстремали. Если $\vartheta = 0$ в одной точке, то $\vartheta \equiv 0$ на всей экстремали. Этот случай имеет место, например, тогда, когда величина X не задается. При решении такой задачи необходимо положить величину λ_4 равной нулю. Тогда из (2.40) находим, что $\vartheta \equiv 0$ на экстремали. Это приводит к важному частному выводу: в плоской задаче без ограничения на подъемную силу ζ и длину X проекции искомого контура на ось x, а также в осесимметричном случае без ограничения на X угол наклона скорости к оси x на экстремали равен нулю.

3.2.6. Изэнтропические течения. Поля экстремалей

В предыдущем подразделе уже было установлено, что в плоских изэнтропических течениях величины α и ϑ постоянны на экстремалях, то есть в плоскости α, ϑ экстремали изображаются точками. Из (1.17)

следует, что в этом случае экстремальный участок характеристики в плоскости x, y прямолинеен. Уравнение (2.47) интегрируется и дает линейную зависимость ψ от y.

Осесимметричные течения. При $\varphi = \text{const}$ из уравнения (2.42) находим, что $\lambda_2 = \text{const}$. Уравнения (2.40), (2.41) содержат независимую переменную y и функции α и ϑ. Разрешая (2.40) и (2.41) относительно y и ϑ, получаем

$$y\frac{z(\alpha)}{w(\alpha)}\Big[w^2(\alpha) - \lambda_2^2\cos\alpha\cos 2\alpha + \\ + \operatorname{sgn}(\vartheta_h + \alpha_h)\lambda_2 \sin 2\alpha\sqrt{w^2(\alpha) - \lambda_2^2\cos^2\alpha}\Big] = \lambda_4, \qquad (2.48)$$

$$\vartheta = \operatorname{sgn}\vartheta_h\left|\arcsin\Big[\Big(\frac{\lambda_4\cos\alpha}{y}\Big)^{1/2}\Big(\frac{\varkappa - \cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\Big)^{\frac{1}{4}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))} \times \right. \\ \left. \times\Big(\frac{\varkappa - \cos 2\alpha}{\varkappa+1}\Big)^{1/4}\Big]\right|. \qquad (2.49)$$

Приведенные равенства позволяют построить зависимости $\alpha(y/\lambda_4,$

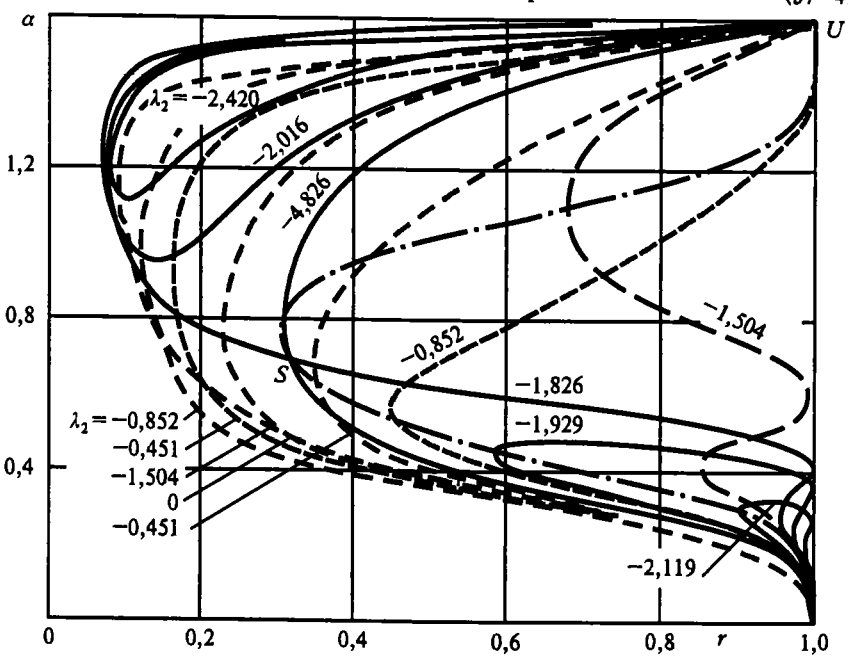


Рис. 3.11

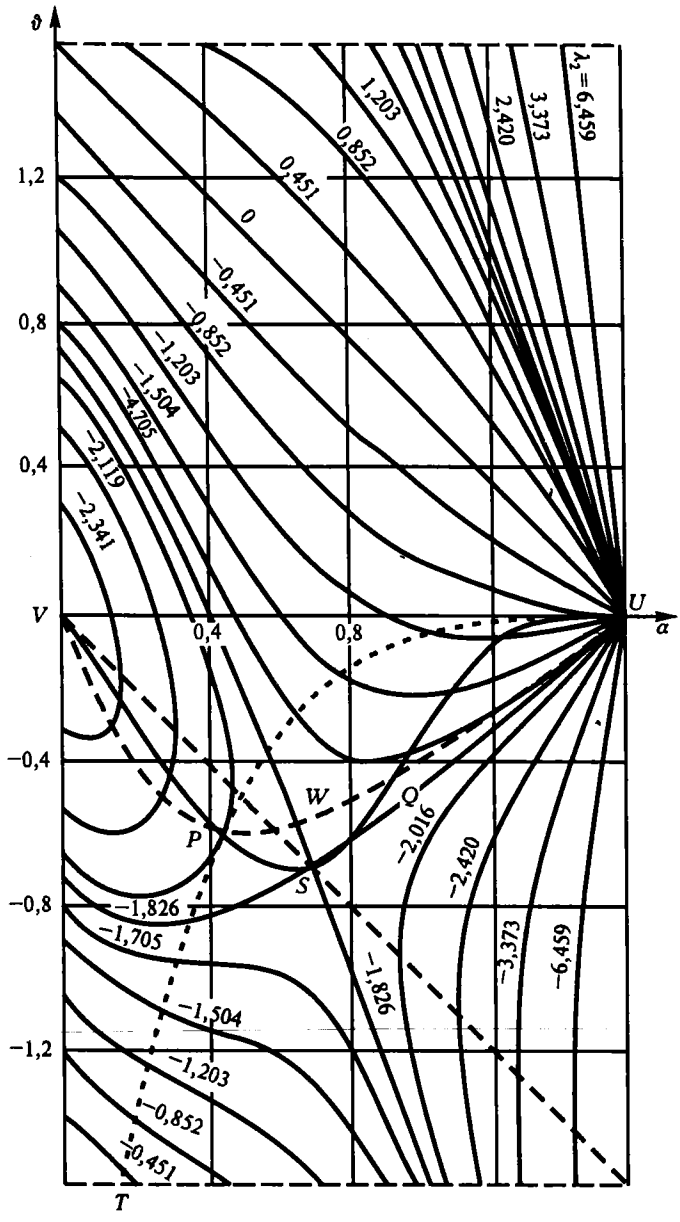

ϑ
1,2
0,8
0,4
V
−0,4
−0,8
−1,2
T
0,4
0,8
U
α
λ2 = 6,459
3,373
2,420
1,203
0,852
0,451
0
−0,451
−0,852
−1,203
−1,504
−1,705
−2,119
−2,341
W
Q
P
S
−2,016
−2,420
−3,373
−6,459
−1,826
−1,826
−1,705
−1,504
−1,203
−0,852
−0,451

Рис. 3.12

λ_2) и $\vartheta(\alpha, \lambda_2)$. Для большей наглядности первой из этих зависимостей удобно ввести параметр r по формуле

$$r = \frac{y}{10\lambda_4 + y}. \tag{2.50}$$

На рис. 3.11 приведены кривые $\alpha(r)$ при различных значениях λ_2 в случае $\varkappa = 1{,}4$. Зависимость $\vartheta(\alpha, \lambda_2)$ при $\varkappa = 1{,}4$ дана на рис. 3.12. Экстремали в плоскости годографа скоростей при том же значении $\varkappa$ изображены на рис. 3.13. Внутренняя окружность на рис. 3.13 представляет звуковую линию $w = 1$, внешняя — линию максимальной скорости $w = \sqrt{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}$. Угол ϑ равен нулю на горизонтали VU.

Анализ зависимости (2.41) показывает, что особыми точками в плоскости α, ϑ являются точки U с координатами $\alpha = \pi/2$, $\vartheta = n\pi$, точки S с координатами $\alpha = \arcsin(\sqrt{3-\varkappa}/2)$, $\vartheta = n\pi - \arcsin(\sqrt{3-\varkappa}/2)$ и точки V с координатами $\alpha = 0$, $\vartheta = n\pi$, где n — целое число.

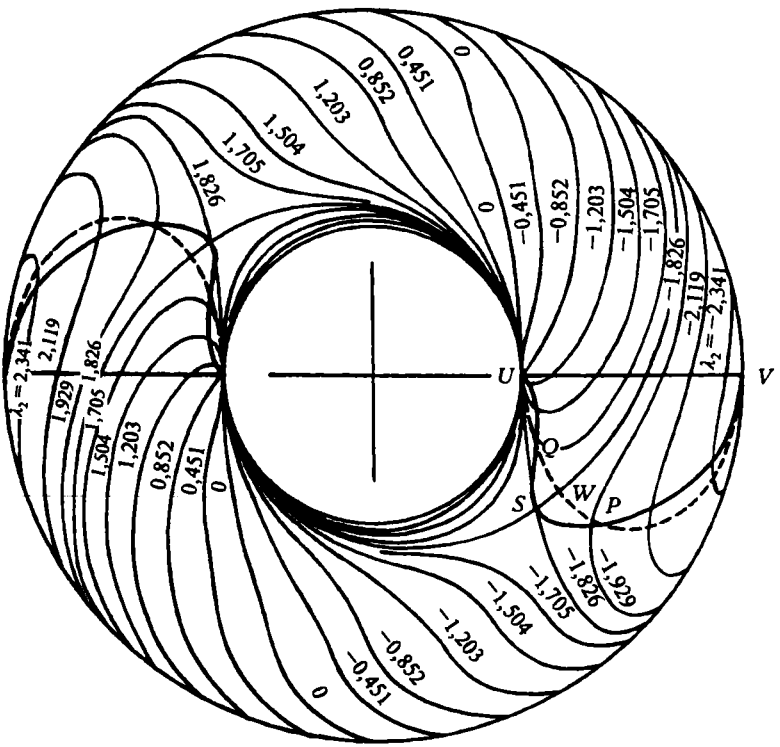


Рис. 3.13

Точки U являются узлами, точки S — седлами, а точки V — центрами. Через каждую точку S, например, при $n = 0$, проходят две экстремали с $\lambda_2 = \lambda_2^*$, причем, $\lambda_2^* = -\sqrt{8/(\varkappa+1)}$. Величина λ_2^* представляет собой наименьшее значение λ_2, при котором радикал в формуле (2.48) действителен на всем интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

Одной из экстремальных характеристик в плоскости α, ϑ является прямая $\alpha = \pi/2$. В работе [34] выяснено, что поверхность перехода через скорость звука, опирающаяся на некоторый контур и являющаяся одновременно характеристической поверхностью, обладает минимальной площадью среди всех поверхностей, опирающихся на тот же контур. В осесимметричном случае такими поверхностями могут быть либо плоскости перпендикулярные к оси симметрии, либо поверхности, образующие которых являются цепными линиями. Во втором случае угол ϑ меняется на характеристике. Следовательно, упомянутая экстремаль в плоскости x, y должна быть цепной линией. Однако, трудно ожидать, чтобы в окрестности всякой характеристической поверхности, на которой $\alpha = \pi/2$, существовало решение задачи Коши или некоторой краевой задачи. Этот вопрос представляет собой предмет самостоятельного исследования. Здесь можно указать, что в осесимметричном изэнтропическом случае, когда газ является совершенным, такое решение не существует.

Экстремали в плоскости r, α при $\lambda_2 < \lambda_2^*$ имеют петлеобразный вид. При $\lambda_2 > \lambda_2^*$ экстремали соединяют точки $r = 1$, $\alpha = 0$ и $r = 1$, $\alpha = \pi/2$. Соответствие областей в плоскостях (r, α), (α, ϑ) и в плоскости годографа скоростей легко проследить по значениям λ_2, приведенным на рис. 3.11–3.13.

. В этом разделе рассмотрены такие течения, которые не содержат ударных волн в области, ограниченной контрольным контуром abc. Выведены необходимые условия экстремума. Построены схемы, при которых вариационная задача разрешима.

Требование безударности течения $\varphi(\psi) = \varphi_0(\psi)$ во многих случаях не является необходимым и может быть снято. Устранение ограничения, вообще говоря, может «улучшить» решение задачи, то есть в задаче на минимум может снизить возможный минимум. В задаче об оптимальной форме контура тела переход от требования $\varphi(\psi) = \varphi_0(\psi)$ к более слабому ограничению $\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi)$ дает надежду на отыскание тел с меньшим волновым сопротивлением. Если решение приведет к неравенству $\varphi(\psi) > \varphi_0(\psi)$ хотя бы на части характеристики bc, то это будет означать, что в треугольнике abc появляются ударные волны.

3.3. Вариационные задачи при допущении возрастания энтропии

3.3.1. Вариационная задача

Формулировка задачи 2, допускающей ударные волны в области влияния, дана в 3.2.2. Одно из отличий задачи 1 от задачи 2 заключается в том, что вторая из них содержит две свободные функции $\alpha(y)$ и $\varphi(y)$.

Отбросим вначале ограничение (2.19). Снова используем метод множителей Лагранжа и составим сумму

$$I^\circ = \int_{Y=y_a}^{y_c} F^\circ(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY + \int_{y=y_b}^{y_c} \Phi^\circ(y, \alpha, \beta, \beta'\varphi, \varphi', \mu_5)\, dy, \qquad (3.1)$$

где

$$F^\circ = \bar{\mu}_1 F_1 + \bar{\mu}_2 F_2 + \bar{\mu}_3(1-\nu)F_3 + \mu_4 F_4,$$
$$\Phi_\circ = \bar{\mu}_1 \Phi_1 + \bar{\mu}_2 \Phi_2 + \bar{\mu}_3(1-\nu)\Phi_3 + \mu_4 \Phi_4 + \mu_5(y)\bar{\Phi}_5,$$
$$\bar{\mu}_1 = K, \quad \bar{\mu}_2 = K\mu_2, \quad \bar{\mu}_3 = K\mu_3.$$

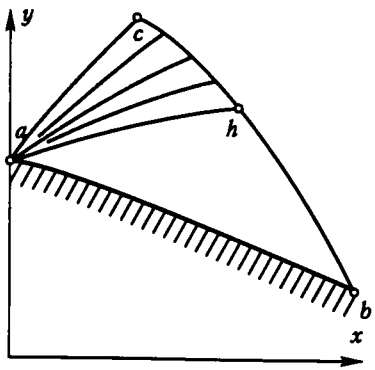


Рис. 3.14

Здесь величины μ_2, μ_3, μ_4 являются постоянными, а $\mu_5(y)$ — переменным множителем Лагранжа.

Вариационная задача, связанная с функционалом (3.1), снова является вырожденной. Попытка отыскания двустороннего экстремума опять приводит к неразрешимости задачи. Поэтому решение будем отыскивать (рис. 3.14) в виде аналогичном рассмотренному в 3.2.4. Функционал I° перепишем в виде

$$I^\circ = \int_{Y=y_a}^{y_c} F^\circ\, dY + \int_{y=y_h}^{y_c} \Phi^\circ\, dy + \int_{y=y_b}^{y_h} \Phi^\circ\, dy \qquad (3.2)$$

и будем иметь в виду равенство

$$\int_{Y=y_a}^{y_c} F^\circ\, dY + \int_{y=y_h}^{y_c} \Phi^\circ\, dy = \int_{Y=y_a}^{y_h} F^\circ\, dY, \qquad (3.3)$$

которое следует из уравнений (1.2)–(1.4), (1.15)–(1.18).

При вычислении первой вариации функционала I° необходимо учесть следующее. Сумма первых двух членов в (3.2), как это следует из (3.3), является функцией от координат x_h и y_h точки h. Величина y_b задана, и вариация от нее равна нулю. Вычисления дают

$$\delta I^\circ = \left[F^\circ + \Phi^\circ\right]_{y=y_h} \delta y_{h1} + \int\limits_{y=y_b}^{y_h} \left(\Phi^\circ_\alpha \delta\alpha + \Phi^\circ_\beta \delta\beta + \Phi^\circ_{\beta'} \delta\beta' + \Phi^\circ_\varphi \delta\varphi + \Phi^\circ_{\varphi'} \delta\varphi'\right) dy.$$

Интегрируя по частям члены с $\delta\beta'$ и $\delta\varphi'$ и учитывая равенства (2.11), (2.13), (2.16), получаем

$$\delta I^\circ = \left\{F^\circ + \Phi^\circ + \mu_5\left[\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dy}\right)_2\right] + \frac{\mu_5 \sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa+1)\varphi} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2\right]\right\}_{y=y_h} \delta y_{h1} - \mu_5(y_b)\left[\delta\beta + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\delta\varphi\right]_{y=y_b} +$$

$$+ \int\limits_{y=y_b}^{y_h} \left[\Phi^\circ_\alpha \delta\alpha + \left(\Phi^\circ_\beta - \frac{d}{dy}\Phi^\circ_{\beta'}\right)\delta\beta + \left(\Phi^\circ_\varphi - \frac{d}{dy}\Phi^\circ_{\varphi'}\right) d\varphi\right] dy. \qquad (3.4)$$

Пусть функция $\mu_5(y)$ на характеристике bc подчиняется уравнению

$$\Phi^\circ_\beta - \frac{d}{dy}\Phi^\circ_{\beta'} = 0, \qquad (3.5)$$

а в точке b — граничному условию

$$\mu_5(y_b) = 0. \qquad (3.6)$$

Необходимым условием экстремума, как это следует из (3.4), является условие трансверсальности

$$\left[F^\circ + \Phi^\circ + \mu_5 L_1\right]_{y=y_h} = 0, \qquad (3.7)$$

причем конкретный вид величины L_1 для дальнейшего несущественен.

При выполнении равенств (3.5)–(3.7) и изопериметрических условий задачи вариация $\delta\chi$ имеет вид

$$\delta\chi = \int\limits_{y=y_b}^{y_h} \left[\Phi^\circ_\alpha \delta\alpha + \left(\Phi^\circ_\varphi - \frac{d}{dy}\Phi^\circ_{\varphi'}\right)\delta\varphi\right] dy. \qquad (3.8)$$

Для получения двустороннего экстремума на характеристике bh необходимо приравнять нулю множители при $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$ в (3.8). Это дает уравнения Эйлера

$$\Phi^\circ_\alpha = 0, \tag{3.9}$$

$$\Phi^\circ_\varphi - \frac{d}{dy}\Phi^\circ_{\varphi'} = 0. \tag{3.10}$$

Выпишем входящие в (3.5), (3.9), (3.10) выражения:

$$\Phi^\circ_{\beta'} \equiv \mu_5(y), \quad \Phi^\circ_{\varphi'} \equiv \frac{\mu_5(y)\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi},$$

$$\begin{aligned}
\Phi^\circ_\alpha \equiv{}& \frac{1}{(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta-\alpha)}\left\{\frac{z(\alpha)w(\alpha)}{2\sin\alpha}\left[(\varkappa+1)\sin 2\vartheta - \right.\right.\\
&- 2(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\left.\right] y^\nu\varphi^k -\\
&- \mu_2 z(\alpha)\left[(1-\varkappa+2\cos 2\alpha)\cos(\vartheta-\alpha) - (\varkappa+1)\operatorname{ctg}\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] y^\nu\varphi^k -\\
&- \mu_3(1-\nu)\frac{(\varkappa+1)z(\alpha)w(\alpha)}{2\varkappa\sin\alpha}(\varkappa-1-\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha -\\
&- \varkappa\cos 2\vartheta)\, y^\nu\varphi^k + \mu_4(1-\varkappa+2\cos 2\alpha) +\\
&+ \mu_5(y)\frac{\nu}{2y}\left[\sin^2 2\alpha - (\varkappa-\cos 2\alpha)(1-\cos 2\vartheta)\right] +\\
&\left.+ \mu_5(y)\frac{(\varkappa-\cos 2\alpha)\cos 2\alpha\sin^2(\vartheta-\alpha)}{\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\frac{d\varphi}{dy}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^\circ_\beta \equiv{}& -\frac{1}{\sin^2(\vartheta-\alpha)}\left\{z(\alpha)\left[w(\alpha)\cos\alpha + \mu_2\cos(\vartheta-\alpha) - \right.\right.\\
&\left.\left.- \mu_3(1-\nu)\frac{\varkappa+1}{\varkappa}w(\alpha)\sin\alpha\right] y^\nu\varphi^k - \mu_4 - \mu_5(y)\frac{\nu\sin^2\alpha}{y}\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^\circ_\varphi \equiv{}& -\frac{y^\nu\varphi^{k-1}}{\varkappa-1}\left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] +\right.\\
&+ \mu_2\frac{z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \mu_3(1-\nu)z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} +\right.\\
&\left.\left.+ \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{\varkappa}\right]\right\} - \mu_5(y)\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi^2}\frac{d\varphi}{dy}.
\end{aligned}$$

Условие трансверсальности (3.7) в случае непрерывности функций α, ϑ, φ в точке h в развернутой форме имеет вид

$$\frac{2y^\nu\varphi^k z(\alpha)\sin\vartheta\cos\alpha}{\sin(\vartheta+\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)}\left\{w(\alpha)\cos\vartheta + \mu_2 - \mu_3(1-\nu)w(\alpha)\times\right.$$

$$\times \left[\sin\vartheta + \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{2\varkappa \sin\vartheta\cos\alpha}\right]\Bigg\} - \mu_4 \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\vartheta+\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)} + \mu_5 L_1 = 0, \quad (3.11)$$

где все величины берутся при $y = y_h$.

Построение характеристики bh сводится теперь к определению координат точки h в области cah и решению уравнений (2.16), (3.5), (3.9), (3.10), определяющих функции $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\varphi(y)$, $\mu_5(y)$. Граничными условиями являются равенства вида (2.18), записанные для $y = y_h$, и равенства (3.6), (3.11). Величины μ_2, μ_3, μ_4 определяются из условия выполнения равенств (2.7)–(2.9).

Интегралы этой задачи находятся тем же путем, что и в 3.2.4. Равенство (3.11) является одним из этих интегралов. Кроме того,

$$\mu_5(y) \equiv 0. \quad (3.12)$$

Вместо уравнений (2.16), (3.5), (3.9), (3.10) теперь можно записать более простую систему. Первое и второе уравнения получаются исключением, соответственно, величин μ_2 и μ_4 из уравнений (3.5) и (3.11) с учетом (3.12), а третье — из (3.10) с учетом того же равенства (3.12):

$$z(\alpha)w(\alpha)y^{\nu}\varphi^{k}\left[\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} + \mu_3(1-\nu)\left(\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right)\right] = \mu_4, \quad (3.13)$$

$$\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\left[\mu_3(1-\nu)\sin(\vartheta+\alpha) - \cos(\vartheta+\alpha)\right] = \mu_2, \quad (3.14)$$

$$w(\alpha)\Bigg\{\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] - \mu_3(1-\nu)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right]\Bigg\} = -\mu_2. \quad (3.15)$$

При получении решения (3.12)–(3.15) было сделано допущение, что функции α, ϑ, φ непрерывны в точке h. Покажем, что это допущение несущественно. Пусть (рис. 3.15) в точку h приходит ударная волна qh. Тогда в ту же точку приходит и некоторая характеристика первого семейства kh, лежащая ниже по течению от ударной волны. В этом случае отрезок kb контура ab должен обладать минимальным сопротивлением, а в точке h должно выполняться условие (3.11), записанное для величин y_h, φ_{hb},

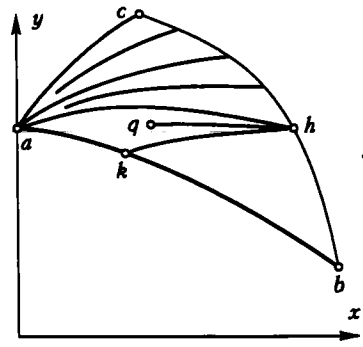


Рис. 3.15

α_{hb}, ϑ_{hb}. Индекс hb здесь означает, что величины берутся в точке h при стремлении к h со стороны точки b. Следовательно, и в этом случае справедливы равенства (3.12)–(3.15). Аналогичные рассуждения справедливы и при изэнтропическом разрыве в точке h.

Замечательно следующее обстоятельство. Равенства (3.14) и (3.15) помимо величин $\alpha(y)$ и $\vartheta(y)$ содержат только постоянные величины μ_2 и μ_3. Следовательно, при допущении ударных волн в области влияния величины α и ϑ постоянны на экстремали там, где это не ведет к нарушению условия $\varphi(\psi) > \varphi_0(\psi)$. Из (3.13) видно, что в плоском случае ($\nu = 0$) величина φ также постоянна, а в осесимметричном случае ($\nu = 1$) величина φ увеличивается вместе с y, поскольку $y\varphi^k = \text{const}$ и при $\varkappa > 1$ величина k отрицательна. Обратимся к выявлению области решений без ударных волн.

3.3.2. Область безударных решений

Выясним, не являются ли решения без ударных волн в некоторой области изменения переменных наилучшими в той смысле, что допустимыми изменениями энтропии на экстремали нельзя уменьшить сопротивление.

Исключим из равенств (3.14) и (3.15) величину μ_2. Тогда получим

$$\vartheta = G(\alpha, \mu_3, n), \tag{3.16}$$

$$G(\alpha, \mu_3, n) \equiv -\operatorname{arctg} \frac{\sin 2\alpha - \mu_3(1-\nu)(2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha)}{2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha - \mu_3(1-\nu)\sin 2\alpha} + n\pi, \tag{3.17}$$

где n — целое число. Для наглядности на рис. 3.16 приведен пример кривых $\vartheta = G(\alpha, 0, 0)$ при различных значениях $\varkappa$.

Полоса $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ в плоскости α, ϑ разбивается на ряд областей кривыми (3.16) при фиксированном значении μ_3 и различных n.

Преобразуем выражение для вариации величины χ. Длина дуги l характеристики второго семейства связана с y формулой

$$dy = \sin(\vartheta - \alpha)\, dl, \tag{3.18}$$

если l возрастает при движении вдоль характеристики вниз по потоку. Пусть l в точке h равно нулю. Связь (3.18) и равенство (3.12) позволяют записать формулу (3.8) в виде

$$\delta\chi = -\int_{l=0}^{l_h} \left[\Phi^\circ_\alpha \sin(\vartheta - \alpha)\delta\alpha + \Phi^\circ_\varphi \sin(\vartheta - \alpha)\delta\varphi\right] dl. \tag{3.19}$$

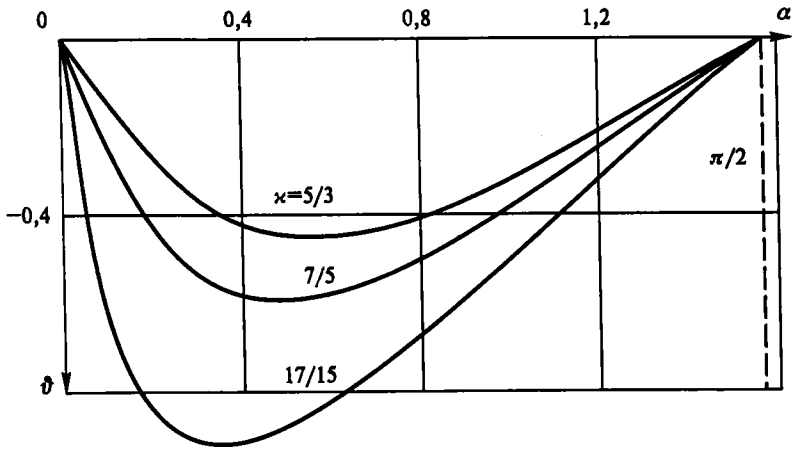


Рис. 3.16

Пусть теперь необходимо решить задачу 2 с некоторыми исходными данными. Вместо решения задачи 2 для анализа решим задачу 1 с теми же исходными данными. Допустим, что найденные таким образам функции $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$ на характеристике bh принадлежат в плоскости α, ϑ области

$$G(\alpha, \mu_3, 0) < \vartheta < G(\alpha, \mu_3, 1), \quad 0 < \alpha < \pi/2. \tag{3.20}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае величина $\Phi_\varphi^\circ \sin(\vartheta - \alpha) < 0$. Подставим в выражение для Φ_φ° величины μ_2 из (3.14) и μ_5 из (3.12). Получим

$$\Phi_\varphi^\circ \sin(\vartheta - \alpha) = -\frac{N^\circ y^\nu \varphi^{k-1}}{2\varkappa(\varkappa - 1)} z(\alpha) w(\alpha) \operatorname{tg}\alpha \sin\left[\vartheta - G(\alpha, \mu_3, 0)\right], \tag{3.21}$$

где

$$N^\circ = \Big\{\left[\sin 2\alpha - \mu_3(1-\nu)(2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha)\right]^2 + \\ + \left[2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha - \mu_3(1-\nu)\sin 2\alpha\right]^2\Big\}^{1/2}.$$

Из равенства (3.17) следует, что $G(\alpha, \mu_3, 1) = G(\alpha, \mu_3, 0) + \pi$. Вспоминая условия (3.20), заключаем из (3.21), что в самом деле $\Phi_\varphi^\circ \sin(\vartheta - \alpha) < 0$.

Из равенства (3.19) вытекает, что при $\Phi_\varphi^\circ \sin(\vartheta - \alpha) < 0$ отрицательная величина $\delta\varphi$ ведет к уменьшению χ. Решение задачи 1 включает условие сохранения энтропии вдоль линий тока, поэтому неравенство $\delta\varphi < 0$ по отношению к решению задачи 1 эквивалентно требованию $\varphi(\psi) < \varphi_0(\psi)$, которое противоречит второму началу термодинамики. Допустимой является лишь вариация $\delta\varphi > 0$, которая увеличивает сопротивление χ.

Если решение задачи 1 использовать для вычисления Φ_α°, то выясняется следующее. При $\varphi_0 = \text{const}$ величина λ_2 постоянна, а уравнения (2.36), (2.37), с одной стороны, и уравнения (3.13) (3.14), с другой стороны, совпадают при $\lambda_2 = \mu_2$, $\lambda_3 = \mu_3$, $\lambda_4 = \mu_4$, $\varphi = \varphi_0$. Отсюда следует, что $\Phi_\alpha^\circ = 0$. Если величина $\varphi_0(\psi)$ переменна, то, вообще говоря, $\Phi_\alpha^\circ \neq 0$. Функция Φ_α° входит в первый член подынтегрального выражения (3.19). Однако, следует помнить, что вариация функционала $I_\circ$ по α вычислялась без учета ограничения $\varphi_0(\psi) \leqslant \varphi(\psi)$. В решении задачи 1 используется связь $\varphi_0(\psi) = \varphi(\psi)$, и изменение функции $\alpha(y)$, полученной при решении задачи 1, увеличивает χ.

Таким образом, приходим к следующему выводу. Если характеристика bh, полученная при решении задачи 1, целиком лежит в области (3.20), то решение задачи 1 одновременно является решением задачи 2 при тех же исходных данных. Область (3.20) может быть названа областью безударных решений. Этот результат будет получен еще раз иным путем в следующем подразделе.

3.3.3. Другой вид вариационных задач

До сих пор рассматривались вариационные задачи с независимой переменной y. Введем в качестве независимой переменной ψ, сформулируем вариационную задачу, найдем необходимые условия экстремума, а затем сравним оба вида решений.

Используем равенства (2.4) и (2.5), связывающие величины x, y и ψ, соответственно, на характеристиках первого и второго семейства. Подставим в них выражения (1.13), (1.14) для величин ρ и w. Получим для характеристик первого семейства

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k} \cos(\vartheta + \alpha), \quad \frac{dy}{d\psi} = \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k} \sin(\vartheta + \alpha), \tag{3.22}$$

для характеристик второго семейства

$$\frac{dx}{d\psi} = -\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k} \cos(\vartheta - \alpha), \quad \frac{dy}{d\psi} = -\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k} \sin(\vartheta - \alpha), \tag{3.23}$$

где

$$q(\alpha) = \frac{1}{Z(\alpha)} = \left(\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{\varkappa - \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))}.$$

Формулы (2.6), (2.8) после преобразования к независимой переменной ψ принимают вид

$$\tilde{\chi} = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} [U_1(A,\Theta) + V_1(\alpha,\vartheta)]\, d\psi, \tag{3.24}$$

$$(1-\nu)\zeta = (1-\nu)\int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} [U_2(A,\Theta) + V_2(\alpha,\vartheta)]\, d\psi, \tag{3.25}$$

где

$$U_1 \equiv w(A)\Big[\cos\Theta + \frac{1}{\varkappa}\sin A\sin(\Theta + A)\Big],$$

$$U_2 \equiv -w(A)\Big[\sin\Theta - \frac{1}{\varkappa}\sin A\cos(\Theta - A)\Big],$$

$$V_1 \equiv -w(\alpha)\Big[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta - \alpha)\Big],$$

$$V_2 \equiv w(\alpha)\Big[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta - \alpha)\Big].$$

Интегрируя равенства (3.22), (3.23) по характеристикам ac и cb или перехода к независимой переменной ψ в (2.9), получаем

$$X = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} [U_3(Y,A,\Theta,\varphi_0) + V_3(y,\alpha,\vartheta,\varphi)]\, d\psi, \tag{3.26}$$

где

$$U_3 \equiv \frac{q(A)}{\sqrt{\varkappa}Y^\nu\varphi_0^k}\cos(\Theta + A), \quad V_3 \equiv \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}\,y^\nu\varphi^k}\cos(\vartheta - \alpha).$$

Введем обозначения

$$U_4 \equiv \frac{q(A)}{\sqrt{\varkappa}Y^\nu\varphi_0^k}\sin(\Theta + A), \quad V_4 \equiv \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^\nu\varphi^k}\sin(\vartheta - \alpha).$$

Из (3.23) получаем

$$\bar{V}_4 \equiv \frac{dy}{d\psi} + V_4 = 0. \tag{3.27}$$

Условие (1.18) принимает вид

$$V_5 \equiv \frac{d\beta}{d\psi} + \frac{\nu q(\alpha)\sin\vartheta\sin\alpha}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu+1}\varphi^k} + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi} = 0. \tag{3.28}$$

Величина y_c легко определяется из (3.22):

$$y_c = y_a + \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} U_4(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, d\psi. \tag{3.29}$$

Величины $Y(\psi)$, $A(\psi)$, $\Theta(\psi)$, $\varphi_0(\psi)$ представляют собой, как и раньше, соответственно, $y(\psi)$, $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\varphi(\psi)$ на характеристике ac.

Граничное условие для y в точке b, если величина y_b задана, можно записать в виде

$$y(\psi_a) = y_b. \tag{3.30}$$

Условие непрерывности функций α, ϑ в точке c, если таковая имеет место, выражается равенствами

$$\alpha(\psi_c) = A(\psi_c), \quad \vartheta(\psi_c) = \Theta(\psi_c). \tag{3.31}$$

Сформулируем вариационные задачи 3 и 4, эквивалентные, соответственно, задачам 1 и 2.

Задача 3. Найти функцию $\alpha(\psi)$, принадлежащую классу D_2^2 и реализующую минимум функционала (3.24) при изопериметрических условиях (3.25), (3.26), дифференциальных связях (3.27), (3.28), при заданных функциях $Y(\psi)$, $A(\psi)$, $\Theta(\psi)$, $\varphi(\psi) = \varphi_0(\psi)$, заданных величинах y_a, y_b, X, ζ, граничных условиях (3.29), (3.30) и условиях (3.31) в случае непрерывности функций α, ϑ в точке c.

Задача 4. Найти функции $\alpha(\psi)$ и $\varphi(\psi)$, из которых $\alpha(\psi)$ принадлежит классу D_2^3, а $\varphi(\psi)$ кусочно непрерывна, реализующие минимум функционала (3.24) при изопериметрических условиях (3.25), (3.26), дифференциальных связях (3.27), (3.28), условии

$$\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi), \tag{3.32}$$

при заданных функциях $Y(\psi)$, $A(\psi)$, $\Theta(\psi)$, $\varphi_0(\psi)$, заданных величинах y_a, y_b, X, ζ, граничных условиях (3.29), (3.30) и условиях (3.31) в случае непрерывности функций α, ϑ в точке c.

Необходимые условия экстремума. Для решения задачи 4 составим сумму

$$J = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} (U + V)\, d\psi, \tag{3.33}$$

где

$$U = U_1 + \Lambda_2(1-\nu)U_2 + \Lambda_3 U_3,$$
$$V = V_1 + \Lambda_2(1-\nu)V_2 + \Lambda_3 V_3 + \Lambda_4(\psi)\bar{V}_4 + \Lambda_5(\psi)V_5,$$

Λ_2, Λ_3 — постоянные, $\Lambda_4(\psi)$, $\Lambda_5(\psi)$ — переменные множители Лагранжа.

Решение задач будем отыскивать в соответствии со схемой, изображенной на рис. 3.14. Функционал (3.33) перепишем в виде

$$J = \int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} U\,d\psi + \int\limits_{\psi=\psi_b}^{\psi_c} V\,d\psi + \int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_b} V\,d\psi. \tag{3.34}$$

Первая вариация δJ равна

$$\delta J = (\bar{U}+V)_{\psi=\psi_b}\delta\psi_{b1} + \int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_b} (V_\alpha\delta\alpha + V_\beta\delta\beta + V_{\beta'}\delta\beta' + V_y\delta y + V_{y'}\delta y' + V_\varphi\delta\varphi + V_{\varphi'}\delta\varphi')\,d\psi$$

или, после интегрирования по частям и использования (3.22) и (3.23),

$$\delta J = \left\{\bar{U}+V+\Lambda_5\left[\left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)_1 - \left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)_2\right] + \Lambda_4(\bar{U}_4+V_4)\right\}_{\psi=\psi_b}\delta\psi_{b1} -$$

$$-\Lambda_5(\psi_b)\left[\delta\beta + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\delta\varphi\right]_{\psi=\psi_b} + \int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_b}\left[V_\alpha\delta\alpha + \left(V_\beta - \frac{d}{d\psi}V_{\beta'}\right)\delta\beta + \right.$$

$$\left. + \left(V_y - \frac{d}{d\psi}V_{y'}\right)\delta y + \left(V_\varphi - \frac{d}{d\psi}V_{\varphi'}\right)\delta\varphi\right]d\psi. \tag{3.35}$$

Здесь величины $\bar{U}$ и $\bar{U}_4$ вычисляются по формулам для U и U_4 при Y, A, Θ, φ_0, равных, соответственно, величинам $y, \alpha, \vartheta, \varphi$ в точке h. Символ $\delta\psi_{h1}$ означает изменение величины ψ в точке h при движении точки h в направлении характеристики первого семейства ah.

Выберем множитель $\Lambda_5(\psi)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\Lambda_5(\psi_b) = 0, \tag{3.36}$$

$$\frac{d\Lambda_5}{d\psi} - V_\beta = 0, \tag{3.37}$$

а множитель $\Lambda_4(\psi)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{d\Lambda_4}{d\psi} - V_y = 0. \tag{3.38}$$

Приравняв нулю множитель при $\delta\psi_{h1}$ в (3.35), получим условие при $\psi = \psi_h$

$$\frac{w(\alpha)\sin 2\alpha}{\varkappa}\left[\sin\vartheta+\Lambda_2(1-\nu)\cos\vartheta\right]+$$
$$+\frac{2q(\alpha)\cos\alpha}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu}\varphi^{k}}(\Lambda_3\cos\vartheta+\Lambda_4\sin\vartheta)+\Lambda_5L_2=0. \qquad (3.39)$$

Здесь L_2 — некоторая несущественная для дальнейшего величина.

Если при варьировании выполняются изопериметрические условия, то величина $\delta\bar{\chi}$ равна δJ. Используя (3.35) и (3.36)–(3.39), получаем

$$\delta\bar{\chi}=\int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_b}\left[V_\alpha\delta\alpha+\left(V_\varphi-\frac{d}{d\psi}V_{\varphi'}\right)\delta\varphi\right]d\psi. \qquad (3.40)$$

В случае двустороннего экстремума $\delta\bar{\chi}=0$, и уравнения Эйлера имеют вид

$$V_\alpha=0, \qquad (3.41)$$

$$V_\varphi-\frac{d}{d\psi}\left[\Lambda_5\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\right]=0. \qquad (3.42)$$

Входящие в (3.37), (3.38), (3.41), (3.42) выражения имеют вид

$$V_\alpha\equiv\frac{w(\alpha)}{\varkappa(\varkappa-\cos 2\alpha)}\left[(\varkappa-1+2\varkappa\cos 2\alpha)\cos\alpha\sin(\vartheta-\alpha)+\right.$$
$$+(\varkappa+1)(1+2\cos 2\alpha)\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\left.\right]-$$
$$-\Lambda_2\frac{(1-\nu)w(\alpha)}{\varkappa(\varkappa-\cos 2\alpha)}\left[(\varkappa+1)(1+2\cos 2\alpha)\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)-\right.$$
$$-(\varkappa-1+2\varkappa\cos 2\alpha)\cos\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\left.\right]-$$
$$-\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-\cos 2\alpha)\,y^{\nu}\varphi^{k}}\left\{(\varkappa+1)\operatorname{ctg}\alpha\left[\Lambda_3\cos(\vartheta-\alpha)+\Lambda_4\sin(\vartheta-\alpha)\right]+\right.$$
$$+(1-\varkappa+2\cos 2\alpha)\left[\Lambda_3\sin(\vartheta-\alpha)-\Lambda_4\cos(\vartheta-\alpha)\right]\left.\right\}-$$
$$-\Lambda_5\left\{\frac{\nu q(\alpha)(1+\cos 2\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-\cos 2\alpha)\,y^{\nu+1}\varphi^{k}}-\frac{\cos 2\alpha}{\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\frac{d\varphi}{d\psi}\right\},$$
$$V_\beta\equiv w(\alpha)\left[\sin\vartheta+\frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right]+\Lambda_2(1-\nu)w(\alpha)\left[\cos\vartheta-\right.$$
$$-\left.\frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right]-\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu}\varphi^{k}}\left[\Lambda_3\sin(\vartheta-\alpha)-\Lambda_4\cos(\vartheta-\alpha)\right]+$$
$$+\Lambda_5\frac{\nu q(\alpha)\cos\vartheta\sin\alpha}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu+1}\varphi^{k}},$$

$$V_y \equiv -\frac{\nu q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^{\nu+1}\varphi^k}\left[\Lambda_3\cos(\vartheta-\alpha)+\Lambda_4\sin(\vartheta-\alpha)+\Lambda_5\frac{2\sin\vartheta\sin\alpha}{y}\right],$$

$$V_\varphi \equiv \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-1)\,y^\nu\varphi^{k+1}}\left[\Lambda_3\cos(\vartheta-\alpha)+\Lambda_4\sin(\vartheta-\alpha)+\right.$$
$$\left.+\Lambda_5\frac{\nu\sin\vartheta\sin\alpha}{y}\right]-\Lambda_5\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi^2}\frac{d\varphi}{d\psi}.$$

Решение задачи сводится к отысканию точки h в области cah и решению уравнений (3.27), (3.28), (3.37), (3.38), (3.41), (3.42), определяющих функции $y(\psi)$, $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\varphi(\psi)$, $\Lambda_4(\psi)$, $\Lambda_5(\psi)$. Граничными условиями являются равенства (3.29)–(3.31), (3.36). Величины Λ_2, Λ_3 находятся из условия выполнения равенств (3.25), (3.26).

Как и в 3.2.4 и 3.3.1, здесь можно найти часть интегралов системы уравнений. Этими интегралами являются уравнение (3.39) и равенство

$$\Lambda_5(\psi)\equiv 0. \tag{3.43}$$

Система уравнений для определения функций y, α, ϑ, φ, Λ_4 включает теперь уравнения (3.27), (3.37)–(3.39), (3.42) в которых необходимо учесть (3.43), причем из них первые два являются дифференциальными.

Из уравнения (3.42) с учетом (3.43) следует, что

$$\Lambda_3\cos(\vartheta-\alpha)+\Lambda_4\sin(\vartheta-\alpha)=0. \tag{3.44}$$

Отсюда и из равенства (3.38) находим, что $\Lambda_4=\text{const}$. Исключим из уравнений (3.37), (3.39) произведение $y^\nu\varphi^k$, а из полученного уравнения и (3.44) — величину Λ_3. В результате получим

$$g\equiv(\varkappa-1)\sin\vartheta+\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)+$$
$$+\Lambda_2(1-\nu)\left[(\varkappa-1)\cos\vartheta-\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right]=0. \tag{3.45}$$

Уравнения (3.44), (3.45) помимо $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$ содержат только постоянные величины. Следовательно, величины α и ϑ постоянны на экстремали, если при этом $\varphi(\psi)>\varphi_0(\psi)$. Из уравнения (3.39) тогда вытекает, что $y^\nu\varphi^k=\text{const}$. Этот результат уже был получен в 3.3.1.

Из (3.45) находим

$$\vartheta=G(\alpha,\Lambda_2,n), \tag{3.46}$$

где функция G определяется равенством (3.17).

Отметим, что если (задача 3) функция $\varphi(\psi)$ задана равенством

$$\varphi(\psi)=\varphi_0(\psi), \tag{3.47}$$

то в системе уравнений (3.27), (3.37)–(3.39), (3.42), (3.43), определяющих искомые функции, уравнение (3.42) следует заменить равенством (3.47).

При этом, конечно, уравнения (3.44)–(3.46) не выполняются. Пусть найдено решение задачи 3. Предположим, что экстремаль bh найденного решения лежит целиком в области

$$G(\alpha, \Lambda_2, 0) < \vartheta < G(\alpha, \Lambda_2, 1), \quad 0 < \alpha < \pi/2 \tag{3.48}$$

плоскости α, ϑ. Вариация (3.40) принимает вид

$$\delta\bar{\chi} = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_b} V_\varphi \, \delta\varphi \, d\psi, \tag{3.49}$$

поскольку $V_\alpha = V_{\varphi'} = 0$. Покажем, что $V_\varphi > 0$ при условии (3.48). Исключим из выражения для V_φ величины Λ_3 и Λ_4 при помощи равенств (3.27), (3.39). Получим

$$V_\varphi = \frac{w(\alpha)(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\, g(\alpha, \vartheta, \Lambda_2), \tag{3.50}$$

причем, функция g определена в (3.45). Эту функцию можно представить в виде

$$g(\alpha, \vartheta, \Lambda_2) = \bar{N}\sin\left[\vartheta - G(\alpha, \Lambda_2, 0)\right], \tag{3.51}$$

$$\bar{N} = \left\{\left[\sin 2\alpha - \Lambda_2(1-\nu)(2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha - \Lambda_2(1-\nu)\sin 2\alpha\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Сопоставляя условия (3.48) и равенства (3.17), (3.51), (3.50), видим, что действительно $V_\varphi < 0$.

Из (3.49) следует, что только неравенство $\delta\varphi < 0$, противоречащее условию (3.32), ведет к уменьшению сопротивления χ. Таким образом, как и в 3.3.2, заключаем, что решение задач 1 и 3 является одновременно решением задач 2 и 4, если экстремаль лежит в области (3.20) или (3.48).

Сопоставление решений. Итак, найдены необходимые условия экстремума вариационных задач в двух вариантах. В одном случае независимой переменной является y, в другом — величина ψ. Обе формы решения обладают своими преимуществами и недостатками.

В случае независимой переменной y при решении задачи 1 множитель Лагранжа λ_2 является, вообще говоря, переменным. Если течение является изэнтропическим ($\varphi_0 = \text{const}$), то множитель λ_2 оказывается постоянным в плоском и осесимметричном течениях. Формулы для изэнтропических течений становятся сравнительно простыми.

В задаче 3, когда независимой переменной является ψ, переменным в общем случае является множитель Лагранжа Λ_4. Из уравнения (3.38) и

выражения для V_y видно, что в плоском случае ($\nu = 0$) величина Λ_4 становится постоянной. Соответственно упрощаются формулы для плоских течений.

Более детально о решении задач 1 и 3 можно сказать следующее.

В плоском изэнтропическом случае при независимой переменной y уравнение (2.11) интегрируется в конечном виде, а при независимой переменной ψ интегрируется соответствующее уравнение (3.27). Искомые величины α, ϑ, ψ в первом случае и величины α, ϑ, y во втором случае связаны конечными уравнениями.

В плоском неизэнтропическом случае, если независимой переменной является ψ, уравнение (3.27) интегрируется в квадратурах, и решение на экстремали получается в замкнутом виде.

В осесимметричном изэнтропическом случае, если за независимую переменную принята величина y, уравнение (2.11) интегрируется в квадратурах, и решение на экстремали также представляется в замкнутом виде.

В осесимметричном неизэнтропическом случае система равенств, определяющих искомые функции на экстремали при любой из независимых переменных y и ψ, включает два дифференциальных уравнения.

При $\nu = 1$ уравнения на экстремалях упрощаются. В случае независимой переменной y из (2.36), (2.37), (2.11), а также из (2.30) с учетом (2.36), (2.37), соответственно получаем

$$
\begin{gathered}
z(\alpha)w(\alpha)y\varphi^k \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} = \lambda_4, \quad -\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\cos(\vartheta+\alpha) = \lambda_2(y), \\
\frac{d\psi}{dy} = -\frac{z(\alpha)y\varphi^k}{K\sin(\vartheta-\alpha)}, \\
\frac{d\lambda_2}{dy} = -\frac{z(\alpha)w(\alpha)y\varphi^k \operatorname{tg}\alpha}{K(\varkappa-1)\sin(\vartheta-\alpha)} \frac{d\ln\varphi}{d\psi}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\cos\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right].
\end{gathered}
\tag{3.52}
$$

Если независимой переменной является ψ, то при $\nu = 1$ из (3.37), (3.39), (3.43) можно получить простые выражения для Λ_3 и $\Lambda_4(y)$. Вспоминая также (3.27) и исключая из (3.38) величины Λ_3 и Λ_4, соответственно получаем

$$
\begin{gathered}
z(\alpha)w(\alpha)y\varphi^k \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} = K\Lambda_3, \\
-\frac{z(\alpha)w(\alpha)y\varphi^k}{2\cos\alpha}\left(\sin 2\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin 2\alpha\right) = K\Lambda_4,
\end{gathered}
$$

$$\frac{dy}{d\psi} = -\frac{K\sin(\vartheta-\alpha)}{z(\alpha)y\varphi^k},$$
$$\frac{d\Lambda_4}{d\psi} = -\frac{w(\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{y}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\cos\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right]. \tag{3.53}$$

Рассмотрим теперь решение задач 2 и 4 при выполнении условия $\varphi(\psi) > \varphi_0(\psi)$. При решении задачи 2, как уже отмечалось в 3.3.1, постоянные величины α, ϑ, и $y^\nu\varphi^k$ определяются уравнениями (3.13)–(3.15). Множители Лагранжа μ_2, μ_3, μ_4 определяются из условий (2.7)–(2.9). Интегрируя уравнение (2.11), получаем на экстремали bh

$$\psi = \psi_h - \frac{y^\nu\varphi^k z(\alpha)}{K\sin(\vartheta-\alpha)}(y-y_h). \tag{3.54}$$

Таким образом, и в плоском, и в осесимметричном случаях функция тока ψ линейно зависит от y на экстремали, полученной при решении задачи 2.

Если рассматривается решение задачи 4 при независимой переменной ψ и выполнении условия $\varphi(\psi) > \varphi_0(\psi)$, то, как уже здесь отмечалось, величины Λ_4, α, ϑ и $y^\nu\varphi^k$ постоянны на характеристике bh. Связь между y и ψ совпадает, конечно, с (3.54).

Вопрос о существовании найденного решения задач 2 и 4 при $\varphi(\psi) > \varphi_0(\psi)$ требует дополнительного исследования.

Отмеченные преимущества и недостатки двух вариантов решений не носят принципиального характера. В то же время они создают определенные удобства или неудобства при использовании того или иного варианта в различных случаях.

3.3.4. Случай возрастания энтропии

Исходные данные задачи, то есть (рис. 3.14) координаты точек a и b, функции $A(\psi)$, $\Theta(\psi)$, $Y(\psi)$, $\varphi_0(\psi)$ на характеристике ac и величина $\zeta(1-\nu)$, могут быть таковы, что при решении задачи 3 экстремаль bh в плоскости α,ϑ частично (при $\nu = 1$) или целиком (при $\nu = 0$ и $\nu = 1$) лежит в области

$$G(\alpha, \Lambda_2, -1) < \vartheta \leqslant G(\alpha, \Lambda_2, 0). \tag{3.55}$$

В этом случае равенства (3.17), (3.51), (3.50) показывают, что величина $V_\varphi < 0$ для части экстремали, которая принадлежит области (3.55). Из (3.49) следует, что величина $\bar{\chi}$ может быть уменьшена при $\delta\varphi > 0$. Вариация $\delta\varphi > 0$ допустима в случае решения задач 2 или 4. Иными словами, сопротивление тела, полученного решением задач 1 или 3,

в данном случае может быть уменьшено за счет увеличения энтропии на экстремали bh или ее части. Здесь рассматриваются адиабатические течения, в которых увеличение энтропии происходит только при прохождении газа через ударные волны. Следовательно, выше по течению от характеристики bh или ее части могут существовать ударные волны.

Предположим вначале, что величины α, ϑ, φ на характеристике bc имеют в точке h разрыв (рис. 3.17). Структуру течения в точке h удобнее рассмотреть после расчета разрыва.

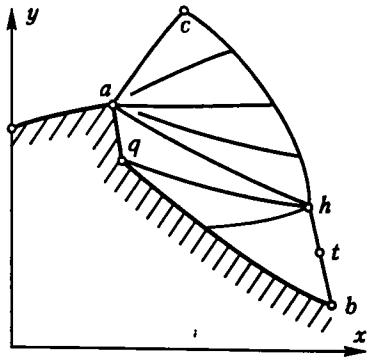


Рис. 3.17

Вычисление вариации δJ, где J определяется равенством (3.34), в этом случае приводит к появлению дополнительных членов в (3.35). Точка h является особой в том смысле, что величины α и ϑ зависят от направления подхода к ней. В связи с этим условимся о следующей индексации. Двойной индекс будет обозначать, что функция берется в точке, указанной первым индексом, при подходе к ней со стороны точки, которая указана вторым индексом. Для непрерывных функций будет сохранена обычная индексация. Символами $\delta\psi_{ha}$, $\delta\psi_{hc}$ обозначим вариации величины ψ в точке h, соответственно, при варьировании по направлению касательных к характеристикам ha, hc в точке h.

При изменении положения точки h в направлении касательной к ha в точке h приращение первых двух членов (3.34) равно $U_{ha}\delta\psi_{ha}$, а приращение третьего члена равно $V_{hb}\delta\psi_{ha}$. Варьирование по направлению касательной к hc в точке h меняет первые два члена в (3.34) на величину $-V_{hc}\delta\psi_{hc}$, а третий член — на величину $V_{hb}\delta\psi_{hc}$.

Таким образом, вариация δJ принимает вид

$$\delta J = (U_{ha} + V_{hb})\delta\psi_{ha} + (V_{hb} - V_{hc})\,\delta\psi_{hc} + \\ + \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_h} (V_a\delta\alpha + V_\beta\delta\beta + V_{\beta'}\delta\beta' + V_y\delta y + V_{y'}\delta y' + V_\varphi\delta\varphi + V_{\varphi'}\delta\varphi')\,d\psi.$$

Проинтегрируем по частям члены, содержащие производные от вариаций. Величина δy_h в силу независимости вариаций $\delta\psi_{ha}$ и $\delta\psi_{hc}$ с учетом (3.22) и (3.27) может быть записана в виде

$$\delta y_h = (U_{4ha} + V_{4hb})\delta\psi_{ha} + (V_{4hb} - V_{4hc})\delta\psi_{hc}.$$

Решение задачи при разрыве функций в точке h должно совпадать на bh с ранее полученным решением. В частности, при условии

$\Lambda_5(\psi_b) = 0$ должно выполняться равенство $\Lambda_5(\psi) \equiv 0$. Учитывая это и условие $\delta y_b = 0$, получаем

$$\delta J = \left[U_{ha} + V_{hb} + \Lambda_4(U_{4ha} + V_{4hb})\right]\delta\psi_{ha} + \\ + \left[V_{hb} - V_{hc} + \Lambda_4(V_{4hb} - V_{4hc})\right]\delta\psi_{hc} + \\ + \int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_h} \left[V_\alpha\delta\alpha + V_\beta\delta\beta + \left(V_y - \frac{d\Lambda_4}{d\psi}\right)\delta y + V_\varphi\delta\varphi\right] d\psi. \quad (3.56)$$

Последний интеграл равен нулю, если функции $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $y(\psi)$, $\varphi(\psi)$ связаны равенствами (3.27), (3.39), (3.44), (3.45). Независимость вариаций $\delta\psi_{ha}$ и $\delta\psi_{hc}$ вызывает необходимость обращения в нуль множителей при этих величинах в (3.56), если $\delta J = 0$. Это дает условия в точке разрыва

$$\left\{w(\alpha)\left[\cos\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta+\alpha)\right] - \right.$$
$$- \Lambda_2(1-\nu)w(\alpha)\left[\sin\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta+\alpha)\right] +$$
$$\left. + \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^\nu\varphi_0^k}\left[\Lambda_3\cos(\vartheta+\alpha) + \Lambda_4\sin(\vartheta+\alpha)\right]\right\}_{ha} +$$
$$+ \left\{-w(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] + \right.$$
$$\left. + \Lambda_2(1-\nu)w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right]\right\}_{hb} = 0, \quad (3.57)$$

$$\left\{ - w(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] + \right.$$
$$\left. + \Lambda_2(1-\nu)w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right]\right\}_{hb} -$$
$$- \left\{-w(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] + \right.$$
$$+ \Lambda_2(1-\nu)w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right] +$$
$$\left. + \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^\nu\varphi^k}\left[\Lambda_3\cos(\vartheta-\alpha) + \Lambda_4\sin(\vartheta-\alpha)\right]\right\}_{hc} = 0. \quad (3.58)$$

При этом $\alpha_{ha} = \alpha_{hc}$, $\vartheta_{ha} = \vartheta_{hc}$, $(\varphi_0)_{ha} = (\varphi_0)_{hc}$.

Итак, при условии $\varphi(\psi) > \varphi_0(\psi)$ необходимыми условиями экстремума χ являются уравнения (3.39), (3.44), (3.45), (3.54), определяющие функции y, α, ϑ, φ, и граничные условия (3.57), (3.58), (3.30). Величины Λ_2, Λ_3 определяются условиями (3.25), (3.26).

Выясним, разрешима ли задача при произвольных α_{hb}, ϑ_{hb}, φ_{hb}. Перепишем равенство (3.54) для $\psi = \psi_a$ и используем граничное условие (3.30):

$$\psi_a = \psi_h - \frac{\varphi^k y^\nu z(\alpha)}{K \sin(\vartheta - \alpha)} (y_b - y_h). \tag{3.59}$$

Для построения контрольного контура необходимо вначале найти восемь величин x_h, y_h, α, ϑ, $y^\nu \varphi^k$, Λ_2, Λ_3, Λ_4, удовлетворяющих восьми условиям (3.39), (3.44), (3.45), (3.57), (3.58), (3.59), (3.25), (3.26). При этом следует помнить, что величины $\alpha = \alpha_{hb}$, $\vartheta = \vartheta_{hb}$, $y^\nu \varphi^k = y_h^\nu \varphi_{hb}^k$ постоянны на отрезке bh. Таким образом, видим, что число неизвестных равно числу уравнений. Переменные величины $y(\psi)$, $\varphi(\psi)$ на bh определяются равенствами (3.54), (3.39). Формула (3.24) позволяет вычислить соответствующее значение $\bar{\chi}$. Полученное решение является пригодным только в том случае, если на bh имеет место неравенство $\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi)$.

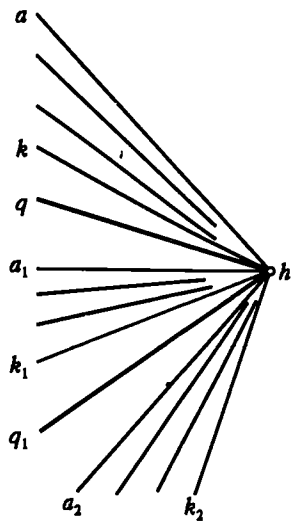


Рис. 3.18

Теперь рассмотрим структуру течения в точке разрыва h. Контур ab искомого тела должен быть таков, чтобы в точке h происходил разрывный переход от величин α_{hc}, ϑ_{hc}, $(\varphi_0)_{hc}$ к величинам α_{hb}, ϑ_{hb}, φ_{hb}, причем все шесть величии уже определены необходимыми условиями экстремума.

Если $\varphi_{hb} > (\varphi_0)_{hc}$, то через точку h должна проходить ударная волна. Из соотношений на ударной волне (1.22) видно, что величины α, ϑ, φ за ударной водной определяются величинами α, ϑ, φ перед ударной волной и углом наклона σ линии ударной волны к оси x. Следовательно, наличие ударной волны в точке h дает только один произвол — произвол в определении величины σ. С помощью одного произвола, в общем случае, необходимый разрыв функций недостижим.

Требуемые величины $\alpha_{hb} - \alpha_{hc}$, $\vartheta_{hb} - \vartheta_{hc}$, $\varphi_{hb} - (\varphi_0)_{hc}$ могут быть получены при более сложной структуре разрыва. В точке h могут фокусироваться (рис. 3.18) волны сжатия $ahk, a_1hk_1, a_2hk_2, \ldots$ и ударные волны $qh, q_1h, \ldots$ так, что две соседние волны сжатия обязательно

разделены одной или несколькими ударными волнами. Например, задача построения нужного разрыва может оказаться разрешимой, если в точку h приходят (рис. 3.19) две ударные волны q_1h и q_2h, а из точки h вниз по течению идет пучок характеристик второго семейства.

Может оказаться, что построение разрыва производится неоднозначно. В этом случае контуры ab, соответствующие всем найденным структурам течения, удовлетворяют условиям исходной задачи и обладают одним и тем же сопротивлением.

Конечно, необходимым условием является существование найденного разрыва.

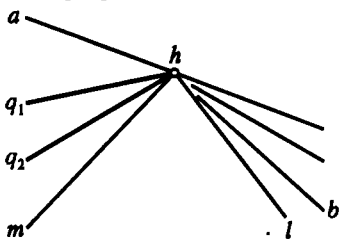


Рис. 3.19

Вспоминая содержание последних подразделов, можно кратко сказать следующее. Пусть необходимо решить задачу 4 с некоторыми исходными данными. Если решение задачи 3 с теми же исходными данными приводит к тому, что экстремаль bh в плоскости α, ϑ целиком принадлежит области (3.48), то тем самым найдено решение задачи 4. Если экстремаль bh выходит за пределы области (3.48), то задача 4 имеет рассмотренное в этом подразделе решение при условии, что $\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi)$. Если, наконец, условие $\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi)$ на части характеристики bh не выполняется, то могут иметь место более сложные схемы решения.

Результаты полученные в этом подразделе, не могут быть названы решением задачи, поскольку общее исследование условий на разрыве (3.57), (3.58) совместно с требованием существования разрыва класса P^3 не представляется возможным. Некоторые негативные результаты расчетов будут приведены в 3.4.4, хотя они и не решают вопроса о существовании решений с возрастанием энтропии.

В разделах 3.2 и 3.3 были рассмотрены необходимые условия экстремума величины волнового сопротивления в тех случаях, когда исходная характеристика не разрушается. Определены области, в которых течения с ударными волнами не допустимы. В задачах этого типа полезно дополнительно исследовать необходимое условие минимума волнового сопротивления. Следующий раздел будет посвящен этому вопросу.

3.4. Необходимое условие минимума сопротивления

3.4.1. Безударные течения

Возвратимся снова к задаче 1. Пусть для этой задачи удовлетворены все необходимые условия экстремума. Это означает, в частности, что найдены постоянные λ_3, λ_4, а также функции $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\psi(y)$, $\lambda_2(y)$, удовлетворяющие уравнениям (2.11), (2.30), (2.36), (2.37) при $\lambda_5(y) \equiv 0$. В решении задачи эти функции определяются на характеристике bh.

Рассмотрим в плоскости r, α всю экстремаль, отвечающую найденным множителям Лагранжа. Напомним, что величина r определена формулой (2.50) и при фиксированной величине $\lambda_4 \neq 0$ взаимно однозначно связана с y. Выражение (2.50) было введено для осесимметричного случая, однако, его можно использовать и в случае плоского течения. На рис. 3.20 изображена экстремаль одного из типов, которые получаются при осесимметричных течениях. Для определения области минимального сопротивления конкретный вид экстремали в области r, α не имеет значения.

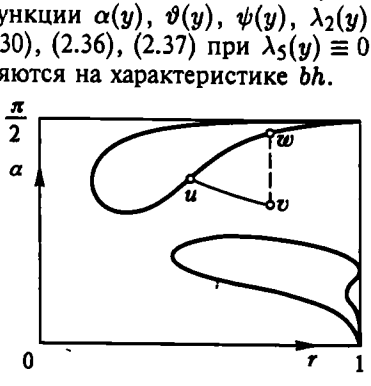


Рис. 3.20

Воспользуемся выражением для первой вариации δI в форме (2.21), но в качестве контрольного контура выберем ahb, как это было сделано в 3.2.4. При выводе выражения (2.33) было установлено, что вариация I за счет перемещения точки h по направлению характеристики второго семейства равна нулю. Это объясняется тем, что в силу непрерывности функций в точке h имеет место равенство $\Phi_{hc} = \Phi_{hb}$. Характеристика ah является линией разрыва производных от функций $\alpha(x, y)$, $\vartheta(x, y)$. Поэтому и производные от Φ_{hc} и Φ_{hb} на ah не совпадают. Имея ввиду вычисление второй вариации, включим в выражение для δI и член с δy_{h2}. В этом случае будем иметь

$$\delta I = (F_{ha} + \Phi_{hb})\,\delta y_{h1} + (\Phi_{hb} - \Phi_{hc})\,\delta y_{h2} + \int_{y=y_h}^{y_b} (\Phi_\alpha \delta\alpha + \Phi_\beta \delta\beta + \Phi_{\beta'} \delta\beta' + \Phi_\psi \delta\psi + \Phi_{\psi'} \delta\psi')\, dy. \qquad (4.1)$$

Величина δI совпадает с $\delta\bar{\chi}$, если при варьировании соблюдаются изопериметрические условия. Для найденной экстремали $\delta\bar{\chi} = 0$.

Выведем теперь еще одно из возможных необходимых условий минимума. Такие условия позволяют отбрасывать непригодные решения из полученных на основе необходимых условий экстремума.

Будем предполагать, что на исследуемом участке экстремали функция $\alpha(y)$ или $\alpha(r)$ однозначна.

Вторая вариация $\delta^2 I$ будет вычисляться вначале для интеграла в (4.1) при фиксированном верхнем пределе. Выберем на экстремали некоторую точку u. Вместо экстремали рассмотрим какую-либо линию uv. Величина интеграла в (4.1) будет меняться в зависимости от выбора линии uv. Действительно, в качестве свободной выбрана функция $\alpha(y)$, функции $\beta(y)$, $\psi(y)$, $\lambda_2(y)$, $\lambda_5(y)$ связаны с y и α уравнениями (2.15), (2.11), (2.30), (2.29) и, следовательно, подынтегральное выражение в (4.1) зависит от пути $\alpha(y)$, соединяющего исходную точку u с интересующей нас точкой v. Особыми точками подынтегрального выражения могут быть точки, в которых $\sin(\vartheta - \alpha) = 0$, как это следует из выражений для Φ_α, Φ_β, Φ_ψ, приведенных в (2.28)–(2.30). Существенно, однако, что в малых окрестностях регулярных точек экстремали, которые не пересекаются самой исследуемой экстремалью, подынтегральное выражение в (4.1) не меняет знака. В противном случае рассматриваемые окрестности экстремали пересекались бы новыми линиями, на которых первая вариация δI обращается в нуль. Таким образом, достаточно каким-либо одним путем определить знак второй вариации I. Выберем следующий путь. В окрестности регулярной точки u построим бесконечно малый элемент характеристики uv, не совпадающий с экстремалью. Пусть этот элемент таков, что величины $\delta\alpha$ и dy на нем имеют один порядок малости. Здесь под $\delta\alpha$ подразумевается разность между α на uv и α на экстремали при фиксированном значении y.

Производя варьирование (4.1) следует помнить, что величины $\lambda_2(y)$ и $\lambda_5(y)$ на всех кривых сравнения подчинены уравнениям (2.30) и (2.29). Учтем также, что функция Φ содержит производные β', ψ' линейно. Наконец, обозначим вторую вариацию I при фиксированных концах через $\delta^2 I_{bh}$. Получим

$$\delta^2 I_{bh} = \int_{y=y_b}^{y_h} \big(\Phi_{\alpha\alpha}\delta\alpha^2 + 2\Phi_{\alpha\beta}\delta\alpha\delta\beta + 2\Phi_{\alpha\psi}\delta\alpha\delta\psi + \Phi_{\alpha\lambda_2}\delta\alpha\delta\lambda_2 + \Phi_{\alpha\lambda_5}\delta\alpha\delta\lambda_5 + \Phi_{\beta\beta}\delta\beta^2 + 2\Phi_{\beta\psi}\delta\beta\delta\psi + \Phi_{\beta\lambda_2}\delta\beta\delta\lambda_2 + \Phi_{\beta\lambda_5}\delta\beta\delta\lambda_5 + \Phi_{\psi\psi}\delta\psi^2 + \Phi_{\psi\lambda_2}\delta\psi\delta\lambda_2 + \Phi_{\psi\lambda_5}\delta\psi\delta\lambda_5 + \delta\beta'\delta\lambda_5 + K\delta\psi'\delta\lambda_2\big)\,dy. \qquad (4.2)$$

Оценим величины вариаций $\delta\beta$, $\delta\psi$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_5$. Для этого используем дифференциальные уравнения (2.15), (2.11), (2.30), (2.29). Введем обозначения

$$\Phi_5^\circ \equiv \frac{\nu \sin\vartheta \sin\alpha}{y\sin(\vartheta-\alpha)} + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\Phi_2\frac{d\varphi}{d\psi}, \quad \Phi_\psi^\circ \equiv \frac{1}{K}\Phi_\psi.$$

Равенства (2.15), (2.30) принимают вид

$$\frac{d\beta}{dy} = \Phi_5^\circ, \quad \frac{d\lambda_2}{dy} = \Phi_\psi^\circ. \tag{4.3}$$

Проварьируем уравнения (4.3), (2.11), (2.29)

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\beta}{dy} &= (\Phi_5^\circ)_\alpha\delta\alpha + (\Phi_5^\circ)_\beta\delta\beta + (\Phi_5^\circ)_\psi\delta\psi,\\
\frac{d\delta\lambda_2}{dy} &= (\Phi_\psi^\circ)_\alpha\delta\alpha + (\Phi_\psi^\circ)_\beta\delta\beta + (\Phi_\psi^\circ)_\psi\delta\psi +\\
&\quad + (\Phi_\psi^\circ)_{\lambda_2}\delta\lambda_2 + (\Phi_\psi^\circ)_{\lambda_5}\delta\lambda_5,\\
\frac{d\delta\psi}{dy} &= -(\Phi_2)_\alpha\delta\alpha - (\Phi_2)_\beta\delta\beta - (\Phi_2)_\psi\delta\psi,\\
\frac{d\delta\lambda_5}{dy} &= \Phi_{\beta\alpha}\delta\alpha + \Phi_{\beta\beta}\delta\beta + \Phi_{\beta\psi}\delta\psi +\\
&\quad + \Phi_{\beta\lambda_2}\delta\lambda_2 + \Phi_{\beta\lambda_5}\delta\lambda_5.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

В этих уравнениях вариации величин представляют собой отклонения этих величин от их значений на экстремали при фиксированном y. Умножим уравнения (4.4) почленно на dy, а затем левые и правые части полученных уравнений проинтегрируем по элементу uv

$$\begin{aligned}
\delta\beta &= \int_{y=y_u}^{y}\left[(\Phi_5^\circ)_\alpha\delta\alpha + (\Phi_5^\circ)_\beta\delta\beta + (\Phi_5^\circ)_\psi\delta\psi\right]dy,\\
\delta\lambda_2 &= \int_{y=y_u}^{y}\left[(\Phi_\psi^\circ)_\alpha\delta\alpha + (\Phi_\psi^\circ)_\beta\delta\beta + (\Phi_\psi^\circ)_\psi\delta\psi +\right.\\
&\quad \left. + (\Phi_\psi^\circ)_{\lambda_2}\delta\lambda_2 + (\Phi_\psi^\circ)_{\lambda_5}\delta\lambda_5\right]dy,\\
\delta\psi &= -\int_{y=y_u}^{y}\left[(\Phi_2)_\alpha\delta\alpha + (\Phi_2)_\beta\delta\beta + (\Phi_2)_\psi\delta\psi\right]dy,
\end{aligned}$$

$$\delta\lambda_5 = \int_{y=y_a}^{y} \left(\Phi_{\beta\alpha}\delta\alpha + \Phi_{\beta\beta}\delta\beta + \Phi_{\beta\psi}\delta\psi + \right.$$
$$\left. + \Phi_{\beta\lambda_2}\delta\lambda_2 + \Phi_{\beta\lambda_5}\delta\lambda_5\right) dy.$$

Применим теорему о среднем к интегралам, стоящим в правых частях последних равенств. Вспоминая, что величины $\delta\alpha$ и dy на элементе uv имеют один порядок малости, убеждаемся в том, что вариации $\delta\beta$, $\delta\psi$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_5$ по сравнению с вариацией $\delta\alpha$ имеют более высокий порядок малости.

В равенство (4.2) входят также производные от вариаций величин β и ψ. Используя полученный здесь вывод о малости вариаций $\delta\beta$, $\delta\psi$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_5$, а также первое и третье уравнения (4.4), находим, что порядки величин $\delta\beta'$, $\delta\psi'$ и $\delta\alpha$ совпадают.

Сохраняя в равенстве (4.2) величины второго порядка малости, получаем

$$\delta^2\bar{\chi}_{hb} = \int_{y=y_b}^{y_h} \Phi_{\alpha\alpha}(\delta\alpha)^2\, dy.$$

Перейдем под знаком интеграла к переменной l по формуле (3.18) с условием $l_h = 0$. Получим

$$\delta^2\bar{\chi}_{bh} = -\int_{l=0}^{l_b} \Phi_{\alpha\alpha}\sin(\vartheta - \alpha)(\delta\alpha)^2\, dl, \tag{4.5}$$

где l_b — длина характеристики hb.

Из формулы (4.5) следует, что отклонения от экстремали рассмотренного вида ведут к увеличению сопротивления χ, если величина

$$\Gamma \equiv \Phi_{\alpha\alpha}\sin(\vartheta - \alpha)$$

на экстремали отрицательна. Наоборот, при $\Gamma > 0$ отклонения от экстремали ведут к уменьшению χ.

Вспомним выражение для Φ_α. Произведем дифференцирование Φ_α по α, как и всегда в системе переменных y, α, β, а в найденное выражение подставим λ_4 и λ_2 из (2.36), (2.37). Окончательно при $\Phi_\alpha = 0$ будем иметь

$$\Gamma = -\frac{2y^\nu\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)\sin 2\alpha}{(\varkappa - \cos 2\alpha)^2(1 - \cos 2\alpha)\sin(\vartheta - \alpha)}\, T(\alpha, \vartheta), \tag{4.6}$$

где

$$T = T_1 + \lambda_3(1-\nu)T_2,$$

$$T_1 = (\varkappa - 1 + 2\cos^2 2\alpha)\cos\alpha - (\varkappa+1)\cos\alpha\cos 2\vartheta - \\ - (\varkappa - 1 - 2\cos 2\alpha)\sin\alpha\sin 2\vartheta,$$

$$T_2 = -(\varkappa + 1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha)\sin\alpha - \\ - (\varkappa - 1 - 2\cos 2\alpha)\sin\alpha\cos 2\vartheta + (\varkappa+1)\cos\alpha\sin 2\vartheta.$$

Один из нулей функции $T(\alpha, \vartheta)$ дает равенство $\sin(\vartheta - \alpha) = 0$. Это позволяет переписать формулу (4.6) в виде

$$\Gamma = -\frac{4y^\nu \varphi^k z(\alpha) w(\alpha)\sin 2\alpha}{(\varkappa - \cos 2\alpha)^2(1-\cos 2\alpha)} \times \\ \times \Big\{\big[(\varkappa + \cos^2 2\alpha)\sin\vartheta + (1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\cos\vartheta\big] + \\ + \lambda_3(1-\nu)\big[(\varkappa+\cos^2 2\alpha)\cos\vartheta - (1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\sin\vartheta\big]\Big\}. \tag{4.7}$$

Функция Γ обращается в нуль при

$$\vartheta = H(\alpha, \lambda_3, n), \tag{4.8}$$

$$H(\alpha,\lambda_3,n) \equiv -\operatorname{arctg}\frac{(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha + \lambda_3(1-\nu)(\varkappa+\cos^2 2\alpha)}{(\varkappa+\cos^2 2\alpha) - \lambda_3(1-\nu)(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha} + n\pi, \tag{4.9}$$

где n — целое число. В качестве примера на рис. 3.21 показаны сплошными линиями кривые $\vartheta = H(\alpha, 0, 0)$ при различных значениях $\varkappa$. Там же штриховыми линиями изображены зависимости $\vartheta = G(\alpha, 0, 0)$.

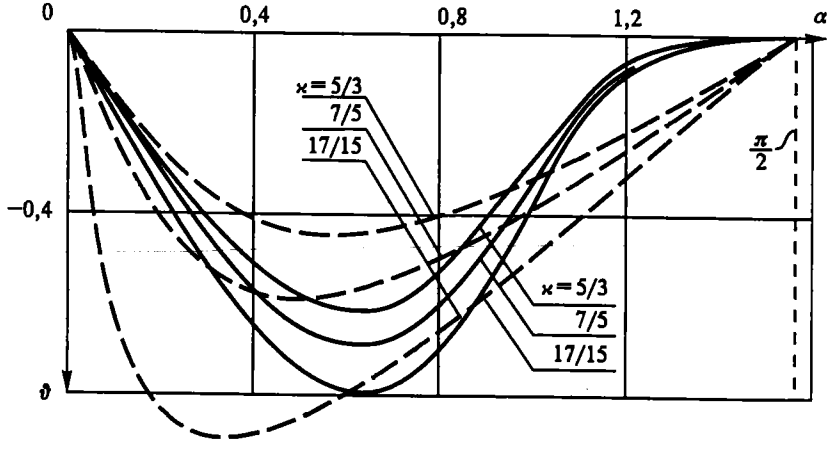


Рис. 3.21

Полоса $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ в плоскости α, ϑ разбивается на ряд областей кривыми (4.8) при фиксированном значении λ_3 и различных n.

Формула (4.7) может быть преобразована к виду

$$\Gamma = -\frac{4Ny^{\nu}\varphi^{k}z(\alpha)w(\alpha)\sin 2\alpha}{(\varkappa - \cos 2\alpha)^2(1-\cos 2\alpha)}\sin\left[\vartheta - H(\alpha, \lambda_3, 0)\right], \tag{4.10}$$

где

$$N = \Big\{\left[(\varkappa + \cos^2 2\alpha) - \lambda_3(1-\nu)(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\right]^2 + \\ + \left[(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha + \lambda_3(1-\nu)(\varkappa + \cos^2 2\alpha)\right]^2\Big\}^{1/2}.$$

Из формулы (4.10) и условия (4.8), при котором $\Gamma = 0$, следует, что в области

$$H(\alpha, \lambda_3, 0) < \vartheta < H(\alpha, \lambda_3, 1), \quad 0 < \alpha < \pi/2 \tag{4.11}$$

величина Γ на экстремалях отрицательна. В области

$$H(\alpha, \lambda_3, -1) < \vartheta < H(\alpha, \lambda_3, 0), \quad 0 < \alpha < \pi/2 \tag{4.12}$$

величина Γ на экстремалях положительна.

Итак, минимум χ может иметь место, если экстремаль bh принадлежит области (4.11) и если варьирование положения точки h ведет к увеличению χ. Если экстремаль целиком или частично принадлежит области (4.12), то минимум χ на найденной экстремали не достигается.

Осесимметричный случай. Рассмотрим экстремали в плоскости r, α. Покажем, что условию (4.8), при котором $\Gamma = 0$, соответствует равенство $dy/d\alpha = 0$ при $\nu = 1$. Стернин [7], рассматривая границу области непрерывных решений вариационной задачи при $\nu = 1$, вывел условие для $dy/d\alpha = 0$, совпадающее с $\Gamma = 0$.

На экстремалях функции $\alpha, \beta, \psi, \lambda_2$ и переменная y связаны равенствами (2.11), (2.28)–(2.30) при $\lambda_5 \equiv 0$. Эти равенства имеют вид

$$\frac{d\psi}{dy} + \Phi_2(y, \alpha, \beta, \psi) = 0, \quad \Phi_{\alpha}(y, \alpha, \beta, \psi, \lambda_2, \lambda_5)\big|_{\lambda_5=0} = 0, \\ \Phi_{\beta}(y, \alpha, \beta, \psi, \lambda_2, \lambda_5)\big|_{\lambda_5=0} = 0, \quad K\frac{d\lambda_2}{dy} = \Phi_{\psi}(y, \alpha, \beta, \psi, \lambda_2, \lambda_5)\big|_{\lambda_5=0} \tag{4.13}$$

и могут рассматриваться как неявное выражение y через α. Дифференцируя второе и третье равенства (4.13) и используя первое и четвертое уравнения, получаем

$$\frac{dy}{d\alpha} =$$

$$= \frac{\Phi_{\alpha\beta}^2 - \Phi_{\alpha\alpha}\Phi_{\beta\beta}}{(\Phi_{\alpha y} - \Phi_{\alpha\psi}\Phi_2 + \frac{1}{K}\Phi_{\alpha\lambda_2}\Phi_\psi)\Phi_{\beta\beta} - (\Phi_{\beta y} - \Phi_{\beta\psi}\Phi_2 + \frac{1}{K}\Phi_{\beta\lambda_2}\Phi_\psi)\Phi_{\alpha\beta}}. \quad (4.14)$$

Входящие в это равенство вторые производные на экстремалях выражаются формулами

$$\Phi_{\alpha\alpha} = -\frac{2y\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)\sin 2\alpha}{(\varkappa - \cos 2\alpha)^2(1 - \cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)}\,T(\alpha, \vartheta),$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = -\frac{y\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)\sin 2\alpha}{(\varkappa - \cos 2\alpha)(1 - \cos^2 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)}\,T(\alpha, \vartheta),$$

$$\Phi_{\beta\beta} = -\frac{y\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)\cos(\vartheta + \alpha)}{\cos\alpha\sin(\vartheta - \alpha)},$$

$$\Phi_{\alpha y} = -\frac{\lambda_4(1 - \varkappa + 2\cos 2\alpha)}{y(\varkappa - \cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)},$$

$$\Phi_{\alpha\psi} = \frac{\lambda_4(1 - \varkappa + 2\cos 2\alpha)}{(\varkappa - 1)\varphi(\varkappa - \cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)},$$

$$\Phi_{\alpha\lambda_2} = -\frac{y\varphi^k z(\alpha)}{(\varkappa - \cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha)} \times$$
$$\times\,[(1 - \varkappa + 2\cos 2\alpha)\cos(\vartheta - \alpha) - (\varkappa + 1)\operatorname{ctg}\alpha\sin(\vartheta - \alpha)],$$

$$\Phi_{\beta y} = -\frac{\lambda_4}{y\sin^2(\vartheta - \alpha)},$$

$$\Phi_{\beta\psi} = \frac{\lambda_4}{(\varkappa - 1)\varphi\sin^2(\vartheta - \alpha)},$$

$$\Phi_{\beta\lambda_2} = -\frac{y\varphi^k z(\alpha)\cos(\vartheta - \alpha)}{\sin^2(\vartheta - \alpha)}.$$

Функция $T(\alpha, \vartheta)$ здесь та же, что и в (4.6) при $\nu = 1$, а величина λ_4 определена в (2.36):

$$\lambda_4 = y\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha}.$$

Из формул (4.6) и (4.14) следует, что $dy/d\alpha = 0$ при $\Gamma = 0$. Иными словами, граница области минимального сопротивления совпадает с геометрическим местом таких точек экстремалей, в которых ускорения бесконечны.

Геометрическое место точек экстремалей, в которых $\Gamma = 0$, при $\nu = 1$, $\varkappa = 1{,}4$ изображено в плоскости r, α штрих-пунктирной линией на рис. 3.11. Нетрудно убедиться, что эта линия проходит через

седловую точку S. Участки экстремалей, соответствующие минимуму сопротивления, изображены жирными линиями.

3.4.2. Концевые условия

Вернемся к выражению для первой вариации (4.1). Вычислим в случае непрерывных решений ту часть $\delta^2 I_h$ второй вариации $\delta^2 I$, которая зависит от изменения положения точки h. При этом, конечно,

$$\delta^2 I = \delta^2 I_h + \delta^2 I_{bh}. \tag{4.15}$$

При смещении точки h по направлению касательной к характеристике ah на такое расстояние, что y меняется на δy_{h1}, величины

$$\Gamma_1 \equiv F_{ha} + \Phi_{hb}, \quad \Gamma_2 \equiv \Phi_{hb} - \Phi_{hc} \tag{4.16}$$

получают, соответственно, приращения $(\delta\Gamma_1)_1$ и $(\delta\Gamma_2)_1$, причем

$$(\delta\Gamma_1)_1 = \left(\frac{d\Gamma_1}{dy}\right)_1 \delta y_{h1}, \quad (\delta\Gamma_2)_1 = \left(\frac{d\Gamma_2}{dy}\right)_1 \delta y_{h1}.$$

Индекс вне скобки указывает на семейство характеристик, вдоль которого производится смещение точки h и дифференцирование. Если точка h смещается по направлению касательной к характеристике второго семейства, то приращения $(\delta\Gamma_1)_2$ и $(\delta\Gamma_2)_2$ равны

$$(\delta\Gamma_1)_2 = \left(\frac{d\Gamma_1}{dy}\right)_2 \delta y_{h2}, \quad (\delta\Gamma_2)_2 = \left(\frac{d\Gamma_2}{dy}\right)_2 \delta y_{h2}.$$

Вариации δy_{h1} и δy_{h2} соответствуют независимым перемещениям точки h по направлениям характеристик разных семейств. Поэтому они сами могут рассматриваться как независимые. Интеграл в формуле (4.1) получает приращение

$$\left[\Phi_\psi \delta\psi + K\lambda_2 \delta\psi'\right]_h \delta y_h.$$

Здесь учтено, что на экстремали $\Phi_\alpha = 0$, $\Phi_\beta = 0$, $\lambda_5 = 0$. Величина ψ' означает производную $d\psi/dy$, взятую вдоль характеристики второго семейства и определяемую равенством (2.11). Выражение в квадратных скобках последней формулы берется при фиксированном верхнем пределе интеграла из (4.1), а вариации $\delta\psi$ и $\delta\psi'$ определяются перемещением точки h. Производная $d\beta/dy$ вдоль характеристики второго семейства в точке h непрерывна в силу равенства (2.15) и непрерывности функций α, ϑ, φ, φ_ψ. Учитывая все это и собирая вместе члены, обусловленные варьированием положения точки h, получаем

$$\delta^2 I_h = A\delta y_{h1}^2 + B\delta y_{h1}\delta y_{h2} + C\delta y_{h2}^2, \tag{4.17}$$

где

$$A = A_1 + A_2, \quad B = B_1 + B_2, \quad C = C_1 + C_2,$$

$$A_1 = \left(\frac{d\Gamma_1}{dy}\right)_1, \quad B_1 = \left(\frac{d\Gamma_2}{dy}\right)_1 + \left(\frac{d\Gamma_1}{dy}\right)_2, \quad C_1 = \left(\frac{d\Gamma_2}{dy}\right)_2,$$

$$A_2 = (\Phi_\psi - K\lambda_2\Phi_{2\psi})(F_2 + \Phi_2) -$$
$$- K\lambda_2\Phi_{2\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_1 - \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hb}\right] -$$
$$- K\lambda_2\Phi_{2\beta}\left[\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dy}\right)_{2hb}\right],$$

$$B_2 = (\Phi_\psi - K\lambda_2\Phi_{2\psi})(F_2 + \Phi_2) -$$
$$- K\lambda_2\Phi_{2\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_1 - 2\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hb} + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hc}\right] -$$
$$- K\lambda_2\Phi_{2\beta}\left[\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 - \left(\frac{d\beta}{dy}\right)_{2hb}\right],$$

$$C_2 = - K\lambda_2\Phi_{2\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hc} - \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hb}\right].$$

Здесь все величины берутся в точке h. Специально отмечены индексами лишь те величины, для которых существенно направление подхода к точке h.

При вычислении входящих в (4.17) величин A_1, B_1, C_1 следует учесть равенства (2.11), (2.13), (2.28), (2.29), (2.35), а также непрерывность функций α, β, ψ, λ_2, λ_5 в точке h. Из (2.35) следует, что $(d\lambda_5/dy)_{hb} = 0$. Уравнение (2.29) показывает, что величина $d\lambda_5/dy$ непрерывна в точке h, то есть $(d\lambda_5/dy)_{hc} = 0$.

Производя дифференцирование, получаем

$$\left(\frac{d\Gamma_1}{dy}\right)_1 = F_y + \Phi_y + F_\alpha\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_1 + F_\beta\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 + (F_\psi + \Phi_\psi)F_2 -$$
$$- K\lambda_2\left[\Phi_{2y} + \Phi_{2\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_1 + \Phi_{2\beta}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_1 + \Phi_{2\psi}F_2\right], \qquad (4.18)$$

$$\left(\frac{d\Gamma_1}{dy}\right)_2 = F_y + \Phi_y + F_\alpha\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hb} + F_\beta\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_{2hb} - (F_\psi + \Phi_\psi)\Phi_2 -$$
$$- K\lambda_2\left[\Phi_{2y} + \Phi_{2\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)_{2hb} + \Phi_{2\beta}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)_{2hb} - \Phi_{2\psi}\Phi_2\right], \qquad (4.19)$$

$$\left(\frac{d\Gamma_2}{dy}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d\Gamma_2}{dy}\right)_2 = 0.$$

Частная производная Φ_ψ была определена в (2.30). Прочие производные, входящие в (4.17), равны

$$F_\psi = -\frac{y^\nu \varphi^k z(\alpha) w(\alpha)}{\varkappa - 1} \frac{d\ln\varphi}{d\psi}\left\{\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\varkappa} - \right.$$
$$\left. - \lambda_3(1-\nu)\left[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} - \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta+\alpha)}{\varkappa}\right]\right\},$$

$$F_y = -\frac{\nu(\varkappa-1)}{y} F_\psi \Big/ \frac{d\ln\varphi}{d\psi}, \quad \Phi_y = -\frac{\nu(\varkappa-1)}{y}\Phi_\psi \Big/ \frac{d\ln\varphi}{d\psi},$$

$$\Phi_{2\psi} = -\frac{y^\nu \varphi^k z(\alpha)}{K(\varkappa-1)\sin(\vartheta-\alpha)} \frac{d\ln\varphi}{d\psi}, \quad \Phi_{2y} = \frac{\nu y^{\nu-1}\varphi^k z(\alpha)}{K\sin(\vartheta-\alpha)},$$

$$F_\alpha = \frac{2(\varkappa+1)y^\nu\varphi^k z(\alpha) w(\alpha)\sin\vartheta}{(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha\sin^2(\vartheta+\alpha)} \times$$
$$\times\left[\cos(\vartheta+\alpha) - \lambda_3(1-\nu)\sin(\vartheta+\alpha)\right],$$

$$F_\beta = -\frac{y^\nu\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)}{\cos\alpha\sin(\vartheta+\alpha)}\left[\sin(\vartheta-\alpha) + \lambda_3(1-\nu)\cos(\vartheta-\alpha)\right],$$

$$\Phi_{2\alpha} = \frac{2y^\nu\varphi^k z(\alpha)}{K(1-\cos 2\alpha)(\varkappa-\cos 2\alpha)\sin^2(\vartheta-\alpha)} \times$$
$$\times\left[(\varkappa+\cos^2 2\alpha)\sin\vartheta\sin\alpha - (1-\cos^2 2\alpha)\cos\vartheta\cos\alpha\right],$$

$$\Phi_{2\beta} = -\frac{y^\nu\varphi^k z(\alpha)\cos(\vartheta-\alpha)}{K\sin^2(\vartheta-\alpha)}.$$

Квадратичная форма (4.18), приведенная к главным осям, имеет вид

$$\delta^2 I_h = \left(A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right)\frac{\Delta_1^2}{2} +$$
$$+ \left(A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right)\frac{\Delta_2^2}{2},$$

где

$$\Delta_1 = \delta y_{h2}\sin\upsilon + \delta y_{h1}\cos\upsilon, \quad \Delta_2 = \delta y_{h2}\cos\upsilon - \delta y_{h1}\sin\upsilon,$$
$$\upsilon = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{B}{A-C}.$$

Для того, чтобы имело место неравенство $\delta^2 I_h \geqslant 0$ при любых значениях величин Δ_1 и Δ_2 или δy_{h1} и δy_{h2}, должны выполняться

неравенства

$$A \geqslant 0, \quad 4AC - B^2 \geqslant 0. \tag{4.20}$$

Таким образом, если экстремаль bh целиком принадлежит области, определяемой неравенствами (3.48) и (4.11), в точке h имеют место неравенства (4.20), а на характеристике ch выполняется неравенство $\Phi_\alpha \sin(\vartheta - \alpha) \leqslant 0$, то найденное решение отвечает выбранному типу необходимых условий минимума волнового сопротивления.

В случае неизэнтропического течения, как отмечалось в 3.2.3, величина Γ_1 равна нулю для всех функций сравнения. Поэтому равенства (4.18), (4.19) должны быть заменены равенствами $A_1 = B_1 = 0$.

При изэнтропических течениях выражения, входящие в (4.17), упрощаются за счет обращения в нуль членов, содержащих производную $d\varphi/d\psi$.

3.4.3. Разрывные безударные решения

Рассмотренное решение задачи 1 или эквивалентной ей задачи 3 имеет место, очевидно, не при всяких исходных данных. В этом решении исходная точка h экстремали bh, принадлежащая области cah, удовлетворяет неравенствам (3.48) и (4.11). Класс безударных решений вариационной задачи будет расширен, если удастся найти решения, в которых точка h области cah принадлежит области (4.12). Здесь будут рассмотрены решения этого типа. Подраздел 3.4.4 посвящен исследованию областей, в которых реализуются решения найденных видов.

Выделим в поле течения, определяемого изломом контура (рис. 3.22) кривую as, на которой α и ϑ связаны равенством (4.8) при $n = 0$. В задаче без ограничений на подъемную силу величина $\lambda_3 = 0$. Если же значение ζ задано, то величина λ_3, может быть определена только в результате решения всей задачи. Предполагается, что области cas соответствует часть области (4.11), а области, расположенной вниз по течению от линии as, — часть области (4.12). Для точек h, расположенных в области cas или ее части, могут быть найдены концевые точки контура b, которые можно считать заданными при постановке задачи.

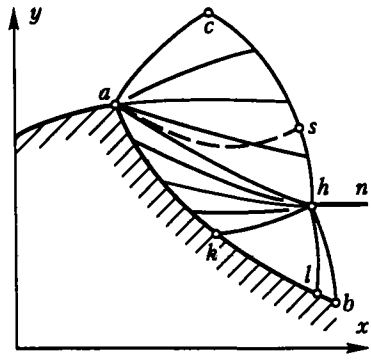


Рис. 3.22

Пусть точка h расположена так, как это показано на рис. 3.22, и принадлежит области (4.12). Это означает, что в плоскости α, ϑ, точка h расположена ниже кривой VSU, определяемой равенством (4.8) при $n = 0$. На рис. 3.23 точку h отметим символом h_0 в соответствии с индексацией 3.1.2. Очевидно, что из точки h_0 для получения решения вариационной задачи необходимо перейти некоторым путем h_0h_0' в область (4.11) так, что точка h_0' будет принадлежать этой области. При всяком допустимом непрерывном переходе по крайней мере часть кривой h_0h_0' принадлежит (рис. 3.24) области (4.12). Это означает, что участок h_0h_0' может быть проварьирован так, что величина χ уменьшится. Остается использовать разрывный переход из одной области в другую. При безударных течениях допустим только изэнтропический разрыв (3.1.2), обусловленный фокусировкой характеристик первого семейства ahk в точке h (рис. 3.22). Такой переход в плоскости α, ϑ (рис. 3.23) производится по характеристике второго семейства h_0h_1 и характеристике первого семейства h_1h_4.

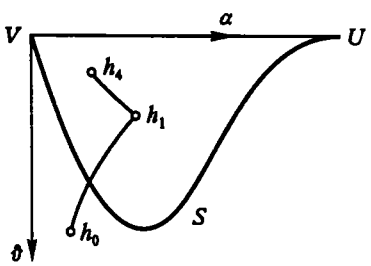


Рис. 3.23

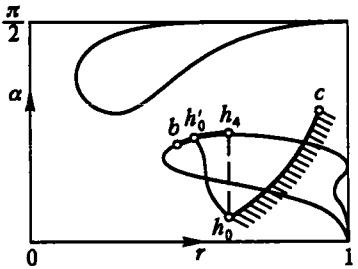


Рис. 3.24

Условия в точке разрыва. Снова рассмотрим функционал I в форме (2.31)

$$I = \int\limits_{Y=y_a}^{y_c} F\,dY + \int\limits_{y=y_h}^{y_c} \Phi\,dy + \int\limits_{y=y_b}^{y_h} \Phi\,dy \tag{4.21}$$

и равенство (2.32)

$$\int\limits_{Y=y_a}^{y_c} F\,dY + \int\limits_{y=y_h}^{y_c} \Phi\,dy = \int\limits_{Y=y_a}^{y_h} F\,dY. \tag{4.22}$$

Выражение для первой вариации δI в этом случае будет отличаться от (2.33) только членами, содержащими вариации от y_h. Найдем их. Снова используем двойную индексацию. Как и раньше, будем иметь

в виду, что функция берется в точке, указанной первым индексом, при подходе к ней со стороны точки, которая указана вторым индексом. Будем иметь в виду, что $\alpha_{hc} = \alpha_{ha}$, $\vartheta_{hc} = \vartheta_{ha}$.

Две координаты точки h произвольны и по-прежнему полностью определяют область cah. Свободны величины α_{hb} и ϑ_{hb}. Кроме того, допустима вариация (рис. 3.22) в точке h, соответствующая скольжению конца характеристики bt по характеристике qt (рис. 3.9). Вариации величины y_h в направлении касательных к характеристикам hc и ha обозначим, соответственно, через δy_{hc} и δy_{ha}.

При варьировании δy_{ha} удобно использовать равенство (4.22). Приращение первых двух членов в правой части (4.21) равно $F_{ha}\delta y_{ha}$, а приращение третьего члена равно $\Phi_{hb}\delta y_{ha}$.

Для варьирования по направлению характеристики второго семейства удобно использовать I в форме (4.21). При этом первый член не меняется, второй уменьшается на величину $\Phi_{hc}\delta y_{hc}$, а третий возрастает на величину $\Phi_{hb}\delta y_{hc}$.

При варьировании Φ на интервале bh, как и в (2.21), появляются члены с вариациями от производных $\lambda_5\delta\beta'$ и $K\lambda_2\delta\psi'$. Можно сказать заранее, что величина $\lambda_5(y)$ равна нулю на bh, т. к. участок контура kb должен обладать минимальным сопротивлением, и прежнее решение должно сохранить силу на bh. Таким образом, интегрирование по частям дает только один член, содержащий переменные величины в точке h. Этот член равен $K\lambda_2\delta\psi_h$. Ввиду независимости вариаций δy_{hc} и δy_{ha} можно записать, вспоминая (2.11) и (2.13),

$$\delta\psi_h = (F_{2ha} + \Phi_{2hb})\delta y_{ha} - (\Phi_{2hc} - \Phi_{2hb})\delta y_{hc}.$$

Собирая члены с δy_{hc} и δy_{ha}, получаем, что часть вариации δI, зависящая от этих величин, равна

$$\left[F_{ha} + \Phi_{hb} + K\lambda_2(F_{2ha} + \Phi_{2hb})\right]\delta y_{ha} + \left[\Phi_{hb} - \Phi_{hc} - K\lambda_2(\Phi_{2hc} - \Phi_{2hb})\right]\delta y_{hc}.$$

Приравнивая нулю множители при вариациях δy_{ha} и δy_{hc}, получаем, соответственно, два условия в точке разрыва. В развернутой форме они имеют вид

$$\left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta+\alpha)} - \right.$$

$$\left. - \lambda_3(1-\nu)z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} - \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta+\alpha)}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta+\alpha)}{y^\nu\varphi^k}\right\}_0 +$$

$$+ \left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \right.$$

$$- \lambda_3(1-\nu)z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} + \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{\varkappa}\Big] -$$
$$- \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{y^\nu\varphi^k}\Big\}_4 = 0, \tag{4.23}$$

$$\Big\{z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\Big] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)} -$$
$$- \lambda_3(1-\nu)z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} + \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{\varkappa}\Big] - \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{y^\nu\varphi^k}\Big\}_4 -$$
$$- \Big\{z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\Big] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)} -$$
$$- \lambda_3(1-\nu)z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\sin\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} + \frac{\sin\alpha\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{\varkappa}\Big] -$$
$$- \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{y^\nu\varphi^k}\Big\}_0 = 0. \tag{4.24}$$

Здесь индексы hc (или ha) и hb заменены, соответственно, на 0 и 4 в соответствии с индексацией 3.1.2. Входящие в (4.23), (4.24) величины λ_2, λ_4 определяются равенствами (2.37), (2.36)

$$\lambda_{2h} = \Big\{\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\big[\lambda_3(1-\nu)\sin(\vartheta+\alpha) - \cos(\vartheta+\alpha)\big]\Big\}_4,$$
$$\lambda_4 = \Big\{y^\nu\varphi^k z(\alpha)w(\alpha)\Big[\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} + \lambda_3(1-\nu)\Big(\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\Big)\Big]\Big\}_4. \tag{4.25}$$

В соответствии с результатами 3.2.4 в каждой точке t характеристики bh должно выполняться условие (2.34). В силу непрерывности функций на bh это условие должно выполняться и в точке h. Величинам в равенстве (2.34) следует приписать индекс hb или 4.

Необходимые условия экстремума при схемах решения, изображенных на рис. 3.14 и 3.22, отличаются только тем, что два условия (2.18) первого случая заменяются двумя условиями (4.23), (4.24) во втором случае. Следовательно, при схеме рис. 3.22 количество произволов в определении функций равно количеству условий, как и при схеме рис. 3.14.

Для решения задачи необходимо найти в области cah точку h с некоторыми величинами α_{hc}, ϑ_{hc} и значения λ_{2h}, λ_3, λ_4, α_{hb}, ϑ_{hb} так, чтобы были удовлетворены равенства (2.7), (2.8), (2.9), (2.36), (2.37), (4.23), (4.24).

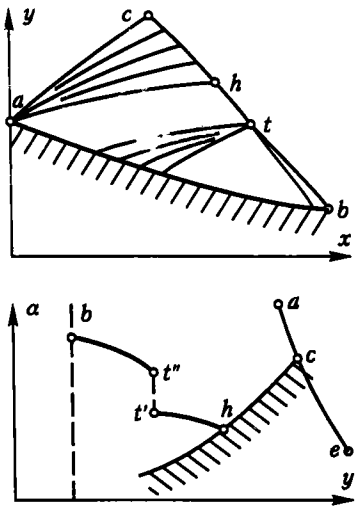


Рис. 3.25

Покажем, что разрыв функций $\alpha(y)$ и $\vartheta(y)$ не может иметь места в некоторой промежуточной точке t экстремали (рис. 3 25). Отличие от схемы рис. 3.9 или 3.14 заключается в следующем. Появляются дополнительно три произвольные величины: y_t, $\alpha_{tb} - \alpha_{th}$, $\vartheta_{tb} - \vartheta_{th}$. Разрыв в точке t порождает два условия, аналогичные (4.23) и (4.24). Уравнения (2.36) и (2.37) должны выполняться по обе стороны от точки t, то есть вместо двух условий при непрерывном решении имеем четыре условия, что дает по сравнению со схемой рис. 3.9 еще два дополнительных условия. Итак, четыре дополнительных условия соответствуют трем дополнительным произволам. Задача действительно неразрешима при разрыве в промежуточной точке экстремали. Существенно, что при схеме решения, изображенной на рис. 3.22, ударная волна hn не оказывает влияния на течение внутри треугольника abc.

Если величины α_0, ϑ_0 рассматривать как параметры, то четыре уравнения (4.23)–(4.25) содержат четыре неизвестные величины λ_4, ϑ_4, λ_{2h}, λ_4. Решение этих уравнений допустимо, если разрыв принадлежит классу P^2, определенному в 3.1.2.

Отметим, что равенства $\alpha_4 = \alpha_0$, $\vartheta_4 = \vartheta_0$ представляют собой корень уравнений (4.23)–(4.25) кратности два. Если при этом α_0 и ϑ_0 связаны равенством $T(\alpha_0, \vartheta_0) = 0$, где $T(\alpha, \vartheta)$ определяется в (4.6), то имеем корень кратности три. Приведем примеры решений уравнений (4.23)–(4.25) при $\lambda_3 = 0$, $\varkappa = 1{,}4$, а также уравнений (1.24), в которых индекс 2 заменен на 4 (таблица 1).

Таблица 1.

α_0	ϑ_0	α_1	ϑ_1	α_4	ϑ_4
0,0500	−0,3000	0,0914	−0,0991	0,0887	−0,0860
0,1000	−0,5000	0,1711	−0,1807	0,1679	−0,1671
0,1664	−0,6686	0,2670	−0,2789	0,2643	−0,2693
0,2000	−0,9000	0,3663	−0,3475	0,3586	−0,3262

Эти решения представляют собой разрывы класса P^2. Точки α_0, ϑ_0 и α_4, ϑ_4 в плоскости α, ϑ лежат по разные стороны от кривой $T(\alpha, \vartheta) = 0$ при $\lambda_3 = 0$.

Порядок расчета. Предполагается, что решение имеет рассмотренный здесь вид. Вначале строится течение, определяемое исходной характеристикой ae и характеристикой второго семейства, выродившейся в точку a и определяемой равенствами

$$x = x_a, \quad y = y_a, \quad \vartheta + f(\alpha) = \Theta_a + f(A_a).$$

Выберем в поле этого течения некоторую точку h. Величины α и ϑ в этой точке следует обозначить через α_0 и ϑ_0. Выберем также некоторую величину λ_3. Определяются α_4, ϑ_4, λ_{2h}, λ_4, удовлетворяющие уравнениям (4.23)–(4.25). Необходимо убедиться в том, что полученное решение представляет разрыв класса P^2. Далее производится интегрирование системы уравнений (2.35)–(2.37), (2.30), (2.11) с начальными данными $\alpha(y_h) = \alpha_4$, $\vartheta(y_h) = \vartheta_4$, $\lambda_2(y_h) = \lambda_{2h}$, $\psi(y_h) = \psi_h$. Интегрирование продолжается до такого $y = y_*$, при котором $\psi(y_*) = \psi_a$. Величины X и ζ вычисляются по формулам (2.8), (2.9) при $y_b = y_*$. Решение задачи найдено, если координаты x_h, y_h и величина λ_3 выбраны так, что $x_a + X = x_b$, $y_* = y_b$, где x_b, y_b — заданные величины, а ζ равно заданному значению. На этом этапе может быть проверено выполнение необходимых условий минимума χ.

Построение искомого контура ab проводится в следующем порядке (рис. 3.22). По величинам α_0, ϑ_0 и α_4, ϑ_4 определяются значения α_1, ϑ_1, удовлетворяющие уравнениям (1.24), в которых индекс 2 заменен на 4. Строится решение задачи Гурса для уравнений (1.20) с известными данными на характеристике первого семейства ah и на характеристике второго семейства, выродившейся в точку h и определяемой равенствами

$$x = x_h, \quad y = y_h, \quad \vartheta + f(\alpha) = \vartheta_0 + f(\alpha_0)$$

на интервале $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Это определяет, в частности, характеристику первого семейства kh. Далее, находится решение задачи Гурса при известных данных на характеристике второго семейства bh и характеристике первого семейства, выродившейся в точку h и определяемой равенствами

$$x = x_h, \quad y = y_h, \quad \vartheta - f(\alpha) = \vartheta_4 - f(\alpha_4)$$

на интервале $\alpha_4 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Этот расчет дает, в частности, характеристику lh. Наконец, решением задачи Гурса при известных характеристиках kh и lh определяется течение в области khl. Искомый контур является линией тока $\psi = \psi_a$ найденного течения. Сопротивление найденного тела определяется при помощи формулы (2.6).

В 3.2.5 был отмечен особый случай $\nu = 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $d\varphi = 0$. Было выяснено, что при схеме рис. 3.14 задача не имеет решения.

Эта задача имеет решение, если допустить разрыв функций на искомой характеристике bc. Решение задачи совершенно аналогично рассмотренному здесь (рис. 3.22). Соотношения в точке разрыва выводятся точно так же и совпадают с (4.23), (4.24). В этом случае величины λ_2, λ_3, λ_4 содержатся в четырех равенствах (2.44), (2.45), (4.23), (4.24), что делает задачу разрешимой.

Здесь, как и всегда, следует сделать оговорку, что величина ζ не может задаваться произвольно, а должна быть заключена в некоторых пределах. Это следует из того, например, что при фиксированном волновом сопротивлении χ величина ζ должна иметь ограниченный максимум или минимум.

3.4.4. Области непрерывных и разрывных решений

Исследование областей, в которых реализуются те или иные решения, удобнее всего производить в плоскости α, ϑ. Такое исследование связано с трансцендентными системами уравнений, например, с системой (4.23)–(4.25) или (3.57), (3.58), (3.44), (3.45) и с решениями краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений, например, (1.20), (2.40)–(2.43). Анализ областей существования различных решений в общем виде здесь не представляется возможным. Некоторые необходимые результаты могут быть получены при помощи вычислений. Ряд заключений может быть получен на основании уже имеющихся сведений о решениях вариационных задач.

Плоские течения. Наиболее прост изэнтропический случай, поскольку для него любая экстремаль в плоскости α, ϑ изображается точкой. Обратимся вначале к этому случаю.

Будем называть областью Ω ту часть плоскости α, ϑ, которая определяется неравенствами (3.48) и (4.11). Точка h найденного решения принадлежит области Ω, если решение непрерывно. В этом смысле область Ω можно назвать областью непрерывных решений.

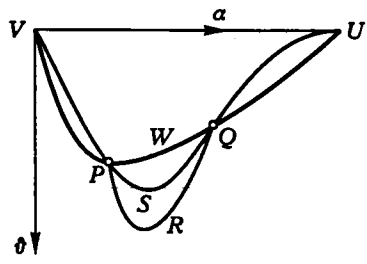


Рис. 3.26

Допустим теперь (рис. 3.26), что линии VSU и VWU, ограничивающие снизу области (4.11) и (3.48), пересекаются в точках P и Q. Вспомним, что соотношения (4.23)–(4.25) позволяют, вообще говоря, осуществлять переход от точек области (4.12), лежащих ниже кривой VSU, к точкам области (4.11). Должна существовать кривая PRQ, являющаяся геометрическим местом точек $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, для которых решение

уравнений (4.23)–(4.25) удовлетворяет уравнению (3.45) при $\alpha = \alpha_4$, $\vartheta = \vartheta_4$ на отрезке PQ. Точкам $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ области $PRQS$ с точки зрения решения уравнений (4.23)–(4.25) соответствуют точки $\alpha = \alpha_4$, $\vartheta = \vartheta_4$ области $PSQW$. Экстремали в области $PSQW$ не дают решения задач 2 и 4. Поэтому интерес могут представлять только точки $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ области, лежащей ниже ломаной $VPRQU$, в которой участки VP и QU определяются уравнением (4.8) при $n = 0$. Нижняя граница этой области определяется тем условием, что разрыв в точке h должен принадлежать классу P^2. Часть плоскости α, ϑ, лежащую ниже ломаной $VPRQU$ и приводящую в указанной смысле к величинам $\alpha = \alpha_4$, $\vartheta = \vartheta_4$ из области Ω, назовем областью Ω_2. Таким образом, область Ω_2 является областью разрывных безударных решений.

Наконец, область $PRQW$ назовем областью Ω_3. Точкам $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ этой области соответствуют разрывные решения с $\varphi_{hb} \neq \varphi_0$. Величины α_0, ϑ_0, φ_0 связаны с искомыми значениями $\alpha_4 = \alpha_{hb}$, $\vartheta_4 = \vartheta_{hb}$, φ_{hb} на экстремали уравнениями (3.57), (3.58), где Λ_3, Λ_4 определяются равенствами (3.39), (3.44). Сами величины $\alpha = \alpha_4$, $\vartheta = \vartheta_4$ на экстремали подчиняются уравнению (3.45).

Точкам $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ области Ω_2, также соответствуют разрывные решения этого типа с $\varphi_{hb} \neq \varphi_0$. Сопоставляя условия при изэнтропическом разрыве (4.23)–(4.25) с условиями на произвольном разрыве (3.57), (3.58), (3.39), (3.44), (3.45), можно убедиться в том, что эти условия совпадают на кривой PRQ, поскольку по определению этой кривой $\varphi_{hb} = \varphi_0$, а величины $\alpha = \alpha_{hb}$, $\vartheta = \vartheta_{hb}$ удовлетворяют равенству (3.45).

Условия на произвольном разрыве могут допускать несколько корней.

Отметим результаты, к которым привели некоторые попытки отыскания решений системы (3.57), (3.58), (3.39), (3.44), (3.45). При $\varkappa = 1{,}4$ точкам $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ из области Ω_3 соответствуют два типа корней. Первые корни приводят к недостижимым разрывам при $\varphi_{hb} > \varphi_0$ (пример: $\alpha_0 = 0{,}4500$, $\vartheta_0 = -0{,}6038$, $\varphi_0 = 0{,}4167$, $\alpha_{hb} = 0{,}5000$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5889$, $\varphi_{hb} = 0{,}4668$), вторые — к разрывам с недопустимым неравенством $\varphi_{hb} < \varphi_0$ (примеры: первый, $\alpha_0 = 0{,}4725$, $\vartheta_0 = -0{,}6500$, $\varphi_0 = 0{,}4361$, $\alpha_{hb} = 0{,}5000$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5889$, $\varphi_{hb} = 0{,}4305$; второй, $\alpha_0 = 0{,}4470$, $\vartheta_0 = -0{,}7000$, $\varphi_0 = 0{,}4140$, $\alpha_{hb} = 0{,}5000$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5889$, $\varphi_{hb} = 0{,}4096$). При том же значении $\varkappa$ точкам $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ из области Ω_2 также соответствуют два типа корней, но оба типа при $\varphi_{hb} > \varphi_0$ представляют собой недостижимые разрывы (примеры решений первого типа: первый, $\alpha_0 = 0{,}2500$, $\vartheta_0 = -0{,}6560$, $\varphi_0 = 0{,}2008$, $\alpha_{hb} = 0{,}5000$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5889$, $\varphi_{hb} = 0{,}5821$; второй, $\alpha_0 = 0{,}3500$, $\vartheta_0 = -0{,}6318$, $\varphi_0 = 0{,}3173$, $\alpha_{hb} = 0{,}5000$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5889$, $\varphi_{hb} = 0{,}5012$; примеры решений второго типа: первый, $\alpha_0 = 0{,}3800$, $\vartheta_0 = -0{,}8476$, $\varphi_0 = 0{,}3493$,

$\alpha_{hb} = 0{,}5261$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5874$, $\varphi_{hb} = 0{,}3707$; второй, $\alpha_0 = 0{,}3300$, $\vartheta_0 = -0{,}9847$, $\varphi_0 = 0{,}2951$, $\alpha_{hb} = 0{,}5914$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5772$, $\varphi_{hb} = 0{,}3540$).

В то же время для точки $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, принадлежащей кривой PRQ разрыв оказывается допустимым ($\alpha_0 = 0{,}4265$, $\vartheta_0 = -0{,}7365$, $\varphi_0 = 0{,}3952$, $\alpha_{hb} = 0{,}5000$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5889$, $\varphi_{hb} = 0{,}3952$). Этот разрыв по определению PRQ является изэнтропическим. Допустимыми оказываются и изэнтропические разрывы, определяемые уравнениями (16.3)–(16.5), при $\alpha = \alpha_0$, $\vartheta = \vartheta_0$ из той окрестности области Ω_2, которая примыкает к PRQ (примеры: первый, $\alpha_0 = 0{,}3800$, $\vartheta_0 = -0{,}8476$, $\alpha_{hb} = 0{,}5270$, $\vartheta_{hb} = -0{,}5408$; второй, $\alpha_0 = 0{,}3300$, $\vartheta_0 = -0{,}9847$, $\alpha_{hb} = 0{,}5539$, $\vartheta_{hb} = -0{,}4880$). Аналогичные результаты имеют место при $\varkappa = 17/15$ и $\varkappa = 5/3$.

В случае плоских течений с переменной энтропией исследование существенно осложняется тем, что экстремали перестают быть точками в плоскости α, ϑ. Переменность $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$, $\varphi(y)$ на характеристике bh может приводить к тому, что для некоторых областей изменения исходных данных вариационной задачи решения рассмотренных здесь видов не имеют места. Это осложнение может проявиться, например, в том, что при попытке отыскания решения экстремаль переходит из области Ω в область Ω_2 или Ω_3.

В том случае, когда кривая VWU лежит целиком ниже кривой VSU, решения с ударными волнами рассмотренного вида не существуют. Решения задач 2 и 4 оказываются безударными. Если кривая VWU лежит целиком выше кривой VSU, то это приводит к очевидному расширению области $PRQW$.

Осесимметричные течения. Рассмотрение областей, проведенное для плоских изэнтропических течений, остается в силе и для этого случая. Однако дополнительные трудности здесь связаны с тем обстоятельством, что в безударных решениях экстремали в плоскости α, ϑ изображаются отрезками кривых.

В 3.2.5 было установлено, что знак величины ϑ на экстремали постоянен. Если $\vartheta < 0$, то в области (4.11) имеем $\vartheta - \alpha < 0$. Из (3.23) тогда заключаем, что при движении по характеристикам второго семейства в сторону уменьшения ψ величина y уменьшается. Зависимость $\alpha(y)$ или $\alpha(\tau)$ на экстремалях, частный вид которой приведен на рис. 3.11, показывает, что такое движение по экстремалям ведет в сторону линии с бесконечными ускорениями, а в плоскости α, ϑ — в сторону кривой VSU. Следовательно, в осесимметричном случае попытка отыскания решения одного из рассмотренных видов может привести к тому, что экстремаль не будет принадлежать целиком области Ω. Это обстоятельство приводит к новым ограничениям области существования найденных решений для внешних течений. Подобное ограничение не возникает, если $\vartheta > 0$ в начальной точке экстремали, поскольку в этом случае $\vartheta > 0$ на всей экстремали.

Может оказаться, что при некоторых исходных данных вариационная задача имеет два решения, например, разрывное безударное и разрывное решение с ударными волнами. Предпочтение, конечно, следует отдать тому из этих двух относительных минимумов, который дает меньшую величину волнового сопротивления.

3.4.5. Примеры расчетов

Для иллюстрации метода приведем ряд примеров расчетов. Вместо величины волнового сопротивления будем приводить коэффициент волнового сопротивления c_x.

Тела вращения с головным конусом. Задается полуугол раствора конуса ϑ_k, число Маха M набегающего потока, координаты концевой точки образующей конуса a и координаты точки b. Число M связано с w_∞ формулой

$$\mathrm{M} = \left[\frac{2w_\infty^2}{\varkappa + 1 - (\varkappa - 1)w_\infty^2}\right]^{1/2}.$$

Исходная характеристика ae является характеристикой конического течения. Величина c_x определяется формулой

$$c_x = \frac{2(\chi_k + \chi - \pi p_\infty y_b^2)}{\pi y_b^2 \rho_\infty w_\infty^2},$$

где χ_k — сила сопротивления головного конуса; χ — сопротивление части тела вращения с образующей ab, найденной из решения вариационной задачи; p_∞, ρ_∞, w_∞ — соответственно, давление, плотность и скорость газа в набегающем потоке. Принимается, что $\varkappa = 1{,}4$.

Основные результаты примеров расчетов сведены в таблицу 2.

Таблица 2.

№	M	ϑ_k	x_a	y_a	x_b	y_b	c_x
1	2	20°	2,748	1,000	9,196	2,741	0,207
2	2	20°	2,748	1,000	9,611	2,480	0,160
3	2	20°	2,748	1,000	10,173	2,102	0,121
4	2	20°	2,748	1,000	10,982	1,514	0,137
5	3	25°	2,145	1,000	4,631	1,998	0,344
6	3	25°	2,145	1,000	4,965	1,884	0,268
7	3	25°	2,145	1,000	5,419	1,709	0,215
8	3	25°	2,145	1,000	6,067	1,419	0,220
9	5	30°	1,732	1,000	2,935	1,640	0,491
10	5	30°	1,732	1,000	3,210	1,603	0,382
11	5	30°	1,732	1,000	3,615	1,525	0,314
12	5	30°	1,732	1,000	4,247	1,359	0,315

Здесь № обозначает условный номер примера.

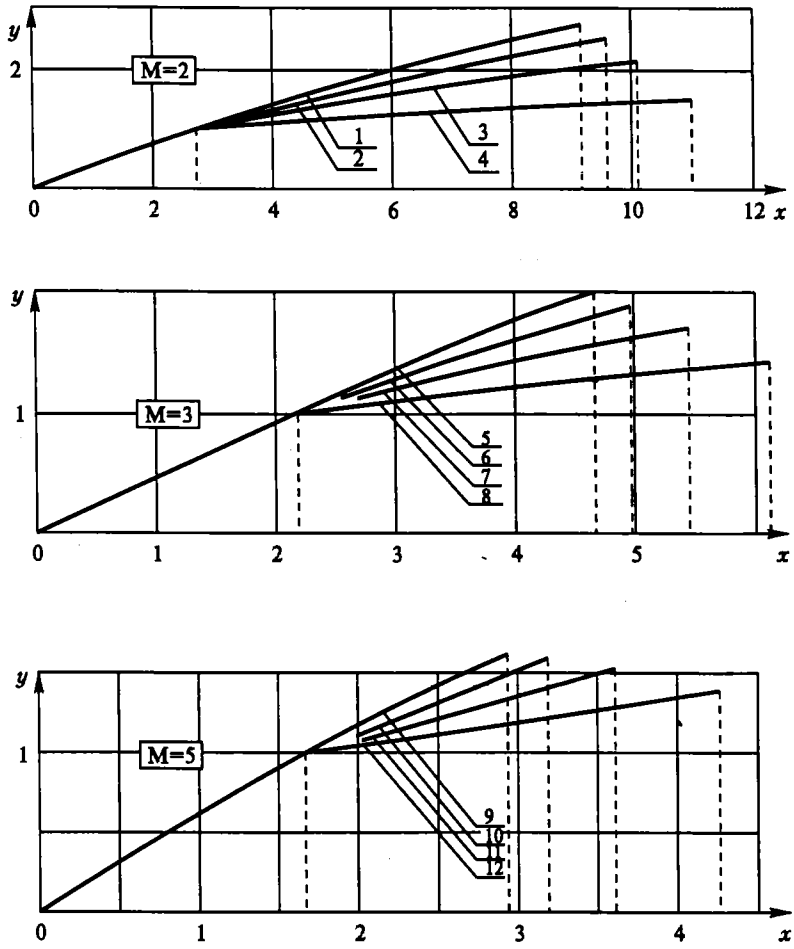


Рис. 3.27

Образующие найденных тел вращения изображены на рис. 3.27. Они пронумерованы в соответствии с таблицей. В приведенных примерах решения непрерывны. Образующие 1, 5, 9 дают частные примеры решений, в которых реализуется двусторонний экстремум. Угол наклона образующей ab к оси x в точке a равен ϑ_k. Излом контура отсутствует, и вся искомая характеристика второго семейства является экстремалью.

Для сравнения приведем результаты расчета сопротивления некоторых тел неоптимальной формы. Если при M = 3 образующую ab

заменить продолжением образующей конуса с $\vartheta_k = 25°$ и прямой линией с $y = y_b$, то $c_x = 0{,}419$. Таким образом, проигрыш в величине c_x всего тела по сравнению с телом № 7 составляет около 94%. Коэффициент волнового сопротивления c_x конуса с $\vartheta_k = 17°30'$ при M = 3 равен 0,226. Образующая такого конуса соединяет вершину головного конуса и точку b тела № 7. Конечно, последний пример не имеет непосредственного интереса, поскольку угол $\vartheta_k = 17°30'$ не совпадает с углом ϑ_k тела № 7.

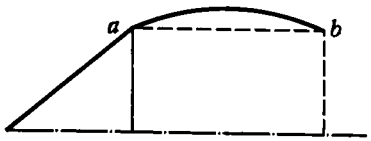


Рис. 3.28

Интересно отметить следующий факт. Если в рассматриваемом здесь примере тел с головным конусом задать $y_b = y_a$, то, казалось бы, наилучшей образующей должна быть прямая, которая дает $\chi = 0$. Однако, расчеты показывают, что искомая образующая криволинейна. Такая образующая, схема которой изображена на рис. 3.28, дает «тягу» — силу, направленную навстречу набегающему потоку газа ($\chi < 0$).

Кормовые части полубесконечного цилиндра. Задается число M равномерного потока, обтекающего полубесконечный цилиндр, координаты концевой точки образующей цилиндра a и координаты точки b. Исходная характеристика ae в прямолинейна. Величина c_x определяется формулой

$$c_x = \frac{2\left[\chi - \pi p_\infty (y_a^2 - y_b^2)\right]}{\pi y_a^2 \rho_\infty w_\infty^2}.$$

Результаты примеров расчетов при $\varkappa = 1{,}4$ сведены в таблицу 3.

Таблица 3.

№	M	x_a	y_a	x_b	y_b	c_x
13	2	0	1	1,4833	0,9167	0,0080
14	2	0	1	1,6022	0,8067	0,0345
15	2	0	1	1,7527	0,6529	0,0828
16	2	0	1	1,9669	0,3987	0,1587
17	3	0	1	1,8474	0,9139	0,0043
18	3	0	1	2,028	0,8028	0,0176
19	3	0	1	2,257	0,6509	0,0404
20	3	0	1	2,595	0,4010	0,0741
21	5	0	1	2,164	0,9305	0,0002
22	5	0	1	2,404	0,8427	0,0046
23	5	0	1	2,701	0,7262	0,0115
24	5	0	1	3,102	0,5557	0,0225

Образующие этих тел вращения изображены на рис. 3.29. Пронумерованы они также в соответствии с таблицей. В этих примерах решения также непрерывны.

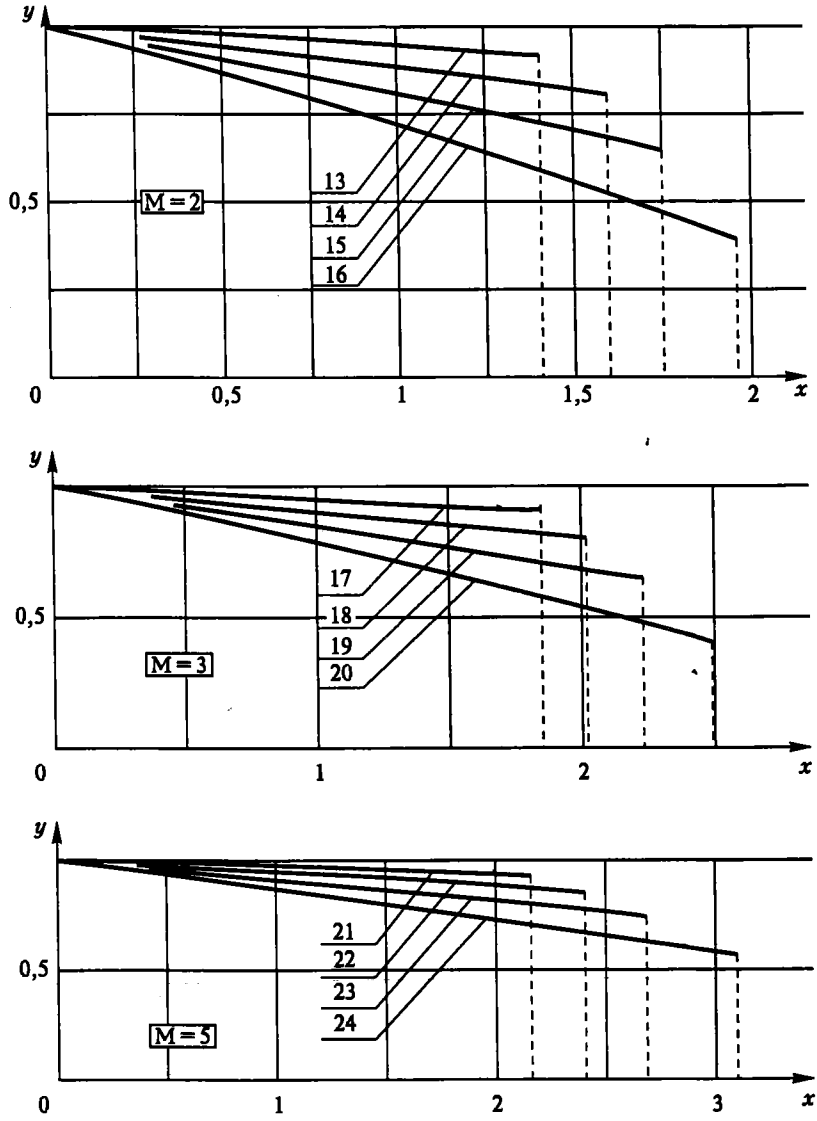

y
0,5
M = 2
13
14
15
16
0
0,5
1
1,5
2
x
y
0,5
M = 3
17
18
19
20
0
1
2
x
y
0,5
M = 5
21
22
23
24
0
1
2
3
x

Рис. 3.29

Разрывные безударные решения для плоских профилей. Задается число Маха M набегающего равномерного потока параллельного оси x и координаты точек a и b. Исходная характеристика ae прямолинейна. Величина c_x определяется формулой

$$c_x = \frac{2[\chi - p_\infty(y_a - y_b)]}{(y_a - y_b)\rho_\infty w_\infty^2}.$$

Течение в областях cah, ahk, lhb определяется решением Прандтля—Майера. Участок образующей kl прямолинеен. Некоторые результаты расчетов приведены в таблице 4. Во всех примерах $x_a = y_a = 0$, $\varkappa = 1{,}4$.

Таблица 4.

№	M	x_k	$-y_k$	x_l	$-y_l$	x_b	$-y_b$	c_x	$\bar{c}_x$
25	1,974	0,4510	0,4221	0,5371	0,4533	0,5409	0,4546	0,3451	0,3483
26	2,856	0,4418	0,2739	0,5497	0,3048	0,5524	0,3055	0,1628	0,1640
27	4,675	0,4714	0,2111	0,5269	0,2213	0,5298	0,2217	0,0628	0,0633
28	8,909	0,4849	0,1276	0,5149	0,1305	0,5177	0,1308	0,0176	0,0177

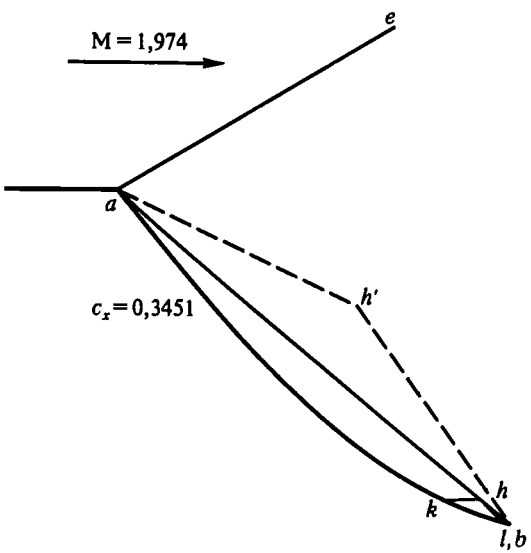


Рис. 3.30

Здесь $\bar{c}_x$ — коэффициент сопротивления прямолинейного профиля ab. Контур профиля № 25 изображен на рис. 3.30. Там же показаны некоторые характеристики. Точка h' находится на пересечении последней характеристики течения Прандтля—Майера и характеристики второго семейства, проходящей через точку b, при обтекании прямолинейного профиля ab.

По поводу примеров из таблицы 4 в подразделе 3.5.2 будет сделано замечание, связанное с изменением условий в концевой точке b при формулировке вариационной задачи. Отказ от жесткого концевого условия позволяет в некоторых случаях уменьшить волновое сопротивление профилей.

В предыдущих разделах изучались вариационные задачи для внешних течений. В следующем разделе будут рассмотрены внутренние течения и задачи со свободным концом искомого контура.

3.5. Оптимальные сопла Лаваля

3.5.1. Вариационные задачи для внутренних течений

Под внутренними течениями будем понимать течения, ограниченные в плоскости x, y жесткой стенкой сверху. Для плоских течений различия между внешними и внутренними течениями по существу нет, поскольку одно течение получается из другого зеркальным отображением относительно оси x. В осесимметричном случае различие между такими течениями существенно.

К задачам о внутренних течениях приводит, например, рассмотрение сопел Лаваля (рис. 3.31). Допустим для простоты, что линия Oa, на которой скорость газа равна скорости звука ($\alpha = \pi/2$), прямолинейна и совпадает с осью y. Величина ϑ на Oa равна нулю. Линия ab представляет жесткую стенку сопла. Течение при $x > 0$ является сверхзвуковым.

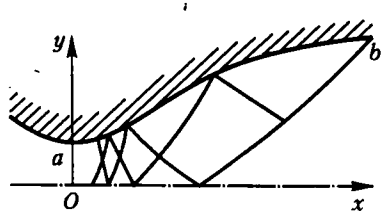


Рис. 3.31

Пусть при заданных точках a и b необходимо найти контур ab, обеспечивающий наибольшую тягу χ,

$$\chi = 2\pi \int_{R=y_a}^{y_b} pRdR,$$

где интегрирование производится по контуру ab, а $R = y$ на ab. Основное отличие этой задачи от внешней заключается в том, что характеристики первого и второго семейств меняются ролями. Избегая рассуждений и выкладок аналогичных уже приведенным, дадим лишь основные результаты при $\nu = 1$.

Течением, в котором производная $d\alpha/dl$ (l увеличивается при движении вдоль характеристики первого семейства вниз по течению) по направлению характеристик первого семейства не может быть уменьшена никакими изменениями контура ab, является течение (рис. 3.32), определяемое изломом контура ab, в точке a на угол $\vartheta_{ab} > 0$. Использование

этого течения в области Oae является необходимым для разрешимости вариационной задачи, как и в случае внешних течений. Метод расчета течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью развит в [35] и описан в Приложении 1. Таблицы параметров такого течения содержатся в [36].

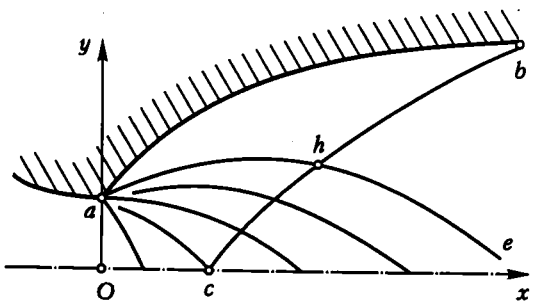


Рис. 3.32

Вариационная задача об оптимальном сопле может быть сформулирована следующим образом.

Задача 5. Найти замыкающую характеристику ae течения свободно расширяющегося газа и функции $\alpha(y)$ и $\varphi(y)$ на характеристике bh, из которых $\alpha[y(\psi)]$ как функция от ψ принадлежит классу D_1^3, а $\varphi[y(\psi)]$ кусочно непрерывна, реализующие максимум функционала

$$\bar{X} = \frac{X}{2\pi} = -\int\limits_{Y=y_a}^{y_h} \Phi_1(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY - \int\limits_{y=y_b}^{y_h} F_1(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy \qquad (5.1)$$

при изопериметрических условиях

$$\Psi \equiv 0 = \int\limits_{Y=y_a}^{y_h} \Phi_2(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY + \int\limits_{y=y_b}^{y_h} F_2(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy, \qquad (5.2)$$

$$X = -\int\limits_{Y=y_a}^{y_h} \Phi_4(A, \Theta)\, dY - \int\limits_{y=y_b}^{y_h} F_4(\alpha, \vartheta)\, dy, \qquad (5.3)$$

дифференциальной связи

$$\bar{F}_5 \equiv \frac{d\beta}{dy} + \frac{\sin\vartheta \sin\alpha}{y \sin(\vartheta + \alpha)} - \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa - 1)\varphi} \frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad (5.4)$$

при заданных величинах y_a, y_b, X и функции $\varphi_0(\psi)$ и при условии

$$\varphi(\psi) \geqslant \varphi_0(\psi).$$

Величина ψ на ah определяется равенством

$$\psi = \psi_a - \int_{Y=y_a}^{Y} \Phi_2(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY.$$

Непрерывность в точке h, если таковая имеет место, выражается равенствами

$$\alpha(y_h) = A(y_h,) \quad \vartheta(y_h) = \Theta(y_h).$$

Определение класса D_1^3 полностью совпадает с определением класса D_2^3, если характеристики первого и второго семейств меняются ролями. Функции $A(Y)$, $\Theta(Y)$ представляют собой, соответственно, $\alpha(y)$, $\vartheta(y)$ на характеристике ah. Функции Φ_1, Φ_2, Φ_4, F_1, F_2, F_4 были определены в 3.2.2.

Непрерывные решения. Если задача 5 имеет непрерывное решение, то точка h должна принадлежать области

$$\begin{aligned} &G_1(\alpha, 1) < \vartheta < G_1(\alpha, 0), \\ &H_1(\alpha, 1) < \vartheta < H_1(\alpha, 0), \\ &0 < \alpha < \pi/2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где

$$G_1(\alpha, n) = \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa - 1 - \cos 2\alpha} - n\pi,$$

$$H_1(\alpha, n) = \operatorname{arctg} \frac{(1 + \cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{\varkappa + \cos^2 2\alpha} - n\pi.$$

Две координаты точки h выбираются следующим образом. Величины $\lambda_2(y_h)$ и λ_4 вычисляются по формулам

$$\lambda_{2h} = -\left[\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\cos(\vartheta - \alpha)\right]_h,$$

$$\lambda_4 = \left[y\varphi_0^k z(\alpha) w(\alpha) \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha}\right]_h.$$

Система уравнений, определяющая функции α, ϑ, ψ, λ_2,

$$\begin{aligned} &y\varphi_0^k z(\alpha) w(\alpha) \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha} = \lambda_4, \\ &-\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\cos(\vartheta - \alpha) = \lambda_2(y), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dy} = \frac{y\varphi^k}{K(\varkappa-1)}\frac{d\ln\varphi_0}{d\psi}z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\sin\vartheta\sin\alpha}{\sin(\vartheta+\alpha)\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right],$$

$$\frac{d\psi}{dy} = -\frac{y\varphi^k z(\alpha)}{K\sin(\vartheta+\alpha)}$$

с начальными данными

$$\alpha(y_h) = \alpha_h, \quad \vartheta(y_h) = \vartheta_h, \quad \psi(y_h) = \psi_h, \quad \lambda_2(y_h) = \lambda_{2h}$$

интегрируется от $y = y_h$ до такого $y = y_*$, при котором $\psi(y_*) = \psi_a$. Последнее равенство эквивалентно выполнению условия (5.2). Вычисляется величина $x_* = x_a + X_*$, где X_* определяется формулой (5.3) при y_b, замененном на y_*. Координаты точки h выбраны правильно, если при этом выполняются равенства $y_* = y_b$, $X_* = X$.

Известные теперь характеристики ah и hb позволяют найти течение в ahb и искомый контур ab. Тяга сопла вычисляется по формуле (5.1)

Разрывные безударные решения. Если решение такого типа имеет место, то точка h должна принадлежать области

$$H_1(\alpha, 0) < \vartheta < H_1(\alpha, -1), \quad 0 < \alpha < \pi/2. \tag{5.7}$$

Расчет для этого случая производится следующим образом (рис. 3.33). В поле течения свободно расширяющегося газа Oah выбирается некоторая точка h. Величины α и ϑ в этой точке записываются как α_0 и ϑ_0. Определяются величины α_4, ϑ_4, λ_{2h}, λ_4, удовлетворяющие соотношениям на разрыве

$$\left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta-\alpha)} - \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta-\alpha)} + \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta-\alpha)}{y\varphi_0^k}\right\}_0 +$$

$$+\left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta+\alpha)} - \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta+\alpha)}{y\varphi_0^k}\right\}_4 = 0,$$

$$\left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta+\alpha)} - \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta+\alpha)}{y\varphi_0^k}\right\}_4 -$$

$$-\left\{z(\alpha)w(\alpha)\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\alpha)} + \frac{\sin\alpha}{\varkappa}\right] + \frac{\lambda_2 z(\alpha)}{\sin(\vartheta+\alpha)} - \frac{\lambda_4\operatorname{ctg}(\vartheta+\alpha)}{y\varphi_0^k}\right\}_0 = 0,$$

$$\lambda_{2h} = -\left[\frac{w(\alpha)}{\cos\alpha}\cos(\vartheta-\alpha)\right]_4,$$

$$\lambda_4 = \left[y\varphi_0^k z(\alpha)w(\alpha)\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\alpha}\right]_4.$$

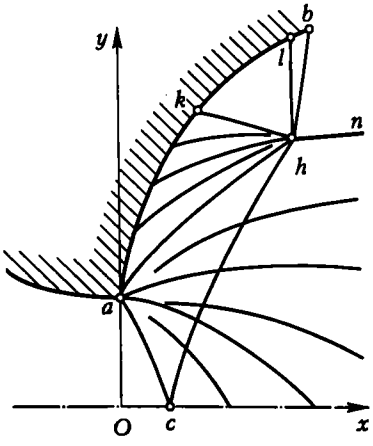


Рис. 3.33

Найденные величины $\alpha = \alpha_4$, $\vartheta = \vartheta_4$ долины принадлежать области (5.5). Разрыв в точке h должен соответствовать классу P^2 в случае фокусировки характеристик второго семейства.

Далее необходимо интегрировать систему уравнений (5.6) при начальных данных

$$\alpha(y_h) = \alpha_4, \quad \vartheta(y_h) = \vartheta_4,$$
$$\psi(y_h) = \psi_h, \quad \lambda_2(y_h) = \lambda_{2h}.$$

Интегрирование проводится точно так же, как и в случае непрерывного решения.

После определения искомой точки h и интегрирования системы (5.6) необходимо вычислить величины α_1, ϑ_1, которые определяются уравнениями

$$\vartheta_0 - f(\alpha_0) = \vartheta_1 - f(\alpha_1), \quad \vartheta_1 + f(\alpha_1) = \vartheta_4 + f(\alpha_4).$$

Известная характеристика второго семейства ah и характеристика первого семейства, выродившаяся в точку h и определяемая равенствами

$$x = x_h, \quad y = y_h, \quad \vartheta - f(\alpha) = \vartheta_0 - f(\alpha_0),$$
$$\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1,$$

позволяют найти решение уравнений (1.20) в области ahk. Характеристика первого семейства bh и характеристика второго семейства, выродившаяся в точку h и определяемая равенствами

$$x = x_h, \quad y = y_h, \quad \vartheta + f(\alpha) = \vartheta_4 + f(\alpha_4),$$
$$\alpha_4 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1,$$

определяют решение уравнений (1.20) в области bhl. Наконец, решение задачи Гурса для тех же уравнений с определенными теперь характеристиками kh и lh позволяет найти течение в области khl. Линия тока построенного течения определяет искомый контур.

Отметим одно существенное для практики обстоятельство. Нанесем на рис. 3.34 сплошной линией зависимость $\vartheta = H_1(\alpha, 0)$, штриховой — зависимость $\vartheta = G_1(\alpha, 0)$ и пунктирной — зависимость

$$\vartheta = f(\alpha) - f(\pi/2). \tag{5.8}$$

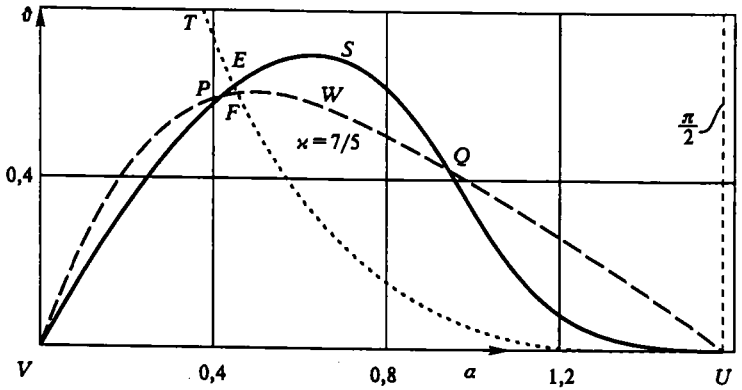


Рис. 3.34

Последнее равенство выполняется в точке излома a, где реализуется течение Прандтля—Майера. На рис. 3.34 приведены кривые для $\varkappa = 1{,}4$. Расчеты [36] показывают, что все течение свободно расширяющегося газа лежит в области, ограниченной линиями $\alpha = 0$, $\vartheta = 0$ и $\vartheta = f(\alpha) - f(\pi/2)$. Из рис. 3.34 видно, что при $\varkappa = 1{,}4$ область исходного течения и область $PWQS$ имеют сравнительно небольшую общую область FPE. Последняя примыкает к линии UT, определяемой равенством (5.8). Это обстоятельство указывает на то, что разрывные ударные течения при $\alpha = \alpha_0$ и $\vartheta = \vartheta_0$, принадлежащих области (5.7), могут иметь место в случае достаточной близости значений α_h, ϑ_h к α_P, ϑ_P. На рис. 3.35 показаны сплошными, штриховыми и пунктирными линиями, соответственно, зависимости $\vartheta = H_1(\alpha, 0)$, $\vartheta = G_1(\alpha, 0)$ и $\vartheta = f(\alpha) - f(\pi/2)$ при различных значениях показателя адиабаты $\varkappa$.

Замечания. Метод расчета оптимальных сопел может быть использован и для того случая, когда звуковая линия Oa не прямолинейна (рис. 3.36). Однако рассмотренная здесь постановка вариационной задачи приемлема лишь в том случае, когда по крайней мере часть контура ad задается. Здесь d является начальной точкой характеристики второго семейства Od, ограничивающей область влияния трансзвукового течения.

Если на кривизну начального участка контура сопла наложено ограничение, запрещающее ее увеличение по сравнению с заданной, то метод решения задачи остается неизменным. Отличие от задачи 5 заключается в том, что роль пучка характеристик Oae здесь играют характеристики второго семейства в области $Oaa'h$.

Основная разница между решениями вариационных задач для внешних и внутренних течений заключается в поведении экстремалей на

плоскости α, ϑ. Пусть начальная точка экстремали h при решении внутренней задачи лежит в той части области (5.5), где $\vartheta > 0$. В этом случае $\vartheta + \alpha > 0$. Из (3.22) тогда следует, что на экстремали величина y увеличивается вместе с ψ. Зависимость $\alpha(y)$ на экстремалях одинакова для внешних и внутренних течений. Частный вид этой зависимости при $\varkappa = 1{,}4$ изображен на рис. 3.11. Этот график показывает, что при движении по экстремалям, дающим минимум χ, в направлении увеличения y, происходит удаление от линии VSU. Такое увеличение y не ограничено (рис. 3.37). Отсюда видно по крайней мере для $\varkappa = 1{,}4$, что при решении вариационных задач для внутренних течений отпадает существенное ограничение, присущее внешним задачам. Рассуждения об удалении от линии VSU при увеличении величины y не справедливы лишь для небольшой области, в которой экстремали дважды пересекают кривую VSU, и которая расположена вблизи точки S.

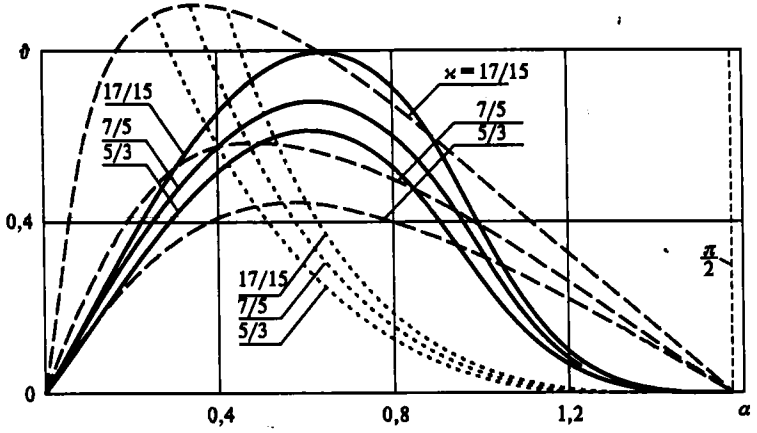


Рис. 3.35

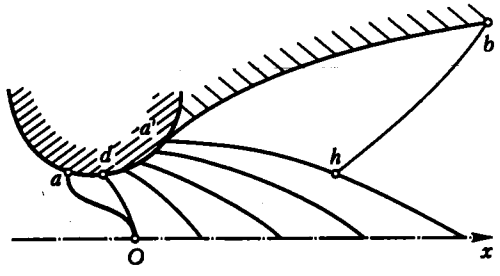


Рис. 3.36

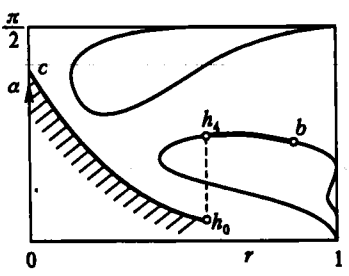


Рис. 3.37

3.5.2. Задача с ограничением длины сопла

Построение оптимальных сопел Лаваля может быть рассмотрено и в иной постановке, когда фиксируется только длина сопла и, кроме того, учитывается давление во внешней среде. (Если фиксированы обе координаты точки b, как это сделано в задаче 5, то внешнее давление в постановку задачи войти не может.) Именно в такой постановке задача об оптимальном сопле Лаваля решается в работе Гудерлея и Хантша [3].

Отличие такой задачи от задачи 5 при $\nu = 1$ заключается, во-первых, в том, что вместо (5.1) берется функционал

$$\bar{\chi} = -\int_{Y=y_a}^{y_b} \Phi_1(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY - \int_{y=y_b}^{y_b} F(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy - \frac{p_\infty y_b^2}{2} \tag{5.9}$$

и, во-вторых, величина y_b не задается. Через p_∞ в формуле (5.9) обозначено давление во внешней среде.

При вычислении первой вариации функционала

$$I = \int_{Y=y_a}^{y_b} \Phi dY + \int_{y=y_b}^{y_b} F dy - K\frac{p_\infty y_b^2}{2},$$

где

$$\Phi = -K\Phi_1 + \lambda_4\Phi_4,$$
$$F = -KF_1 + K\lambda_2(\psi' - F_2) + \lambda_4 F_4 + \lambda_5\bar{F}_5,$$

в этой задаче (в отличие от задач 1 и 5) появляется дополнительный член, содержащий вариацию δy_b. Этот член равен

$$\left[-F(y_b, \alpha_b, \vartheta_b, \varphi_b) + K\lambda_{2b}F_2(y_b, \alpha_b, \vartheta_b, \varphi_b) - Kp_\infty y_b\right]\delta y_b.$$

Требование неизменности первой вариации при $\delta y_b \neq 0$ приводит к условию трансверсальности

$$KF_{1b} - \lambda_4 F_{4b} + K\lambda_{2b}F_{2b} - Kp_\infty y_b = 0.$$

Подставляя сюда выражения для λ_4 и λ_2 при $y = y_b$ из (5.6), получаем

$$\frac{\varphi_b^k z(\alpha_b) w(\alpha_b)}{2\cos\alpha_b}\left(\sin 2\vartheta_b - \frac{1}{\varkappa}\sin 2\alpha_b\right) + Kp_\infty = 0. \tag{5.10}$$

Бесконечно малый концевой элемент контура сопла не влияет на обтекание предыдущей части этого контура. Если сопло обладает максимальной тягой, то концевой элемент должен давать максимальный

вклад в суммарную тягу. Именно это требование и выражает последнее равенство. Вспоминая выражения (1.13) и (1.14) для p и w, можно преобразовать (5.10) к виду

$$\frac{\varphi_b^k z(\alpha_b) w(\alpha_b)}{2\cos\alpha_b} \sin 2\vartheta_b + K(p_\infty - p_b) = 0. \qquad (5.11)$$

Это равенство было получено в работах Гудерлея и Хантша [3] и Рао [8]. В плоском случае оно имеет тот же вид.

Отличие решения задачи со свободным концом контура сопла от решения задачи 5 заключается в том, что вместо условия, наложенного на величину y_b, здесь должно выполняться условие (5.11).

Класс решений задачи 5 шире класса решений задачи со свободным концом b. Решения этой последней задачи содержатся в решениях задачи 5.

3.5.3. Сопла с плоскими торцами

В последнем подразделе получены решения при заданной длине сопла X и заданном противодавлении p_∞. Это решения двух типов: непрерывного и разрывного. Из дальнейшего будет видно, что они отвечают не всем возможным значениям $y_b > y_a$. Величина y_b может быть задана так, что она окажется недостижимой в рамках этих решений при $p_\infty \geqslant 0$. Для восполнения этого пробела здесь будет рассмотрена задача, в которой допускается наличие плоского торца при $x = x_b$ (рис. 3.38) с заданным на нем давлением p_T. Это давление может быть заранее известно, например, при действии сопла в пустоте, если вытекающая из сопла струя газа не может развернуться до торца; в этом случае $p_T = 0$.

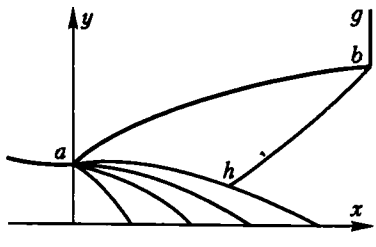


Рис. 3.38

Величина силы тяги $\bar{\chi}$ жесткой стенки ab, нулевой расход газа сквозь нее, длина сопла и условие совместности на характеристике hb определены формулами (5.1)–(5.4). Величина $\bar{\chi}$ при наличии торца bg принимает вид

$$\bar{\chi} = -\int_{Y=y_a}^{y_h} \Phi_1(Y, A, \Theta, \varphi_0)\, dY - \int_{y=y_b}^{y_h} F_1(y, \alpha, \vartheta, \varphi)\, dy + \frac{p_T}{2}(y_g^2 - y_b^2). \qquad (5.12)$$

Для составления функционала Лагранжа I используются равенства (5.12), (5.2)–(5.4). Это дает

$$I = \int_{Y=y_a}^{y_b} \Phi\, dY + \int_{y=y_b}^{y_b} F\, dy + K\frac{p_T}{2}(y_g^2 - y_b^2),$$

где

$$\Phi = -K\Phi_1 + \lambda_4\Phi_4,$$
$$F = -KF_1 + K\lambda_2(\psi' - F_2) + \lambda_4 F_4 + \lambda_5\bar{F}_5.$$

Из выражения для вариации δI следует, что участок ab контура сопла должен быть оптимален и при фиксированном положении точки b. Иными словами, форма контура ab определяется теми же уравнениями и граничными условиями, что и при отсутствии торца bg. Вариация δI, в отличие от задачи 5, содержит дополнительное слагаемое

$$(-F + K\lambda_2 F_2 - Kp_T y)_b\, \delta y_b.$$

При обращении δI в нуль сумма, стоящая в скобках, также должна равняться нулю. Использование необходимых условий экстремума на характеристике hb в точке b позволяет преобразовать эту сумму и получить равенство

$$B \equiv \frac{\varphi_b^k z(\alpha_b) w(\alpha_b)}{2\cos\alpha_b}\sin 2\vartheta_b + K(p_T - p_b) = 0. \qquad (5.13)$$

Это равенство имеет тот же вид, что и (5.11), но роль внешнего давления p_∞ здесь играет заданное давление на торце p_T.

При отсутствии торца и заданной величине y_b допустимые δy_b отрицательны. Необходимое условие максимума силы тяги в этом случае имеет вид $B \leqslant 0$. Если это условие не выполнено, то замена контура близким к нему контуром с торцом ведет к увеличению силы тяги сопла. Цилиндрический участок стенки сопла $y = y_b$ при $x^\circ \leqslant x \leqslant x_b$ возможен лишь тогда, когда X превосходит наименьшую длину сопла, дающего на выходе равномерный поток при заданной величине y_b. Впрочем, в этом случае существует бесчисленное множество решений с тем же максимальным значением силы тяги.

Таким образом, в зависимости от положения заданной концевой точки контура сопла в плоскости x, y могут реализовываться непрерывные и разрывные решения без торца и такие же решения с торцами. Для определения областей этих решений при $\varkappa = 1{,}4$ выполнены расчеты оптимальных осесимметричных сопел с плоской звуковой поверхностью. Результаты расчетов представлены на рис. 3.39а.

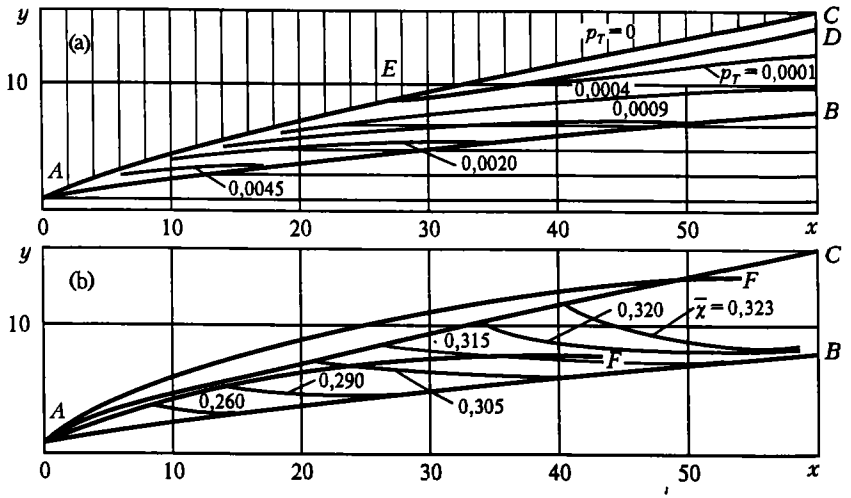


Рис. 3.39

Линия AB изображает геометрическое место концов контуров сопел минимальной длины с равномерным потоком на выходе. Тонкие линии изображают геометрические места концевых точек b, в которых выполняется условие (5.13) при различных значениях p_T или выполняется условие (5.11) при p_∞, вместо которого на фигуре следует брать p_T. Эти значения p_T указаны около кривых. Например, линия AC отвечает $p_T = 0$. Если точка b принадлежит области $DEAB$, то реализуется непрерывное решение. Если точка b принадлежит области DEC, то имеет место решение с изэнтропическим разрывом.

Возможны и другие варианты задания концевой точки контура сопла. Если заданная концевая точка лежит между кривой AB и прямой $y = 1$, то оптимальный контур может состоять из контура, формирующего равномерный поток и заканчивающегося на AB при $y = y_b$, и прямолинейного участка $y = y_b$. Если концевая точка лежит между линией с заданным значением давления p_T и линией AB, то решение задачи дает контур, приходящий в эту точку. Если, наконец, концевая точка лежит выше соответствующей линии $p_T = \text{const}$, то сопло должно иметь торцевую часть с контуром bg, а точка b лежит на пересечении кривой $p_T = \text{const}$ и прямой $x = X$. При этом в одних случаях реализуется непрерывное решение, а в других — решение с изэнтропическим разрывом.

Перечисленные варианты исчерпывают все возможности задания концевой точки.

На рис. 3.39b тонкие линии в области CAB являются геометрическими местами концов контуров оптимальных сопел, имеющих одно и

то же значение силы тяги $\bar{\chi}$. Имеются в виду сопла без торцов. Там же жирными линиями AF показаны два примера контуров сопел.

3.5.4. Оптимальные сопла с закрученным потоком

Во всех рассмотренных до сих пор осесимметричных потоках азимутальная составляющая вектора скорости отсутствовала. Это являлось ограничением в постановке вариационных задач, но отказ от ограничений может только улучшить решение. Обратимся к закрученным осесимметричным течениям и покажем на простейшем примере, что закрутка потока действительно может увеличить силу тяги сопла при прочих равных условиях. При этом азимутальная составляющая скорости не будет рассматриваться как свободная функция, она просто будет задаваться.

Для простоты рассматриваются изоэнергетические изэнтропические течения совершенного газа с потенциальной закруткой вокруг оси симметрии. Такие течения подчиняются уравнениям

$$
\begin{gathered}
(y\rho u)_x + (y\rho v)_y = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad w = \frac{\gamma}{y}, \\
\rho = a^{2/(\varkappa-1)}, \quad p = \frac{1}{\varkappa} a^{(2\varkappa)/(\varkappa-1)}, \\
a^2 = \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} - u^2 - v^2 - \frac{\gamma^2}{y^2}\right),
\end{gathered}
\tag{5.14}
$$

где x, y — осевая и радиальная составляющие цилиндрических координат, отнесенные к радиусу l_* критического сечения сопла; u, v, w — осевая, радиальная и азимутальная составляющие вектора скорости, отнесенные к критической скорости a_*; ρ — плотность газа, отнесенная к критической плотности ρ_*; p — давление, отнесенное к $\rho_* a_*^2$; γ — постоянная циркуляция, отнесенная к $l_* a_*$.

Интеграл Бернулли имеет вид

$$
\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}. \tag{5.15}
$$

Вдоль характеристик системы уравнений (5.14) выполняются соотношения

$$
\begin{gathered}
dy = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \mu)\, dx, \\
d\vartheta \pm \frac{1+\cos\mu}{\varkappa - \cos\mu}\, d\mu \pm \frac{\sin\vartheta \sin\mu}{y \sin(\vartheta \pm \mu)}\, dy +
\end{gathered}
\tag{5.16}
$$

$$+\frac{\gamma^2}{y\left[(\varkappa+1)y^2-(\varkappa-1)\gamma^2\right]}\left[\frac{\cos(\vartheta\mp\mu)}{\sin(\vartheta\pm\mu)}-\varkappa\operatorname{ctg}(\vartheta\pm\mu)\right]dy=0, \qquad (5.17)$$

где

$$\mu=\arcsin\frac{a}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \vartheta=\operatorname{arctg}\frac{v}{u},$$

верхние знаки относятся к первому семейству, нижние — ко второму.

В рассматриваемом случае поток, втекающий в сопло через цилиндрическую трубу с образующей sa (рис. 3.40), имеет составляющие вектора скорости $u=u_0=\text{const}$, $v=0$, $w=\gamma/y$. Величины u_0 и γ таковы, что в области $sagt$ характеристики (5.16) действительны. В области между линией tgf, вдоль которой $u\,dy=v\,dx$, и осью симметрии движение отсутствует и давление равное внешнему давлению p_0 постоянно.

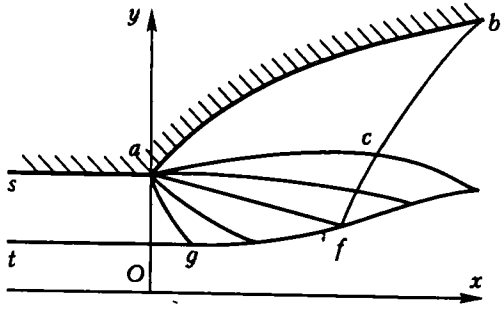


Рис. 3.40

Задача определения контура ab, создающего максимальную силу тяги сопла при заданном входящем в сопло потоке и при заданной длине сопла аналогична задаче подраздела 3.5.2.

Расход газа Q через трубу определяется интегрированием уравнения для функции тока ψ

$$d\psi=y\rho(u\,dy-v\,dx)$$

и равен

$$Q=2\pi\left(\frac{\varkappa-1}{2}\right)^{1/(\varkappa-1)}u_0\int\limits_{y=y_0}^{y_a}\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}-u_0^2-\frac{\gamma^2}{y^2}\right)^{1/(\varkappa-1)}y\,dy, \qquad (5.18)$$

$$y_0=\gamma\left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}-u_0^2-\frac{2}{\varkappa-1}(\varkappa p_0)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]^{-1/2},$$

где величина y_0 отвечает ближайшей к оси границе движущегося газа внутри трубы. Характеристика второго семейства ag может быть построена с использованием равенства (5.16) при $y_0\leqslant y\leqslant y_a$.

Полная сила тяги сопла T, включающая импульс на входе в сопло и интеграл сил давления на стенку, определяется равенством

$$\frac{T}{2\pi} = \int\limits_{y=y_0}^{y_a} \left[\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}(1+u_0^2) - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\frac{\gamma^2}{y^2}\right]\rho y\,dy + \int\limits_{y=y_a}^{y_b} py\,dy - \frac{p_0}{2}(y_b^2 - y_0^2). \quad (5.19)$$

Последнее слагаемое определяется противодавлением p_0.

Второе уравнение системы (5.14) может быть заменено уравнением импульса в проекции на ось x:

$$\left[y(p+\rho u^2)\right]_x + (y\rho uv)_y = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение по области $agfba$ и перейдем по формуле Грина к контурному интегралу. Используя равенство (5.19), условие $d\psi = 0$ на gf и соотношение (5.16) на характеристике первого семейства fb, получаем

$$\frac{T}{2\pi} = \int\limits_{y=y_f}^{y_b} q(\mu,y)z(\mu,y)\left[\frac{\sin\mu}{\varkappa} + \frac{\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\mu)}\right]y\,dy + \frac{p_0}{2}(y_f^2 - y_b^2), \quad (5.20)$$

$$q = \left[\frac{(\varkappa-1)h}{\varkappa-\cos\mu}\right]^{1/2}, \quad z = \left[\frac{(\varkappa-1)h(1-\cos 2\mu)}{2(\varkappa-\cos 2\mu)}\right]^{\frac{1}{2}((\varkappa+1)/(\varkappa-1))},$$

$$h = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} - \frac{\gamma^2}{y^2}.$$

Аналогично первое уравнение из (5.14) с учетом (5.18) и (5.16) на характеристике первого семейства дает

$$\frac{Q}{2\pi} = \int\limits_{y=y_f}^{y_b} \frac{\rho q \sin\mu}{\sin(\vartheta+\mu)}\,y\,dy. \quad (5.21)$$

Длина сопла X с использованием равенства (5.16) на характеристиках ag и fb может быть выражена формулой

$$X = \int\limits_{y=y_0}^{y_a} \left\{\frac{(\varkappa+1)(u_0^2-1)y^2 + (\varkappa-1)\gamma^2}{[\varkappa+1-(\varkappa-1)u_0^2]y^2 - (\varkappa-1)\gamma^2}\right\}^{1/2} dy +$$

$$+ x_f - x_g + \int\limits_{y=y_f}^{y_b} \operatorname{ctg}(\vartheta+\mu)\,dy. \quad (5.22)$$

Вариационная задача при заданной величине γ теперь может быть сформулирована следующим образом. Найти на fb функцию $\mu(y)$, а также определяемую ею и связью (5.17) функцию $\vartheta(y)$, которые доставляют

максимум функционалу (5.20) при изопериметрических условиях (5.21), (5.22), при дифференциальной связи (5.17) на характеристике первого семейства и при начальной характеристике ag, определяемой равенствами (5.18) и (5.16), (5.17) для характеристики второго семейства.

Эта задача аналогична задаче подраздела 3.5.2 и может быть решена тем же методом. Избегая повторений, приведем окончательные результаты.

Образующая sab имеет в точке a излом. Течение в области $agfca$ определяется известной характеристикой ag, условием (5.17) для характеристики первого семейства, выродившейся в точку a, и уравнениями (5.14). Функции $\mu(y)$ и $\vartheta(y)$ на характеристике cb определяются равенствами

$$yzq\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\mu} = \lambda_1, \quad q\frac{\cos(\vartheta-\mu)}{\cos\mu} = \lambda_2,$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные величины. Их значения вычисляются по формулам (5.23) в точке c при условии непрерывности функций μ и ϑ в этой точке. Функция $x(y)$ на cb вычисляется интегрированием уравнения (5.16) для характеристики первого семейства при граничном условии $x(y_c) = x_c$.

Координаты x_c, y_c, y_b определяются из условия выполнения равенств (5.21) и (5.22) при заданных величинах Q и X и выполнения в точке b равенства

$$qz\left(\frac{\sin\mu}{\varkappa} - \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\cos\mu}\right) = p_0,$$

которое является обобщением условия (5.11) на случай закрученных потоков.

Полученное решение, как и простейшее решение без закрутки потока, приводит к результату не при всех исходных данных, но позволяет проиллюстрировать роль закрутки в повышении силы тяги сопла.

В примерах расчетов приняты следующие значения параметров: $\varkappa = 1{,}4$, $p_0 = 0{,}000226$, $Q/2\pi = 0{,}365$. Это значение Q соответствует $u_0 = 1{,}5$ при $\gamma = 0$. Поток энергии через сечение трубы равен

$$E = \int\limits_{y=y_0}^{y_a} \rho u\left[\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\right] y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\int\limits_{y=y_0}^{y_a} \rho u y\,dy = \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{Q}{2\pi}.$$

В этих вычислениях использовано равенство (5.15) для изоэнергетических течений. Результат показывает, что в таких течениях потоки энергии равны, если равны расходы газа Q, а именно течения с неизменным Q и сравниваются. Длины сопел X и значения γ выбраны различными. Результаты расчетов сведены в таблицу 5.

Таблица 5.

X	$\gamma = 0$		$\gamma = 0{,}3$		$\gamma = 0{,}4$	
	y_b	$T/2\pi$	y_b	$T/2\pi$	y_b	$T/2\pi$
4	2,16	0,776	2,34	0,778	2,45	0,779
5	2,48	0,792	2,68	0,793	2,78	0,793
6	2,79	0,802	3,01	0,804	3,11	0,804
7	3,09	0,810	3,32	0,812	3,43	0,812
8	3,39	0,816	3,62	0,818	3,72	0,817
9	3,67	0,822	3,91	0,823	4,01	0,822
10	3,94	0,826	4,18	0,827	4,28	0,826
11	4,21	0,830	4,44	0,830	4,54	0,830

Из данных этой таблицы видно, что сопла с закрученным потоком могут иметь силу тяги, превосходящую силу тяги сопел без закрутки потока при прочих равных условиях.

Для иллюстрации разницы в распределении сил в соплах с закрученным и незакрученным потоками введем в рассмотрение импульс T_1 потока в сечении Oa и интеграл сил давления T_2 по стенке сопла,

$$T_1 = \int\limits_{y=y_0}^{y_a} (p - p_0 + \rho u^2) y\, dy, \quad T_2 = \int\limits_{y=y_a}^{y_b} (p - p_0) y\, dy,$$

причем $T = 2\pi(T_1 + T_2)$ в соответствии с формулой (5.19).

При $\gamma = 0$, $X = 4$ составляющие силы тяги $T_1 = 0{,}678$, $T_2 = 0{,}098$, при $\gamma = 0{,}4$, $X = 4$ составляющие $T_1 = 0{,}610$, $T_2 = 0{,}169$. Эти числа показывают, что вклад величин T_1 и T_2 в величину T заметно перераспределяется в зависимости от значения γ.

В разделах 3.2–3.5 были рассмотрены вариационные задачи, в решениях которых характеристика исходного потока, выходящая из начальной точки искомого контура, сохраняется. Следующий раздел будет посвящен течениям с головными ударными волнами.

3.6. Течения с головной ударной волной

3.6.1. Вариационная задача

Пусть заданы равномерный набегающий поток газа с вектором скорости параллельным оси x и две точки a и b, которые должны быть соединены искомым контуром ab. (Случай неравномерного набегающего потока здесь рассматриваться не будет.) Тот случай, когда $y_b \leqslant y_a$, был рассмотрен в предыдущих главах. Если же $y_b > y_a$, то контур ab вызывает появление в потоке ударной волны, которая называется обычно головной. Будем изучать только случай присоединенной ударной волны, выходящей из точки a. На рис. 3.41 ударная волна изображена линией ac.

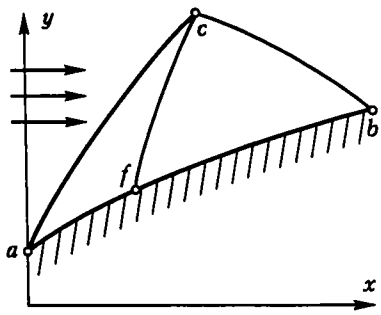


Рис. 3.41

Пусть, далее, искомый контур должен обеспечивать минимальное сопротивление χ. В плоском случае можно дополнительно потребовать, чтобы профиль ab давал заданную подъемную силу ζ.

Для решения этой задачи в качестве контрольного контура L выберем замкнутую линию acb, состоящую из линии ударной волны ac, характеристики второго семейства cb, проходящей через точку b, и искомого контура ab.

В уравнениях (1.2)–(1.4), которые будут использованы при решении задачи, интегралы по линии ac могут быть записаны как через функции за ударной волной, так и через функции перед ударной волной. Последнее удобнее, поскольку в набегающем потоке

$$w = w_\infty = \text{const}, \quad \vartheta = \vartheta_\infty = 0, \quad \varphi = \varphi_\infty = \text{const},$$
$$\rho_\infty = 1, \quad p_\infty = \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}\left(\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} - w_\infty^2\right). \tag{6.1}$$

В качестве независимой переменной будет использована величина ψ. Если угол наклона ударной волны к оси x обозначить через σ, то на ударной волне выполняется равенство

$$dy = \operatorname{tg}\sigma\, dx. \tag{6.2}$$

Подставляя в (1.10) выражения для ρ и w из (6.1) и выражения для dy или dx из (6.2), получаем

$$dx = \frac{\operatorname{ctg}\sigma}{w_\infty y^\nu}\, d\psi, \quad dy = \frac{1}{w_\infty y^\nu}\, d\psi. \tag{6.3}$$

Проинтегрируем второе уравнение из (6.3). Получим

$$y^{\nu+1} - y_0^{\nu+1} = \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi - \psi_0), \tag{6.4}$$

где $y_0 = y(\psi_0)$, а ψ_0 является произвольной постоянной. Последнее равенство позволяет переписать (6.3) в виде

$$dx = \frac{\operatorname{ctg}\sigma}{w_\infty}\left[y_0^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi - \psi_0)\right]^{-(\nu/(\nu+1))} d\psi, \tag{6.5}$$

$$dy = \frac{1}{w_\infty}\left[y_0^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi - \psi_0)\right]^{-(\nu/(\nu+1))} d\psi. \tag{6.6}$$

Преобразуем теперь уравнения (1.3), (1.4). При этом на линии ударной волны используем равенства (6.1) и (6.5). На характеристике bc используем равенства (1.13), (1.14), (3.23). Наконец, на линии тока ab необходимо использовать равенство (1.10) и условие $d\psi = 0$. Уравнения (1.2) и (1.3), соответственно, дают равенства

$$\bar{\chi} = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \left[U_1^\circ + V_1(\alpha, \vartheta)\right] d\psi, \tag{6.7}$$

$$(1-\nu)\zeta = (1-\nu)\int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \left[U_2^\circ(\sigma) + V_2(\alpha, \vartheta)\right] d\psi, \tag{6.8}$$

где

$$U_1^\circ \equiv \frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(w_\infty + \frac{1}{w_\infty}\right), \quad U_2^\circ \equiv \left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}w_\infty - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa w_\infty}\right)\operatorname{ctg}\sigma,$$

а функции V_1 и V_2 те же, что и в 3.3.3:

$$V_1 \equiv -w(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right],$$

$$V_2 \equiv w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right].$$

Величина $X = x_b - x_a$ может быть найдена почленным интегрированием равенства (6.5) по ac и интегрированием первого равенства из (3.23) по cb:

$$X = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \left[U_3^\circ(\psi, \sigma) + V_3(y, \alpha, \vartheta, \bar{\varphi})\right] d\psi, \tag{6.9}$$

где

$$U_3^\circ \equiv \frac{\operatorname{ctg}\sigma}{w_\infty}\left[y_a^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi - \psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))},$$

$$V_3 \equiv \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^\nu \bar{\varphi}^k}\cos(\vartheta - \alpha),$$

$$\bar{\varphi} = \frac{p}{\rho^\varkappa}.$$

На характеристике второго семейства bc выполняются равенства (3.27), (3.28)

$$\bar{V}_4 \equiv \frac{dy}{d\psi} + V_4 = 0, \tag{6.10}$$

$$V_5 \equiv \frac{d\beta}{d\psi} + \frac{\nu q(\alpha)\sin\vartheta\sin\alpha}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu+1}\bar{\varphi}^k} + \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\bar{\varphi}}\frac{d\bar{\varphi}}{d\psi} = 0, \tag{6.11}$$

где

$$V_4 \equiv \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^\nu\bar{\varphi}^k}\sin(\vartheta - \alpha).$$

В точке c имеет место равенство, получаемое из (6.4),

$$y_c^{\nu+1} - y_a^{\nu+1} = \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi_c - \psi_a). \tag{6.12}$$

Если разрыв функций в точке c связан только с ударной волной, то величины α_c, ϑ_c, $\bar{\varphi}_c$ могут быть получены при помощи соотношений на ударной волне (1.23). Имеем

$$w^2(\alpha_c) = w_\infty^2\cos^2\sigma_c + \frac{1}{w_\infty^2\sin^2\sigma_c}(1 - W_\infty^2\cos^2\sigma_c)^2, \tag{6.13}$$

$$\vartheta_c = \sigma_c - \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - W_\infty^2\cos^2\sigma_c}{w_\infty^2\sin\sigma_c\cos\sigma_c}\right), \tag{6.14}$$

$$\bar{\varphi}_c = \left[\frac{2w_\infty^2}{\varkappa+1}\sin^2\sigma_c - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(1 - W_\infty^2)\right]\left[\frac{1 - W_\infty^2\cos^2\sigma_c}{w_\infty^2\sin^2\sigma_c}\right]^\varkappa. \tag{6.15}$$

Из равенств (6.13) и (1.14) находим

$$\alpha_c = \arcsin\left\{\frac{(\varkappa+1)w_\infty^2\sin^2\sigma_c}{2\left[w_\infty^4\sin^2\sigma_c\cos^2\sigma_c + (1 - W_\infty^2\cos^2\sigma_c)^2\right]} - \frac{\varkappa-1}{2}\right\}^{1/2}. \tag{6.16}$$

Обозначим функцию $\bar{\varphi}$ непосредственно за ударной волной через φ. Тогда

$$\varphi(\sigma) = \left[\frac{2w_\infty^2}{\varkappa+1}\sin^2\sigma - \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}(1 - W_\infty^2)\right]\left[\frac{1 - W_\infty^2\cos^2\sigma}{w_\infty^2\sin^2\sigma}\right]^\varkappa. \tag{6.17}$$

Сформулируем вариационную задачу о контуре ab, обеспечивающем минимальное волновое сопротивление.

Задача 6. Найти функции $\alpha(\psi)$, $\bar{\varphi}(\psi)$, $\sigma(\psi)$, из которых $\alpha(\psi)$ принадлежит классу D_2^3, функция $\bar{\varphi}(\psi)$ кусочно непрерывна, а $\sigma(\psi)$ принадлежит классу E, реализующие минимум функционала (6.7) при изопериметрических условиях (6.8), (6.9), дифференциальных связях (6.10), (6.11), условии неубывания энтропии

$$\varphi[\sigma(\psi)] \leqslant \bar{\varphi}(\psi), \tag{6.18}$$

при заданных величинах ψ_a, ζ, X, граничных условиях (6.12) и

$$y(\psi_a) = y_b \tag{6.19}$$

и условиях (6.14)–(6.16), если разрыв функций в точке c обусловлен только головной ударной волной. Функция $\varphi(\sigma)$, входящая в (6.18), определена равенством (6.17).

Эта задача может быть видоизменена благодаря следующим рассуждениям. Проведем через точку c (рис. 3.41) характеристику первого семейства, которая пересечется с контуром ab в некоторой точке f. Малые изменения части контура fb не влияют на течение в области afc. Следовательно, если контур ab имеет минимальное сопротивление, то и часть контура fb имеет минимальное сопротивление при фиксированной характеристике fc. В противном случае сопротивление всего контура могло бы быть уменьшено за счет уменьшения сопротивления его части.

Задача построения контура, обладающего минимальным сопротивлением, (такого, как fb) при заданной исходной характеристике первого семейства (такой, как fc) была решена в 3.2–3.4. В частности, при независимой переменной ψ такое решение было получено в 3.3.3. Искомые функции на экстремали в этом случае определяются уравнениями (3.27), (3.37)–(3.39), (3.43).

Из сказанного видно, что при схеме течения, изображенной на рис. 3.41, функция $\alpha(\psi)$ выражается через $\bar{\varphi}(\psi)$ независимо от полного решения задачи 6, что сокращает количество свободных функций на единицу. Видоизменение задачи 6 может быть произведено добавлением уравнений (3.37)–(3.39), (3.43) в качестве дополнительных связей. Такое преобразование является правомерным в силу независимости определения связи между функциями $\alpha(\psi)$ и $\bar{\varphi}(\psi)$ от условий задачи 6. Подчеркнем, что это преобразование не относится к инволюционным преобразованиям, правомерность которых для вырожденных вариационных задач в настоящее время не изучена.

Итак, установлено, что количество свободных функций в задаче 6 может быть уменьшено на единицу. Самого преобразования вариационной задачи производить не будем, а упомянутые связи получим при ее решении.

3.6.2. Необходимые условия экстремума

Снова для решения задачи используем метод Лагранжа. Составим сумму

$$J^\circ = \int\limits_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \left[U^\circ(\psi,\sigma) + V(\alpha,\beta,\beta',y,y',\bar\varphi,\bar\varphi')\right] d\psi, \tag{6.20}$$

где

$$U^\circ = U_1^\circ + \mathfrak{L}_2(1-\nu)U_2^\circ + \mathfrak{L}_3 U_3^\circ,$$
$$V = V_1 + \mathfrak{L}_2(1-\nu)V_2 + \mathfrak{L}_3 V_3 + \mathfrak{L}_4(\psi)\bar V_4 + \mathfrak{L}_5(\psi)V_5,$$

$\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ — постоянные, $\mathfrak{L}_4(\psi)$, $\mathfrak{L}_5(\psi)$ — переменные множители Лагранжа.

Первая вариация δJ° равна

$$\delta J^\circ = (U_c^\circ + V_c)\delta\psi_c + \int\limits_{\psi=\psi a}^{\psi_c} \left(U_\sigma^\circ\delta\sigma + V_\alpha\delta\alpha + V_\beta\delta\beta + V_{\beta'}\delta\beta' + \right.$$
$$\left. + V_y\delta y + V_{y'}\delta y' + V_{\bar\varphi}\delta\bar\varphi + V_{\bar\varphi'}\delta\bar\varphi'\right) d\psi. \tag{6.21}$$

Множитель при $\delta\sigma$ под знаком интеграла равен

$$U_\sigma^\circ = \frac{\mathfrak{L}_2(1-\nu)(\varkappa+1)}{2\varkappa w_\infty \sin^2\sigma}\left(1 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}w_\infty^2\right) -$$
$$- \frac{\mathfrak{L}_3}{w_\infty \sin^2\sigma}\left[y_a^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi-\psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))} \tag{6.22}$$

Остальная часть подынтегрального выражения в (6.21) совпадает с подынтегральным выражением вариации функционала (3.34) при $\mathfrak{L}_2 = \Lambda_2$, $\mathfrak{L}_3 = \Lambda_3$, $\mathfrak{L}_4 = \Lambda_4$, $\mathfrak{L}_5 = \Lambda_5$. Эти равенства выполняются, если в задаче 3 за исходную взята характеристика fc. Исключая величины Λ_4, Λ_5 из уравнений (3.37), (3.39), (3.43), получаем

$$\Lambda_3 = \frac{\sqrt{\varkappa}y^\nu\bar\varphi^k w(\alpha)}{q(\alpha)\cos\alpha} \times$$
$$\times \left[\sin^2\vartheta + \Lambda_2(1-\nu)\left(\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos\alpha\right)\right]. \tag{6.23}$$

Если $\mathfrak{L}_2 = \Lambda_2$, $\mathfrak{L}_3 = \Lambda_3$, то из (6.4), (6.22) и (6.23) следует

$$U_\sigma^\circ = -\frac{\sqrt{\varkappa}\bar{\varphi}^k w(\alpha)\sin^2\vartheta}{w_\infty \sin^2\sigma\cos\alpha} + \frac{\mathfrak{L}_2(1-\nu)}{w_\infty\sin^2\sigma}\times$$
$$\times\left[\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}w_\infty^2\right) - \frac{\sqrt{\varkappa}\bar{\varphi}^k w(\alpha)}{2\cos\alpha}\left(\sin 2\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin 2\alpha\right)\right]. \qquad (6.24)$$

Рассмотрим величины, входящие в последнюю формулу. В сверхзвуковом потоке имеют место неравенства

$$\bar{\varphi} > 0, \quad 1 \leqslant w \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}, \quad 1 < w_\infty \leqslant \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}},$$
$$0 \leqslant \arcsin\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2w_\infty^2} - \frac{\varkappa-1}{2}} \leqslant \sigma < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (6.25)$$

В важном частном случае $\mathfrak{L}_2(1-\nu) = 0$ (осесимметричные течения или плоские течения без ограничения подъемной силы профиля) из (6.24), (6.25) вытекает неравенство $U_\sigma^\circ < 0$ при дополнительных условиях $\vartheta \neq 0$, $\sigma > 0$. Равенство (6.21) показывает, что в этом случае увеличение σ уменьшает величину J°, которая при выполнении изопериметрических условий и дифференциальных связей задачи 6 отличается от $\bar{\chi}$ на постоянную величину. Иными словами, сопротивление любого контура может быть уменьшено, если $U_\sigma^\circ < 0$ и если вариация $\delta\sigma > 0$ допустима.

С равенством (6.17) связано известное свойство ударных волн: увеличение угла наклона ударной волны σ приводит к увеличению энтропии газа за ударной волной. Таким образом, функция φ увеличивается вместе с σ. Отсюда видно, что вариация $\delta\sigma > 0$ допустима только тогда, когда $\varphi[\sigma(\psi)] < \bar{\varphi}(\psi)$. Из сказанного ранее заключаем, что величина χ не может быть уменьшена за счет увеличения σ только при условии $\varphi[\sigma(\psi)] = \bar{\varphi}(\psi)$. Последнее равенство приводит к краевому экстремуму. Итак, решению задачи 6 в осесимметричном случае или в плоском случае без ограничений на подъемную силу профиля соответствуют течения с головной ударной волной, не содержащие иных ударных волн в области abc, если интенсивность ударной волны может быть изменена малыми вариациями контура ab.

То же самое можно сказать и в случае задачи с фиксированной подъемной силой при выполнении неравенства

$$\mathfrak{L}_2(1-\nu)\left[\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}w_\infty^2\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{\varkappa}\bar{\varphi}^k w(\alpha)}{2\cos\alpha}\left(\sin 2\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin 2\alpha\right)\right] < \frac{\sqrt{\varkappa}\bar{\varphi}^k w(\alpha)\sin^2\vartheta}{\cos\alpha}, \qquad (6.26)$$

поскольку при этом из (6.24) следует, что $U^\circ_\sigma < 0$. Последнее неравенство может быть проверено лишь после решения вариационной задачи в предположении отсутствия ударных волн в области abc.

Заметим попутно, что схема течений с ударными волнами, изображенная на рис. 3.17 не противоречит сформулированному утверждению, поскольку в этом случае малые деформации контура ab не вызывают появления головной ударной волны.

Добавим к условиям задачи 6 условие отсутствия ударных волн в области abc. Это условие обязательно при выполнении неравенства (6.26) и, в частности, при $\mathfrak{L}_2(1-\nu) = 0$, но при невыполнении неравенства (6.26) оно может иметь самостоятельный интерес. Отсутствие ударных волн внутри abc выражается равенством

$$\bar{\varphi}(\psi) = \varphi[\sigma(\psi)]. \tag{6.27}$$

При выполнении этого равенства в задаче 6 по существу сохраняется одна свободная функция $\sigma(\psi)$. Таким образом, возникает новая задача.

Задача 7. Найти функции $\alpha(\psi)$, $\sigma(\psi)$, из которых $\alpha(\psi)$ принадлежит классу D_2^3, а $\sigma(\psi)$ принадлежит классу E, реализующие минимум функционала (6.7) при изопериметрических условиях (6.8), (6.9) дифференциальных связях (6.10), (6.11), условии (6.27), при заданных величинах y_a, y_b, ψ_a, ζ, X, граничных условиях (6.12), (6.19) и условиях (6.14)–(6.16), если разрыв функций в точке c обусловлен только головной ударной волной. Во всяком случае разрывы функций $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$ должны принадлежать классу P^3.

Функционал (6.20) должен быть переписан в виде

$$J^\circ = \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \left\{ U^\circ(\psi,\sigma) + V\left[\alpha,\beta,\beta',y,y',\varphi(\sigma),\varphi'(\sigma)\right] \right\} d\psi, \tag{6.28}$$

где штрих означает производную по ψ. Выражения для функций U° и V остаются прежними. Первая вариация функционала (6.28) равна

$$\delta J^\circ = (U^\circ_c + V_c)\delta\psi_c +$$

$$+ \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \left[(U^\circ_\sigma + V_\sigma)\delta\sigma + V_{\sigma'}\delta\sigma' + V_\alpha\delta\alpha + V_\beta\delta\beta + V_{\beta'}\delta\beta' + V_y\delta y + V_{y'}\delta y' \right] d\psi.$$

Интегрируя по частям члены с производными от вариаций, получаем

$$\delta J^\circ = (U^\circ_c + V_c)\delta\psi_c + (V_{\sigma'})_c\delta\sigma_c + (V_{\beta'})_c\delta\beta_c +$$

$$+ (V_{y'})_c \delta y_c - (V_{\sigma'})_a \delta\sigma_a - (V_{\beta'})_b \delta\beta_b +$$
$$+ \int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c} \Big[\Big(U_\sigma^\circ + V_\sigma - \frac{d}{d\psi} V_{\sigma'} \Big) \delta\sigma + V_\alpha \delta\alpha +$$
$$+ \Big(V_\beta - \frac{d}{d\psi} V_{\beta'} \Big) \delta\beta + \Big(V_y - \frac{d}{d\psi} V_{y'} \Big) \delta y \Big] \, d\psi. \qquad (6.29)$$

Функция U_σ° определена формулой (6.22). Другие входящие в равенство (6.29) функции выражаются формулами

$$V_{\sigma'} \equiv \frac{\mathfrak{L}_5 \sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi} \varphi_\sigma, \quad V_{\beta'} \equiv \mathfrak{L}_5, \quad V_{y'} \equiv \mathfrak{L}_4,$$

$$V_\sigma \equiv \Big\{ \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-1) y^\nu \varphi^{k+1}} \Big[\mathfrak{L}_3 \cos(\vartheta-\alpha) + \mathfrak{L}_4 \sin(\vartheta-\alpha) +$$
$$+ \mathfrak{L}_5 \frac{\nu \sin\vartheta \sin\alpha}{y} \Big] - \mathfrak{L}_5 \frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi^2} \varphi_\sigma \frac{d\sigma}{d\psi} \Big\} \varphi_\sigma,$$

$$V_\alpha \equiv \frac{w(\alpha)}{\varkappa(\varkappa-\cos 2\alpha)} \Big[(\varkappa - 1 + 2\varkappa\cos 2\alpha) \cos\alpha \sin(\vartheta-\alpha) +$$
$$+ (\varkappa+1)(1+2\cos 2\alpha) \sin\alpha \cos(\vartheta-\alpha) \Big] -$$
$$- \frac{\mathfrak{L}_2(1-\nu) w(\alpha)}{\varkappa(\varkappa-\cos 2\alpha)} \Big[(\varkappa+1)(1+2\cos 2\alpha) \sin\alpha \sin(\vartheta-\alpha) -$$
$$- (\varkappa - 1 + 2\varkappa\cos 2\alpha) \cos\alpha \cos(\vartheta-\alpha) \Big] - \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-\cos 2\alpha) y^\nu \varphi^k} \times$$
$$\times \Big\{ (\varkappa+1) \operatorname{ctg}\alpha \Big[\mathfrak{L}_3 \cos(\vartheta-\alpha) + \mathfrak{L}_4 \sin(\vartheta-\alpha) \Big] +$$
$$+ (1 - \varkappa + 2\cos 2\alpha) \Big[\mathfrak{L}_3 \sin(\vartheta-\alpha) - \mathfrak{L}_4 \cos(\vartheta-\alpha) \Big] \Big\} -$$
$$- \mathfrak{L}_5 \Big\{ \frac{\nu q(\alpha)(1+\cos 2\alpha)}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-\cos 2\alpha) y^{\nu+1} \varphi^k} \sin(\vartheta-\alpha) - \frac{\cos 2\alpha}{\varkappa(\varkappa-1)\varphi} \varphi_\sigma \frac{d\sigma}{d\psi} \Big\},$$

$$V_\beta \equiv w(\alpha) \Big[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa} \sin\alpha \cos(\vartheta-\alpha) \Big] +$$
$$+ \mathfrak{L}_2(1-\nu) w(\alpha) \Big[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa} \sin\alpha \sin(\vartheta-\alpha) \Big] -$$
$$- \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k} \Big[\mathfrak{L}_3 \sin(\vartheta-\alpha) - \mathfrak{L}_4 \cos(\vartheta-\alpha) \Big] + \mathfrak{L}_5 \frac{\nu q(\alpha) \cos\vartheta \sin\alpha}{\sqrt{\varkappa} y^{\nu+1} \varphi^k},$$

$$V_y \equiv -\frac{\nu q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^{\nu+1}\varphi^k}\left[\mathfrak{L}_3\cos(\vartheta-\alpha)+\mathfrak{L}_4\sin(\vartheta-\alpha)+\mathfrak{L}_5\frac{2\sin\vartheta\sin\alpha}{y}\right].$$

Входящая в последние выражения величина φ_σ вычисляется дифференцированием (6.17) и равна

$$\varphi_\sigma = 2\varkappa\varphi\left[\frac{4w_\infty^2\sin\sigma\cos\sigma}{4\varkappa w_\infty^2\sin^2\sigma-(\varkappa^2-1)(1-W_\infty^2)}-\frac{(1-W_\infty^2)\operatorname{ctg}\sigma}{1-W_\infty^2\cos^2\sigma}\right].$$

Выберем функции $\mathfrak{L}_4$ и $\mathfrak{L}_5$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{d\mathfrak{L}_4}{d\psi}=V_y,\quad \frac{d\mathfrak{L}_5}{d\psi}=V_\beta, \tag{6.30}$$

$$\mathfrak{L}_5(\psi_a)=0. \tag{6.31}$$

Рассмотрим тот случай, когда разрыв функций в точке c обусловлен только ударной волной ac. В этом случае вариация $\delta\beta_c$ связана с вариацией $\delta\sigma_c$ в силу равенства (2.14)

$$\beta_c=\vartheta_c+\sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\operatorname{ctg}\alpha_c\right)+\alpha_c$$

и граничных условий (6.14), (6.16). Эти связи показывают, что $\beta_c=\beta_c(\sigma_c)$. Следовательно, можно написать

$$\delta\beta_c=\frac{d\beta_c}{d\sigma_c}\delta\sigma_c. \tag{6.32}$$

Функция y_c связана с ψ_c граничным условием (6.12). Используя это условие, получаем

$$\delta y_c=\left\{\frac{1}{w_\infty}\left[y_a^{\nu+1}+\frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi-\psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))}+V_4\right\}_{\psi=\psi_c}\delta\psi_c. \tag{6.33}$$

Преобразуем выражение (6.29) при помощи равенств (6.30)–(6.33). Получим

$$\begin{aligned}\delta J^\circ=&\left\{U^\circ+V+\frac{\mathfrak{L}_4}{w_\infty}\left[y_a^{\nu+1}+\frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi-\psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))}+\mathfrak{L}_4V_4\right\}_{\psi=\psi_c}\delta\psi_c+\\&+\left\{\mathfrak{L}_5\left[\frac{\sin2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\varphi_\sigma+\frac{d\beta_c}{d\sigma_c}\right]\right\}_{\psi=\psi_c}\delta\sigma_c+\\&+\int_{\psi=\psi_a}^{\psi_c}\left[\left(U_\sigma^\circ+V_\sigma-\frac{d}{d\psi}V_{\sigma'}\right)\delta\sigma+V_\infty\delta\alpha\right]d\psi.\end{aligned} \tag{6.34}$$

Потребуем обращения в нуль вариации δJ°. Это дает условия

$$\left\{U^\circ + V + \frac{\mathfrak{L}_4}{w_\infty}\left[y_a^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi-\psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))} + \mathfrak{L}_4 V_4\right\}_{\psi=\psi_c} = 0, \quad (6.35)$$

$$\left\{\mathfrak{L}_5\left[\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi}\varphi_\sigma + \frac{d\beta_c}{d\sigma_c}\right]\right\}_{\psi=\psi_c} = 0 \quad (6.36)$$

и уравнения

$$V_\alpha = 0, \quad (6.37)$$

$$U_\sigma^\circ + V_\sigma - \frac{d}{d\psi}\frac{\mathfrak{L}_5\varphi_\sigma \sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)\varphi} = 0. \quad (6.38)$$

Уравнения (6.10), (6.11), (6.30), (6.37) совпадают, соответственно, с уравнениями (3.27), (3.28), (3.38), (3.37), (3.41) при $\mathfrak{L}_2 = \Lambda_2$, $\mathfrak{L}_3 = \Lambda_3$, $\mathfrak{L}_4 = \Lambda_4$, $\mathfrak{L}_5 = \Lambda_5$, поскольку $d\varphi[\sigma(\psi)]/d\psi = \varphi_\sigma(d\sigma/d\psi)$. Совпадают и граничные условия для y и $\mathfrak{L}_5$ при $\psi = \psi_a$ в задачах 7 и 3. В п. 3.3.3 были найдены два интеграла (3.39), (3.43) этих уравнений при произвольной зависимости $\varphi(\psi)$. Перепишем их, заменяя Λ на $\mathfrak{L}$:

$$\frac{w(\alpha)\sin 2\alpha}{\varkappa}\left[\sin\vartheta + \mathfrak{L}_2(1-\nu)\cos\vartheta\right] + \\ + \frac{2q(\alpha)\cos\alpha}{\sqrt{\varkappa}y^\nu\varphi^k}(\mathfrak{L}_3\cos\vartheta + \mathfrak{L}_4\sin\vartheta) = 0, \quad (6.39)$$

$$\mathfrak{L}_5(\psi) \equiv 0. \quad (6.40)$$

Равенства (6.39), (6.40) являются интегралами уравнений задачи 7. В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

Условие (6.36) теперь выполняется в силу (6.40). Равенство (6.35) в подробной записи имеет вид

$$\left\{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(w_\infty + \frac{1}{w_\infty}\right) - w(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right]\right\}_{\psi=\psi_c} + \\ + \mathfrak{L}_2(1-\nu)\left\{\left(\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}w_\infty - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa w_\infty}\right)\operatorname{ctg}\sigma + \right. \\ \left. + w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right]\right\}_{\psi=\psi_c} + \\ + \mathfrak{L}_3\left\{\frac{\operatorname{ctg}\sigma}{w_\infty}\left[y_a^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi-\psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))} + \right.$$

$$+\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu}\varphi^{k}}\cos(\vartheta-\alpha)\Big\}_{\psi=\psi_c}+$$
$$+\mathfrak{L}_{4c}\Big\{\frac{1}{w_\infty}\Big[y_a^{\nu+1}+\frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi-\psi_a)\Big]^{-(\nu/(\nu+1))}+$$
$$+\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa}y^{\nu}\varphi^{k}}\sin(\vartheta-\alpha)\Big\}_{\psi=\psi_c}=0. \qquad (6.41)$$

С. Н. Елисеев и Б. М. Киселев сообщили автору, что при $\nu = 1$ равенство (6.41) выполняется в силу уравнений (6.30), (6.39), (6.40). Это утверждение имеет место и здесь. Для его проверки удобнее подынтегральные выражения в контурных интегралах по ac в (6.7)–(6.9) записать не через функции в невозмущенном потоке, а через функции за ударной волной.

Такое свойство равенства (6.41) может быть просто объяснено. Умножим левую часть уравнения (6.41) почленно на величину $(\psi_c - \psi_a)$. Полученный результат представляет собой сумму

$$\Sigma_* = \bar{\chi}_* + \mathfrak{L}_2\zeta_* + \mathfrak{L}_3 X_* + \mathfrak{L}_4 Y_*,$$

в которой величины χ_*, ζ_*, X_*, Y_* можно интерпретировать, соответственно, как сопротивление, подъемную силу и длины проекций на оси x и y прямолинейного профиля ab, помещенного в равномерный поток газа (рис. 3.42). Отрезки прямых ac и bc являются, соответственно, линиями ударной волны и характеристики второго семейства. Выберем теперь на профиле ab две произвольные точки a', b'. Обозначим отношение длины $a'b'$ к длине ab через ε. Совершенно очевидно, что в силу равномерности потока газа у прямолинейного профиля сумма Σ'_*, записанная для отрезка $a'b'$, равна $\varepsilon\Sigma_*$. Таким образом, если $\Sigma_* = 0$, то и $\Sigma'_* = 0$, и наоборот, если $\Sigma'_* = 0$, то и $\Sigma_* = 0$. Пусть теперь в качестве точек a' и b' взяты точки f и b. Если профиль ab обладает минимальным сопротивлением при заданных величинах ζ_*, X_*, Y_*, то, в частности, должно выполняться равенство (6.39), левая часть которого в точности равна Σ'_*. Следовательно, должно выполняться и равенство (6.41).

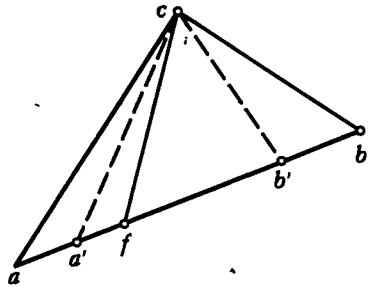


Рис. 3.42

Отмеченное свойство условия (6.41) имеет место, если разрыв величин в точке c обусловлен только ударной волной ac (класс P^1).

Итак, необходимыми условиями экстремума χ в задаче 7 с учетом последней оговорки являются шесть уравнений (6.10), (6.30), (6.38)–(6.40), определяющих функции $y(\psi)$, $\sigma(\psi)$, $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\mathfrak{L}_4(\psi)$, $\mathfrak{L}_5(\psi)$,

граничные условия (6.12), (6.19), (6.14), (6.16) и условия (6.8), (6.9). Из перечисленных уравнений (6.10) и первое уравнение из (6.30) являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Это дает два произвола в определении функций. Произвольными являются постоянные $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ и величина ψ_c. Итого, в определении функций имеем пять произволов. Количество условий (6.8), (6.9), (6.12), (6.14), (6.16), (6.19) равно шести. Следовательно, задача в общем случае неразрешима.

Перепишем подробно уравнения (6.10), (6.30), (6.38), (6.39) с учетом (6.40). Соответственно, они имеют вид

$$\frac{dy}{d\psi} = -\frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k} \sin(\vartheta - \alpha), \tag{6.42}$$

$$\frac{d\mathfrak{L}_4}{d\psi} = -\frac{\nu q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^{\nu+1} \varphi^k} [\mathfrak{L}_3 \cos(\vartheta - \alpha) + \mathfrak{L}_4 \sin(\vartheta - \alpha)], \tag{6.43}$$

$$w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos(\vartheta - \alpha)\right] + \\ + \mathfrak{L}_2(1-\nu)w(\alpha)\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\sin(\vartheta - \alpha)\right] - \\ - \frac{q(\alpha)}{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k}\left[\mathfrak{L}_3 \sin(\vartheta - \alpha) - \mathfrak{L}_4 \cos(\vartheta - \alpha)\right] = 0, \tag{6.44}$$

$$\frac{\mathfrak{L}_2(1-\nu)(\varkappa+1)}{2\varkappa w_\infty \sin^2\sigma}(1 - W_\infty^2) - \\ - \frac{\mathfrak{L}_3}{w_\infty \sin^2\sigma}\left[y_a^{\nu+1} + \frac{\nu+1}{w_\infty}(\psi - \psi_a)\right]^{-(\nu/(\nu+1))} + \\ + \frac{q(\alpha)\varphi_\sigma}{\sqrt{\varkappa}(\varkappa-1) y^\nu \varphi^{k+1}}\left[\mathfrak{L}_3 \cos(\vartheta - \alpha) + \mathfrak{L}_4 \sin(\vartheta - \alpha)\right] = 0, \tag{6.45}$$

$$w(\alpha)\left[\sin\vartheta + \mathfrak{L}_2(1-\nu)\cos\vartheta\right] + \\ + \frac{\sqrt{\varkappa} q(\alpha)}{y^\nu \varphi^k \sin\alpha}(\mathfrak{L}_3 \cos\vartheta + \mathfrak{L}_4 \sin\vartheta) = 0. \tag{6.46}$$

3.6.3. Решения без дополнительных разрывов

Найдем те частные зависимости между исходными величинами, при которых задача 7 имеет решение только с разрывом функций, определяемым ударной волной ac.

При $\psi = \psi_c$ искомые величины связаны уравнениями (6.12), (6.14), (6.16), (6.44)–(6.46). Из четырех уравнений (6.12), (6.44)–(6.46) исключим

величины ψ_c, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4(\psi_c)$. Из (6.44), (6.46) получим

$$\mathfrak{L}_3 = \frac{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k w(\alpha)}{q(\alpha)\cos\alpha}\left[\sin^2\vartheta + \mathfrak{L}_2(1-\nu)\left(\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos\alpha\right)\right],$$
$$\mathfrak{L}_4 = -\frac{\sqrt{\varkappa} y^\nu \varphi^k w(\alpha)}{q(\alpha)\cos\alpha}\left[\left(\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{1}{\varkappa}\sin\alpha\cos\alpha\right) + \mathfrak{L}_2(1-\nu)\cos^2\vartheta\right]. \tag{6.47}$$

Подставив выражения для величин $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ при $\psi = \psi_c$ из (6.47) и выражение для ψ_c из (6.12) в уравнение (6.45), получим связь между функциями σ, ϑ и α в точке c

$$\frac{\varphi_\sigma w(\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{(\varkappa-1)\varphi}\left[\sin\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\cos\alpha\sin(\vartheta-\alpha)\right] - \frac{\sqrt{\varkappa}\varphi^k w(\alpha)\sin^2\vartheta}{w_\infty q(\alpha)\cos\alpha\sin^2\sigma} +$$
$$+ \mathfrak{L}_2(1-\nu)\left\{\frac{\varphi_\sigma w(\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{(\varkappa-1)\varphi}\left[\cos\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\cos\alpha\cos(\vartheta-\alpha)\right] -\right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{\varkappa}\varphi^k w(\alpha)}{2w_\infty q(\alpha)\cos\alpha\sin^2\sigma}\left(\sin 2\vartheta - \frac{1}{\varkappa}\sin 2\alpha\right) + \frac{(\varkappa+1)(1-W_\infty^2)}{2\varkappa w_\infty \sin^2\sigma}\right\} = 0. \tag{6.48}$$

Уравнения (6.14), (6.16), (6.48) содержат величины σ_c, α_c, ϑ_c и параметры w_∞, $\mathfrak{L}_2$ (величина $\varkappa$ предполагается заданной). Эти уравнения могут рассматриваться как система для определения зависимости $\sigma_c(w_\infty, \mathfrak{L}_2)$, при которой имеют место рассматриваемые здесь решения.

Случай $\mathfrak{L}_2(1-\nu) = 0$. Исследуем решения без дополнительных разрывов в случае осесимметричных течений или плоских течений без ограничений на подъемную силу. Решение системы уравнений (6.14), (6.16), (6.48), по-видимому, можно получить только численно. Лишь один корень находится в общем виде и представляет зависимость

$$\sigma = \arcsin\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2w_\infty^2} - \frac{\varkappa-1}{2}}. \tag{6.49}$$

При этом $\alpha = \sigma$, $\vartheta = 0$. Этот корень соответствует обтеканию прямолинейного контура ab параллельного вектору набегающего потока. Зависимость (6.49) при $\varkappa = 1{,}4$, изображена на рис. 3.43 линией AB. Зависимости $\sigma_c(w_\infty)$, при которой скорость за ударной волной равна скорости звука, соответствует линия AF. Прочие корни системы уравнений (6.14), (6.16), (6.48) при $\varkappa = 1{,}4$ изображены линиями CD и EF.

Назовем области AEF, $CDFE$, DCB, соответственно, областями I, II, III.

В плоском случае ($\nu = 0$) из уравнения (6.43) следует, что $\mathfrak{L}_4 = \text{const}$. Уравнения (6.44)–(6.46) помимо σ, α, ϑ содержат только постоянные

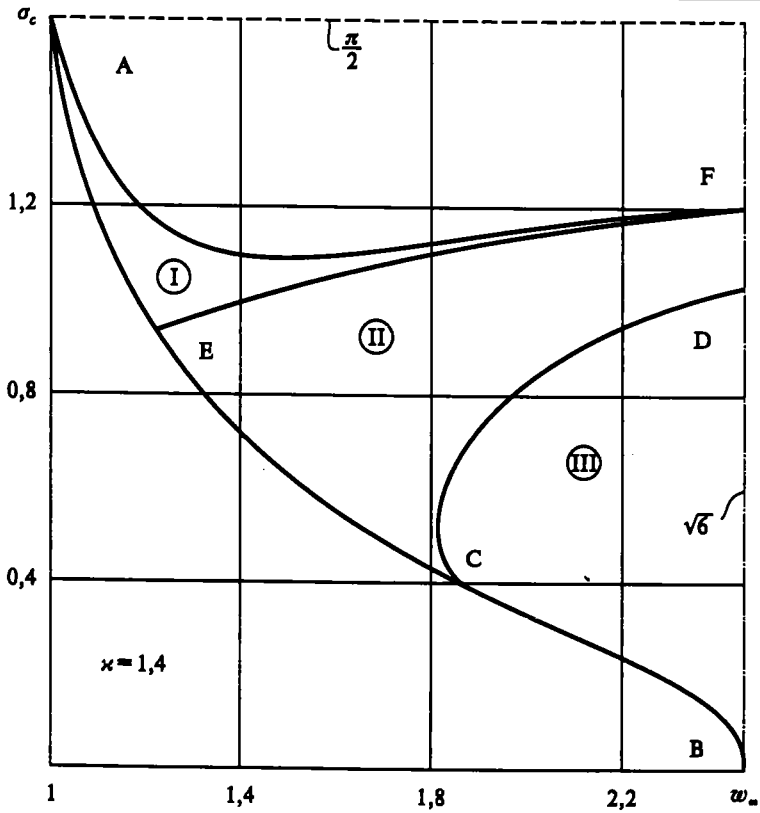


Рис. 3.43

величины. Следовательно, в случае выполнения уравнений (6.14), (6.16), (6.48) величины σ, α, ϑ постоянны, и решение задачи дает прямолинейный профиль ab. Такими прямолинейными профилями исчерпывается класс решений задачи 7 в плоском случае, когда единственным разрывом является ударная волна ac. Зависимость $\sigma_c = \sigma_c(w_\infty, 0)$ для этого класса решений изображается на рис. 3.43 при $\varkappa = 1{,}4$ кривыми CD и EF. Эти решения в плоском случае ранее были получены Черным [23].

Соответствующий класс решений задачи 7 в осесимметричном случае ($\nu = 1$) более широк. Решения в этом случае могут быть найдены следующим образом. Выберем некоторую точку w_∞, σ_c на кривой EF или CD. Найдем величины ϑ_c, $\bar{\varphi}_c$, α_c из равенств (6.14)–(6.16), (6.27), а величину y_c — из равенства (6.12), задаваясь некоторыми значениями y_a, ψ_a, $\psi_c > \psi_a$. Например, можно принять равенства $y_a = \psi_a = 0$,

$\psi_c = 1$. Это не будет означать, что точки a искомых контуров лежат на оси симметрии, поскольку величины y_a, ψ_a в равенстве (6.12) играют роль произвольных постоянных. Условия $y_a = \psi_a = 0$ показывают, что в набегающем потоке нет каких-либо тел.

Найденные величины

$$\sigma(\psi_c) = \sigma_c, \quad \vartheta(\psi_c) = \vartheta_c, \quad \varphi(\psi_c) = \varphi_c,$$
$$\alpha(\psi_c) = \alpha_c, \quad y(\psi_c) = y_c \tag{6.50}$$

позволяют вычислить постоянные $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_{4c}$ из равенств (6.47), записанных для $\psi = \psi_c$. Полученные таким образом величины ψ_c, σ_c, ϑ_c, φ_c, α_c, y_c, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_{4c}$ удовлетворяют уравнениям (6.44)–(6.46).

Будем, далее, интегрировать уравнения (6.17), (6.42)–(6.46), определяющие функции $\sigma(\psi)$, $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\varphi(\psi)$, $y(\psi)$, $\mathfrak{L}_4(\psi)$. Начальными данными являются равенства (6.50). Интегрирование следует производить до $\psi = \psi_* < \psi_c$ такого, что при $\sigma = \sigma(\psi_*)$ величина α за ударной волной, определяемая равенством

$$\alpha = \arcsin\left\{ \frac{(\varkappa+1)w_\infty^2 \sin^2\sigma}{2\left[w_\infty^4 \sin^2\sigma\cos^2\sigma + (1 - W_\infty^2\cos^2\sigma)^2\right]} - \frac{\varkappa-1}{2} \right\}^{1/2}, \tag{6.51}$$

равна $\pi/2$. Такое $\psi = \psi_*$ соответствует достижению скорости звука за ударной волной.

Найденные в результате интегрирования функции $\sigma(\psi)$, $\alpha(\psi)$, $\vartheta(\psi)$, $\varphi(\psi)$, $y(\psi)$ позволяют вычислить зависимости $x_B(\psi)$, $y_B(\psi)$ на ударной волне и $x(\psi)$ на характеристике второго семейства bc. Первые определяются интегрированием уравнений (6.5), (6.6) по формулам

$$x_B(\psi) = x_c + \frac{1}{w_\infty}\int\limits_{\psi=\psi_c}^{\psi} \left[y_a^2 + \frac{2}{w_\infty}(\psi - \psi_a)\right]^{-1/2} \operatorname{ctg}\sigma(\psi)\, d\psi,$$

$$y_B(\psi) = y_c + \frac{1}{w_\infty}\int\limits_{\psi=\psi_c}^{\psi} \left[y_a^2 + \frac{2}{w_\infty}(\psi - \psi_a)\right]^{-1/2} d\psi,$$

где x_c — координата x точки c (величина x_c может быть выбрана произвольно).

Зависимость $x(\psi)$ на характеристике bc находится интегрированием первого равенства из (3.23) по формуле

$$x(\psi) = x_c - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\int\limits_{\psi=\psi_c}^{\psi} \frac{q(\alpha)\cos(\vartheta - \alpha)}{y\varphi^k} d\psi.$$

Таким образом, ударная волна ac и характеристика bc полностью определены. Вычислим дополнительно величины α и ϑ по соотношениям на ударной волне (6.51) и

$$\vartheta = \sigma - \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - W_\infty^2 \cos^2\sigma}{w_\infty^2 \sin\sigma\cos\sigma}\right).$$

Решение задачи Коши для уравнений (1.20) с начальными данными на линии ac (рис. 3.44) позволяет найти течение в области afc и, в частности, характеристику первого семейства fc. Решением задачи Гурса для тех же уравнений при известных характеристиках fc и bc определяется течение в области bcf.

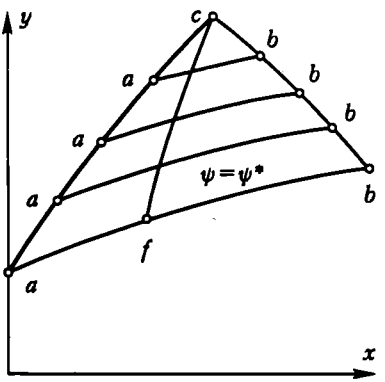


Рис. 3.44

Все линии тока найденного течения являются искомыми контурами ab. Действительно, уравнения (6.17), (6.42)–(6.46) выполнены для всех ψ из интервала $\psi_* \leqslant \psi \leqslant \psi_c$, удовлетворены также граничные условия (6.12), (6.19), (6.14)–(6.16), условие (6.9) и условие трансверсальности (6.41). При этом, конечно, найденные точки a и b следует считать заданными.

Примеры. Расчеты для иллюстрации метода проведены для осесимметричного случая при $\varkappa = 1{,}4$. Основные данные сведены в таблицу 6. В этой таблице M — число Маха набегающего потока, связанное с w_∞ формулой

$$\mathrm{M} = \left[\frac{2w_\infty^2}{\varkappa + 1 - (\varkappa - 1)w_\infty^2}\right]^{1/2}.$$

Величина c_x равна

$$c_x = \frac{2\left[\chi - \pi p_\infty (y_b^2 - y_a^2)\right]}{\pi y_b^2 \rho_\infty w_\infty^2}.$$

Как и раньше, № означает условный номер примера. Образующие тел вращения, соответствующие табличным данным, приведены на рис. 3.45 и 3.46. На этих фигурах показаны также ударные волны ac, характеристики второго семейства cb и характеристики первого семейства cf.

Для сравнения приведем результат расчета обтекания тела вращения с прямолинейной образующей ab. Число M = 2,50. Координаты точек a

Таблица 6.

№	M	y_a/X	y_b/X	c_x
29	1,50	1,8796	2,0895	0,0818
30	1,50	2,7412	2,9387	0,0547
31	1,50	4,4709	4,6579	0,0325
32	1,50	9,6699	9,8478	0,0146
33	2,50	0,1121	0,4433	0,2495
34	2,50	0,2762	0,5590	0,1934
35	2,50	0,5904	0,8406	0,1267
36	2,50	0,5492	1,7754	0,0587
37	2,75	0,5531	1,0371	0,3881
38	2,75	0,8370	1,2872	0,3029
39	2,75	1,4257	1,8475	0,2067
40	2,75	3,0888	3,4871	0,1078
41	3,00	1,0377	1,6009	0,3990
42	3,00	1,5157	2,0485	0,3022
43	3,00	2,4721	2,9805	0,2035
44	3,00	5,3340	5,8215	0,1026
45	4,00	2,5188	3,2635	0,3907
46	4,00	3,1935	3,9190	0,3191
47	4,00	4,2947	5,0035	0,2463
48	4,00	6,3790	7,0727	0,1722
49	5,00	3,3457	4,1783	0,3864
50	5,00	4,2531	5,0674	0,3135
51	5,00	5,7681	6,5663	0,2391
52	5,00	8,7588	9,5422	0,1629

и b совпадают с таковыми для тела № 33. Величина $c_x = 0{,}2640$. Таким образом, проигрыш в коэффициенте волнового сопротивления у тела с прямолинейной образующей составляет по сравнению с минимальным c_x более 5%.

Области I, II, III. В плоском случае, как уже отмечалось, линиям EF и CD плоскости w_∞, σ_c, изображенной на рис. 3.43, соответствуют прямолинейные профили ab. Ранее этот результат был получен Черным [23], в работе которого рассматривается обтекание профилей близких к прямолинейным. Установлено, что в областях I и III положительная вариация δy на контуре ab (выпуклый профиль) уменьшает сопротивление χ, а в области II уменьшение χ может быть достигнуто за счет отрицательной вариации δy (вогнутый профиль).

Задача о построении оптимального контура ab в областях I и III при плоскопараллельных течениях была решена Шипилиным [37] с использованием общего метода, не позволяющего уменьшить размерность вариационной задачи. Об этом методе будет сказано в конце главы. Оптимальный профиль имеет бесчисленное количество выпуклых из-

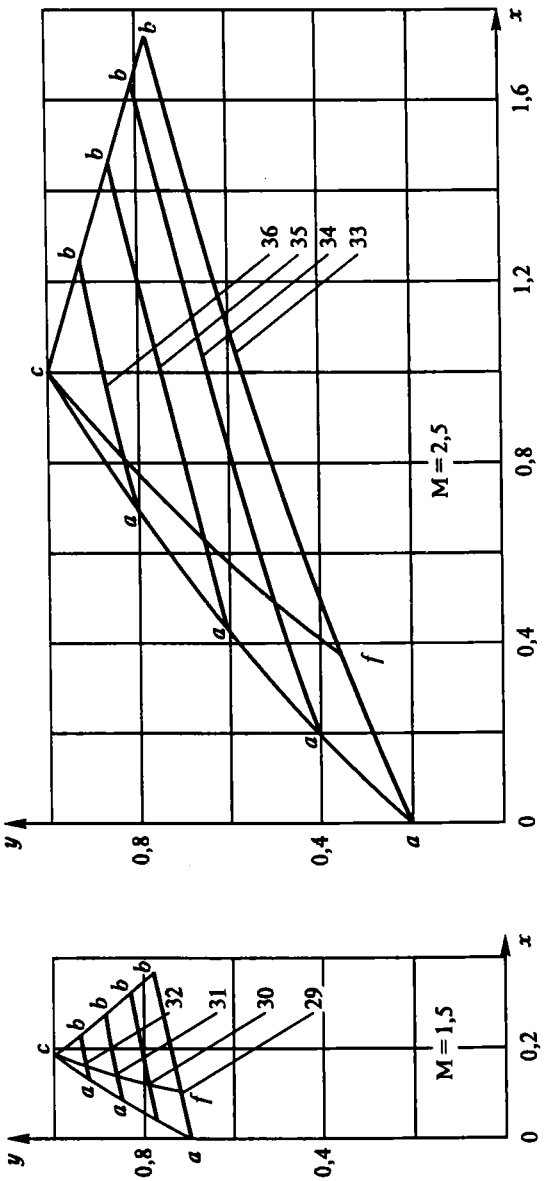


Рис. 3.45

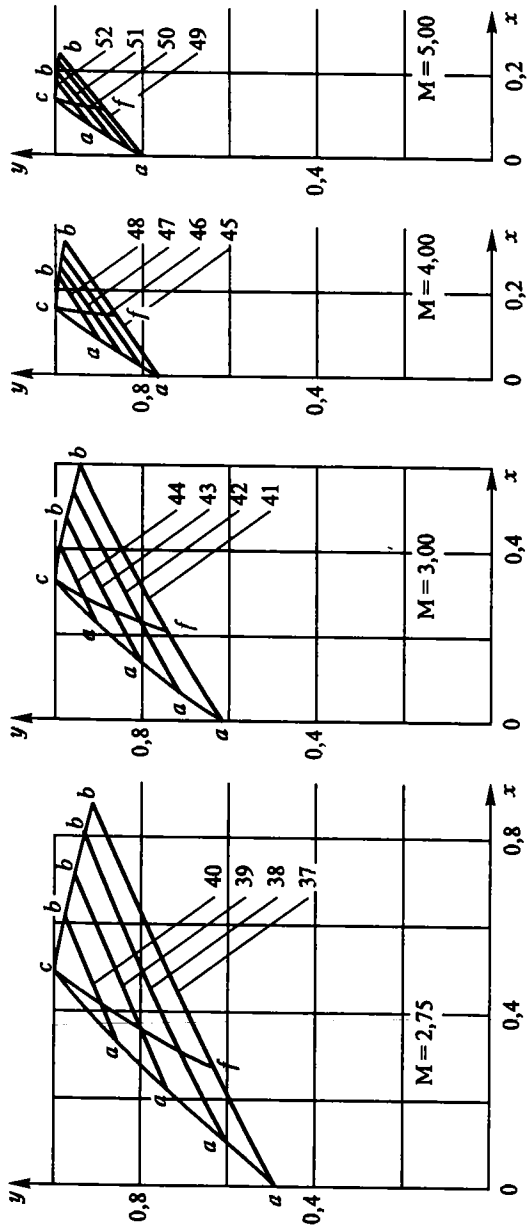

M = 2,75
M = 3,00
M = 4,00
M = 5,00
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
a
b
c
f
x
y
0
0,4
0,8
0,2

Рис. 3.46

ломов $k_1, k_2, \ldots$, сгущающихся у головной точки профиля (рис. 3.47). Из каждой точки излома выходит пучок характеристик, приходящих на ударную волну. Часть пучка, выходящего из точки k_1, попадает на характеристику cb. Части ударной волны, выхваченные такими пучками, и часть ch характеристики cb определяются изломами контура ab и являются участками краевого экстремума. Метод контрольного контура для решения подобных задач неприменим.

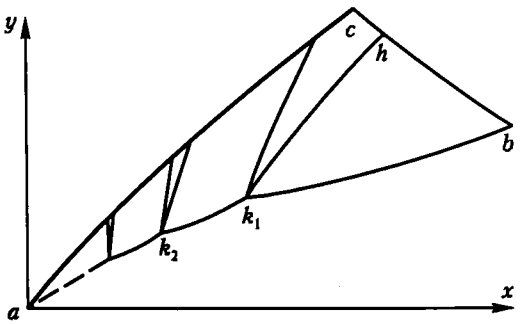


Рис. 3.47

3.7. Максимальное сопротивление в сверхзвуковом потоке

Волновое сопротивление тела в стационарном сверхзвуковом потоке газа равно нулю, если это тело не вызывает появления ударных волн, а обтекание его является безотрывным. Примером служит биплан Буземана. Простое исследование, не учитывающее детальной структуры потока, позволяет найти другую, верхнюю, границу волнового сопротивления при заданных габаритах тела.

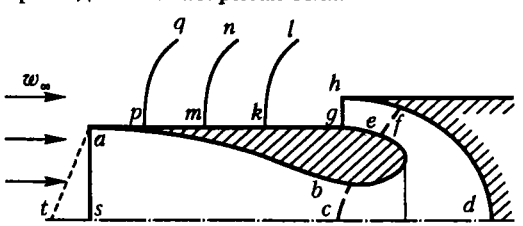


Рис. 3.48

Из закона изменения количества движения вытекает зависимость между силовым воздействием газового потока на тело и углом отклонения потока от первоначального направления. Для достижения максимального сопротивления следует найти наилучший способ поворота потока, вовлекая

в него достаточную для этого массу газа. Решение задачи может опираться на схему плоскопараллельного или осесимметричного течения, изображенную на рис. 3.48 и представляющую сверхзвуковой парашют. Захваченный диффузором газ выбрасывается навстречу набегающему потоку. Линии kl и pq представляют ударные волны, а линия mn — разделяющую линию тока. Ввиду сложности взаимодействия двух частей потока в области $qpkl$ целесообразно ограничиться оценкой величины волнового сопротивления.

Уравнения газовой динамики используются в виде

$$\oint_L y^\nu \left[\rho uv\,dx - (p + \rho u^2)\,dy\right] = 0, \quad \oint_L y^\nu \rho(v\,dx - u\,dy) = 0,$$

$$\rho = \varphi W^k, \quad p = \varphi W^{\varkappa k}, \quad \varphi = \frac{\rho^{\varkappa k}}{p^k}, \quad k = \frac{1}{\varkappa - 1}, \tag{7.1}$$

$$W = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} - \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}(u^2 + v^2).$$

Здесь L — граница произвольной области течения; x, y — декартовы координаты в случае плоскопараллельного течения или цилиндрические координаты в случае осесимметричного течения; u, v — соответствующие составляющие вектора скорости, отнесенные к критической скорости a_* течения; ρ — плотность, отнесенная к плотности ρ_∞ газа в набегающем потоке; p — давление, отнесенное к $\rho_\infty a_*^2$; φ — энтропийная функция; ν равно 0 или 1, соответственно, в плоском или осесимметричном случаях.

Пусть головная часть тела, поверхность которого может пропускать газ, ограничена прямоугольником $0 \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant y \leqslant Y$, где X, Y — заданные числа. Выберем контрольный контур следующим образом. Обозначим через ta линию Маха равномерного набегающего потока, приходящую в некоторую точку a. Если схема тела отвечает рис. 3.48, то точкой a является передняя точка заостренного профиля. Из нее могут исходить присоединенные ударные волны. Если тело вызывает отошедшую ударную волну, то в качестве точки a выбирается точка на пересечении ударной волны и линии тока, отделяющей массу газа, которая попадает во внутренние полости тела. Остальную часть контура, которая может пропускать газ, обозначим через ah. Вместо линии ta может быть взята линия sa. Контур sah замыкается осью симметрии и образующей поверхности тела hd. Если окажется, что для получения максимального сопротивления на тело должен воздействовать газ, не прошедший через ударную волну, то результаты решения вариационной задачи позволят сделать дальнейшие выводы об оценке величины сопротивления.

Параметры набегающего потока будут отмечены индексом ∞. Уравнение линии ah записывается в виде $y = f(x)$. Тогда на основании первого уравнения из (7.1) равнодействующая сил давления в направлении оси x равна

$$\chi = \frac{(\varkappa+1)y_a^{\nu+1}}{2\varkappa(\nu+1)}(1+w_\infty^2) + \int_{x=x_a}^{x_h} f^\nu\left[(p+\rho u^2)f' - \rho uv\right]dx. \qquad (7.2)$$

Здесь w_∞ — скорость набегающего потока. Для преобразования первого слагаемого правой части (7.2) использованы последние три уравнения из (7.1). Если суммарный расход газа через контур sah равен нулю, то второе уравнение из (7.1) дает

$$\Psi = 0 = \frac{w_\infty y_a^{\nu+1}}{\nu+1} + \int_{x=x_a}^{x_h} f^\nu \rho(uf' - v)\,dx. \qquad (7.3)$$

Для постановки вариационной задачи об отыскании тела с максимальным сопротивлением необходимо, помимо функционала (7.2) и условия (7.3), привлечь дифференциальные уравнения газовой динамики, соотношения на допустимых разрывах и граничные условия задачи. Такая полная задача здесь не рассматривается.

Рассмотрим задачу, базирующуюся только на равенствах (7.2), (7.3), условиях

$$0 \leqslant f(x) \leqslant Y, \quad 0 \leqslant x \leqslant X \qquad (7.4)$$

и условии

$$\varphi \leqslant \varphi_\infty, \qquad (7.5)$$

выражающем неубывание энтропии за ударной волной.

Возникает следующая вариационная задача. Необходимо найти функции $f(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$, реализующие максимум функционала (7.2) при условиях (7.3)–(7 5) и заданных величинах w_∞, X, Y.

Составим функционал

$$J = \chi + \lambda\Psi,$$

$$J = \frac{F}{\nu+1}y_a^{\nu+1} + \int_{x=x_a}^{x_h} \Phi(f, f', w, \vartheta, \varphi)\,dx, \quad F = \frac{(\varkappa+1)(1+w_\infty^2)}{2\varkappa} + \lambda w_\infty,$$

$$\Phi = f^\nu\left[(p+\rho w^2\cos^2\vartheta)f' - \rho w^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \lambda\rho w(\sin\vartheta - f'\cos\vartheta)\right].$$

Здесь λ — постоянный множитель Лагранжа, w — модуль скорости, ϑ — угол наклона скорости к оси x.

Вначале предположим, что $\varphi = \varphi_\infty$. Вычислим первую вариацию

$$\delta J = (Fy^\nu - \Phi_{f'})_a \delta y_a - \Phi_a \delta x_a + (\Phi_{f'})_h \delta y_h + \int_{x=x_a}^{x_h} \left[\left(\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} \right) \delta f + \Phi_w \delta w + \Phi_\vartheta \delta \vartheta \right] dx. \tag{7.6}$$

Здесь индексы f, f', w, ϑ отмечают частные производные. Вычисления дают

$$(Fy^\nu - \Phi_{f'})_a = y_a^\nu \left[F - (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta)_{ah} \right],$$

$$(\Phi_{f'})_h = y_h^\nu (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta)_h.$$

Двойной индекс ah показывает, что величины берутся в точке a при стремлении к ней со стороны точки h. Прочие величины, входящие в равенство (7.6), имеют вид

$$\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} = \frac{\nu \Phi}{f} - \frac{d}{dx} \left[f^\nu (p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta) \right],$$

$$\Phi_w = -\frac{f^\nu \rho}{\varkappa + 1 - (\varkappa - 1) w^2} \Big\{ 2w(\varkappa + 1 - \varkappa w^2)(\sin \vartheta - f' \cos \vartheta) \cos \vartheta +$$

$$+ \left[\varkappa + 1 - (\varkappa - 1) w^2 \right] w f' + \lambda (\varkappa + 1)(1 - w^2)(\sin \vartheta - f' \cos \vartheta) \Big\},$$

$$\Phi_\vartheta = -f^\nu \rho \left[w^2 (\cos 2\vartheta + f' \sin 2\vartheta) + \lambda w (\cos \vartheta + f' \sin \vartheta) \right].$$

Необходимым условием максимума χ является $\delta J \leqslant 0$ при допустимых вариациях. Из равенства (7.6) видно, что это условие выполняется при

$$x_a = 0, \quad y_h = Y \tag{7.7}$$

и при выполнении условий

$$\Phi_a \geqslant 0, \quad (\Phi_{f'})_h \geqslant 0, \tag{7.8}$$

$$(Fy^\nu - \Phi_{f'})_a = 0, \tag{7.9}$$

$$\Phi_f - \frac{d}{dx} \Phi_{f'} = 0, \quad \Phi_w = 0, \quad \Phi_\vartheta = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant X). \tag{7.10}$$

Неравенства (7.8) обеспечивают $\delta J \leqslant 0$ в силу того, что допустимые вариации удовлетворяют условиям $\delta x_a \geqslant 0$, $\delta y_h \leqslant 0$ при выполнении равенств (7.7). Функции $f(x)$, $w(x)$, $\vartheta(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant X$ и величина y_a определяются из уравнений (7.10) и равенства (7.9). Величина λ определяется равенством (7.3). После этого условия (7.8) подлежат проверке.

Одно частное решение в плоскопараллельном и осесимметричном случаях дает система равенств

$$(f')^{-1} = 0, \quad w = 1, \quad \vartheta = \pi.$$

Из них видно, что газ выбрасывается со звуковой скоростью навстречу набегающему потоку. В действительности такое течение может быть реализовано только при ненулевой длине тела, допускающей разворот течения.

В плоском случае, $\nu = 0$, величина Φ_f равна нулю, и первое уравнение из (7.10) дает

$$p + \rho w^2 \cos^2 \vartheta + \lambda \rho w \cos \vartheta = \text{const}.$$

Это равенство вместе со вторым и третьим уравнениями из (7.10) показывает, что в плоскопараллельном случае величины f', w, ϑ при $0 \leqslant x \leqslant X$ постоянны.

Еще одно частное решение в плоскопараллельном случае дают равенства

$$f(x) = Y, \quad \vartheta = \arccos\left[-\left(\frac{(\varkappa+1)(w^2-1)}{2w^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{7.11}$$

Для получения необходимых величин задаются значения w и Y при условиях $1 \leqslant w \leqslant \sqrt{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}$, величины f и ϑ определяются из (7.11), величина w_∞ — из равенства (7.9), а $X = x_h$ вычисляется на основании равенства (7.3) при $y_a = Y$ и $x_a = 0$. Это решение обусловливает захват диффузором максимальной массы газа и выбрасывание его через образующую параллельную вектору скорости набегающего потока.

В осесимметричном случае решение, определяемое уравнениями (7.10), существует не при всяких величинах w_∞, X, Y. Искомая линия ah может состоять из двух участков ar и rh. На участке ar $(0 \leqslant x \leqslant x_r,\ y_a \leqslant y \leqslant y_h)$ реализуется двусторонний экстремум, а участок rh $(x_r < x \leqslant x_h,\ f(x) = Y)$ допускает одностороннюю вариацию $\delta f \leqslant 0$. В этом случае функционал J следует записать в виде

$$J = \frac{1}{2} F y_a^2 + \int_{x=x_a}^{x_r} \Phi\, dx + \int_{x=x_r}^{x_h} \Phi\, dx.$$

Первая вариация этого функционала равна

$$\delta J = (Fy^2 - \Phi_{f'})_a \delta y_a - \Phi_a \delta x_a + (\Phi_{ra} - \Phi_{rh})\delta x_r + (\Phi_{f'})_h \delta y_h +$$

$$+ \int_{x=x_a}^{x_r} \left[\left(\Phi_f - \frac{d}{dx}\Phi_{f'}\right)\delta f + \Phi_w \delta w + \Phi_\vartheta \delta \vartheta\right] dx +$$

$$+\int_{x=x_r}^{x_h}\left[\left(\Phi_f-\frac{d}{dx}\Phi_{f'}\right)\delta f+\Phi_w\delta w+\Phi_\vartheta\delta\vartheta\right]dx.$$

Здесь двойные индексы показывают, что величины берутся в точке r при подходе к этой точке со стороны точки, отмеченной вторым индексом. Функции $w(x)$ и $\vartheta(x)$ могут иметь разрыв в точке r.

Для обеспечения неравенства $\delta J\leqslant 0$ потребуем выполнения условий

$$\Phi_a\geqslant 0,\quad (\Phi_{f'})_h\geqslant 0, \tag{7.12}$$

$$(Fy^2-\Phi_{f'})_a=0, \tag{7.13}$$

$$\Phi_{ra}-\Phi_{rh}=0, \tag{7.14}$$

$$\Phi_f-\frac{d}{dx}\Phi_{f'}=0,\quad \Phi_w=0,\quad \Phi_\vartheta=0\quad (0\leqslant x\leqslant x_r), \tag{7.15}$$

$$f(x)=Y,\quad \Phi_w=0,\quad \Phi_\vartheta=0\quad (x_r<x\leqslant X), \tag{7.16}$$

$$\Phi_f-\frac{d}{dx}\Phi_{f'}\geqslant 0\quad (x_r<x\leqslant X). \tag{7.17}$$

Второе и третье равенства из (7.16) помимо w и ϑ содержат только постоянные величины. Отсюда следует, что w и ϑ постоянны на участке rh.

При заданных значениях w_∞, X, Y величины λ, y_a, x_r, функции $f(x)$, $w(x)$, $\vartheta(x)$ на интервале ar и величины f, w, ϑ на rh определяются уравнениями (7.3), (7.13)–(7.16) и граничным условием $f(x_r)=Y$. После их определения необходимо проверить выполнение условий (7.12) и (7.17). Условие (7.17) упрощается с учетом равенств $f(x)=Y$, $w(x)=\text{const}$, $\vartheta(x)=\text{const}$ и принимает вид

$$\rho w\sin\vartheta(w\cos\vartheta+\lambda)\leqslant 0. \tag{7.18}$$

Частное решение этого типа получается при $x_r=0$, когда весь газ, попавший внутрь тела, выбрасывается через цилиндрическую боковую поверхность. В этом случае должны быть выполнены условия (7.3), (7.12), (7.13), (7.16), (7.17).

Пусть теперь допустимо возрастание энтропии, $\varphi\leqslant\varphi_\infty$. Введем обозначение $\varphi=\varphi_\infty\varphi_*$, где $0<\varphi_*\leqslant 1$. В выражении (7.6) для первой вариации δJ появится дополнительное слагаемое

$$\delta J_*=\int_{x=x_a}^{x_h}\Phi\frac{\delta\varphi_*}{\varphi_*}\,dx.$$

Подставим в это выражение функции, найденные из решения задачи при $\varphi=\varphi_\infty$. Допустимая вариация $\delta\varphi_*$ удовлетворяет условию $\delta\varphi_*\leqslant 0$.

Следовательно, условие $\delta J_* \leqslant 0$ выполняется при

$$\Phi \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant X). \tag{7.19}$$

Итак, после определения решения на основании уравнений (7.3), (7.9), (7.10) или (7.3), (7.13)–(7.16) необходимо проверить выполнение условий (7.8), (7.19) или (7.12), (7.18), (7.19). Выполнение условия (7.19) обеспечивает выполнение первого условия из (7.8).

Примеры расчетов по уравнениям (7.9), (7.10) здесь приведены при $\varkappa = 1{,}4$ в плоскопараллельном и осесимметричном случаях. При всех значениях w_∞ из сверхзвукового интервала и при всех значениях величины $L = X/Y$ из интервала $0 \leqslant L < \infty$ условия (7.8) и (7.19) выполняются. Отсюда следует, что, по крайней мере, при $\varkappa = 1{,}4$ наибольшее сопротивление осуществляется при воздействии на тело газа, не прошедшего через ударные волны.

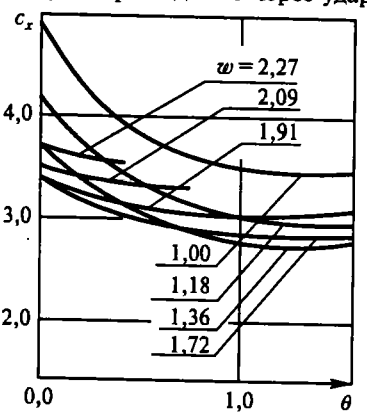


Рис. 3.49

Результаты расчетов максимального коэффициента сопротивления в плоскопараллельных течениях изображены на рис. 3.49. Величина коэффициента волнового сопротивления c_x в плоскопараллельном случае и аргумент θ, использованный на этой фигуре, определены формулами

$$c_x = \frac{2\chi}{w_\infty^2 Y}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y_h - y_a}{x_h - x_a}.$$

В осесимметричном случае коэффициент c_x равен

$$c_x = \frac{4\chi}{w_\infty^2 Y^2}.$$

Его величина совпадает с c_x плоских течений при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. При промежуточных значениях θ коэффициент c_x тел вращения при точности рис. 3.49 не отличается от величины c_x для плоскопараллельных течений.

Отметим, что, например, при числе Маха набегающего потока $M = 4$ максимальное сопротивление тела вращения может в два раза превышать сопротивление полубесконечного цилиндра с плоским головным срезом в случае осевой симметрии. Для проведения этого сравнения был использован расчет осесимметричного течения с отошедшей ударной волной, приведенный Белоцерковским в [38].

Дальнейшие исследования

Изложенные здесь результаты оптимизации формы тел, обтекаемых плоскопараллельным или осесимметричным сверхзвуковым потоком совершенного газа, а также оптимизации формы сверхзвуковых сопел были обобщены на случай несовершенного газа Крайко [17]. В дальнейшем Крайко [39] развил обладающий своими достоинствами метод неопределенного контура, позволяющий, как вариант метода контрольного контура, сводить определенные вариационные задачи с двумя независимыми переменными к одномерным задачам.

Для задач, не допускающих понижения размерности, Гудерлей и Эрмитейдж [40], а также Сиразетдинов [41] развили метод множителей Лагранжа, реализация которого сводится к численному итерационному процессу. Борисов и Шипилин [42] нашли некоторые интегралы сопряженной задачи. Крайко [43] в рамках этого метода ввел разрывы множителей Лагранжа и тем самым придал ему общность. Систематическое изложение этой темы, а также описание полученных результатов проведены Крайко [39]. Задачам оптимизации формы тел в трехмерных сверхзвуковых потоках посвящены работы Борисова [44] и Михайлова [45], а также последующие работы этих авторов.

Литература к главе 3

[1] *Никольский А. А.* О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке. Жуковский. Труды ЦАГИ. 1950. (2-е издание: Сборник теоретических работ по аэродинамике. Москва. Оборонгиз. 1957. С. 56–63.)

[2] *Охоцимский Д. Е.* К теории движения ракет // Прикл. матем. и механ. 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 251–272.

[3] *Guderley G., Hantsch E.* Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen // Zeitschrift für Flugwissenschaften. 1955. Bd. 3. H. 9. S. 305–313.

[4] *Zandbergen P. J., van der Walle F.* The optimum shape of axisymmetric configurations in supersonic flow, with a given area, as derived by using the exact flow equations. Amsterdam. National Luchtvaartlaboratorium. Report MP. 193. 1960.

[5] *Шмыглевский Ю. Д.* Вариационная задача газодинамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т.113. № 3. С. 520–522.

[6] *Шмыглевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Прикл. матем. и механ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 195–206.

[7] *Стернин Л. Е.* О границе области существования безударных оптимальных сопел // Доклады Академии наук СССР. Т. 139. № 2. С. 335-336.

[8] *Rao G. V. R.* Exhaust nozzle contour for optimum thrust // Jet Propulsion. 1958. V. 28. № 6. P. 377–382.

[9] *Guderley G.* On Rao's method for the computation of exhaust nozzles // Zeitschrift für Flugwissenschaften. 1959. Bd. 7. H. 12. S. 345–350.

[10] *Борисов В. М., Шмыглевский Ю. Д.* К постановке вариационных задач газовой динамики // Прикл. матем. и механ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 183–185.

[11] *Стернин Л. Е.* К расчету осесимметричного реактивного сопла наименьшего веса // Известия Академии наук СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 1. С. 41–45.

[12] *Rao G. V. R.* Spike nozzle contour for optimum thrust // Planet. and Space Sci. 1961. № 4. P. 92–101.

[13] *Шмыглевский Ю. Д.* О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Доклады Академии наук СССР. 1958. Т. 122. № 5. С. 782–784.

[14] *Шмыглевский Ю. Д.* Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел // Прикл. матем. и механ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 110–125.

[15] *Fanselau R. W.* Comments on «Exhaust nozzle contour for maximum thrust». Journ. ARS. 1959. V. 29. № 6. P. 456–457.

[16] *Шмыглевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Москва. Труды Вычислительного центра Академии наук СССР. 1963.

[17] *Крайко А. Н.* Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Москва. Труды Вычислительного центра Академии наук СССР. 1963.

[18] *Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д.* К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 178–182.

[19] *Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Увеличение тяги сопла вращением потока // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 1. С. 34–37.

[20] *Naumova I. N., Shmyglevskii Yu. D.* Nozzle thrust increase by rotation of the flow // Aerospace Proc. 1966. V. 2. London, Melbourne, Toronto. Macmillan. 1967, P. 619–623.

[21] *Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P.* Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length // J. Optimization Theory and Applications. 1973. V.12. № 6. P. 588–628.

[22] *Тилляева Н. И.* О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 3. С. 124–131.

[23] *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Москва. Физматгиз. 1959.

[24] *Шмыглевский Ю. Д.* Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 923–926.

[25] *Guderley K. G., Armitage J. V.* Nose and inlet shapes of minimum drag in supersonic flow. Los Angeles. IAS Paper № 62–116. 1962.

[26] *Шмыглевский Ю. Д.* О максимальном сопротивлении в сверхзвуковом потоке // Прикл. матем. и механ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 604–608.

[27] *Shmyglevskii Yu. D.* On maximum drag in supersonic flow // Aerospace Proc. 1966. V. 1. London, Melbourne, Toronto. Macmillan. 1967. P. 303–308.

[28] *Дородницын А. А.* Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Жуковский. Труды ЦАГИ. 1950. (2-е издание: Сборник теоретических работ по аэродинамике. Москва. Оборонгиз. 1957. С. 77–88.)

[29] *Courant R., Friedrichs K. O.* Supersonic flow and shock waves. New York. Wiley (Interscience). 1948.

[30] *Чушкин П. И.* Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 927–930.

[31] *Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишнина Н. П.* Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Москва. Вычислительный центр Академии наук СССР. 1961.

[32] *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. Москва, Ленинград. Государственное издательство техникотеоретической литературы. 1950.

[33] *Шмыглевский Ю. Д.* Расчет осесимметричных сверхзвуковых потоков газа в окрестности излома образующей тела вращения. Жуковский. Труды ЦАГИ. 1950. (2-е издание: Сборник теоретических работ по аэродинамике. Москва. Оборонгиз. 1957. С. 89–115.)

[34] *Рыжов О. С., Шмыглевский Ю. Д.* Об одном свойстве трансзвуковых течений газа // Прикл. матем. и механ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 453–455.

[35] *Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью // Вычислительная математика. 1957. Сборник 2. С. 45–89.

[36] *Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. Москва. Академия наук СССР. 1962.

[37] *Шипилин А. В.* Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 4. С. 9–18.

[38] *Белоцерковский О. М.* Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного и реального газа // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 6. С. 1062–1085.

[39] *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. Москва. Наука. 1979.

[40] *Guderley K. G., Armitage J. V.* A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles // Paper presented at the Symposium on Extremal Problems in Aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories. Flight Science Laboratory. Seattle, Washington. 1962.

[41] *Сиразетдинов Т. К.* Оптимальные задачи газодинамики // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 1963. 62. С. 11–21.

[42] *Борисов В. М., Шипилин А. В.* О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 182–183.

[43] *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 285–295.

[44] *Борисов В. М.* Вариационная задача о трехмерных сверхзвуковых течениях // Прикл. матем. и механ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 106–113.

[45] *Михайлов И. Е.* Форма сверхзвукового пространственного сопла, обладающего максимальной тягой // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 1. С. 257–262.

Глава 4

Вязкие течения и вихревые образования

4.1. Инверсия сингулярности уравнений Навье—Стокса

Одна из трудностей решения уравнений Навье—Стокса при больших числах Рейнольдса связана с сингулярностью — наличием малого параметра при старших производных. Созданная Прандтлем [1] теория пограничного слоя позволила в значительной мере преодолеть эту трудность. Разделение области решения на пограничный слой и подобласть регулярного решения вызвало к жизни специальную математическую теорию.

Пограничный слой представляет собой подобласть, в которой произведение малого параметра на производные сравнимо по абсолютной величине с конвективными членами уравнений. В обычных независимых переменных, например, декартовых, пограничный слой или прилегает к обтекаемым стенкам, к которым жидкость прилипает, или разделяет подобласти регулярного решения. Здесь в плоском и осесимметричном случаях проводится замена переменных, при которой обычный пограничный слой переходит в область регулярного решения, а область регулярного решения может перейти в пограничный слой [2].

Плоские стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями

$$u_x + v_y = 0, \tag{1.1}$$

$$uu_x + vu_y + p_x = \varepsilon \Delta u, \quad uv_x + vv_y + p_y = \varepsilon \Delta v, \tag{1.2}$$

где x, y — декартовы координаты; u, v — соответствующие составляющие вектора скорости; p — давление, деленное на плотность; Δ — оператор Лапласа; $\varepsilon = \mathrm{R}^{-1}$; R — число Рейнольдса.

Введение вихря ω и функции q:

$$u_y - v_x = \omega, \quad q = p + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \tag{1.3}$$

вместе с использованием уравнения неразрывности (1.1) позволяет преобразовать уравнения Навье—Стокса (1.2) к форме Ламба—Громеко:

$$u\omega - q_y = \varepsilon\omega_x, \quad v\omega + q_x = \varepsilon\omega_y.$$

Исключение из последних уравнений величины q с учетом (1.1) дает

$$u\omega_x + v\omega_y = \varepsilon\Delta\omega. \tag{1.4}$$

Преобразование Лежандра для функции ω определяется равенствами

$$\sigma(\xi,\eta) + \omega(x,y) = x\xi + y\eta, \quad \xi = \omega_x, \quad \eta = \omega_y, \quad x = \sigma_\xi, \quad y = \sigma_\eta, \tag{1.5}$$

где ξ, η — новые независимые переменные, σ — новая функция. Первые производные по x, y можно преобразовать по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{D(\varphi,y)}{D(x,y)} = \frac{D(\varphi,y)}{D(\xi,\eta)}\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]^{-1}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{D(x,\varphi)}{D(x,y)} = \frac{D(x,\varphi)}{D(\xi,\eta)}\left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Величина $\Delta\omega$ с учетом (1.5) преобразуется к виду

$$\Delta\omega = \omega_{xx} + \omega_{yy} = \xi_x + \eta_y. \tag{1.7}$$

Из тождеств

$$\begin{aligned} x_x &= 1 = x_\xi\xi_x + x_\eta\eta_x, \quad & x_y &= 0 = x_\xi\xi_y + x_\eta\eta_y, \\ y_x &= 0 = y_\xi\xi_x + y_\eta\eta_x, \quad & y_y &= 1 = y_\xi\xi_y + y_\eta\eta_y \end{aligned}$$

находятся производные

$$\xi_x = y_\eta\lambda, \quad \eta_y = x_\xi\lambda, \quad \lambda = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}. \tag{1.8}$$

Используя (1.6)–(1.8) для преобразования уравнений (1.1), (1.3), (1.4) вместе со вторым и третьим равенствами из (1.5), а также исключая σ из первого и двух последних равенств (1.5), получаем искомую систему уравнений для определения функций u, v, ω, x, y:

$$u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi + v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta = 0, \tag{1.9a}$$

$$-u_\xi x_\eta + u_\eta x_\xi + v_\eta y_\xi - v_\xi y_\eta = \omega(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi), \tag{1.9b}$$

$$(u\xi + v\eta)(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) = \varepsilon(x_\xi + y_\eta), \tag{1.9c}$$

$$\xi x_\xi + \eta y_\xi = \omega_\xi, \quad \xi x_\eta + \eta y_\eta = \omega_\eta. \tag{1.9d}$$

Можно отметить, что из (1.9d) вытекает равенство $x_\eta = y_\xi$.

Уравнение (1.9c) содержит множителем при ε сумму величин x_ξ и y_η. Если в некоторой области переменных ξ, η модуль этой суммы, умноженной на ε, имеет порядок старшего по модулю члена левой части уравнения, то это — область пограничного слоя. Левая часть уравнения содержит произведение тех же величин $x_\xi y_\eta$ с множителем, который может быть мал там, где x_ξ и y_η велики. Из проведенного рассмотрения величин, входящих в (1.9c), не ясно, возможно ли возникновение пограничного слоя в переменных ξ, η. Такая возможность видна из следующего примера.

Пример решения системы уравнений (1.9):

$$u = \varepsilon + \eta, \quad v = \varepsilon - \xi, \quad \omega = \xi + \eta, \quad x = \ln\xi, \quad y = \ln\eta. \tag{1.10}$$

В переменных x, y имеем

$$u = \varepsilon + e^y, \quad v = \varepsilon - e^x, \quad \omega = e^x + e^y, \quad p = e^{x+y} + P, \quad P = \text{const}. \tag{1.11}$$

В плоскости x, y линии тока $\psi = \varepsilon(y - x) + e^x + e^y = \text{const}$ при $\varepsilon = 10^{-4}$ изображены на рис. 4.1. Стрелками показано направление течения. При $x = \ln\varepsilon$ величина $v = 0$, и функция $y(x)$ на линиях тока достигает максимума. Для выяснения типа решения (пограничный слой или регулярное решение) в различных областях подставим (1.11) в уравнение (1.4). Получим

$$\varepsilon e^x + e^{x+y} + \varepsilon e^y - e^{x+y} = \varepsilon e^x + \varepsilon e^y.$$

При $x > 0$, $y > 0$ главными членами являются слагаемые левой части последнего равенства с $\exp(x + y)$, и эта область является областью регулярного решения. При $x < \ln\varepsilon$, $y < \ln\varepsilon$, главными являются члены, содержащие ε, хотя в этой области функции u, v, p меняются слабо. При $-\infty < x < \ln\varepsilon$, $y > 0$ главными являются члены $\varepsilon \exp y$, и область имеет все признаки пограничного слоя. Ей аналогична область $x > 0$, $-\infty < y < \ln\varepsilon$.

Две последние области переходят в плоскости ξ, η, соответственно, в полуполосы $0 < \xi < \varepsilon$, $e < \eta < \infty$ и $e < \xi < \infty$, $0 < \eta < \varepsilon$. В первой из них величина x меняется от $\ln\varepsilon$ до $-\infty$, во второй в тех же пределах меняется величина y. Подстановка (1.10) в (1.9c) убеждает в том, что главными в этих полуполосах являются члены правой и левой частей уравнения, содержащие ε. Эти области являются пограничными слоями (функции u, v поперек этих областей либо не меняются, либо меняются слабо).

Рассмотренный пример показывает, что система уравнений (1.9) может определять пограничный слой.

В задачах обтекания тел пограничный слой, существующий около их поверхности в переменных x, y, в новых переменных ξ, η переходит

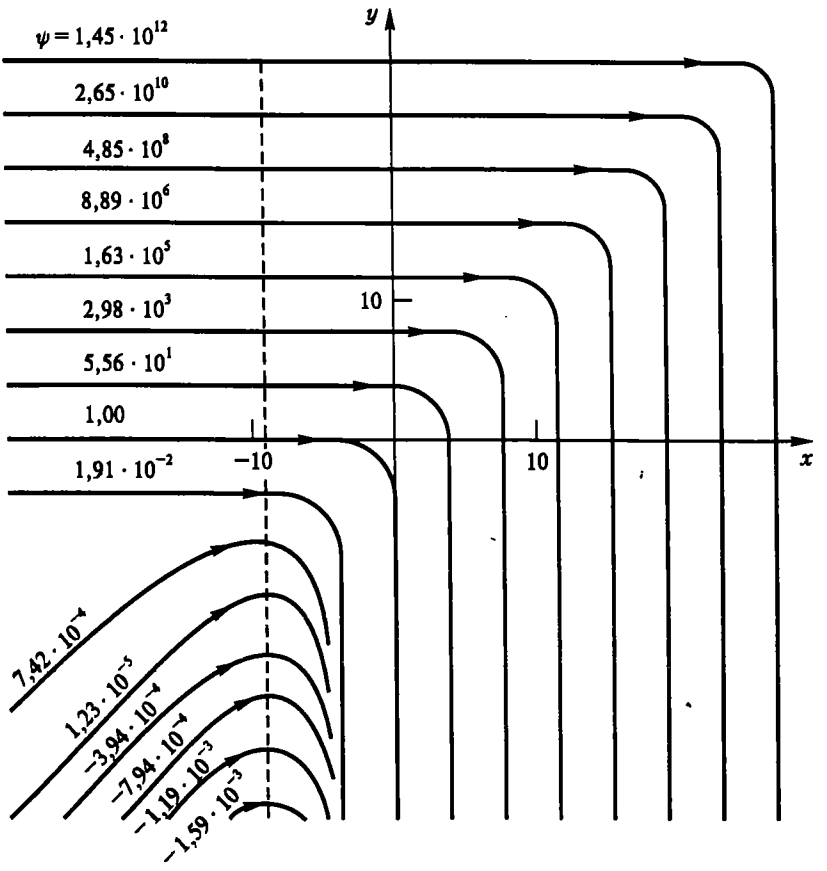


Рис. 4.1

в область нерезкого изменения функций, а главный член правой части уравнения (1.9с) имеет порядок главных членов левой части этого уравнения. Область регулярного решения в плоскости x, y при достаточно малых значениях $|\operatorname{grad}\omega|$ может перейти в плоскости ξ, η в область регулярного решения с резким изменением функций. Заметим, что течение Пуазейля, в котором ω линейно зависит от y, в плоскости ξ, η изображается точкой.

В осесимметричном случае, если x является осевой координатой, а r — радиальной, исходная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_r + vr^{-1} = 0,$$

$$uu_x + vu_r + p_x = \varepsilon(u_{xx} + u_{rr} + u_r r^{-1}),$$
$$uv_x + vv_r + p_r = \varepsilon(v_{xx} + v_{rr} + v_r r^{-1} - vr^{-2}).$$

Преобразование Лежандра

$$\sigma(\xi,\eta) + \omega(x,r) = x\xi + r\eta, \quad \xi = \omega_x, \quad \eta = \omega_r, \quad x = \sigma_\xi, \quad r = \sigma_\eta$$

приводит к системе уравнений

$$r(u_\xi r_\eta - u_\eta r_\xi + v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) + v\mu = 0,$$
$$u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta - v_\xi r_\eta + v_\eta r_\xi = \omega\mu,$$
$$[r^2(u\xi + v\eta) - rv\omega]\mu = \varepsilon[r^2(x_\xi + r_\eta) + (r\eta - \omega)\mu],$$
$$\xi x_\xi + \eta r_\xi = \omega_\xi, \quad \xi x_\eta + \eta r_\eta = \omega_\eta,$$
$$\mu = x_\xi r_\eta - x_\eta r_\xi.$$

Здесь, как и в (1.9), при малом параметре содержатся производные от x и r.

4.2. Изобарические течения

Некоторые решения уравнений Навье—Стокса являются одновременно и решениями более простых уравнений гидродинамики. Возникает возможность выделять из классов решений таких более простых уравнений те, которые реализуются и в случае вязких течений. Вначале будут рассмотрены изобарические течения [3, 4], а затем, в других разделах, и течения более общих видов.

4.2.1. Невязкие и вязкие трехмерные течения

В переменных Лагранжа изобарические течения описываются системой уравнений

$$x_\tau = u, \quad y_\tau = v, \quad z_\tau = w, \quad u_\tau = v_\tau = w_\tau = 0,$$
$$\rho\frac{D(x,y,z)}{D(\alpha,\beta,\gamma)} = \rho_0\frac{D(x_0,y_0,z_0)}{D(\alpha,\beta,\gamma)}, \tag{2.1}$$

где τ — время; α, β, γ — переменные Лагранжа; x, y, z — декартовы координаты; $u(\alpha,\beta,\gamma)$, $v(\alpha,\beta,\gamma)$, $w(\alpha,\beta,\gamma)$ — соответствующие составляющие вектора скорости; ρ — плотность; нулевые индексы отвечают моменту времени $\tau = 0$.

Интегрирование по τ и выбор $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$ дают

$$x = u\tau + \alpha, \quad y = v\tau + \beta, \quad z = w\tau + \gamma,$$
$$\rho = \rho_0(1 + L\tau + M\tau^2 + N\tau^3)^{-1},$$
$$L = u_\alpha + v_\beta + w_\gamma, \quad N = \frac{D(u,v,w)}{D(\alpha,\beta,\gamma)}, \tag{2.2}$$
$$M = \frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} + \frac{D(v,w)}{D(\beta,\gamma)} + \frac{D(w,u)}{D(\gamma,\alpha)}.$$

Произвольные зависимости u, v, w, ρ_0 от α, β, γ удовлетворяют уравнениям (2.1).

В случае несжимаемой жидкости необходимо

$$L = M = N = 0,$$

а давление должно уравновешивать массовые силы. Из $N = 0$ следует, что между u, v, w существует зависимость, не включающая α, β, γ. Подстановка $w = w(u,v)$ в равенство $M = 0$ показывает, что ему удовлетворяет зависимость v только от u. Таким образом, $v = \Phi(u)$, $w = \Psi(u)$ удовлетворяют равенствам $M = N = 0$ при произвольных Φ, Ψ. Подстановка v, w в уравнение $L = 0$ дает

$$u_\alpha + \Phi_u u_\beta + \Psi_u u_\gamma = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения записывается в виде

$$X(\Phi_u\alpha - \beta, \Psi_u\alpha - \gamma, u) = 0 \tag{2.3a}$$

при произвольной зависимости функции X от ее аргументов. В переменных Эйлера этот интеграл имеет вид

$$X\left[(\Phi - \Phi_u u)t + \Phi_u x - y, (\Psi - \Psi_u u)t + \Psi_u x - z, u\right] = 0. \tag{2.3b}$$

В случае сжимаемой жидкости давление должно уравновешивать массовые силы, а функции u, v, w, ρ_0 необходимо подчинить уравнению энергии.

Полученный интеграл представляет собой простую волну, поскольку функции v, w зависят только от u. Зильберглейт [5], Бондаренко [6] и Овсянников [7] нашли решение типа двойной волны, когда одна составляющая скорости зависит от двух других (пример см. в Приложении 2). В работе [7] показано, что общее решение уравнений (2.1) представляет постоянное (равномерное) движение, простую волну или двойную, и что эти три движения могут сосуществовать в одном общем течении, непрерывно примыкая друг к другу. С целью получения вязких течений здесь будет рассмотрено решение (2.3).

Простой пример вязкого течения можно получить следующим образом. Пусть $\Phi \equiv 0$, $\Psi \equiv 0$. Тогда

$$v = 0, \quad w = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.3b) следует

$$X(-y, -z, u) = 0 \quad \text{или} \quad u = u(y, z). \tag{2.5}$$

Уравнение неразрывности в переменных Эйлера $\operatorname{div} \rho V = 0$, где ρ — постоянная плотность, V — вектор скорости с составляющими u, v, w, в силу (2.4), (2.5) удовлетворено. Уравнение Навье—Стокса, если ввести в рассмотрение давление p, имеет вид

$$\rho\left[(V \cdot \nabla)V + kg\right] + \nabla p = \mu \Delta V, \tag{2.6}$$

где k — орт по направлению оси z; g — ускорение силы тяжести; μ — коэффициент вязкости. При

$$p = P - \rho g z,$$

где P — произвольная постоянная, равенства (2.4), (2.5) обращают левую часть уравнения (2.6) в нуль. Правая часть этого уравнения обращается в нуль, например, при

$$u = U \cos y \operatorname{sh}(z - Z), \quad U = \text{const}, \quad Z = \text{const}.$$

Пусть теперь при $0 \leqslant z \leqslant 1$

$$P = 4, \quad \rho = 2, \quad g = 1, \quad U = 1, \quad Z = 0, \quad \mu = 2 \operatorname{ch}\left[\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 1\right)\right];$$

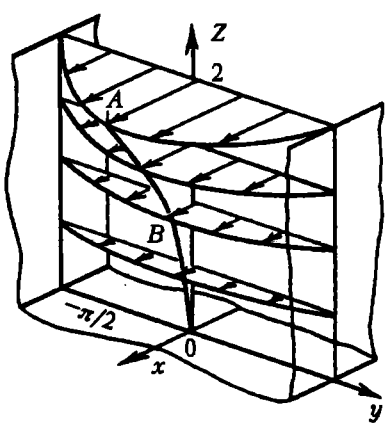


Рис. 4.2

при $1 < z \leqslant 2$

$$P = 3, \quad \rho = 1, \quad g = 1, \quad U = 2,$$

$$Z = 1 - \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 1\right), \quad \mu = \operatorname{ch} 1.$$

При $z = 1$ имеет место непрерывность функций V, p и касательных напряжений μu_z. На рис. 4.2 представлено такое двухслойное течение в канале с плоским дном $z = 0$ и вертикальными плоскими стенками $y = \pm\pi/2$. Стрелки показывают направление скорости u, а кривая ABO — величину u при $y = 0$. Жидкость прилипает к дну и к боковым стенкам. Такое течение существует, если при $z = 2$ поддерживается скорость нужной величины.

4.2.2. Вязкие плоские течения

Уравнения, описывающие нестационарные плоские течения несжимаемой вязкой жидкости при постоянном давлении имеют вид

$$u_x + v_y = 0, \tag{2.7}$$

$$u_t + uu_x + vu_y = u_{xx} + u_{yy}, \tag{2.8}$$

$$v_t + uv_x + vv_y = v_{xx} + v_{yy}. \tag{2.9}$$

Здесь t — время, деленное на коэффициент вязкости ν; x, y — декартовы координаты, деленные на ν.

Найдем по возможности более простые уравнения, которым удовлетворяют все решения переопределенной системы (2.7)–(2.9).

Уравнения (2.8), (2.9) с учетом (2.7) можно записать в виде

$$u_t - uv_y + vu_y + (v_x - u_y)_y = 0, \tag{2.10}$$

$$v_t + uv_x - vu_x - (v_x - u_y)_x = 0. \tag{2.11}$$

Дифференцирование (2.10) по x и (2.11) по y, а затем сложение полученных результатов приводит к равенству

$$u_x v_y - u_y v_x = 0.$$

Отсюда

$$u = \varkappa(v, t). \tag{2.12}$$

Здесь и далее до конца этого раздела греческие буквы при первом их появлении означают произвольные функции своих аргументов. Несимметричность равенства (2.12) компенсируется тем, что циклическая перестановка в парах переменных (x, y) и (u, v) не меняет систему уравнений (2.7)–(2.9).

Подстановка выражения для u из (2.12) в (2.8), (2.9) и сопоставление полученных равенств дает

$$\varkappa_t - (v_x^2 + v_y^2)\varkappa_{vv} = 0, \tag{2.13}$$

$$v_t + \varkappa v_x + vv_y - v_{xx} - v_{yy} = 0. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.13) имеет смысл в трех случаях:

$$v_x^2 + v_y^2 = \chi^2, \qquad \chi \not\equiv 0, \tag{2.15}$$

$$\varkappa_t = 0, \qquad \varkappa_{vv} = 0, \tag{2.16}$$

$$\varkappa_t = 0, \qquad v_x^2 + v_y^2 = 0. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.15) можно записать в виде

$$F_x^2 + F_y^2 = 1, \quad F(v, t) = \int \chi^{-1}(v, t)dv, \quad \chi \not\equiv 0. \tag{2.18}$$

Общий интеграл этого уравнения в переменных x, y есть

$$F = A(a,t) + (x^2 + y^2 - a^2)^{1/2}, \quad A = a\lambda(a,t) - \int \lambda(a,t)dt, \tag{2.19}$$

где функция $a(x,y)$ определяется уравнением

$$\lambda(a,t) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \arcsin\frac{a}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0. \tag{2.20}$$

Использование (2.19), (2.20) дает необходимые для дальнейшего равенства

$$(x^2 + y^2 - a^2)^{1/2} = F - A = x\cos\lambda - y\sin\lambda, \tag{2.21a}$$

$$a = x\sin\lambda + y\cos\lambda, \quad F_x = \cos\lambda, \quad F_y = -\sin\lambda. \tag{2.21b}$$

Полный интеграл уравнения (2.18) есть

$$\begin{aligned} F = &-w\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + w\arcsin\left[w(x^2+y^2)^{-1/2}\right] + \\ &+ (x^2+y^2-w^2)^{1/2} + k, \quad w = w(t), \quad k = k(t). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Особого интеграла уравнение (2.18) не имеет.

Из второго равенства (2.18) следует, что

$$v = \varphi(F,t). \tag{2.23}$$

Подстановка выражения для u из (2.12) в (2.7) дает уравнение

$$\varkappa_v v_x + v_y = 0.$$

Его общий интеграл есть

$$v = \tau(x - \varkappa_v y, t). \tag{2.24}$$

Функция $\varkappa$, согласно (2.12), зависит от v, t. Поэтому с использованием (2.23) можно написать

$$\varkappa_v = l(F,t). \tag{2.25}$$

Сопоставление этой зависимости с равенствами (2.23), (2.24) приводит к условию

$$x - l(F,t)y = q(F,t), \tag{2.26}$$

которое накладывает связь на входящие в него функции l, q с учетом (2.21) при использовании общего интеграла или с учетом (2.22) при использовании полного интеграла.

В первом случае равенства (2.21) дают

$$x = a\sin\lambda + (F - A)\cos\lambda, \quad y = a\cos\lambda - (F - A)\sin\lambda.$$

Подстановка этих выражений в (2.26) показывает, что

$$l(F,t)=\frac{a\sin\lambda+(F-A)\cos\lambda-q(F,t)}{a\cos\lambda-(F-A)\sin\lambda}. \tag{2.27}$$

Из (2.20) видно, что a не является функцией только x^2+y^2, t, а из (2.19) следует, что F не является функцией только a. Отсюда вытекает, что правая часть (2.27) зависит от F, t и не зависит от a. Вычисление частной производной от правой части (2.27) по a и приравнивание ее нулю дает

$$q(F,t)=\frac{F^2\lambda_a-F(2A\lambda_a+1)+A(A\lambda_a+1)}{F\lambda_a\cos\lambda-A_a\sin\lambda-\cos\lambda+(a\sin\lambda-A\cos\lambda)\lambda_a}.$$

Правая часть этого равенства, в свою очередь, не должна зависеть от a. Поэтому коэффициенты при всех степенях F в числителе и знаменателе после умножения их на некоторую функцию $g(a,t)$ должны стать функциями только от t. В частности, коэффициенты при старших степенях F в числителе и знаменателе должны дать $g\lambda_a=G(t)$, $g\lambda_a\cos\lambda=L(t)$. Отсюда вытекают равенства $\cos\lambda=M(t)$, $\lambda=\mu(t)$, $\lambda_a=0$. Функция $q(F,t)$ принимает вид

$$q=(F-A)(A_a\sin\mu+\cos\mu)^{-1}.$$

Далее отсюда следует, что

$$A_a\sin\mu+\cos\mu=N(t),\quad A=\eta(t),\quad A_a=0.$$

Окончательно при $\mu\not\equiv 0$ возникает выражение

$$q=\frac{F-A}{\cos\mu}. \tag{2.28}$$

При $\cos\mu\equiv 0$ решения нет. Подстановка (2.28) в (2.27) дает

$$l=\operatorname{tg}\mu. \tag{2.29}$$

Подстановка (2.28), (2.29) в (2.26) приводит к равенству

$$F=A+x\cos\mu-y\sin\mu. \tag{2.30}$$

Интегрирование (2.25) с учетом (2.29) дает

$$\varkappa=v\operatorname{tg}\mu(t)+\delta(t). \tag{2.31}$$

Из равенств (2.13), (2.31) теперь следует, что $\varkappa_t=0$ или

$$\frac{v\mu_t}{\cos^2\mu}+\delta_t=0. \tag{2.32}$$

Если v зависит только от t, то из (2.14) следует, что $v = \text{const}$, из (2.7) — что $u = \sigma(y,t)$, а из (2.8) вытекает, что

$$\sigma_t + v\sigma_y - \sigma_{yy} = 0 \tag{2.33}$$

(к этому случаю удобнее вернуться позже).

Если $v = \varphi(F,t)$, то коэффициент при μ_t в (2.32) зависит от F и, следовательно, $\mu = \text{const}$, $\delta = \text{const}$.

К настоящему моменту (2.31), (2.23), (2.30) дают равенства

$$u = \varkappa = v\operatorname{tg}\mu + \delta, \quad v = \varphi(E,t), \quad E = x\cos\mu - y\sin\mu, \tag{2.34}$$

которые удовлетворяют уравнениям (2.7), (2.13). Остается подчинить найденные функции уравнению (2.14). Подстановка (2.34) в (2.14) и использование двух последних равенств из (2.21) дает

$$\varphi_t + \varphi_E\delta\cos\mu - \varphi_{EE} = 0. \tag{2.35}$$

Замена переменных

$$H = E - t\delta\cos\mu \tag{2.36}$$

приводит уравнение (2.35) к уравнению теплопроводности

$$\varphi_t = \varphi_{HH}. \tag{2.37}$$

Любое решение уравнения (2.37) с использованием (2.36), (2.34), (2.12) при произвольных постоянных δ, μ, если $\cos\mu \neq 0$, дает решение исходной системы уравнений (2.7)–(2.9). Этот результат получен на основе общего интеграла (2.19), (2.20).

Вернемся к уравнению (2.33). Из сопоставления его с (2.35) при $\mu = 0$ и $\delta = v$ видно, что его решения могут быть получены из решений уравнения (2.35), если произвести циклические перестановки в парах величин (x,y) и (u,v).

Обратимся к полному интегралу (2.22). Равенство (2.26) при $q(F,t) \not\equiv 0$ может быть записано в виде

$$m(F,t)x + n(F,t)y = 1, \tag{2.38}$$

где $F(x,y)$ определяется выражением (2.22). Частные производные от левой части (2.38) по x и y должны равняться нулю. Это дает два уравнения линейных относительно m, n, $xm_F + yn_F$. Исключение из них последней суммы приводит к равенству

$$\left[wx - y(x^2+y^2-w^2)^{1/2}\right]m + \left[wy + x(x^2+y^2-w^2)^{1/2}\right]n = 0. \tag{2.39}$$

Решение уравнений (2.38), (2.39) относительно m, n дает

$$m = \frac{\cos h}{(x^2+y^2-w^2)^{1/2}}, \quad n = -\frac{\sin h}{(x^2+y^2-w^2)^{1/2}}, \tag{2.40}$$

$$h = \arcsin\frac{w}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{2.41}$$

Из (2.22), (2.41) следует

$$(x^2 + y^2 - w^2)^{1/2} = F - wh - k.$$

Это равенство и формулы (2.40), (2.41) показывают, что m и n не являются функциями только от F, t, как этого требует равенство (2.38). При $q(F,t) \equiv 0$ из формулы (2.26) немедленно следует тот же результат. Искомое F, отвечающее полному интегралу (2.22), не существует.

Наконец, вернемся к уравнениям (2.16) и (2.17).

Из (2.16) следует, что $\varkappa = v \operatorname{tg} c + C$, $c = \text{const}$, $C = \text{const}$. Отсюда и из (2.7) вытекает, что $v = \varepsilon(x \cos c - y \sin c, t)$. Подстановка этих выражений в (2.14) приводит к уравнению (2.35), если в нем δ, μ заменить, соответственно, на C, c, а F взять из (2.30), заменив μ, A, соответственно, на c, 0. Таким образом, использование уравнения (2.16) не дает новых результатов.

Из (2.17), (2.12) следует, что $v = \theta(t)$, $\varkappa = \vartheta(t)$. Уравнение (2.7) при этом удовлетворено, а (2.14) и первое равенство из (2,17) дают $v_t = 0$, $\varkappa_t = u_t = 0$. Таким образом, использование (2.17) приводит к $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и новых результатов не дает.

Итак, все решения системы уравнений (2.7)–(2.9) при постоянных δ, μ, если $\cos\mu \neq 0$, определяются равенствами (2.37), (2.36), (2.34), (2.31), (2.12). Во всех случаях в выбранный момент времени u, v постоянны на прямых $E = \text{const}$. Отсюда следует, что в плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости при постоянном давлении нет замкнутых мгновенных линий тока $v\,dx = u\,dy$. Следует помнить, что в этом подразделе 4.2.2 величины t, x, y представляют собой разделенные на ν время и декартовы координаты. Для выявления зависимости от коэффициента вязкости ν в решениях полученных уравнений величины t, x, y следует разделить на ν и после этого считать t, x, y физическими переменными.

Можно отметить, что в стационарном случае, если $\cos\mu \neq 0$, уравнение (2.35) имеет решение $\varphi = c_1 \exp(E\delta \cos\mu) + c_2$, $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$, которое при постоянном давлении описывает течение с искривленными линиями тока.

4.3. Вязкие течения, не зависящие от числа Рейнольдса

В 4.2.1 был приведен пример решения уравнений Эйлера, которое одновременно удовлетворяет и уравнениям Навье—Стокса. Иными словами, это пример течения, реализующегося при любых числах Рейнольдса от нуля до бесконечности. В этом разделе такие решения в плоском и осесимметричном случаях будут рассмотрены в различных аспектах.

4.3.1. Плоские течения

Кинематические характеристики известных плоских сдвиговых течений и течения Пуазейля не зависят от числа Рейнольдса. Для исследования других течений этого типа [8] используются уравнения, определяющие составляющие вектора скорости u, v по осям декартовых координат x, y и вихрь ω. Эти уравнения имеют вид

$$u_x + v_y = 0, \tag{3.1}$$

$$u_y - v_x = \omega, \tag{3.2}$$

$$R(u\omega_x + v\omega_y) = \Delta\omega,$$

где R — число Рейнольдса. Если решение не зависит от R, то вместо последнего уравнения следует записать два:

$$u\omega_x + v\omega_y = 0, \tag{3.3}$$

$$\Delta\omega = 0. \tag{3.4}$$

Первой возможностью, связанной с (3.3), (3.4), является

$$\omega = c_1, \tag{3.5}$$

где c_1 — постоянная величина. (В дальнейшем все новые произвольные постоянные будут обозначены буквой c с числовыми индексами.) В этом случае уравнения (3.3), (3.4) удовлетворены, а из (3.1), (3.2) следуют равенства

$$u = \Phi_y, \quad v = -\Phi_x - c_1 x, \tag{3.6}$$

где $\Phi(x, y)$ — произвольная гармоническая функция. Некоторые решения этого типа будут получены после рассмотрения другой возможности.

Второй возможностью, связанной с (3.3), является случай переменной функции $\omega(x, y)$.

Уравнение (3.1) позволяет ввести функцию тока ψ по формулам

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x. \tag{3.7}$$

Из (3.3), (3.7) следует, что $\omega_x\psi_y - \omega_y\psi_x = 0$, то есть $\psi = \psi(\omega)$. Тогда из (3.7) следует

$$u = \omega_y\gamma(\omega), \quad v = -\omega_x\gamma(\omega), \tag{3.8}$$

где $\gamma = \psi'(\omega)$, а штрих означает производную.

Подстановка (3.8) в (3.2) с учетом (3.4) дает

$$(\omega_x^2 + \omega_y^2)\gamma'(\omega) = \omega. \tag{3.9}$$

Вводятся обозначения

$$\left(\frac{\gamma'(\omega)}{\omega}\right)^{1/2} = f'(\omega), \quad f(\omega) = F(x, y). \tag{3.10}$$

Уравнение (3.9) принимает вид

$$F_x^2 + F_y^2 = 1. \tag{3.11}$$

Общий интеграл этого уравнения определяется равенствами

$$F = a\lambda - \int \lambda da + x\cos\lambda - y\sin\lambda, \tag{3.12}$$

$$a = x\sin\lambda + y\cos\lambda, \tag{3.13}$$

где $\lambda(a)$ — произвольная функция своего аргумента, $a = a(x, y)$. Из (3.12), (3.13) следует, что

$$F_x = \cos\lambda, \quad F_y = -\sin\lambda. \tag{3.14}$$

Из второго равенства (3.10) вытекает зависимость

$$\omega = \Omega(F). \tag{3.15}$$

Потребуем выполнения (3.4). С учетом (3.11) это дает

$$\Omega'' + \Omega'\Delta F = 0. \tag{3.16}$$

Последнее равенство имеет смысл, если ΔF является функцией от F, то есть, если $D(F, \Delta F)/D(x, y) = 0$. Вычисление ΔF с учетом (3.12)–(3.14) приводит к равенству

$$\Delta F = \lambda'\left[\left(F - a\lambda + \int \lambda da\right)\lambda' - 1\right]^{-1}. \tag{3.17}$$

Вычисление якобиана дает

$$\frac{D(F, \Delta F)}{D(x, y)} = \frac{a\lambda'^3 - \lambda''}{\left[(F - a\lambda + \int \lambda da)\lambda' - 1\right]^3}.$$

Рассмотрим частный и общий случаи:

$$\lambda' = 0, \quad \lambda'' - a\lambda'^3 = 0. \tag{3.18}$$

В первом случае $\lambda = c_2$, из (3.17) следует, что $\Delta F = 0$, а из (3.16) и (3.12) — что

$$\Omega = c_3 F + c_4, \quad F = x\cos c_2 - y\sin c_2 + c_5. \tag{3.19}$$

Напомним, что случай постоянного вихря уже упоминался и привел к равенствам (3.5), (3.6). Здесь рассматривается случай $c_3 \neq 0$. Из (3.19), (3.15) следует

$$F = \frac{\omega - c_4}{c_3}.$$

Равенства (3.10) показывают теперь, что

$$\gamma'(\omega) = \frac{\omega}{c_3^2}, \quad \gamma = \frac{\omega^2 + c_6}{2c_3^2}.$$

Использование (3.8), (3.15), (3.19) дает

$$u = -\frac{\sin c_2}{2c_3}(\omega^2 + c_6), \quad v = -\frac{\cos c_2}{2c_3}(\omega^2 + c_6),$$
$$\omega = c_3(x\cos c_2 - y\sin c_2 + c_5) + c_4. \tag{3.20}$$

Легко видеть, что решение (3.20) определяет плоское течение Пуазейля, вектор скорости которого при $c_3 > 0$ составляет с положительным направлением оси x угол $-c_2 - \pi/2$. Напомним, что давление, не входящее в уравнения (3.1)–(3.4), в течении Пуазейля меняется линейно в направлении вектора скорости и зависит от R.

Обратимся ко второму случаю из (3.18). Интегрирование этого уравнения дает

$$\lambda = \arcsin\frac{a}{c_7} + c_8. \tag{3.21}$$

Вернемся к (3.12), (3.13), (3.15)–(3.17). Вычисления с использованием (3.21) позволяют получить необходимые для дальнейшего равенства

$$\lambda_x = -\frac{\sin\lambda}{F - c_9}, \quad \lambda_y = -\frac{\cos\lambda}{F - c_9}, \tag{3.22}$$

$$F = c_9 - (c_7^2 - a^2)^{1/2} + (x^2 + y^2 - a^2)^{1/2}, \tag{3.23a}$$

$$a^2 = \frac{c_7^2(x\sin c_8 + y\cos c_8)^2}{(x - c_7\cos c_8)^2 + (y + c_7\sin c_8)^2}, \tag{3.23b}$$

$$\Delta F = (F - c_9)^{-1}. \tag{3.23c}$$

Интегрирование (3.16) с учетом последнего равенства и использование (3.15) дают

$$\Omega = c_{10}\ln(F - c_9) + c_{11} = \omega. \tag{3.24}$$

Обращение c_{10} в нуль снова приводит к рассмотренному случаю (3.5). При $c_{10} \neq 0$ равенства (3.10) позволяют получить

$$f(\omega) = c_9 + \exp\frac{\omega - c_{11}}{c_{10}}, \quad \gamma' = \frac{\omega}{c_{10}^2}\exp\frac{2(\omega - c_{11})}{c_{10}},$$
$$\gamma = \frac{2\omega - c_{10}}{4c_{10}}\exp\frac{2(\omega - c_{11})}{c_{10}} + \frac{c_{12}}{c_{10}} = \frac{2\omega - c_{10}}{4c_{10}}(F - c_9)^2 + \frac{c_{12}}{c_{10}}. \tag{3.25}$$

Из (3.8), (3.24), (3.25) можно найти

$$u = -\left\{\left[c_{10}\ln(F-c_9)^{1/2} + \frac{c_{11}}{2} - \frac{c_{10}}{4}\right](F-c_9) + \frac{c_{12}}{F-c_9}\right\}\sin\lambda,$$
$$v = -\left\{\left[c_{10}\ln(F-c_9)^{1/2} + \frac{c_{11}}{2} - \frac{c_{10}}{4}\right](F-c_9) + \frac{c_{12}}{F-c_9}\right\}\cos\lambda, \qquad (3.26)$$

где λ, F определены в (3.21), (3.23а), а необходимые для проверки решения производные даны в (3.22).

Уравнение линий тока $udy - vdx = 0$ при подстановке в него (3.26) приводит после интегрирования к семейству концентрических окружностей, на каждой из которых модуль скорости $w = (u^2+v^2)^{1/2}$ постоянен. Использование одного из уравнений импульса в полярных координатах $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, $\vartheta = \operatorname{arctg}(y/x)$ с полюсом в центре этих окружностей, то есть уравнения, которое включает давление p, постоянную плотность ρ и в рассматриваемом случае имеет вид

$$p_\vartheta = \rho R^{-1}\left(w_{rr} + \frac{w_r}{r} - \frac{w}{r^2}\right),$$

показывает, что при $c_{10} \neq 0$

$$p_\vartheta = 2\rho\frac{c_{10}}{(Rr)}.$$

Давление является непрерывной функцией на плоскости с разрезом от полюса полярных координат до бесконечности. При $c_{10} = 0$ давление непрерывно на всей плоскости, а формулы (3.26) описывают известное течение между двумя вращающимися цилиндрами.

Полный интеграл уравнения (3.11)

$$F = c_{13}\arcsin\frac{c_{13}}{(x^2+y^2)^{1/2}} - c_{13}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + (x^2+y^2-c_{13}^2)^{1/2} + c_{14}$$

новых решений не дает, а особого интеграла уравнение (3.11) не имеет.

Итак, найдены все решения системы уравнений (3.1)–(3.4) с переменным вихрем.

При постоянном значении ω формулы (3.5), (3.6) позволяют получать решения, задавая гармоническую функцию $\Phi(x,y)$. Рассмотрим граничную задачу определения Φ с условиями прилипания $u = v = 0$ на аналитической кривой $y = Y(x)$.

В расширенной форме общий интеграл уравнения $\Delta\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi = \alpha(z) + \beta(\bar{z}), \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \qquad (3.27)$$

где i — мнимая единица. Равенства (3.6) на линии $y = Y(x)$ дают

$$\Phi_x = -c_1 x, \quad \Phi_y = 0. \qquad (3.28)$$

Эти выражения позволяют найти производные от Φ вдоль кривой $y = Y(x)$ и по нормали к ней. Производная вдоль этой кривой определяет на ней такую величину Φ, что $\Phi + c_1 x^2/2 = \psi$, как это следует из (3.6), (3.7). Таким образом, условия (3.28) эквивалентны условиям Коши, а соответствующая задача в некоторой окрестности кривой $y = Y(x)$ на основании теоремы Коши—Ковалевской имеет единственное решение.

Из (3.28), (3.27) следует, что при $y = Y(x)$

$$i\alpha'(z) - i\beta'(\bar{z}) = 0, \quad \alpha'(z) + \beta'(\bar{z}) = -c_1 x. \tag{3.29}$$

Эти равенства определяют $\alpha'(z)$ и $\beta'(\bar{z})$, а следовательно, как это вытекает из (3.6), (3.27),

$$u = i\alpha'(z) - i\beta'(\bar{z}), \quad v = -\alpha'(z) - \beta'(\bar{z}) - c_1 x. \tag{3.30}$$

При $Y = 0$ и $Y = \pm(1-x^2)^{1/2}$ решения определяют, соответственно, сдвиговое течение и вращательное течение Куэтта с прилипанием на окружности единичного радиуса.

В качестве другого примера рассмотрим $Y = x^2$. Из (3.29) получаем

$$\alpha'(x + ix^2) - \beta'(x - ix^2) = 0, \quad \alpha'(x + ix^2) + \beta'(x - ix^2) = -c_1 x.$$

Отсюда

$$\alpha'(x + ix^2) = -\frac{1}{2}c_1 x, \quad \beta'(x - ix^2) = -\frac{1}{2}c_1 x. \tag{3.31}$$

Введем обозначения $x + ix^2 = \xi$, $x - ix^2 = \eta$. Отсюда

$$x = \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \xi^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} + i\left\{\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \xi^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\},$$

$$x = -\left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \eta^2\right)^{1/2}\right]^{1/2} - i\left\{\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \eta^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\}.$$

Подстановка этих выражений для x, соответственно, в правые части первого и второго равенств (3.31) дает выражения $\alpha'(\xi)$ и $\beta'(\eta)$ через ξ и η. Замена в них ξ на z и η на $\bar{z}$ приводит к искомым $\alpha'(z)$ и $\beta'(\bar{z})$. Эти функции имеют точки ветвления в фокусе параболы $x = 0$, $y = 1/4$ и в ближайшей к нему точке директрисы $x = 0$, $y = -1/4$. На плоскости x, y с разрезами $x = 0$, $y \geqslant 1/4$ и $x = 0$, $y \leqslant -1/4$ из (3.30) получаем аналитическое решение

$$u = \frac{c_1}{2}(M - N + 1), \quad v = \frac{c_1}{2}(I + L - 2x),$$

$$M = (\operatorname{sgn} y)\left\{\frac{1}{4} - D + \left[\left(D - \frac{1}{4}\right)^2 + E\right]^{1/2}\right\}^{1/2},$$

$$N = \left\{\frac{1}{4} + D + \left[\left(D + \frac{1}{4}\right)^2 + E\right]^{1/2}\right\}^{1/2},$$

$$I = (\operatorname{sgn} x)\left\{-\frac{1}{4} + D + \left[\left(D - \frac{1}{4}\right)^2 + E\right]^{1/2}\right\}^{1/2},$$

$$L = (\operatorname{sgn} xy)\left\{-\frac{1}{4} - D + \left[\left(D + \frac{1}{4}\right)^2 + E\right]^{1/2}\right\}^{1/2},$$

$$D = \left[B + (B^2 + x^2y^2)^{1/2}\right]^{1/2},$$

$$E = -B + (B^2 + x^2y^2)^{1/2},$$

$$B = \frac{1}{32} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ определяются интегрированием уравнения $dy/dx = v/u$. Справа и слева от разреза в верхней полуплоскости значения ψ совпадают, а первые производные ψ_x различаются. Справа и слева от разреза в нижней полуплоскости значения ψ, ψ_x, ψ_y совпадают, а вторые производные ψ_{xx} различаются. На рис. 4.3 изображены линии тока в квадрате $|x| < 1$, $|y| < 1$. Двойные линии отмечают разрезы. Стрелки показывают направление течения при $c_1 > 0$. Жирная линия — парабола $y = x^2$, на которой выполнены условия прилипания.

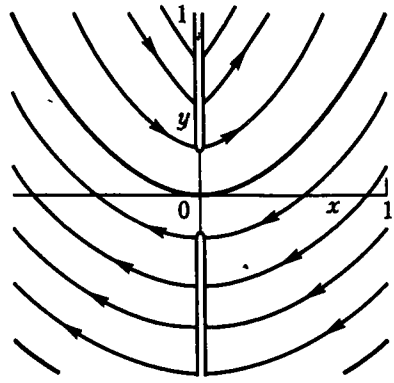


Рис. 4.3

Аналогичным путем можно получить решения в случаях обтекания эллипса и гиперболы с прилипанием на них.

В случае эллипса $Y = \pm(1 - x^2/4)^{1/2}$ решение имеет вид

$$u = c_1\left\{\frac{4}{3}y - (\operatorname{sgn} y)\left[-G + \left(G^2 + \frac{16}{81}x^2y^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\},$$

$$v = c_1\left\{\frac{1}{3}x - (\operatorname{sgn} x)\left[G + \left(G^2 + \frac{16}{81}x^2y^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}\right\},$$

$$G = \frac{2}{9}(x^2 - y^2) - \frac{2}{3}.$$

Точками ветвления являются фокусы эллипса $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$, и приведенное решение однозначно на всей плоскости x, y с разрезом $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$, $y = 0$, соединяющим эти точки. Во внешней по отношению к эллипсу области разрезов нет. Линии тока этого течения, если они не попадают на разрез, замкнуты и симметричны относительно осей x и y. На рис. 4.4 они изображены в первом квадранте. Сверху и снизу от разреза значения u, как и значения v, различаются. Стрелками указано направление течения при $c_1 > 0$.

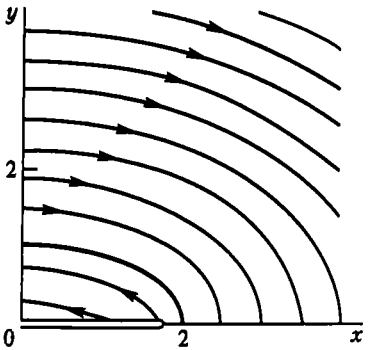


Рис. 4.4

В случае обтекания ветви гиперболы $Y = (1 + x^2)^{1/2}$ решение имеет вид

$$u = \frac{y}{2} - \left[H + \left(H^2 + \frac{1}{16}x^2y^2\right)^{1/2}\right]^{1/2},$$

$$v = -\frac{x}{2} + (\operatorname{sgn} xy)\left[-H + \left(H^2 + \frac{1}{16}x^2y^2\right)^{1/2}\right]^{1/2},$$

$$H = \frac{1}{8}(x^2 - y^2) + \frac{1}{4}.$$

Качественно картина этого течения имеет тот же вид, что и на рис. 4.3.

Отметим, что все решения с $\omega = \text{const}$, удовлетворяющие системе уравнений (3.1)–(3.4), являются в то же время решениями уравнений Стокса (3.1), (3.2), (3.4), и давление в приближении Стокса в этом случае постоянно. Одновременно эти решения являются решениями системы уравнений гидродинамики идеальной жидкости (3.1)–(3.3), а в последних трех приведенных здесь примерах выполняются условия «прилипания» этой идеальной жидкости, соответственно, на параболе, эллипсе и на ветви гиперболы.

4.3.2. Вихревые образования

Вихревым образованием в потоке жидкости на плоскости независимых переменных здесь называется максимальная по размерам конечная односвязная область, целиком заполненная замкнутыми линиями тока и из особых точек содержащая внутри только центр.

Такие вихри [9] ранее исследовались в осесимметричных течениях, и обзор этих работ будет дан в подразделе 4.3.3.

Уравнения установившихся плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости при постоянном вихре ω имеют тот же вид, что и в случае идеальной жидкости (3.1), (3.2). При использовании функции тока ψ по формулам (3.7) они могут быть сведены к уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = \omega, \quad \omega = \text{const}. \tag{3.32}$$

Использование частного решения $\psi = \omega y^2/2$ и разделение переменных позволяют записать решения уравнения (3.32) в следующих вариантах:

$$\psi = -\left(\frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_5\right)\left(c_3y + c_4\right) + \\ + c_1\left(\frac{c_3}{6}y^3 + \frac{c_4}{2}y^2 + c_6y + c_7\right) + \frac{\omega}{2}y^2, \tag{3.33}$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{1n}\sin\lambda_nx + c_{2n}\cos\lambda_nx\right) \times \\ \times \left[(\sin c_{3n})\,\mathrm{sh}\,\lambda_ny + (\cos c_{3n})\,\mathrm{ch}\,\lambda_ny\right] + \frac{\omega}{2}y^2, \tag{3.34}$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_{1n}\,\mathrm{sh}\,\lambda_nx + C_{2n}\,\mathrm{ch}\,\lambda_nx\right) \times \\ \times \left[(\sin C_{3n})\sin\lambda_ny + (\cos C_{3n})\cos\lambda_ny\right] + \frac{\omega}{2}y^2,$$

где буквами c и C с индексами обозначены произвольные постоянные. Сумма этих решений за вычетом ωy^2 также является решением уравнения (3.32).

В рассматриваемом случае должны выполняться уравнения Навье—Стокса (1.2). Формулы (3.7) и уравнение (3.32) показывают равенство нулю величин Δu и Δv. Отсюда следует, что давление в этих течениях, как и кинематические переменные, не зависит от числа Рейнольдса.

Для иллюстрации решения (3.33) принято: $c_2 = c_4 = c_5 = c_7 = 0$, $c_1 = 2$, $c_3 = 1$, $c_6 = (k+3)/2$, $\omega = 4$. В этом случае

$$\psi = y\left[\frac{1}{3}(y+3)^2 - x^2 + k\right], \tag{3.35}$$

$$u = y^2 + 4y - x^2 + 3 + k, \quad v = 2xy, \tag{3.36}$$

$$p = (3+k)(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 4y^2 + c_8,$$

и примеры будут рассмотрены для различных значений параметра k.

На рис. 4.5, помимо шкал, изображены линии тока, и только они. Стрелки указывают направление течения.

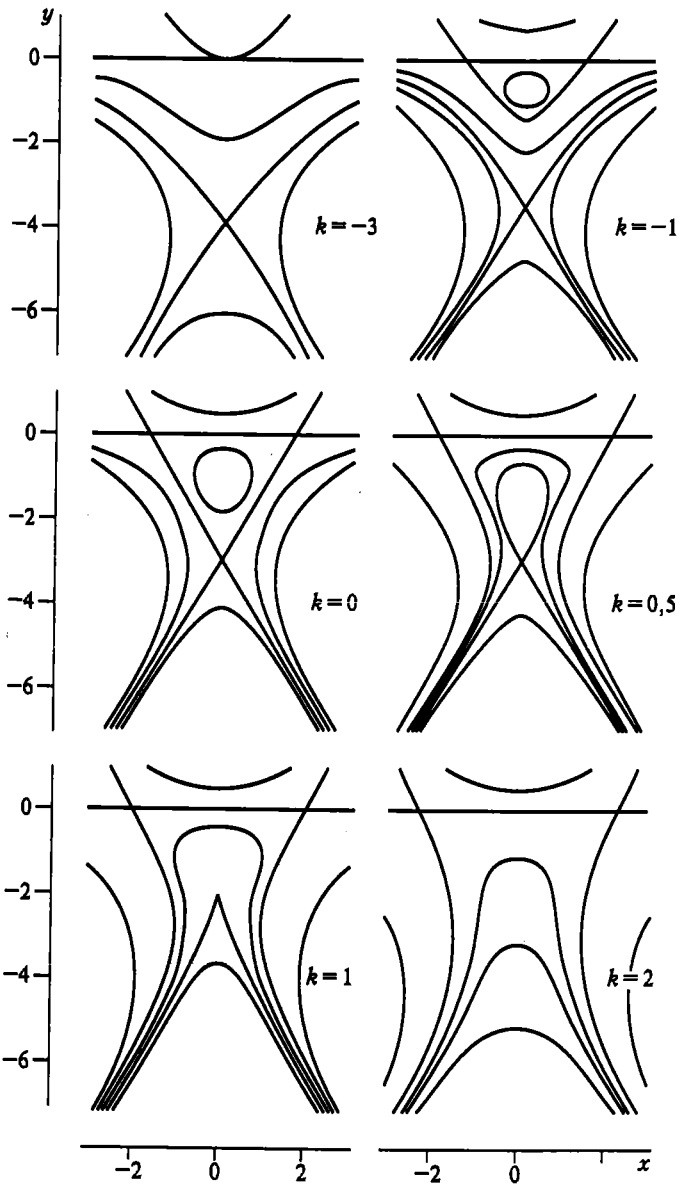


Рис. 4.5

Из (3.35) следует, что при всех k прямая $y = 0$ является линией тока $\psi = 0$.

При $k < -3$ вихревых образований нет.

При $k = -3$ линия тока $\psi = 0$, имеющая уравнение $y = -3 + \sqrt{3(x^2 - k)}$, касается линии тока $\psi = 0$, имеющей уравнение $y = 0$, при $x = y = 0$. Как видно из (3.36), в этой точке поток тормозится, $u = v = 0$. Другая точка торможения имеет координаты $x = 0$, $y = -4$.

При $-3 < k < 0$ вихревое образование ограничено прямой $y = 0$ и дугой гиперболы $y = -3 + \sqrt{3(x^2 - k)}$, вдоль которой также $\psi = 0$. На рис. 4.5 картина линий тока показана при $k = -1$. Из точек торможения точки с координатами $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = -2 - \sqrt{2}$ являются для функции ψ седловыми, а точка $x = 0$, $y = -2 + \sqrt{2}$ — центром.

При $k = 0$ вихревое образование ограничено равносторонним треугольником, образованным пересечением прямых линий тока $y = 0$ и $y = -3 \pm \sqrt{3}x$. Вершины треугольника $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = -3$ являются для функции ψ седловыми точками, а точка $x = 0$, $y = -1$ — центром. Центр и точка пересечения биссектрис треугольника совпадают. Переход к полярным координатам r, ϑ с полюсом в точке $x = 0$, $y = -1$ по формулам $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta - 1$ преобразует функцию ψ к виду

$$\psi = \frac{1}{3}(r\sin\vartheta - 1)\left[(4\sin 2\vartheta - 3)r^2 + 4r\sin\vartheta + 4\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}(r^3\sin 3\vartheta - 3r^2 + 4). \qquad (3.37)$$

Эта функция имеет период $2\pi/3$ по переменной ϑ.

При $0 < k < 1$ вихревое образование ограничено гладкой кривой с единственной точкой ее излома $x = 0$, $y = -2 - \sqrt{1 - k}$. Эта седловая для функции ψ точка вместе с седловыми точками $x = \pm\sqrt{3 + k}$, $y = 0$ и центром $x = 0$, $y = -2 + \sqrt{1 - k}$ являются точками торможения. Картина линий тока этого типа на рис. 4.5 изображена при $k = 1/2$.

При $k = 1$ вихревых образований нет. Обращает на себя внимание то, что линия тока $\psi = -8/3$ имеет при $x = 0$, $y = -2$ точку возврата. Обе касательные к линии тока в этой точке вертикальны. Точки $x = \pm 2$, $y = 0$ являются седловыми.

При $1 < k$ вихревых образований также нет. Точки $x = \pm\sqrt{3 + k}$, $y = 0$ являются для функции ψ седловыми. В них $u = v = 0$. Пример такого поведения линий тока изображен на рис. 4.5 при $k = 2$.

Выражение в полярных координатах для функции тока с треугольным вихревым образованием подсказывает вид решений с периодом по углу $2\pi/n$, где n — целое число. Первое и третье слагаемые в

скобках формулы (3.37) являются гармоническими функциями, а лапласиан от второго слагаемого есть постоянная величина. Равенство (3.32) определяет в этом случае постоянное ω, что приводит к удовлетворению уравнения (1.4). В качестве гармонической функции можно взять $r^n \cos n\vartheta$. Тогда решение имеет вид

$$\psi = ar^n \cos n\vartheta + br^2 + c, \quad \omega = 4b, \tag{3.38}$$

где a, b, c — постоянные. Среди этих решений могут найтись такие, которые описывают вихревые образования, ограниченные криволинейными многоугольниками. Пусть, например, $n = 4$, $a = -3 \mp \sqrt{8}$, $b = (-2 \mp \sqrt{8})m$, $c = m^2$, где $m = \text{const}$. Тогда равенства (3.38) в декартовых координатах принимают вид

$$\psi = \left[x^2 - (3 \pm \sqrt{8})y^2 \pm m\right]\left[y^2 - (3 \pm \sqrt{8})x^2 \pm m\right], \quad \omega = -(8 \pm 4\sqrt{8})m.$$

В них берутся либо верхние, либо нижние знаки. Это решение дает пример четырехугольного вихревого образования, ограниченного при $m > 0$ двумя парами ветвей гипербол с соответствующими знаками в определяющих их равенствах:

$$x^2 - (3 \pm \sqrt{8})y^2 \pm m = 0, \quad y^2 - (3 \pm \sqrt{8})x^2 \pm m = 0.$$

Координаты четырех точек пересечения этих гипербол находятся из равенств

$$x^2 = \pm\frac{(2 \pm \sqrt{2})m}{8 \pm 6\sqrt{2}}, \quad y^2 = \pm\frac{(2 \pm \sqrt{2})m}{8 \pm 6\sqrt{2}}.$$

В этом решении, как и в (3.35), вихрь ω постоянен, но оно, в отличие от (3.35), не может быть получено разделением переменных.

Найденные изолированные вихревые образования характерны тем, что возникают при аналитических краевых условиях, взятых, например, на окружности конечного радиуса с центром в начале координат. Они, как микроструктура потока, могут появляться в ламинарных течениях без видимых причин. Численные методы недостаточно высокого порядка точности не воспроизведут их, если они целиком располагаются внутри ячеек расчетной сетки.

Для иллюстрации решения (3.34) из него извлечена [10] сумма

$$\psi = g \sin x \operatorname{sh} y + \frac{\omega}{2} y^2.$$

При этом

$$u = g \sin x \operatorname{ch} y + \omega y, \quad v = -g \cos x \operatorname{sh} y,$$
$$p = g\left[\frac{g}{2}(\cos 2x - \operatorname{ch} 2y) - \omega(y \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)\sin x\right] + \text{const}.$$

Картина линий тока при $g = 12{,}38$, $\omega = -23{,}1$ изображена на рис. 4.6. На ней указаны значения ψ и направление течения. Хорошо видна цепочка, вихри которой соединены с соседними в седловых точках

$$x = l\pi, \quad y = 0, \quad l = 0, \pm 1, \ldots$$

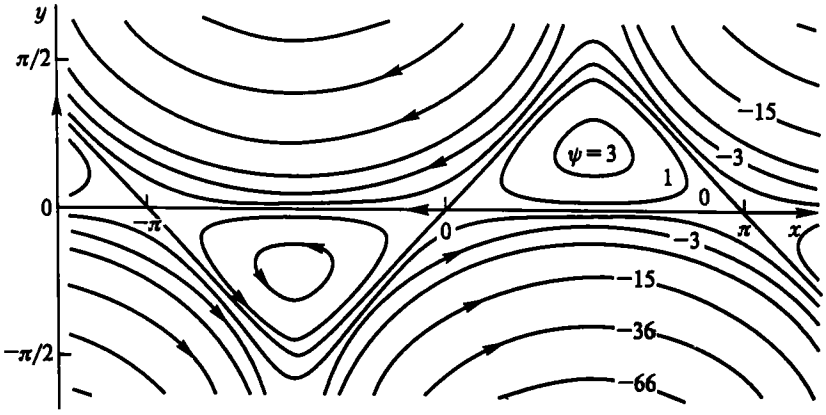


Рис. 4.6

4.3.3. Осесимметричные вихревые образования

Впервые вихревое образование в осесимметричном потоке идеальной несжимаемой жидкости (шаровой вихрь) было исследовано в 1893 г. Хиллом [11, 12]. Беркер [13] отметил, что найденное Хиллом решение удовлетворяет и уравнениям Навье—Стокса. Крудели [14–16] получил для осесимметричных течений вязкой жидкости без закрутки вокруг оси симметрии и при линейной зависимости вихря от радиуса цилиндрических координат два класса решений, не включающих в себя шаровой вихрь Хилла. Примеров изолированных вихревых образований в [14–16] нет. О'Брайен [17] нашел решение, описывающее сфероидальный вихрь в потоке идеальной или вязкой жидкости без закрутки вокруг оси симметрии. В случае идеальной жидкости это решение было известно еще Хиллу [12], установившему, что этот вихрь сопрягается с внешним потенциальным течением только при сферической форме .

С 1950-х годов значительное внимание уделяется экспериментальному, численному и аналитическому изучению вихревого образования, которое наблюдается в закрученных вокруг оси потоках и получило название «разрушения вихря». Этому явлению посвящена обширная литература. Ниже, при исследовании «разрушения вихря» будет дан обзор основных работ по этой теме [18–27].

В этом подразделе рассматриваются осесимметричные закрученные вокруг оси течения идеальной и вязкой жидкостей [28]. Среди них найдены аналитические представления вихревых колец с различными поперечными сечениями [10, 29], монолитных вихревых образований типа «разрушения вихря» [29, 30], пары вихревых колец [29] и др.

Стационарные осесимметричные течения идеальной несжимаемой жидкости описываются в цилиндрической системе координат x, r, ϑ системой уравнений

$$u_x + v_r + \frac{v}{r} = 0, \tag{3.39}$$

$$uu_x + vu_r + p_x = g, \tag{3.40}$$

$$uv_x + vv_r - \frac{1}{r}w^2 + p_r = 0, \tag{3.41}$$

$$uw_x + vw_r + \frac{1}{r}vw = 0, \tag{3.42}$$

где u, v, w — составляющие вектора скорости по направлениям x, r, ϑ соответственно, p — давление, деленное на плотность, g — постоянная массовая сила в направлении оси x. Уравнение (3.39) позволяет ввести функцию тока ψ в меридиональной плоскости,

$$d\psi = rudr - rvdx. \tag{3.43}$$

Уравнение (3.42) с учетом (3.39) имеет интеграл сохранения циркуляции

$$w = \frac{1}{r}\gamma(\psi), \tag{3.44}$$

где γ — произвольная функция от ψ. Исключение p из (3.40), (3.41) и введение вихревой функции

$$\omega = u_r - v_x \tag{3.45}$$

с учетом (3.44), (3.43) приводит к уравнению переноса вихря

$$u\omega_x + v\omega_r - \frac{1}{r}v\omega - \frac{2}{r^2}v\gamma(\psi)\gamma'(\psi) = 0, \tag{3.46}$$

где штрих означает производную. Интеграл Бернулли уравнений (3.39)–(3.42) имеет вид

$$p = G(\psi) + gx - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \tag{3.47}$$

где G — произвольная функция от ψ.

Уравнения (3.39), (3.43), (3.45), (3.46) образуют подсистему, содержащую неизвестные u, v, ω, ψ.

Интеграл уравнения (3.46) можно получить подстановкой выражения для давления (3.47) либо в уравнение (3.40), либо в уравнение (3.41). В результате несложных выкладок возникает равенство

$$\omega = G'(\psi)r - \frac{1}{r}\gamma(\psi)\gamma'(\psi), \tag{3.48}$$

а выражение для ω дано в (3.45).

Таким образом, величины u, v, w, ω, ψ, p определяются системой уравнений (3.39), (3.43)–(3.45), (3.47), (3.48).

Отметим, что исключение величин u, v из (3.45) с учетом (3.43) и (3.48) приводит к уравнению

$$\left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r + \left(\frac{\psi_z}{r}\right)_z = G'(\psi)r - \frac{1}{r}\gamma(\psi)\gamma'(\psi).$$

Некоторый класс решений подсистемы уравнений (3.39), (3.43), (3.45), (3.48) может быть получен для частного вида зависимости (3.48):

$$\omega = (h\psi + m)r + \frac{1}{r}(a\psi + b), \tag{3.49}$$

где a, b, h, m — постоянные величины.

Подстановка (3.49) в (3.46) после сокращения на v/r^2 дает

$$a\psi + b + \gamma(\psi)\gamma'(\psi) = 0.$$

Интегрирование приводит к равенству

$$\gamma^2 = 2c - 2b\psi - a\psi^2, \quad c = \text{const}. \tag{3.50}$$

Уравнение (3.45) с учетом (3.49) принимает вид

$$u_r - v_z = (h\psi + m)r + \frac{1}{r}(a\psi + b). \tag{3.51}$$

Подстановка (3.47), (3.44), (3.51) в (3.40), (3.41) показывает, что

$$G = \frac{h}{2}\psi^2 + m\psi + l, \quad l = \text{const}.$$

Исключение u из (3.39), (3.51) приводит к равенству

$$v_{zz} + v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \left(a + \frac{1}{r^2} + hr^2\right)v = 0. \tag{3.52}$$

Решение этого уравнения может быть найдено с помощью разделения переменных. Ограничимся случаем $h = 0$. Тогда при $v = X(x)R(r)$ уравнение (3.52) приводит к равенствам

$$X'' + \nu_n X = 0, \quad r^2R'' + rR' - \left[(\nu_n + a)r^2 + 1\right]R = 0, \tag{3.53}$$

где будут рассмотрены действительные числа ν_n, $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Интегрирование уравнений (3.53) позволяет получить v, а уравнения (3.39), (3.51) после этого определяют u. Из (3.50), (3.44) находится w, и из равенства (3.43) определяется ψ. Вводится обозначение

$$\mu_n = \sqrt{-a - \nu_n}. \tag{3.54}$$

В результате выводятся следующие формулы.

Во всех случаях

$$w = (2c - 2b\psi - a\psi^2)^{1/2} r^{-1}, \quad G = m\psi + l. \tag{3.55}$$

Прочие величины зависят от величины ν_n.

A. $\nu_n = \lambda_n^2 \neq 0$.

A1. При $a \neq 0$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}(c_{1n}\cos\lambda_n x - c_{2n}\sin\lambda_n x) Z^\circ(r) + Z_0(r\sqrt{-a}) - \frac{2m}{a},$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}\sin\lambda_n x + c_{2n}\cos\lambda_n x) Z(r),$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_n}(c_{1n}\cos\lambda_n x - c_{2n}\sin\lambda_n x) Z(r) - \frac{b}{a} + r\Phi(r) - \frac{m}{a}r^2,$$

$$Z^\circ(r) = \begin{cases} \mu_n\big[(\sin c_{3n}) J_0(\mu_n r) + (\cos c_{3n}) Y_0(\mu_n r)\big], & \mu_n \neq 0, \\ 2\sin c_{3n}, & \mu_n = 0, \end{cases} \tag{3.56}$$

$$Z_0(t) = c_1 J_0(t) + c_2 Y_0(t),$$

$$Z(r) = \begin{cases} (\sin c_{3n}) J_1(\mu_n r) + (\cos c_{3n}) Y_1(\mu_n r), & \mu_n \neq 0, \\ (\sin c_{3n}) r + (\cos c_{3n}) r^{-1}, & \mu_n = 0, \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} (-a)^{-1/2}\big[c_1 J_1(r\sqrt{-a}) + c_2 Y_1(r\sqrt{-a})\big], & a < 0, \\ a^{-1/2}\big[c_1 I_1(r\sqrt{a}) - c_2 K_1(r\sqrt{a})\big], & a > 0, \end{cases}$$

где величины c с индексами — произвольные постоянные, J_0, Y_0, J_1, Y_1 функции Бесселя, I_1, K_1 — модифицированные функции Бесселя.

A2. При $a = 0$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}\cos\lambda_n x - c_{2n}\sin\lambda_n x)\bar{Z}_0(\lambda_n r) + b\ln r + c_1 + \frac{m}{2}r^2,$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}\sin\lambda_n x + c_{2n}\cos\lambda_n x)\bar{Z}_1(\lambda_n r), \tag{3.57}$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_n}(c_{1n}\cos\lambda_n x - c_{2n}\sin\lambda_n x)\overline{Z}_1(\lambda_n r) +$$
$$+ \frac{1}{4}r^2\left[b(2\ln r - 1) + 2c_1\right] + \frac{m}{8}r^4,$$
$$\overline{Z}_k(t) = (\sin c_{3n})I_k(t) + (\cos c_{3n})K_k(t).$$

B. $\nu_n = \lambda_n = 0$.

B1. При $a \neq 0$

$$u = -\sqrt{|a|}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)Z_0(z) + f(r) - \frac{2m}{a},$$
$$v = -(c_1 + 2c_2 x)Z_1(z), \quad z = r\sqrt{|a|},$$
$$\psi = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \frac{2c_2}{a}\right)rZ_1(z) - \frac{b}{a} - \frac{mr^2}{a} + \frac{r}{a}\frac{df}{dr}, \qquad (3.58)$$
$$f(r) = \left[c_3 J_0(z) + c_4 Y_0(z) - c_2 z J_1(z)\right]|a|^{-1/2},$$
$$r\frac{df}{dr} = -z\left[c_3 J_1(z) + c_4 Y_1(z) + c_2 z J_0(z)\right],$$
$$Z_k(t) = (\sin c_3)J_k(t) + (-\operatorname{sgn} a)^{k+1}(\cos c_3)Y_k(t).$$

B2. При $a = 0$.

$$u = -2(c_1 x + c_2 x^2)\sin c_3 + c_2(\sin c_3)r^2 +$$
$$+ (2c_2\cos c_3 + b)\ln r + c_4 + \frac{m}{2}r^2,$$
$$v = (c_1 + 2c_2 x)\left[(\sin c_3)r + (\cos c_3)r^{-1}\right], \qquad (3.59)$$
$$\psi = -(c_1 x + c_2 x^2)\left[(\sin c_3)r^2 + \cos c_3\right] + \frac{1}{4}c_2(\sin c_3)r^4 +$$
$$+ \frac{1}{2}c_4 r^2 + \frac{m}{8}r^4 + (2c_2\cos c_3 + b)(2\ln r - 1)\frac{r^2}{4}.$$

C. $\nu_n = -\lambda_n^2 \neq 0$.

C1. При $a \neq 0$.

$$u = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}(c_{1n}e^{\lambda_n x} - c_{2n}e^{-\lambda_n x})Z^{\circ}(r) + Z_0(r\sqrt{|a|}) - \frac{2m}{a},$$
$$v = \sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}e^{\lambda_n x} + c_{2n}e^{-\lambda_n x})Z(r), \qquad (3.60)$$

$$\psi = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_n}(c_{1n}e^{\lambda_n x} - c_{2n}e^{-\lambda_n x})Z(r) - \frac{b}{a} + r\Phi(r) - \frac{m}{a}r^2.$$

Здесь $Z^*(r)$, $Z_0(t)$, $Z(r)$, $\Phi(r)$ те же, что и в формулах (3.56).

С2. При $a = 0$

$$u = -\sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}e^{\lambda_n x} - c_{2n}e^{-\lambda_n x})Z_0(\lambda_n r) + b\ln r + c_1 + \frac{m}{2}r^2,$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}e^{\lambda_n x} + c_{2n}e^{-\lambda_n x})Z_1(\lambda_n r), \tag{3.61}$$

$$\psi = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{\lambda_n}(c_{1n}e^{\lambda_n x} - c_{2n}e^{-\lambda_n x})Z_1(\lambda_n r) + \\ + \frac{1}{4}r^2\left[b(2\ln r - 1) + 2c_1\right] + \frac{m}{8}r^4,$$

$$Z_k(t) = (\sin c_{3n})J_k(t) + (\cos c_{3n})Y_k(t).$$

Итак, формулы (3.55)–(3.61) представляют решения уравнений динамики идеальной жидкости (3.39), (3.45), (3.43), (3.46), (3.42) при выбранной зависимости (3.49) с $h = 0$ и вытекающем из нее равенстве (3.50).

Система уравнений, описывающая стационарные осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости, отличается от рассмотренной последними двумя уравнениями и имеет вид

$$u_x + v_r + \frac{v}{r} = 0, \tag{3.39}$$

$$\omega = u_r - v_x, \tag{3.45}$$

$$d\psi = rudr - rvdx, \tag{3.43}$$

$$\mathrm{R}\left[u\omega_x + v\omega_r - \frac{1}{r}v\omega + \frac{1}{r}(w^2)_x\right] = \omega_{xx} + \omega_{rr} + \frac{1}{r}\omega_r - \frac{1}{r^2}\omega, \tag{3.62}$$

$$\mathrm{R}\left[uw_x + vw_r + \frac{1}{r}vw\right] = w_{xx} + w_{rr} + \frac{1}{r}w_r - \frac{1}{r^2}w, \tag{3.63}$$

где R — число Рейнольдса. Если $a = b = h = 0$, то в силу (3.49), (3.50), (3.55) выполняются равенства

$$\omega = mr, \quad \gamma = \sqrt{2c}, \quad w = \sqrt{2c}r^{-1}.$$

Левые и правые части уравнений (3.62), (3.63) по отдельности обращаются в нуль. Отсюда следует, что равенства (3.57), (3.59), (3.61), полученные

при $a = 0$, и (3.55) удовлетворяют системе уравнений (3.39), (3.45), (3.43), (3.62), (3.63), если положить $b = 0$. Кинематические переменные таких течений не зависят от числа Рейнольдса, а давление, вообще говоря, от него зависит.

Решения (3.55), (3.57), (3.59), (3.61) таковы, что функция ψ и определяемые ею составляющие вектора скорости u, v не содержат c или, что то же самое, — составляющую w. Иными словами, картина течения в меридиональной плоскости x, r осесимметричного течения одинакова при всех c. Крудели, изучая осесимметричные течения вязкой жидкости без закрутки вокруг оси ($w \equiv 0$), получил в работах [14–16] решения (3.57) и (3.61) при $b = 0$, но не выписал решение вида (3.59).

Здесь будут рассмотрены вихревые образования, определяемые всеми тремя решениями (3.57), (3.59), (3.61).

Обратимся вначале [10, 29] к решению (3.55), (3.61) при $b = 0$ и извлечем из (3.61) частное решение:

$$\psi = krJ_1(r)\operatorname{ch} x - Lr^2 + Mr^4, \quad \omega = 8Mr, \quad w = \sqrt{2\omega}r^{-1} \tag{3.64}$$

при $L = 0{,}9883$, $M = 0{,}07775$. Одно лишь изменение k приводит к вихревым образованиям различных видов. Рассмотрим изменение k от ∞ до 0.

Линии пересечения осесимметричных поверхностей тока с меридиональной плоскостью, $\psi = \text{const}$, для простоты в дальнейшем будут называться линиями тока. Как уже отмечалось, они неизменны при различных c. Линиями тока в решении (3.64) являются, в частности, прямые $r = 0$ и $r = j_{11}$, где j_{11} — первый нуль функции $J_1(r)$. Величина $j_{11} \approx 3{,}832$. Следует помнить, что седловые точки и центры функции $\psi(x, r)$ являются «точками торможения», в них $u = v = 0$, но, вообще говоря, $w \neq 0$.

Составляющие вектора скорости равны

$$u = kJ_0(r)\operatorname{ch} x - 2L + 4Mr^2, \quad v = -kJ_1(r)\operatorname{sh} x.$$

В точках торможения при $r = j_{11}$

$$x = \operatorname{arch}\frac{2L - 4Mj_{11}^2}{kJ_0(j_{11})}, \quad 0 \leqslant k \leqslant \frac{2L - 4Mj_{11}^2}{J_0(j_{11})} = k_*.$$

При $k > k_*$ точек торможения на линии $r = j_{11}$ нет.

На линии тока $r = 0$ величина $u = k\operatorname{ch} x - 2L$. В точках торможения

$$x = \operatorname{arch}(2L/k), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2L. \tag{3.65}$$

При $k > 2L$ точек торможения на линии $r = 0$ нет.

Точками торможения являются, конечно, и другие пересечения линий тока.

При $\infty > k > 6{,}43$ линии тока $\psi = \text{const}$, а только они и показаны на рис. 4.7, имеют вид, изображенный при $k = 6{,}43$, с той только разницей, что при $k > 6{,}43$ отсутствует вырожденная седловая точка $x = 0$, $r = j_{11}$. В окрестности оси симметрии $u > 0$, а в окрестности линии $r = j_{11}$ величина $u < 0$.

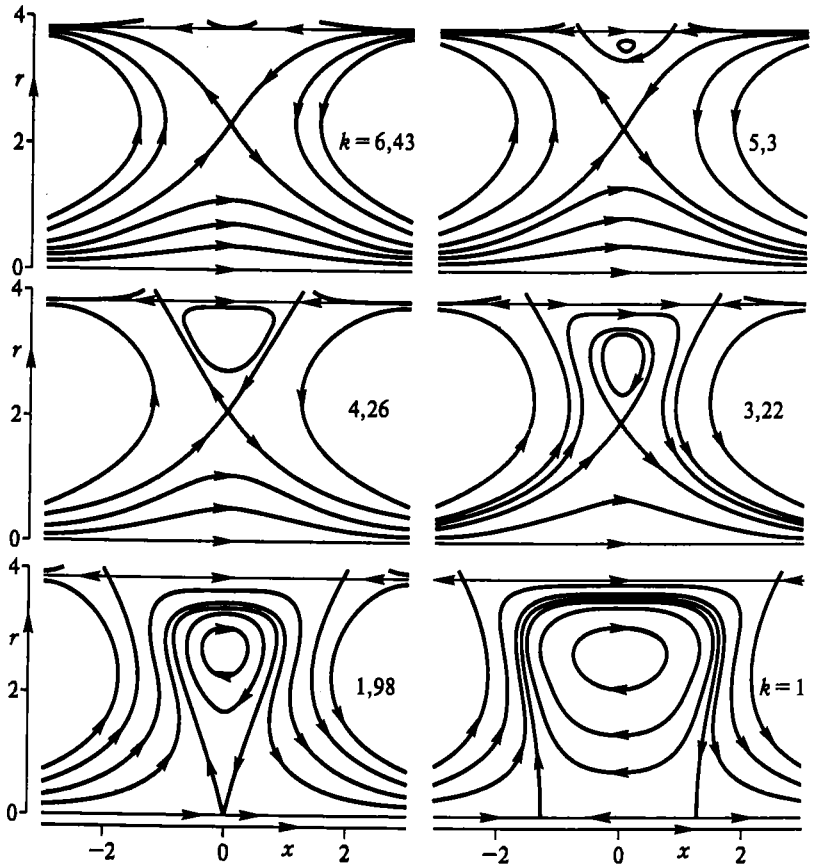


Рис. 4.7

При $k = 6{,}43$ вырожденная седловая точка возникает. Она является точкой торможения. В ней две линии тока касаются друг друга. Указанное значение k при выбранных L и M определено из условия обращения в нуль осевой составляющей вектора скорости при $x = 0$, $r = j_{11}$.

При $6{,}43 > k > 4{,}26$ (на рис. 4.7 пример приведен при $k = 5{,}3$) образуется вихревое кольцо, сечение которого меридиональной плоскостью

ограничено сверху отрезком прямой $r = j_{11}$, а снизу — гладкой дугой. Угловые точки этого сечения являются точками торможения, как и при всяком пересечении линий тока. Конечно, в них, вообще говоря, $w \neq 0$. В окрестности упомянутой дуги $u < 0$.

При $k = 4{,}26$ сечение вихревого кольца становится треугольным. Это значение k найдено из того условия, что в точке торможения при $x = 0$ величина ψ совпадает с ψ при $r = j_{11}$.

При $4{,}26 > k > 1{,}98$ (на рис. 4.7 пример приведен при $k = 3{,}22$) сечение вихревого кольца «отрывается» от прямой $r = j_{11}$ и принимает форму петли с точкой излома контура этого сечения, являющейся точкой торможения. Ниже сечения кольца и выше него $u > 0$. По мере стремления k к значению 1,98 точка торможения приближается к оси x.

При $k = 1{,}98$ точка торможения оказывается на оси x. Это значение k находится из условия $u = 0$ при $x = r = 0$. Вихревое образование перегораживает центральную часть течения, и поток обтекает эту «преграду» с внешней стороны. При $k = 2L = 1{,}98$, $x = r = 0$ величина dr/dx для линий тока $\psi = 0$ равна 0, $\pm 3/\sqrt{2 - 36M/k} = \pm 3{,}93$. В процессе дальнейшего уменьшения величины k точка торможения, в соответствии с (3.65), разделяется на две, и при $r = 0$ координаты x этих точек стремятся к $-\infty$ и ∞ при $k \to 0$.

При $1{,}98 > k > 0$ структура линий тока соответствует структуре, изображенной на рис. 4.7 при $k = 1$. Монолитное вихревое образование в меридиональной плоскости ограничено осью $r = 0$ и дугой, на которых $\psi = 0$. Дуга пересекает ось по нормали. Это вихревое образование имеет вид «разрушения вихря» [18–27], но более простой пример будет приведен ниже при рассмотрении решения (3.59) с $b = 0$. По мере уменьшения величины k в рассматриваемом примере происходит деформация линий тока, они преимущественно растягиваются в направлении оси x. Почти отвесные части дуги $\psi = 0$ уходят на $-\infty$ и ∞. При $k \to 0$ все течение стремится к течению Пуазейля [31] с прилипанием на прямой $r = \sqrt{L/(2M)} = 2{,}52$. На рис. 4.7 стрелки показывают направление течения и создают достаточно полное представление о потоках в целом.

В рассмотренном решении при $k = 1{,}98$ в одной точке на оси $r = 0$ пересекаются три линии $\psi = \text{const}$. Другой пример этого типа дает фрагмент решения (3.61)

$$\psi = r\left[KJ_1(r)\operatorname{ch} x + NJ_1(2r)\operatorname{ch} 2x - Lr + Mr^3\right], \quad \omega = 8Mr, \qquad (3.66)$$

где K, N, L, M — произвольные постоянные. Составляющие скорости при этом равны

$$u = KJ_0(r)\operatorname{ch} x + 2NJ_0(2r)\operatorname{ch} 2x - 2L + 4Mr^2,$$
$$v = -KJ_1(r)\operatorname{sh} x - 2NJ_1(2r)\operatorname{sh} 2x.$$

При $x = x_0$, $r = 0$, где x_0 — заданное число, выполняются равенства

$$u = K \operatorname{ch} x_0 + 2N \operatorname{ch} 2x_0 - 2L, \quad v = 0.$$

Пусть в рассматриваемой точке $u = 0$. Это дает одно уравнение для определения произвольных постоянных.

Вычисление dx/dr при $\psi/r^2 = 0$ с использованием неявной зависимости $x(r)$, которую дает равенство (3.66), приводит к дроби с числителем и знаменателем, стремящимися к нулю при $r \to 0$. Раскрытие неопределенности и требование отличия от нуля и конечности производной dx/dr в свою очередь приводит ко второму уравнению для определения произвольных постоянных.

Выбор $L = 0{,}9888$, $M = 0{,}07775$, $x_0 = 4$ и решение полученных уравнений дают значения $K = 0{,}1447$, $N = -0{,}000663$. Картина линий тока при этих числовых значениях коэффициентов в формуле (3.66) представлена на рис. 4.8. Течение напоминает изображенное на рис. 4.7 при $k = 1$, но здесь при $r = 0$, $x = 4$ пересекаются три линии тока.

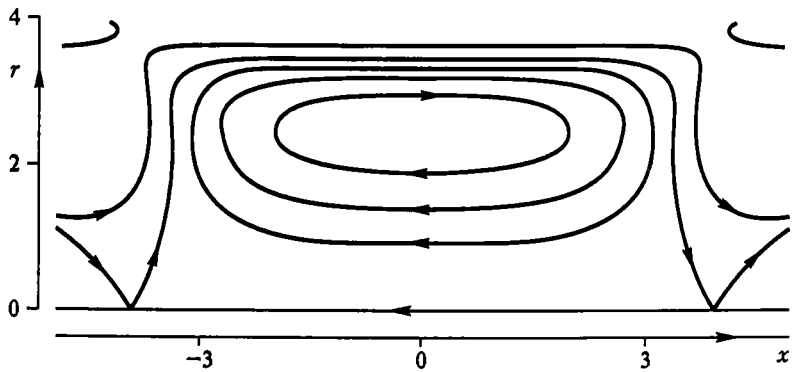


Рис. 4.8

Еще один пример может быть получен извлечением из решения (3.61) частного случая

$$\psi = r\left[KJ_1(r) \operatorname{ch} x + NJ_1(2r) \operatorname{ch} 2x + PJ_1(3r) \operatorname{ch} 3x - Lr + Mr^3\right],$$

$$\omega = 8Mr, \quad w = \sqrt{2}cr^{-1},$$

где K, N, P, L, M — произвольные постоянные. Для получения новых типов решений потребуем, чтобы точки $x = \pm 1$, $r = 2$ были седловыми, и чтобы в каждой из них касательная к одной из линий тока была вертикальна. При выбранном значении L (здесь $L = 1$) это дает три линейных уравнения, связывающих величины K, N, P, M. Задание M полностью определяет решение.

На рис. 4.9 представлена картина линий тока при $M = 0{,}06$ ($K = -1{,}048$, $N = -0{,}554$, $P = -0{,}0536$) и $M = 0{,}082$ ($K = -1{,}336$, $N = -0{,}509$, $P = -0{,}0796$). В первом случае сечение вихревого кольца имеет две точки торможения, как и на рис. 4.7 при $k = 5{,}3$. Во втором случае образуются два вихревых кольца, сечения которых имеют форму петель и по одной точке торможения. Прочие точки торможения в потоке на рис. 4.9 не показаны. При дальнейшем увеличении M петли стягиваются в точки возврата линий тока. Подобное явление в плоскопараллельных потоках уже нашло отражение на рис. 4.5 при $k = 1$.

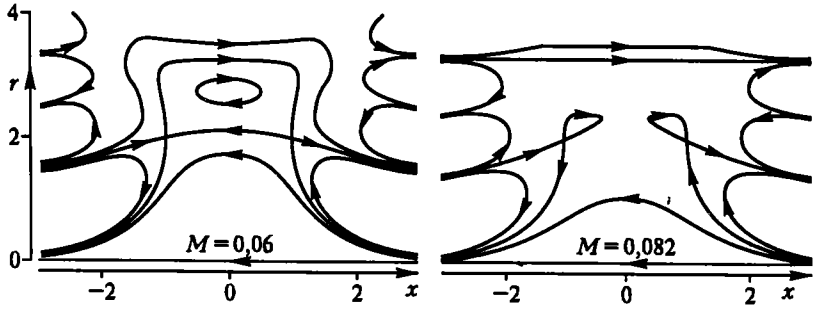


Рис. 4.9

В рассмотренных примерах использованы кинематические функции движения жидкости. Давление в этих течениях зависит от числа Рейнольдса и без труда может быть вычислено.

Снова приходится подчеркнуть опасность вихревых образований при численных расчетах течений. Расчетам течений жидкости при корректной постановке задач способствуют должные свойства численных методов. Однако прихотливость возможных течений лишний раз предостерегает от того, что В. Набоков называл безответственным братанием с безднами.

Обратимся к решению (3.59) при $b = 0$. Среди прочих течений вязкой или идеальной жидкости оно позволяет воспроизвести один из типов «разрушения вихря». Это явление описано Верле [18] и послужило предметом многочисленных исследований. Обзоры работ по изучению этого вихревого образования можно найти в [19–24]. Там же и в альбоме Ван Дайка [25] представлены фотографии явления при обтекании под углом атаки треугольного крыла с острой передней кромкой, а также в трубах с закрученным вокруг оси потоком. На фотографиях течений в статьях Лейбовича [21] и Эскудиера [23] видна структура вихревых образований. Вихревая система утолщения («пузыря») включает либо один сомкнувшийся на оси кольцевой вихрь [23], либо два, один из которых вложен в другой [21, 23]. В работах [19–23] проведена аналогия между вихревым образованием и отрывом потока вязкой жидкости от

обтекаемой поверхности. Исследована потеря устойчивости закрученного потока, в результате которой это явление возникает. В значительной степени эти статьи посвящены изучению причин возникновения таких формирований. Там же представлены результаты некоторых численных исследований. На основе упрощенных уравнений Навье—Стокса (в квазицилиндрическом приближении) получены режимы с простейшим одиночным вихревым образованием [19, 23], а на основе полных уравнений Навье—Стокса — режимы, в которых один вихрь вложен в другой [21, 24]. Исследование решений параболизованных уравнений квазицилиндрического приближения проведено Тригубом [26]. Асимптотическая теория развита Вик. Сычевым [27]. Закрутка потока вокруг оси неизменно присутствует во всех этих экспериментальных и теоретических исследованиях.

На основе решения (3.59) дадим аналитическое представление «разрушения вихря» простейшей структуры с потенциальной закруткой потока вокруг оси [30]. Частный вид этого решения имеет вид

$$\psi = Ar^2\Big(1 - \frac{x^2}{B^2} - \frac{r^2}{C^2}\Big), \quad \omega = -A\Big(\frac{2}{B^2} + \frac{8}{C^2}\Big)r,$$
$$u = 2A\Big(1 - \frac{x^2}{B^2} - 2\frac{r^2}{C^2}\Big), \quad v = \frac{2A}{B^2}xr, \quad w = \frac{\Gamma}{r}, \tag{3.67}$$

где A, B, C, Γ — произвольные постоянные. Картина линий тока $\psi = \text{const}$ при $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$ и при произвольном Γ показана на рис. 4.10. Давление p, деленное на постоянную плотность, находится из уравнений Навье—Стокса

$$uu_x + vu_r + p_x = R^{-1}\Big(u_{xx} + u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\Big),$$
$$uv_x + vv_r - \frac{1}{r}w^2 + p_r = R^{-1}\Big(v_{xx} + v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{r^2}v\Big).$$

В случае решения (3.67) с принятым значением постоянных величина p определяется формулой

$$p = x^2 - \frac{x^4}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{2} - \frac{\Gamma^2}{2r^2} - \frac{17}{R}x.$$

Давление зависит от числа Рейнольдса. На оси $r = 0$ оно вместе с w имеет особенность потенциального вихря.

Решение (3.67) при $B = C$, $\Gamma = 0$ воспроизводит в вязкой жидкости шаровой вихрь Хилла [11, 12], полученный для идеальной жидкости.

Вихревое образование (3.67) состоит из одного сомкнувшегося на оси кольцевого вихря и отвечает структуре, полученной Эскудиером [23]

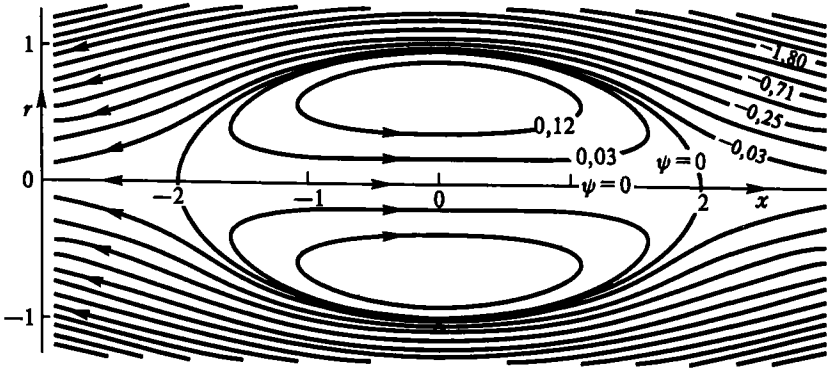


Рис. 4.10

экспериментально и численно на основе уравнений Навье—Стокса. Ротор вектора скорости имеет составляющие γ, 0, $17Ar/2$ (где $\gamma = O$ при $r > 0$, $\gamma = \infty$ при $r = 0$) по направлениям x, r, ϑ, соответственно, и, таким образом, постоянен при $r = \text{const}$. В этом смысле термин «разрушение вихря» не имеет под собой оснований. Поведение ротора вектора скорости вынуждает говорить про сохранение вихря, а чисто зрительное впечатление от замкнутых линий $\psi = \text{const}$ (рис. 4.10) — про возникновение вихря на пути закрученного потока.

В частном случае $\psi = x^2r^2 + r^4$ решения (3.59) нет пересечения линий тока, но $x = r = 0$ является «точкой торможения» при $u > 0$ во всей меридиональной плоскости за исключением указанной точки.

В статьях Гартшоре [19] и Эскудиера [23] вместе с фотографиями одиночных вихревых образований приведены фотографии, на которых за первыми вихревыми образованиями возникают вторые. Решение (3.57) при $b = 0$ позволяет воспроизвести периодические и непериодические цепочки вихрей этого типа в закрученном вокруг оси течении [32].

Подходящий частный случай (3.57) имеет вид

$$\psi = rI_1(r)\cos x + \frac{c}{2}r^2 + \frac{m}{8}r^4, \quad \omega = mr,$$

$$u = I_0(r)\cos x + c + \frac{m}{2}r^2, \quad v = I_1(r)\sin x,$$

где I_n — модифицированные функции Бесселя. При должном выборе постоянных c, m это решение описывает периодическую цепочку вихревых образований.

На оси $r = 0$ величина $\psi = 0$. Каждое вихревое образование, охватывающее ось, должно быть окружено также линией $\psi = 0$. Точка пересечения этой линии с осью является точкой торможения. В ней $u = v = 0$.

На оси, как это видно из последней формулы, $v = 0$. Требование обращения в нуль величины u при $r = 0$ и заданном $x = x_0$ приводит к равенству $c = -\cos x_0$. Наконец, пусть для определенности при $x = 0$ радиус вихревого образования $r = 1$. Тогда из последнего выражения для ψ следует, что $m = 4\cos x_0 - 8I_1(1)$. В этом случае

$$\psi = rI_1(r)\cos x + \frac{1}{2}(r^4 - r^2)\cos x_0 - I_1(1)r^4. \tag{3.68}$$

На рис. 4.11, помимо шкал x и r, изображены линии $\psi = \text{const}$ при $x_0 = k\pi/4$, $k = 1, \ldots, 4$. При $k = 1, 2, 3$, то есть при $x_0 = 0{,}785$, 1,571, 2,356 возникают бесконечные периодические цепочки вихревых образований. Картины линий $\psi = \text{const}$ топологически эквивалентны.

Выясним, при каких значениях x_0 такая картина сохраняется. При $\psi = 0$ из (3.68) следует, что r имеет период 2π по x, сама кривая $\psi = 0$ симметрична относительно точек $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, а x является однозначной функцией от r на полупериоде $0 \leqslant x \leqslant \pi$:

$$x = \arccos S, \quad S = \frac{I_1(1)r^4 - C(r^4 - r^2)}{rI_1(r)}, \quad C = \frac{1}{2}\cos x_0.$$

Из этих равенств при $r = 1$ видно, что $S = 1$, $x = 0$, и это отвечает ранее принятому масштабу вихревого образования. Производная от S по r равна

$$\frac{dS}{dr} = \Big\{\big[4I_1(1)r^3 - C(4r^3 - 2r)\big]rI_1(r) - \\ - \big[I_1(1)r^4 - C(r^4 - r^2)\big]rI_0(r)\Big\}\big[rI_1(r)\big]^{-2}.$$

При $r = 1$ она имеет значение

$$\left.\frac{dS}{dr}\right|_{r=1} = \big[4I_1(1) - I_0(1) - 2C\big]I_1^{-2}(1).$$

Знак этой производной, если она не равна нулю, при $r = 1$ определяет знак разности $S - 1$ в окрестности $r = 1$ и, тем самым, отвечает на вопрос о пределах изменения x_0, в которых образуется цепочка вихрей. Условие обращения в нуль производной при $r = 1$ дает

$$2C = \cos x_0 = 4I_1(1) - I_0(1).$$

При меньших значениях C и $r = 1$ производная dS/dr, как это видно из ее выражения, положительна, а при бóльших C отрицательна. Иными словами, при $r < 1$, $\cos x_0 < 4I_1(1) - I_0(1)$ величина $S < 1$, и кривая $\psi = 0$, проходящая через точку $x = 0$, $r = 1$, существует.

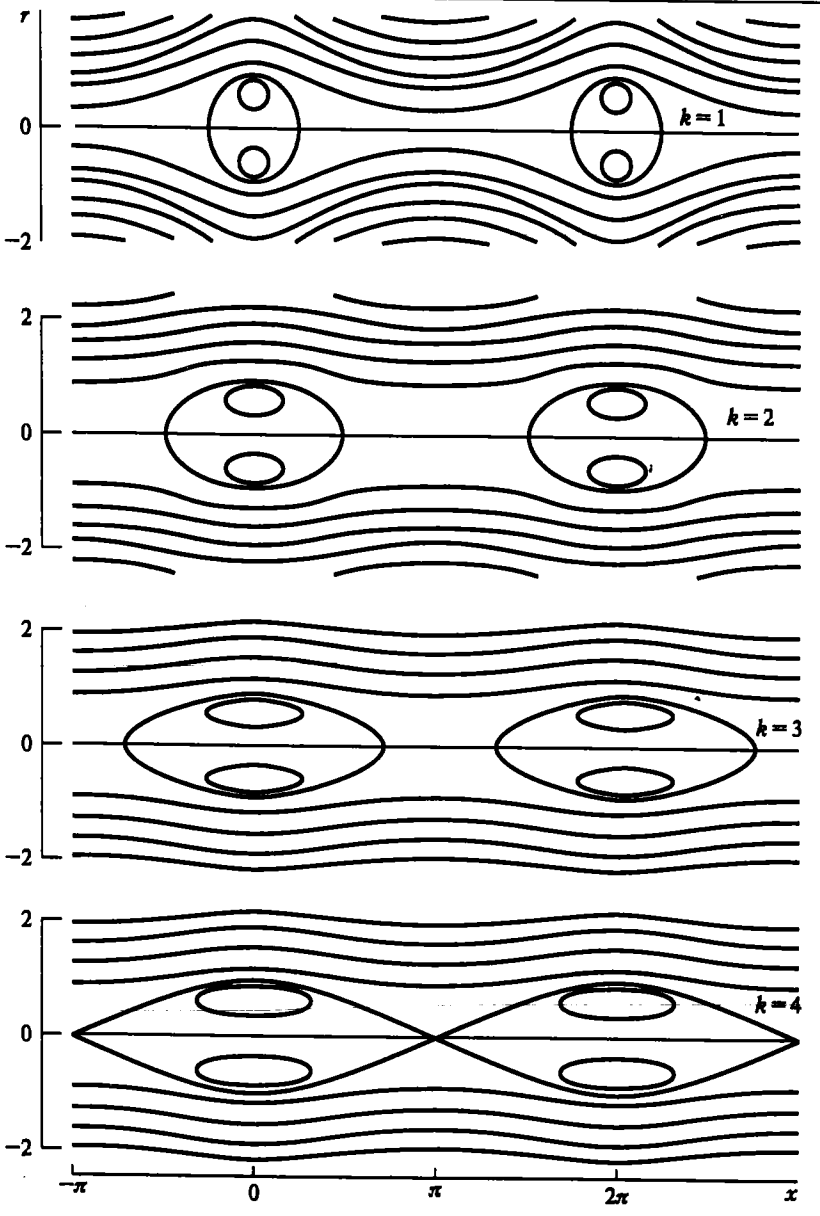


Рис. 4.11

При $\cos x_0 > 4I_1(1) - I_0(1)$ такая кривая существует при $r \geqslant 1$ и не очерчивает вихревое образование рассматриваемого вида.

Остается исследовать случай $2C = 4I_1(1) - I_0(1)$. При $r = 1$ производная dS/dr, как уже отмечалось, равна нулю. Вторая производная

$$\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=1} = \left[4I_0(1) - 9I_1(1)\right] I_1^{-1}(1) < 0.$$

Отсюда и из равенства $x = \arccos S$ следует, что при $x = 0$, $r = 1$ кривые $\psi = 0$ образуют седловую точку. Касательные к этим кривым в седловой точке не горизонтальны. Ветви линий $\psi = 0$ располагаются как при $0 \leqslant r \leqslant 1$, так и при $1 \leqslant r$.

Таким образом, вихревые образования типа изображенных на рис. 4.11 при $k = 1, 2, 3$ существуют при $\pi > x_0 > \arccos\left[4I_1(1) - I_0(1)\right] \approx 0{,}104$.

При $k = 4$ вихревые образования смыкаются на оси с соседними.

Изменение постоянных в выражении для ψ позволяет получать течения других типов. Например, при $k = 0$, $c = -0{,}9987$, $m = 0{,}5213$ вместо цепочки «разрушений вихря» возникает периодическая цепочка вихревых колец.

Форма вихревых образований, естественно, изменится, если использовать не одно слагаемое в сумме, входящей в выражение (3.57) для ψ. Если, например, использованы два слагаемых и отношение λ_1/λ_2 не есть рациональная дробь, то возникает непериодическая система вихрей.

Как и в случае одиночного вихря (3.67), в представленном здесь решении (3.68) ротор вектора скорости сохраняется на прямых, параллельных оси симметрии.

4.4. Стоксовские течения у пластинок

Обтеканию пластинок вязкой жидкостью посвящены многочисленные исследования, основанные на асимптотических и численных подходах. Представление течения в окрестности носика пластинки в приближении Стокса и при малых числах Рейнольдса получено Карьером и Лином [33] в виде отрезка ряда с произвольными коэффициентами, отвечающими внешним граничным условиям. Исправленный отрезок ряда приведен Ван Дайком в [34].

В соответствии с парадоксом Стокса задача об обтекании равномерным на бесконечности потоком пластинки конечной длины при нулевом числе Рейнольдса не имеет аналитического всюду решения. Корректная постановка задачи об обтекании полубесконечной пластинки при том же условии на бесконечности не известна.

Здесь будут приведены решения подобных задач с особыми точками, имеющими физическую интерпретацию [35]. Для поиска решений используется общий интеграл бигармонического уравнения и граничные условия на оси симметрии и на бесконечности.

В приближении Стокса функция тока ψ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta\psi = 0, \tag{4.1}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Для нахождения решений используется общий интеграл этого уравнения в расширенной комплексной форме

$$\begin{aligned} &\psi = \mathrm{Re}[\gamma(z) + \delta(\bar{z}) + \bar{z}\alpha(z) + z\beta(\bar{z})], \\ &z = re^{i\varphi}, \quad \bar{z} = re^{-i\varphi}, \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где r, φ — радиальная и угловая составляющие полярных координат, γ, δ, α, β — произвольные аналитические функции своих аргументов.

Полюс координат помещен в носике пластинки, а самой пластинке отвечают лучи $\varphi = \pm\pi$. Решения уравнения (4.1) отыскиваются в полуполосе $0 \leqslant r < \infty$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Лучи $\varphi = \pm\pi$ представляют собой разрез плоскости с декартовыми координатами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Составляющие вектора скорости u, v по направлениям r, φ, соответственно, выражаются через ψ по формулам

$$u = \frac{1}{r}\psi_\varphi, \quad v = -\psi_r. \tag{4.3}$$

Вихревая функция ω равна

$$\omega = \Delta\psi = 4\,\mathrm{Re}\left[\alpha'(z) + \beta'(\bar{z})\right], \tag{4.4}$$

где штрих означает производную функции по своему аргументу.

Граничные условия выражают следующие требования:

А. Обращение в нуль функции ψ при $0 \leqslant r < \infty$, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$; использование (4.2) при этом дает, соответственно,

$$\mathrm{Re}\left[\gamma(r) + \delta(r) + r\alpha(r) + r\beta(r)\right] = 0, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{Re}\left[\gamma(-r) + \delta(-r) - r\alpha(-r) - r\beta(-r)\right] = 0. \tag{4.6}$$

В. Обращение в нуль функции ω при $0 \leqslant r < \infty$, $\varphi = 0$ (условие симметрии); использование (4.4) при этом дает после сокращения

$$\mathrm{Re}\left[\alpha'(r) + \beta'(r)\right] = 0. \tag{4.7}$$

C. Обращение в нуль функции u при $0 \leqslant r < r_0$, $\varphi = \pm\pi$, где r_0 — единица или бесконечность (условия прилипания на пластинке); использование (4.3), (4.2) при этом дает после сокращения

$$\operatorname{Im}\left[e^{i\varphi}\gamma'(re^{i\varphi}) - e^{-i\varphi}\delta'(re^{-i\varphi}) - e^{-i\varphi}\alpha(re^{i\varphi}) + \right.$$
$$\left. + e^{i\varphi}\beta(re^{-i\varphi}) + r\alpha'(re^{i\varphi}) - r\beta'(re^{-i\varphi})\right]_{\varphi=\pm\pi} = 0; \qquad (4.8)$$

при $r_0 = 1$, $1 \leqslant r < \infty$, $\varphi = \pm\pi$ граничное условие для u не предопределяется.

D. Обращение в нуль функций ψ и u при $r = 0$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (условия в носике пластинки); использование (4.2), (4.3) при этом дает

$$\operatorname{Re}\left[\gamma(0) + \delta(0)\right] = 0, \qquad (4.9)$$
$$\operatorname{Im}\left[-\gamma'(0) + \delta'(0) + \alpha(0) - \beta(0)\right] = 0. \qquad (4.10)$$

E. При $r \to \infty$ ограниченность $|u|$, $|v|$.

Функциональные уравнения (4.5) и (4.6) совпадают. Интегрирование уравнения (4.7) после обозначения аргумента через t дает в простейшем случае

$$\operatorname{Re}\left[\alpha(t) + \beta(t)\right] = 0. \qquad (4.11)$$

Здесь постоянная интегрирования опущена, поскольку это допускает структура интеграла (4.2). Уравнение (4.5) с использованием равенства (4.11) показывает, что

$$\operatorname{Re}\left[\gamma(t) + \delta(t)\right] = 0, \qquad (4.12)$$

также в простейшем случае.

Удовлетворимся лишь частными решениями и положим

$$\gamma(t) = -t\alpha(t). \qquad (4.13)$$

В этом случае из условий (4.8) с учетом (4.11) и (4.12) следует, что

$$\operatorname{Im}\left[\alpha(re^{i\varphi}) + \alpha(re^{-i\varphi})\right]_{\varphi=\pm\pi} = 0. \qquad (4.14)$$

Равенство (4.9) удовлетворено в силу (4.12). Равенство (4.10) с использованием (4.11)–(4.13) дает

$$\operatorname{Im}\left\{2\alpha(0) + \lim_{z\to 0}\left[z\alpha'(z) - \bar{z}\alpha'(\bar{z})\right]\right\} = 0. \qquad (4.15)$$

Выражение (4.2) теперь с учетом (4.11)–(4.13) может быть приведено к виду

$$\psi = \operatorname{Re}\left\{(\bar{z} - z)\left[\alpha(z) + \alpha(\bar{z})\right]\right\}. \qquad (4.16)$$

Функция тока обтекания пластинки будет найдена, если удастся задать функцию $\alpha(t)$ так, что она будет удовлетворять условиям (4.14), (4.15) и обеспечит ограниченность $u^2 + v^2$ при $z \to \infty$. Осуществим две попытки.

(I) Пусть $\alpha(t) = -i(U/2\pi)\operatorname{arctg}\sqrt{t}$, где U — постоянная величина. В этом случае равенства (4.16), (4.4), (4.3) дают

$$\psi = -\frac{U}{\pi} r(\sin\varphi)\operatorname{arcctg}\frac{1-r}{2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)},$$

$$\omega = -\frac{2U}{\pi\sqrt{r}}\frac{r\sin(3\varphi/2)+\sin(\varphi/2)}{1+2r\cos\varphi+r^2},$$

$$u = \frac{U}{\pi}\left[\frac{(1-r)\sqrt{r}\sin\varphi\sin(\varphi/2)}{1+2r\cos\varphi+r^2} - (\cos\varphi)\operatorname{arcctg}\frac{1-r}{2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)}\right],$$

$$v = \frac{U}{\pi}(\sin\varphi)\left[\frac{(1+r)\sqrt{r}\cos(\varphi/2)}{1+2r\cos\varphi+r^2} + \operatorname{arcctg}\frac{1-r}{2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)}\right].$$

Из этих формул видно, что при $r \to \infty$ величины $u \to -U\cos\varphi$, $v \to U\sin\varphi$. Это означает, что при $r \to \infty$ поток стремится к равномерному со скоростью U, параллельной лучам $\varphi = \pm\pi$. Из поставленных граничных условий выполнены (4.5) и (4.6) при $0 \leqslant r < \infty$, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$, а также условие (4.7) при $0 \leqslant r < \infty$, $\varphi = 0$ и условия (4.9), (4.10) при $r = 0$. Условие (4.8) при $\varphi = \pm\pi$ выполнено только на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1$, то есть при $r_0 = 1$. При $\varphi = \pm\pi$, $1 < r < \infty$ величина $u = U$. Иными словами, на пластинке $\varphi = \pm\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ осуществляется прилипание, а при бóльших значениях r полубесконечная пластинка удаляется от полюса координат со скоростью U и увлекает с собой прилипающую к ней жидкость. Разрыв скорости при $\varphi = \pm\pi$, $r = 1$ обусловлен тем, что эти точки являются особыми для ψ. Линии тока такого течения изображены на рис. 4.12.

(II) Пусть теперь $\alpha(t) = i(V/2)\operatorname{arth}\sqrt{t}$, где V — постоянная величина. Тогда формулы (4.16), (4.4), (4.3) дают

$$\psi = Vr(\sin\varphi)\ln\frac{1-2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)+r}{1+2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)+r},$$

$$\omega = 2V\frac{r\sin(3\varphi/2)-\sin(\varphi/2)}{\sqrt{r}(1-2r\cos\varphi+r^2)},$$

$$u = V\left[\frac{2(1+r)\sqrt{r}\sin\varphi-\sin(\varphi/2)}{1-2r\cos\varphi+r^2} + (\cos\varphi)\ln\frac{1-2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)+r}{1+2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)+r}\right],$$

$$v = V\left[\frac{2(1-r)\sqrt{r}\sin\varphi - \cos(\varphi/2)}{1-2r\cos\varphi+r^2} - (\sin\varphi)\ln\frac{1-2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)+r}{1+2\sqrt{r}\cos(\varphi/2)+r}\right].$$

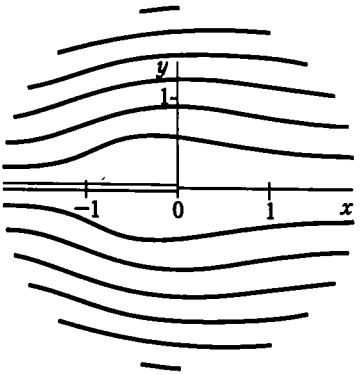


Рис. 4.12

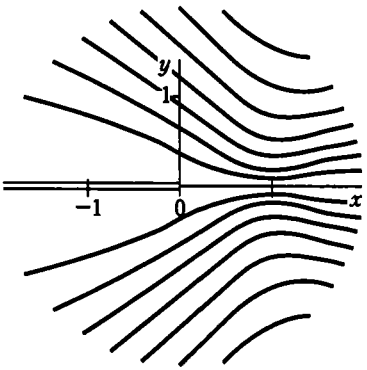


Рис. 4.13

В этом решении $u \to 0$, $v \to 0$ при $r \to \infty$. Принятые граничные условия с $r_0 = \infty$ выполнены полностью. В особой точке $\varphi = 0$, $r = 1$ величина u обращается в бесконечность. Обтекание полубесконечной пластинки $0 \leqslant r < \infty$, $\varphi = \pm\pi$ с прилипанием жидкости на ней можно считать происходящим под действием «дублета» в указанной точке. Линии тока такого течения показаны на рис. 4.13.

Линейность и однородность уравнения (4.1) и граничных условий (4.5)–(4.10) позволяют изменить знаки перед использованными выражениями для $\alpha(t)$ и, тем самым, обратить течения.

Литература к главе 4

[1] *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandl. III Intern. Mathem. Kongress. Heidelberg. 1904. S. 484–491.

[2] *Шмыглевский Ю. Д.* Инверсия сингулярности уравнений Навье—Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 11. С. 1748–1750.

[3] *Александров В. В., Шмыглевский Ю. Д.* Об инерционных и сдвиговых течениях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274. № 2. С. 280–283.

[4] *Шмыглевский Ю. Д.* Об изобарических плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 12. С. 1895–1898.

[5] *Зильберглейт А. С.* Точное решение одной нелинейной системы уравнений в частных производных, возникающей в гидродинамике // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 5. С. 564–566.

[6] *Бондаренко Ю. А.* Инерционные трехмерные движения невязкой несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Серия Матем. моделир. физ. процессов. 1994. Вып. 3. С. 41–46.

[7] *Овсянников Л. В.* Изобарические движения газа // Дифференц. уравн. 1994. Т. 30. № 10. С. 1792–1799.

[8] *Шмыглевский Ю. Д.* О течениях вязкой жидкости, не зависящих от числа Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 6. С. 951–955.

[9] *Шмыглевский Ю. Д.* О вихревых образованиях в плоскопараллельных потоках вязкой и идеальной жидкостей // Изв. РАН. Механ. жидк. и газа. 1997. № 6. С. 88–92.

[10] *Шмыглевский Ю. Д.* О вихревых образованиях в вязкой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 6. С. 955–959.

[11] *Hill M. J. M.* On a spherical vortex // Brit. Ass. Rep. 1893. P. 696–698.

[12] *Hill M. J. M.* On a spherical vortex // Phil. Trans. 1894. A. 185. P. 213–245.

[13] *Berker R.* Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible // Handbuch der Physik. Bd. 8/2. Berlin. Springer Verlag. 1963. S. 1–384.

[14] *Crudeli U.* Sui moti di un liquido viscoso (omogeneo) simmetrici rispetto ad un asse // Atti Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. 1927. Ser. 6. V. 5. № 7. P. 500–504.

[15] *Crudeli U.* Una nuova categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali // Atti Reale Accademia Nazionale del Lincei. Rendiconti. 1927. Ser. 6. V. 5. № 10. P. 783–789.

[16] *Crudeli U.* Sopra una categoria di moti stazionari dei liquidi (pesanti) viscosi entro tubi cilindrici (rotondi) verticali // Atti Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. 1927. Ser. 6. V. 6. № 10. P. 397–401.

[17] *O'Brien V.* Steady spheroidal vortices — more exact solutions to the Navier–Stokes equation // Q. Appl. Math. 1961. V. 19. № 2. P. 163–168.

[18] *Werlé H.* Visualisation en tunnel hydrodynamique // Rech. Aéronaut. 1953. № 33. P. 3–7.

[19] *Gartshore I. S.* Recent work in swirling incompressible flow. Nat. Res. Coun. Canada. Aeronaut. Rep. 1962. LR-343. 58 p.

[20] *Hall M. G.* Vortex breakdown // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 195–218.

[21] *Leibovich S.* The structure of vortex breakdown // Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 221–246.

[22] *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown: survey and extension // AIAA Journal. 1984. V. 22. № 9. P. 1192–1206.

[23] *Escudier M.* Vortex breakdown: observations and explanations // Progr. Aerospace Sci. 1988. V. 25. № 2. P. 189–229.

[24] *Spall R. E., Gatski T. B., Ash R. L.* The structure and dynamics of bubble-type vortex breakdown // Proc. Roy. Soc. 1990. A. V. 429. № 1877. P. 613–637.

[25] *Van Dyke M.* An album on fluid motion. Stanford. Parabolic Press. 1982. 176 p.

[26] *Тригуб В. Н.* К вопросу о разрушении вихревой нити // Прикл. матем. и механ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 220–226.

[27] *Сычев Вик. В.* Асимптотическая теория разрушения вихря // Изв. РАН. Механ. жидк. и газа. 1993. № 3. С. 78–90.

[28] *Шмыглевский Ю. Д.* О закрученных течениях идеальной и вязкой жидкостей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 12. С. 1905–1911.

[29] *Шмыглевский Ю. Д., Щепров А. В.* Об осесимметричных вихревых образованиях в вязкой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 3. С. 472–476.

[30] *Шмыглевский Ю. Д.* О «разрушении вихря» // Изв. РАН. Механ. жидк. и газа. 1995. № 3. С. 167–169.

[31] *Poiseuille J.-L. M.* Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes Rendus. 1840. T. 11. № 24. P. 961–968; № 26. P. 1041–1048; 1841. T. 12. № 2. P. 112-115.

[32] *Шмыглевский Ю. Д.* О цепочках осесимметричных вихрей // Изв. РАН. Механ. жидк. и газа. 1997. № 2. С. 174–176.

[33] *Carrier G. F., Lin C. C.* On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate // Quart. Appl. Math. 1948. V. 6. P. 63-68.

[34] *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. N.Y.—London. Acad. Press. 1964. 229 p.

[35] *Шмыглевский Ю. Д.* Два примера обтекания пластинок в приближении Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 6. С. 997–1000.

Приложение 1

Осесимметричное трансзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской звуковой поверхностью

Рассматривается газовый поток, имеющий скорость звука на прямой OA в меридиональной плоскости течения (рис. П1), и параллельный оси симметрии x. Если вниз по потоку канал расширяется и его образующая CAB имеет излом в точке A, то скорость течения становится сверхзвуковой и из точки излома выходит пучок характеристик с номерами χ. Вне окрестности прямой OA течение без труда можно рассчитать, например, методом характеристик. Для этого предварительно необходимо определить трансзвуковое течение в окрестности OA.

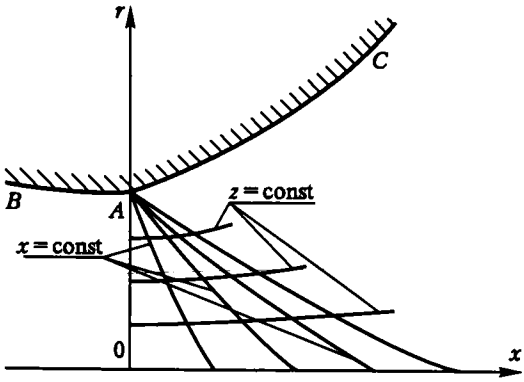


Рис. П1

Осесимметричные безвихревые движения газа описываются уравнением неразрывности

$$(r\rho u)_x + (r\rho v)_r = 0 \qquad (\text{П}\,1.1)$$

и уравнением безвихренности

$$u_r - v_x = 0, \tag{П 1.2}$$

где x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения, u, v — соответствующие составляющие вектора скорости, отнесенные к критической скорости, ρ — плотность, определяемая через скорость равенством

$$\rho = \left[\frac{\varkappa+1}{2} - \frac{\varkappa-1}{2}(u^2+v^2)\right]^{1/(\varkappa-1)}, \tag{П 1.3}$$

$\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей.

Граничными условиями задачи являются

$$u = 1, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{П 1.4}$$

условие в точке A для линии тока

$$r = 1 \tag{П 1.5}$$

и равенство

$$v = 0 \quad \text{при} \quad r = 0. \tag{П 1.6}$$

В качестве новых искомых функций выбираются угол Маха α и угол наклона скорости ϑ по формулам

$$\sin^2\alpha = \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{1}{w^2} - 1\right), \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{v}{u}, \quad w^2 = u^2+v^2.$$

Вводятся независимые переменные χ, z такие, что линии $z = \text{const}$ являются линиями тока, а $\chi = \text{const}$ — характеристиками, выходящими пучком из точки A.

Уравнение (П 1.1) позволяет ввести функцию z, определяемую равенством

$$z\,dz = r\rho w(\cos\vartheta\,dr - \sin\vartheta\,dx). \tag{П 1.7}$$

Вдоль линий $z = \text{const}$ выполняется соотношение

$$\frac{dx}{\cos\vartheta} = \frac{dr}{\sin\vartheta}, \tag{П 1.8}$$

а вдоль линий $\chi = \text{const}$ — соотношение

$$\frac{dx}{\cos(\vartheta-\alpha)} = \frac{dr}{\sin(\vartheta-\alpha)}. \tag{П 1.9}$$

Система уравнений (П 1.1)–(П 1.3) преобразуется к эквивалентной ей системе уравнений с независимыми переменными z, χ:

$$\beta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \frac{1+\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) + \frac{z}{r^2}\sin\vartheta\sin\alpha = 0, \tag{П 1.10}$$

$$\beta\frac{r}{z}\frac{2\cos\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\frac{\partial r}{\partial\chi}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\chi}+\frac{1+\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\chi}\right)\sin\vartheta=0, \qquad (\Pi\,1.11)$$

$$\beta\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{z}{r}\sin(\vartheta-\alpha)=0, \qquad (\Pi\,1.12),$$

$$\beta\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{z}{r}\cos(\vartheta-\alpha)=0, \qquad (\Pi\,1.13),$$

где

$$\beta=\left(\frac{\varkappa+1}{2}\frac{1-\cos 2\alpha}{\varkappa-\cos 2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}.$$

Переменная χ выбирается так, чтобы при $z=1$ выполнялось равенство

$$\chi=\frac{\pi}{2}-\alpha. \qquad (\Pi\,1.14)$$

Тогда граничными условиями задачи становятся равенства

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\ \vartheta=0,\ x=0 \quad \text{при} \quad \chi=0, \qquad (\Pi\,1.15)$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\chi,\ r=1,\ x=0 \quad \text{при} \quad z=1, \qquad (\Pi\,1.16)$$

$$\vartheta=0,\ r=0 \quad \text{при} \quad z=0. \qquad (\Pi\,1.17)$$

Решение уравнений (П 1.10)–(П 1.12) в окрестности звуковой линии отыскивается в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\pi}{2}+\alpha_1(z)\chi+\alpha_2(z)\chi^2+\dots,\\ \vartheta&=\vartheta_1(z)\chi+\vartheta_2(z)\chi^2+\vartheta_3(z)\chi^3+\vartheta_4(z)\chi^4+\dots,\\ r&=z+r_1(z)\chi+r_2(z)\chi^2+r_3(z)\chi^3+r_4(z)\chi^4+r_5(z)\chi^5\dots\end{aligned} \qquad (\Pi\,1.18)$$

Подстановка рядов (П 1.18) в уравнения (П 1.10)–(П 1.12) и приравнивание нулю сумм коэффициентов при одинаковых степенях χ приводит к рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций

$$\alpha_i(z),\quad \vartheta_i(z),\quad r_i(z)\quad (i=1,2,\dots).$$

Из этой системы и граничных условий прежде всего следует, что

$$\vartheta_1\equiv\vartheta_2\equiv r_1\equiv r_2\equiv r_3\equiv 0.$$

Система уравнений для определения α_1, ϑ_3, τ_4 имеет вид

$$\frac{d\vartheta_3}{dz} + \frac{\vartheta_3}{z} - \frac{2}{\varkappa+1}\alpha_1^2\frac{d\alpha_1}{dz} = 0,$$

$$\frac{8}{\varkappa+1}\tau_4\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dz} - \vartheta_3\left(3\vartheta_3 + \frac{2}{\varkappa+1}\alpha_1^3\right) = 0, \qquad (\Pi\,1.19)$$

$$\frac{d\tau_4}{dz} + \frac{\tau_4}{z} - \frac{\alpha_1^4}{2(\varkappa+1)} - \alpha_1\vartheta_3 = 0.$$

Граничными условиями для α_1, ϑ_3, τ_4 являются следующие равенства, вытекающие из (П 1.15)–(П 1.17):

$$\alpha_1(1) = -1, \quad \tau_4(1) = 0, \quad \vartheta_3(0) = 0, \quad \tau_4(0) = 0, \qquad (\Pi\,1.20)$$

причем, как будет видно из дальнейшего, последние два условия взаимно связаны уравнениями (П 1.19).

Новая искомая функция ω вводится формулой

$$\omega = 4\frac{\tau_4}{\vartheta_3}. \qquad (\Pi\,1.21)$$

Из уравнений (П 1.19) следует, что

$$\alpha_1 = \omega',$$

$$\vartheta_3 = \frac{2}{3(\varkappa+1)}\omega'(\omega\omega'' - \omega'^2), \qquad (\Pi\,1.22)$$

$$\tau_4 = \frac{1}{6(\varkappa+1)}\omega\omega'(\omega\omega'' - \omega'^2).$$

Для ω возникает уравнение

$$\omega''' = \frac{1}{\omega\omega'}\left[\omega''(5\omega'^2 - \omega\omega'') + \frac{\omega'}{z}(\omega'^2 - \omega\omega'')\right] \qquad (\Pi\,1.23)$$

с граничными условиями

$$\omega'(1) = -1, \quad \omega(1) = 0, \quad \omega(0)\omega''(0) - \omega'^2(0) = 0. \qquad (\Pi\,1.24)$$

Выполнение последнего условия и ведет к одновременному выполнению двух последних условий из (П 1.20).

Преимуществом уравнения (П 1.23) перед системой (П 1.19) является отсутствие в этом уравнении величины $\varkappa$. Это определяет универсальность переменной ω.

Новые переменные φ и ζ вводятся по формулам

$$\omega = \Phi\varphi, \qquad (\Pi\,1.25)$$

$$\zeta = \frac{\Omega}{\Phi}z, \qquad (\Pi\,1.26)$$

где Φ и Ω — постоянные величины. При такой замене переменных вид уравнения (П 1.23) не меняется. Решение этого уравнения для $\varphi(\zeta)$, удовлетворяющее при $\zeta = 0$, например, условиям

$$\varphi = 1, \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = 1,$$

можно найти численно с использованием асимптотических представлений функции φ в окрестностях точек $\zeta = 0$ и $\zeta = \zeta_*$, при котором $\varphi(\zeta_*) = 0$.

Такое решение в окрестности $\zeta = 0$ представляется рядом

$$\varphi = 1 + \zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{5}{12}\zeta^3 + \frac{7}{24}\zeta^4 + \frac{91}{480}\zeta^5 + \frac{47}{360}\zeta^6 + \frac{3767}{40320}\zeta^7 + \dots \quad (\text{П } 1.27)$$

В окрестности $\zeta = \zeta_*$ решение с ограниченной третьей производной записывается в виде

$$\varphi = \varphi_*\zeta_*\left(\Delta - \frac{1}{10}\Delta^2 + \frac{13}{300}\Delta^3 - \frac{239}{9000}\Delta^4 + \frac{1787}{90000}\Delta^5 - \frac{49637}{2700000}\Delta^6 + \varepsilon\right),$$

где

$$\varphi_* = \left.\frac{d\varphi}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_*}, \quad \Delta = \frac{\zeta}{\zeta_*} - 1, \quad \varepsilon = \sum_{i=7}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Delta^i(\ln\Delta)^j.$$

Из условий (П 1.24)–(П 1.26) можно найти, что

$$\left.\frac{d\omega}{dz}\right|_{z=1} = \Omega\left.\frac{d\varphi}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_*} = -1, \quad \zeta_* = \frac{\Omega}{\Phi}$$

или

$$\Omega = -\left(\left.\frac{d\varphi}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_*}\right)^{-1}, \quad \Phi = \frac{\Omega}{\zeta_*}.$$

Отсюда видно, что функция $\omega = \Phi\varphi$, удовлетворяющая уравнению (П 1.23), удовлетворяет также всем поставленным граничным условиям (П 1.24).

Функции $\alpha_2(z)$, $\vartheta_4(z)$, $r_5(z)$ определяет система однородных линейных дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями. Поэтому им удовлетворяет решение

$$\alpha_2 \equiv \vartheta_4 \equiv r_5 \equiv 0.$$

Определяя с помощью рядов (П 1.18) функции α, ϑ, r на некоторой характеристике $\chi = \chi_*$ достаточно близкой к $\chi = 0$, интегрированием уравнения (П 1.13) вдоль характеристики $\chi = \chi_*$ находим

$$x(z) = -\int_{z=1}^{z} \frac{1}{r\beta}\cos(\vartheta - \alpha)\, z\, dz.$$

Продолжение течения легко может быть рассчитано методом характеристик.

Эта работа была опубликована в [1], а подробные таблицы течения свободно расширяющегося газа при различных значениях $\varkappa$ — в [2].

Литература к Приложению 1

[1] *Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью // Вычислительная математика. 1957. Сборник 2. С. 45–89.

[2] *Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Таблицы параметров осесимметричного сверхзвукового течения свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью. Москва. Изд-во АН СССР. 1962.

Приложение 2

Осесимметричное изобарическое течение

Уравнения, описывающие в декартовых координатах x, y, z стационарные изобарические течения идеальной несжимаемой жидкости, после перехода к цилиндрическим координатам x, $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$, $\vartheta = \operatorname{arctg}(y/z)$ принимают в осесимметричном случае вид

$$ru_x + rv_r + v = 0, \quad uu_x + vu_r = 0,$$

$$uv_x + vv_r - \frac{w^2}{r} = 0, \quad uw_x + vw_r + \frac{vw}{r} = 0,$$

где, в отличие от обозначений подраздела 4.2.1, u, v, w — осевая, радиальная и азимутальная составляющие вектора скорости.

Пример решения этих уравнений, упомянутый в 4.2.1, дают равенства

$$u = V(\psi), \quad v = a^2 V(\psi)\frac{x}{r}, \quad w = aV(\psi)\frac{(r^2 - a^2x^2)^{1/2}}{r}, \qquad (\text{П}\,2.1)$$

где ψ — функция тока, введенная по формуле $d\psi = ru\,dr - rv\,dx$; a — произвольная постоянная величина; V — произвольная функция от ψ. При $x \to 0$, $r \to 0$ функции v, w не имеют единых пределов, если при этом V не стремится к нулю. Это решение имеет тип двойной волны, поскольку $a^2u^2 = v^2 + w^2$. Решение определено при $r^2 - a^2x^2 \geqslant 0$. Оно описывает движение частиц жидкости с постоянной скоростью вдоль прямых линий. Каждая такая линия в точке, минимально удаленной от оси x, образует с меридиональной плоскостью, проходящей через эту точку, угол $\operatorname{arctg} a$. Осесимметричные поверхности тока представляют собой однополостные гиперболоиды $r^2 - a^2x^2 = b^2$ и их асимптоту — конус $r^2 - a^2x^2 = 0$. На рис. П2 изображен отрезок этого конуса с некоторыми линиями тока на нем и отрезки двух однополостных гиперболоидов также с нанесенными на них прямыми линиями тока.

Произвол в определении функции $V(\psi)$ позволяет выбрать ее так, что вектор скорости обращается в нуль, например, на двух осесимметричных поверхностях тока. Возникающий поток «прилипает» к этим поверхностям. Однако подстановка равенств (П 2.1) в уравнения Навье—Стокса показывает, что они удовлетворяются только при $a = 0$. В этом случае гиперболы $r^2 - a^2x^2 = b^2$ вырождаются в прямые $r = b$ при $v = w = 0$, и решение определяет известное течение Пуазейля между двумя соосными цилиндрами. Решение (П 2.1) удовлетворяет уравнениям газовой динамики при постоянном давлении и плотности, произвольно зависящей от ψ.

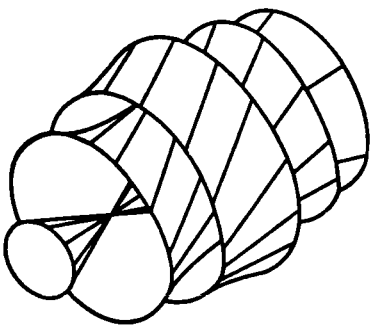


Рис. П2

Приведенное решение получено в [1] и дополнительно исследовано Бондаренко [2].

Литература к Приложению 2

[1] *Шмыглевский Ю. Д.* Об одном инерционном течении // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 12. С. 1833–1834.

[2] *Бондаренко Ю. А.* Инерционные трехмерные движения невязкой несжимаемой жидкости // Вопросы атомной науки и техники. Серия Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 41–46.