С. ПАТАНКАР

Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости

Перевод с английского
под редакцией В. Д. Виленского

МОСКВА
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1984

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ББК 31.31
П 20
УДК [536.2+532.5] : 518.12

Рецензент Б. С. Петухов

S. PATANKAR
NUMERICAL HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW
Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980

П $\frac{2303010000\text{-}382}{051(01)\text{-}84}$ 178-84

© 1980 by Hemisphere Publishing Corporation
© Перевод на русский язык, Энергоатомиздат, 1984

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Многие задачи гидродинамики, теплообмена и массообмена, с которыми в настоящее время приходится сталкиваться исследователям и инженерам, не поддаются аналитическому решению, и единственная возможность их теоретического анализа — получение численного решения.

Прогресс в разработке численных методов позволил существенно расширить круг задач, доступных анализу; полученные на их основе результаты используются практически во всех областях техники. Особенно велика их роль в таких областях, как ракетная техника, авиация, энергетика, в частности ядерная, где численные решения прочно вошли в практику.

В отечественной литературе указанные вопросы нашли достаточно широкое освещение в основном на страницах журналов и сборников. Различные их аспекты содержатся в общих руководствах по численному решению уравнений в частных производных. Однако монографии, специально посвященные численному решению задач гидродинамики и теплообмена, немногочисленны и в них рассматриваются в основном решения задач для прогнозирования погоды. Имеющаяся переводная литература [1] также не в состоянии ответить на все существующие вопросы.

Можно надеяться, что книга профессора Миннесотского университета С. Патанкара (США) будет с интересом встречена читателями. Несмотря на то что она не охватывает даже и части существующих методов численного решения задач гидродинамики и теплообмена, а посвящена лишь методу, разработанному автором, многие из идей, содержащихся в книге, будут интересны даже тем читателям, которые предпочтут в своей практике использовать другие методы численного решения. Книга насыщена идеями, причем одни из них разработаны достаточно подробно, другие только указаны.

Книга предназначена читателям, которые начинают использовать численные методы в своей работе, однако, по-видимому, она окажется полезной и для тех, кто уже имеет достаточные навыки

[1] См., например, Численные методы исследования течений вязкой жидкости/ А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел, Д. Б. Сполдинг, М. Вольфштейн: Пер. с англ. М.: Мир, 1972 г. — 326 с.; Роуч. П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. — 481 с.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

в этой области. Усвоению материала книги должны способствовать задачи, приведенные в конце отдельных глав.

Интересна форма изложения материала. Автор стремится сделать ее как можно более физичной, приводя физическую интерпретацию довольно сложных и абстрактных математических понятий или получая их из простых физических соображений. Он как бы беседует с читателем, вводя его в наиболее простой форме в круг проблем, волнующих автора.

Главы 1 и 2 книги имеют вводный характер и посвящены математической постановке рассматриваемых задач и общим чертам метода численного решения, развитого в книге. Введение единой формы записи используемых уравнений позволяет развить единый метод их решения, постепенно усложняя его по мере учета отдельных членов общего уравнения, определяющего зависимую переменную. Интересна физическая трактовка параболического или эллиптического характера используемых уравнений. Проводя процесс построения метода, автор стремится показать его тонкости, которые обычно не рассматриваются, но очень важны при практической реализации метода. Примером этого могут служить четыре основных правила (см. гл. 2), лежащих в основе метода. Подход автора может оказаться чрезвычайно полезным и при использовании других численных методов.

Схема построения метода (гл. 3—5) не совсем обычна. Исходя из обобщенной записи исходных уравнений автор начинает с простейшего случая задачи теплопроводности, затем переходит, вводя в рассмотрение конвективные члены, к задаче конвективного теплообмена и к развитию метода на задачи определения поля скорости жидкости. Эта схема позволяет лучше понять общность таких переменных, как температура и количество движения, и очень полезна для понимания и интерпретации результатов расчетов.

В гл. 6 и 7 приведены дополнительные соображения по практической реализации метода и рассмотрены некоторые специальные случаи его использования. Здесь, в частности, проведен численный расчет параболизованных течений и установлена связь предложенного метода с методом конечных элементов. Интересна трактовка схемной вязкости (диффузии), данная автором.

В гл. 8 показаны результаты расчетов некоторых задач, полученных рассмотренным методом, которые иллюстрируют его возможности на двухмерных эллиптических, трехмерных параболических и трехмерных эллиптических задачах.

Перевод осуществлен И. Г. Зальцманом (Введение, гл. 1, 2, 6—8) и Н. В. Медвецкой (гл. 3—5).

В. Д. Виленский

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1972 г. я прочитал курс лекций по численному решению задач теплообмена и гидродинамики небольшой группе исследователей в Имперском колледже (Лондон). Затем содержание этого курса в расширенном виде было прочитано аспирантам университета в городе Уотерлу (Канада, 1974 г.), Норвежского технологического института (Тронхейм, 1977 г.) и Миннесотского университета (1975, 1977 и 1979 гг.). В последние два года этот же материал, но в сокращенном виде, представлялся на национальные конференции Американского общества инженеров-механиков. Восторженные отклики на эти лекции побудили меня написать данную книгу, которую можно использовать в качестве учебного пособия для аспирантов, а также как справочник по вопросам численного решения задач теплообмена и гидродинамики.

Несмотря на обширную литературу по численному исследованию задач гидродинамики и теплообмена, исследователь, впервые столкнувшийся с данным предметом, испытывает большие трудности. Аспиранту, научному работнику и инженеру часто приходится довольствоваться элементарным изложением интересующего их вопроса в книгах по численному анализу. Часто успех или неудача численного расчета определяются на первый взгляд довольно незначительными деталями, однако в печати редко появляются соответствующие рекомендации и подробности методик численного решения, успешно применяемые в практике расчетов различными группами исследователей. Это часто приводит либо к отказу от использования численного решения, либо к составлению неэффективных программ для ЭВМ.

Зная эту ситуацию, я попытался в настоящей книге дать самостоятельное, простое и практически полезное изложение предмета. По своему характеру книга является вводной и предназначена всем, кто только приступает к расчетам задач теплообмена и гидродинамики, а не специалистам в данной области. При изложении методики численного расчета особое значение придавалось, скорее, физическому смыслу, чем математическим выкладкам. Большая часть использованного математического аппарата ограничена простой алгеброй. В результате, в то время как содержание книги дает читателю возможность пройти весь путь от математической постановки задачи до современных проблем дальнейшего развития методов численного решения задач гидродинамики и теплообмена,

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

само путешествие происходит среди простых и наглядиых физических концепций и соображеиий. При использовании такого подхода в процессе изложения данного материала я часто бывал приятно удивлен тем фактом, что студенты не только обучались числеииым методам, но и начииали лучше поиимать соответствующие физические процессы.

Мне приходилось часто использовать численные методы в своей работе. Со времеием я стал отдавать предпочтеиие определенному классу методов и определенному набору практических рекомендаций, которые частично брал из литературы, а затем усовершенствовал, приспосабливал к рассматриваемым условиям, модифицировал. Таким образом, так как уже была проведеиа большая (хотя и субъективная) работа по сортировке и анализу имеющихся методов, я ограничил содержание этой книги лишь методами, которые и хочу рекомендовать. Здесь не делается попытки провести сравнительный анализ всех существующих методов; другие методы упоминаются исключительно редко. Исследователи, работающие в других условиях, могут с успехом отдавать предпочтение другим методам.

Для иллюстрации изложенного материала в коице некоторых глав даиы упражнения и задачи. Многие задачи можно решать с помощью микрокалькулятора, однако для решения некоторых из них необходимо использовать ЭВМ. Эти задачи предназиачены не для проверки обучающегося читателя, а, главиым образом, для расширения и обогащеиия процесса обучения. В них включены другие методики и содержится дополнительный материал. Иногда, стремясь облегчить решение, я почти полностью решаю задачу. В таких случаях получеиие правильного ответа ие является осиовной целью; читатель должен скоицеитрировать свое внимаиие иа смысле, который вкладывался в эту задачу.

Описание численного метода доведеио в кииге до той стадии, когда читатель может начать составлять программу расчета. Конечно, читатель должен уметь создавать программы расчета, которые способиы давать результаты, аналогичные приведениым в последней главе кииги. В зависимости от стоящей перед исследователем задачи можно создать множество программ расчета различной общности. Возможио, многие читатели сочли бы полезным включение в данную книгу какой-либо характерной программы расчета. Я рассматривал такую возможность. Однако приведение достаточно общей программы расчета, ее детальное описаиие и несколько примеров ее использоваиия были бы, по-видимому, настолько трудоемкими, что зиачительио замедлили бы выход в свет этой кииги. Поэтому в книге обсуждаются лишь подготовка и отладка программы расчета (см. § 6.4) и помещены многие полезные советы, проверенные на опыте практических вычислеиий.

В издании этой кииги осуществляются желаиие и мечта, которые я выиашивал в течение нескольких лет. Еще в 1971 г. профессор Сполдинг и я плаиировали выпустить книгу такого типа и обрисовали ее предварительный коитур. Однако в силу различ-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ных обстоятельств написание совместной книги оказалось невозможным, и я приступил к переработке записей своих лекций. Настоящая книга в некоторой степени отражает характер предполагаемой нами совместной книги, так как я часто использовал лекции и записи Сполдиига. Однако его прямое участие сделало бы эту книгу значительио лучше.

Осуществляя выпуск в свет настоящей книги, я нахожусь перед профессором Сполдингом в самом большом долгу. Он ввел меня в замечательный мир вычислительных методов. Влияние его идей на мой образ мышления можно увидеть на протяжении всей этой книги. Концепции односторониих и двухсторонних координат (и сами термииы) были рождеиы его воображением. Имеино он предложил рассматривать все соответствующие физические процессы на основании обобщенного дифференциального уравнения стандартиой формы. Однако, пожалуй, иаибольшее значение имела его убежденность в том, что однажды все практические задачи окажутся доступными для численного исследования.

Я хочу выразить свою искреннюю благодарность профессору Сполдингу за его плодотворное влияние на мою профессиональную деятельность, за продолжающуюся теплую дружбу и за его огромный вклад в эту книгу.

Профессор Спэрроу оказал мне большую поддержку в написании этой книги. Его иитерес к предмету возник еще тогда, когда он посещал мои лекции. Вопросы, поставленные Спэрроу, и их обсуждение помогли мне в работе над данной книгой. Он прочитал рукопись настоящей книги и сделал ценные замечания. Именно благодаря его критическим замечаниям я смог в какой-то степени достигнуть ясности и полноты изложения материала.

Интерес к этой работе некоторых других коллег и друзей также оказал мие определениую поддержку. В особенности я хочу выразнть свою признательность профессору Голдстейну за поддержку и профессору Райтби за полезное обсуждение многих вопросов. Я также благодарен многим аспирантам, которые прослушали мой курс и своими вопросами и обсуждениями помогли в написании этой книги.

Я благодарю миссис Лэйнг, которая была так аккуратна при печатании рукописи. Выражаю свою признательность президенту издательской корпорации Хемисфера Бигеллу за его личный интерес к опубликованию этой киигн и сотрудникам издательства за компетентное выполнение работы по выпуску книги.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ВВЕДЕНИЕ

В.1. ЦЕЛЬ КНИГИ

Важность процессов теплообмена и гидродинамики. В этой книге рассматривается решение задач, связанных с тепло-и массообменом, течением жидкости, химическими реакциями и другими процессами, происходящими в элементах технологического оборудования, окружающей среде и живых организмах. Важность этих процессов очевидна для многих практических задач. Почти все способы производства энергии в качестве существенных составляющих включают процессы гидродинамики и теплообмена. Эти же процессы являются определяющими при обогреве и кондиционировании зданий. В основные установки металлургической и химической промышленности входят такие элементы, как топки, теплообменники, конденсаторы и реакторы, в которых имеют место течения жидкостей и газов и теплообмен.

Функционирование самолетов и ракет обусловлено течением газа, теплообменом и химическими реакциями. Теплообмен является лимитирующим фактором при конструировании электрооборудования и электронных схем. С процессами тепломассообмена связано загрязнение окружающей среды. При изменении погодных условий тело человека управляет своим температурным режимом с помощью процессов тепломассообмена.

Необходимость понимания и исследования. Ввиду того что рассматриваемые процессы оказывают такое всеобъемлющее воздействие на человеческую жизнь, мы должны иметь возможность эффективно ими управлять. Эта возможность может быть следствием понимания существа процессов и методологии получения их количественного описания. Вооруженный этими знаниями конструктор может выбрать из нескольких возможных конструкций оптимальную. С помощью расчета мы имеем возможность выбрать более безопасные и эффективные режимы работы существующего оборудования. Расчет относящихся к существу процесса явлений помогает нам предугадать и даже контролировать потенциальные опасности, такие, как наводнения, штормы и пожары.

Существо расчета. Расчет поведения системы в данной физической ситуации состоит в определении значений соответствующих переменных, описывающих интересующие процессы. Рассмотрим частный пример. Полный расчет процессов в некоторой камере сгорания дал бы нам распределения скорости, давления, температуры, концентраций соответствующих химических компонентов и т. д. в рассматриваемой области: он дал бы также трение, тепловые потоки и потоки массы на ограничивающих камеру сгорания стенках. С помощью расчета можно было бы установить характер изменения любой из этих величин при заданном изменении геометрии, расходов, свойств жидкости и т. д.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Назначение книги. Главная цель книги заключается в разработке обобщенного метода расчета тепло- и массообмена, течений жидкости и связанных с ними процессов. Среди различных методов расчета многообещающим является *численное* решение. В этой книге построен численный метод расчета рассматриваемых процессов.

Основная цель книги — построение численного метода, обладающего, насколько это возможно, наибольшей общностью. Поэтому мы пока воздержимся от принятия каких-либо ограничений, таких, как двухмерность, приближение пограничного слоя и несжимаемость жидкости. В дальнейшем некоторые ограничения будут приняты для упрощения изложения.

В данной книге вкратце обсуждаются математические формулировки уравнений, описывающих интересующие нас процессы. Полный вывод уравнений читатель может найти в соответствующих стандартных учебниках. Предполагается, что математические модели таких сложных процессов, как турбулентность, горение и излучение, известны читателю или их можно найти в литературе. Даже в отношении численного решения мы не будем рассматривать все существующие методы и обсуждать их достоинства и недостатки. Все внимание будет сконцентрировано лишь на тех методах, которые были использованы, разработаны или усовершенствованы автором книги. Ссылки на другие методы будут сделаны только там, где это необходимо для понимания некоторых вопросов.

Важным свойством численных методов, которые будут развиты в этой книге, является то, что они во многом основаны на физических соображениях, а не только на математических выводах. В книге используются простая алгебра и элементарные выкладки. Значительное преимущество такого подхода заключается в том, что читатель, хотя и изучавший численные методы, получает более глубокое понимание и может взглянуть в глубь лежащих в основе физических процессов. Такое понимание физического смысла очень полезно при анализе и интерпретации численных результатов. Даже если читатель никогда не будет заниматься численным счетом, подобное изучение численных методов позволяет лучше почувствовать физические аспекты теплообмена и гидродинамики, к тому же физический подход снабдит читателя обобщенным критерием, с помощью которого можно оценить другие существующие в настоящее время численные методы и те методы, которые будут разработаны в будущем.

В. 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Характеристики процессов теплообмена и течения жидкости можно определить экспериментально и теоретически. Рассмотрим вкратце каждый из этих подходов, а затем сравним их между собой.

Экспериментальное исследование. Часто наиболее надежную информацию о физическом процессе можно получить путем непосредственных измерений. С помощью экспериментального исследования на полномасштабной установке можно определить поведение объекта в натурных условиях. В большинстве случаев такие полномасштабные опыты чрезмерно дороги и часто невозможны. Альтернативой является проведение экспериментов на маломасштабных моделях. Однако полученную информацию необходимо экстраполировать на натурный объект, а общие правила для этого часто отсутствуют. Кроме того, на маломасштабных моделях не всегда можно воспроизвести все свойства полномасштабного объекта. Это также снижает ценность получаемых результатов. На-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

конец, надо помнить, что во многих случаях измерения затруднены и измерительное оборудование может давать погрешности.

Теоретическое исследование. При теоретическом исследовании определяются, скорее, результаты решения задачи согласно используемой математической модели, а не характеристики действительного физического процесса. Для интересующих нас физических процессов математическая модель состоит, главным образом, из системы дифференциальных уравнений. Если бы для решения этих уравнений использовались только методы классической математики, то вряд ли удалось бы рассчитать многие имеющие практический интерес явления. На основании классических работ по теплообмену или гидромеханике можно прийти к выводу, что в аналитическом виде можно получить решения только неболь-

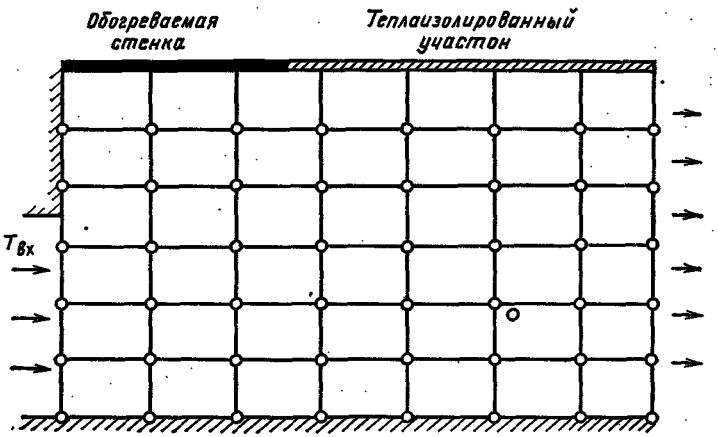


Рис. В.1. Сетка для численного расчета поля температуры

шой части задач, имеющих практический интерес. Кроме того, эти решения часто содержат бесконечные ряды, специальные функции, трансцендентные уравнения для собственных значений и т. д., и их числовая оценка может представлять весьма трудную задачу [1].

Но уровень развития численных методов и наличие больших ЭЦВМ позволяют полагать, что почти для любой практической задачи можно составить математическую модель и провести ее численное исследование. Идею численного подхода можно показать с помощью рис. В.1. Предположим, что нам надо получить распределение температуры в изображенной области. Допустим, что для этого достаточно знать температуру в дискретных точках области. Один из возможных методов ее получения — нахождение значений температуры в узловых точках сетки, на которую разбивается область, при этом для неизвестных значений температуры записываются и решаются алгебраические уравнения. Именно

[1] Мы не хотим этим сказать, что точное аналитическое решение не имеет практической ценности. Действительно, как будет показано в дальнейшем, некоторые особенности численных методов можно установить с помощью простых аналитических решений. Кроме того, нет лучшего способа проверки точности численного метода, чем сравнение с точным аналитическим решением. Тем не менее, по-видимому, не вызывает сомнений, что методы классической математики не дают практических путей решения сложных инженерных задач.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

это упрощенне, связанное с нспользованием алгебраических, а не дифференциальных уравнений, делает численные методы широко применимыми.

Преимущества численного решения. Перечислим преимущества числеиного решения по сравиению с соответствующим экспериментальным исследоианием.

Низкая стоимость. Наиболее важным преимуществом численного решеиия является его иебольшая стоимость. В большинстве случаев стоимость затрачеиного машиного времени иа миого порядков ниже стоимости соответствующего экспериментальиого исследования. Значение этого фактора возрастает с увеличением масштабов и усложнением требующего изучения физического процесса.

Скорость. Численное исследование можно провести очень быстро. Конструктор имеет возможность меньше, чем за день, просчитать сотин вариантов и выбрать оптимальную коиструкцию, и то время как соответствующее экспериментальное исследование заняло бы очень много времени.

Полнота информации. Численное решенне задачн дает подробную н полную иифорнацию. С его помощью можио иайти значеиия *всех* имеющихся переменных (таких, как скорость, давление, температура, концентрация, интеисивность турбулентности) во *всей* области решения. В отличие от эксперимента для расчета доступна практически вся исследуемая область и отсутствуют возмущеиия процесса, виосимые датчиками при экспериментальиом исследовании. Очевидио, что ии в одном эксперимеитальном исследоваиии невозможно измерить распределения всех переменных во всей исследуемой области. Поэтому, даже если проводится экспериментальное исследование, большое значение для дополнения экспериментальиой иифорнации имеют результаты числениого решения.

Возможность математического моделирования реальных условий. Численное решеиие можио получить для реальиых условий исследуемого процесса, что далеко не всегда возможно при эксперимеитальиом исследоваии.

Возможность моделирования идеальных условий. Если с помощью численного решения изучаются закоиомериости физического процесса, а ие сложные ниженериые задачи, можио сконцентрировать внимаиие иа иескольких существенных параметрах этого процесса и исключить все иесущественные явления. При этом можно моделировать многие идеалнзироваиные условия, например двумериость, постояиство плотности, адиабатическую поверхность или бесконечно быструю реакцию. При эксперимеитальиом исследоваии даже с помощью довольно тщательного эксперимента не всегда можно достичь таких идеализироваиных условий.

Недостатки числеиного решения. Числеиное решеиие дает количественное выраженне закономерностей, присущих математической модели. Напротив, с помощью эксперимеитального исследования наблюдается сама действительность. Таким образом, полезиость расчета ограничена обоснованностью математической модели. В этой книге будут рассмотрены только числеиные методы. Тем не меиее следует заметить, что результат числениого решения зависит как от числеиного метода, так и от математической модели. Если используемая математическая модель не соответствует изучаемому явлению, то с помощью даже очень хорошей численной методики можно получить не нужиые результаты.

Для обсуждения иедостатков численного исследования полезио разбить все практические проблемы на две группы.

Группа А: проблемы, для которых математическая модель достаточио обосноваиа (например, теплопроводность, ламииарные течения, простые турбулентные пограничные слои).

Электронная библиотека http://tgv,khstu.ru/

Группа В: проблемы, для которых обосиоваиные математическне модели пока ие разработаиы (иапример, сложиые турбулеитные течения, течеиия некоторых неньютоиовских жидкостей, образоваиие окиси азота при турбулентиом гореиии, иекоторые двухфазиые течеиия).

Коиечио, ответ иа вопрос, в какую группу попадет даииая проблема, будет зависеть от того, какую математическую модель мы считаем обосиоваиной.

Недостатки для группы А. Можио утверждать, что для большинства проблем группы А числеииое решение имеет очень большие преимущества перед эксперимеитальиым исследоваиием. Однако если цель исследоваиия очень узкая (иапример, иадо определить падеиие давлеиия в сложных аппаратах), числеииое решеиие может быть ие дешевле, чем эксперимеит. Для задач, включающих сложиую геометрию, сильиые иелииейиости, зиачительиое измеиеиие свойств жидкости и т. д., получеиие числеииого решеиия может оказаться трудиым и чрезмерно дорогостоящим, а то и иевозможным. Наконец, если математическая постаиовка задачи допускает более одиого решеиия, трудио определить, соответствуют ли результаты расчета действительиости.

Недостатки для группы Б. Проблемы этой группы разделяют все иедостатки проблем группы А. Дополнительио к ним здесь иеясио, в какой мере числеиные результаты согласуются с действительиостью. В этих случаях требуется экспериментальиое обосиоваиие результатов числеииого исследоваиия.

Исследоваиия в области разработки математических моделей обусловливают переход проблем из группы Б в группу А. Оии состоят из создаиия модели, получения путем числеииого решеиия количествеиных результатов и сравиеиия их с эксперимеитальными даииыми. Таким образом, в этих исследоваиях числеиные методы играют ключевую роль. Замечательиый пример этой роли можио иайти в недавних исследоваииях моделей турбулентности. Популяриые в иастоящее время и широко используемые модели турбулеитиости, включающие два уравиения, основаиы, главиым образом, иа работах А. Н. Колмогорова [32][1] и Л. Праидтля [64]. Однако только в 1970 г., когда были усовершеиствоваиы ЭВМ и числеиные методы, такие модели стали использовать для практических целей.

Выбор метода исследования. Здесь ие ставилось целью путем обсуждеиия достоинств и иедостатков численного решения и эксперимеитальиого исследования рекомендовать предпочесть расчет эсперимеиту. Правильиому выбору метода исследоваиия должиа предшествовать оцеика сильиых и слабых сторои обоих рассмотренных выше методов примеиительио к рассматриваемому процессу.

Эксперимент, иесомиенно, является единствеииым методом исследоваиия иовых фундаментальиых явлеиий. В этом смысле расчет следует за эсперимеитом. Одиако расчет более эффективеи для изучения проблемы, включающей иесколько взаимодействующих известиых явлеиий. Но и в этом случае иадо обосновать результаты расчета путем сравиения их с экспериментальиыми даиыми.

Таким образом, оптнмальиое исследоваиие должио разумио сочетать расчет и эксперимеит. Пропорция, в которую должиы входить каждый из ииградиеитов, будет зависеть от существа проблемы, от целей исследоваиия и от имеющихся экоиомических и других ограиичеиий.

---

[1] **Колмогоров А. Н.** Уравиения турбулеитиого движеиия иесжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, с. 56—58. — *Прим. науч. ред.*

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Численное решение задач, связанных с теплообменом, течением жидкости и другими сопутствующими процессами, можно начинать, когда законы, управляющие этими процессами, выражены в математической форме, обычно в виде дифференциальных уравнений. Подробный и полный вывод этих уравнений можно найти в стандартных учебниках. Наша цель заключается в ознакомлении с видом и смыслом этих уравнений. Будет показано, что все рассматриваемые здесь уравнения имеют одинаковую форму, определение которой является первым шагом в создании общего метода решения. Будут также рассмотрены некоторые свойства независимых переменных, использованных в этих уравнениях.

Смысл дифференциального уравнения. Каждое из рассматриваемых здесь дифференциальных уравнений выражает определенный закон сохранения. В каждом уравнении в качестве зависимой переменной используется некоторая физическая величина и отражен баланс между различными факторами, влияющими на эту переменную. Обычно зависимыми переменными в этих дифференциальных уравнениях являются *удельные* свойства, т. е. свойства, отнесенные к единице массы. Примерами[1] являются массовая концентрация, скорость (т. е. количество движения единицы массы) и удельная энтальпия. Члены дифференциального уравнения такого типа выражают воздействия на *единицу объема*. Поясним сказанное на примере. Пусть **J** — поток некоторой зависимой переменной Ф. Рассмотрим показанный на рис. 1.1 контрольный объем, стороны которого равны dx, dy и dz. Поток, втекающий через одну поверхность площадью $dydz$, обозначим J_x (J_x — составляющая вектора **J**), а поток, вытекающий через противоположную поверхность, обозначим $J_x + (\partial J_x/\partial x)dx$. Таким образом, чистое истечение через площадку поверхности равно $(\partial J_x/\partial x)dxdydz$. Рассматривая аналогичным образом потоки в направлениях y

[1] Температура, весьма часто используемая в качестве зависимой переменной, не является удельным свойством. Однако уравнение для нее выводится из более фундаментальных уравнений, в которых в качестве зависимых переменных используются удельные внутренняя энергия или энтальпия.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

и z, а также замечая, что $dxdydz$ — величина рассматриваемого объема, получаем чистое истечение на единицу объема

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{J}. \qquad (1.1)$$

Такая интерпретация div J особеиио полезиа ввиду того, что, как будет видно ниже, построение численного метода будет выполняться на основе принципа баланса для контрольного объема.

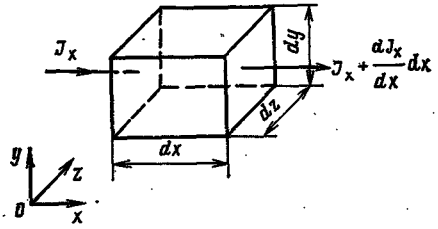


Рис. 1.1. Баланс потоков через контрольиый объем

К единице объема относится также член $\partial(\rho\Phi)/\partial t$, который описывает скорость изменения. Если Φ — удельное свойство, а ρ — плотность, то $\rho\Phi$ — количество соответствующего экстенсивного свойства в единице объема. Таким образом, $\partial(\rho\Phi)/\partial t$ — скорость изменения соответствующего свойства в единице объема.

Дифференциальное уравнение состоит из членов, каждый из которых выражает воздействие на единицу объема, а сумма — баланс этих воздействий. Рассмотрим для примера иесколько стандартных дифференциальных уравнений и получим их обобщенную форму.

Сохранение химической компоненты. Пусть m_l — массовая концентрация [1] химической компоиенты. При наличии поля скорости $\mathbf{u}$ уравнение сохранения m_l записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_l) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} m_l + \mathbf{J}_l) = R_l. \qquad (1.2)$$

Здесь $\partial(\rho m_l)/\partial t$ — скорость изменения массы компоиенты в единице объема; $\rho \mathbf{u} m_l$ — конвективный поток компоненты, т. е. поток, переносимый общим полем течения $\rho\mathbf{u}$; $\mathbf{J}_l$ — диффузионный поток, обусловленный чаще всего градиентом массовой концентрации m_l. Дивергенция этих двух потоков (конвективного и диффузионного) составляет второй члеи дифферепциального уравнения. Величина R_l в правой части обозначает скорость образования компоненты в единице объема, обусловленного химической реакцией. Заметим, что в зависимости от того, что происходит в действительности — образование компоненты или ее уничтожение, R_l может быть положительной или отрицательной. Для нереагирующей компоненты $R_l = 0$.

Если для $\mathbf{J}_l$ справедлив закон Фика, то можио записать

$$\mathbf{J}_l = -\Gamma_l \operatorname{grad} m_l, \qquad (1.3)$$

[1] Массовая коицентрация m_l химической компоиеиты l определяется как отношение массы компоненты l (в данном объеме) к полиой массе смеси (в том же объеме).

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где Γ_l — коэффициент диффузии. При подстановке (1.3) в (1.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_l) + \operatorname{div}(\rho u m_l) = \operatorname{div}(\Gamma_l \operatorname{grad} m_l) + R_l. \qquad (1.4)$$

Уравнение энергии. В наиболее общем виде это уравнение включает воздействия большого количества факторов. Так как нас интересует, скорее, форма, а не подробная запись членов уравнения, достаточно рассмотреть несколько частных случаев.

В случае стационарного течения с небольшой скоростью и пренебрежимо малой вязкой диссипацией уравнение энергии можно представить в виде

$$\operatorname{div}(\rho u h) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + S_h, \qquad (1.5)$$

где h — удельная энтальпия; k — коэффициент теплопроводности; T — температура; S_h — объемная скорость выделения теплоты. Член $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$ описывает влияние переноса теплоты теплопроводностью внутри жидкости согласно закона Фурье.

Для идеальных газов, твердых тел и жидкостей можно записать

$$c \operatorname{grad} T = \operatorname{grad} h. \qquad (1.6)$$

Здесь c — удельная теплоемкость прн постоянном давлении. Подставив это выражение в уравнение энергии, получим

$$\operatorname{div}(\rho u h) = \operatorname{div}\left(\frac{k}{c} \operatorname{grad} h\right) + S_h. \qquad (1.7)$$

Если c постоянна, то зависимость h от T упрощается до

$$h = cT \qquad (1.8)$$

и уравнение энергии приннмает следующий вид:

$$\operatorname{div}(\rho u T) = \operatorname{div}\left(\frac{k}{c} \operatorname{grad} T\right) + \frac{S_h}{c}. \qquad (1.9)$$

Подобным образом можно выбирать в качестве зависимой переменной энтальпию или температуру.

Если считать скорость $u = 0$, то получим уравнение стационарной теплопроводности

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + S_h = 0. \qquad (1.10)$$

Уравиение количества движения. Для ньютоновской жидкости дифференциальное уравнение, выражающее сохранение количества движения в данном направлении, можно записать аналогичным образом. Однако это сделать несколько сложнее, так как надо рассматривать касательное и нормальное напряжения, а также из-за большей сложности закона вязкого трения Стокса по сравнению с законом Фика или законом Фурье. Пусть x-составляющая

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

скорости равна u, тогда соответствующее уравнение количества движения примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u u) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) - \frac{\partial p}{\partial x} + B_x + V_x, \qquad (1.11)$$

где μ — коэффициент вязкости; p — давление; B_x — x-составляющая объемной силы (приложенной к единице объема); V_x — дополнительные к $\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u)$ вязкие члены.

Усредненные по времени уравиения для турбулентиого течения. В практических приложениях течения обычно имеют турбулентный характер и интерес представляют, как правило, средние по времени характеристики таких течений. Поэтому с помощью операции усреднения уравнения для нестационарного ламинарного течения преобразуются в усредненные по времени уравнения для турбулентного течения. При этом предполагается, что имеют место быстрые случайные пульсации усредняемой величины около среднего значения. В результате операции усреднения возникают дополнительные члены — так называемые напряжения Рейнольдса, турбулентиый тепловой поток, турбулентный диффузиоиный поток и т. д. Задачей модели турбулентности является выражение этих потоков через средиие характеристики течения.

Во многих моделях турбулентности для выражения турбулентных напряжений и потоков используется концепция коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии. В результате усредненные по времени уравнения для турбулентного течения имеют тот же вид, что и уравнения для ламинарного течения, с той лишь разницей, что коэффициенты молекулярного обмена, такие, как коэффициенты вязкости, диффузии и теплопроводности, заменяются на *эффективные* (т. е. молекулярные плюс турбулентные) коэффициенты обмена. С вычислительной точки зрения турбулентное течение эквивалентно, в рамках такого подхода, ламинарному течению с довольно сложной зависимостью для коэффициента вязкости (это же справедливо и для течения неньютоиовской жидкости, которое можно рассматривать как течение среды с зависящим от градиента скорости коэффициентом вязкости).

Уравнеиие для киистической энергии турбулентности. В широко распространенной в настоящее время модели турбулентности, включающей два уравнения [33, 34], в качестве одного из уравнений входит уравнение для кинетической энергии k пульсационного движения, имеющее вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \operatorname{div}(\rho u k) = \operatorname{div}(\Gamma_k \operatorname{grad} k) + G - \rho\varepsilon, \qquad (1.12)$$

где Γ_k — коэффициент диффузии k; G — скорость генерации энергии турбулентности; ε — скорость диссипации. В целом величина $G - \rho\varepsilon$ — источниковый член уравнения. Аналогичное дифференциальное уравнение записывается для переменной ε.

Обобщениое дифференциальное уравиение. Краткое рассмотрение некоторых дифференциальных уравнений, описывающих тепло-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

обмен и гидродинамику, показывает, что интересующие нас зависимые переменные подчиняются обобщенному закону сохранения. Если обозначить зависимую переменную Ф, то обобщенное дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \operatorname{div}(\rho u\Phi) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\Phi) + S, \qquad (1.13)$$

где Γ — коэффициент диффузии; S — источниковый член. Конкретный вид Γ и S зависит от смысла переменной Ф (в действительности следовало бы использовать обозначения Γ_Φ и S_Φ, но это привело бы к слишком большому количеству нижних индексов в дальнейших выкладках).

В обобщенное дифференциальное уравнение входят четыре члена: нестационарный, конвективный, диффузионный и источниковый. Зависимая переменная Ф обозначает различные величины, такие, как массовая концентрация химической компоненты, энтальпия или температура, составляющая скорости, кинетическая энергия турбулентности или масштаб турбулентности. При этом коэффициенту диффузии Γ и источниковому члену S следует придать соответствующий каждой из этих переменных смысл.

Не все диффузионные потоки определяются градиентом соответствующей переменной. Однако запись диффузионного члена уравнения в виде $\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\Phi)$ не ограничивает применение обобщенного уравнения для Ф случаями, когда диффузионные процессы обусловлены соответствующими градиентами. Ту часть диффузионного члена уравнения, которую нельзя выразить в указанном виде, всегда можно записать как часть источникового члена; фактически коэффициент диффузии Γ можно даже считать равным нулю.

Явная запись диффузионного члена в обобщенном уравнении для Ф через ее градиент использовалась потому, что для большинства зависимых переменных диффузионный член имеет именно такой вид.

Входящая в (1.13) плотность может быть связана с такими переменными, как массовая концентрация и температура, через уравнение состояния. Эти переменные и составляющие скорости также подчиняются обобщенному дифференциальному уравнению. Кроме того, поле скорости должно удовлетворять дополнительному ограничению, а именно закону сохранения массы или уравнению неразрывности, имеющему вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \qquad (1.14)$$

Уравнения (1.13) и (1.14) записаны в векторном виде. Эти уравнения можно представить также в тензорной форме в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j\Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + S; \qquad (1.15)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \qquad (1.16)$$

где нижний индекс j в соответствии с тремя пространственными координатами принимает значения 1, 2, 3. Повторение этого индекса дважды обозначает суммирование трех аналогичных членов, например

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3); \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right). \qquad (1.18)$$

Одно из достоинств тензорной записи в декартовой системе координат заключается в том, что *одномерный* вид уравнения можно получить, если просто опустить индекс j. Процедура записи дифференциального уравнения в обобщенном виде (1.13) заключается в его преобразовании до тех пор, пока нестационарный, диффузионный и источниковый члены уравнения для данной зависимой переменной не примут стандартный вид. Тогда в качестве выражения для Г берут коэффициент перед grad Ф в диффузионном члене, а все оставшиеся члены в правой части обозначают S (источниковый член).

До сих пор мы рассматривали размерные переменные, однако иногда удобнее иметь дело с безразмериыми величиниами. При этом также можно считать, что каждое из дифференциальных уравнений, записанное через безразмерные переменные, можно представить в обобщенном виде (1.13), где Ф — безразмерная зависимая переменная, а Г и S — безразмерные коэффициент диффузии и источниковый член. Во многих случаях безразмерный коэффициент Г = 1, а S принимает значения 0 либо 1.

Тот факт, что все интересующие нас дифференциальные уравнения, описывающие тепло- и массообмен, гидродинамику и турбулеитиость, можно рассматривать как частные случаи обобщенного уравнения для Ф, позволяет ограничиться численным решением (1.13). Следовательно, при создании программы расчета достаточно записать общую последовательность операций для решения уравнения (1.13), которую можно применять для нахождения различных Ф при использовании соответствующих выражений для Г и S и, конечно, соответствующих начальных и граничных условий. Таким образом, концепция обобщенного уравнения позволяет сформулировать обобщенный численный метод и подготовить многоцелевые программы расчета.

1.2. ВЫБОР КООРДИНАТ

Выше рассматривались зависимые переменные. Обратимся теперь к независимым переменным и обсудим их свойства с вычислительной точки зрения.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Независимые перемеиные. В общем случае зависимая переменная Ф является функцией трех пространственных координат и времени:

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t), \qquad (1.19)$$

где x, y, z и t — независимые переменные. При численном решении необходимо *выбрать* пределы изменения независимых переменных, в которых надо рассчитать значения Ф.

Не всегда требуется рассматривать все четыре независимые переменные. С уменьшением числа рассматриваемых независимых переменных уменьшается количество точек, в которых необходимо рассчитать значения переменной Ф.

Задача, в которой физические величины зависят только от одной пространственной координаты, называется *одномерной*. Зависимость от двух пространственных координат приводит к *двухмерной* задаче, а от трех — к *трехмерной*. Если задача не включает в себя зависимость от времени, она называется *стационарной*. В противном случае она называется *нестационарной*.

Выбор таких независимых переменных, как в (1.19), не является единственно возможным. Вместо того чтобы описывать стационарное распределение температуры как $T(x, y, z)$, можно записать

$$z = z(T, x, y), \qquad (1.20)$$

где z — зависимая переменная, обозначающая высоту изотермической поверхности, соответствующую значению T в точке (x, y). Основаиный на таком представлении метод был разработаи в [19], а также в [13—15] и известен как метод смещения изотерм. Однако применение этого метода ограничено случаями, когда поле температуры монотонно зависит от координаты; в более общих случаях при заданных значениях T, x и y высота z может принимать несколько значений, что с точки зрения численного расчета делает выбор координаты z в качестве зависимой переменной неудовлетворительным.

Правильный выбор координат. Так как число узловых точек должно, вообще говоря, быть связано с числом независимых переменных, можно упростить задачу, используя меньшее количество независимых переменных. Иногда это достигается разумным выбором системы координат. Ниже на нескольких частных примерах будет показано влияние выбора ситемы координат на число независимых переменных.

1. Течение около движущегося с постоянной скоростью самолета нестационарно, если его рассматривать в стационарной системе координат, и стационарно относительно движущейся системы координат, связанной с самолетом.

2. Осесимметричное течение в круглой трубе является трехмерным в декартовой системе координат и двухмерным в цилиндри-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ческих координатах r, θ и z, так как

$$\Phi = \Phi(r, z), \tag{1.21}$$

и не зависит от θ.

3. Преобразование координат также позволяет уменьшить число независимых переменных. Рассмотрим примеры.

а) Двухмерный ламинарный пограничный слой на плоской пластине имеет автомодельный характер, при этом скорость u зависит только от переменной

$$\eta = cy/\sqrt{x}, \tag{1.22}$$

где c — размерная постоянная. Итак, двухмерная задача сводится к одномерной.

б) В нестационарной задаче теплопроводности в полубесконечном твердом теле независимыми являются переменные x и t. Однако можно показать (при некоторых простых граничных условиях), что температура зависит только от переменной

$$\xi = Cx/\sqrt{t}, \tag{1.23}$$

где C — соответствующая размерная постоянная.

4. Преобразование зависимой переменной также может привести к уменьшению числа независимых переменных. Приведем примеры.

а) При полностью развитом течении в канале температура T зависит от координаты x, направленной вдоль течения, и поперечной координаты y. Однако в области стабилизированного теплообмена при постоянной температуре стенки T_w имеем

$$\theta = \theta(y), \tag{1.24}$$

где

$$\theta = (T - T_w)/(T_b - T_w);$$

T_b — среднемассовая температура, которая меняется с изменением x.

б) Течение в плоской свободной струе является двухмерным. Однако можно записать, что

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\eta), \tag{1.25}$$

где

$$\tilde{u} = u/u_c; \quad \eta = y/\delta. \tag{1.26}$$

Здесь u_c — скорость на оси; y — координата, направленная поперек течения; δ — характерная ширина струи. Как u_c, так и δ изменяются с изменением продольной координаты x. Несмотря на то что в большинстве случаев в настоящей книге в качестве независимых переменных используются координаты x, y, z и t,

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

следует помнить, что все изложенное пригодно и при использовании других систем координат или преобразованных переменных. Правда, для эффективности расчетов численный метод должен всегда использоваться с подходящей системой координат.

Односторонние и двухсторонние координаты. Рассмотрим теперь новые соображения о свойствах координат, а затем установим связь между ними и стандартной математической терминологией.

Определения. *Двухсторонней* координатой называется координата, для которой условия протекания процессов с одной стороны от точки на координатной линии зависят от условий с другой стороны. В противоположном случае координата называется *односторонней.*

Примеры. Рассмотрим одномерную стационарную теплопроводность в стержне. На температуру в каждой точке стержня могут влиять изменения температуры на любом из концов стержня. Обычно пространственные координаты являются двухсторонними, время — всегда односторонняя координата. В течение нестационарного охлаждения твердого тела на значение температуры в данный момент времени может оказать влияние только то, что происходило перед этим моментом.

Односторонний характер пространственной координаты. Следует отметить, что пространственная координата под воздействием течения жидкости также может стать почти односторонней. Если имеет место сильное течение вдоль направления координаты, то любые изменения рассматриваемых полей перемещаются только из области выше по течению от данной точки в область ниже по течению и на условия протекания процессов в точке влияют, главным образом, условия выше по течению, а влияние условий ниже по течению совсем мало. Односторонний характер пространственной координаты является приближенным. Действительно, конвекция — односторонний процесс, а диффузия (которая всегда имеет место) — процесс двухсторонний. Однако при большой скорости течения конвекция подавляет диффузию и, таким образом, делает пространственную координату почти односторонней.

Термины параболический, эллиптический, гиперболический. Оказывается, что математические термины *параболический* и *эллиптический*, используемые для классификации дифференциальных уравнений, соответствуют нашим вычислительным концепциям односторонней и двухсторонней координат. Первый термин означает одностороннее поведение, второй — двухстороннее.

Имело бы больше смысла определять задачи как параболические или эллиптические по данной координате. Таким образом, нестационарная задача теплопроводности, которую обычно называют параболической, на самом деле параболична по времени и эллиптична по пространственным координатам. Стационарная задача теплопроводности эллиптична по всем координатам. Двухмерный пограничный слой параболичен по направленной вдоль течения координате и эллиптичен по поперечной координате.

Так как такие описания не являются общепринятыми, связь

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

с установившейся практикой описаний можно, по-видимому, устаиовить с помощью следующего правила.

Задача параболична, если существует, по крайней мере, одна односторонняя координата; в противном случае она эллиптична.

Течение с одной односторонней координатой иногда называют течением типа пограничного слоя, а течение со всеми двухсторонними координатами относят к рециркуляционным течениям [54, 25].

А что же можно сказать о гиперболичности? Получилось так, что гиперболическая задача ие соответствует вычислительиой классификации. Гиперболические задачи имеют в некотором роде одностороииее поведение, однако ие вдоль координатных направлений, а вдоль специальных линий, называемых характеристиками. Имеются численные методы, использующие наличие характеристик, но их применение ограничено гиперболическими задачами. Кроме того, числеиный метод, который будет развит в этой книге, ие основывается иа специальном характере гиперболических задач. Будем в дальнейшем считать гиперболические задачи элементами общего класса эллиптических задач (т. е. со всеми двухстороиними координатами).

Следствия. Из рассуждений, проведенных выше, следует, что если в даниой задаче можно указать одиостороннюю координату, то возможна зиачительиая экоиомия памяти ЭВМ и времени счета. Рассмотрим нестационарную двухмериую задачу теплопроводиости. Образуем двухмериый массив узловых точек в расчетной области. В любой момеит времени будет иметь место соответствующее двухмерное температурное поле. Это поле должно быть обработаио на ЭВМ во все последовательные моменты времени. Так как время является односторонней координатой, температуриое поле в даниый момент времеии ие зависит от будущих температурных полей. Действительно, полная иестационарная задача может быть сведена к повторениям одиого осиовного шага, а именно: задано температурное поле в момент времени t, вычисляется температурное поле в момеит времени $t+\Delta t$. Таким образом, машинная память потребуется только для этих двух температуриых полей; этот же объем памяти можно снова использовать при всех шагах по времени.

Начав с заданного начального температуриого поля, подобным образом можно продвинуться до последующих моментов времени. В течение любого шага по времеии одиовременио обрабатываемые иеизвестные образуют только один двухмерный массив [1] температур. Они не связаны со всеми зиачениями температур в будущие моменты времеии, а влияющие на них зиачения в предыдущие моменты известны. Таким образом, иеобходимо решать намного более простую систему уравиений, что значительно сокращает время счета.

Аналогично путем продвижения по направленной вдоль потока

[1] Здесь принято, что используется неявный метод расчета. Подробно этот вопрос обсуждается в гл. 3.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

координате рассчитывается двухмерный пограничный слой. При данных значениях зависимых переменных в одном поперечном сечении, расположенном выше по потоку от расчетной области находятся значения в последующих сечениях. Для расчета двухмерного течения требуется только одномерный массив памяти ЭВМ. Аналогичным образом параболичное в направлении потока трехмерное течение в канале можно рассматривать как последовательность двухмерных задач для следующих друг за другом поперечных сечений.

В этой книге мы только изредка будем рассматривать односторонние пространственные координаты. Однако всегда надо иметь в виду возможность значительной экономии памяти ЭВМ и времени счета при наличии такой координаты.

ЗАДАЧИ

1.1. Запишите нестационарное уравнение теплопроводности для случая постоянной удельной теплоемкости c. Покажите, что для приведения его к обобщенному виду (1.13) необходимо обозначить $\Phi=T$, $u=0$, $\Gamma=k/c$ и $S=S_h/c$.

1.2. Получите выражения для Φ, Γ и S для задачи 1.1 в случае, когда удельную теплоемкость нельзя считать постоянной (используйте в качестве зависимой переменной внутреннюю энергию i; обратите внимание, что $di=cdT$).

1.3. Покажите, что записанное в обобщенном виде уравнение типа (1.7) для нестационарного процесса соответствует $\Phi=h$, $\Gamma=k/c$ и $S=S_h+\partial p/\partial t$.

1.4. Получите выражения для члена V_x уравнения (1.11). Покажите, что $V_x=0$ при постоянных плотности и коэффициенте вязкости (используйте уравнение неразрывности).

1.5. Введите эффективное давление

$$P = p - \frac{1}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{u},$$

где p — термодинамическое давление. Если коэффициент вязкости постоянен, а плотность ρ переменна (и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$), покажите, что член V_x уравнения (1.11) можно объединить с градиентом давления следующим образом:

$$-\partial p/\partial x + V_x = -\partial P/dx.$$

1.6. Если не считать уравнение неразрывности (1.14) частным случаем обобщенного уравнения (1.13), какими были бы выражения для Φ, Γ и S?

1.7. Рассмотрим смесь различных компонент. Определим энтальпию смеси как $h=\Sigma m_l h_l$, где m_l — массовая концентрация компоненты l, а h_l — ее удельная энтальпия, для которой справедливо

$$h_l = h_l^0 + \int_0^T c_l \, dT.$$

Здесь h^0_l — постоянная величина; c_l — удельная теплоемкость компоненты l при постоянном давлении. Запишите стационарное уравнение сохранения энтальпии и покажите, что для него $\Phi=h$, $\Gamma=k/c$ и $S=S_h+\operatorname{div}\Sigma[(\Gamma_l-k/c)h_l \operatorname{grad} m_l]$, где c — удельная теплоемкость смеси, равная $\Sigma m_l c_l$.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Глава 2

МЕТОДЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

2.1. СУЩНОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Выше было показано, что теоретическое исследование физических явлений имеет значительные преимущества перед экспериментальным. Рассматриваемые в этой книге процессы описываются дифференциальными уравнениями, которые были представлены в виде обобщенного уравнения для переменной Ф. Теперь наша основная задача заключается в разработке способов решения этого уравнения.

Для простоты в этой главе предположено, что переменная Ф является функцией только одной независимой переменной x. Однако разработанные здесь идеи будут применимы также в случае зависимости более чем от одной независимой переменной.

Задача. Численное решение дифференциального уравнения состоит из набора чисел, по которому можно построить распределение зависимой переменной Ф. В этом смысле численный метод подобен лабораторному эксперименту, где мы имеем возможность определить распределение измеряемой величины в рассматриваемой области по набору показаний приборов. И исследователи, применяющие численный анализ, и экспериментаторы должны довольствоваться результатом, состоящим из конечного числа значений, хотя их количество можно, по крайней мере, в принципе сделать достаточным для практических целей.

Предположим, что мы хотим описать изменение Ф с помощью полинома

$$\Phi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \qquad (2.1)$$

и используем для определения значений конечного числа коэффициентов a_0, a_1, a_2, ..., a_m численный метод. Это позволит рассчитать значения Ф в любой точке x путем подстановки значения x и значений a_i в (2.1). Однако если конечная цель заключается в определении значений Ф в различных точках, эта процедура несколько неудобна. Сами по себе значения коэффициентов a_i не представляют особого интереса, а для получения требуемых значений Ф необходимо выполнить операцию подстановки. Данное рассуждение наводит на следующую мысль: почему бы не разработать метод, в котором в качестве первичных неизвестных использовались значения Ф в некоторых заданных точках? Действительно, большинство методов численного решения дифференциальных уравнений принадлежит как раз к этой категории, и поэтому ограничимся только такими методами.

Итак, в качестве основных неизвестных в численном методе рассматриваются значения зависимой переменной в конечном числе точек (называемых сеточными узлами или узловыми точками) расчетной области. Метод включает в себя получение системы

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

алгебраических уравнений для этих неизвестных и алгоритм решения этих уравнений.

Концепция дискретизации. Рассматривая значения в узловых точках, мы заменили непрерывную информацию, содержащуюся в точном решении дифференциального уравнения, дискретными значениями. Таким образом, мы дискретизировали распределение Ф, и этот класс численных методов назовем *методами дискретизации.*

Алгебраические уравнения, которые назовем *дискретным аналогом* исходного уравнения, включающие неизвестные значения Ф в выбраиных узловых точках, получаются из дифференциального уравнения, описывающего измеиение величины Ф. При получении этих уравнений надо использовать иекоторое предположение о характере изменения Ф в интервале между узловыми точками. Хотя можно выбрать этот профиль Ф так, что достаточно одного алгебраического выражения для всей расчетной области, часто бывает более удобным использовать кусочные профнли, такие, что данный участок профиля описывает изменение Ф только в небольшой части этой области через значения Ф в узловых точках, находящихся внутри и вокруг этой части. Итак, расчетная область разбивается иа некоторое число подобластей, с каждой из которых можно связать свой предполагаемый профиль. Это другой аспект концепции дискретизации связан с дикретизацией иепрерывной расчетной области. Именно эта систематическая дискретизация пространства и зависимых переменных делает возможным замену дифференциальиых уравнений, описывающих процесс, простыми алгебраическими уравнениями, которые могут быть решеиы относительно просто.

Структура дискретного аналога исходного уравнения. Дискретный аналог представляет собой алгебраическое уравнение, связывающее значение Ф в некоторой группе узловых точек. Это уравнение получается из дифференциального уравиения, описывающего изменеиие Ф, и, следовательно, оно иесет ту же физическую информацию, что и дифференциальное уравнение. То, что в дискретный аналог входят значения только в нескольких узловых точках, является следствием кусочного характера выбранных профилей. При этом значение Ф в некоторой узловой точке оказывает влияние только на распределение Ф в ее ближайшей окрестности. Предполагается, что при очень большом числе узловых точек решение дискретных уравнений сближается с точным решением соответствующего дифференциального уравнеиия. Это следует из следующего соображения: при сближеиии узловых точек изменеиие Ф между соседними точками становится малым, а тогда конкретиый характер предполагаемого профиля становится несущественным.

Возможные дискретные аналоги данного дифференциального уравнения неединственны, хотя предполагается, что в пределе очень большого числа узловых точек все типы дискретных аналогов дают одно и то же решение. Отличие дискретных аналогов

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

является следствие различных предположений о характере профиля зависимой переменной и способов получения аналога.

До сих пор мы преднамеренно избегали упоминания конечно-разностного или конечно-элементного методов. Сейчас можно сказать, что данные методы можно рассматривать как две альтернативные версии метода дискретизации, описанного здесь в общем виде. Различие между ними вызвано способами выбора профилей и вывода дискретных аналогов уравнения. Находящийся, главным образом, в центре внимания данной книги метод имеет характер конечно-разностного метода, однако он содержит множество идей, характерных для конечно-элементного метода. Назвав настоящий метод конечно-разностным, можно было бы склонить читателя к широко распространенной практике использования конечно-разностных методов. Поэтому назовем его просто методом дискретизации. В гл. 7 покажем, как из общих принципов, изложенных в этой книге, можно сконструировать метод, имеющий вид метода конечных элементов.

2.2. МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ

Дискретизацию данного дифференциального уравнения можно осуществить множеством способов. Опишем в общих чертах несколько распространенных методов и покажем, что один из них предпочтительней всех остальных.

Использование рядов Тэйлора. Обычная процедура получения конечно-разностных уравнений заключается в аппроксимации производных в дифференциальном уравнении обрезанными рядами Тэйлора. Рассмотрим узловые точки, показанные на рис. 2.1. Раз-

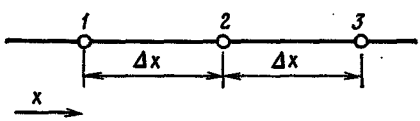


Рис. 2.1. Три последовательные узловые точки, используемые при разложении в ряд Тэйлора

ложение в ряд Тэйлора около узловой точки *2*, расположенной посередине между точками *1* и *3* (так что $\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$), дает

$$\Phi_1 = \Phi_2 - \Delta x \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_2 - \ldots; \qquad (2.2)$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \Delta x \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_2 + \ldots. \qquad (2.3)$$

Отбрасывая члены обоих рядов, начиная с четвертого, вычитая и складывая уравнения, получаем

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_2 = \frac{\Phi_3 - \Phi_1}{2\Delta x} \qquad (2.4)$$

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_2}{(\Delta x)^2}. \qquad (2.5)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, можно получить конечно-разностное уравнение.

В данном методе предполагается, что изменение Ф в зависимости от x близко к полиномиальному, так что высшими производными можно пренебречь. Однако это предположение приводит к нежелательным последствиям, например, для случая экспоненциального изменения Ф (вернемся к этому вопросу в гл. 4). Вывод с помощью рядов Тэйлора сравнительно прост, но менее гибок и не способствует пониманию физического смысла членов уравнения [1].

Вариационный метод. Другой метод получения дискретных аналогов основывается на вариационном исчислении. Для полного понимания метода необходимо знать основы вариационного исчисления. Однако для наших целей достаточно иметь общее представление об основных моментах метода.

В вариационном исчислении показано, что решение данных дифференциальных уравнений эквивалентно минимизации соответствующей величины — функционала. Эта эквивалентность называется *вариационным принципом.* Искомый дискретный аналог получается из условий минимума функционала относительно значений зависимой переменной в узловых точках. Вариационный метод очень часто используется в конечно-элементных методах исследования напряжений, где его можно связать с принципом виртуальных перемещений. Кроме математической сложности и трудности понимания основным недостатком метода является его ограниченная применимость, связанная с тем, что вариационный принцип существует не для всех представляющих интерес дифференциальных уравнеиий.

Метод взвешенных невязок. Эффективным методом решения дифференциальных уравнений является подробно описанный в [21] метод взвешенных невязок. Основной подход прост и интересен. Представим дифференциальное уравнение в виде

$$L(\Phi) = 0. \tag{2.6}$$

Предположим, что приближенное решение $\overline{\Phi}$ имеет, например, вид

$$\overline{\Phi} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m, \tag{2.7}$$

где a_i — неизвестные параметры. Подставим $\overline{\Phi}$ в дифференциальное уравнение (2.6) и выделим невязку R, которая равна:

$$R = L(\overline{\Phi}). \tag{2.8}$$

Мы хотим сделать этот остаток в известном смысле малым. Предположим, что

$$\int W R dx = 0, \tag{2.9}$$

---

[1] Заметим, что это мнение полностью субъективно. Читатель, обладающий соответствующей математической подготовкой, может прийти к заключению, что метод рядов Тэйлора весьма нагляден и осмыслен.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где W — весовая функция, а интеграл берется по рассматриваемой области. Выбирая последовательность весовых функций, можно получить количество уравнений, достаточное для нахождения параметров. Решив полученную систему алгебраических уравнений для неизвестных параметров, найдем приближенное решение дифференциального уравнения. Выбирая различные классы весовых функций, можно получить различные версии метода (имеющие свои названия).

Данный метод широко использовался для решения уравнений пограничного слоя, пока его почти не вытеснил метод конечных разностей. Однако можно установить его связь с конечно-разностным методом, или, точнее, с методом дискретизации, если рассматривать приближенное решение $\overline{\Phi}$ ие в виде единственной для всей области алгебраической функции, а как кусочный профиль с неизвестными параметрами, представляющими собой значения Ф в узловых точках. Действительно, большая часть недавних разработок метода конечных элементов также основана на применении кусочных профилей в сочетании с разновидностью метода взвешенных невязок, известной как метод Галеркина.

Простейшей весовой функцией является $W=1$. С помощью такой функции можно в рамках данного метода построить систему уравнений, разбивая расчетную область на подобласти или контрольные объема и выбирая в качестве весовых функцин, одновременно равные единице в одной из подобластей и нулю во всех остальных. Этот вариант метода взвешенных невязок называется методом *подобласти* или методом *контрольного объема.* В нем полагается, что интеграл от невязки по каждому контрольному объему должен быть равен нулю. Так как в этой книге используется метод контрольного объема, то необходимо рассмотреть его более подробно.

Метод контрольного объема. Часто в элементарных учебниках по теплообмену приводят вывод конечно-разностного уравнения с помощью метода рядов Тэйлора, а затем показывают, что результирующее уравнение соответствует условию теплового баланса в небольшой области, содержащей узловую точку. Мы также видели, что метод контрольного объема можно рассматривать как частный случай метода взвешенных невязок. Основная идея метода контрольного объема легко понятна и поддается прямой физической интерпретации. Расчетную область разбивают на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение Ф между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения Ф в нескольких узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает закон сохранения Ф для конечного контрольного объема точно

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

Результат решения дискретных уравнений относительно значений в узловых точках можно рассматривать двояко. В методе конечных элементов и большинстве методов взвешенных невязок в качестве приближенного решения берется предполагаемое изменение Ф, состоящее из значений в узловых точках и интерполяционных функций (или профилей) между узловыми точками. Напротив, в конечно-разностном методе в качестве решения рассматриваются только значения Ф в узловых точках и не делается никаких явных указаний о характере изменения Ф между этими точками. Эта ситуация напоминает лабораторный эксперимент, в котором распределение величины дается в виде измеренных значений в некоторых дискретных точках и не определяется ее изменение в промежутках между этими точками. Мы также используем этот подход в методе контрольного объема и будем искать решение в виде значений только в узловых точках. Интерполяционные формулы или профили будем рассматривать как вспомогательные, необходимые для расчета интегралов. После получения дискретных аналогов предположения о характере профилей можно не учитывать. Такая точка зрения дает полную свободу использования различных профилей для интегрирования разных членов дифференциального уравнения.

Для большей ясности применим метод контрольного объема к простой задаче.

Рассмотрим стационарную одномерную задачу теплопроводности, описываемую уравнением

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0, \qquad (2.10)$$

где k — коэффициент теплопроводности; T — температура; S — скорость выделения теплоты в единице объема.

Подготовка. Для получения дискретного аналога будет использовано показанное на рис. 2.2 расположение узловых точек. В центре нашего внимания оказывается точка P, окруженная точками E и W (E — восточная сторона, т. е. направление вдоль оси x; W — западная сторона, т. е. направление, обратное

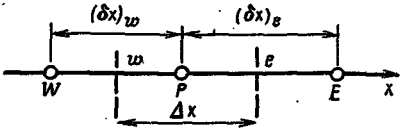


Рис 2.2. Шаблон узловых точек для одномерной задачи

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

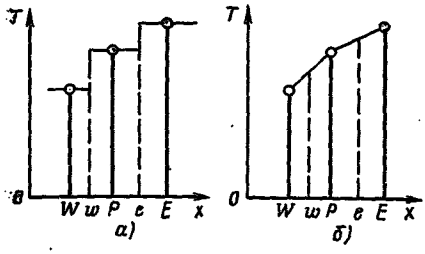


Рис. 2.3. Простые аппроксимации профилей:
а — ступенчатый профиль; *б* — кусочно-линейный профиль

иаправлению оси x). Штрихом показаны граннцы контрольиого объема; сейчас иас ие интересует их точиое расположеиие. Эти граиицы обозначены буквами e и w. Для рассматриваемой одномериой задачн предположим, что размеры контрольного объема в направлениях y и z равны единице. Таким образом, объем показанного контрольного объема равеи $\Delta x \times 1 \times 1$. Иитегрируя (2.10) по контрольному объему, получаем

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k\frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S\,dx = 0. \tag{2.11}$$

Предположение о виде профиля. Сделаем теперь предположеиие о виде профиля илн интерполяцноиной формулы. На рис. 2.3 показаиы два простых профнля. В простейшем случае предполагается, что зиачеиие T в узловой точке сохраняется для всего окружающего ее коитрольиого объема. Это предположение приводит к показаиному на рис. 2.3,*а* ступенчатому профилю. Для такого профили производиая dT/dx на границах контрольиого объема (т. е. в точках w или e) не определена. Эта трудиость не возникает для кусочио-лииейного профили (рис. 2.3,б), у которого измеиеиие T между узловыми точками описывается линейиыми интерполяциоииыми фуикциями.

Дискретный аналог. Использовав для определения dT/dx в уравиенни (2.11) кусочно-линейный профиль, получим

$$\frac{k_e(T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_P - T_W)}{(\delta x)_w} + \bar{S}\Delta x = 0, \tag{2.12}$$

тде $\bar{S}$ — среднее по коитрольиому объему значение S. Полезно записать уравиеиие (2.12) в следующем виде:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{2.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= k_e/(\delta x)_e; \qquad a_W = k_w/(\delta x)_w; \\ a_P &= a_E + a_W; \qquad b = \bar{S}\Delta x. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Необходимо сделать следующие примечаиия:

1. Уравиение (2.13) записано в стандартиом виде, в котором мы будем представлять дискретные аналогн. В левой частн этого уравиения находитси температура T_P в центральной узловой точке, а в правой — температуры в соседних точках и постоянная b. Как будет показаио ниже, в двух- и трехмерном случаях число соседних точек возрастет. В общем случае удобно представнть уравнение (2.13) в виде

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b, \tag{2.15}$$

где индекс nb обозиачает соседние точки и суммирование производится по всем соседним точкам.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

2. При выводе уравиеиия (2.13) использовалось простейшее приближеиие для профиля, позволившее рассчитать dT/dx. Коиечно, возможно прнмеиение множества других интерполяциоиных функций.

3. Важно также нонимать, что для различиых величин можио использовать разные профили. Например, для вычисления $\overline{S}$ иеобязательно предполагать линейный характер измеиеиия S между узловыми точками, так же как иеобязательиио рассчитывать k_e по его линейному изменению от k_P до k_E.

4. Нет иеобходимости использовать одинаковые профнли для всех члеиов одного уравиения. Например, если бы в уравнеиие (2.10) входил дополиительный члеи, включающий T, можно было бы прнмеиить для его аппроксимации ступенчатый профиль вместо кусочиолинейного профиля, использованиого для определения dT/dx.

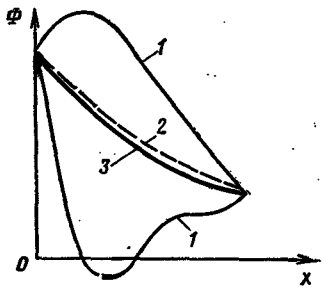


Рис. 2.4. Физически неправдоподобные (*1*), правдоподобное (*2*) и точиое (*3*) решеиия

Основные принципы выбора интерполяционных функций и профилей. Указаиная выше свобода выбора интерполяциоиных функций н профилей ведет к существованию миожества способов получеиия дискретных аналогов уравиения. Предполагается, что при увеличении числа узловых точек решеиия всех дискретных аналогов исходиого уравнения совпадают. Одиако иаложим дополнительиое требоваиие, которое приведет к сужению числа подходящих формул. Потребуем, чтобы решение, полученное даже иа грубой сетке, во-первых, всегда имело физически правдоподобный характер и, во-вторых, сохраияло полный баланс.

Понять, иасколько физично получеиное решение, легко, по крайней мере, в простых случаях (рис. 2.4). Правдоподобное решеиие должно иметь такой же качествеиный характер, что и точное решение. В задаче теплопроводности без источников иикакой профиль температуры не может выходить за пределы температур граииц тела. При охлаждении нагретого твердого тела окружающей его жндкостью температура тела не может стать ниже температуры жидкости. Мы будем всегда применять такие тесты к полученным дискретным аналогам уравнений.

Условие полного баланса предполагает интегральное сохранение рассматриваемой велнчнны во всей расчетной области. Мы будет утверждать, что тепловые потоки, массовые расходы и потоки количества движения должны правильно отражать балаис с соответствующими источниками и стоками, причем для любого числа узловых точек, а не только в пределе при очень большом числе точек.

Такую возможность сохраиеиия полного баланса дает метод контрольиого объема, но при этом необходимо обеспечить, как вскоре увидим, правильный расчет потоков на границах контрольиого объема.

Принятые требоваиия физического правдоподобия и сохраиения полного баланса будут использоваться для выбора аппроксимаций профиля и соответствующего аиализа. На основаиии этих ограиичений будут получены иекоторые осиовные правила, которые позволят сравинть нмеющиеся формулнровкн и разработать новые. С их помощью некоторые решения, определяемые обычно математически, могут быть получеиы из физических соображений.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Аппроксимация источникового члена. Прежде чем перейти к определению основных правил, рассмотрим источниковый член S уравнения (2.10). Часто источниковый член является функцией самой зависимой переменной T, и тогда желательно учесть эту зависимость при построении дискретного аналога. Однако формально можем учитывать только линейную зависимость, так как решение дискретных уравнений будет осуществляться, как увидим позже, с помощью методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Способ линеаризации зависимости S от T обсуждается в следующей главе. Здесь нам достаточно записать среднее значение $\overline{S}$ в виде

$$\overline{S} = S_C + S_P T_P, \tag{2.16}$$

где S_C представляет собой постоянную составляющую S, а S_P — коэффициент (очевидно, что S_P не есть значение S в точке P).

Наличие T_P в (2.16) отражает тот факт, что при записи среднего значения $\overline{S}$ мы предполагали, что значение T_P распространяется на весь контрольный объем, другими словами, использовался показанный на рис. 3.3,*а* ступенчатый профиль (следует заметить, что можно использовать ступенчатый профиль для S и кусочно-линейный для члена dT/dx).

Дискретный аналог уравнения теплопроводности с линеаризованным источниковым членом будет иметь такой же вид, как и (2.13), но с другими выражениями для коэффициентов:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{2.17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_E = k_e/(\delta x)_e; \quad a_W = k_w/(\delta x)_w; \\ &a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x; \quad b = S_C \Delta x. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Теперь можно сформулировать основные правила, которым должны подчиняться дискретные аналоги уравнений для обеспечения физичности решения и сохранения полного баланса. Эти кажущиеся простыми правила имеют глубокий смысл, и мы на протяжении всей книги будем руководствоваться ими при разработке методов.

2.3. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ

Правило 1. Соответствие потоков на границах контрольного объема. Выражение потока через границу, общую для двух прилегающих контрольных объемов, при записи дискретных аналогов уравнения для этих объемов должно быть одним и тем же.

Обсуждение. Очевидно, что тепловой поток, покидающий один контрольный объем через его границу, должен быть равен потоку, входящему через эту границу в соседний контрольный объем. В противном случае не будет сохраняться полный баланс теплоты. Хотя это требование и легко понять, надо следить, чтобы не было даже небольших его нарушений. Для изображенного на рис. 2.2 контрольного объема можно было рассчитать тепловые потоки $k dT/dx$ на границе по квадратичному профилю, проходящему через T_W, T_P и $_E T$. При использовании аппроксимации такого же типа для следующего контрольного объема градиент dT/dx на общей

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

границе окажется рассчитанным по различным профилям в зависимости от того, какой из контрольных объемов рассматривается. Получающееся несоответствие[1] dT/dx (и, следовательно, теплового потока) показано на рис. 2.5.

К несоответствию потоков может привести также предположение о том, что все потоки на границах данного контрольного объема описываются с помощью значения коэффициента теплопроводности в центральной точке k_P. Тогда тепловой поток на границе e (показанной на рис. 2.2) будет выражен через $\kappa_P(T_P - T_E)/(\delta x)_e$ для окружающего точку P контрольного объема и через $k_E(T_P - T_E)/(\delta x)_e$ при записи разностного аналога для контрольного объема с точкой E в центре. Чтобы избежать таких несоответствий, полезно помнить, что поток на границе рассматривается сам по себе, а не как принадлежащий определенному контрольному объему.

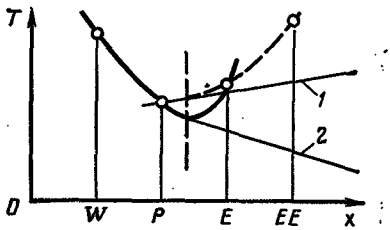


Рис. 2.5. Несоответствие потоков, вызванное использованием квадратичного профиля:
1 — касательная к правому профилю; *2* — касательная к левому профилю

Правило 2. Положительность коэффициентов. В большинстве из интересующих нас задач влияние значений зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено процессами конвекции и диффузии. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно, при прочих равных условиях, привести к увеличению (а не уменьшению) значения в соседней узловой точке. Тогда, как видно из уравнения (2.13), из увеличения T_P при увеличении T_E следует, что коэффициенты a_E и a_P должны иметь одинаковый знак. Другими словами, в общем случае, описываемом уравнением (2.15), знаки коэффициентов перед значениями зависимой переменной в соседних точках a_{nb} и коэффициента перед ее значением в центральной точке a_P должны быть одинаковыми. Можно, конечно, выбрать их так, чтобы они все были положительными или отрицательными. Договоримся записывать разностный аналог с положительными коэффициентами. Тогда правило 2 можно сформулировать следующим образом: все коэффициенты (a_P и a_{nb}) всегда должны быть положительными.

Комментарии. Из определения коэффициентов (2.14) видно, что иллюстрация дискретизации уравнения теплопроводности [см.

---

[1] Для границ, расположенных посередине между узловыми точками, показанный на рис. 2.5 тип квадратичного профиля не приводит к какому-либо несоответствию. Это вызвано тем, что угол наклона касательной к параболе в точке, лежащей посередине между двумя узловыми, в точности равен углу наклона прямой линии, соединяющей значения зависимой переменной в этих точках. Однако это свойство параболы следует рассматривать как случайное, и в общем случае следует избегать измерения выражений на границах между узлами при переходе от одного контрольного объема к другому.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

(2.13)] действительно удовлетворяет правилу положительности коэффициентов. Однако, как будет показано позднее, имеются многочисленные аппроксимации, в которых данное правило часто нарушается. Обычно следствием этого является физически неправдоподобное решение. Наличие отрицательного «соседнего» коэффициента может привести к ситуации, в которой увеличение температуры на границе вызывает уменьшение температуры в ближайшей узловой точке. Нас будут устраивать только те аппроксимации, которые при всех обстоятельствах гарантируют положительность коэффициентов.

Правило 3. Отрицательность коэффициента при линеаризации источникового члена. Из определений коэффициентов (2.18) видно, что коэффициент a_P может стать отрицательным за счет S_P. Этого можно полностью избежать, потребовав, чтобы S_P не был положительным. Сформулируем теперь правило 3 в следующем виде: при линеаризации источникового члена в виде $\bar{S}=S_C+S_PT_P$ коэффициент S_P всегда должен быть отрицателен или равен нулю.

Замечания. Правило 3 не настолько произвольно, как оно звучит. На самом деле для большинства физических процессов угол наклона касательной к кривой, описывающей источниковый член как функцию зависимой переменной, отрицателен. Действительно, если бы S_P был положительным, физический процесс мог бы стать неустойчивым. Положительность S_P свидетельствует о росте источникового члена при увеличении T_P, а это, в свою очередь, может привести, если нет эффективного механизма отвода теплоты, к возрастанию T_P и т. д. С вычислительной точки зрения во избежание неустойчивостей и физически нереальных решений целесообразно сохранять S_P отрицательным. Дальнейшее обсуждение линеаризации источникового члена проведено в следующей главе. Следует отметить, что принцип отрицательности S_P существен для счета.

Правило 4. Сумма соседних коэффициентов. Часто в рассматриваемое уравнение входят только производные зависимой переменной. При этом функции T и $T+c$ (T — зависимая переменная данного уравнения, c — произвольная постоянная) удовлетворяют дифференциальному уравнению. Это свойство дифференциального уравнения также должно отразиться в его дискретном аналоге. Следовательно, уравнение (2.15) должно быть удовлетворено и в случае, если T_P и все T_{nb} увеличить на постоянную. Из этого требования следует равенство a_P сумме соседних коэффициентов. Таким образом, правило 4 можно сформулировать в виде: для случаев, когда дифференциальное уравнение удовлетворяется также при добавлении к зависимой переменной постоянной величины, необходимо, чтобы

$$a_P=\sum a_{nb}. \qquad (2.19)$$

Обсуждение. Легко видеть, что уравнение (2.13) действительно удовлетворяет этому правилу. Оно означает, что значение в средней точке T_P является средневзвешенным значений в соседних точ-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

как T_{nb}. В отличие от коэффициентов в (2.13) коэффициенты уравнения (2.17) не подчиняются данному правилу. Однако для этого случая правило неприменимо. Если источниковый член зависит от T, то сумма $T+c$ не удовлетворяет дифференциальному уравнению. Однако даже в этих случаях правило 4 не следует забывать, так как его можно применять при рассмотрении частного случая уравнения. Если, например, положить в (2.17) $S_P=0$, правило можно применить и оно действительно выполняется.

Если дифференциальному уравнению удовлетворяют как T, так и $T+c$, искомое температурное поле не становится неоднозначным или неопределенным. Значения T можно сделать определенными с помощью соответствующих граничных условий. Выполнение правила 4 гарантирует, что, например, при увеличении температуры границы на постоянное значение все температуры увеличатся точно на это же значение.

Можно взглянуть на правило 4 с другой стороны: при отсутствии источника и равенстве температур в соседних точках температура в центре T_P должна иметь такое же значение. В этих условиях только плохая аппроксимация не дает $T_P=T_{nb}$.

2.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей главе были сделаны некоторые основополагающие выводы о характере развиваемого в данной книге метода дискретизации. На простом примере сформулированы четыре основных правила, определяющих основные принципы, которые лежат в основе дальнейшего анализа. Для удобства в качестве зависимой переменной использовалась температура T. Ниже в гл. 3 также будет использоваться переменная T, а затем, начиная с гл. 4, мы перейдем к обобщенной переменной Ф. Конечно, все правила этой главы применимы и для переменной Ф.

Конвективный член в обобщенном дифференциальном уравнении (1.13) требует специального рассмотрения. Этот вопрос проанализирован в гл. 4. Остальные три члена уравнения (1.13) рассмотрены в гл. 3 на примере задачи теплопроводности.

ЗАДАЧИ

2.1. Путем разложения в ряд Тэйлора около точки P (см. рис. 2.2) покажите, что конечно-разностная аппроксимация второй производной d^2T/dx^2 имеет вид

$$\frac{d^2T}{dx^2}=\frac{2}{(\delta x)_e+(\delta x)_w}\left[\frac{T_E-T_P}{(\delta x)_e}-\frac{T_P-T_W}{(\delta x)_w}\right].$$

2.2. С помощью метода взвешенных невязок получите дискретный аналог уравнения (2.10). Используйте следующий ход построения, предполагая для простоты постоянство k и S. Пусть весовая функция $W=0$ везде, кроме интервала между точками W и E (см. рис. 2.2). Предположим, что весовая функция кусочно-линейна и равна единице в точке P и нулю в точках W и E. Умножим уравнение (2.10) на весовую функцию и проинтегрируем на интервале от W до E. Используем кусочно-линейный профиль для T. Сравним полученный

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

дискретный аналог с уравнением (2.12) (заметим, что описанный здесь метод, являющийся частным случаем метода взвешенных невязок, известен как метод Галеркина).

2.3. Рассмотрите уравнение (2.10), предположив, что S постоянна, а k зависит от x. Возьмите сетку с постоянным шагом $\Delta x = (\delta x)_e = (\delta x)_w$. Получите дискретный аналог уравнения (2.10), записав его в виде

$$k\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{dk}{dx}\frac{dT}{dx} + S = 0$$

и использовав аппроксимации

$$k\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{k_P(T_E + T_W - 2T_P)}{(\Delta x)^2};$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_E - T_W}{2\Delta x},$$

где dk/dx — заданная величина. Заметив, что dk/dx может быть положительной или отрицательной, определите условия, при которых коэффициент a_E или a_W будет отрицательным, т. е. нарушается правило 2 (следует отметить, что приведенная в § 2.2 аппроксимация, основанная на физическом смысле членов, не приводила к отрицательным коэффициентам).

2.4. Для осесимметричного случая уравнение стационарной одномерной теплопроводности имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right) + S = 0$$

где r — радиальная координата. Получите с помощью описанного в § 2.2 способа дискретный аналог этого уравнения (умножьте дифференциальное уравнение на r и проинтегрируйте по r от r_w до r_e). Дайте физическую интерпретацию коэффициентов полученного уравнения [заметим, что можно было бы использовать описанный в задаче 2.3 подход и записать дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{d}{dr}\left(k\frac{dT}{dr}\right) + \frac{k}{r}\frac{dT}{r} + S = 0,$$

однако такой подход, как показано в задаче 2.3, нежелателен].

Глава 3

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

3.1. ЦЕЛИ ГЛАВЫ

Здесь мы начнем рассматривать задачу построения численных методов для решения общего дифференциального уравнения (1.13), которое определяет интересующие нас физические процессы. Как мы видели, уравнение содержит четыре основных члена. В этой главе опустим конвективный член и рассмотрим три остав-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

шйхся члена. В гл. 4 будет рассмотрена аппрокснмацня конвективного члена.

Отбрасыванне конвектнвного члена в уравненин (1.13) приводит к задаче теплопроводностн, на прнмере которой очень удобно рассмотреть поставленную нами общую задачу, так как фнзическне процессы, пронсходящне здесь, понятны н с математнческой точки зренння не сложны.

Целн этой главы выходят, однако, за пределы построения чнсленных методов только для задач теплопроводностн. Во-первых, ряд другнх физнческнх процессов определяется аналогнчными уравненнямн. Средн нних потенцнальное течение, днффузнонный перенос массы, теченне через порнстую среду н некоторые полностью развнтые течення в каналах. Чнсленные методы, опнсываемые в этой главе, непосредственно прнменнмы ко всем этнм процессам.

Теорня электромагнятного поля, диффузнонные модели переноса теплоты нзлученнем н течения смазки — дополнятельные прнмеры явлений, которые определяются уравненнями тнпа теплопроводностн. Хотя мы будем только эпнзоднческн ссылаться на этн родственные процессы, важно помнять, что методы, разработанные в этой главе, непосредственно прнгодны для прнменения в этих разных областях.

Во-вторых, метод решення алгебранческнх уравненнй будет рассмотрен только в этой главе, однако он прнменнм к алгебраическнм уравненням, встречающимся в последующих главах. Такнм образом, даже для чнтателя, который интересуется только расчетом теченнй жндкостн, поннмание этой главы необходнмо; большая часть нзложенного здесь (и в последующей главе) матернала представляет собой существенную часть расчетной схемы задачи о теченнн жидкостн, которая будет нзложена в гл. 5.

Умение внднть подобне между переносом колнчества двнженння и теплоты н рассматривать, в некотором отношении, скорость как аналог температуры помогает получнть общую схему построения решения. Использованне методов решення задачн теплопроводности как составной части расчета течення жндкостн подтверждает сказанное.

3.2. СТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Основные уравнения. По мере опнсання в § 2.3 иллюстративного прнмера, который был использован для объяснення четырех основных правнл, мы уже получнлн днскретный аналог для стационарной одномерной задачн теплопроводностн. С учетом основных составляющнх днфференцнальное уравненне нмеет внд

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0. \tag{3.1}$$

Это приведет к дискретиому аналогу

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{3.2}$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= k_e/(\delta x)_e; \quad a_W = k_w/(\delta x)_w; \\ a_P &= a_E + a_W - S_P\Delta x; \quad b = S_C\Delta x. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Узловые точки P, E и W изображены на рис. 2.2, где показаны также и другие размеры сетки. Грани контрольных объемов e и w расположены между узловой точкой P и соответствующими ей соседними. Места расположения этих граней можно считать произвольными. Возможно большое число вариантов их расположения, некоторые из них будут обсуждены ниже. Пока мы просто рассматриваем расположение e и w относительно точек P, E и W как известное. Величины S_C и S_P являются результатом линеаризации источникового члена в виде

$$S = S_C + S_P T_P. \tag{3.4}$$

Что касается допущений о профилях, градиент dT/dx оценивался, исходя из кусочно-линейного изменения T в зависимости от x, хотя для линеаризации источникового члена значение T_P было распространено на весь контрольный объем. Необходимо, конечно, помнить, что возможен и допустим другой выбор профилей, соответствующих четырем основным правилам.

Ниже рассмотрены достаточно простые профили, удовлетворяющие этим правилам, а их усложнения введены только там, где это необходимо.

Много важных аспектов одномерной задачи теплопроводности еще требуют обсуждения. Обратимся к их рассмотрению.

Сетка. Для узловых точек, показанных на рис. 2.2, нет необходимости, чтобы отрезки $(\delta x)_e$ и $(\delta x)_w$ были равны. Действительно, использование неравномерной сетки часто желательно, так как позволяет эффективно загружать вычислительную машину. Точные решения будут получаться только в случае достаточно мелкой сетки. Однако нет необходимости применять сетку с малым шагом в областях, где зависимая переменная T изменяется достаточно медленно с изменением x, а мелкая сетка необходима там, где зависимость T от x является крутой.

Распространенным является мнение, что неравномерные сетки приводят к потере точности по сравнению с равномерными. Для такого утверждения нет достаточных оснований. Сетка должна быть непосредственно связана с характером изменения зависимой переменной в расчетной области. Кроме того, нет общих правил, согласно которым максимальное (или минимальное) соотношение соседних сеточных интервалов должно быть одним и тем же.

Распределение T от x неизвестно до решения задачи, поэтому возникает вопрос, как можно построить соответствующую неравномерную сетку? Во-первых, как правило, имеются некоторые качественные соображения о поведении решения, из которых могут быть получены некоторые указания. Во-вторых, предварительные решения на сетках с крупным шагом можно использовать для

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

определения характера зависимости T от x. Таким образом, соответствующая неравномерная сетка может быть создана. Это одна из причин, почему мы утверждаем, что наш метод может дать физически правдоподобные решения даже на сетках с крупным шагом. Анализ решения, полученного на грубой сетке, не будет полезен, если метод дает приемлемые решения только на сетках с мелким шагом.

Число узловых точек, необходимое для требуемой точности и выбранного метода, должно распределяться в расчетной области в соответствии с природой решаемой задачи.

Исследование рещений, использующих только несколько сеточных узлов, позволяет судить о поведении решения. Ведь таким же образом поступают обычно в лабораторном эксперименте. Проводятся предварительные эксперименты или пробные опыты, и их результаты используются для определения числа и места расположения датчиков, необходимых для конечного эксперимента.

Теплопроводность граней контрольного объема. В уравнении (3.3) коэффициент теплопроводности k_e был использован для обозначения k на гранн e контрольного объема, соответственно k_w — на грани w. Если коэффициент теплопроводности является функцией x, будем знать k только в узловых точках W, P, E и т. д. В этом случае необходимо каким-то образом определить коэффициент теплопроводности на грани контрольного объема, например определить k_e через значения коэффициентов теплопроводности в узловых точках. Обсуждение, проведенное ниже, не имеет отношения к случаю постоянного коэффициента теплопроводности.

Переменный коэффициент теплопроводности может быть результатом неоднородности материала, примером могут служить составные пластины.

Даже в однородном материале зависимость коэффициента теплопроводности от температуры может привести к его изменению, вызванному изменением температуры. В дифференциальном уравнении общего вида, записанном относительно Ф, коэффициент диффузии Г может изменяться аналогично коэффициенту теплопроводности k. Существенные изменения Г встречаются довольно часто, например в турбулентном течении, где Г может играть роль коэффициента турбулентной вязкости или теплопроводности. Таким образом, сама постановка задачи для переменного k или Г достаточно оправдана.

Наиболее простым способом определения коэффициента теплопроводности на грани контрольного объема является предположение о линнейном изменении k между точками P и E.

Пусть

$$k_e = f_e k_P + (1 - f_e) k_E, \tag{3.5}$$

где f_e — интерполяционный коэффициент, равный отношению отрезков, показанных на рис. 3.1:

$$f_e = (\delta x)_{e+}/(\delta x)_e. \tag{3.6}$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

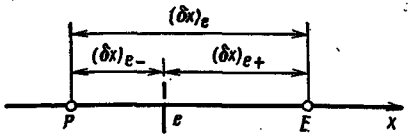


Рис. 3.1. Интервалы, связанные с гранью контрольного объема e

Если грань контрольного объема расположить посередине между узловыми точками, то f_e будет равно 0,5 и k_e будет средним арифметическим k_P и k_E.

В дальнейшем покажем, что в некоторых случаях это простое приближение дает не совсем правильные выводы и не обеспечивает точной аппроксимации при резких изменениях коэффициента теплопроводности, что может иметь место в составных материалах. Имеется сравнительно простой способ, дающий лучшие результаты. Развивая этот способ, понимаем, что на самой грани контрольного объема e не существует локального значения коэффициента теплопроводности, которое нас интересует.

Основная цель данного рассмотрения — получение хорошего представления для теплового потока q_e на грани контрольного объема:

$$q_e = k_e (T_P - T_E)/(\delta x)_e, \tag{3.7}$$

которое в сущности используется в дискретном аналоге (3.2). Соотношение, определяющее k_e, следует выбрать так, чтобы получить правильное значение q_e.

Предположим, что контрольный объем, окружающий узловую точку P, заполняет материал с постоянным коэффициентом теплопроводности k_P, а объем, окружающий точку E, — материал с коэффициентом теплопроводности k_E. Для составной пластины с границей слоев, расположенной между точками P и E, для случая стационарной одномерной задачи (без источников теплоты) запишем

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{(\delta x)_e/k_P + (\delta x)_{e+}/k_E}. \tag{3.8}$$

Объединяя уравнения (3.6)—(3.8), получаем

$$k_e = \left(\frac{1-f_e}{k_P} + \frac{f_e}{k_E}\right)^{-1}. \tag{3.9}$$

Когда грань e расположена посередине между точками P и E, имеем $f_e = 0{,}5$, тогда

$$\left.\begin{aligned} k_e^{-1} &= 0{,}5\,(k_P^{-1} + k_E^{-1}); \\ k_e &= 2k_Pk_E/(k_P + k_E). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Из уравнений (3.10) видно, что k_e представляет собой среднее гармоническое величин k_P и k_E вместо среднего арифметического, которое дает уравнение (3.5) при $f_e = 0{,}5$.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Использование (3.9) для определения коэффициентов (3.3) приводит к следующему выражению для a_E:

$$a_E = \left[\frac{(\delta x)_{e^-}}{k_P} + \frac{(\delta x)_{e^+}}{k_E}\right]^{-1}. \tag{3.11}$$

Аналогичное выражение можно получить для a_W. Очевидно, что a_E — проводимость материала между точками P и E.

Эффективность этой формулировки видна из следующих двух предельных случаев.

1. Пусть $k_E \to 0$, тогда из уравнения (3.9)

$$k_e \to 0. \tag{3.12}$$

Это означает, что тепловой поток на грани контрольного объема становится равным нулю, что и следовало ожидать. Выражение, представляющее собой среднее арифметическое, в этом случае будет давать ненулевое значение теплового потока.

2. Пусть $k_P \gg k_E$, тогда

$$k_e \to \frac{k_E}{f_e}. \tag{3.13}$$

Из этого результата следуют два вывода, один из которых очевиден. Уравнение (3.13) показывает, что коэффициент теплопроводности поверхности раздела k_e совершенно не зависит от k_P. Это вполне понятно, так как высокопроводящая среда, окружающая точку P, должна иметь пренебрежимо малое сопротивление по сравнению со средой вокруг точки E (формула, представляющая собой среднее арифметическое, дает зависимость k_e от k_P). Второй вывод заключается в том, что k_e не равно k_E, а больше этого значения в $1/f_e$ раз. Поясним это утверждение. Как уже упоминалось, конечной целью проводимого рассмотрения является получение правильного значения q_e с помощью уравнения (3.7). Используя соотношения (3.13), получаем

$$q_e = \frac{k_E (T_P - T_E)}{(\delta x)_{e^+}}. \tag{3.14}$$

Когда $k_P \gg k_E$, температура T_P преобладает СЛЕВА от грани e, а разность температур $(T_P - T_E)$ будет действительно относиться к отрезку $(\delta x)_{e^+}$. Таким образом, правильное значение теплового потока определяется из (3.14). Другими словами, множитель f_e в (3.13) можно рассматривать как компенсирующий использование номинального отрезка $(\delta x)_e$ в уравнении (3.7).

Рассмотрение этих двух предельных случаев показывает, что при использовании соотношения (3.9) можно аппроксимировать резкие изменения коэффициента теплопроводности, не применяя чрезмерно частой сетки. Это удобно не только для расчета теплопроводности в составных пластинах, но и в других случаях [42], что будет рассмотрено ниже.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Формула (3.9), рекомендуемая для определения коэффициента теплопроводности поверхности раздела, была получена для случая стационарной одномерной задачи без учета источников теплоты, в которой коэффициент теплопроводности изменялся ступенчато от одного контрольного объема к другому. Даже для случаев с ненулевыми источниками или с непрерывным изменением теплопроводности эта зависимость много лучше, чем формула, дающая среднее арифметическое значение. Это было показано в работе [42] для некоторых случаев, в которых могут быть получены точные аналитические решения.

Нелинейность. Дискретный аналог (3.2) представляет собой линейное алгебраическое уравнение, и мы будем решать систему таких уравнений. Однако даже в теории теплопроводности часто встречаются нелинейные задачи. Коэффициент теплопроводности k может зависеть от T или источник S может быть нелинейной функцией T. Следовательно, сами коэффициенты дискретного аналога будут зависеть от T. В таких случаях будем использовать итерации. Этот процесс включает следующие этапы.

1. Выбор начального приближения или оценка значений T во всех узловых точках.
2. Расчет предварительных значений коэффициентов в дискретном аналоге на основе начального профиля T.
3. Решение номинально линейной системы алгебраических уравнений, дающее новые значения T.
4. Возврат ко второму этапу и повторение процесса до тех пор, пока дальнейшие приближения (итерации) перестанут давать сколько-нибудь существенные изменения в значениях T.

Такое конечное неизменное установившееся состояние называется *сходимостью итераций*[1]. Сходящееся решение является действительно корректным решением нелинейных уравнений, хотя его находят с помощью методов решения линейных уравнений.

Однако возможно, что последовательные итерации не всегда будут сходиться к решению. Значения T могут устойчиво изменяться или колебаться со все увеличивающейся амплитудой. Такой процесс, противоположный сходимости, называется *расходимостью*. Хорошие численные методы должны уменьшать возможность *расходимости*. Как будет показано ниже, соблюдение сформулированных выше четырех основных правил ускоряет сходимость; рассмотрим также и другие пути, которые позволяют избежать расходимости. На данном этапе достаточно отметить, что наш метод не ограничивается линейными задачами и любая нелинейность может быть в принципе устранена с помощью правильно построенного итерационного метода.

Линеаризация источникового члена. В том случае, когда источниковый член S зависит от T, можно выразить эту зависимость

[1] Иногда термин «сходимость» используется для процесса, с помощью которого удачное измельчение сетки дает численное решение, близкое к точному. Назовем это точностью численного решения и используем термин «сходимость» для сходимости итераций.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

в линейной форме с помощью уравнения (3.4). Это делается по той причине, что, во-первых, номинально линейная система допускает только формально линейную зависимость, и, во-вторых, введение линейной зависимости лучше, чем предположение о постоянстве S.

Если S является нелинейной функцией T, то функцию надо линеаризовать, т. е. определить значения S_C и S_P, которые сами могут зависеть от T. В процессе каждого итерационного цикла S_C и S_P пересчитывают с учетом иовых значений T.

Линеаризующая зависимость для S должна быть хорошим представлением зависимости S от T. В дальнейшем будем следовать основному правилу относительно неположительности S_P.

Существует много различных способов разложения заданного выражения для S на S_C и S_PT_P. Некоторые из них проиллюстрированы ниже. Число представлений в приведенных примерах не имеет особенного значения. Символ T_P^* используется для обозначения начального значения или значения T_P на нулевой итерации.

Пример 1. Дано: $S=5-4T$. Возможны следующие способы линеаризации.

1. $S_C=5$, $S_P=-4$. Это наиболее очевидная и рекомендуемая форма линеаризации.

2. $S_C=5-4T_P^*$, $S_P=0$. Представление S в таком виде не требует усилий, так как линеаризация по существу не производится. Однако в случае очень сложного выражения, определяющего S, указанная форма представления является единственной.

3. $S_C=5+7T_P^*$, $S_P=-11$. Это разложение предполагает более крутую зависимость S от T, чем действительно заданная. Такое приближение приведет к замедлению сходимости итерационного процесса. Одиако если в задаче есть другие нелинейности, это замедление может быть желательным.

Пример 2. Дано: $S=3+7T$. Возможны следующие способы линеаризации.

1. $S_C=3$, $S_P=7$. Вообще такое приближение непремлемо, так как при этом S_P положительно. Если задача может быть решена без итераций, эта линеаризация будет давать корректное решение, но если по какой-либо причине (например, нелинейность других членов) применяются итерации, наличие положительной части S_P может привести к расходимости.

2. $S_C=3+7T_P^*$, $S_P=0$. Такому подходу надо следовать, если отрицательные значения S_P не получаются естественным путем.

3. $S_C=3+9T_P^*$, $S_P=-2$. Это пример искусственного создания отрицательного S_P. Оно приведет, вообще говоря, к медленному достижению сходимости.

Пример 3. Дано: $S=4-5T^2$. Некоторые возможные линеаризации этой функции (5) показаны на рис. 3.2.

1. $S_C=4-5T^{*3}_{P}$, $S_P=0$. Такое приближение (1) для тех, кто не в состоянии воспользоваться преимуществами известной зависимости S от T.

2. $S_C=4$, $S_P=-5T^{*2}_{P}$. Это разложение (2)

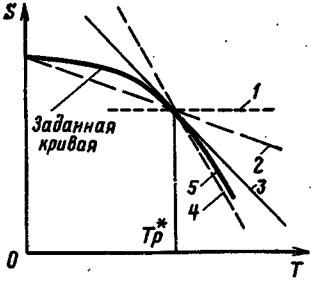


Рис. 3.2. Возможные линеаризации (1—5) для примера 3

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

выглядит как корректная линеаризация, но заданная зависимость S от T более крутая, чем та, которую дает приближение.

3. Рекомендуемый способ:

$$S = S^* + \frac{dS^*}{dT}(T_P - T_P^*) = 4 - 5T_P^{*3} - 15T_P^{*2}(T_P - T_P^*).$$

Таким образом,

$$S_C = 4 + 10T_P^{*3}; \qquad S_P = -15T_P^{*2}.$$

Такая линеаризация (*3*) дает касательную к кривой S от T в точке T^*_P.

4. $S_C = 4 + 20T^{*3}_P$, $S_P = -25T^{*2}_P$. Эта линеаризация (*4*), дающая более крутую зависимость, чем заданная зависимость S от T, приведет к замедленню сходимости.

На схеме, представленной на рис. 3.2, прямые линии с положительным тангенсом угла наклона будут нарушать основное правило 3. Среди прямых с отрицательным тангенсом угла наклона линия, касательная к заданной кривой, является лучшим вариантом. Более крутые линии можно использовать, но это обычно приводит к более медленной сходимости. Менее крутые линии неудобны, так как они не обеспечивают заданной скорости уменьшения S в зависимости от T.

Граничные условия. Предположим, что для одномерной задачи ряд узловых точек, показанных на рис. 3.3, является выбранным.

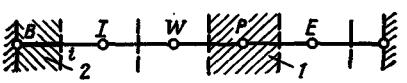


Рис. 3.3. Контрольные объемы для внутренних и граничных точек:
1 — типичный контрольный объем; *2* — половинный контрольный объем

На каждую из двух границ приходится по одной узловой точке. Остальные узловые точки назовем *внутренними*, вокруг каждой из них размещается контрольный объем. Дискретный аналог, подобный уравнению (3.2), можно записать для каждого такого контрольного объема. Если (3.2) рассматривать как уравнение для определения T_P, то имеем необходимые уравнения для всех неизвестных температур во внутренних узловых точках. Однако два из этих уравнений включают значения температур в граничных узловых точках. Именно через эти температуры на границе осуществляется учет заданных граничных условий в схеме численного решения.

Поскольку нет необходимости обсуждать каждую из граничных точек отдельно, рассмотрим расположенную слева граничную точку B, которая примыкает к первой внутренней точке I, как показано на рис. 3.3. Обычно в теории теплопроводности на границе могут быть заданы: 1) температура, 2) тепловой поток и 3) тепловой поток, определенный через коэффициент теплоотдачи и температуру окружающей жидкости.

Если задана температура на границе (т. е. значение T_B известно), то не возникает особенных трудностей и не требуются дополнительные уравнения. Когда температура на границе неиз-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

вестна, необходимо дополнительное уравнение для определения T_B. Это уравнение можно получить с помощью интегрирования дифференциального уравнения по половинному контрольному объему, который, как это показано на рис. 3.3, примыкает к границе (этот объем лежит только с одной стороны узловой точки B, поэтому к нему относится половина контрольного объема). В увеличенном масштабе этот объем показан на рис. 3.4. Интегрируя (3.1) по половинному контрольному объему и определяя тепловой поток $q=kdT/dx$, получаем

$$q_B - q_i + (S_C + S_P T_B)\Delta x = 0, \qquad (3.15)$$

где источниковый член линеаризован обычным образом. Тепловой поток q_i на поверхности контрольного объема можно записать по типу (3.7). В результате имеем

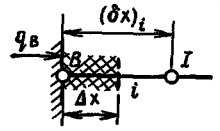


Рис. 3.4. Половинный контрольный объем вблизи границы

$$q_B - \frac{k_i (T_B - T_I)}{(\delta x)_i} + (S_C + S_P T_B)\Delta x = 0. \qquad (3.16)$$

Дальнейшее преобразование этого уравнения зависит от того, как задан тепловой поток q_B на границе. Если задано само значение q_B, уравнение для T_B записывается следующим образом:

$$a_B T_B = a_I T_I + b, \qquad (3.17)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_I &= \frac{k_i}{(\delta x)_i}; \\ b &= S_C \Delta x + q_B; \\ a_B &= a_I - S_P \Delta x. \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

Если тепловой поток определен через коэффициент теплоотдачи h[1] и температуру окружающей жидкости T_f, такую, что

$$q_B = h(T_f - T_B), \qquad (3.19)$$

то уравнение для T_B записывается следующим образом:

$$a_B T_B = a_I T_I + b, \qquad (3.20)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_I &= \frac{k_i}{(\delta x)_i}; \\ b &= S_C \Delta x + h T_f; \\ a_B &= a_I - S_P \Delta x + h. \end{aligned}\right\} \qquad (3.21)$$

[1] Напомним, что символ h использовался в гл. 1 для обозначения энтальпии. Однако его не надо путать с аналогично обозначенным коэффициентом теплоотдачи.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Таким же образом можно получить необходимое число уравнений для неизвестных температур. Далее рассмотрим метод решения этих уравнений.

Решение линейных алгебраических уравнений. Решение дискретного аналога для одномерного случая можно получить с помощью стандартного метода исключения Гаусса. Для уравнений такого простого вида процесс исключения превращается в очень удобный алгоритм. Иногда он называется алгоритмом Томаса или TDMA (Tri-diagonal-Matrix Algorithm—трехдиагональный матрицы алгоритмом) [1]. Название TDMA является результатом того, что, когда матрица коэффициентов этих уравнений записана, все ненулевые коэффициенты группируются вдоль трех диагоналей матрицы.

Для удобства записи алгоритма введем некоторые обозначения. Присвоим узловым точкам, изображенным на рис. 3.3, номера 1, 2, 3, ..., N. Номера 1 и N относятся к точкам на границе. Дискретный аналог можно записать в следующем виде:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, \tag{3.22}$$

где $i=1, 2, 3, \ldots, N$. Таким образом, температура T_i связана с соседними значениями T_{i+1} и T_{i-1}. Запись уравнений для узловых точек на границе дает

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad b_N = 0, \tag{3.23}$$

следовательно, температуры T_0 и T_{N+1} не будут иметь смысла (в том случае, когда температуры на границе заданы, уравнения для граничных точек записываются в обычной форме, например если T_1 задано, имеем $a_1=1$; $b_1=0$, $c_1=0$ и d_1 равно заданному значению T_1).

Записанные условия означают, что T_1 известна в зависимости от T_2. Уравнение для $i=2$ представляет собой соотношение между T_1, T_2 и T_3. Но поскольку T_1 может быть выражена через T_2, это соотношение приводится к соотношению между T_2 и T_3. Другими словами, T_2 можно выразить через T_3. Процесс подстановки можно продолжать до тех пор, пока значение T_N не будет выражено через T_{N+1}. Но поскольку T_{N+1} не существует, мы в действительности на данном этапе получим численное значение T_N. Это позволит нам начать процесс обратной подстановки, в котором T_{N-1} получится из T_N, T_{N-2} — из T_{N-1}, ..., T_2 — из T_3 и T_1 — из T_2. Это и составляет существо алгоритма трехдиагональной матрицы.

Предположим, что при прямой подстановке имеем зависимость

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \tag{3.24}$$

после того, как получено

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1}. \tag{3.25}$$

---

[1] В отечественной технической литературе этот метод носит название метода прогонки. — *Прим. науч. ред.*

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Подставляя (3.25) в (3.22), получаем следующее соотношение:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i, \tag{3.26}$$

которое можно привести к виду (3.24). Иначе говоря, коэффициенты P_i и Q_i запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} P_i &= \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}; \\ Q_i &= \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Эти рекуррентные соотношения определяют P_i и Q_i через P_{i-1} и Q_{i-1}. Заметим, что в начале рекуррентного процесса уравнение (3.22) для $i=1$ по форме почти совпадает с (3.24). Таким образом, P_1 и Q_1 определяются в следующем виде:

$$P_1 = b_1/a_1; \quad Q_1 = d_1/a_1. \tag{3.28}$$

[Интересно заметить, что эти выражения следуют из уравнения (3.27) после подстановки $C_1=0$.]

На другом конце последовательности P_i, Q_i имеем $b_N=0$. Это дает $P_N=0$, и из (3.24) получаем

$$T_N = Q_N. \tag{3.29}$$

С этого момента осуществляется обратная подстановка с помощью уравнения (3.24).

Краткое описание алгоритма

1. Рассчитываем P_1 и Q_1 из уравнения (3. 28).
2. Используя рекуррентные соотношения (3.27), получаем P_i и Q_i для $i=2, 3, \ldots, N$.
3. Полагаем $T_N=Q_N$.
4. Используя уравнение (3.24) для $i=N-1, N-2, \ldots, 3, 2, 1$, получаем $T_{N-1}, T_{N-2}, \ldots, T_3, T_2, T_1$.

Алгоритм, использующий свойство трехдиагональности матрицы, является мощным и удобным методом решения алгебраических уравнений, которые можно представить в виде (3.22). В отличие от общих матричных методов TDMA требует машинной памяти и машинного времени, пропорциональных N, а не N^2 или N^3.

3.3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Обобщенный дискретный аналог. Что касается общего дифференциального уравнения для Ф, то теперь мы умеем, по крайней мере, в одномерном случае аппроксимировать диффузионный и источниковый члены. Обратимся к нестационарному члену и временно опустим источниковый член, так как в данном случае нет

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

необходимости говорить о нем. Таким образом, ищем решение нестационарного одномерного уравнения теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right). \qquad (3.30)$$

В дальнейшем для удобства будем полагать ρc постоянным (в гл. 1 показано, как уравнение теплопроводности можно модифицировать с учетом переменной теплоемкости).

Поскольку время является однонаправленной координатой, решение получаем, передвигаясь во времени от заданного начального распределения температуры. Таким образом, на типичном временно́м шаге по заданным значениям T в узловых точках для времени t надо определить значения T для времени $t+\Delta t$. Старые (заданные) значения T в узловых точках обозначим T_P^0, T_E^0, T_W^0, а новые (неизвестные) значения для времени $t+\Delta t$ — T_P^1, T_E^1, T_W^1.

Дискретный аналог получим путем интегрирования уравнения (3.30) по контрольному объему, показанному на рис. 3.2, и по временно́му интервалу от t до $t+\Delta t$. Таким образом,

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dt, \qquad (3.31)$$

где пределы интегрирования выбраны в соответствии с физическим смыслом членов. Для представления члена $\partial T/\partial t$ предположим, что значение T в узловой точке распространено на весь контрольный объем, тогда

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t}\, dt\, dx = \rho c \Delta x \left(T_P^1 - T_P^0\right). \qquad (3.32)$$

Следуя способу аппроксимации члена $k\, \partial T/\partial x$ в стационарном случае, получаем

$$\rho c \Delta x \left(T_P^1 - T_P^0\right) = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k_e (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w (T_P - T_W)}{(\delta x)_w}\right] dt. \qquad (3.33)$$

На данном этапе необходимо ввести предположение относительно изменения во времени от t до $t+\Delta t$ температур T_P, T_E и T_W. Возможны различные предположения, и одно из них имеет следующий вид:

$$\int_t^{t+\Delta t} T_P\, dt = \left[f T_P^1 + (1-f) T_P^0\right] \Delta t, \qquad (3.34)$$

где f — весовой коэффициент, изменяющийся от 0 до 1. Используя аналогичные соотношения для интегралов от T_E до T_W из уравнения (3.33), находим

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}(T_P^1 - T_P^0) = f\left[\frac{k_e(T_E^1 - T_P^1)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_P^1 - T_W^1)}{(\delta x)_w}\right] + \\ + (1-f)\left[\frac{k_e(T_E^0 - T_P^0)}{(\delta x)_e} - \frac{k_w(T_P^0 - T_W^0)}{(\delta x)_w}\right]. \quad (3.35)$$

Преобразуя это выражение, опустим индекс 1 и запомним, что T_P, T_E, T_W с этого момента будут означать новые значения T для времени $t+\Delta t$. В результате имеем

$$a_P T_P = a_E[fT_E + (1-f)T_E^0] + a_W[fT_W + (1-f)T_W^0] + \\ + [a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W]T_P^0, \quad (3.36)$$

где

$$a_E = k_e/(\delta x)_e; \quad a_W = k_w/(\delta x)_w; \\ a_P^0 = \rho c \Delta x/\Delta t; \quad a_P = fa_E + fa_W + a_P^0. \quad (3.37)$$

Явная, Кранка — Николсона и полностью неявная схемы. Для определенных конкретных значений весового коэффициента f дискретный аналог приводится к хорошо известным схемам для параболических дифференциальных уравнений. В частности, для $f=0$ получаем явную схему, для $f=0{,}5$ — схему Кранка — Николсона и для $f=1$ — полностью неявную схему. Кратко рассмотрим эти схемы и покажем, что неявная схема наиболее предпочтительна.

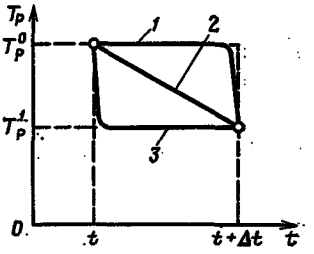


Рис. 3.5. Изменение температуры во времени для явной схемы (*1*), схемы Кранка—Николсона (*2*) и полностью неявной схемы (*3*)

Различные значения f можно интерпретировать как характеристику изменения T_P от t, показанного на рис. 3.5. Явная схема по существу предполагает, что старое значение T_P^0 существует в пределах всего временно́го шага, за исключением точки $t+\Delta t$. Неявная схема предполагает, что в момент t T_P резко уменьшается от T_P^0 до T_P^1, а затем остается равной T_P^1 на всем временно́м шаге и температура в пределах временно́го шага характеризуется новым значением T_P^1. Схема Кранка — Николсона предполагает линейное изменение T_P. С первого взгляда линейное изменение должно быть более разумным, чем две другие альтернативы. Почему же мы предпочитаем неявную схему? Ответ будет очень коротким.

Для явной схемы ($f=0$) уравнение (3.36) принимает следующий вид:

$$a_P T_P = a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + (a_P^0 - a_E - a_W)T_P^0. \quad (3.38)$$

Это означает, что T_P не зависит от других неизвестных, таких, как T_E или T_W, а является явно определенной по известным тем-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

пературам T_P^0, T_E^0, T_W^0. Поэтому схема и называется явной. Любая схема с $f \neq 0$ должна быть неявной, так как T_P зависит от неизвестных T_E и T_W, в этом случае необходимо решать одновременно несколько уравнений. Удобство явной схемы в этом отношении компенсируется, однако, рядом ограничений. Анализируя (3.38) и вспоминая основное правило о положительных коэффициентах (правило 2), замечаем, что коэффициент при T_P^0 может принимать отрицательные значения (значение T_P^0 рассматривается как соседнее с T_P по временной координате). Действительно, для того чтобы этот коэффициент был положительным, шаг по времени должен быть достаточно малым, т. е. $a_P^0 > a_E + a_W$. Для постоянного коэффициента теплопроводности и $\Delta x = (\delta x)_e = (\delta x)_w$ это условие запишется в виде

$$\Delta t < \rho c (\Delta x)^2 / 2k. \qquad (3.39)$$

Если это условие нарушается, то могут возникнуть физически неправдоподобные результаты, так как из отрицательности коэффициента следует, что увеличение T_P^0 приводит к уменьшению T_P. Уравнение (3.39) является хорошо известным критерием устойчивости явной схемы. Следует заметить, что этот результат можно получить из физических соображений, основанных на одном из четырех основных правил. Особенностью условия (3.39) является то, что уменьшение Δx для улучшения точности аппроксимации по пространственной координате вынуждает использовать намного меньшие Δt.

Обычно схема Кранка — Николсона считается безусловно устойчивой. Иногда это объясняют исходя из того, что физически реальное решение будет получаться независимо от значения шага по времени. Однако в этом случае могут иметь место колеблющиеся решения. Устойчивость в математическом смысле просто гарантирует, что эти колебания будут, в конечном счете, затухать, но это не обеспечивает физически правдоподобного решения. Несколько примеров подобных решений, полученных с помощью схемы Кранка — Николсона, можно найти в [45].

В рамках нашей модели такое поведение легко объясняется. Для $f = 0{,}5$ коэффициент при T_P^0 в уравнении (3.36) становится равным $a_P^0 - (a_E + a_W)/2$. Для постоянного коэффициента теплопроводности и равномерной сетки этот коэффициент, как видно, равен $\rho c \Delta x / \Delta t - k/\Delta x$. Когда шаг по времени недостаточно мал, этот коэффициент может становиться отрицательным, что делает возможным физически неправдоподобный результат. По-видимому, приемлемый линейный профиль на рис. 3.5 является хорошим представлением температурно-временной зависимости только для малых временных интервалов. В пределах больших интервалов по существу экспоненциальное уменьшение температуры аналогично резкому снижению профиля в начале с последующим плоским концом. Допущения, сделанные для полностью неявной схемы, в этом случае ближе к действительности, чем линейный

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

профиль, используемый в схеме Кранка — Николсоиа, особенио для больших временных шагов.

Если потребовать, чтобы коэффициент при T_P^0 в уравиении (3.36) ие был отрицательным, то только постоянная величина $f=1$ обеспечит это условие (конечно, это ие имеет смысла для $f>1$). Таким образом, полностью неявиая схема ($f=1$) удовлетворяет требоваиям простоты и физически обосиованного поведеиия. Имеиио по этой причине будем рассматривать в этой киите полиостью неявиую схему.

Следует призиать, что для малых шагов по времеии полиостью неявная схема не так точиа, как схема Краика — Николсона. Причина этого видна из рис. 3.5, температурно-временная кривая близка к линейиой для малых временных интервалов. Имеется схема, в которой используются достоинства обеих схем и не содержатся их иедостатки — это *экспоненциальная* схема, описаиная в [45]. Эта схема, одиако, иесколько сложна, поэтому не рассматривается в иастоящей книге.

Полиостью неявиый дискретиый аналог. Запишем уравнеиие (3.36) в полностью иеявном виде. Для этого введем линеаризованиый источииковый члеи, который примем уменьшающимся во времени. В результате получим

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{3.40}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e}; \qquad a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w}; \qquad a_P^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t}; \\ b = S_C \Delta x + a_P^0 T_P^0; \quad a_P = a_E + a_W + a_P^0 - S_P \Delta x. \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Видно, что при $\Delta t \to \infty$ это уравиеиие приводится к стациоиариому дискретиому аналогу.

Осиовным принципом полностью неявной схемы является то, что в пределах всего шага по времеии температура принимается равной новому зиачеиию T_P. Таким образом, если коэффициент теплопроводности k_P зависит от температуры, он должеи пересчитываться через T_P в итерациоииом процессе точно так же как и при решеиии стациоиарной задачи. Другие моменты процедуры решения стациоиариой задачи, такие, как аппроксимация граничных условий, лииеаризация источникового члена, TDMA и др. в равиой степеии применимы к нестациоиарной задаче.

Детальное рассмотреиие одиомериой задачи дает иабор приемов для перехода к двум и трем измерениям.

3.4. ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Дискретный аналог для двух измерений. Часть двухмерной сетки показаиа иа рис. 3.6. Для узловой точки P соседние точки W и E расположеиы по направлеиию оси x, точки N и S (обозначающие север и юг) — по направлеиию оси y. Коитрольный объем, окружающий точку P, показаи штриховыми линиями. Глубина

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

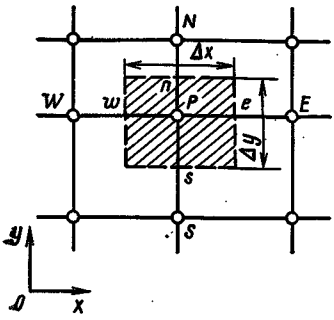


Рис. 3.6. Контрольный объем (заштрихованная область) для двухмерного случая

объема в направлении оси z предполагается равной единице. Обозначения, введенные на рис. 2.2 для расстояний Δx, $(\delta x)_e$ и т. д., распространяются здесь на два измерения. Вопрос расположения границ контрольного объема по отношению к узловым точкам остается все еще открытым. Расположить их точно посередине между соседними точками можно, но можно применить и другие способы, некоторые из них будут рассмотрены ниже. Полученный здесь дискретный аналог можно будет использовать в любом подобном случае.

Выше было показано, как рассчитать тепловой поток на грани контрольного объема между точками P и E. Предположим, что полученное таким образом значение q_e распространено на всю поверхность площадью $\Delta y \times 1$. Интенсивность переноса теплоты через другие поверхности контрольного объема можно определить подобным образом. В этом случае дифференциальное уравнение

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + S \qquad (3.42)$$

можно быстро привести к дискретному аналогу

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b, \qquad (3.43)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_E = k_e \Delta y/(\delta x)_e; \quad a_W = k_w \Delta y/(\delta x)_w; \quad a_N = k_n \Delta x/(\delta y)_n; \\ &a_S = k_s \Delta x/(\delta y)_s; \quad a_P^0 = \rho c \Delta x \Delta y/\Delta t; \quad b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0; \\ &a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y. \end{aligned}\right\} \qquad (3.44)$$

Произведение $\Delta x \Delta y$ представляет собой контрольный объем.

Дискретный аналог для трех измерений. Для построения трехмерной конфигурации добавим еще точки T и B (вверх и вниз) на оси z. Дискретный аналог имеет вид

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B + b, \qquad (3.45)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_E = k_e \Delta y \Delta z/(\delta x)_e; \quad a_W = k_W \Delta y \Delta z/(\delta x)_w; \\ &a_N = k_n \Delta z \Delta x/(\delta y)_n; \quad a_S = k_S \Delta z \Delta x/(\delta y)_s; \\ &a_T = k_t \Delta x \Delta y/(\delta z)_t; \quad a_B = k_b \Delta x \Delta y/(\delta z)_b; \\ &a_P^0 = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z/\Delta t; \quad b = S_C \Delta x \Delta y \Delta z + a_P^0 T_P^0; \\ &a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}\right\} \qquad (3.46)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Здесь интересно остановиться на физическом смысле коэффициентов дискретного аналога. Находящиеся рядом коэффициенты a_E, a_W, a_N, ..., a_B представляют собой проводимости между точкой P и соответствующими ей соседними точками. Член $a_P{}^0T_P{}^0$ — внутренняя энергия (отнесенная к Δt), содержащаяся в контрольном объеме в момент t. Постоянный член b состоит из этой внутренней энергии и мощности тепловыделения в контрольном объеме, являющегося результатом действия источника S_C. Коэффициент a_P в центральной точке представляет собой сумму всех соседних коэффициентов (включая $a_P{}^0$, который является коэффицентом в соседней по времени точке) и содержит вклад от линеаризованного источникового члеиа.

Решение алгебраических уравнений. Следует отметить, что, создавая дискретные аиалоги, мы получали их в линейной форме, хотя и не предполагали, что для их решеиия должеи быть использован особый метод. Таким образом, на этой стадии можио использовать любой подходящий метод решения. Полезно рассматривать получение уравнений и их решение как две отдельные операции, и нет необходимости учитывать влияиие одной из них на другую.

До сих пор мы получали многомерные дискретные аналоги с помощью прямого распространения результатов, полученных при рассмотрении одномериой задачи. Единственной процедурой, которая не может быть непосредственио распространена на многомерную задачу, является алгоритм, учитывающий трехдиагональиость матрицы коэффициентов. Прямые методы решения алгебраических уравнений (не требующие итераций), применяемые к двух- или трехмерным задачам, становятся более сложными и требуют существенно большей машиниой памяти и затрат вычислительного времени. Для линейных задач, в которых необходимо только один раз обратиться к процедуре решения алгебраических уравнений, можно использовать прямые методы, но в нелинейных задачах уравнения решаются с неоднократно подправленными коэффициентами, поэтому применение прямых методов представляется иеэкономичным. Таким образом, в дальнейшем прямые методы рассматриваться не будут. С вычислительной программой для прямого метода решения двухмерных дискретных аналогов можно ознакомиться в [31].

Альтернативой прямым методам являются итерационные методы решения алгебраических уравнений. Начиная с некоторого начального поля температуры T (зависимая переменная), последовательные повторения алгоритма приводят к решению, которое достаточно близко к точному решению алгебраических уравнений. Итерационные методы обычно требуют очень небольшого дополнительного объема памяти вычислительной машины и являются удобным способом для преодоления нелинейностей. В нелинейной задаче нет необходимости находить решение алгебраических уравнений с высокой точностью до окоичательной сходимости коэффициентов дискретного аналога. Оказывается, что, вообще, должно быть определеиное соответствие между усилиями, требуемыми для рас-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

чета коэффициентов и затрачиваемыми на решение уравнений. Один раз рассчитав коэффициенты, мы должны с этим набором коэффициентов выполнить необходимое число итераций для получения решения уравнения, но неразумно тратить много усилий на решение уравнений, которые основываются только на приближенных значениях коэффициентов.

Существует много итерационных методов для решения алгебраических уравнений. Остановимся только на двух методах: первый будет изложен в основных чертах, второй рекомендован для использования.

Поточечный последовательный метод Гаусса — Зейделя. Простейшим из всех итерационных методов является метод Гаусса — Зейделя, в котором значения переменной рассчитываются путем обращения в определенном порядке к каждой узловой точке. В памяти вычислительной машины держится только один массив значений T. По мере обращения к очередной узловой точке соответствующее значение T в памяти вычислительной машины (начальное приближение или значение T с предыдущей итерации) заменяется на новое. Если дискретный аналог запнсан в виде

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b, \tag{3.47}$$

где индекс nb обозначает соседную точку, то новое значение T_P в рассматриваемой узловой точке рассчитывается по соотношению

$$T_P = (\sum a_{nb} T^*_{nb} + b)/a_P, \tag{3.48}$$

где T^*_{nb} является соседним значением, которое находится в памяти вычислительной машины. Для соседних точек, к которым уже обращались в ходе текущей итерации, T^*_{nb} является новым рассчитанным значением. Для остальных соседних точек T^*_{nb} — значение с предыдущей итерации. Во всяком случае T^*_{nb} — это самое последнее значенне температуры в соседней точке. Когда все узловые точки рассмотрены подобным образом, одна итерация метода Гаусса — Зейделя закончена.

Для иллюстрации метода рассмотрим два очень простых примера.

Уравнения

$$T_1 = 0{,}4T_2 + 0{,}2; \qquad T_2 = T_1 + 1. \tag{3.49}$$

Решение

Номер итерации	0	1	2	3	4	5	...	∞
T_1	0	0,2	0,68	0,872	0,949	0,980	...	1,0
T_2	0	1,2	1,68	1,872	1,949	1,980	...	2,0

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Как видно из примера, можно получить точное решение уравнений, начиная с некоторых произвольных значений. Интересной особенностью итерационных методов является то, что точность расчета может быть не очень высокой на промежуточных этапах. Приближенность расчетов и даже погрешности уничтожаются в том случае, когда промежуточные значения используются просто как приближения для последующих итераций. Дополнительное представление можно получить, рассматривая следующий пример.

Уравнения

$$T_1 = T_2 - 1; \qquad T_2 = 2{,}5T_1 - 0{,}5. \tag{3.50}$$

Решение

Номер итерации	0	1	2	3	4
T_1	0	—1	—4	—11,5	—30,25
T_2	0	—3	—10,5	—29,25	—76,13

Этот пример не выглядит очень обнадеживающим, так как здесь итерационный процесс расходится. Еще более удивительно, что уравнения (3.50) представляют собой просто вариант уравнений (3.49), для которых получен сходящийся итерационный процесс.

Таким образом, делаем вывод, что метод Гаусса — Зейделя не всегда является сходящимся. Критерий его сходимости был сформулирован в [14]; при выполнении условий этого критерия сходимость метода Гаусса — Зейделя гарантируется. Приведем указанный критерий без доказательства и рассмотрим его применение.

Критерий Скарборою. Достаточным условием для сходимостн метода Гаусса — Зейделя является

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a_P|} \begin{cases} \leqslant 1 \text{ для всех уравнений:} \\ < 1, \text{ по крайней мере, для одного уравнения.} \end{cases} \tag{3.51}$$

Ниже приведены поясняющие замечания.

1. Критерий является достаточным, но не необходимым условием. Это означает, что даже при нарушении соотношений (3.51) может иметь место сходимость.

2. Несмотря на то что мы не сторонники использования метода Гаусса — Зейделя, оказывается, что наши дискретные аналоги должны удовлетворять критерию Скарборою так, чтобы сходимость была гарантирована, по крайней мере, для одного итерационного метода.

3. Некоторые из основных правил, которые были мотивированы физическими соображениями, могут быть теперь рассмотрены с точки зрения удовлетворения критерия Скарборою. Например, наличие отрицательного S_P приведет к $\Sigma a_{nb}/|a_P| < 1$. С учетом этого может также быть рассмотрено требование положительности коэффициентов. Если некоторые коэффициенты будут отрицательны, то a_P (который часто равняется Σa_{nb}) может иметь значение меньшее, чем $\Sigma |a_{nb}|$ (так как $\Sigma a_{nb} < \Sigma |a_{nb}|$), что приведет к нарушению требований (3.51).

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

4. Если $a_P = a_{nb}$ и все коэффициенты положительны, то для всех уравнений $\Sigma|a_{nb}|/|a_P|$. Где же в таком случае уравнение, для которого значение $\Sigma|a_{nb}|/|a_P|$ станет меньше единицы? Ответ заключается в граничных условиях. Для задачи, имеющей определенное решение, температура должна быть задана, по крайней мере, в одной граничной точке. Из уравнения дискретного аналога, в котором появляется эта точка как одна из соседних, находим, что $\Sigma|a_{nb}|/|a_P|<1$. Это происходит потому, что сумму $\Sigma|a|_{nb}|$, входящую в критерий Скарборо, надо рассчитывать как сумму коэффициентов только в неизвестных соседних точках. Кроме того, a_P должен представлять сумму всех соседних коэффициентов, включая коэффициент в граничной точке.

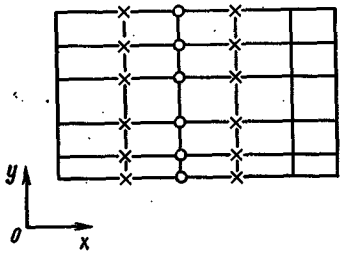


Рис. 3.7. К методу переменных направлений (кружками обозначена выбранная линия)

Главным недостатком метода Гаусса — Зейделя является очень медленная сходимость, особенно когда используется большое число узловых точек. Причина медленной сходимости очевидна: метод передает информацию о граничных условиях со скоростью одни сеточный интервал за итерацию.

Метод переменных направлений (полинейный метод). Построим удобную комбинацию прямого метода (TDMA) для одномерных задач и метода Гаусса — Зейделя. Выберем сеточную линию (линию, состоящую из узловых точек, например, в направлении оси y), предположим, что известны самые последние значения температуры на соседних сеточных линиях (т. е. на сеточных линиях, ближайших к узловым точкам на исходной сеточной линии вдоль осей x и z), и решим методом TDMA уравнения для температур в узловых точках вдоль выбранной линии. Выполним эту процедуру для всех линий в одном направлении и повторим ее, если это необходимо, в другом направлении (или направлениях). Хотя метод можно применять к двух- и трехмерным задачам, для простоты рассмотрим только двухмерную задачу.

1. Полинейную схему можно легко проиллюстрировать с помощью рис. 3.7. Рассмотрим дискретный аналог для узловых точек вдоль выбранной линии. Он содержит температуры в точках (показанных крестиками на рис. 3.7) двух соседних линий. Если взять для этих температур самые последние (в итерационном смысле) значения, дискретный аналог для узлов (показанных кружками) вдоль выбранной линии будет выглядеть подобно одномерному дискретному аналогу и его можно решить с помощью метода TDMA. Эта процедура выполняется для всех линий в направлении оси y и может быть аналогично выполнена для линий в направлении оси x.

2. Сходимость полинейного метода более быстрая, поскольку информация о граничных условиях с концов линии сразу пере-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

дается во внутреннюю часть области независимо от того, сколько точек лежит на линии. Скорость передачи информации в поперечном направлении такая же, как и в поточечном методе.

3. С помощью перемены направлений, в которых TDMA применяется поперек, можно быстро передать информацию о граничных условиях внутрь области.

4. Часто геометрия и другие свойства задачи отражаются, например, в коэффициентах дискретного аналога для точек по направлению оси y, делая их намного больше, чем соответствующие коэффициенты в направлении оси x (рис. 3.8). В таком случае

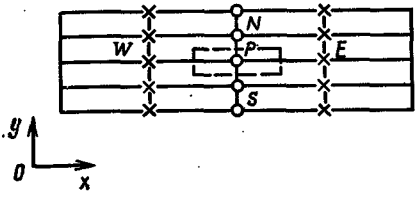


Рис. 3.8. Случай, в котором коэффициенты в направлении оси y намного больше коэффициентов в направлении оси x

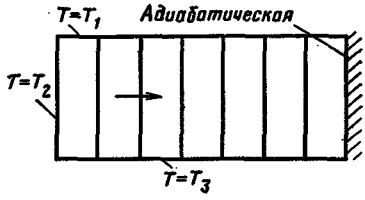


Рис. 3.9. Граничные условия, для которых более удобен расчет слева направо (штриховкой изображена адиабатическая поверхность)

особенно быстрая сходимость получается, когда поперечный TDMA применяется в направлении оси y (направление больших коэффициентов). Вот почему предполагаемые значения температуры подставляются вместо значений температуры вдоль соседних линий, имеющих существенное влияние на дискретный аналог.

5. Так же как и выбор поперечного направления, в некоторых случаях важен выбор направления, вдоль которого производится последовательный переход от одной продольной линии к другой. Для граничных условий, показанных на рис. 3.9, известное значение температуры будет передаваться внутрь области в направлении слева направо (выбираем левую границу области первой продольной линией и затем последовательно по линиям двигаемся направо). В то же время передача информации в направлении справа налево бесполезна, поскольку на правой границе неизвестно значение температуры (аналогичные рассуждения применимы к процедурам, в которых точки рассматриваются с помощью поточечной схемы). Выбор направления последовательного перехода от одной продольной линии к другой особенно важен, когда рассматривается задача с конвекцией. Очевидно, что выбор этого направления вверх по потоку будет обеспечивать более быструю сходимость, чем в противоположном случае.

Другие итерационные методы. Широко используемый метод переменных направлений был предложен в [61]. Другим итерационным методом для решения многомерных дискретных аналогов является сильно неявная процедура SIP, описанная в [81].

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

3.5. МЕТОДЫ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ РЕЛАКСАЦИЙ

При итерационном решении алгебраических уравнений или при полностью итерационной схеме, используемой для преодоления нелинейности, часто желательно от итерации к итерации ускорить или замедлить изменение зависимой переменной. Этот процесс называется *методом верхней* или *нижней релаксации* в зависимости от того, ускоряется или замедляется изменение функции. Метод верхней релаксации часто используют в сочетании с методом Гаусса — Зейделя. Результирующая схема известна как метод последовательной верхней релаксации SOR. Использование метода верхней релаксации вместе с методом переменных направлений менее распространено. Нижняя релаксация является очень удобным способом для нелинейных задач. Этот способ часто используется для того, чтобы избежать расходимости при итерационном решении сильно нелинейных уравнений.

Существует много способов использования верхней и нижней релаксаций. В данном параграфе опишем некоторые из них. Рассмотрим дискретный аналог общего вида в форме

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b. \qquad (3.52)$$

В дальнейшем T_P^* будет обозначать T_P с предыдущей итерации.

Использование коэффициента релаксации

Уравнение (3.52) можно записать в виде

$$T_P = \frac{\Sigma a_{nb} T_{nb} + b}{a_P}. \qquad (3.53)$$

Если в правую часть добавить и вычесть T_P^*, получим

$$T_P = T_P^* + \left(\frac{\Sigma a_{nb} T_{nb} + b}{a_P} - T_P^* \right), \qquad (3.54)$$

где в круглых скобках содержится изменение T_P, полученное на текущей итерации. Это изменение можно скорректировать введением коэффициента релаксации α, при этом

$$T_P = T_P^* + \alpha \left(\frac{\Sigma a_{nb} T_{nb} + b}{a_P} - T_P^* \right) \qquad (3.55а)$$

или

$$\frac{a_P}{\alpha} T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b + (1 - \alpha) \frac{a_P}{\alpha} T_P^*. \qquad (3.55б)$$

Во-первых, следует отметить, что при сходимости итераций T_P становится равным T_P^* и из уравнения (3.55а) следует, что полученное в результате итераций значение T_P удовлетворяет исходному уравнению (3.52). Любая релаксационная схема должна, конечно, удовлетворять этому требованию. При сходящемся процессе окончательное решение хотя и получается с помощью произволь-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ного коэффициента релаксации или другими подобными способами, но должно удовлетворять исходному дискретному аналогу.

Когда коэффициент релаксации в (3.55) изменяется от 0 до 1, имеем нижнюю релаксацию, при которой T_P остается близким к T^*. Для очень малых значений α изменение T_P становится очень медленным. В том случае, когда $\alpha > 1$, имеем верхнюю релаксацию.

Нет общих правил для выбора наилучшего значения α. Оптимальное значение зависит от целого ряда факторов, таких, как физическая основа задачи, число узловых точек, шаг сетки, используемый итерационный метод. Обычно подходящее значение α можно найти из предварительных расчетов данной задачи.

Нет необходимости в течение всего расчета сохранять одно и то же значение α. Это значение может изменяться от итерации к итерации. В действительности возможен (хотя это и не очень удобно) выбор различных значений α для каждой узловой точки.

Релаксация с использованием инерции. Другой метод верхней или нижней релаксации использует замену дискретного аналога (3.52) на

$$(a_P + i) T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b + iT_P^*, \qquad (3.56)$$

где i — так называемая *инерция*. Для положительных значений i уравнение (3.56) представляет соотношение для нижней релаксации, а отрицательные значения i соответствуют верхней релаксации.

В этом случае также нет общих правил для определения оптимального значения инерции i; оно должно определяться в зависимости от особенностей задачи. Из уравнения (3.56) найдем, что i должно быть сравнимо с a_P, и чем больше значение i, тем сильнее оно будет влиять на релаксацию.

Иногда решение стационарных задач получают, используя дискретные аналоги соответствующей нестационарной задачи. Таким образом, шаги по времени становятся итерациями и старые значения T_P^0 представляют просто значения T_P^* с предыдущей итерации. В этом смысле член $a_P^0 T_P^0$ в (3.46) имеет то же значение, что и член iT_P^* в (3.56). Таким образом, инерция является аналогом коэффициента a_P^0 в нестационарной задаче. Такая аналогия предлагает один из способов определения приемлемого значения i. Кроме того, способ решения стационарных задач с помощью введения нестационарного члена может считаться просто частным случаем метода нижней релаксации. Чем меньше выбранный шаг по времени, тем сильнее результирующая нижняя релаксация. В частности, отрицательное значение шага по времени Δt означает верхнюю релаксацию.

3.6. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Расположение граней контрольного объема. До сих пор вопрос о расположении граней контрольного объема по отношению к узло-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

вым точкам не рассматривался. Вывод дискретного аналога был проведен в общем виде так, что он может быть применен к любому частному случаю расположения граней контрольного объема. Из многих возможных вариантов рассмотрим два альтернативных способа расположения граней и обсудим их относительные достоинства. Для удобства рассмотрим двухмерный случай, хотя основные закономерности и применимы и к одно-, и к трехмерным случаям.

Способ I. Грани расположены посередине между узловыми точками. Наиболее очевидным способом построения контрольного объема является расположение граней объема посередине между двумя соседними узловыми точками. Это видно из рис. 3.10, где

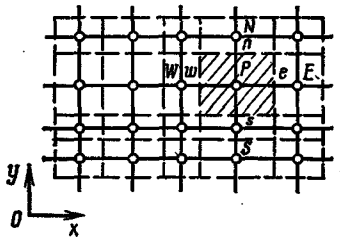


Рис. 3.10. Расположение граней контрольного объема для способа I

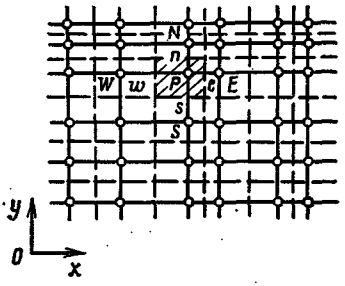


Рис. 3.11. Расположение граней контрольного объема для способа II

штриховыми линиями показаны грани контрольного объема. Сетка изображена существенно неравномерной; следствием этой неравномерности является то, что типичная узловая точка P не лежит в геометрическом центре окружающего ее контрольного объема.

Способ II. Узловые точки расположены в центре контрольных объемов.

Этот способ, показанный на рис. 3.11, состоит в том, что вначале наносятся грани контрольного объема, а затем в центре каждого объема помещается узловая точка. В этой схеме для случая неодинаковых размеров контрольных объемов их грани лежат не посередине между узловыми точками.

1. Следует отметить, что для равномерных сеток (или одинаковых размеров контрольного объема) эти два способа становятся идентичными. Поэтому проводить их сравнение целесообразно только для неравномерных сеток.

2. Расположенные посередине грани в способе I обеспечивают высокую точность расчета значения теплового потока через грань. Как отмечалось в § 3.4, наклон кусочно-линейного профиля температуры оказывается таким же, как наклон любого параболического профиля, рассчитанный посередине между узловыми точками. Таким образом, даже при использовании линейного профиля результаты по существу будут соответствовать менее грубому параболическому профилю.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

3. Тот факт, что узловая точка P на рис. 3.10 может располагаться не в центре контрольного объема, является недостатком. В этом случае температуру T_P нельзя рассматривать как характерное для контрольного объема значение при расчете источникового члена, коэффициента теплопроводности и других подобных величин. Даже при расчетах тепловых потоков на гранях контрольного объема способ I не свободен от недостатков. Например, точка e на рис. 3.10 не является центром грани контрольного объема, на которой она расположена. Таким образом, предполо-

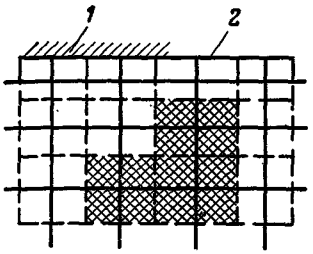


Рис. 3.12. Расположение контрольных объемов для способа II для составного материала при разрывных граничных условиях:
1 — адиабатическая стенка; *2* — изотермическая стенка

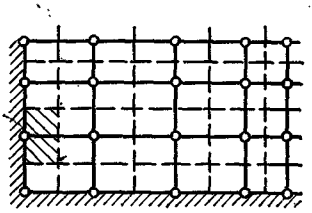


Рис. 3.13. Контрольные объемы на границе для способа I

жение о том, что тепловой поток, рассчитанный для точки e, преобладает по всей поверхности, является неточным.

4. Случай II не имеет этих недостатков, так как точка P лежит по определению в центре контрольного объема и такие точки, как e, лежат в центре соответствующих граней (рис. 3.11). Однако сами грани лежат не посередине между узловыми точками, и поэтому в отличие от способа I в способе II нельзя извлечь пользу из случайного свойства параболы.

5. Возможно основным достоинством способа II является удобство его представления. Поскольку контрольный объем оказывается основной единицей развиваемого до сих пор метода дискретизации, более удобно вначале изобразить грани контрольного объема, а затем расположить узловые точки. Например, для составных твердых тел грани контрольного объема могут располагаться там, где имеется разрыв в распределении свойств материала (рис. 3.12). Аналогично могут быть преодолены разрывы в граничных условиях. Если часть границы является адиабатической, а другая — изотермической, контрольный объем можно расположить так, чтобы избежать наличия разрыва в пределах поверхности контрольного объема. Это показано на рис. 3.12. В способе I, поскольку первыми должны размещаться узловые точки, намного больше трудностей, связанных с желательным размещением граней контрольного объема.

6. Расположение контрольных объемов вблизи границ расчетной области требует дополнительного рассмотрения. Как показано

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

на рис. 3.13, для способа I имеем вокруг граничной узловой точки половинный контрольный объем (введенный выше). В способе II удобно полностью заполнить расчетную область правильными контрольными объемами и расположить граничные узловые точки на поверхностях, примыкающих к граням контрольных объемов. Этот случай показан на рис. 3.14. Типичная грань i расположена не посередине между точкой B на границе и внутренней точкой I, а проходит непосредственно через точку на границе. Если допу-

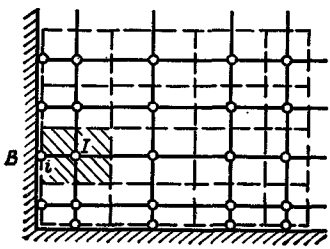


Рис. 3.14. Контрольные объемы на границе для способа II

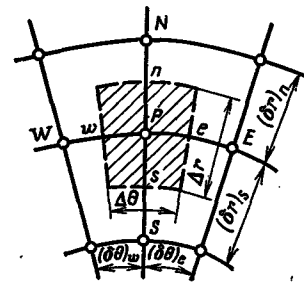


Рис 3.15. Сетка и контрольный объем в полярных координатах

стить, что контрольный объем нулевой толщины примыкает к точке B, то расположение поверхности по отношению к узловым точкам B и I будет соответствовать основному свойству способа II. При таком расположении нет необходимости в специальном уравнении дискретного аналога, записанном для контрольного объема, примыкающего к границе; имеющиеся граничные условия, такие, как заданная температура или тепловой поток, могут использоваться непосредственно на грани i.

Другие системы координат. До сих пор дискретные аналоги записывались с помощью сетки в декартовой системе координат. В остальной части книги почти везде будет употребляться та же система координат, поскольку она обеспечивает удобства записи и легкость понимания. Однако излагаемые методы не ограничены сетками в декартовой системе координат, их можно использовать для сеток в любой ортогональной системе координат. Для иллюстрации записи дискретного аналога в другой системе координат рассмотрим двухмерную задачу в полярной системе координат, а именно r и θ.

Аналогом уравнения (3.42) в полярной системе координат является следующее уравнение:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + S. \qquad (3.57)$$

Сетка и контрольный объем в координатах r, θ показаны на рис. 3.15. Толщина контрольного объема в направлении оси z принимается равной единице. Для получения дискретного ана-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

лога умножим уравнение (3.57) на r и проинтегрируем соответственно по r и θ в пределах контрольного объема (эта операция дает интеграл по объему, так как $rdrd\theta$ представляет собой элемент объема единичной толщины). Следуя той же процедуре, что в § 3.4, получаем дискретный аналог:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b, \tag{3.58}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_E = k_e \Delta r / r_e (\delta\theta)_e; \quad a_W = k_w \Delta r / r_w (\delta\theta)_w; \quad a_N = k_n r_n \Delta\theta / (\delta r)_n; \\ &a_S = k_s r_s \Delta\theta / (\delta r)_s; \quad b = S_C \Delta V + a_P^0 T_P^0; \\ &a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \Delta V; \quad a_P^0 = \rho c \Delta V / \Delta t. \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

Здесь ΔV представляет собой контрольный объем, равный $0{,}5(r_n + r_s)\Delta\theta\Delta r$ (следует заметнть, что ΔV может и не быть равным $r_P \Delta\theta \Delta r$, если P не лежит посередине между n и s).

Приведенная выше иллюстрация показывает, что дополнительной особенностью введенной новой координатной системы является, главным образом, геометрия. Поскольку требуемые длины, площади и объемы рассчитываются соответствующим образом, то нет необходимости в новых правилах. Дискретный аналог в любой ортогональной системе координат можно записать аналогичным образом. Требование ортогональности, однако, будет существенным, если используются профили, рассчитываемые с помощью двух узловых точек. То, что поверхность e контрольного объема на рис. 3.15 перпендикулярна линии PE, позволяет рассчитать поток через поверхность, используя только температуры T_P и T_E. Для неортогональных сеток необходима более сложная запись дискретного аналога.

В остальной части книги для всех алгебраических уравнений используется только декартова система координат. Однако вся процедура получения и решения уравнений равно применима к любой ортогональной системе координат, если введены явные геометрические преобразования.

3.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь сделан первый основной шаг в развитии численного метода решения общего дифференциального уравнения (1.13). Теплопроводность представлена как физический процесс, который включает все составляющие общего уравнения, за исключением конвекции. Таким образом, имеется почтн законченное построение метода решения. Однако оставшаяся составляющая, а именно конвекция, приводит ко многим интересным и важным дополнительным соображениям. Трактовка конвекции не так проста, и, кроме того, правильная трактовка является решающей при анализе процессов в потоках жидкости. Нняе рассмотрены особенности, вносимые коивекцией в метод дискретизации.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ЗАДАЧИ

3.1. Для схемы, показанной на рис. 3.3, при заданном значении температуры T_B объясните, как можно определить тепловой поток на границе после расчета температур во всех узловых точках (заметим, что попытка аппроксимировать dT/dx на границе не соответствует методу контрольного объема; используйте для определения q_B уравнение для половинного контрольного объема).

3.2. Когда задано значение температуры на границе, уравнение для половинного контрольного объема (см. рис. 3.3) не может быть использовано для получения поля температур. Означает ли это, что для всей расчетной области при заданных температурных граничных условиях не соблюден закон сохранения энергии (см. замечание к задаче 3.1).

3.3. Граничное условие, выраженное уравнением (3.19), можно рассматривать как наиболее общее условие. Из этого условия можно получить два других типа граничных условий (заданную температуру и заданный тепловой поток) как предельные случаи этого общего условия. Объясните, как этого можно достичь.

3.4. Рассмотрите дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0.$$

Введите новую переменную η, чтобы $d\eta=(1/k)dx$. Получите дискретный аналог, предположив, что T является кусочно-линейной функцией η. Выразите η в зависимости от x и коэффициентов теплопроводности в узловых точках, предположив, что коэффициент теплопроводности, относящийся к узловой точке, превалирует в пределах контрольного объема, окружающего эту точку. Проверьте, согласуется ли с уравнением (3.11) результирующее выражение для a_E.

3.5. Получите из уравнения (3.1) дискретный аналог для случая $S=a+bT$, где a и b — постоянные. Используйте кусочно-линейный профиль T для расчета dT/dx и S. Объясните результирующий дискретный аналог, ссылаясь на правило 2.

3.6. Повторите вывод из § 3.3, считая профиль $T(x)$ кусочно-линейным и для члена $\partial T/\partial t$. Для $f=1$ (что означает полностью неявную схему) определите соседние коэффициенты a_B и a_W, ссылаясь на правило 2. [Заметили ли вы, что в соответствии с уравнением (3.40) член $\partial T/\partial t$ ведет себя подобно $S=S_C+S_PT_P$ и $\partial T/\partial t$ дает отрицательные значения S_P, если рассматривается как часть S].

3.7. Для смешанной радиационно-кондуктивной задачи источниковый член выражается как $S=a(T_0^4-T^4)$, где a и T_0 — постоянные, a — положительная величина. Запишите аппроксимирующую линеаризацию для источникового члена.

3.8. Источниковый член для зависимой переменной Φ определяется как $S=A-B|\Phi|\Phi$, где A и B — положительные постоянные. Если этот член линеаризован в виде $S_C+S_P\Phi_P$, объясните следующие случаи (Φ^*_P означает значение с предыдущей итерации):

1) $S_C=A-B,\ S_P=0;$

2) $S_C=A,\ S_P=-B\left|\Phi_P^*\right|;$

3) $S_C=A+B\left|\Phi_P^*\right|\Phi_P^*,\ S_P=-2B\left|\Phi_P^*\right|;$

4) $S_C=A+9B\left|\Phi_P^*\right|\Phi_P^*,\ S_P=-10B\left|\Phi_P^*\right|.$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

3.9. Рассмотрите одномерную задачу теплопроводности с $S=2$ и $k=1$. Если четыре узловые точки $x=0$; 1; 2; 3 занимают область длиной 3, запишите четыре уравнения дискретного аналога (включая уравнения для половинных контрольных объемов), используя следующие граничные условия: при $x=0$ тепловой поток, направленный внутрь области, равен 5; при $x=3$ тепловой поток, направленный в окружающую среду, равен 11.

Решите эти уравнения с помощью:

1) TDMA;

2) итераций Гаусса—Зейделя;

3) полагая температуру в первой узловой точке равной 100 и применяя TDMA к трем оставшимся уравнениям;

4) для случая 3 решите уравнения методом Гаусса — Зейделя.

Пояснение. При заданных граничных условиях значения T определяются неоднозначно — разности температур определены, а их абсолютные значения — нет. Следовательно, методом 1 решение получить нельзя. Решения, полученные методами 2 и 3, будут вообще отличаться на постоянную. Сходимость метода 2 будет более быстрой, чем метода 4. Поэтому лучше сделать так, чтобы решение само выходило на некоторый уровень, чем задавать какое-либо значение в конкретной узловой точке.

3.10. Для неявной схемы (3.39) дает критерий устойчивости для одномерных задач. Получите критерий для двух- и трехмерных задач, считая, что коэффициент T^0_P должен оставаться положительным.

3.11. Боковые поверхности полуограниченной пластины толщиной 8 единиц поддерживаются при температуре 100. Поле температур описывается уравнением (3.1) с $k=5$ и $S=50$ соответственно. Используя только несколько узловых точек, получите численное решение методом, изложенным в этой главе. Сравните найденные значения T с теми, что получены при точном решении. (Если сетка сконструирована согласно способу I, согласие с точным решением будет лучшим. Почему?)

3.12. Запишите следующую задачу через соответствующие безразмерные переменные.

Уравнение сохранения имеет вид

$$k\frac{d^2T}{dx^2}+S=0,$$

где k и S — постоянные. Граничные условия представим в виде

$$x=0,\quad k\frac{dT}{dx}=h_0(T_f-T_0);$$

$$x=L,\quad k\frac{dT}{dx}=h_L(T_L-T_f),$$

где h_0 и h_L — коэффициенты теплоотдачи, а T_0 и T_L — соответствующие температуры на границе. Для случаев $h_0L/k=1$ и $h_LL/k=2$ решите задачу численно и сравните результаты с точным решением.

3.13. Ряд простых полностью развитых течений описывается уравнениями

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

типа теплопроводности. Например, полностью развитое течение между параллельными пластинами подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{du}{dy}\right)-\frac{dp}{dx}=0,$$

где u — скорость; μ — вязкость; dp/dx — постоянный градиент давления. Заметим, что, поскольку это уравнение по существу совпадает с уравнением (3.1), можно метод дискретизации, описанный в настоящей главе, использовать для расчета полностью развитых течений.

1) Рассчитайте распределение скорости в полностью развитом потоке между неподвижными плоскими пластинами.

2) Предположите, что одна из пластин неподвижна, а другая движется со скоростью U. Рассчитайте полностью развитый поток между пластинами для различных значений параметра $L^2(dp/dx)/(\mu U)$, где L — расстояние между пластинами.

3) Рассчитайте поле скорости для полностью развитого потока в круглой трубе.

3.14. Область течения в канале с полностью развитым теплообменом характеризуется температурным полем. Это поле, выражение которое в соответствующей безразмерной форме, сохраняется неизменным вниз по потоку.

Рассчитайте полностью развитое температурное поле и число Нуссельта в потоке между двумя параллельными пластинами, считая профиль скорости параболическим, одну платину адиабатической, а другую с заданной постоянной плотностью теплового потока. (Целый ряд задач о полностью развитом течении и теплообмене можно решать методом, изложенным в этой главе. Результаты решения некоторых задач можно найти в [78].)

3.15. Рассмотрите нестационарную теплопроводность в бесконечной пластине. Одна сторона пластины изолирована, к другой подводится постоянный тепловой поток. После начального периода профиль температуры приобретает постоянную форму и все температуры будут возрастать во времени с постоянной скоростью. Эта скорость связана с суммарным тепловым потоком через поверхность. Поставьте и решите задачу методом стационарной теплопроводности (такие полностью развитые режимы в нестационарной теплопроводности обсуждаются более полно в [44]).

3.16. Рассмотрите одномерную задачу теплопроводности в стержне, который согнут в форме замкнутого кольца. В этом случае, поскольку нет концов, граничные условия бессмысленны. Действительно, все узловые точки сетки — внутренние точки. Дискретный аналог имеет вид (3.22), но условия, заданные уравнением (3.23), не будут использоваться. Вместо этого T_{N+1} будет интерпретироваться как T_1 и T_0 — как T_N. Опишите алгоритм решения (назовем его круговым TDMA) для такой системы уравнений. (Этот алгоритм удобно применять совместно с методом переменных направлений в координатах r, θ, поскольку узловые точки сетки, располагающиеся в направлении оси θ, могут образовывать замкнутый круг. Другое применение кругового TDMA и особенности его получения можно найти в [48].)

3.17. Рассмотрите две зависимые переменные f и g, которые описываются связанными уравнениями вида

$$a_i f_i = b_i f_{i+1} + c_i f_{i-1} + d_i + e_i g_i;$$
$$A_i g_i = B_i g_{i+1} + C_i g_{i-1} + D_i + E_i f_i$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

для $i=1, 2, 3, ..., N$. Кроме того, $c_1=0$, $b_N=0$, $C_1=0$ и $B_N=0$. Используя основные идеи TDMA, опишите алгоритм для решения этих уравнений.

3.18. Сопоставлением уравнений (3.56) и (3.55б) покажите, что инерция $\dot{t}$ связана с коэффициентом релаксации α соотношением $i=(1-\alpha)\,a_P/\alpha$.

3.19. Пластина толщиной L имеет линейное распределение температуры в пределах от $T=T_0$ при $x=0$ до $T=T_1$ при $x=L$. Для времени $t=0$ поверхность $x=L$ предполагается адиабатной, а поверхность $x=0$ поддерживается при температуре $T=T_0$. Рассчитайте распределение $(T-T_0)/(T_1-T_0)$ как функцию x/L и $\alpha t/L^2$, где α — коэффициент температуропроводности. Проведите расчеты до значений $(T-T_0)/(T_1-T_0)$ при $x=L<0{,}5$.

3.20. Рассмотрите задачу стационарной одномерной теплопроводности в ребре постоянного поперечного сечения, которая описывается следующим уравнением:

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dT}{dx}\right)+\frac{hP}{A}(T_f-T)=0,$$

где h — коэффициент теплоотдачи между поверхностью ребра и окружающей жидкостью с температурой T_f; A — площадь поперечного сечения ребра; P — его периметр. Граничными условиями являются: при $x=0$ $T=T_0$ (температура основания) и при $x=L$ $kdT/dx=0$ (изолированная вершина). Найдите численное решение для безразмерной температуры $(T-T_f)/(T_0-T_f)$ как функции x/L для $hPL^2/(kA)=2$ и сравните это решение с точным. Для равномерной сетки определите число узловых точек, необходимое для расчета теплового потока в основании ребра, отличающегося не более чем на 1 % от точного значения. (Следует заметить, что способ линеаризации источникового члена в данном уравнении является очевидным. Однако если вы попытаетесь решить задачу итерационным методом, выражая весь источниковый член как S_C и полагая $S_P=0$, то заметите, что итерации дают неправильные результаты и делают сходимость труднодостижимой).

Глава 4

КОНВЕКЦИЯ И ДИФФУЗИЯ

4.1. РАССМАТРИВАЕМАЯ ЗАДАЧА

Рассматривая задачу теплопроводности, мы по существу получили дискретный аналог из общего дифференциального уравнения, содержащего нестационарный, диффузионный и источниковый члены (записанные выше через температуру T и коэффициент теплопроводности k эти члены можно легко переписать через общую переменную Ф и соответствующий коэффициент диффузии). Был опущен конвективный член, который в настоящей главе будет учтен. Выше были изложены методы решения алгебраических уравнений. Добавление конвективного члена не влияет на форму дискретного аналога, поэтому можно использовать те же методы.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Конвекция является результатом движения жидкости. Ниже будет получено решение для функции Ф при заданном поле течения (т. е. компонентах скорости и плотности). Источник информации о поле течения здесь несуществен. Его можно получить из эксперимента, на основе аналитического решения, с помощью метода, описанного в следующей главе, и т. д. Имея каким-либо способом определенное поле течения, можно рассчитать поле температур, концентрации, энтальпии или любой другой величины, представляемой обобщенной переменной Ф.

Хотя при учете конвекции добавляется только один новый член, вводимый в настоящей главе, его аппроксимация оказывается достаточно сложной. Конвективный член непосредственно связан с диффузионным, и их целесообразно рассматривать как целое. Именно поэтому настоящая глава названа «Конвекция и диффузия».

Необходимо помнить, что слово «диффузия» используется здесь в обобщенном значении. Оно включает не только диффузию химических компонент, вызванную градиентами концентрации. Диффузионный поток, вызванный градиентом обобщенной переменной Ф, определяется как $-\Gamma \partial\Phi/\partial x_j$; для конкретной величины Ф он может представлять собой диффузионный поток химических компонент, тепловой поток, вязкое напряжение и т. д. Обобщенное дифференциальное уравнение (1.15) содержит член $(\partial/\partial x_j)(\Gamma \partial\Phi/\partial x_j)$, который определяется как диффузионный член. Фактически это выражение представляет собой сумму трех составляющих по трем координатным направлениям, однако удобно рассматривать их совместно как единый диффузионный член. Аналогичные рассуждения справедливы для конвективного члена $(\partial/\partial x_j)(\rho u_j \Phi)$.

Отметим одно из свойств конвективно-диффузионной задачи. Поскольку заданное поле течения должно удовлетворять уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \tag{4.1}$$

то общее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + S \tag{4.2}$$

можно записать в виде:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) + S. \tag{4.3}$$

Из формы уравнения (4.3) следует, что для заданных распределений ρ, u_j, Γ и S любое решение Ф и его модификация (Ф плюс постоянная) должны удовлетворять уравнению (4.3). При этом условии основное правило относительно суммы коэффициентов (правило 4) остается справедливым.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

4.2. УСТАНОВИВШИЕСЯ ОДНОМЕРНЫЕ КОНВЕКЦИЯ И ДИФФУЗИЯ

Рассмотрим установившуюся одномерную задачу, в которой присутствуют только конвекция и диффузия. Дифференциальное уравнение сохранения имеет вид

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right), \qquad (4.4)$$

где u — скорость в направлении оси x. Для этого случая уравнение неразрывности записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad \text{или} \quad \rho u = \text{const}. \qquad (4.5)$$

Для получения дискретного аналога используем трехточечный шаблон, показанный на рис. 4.1. Хотя действительное расположение граней контрольного объема e и w не должно влиять на окончательную форму записи, предположим, что грань e расположена посередине между узловыми точками P и E, а грань w — посередине между W и P.

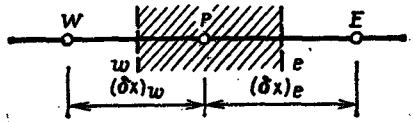


Рис. 4.1. Типичный шаблон узловых точек для одномерной задачи (заштрихованная область — контрольный объем)

Предварительный анализ. Интегрируя уравнения (4.4) по контрольному объему, показанному на рис. 4.1, получаем

$$(\rho u \Phi)_e - (\rho u \Phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right)_w. \qquad (4.6)$$

Выше был рассмотрен способ аппроксимации члена $\Gamma(d\Phi/dx)$ при использовании кусочно-линейного профиля Φ. Для конвективного члена сначала кажется естественным такой же выбор профиля. В результате получим

$$\Phi_e = 1/2\,(\Phi_E + \Phi_P); \qquad \Phi_w = 1/2\,(\Phi_P + \Phi_W). \qquad (4.7)$$

Множитель 1/2 является следствием предположения о расположении граней контрольного объема посередине между узловыми точками; любые другие интерполяционные множители могут появиться при другом расположении границ контрольного объема. В этом случае уравнение (4.6) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e (\Phi_E + \Phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w (\Phi_P + \Phi_W) = \frac{\Gamma_e (\Phi_E - \Phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w (\Phi_P - \Phi_W)}{(\delta x)_w}, \qquad (4.8)$$

где значения Γ_e и Γ_w определяются с помощью соотношений, приведенных в § 3.2 (это относится ко всей книге в целом, даже если такие ссылки в последующих параграфах и не будут повторяться).

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Для того чтобы записать уравнение более компактно, введем два новых символа F и D:

$$F \equiv \rho u; \quad D \equiv \Gamma/\delta x. \tag{4.9}$$

Обе эти величины имеют одинаковую размерность; F показывает интенсивность конвекции (или течения); D — диффузионная проводимость. Следует заметить, что D всегда остается положительным, а F может принимать либо положительные, либо отрицательные значения в зависимости от направления течения жидкости. С учетом этих новых обозначений дискретный аналог примет вид

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W, \tag{4.10}$$

где

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}; \tag{4.11а}$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}; \tag{4.11б}$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w). \tag{4.11в}$$

Обсудим теперь полученные результаты.

1. Поскольку из условия непрерывности $F_e = F_w$, то получим следующее соотношение: $a_P = a_E + a_W$. Кроме того, интересно заметить, что из соотношения (4.11в) следует, что дискретный аналог обладает этим свойством только в том случае, если поле скоростей удовлетворяет требованиям непрерывности, точно так же уравнение (4.3) можно получить из (4.2) только в том случае, если удовлетворяется уравнение неразрывности.

2. Дискретный аналог (4.10) представляет собой следствие использования кусочно-линейного профиля Ф. Эта форма известна также как центрально-разностная схема и представляет собой естественный результат разложения переменных в ряды Тэйлора.

3. Рассмотрим простой пример, в котором

$$D_e = D_w = 1; \qquad F_e = F_w = 4.$$

Если заданы значения Φ_E и Φ_W, то из уравнения (4.10) можно получить Φ_P. Рассмотрим два набора значений:

а) Если $\Phi_E = 200$ и $\Phi_W = 100$, то $\Phi_P = 50$!

б) Если $\Phi_E = 100$ и $\Phi_W = 200$, то $\Phi_P = 250$!

Поскольку на самом деле Φ_P не может лежать вне области значений 100—200, определенных соседними точками, то эти результаты совершенно нереальны.

4. Действительно, можно предвидеть эти неверные результаты, так как из уравнений (4.11) видно, что коэффициенты могут принимать отрицательные значения. Когда $|F| > 2D$, то в зависимости от того, положительно или отрицательно F, можно получить отрицательные a_E или a_W. Это приведет к нарушению одного из основных правил и возможности неправильного результата.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

5. Отрицательные коэффициенты могут также означать, что $a_P = \Sigma a_{nb}$ становится меньше, чем $\Sigma |a_{nb}|$, что нарушает выполнение критерия Скарборою. Таким образом, поточечное решение дискретного аналога может расходиться. Вот почему все ранее сделанные попытки решить задачи конвекции с помощью схемы с центральными разностями ограничивались малыми числами Рейнольдса (малыми отношениями F/D).

6. При нулевой диффузии ($\Gamma = 0$) схема приводит к значению $a_P = 0$. В этом случае уравнение (4.10) невозможно решить с помощью поточечного метода и многих других итерационных методов.

Поскольку приведенный выше предварительный анализ привел в результате к неприемлемому виду дискретного аналога, то необходимо найти лучшие подходы. Некоторые из них описаны ниже.

Схема против потока. Схема против потока, которая также известна как схема с разностями против потока, схема с разностями против течения, метод донорных ячеек и т. д., впервые была предложена в [12] и впоследствии развита в [6, 24, 73].

Слабым звеном предыдущего анализа является предположение, что значение переносимой величины на грани контрольного объема Φ_e определяется как среднее между Φ_E и Φ_P. Рассматриваемая здесь схема против потока предлагает лучшую аппроксимацию. Запись диффузионного члена остается прежней, а значение Φ на грани контрольного объема равно значению в соседней узловой точке с подветренной стороны грани.

Таким образом,

$$\Phi_e = \Phi_P, \quad \text{если} \quad F_e > 0, \tag{4.12а}$$

и

$$\Phi_e = \Phi_E, \quad \text{если} \quad F_e < 0. \tag{4.12б}$$

Значение Φ_w определяется аналогично.

Условные соотношения (4.12) можно записать более компактно, если ввести новый оператор $[|A, B|]$, определяющий наибольшую из величин A и B[1]. Тогда для схемы против потока

$$F_e\Phi_e = \Phi_P [| F_e, 0 |] - \Phi_E [| -F_e, 0 |]. \tag{4.13}$$

Если в (4.7) подставить это выражение, то дискретный аналог запишется в виде

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W, \tag{4.14}$$

где

$$\begin{gathered} a_E = D_e + [| -F_e, 0 |]; \\ a_W = D_w + [| F_w, 0) |]; \\ a_P = D_e + [| F_e, 0 |] + D_w + [| -F_w, 0 |] = a_E + a_W + (F_e - F_w). \end{gathered} \tag{4.15}$$

[1] Новый оператор [|A, B|] эквивалентен AMAX 1 (A, B) на языке FORTRAN.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Обсудим полученные результаты.

1. Из уравнения (4.15) видно, что отрицательные значения коэффициентов в этом случае не появляются. Таким образом, решения всегда будут физически реальными и критерий Скарборою будет удовлетворяться.

2. Что же, однако, является сущностью идеи, лежащей в основе схемы против потока? Более детальный ответ на этот вопрос будет получен ниже, а пока ограничимся ясной физической иллюстрацией схемы против потока, которая может дать некоторое пояснение. Схема иногда основывается на модели бак — труба [25]. Как показано на рис. 4.2, контрольные объемы можно пред-

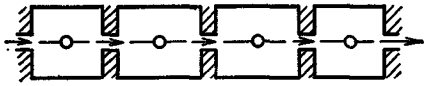


Рис. 4.2. Модель бак-труба

ставить как серию отдельных баков с перемешивающейся в них жидкостью, которые соединяются с помощью коротеньких трубок. Течение через трубки представляет собой конвекцию, теплопроводность через стенки баков — диффузию. Так как жидкость в баках перемешивается, то каждый бак имеет однородное температурное поле. Предположим, что жидкость, текущая в каждой соединительной трубке, имеет температуру, равную температуре в баке со стороны против потока. Обычно жидкость в трубке ничего не должна знать о баке, по направлению к которому она течет, но должна иести полную информацию о баке, из которого она поступает. Это является сутью схемы против потока.

Точное решение. Уравнение сохранения можно решить точно, если положить Г равным постоянной величине [ρu всегда постоянно, как следует из (4.5)]. Если рассматривается область $0 \leqslant x \leqslant L$ с граничными условиями

$$\text{при} \quad x = 0 \quad \Phi = \Phi_0; \tag{4.16а}$$

$$\text{при} \quad x = L \quad \Phi = \Phi_L, \tag{4.16в}$$

то решение (4.4) можно представить в виде

$$\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi_L - \Phi_0} = \frac{\exp(Px/L) - 1}{\exp(P) - 1}, \tag{4.17}$$

где P — число Пекле, определяемое следующим соотношением:

$$P = \frac{\rho u L}{\Gamma}. \tag{4.18}$$

Как видно, P есть отношение интенсивностей конвекции и диффузии. Смысл точного решения (4.17) будет более понятен, если рассмотреть рис. 4.3, на котором изображена зависимость Φ от x для различных чисел Пекле. В пределе при нулевом числе Пекле получаем задачу чистой диффузии (или теплопроводности), причем зависимость Φ от x является линейной. Когда поток направлен

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

вдоль положительной оси x (т. е. для положительных значений P), на значения Φ, в рассматриваемой области, по-видимому, оказывает большее влияние ее значение вниз по потоку Φ_0. Для большого положительного значения P значение Φ остается очень близким к значению Φ_0 вниз по потоку в большей части рассматриваемой области. Для отрицательных значений P наблюдается обратная картина. Когда течение направлено в сторону отрицательной оси x, значением против потока становится Φ_L, которое доминирует в рассматриваемой области. Для больших отрицательных P значение Φ в большей части области практически равно Φ_L.

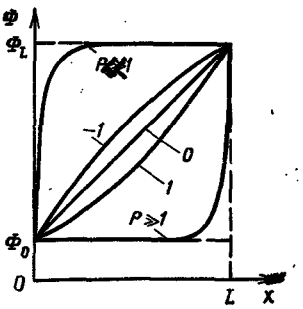


Рис. 4.3. Точное решение для совместной задачи конвекции и диффузии (одномерные задачи) при различных значениях числа P

Для построения дискретного аналога рассмотрим рис. 4.3, обратив внимание на соответствующий профиль Φ от x между сеточными узлами.

1. Легко видеть, почему предварительный анализ не дал удовлетворительных результатов. Распределение Φ от x носит далеко не линейный характер, за исключением малых значений $|P|$.

2. Когда $|P|$ велико, значение Φ при $x=L/2$ (грань контрольного объема) приблизительно равно значению Φ на границе вниз по потоку. Это и есть допущение, сделанное в схеме против потока, но здесь оно используется для всех значений $|P|$, а не только для больших.

3. Когда $|P|$ принимает большие значения, производная $d\Phi/dx$ при $x=L/2$ близка к нулю. Таким образом, диффузия почти отсутствует. В схеме с аппроксимацией против потока диффузионный член рассчитывается, исходя из линейного профиля Φ от x, т. е. предполагается несколько больший вклад диффузии при больших значениях $|P|$.

Если дискретный аналог получен непосредственно из точного решения, показанного на рис. 4.3, результирующая схема не должна иметь каких-либо дефектов.

Перейдем к созданию такой схемы, которую назовем экспоненциальной схемой. Она основана на записи, впервые представленной в [75], и является одной из схем, предложенной и используемой в [69].

Экспоненциальная схема. Удобно ввести понятие суммарного потока J, который складывается из конвективного потока $\rho u\Phi$ и диффузионного потока $-\Gamma d\Phi/dx$. Таким образом,

$$J = \rho u\Phi - \Gamma \frac{d\Phi}{dx}. \qquad (4.19)$$

С учетом этого определения (4.4) запишем в следующем виде:

$$dJ/dx = 0, \qquad (4.20)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

и после интегрирования по контрольному объему, показанному на рис. 4.1, получаем

$$J_e - J_w = 0. \tag{4.21}$$

Теперь точное решение (4.17) можно использовать в качестве профиля между точками P и E, заменив Φ_0 и Φ_L на Φ_P и Φ_E, а L на $(\delta x)_e$. Подставляя этот профиль в уравнение (4.19), получаем выражение для J_e:

$$J_e = F_e\left[\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_E}{\exp(P_e) - 1}\right], \tag{4.22}$$

где

$$P_e = \frac{(\rho u)_e (\delta x)_e}{\Gamma_e} = \frac{F_e}{D_e}, \tag{4.23}$$

а F_e и D_e определены[1] уравнением (4.9). Следует отметить, что J_e не зависит от расположения поверхности раздела между точками P и E. Конечно, точное решение, которое удовлетворяет уравнению (4.20), должно иметь такое поведение.

Окончательно подстановка (4.22) и аналогичного выражения для J_w в (4.21) приведет к уравнению

$$F_e\left(\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_E}{\exp(P_e) - 1}\right) - F_w\left(\Phi_W + \frac{\Phi_W - \Phi_P}{\exp(P_w) - 1}\right) = 0, \tag{4.24}$$

которое можно записать в стандартном виде:

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W, \tag{4.25}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= F_e/\exp(F_e/D_e) - 1; \\ a_W &= F_w \exp(F_w/D_w)/\exp(F_w/D_w) - 1; \\ a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w). \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Эти выражения для коэффициентов определяют экспоненциальную схему. При использовании для решения одномерной стационарной задачи такая схема гарантирует получение точного решения для любого значения числа Пекле и для любого числа узлов сетки. Несмотря на это, такая схема широко не используется, потому что, во-первых, расчет экспонент требует больших затрат машинного времени, во-вторых, схема не является точной при расчете двух- и трехмерных задач, наличии ненулевых источников и т. д.

Для практики нужна простая расчетная схема, которая качественно повторяла бы поведение экспоненциальной схемы. Ниже

[1] Здесь Γ_e определено так же, как коэффициент k_e, т. е. с помощью (3.9). Может показаться, что это определение подобно способу, в котором точное решение для постоянного Γ модифицируется на случай переменного Γ. Хотя не было причины для использования такого подхода, расчет k_e (или Γ) с помощью (3.9) (которое было применено для случая теплопроводности) оказывает достаточно точным даже для случая совместных конвекции и диффузии (см. § 4.5).

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

рассмотрены две такие схемы, вторая из них рекомендуется для использования.

Комбинированная схема. Комбинированная схема была получена в [75]; она опубликована также в книге [54].

Чтобы оценить связь между экспоненциальной и комбинированной схемами, запишем коэффициент a_E, или, вернее, его безразмерный аналог a_E/D_e, как функцию числа P_e. Из уравнения (4.26) следует, что

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1}. \tag{4.27}$$

Зависимость a_E/D_e от P_e показана на рис. 4.4. Для положительных значений P_e узловая точка E оказывается расположенной вниз по течению и ее влияние уменьшается по мере роста числа P_e. Когда P_e принимает отрицательные значения, E оказывается расположенной вверх по течению и в этом случае оказывает большое влияние. Отметим некоторые свойства зависимости a_E/D_E от P_e (см. рис. 4.4; точная зависимость — сплошная линия):

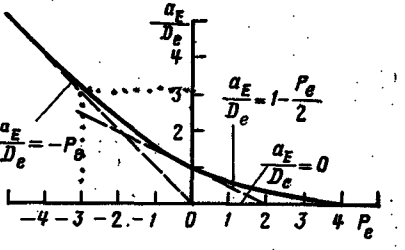


Рис 4.4. Зависимость коэффициента a_E/D_e от P_e

для $P_e \to \infty$

$$\frac{a_E}{D_e} \to 0; \tag{4.28а}$$

для $P_e \to -\infty$

$$\frac{a_E}{D_e} \to -P_e; \tag{4.28б}$$

при $P_e = 0$ тангенс угла наклона

$$\frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2}. \tag{4.28в}$$

Три прямые линии, представляющие эти предельные случаи, также показаны на рис. 4.4. Их можно рассматривать как огибающую точного решения и считать достаточно хорошей его аппроксимацией. Комбинированная схема составляется из этих трех прямых линий так, что

для $P_e < -2$

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e; \tag{4.29а}$$

для $-2 \leqslant P_e \leqslant 2$

$$\frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2}; \tag{4.29б}$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

для $P_e > 2$

$$\frac{a_E}{D_e} = 0. \qquad (4.29в)$$

Эти выражения можно записать в компактном виде с помощью специального символа [||], который обозначает большую из величин, заключенных в эти скобки. Таким образом,

$$a_E = D_e\left[\left|-P_e,\ 1-\frac{P_e}{2},\ 0\right|\right], \qquad (4.30а)$$

или

$$a_E = \left[\left|-F_e,\ D_e-\frac{F_e}{2},\ 0\right|\right]. \qquad (4.30б)$$

Суть комбинированной схемы можно понять, вспомнив, что она идентична схеме с центральными разностями для области чисел Пекле $-2 \leqslant P_e \leqslant 2$ и что вне этой области она сводится к схеме против потока, в которой диффузия принимается равной нулю. Итак, недостатки схемы против потока, описанные выше, не сказываются на комбинированной схеме. Название схемы указывает на то, что она является комбинацией центрально-разностной схемы и схемы против потока, однако лучше рассматривать комбинированную схему как линейное приближение (состоящее из трех прямых) к точной кривой (см. рис. 5.4).

Представим конвективно-диффузионный дискретный аналог для комбинированной схемы в следующем виде:

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W, \qquad (4.31)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= \left[\left|-F_e,\ D_e-\frac{F_e}{2},\ 0\right|\right]; \\ a_W &= \left[\left|F_w,\ D_w+\frac{F_w}{2},\ 0\right|\right]; \\ a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w). \end{aligned}\right\} \qquad (4.32)$$

Необходимо помнить, что эта запись справедлива для любого произвольного расположения граней контрольного объема между узловыми точками, а не ограничивается случаем расположения этих граней посередине.

Схема со степенным законом. Как видно из рис. 4.4, наибольшее отклонение комбинированной схемы от точного решения наблюдается при числах P_e, несколько больших $P_e = \pm 2$; кроме того, по-видимому, преждевременно считать влияние диффузии равным нулю при $|P_e| > 2$.

Лучшим приближением к точной кривой дает схема со степенным законом [43]. Несколько более сложные, чем в комбинированной схеме, соотношения схемы со степенным законом не пред-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ставляют особых трудностей для расчета и обеспечивают наиболее близкое соответствие с экспоненциальной схемой.

Соотношения для определения a_E в схеме со степенным законом можно записать так:

для $P_e < -10$

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e; \tag{4.33а}$$

для $-10 \leqslant P_e < 0$

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 + 0{,}1P_e)^5 - P_e; \tag{4.33б}$$

для $0 \leqslant P_e \leqslant 10$

$$\frac{a_E}{D_e} = (1 - 0{,}1P_e)^5; \tag{4.33в}$$

для $P_e > 10$

$$\frac{a_E}{D_e} = 0. \tag{4.33г}$$

Сравнивая эти выражения с (4.29), вндим, что при $|P_e| > 10$ схема со степенным законом совпадает с комбиннрованной схемой. В компактном виде (4.33) можно переписать так:

$$a_E = D_e\left[\left|0, \left(1 - \frac{0{,}1|F_e|}{D_e}\right)^5\right|\right] + [|0, -F_e|]. \tag{4.34}$$

О близости схемы со степенным законом к точной экспоненциальной схеме можно судить по данным, приведенным в табл. 4.1; как

Таблица 4.1. Сравнение значений коэффициентов для схем со степеиным аакоиом и экспоненциальной

P_e	a_E/D_e		P_e	a_E/D_e	
	Схема со степенным законом	Экспоненциальная схема		Схема со степенным законом	Экспоненциальная схема
—20	20,00	20,00	0,5	0,7738	0,7707
—10	10,00	10,00	1	0,5905	0,5820
—5	5,031	5,034	2	0,3277	0,3130
—4	4,078	4,075	3	0,1681	0,1572
—3	3,168	3,157	4	0,07776	0,07463
—2	2,328	2,313	5	0,03125	0,03392
—1	1,590	1,582	10	0	0,00045
—0,5	1,274	1,271	20	0	$4{,}1 \cdot 10^{-8}$
0	1	1			

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

видно, отличие между двумя схемами настолько мало, что не выявляется при графическом сравнении.

Как упоминалось ранее, схема со степенным законом рекомендуется для аппроксимации задач конвекции и диффузии, несмотря на то что для некоторых задач комбинированная схема может давать вполне удовлетворительные результаты.

Общая формулировка дискретного аналога. Чтобы получить дальнейшее представление об аппроксимации задач конвекции и диффузии и построить общие рамки, в которые можно было бы вписать различные схемы, рассмотренные до сих пор, необходимо исследовать некоторые общие свойства использованных коэффи-

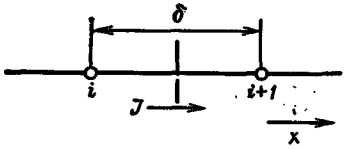


Рис. 4.5. Суммарный поток J между двумя узловыми точками

циентов. Рассмотрим узловые точки i и $i+1$, разделенные расстоянием δ, как показано на рис. 4.5. Запишем суммарный поток J, проходящий через грань контрольного объема, расположенную между этими узловыми точками. Используя уравнение (4.19), получаем

$$J^* \equiv \frac{J\delta}{\Gamma} = P\Phi - \frac{d\Phi}{d(x/\delta)}, \qquad (4.35)$$

где $P=\rho u\delta/\Gamma$ — число Пекле. Значение Φ на грани контрольного объема представим как некоторое взвешенное среднее Φ_i и Φ_{i+1}, хотя градиент $d\Phi/d(x/\delta)$ умножается на $\Phi_{i+1}-\Phi_i$. Далее предположим, что

$$J^* = P[\alpha\Phi_i + (1-\alpha)\Phi_{i+1}] - \beta(\Phi_{i+1}-\Phi_i), \qquad (4.36)$$

где α и β — безразмерные множители, зависящие от P. Аналогичным образом J^* можно представить в виде

$$J^* = B\Phi_i - A\Phi_{i+1}, \qquad (4.37)$$

где A и B — безразмерные коэффициенты, которые являются функциями числа P (коэффициент A содержит величины в точке $i+1$, расположенной перед гранью контрольного объема, B — в точке i за гранью контрольного объема, что соответствует выбранному направлению координаты.)

Свойства A и B. Два свойства коэффициентов A и B необходимо знать при изучении их зависимости от числа P. Если $\Phi_i=\Phi_{i+1}$, то диффузионный поток равен нулю. В этом случае J будет определяться только конвективным потоком $\rho u\Phi_i$, а безразмерный тепловой поток

$$J^* = P\Phi_i = P\Phi_{i+1}. \qquad (4.38)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Комбинируя уравнения (4.37) и (4.38), получаем [1]

$$B = A + P. \tag{4.39}$$

Другим свойством A и B является их взаимная симметрия. Если изменить направление координатой оси на обратное, то P будет равно $-P$, а A и B поменяются своими ролями. Таким образом, функции $A(P)$ и $B(P)$ будут связаны соотношениями

$$A(-P) = B(P); \tag{4.40а}$$

$$B(-P) = A(P). \tag{4.40б}$$

Следствия свойств. Зависимости A и B от числа P, которые можно найти из (4.22), показаны на рис. 4.6. Расстояние по вертикали между кривыми A и B равно P, кроме того, обе кривые расположены симметрично относительно $P=0$. Основным следствием из указанных свойств является то, что совокупность функций $A(P)$ и $B(P)$ можно описать функцией $A(P)$, известной только для положительных значений P (штриховая кривая на рис. 4.6). Отсюда для $P<0$, учитывая (4.39) и (4.40а), имеем

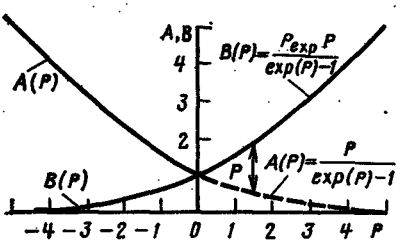


Рис. 4.6. Зависимость A и B от P

$$A(P) = B(P) - P = A(-P) - P = A(|P|) - P. \tag{4.41}$$

Таким образом, для всех значений P, положительных и отрицательных, можно записать

$$A(P) = A(|P|) + [|-P, 0|] \tag{4.42}$$

и затем, используя (4.39), получить

$$B(P) = A(|P|) + [|P, 0|]. \tag{4.43}$$

Кроме того, запишем два следующих соотношения, получеиных с учетом (4.37) и (4.39):

$$J^* - P\Phi_i = A(\Phi_i - \Phi_{i+1}); \tag{4.44}$$

$$J^* - P\Phi_{i+1} = B(\Phi_i - \Phi_{i+1}). \tag{4.45}$$

Рассмотрим теперь соотношение (4.37) для потока на гранях контрольного объема e и w и используем (4.42) и (4.43). Тогда получим общую форму дискретного аналога для задач конвекции и диффузии:

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W, \tag{4.46}$$

[1] Или из (4.36) и (4.37) находим $B=P\alpha+\beta$ и $A=P\alpha+\beta-P$. Отсюда также получаем (4.39).

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + [|-F_e, 0|]; \\ a_W &= D_w A(|P_w|) + [|F_w, 0|]; \\ a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_W). \end{aligned}\right\} \qquad (4.47)$$

Описанные выше схемы теперь можно получать просто различным выбором функции $A(|P|)$. Выражения для $A(|P|)$, соответствующие рассмотренным схемам, приведены в табл. 4.2 и графически показаны на рис. 4.7. Степень соответствия каждой функции опре-

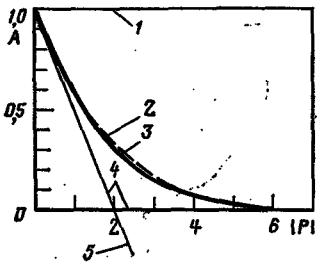


Рис. 4.7. Зависимость A от $|P|$ для различных схем:
1 — против потока; *2* — со степенным законом; *3* — экспоненциальной; *4* — комбинированной; *5* — центрально-разностной

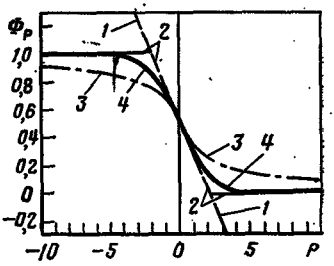


Рис. 4.8. Зависимость Φ_P от числа Пекле, полученная по различным схемам:
1 — центрально-разностной; *2* — комбинированной; *3* — против потока; *4* — со степенным законом и расчет по точному решению

деляется путем непосредственного сравнения с точным распределением.

Таблица 4.2. **Функция $A(|P|)$ для различных схем**

Схема	Зависимость для $A(\|P\|)$
Центрально-разностная	$1-0{,}5\|P\|$
С разностями против потока	1
Комбинированная	$[0{,}5-0{,}5\|P\|]$
Со степенным законом	$[0,(1-0{,}1\|P\|)^5]$
Экспоненциальная (точная)	$\|P\|/[\exp(\|P\|)-1]$

Результаты применения различных схем. Прежде чем перейти от одномерной задачи к многомерной, рассмотрим значения Φ_P, полученные при использовании различных схем для заданных Φ_E и Φ_W. Без потери общности положим $\Phi_E=1$ и $\Phi_W=0$. Далее предположим, что отрезки $(\delta x)_e$ и $(\delta x)_w$ равны, при этом Φ_P будет функцией $P=\rho u\delta x/\Gamma$. Зависимость Φ_P от P, полученная по раз-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

личным схемам, показана на рис. 4.8 (результаты расчета по схеме со степенным законом и точному решению так близки, что изображены на рисунке одной кривой). Все схемы, за исключением центрально-разностной, дают результаты, которые можно назвать физически реальными, а центрально-разностная схема дает значения, которые лежат вне области [0, 1], определенной крайними значениями.

Поскольку сеточное число Пекле определяет поведение численных схем, в принципе возможно для центрально-разностной схемы изменить сетку (т. е. использовать меньшие δx), чтобы на ней получать разумные решения до тех пор, пока P является достаточно малым (менее 2). В большинстве практических задач этот способ, однако, требует использования очень мелких сеток, которые обычно не применимы из экономических соображений. В любом случае мы можем не принимать такого ограничения до тех пор, пока будем рассматривать процедуры, которые позволят получить физически реальные решения даже на грубых сетках.

4.3. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ

На данном этапе имеются все составляющие, необходимые для получения дискретного аналога, соответствующего общему дифференциальному уравнению (4.2). Сначала найдем аппроксимацию двухмерного уравнения, но ту же процедуру применим и к трехмерному случаю.

Рассмотрим контрольный объем (рис. 4.9). Используя опыт, приобретенный при анализе одномерной задачи для получения суммарного теплового потока J_e, и предположив, что найденное выражение применимо ко всей грани контрольного объема площадью $\Delta y \times 1$, сможем сразу записать дискретный аналог для двухмерной задачи.

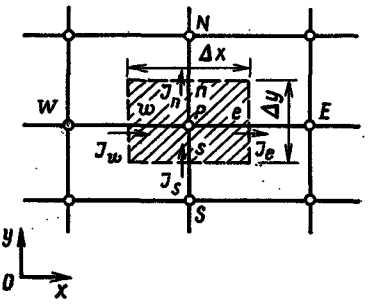


Рис. 4.9. Контрольный объем (заштрихованная область) для двухмерного случая

Подробности получения дискретного аналога. При рассмотрении одномерного случая было показано, что a_P оказывается равным $a_E + a_W$ только тогда, когда удовлетворено уравнение неразрывности. Таким образом, наше основное правило относительно суммы соседних коэффициентов (правило 4) может быть удовлетворено только тогда, когда в рассмотрение включено уравнение неразрывности. Этот вывод подтверждается следующим образом.

Уравнение (4.2) в двухмерной форме можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S, \qquad (4.48)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где J_x и J_y — суммарные (конвекция плюс диффузия) потоки, определенные следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} J_x &\equiv \rho u\Phi - \Gamma \partial\Phi/\partial x; \\ J_y &\equiv \rho v\Phi - \Gamma \partial\Phi/\partial y, \end{aligned}\right\} \qquad (4.49)$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях осей x и y. Интегрирование уравнения (4.48) по контрольному объему, показанному на рис. 4.9, дает

$$\frac{(\rho_P\Phi_P - \rho_P^0\Phi_P^0)\,\Delta x\Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C + S_P\Phi_P)\,\Delta x\Delta y, \qquad (4.50)$$

где источниковый член линеаризован стандартным образом, а для нестационарного члена ρ_P и Φ_P полагаются преобладающими по всему контрольному объему. Старые значения (на предыдущем шаге по времени) обозначаются ρ_P^0 и Φ_P^0. В соответствии с полностью неявным способом аппроксимации все другие величины (не имеющие верхних индексов) рассматриваются как новые значения. Величины J_e, J_w, J_n и J_s представляют собой проинтегрированные по граням контрольного объема суммарные потоки, т. е. $J_e = \int J_x dy$ для грани e и т. д.

Аналогичным образом можно проинтегрировать уравнение неразрывности (4.1) по контрольному объему

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)\,\Delta x\Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0, \qquad (4.51)$$

где F_e, F_w, F_n и F_s — массовые расходы потока через грани контрольного объема. Если ρu в точке e считается преобладающей по всей грани e контрольного объема, то

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y. \qquad (4.52а)$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} F_w &= (\rho u)_w\,\Delta y; \\ F_n &= (\rho v)_n\,\Delta x; \\ F_s &= (\rho v)_s\Delta x. \end{aligned}\right\} \qquad (4.52б)$$

Если умножить уравнение (4.51) на Φ_P и вычесть его из уравнения (4.50), получим

$$(\Phi_P - \Phi_P^0)\frac{\rho_P^0\,\Delta x\Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e\Phi_P) - (J_w - F_w\Phi_P) + (J_n - F_n\Phi_P) - (J_s - F_s\Phi_P) = (S_C + S_P\Phi_P)\,\Delta x\Delta y. \qquad (4.53)$$

Этот способ с использованием (4.50) и (4.51) позволяет получить (4.53), являющееся дискретным аналогом комбинации уравнений (4.1) и (4.2), на основе которых получено (4.3). Другим способом

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

можно получить дискретный аналог из уравнения (4.3), но этот способ не так удобен.

Предположение о постоянстве ряда величин на гранях контрольного объема дает возможность применить опыт, полученный при анализе одномерной задачи, к двухмерному случаю. Напомним здесь, что (4.44) и (4.45) дают способ выражения таких членов, как $J_e - F_e\Phi_P$ и $J_w - F_w\Phi_P$. Используем это следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} J_e - F_e\Phi_P &= a_E(\Phi_P - \Phi_E); \\ J_w - F_w\Phi_P &= a_W(\Phi_W - \Phi_P), \end{aligned}\right\} \qquad (4.54)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= D_eA(|P_e|) + [|-F_e, 0|]; \\ a_W &= D_wA(|P_w|) + [|F_w, 0|]. \end{aligned}\right\} \qquad (4.55)$$

Здесь D_e и D_w подобно F_e и F_w содержат площадь $\Delta y \times 1$ граней e и w [см. (4.58)]. Используя выражения для $J_n - F_n\Phi_P$ и $J_s - F_s\Phi_P$, можно записать окончательный вид дискретного аналога. Уравнения (4.54) свидетельствуют, что правило относительно суммы соседних коэффициентов легко выполняется.

Когда заданные поля скорости и плотности удовлетворяют дискретному аналогу уравнения неразрывности, приведенные выше вывод и вывод, основанный на (4.50), будут давать идентичные дискретные аналоги. Однако когда заданные поля не удовлетворяют уравнению неразрывности, эти два вывода дают разные уравнения и приводят к разным решениям. Предпочтем запись, которая удовлетворяет основному правилу по причинам, изложенным в гл. 2.

В каком случае можно встретиться с полями течения, которые не удовлетворяют уравнению неразрывности? Такая возможность появляется, поскольку часто поле течения не является действительно заданным, а рассчитывается итерационным методом точно так же, как и зависящий от температуры коэффициент теплопроводности в задаче теплопроводности. Перед тем как достигается окончательная сходимость, приближенные поля течения на промежуточных итерациях могут не удовлетворять уравнению неразрывности. По этой причине необходимо специально заботиться о соблюдении правила 4.

Окончательный вид дискретного аналога. Двухмерный дискретный аналог можно записать в следующем виде:

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + b, \qquad (4.56)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_E = D_eA(|P_e|) + [|-F_e, 0|]; \quad a_W = D_wA(|P_w|) + [|F_w, 0|]; \\ &a_N = D_nA(|P_n|) + [|-F_n, 0|]; \quad a_S = D_sA(|P_s|) + [|F_s, 0|]; \\ &b = S_C\Delta x\Delta y + a_P^0\Phi_P^0; \\ &a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P\Delta x\Delta y; \quad a_P^0 = \frac{\rho_P^0\Delta x\Delta y}{\Delta t}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.57)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Здесь Φ_P^0 и ρ_P^0 обозначают известные значения для времени t, а все другие величины (Φ_P, Φ_E, Φ_W, Φ_N, Φ_S и т. д.) представляют собой неизвестные величины для времени $t+\Delta t$. Массовые расходы F_e, F_w, F_n и F_s определены уравнениями (4.52). Соответствующие проводимости представим в виде

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \Gamma_e \Delta y/(\delta x)_e; \quad D_w = \Gamma_w \Delta y/(\delta x)_w; \\ D_n &= \Gamma_n \Delta x/(\delta y)_n; \quad D_s = \Gamma_s \Delta x/(\delta y)_s, \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

а числа Пекле

$$P_e = F_e/D_e; \quad P_w = F_w/D_w; \quad P_n = F_n/D_n; \quad P_s = F_s/D_s. \tag{4.59}$$

Функцию $A(|P|)$ можно взять из табл. 4.2 соответственно выбранной схеме. Рекомендуется схема со степенным законом, для которой

$$A(|P|) = [|0, (1-0,1|P|)^5|]. \tag{4.60}$$

Следует отметить, что даже на этой стадии физический смысл различных коэффициентов в (4.56) понятен. Коэффициенты в соседних точках a_E, a_W, a_N и a_S учитывают влияние конвекции и диффузии для четырех граней контрольного объема, которые зависят от массового расхода F и проводимости D. Член $a_P^0\Phi_P^0$ характеризует известную величину Φ для контрольного объема (для времени t), отнесенную к шагу по времени. Оставшиеся члены можно интерпретировать аналогичным образом.

4.4 ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Запишем дискретный аналог, основываясь на общем дифференциальном уравнении (4.2). Таким образом, для трехмерной задачи (с T и B, представляющими верхнюю и нижнюю грани в направлении оси z)

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + a_T\Phi_T + a_B\Phi_B + b, \tag{4.61}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_E &= D_e A(|P_e|) + [|-F_e, 0|]; \quad a_W = D_w A(|P_w|) + [|F_w, 0|]; \\ a_N &= D_n A(|P|) + [|-F_n, 0|]; \quad a_S = D_s A(|P_s|) + [|F_s, 0|]; \\ a_T &= D_t A(|P_t|) + [|-F_t, 0|]; \quad a_B = D_b A(|P_b|) + [|F_b, 0|]; \\ a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t}; \quad b = S_C \Delta x \Delta y z + a_P^0 \Phi_P^0; \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}\right\} \tag{4.62}$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Расходы и проводимости определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} F_e &= (\rho u)_e \Delta y \Delta z; & D_e &= \frac{\Gamma_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}; \\ F_w &= (\rho u)_w \Delta y \Delta z; & D_w &= \frac{\Gamma_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}; \\ F_n &= (\rho v)_n \Delta z \Delta x; & D_n &= \frac{\Gamma_n \Delta z \Delta x}{(\delta y)_n}; \\ F_s &= (\rho v)_s \Delta z \Delta x; & D_s &= \frac{\Gamma_s \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s}; \\ F_t &= (\rho w)_t \Delta x \Delta y; & D_t &= \frac{\Gamma_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}; \\ F_b &= (\rho w)_b \Delta x \Delta y; & D_b &= \frac{\Gamma_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b}. \end{aligned}\right\} \quad (4.63)$$

Число Пекле P определяется как отношение F и D, таким образом, $P_e = F_e/D_e$ и т. д. Значение функции $A(|P|)$ приведено в табл. 4.2 для различных схем. Для аппроксимации со степенным законом эта функция имеет вид

$$A(|P|) = [|0, (1 - 0{,}1\,|\,P\,|)^5|]. \quad (4.64)$$

4.5. ОДНОСТОРОННЯЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КООРДИНАТА

В гл. 1 отмечалось, что координаты могут подразделяться на одно- и двухсторонние, причем односторонняя координата имеет некоторые расчетные преимущества. Время является односторонней координатой, и это по существу использовалось в организации процедуры движения во времени. При рассмотрении задачи конвекции и диффузии показано, что пространственная координата может также стать односторонней.

Что делает пространственную координату односторонней. Из рис. 4.4 или 4.6 видно, что коэффициент в соседней вниз по потоку точке становится малым, если число Пекле велико. Если число Пекле больше 10, то согласно схеме со степенным законом коэффициент в близлежащей точке вниз по потоку будет равен нулю (комбинированная схема дает нулевое значение для чисел Пекле, больших 2). Предположим, что в двухмерном случае (рис. 4.10) имеет место высокая скорость течения в положительном направлении оси x, тогда для всех узловых точек P в направлении оси y коэффициенты a_E будут равны нулю. Другими словами, Φ_P зависит от Φ_W, Φ_N и Φ_S, но не от Φ_E. Таким образом, координата x станет односторонней, так как значения Φ в любой точке не будут зависеть от ее значений вниз по потоку. Процедура пошагового перемещения будет, таким образом, возможной в направлении оси x.

Даже если пространственная координата не является односторонней в пределах всей расчетной области, ее локальное одно-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

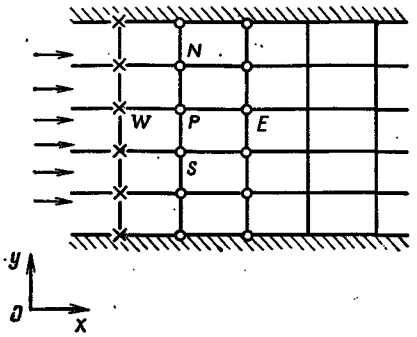


Рис. 4.10. Задача с односторонней координатой

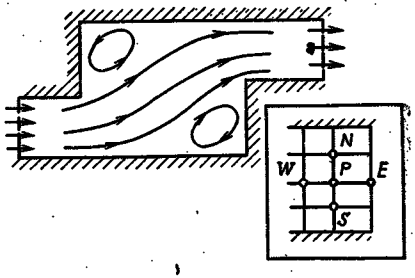


Рис. 4.11. Пример выходной границы потока

стороннее поведение часто используется при аппроксимации граничных условий.

Условие на выходной границе потока. Аппроксимация граничных условий детально рассматривалась в гл. 3. Предполагается, что аналогичная аппроксимация применима для задачи конвекции и диффузии. Однако на выходной границе потока, т. е. там, где жидкость покидает расчетную область, обычно неизвестны ни значения Ф, ни ее поток. Например, для выходной границы (рис. 4.11) могут быть неизвестны значения температур или теплового потока. Как в этом случае можно решить задачу? Ответ удивительно прост: на выходной границе потока нет необходимости иметь информацию. Рассмотрим узловую точку, показанную на вставке рис. 4.11. Для всех узловых точек P, ближайших к выходной границе потока, коэффициенты $a_E=0$, если число Пекле достаточно велико. Таким образом, все коэффициенты, умноженные на граничные значения, будут равны нулю, и, следовательно, нет необходимости в граничных значениях. Другими словами, в области вблизи выходной границы потока для больших чисел Пекле наблюдается локальное одностороннее поведение; поскольку точки на границе расположены вниз по потоку от расчетной области, то они не влияют на решение.

Рассмотренный выше вывод справедлив для очень больших чисел Пекле. Но при отсутствии информации о граничных условиях всегда можно предположить, что диффузионный коэффициент Г на внешней границе мал, т. е. оправдывается допущение о больших числах Пекле. К такому предположению, которое немного не соответствует действительности, необходимо прибегнуть, если надо получить осмысленные решения при отсутствии какой-либо информации о выходной границе потока. Неточность результатов, если она имеется, вызвана предположением о возможности рассматривать расчетную область изолированной от той части, которая лежит вниз по потоку за выходной границей.

Если диффузия на выходной границе потока по ряду причин оказывается важной, то следует сделать вывод, что граница рас-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

полагалась неудачно. Границу без возмущений (спокойную) можно рассматривать как приемлемую внешнюю границу потока. Особенно плохим выбором расположения выходной границы потока будет тот, при котором на некоторой части границы есть вторичные токи. Пример этого показан на рис. 4.12. При таком неудачном выборе границы нельзя получить имеющее физический смысл решение.

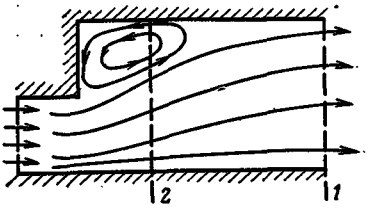


Рис. 4.12. Выбор расположения выходной границы потока:
1 — удачный; *2* — неудачный

На данном этапе целесообразно остановиться на способах задания граничных условий для задач конвекции и диффузии. Всюду, где нет течения жидкости через границу расчетной области, поток на границе является чисто диффузионным потоком и, следовательно, применимы способы, описанные в гл. 3. Для тех частей границы, где жидкость втекает в рассматриваемую область, обычно значения Ф известны (задача является некорректно поставленной, если неизвестна величина Ф, которую поток жидкости приносит с собой). Части границы, в пределах которых жидкость вытекает из расчетной области, образуют выходную границу потока, которая уже обсуждалась.

4.6. СХЕМНАЯ ИСКУССТВЕННАЯ ДИФФУЗИЯ

Обсудим вопрос, который вызывает большую полемику, недоразумения и непонимание среди практиков, занимающихся численными расчетами. В этом параграфе рассмотрена схемная искусственная диффузия, которая часто совершенно неправильно истолковывается, но которая правильно отражает основное слабое место большинства аппроксимаций задач конвекции и диффузии.

Общий взгляд на искусственную диффузию. Обычно встречаются следующие точки зрения: 1) центрально-разностная схема имеет второй порядок аппроксимации, в то время как схема с разностями против потока имеет только первый порядок аппроксимации; 2) схема с разностями против потока вызывает появление сильной схемной искусственной диффузии. Основной смысл этих утверждений состоит в том, что центрально-разностная схема лучше, чем схема с разностями против потока.

Действительно, разложение в ряды Тэйлора может показать, что центрально-разностная схема обеспечивает порядок аппроксимации $(\Delta x)^3$, в то время как схема с разностями против потока — порядок $(\Delta x)^2$. Однако поскольку изменение Ф от x, возникающее в задачах конвекции и диффузии, является экспоненциальным, то усеченные ряды Тэйлора не могут хорошо аппроксимировать это изменение для любых значений Δx, кроме крайне малых (или, вернее, соответствующих числ Пекле). Для больших значений Δx,

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

которые встречаются во многих практических задачах, анализ, основанный на разложенни в ряды Тэйлора, приводит к неправнльным результатам и, как мы видели, схема с разностями против потока дает более реальные результаты, чем центрально-разностная.

Если сравнить коэффициенты в схемах центрально-разностной и с разностями против потока, то можно увидеть, что схема с разностями против потока эквивалентна центрально-разностной схеме, в которой Г заменен на $\Gamma+\rho u\delta x/2$. Другими словамн, схема с разностями против потока, по-видимому, увеличивает действительный диффузионный коэффициент Г путем введения фиктивного (и, следовательно, ложного) диффузионного коэффициента $\rho u\delta x/2$. С одной стороны, такое введение искусственного диффузионного коэффициента считается неточным, сильно искажающим действительность и, следовательно, плохим. Но, с другой стороны, неточность приведенного выше довода связана с тем, что центрально-разностная схема представляется как точная и образцовая (или лежащее в ее основе разложение в ряды Тэйлора как надежное) и рассмотрение схемы с разностями против потока проводится с этой точки зрения. Такой подход будет обнаруживать схемную искусственную диффузию даже в экспоненциальной схеме, которая является точным решением задачи. Выводы, представленные в этой главе, приводят к заключению, что так называемый коэффициент искусственной диффузии $\rho u\delta x/2$ является желательным добавлением к действительному коэффициенту диффузии при больших числах Пекле, так как он действительно имеет тенденцию исправлять погрешности решения, появляющиеся при использовании центрально-разностной схемы.

Нет сомнения в том, что для очень малых чисел Пекле центрально-разностная схема является более точной, чем схема с разностями против потока. Это уже показывалось на некоторых графиках; схемы, которым было отдано предпочтение, такие, как экспоненциальная, комбинированная и схема со степенным законом, действительно соответствуют центрально-разностной схеме при очень малых числах Пекле. Во всяком случае, вопрос об искусственной диффузии не является очень серьезным для малых чисел Пекле, поскольку реальный коэффициент диффузии является очень большой величиной. Для больших чисел Пекле вопрос об искусственной диффузии остается достаточно важным как для центрально-разностной, так и для других рассмотренных схем. По этой причине в дальнейшем будем рассматривать в основном большие числа Пекле и схемы с разностями против потока, однако полученные выводы будут применимы и к схемам экспоненциальной, комбинированной и со степенным законом.

Детальный анализ искусственной диффузии. Поскольку общее рассмотрение схемной искусственной диффузии не дало положительных результатов, попробуем ответить на вопрос, что же действительно должна описывать схемная искусственная диффузия. Во-первых, необходимо узнать, представляет ли собой искус-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ственная диффузия многомерное явление; этого явления безусловно нет в случаях установившихся одномерных задач (в нестационарных одномерных задачах имеет место некоторый вид схемной искусственной диффузии, однако в данном параграфе основное внимание будет уделено стационарным случаям).

Для того чтобы наглядно представить, что означает схемная искусственная диффузия, рассмотрим случай, показанный на рис. 4.13. Два параллельных потока с равной скоростью, но

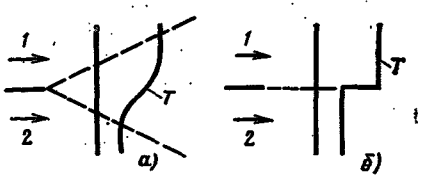


Рис 4.13. Распределение температуры при наличии (*а*) и отсутствии (*б*) диффузии:
1 — горячий поток; *2* — холодный поток

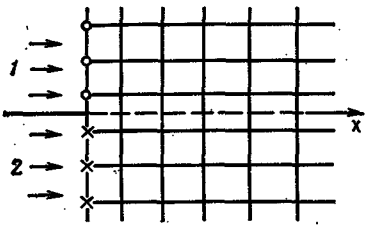


Рис. 4.14. Случай потока, направленного вдоль оси *x*:
1 — горячий поток; *2* — холодный поток

неравными температурами соприкасаются друг с другом. Если диффузионный коэффициент $\Gamma \neq 0$, то будет образовываться слой смешения, в котором температура постепенно изменяется от большего значения к меньшему и ширина этого слоя в поперечном направлении будет увеличиваться вниз по потоку. Если $\Gamma = 0$, то слой смешения не образуется и будет иметь место скачок температуры в поперечном направлении. Для анализа понятия схемной искусственной диффузии рассмотрим случай, в котором реальная диффузия считается равной нулю. Если численное решение при $\Gamma = 0$ дает размытые профили температуры (характерные для ненулевой диффузии), можно сделать вывод, что численная схема вызывает появление схемной искусственной диффузии.

Для $\Gamma = 0$ центрально-разностная схема приведет к $a_P = 0$. Поэтому обычные итерационные методы для решения алгебраических уравнений использовать нельзя. Если попытаться получить решение уравнения прямым методом, то либо единственное решение не будет найдено, либо решения окажутся очень нереальными.

Смысл схемы с разностями против потока. Попытаемся решить задачу, показанную на рис. 4.13, *б*, с помощью схемы с разностями против потока для двух ориентаций разностной сетки.

1. Однородный поток в направлении оси *x*. Рассмотрим случай, показанный на рис. 4.14. Поток направлен строго вдоль оси *x*, и левая граница имеет известный температурный профиль со скачком. Поскольку $\Gamma = 0$ и в направлении оси *y* течение отсутствует, коэффициенты a_N и a_S будут равны нулю. Коэффициент a_E в близлежащей вниз по потоку соседней точке также должен

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

быть равен нулю. Таким образом, a_P должно равняться a_W, что приведет к

$$\Phi_P = \Phi_W \tag{4.65}$$

В результате данные значения вверх по потоку будут устанавливаться во всех точках вдоль каждой горизонтальной линии. Следовательно, скачкообразный характер профиля температуры, имеющий место в сечениях вверх по потоку, будет сохранен. Поэтому в этом случае искусственная диффузия не появляется.

2. Равномерный поток, направленный под углом 45° к узловым линиям сетки. Ситуация значительно изменяется, когда та же задача решается на сетке, узловые линии которой составляют 45° с направлением потока. Для удобства используем равномерную сетку с $\Delta x = \Delta y$. Скорости потока в направлениях осей x и y равны. Результатом этого является равенство коэффициентов a_W и a_S в соседних близлежащих точках вверх по потоку, в то время как значения a_E и a_N в точках вниз по потоку оказываются равными нулю. Таким образом, имеем

$$\Phi_P = 0{,}5\Phi_W + 0{,}5\Phi_S \tag{4.66}$$

Для сетки, показанной на рис. 4.15, разрыв профиля температуры обеспечивается равенством всех температур [1] 100 вдоль левой и 0 вдоль нижней границ. Результат решения во внутренних точках записан около каждой узловой точки. Если схемная искусственная диффузия отсутствует, то сверху от диагонали, направленной из нижнего левого угла, должны получиться значения 100 и значения 0 вниз от диагонали. Фактическое решение дает неточный профиль температуры, подобный тому, какой изображен на рис. 4.13, *а*.

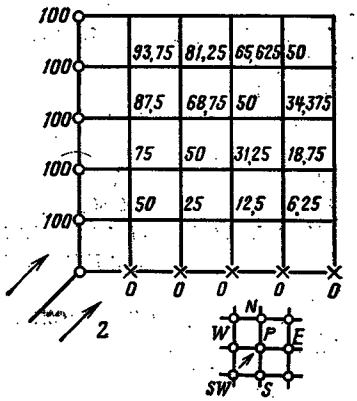


Рис. 4.15. Случай потока, направленного под углом 45° к сеточным линиям:
1 — горячий поток; *2* — холодный поток

Замечания. 1. Искусственная диффузия имеет место, когда поток наклонен по отношению к линиям сетки и существует ненулевой градиент зависимой переменной в направлении по нормали к потоку.

2. Приближенное выражение для коэффициента искусственной диффузии в двухмерном случае дано в [17]:

$$\Gamma_{\text{иск}} = \frac{\rho U \Delta x \Delta y \sin 2\theta}{4\,(\Delta y \sin^3\theta + \Delta x \cos^3\theta)}, \tag{4.67}$$

[1] Может оказаться, что из постановки задачи для рис. 4.13 значения температур вдоль левой и нижней границ сетки (рис. 4.15) действительно неизвестны. Однако если известно точное решение задачи, то можно выбрать область, в пределах которой точное решение справедливо и значения на границе могут быть заданы на основе точного решения. Такой метод построения тестовых задач, точное решение которых известно, использовался в [72].

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где U — модуль вектора скорости; θ — угол наклона (от 0 до 90°) вектора скорости к направлению оси x. Из этого уравнения видно, что искусственная диффузия не появляется, если результирующий поток направлен вдоль одной из сеточных линий; кроме того, искусственная диффузия является максимальной, когда направление потока составляет угол 45° с линиями сетки.

3. Вклад искусственной диффузии можно уменьшить, используя меньшие шаги Δx и Δy и располагая сетку (если это возможно) так, чтобы сеточные линии более или менее совпадали с направлением потока.

4. Поскольку реальная диффузия имеет место во многих задачах, то достаточно сделать искусственную диффузию малой по сравнению с реальной.

5. Использование центрально-разностной схемы не является средством избавления от искусственной диффузии. Как упоминалось ранее, центрально-разностная схема дает совершенно нереальные решения, если рассматриваются большие числа Пекле.

6. Основной причиной возникновения искусственной диффузии является практика обращения с потоком через каждую грань контрольного объема как с локально-одномерным. Для случая, показанного на вставке рис. 4.15, значение Ф, переносимое наклонным потоком к узловой точке P, на самом деле приходит из угловой узловой точки SW. Однако этот перенос представляется как действие двух отдельных потоков, поступающих от узловых точек W и S.

7. Схемы, которые обеспечили бы меньший вклад искусственной диффузии, должны учитывать многомерную природу потока. Для этого также необходимо включать большее число соседних точек в дискретный аналог. Хотя несколько таких схем разработано [68] и показано значительное уменьшение искусственной диффузии, но они являются гораздо более сложными и пока недостаточно опробованными. По этим причинам они здесь не обсуждаются.

8. Более подробное обсуждение искусственной диффузии дано в [67].

4.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закончено построение общего дискретного аналога для зависимой переменной Ф. Добавление одного конвективного члена привело к ряду интересных соображений. Полученный дискретный аналог обеспечивает физически реальное поведение решения и, таким образом, гарантирует успешные расчеты при наличии течения жидкости. В большинстве случаев, конечно, должно также рассчитываться само поле течения. Ниже будет уделено внимание этому вопросу.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ЗАДАЧИ

4.1. Для стационарного двухмерного случая, переменная подчиняется уравнению сохранения

$$\operatorname{div}(\rho u \Phi) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \Phi) + a - b\Phi,$$

где $\rho=1$; $\Gamma=1$; $a=10$ и $b=2$. Поле течения является таким, что $u=1$ и $v=4$. Задана равномерная сетка, показанная на рис. 4.16, $\Delta x=\Delta y=1$. Значения Φ для четырех границ заданы. Принимая обозначение контрольного объема согласно способу A в § 3.6, рассчитайте значения Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4, используя: а) центрально-разностную схему, б) схему с разностями против потока, в) комбинированную схему, г) схему со степенным законом.

4.2. Получите точное решение уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(\rho u \Phi - \Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right) = S,$$

где ρu, Γ и S постоянны, граничные условия следующие: $\Phi=\Phi_0$ при $x=0$ и $\Phi=\Phi_L$ при $x=L$. Используя экспоненциальную схему, получите численное решение задачи для различных значений $\rho uL/\Gamma$ и $(SL^2/\Gamma)/(\Phi_L-\Phi_0)$. Получили ли вы хорошее соответствие с точным решением? Почему?

4.3. Прямоточный теплообменник подчиняется следующим уравнениям:

$$m_h c_h \frac{dT_h}{dx} = \frac{UA}{L}(T_c - T_h) \quad \text{и} \quad m_c c_c \frac{dT_c}{dx} = \frac{UA}{h}(T_h - T_c),$$

где m, c и T — массовая скорость потока, теплоемкость и температура; индексы h и c обозначают горячую и холодную жидкости соответственно; U — средний коэффициент теплопередачи между двумя жидкостями; A — общая площадь теплообменной поверхности; L — длина теплообменника. Входные температуры $T_{h,in}$ и $T_{c,in}$ заданы. Получите численное решение для безразмерных температур $(T_h-T_{c,in})/\Delta T$ и $(T_c-T_{c,in})/\Delta T$ как функций x/L при условии, что $m_h c_h = m_c c_c$ и $UA/m_h c_h = 1$. Разность температур $\Delta T = T_{h,in} - T_{c,in}$. Сопоставьте численные результаты с точным решением. (Несмотря на то что оба уравнения можно решить итерационным методом путем последовательного определения T_h и T_c, прямое одновременное решение часто является для таких случаев более целесообразным.) Такое решение можно получить, используя алгоритм для двух зависимых переменных, который был описан в задаче (3.17).

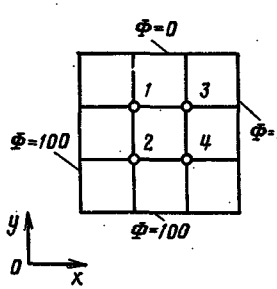


Рис. 4.16. Граничные условия для задачи 4.1

4.4. Рассмотрите одномерное распределение переменной Φ, определяемой конвекцией и диффузией. Поле течения создается с помощью потока в канале с пористыми стенками; m_x — расход вдоль канала в направлении оси x для любого x; m_L — расход через пористые стенки на единицу длины канала. Очевидно, что $dm_x/dx = -m_L$. Переменная Φ подчиняется уравнению

$$\frac{d}{dx}(m_x \Phi) + m_L \Phi_L - \Gamma A \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0,$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где A — площадь поперечного сечения канала. Когда m_L положительно (жидкость вытекает через стенки канала), Φ_L принимается как Φ внутри канала; когда m_L отрицательно (жидкость втекает в канал через стенки), Φ_L принимается равным Φ_0 — значению Φ в окружающей среде с внешней стороны канала. Для канала длиной l значения на границе: $\Phi=\Phi_1$ при $x=0$ и $\Phi=\Phi_0$ при $x=l$. Считайте m_L и ΓA постоянными. Используя схемы центрально-разностную и со степенным законом, найдите распределения безразмерной величины Φ для следующих двух случаев:

а) при $x=0$ $m_x l/(\Gamma A)=40$, при $x=l$ $m_x=0$;

б) при $x=0$ $m_x=0$, при $x=l$ $m_x l/(\Gamma A)=40$.

4.5. Запишите уравнение (4.4), заменив x на η, где η определяется следующим образом:

$$\eta=\int_0^x dx/\Gamma.$$

Покажите отсюда, что, так же как (4.17) является решением уравнения (4.4) для случая однородного Γ, решение для неоднородного Γ определяется следующим образом:

$$\frac{\Phi-\Phi_0}{\Phi_L-\Phi_0}=\frac{\exp(\rho u\eta)-1}{\exp(\rho u\eta_L)-1},$$

где η_L — значение η при $x=L$. Заметим, что $\rho u\eta_L$ — число Пекле. Если производная на этих линиях является непрерывной, получим (4.22), где P_e должно определяться как $P_e=(\rho u)_e(\delta\eta)_e$. Полагая, что значения Γ в узловой точке превалируют в пределах окружающего ее контрольного объема, можно выразить $(\delta\eta)_e$ через Γ и приращения интервала (см. рис. 3.1). Отсюда имеем

$$P_e=(\rho u)_e\left[\frac{(\delta x)_{e-}}{\Gamma_P}-\frac{(\delta x)_{e+}}{\Gamma_E}\right].$$

Глава 5

РАСЧЕТ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ

5.1. ОБОСНОВАНИЕ НЕОБХОДИМОСТИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТОДИКЕ

Основная трудность определения поля скорости. В гл. 4 была сформулирована процедура решения обобщенного дифференциального уравнения для переменной Φ при заданном поле скорости. Однако, как правило, за исключением некоторых весьма частных случаев, задать поле скорости не представляется возможным; для его нахождения необходимо рассчитать локальные составляющие скорости и поле плотности по соответствующим уравнениям. Составляющие скорости описываются уравнениями количества движения, являющимися частными случаями обобщенного дифференциального уравнения для Φ (в этом уравнении $\Phi=u$, $\Gamma=\mu$ и т. д.). Отсюда можно было бы заключить, что метод решения уравнений

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

импульсов нами уже разработан и можно найти поле скорости. Тогда в чем же трудность его определения?

Если трудностью оказывается нелинейность уравнений количества движения, то надо вспомнить, что при обсуждении решения задачи теплопроводности мы рассматривали способ учета нелинейности с помощью итераций. Например, зависимость коэффициента в конвективном члене ρu от зависимой переменной u уравнения количества движения аналогична с этой точки зрения зависимости коэффициента теплопроводности k от температуры T. Начав с некоторого начального поля скорости, мы могли бы решить уравнения итерационным методом и получить искомые составляющие скорости.

Действительная трудность расчета поля скорости связана с неизвестным полем давления. Градиент давления составляет часть источникового члена в уравнении количества движения, при этом нет явного уравнения для определения давления. При заданном поле давления решение уравнений количества движения не представляет особой сложности. Однако способ нахождения поля давления не очевиден.

Поле давления определяется через уравнение неразрывности. Если правильное поле давления подставить в уравнения количества движения, то получаемое из них поле скорости будет удовлетворять уравнению неразрывности. Такой косвенный способ нахождения давления не очень удобен для наших целей, если только не считать прямое решение всей системы уравнений, получаемой из дискретных аналогов уравнений количества движения и неразрывности. Так как мы предпочли итерационные методы решения дискретных аналогов даже для одной зависимой переменной, прямое решение полной системы уравнений для всех составляющих скорости и давления здесь не рассматривается [1].

Методы, основанные на решении уравнения для вихря. Связанные с нахождением давления трудности привели к возникновению методов, основанных на решении уравнений, получаемых при исключении давления из системы определяющих уравнений. При этом в случае двухмерных задач исключение давления из двух уравнений количества движения путем перекрестного дифференцирования каждого уравнения приводит к уравнению переноса вихря (это дифференцирование в общих чертах представлено в задаче 5.1). Вместе с введением функции тока для стационарных двухмерных течений этот метод является основой широко известного метода решения в переменных функция тока — вихрь, описанного, например, в [6, 18, 22, 62, 73], а также в [25].

---

[1] В некоторых методах, в особенности разработанных для течений сжимаемых сред, плотность ρ рассматривается как зависимая переменная уравнения неразрывности, а давление определяется с помощью уравнения состояния. Однако этот метод нельзя применить для решения задач о течениях жидкости с постоянной плотностью. В этих случаях важно влияние давления на скорость, а не на плотность.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Рассматриваемый метод имеет несколько особенностей. Давление не входит в число зависимых переменных, и вместо того чтобы иметь дело с двумя уравнениями количества движения и уравнением неразрывности, необходимо решить только два уравнения для нахождения функции тока — вихря. Некоторые из граничных условий записываются достаточно просто: если к расчетной области примыкает внешнее безвихревое течение, вихрь на границе удобно положить равным нулю. Однако метод решения в переменных функция тока —вихрь имеет серьезные недостатки. Условие для вихря на стенке задать трудно, и это часто осложняет получение сходящегося решения. Давление, которое было так успешно исключено из формулировки задачи, часто оказывается искомым конечным результатом решения или промежуточным результатом, необходимым для расчета плотности и других свойств жидкости. В этих случаях трудности, возникающие при определении давления по полю вихря, компенсируют преимущества использования переменных функция тока — вихрь. Кроме того, основным недостатком метода является невозможность использовать его в случае трехмерных задач, для которых не существует функции тока. Но большинство практических задач трехмерны, поэтому метод, ограниченный двумя измерениями, сильно проигрывает от этого существенного ограничения.

В трехмерном случае при введении вихря в качестве независимой переменной формулировка гидродинамической части задачи будет включать шесть независимых переменных, а именно три составляющие вихря и три составляющие вектора потенциала скорости (см., например, [3]). Таким образом, задача оказывается сложнее, чем при использовании непосредственно трех составляющих скорости и давления. Введение вектора вихря и вектора потенциала скорости вместо составляющих скорости и давления менее наглядно. Основываясь на желании разработать методы, обладающие физическим смыслом и наглядностью, мы стремимся создать метод, использующий так называемые основные переменные —составляющие скорости и давление.

Итак, основная задача настоящей главы — преобразование косвенной информации, заложенной в уравнение неразрывности, в алгоритм прямого расчета давления, при этом возникают некоторые трудности, которые рассмотрены ниже.

5.2. ТРУДНОСТИ РАСЧЕТА ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ

Аппроксимация градиента давления. При составлении дискретного аналога уравнения количества движения в направлении оси x для одномерного случая, показанного на рис. 5.1, единственной особенностью является представление члена $-dp/dx$, проинтегрированного по контрольному объему. В результате интегрирования в дискретный аналог войдет разность давлений $p_w - p_e$, которая представляет собой силу давления, приложенную к контрольному объему с единичной площадью поперечного сечения. Чтобы выра-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

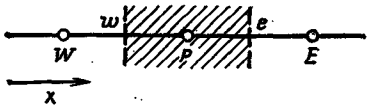


Рис. 5.1. Трехточечный шаблон (заштрихованная область — контрольный объем)

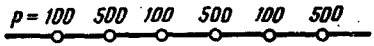


Рис. 5.2. Зигзагообразное поле давления

зить $p_w - p_e$ через значения давления в узловых точках, можно предположить, что давление между узловыми точками изменяется по линейному закону. Если грани контрольного объема e и w выбраны так, что они лежат посередине [1] между соответствующими узловыми точками, то можно записать

$$p_w - p_e = \frac{p_W + p_P}{2} - \frac{p_P + p_E}{2} = \frac{p_W - p_E}{2}. \qquad (5.1)$$

Таким образом, дискретный аналог уравнения количества движения будет содержать разность давлений между двумя не соседними точками. Это означает, что давление берется с сетки более грубой, чем основная, и это должно привести к снижению точности решения. Однако имеются и более серьезные недостатки метода. Они лучше видны из рис. 5.2, на котором поле давления представлено через его значения в узловых точках. Такое зигзагообразное поле нельзя считать физичным. Можно заметить, что для каждой узловой точки p соответствующий перепад давления $p_W - p_E = 0$, так как значения давления в соседних с p узловых точках равны между собой. Таким образом, ошибочным следствием данной аппроксимации будет то, что такое волнистое поле давления будет восприниматься в уравнении количества движения как однородное.

Эта трудность еще более усугубляется в двухмерном случае. Так же как на количество движения в направлении оси x влияет перепад давления $p_W - p_E$, на количество движения в направлении оси y влияет перепад давления $p_S - p_N$, при этом значение давления в точке P не играет никакой роли. Имея это в виду, можно сделать вывод о том, что показанное на рис. 5.3 поле давления, образованное из расположенных в шахматном порядке четырех произвольных значений давления, не даст силу давления в направлениях осей x или y. Таким образом, при рассмотренном способе дискретизации уравнений количества движения сильно неоднородное поле давления будет восприниматься как однородное. Если бы в процессе итерационного решения возникли такие поля давления, они бы не сохранились в процессе, так как уравнения количества движения «забудут» об этих полях.

Следует отметить, что конкретные значения давления на

[1] Это предположение сделано здесь только для простоты алгебраических выкладок. Если грани контрольного объема не лежат посередине между узловыми точками, обсуждаемые выше трудности не исчезают, а становятся не столь ясными. Итак, данное предположение делает дальнейший анализ более простым.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

рис. 5.2 и 5.3 не имеют какого-либо особого значения; они просто обозначают картину распределеиия, которую можно было бы составить из любых других значений. Легко представить, что в трехмерном случае может иметь место еще более сложная картина, которая будет восприниматься уравнениями количества движения как однородное поле давления. Если в процессе решения будет получено некоторое гладкое поле давления, можно составить любое количество дополнительных решений путем прибавления к этому решению так называемого шахматообразного поля давления. Так как это поле дает нулевой градиент давления, уравнение количества движения не почувствует его прибавления. Естественно, что численный метод, который допускает такие абсурдные решения, нежелателен.

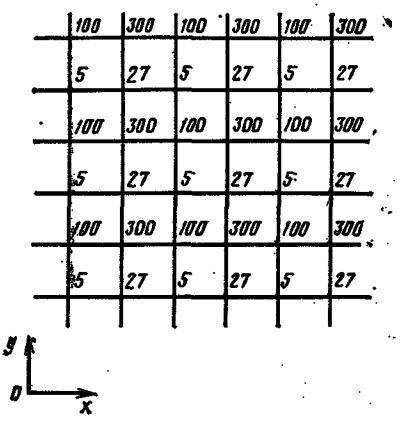


Рис. 5.3. Шахматное поле давления

Аппроксимация уравнения неразрывности. Аналогичная трудность возникает при построении дискретного аналога уравнения неразрывности. Для стационарного одномерного течения жидкости с постоянной плотностью уравнение неразрывности имеет вид

$$du/dx = 0. \tag{5.2}$$

Проинтегрировав это уравнение по изображенному на рис. 5.1 контрольному объему, получим

$$u_e - u_w = 0. \tag{5.3}$$

Так же как и ранее, используя кусочно-линейные профили для u и располагая грани контрольного объема посередине между узловыми точками, получаем

$$(u_P + u_E)/2 - (u_W + u_P)/2 = 0 \tag{5.4}$$

или

$$u_E - u_W = 0. \tag{5.5}$$

Итак, аппроксимация уравнения неразрывности привела к приравниванию скоростей в чередующихся узловых точках, а не в соседних. В результате дискретному аналогу (5.5) уравнения неразрывности может удовлетворять нефизичное поле скорости (рис. 5.4). Аналогичные картины полей всех составляющих ско-

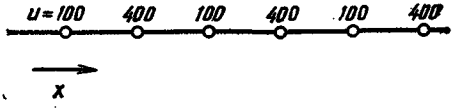


Рис. 5.4. Волнистое поле скорости

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

рости можно составить для двух- и трехмерных случаев; они будут удовлетворять уравнению неразрывности, но вряд ли могут быть получены как имеющие физический смысл решения задачи.

Эти трудности надо исключить до формулировки численного метода решения задачи в переменных, включающих составляющие скорости и давление. В технической литературе описаны методы, в которых этим трудностям не уделяется никакого специального внимания. Возможные нефизичные решения исключаются с помощью некоторой их специальной обработки на границах, переопределения граничных условий, нижней релаксации относительно гладкого начального приближения и т. п. Но большинство из этих методов воспримут нефизичные поля давления и скорости (рис. 5.2—5.4) как удовлетворительные решения; при отсутствии же специальных приемов всегда имеется опасность получения подобных решений.

Прежде чем перейти к изложению способа преодоления указанных трудностей, отметим, что сложности численного анализа связаны, по-видимому, с первыми производными. Поведение вторых производных обычно не создает сложностей. Кроме того, все осложнения, описанные в гл. 4, были связаны с первыми производными, входящими в конвективный член; и здесь первые производные давления (в уравнениях количества движения) и скорости (в уравнении неразрывности) также вызывают значительные затруднения.

5.3. ШАХМАТНАЯ СЕТКА

Описанные выше трудности можно преодолеть, если понять что не обязательно рассчитывать все переменные в одних и тех же узловых точках. Можно по желанию использовать для каждой зависимой переменной свою сетку. При расчете составляющих скорости значительную выгоду дает определение их на сетке, отличной от сетки, которая используется для всех других переменных. В результате такого подхода описанные в § 5.2 трудности полностью исчезнут. Смещенная или шахматная сетка для расчета составляющих скорости впервые была использована в [26] и применялась в других методах, развитых автором указанной работы и его сотр. Использование такой сетки лежит в основе процедур SIVA [*10*] и SIMPLE [55].

При расположенной в шахматном порядке сетке составляющие скорости рассчитываются для точек, лежащих на гранях контрольных объемов. Таким образом, составляющая скорости u вдоль оси x рассчитывается на гранях, перпендикулярных направлению оси x. Точки, в которых определяется u, показаны на рис. 5.5 короткими стрелками, а узловые точки (назовем их основными) изображены кружками. Штрихом обозначены грани контрольного объема. Следует отметить, что по отношению к узловым точкам основной сетки точки, в которых определяется u, смещены только в направлении оси x. Другими словами, эти точки лежат на от-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

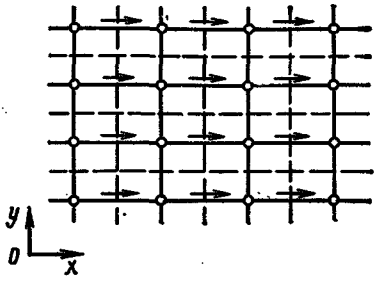


Рис 5.5. Расположение u в шахматном порядке:
Горизонтальные стрелки — места определения u, точки — места определения других переменных

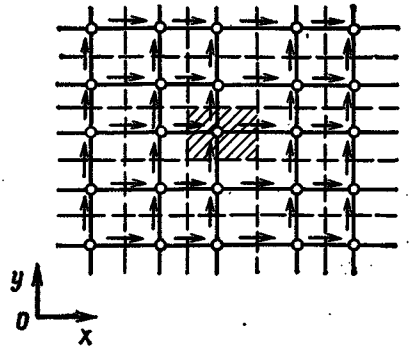


Рис. 5.6. Расположение u и v в шахматном порядке: Обозначения те же, что и на рис. 5.5, вертикальные стрелки — места определения v

резках, соединяющих две соседние (вдоль оси x) основные узловые точки. Находится ли точка, где определяется u, точно посередине между основными узловыми точками, зависит от того, как выделены контрольные объемы. Узловая точка для u должна лежать на грани контрольного объема независимо от того, находится ли последняя посередине между узловыми точками или нет.

Легко выбрать способ размещения узловых точек для составляющих v и w. На рис. 5.6 показана двухмерная сетка, где узловые точки для u и v помещены на соответствующих гранях контрольных объемов. Точно таким же образом можно сконструировать соответствующую трехмерную сетку.

Прямым следствием введения шахматной сетки является то, что массовый расход через грани контрольного объема (см. гл. 4, коэффициенты F) можно теперь определять без интерполяции соответствующей составляющей скорости. Однако важное преимущество шахматной сетки связано не с этой особенностью, хотя она и дает некоторые удобства при записи дискретного аналога обобщенного дифференциального уравнения для Ф.

Имеются два важных преимущества. Видно, что для типичного контрольного объема (заштрихованный участок на рис. 5.6) дискретный аналог уравнения неразрывности содержит разности составляющих скорости в соседних точках, а это приводит к тому, что волнистое поле скорости (см. рис. 5.4) не будет удовлетворять уравнению неразрывности. При использовании шахматной сетки только физичные поля скорости могут удовлетворять уравнению неразрывности. Другое важное преимущество шахматной сетки заключается в том, что разность давлений между двумя соседними узловыми точками определяет составляющую скорости в точке, расположенной между этими узловыми точками. Поэтому такие поля давления, какие показаны на рис. 5.2 и 5.3, не будут восприниматься как равномерные и не могут использоваться как возможные решения.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Итак, описанные в § 5.2 трудности являются результатом расчета всех переменных в одних и тех же узловых точках; они полностью исчезают при использовании шахматных сеток.

Однако следует учесть, что при использованин шахматной сетки надо предусмотреть в программе для ЭВМ соответствующую индексацню н хранение геометрической информации, связанной с расположением узловых точек для составляющих скорости, а также дополнительную интерполяцию результатов. Однако преимущества нспользования такой сетки намного превосходят дополнительиые сложности.

5.4. УРАВНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Еще раз напомним, что при заданном поле давлення решение уравнений количества движения можно получить с помощью днскретного аналога уравнения для обобщенной переменной Ф (см. гл. 4). Для уравнения колнчества движения Ф обозначает одну из составляющих скорости и коэффициенту Г н свободному члену S следует придать соответствующий смысл. Прн использованин шахматной сетки дискретные аналогн уравнений количества движения несколько отличаются от дискретных аналогов уравнений для других Ф, рассчитываемых в узлах основной сетки. Однако это отличне относится к несущественным деталям. Оно связано с использованием для аппроксимации уравнений количества движения контрольных объемов на шахматной сетке.

Контрольный объем для уравнення количества движення в направленни осн x показаи на рнс. 5.7. Если иметь в виду точки для

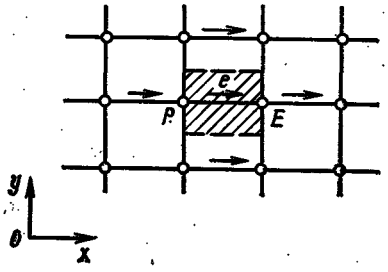
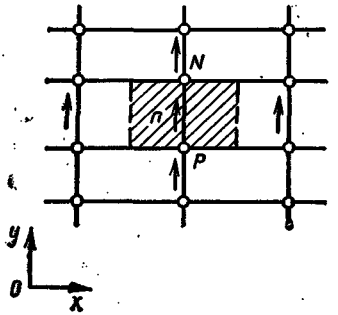


Рис. 5.7. Контрольный объем для u. Обозначения те же, что и на рис. 5.5



Рнс. 5.8. Контрольный объем для v. Обозиачения те же, что н на рис. 5.6

нахождения только составляющей u, в этом контрольном объеме нет иичего необычного. Его грани лежат между точкой e и соответствующими соседними точками для u. Однако он смещен по отношению к обычному контрольиому объему, расположенному вокруг основной узловой точкн P. Смещение объема произошло только в направлении осн x такнм образом, что перпендикулярные этому направлению гранн проходят через основные узловые

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

точки P и E. Отсюда видно одно из главных достоинств шахматной сетки: разность $p_P - p_E$ можно использовать для расчета силы давления, действующей на контрольный объем для скорости u.

Для расчета коэффициента диффузии и массового расхода на гранях контрольного объема, показанного на рис. 5.7, потребуется соответствующая интерполяция, но можно применять практически ту же формулировку, которая была описана в гл. 4. Результирующий дискретный аналог можно записать в виде

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e. \qquad (5.6)$$

Здесь число соседних членов зависит от размерности задачи. Для двухмерной задачи на рис. 5.7 показаны четыре точки вне контрольного объема, значения скорости в которых входят в соседние члены в (5.6); в трехмерном случае войдут шесть соседних значений u. Значения коэффициентов a_{nb} связаны с влиянием совместных конвективных и диффузионных процессов на гранях контрольного объема. Член b определяется так же, как в (4.57) и (4.62), но градиент давления не включен в составляющие источникового члена S_C или S_P. С градиентом давления связан последний член в (5.6). Так как требуется определить поле давления, было бы нецелесообразно включать давление в источниковый член уравнения количества движения. Член $(p_P - p_E)A_e$ представляет собой силу давления, действующую на контрольный объем для u, а A_e — площадь поверхности, на которую действует этот перепад давления. В двухмерном случае $A_e = \Delta y \times 1$, в трехмерном $A_e = \Delta y \times \Delta z$.

Уравнения количества движения в других направлениях аппроксимируются таким же образом. На рис. 5.8 показан контрольный объем для уравнения количества движения в направлении оси y; он смещен вдоль оси y. Дискретный аналог будет иметь вид

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + b + (p_P - p_N) A_n, \qquad (5.7)$$

где $(p_P - p_N)A_n$ — соответствующая сила давления. В трехмерном случае аналогичное уравнение можно записать для составляющей скорости w.

Уравнения количества движения можно решить только в том случае, если поле давления задано или каким-то образом найдено. Если при решении использовать неверное поле давления, найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. Выразим такое поле скорости, полученное с использованием приближенного поля давления p^*, через u^*, v^*, w^*. Это поле скорости находится в результате решения следующих уравнений:

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_P^* - p_E^*) A_e; \qquad (5.8)$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_P^* - p_N^*) A_n; \qquad (5.9)$$

$$a_t w_t^* = \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_P^* - p_T^*) A_t. \qquad (5.10)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

В этих уравнениях составляющим скорости и давлению приписан верхний индекс $*$. Отметим, что точка t лежит на сеточной линии, направленной вдоль оси z и проходящей через узловые точки P и T.

5.5. ПОПРАВКИ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ

Найдем способ улучшения приближенного поля p^* таким образом, чтобы результирующее поле скорости с каждой итерацией лучше удовлетворяло уравнению неразрывности. Предположим, что истинное давление находится из соотношения

$$p = p^* + p', \tag{5.11}$$

где p' назовем поправкой давления. Надо выяснить, как будут изменяться составляющие скорости в соответствии с таким изменением давления. Аналогичным образом введем соответствующие поправки составляющих скорости:

$$u = u^* + u'; \quad v = v^* + v'; \quad w = w^* + w'. \tag{5.12}$$

Вычитая (5.8) из (5.6), получаем

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_P - p'_E) A_e. \tag{5.13}$$

Теперь выбросим член $\Sigma a_{nb} u'_{nb}$ из уравнения. Это пренебрежение подробно обсуждается в § 5.7. Здесь мы не будем обращать внимания на этот момент или будем рассматривать его просто как вычислительный прием. В результате получим

$$a_e u'_e = (p'_P - p'_E) A_e \tag{5.14}$$

или

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E), \tag{5.15}$$

где

$$d_e \equiv A_e / a_e. \tag{5.16}$$

Уравнение (5.15) назовем поправочной формулой для скорости. Его можно переписать в виде

$$u_e = u^*_e + d_e (p'_P - p'_E). \tag{5.17}$$

Отсюда видно, какой должна быть поправка к значению скорости u_e^*, определяемая поправками давления, чтобы получилось значение u_e.

Аналогичным образом запишем поправочные формулы для других составляющих скорости:

$$v_n = v^*_n + d_n (p'_P - p'_N); \tag{5.18}$$

$$w_t = w^*_t + d_t (p'_P - p'_T). \tag{5.19}$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Итак, мы провели предварительный анализ перед выводом уравнения для сеточных значений p', сам вывод уравнений приведен ниже.

5.6. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОПРАВКИ ДАВЛЕНИЯ

Преобразуем уравнение неразрывности в уравнение для поправки давления. Предположим, что плотность ρ непосредственно не зависит от давления. Смысл этого предположения будет рассмотрен ниже. Вывод уравнений проведен для трехмерного случая. Легко можно получить уравнения также для одно- и двухмерного случаев.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y + \partial(\rho w)/\partial z = 0. \qquad (5.20)$$

Проинтегрируем это уравнение по показанному на рис. 5.9 заштрихованному контрольному объему (на рисунке показано только двухмерное сечение). Напомним, что такой контрольный объем использовался при выводе дискретного аналога уравнения для обобщенной переменной Ф.

При интегрировании члена $\partial\rho/\partial t$ предположим, что значение плотности во всем контрольном объеме равно ρ_P. Также будем считать, что значение массовой скорости на всей грани контрольного объема определяется значением составляющей скорости u_e в точке e. В соответствии с полностью неявной аппроксимацией предположим, что новые значения скорости и плотности (в момент времени $t+\Delta t$) преобладают на всем шаге по времени; старое значение плотности ρ_P^0 (в момент времени t) будет входить только из-за наличия члена $\partial\rho/\partial t$.

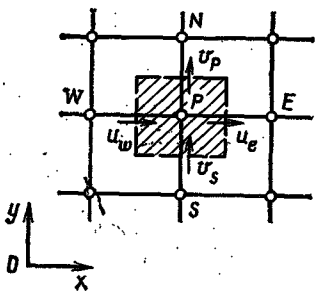


Рис. 5.9. Контрольный объем для уравнения неразрывности.
Обозначения те же, что и на рис. 5.6. Заштрихованная область — контрольный объем

В этих предположениях интегрирование уравнения (5.20) дает

$$\frac{(\rho_P - \rho_P^0)\,\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\,\Delta y\Delta z + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\,\Delta z\Delta x + \\ + [(\rho w)_t - (\rho w)_b]\,\Delta x\Delta y = 0. \qquad (5.21)$$

Если теперь вместо всех составляющих скорости подставить их выражения из поправочных формул для скорости [таких, как (5.17)—(5.19)], то после группировки соответствующих членов получим следующее уравнение для сеточных значений p':

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B + b, \qquad (5.22)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где

$$\left.\begin{aligned} &a_E = \rho_e d_e \Delta y \Delta z; \quad a_W = \rho_w d_w \Delta y \Delta z; \quad a_N = \rho_n d_n \Delta z \Delta x; \\ &a_s = \rho_s d_s \Delta z \Delta x; \quad a_T = \rho_t d_t \Delta x \Delta y; \quad a_B = \rho_b d_b \Delta x \Delta y; \\ &a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B; \end{aligned}\right\} \quad (5.23)$$

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P)\,\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e]\,\Delta y \Delta z + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n]\,\Delta z \Delta x + [(\rho w^*)_b - (\rho w^*)_t]\,\Delta x \Delta y.$$

Так как значения плотности ρ определены, вообще говоря, в узловых точках основной сетки, ее значения на границах, такие, как ρ_e, можно рассчитать с помощью подходящей интерполяции. Независимо от применяемого способа интерполяции значения ρ_e для двух контрольных объемов, имеющих общую грань, должны быть согласованы между собой (см. основное правило 1 в гл. 2).

Из (5.23) можно видеть, что член b уравнения для поправки давления по существу равен (со знаком минус) левой части дискретного аналога уравнения неразрывности (5.21), записанного через значения составляющих скорости с индексом $*$. Равенство $b=0$ означает, что эти составляющие вместе с имеющимся значением $(\rho_P^0 - \rho_P)$ удовлетворяют уравнению неразрывности и не требуется никакой коррекции давления. Таким образом, член b представляет собой «источник массы», который должен быть скомпенсирован поправками давления (через соответствующие поправки скорости).

Итак, мы получили все уравнения, необходимые для определения составляющих скорости и давления. Теперь можно рассмотреть весь алгоритм решения в целом.

5.7. АЛГОРИТМ SIMPLE

Процедура, разработанная для расчета поля течения, получила название SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations), что означает полунеявный метод для связывающих давление уравнений. Обсудим смысл этого названия несколько позднее. Данная процедура описывалась в [10, 41, 54, 55].

Последовательность операций. Ниже перечислены основные операции в порядке их выполнения.

1. Задание поля давления p^*.
2. Решение уравнений движения, таких, как уравнения (5.8)—(5.10), для получения u^*, v^*, w^*.
3. Решение уравнения для p'.
4. Расчет p из уравнения (5.11) путем добавления p' к p^*.
5. Расчет u, v, w с учетом соответствующих значений со звездочкой и с помощью формул для поправки скорости (5.17)—(5.19).
6. Решение дискретных аналогов для других Ф (таких, как температура, концентрация и турбулентные характеристики), если

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

они влияют на поле течения через физические свойства жидкости, источниковые члены и т. д. (если какое-то определенное Ф не влияет на поле течения, лучше рассчитать его после получения сходимости решения для поля течения).

7. Представление скорректированного давления p как нового p^*, возвращение к пункту 2 и повторение всей процедуры до тех пор, пока не будет получено сходящееся решение.

Обсуждение уравнения для поправки давления. Напомним, что в § 5.5 при получении (5.17) для поправки скорости было решено отбросить член $\Sigma a_{nb} u'_{nb}$. Объясним теперь причину этого отбрасывания и покажем, что оно не приносит большого вреда.

1. Если бы такие члены, как $a_{nb} u'_{nb}$, не были отброшены, то их надо было бы выразить через скорректированные значения давления и скорости в соседних для u_{nb} узлах. Эти значения, в свою очередь, зависят от соответствующих значений в близлежащих соседних узлах и т. д. В конце концов, формула для поправки скорости будет содержать скорректированное давление во всех узловых точках расчетной области и решение результирующего уравнения для поправки давления будет трудоемким. В сущности мы будем приближаться к непосредственному решению всей системы уравнений количества движения и неразрывности, однако выбранный путь будет достаточно сложным. Отбрасывание члена $a_{nb} u'_{nb}$ позволяет получить уравнение для p' в той же форме, что и основное уравнение для Ф, и применить последовательную процедуру решения для одной переменной на одном шаге по времени.

2. Слово «полунеявная» в названии SIMPLE использовалось для того, чтобы подчеркнуть отбрасывание члена $\Sigma a_{nb} u'_{nb}$. Этот член характеризует непрямое или неявное влияние поправки давления на скорость; поправки давления в близлежащих точках могут изменять соседние значения скоростей и таким образом вызывать коррекцию скорости в рассматриваемой точке. Мы не учитываем этого влияния и, таким образом, работаем со схемой, которая является только частично, а не полностью неявной.

3. Отбрасывание любого члена будет, конечно, нежелательным, если это означает, что конечное решение не будет истинным решением дискретных аналогов уравнений количества движения и неразрывности.

Однако оказывается, что сходящееся решение, которое получается с помощью SIMPLE, не содержит какой-либо ошибки, являющейся результатом отбрасывания $\Sigma a_{nb} u'_{nb}$. В сходящемся решении достигаются такие поля давления, при которых соответствующие поля скорости со звездой удовлетворяют уравнению неразрывности. Детали построения уравнения для p' в этом случае не влияют на корректность сходящегося решения.

4. Полезно обратить внимание на действия в процессе последней итерации, после которой можно считать, что достигнута сходимость. В результате всех предыдущих итераций получаем некоторое поле давления. Использовав его как p^*, решим уравнение

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

количества движения, чтобы получить u^*, v^*, w^*. Из этого поля скорости рассчитаем массовый источник b для уравнения поправки давления. Поскольку речь идет о последней итерации, то значение b будет приближаться к нулю для всех контрольных объемов. Следовательно, $p'=0$ для всех узловых точек — приемлемое решение уравнения (5.22) и значения скоростей со звездой и давления будут сами по себе точными значениями давления и скоростей. Таким образом, то, что массовый источник b является нулевым везде, есть достаточное доказательство того, что получено точное поле давления и текущее решение уравнения p' не нуждается в проведении последней итерации. Очевидно, сходящееся решение в этом случае не зависит от любых аппроксимаций, сделанных при получении уравнения для p', — уравнения, которое действительно не используется в последней итерации.

5. Массовый источник b служит полезным указателем сходимости решения уравнений, описывающих течение жидкости. Итерации должны повторяться до тех пор, пока b повсюду не станет достаточно малым.

6. Из этих соображений уравнение для поправки давления можно рассматривать просто как промежуточный алгоритм, который дает точное поле давления, но не оказывает непосредственного влияния на окончательное решение. До тех пор, пока мы не получим сходящееся решение, все возможные формулировки уравнения для p' дают одно и то же окончательное решение.

7. Скорость сходимости процедуры, однако, зависит от конкретного вида записи уравнения для p'. Если будет опущено большое число членов, то результатом этого может быть расходимость.

8. Уравнение для поправки давления, описанное в § 5.6, также приводит к расходимости, если не используется некоторая нижняя релаксация. Можно предложить много различных способов нижней релаксации. В большинстве случаев с успехом используется следующий способ: применяется нижняя релаксация для u^*, v^* и w^* (с соответствующими предыдущей итерации значениями u, v, w) при решении уравнения движения [с коэффициентом релаксации $\alpha \approx 0{,}5$, вводимым в (3.55)]; в дальнейшем к p^* добавляется только часть p'. Другими словами, вместо уравнения (5.11) применяется

$$p = p^* + \alpha_p p' \tag{5.24}$$

с $\alpha_p \approx 0{,}8$. Задачей уравнения (5.24) является расчет p, которое будет использоваться как p^* в следующей итерации; для сходимости давления можно брать любую величину для регулирования p^*. Релаксационные множители, о которых упоминалось выше ($\alpha=0{,}5$ и $\alpha_p=0{,}8$), определялись так, чтобы удовлетворять большому числу расчетов течения жидкости. Однако это не означает, что указанные значения являются оптимальными или обеспечат сходимость для всех задач. Необходимо признать, что такие вопросы, как оптимальные значения коэффициентов релаксации,

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

обычно зависят от самой задачи. Хотя опыт предыдущих расчетов является полезным, новые задачи иногда требуют других релаксационных процедур.

9. Заметим, что в течение каждой итерации скорости не оставляют равными значениям со звездочкой, а корректируют с использованием формул для поправки скорости. Результирующие поля скорости точно удовлетворяют дискретному аналогу уравнения неразрывности независимо от того, что подлежащие коррекции давления являются только приближенными. Итак, в процессе расчетов сходимость достигается через ряд полей скорости, удовлетворяющих уравнению неразрывности. Эта особенность алгоритма SIMPLE имеет много преимуществ. Поле скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности, является, вероятно, более разумным, чем поле скоростей, отмеченных звездочкой. Использование нижней релаксации в отношении этих скоростей помогает поддерживать значения скоростей со звездочкой также в разумных пределах и источники массы малыми. К тому же решение других уравнений для Ф на каждой итерации может быть основано на поле течения, которое удовлетворяет балансу массы. Для того чтобы реализовать эти преимущества, необходима одна предосторожность: коррекции скорости не должны подвергаться нижней релаксации.

10. При получении уравнения для p' предполагалось, что плотность известна; влияние давления на плотность не учитывалось. Это можно рассматривать как дополнительное приближение в уравнении для p' и можно обосновать аналогичным образом. В конце концов, суть любого итерационного метода состоит в том, что в уравнении уделяется внимание нескольким существенным воздействиям, а многие другие величины рассматриваются как условно известные, но рассчитываемые для следующей итерации. Плотность рассчитывается из соответствующего уравнения состояния. Оно может включать зависимость от температуры, концентрации и даже от давления. До тех пор пока не будет получено сходящееся решение, приближенный вариант уравнения для p' является достаточным. Однако для сильно сжимаемых (особенно сверхзвуковых) потоков зависимость плотности от давления является настолько существенной, что появляется большая вероятность получить расходящееся решение Для таких случаев желательно получить «сжимаемую» форму уравнения для p' (см. задачу 5.6).

11. Можно заметить, что уравнение для p' подобно дискретному аналогу уравнения теплопроводности. В формуле для поправки скорости коррекцию скорости u_e' можно рассматривать аналогично тепловому потоку, вызванному разностью температур $p_P' - p_E'$.

12. Тип уравнения для p', подобного уравнению теплопроводности, означает, что одностороннее поведение проявляется по любой пространственной координате. Хорошо известно, что влияние давления является двухсторонним или эллиптическим. Одностороннее поведение при течении в пограничных слоях достигается

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

при введении дополнительнного допущения о поле давления, например в пограничиых слоях изменением давления, нормального к стенке, пренебрегается. Сверхзвуковые потоки проявляют одностороннее поведение в том, что давление вниз по потоку не изменяет условий вверх по потоку. При расчетах сверхзвуковых потоков будем использовать уравнение для p' в «сжимаемой» форме. Коэффициенты в этом уравнении подобны тем, которые имеют место в задачах конвекции и диффузии и, значит, делают применимым одиостороиниее поведение при соответствующих числах Маха.

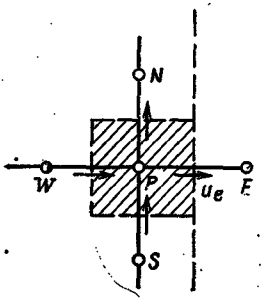


Рис. 5.10. Контрольный объем (заштрихованная область) иа границе для уравнения неразрывности. Обозначения те же, что и на рис. 5.6

Граничные условия к уравнению для поправки давления. Уравнения количества движения — специальный случай общего уравнения для Ф, и поэтому общая аппроксимация граничных условий для иего также примеиима. Однако поскольку уравнение для p' не является одним из основных уравиений, следует дать некоторое пояснеиие к аппроксимации граничиых условий для этого уравнения.

Обычно имеется два вида условий на границе. Либо задано давление на границе (и скорость является неизвестной), либо определена компонента скорости, нормальная к границе.

Заданное давление на границе. Если предполагаемое поле давления p^* принимается таким, что на границе $p^* = p_{\text{задан}}$, то значение p' на границе будет нулевым. Этот случай аналогичен граничному условию с заданной температурой в задаче теплопроводности.

Заданное значение скорости, нормальной к границе. Если сетка строится таким образом, что граиица совпадает с гранью контрольного объема, то этот случай будет подобен тому, который показан на рис. 5.10. Скорость u_e является заданной. При получении уравнения для показанного контрольного объема скорость потока через граничную поверхность будет выражена не через u_e^* и соответствующую поправку, а через само u_e. В этом случае значение p_E' в уравнении не появится или a_E будет равно нулю в уравнении для p'. Таким образом, информация о p_E' не будет нужна.

Относительный характер давления. Рассмотрим стациоиарное течение с постояиной плотностью, в котором нормальиые скорости заданы на всей границе. Поскольку давление на границе не определено и все коэффициенты на границе, такие, как a_E, будут нулевыми, то из уравнения для p' нельзя определить абсолютное значение p'. Коэффициенты уравнения для p' являются такими, что $a_P = \Sigma a_{nb}$ [см. (5.23)]; это означает, что p' и $p' + C$ (C — произвольная постояиная) удовлетворяют уравнению для p'.

Этот случай, однако, не представляет действительной трудности. Для такой задачи (плотиость ие зависит от давлеиия) абсолютные значения давления и, следовательно, коррекции дав-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ления являются вообще ненужнымн, имеют смысл только разности давленнй, которые не изменяются нз-за пронзвольной постоянной, добавляемой к полю давления p'. Давленне в таком случае является относнтельной, а не абсолютной переменной. Еслн абсолютное значенне p' является не еднистенным, будет лн вообще получена расчетная сходимость? Но любой нтерационный метод решения алгебранческих уравнений дает сходнмость решения, абсолютное значенне которого определяется начальным приближением. Прямые методы, однако, сталкиваются с вырожденной матрицей и ие дают решения. Чтобы нзбежать этого, можно произвольно определить значения p' в одном контрольном объеме и решить уравнения для p' для оставшихся контрольных объемов. Аналогичный способ можно использовать в нтерационном методе. Позволяя поправке давления p' самой нскать свой уровень, получим более быструю сходимость, чем при задании определенного значения в некоторой точке (см. задачу 3.9).

Кроме того, неопределенность поля давления p' свидетельствует о том, что уравнения неразрывности, записанные для всех контрольных объемов, не представляют собой лннейно-независимую систему. Поскольку в правнльно поставленной задаче заданные на границе скоростн должны удовлетворять общему условню сохранения массы, то уравнение неразрывности для последнего контрольного объема не передает какой-лнбо информацин о том, как выполняются уравнения неразрывностн для всех другнх контрольных объемов. Таким образом, даже если уравнение для одного контрольного объема отбрасывается (и значения здесь задаются), то результнрующее скорректированное поле скорости будет удовлетворять уравнениям неразрывности для всех контрольных объемов.

Во многих задачах значения абсолютного давления намного больще локальных разностей. Если использовались абсолютные значения давления p', то погрешностн округленння будут достигать прн расчете значенний $p_P - p_E$. Поэтому лучше положить $p=0$ в качестве характерного значения в соответствующей узловой точке и рассчитать все другне значения p как давление относительно этого характерного значення. Аналогнчно перед тем как решается уравнение для p' на каждой итерации, полезно начать с предположения, что $p'=0$ для всех точек, чтобы решение для p не достигало большой абсолютной величины.

Когда давление в некоторых граннчных точках определено или плотность зависит от давленння, неопределенности уровня при расчете давленння не вознпкает.

5.8. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ SIMPLER

Алгорнтм SIMPLE широко используется и дает удовлетворительные результаты. Например, все расчеты течения жидкости, представленные в гл. 8, были выполнены с использованнем этого алгоритма. Однако при попытках улучшить его скорость сходи-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

мости был разработан модифицированный вариант алгоритма. Этот вариант получил название SIMPLER (SIMPLE Revised) [43].

Причина разработки модифицированного варианта. Приближение, принятое при выводе уравнения для p' (отбрасывание члена $\Sigma a_{nb}u'_{nb}$), дает несколько завышенную поправку для давления, и, следовательно, становится необходимым использование метода нижней релаксации. Поскольку влияние поправок скорости в соседних близлежащих точках не присутствует в формуле для поправки скорости, то поправка давления содержит полный набор значений скорости, которые корректируются, и это сказывается на полях корректируемого давления. В большинстве случаев разумно предположить, что уравнение для поправки давления корректирует значение скорости, но не давления.

Учитывая это, рассмотрим очень простую задачу, в которой имеется одномерный поток с постоянной плотностью и заданной скоростью на входной границе. Нетрудно видеть, что скорость в этой задаче определяется только уравнением неразрывности и, следовательно, удовлетворяющее уравнению неразрывности поле скорости, полученное в конце первой итерации, будет окончательным. Однако рассчитанное давление вследствие приближенного характера уравнения для p' далеко от окончательного решения. Прежде чем будет получено сходящееся поле давления, следует сделать много итераций, хотя корректное поле скорости получается намного раньше.

Если применять уравнения для поправки давления только для коррекции скоростей и обеспечивать некоторые другие способы получения улучшенного поля давления, то получим более эффективный алгоритм. Это и составляет существо алгоритма SIMPLER.

Уравнение для давления. Уравнение для нахождения поля давления можно получить следующим образом: уравнение количества движения (5.6) сначала запишем как

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} + d_e (p_P - p_E), \tag{5.25}$$

где a_e определено (5.16). Найдем теперь псевдоскорость $\hat{u}_e$:

$$\hat{u}_e = \frac{\Sigma a_{nb} u_{nb} + b}{a_e}. \tag{5.26}$$

Заметим, что $\hat{u}_e$ определяется скоростями в соседних близлежащих точках и не содержит давления. В этом случае уравнение (5.25) принимает вид

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (p_P - p_E). \tag{5.27}$$

Аналогично запишем

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (p_P - p_N); \tag{5.28}$$

$$w_t = \hat{w}_t + d_t (p_P - p_T). \tag{5.29}$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Легко заметить сходство между этими уравнениями и уравнениями (5.17)—(5.19). Здесь $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ появляются вместо u^*, v^*, w^* и само давление p занимает место p'. Отсюда следует, что если бы вывод в § 5.6 был выполнен с новыми соотношениями для скорости и давления, содержащими $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, то результатом было бы уравнение для давления. Его можно записать в виде

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + a_T p_T + a_B p_B + b, \quad (5.30)$$

где a_E, a_W, a_N, a_S, a_T, a_B и a_P заданы согласно (5.23) и b определено соотношением

$$b = \frac{(\rho_P^0 - \rho_P)\,\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} + [(\rho\hat{u})_w - (\rho\hat{u})_e]\,\Delta y \Delta z + [(\rho\hat{v})_s - (\rho\hat{v})_n]\,\Delta z \Delta x + [(\rho\hat{w})_b - (\rho\hat{w})_t]\,\Delta x \Delta y. \quad (5.31)$$

Следует заметить, что выражение для b является только разностью между уравнением для давления (5.30) и уравнением для поправки давления (5.22). Выражение (5.31) для b использует псевдоскорости $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, хотя b в уравнении для p' рассчитывалось через значение скоростей со звездочкой. Несмотря на то что уравнение для описания давления и уравнение для поправки давления почти идентичны, имеется одно важное отличие: при выводе уравнения для давления не вводились допущения. Таким образом, если корректное поле скорости использовалось для расчета псевдоскоростей, уравнение для давления сразу будет давать корректное значение давления.

Алгоритм SIMPLER. Модифицированный алгоритм включает решение уравнения для давления с целью получения поля давления и решение уравнения для поправленного давления только с целью корректировки скоростей. Можно установить следующую последовательность действий.

1. Ввести предположение о поле скорости.
2. Рассчитать коэффициенты уравнения количества движения и затем рассчитать $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ из уравнений, таких же, как (5.26), подставив значения скорости u_{nb} в соседних близлежащих точках.
3. Рассчитать коэффициенты уравнения для давления (5.30) и решить его с целью получения поля давления.
4. Обработать это поле давления в качестве p^*, решить уравнение количества движения для получения u^*, v^*, w^*.
5. Рассчитать массовый источник [уравнение (5.23)] и затем решить уравнения поля p'.
6. Скорректировать поле скорости (но не поля давления) с помощью уравнений (5.17)—(5.19).
7. Решить, если это необходимо, дискретные аналоги для других Ф.
8. Вернуться к пункту 2 и повторять расчеты до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Обсуждение. 1. Легко видеть, что для одномерной задачи,

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

обсуждаемой выше, алгоритм SIMPLER сразу дает сходящееся решение. Вообще, поскольку уравнение для коррекций давления позволяет получить разумные поля скорости и уравнение для давления дает прямой результат (без допущений) на основе заданного поля скорости, то сходимость к решению будет более быстрой.

2. В алгоритме SIMPLE предполагаемое поле давления играет важную роль. Кроме того, SIMPLER не использует предполагаемые давления, а строит поле давления по заданному полю скорости.

3. Если заданное поле скорости окажется точным, то в алгоритме SIMPLER уравнение для давления дает точное поле давления и нет необходимости в каких-либо последующих итерациях. Однако поскольку точное поле скорости и предполагаемое поле давления используются для начала процедуры SIMPLE, то обычно ситуация вначале ухудшается. Использование предполагаемого давления приводит к значениям скорости со звездочкой, которые отличаются от заданных точных значений. В таком случае предположения, заложенные в уравнение для p', дают неточные поля скорости и давления в конце первой итерации. Сходимость требует большого числа итераций, несмотря на то что вначале имелось точное поле скорости.

4. Вследствие близкого сходства между уравнениями для давления и для поправки давления рассмотренные в § 5.7 граничные условия уравнения для p' также относятся к уравнению для давления.

5. Несмотря на то что алгоритм SIMPLER создан для того, чтобы давать более быструю сходимость, чем SIMPLE, следует признать, что одна итерация SIMPLER требует больше расчетных усилий. Во-первых, уравнение для описания поведения давления должно быть решено в дополнение ко всем уравнениям, решаемым в SIMPLE, во-вторых, расчет $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$ представляет некоторую трудность, которой нет в SIMPLE. Однако поскольку SIMPLER требует меньшего числа итераций для достижения сходимости, то дополнительное усилие на итерацию более чем компенсируется экономией усилий в целом.

5.9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы завершили построение численного метода. Однако большое количество разнообразных и важных вопросов по-прежнему осталось не рассмотренным. Эти вопросы лучше проанализировать на данном этапе, когда читатель имеет общее представление о процедуре решения. Следующая глава посвящена этим вопросам.

ЗАДАЧИ

5.1. Двухмерное течение с постоянной плотностью и вязкостью подчиняется следующим уравнениям:

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}\times\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Исключите p из первых двух уравнений, дифференцируя первое по y, а второе по x и вычитая одно из другого. Выразите результирующее уравнение через ω как зависимую переменную, где ω — завихренность, причем $\omega=\partial u/\partial y-\partial v/\partial x$. Покажите, что результатом является

$$\rho\frac{\partial\omega}{\partial t}+\rho u\frac{\partial\omega}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right).$$

5.2. Определите функцию тока как

$$\partial\psi/\partial x=-v \quad \text{и} \quad \partial\psi/\partial y=u.$$

Покажите, что ψ тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности из задачи 5.1. Далее, используя определение ω в задаче 5.1, покажите, что

$$\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2=\omega.$$

5.3. В стационарном одномерном случае с постоянной плотностью, показанном на рис. 5.11, скорость u рассчитывается для точек A, B и C, хотя давление

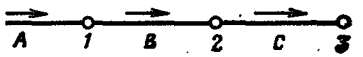


Рис. 5.11. Расположение точек, в которых определяются решения для задач 5.3 и 5.4.

рассчитывается для точек *1*, *2* и *3*. Формула для поправки скорости

$$u=u^*+\left(p'_1-p'_{i+1}\right)d,$$

где i и $i+1$ расположены с обеих сторон от точки определения u. Значение d всюду равно 2. Граничные условия: $u_A=10$ и $p'_3=0$. Пусть на данной стадии в итерационном процессе уравнения количества движения дают $u^*_B=8$ и $u^*_C=11$. Рассчитайте значения p'_1 и p'_2. Объясните, как вы получили значения p'_1 и p'_2, если условие на правой границе было задано в виде $u_C=10$ вместо $p'_3=0$.

5.4. Одномерное течение через пористый материал описывается уравнением $c|u|u+dp/dx=0$, где c — постоянная. Уравнение неразрывности представляется в виде $d(uA)/dx=0$, где A — эффективная площадь потока. Используя процедуру SIMPLE для сетки, показанной на рис. 5.11 (точку A можно опустить), рассчитайте p_2, u_B и u_C на основании данных

$$x_2-x_1=x_3-x_2=2;$$

$$c_B=0{,}25; \quad c_C=0{,}2; \quad A_B=5; \quad A_C=4; \quad p_1=200; \quad p_3=38.$$

Начальным приближением считайте $u_B=u_C=15$ и $p_2=120$.

5.5. Одномерное течение в сопле (рис. 5.12) можно описать с помощью следующих уравнений:

$$\frac{d}{dx}(\rho uA)=0; \qquad \frac{d}{dx}(\rho uA)\,u=-A\frac{dp}{dx},$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

где A — площадь поперечного сечения. Пусть заданы следующие условия:

$$\rho = 1 \text{ везде; } A_A = 3; \quad A_B = 1; \quad p_1 = 28; \quad p_3 = 0.$$

Предположите, что жидкость вверх по потоку в точке *1* имеет пренебрежимо малый импульс. Запишите дискретные аналоги для u и p' и получите значения u_A, u_B и p_2 (используйте начальные приближения $\rho uA = 5$ так, чтобы $u_A = 5/3$ и $u_B = 5$, а $p_2 = 25$; примените, если это необходимо, соответствующую нижнюю релаксацию).

5.6. Рассмотрите стационарное одномерное сжимаемое течение, для которого уравнение неразрывности имеет вид $d(\rho u)/dx = 0$. Ссылаясь на рис. 5.1, запишите

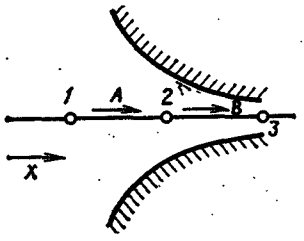


Рис. 5. 12. Расположение точек, в которых определяются решения для задачи 5.5.

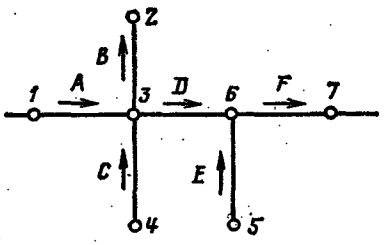


Рис. 5.13. Система водоснабжения, рассматриваемая в задаче 5.7

дискретный аналог этого уравнения через ρ_e, ρ_w, u_e и u_w. Далее, используйте следующую зависимость для коррекции плотности: $\rho = \rho^* + k\rho'$; эту зависимость можно получить из соответствующего уравнения состояния. Предполагая кусочно-линейный профиль ρ', получите дискретный аналог для коррекции давления.

Используйте аппроксимацию

$$\rho u = (\rho^* + \rho')(u^* + u') \approx \rho^* u^* + \rho' u^* + \rho^* u'.$$

Заметим, что результирующие коэффициенты имеют конвективные и диффузионные части и возможны отрицательные значения коэффициентов, когда числа Маха являются большими. Можно ли предложить схему, подобную схеме с разностями против потока, чтобы избежать отрицательных значений коэффициентов?

5.7. Часть системы водоснабжения показана на рис. 5.13. Скорость потока в трубе задана соотношением $Q = C\Delta p$, где Δp — перепад давления по длине трубы, C — гидравлическая проводимость. Имеем следующие данные:

$$p_1 = 275; \quad p_2 = 270; \quad p_4 = 0; \quad p_5 = 40; \quad Q_F = 20; \quad C_A = 0{,}4;$$

$$C_B = C_D = C_F = 0{,}2; \quad C_C = C_E = 0{,}1.$$

Найдите ρ_3, ρ_6, Q_A, Q_B, Q_C, Q_D и Q_E согласно следующей процедуре: введите предполагаемые значения p_3 и p_6; получите значения Q^*, основанные на предполагаемых значениях давления. Постройте уравнения для поправки давления и решите их для p'_3 и p'_6. Скорректируйте предполагаемые значения давления и Q^*. Необходима ли итерационная процедура? Почему?

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Глава 6

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

6.1. ИТЕРАЦИОННЫЙ ХАРАКТЕР МЕТОДИКИ РАСЧЕТА

Описанная в этой книге методика расчета предназначена для решения системы нелинейных уравнений с помощью итерационной процедуры. Рассмотрим общие свойства этой процедуры.

1. Итерации играют двойную роль.

а) В общем случае рассматриваемые уравнения нелинейны и взаимосвязаны. Мы записываем их в линейном виде и рассчитываем коэффициенты по известным из предыдущей итерации значениям переменных.

б) Система линейных алгебраических уравнений для одной зависимой переменной решается быстрее итерационным методом, чем прямым.

2. Так как на каждом промежуточном шаге коэффициенты линейных уравнений известны только приближенно, итерационное решение системы алгебраических уравнений можно не доводить до полной сходимости. После итерирования системы уравнений до некоторой сходимости необходимо повторно рассчитать коэффициенты. Здесь уместно проявлять чувство соразмерности. Затратив определенные усилия на расчет коэффициентов, мы должны получить достаточно хорошее решение системы алгебраических уравнений, воздерживаясь при этом от чрезмерной работы по расчету значений коэффициентов, которые, как нам хорошо известно, являются только приближенными. Использование метода прямого решения для многомерных задач обычно приводит к очень большой затрате времени на рещение уравнений.

3. Аналогичные рассуждения были использованы в гл. 5, когда преимущество было отдано последовательной методике решения уравнений гидродинамики, а не одновременной. Уравнения количества движения и уравнение для поправки давления решаются последовательно. Альтернативный подход, обычно используемый в большинстве конечно-элементных методов расчета течений, заключается в одновременном решении линеаризованных уравнений неразрывности и всех уравнений количества движения. Такое одновременное решение, проводимое прямым методом, требует большнх затрат времени счета и памяти ЭВМ. Ввиду нелинейности уравнений количества движения эти затраты должны иметь место на каждой итерации. При этом процесс может описываться не только уравнениями неразрывности и количества движения. Часто эти уравнения связаны с уравнением энергии (через свойства жидкости и подъемную силу), с уравнениями для параметров турбулентности (через коэффициент турбулентной вязкости), с уравнениями для концентраций хнмических компонент и т. д. Очевидно, что нецелесообразно пытаться решать одновременно все этн уравнения; обычно дополнительные уравнения решаются последовательно. В этих условиях затрата больших усилий на чис-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ленный расчет одновременно уравнений неразрывности и количества движения кажется непропорциональной.

4. Для приведенного в данной книге метода нет никакой существенной разницы между решением стационарной задачи и выполнением одного шага по времени при решении нестационарной задачи. В случае стационарной задачи задаются некоторым образом угаданные значения переменных Φ и проводится решение до получения установившихся значений. Для нестационарного случая задача ставится следующим образом: при заданных значениях Φ в момент времени t и угаданных значениях Φ в момент $t+\Delta t$ найти значения Φ в момент $t+\Delta t$. Так же как и в случае стационарной задачи, в нестационарной задаче на каждом шаге по времени надо провести некоторое количество итераций, при этом, чтобы охватить необходимый промежуток времени, требуется последовательно сделать большое количество шагов.

5. Таким образом, может сложиться впечатление, что решение нестационарной задачи требует усилий, эквивалентных расчету последовательности стационарных задач. Это частично верно, но следует учитывать одно обстоятельство. При разумных Δt в качестве угаданных значений Φ в момент времени $t+\Delta t$ можно использовать известные значения Φ в момент t. Так как эта экстраполяция сравнительно хороша (по сравнению с довольно произвольным выбором при решении стационарной задачи), обычно для получения сходимости решения на одном шаге по времени требуется лишь несколько итераций. Иногда их число может доходить до единицы. Таким образом, когда утверждается, что метод решения нелинейной нестационарной задачи является *безытерационным*, это фактически означает, что при данном шаге по времени для получения решения оказывается достаточно одной итерации. В таких методах должны употребляться сравнительно малые шаги по времени, в то время как при использовании многократных итераций на одном шаге по времени можно было бы употреблять большие значения Δt.

6. Такой однонтерационный на одном шаге по времени метод иногда используется для получения стационарного решения после большого количества шагов по времени. В действительности, эти шаги эквивалентны итерациям, и нестационарный член в уравнениях обеспечивает некоторого рода нижнюю релаксацию.

7. В программе для ЭВМ, включающей итерации на шаге по времени, должна быть предусмотрена машинная память для значений Φ в моменты времени t и $t+\Delta t$. Кроме того, в программе решения стационарной задачи должна быть отведена память только для одного набора значений Φ, в которую последовательно заносятся новые значения переменной до достижения сходимости.

8. Использование итераций во многом упрощает построение численного метода. С их помощью можно, по крайней мере в принципе, справиться с любой нелинейностью и взаимозависимостью. Конечно, имеет смысл лишь такой итерационный метод, с помощью

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

которого можно достигнуть сходимости. На этом этапе полезно исследовать перспективы получения сходящегося решения.

а) Четыре основных правила (см. § 2.4) позволили получать дискретный аналог, для которого гарантирована при фиксированных значениях коэффициентов сходимость методов поточечного решения или переменных направлений.

б) Если коэффициенты не постоянны, но изменяются сравнительно медленно, мы получим, по-видимому, сходящееся решение. Соответствующая линеаризация источникового члена и подходящая нижняя релаксация зависимых переменных должны, вообще говоря, замедлить изменения переменных и, следовательно, коэффициентов.

в) Дополнительно к зависимым переменным можно с успехом применять нижнюю релаксацию и к другим величинам. Например, уравнения движения связаны с уравнениями для температуры концентрации в основном через плотность ρ. Применение нижней релаксации к ρ с помощью соотношения

$$\rho = \alpha\rho_{\text{нов}} + (1-\alpha)\rho_{\text{пред}}, \tag{6.1}$$

где $\rho_{\text{нов}}$ — новое значение ρ; $\rho_{\text{пред}}$ — значение ρ на предыдущей итерации, приведет к сравнительно малому влиянию изменений температуры и концентрации на поле скорости. Для ослабления влияния параметров турбулентности на поле скорости можно применить нижнюю релаксацию к коэффициенту диффузии Γ. Тогда текущее значение Γ рассчитывается по соотношению

$$\Gamma = \alpha\Gamma_{\text{нов}} + (1-\alpha)\Gamma_{\text{пред}}, \tag{6.2}$$

Здесь, так же как и в (6.1), α обозначает коэффициент релаксации. При нижней релаксации $1>\alpha>0$. Часто зависимость от других переменных проявляется через источниковый член (например, подъемная сила в уравнении количества движения зависит от температуры). Нижнюю релаксацию источникового члена можно получить, используя соотношение

$$S_C = \alpha S_{C,\text{нов}} + (1-\alpha)S_{C,\text{пред}}. \tag{6.3}$$

Нижнюю релаксацию можно применять даже к граничным условиям. Например, необязательно считать, что температура горячей стенки или скорость вращения вращающегося диска принимают свои значения прямо с первой итерации; можно в течение итераций медленно подправлять граничное условие так, чтобы в конце концов получить требуемое значение, т. е. использовать соотношение

$$\Phi_B = \alpha\Phi_{B,\text{данное}} + (1-\alpha)\Phi_{B,\text{пред}}. \tag{6.4}$$

Конечно, значения α в (6.1)—(6.4) необязательно должны быть одинаковыми, так же как и для каждой узловой точки.

г) Следует помнить, что в общем случае произвольных нелинейностей и взаимозависимостей мы не гарантированы от расходимости решения. Обнаружено, что для многих случаев полезно

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

применение рассмотренного выше метода нижней релаксации, однако в каждом конкретном случае может потребоваться свой способ применения этого метода. Несмотря на отсутствие общей гарантии, тем не менее обнадеживающим является тот факт, что были получены сходящиеся решения для большого числа довольно сложных задач.

В гл. 8 приведены примеры таких решений; кроме них также были получены и опубликованы результаты решения множества других задач.

9. Как уже отмечалось, итерационный процесс считается окончанием, когда дальнейшие итерации не приводят к изменению зависимых переменных. На практике процесс итераций заканчивают тогда, когда удовлетворяется некоторый произвольный критерий сходимости. Выбор этого критерия зависит от характера задачи и целей расчета. Обычно рассматриваются наиболее существенные величины, получаемые в расчете (такие, как максимальная скорость, полная сила трения, некоторый перепад давления или суммарный тепловой поток), и ставится условие окончания итераций при достижении в двух последовательных итерациях значения относительного изменения этих величин, не превышающего заданного малого числа. Часто формулировка критерия сходимости связывается с относительным изменением значений всех зависимых переменных в узловых точках. В некоторых случаях критерий такого типа может вводить в заблуждение. При использовании сильной нижней релаксации изменение зависимых переменных в итерациях намеренно замедляется, это может вызвать иллюзию сходимости, даже если рассчитанное решение еще далеко от истинного. Более разумный способ проверки сходимости заключается в рассмотрении степени удовлетворения дискретного аналога при подстановке текущих значений зависимой переменной. Для каждой узловой точки можно рассчитать невязку:

$$R = \sum a_{nb}\Phi_{nb} + b - a_P\Phi_P. \qquad (6.5)$$

Очевидно, что если дискретный аналог удовлетворяется точно, то $R=0$. Удовлетворительным критерием сходимости является следующее условие: максимальное значение $|R|$ должно быть меньше некоторого малого числа. В частности, как упоминалось в § 5.7, в качестве одного из показателей сходимости итерационного процесса можно использовать значение b в уравнении (5.22), которое является невязкой для дискретного аналога уравнения неразрывности.

6.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКОВОГО ЧЛЕНА

В § 3.2 дано общее представление о линеаризации источникового члена. Согласно одному из основных правил (правилу 3) при линеаризации источникового члена в виде

$$S = S_C + S_P\Phi_P \qquad (6.6)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

величина S_P не должна быть положительной. Рассмотрим линеаризацию источникового члена, чтобы подчеркнуть, что часто именно этот член является причиной расходимости итераций и во многих случаях сходимости решения можно добиться путем подходящей линеаризации источникового члена.

Обсуждение. 1. Важно следить за непреднамеренным несоблюдением требования отрицательности S_P. Например, в системе координат r, θ, z уравнение количества движения для V_θ содержит источниковый член $-\rho V_r V_\theta / r$. Кажется удобным взять $S_C = 0$ и $S_P = -\rho V_r / r$. Однако если V_r станет отрицательным, такое представление приведет к положительности S_P. Правильным будет следующее представление:

$$\left.\begin{aligned} S_C &= \left[\left|\frac{-\rho V_r}{r},\ 0\right|\right] V_\theta; \\ S_P &= -\left[\left|\frac{\rho V_r}{r},\ 0\right|\right], \end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

где $[|\,|]$ обозначает наибольшую из указанных величин.

2. Всегда можно сделать $S_P = 0$, а S_C считать равным S. Однако в некоторых случаях такая форма нежелательна. Воздействие большого отрицательного коэффициента S_P во многом подобно нижней релаксации и способствует сходимости. Как показано в § 3.2, по-видимому, наилучшей является линеаризация, при которой прямая $S = S_C + S_P \Phi_P$ является касательной к истинной кривой зависимости S от Φ. Использование меньшей величины $|S_P|$ приводит к неадекватному описанию уменьшения S при увеличении Φ. Использование большей величины $|S_P|$ означает слишком большую предосторожность (в некоторых случаях это может дать благоприятный эффект) и, по-видимому, замедлит сходимость.

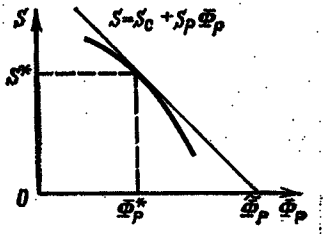


Рис. 6.1. Решение для случая, когда источниковый член намного больше всех других членов дискретного аналога

3. Так как источниковые члены часто бывают очень велики, всегда полезно рассмотреть предельный случай, когда этот член намного больше всех других членов дискретного аналога. В этом случае дискретный аналог можно приближенно представить в виде

$$S_C + S_P \Phi_P \approx 0 \tag{6.8}$$

с решением

$$\tilde{\Phi}_P = -S_C / S_P. \tag{6.9}$$

Здесь $\tilde{\Phi}_P$ обозначает предельное значение Φ_P для рассматриваемого случая. На рис. 6.1 дана графическая иллюстрация этого приближения. Если значение S^* соответствует текущему значению Φ_P^*, решение дискретного аналога равно $\tilde{\Phi}_P$, соответствую-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

щему точке пересечения прямой $S=S_C+S_P\Phi_P$ с осью абсцисс. Если величина $|S_P|$ больше тангенса угла наклона касательной, $\tilde{\Phi}_P$ окажется ближе к Φ_P^*. Использование малой величины $|S_P|$ означает большее изменение Φ_P от Φ_P^* до $\tilde{\Phi}_P$. Таким образом, аналогичное нижней релаксации влияние величины S_P становится очевидным.

4. Иногда анализ предельного случая больших значений источникового члена можно использовать для получения такой линеаризации, при которой Φ_P изменяется в некоторых разумных пределах. Предположим, что при текущем значении Φ_P^* мы хотим получить на следующей итерации значение $\tilde{\Phi}_P$, близкое к заданной величине $\tilde{\Phi}_P$. Этого можно достичь с помощью следующей линеаризации:

$$\left.\begin{aligned} S_C &= S^*\tilde{\Phi}_P/(\tilde{\Phi}_P-\Phi_P^*);\\ S_P &= -S^*/(\tilde{\Phi}_P-\Phi_P^*). \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Величину Φ_P следует определять из физических соображений. Например, пусть Φ обозначает массовую концентрацию m_l химической компоненты. По определению m_l заключена между 0 и 1. Пусть текущее значение концентрации равно m_l^*. Если S^* положительна, то m_l будет возрастать и можно положить $\tilde{m}_l=1$. При отрицательном S^* можно считать $\tilde{m}_l=0$. Можно потребовать также, чтобы за одну итерацию m_l не изменялась больше чем на половину разницы между текущим и физически предельным значениями, т. е. при положительном S^* надо взять $\tilde{m}_l=(m_l^*+1)/2$, а при отрицательном $\tilde{m}_l=m_l^*/2$. Так как этот анализ основан на рассмотрении предельного случая большого значения источникового члена, то значение Φ_P на следующей итерации, на которое также влияют остальные члены уравнения, не будет в точности равно $\tilde{\Phi}_P$. Организация итераций подобным образом не оказывает влияния на конечное значение Φ_P, а лишь управляет изменением Φ_P в течение итераций. Ее цель заключается в стремлении избежать быстрых изменений решения и появления физически неправдоподобных значений в процессе итераций.

5. Вообще говоря, величине Φ можно приписывать известное значение только в точках на границе расчетной области. Во внутренней узловой точке заданное значение можно получить как решение задачи, если положить в этой точке

$$\left.\begin{aligned} S_C &= 10^{30}\Phi_{P,\text{ заданное}};\\ S_P &= -10^{30}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.11)$$

где 10^{30} обозначает достаточно большое число, такое, что все члены дискретного аналога пренебрежимо малы по сравнению с источниковым, тогда

$$S_C+S_P\Phi_P\approx 0; \qquad (6.12)$$

$$\Phi_P=-\frac{S_C}{S_P}=\Phi_{P,\text{ заданное}}. \qquad (6.13)$$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Эту процедуру можно использовать для описания внутренних препятствий («островов») в расчетной области посредством наложения внутренних граничных условий.

Линеаризация источника для случая всегда положительных переменных [1]. Из физического смысла некоторых завнсимых переменных следует, что их значения всегда остаются положительными. Примерами таких переменных являются массовые концентрации химических компонент, кинетическая энергия турбулентности, масштаб турбулентности и радиационные потоки в потоковой модели переноса излучения. Так как обычно в уравнение переноса таких величин входят как положительные, так и отрицательные источниковые члены (т. е. порождение и уничтожение), суммарный источииковый член зачастую может стать отрицательным. Если это обстоятельство учтено неверно, то номинально положительная переменная может принять ошибочное отрицательное значение.

Основой для получения физически реалистических результатов является выполнение правила 3. Для данного случая дополнительно потребуем, чтобы S_C всегда был положнтельным (и, конечно, S_P — всегда отрицательным). Строгое соблюдение этого требования гарантирует от появления отрицательных значений Ф.

Имеется много способов обеспечения положительности S_C. Простой метод заключается в следующем. Предположим, что

$$S = S_1 - S_2; \quad S_1 > 0; \quad S_2 > 0, \tag{6.14}$$

где S_1 — положительная часть источникового члена, а S_2 — отрицательная. Так как

$$S = S_1 - \frac{S_2}{\Phi_P^*}\Phi_P, \tag{6.15}$$

то будем считать

$$S_C = S_1; \qquad S_P = -\frac{S_2}{\Phi_P^*}, \tag{6.16}$$

где Φ_P^* — текущее значение Φ_P.

6.3. ОБЛАСТИ С НЕПРАВИЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

При построении численного метода до сих пор использовалась сетка в декартовой системе координат. Так как в практических случаях эта система координат не всегда удобна, необходимо

---

[1] Может оказаться, что для многих читателей этот с первого взгляда второстепенный параграф содержит наиболее ценную информацию из всего содержания книги. В практике счета весьма часто возникают такие ошибочные результаты, как отрицательные массовые концентрации или кинетическая энергия турбулентиости. Это оказывает настолько отрицательное влияние на остальной расчет и иа сходимость итераций, что появлеиия таких зиачений иадо избегать во что бы то ни стало. Этого легко можио достигиуть.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

рассмотреть применение метода к случаю областей нерегулярной формы.

Ортогональные криволинейные координаты. Использование в данной книге декартовых координат обусловлено, главным образом, соображениями удобства и простоты изложения. Однако разработка подобного численного метода в цилиндрических или сферических координатах или даже в произвольных ортогональных криволинейных координатах не вызовет значительных дополнительных трудностей. Это утверждение кратко проиллюстрировано в § 3.6. для случая полярных координат. В более общем случае можно использовать ортогональную криволинейную сетку, подобную показанной на рис. 6.2. Для такой сетки расчет различных длин, площадей и объемов не настолько прост, как для декартовой сетки, но в остальном все подходы, разработанные при использовании декартовой сетки, непосредственно применимы и в этом случае.

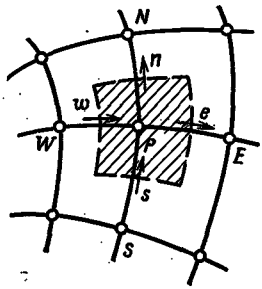


Рис. 6.2. Контрольный объем в ортогональной криволинейной сетке

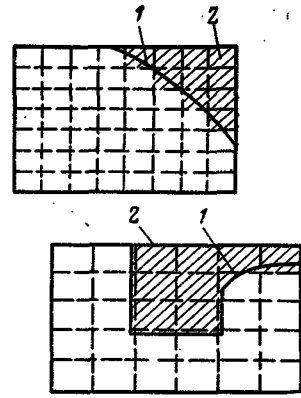


Рис. 6.3. Заблокированные области регулярной сетки: *1* — истинная граница; *2* — фиктивная граница

Для использования метода существенно, однако, свойство ортогональности сетки. Так как диффузионный поток через границу контрольного объема рассчитывается по значениям Φ в двух узловых точках, решающее значение имеет перпендикулярность в точке пересечения касательных к границе и к координатной линии, соединяющей эти узловые точки.

Построение ортогональной криволинейной системы координат для области произвольной формы само по себе представляет значительную трудность. В настоящее время имеются некоторые методы решения этой задачи (см., например, [63]). Если конструирование подходящей сетки экономически оправдано, то использование ортогональных криволинейных координат является полезным методом учета нерегулярности геометрии расчетной области.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Регулярная сетка с заблокированными областями. В некоторых случаях программу для ЭВМ, написанную для регуляриой сетки (например, декартовой), можно применить для решения задачи в расчетной области, имеющей нерегулярную геометрию. Это делается путем выключеиия или блокировки некоторых контрольных объемов регулярной сетки таким образом, чтобы оставшиеся действующие контрольные объемы составляли рассматриваемую нерегулярную область. Некоторые примеры такого подхода приведены на рис. 6.3, где заштрихованы выключенные контрольные объемы. Очевидно, что нерегулярную границу следует аппроксимировать с помощью набора прямоугольных ступенек, причем часто очень хороших результатов можно достигнуть при довольно грубом приближении границы.

Операция блокировки состоит из установления известных значений соответствующей величины Ф в выключенных контрольных объемах. Если выключенная область обусловлена стационарной твердой границей, то в этой области необходимо положить равными нулю составляющие скорости. Если такая область соответствует изотермической границе, выключенным контрольным объемам следует приписать известную температуру этой границы.

Имеется два способа получения требуемых значений зависимых переменных в выключенных контрольных объемах. Один из них заключается в использовании больших значений источникового члена (см. § 6.2). В оснобе второго метода лежит использование рассмотренного в § 3.2 среднего гармонического коэффициента Г на границах контрольных объемов [42]. Так как при этом правильно учитывается скачок Г на границе контрольного объема, в выключенной зоне можно взять Г равным очень большой величине. Это приведет к тому, что заданное на (фиктивной) граиице зоны значение зависимой переменной распространится на всю выключенную область, при этом принятые большие значения Г не повлияют на решение в интересующей области. Например, можно сделать равными нулю скорости в выключенной зоне, используя очень большие значения коэффициента вязкости в этой зоне и задавая нулевое зиачение скорости на фиктивной границе.

Следует заметить, что подобным образом можно учесть только довольно простые граничные условия на нерегулярной граиице. При более сложных граничных условиях потребуется модификация источниковых членов в примыкающих к истинной границе контрольных объемах интересующей области. Следует также отметить, что метод блокировки до некоторой степени неэкономичен, так как приходится затрачивать время и память ЭВМ на тривиальные расчеты значений в выключенной области и их хранение. Несмотря на это, удобство применения программы расчета, разработанной для регулярной сетки, к решению задач с произвольной геометрией расчетной области имеет значительные преимущества.

Еще одно применение метод гармонического среднего коэффициента Г на границе находит при решении задач сопряженного теплообмена.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Сопряженный теплообмен. Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 6.4. Здесь изображено течение жидкости в канале с внутренним ребром. Стенка канала и ребро имеют конечную толщину и умеренный коэффициент теплопроводности. Тепловое граничное условие известно на внешней поверхности стенки, например задана температура внешней поверхности. Данная ситуация представляет собой задачу сопряженного теплообмена, в которой необходимо рассматривать как теплопроводность в твердом теле, так и конвективный теплообмен в жидкости. При этом проводится соответствующее согласование решений на границе раздела твердого тела и жидкости. При раздельном расчете в областях, занятых твердым телом и жидкостью, для удовлетворения условий сопряжения решений на границе раздела потребуется использовать итерационную процедуру. В работе [42] показано, что с помощью метода среднего гармонического коэффициента Г эту задачу можно решить более простым путем.

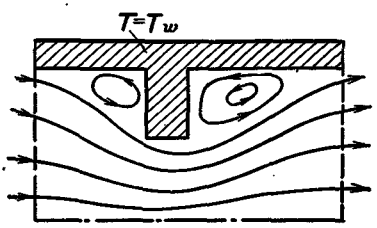


Рис. 6.4. К задаче сопряженного теплообмена

Согласно этому подходу задача решается в расчетной области, включающей области, занятые твердым телом и жидкостью, причем граница расчетной области совпадает с внешней поверхностью стенки. При этом граничные условия как для поля скорости, так и для поля температуры можно легко поставить на внешней границе области. Методика расчета основывается на возможности учета больших скачкообразных изменений Г. При решении уравнений движения значение Г в узловых точках, находящихся в области, занятой жидкостью, задается равным значению коэффициента вязкости жидкости, а в узловых точках, находящихся в области, занятой твердым телом, — равным очень большому числу. Это приведет к тому, что заданное на внешней поверхности стенки нулевое значение скорости распространится на область, занятую твердым телом, и значение скорости на границе жидкости окажется также равным нулю, что правильно отражает исходную постановку задачи. При решении уравнения для температуры значение Г берется равным истинным значениям коэффициентов теплопроводности твердого тела и жидкости в соответствующих областях. Во всей расчетной области задача решается как задача конвективного теплообмена. Однако вследствие равенства нулю скоростей в области, занятой твердым телом, число Пекле здесь будет также равно нулю; таким образом, в рассматриваемой области будет решаться чистая задача теплопроводности. В результате решения задачи получим распределения температуры в твердом теле и жидкости, которые автоматически будут согласованы на границе раздела твердого тела с жидкостью. В рамках такого подхода эта граница рассматривается просто как любая другая граница между двумя контрольнымн объемами.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

6.4. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ И ОТЛАДКЕ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Для проведенія практическнх расчетов чнсленный метод надо воплотить в программу для ЭВМ. Подготовка эффектнвной и отлаженной программы требует организованной и целенаправленной работы. После составления и проверки программа становится ценным инструментом исследованія. Она открывает новые возможности сравнительно простого решения сложых практическнх задач. Ниже прнведены рекомендацин, которые должны помочь чнтателю в созданнн программ для ЭВМ.

1. Первый шаг прн составлении программ для ЭВМ заключается в определенин предполагаемых возможностей н ограничений программы. Надо решнть, должна лн она быть приспособлена для решенія двух- илн трехмерных стацнонарных или нестацнонарных задач, будут ли нспользоваться декартовы или цилиндрнческне координаты и равномерная или неравномериая сетка, учитывать или не учнтывать переменность плотностн среды. Слншком большая общность делает программу тяжеловесной и неудобной для решенія простых задач. Слишком малая общность огранничивает область прнменения программы очень небольшим кругом физических задач. По-видимому, сначала лучше составить сравнительно небольшую версию программы, но с гибкой структурой, такой, чтобы объем н возможности программы легко могли быть увеличены.

2. Полезно различать общие операции (такие, как расчет коэффициентов и решение дискретных аналогов) н операции, характер которых зависит от конкретной задачн (такие, как определение Γ, S_C, S_P и граничных условий для соответствующих переменных). Имеет смысл сначала запрограммнровать общие операции и отладить их на решенни различных задач.

3. Составленную программу необходимо тщательно отладить. На программу, содержащую ошибкн, нельзя положиться; результаты, полученные с ее помощью, могут быть ошибочнымн. Можно разработать свободные от ошибок программы, за которые исследователь-программист будет нспытывать законную гордость.

4. Перед запуском полной программы полезно отладить ее отдельные части. Напрнмер, отладку подпрограммы решения дискретных аналогов уравнений можно осуществить путем задания произвольных значений коэффициентов.

5. Большую часть начальной отладкн можно проводнть на грубой сетке. Это сбережет время ЭВМ, а так как рассчитанные поля Φ содержат только несколько чисел, их легко анализировать и интерпретировать. В некоторых случаях результаты можно проверить с помощью расчета, сделанного вручную. Можно ожидать, что даже решения, полученные на грубой сетке, будут физнчески правдоподобными, так как этот критерий был одним из основных принципов построенія представленного в этой книге численного метода.

6. Использование метода контрольного объема гарантирует удовлетворенне интегрального баланса по всей расчетной областн. На этом осиовывается полезный тест для программы расчета. При проверке интегральных балансов мы должны нспользовать те же аппроксимации для профилей, которые использовалнсь при построенни днскретных аналогов. Тогда при достиженин сходимости решения с удовлетворительной точностью интегральный баланс должен достаточно хорошо удовлетворяться прн любом числе узловых точек. Кроме того, точность выполнения интегрального баланса может служить признаком удовлетворнтельной сходимости итераций.

7. Чтобы убедиться во внутренней непротиворечивости программы расчета,

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

можно провести несколько тестов. Одни из них заключается в проверке независимости сходящегося решения от угаданного начального приближения и коэффициентов релаксации.

8. Ориентация системы координат соответствующей данной физической задаче, конечно, произвольна. Правильность программы расчета можно проверить путем решения той же самой задачи, например, при перемене направлений осей x и y.

9. Если из граничных условий вытекает симметрия решения относительно линии (или плоскости), достаточно провести расчет только в половине расчетной области, лежащей по одну сторону от линии симметрии. Например, плоское течение в канале между параллельными пластинами может быть рассчитано в области, расположенной между одной из пластин и линией симметрии. Однако при отладке программы можно рассмотреть в качестве расчетной области все пространство между пластинами и проверить, удовлетворяет ли полученное решение условию симметрии[1] и совпадает ли решение в половине расчетной области с решением, полученным с учетом условия симметрии, когда в качестве расчетной области использовалась половина пространства между пластинами.

10. Предположим, что решение данной задачи определяется значениями некоторых безразмерных параметров. Например, таким параметром может быть число Рейнольдса $\mathrm{Re}=\rho u D/\mu$. Решение задачи при некотором заданном числе Рейнольдса можно получить, если заложить в программу расчета

$$\rho=1;\ D=1;\ \mu=1;\ U=\mathrm{Re},$$

или $U=1;\ D=1;\ \mu=1;\ \rho=\mathrm{Re}$,

или $\rho=10;\ U=5;\ \mu=1;\ D=\mathrm{Re}/50$,

или любую другую комбинацию этих параметров. Безразмерные результаты решения задачи для всех таких комбинаций должны быть равны между собой. Этот критерий можно применить для проверки правильности программы расчета.

11. Для отладки правильности программы расчета можно также использовать принцип суперпозиции (справедливый для задач линейной теплопроводности). В соответствии с этим принципом можно сложить решения двух достаточно простых задач и получить решение более сложной задачи. Все эти три решения можно получить непосредственно расчетным путем, а затем проверить, действительно ли решение сложной задачи оказалось равным сумме решений двух других задач.

12. Полезным тестом для программы расчета является рассмотрение предельного поведения решения в соответствующих условиях. Программу расчета трехмерных задач можно использовать для решения двухмерной задачи и убедиться в том, что полученное решение действительно двухмерно. Результаты расчета течения в канале должны отражать полностью развитый (стабилизированный) характер решения в области далеко вниз по течению от начального сечения. С помощью программы расчета вязкого течения должны получаться решения для невязкой жидкости, если положить коэффициент вязкости равным нулю.

---

[1] Имеется ряд ситуаций, в которых даже при симметричных граничных условиях решение может быть несимметричным. Например, в случаях струй в каналах (в гидравлических устройствах) или внезапных расширений поперечных сечений каналов часто имеют место несимметричные картины течения. Очевидно, что такие особые случаи не должны использоваться при отладке программы на выполнение условия симметрии.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

13. Описанные выше тесты предназначалнсь для проверкн качественного поведения результатов расчета. Необходима также проверка точности полученных результатов, причем не только для того, чтобы убедиться в правильности программы, но и чтобы указать точность, которую можно получить при даниых параметрах сетки. Полезный способ проверкн точности состоит в сравнении полученных данных с нмеющимися точными решениими. Надо удостовернться в том, что при измельчении сетки неточность рассчитанного решения уменьшается. Так как большинство известных точных решений либо отиосится к отиосительно простым задачам, либо требует расчета бесконечных рядов, включающих специальные функции и собственные значения, желательно иметь методику получении точных решенй. Удобный способ получення точных решенй состоит в заданни некоторого решения для переменной Ф и выборе распределений Г, ρ и u, а затем в полученни выражения для S с помощью подстановкн выбранных значенй остальных величин в уравнение (1.13). При этом заданное решенне для Ф является точным решением уравнения прн источниковом члене, равном полученному выражению для S (а также прн выбранных распределеннях Г, ρ и u). Конечно, можно взять в качестве расчетной областн любую область, на которой Ф определена, а в качестве граничных условий — значенни точного решения Ф на граннцах этой областн.

14. Наконец, для доказательства правильностн новой программы расчета можно использовать опубликованные результаты численных решений. Для этого могут оказаться полезнымн результаты некоторых нллюстративных прнмеров расчета, представленные в гл. 8.

Глава 7

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

До сих пор в данной книге развивался общий метод расчета гидродииамикн, теплообмена и родственных им явлений. Хотя для простоты выкладок и наглядности изложения рассматрнвались случан одномерных и двухмерных процессов, тем не менее были получены выражения для нестацнонарной трехмерной задачи. Несмотря на введение понятня односторонней пространственной координаты, всегда предполагался двухстороннй (эллиптический) характер всех пространственных координат.

Однако идея односторонней пространственной координаты весьма полезна, и в практике расчетов широко распространены специальные методикн, в которых используются преимущества одностороннего характера координаты. Нже в общих чертах опнсано несколько таких методнк, а также вкратце рассмотрен конечно-элементный метод, в котором используются многие из развитых в данной книге прнпципов. Этнм мы еще раз подчеркнем основное сходство между конечно-разностным н конечно-элементным методами, которые часто счнтаются полностью различными.

Мы не старались дать нсчерпывающее изложение рассматриваемых вопросов, а хотелн прнвлечь вннманне читателя к этим особым случаим, тесно связанным с основным содержанием книги. С помощью уже изложениого матернала и опубликованных работ, на которые приведены ссылки, читатель сможет самостоятельно проделать необходнмые алгебраические выкладки.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

7.1. ДВУХМЕРНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Если в стационарном двухмерном течении имеется одна одностороняя пространственная координата, оно называется двухмерным параболическим течением. В таком течении есть преобладающая составляющая скорости вдоль односторонней координаты, и поэтому конвективный перенос всегда превышает диффузию в направлении вдоль этой координаты. Именно эта особенность придает одиосторонний характер координате вдоль направления течения. Очевидно, что при этом не может быть обратного течения. В § 5.7 указывалось, что обычно давление оказывает двухстороннее (или эллиптическое) воздействие. В случае когда координату вдоль направления течения можно рассматривать как одностороннюю, изменение давления в направлении поперек течения должно быть пренебрежимо малым.

Примерами двухмерных параболических течений являются плоские и осесимметричные пограничные слои на стенках, течения в каналах, струях, следах и слоях смешения. Решение таких задач находится по известному распределению переменной Ф в некотором сечении вверх по потоку от расчетной области путем последовательного расчета вдоль направления течения. При этом на каждом продольном шаге рассчитывается распределение Ф вдоль поперечной координаты при данном значении продольной координаты. Таким образом, с вычислительной точки зрения необходимо решать только одномерную задачу, решение дискретных уравнений можно получить с помощью алгоритма решения системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей (TDMA).

Решение уравнений количества движения и неразрывности не встречает особых трудностей. Градиент давления вдоль направления течения предполагается известным. В этом случае решение уравнения количества движения вдоль направления течения дает продольную скорость. Затем из уравнения неразрывности находят поперечную скорость. Во внешних задачах градиент давления берется согласно полю давления во внешнем безвихревом течении вне пограничного слоя. Во внутренних задачах продольный градиент давления находят из условия сохранения полного расхода через поперечное сечение канала. При двухмерных параболических течениях не требуются никакие специальные алгоритмы расчета давления, такие, как SIMPLE и SIMPLER.

Полное описание и программы расчета двухмерных параболических задач даны в [54, 76]. В описанном в этих работах методе расчета в качестве поперечной координаты используется безразмерная функция тока, позволяющая расширять и сокращать ширину расчетной области в соответствии с изменением толщины пограничного слоя.

7.2. ТРЕХМЕРНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Если в стационарном трехмерном течении имеется одна односторонняя координата, то это течение можно характеризовать как трехмерное параболическое. Как и раньше, условиями односторонности пространственной координаты являются существование преобладающей составляющей скорости вдоль этой координаты (направление которой не меняется) и, следовательно, пренебрежимо малая диффузия вдоль этого направления и отсутствие возвратных течений, а также пренебрежимо малое изменение давления в плоскости поперечного сечения. Примеры трехмерных параболических течений аналогичны соответствующим

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

примерам для двухмериого случая. Это, иапример, пограиичиый слой иа иаклоиной поверхиости крыла, течение в каиале прямоугольиого поперечиого сечения, струя, вытекающая из некруглого отверстии.

Хотя видимое отличие двух- и трехмериых параболических течений незначительно, методика решеиия трехмерных параболических задач намного сложнее методикн для двухмерных параболических течеиий (процедура SIMPLE вначале была разработана в связи с исследованием трехмерных параболических течений в [55]). Причина дополнительных сложиостей расчета трехмериых течений заключается в том, что после расчета продольиой составляющей скорости по уравнению количества движения в соответствующем направлении нельзя получить две поперечиые составляющие только из уравиеиия иеразрывиости. Для определения характера течення в поперечиой плоскости необходимо решить оба уравиении количества двнжения в поперечных направлениях, в то нреми как в постановку задачи днухмериого параболического течения не входит уравиение количества движения в направлеини поперек течения.

Вследствие этого предположение о характере зависимости давления, которое не вызывало каких-либо вопросов в методике решения задач двухмерного параболического течения, в случае трехмерного параболического течеиия выдвигается на первый план. Предполагается, что иа продольную скорость оказывает влияиие среднее по поперечному сечению давление $\bar{p}$, в то нремя как составляющие скорости н поперечном иаправлеии обусловлеиы измеиеиием давления p в поперечном сеченни. Эта процедура расщепления существенна прн использоваинн параболической процедуры решения задачи [1].

Дли внешних течений изменение $\bar{p}$ в иаправлеини течения находится нз решеиня задачи для окружающего безвихревого течеиия. В случае виутреиних течений измеиение $\bar{p}$ находнтся из условия сохранення полного расхода массы через поперечное сеченне каиала. При данном шаге по продольной координате, если получена продольиая составляющая скорости прн иекотором подходящем значеиии граднента давления $\bar{p}$, задача расчета остальных двух составляющих скорости н распределения давления в поперечном сечении почтн аиалогнчиа решению двухмерной эллиптической задачи, которую можно решнть с помощью процедур SIMPLE и SIMPLER. Подробности можно иайтн в [55]

7.3. ЧАСТИЧНО ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

В некоторых практнческих ситуациях существует направлеине, вдоль которого составляющая скорости течения преобладает иад остальными двумя, ио изменеиие данлення в поперечном направленин все-таки ие пренебрежимо мало. Следовательио, использоваиное н методиках решения параболических задач расщепление давления для даиных случаев неудонлетворительно. Во всех остальных отношениях решение можно получить последовательным расчетом вниз по течению от одиой граиицы области до другой, но влияиие условий в областн ниже по течеиию передается вверх по течению через давление. Такие

[1] Поперечиое давление p можио рассматривать как возмущеиие средиего давлення $\bar{p}$. Для того чтобы течение можио было считать параболнческим, возмущеиие давлеиия в поперечном сечеиии должно быть иастолько мало, чтобы погрешиость в решении уравиении количества движеиия в продольном иаправлнии, вызваиная использованием среднего давления $\bar{p}$ нместо локальиых значеиий, была иезиачительиой.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ситуации называются частично параболическими. Примерами таких ситуаций являются течения в сильно искривленных каналах, струя в поперечном потоке, каналы с быстрым изменением поперечного сечения и вращающиеся каналы. Основные концепции для этого класса течений были высказаны в [65, 66] и применялись для решения задач пленочного охлаждения в [7, 8].

При расчете частично параболических задач запоминается поле давления во всей расчетной области, в то время как все остальные величины запоминаются в одном или двух последовательных сечениях. При данном поле давления, точно так же как и для полностью параболических задач, применяется процедура последовательного решения вдоль направления течения, а новое подправленное поле давления находится из уравнения для поправки давления или уравнения для давления. Для достижения сходимости решения необходимо провести много повторений процедуры последовательного просчета области.

По сравнению с процедурой решения полностью эллиптической задачи решение полностью параболической задачи требует значительно меньше времени счета и памяти ЭВМ. При решении частично параболической задачи требуется меньшая память, но экономия времени ЭВМ может оказаться незначительной.

7.4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предварительное обсуждение. Рассмотренный в этой книге метод дискретизации вследствие использования регулярных сеток имеет вид конечно-разностного метода. При исследовании напряжений чаще используется метод конечных элементов; в последнее десятилетие этот метод начали использовать и при исследованиях теплообмена и течения жидкости.

В методе конечных элементов расчетная область разбивается на элементы, такие, как треугольные элементы на рис. 7.1. Обычно дискретные аналоги получаются с помощью вариационного принципа, если он существует, или с помощью метода Галеркина, являющегося частным случаем метода взвешенных невязок. Для описания изменения зависимой переменной Ф на элементе используются предположения о характере функции формы или профиля. В § 2.2 показано, что формулировка для контрольного объема является частным случаем метода взвешенных невязок. Мы также использовали функции формы для описания изменения Ф между двумя узловыми точками. В нашем методе эти функции оказались локально-одномерными; возможность использования таких простых функций связана с требованием ортогональности сетки, образованной линиями, проходящими через узловые точки.

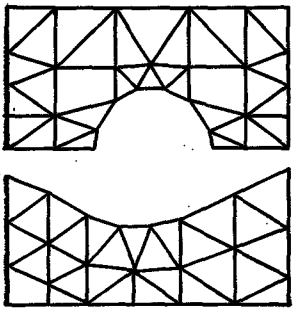


Рис. 7.1. Примеры дискретизации области треугольными элементами

С этой точки зрения метод конечных элементов не следует рассматривать как отличающийся в принципе от конечно-разностного метода. Его дополнительные возможности обусловлены только тем, что при этом методе можно использовать нерегулярную сетку. Хотя в § 6.3 и обсуждались некоторые способы применения метода дискретизации к случаю нерегулярной геометрии, нет никакого сомнения в том, что показанная на рис. 7.1 треугольная сетка более удобна для аппроксимации нерегулярных областей и получения локального сгущения узловых точек. По-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

видимому, создание удовлетворительного конечно-элементного метода расчета задач теплообмена и гидродинамики очень желательно.

Трудности применения. Хотя уже давно стали понятны потенциальные возможности метода конечных элементов, до недавнего времени его развитию мешали определенные трудности.

1. Самая главная трудность связана с аппроксимацией конвективных членов. Прямое применение обычного конечно-элементного метода дает аппроксимацию, во многом подобную центрально-разностной схеме; но мы хорошо знаем, что такая аппроксимация может в ряде случаев привести к физически неправдоподобным результатам. Необходимо получить аппроксимацию, подобную схеме против потока или экспоненциальной схеме, но неясно, как это можно сделать для нерегулярных сеток.

2. Использование сеток с узловыми точками, расположенными в шахматном порядке (см. § 5.3), оказалось возможным вследствие того, что сеточные линии были направлены параллельно осям координат и можно было соответствующим образом сместить в этих направлениях составляющие скорости. В случае треугольной сетки также надо сделать что-то подобное; если бы все переменные рассчитывались в одних и тех же узловых точках, обязательно возникли бы трудности, аналогичные рассмотренным в § 5.2.

3. В большинстве из опубликованных работ, в которых метод конечных элементов применен к расчету задач гидродинамики для получения полей компонент скорости и давления, используется прямое одновременное решение уравнения неразрывности и всех уравнений количества движения. Так как прямое решение очень трудоемко, требуется сформулировать метод последовательного решения (типа процедуры SIMPLE) этих уравнений.

4. Для большинства исследователей, работающих в области гидродинамики и теплообмена, конечно-элементный метод все еще кажется окутанным покровом таинственности. Вариационная формулировка и даже метод Галеркина не поддаются простой физической интерпретации. В соответствии с духом этой книги было бы весьма желательно разработать вариант метода конечных элементов, который бы сделал действительно понятным физический смысл дискретных аналогов исходных уравнений.

Метод конечных элементов на основе интегрирования по контрольному объему. В недавних работах [4, 5] указанные выше трудности успешно преодолены и сформулирован конечно-элементный метод, тесно связанный с описанным в этой книге методом дискретизации. Рассматривалась двухмерная задача, но это делалось таким образом, чтобы иметь возможность распространить полученные результаты на трехмерный случай без дальнейших усовершенствований. Ниже следует краткое описание наиболее существенных особенностей предложенного метода.

1. В случае треугольной сетки значения зависимых переменных определены в узловых точках, лежащих в вершинах треугольников. Дискретные аналоги строятся с помощью метода контрольного объема, т. е. дифференциальное уравнение интегрируется по показанному на рис. 7.2 типичному контрольному объему. Контрольные объемы образуются линиями, соединяющими центры масс каждого треугольника с серединами его сторон. Такая конструкции была ранее предложена в [82].

Из рис. 7.2 видно, что контрольный объем составлен из частей треугольных элементов с вершиной в точке P. Внутри этих же элементов лежат соответст-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

вующие грани контрольного объема. Дискретный аналог находится путем сложения вкладов от этих элементов в интегральный баланс для контрольного объема.

2. Для расчета потоков, попадающих внутрь элемента через грани контрольного объема, нужны функции формы, описывающие изменение Ф на элементе. Обычная функция формы для треугольного элемента имеет вид

$$\Phi = a + bx + cy, \tag{7.1}$$

где постоянные a, b, c выражаются через значения Ф в трех узловых точках. Для задач с конвекцией и диффузией использование этой функции приведет к

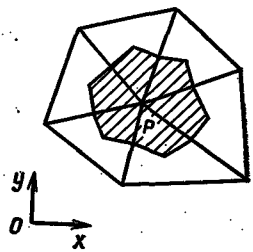


Рис. 7.2. Контрольный объем (заштрихован) в треугольной сетке

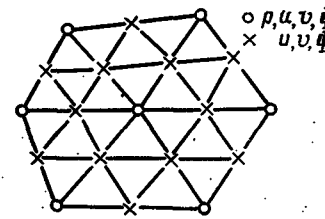


Рис. 7.3. Макротреугольники и малые треугольники:

o — места определения p, u, v, Φ; × — места определения u, v, Φ

результатам, во многом аналогичным результатам, даваемым центрально-разностной схемой метода конечных разностей. Так как при больших числах Пекле эти результаты становятся физически неправдоподобными, применение функций (7.1) неприемлемо. Для преодоления этой трудности в [4] предложена следующая функция формы:

$$\Phi = A + B \exp \frac{\rho U X}{\Gamma} + CY, \tag{7.2}$$

где U — результирующая скорость в элементе; X и Y — координаты, направленные соответственно вдоль направления результирующей скорости и по нормали к нему. Постоянные A, B, C зависят от значений Ф в вершинах треугольника.

После обсуждения в гл. 4 численного метода для задач совместной конвекции и диффузии причины использования в (7.2) экспоненты должны быть совершенно очевидными. При малых числах Пекле функция (7.2) переходит в зависимость (7.1), являющуюся подходящей функцией формы для решения задач теплопроводности. Через (7.2) в конечно-элементный метод вносятся идеи экспоненциальной схемы.

Фактически с помощью экспоненциальной функции формы достигаются несколько большие результаты. В то время как в гл. 4 при аппроксимации использовалось локально-одномерное представление, в зависимости (7.2) учитывается направление результирующей скорости. Вследствие этого при использовании основанного на (7.2) конечно-элементного метода влияние фиктивной диффузии намного меньше, чем при аппроксимации, рассмотренной в гл. 4.

3. Идея, связанная с введением шахматной сетки, состоит в том, что расчет

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

давления осуществляется на сетке, отличной от сетки, в узлах которой определяются все остальные переменные. Давление рассчитывается в узлах макротреугольников, обозначенных на рис. 7.3 кружками. Каждый макротреугольник делится на четыре меньших. Эти малые треугольники образуют сетку для составляющих скорости и всех других переменных, за исключением давления.

4. Метод реализован в алгоритме последовательного решения типа процедуры SIMPLER. Уравнения для давления и поправки давления выводятся из уравнения неразрывности, записанного для контрольного объема, определяемого в соответствии с малыми треугольными элементами.

Описанный здесь в общих чертах конечно-элементный метод, основанный на интегрировании по контрольному объему, еще сравнительно мало проверен и опробован; конечно, в него могут быть внесены многочисленные усовершенствования. Этот метод, однако, является логичным и эффективным расширением метода дискретизации на случай треугольных сеток.

Глава 8

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

В данной главе приведено несколько примеров использования рассмотренного в этой книге численного метода. Метод был тщательно проверен и апробирован и применялся для решения множества практических задач. В написанной вскоре после начала использования процедуры SIMPLE обзорной статье [41] приведены примеры использования метода. С тех пор в технической литературе появилось большое количество дополнительных приложений метода. Ниже дан неполный список этих публикаций.

Расчеты двухмерных эллиптических задач, включающих гидродинамику и теплообмен, осуществлены в [1, 20, 23, 35, 39, 40, 47, 48, 52, 60, 77, 79, 80].

В работе [27] приведена модификация основного метода расчета для случаев, когда в пределах одной расчетной области имеются области дозвукового и сверхзвукового течений. Турбулентное течение химически реагирующего газа в двухмерных камерах сгорания было рассчитано в [30]. Решение трехмерной эллиптической задачи, включающей турбулентность, горение и излучение, получено в [56, 58]. Трехмерные эллиптические задачи решались также в работах [10, 46, 57, 59].

Метод решения трехмерных параболических задач применялся для исследования сложных практических проблем в [16, 36, 38, 49, 51, 53, 71].

Цель данной главы заключается в том, чтобы дать читателю представление о некоторых приложениях, а не обсуждать все перечисленные исследования. Так как этой цели можно достичь с помощью нескольких примеров, достаточно выбрать их из числа задач, решенных автором и его сотрудниками.

Интересно отметить, что решения всех представленных здесь задач были получены с помощью только трех программ расчета, имеющих многоцелевое назначение. Программы различаются только размерностью и параболическим или эллиптическим характером рассматриваемых задач. Эти три программы рассчитаны на решение соответственно: 1) двухмерных эллиптических, 2) трехмерных параболических и 3) трехмерных эллиптических задач. В каждой программе могут рассматриваться декартова или цилиндрическая системы координат.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Конечно, применение программы к конкретной задаче требует выбора подходящих математических моделей для соответствующих физических процессов (таких, как турбулентность или химическая реакция) и определения конкретных условий задачи (таких, как геометрия, свойства жидкости и граничные условия). Хотя такая адаптация часто требует значительных усилий, все-таки использование многоцелевых программ расчета очень удобно.

В трех из восьми приведенных здесь примеров (см. § 8.4—8.6) рассматривается турбулентное течение. В § 8.5 и 8.6 используется широко распространенная k—ε-модель турбулентности [34], а в § 8.4 применяется один из вариантов модели, основанной на концепции длины пути смешения. В рассмотренной в § 8.8 задаче исследования теплогидравлических характеристик парогенератора для описания течения через пучок труб используется концепция распределенных сопротивлений. В остальных параграфах рассматриваются ламинарные течения.

В §8.2—8.4 и 8.7 рассматриваются двухмерные эллиптические задачи; решения задач из § 8.1 и 8.6 получены с помощью методики для трехмерного параболического случая; в § 8.5 и 8.8 даны иллюстрации применения методики решения трехмерных эллиптических задач. Во всех случаях решались стационарные задачи, за исключением § 8.3, где рассмотрена нестационарная задача с движущейся границей.

8.1. РАЗВИВАЮЩЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ В ИЗОГНУТОЙ ТРУБЕ

Осесимметричное течение в прямой круглой трубе имеет двухмерный характер. Однако в изогнутой трубе течение проявляет трехмерные черты. Это вызвано влиянием центробежной силы, которая, действуя по нормали к направлению основного течения, вызывает вторичное течение в поперечном сечении трубы (рис. 8.1). В результате точка максимума скорости сдвигается в сторону от центра.

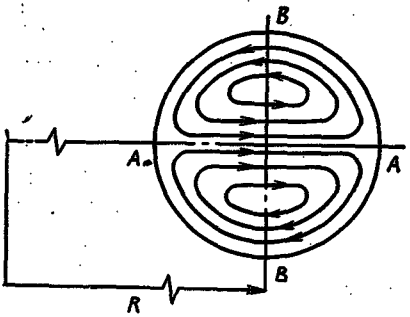


Рис. 8.1. Картина вторичного течения в поперечном сечении изогнутой трубы [49]

Развитие ламинарного течения в изогнутой трубе рассматривалось в [49]. На рис. 8.2 представлены характерные результаты расчета профилей осевой скорости вдоль двух диаметров (BB и AA, см. рис. 8.1) в различных последовательных сечениях изогнутого участка с радиусом кривизны R, которому предшествовала прямая секция трубы. Вследствие этого профили скорости на входе в участок имеют параболический характер, а затем быстро принимают форму, свойственную полностью развитому течению в изогнутой трубе. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными [2]; как видно из рисунка, совпадение довольно хорошее.

В статье также приведено много других результатов по характеристикам течения и теплообмена и дано их сравнение с экспериментальными данными. В работе [50] была решена аналогичная задача при турбулентном течении; для расчета турбулентного переноса использовалась модель, основанная на решении двух уравнений.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

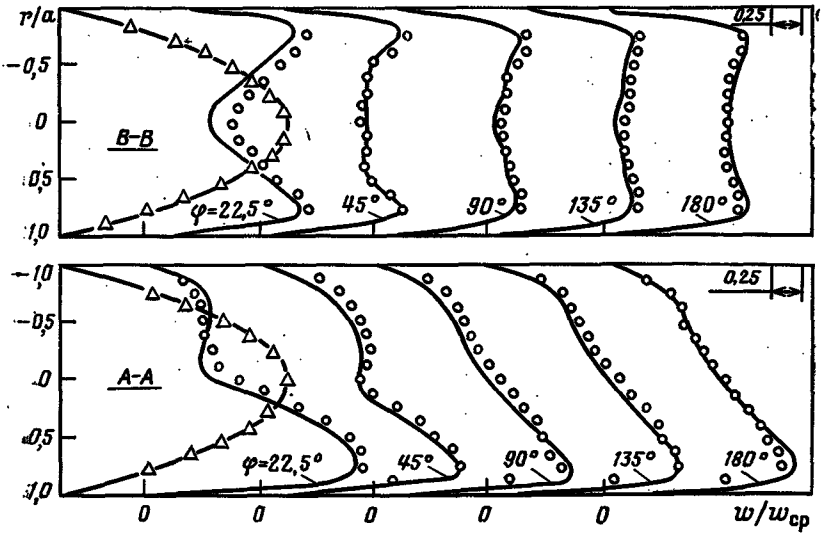


Рис. 8.2. Развитие осевой скорости [49] при $R/a=29{,}1$:
Кривые — результаты расчетов; точки — экспериментальные данные [2]

8.2. СМЕШАННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТРУБЕ

В [52] было проведено теоретическое исследование полностью развитого ламинарного течения и теплообмена в горизонтальной неравномерно обогреваемой трубе. Рассматривались два условия обогрева, изображенные на вставках к рис. 8.3. В первом случае равномерно обогревалась верхняя половина трубы, а нижняя была теплоизолирована; во втором случае обогреваемый и теплоизолированный участки трубы меняли местами.

Неравномерный обогрев приводит к вторичному течению, вызванному подъемной силой, которое обусловливает значительно более высокие значения числа Нуссельта, чем для чисто вынужденной конвекции. Как видно из рис. 8.3, на котором приведены результаты расчетов среднего числа Нуссельта (Nu_0 — число Нуссельта при вынужденной конвекции), этот эффект особенно существен в случае обогрева нижней части трубы и при больших числах Прандтля. Абсцисса на данном рисунке пропорциональна модифицированному числу Грасгофа Gr^+.

Дальнейший анализ задачи можно провести на основании картин изо-

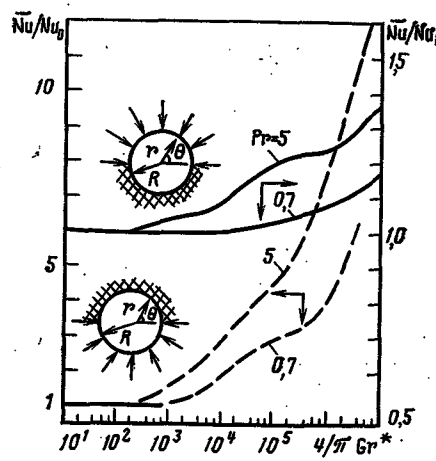


Рис. 8.3. Средние числа Нуссельта для горизонтальной неравномерно обогреваемой трубы [52]

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

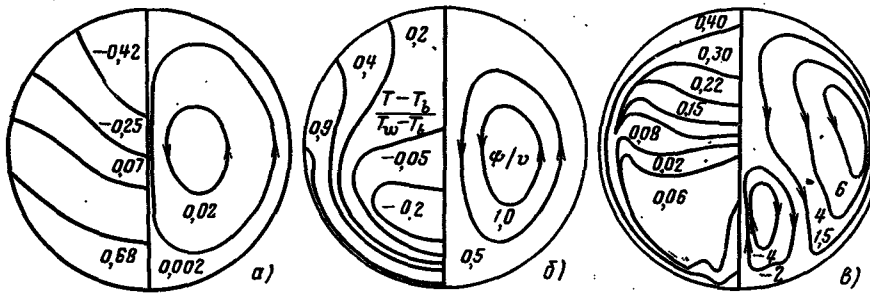


Рис. 8.4. Картины изотерм и линий тока для случая обогрева снизу при $Pr=5$ и $(4/\pi)\,Gr^{+}=10$ (*а*); $(4/\pi)\,Gr^{+}=10^{4}$ (*б*); $(4/\pi)\,Gr^{+}=0{,}5\cdot10^{7}$ (*в*) [52]

терм и линий тока в сечении трубы. На рис. 8.4 приведены результаты для случая обогрева трубы снизу при трех значениях Gr^{+}. В каждом сечении слева изображены изотермы $(T-T_b)/(T_w-T_b)$, где T, T_b — текущая и среднемассовая температуры жидкости, T_w — температура стенки трубы; справа приведены линии тока. Здесь ясно видно вызванное неравномерностью обогрева вторичное течение. При наибольшем числе Грасгофа картина линий тока довольно сложна, здесь видна тенденция к образованию термика над самой нижней точкой поперечного сечения. В этом случае изотермы в верхней половине сечения трубы показывают наличие участка, напоминающего устойчиво стратифицированную структуру, а в нижней половине имеют тенденцию к повторению контура трубы, что указывает на существование поднимающейся горячей жидкости у самого дна трубы.

8.3. ПЛАВЛЕНИЕ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 8.5. Вертикальная труба радиусом r_0 с горячей жидкостью окружена твердой средой, температура которой равна температуре плавления $T_{пл}$. В самом начале процесса, когда теплообмен обусловлен только теплопроводностью, толщина слоя расплава одинакова вдоль трубы. Однако затем начинается свободная конвекция, которая приводит к повышению

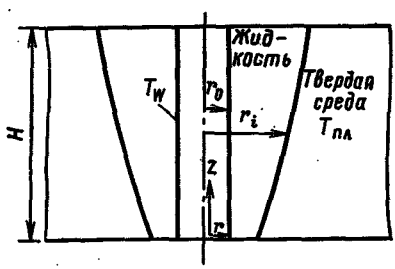


Рис. 8.5. Схема задачи о плавлении около вертикальной трубы [79]

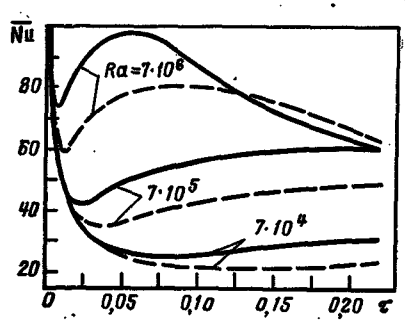


Рис. 8.6. Изменение во времени среднего числа Нуссельта [79]: ——— — $H/r_0=4$; — — — — $H/r_0=10$

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

температуры верхней части трубы по сравнению с нижней. Вследствие этого толщина слоя расплава $r_1 - r_0$ вверху становится больше, чем внизу.

Численное исследование рассмотренного процесса проведено в [79]. Использовалась сетка в преобразованной системе координат, которая во все моменты времени соответствовала изменению формы области, занятой расплавом. При решении данной нестационарной задачи в течение каждого шага по времени принималось, что положение границы раздела стационарно; перед началом расчета

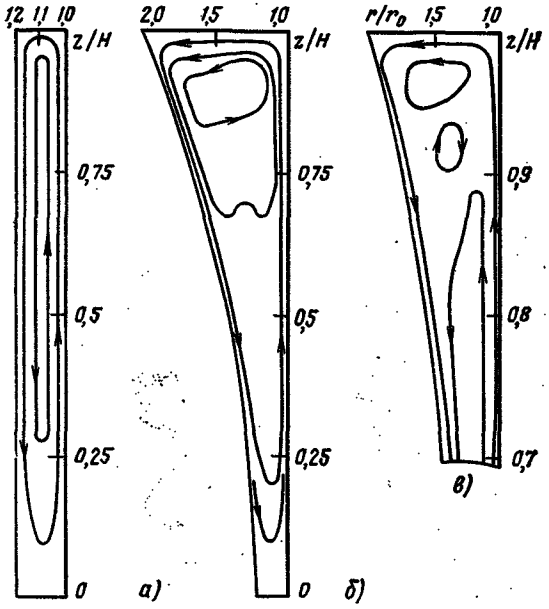


Рис. 8.7. Характерные картины течения расплава:
а — начальная стадия; *б, в* — развитая свободная конвекция [79]

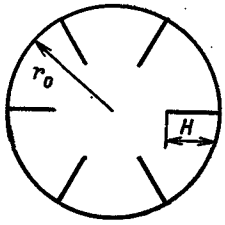


Рис. 8.8. Геометрия поперечного сечения трубы с внутренним оребрением [47]

задачи на каждом следующем шаге по времени ее положение подправлялось с учетом теплообмена через границу раздела.

На рис. 8.6 показаны результаты расчета изменения среднего по длине трубы числа Нуссельта в зависимости от безразмерного времени τ. При малых временах процесс обусловлен теплопроводностью, которая вызывает ухудшение теплообмена с увеличением термического сопротивления возрастающего слоя расплава. Затем вследствие повышения роли свободной конвекции число Нуссельта увеличивается. При больших значениях τ число Нуссельта опять уменьшается, при этом область, занятая расплавом, настолько велика, что теплота переносится только рециркуляционным течением, которое само испытывает возрастающее сопротивление вдоль верхней части стенки трубы.

На рис. 8.7 изображены картины линий тока при свободной конвекции в области расплава и форма границы раздела для трех характерных случаев. В начальной стадии процесса, когда основное влияние оказывает теплопроводность, занятая расплавом область имеет практически прямоугольную форму. На рис. 8.7,*б* и *в* показаны типичные картины линий тока и формы границы раздела, имеющие место при значительной свободной конвекции.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

8.4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В ТРУБАХ С ВНУТРЕННИМ ОРЕБРЕНИЕМ

Круглая труба с продольными внутренними ребрами считается эффективным устройством для интенсификации теплообмена. Расчет полностью развитого течения и теплообмена в такой трубе проводился с использованием основанной на представлении о длине пути смешения модели турбулентности, сформулированной для показанной на рис. 8.8 геометрии поперечного сечения. Подробно эта модель и результаты расчета приведены в [47]. Здесь достаточно сказать, что в данной модели локальная длина пути смешения рассчитывается в зависимости от расстояний до поверхности ребра и до стенки трубы, а коэффициент турбулентной вязкости зависит от градиентов скорости в радиальном и окружном направлениях. В модель входит одна эмпирическая постоянная, значение которой

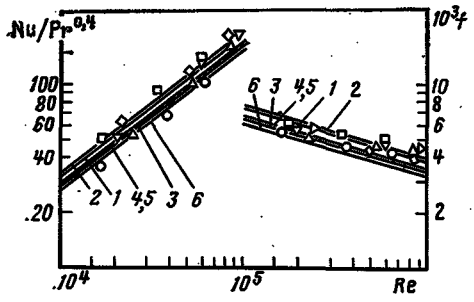


Рис. 8.9. Сравнение рассчитанных значений числа Нуссельта и коэффициента сопротивления трения с экспериментальными данными [11] (см. также [47])

Эксперимент	Расчет	N	H/r_0
□	1	6	0,43
◇	2	6	0,46
▽	3	10	0,22
△	4	10	0,24
▷	5	10	0,26
○	6	16	0,32

было выбрано на основе согласования результатов расчета с экспериментальными данными [11], полученными на воздухе.

На рис. 8.9 приведено сравнение результатов расчета числа Нуссельта и коэффициента сопротивления трения с экспериментальными данными.

Удовлетворительное совпадение результатов не является неожиданным, так как значение эмпирической постоянной в модели турбулентности подбиралось на основании этих же экспериментальных данных. Однако то, что с помощью подбора одной постоянной оказалось возможным получить хорошее совпадение как по числу Nu, так и по f в достаточно большом диапазоне чисел Рейнольдса и при различных числах и высотах ребер, является значительным достижением выбранной модели.

8.5. ТУРБУЛЕНТНАЯ СТРУЯ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ

Истечение турбулентной струи из круглого отверстия радиусом r_0 можно рассматривать как двухмерное параболическое течение. Однако в случае, когда струя отклоняется потоком, направление которого перпендикулярно ее оси, возникает интересная трехмерная эллиптическая задача, показанная на рис. 8.10. Случаи такого течения имеют место в дымовом шлейфе трубы, течении под самолетом с вертикальным или укороченным взлетом и посадкой и в некоторых конструкциях пленочного охлаждения.

Численное решение задачи определения трехмерного поля скорости в изгибающейся струе было получено с использованием k—ε-модели турбулентности в

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

[46]. При этом вместе с уравнениями неразрывности и количества движения решались два дифференциальных уравнении для кинетической энергии турбулентности k и скорости ее диссипации ε. Использовались стандартные значения эмпирических постоянных k—ε-модели, рекомендованные в [34]; изменение значений этих постоянных для лучшего согласования с экспериментальными данными не проводилось.

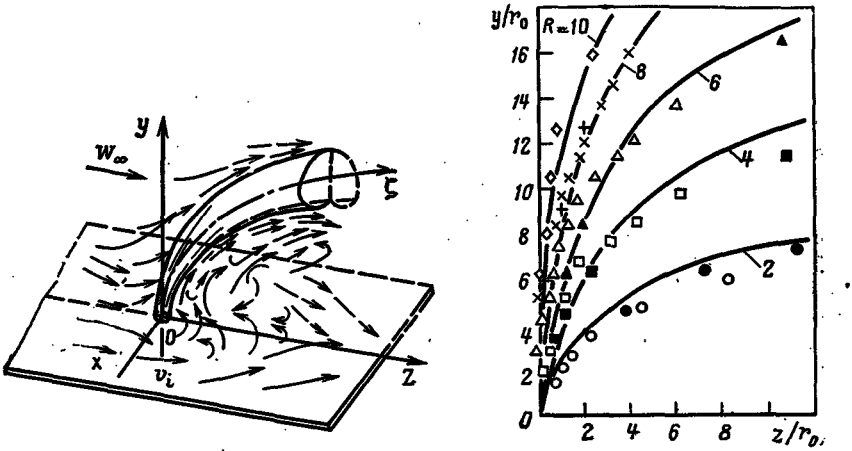


Рис. 8.10. Характер течения в задаче об изгибающейся струе [46]

Рис. 8.11. Расположение линии, проходящей через центр струи, при различных значениях отношения скорости струи к скорости набегающего потока [46]:
Сплошные кривые — результат расчета; точки — экспериментальные данные

На рис. 8.11 показаны результаты расчета положения линии, проходящей через центр струи, при различных значениях отношении R скорости струи к скорости набегающего потока. Приведены также экспериментальные данные [70, 29, 28]. Согласие результатов расчета с экспериментальными данными в пределах их разброса можно считать удовлетворительным. На рис. 8.12 показано сравнение рассчитанных профилей скорости при $R=2$ с измеренными в [70].

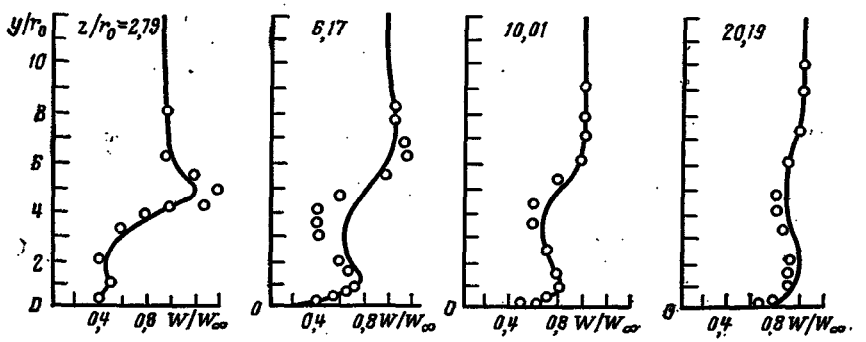


Рис. 8.12. Профили составляющей скорости вдоль оси z:
Сплошные кривые — результат расчета[46]; точки — экспериментальные данные [70]

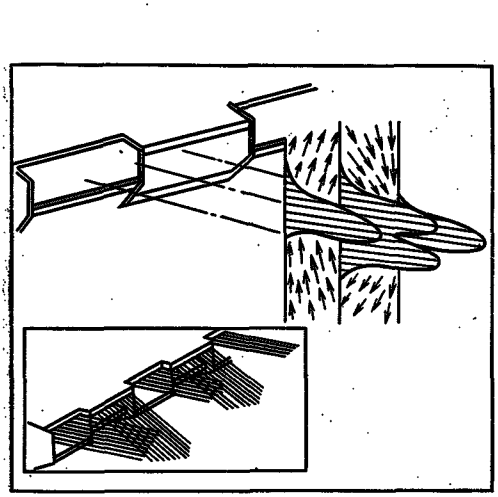
Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Здесь приведены профили составляющей скорости по оси z в центральной плоскости yz при четырех значениях z/r_0. Эти результаты также находятся в разумном соответствии.

8.6. САМОПЕРЕМЕШИВАЮЩАЯСЯ СТРУЯ В ЭЖЕКТОРЕ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ТЯГИ

Эжектор для увеличения тяги является устройством, предназначенным для улучшения тяги основной струи путем засасывания воздуха из атмосферы. Одно из возможных применений такой эжектор находит в самолетах с вертикальным или укороченным взлетом или посадкой. Для значительного увеличения тяги с помощью одиночных струй, вытекающих из щелевых сопл, требуются длинные смесительные каналы. Так как такие длинные каналы непригодны для практического применения на самолетах, для ускорения процесса смешения используется самоперемешивающее сопло. Ниже рассмотрены результаты численного исследования эжектора с самоперемешивающейся струей, полученные в [16].

На рис. 8.13 показаны схемы самоперемешивающего сопла и результирующее



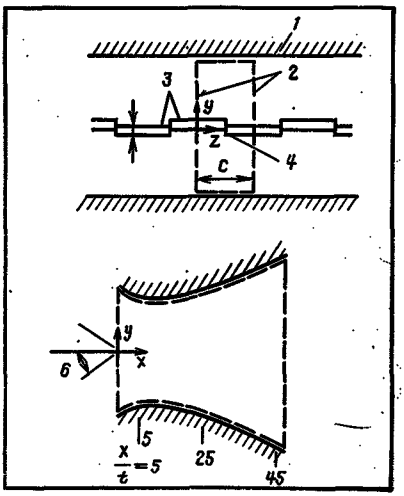


Рис. 8.13. Геометрия и поле течения самоперемешивающейся струи [16]

Рис. 8.14. Схема задачи для численного решения [16]:
1 — стенка эжектора; *2* — плоскость симметрии; *3* — сопла; *4* — плоскость между соплами; *5* — горловое сечение; *6* — угол перемешивания струй

поле течения. Выходной срез сопла разделен на несколько сегментов (сопл). Потокам, вытекающим из этих сегментов, придается вертикальная составляющая скорости, попеременно направленная вверх или вниз. Схема этих потоков показана на вставке рис. 8.13. Взаимодействие противоположных составляющих скорости приводит к формированию вихрей вниз по течению от среза сопла, показанных стрелками в плоскости поперечного сечения на этом же рисунке. Там же показаны профили составляющей скорости в направлении основного течения.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Видно, что максимумы скорости за соседними сегментами находятся соответственно выше или ниже центральной линии, а за перегородкой, разделяющей два сегмента, профиль скорости имеет два максимума.

При численном исследовании рассматривался случай, когда самоперемешивающаяся струя размещена в диффузоре (рис. 8.14). Расчет проводился на основе методики последовательного расчета трехмерного параболического течения. Использовалась модель турбулентности со стандартными значениями постоянных, данными в [34].

На рис. 8.15 приведено сравнение рассчитанных и измеренных профилей скорости. Видно, что все качественные особенности поля течения, такие, как двой-

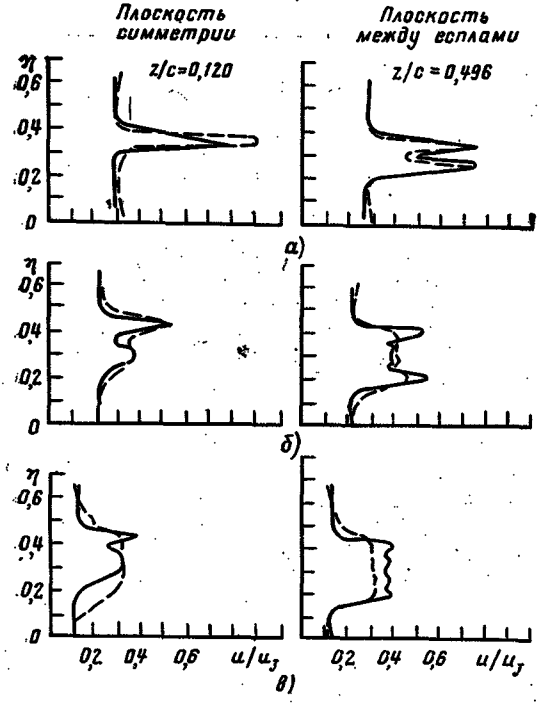


Рис. 8.15. Сравнение рассчитанных (сплошные кривые) и измеренных (штриховые) профилей скорости [16]:
а — $x/t=5$; *б* — $x/t=25$; *в* — $x/t=45$

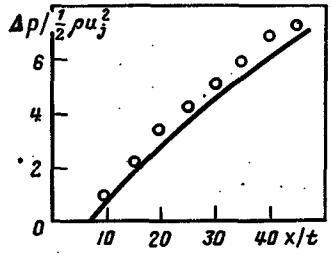


Рис. 8.16. Рост давления в диффузоре [16]:
Сплошная кривая — результат расчета; точки — экспериментальные данные

ной максимум между соседними соплами, появление второго максимума вдоль поперечного сечения, проходящего вблизи центра отдельного сопла, и слияние обоих максимумов в области далеко вниз по течению рассчитаны правильно; количественное совпадение результатов также довольно хорошее.

Увеличение тяги удобно характеризовать ростом давления по длине диффузора. На рис. 8.16 дано сравнение результатов расчета возрастания давления в эжекторе с экспериментальными данными. Можно считать, что получено вполне удовлетворительное совпадение.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

8.7. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПОЛНОСТЬЮ РАЗВИТОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ

Рассмотрим задачу расчета течения и теплообмена при поперечном обтекании шахматиой решетки. Такие конфигурации часто встречаются в теплообменниках и устройствах для интенсификации теплообмена. Легко видеть, что если бы в качестве расчетной области рассматривалась вся область течения, состоящая из большого числа пластин, то необходимая память ЭВМ и время счета были бы очень большими. Приемлемый выход из положения можно найти, если учесть, что после некоторого начального участка поле скорости будет повторяться в каждом модуле, показанном на рис. 8.17 штриховой линией; некоторого рода подобие будет существовать также и для поля температуры. Таким образом, оставляя в стороне анализ начального участка, можно рассчитывать течение и теплообмен только в показанном на рис. 8.17 типичном модуле.

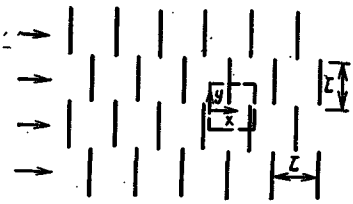


Рис. 8.17. Поперечное обтекание шахматиой решетки пластин [48]

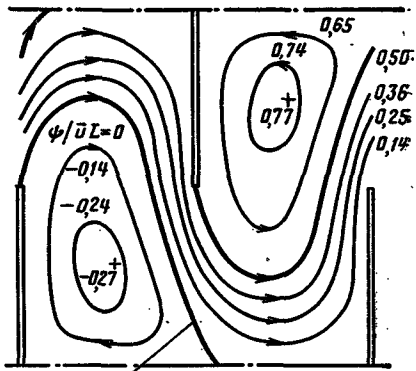


Рис. 8.18. Результаты расчета поля течения при Re=1040 [48]

С первого взгляда может показаться, что расчет модуля затруднен тем, что нам неизвестны значения скорости, температуры и т. д. на обеих границах модуля выше и ниже по течению. Однако эту трудность можно преодолеть. Выходя из одного модуля, жидкость попадает в такой же соседний. Таким образом, ситуация такова, как будто покинувшая модуль жидкость (каким-то образом) втекает в *этот же самый модуль* с другого конца. С этой точки зрения обе боковые границы (выше и ниже по течению) не являются естественными границами; характер течения таков, как будто оно происходит в замкнутом контуре.

Такого общего анализа достаточно для постановки задачи численного реше-

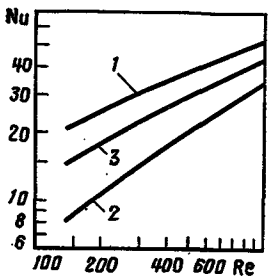


Рис. 8.19. Результаты расчета чисел Нуссельта [47]:
1 — для передней поверхности пластины; *2* — для тыльной поверхности; *3* — для обеих поверхностей

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ния; подробно она описана в [48]. Характерное решение для выделенного модуля (рис. 8.17) показано на рис. 8.18 в виде картины линий тока. Можно отметить довольно извилистый характер потока, огибающего поперечную пластину. Это приводит к наличию большой области циркуляционного течения на подветренной стороне каждой пластины. Расчет теплообмена в этом случае при значении числа Праидтля, равном 0,7, дает показанные на рис. 8.19 зависимости числа Нуссельта от числа Рейнольдса. Более высокие значения числа Нуссельта на передней поверхности пластин вызваны натеканием потока, в то время как медленная циркуляция у тыльной поверхности приводит к намного меньшим значениям. Увеличение числа Нуссельта с ростом числа Рейнольдса отличается от характера изменения теплообмена в обычном термическом начальном участке канала, где число Нуссельта не зависит от числа Рейнольдса.

8.8. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПАРОГЕНЕРАТОРА

Этот последний пример включен для иллюстрации возможностей проведения расчетов реального крупномасштабного индустриального оборудования и эффективного использования концепции анализа устройств с такой сложной конфигурацией, как у теплообменников, парогенераторов, конденсаторов и градирен.

Концепция распределенных сопротивлений применима для тех случаев, когда жидкость течет через область, заполненную многочисленными твердыми объектами, такими, как стержни, трубы или перекладины. Такой поток рассматривается во многом аналогично течению в пористой среде с распределенными стоками количества движения и источниками или стоками теплоты, вызванными твердыми объектами. Значение распределенного сопротивления можно получить из подробных расчетов, таких, как в § 8.7, или непосредственно по эмпирическим зависимостям, полученным для соответствующих конфигураций.

Проведенное в [59] теплогидравлическое исследование парогенератора было выполнено для конфигурации, изображенной на рис. 8.20. Цилиндрическая оболочка равномерно заполнена трубами (на рисунке не показаны). Горячая жидкость поднимается вверх по трубам в одной половине парогенератора, поворачивается в U-образных коленах наверху и течет вниз по второй половине парогенератора. В нижней части парогенератора, где размещен экономайзер, служащий для доведения температуры потока воды до температуры насыщения.

В результате численного решения были получены распределения трех составляющих скорости, энтальпии жидкости в межтрубном пространстве и энтальпии (или температуры) жидкости в трубах. В рассмотренном случае вода в трубах оставалась в жидкой фазе вдоль всего тракта парогенератора, а ее массовый расход был известен из условий на входе.

На рис. 8.21 показано поле скорости в центральной вертикальной плоскости. Стрелками указаны направление скорости и ее значение. В целом скорость, как это видно из рисунка, по мере подъема жидкости по парогенератору возрастает; это вызвано уменьшением плотности в верхней части. Характер поля скорости в нижнем левом углу рисунка указывает на наличие участка зигзагообразного течения через экономайзер.

На рис. 8.22 показано распределение паросодержания в центральной вертикальной плоскости. Левый нижний угол оказался пустым, ввиду того что че-

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

рез экономайзер в основном течет недогретая вода. В целом паросодержание в правой части (т. е. на горячей стороне) выше, чем в левой. Как видно из рис. 8.22, это различие наблюдается вдоль всей высоты парогенератора.

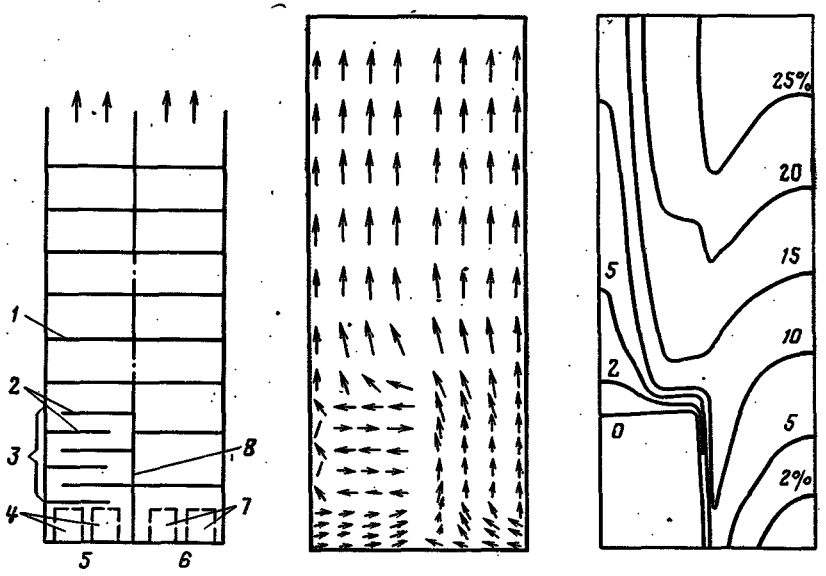


Рис. 8.20. Схема парогенератора (трубы не показаны; масштаб рисунка не выдержан, продольные размеры увеличены примерно в 2 раза [59]):
1 — опорная плита; *2* — направляющие перегородки; *3* — экономайзер; *4* — подача питательной воды; *5* — холодная сторона; *6* — горячая сторона; *7* — подача горячей воды; *8* — разделяющая пластина

Рис. 8.21. Распределение вектора скорости в межтрубном пространстве в вертикальной плоскости симметрии [59]

Рис. 8.22. Линии постоянного паросодержания в вертикальной плоскости симметрии [59]

8.9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной книге разработан численный метод расчета задач теплообмена, гидродинамики и родственных им явлений, развит подход к численным расчетам, основанный на понимании физических особенностей и использовании соображений физического характера, приведены иллюстративные примеры проведенных вычислений, даны все подробности метода, необходимые для составления читателем своих собственных программ для ЭВМ.

Читатели ознакомились также со смыслом критериев, с помощью которых они смогут оценивать другие методы. Цель этой книги будет достигнута, если читатель будет активно использовать на практике возможности численного исследования теплообмена и гидродинамики, а может быть, и внесет свой вклад в их развитие.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Abdel-Wahed, R. M., Patankar, S. V., and Sparrow, E. M. (1976). Fully Developed Laminar Flow and Heat Transfer in a Square Duct with One Moving Wall, *Lett. Heat Mass Transfer*, vol. 3, p. 355.

2 Austin, L. R. (1971). The Development of Viscous Flow within Helical Coils, Ph.D. thesis, University of Utah, Salt Lake City.

3 Aziz, K. and Hellums, J. D. (1967). Numerical Solution of the Three-Dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection, *Phys. Fluids*, vol. 10, p. 314.

4 Baliga, B. R. and Patankar, S. V. (1979a). A New Finite-Element Formulation for Convection-Diffusion Problems.

5 Baliga, B. R. and Patankar, S. V. (1979b). A Control-Volume-Based Finite-Element Method for Two-Dimensional Flows.

6 Barakat, H. Z. and Clark, J. A. (1966). Analytical and Experimental Study of Transient Laminar Natural Convection Flows in Partially Filled Containers, *Proc. 3d Int. Heat Transfer Conf.*, Chicago, vol. II, paper 57, p. 152.

7 Bergeles, G., Gosman, A. D., and Launder, B. E. (1976). The Prediction of Three-Dimensional Discrete-Hole Cooling Processes, part 1, Laminar Flow, *J. Heat Transfer*, vol. 98, p. 379.

8 Bergeles, G., Gosman, A. D., and Launder, B. E. (1978). The Turbulent Jet in a Cross Stream at Low Injection Rates: A Three-Dimensional Numerical Treatment, *Num. Heat Transfer*, vol. 1, p. 217.

9 Caretto, L. S., Curr, R. M., and Spalding, D. B. (1972). Two Numerical Methods for Three-Dimensional Boundary Layers, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 1, p. 39.

10 Caretto, L. S., Gosman, A. D., Patankar, S. V., and Spalding, D. B. (1972). Two Calculation Procedures for Steady, Three-Dimensional Flows with Recirculation, *Proc. 3d Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn.*, Paris, vol. II, p. 60.

11 Carnavos, T. C. (1977). Cooling Air in Turbulent Flow with Internally Finned Tubes, AIChE paper 4, *17th Natl. Heat Transfer Conf.*

12 Courant. R., Isaacson, E., and Rees, M. (1952). On the Solution of Non-Linear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differenoss, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 5, p. 243.

13 Crank, J. and Crowley, A. B. (1978). Isotherm Migration along Orthogonal Flow Lines in Two Dimensions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 21, p. 393.

14 Crank, J. and Gupta, R. S. (1975). Isotherm Migration Method lu Two Dimensions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 18, p. 1101.

15 Crank, J. and Phahle, R. D. (1973). Melting Ice by the Isotherm Migration Method, *Bull. Inst. Math. Appl.*, vol. 9, p. 12.

16 DeJoode, A. D. and Patankar, S. V. (1978). Prediction of Three-Dimensional Turbulent Mixing in an Ejector, *AIAA J.*, vol. 16, p. 145.

17 de Vahl Davis, G. and Mallinson, G. D. (1972). False Diffusion in Numerical Fluid Mechanics, Univ. of New South Wales, School of Mech. and Ind. Eng. Rept. 1972/FMT/1.

18 Dix, D. M. (1963). The Magnetohydrodynamic Flow past a Non-Conducting Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field, *J. Fluid Mech.*, vol. 15, p. 449.

19 Dix, R. C. and Cizek, J. (1970). The Isotherm Migration Method for Transient Heat Conduction Analysis, *Proc. 4th Int. Heat Transfer Conf.*, Paris, vol. 1, p. Cu1.1.

20 Durst, F. and Rastogi, A. K. (1977). Theoretical and Experimental Investigations of Turbulent Flows, *Symp. on Turbulent Shear Flows*, Pennsylvania State Univ., vol. 1, p. 18.1.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

21 Finlayson, B. A. (1972). *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic, New York.

22 Fromm, J. E. and Harlow, F. H. (1963). Numerical Solution of the Problem of Vortex Street Development, *Phys. Fluids*, vol. 6, p. 975.

23 Ganesan, V., Spalding, D. B., and Murthy, B. S. (1978). Experimental and Theoretical Investigation of Flow behind an Axi-Symmetrical Baffle in a Circular Duct, *J. Inst. Fuel*, vol. 51, p. 144.

24 Gentry, R. A., Martin, R. E., and Daly, B. J. (1966). An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems, *J. Comp. Phys.*, vol. 1, p. 87.

25 Gosman, A. D., Pun, W. M., Runchal, A. K., Spalding, D. B., and Wolfshtein, M. (1969). *Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows*, Academic, New York.

26 Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965). Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *Phys. Fluids*, vol. 8, p. 2182.

27 Issa, R. I. and Lockwood, F. C. (1977). Prediction of Two-Dimensional Supersonic Viscous Interactions near Walls, *AIAA J.*, vol. 15, p. 182.

28 Jordinson, R. (1958). Flow in a Jet Directed Normal to the Wind, Aero. Res. Council R&M 3074.

29 Keffer, J. F. and Baines, W. D. (1963). The Round Turbulent Jet in a Cross Wind, *J. Fluid Mech.*, vol. 15, p. 481.

30 Khalil, E. E., Spalding, D. B., and Whitelaw, J. H. (1975). The Calculation of Local Flow Properties in Two-Dimensional Furnaces, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 18, p. 775.

31 King, H. H. (1976). A Poisson Equation Solver for Rectangular or Annular Regions, *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol. 10, p. 799.

32 Kolmogorov, A. N. (1942). Equations of Turbulent Motion in an Incompressible Fluid, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.*, vol. 1-2, p. 56 (English translation: Imperial College, Mech. Eng. Dept. Rept. ON/6, 1968).

33 Launder, B. E. and Spalding, D. B. (1972). *Mathematical Models of Turbulence*, Academic, New York.

34 Launder, B. E. and Spalding, D. B. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flow, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 3, p. 269.

35 Lilley, D. G. (1976). Primitive Pressure-Velocity Code for the Computation of Strongly Swirling Flows, *AIAA J.*, vol. 14, p. 749.

36 Majumdar, A. K., Pratap, V. S., and Spalding, D. B. (1977). Numerical Computation of Flow in Rotating Ducts, *J. Fluids Eng.*, vol. 99, p. 148.

37 Majumdar, A. K. and Spalding, D. B. (1977). Numerical Computation of Taylor Vortices, *J. Fluid Mech.*, vol. 81, p. 295.

38 McGuirk, J. J. and Rodi, W. (1977). The Calculation of Three-Dimensional Turbulent Free Jets, Symp. on Turbulent Shear Flows, Pennsylvania State Univ., vol, 1, p. 1.29.

39 McGuirk, J. J. and Rodi, W. (1978). A Depth-Averaged Mathematical Model for the Near Field of Side Discharges into Open-Channel Flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 86, p. 761.

40 Moon, L. F. and Rudinger, G. (1977). Velocity Distribution in an Abruptly Expanding Circular Duct, *J. Fluids Eng.*, vol. 99, p. 226.

41 Patankar, S. V. (1975). Numerical Prediction of Three-Dimensional Flows, in B. E. Launder (ed.), *Studies in Convection: Theory, Measurement and Applications*, vol. 1, Academic, New York.

42 Patankar, S. V. (1978). A Numerical Method for Conduction in Composite Materials, Flow in Irregular Geometries and Conjugate Heat Transfer, *Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf.*, Toronto, vol. 3, p. 297.

43 Patankar, S. V. (1979a). A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations, *Num. Heat Transfer*, vol. 2 (to be published).

44 Patankar, S. V. (1979b). The Concept of a Fully Developed Regime in Unsteady Heat Conduction, in J. P. Hartnett, T. F. Irvine, Jr., E. Pfender, and E. M. Sparrow (eds.), *Studies in Heat Transfer*, Hemisphere, Washington, D.C.

45 Patankar, S. V. and Baliga, B. R. (1978). A New Finite-Difference Scheme for Parabolic Differential Equations, *Num. Heat Transfer*, vol. 1, p. 27.

46 Patankar, S. V., Basu, D. K., and Alpay, S. A. (1977). Prediction of the Three-Dimensional Velocity Field of a Deflected Turbulent Jet, *J. Fluids Eng.*, vol. 99, p. 758.

47 Patankar, S. V., Ivanović, M., and Sparrow, E. M. (1979). Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer in Internally Finned Tubes and Annuli, *J. Heat Transfer*, vol. 101, p. 29.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

48 Patankar, S. V., Liu, C. H., and Sparrow, E. M. (1977). Fully Developed Flow and Heat Transfer in Ducts Having Streamwise-Periodic Variations of Cross-Sectional Area, *J. Heat Transfer*, vol. 99, p. 180.

49 Patankar, S. V., Pratap, V. S., and Spalding, D. B. (1974). Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes, *J. Fluid Mech.*, vol. 62, p. 539.

50 Patankar, S. V., Pratap, V. S., and Spalding, D. B. (1975). Prediction of Turbulent Flow in Curved Pipes, *J. Fluid Mech.*, vol. 67, p. 583.

51 Patankar, S. V., Rafiinejad, D., and Spalding, D. B. (1975). Calculations of the Three-Dimensional Boundary Layer with Solutions of All Three Momentum Equations, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 6, p. 283.

52 Patankar, S. V., Ramadhyani, S., and Sparrow, E. M. (1978). Effect of Circumferentially Nonuniform Heating in Laminar Combined Convection in a Horizontal Tube, *J. Heat Transfer*, vol. 100, p. 63. (Also see the Erratum in *J. Heat Transfer*, vol. 100, p. 367, 1978.)

53 Patankar, S. V., Rastogi, A. K., and Whitelaw, J. H. (1973). The Effectiveness of Three-Dimensional Film-Cooling Slots–Predictions, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 16, p. 1673.

54 Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1970). *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*, 2d ed., Intertext, London.

55 Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1972a). A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, p. 1787.

56 Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1972b). A Computer Model for Three-Dimensional Flow in Furnaces, *Proc. 14th Symp. (Int.) on Combustion*, The Combustion Inst., p. 605.

57 Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1974a). A Calculation Procedure for the Transient and Steady-State Behavior of Shell-and-Tube Heat Exchangers, chap. 7 in *Heat Exchangers: Design and Theory Sourcebook*, Hemisphere, Washington, D.C.

58 Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1974b). Simultaneous Predictions of Flow Pattern and Radiation for Three-Dimensional Flames, chap. 4 in *Heat Transfer in Flames*, Hemisphere, Washington, D.C.

59 Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1978). Computer Analysis of the Three-Dimensional Flow and Heat Transfer in a Steam Generator, *Forsch. Ingenieurwes.*, vol. 44, p. 47.

60 Patankar, S. V., Sparrow, E. M., and Ivanović, M. (1978). Thermal Interactions among the Confining Walls of a Turbulent Recirculating Flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 21, p. 269.

61 Peaceman, D. W. and Rachford, H. H. (1955). The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 3, p. 28.

62 Pearson, C. E. (1965). A Computational Method for Viscous Flow Problems, *J. Fluid Mech.*, vol. 21, p. 611.

63 Potter, D. E. and Tuttle, G. H. (1973). The Construction of Discrete Orthogonal Coordinates, *J. Comp. Phys.*, vol. 13, p. 483.

64 Prandtl, L. (1945). Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, *Nach. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, p. 6.

65 Pratap, V. S. and Spalding, D. B. (1975). Numerical Computation of the Flow in Curved Ducts, *Aeronaut. Q.*, vol. 26, p. 219.

66 Pratap, V. S. and Spalding, D. B. (1976). Fluid Flow and Heat Transfer in Three-Dimensional Duct Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 19, p. 1183.

67 Raithby, G. D. (1976a). A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 9, p. 75.

68 Raithby, G. D. (1976b). Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 9, p. 153.

69 Raithby, G. D. and Torrance, K. E. (1974). Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, *Comput. Fluids*, vol. 2, p. 191.

70 Ramsey, J. W. and Goldstein, R. J. (1970). Interaction of a Heated Jet with Deflecting Stream, NASA CR-72613.

71 Rastogi, A. K. and Rodi, W. (1978). Calculation of General Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, *AIAA J.*, vol. 16, p. 151.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

72 Runchal, A. K. (1972). Convergence and Accuracy of Three Finite Difference Schemes for a Two-Dimensional Conduction and Convection Problem, *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol. 4, p. 541.

73 Runchal, A. K. and Wolfshtein, M. (1969). Numerical Integration Procedure for the Steady State Navier-Stokes Equations, *J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 11, p. 445.

74 Scarborough, J. B. (1958). *Numerical Mathematical Analysis*, 4th ed., Johns Hopkins Press, Baltimore.

75 Spalding, D. B. (1972). A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives, *Int. J. Num. Methods Eng.*, vol. 4, p. 551.

76 Spalding, D. B. (1977). *GENMIX–A General Computer Program for Two-Dimensional Parabolic Phenomena*, Pergamon, New York.

77 Sparrow, E. M., Baliga, B. R., and Patankar, S. V. (1978). Forced Convection Heat Transfer from a Shrouded Fin Array with and without Tip Clearance, *J. Heat Transfer*, vol. 100, p. 572.

78 Sparrow, E. M. and Patankar, S. V. (1977). Relationships among Boundary Conditions and Nusselt Numbers for Thermally Developed Duct Flows, *J. Heat Transfer*, vol. 99, p. 483.

79 Sparrow, E. M., Patankar, S. V., and Ramadhyani, S. (1977). Analysis of Melting in the Presence of Natural Convection in the Melt Region, *J. Heat Transfer*, vol. 99, p. 520.

80 Sparrow, E. M., Patankar, S. V., and Shahrestani, H. (1978). Laminar Heat Transfer in a Pipe Subjected to a Circumferentially Varying External Heat Transfer Coefficient, *Num. Heat Transfer*, vol. 1, p. 117.

81 Stone, H. L. (1968). Iterative Solution of Implicit Approximations of Multi-Dimensional Partial Differential Equations, *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 5. p. 530.

82 Winslow, A. M. (1966). Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh, *J. Comp. Phys.*, vol. 1, p. 149.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 3
Предисловие 5
Введение 8
В.1. Цель книги 8
В.2. Методы исследования 9
Глава 1. **Математическое описание физических процессов** . . . 13
1.1. Определяющие дифференциальные уравнения 13
1.2. Выбор координат 18
Задачи 23
Глава 2. **Методы дискретизации** 24
2.1. Сущность численных методов 24
2.2. Методы получения дискретных аналогов 26
2.3. Основные правила построения дискретных аналогов 32
2.4. Заключение 35
Задачи 35
Глава 3. **Теплопроводность** 36
3.1. Цели главы 36
3.2. Стационарная одномерная теплопроводность 37
3.3. Нестационарная одномерная теплопроводность 47
3.4. Двух- и трехмерные задачи 51
3.5. Методы верхней и нижней релаксаций 58
3.6. Некоторые геометрические соображения 59
3.7. Заключение 63
Задачи 64
Глава 4. **Конвекция и диффузия** 67
4.1. Рассматриваемая задача 67
4.2. Установившиеся одномерные конвекция и диффузия 69
4.3. Дискретный аналог для двухмерных задач 81
4.4. Дискретный аналог для трехмерных задач 84
4.5. Одностороннняя пространственная координата 85
4.6. Схемная искусственная диффузия 87
4.7. Заключение 91
Задачи 92
Глава 5. **Расчет поля течения** 93
5.1. Обоснование необходимости в специальной методике 93
5.2. Трудности расчета поля давления 95
5.3. Шахматная сетка 98
5.4. Уравнения количества движения 100
5.5. Поправки скорости и давления 102
5.6. Уравнение для поправки давления 103
5.7. Алгоритм SIMPLE 104

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

5.8. Модифицированный алгоритм SIMPLER 109
5.9. Заключение 112
Задачи 112

Глава 6. Заключительные замечания. 115
6.1. Итерационный характер методики расчета 115
6.2. Линеаризация источникового члена 118
6.3. Области с неправильной геометрией 121
6.4. Рекомендации по подготовке и отладке программы для ЭВМ . 125

Глава 7. Специальные случаи 127
7.1. Двухмерное параболическое течение 128
7.2. Трехмерное параболическое течение 128
7.3. Частично параболическое течение 129
7.4. Метод конечных элементов 130

Глава 8. Примеры применения 133
8.1. Развивающееся течение в изогнутой трубе 134
8.2. Смешанная конвекция в горизонтальной трубе 135
8.3. Плавление около вертикальной трубы 136
8.4. Турбулентное течение и теплообмен в трубах с внутренним оребрением 138
8.5. Турбулентная струя в поперечном потоке 138
8.6. Самоперемешивающаяся струя в эжекторе для увеличения тяги . 140
8.7. Периодическое полностью развитое течение в канале 142
8.8. Исследование теплогидравлических характеристик парогенератора 143
8.9. Заключительные замечания 144

Список литературы 145

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

Патанкар С.

П 20 Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с., ил.

75 к. 6000 экз.

Изложены основные идеи построения и использования конечно-разностных методов решения задач теплопроводности, конвективного теплообмена и задач гидродинамики, описан широкий круг конечно-разностных схем и методов интегрирования уравнений теплопроводности и конвективного теплообмена для нестационарных одно- и двухмерных задач теплопроводности, задач конвективного теплообмена при стационарных и нестационарных двухмерных течениях типа пограничного слоя.

Для инженеров, аспирантов и научных работников.

П $\frac{2303010000\text{-}382}{051(01)\text{-}84}$ 178-84

ББК 31.31

6П2.2

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/

С. ПАТАНКАР

Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости

Редактор издательства Л. В. Белова
Художественный редактор А. Т. Кирьянов
Технический редактор О. Д. Кузнецова
Корректор Г. А. Полонская

ИБ № 349

Сдано в набор 16.11.83 Подписано в печать 19.03.84
Формат 60×90¹/₁₆ Бумага типографская № 1 Гарнитура литературная
Печать высокая Усл. печ. л. 9,5 Усл.-кр. отт. 9,75 Уч.-изд. л. 10,91
Тираж 6000 экз. Заказ 946 Цена 75 к.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

Электронная библиотека http://tgv.khstu.ru/