

Computation of Conduction and Duct Flow Heat Transfer

Suhas V. Patankar
Professor of Mechanical Engineering
University of Minnesota

Innovative Research, Inc.
7846 Ithaca Lane North
Maple Grove, MN 55369-8549, USA

С.В.Патанкар

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ

Перевод с английского Е.В. Калабина
под редакцией Г.Г. Янькова

Москва *Издательство МЭИ* *2003*

УДК [536.2+532.5]:518.12
ББК 31.31
П 20

Книга выпущена при содействии Сургутского фонда поддержки научных инициатив «Наука»

Патанкар С.В.

П 20 Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. Е.В. Калабина; под ред. Г.Г. Янькова. — М.: Издательство МЭИ, 2003. — 312 с., ил. ISBN 5-7046-0898-1.

Замечание об авторских правах

Эта книга и вычислительная программа CONDUCT, содержащаяся в ней, защищены авторскими правами. Однако как читатель этой книги Вы можете сделать одну копию программы только для Вашего использования. Если Вы хотите избежать проблем с набором программы с листинга в книге, то можете приобрести в Innovative Research Inc. полную версию программы и 15 готовых примеров. Вы не вправе распространять копии компьютерной программы (напечатанной Вами или приобретенной у Innovative Research Inc.). Единственное исключение составляют преподаватели, которые могут сделать программу доступной всему классу с условием, что студенты не будут распространять ее в дальнейшем.

УДК [536.2+532.5]:518.12
ББК 31.31

© Патанкар С.В., 2003
© Калабин Е.В., перевод на русский язык, 2003
© Зубков П.Т., 2003
© Издательство МЭИ, 2003

ISBN 5-7046-0898-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 11
Предисловие автора 13
Основные обозначения 17

Глава 1. **Краткий обзор** 19

1.1. Основные положения 19
1.2. Возможности и ограничения программы CONDUCT 21
1.3. Структура программы CONDUCT 23
1.4. Структура книги 25

Глава 2. **Введение в численные методы** 27

2.1. Концепция численного решения 27
2.2. Получение дискретных аналогов 28
2.3. Показательный пример 31
2.4. Стационарная одномерная теплопроводность 34
2.4.1. Дискретный аналог 34
2.4.2. Представление источникового члена 37
2.4.3. Граничные условия 39
2.4.4. Решение системы алгебраических уравнений 42
2.4.5. Типовая задача 45
2.5. Дальнейшие усовершенствования 48
2.5.1. Построение сетки 49
2.5.2. Переменная теплопроводность 49
2.5.3. Нелинейность 51
2.5.4. Линеаризация источникового члена 52
2.5.5. Линеаризация граничных условий 54
2.5.6. Релаксации 55
2.5.7. Построение контрольных объемов 57
2.6. Нестационарная теплопроводность 59
2.7. Задачи 61

Глава 3. **Обобщенная математическая постановка задачи** 65

3.1. Уравнение теплопроводности 65
3.2. Обобщенное дифференциальное уравнение 66
3.3. Граничные условия 69
3.4. Безразмерные переменные 69

Глава 4. **Структура вычислительной программы** 72

4.1. Общая схема 72
4.2. Подпрограммы неизменяемой части 73
4.3. Подпрограммы адаптируемой части 74

Глава 5. **Численная схема и ее реализация** 75

5.1. Расчетная сетка и контрольные объемы 75
5.2. Величины, связанные с гранями контрольных объемов 79
5.3. Обобщенное дискретное уравнение 80
5.4. Соответствующие имена на языке ФОРТРАН 83

5.5. Представление граничных условий 83
5.5.1. Первый порядок аппроксимации 84
5.5.2. Аппроксимация более высокого порядка 85
5.5.3. Индикаторы граничных условий 87
5.5.4. Случай KBC = 1 89
5.5.5. Случай KBC = 2 89
5.5.6. Вычисление плотности потока на границе 90
5.6. Решение системы алгебраических уравнений 90
5.7. Нелинейность и релаксации 94
5.8. Относительные зависимые переменные 98

Глава 6. **Неизменяемая часть вычислительной программы** 99
6.1. Важные имена на языке ФОРТРАН 99
6.2. Подпрограмма MAIN 101
6.3. Подпрограмма DEFRD 102
6.4. Подпрограмма HEART 103
6.5. Подпрограмма SOLVE 104
6.6. Подпрограмма TOOLS 104
6.7. Подпрограмма VALUES 108

Глава 7. **Адаптируемая часть вычислительной программы** 110
7.1. Структура подпрограммы ADAPT 110
7.2. Объявление переменных 111
7.3. Процедура GRID 111
7.4. Процедура BEGIN 113
7.5. Процедура OUTPUT 113
7.6. Процедура PHI 114
7.7. Представление областей сложной геометрической формы 115
7.7.1. Основная концепция 116
7.7.2. Постановка различных граничных условий 118
7.7.3. Заключительные комментарии и напоминания 122
7.8. Рекомендации по начальной работе с программой 124
7.9. Введение в примеры 125

Глава 8. **Примеры применения программы CONDUCT для решения задач теплопроводности** 127
8.1. Стационарная теплопроводность при наличии внутренних источников тепла (пример 1) 127
8.1.1. Постановка задачи 127
8.1.2. Построение подпрограммы ADAPT 128
8.1.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 128
8.1.4. Листинг подпрограммы ADAPT 128
8.1.5. Результаты расчетов 130
8.1.6. Обсуждение результатов 130
8.1.7. Заключительные замечания 131
8.2. Стационарная теплопроводность при смешанных граничных условиях (пример 2) 131
8.2.1. Постановка задачи 131
8.2.2. Построение подпрограммы ADAPT 132

8.2.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 134
8.2.4. Листинг подпрограммы ADAPT 134
8.2.5. Результаты расчетов 137
8.2.6. Обсуждение результатов 138
8.2.7. Заключительные замечания 139
8.3. Стационарная теплопроводность в области с вырезами (пример 3) . . 139
8.3.1. Постановка задачи 139
8.3.2. Построение подпрограммы ADAPT 140
8.3.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 141
8.3.4. Листинг подпрограммы ADAPT 142
8.3.5. Результаты расчетов 143
8.3.6. Обсуждение результатов 145
8.3.7. Заключительные замечания 145
8.4. Теплопроводность в области сложной геометрической формы (пример 4) 145
8.4.1. Постановка задачи 145
8.4.2. Построение подпрограмы ADAPT 145
8.4.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 148
8.4.4. Листинг подпрограммы ADAPT 148
8.4.5. Результаты расчетов 151
8.4.6. Обсужденне результатов 152
8.4.7. Заключительные замечания 152
8.5. Нестационарная теплопроводность при наличии внутренних источников тепла (пример 5) 152
8.5.1. Постановка задачи 152
8.5.2. Построение подпрограммы ADAPT 154
8.5.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 155
8.5.4. Листинг подпрограммы ADAPT 155
8.5.5. Результаты расчетов 157
8.5.6. Обсуждение результатов 159
8.5.7. Заключительные замечания 159
8.6. Нестационарная теплопроводность в грунте вблизи фундамента здания (пример 6) 160
8.6.1. Постановка задачи 160
8.6.2. Построение подпрограммы ADAPT 161
8.6.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 162
8.6.4. Листинг подпрограммы ADAPT 163
8.6.5. Результаты расчетов 164
8.6.6. Обсуждение результатов 165
8.6.7. Заключительные замечания 166
8.7. Задачи 166

Глава 9. **Течение и теплопереиос в каналах** 174

9.1. Общие характеристики течения в каналах 174
9.2. Начальный участок и полностью развитое течение 174
9.3. Математическая постановка задачи определения поля скорости 177
9.3.1. Основные уравнения 177
9.3.2. Безразмерная форма 178
9.4. Интегральные характеристики течения 178

9.5. Полностью развитый теплообмен . . . 180
9.6. Математическая постановка задачи определения поля температуры . 181
9.6.1. Дифференциальное уравнение . . . 181
9.6.2. Некоторые полезные определения . . . 182
9.6.3. Постоянная локальная плотность теплового потока . . . 184
9.6.4. Постоянная линейная плотность теплового потока вдоль канала при постоянной температуре стенок . . . 185
9.6.5. Постоянная температура по периметру и длине канала . . . 186
9.6.6. Постоянный внешний коэффициент теплоотдачи . . . 188
9.6.7. Более сложные граничные условия . . . 188
9.7. Введение в примеры задач о течении в каналах . . . 189
9.8. Заключительные замечания . . . 191

Глава 10. **Примеры применения программы CONDUCT для решения задач о течениях и теплопереносе в каналах** . . . 192
10.1. Канал прямоугольного сечения с подогревом на стенке (пример 7) . 192
10.1.1. Постановка задачи . . . 192
10.1.2. Построение подпрограммы ADAPT . . . 193
10.1.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе . . . 194
10.1.4. Листинг подпрограммы ADAPT . . . 195
10.1.5. Результаты расчетов . . . 197
10.1.6. Обсуждение результатов . . . 199
10.1.7. Заключительные замечания . . . 199
10.2. Круглая труба с радиальными ребрами (пример 8) . . . 200
10.2.1. Постановка задачи . . . 200
10.2.2. Построение подпрограммы ADAPT . . . 201
10.2.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе . . . 204
10.2.4. Листинг подпрограммы ADAPT . . . 205
10.2.5. Результаты расчетов . . . 207
10.2.6. Обсуждение результатов . . . 209
10.2.7. Заключительные замечания . . . 210
10.3. Кольцевой канал с перегородками (пример 9) . . . 211
10.3.1. Постановка задачи . . . 211
10.3.2. Построение подпрограммы ADAPT . . . 212
10.3.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе . . . 213
10.3.4. Листинг подпрограммы ADAPT . . . 214
10.3.5. Результаты расчетов . . . 217
10.3.6. Обсуждение результатов . . . 218
10.3.7. Заключительные замечания . . . 219
10.4. Массив ребер (пример 10) . . . 219
10.4.1. Постановка задачи . . . 219
10.4.2. Построение подпрограммы ADAPT . . . 220
10.4.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе . . . 221
10.4.4. Листинг подпрограммы ADAPT . . . 222
10.4.5. Результаты расчетов . . . 225
10.4.6. Обсуждение результатов . . . 227
10.4.7. Заключительные замечания . . . 228
10.5. Задачи . . . 229

Глава 11. **Дополнительные примеры применения программы CONDUCT** 236
11.1. Неньютоновское течение в полукруглом канале (пример 11) 236
11.1.1. Постановка задачи 236
11.1.2. Построение подпрограммы ADAPT 237
11.1.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 239
11.1.4. Листинг подпрограммы ADAPT 240
11.1.5. Результаты расчетов 243
11.1.6. Обсуждение результатов 245
11.1.7. Заключительные замечания 246
11.2. Течение в канале жидкости с вязкостью, зависящей от температуры (пример 12) 246
11.2.1. Постановка задачи 246
11.2.2. Построение подпрограммы ADAPT 248
11.2.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 248
11.2.4. Листинг подпрограммы ADAPT 249
11.2.5. Результаты расчетов 251
11.2.6. Обсуждение результатов 252
11.2.7. Заключительные замечания 252
11.3. Турбулентное течение в канале квадратного сечения (пример 13) . . . 253
11.3.1. Постановка задачи 253
11.3.2. Построение подпрограммы ADAPT 255
11.3.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 257
11.3.4. Листинг подпрограммы ADAPT 258
11.3.5. Результаты расчетов 261
11.3.6. Обсуждение результатов 263
11.3.7. Заключительные замечания 264
11.4. Потенциальное обтекание препятствия (пример 14) 265
11.4.1. Постановка задачи 265
11.4.2. Построение подпрограммы ADAPT 266
11.4.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 267
11.4.4. Листинг подпрограммы ADAPT 267
11.4.5. Результаты расчетов 269
11.4.6. Обсуждение результатов 271
11.4.7. Заключительные замечания 271
11.5. Просачивание воды под дамбой (пример 15) 272
11.5.1. Постановка задачи 272
11.5.2. Построение подпрограммы ADAPT 273
11.5.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе 273
11.5.4. Листинг подпрограммы ADAPT 274
11.5.5. Результаты расчетов 276
11.5.6. Обсуждение результатов 277
11.5.7. Заключительные замечания 278
11.6. Задачи 278

Глава 12. **Заключительные замечания** 280
12.1. Численный метод 280
12.2. Вычислительная программа 281
12.3. Применение программы 281
12.4. Дальнейшее расширение возможностей программы CONDUCT. . . . 282
12.5. Заключительные рекомендации по использованию программы CONDUCT 285
Приложение 1. **Листинг неизменяемой части программы CONDUCT** 287
Приложение 2. **Список имен на ФОРТРАНе** 303
Приложение 3. **Значения переменных, задаваемых по умолчанию**. 307
Приложение 4. **Памятка по построению подпрограммы ADAPT** 309
Список литературы. 310

Предисловие редактора перевода

За последние десятилетия интерес к математическому моделированию сложных физических процессов и необходимость в нем заметно возросли. Этому в значительной мере способствует прогресс в развитии компьютерной техники, численных методов решения всех типов задач математической физики и реализуемых на этой основе математических моделей. Любая современная наукоемкая технология так или иначе использует результаты вычислительных экспериментов. Сказанное в полной мере относится к исследованиям в области динамики жидкости и тепломассообмена. В ведущих научных центрах развитых стран интенсивно разрабатываются новые численные методы, алгоритмы и пакеты прикладных программ для решения соответствующих классов задач.

Несмотря на обширную литературу по численным методам решения задач гидродинамики и теплообмена, исследователь, только начинающий свой путь в этой области, испытывает большие трудности. Чтобы убедиться в этом, достаточно зайти в Internet и познакомиться с материалами конференций пользователей различных CFD-пакетов.* К сожалению, многими (особенно начинающими) исследователями эти пакеты используются в режиме «черного ящика» без глубокого понимания реализованных в них математических моделей, алгоритмов, приемов и особенностей адаптации пакета к прикладной задаче. Ситуация иногда усугубляется и тем, что некоторые, даже широко известные компьютерные коды (PHOENICS, FLUENT и др.), недостаточно подробно документированы. Все это нередко приводит к удручающим последствиям.

Основная концепция предлагаемой читателю книги известного ученого профессора Миннесотского университета (США) С. Патанкара противостоит тенденции «слепого» использования коммерческих пакетов. По замыслу автора, цель книги заключается в том, чтобы представить читателю науку и искусство численного исследования физического явления, которые наряду с получением количественных результатов позволяют глубже понять физическую суть этого явления.

Яркий талант С. Патанкара — ученого, педагога и популяризатора численных методов привлек к развиваемым им идеям множество последователей во всем мире. Это издание является уже третьей

*CFD-пакет (код) — пакет прикладных программ для решения задач гидродинамики (от англ. Computer Fluid Dynamics).

книгой С. Патанкара, переведенной на русский язык. Отечественным специалистам в области вычислительной гидродинамики хорошо известно, что предыдущие книги автора* очень быстро стали библиографической редкостью на территории бывшего СССР.

В книге детально описываются разработанная автором программа CONDUCT, класс решаемых уравнений и разнообразные физические задачи, доступные численному анализу. Книга содержит 15 примеров, в каждом из которых внимание читателя заостряется на одном-двух важных приемах применения CONDUCT. Методически безупречное постепенное усложнение задач и подробный анализ всех тонкостей применения программы способствуют глубокому усвоению материала.

Издание этой книги в России стало возможным благодаря активной позиции профессора Тюменского университета П.Т. Зубкова, который не только увлек идеей издания С. Патанкара, но и, будучи руководителем Сургутского фонда поддержки научных инициатив «Наука», организовал перевод на русский язык и финансовую поддержку издания.

Учениками П.Т. Зубкова проверены также исходные тексты ядра программы и адаптируемой части для каждого рассмотренного в книге примера.

Данное издание предназначено прежде всего студентам старших курсов, аспирантам и преподавателям соответствующих специальностей технических университетов, а также тем исследователям, кто только приступает к решению задач гидродинамики и теплообмена. Хотя программа CONDUCT разработана для ограниченного класса задач, описываемых уравнениями типа уравнения теплопроводности, многие из идей и оригинальных приемов, которыми насыщена книга, будут полезны «зрелым» специалистам.

При подготовке издания к печати большая работа по выверке материала выполнена Д.О. Лазаревым. Читатель может быть уверен, что тексты программ CONDUCT, напечатанные в книге, полностью соответствуют исходным текстам автора.

Г.Г. Яньков

---

*Патанкар С., Сполдинг Б. Тепломассообмен в пограничных слоях. М.: Энергия, 1971.

Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984.

Предисловие автора

У этой книги довольно долгая предыстория. После преподавания численных методов решения задач о теплопереносе и течении жидкости аспирантам университета Миннесоты в 1975—1979 гг. я написал учебник по этому курсу (см. [6]). Позднее я начал читать короткие двухдневные курсы по этой дисциплине на различных национальных собраниях членов ASME (American Society of Mechanical Engineers). Поскольку учебник и эти краткие курсы получили широкое признание, то возникла необходимость в более продолжительном курсе, который был бы более детальным и обеспечивал бы опыт работы непосредственно с вычислительной программой. Такой курс был разработан в 1981 г. Это был пятидневный курс для инженеров-практиков, первоначально преподаваемый мной совместно с доктором Раби Балигой (Rabi Baliga). К настоящему времени я прочитал этот курс более 12 раз в нескольких различных версиях.

Что касается компьютерной программы, которая использовалась в этом курсе, то, по моим представлениям, она должна была удовлетворять двум условиям. С одной стороны, она должна быть интересной, применимой к практическим задачам и способной проиллюстрировать многие важные особенности вычислительной процедуры. С другой — программа должна быть настолько простой, чтобы слушатели курса в течение пяти дней могли понять ее структуру, оценить возможности и ограничения, выучить имена переменных и применить ее для решения целого ряда физических задач (мне не хотелось, чтобы пользователи воспринимали программу как черный ящик и просто нажимали кнопки). Поэтому было решено ограничить программу только задачами теплопроводности, но проиллюстрировать ее применение не только для решения задач теплопроводности, но и некоторых задач конвективного теплообмена в каналах. Так появилась на свет вычислительная программа CONDUCT.

Уделяя основное внимание преподаванию численных методов аспирантам и инженерам-практикам, я также начал искать пути введения этих методов в программу обучения студентов-старшекурсников. Соображения, положенные в основу пятидневного курса, оказались также применимы и к курсу для студентов. Поэтому курс на основе компьютерной программы CONDUCT, вне сомнения, был удачным выбором. Летом 1987 г. я выбрал материалы, относящиеся к вычислительной программе, из лекций пятидневного курса и расширил их до формы, послужившей предварительной версией этой книги. С тех пор материалы книги были включены в пятидневный курс, а сама книга использовалась как учебник для

нового курса по численным методам в задачах теплопереноса, преподавание которого мною было начато в конце 1987 г. в университете Миннесоты. Курс читался студентам-старшекурсникам, а также аспирантам различных технических факультетов.

В преподавании этого курса (и других подобных для аспирантов) я использую определенный формат. Акцент делается на понимание физической сущности и возможности решения физических задач. Я начинаю с физического и математического описания интересующего нас явления, разрабатываю численный метод и описываю вычислительную программу в общем виде. Остальная часть курса посвящена рассмотрению многочисленных примеров, в которых программа адаптируется к конкретным задачам. Несмотря на то что мы начинаем изучение курса с простых примеров, в конце его мы имеем дело с очень тонкими и сложными приложениями. По мере обучения студенты применяют вычислительную программу к большому числу дополнительных задач в качестве одного из видов домашней работы. Благодаря этому они не только развивают умение их решать, но и улучшают понимание физических процессов.

При завершении курса я прошу студентов выполнить два проекта. Каждый проект заключается в применении вычислительной программы к важной задаче, выбранной студентом самостоятельно. Отчет по проекту включает в себя описание задачи, программную реализацию, результаты и комментарии к ним. Окончание курса доставляет мне особое удовольствие — я вижу интересные работы, выполненные студентами. За четыре года студенты применили программу CONDUCT к решению ряда различных задач, в том числе задач теплопереноса в цилиндрах двигателя, теплового состояния зарытых в землю кабелей, тепловых процессов в изоляции стен зданий, охлаждения электрических цепей, течения около наборов стержней или трубок, распространения влаги в гранулированных средах, охлаждения анода при дуговом разряде. Во многих случаях работы, выполненные в рамках этого курса, послужили основой диссертаций или журнальных статей. Выбирая примеры и задачи для данной книги, я использовал плодотворные идеи, которые почерпнул у самих студентов.

Вычислительная программа CONDUCT состоит из двух частей: большой неизменяемой части, общей для всех приложений, и части, зависящей от конкретной задачи и состоящей из подпрограммы, которую должен написать пользователь для каждого приложения. Таким образом, вместо простого представления входных данных пользователь пишет спецификацию задачи в специальной подпрограмме. Это делает программу чрезвычайно гибкой и широко применимой, и, что более важно, студенты оказываются вовлеченными в общий процесс решения физических задач.

Издание этой книги дает мне возможность разделить с читателями мой интерес к целому ряду любопытных идей. Главная задача данной книги состоит в том, чтобы наряду с получением количественных результатов использовать вычислительную деятельность для улучшения понимания физических явлений. Структура программы, состоящая из двух частей, является новшеством. Такая программа предлагает пользователю основную структуру с численной схемой, и в то же время предоставляет значительную свободу и большую долю участия в вычислительном процессе. Именно это делает программу, подобную CONDUCT, эффективным инструментом для преподавания и изучения. Я также горжусь несколькими небольшими нововведениями, которые использовал при написании программы. Это касается использования структур ENTRY для создания совокупности из многих подпрограмм, подпрограммы VALUES, разработанной для удобного задания значений многих величин, и практики использования двумерных массивов, эквивалентных частям трехмерного.

Изначальная цель данной книги заключается в том, чтобы представить читателю науку и искусство численного исследования физического явления. Кроме того, вычислительная программа может быть использована преподавателями и для других целей. Они могут подготовить частные варианты программы для численного моделирования практических задач. Например, кто-нибудь может настроить программу для решения задачи о течении в трубе с внутренними ребрами. Затем студенты могут заняться программой для изучения влияния на поле скорости числа ребер, их высоты или толщины и т.п. В данном случае важен не сам метод численного решения, а то, что в центре внимания находится поведение физической системы. Когда же программа оснащена подходящей компьютерной графикой, такая деятельность может быть и познавательной, и занимательной.

После того как ранняя версия этой книги была тщательно проверена в процессе занятий, я обнаружил, что трудно сопротивляться искушению добавить новый материал. На последнем этапе подготовки рукописи, несмотря на то что я вместе с помощниками был чрезвычайно внимателен, вполне возможно, что несколько ошибок могли ускользнуть от нашего внимания. Я буду очень благодарен читателям, если они обратят мое внимание на ошибки, которые обнаружат.

В течение всей моей профессиональной деятельности я был счастлив получать великодушную помощь и поддержку от моих учителей, коллег и студентов. Я выражаю всем им свою искреннюю благодарность. Созданию программы CONDUCT и этой книги я обязан многим людям, которые предоставили мне непосредствен-

ную помощь. Раби Балига (Rabi Baliga) преподавал вместе со мной те пятидневные курсы, в которых была впервые представлена программа CONDUCT. В то же время Чандер Пракаш (Chander Prakash), Суманта Ачарья (Sumanta Acharya) и Чиа-Фу Хсу (Chia-Fu Hsu) помогали в создании ранней версии программы. Род Шмидт (Rod Schmidt) и Канчан Келкар (Kanchan Kelkar) провели бесконечные часы, набирая первоначальную версию этой книги летом 1987 г. Последний период (три-четыре недели) перед тем, как книга была передана в печать, они были особенно загружены работой. У меня нет слов, чтобы выразить свою признательность Каилаш Карки (Kailash Karki), Прабху Сатьямурти (Prabhu Sathyamurthy) и Джону Чаи (John Chai) за их преданный и неустанный труд в этот период по набору, корректуре, редактированию, созданию рисунков, а также за все их многочисленные и полезные предложения.

Наконец, я хотел бы поблагодарить мою семью. В течение всех дней лихорадочной работы над этой книгой моя жена вместе с дочерьми создавали замечательную атмосферу поддержки и понимания.

Сухас В. Патанкар
Миннеаполис, Миннесота, США
Январь 1991 г.

Основные обозначения

A — площадь;
a — коэффициент в дискретном аналоге;
b — постоянный член дискретного аналога;
c — теплоемкость;
c_p — теплоемкость при постоянном давлении;
D — диффузионная проводимость; диаметр;
D_h — гидравлический диаметр;
f — коэффициент трения;
f_C — постоянная часть в линеаризованном выражении для плотности потока через границу;
f_P — коэффициент в линеаризованном выражении для плотности потока через границу;
h — коэффициент теплоотдачи;
k — теплопроводность;
i — инерция, используемая для релаксации;
J — плотность диффузионного потока;
Nu — число Нуссельта;
P — коэффициент в алгоритме прогонки (TDMA);
p — давление;
Q — коэффициент в алгоритме прогонки; суммарный тепловой поток на единицу длины;
q — плотность теплового потока;
r — радиальная координата;
Re — число Рейнольдса;
S — обобщенный источниковый член;
S_C — постоянная часть в линеаризованном выражении для источникового члена;
S_P — коэффициент в линеаризованном выражении для источникового члена;
$\overline{S}$ — осредненный по контрольному объему источниковый член;
T — температура;
T_b — среднемассовая температура;
t — время;
u — компонента скорости по оси x;
v — компонента скорости по оси y;
W — безразмерная скорость;
w — продольная скорость;
$\overline{w}$ — средняя продольная скорость;
α — коэффициент релаксации; температуропроводность;
β — множитель в выражении для граничных условий;
Δt — шаг по времени;
ΔV — объем контрольного объема;
Δx — размер контрольного объема по оси x;
δx — расстояние по оси x между соседними расчетными точками сетки;
Δy — размер контрольного объема по оси y;
ϕ — обобщенная зависимая переменная;
Γ — обобщенный коэффициент диффузии;

λ — величина, аналогичная объемной теплоемкости;
μ — динамическая вязкость;
Θ — безразмерная температура;
ρ — плотность.

Индексы:
B — граничная расчетная точка;
E — правая соседняя расчетная точка («восточная»);
e — грань контрольного объема между расчетными точками P и E;
N — верхняя соседняя расчетная точка («северная»);
n — грань контрольного объема между расчетными точками P и N;
nb — обобщенная соседняя расчетная точка;
P — центральная расчетная точка сетки;
S — нижняя соседняя расчетная точка («южная»);
s — грань контрольного объема между расчетными точками P и S;
W — левая соседняя расчетная точка («западная»);
w — грань контрольного объема между расчетными точками P и W; стенка;
0 — значение переменной в предшествующий момент времени;
* — значение переменной, взятое с предыдущей итерации.

Глава 1

КРАТКИЙ ОБЗОР

Мы, живущие в век компьютеров, должны быть счастливы, так как можем использовать численные методы для моделирования физических явлений. В данной книге вы получите представление об этой захватывающей деятельности, имеющей также большое практическое значение. В этой главе представлен обзор тем, затронутых в книге.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методы численного моделирования играют важную роль в анализе и разработке технических устройств, характеризующихся переносом тепла и течением жидкости. Такие методы, воплощенные в удобных вычислительных программах, представляют собой реальную альтернативу экспериментальным измерениям благодаря быстрой реализации и экономичности. Численный анализ может содержать реальные данные о геометрических характеристиках, свойствах материалов, граничных условиях и предоставлять полную и подробную информацию о полях температуры, скорости и других величинах, а также о связанных с ними потоках. На практике в некоторых случаях анализ и проектирование устройств могут быть целиком выполнены с использованием вычислительной программы. В ситуациях, когда желательно провести некоторые экспериментальные исследования, численное моделирование может быть использовано в планировании и разработке экспериментов для существенного уменьшения их стоимости, а также для расширения и обогащения результатов.

Для численного решения практических задач, связанных с теплопереносом, течением жидкости и другими аналогичными явлениями, требуется, как правило, интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по пространственным координатам и времени. Хотя существуют численные методы для получения такого решения, задача написания и использования общих вычислительных программ для всех практически важных процессов тепломассопереуноса достаточно трудна. Подобная задача может оказаться просто пугающей, особенно для начинающего. Более приемлемое начало исследований в сфере численного моделирования может быть обеспечено с помощью уже готовой к использованию вычислительной программы, ограниченной подмножеством решаемых задач теплопереноса и течения жидкости. Автор стремится показать

построение и применение подобной многоцелевой компьютерной программы для частных случаев.

Для вычислительной программы, представленной в книге, приняты два основных ограничения.

Первое ограничение — двумерность. Существует много физических явлений, которые могут быть удовлетворительно представлены в двух измерениях, и обычно *качественные* особенности большинства практических задач могут быть изучены в двумерном контексте. Кроме того, структура трехмерной вычислительной программы может быть удачно проиллюстрирована посредством двумерной программы. Добавление третьего измерения в программу делает ее более сложной в использовании из-за того, что задача усложняется и требуется гораздо больше вычислительного времени и компьютерной памяти. Поэтому двумерная программа рассматривается как более подходящий инструмент для обучения (кстати, одномерную программу еще проще строить и применять, однако для большинства практических задач одномерное представление часто является слишком грубым даже для качественного обнаружения множества интересных свойств многомерных процессов).

Другое ограничение заключается в том, что вычислительная программа разработана для моделирования явлений типа теплопроводности. Это значит, что программа рассчитывает поле любой скалярной величины, которое описывается дифференциальным уравнением, похожим на уравнение теплопроводности. Таким образом, программа, разработанная изначально для расчета процессов теплопроводности, может быть использована также для многих других аналогичных процессов.

Важным классом задач, подобных задачам теплопроводности, являются задачи о полностью развитых течениях и теплопереносе в каналах. Вдали от входного участка обычно существует область, в которой продольная скорость и поле температуры демонстрируют некоторое особое поведение. В этой области поля скорости и температуры описываются уравнениями, похожими на уравнение, использующееся для задач двумерной теплопроводности.

Другими примерами являются задачи о диффузии при химической реакции, фильтрации жидкости через пористые материалы, течении смазки, переносе тепла и влаги в почве, потенциальных течениях и электромагнитных полях. Таким образом, даже с представленными здесь основными ограничениями с помощью вычислительной программы может быть смоделировано и проанализировано большое число различных интересных физических явлений.

Эта книга посвящена в основном анализу теплопроводности и переноса тепла при течениях в каналах. Поэтому вычислительная программа названа именем CONDUCT, которое образовано от англий-

ского словосочетания «heat conduction and duct flow». В книге описана вычислительная программа CONDUCT с физическими, математическими и вычислительными деталями и проиллюстрировано ее применение ко многим задачам, представляющим практический интерес.

Обычно на вычислительную программу смотрят как на средство получения количественных результатов для решения практической задачи. Однако численное моделирование служит еще одной, возможно, более важной цели. С помощью численного моделирования мы можем лучше понять большое число сложных физических процессов. Как будет видно из дальнейшего, при описании численного метода и соответствующей вычислительной программы в этой книге особое внимание уделяется пониманию физической сущности рассматриваемых явлений.

1.2. ВОЗМОЖНОСТИ И ОГРАНИЧЕНИЯ ПРОГРАММЫ CONDUCT

Программа CONDUCT разработана для решения уравнений с частными производными типа уравнения теплопроводности. Эта программа рассчитывает распределение таких скалярных величин, как температура в задачах теплопроводности, концентрация в задачах диффузии, скорость и температура при полностью развитых течениях в каналах, потенциал и др. Как будет показано далее, подобные явления описываются обобщенным дифференциальным уравнением, которое может быть записано в виде (3.6). Таким образом, программа CONDUCT может быть использована для расчета любой переменной, описываемой дифференциальным уравнением вида (3.6). В дальнейшем мы ограничимся только двумерными задачами, т.е. теми случаями, когда интересующие нас величины могут претерпевать значительные изменения только по двум пространственным координатам. Программа может быть использована для решения как стационарных, так и нестационарных задач.

CONDUCT разработана для работы в трех системах координат: декартовой (x, y); осесимметричной (x, r) и полярной (θ, r). Эти системы показаны на рис. 1.1. Для каждой системы координат программа использует расчетную сетку с линиями, проведенными в направлении

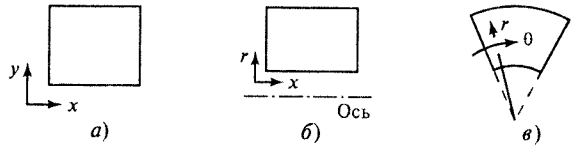


Рис. 1.1. Системы координат:

а — декартова; *б* — осесимметричная; *в* — полярная

координатных осей. В результате программа идеально подходит для тех форм расчетной области, которые хорошо вписываются в одну из трех систем координат. В то же время программа может быть использована и для нерегулярных расчетных областей, однако если область слишком нерегулярная, то применять CONDUCT становится неудобно. Поэтому использование сеток в трех стандартных системах координат налагает некоторое ограничение на геометрические формы областей, с которыми удобно работать. Можно было бы не учитывать это ограничение, но это привело бы к созданию программы, намного более сложной в написании, понимании и использовании.

Для полярной системы координат должно быть отмечено особое ограничение. Циклическая координата θ может изменяться от 0 до 360°, только если заданы значения зависимой переменной при θ = 0 и 360° или эти линии являются линиями симметрии. Это ограничение не так серьезно, как это может показаться на первый взгляд. Для большинства задач в «круглой» или «кольцевой» геометрии существуют две радиальные линии симметрии или более, поэтому решение нужно искать только в секторе, ограниченном двумя линиями симметрии. CONDUCT может быть применена в этой ситуации, так как диапазон изменения θ будет меньше 360°. Например, рассмотрим полностью развитое течение в круглом канале с радиальными внутренними ребрами. Если ребра одинаковы по форме и расположены равномерно по периметру канала (что обычно и имеет место на практике), то достаточно применить CONDUCT для анализа области между двумя последовательными ребрами (или даже между центральной линией одного ребра и линией, проходящей посередине между этим ребром и следующим). Если же ребра расположены неравномерно, без желательных линий симметрии, то CONDUCT не может быть применена для решения подобной задачи.

Несмотря на все ограничения, CONDUCT может быть использована для решения широкого круга задач теплопроводности, полностью развитого течения в канале, диффузии, фильтрации жидкости через пористую среду и др. Такие свойства, как теплопроводность или вязкость могут быть непостоянными: они могут зависеть от координат (как в составных материалах) и от температуры или других факторов. Течение в канале может быть ламинарным или турбулентным, ньютоновским или неньютоновским. В задачах теплопроводности может иметь место внутренняя генерация тепла, мощность которой также может зависеть от координат и/или температуры. Для всех задач может быть реализовано большое разнообразие граничных условий. Полностью освоив возможности и ограничения программы, можно разработать большое число разнообразных интересных приложений.

1.3. СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ CONDUCT

Первым шагом к ознакомлению с программой CONDUCT является иллюстрация структуры многоцелевой вычислительной программы, которая может быть использована, несмотря на все ее ограничения, для решения бесконечного множества физических задач, кажущихся на первый взгляд различными.

CONDUCT состоит из двух частей: неизменяемой и адаптируемой. *Неизменяемая* часть содержит общую вычислительную схему, одинаковую для всех возможных приложений с учетом ограничений программы. Она написана без каких-либо представлений и предположений о частных деталях решаемой задачи. Обычно нет необходимости делать какие-либо изменения в неизменяемой части программы. *Адаптируемая* часть обеспечивает конкретизацию задачи. С ее помощью вводятся данные о геометрических характеристиках, свойствах материала, расположении и мощности источников тепла, скорости реакции, граничных условиях, желаемом выводе результатов и др. Из этого следует, что адаптируемая часть не может быть написана «заранее» для бесконечного множества практических задач, к которым может быть применена программа. Единственное, что может быть обеспечено, — это *структура* адаптирумой части, а ее *содержание* должно быть написано «по требованию» исходя из особенностей имеющейся задачи. Таким образом, многоцелевая программа подобного типа состоит из завершенной неизменяемой части и из «*скелета*» адаптируемой части. Адаптируемая часть должна быть написана пользователем в соответствии с общими инструкциями к программе. Несмотря на некоторые общие ограничения в разработке этой части существует большая свобода. Могут быть решены очень сложные прикладные задачи, так как возможности программы ограничены только воображением пользователя.

Этот тип структуры программы может быть вам незнаком. Многие из вас, возможно, имели дело с полностью завершенными программами, для которых требовались только входные данные. Такие программы, даже если они чрезвычайно сложны, не могут сравниться с практически неограниченной гибкостью и универсальностью программы, подобной CONDUCT, в которой можно задавать описание задачи и разрабатывать желательный вывод результатов посредством *написания* подпрограмм на языке ФОРТРАН. Конечно, нет необходимости в такой гибкости, когда программа используется для рутинных расчетов узкого класса задач. Для подобных приложений можно разработать адаптируемую часть так, чтобы она работала автоматически, просто запрашивая значения некоторых

параметров. Таким образом, CONDUCT применяется как простой в использовании набор инструментов для создания специальных программ ограниченной применимости.

Случается, что использование многоцелевой вычислительной программы для простой задачи становится обременительным, так как программа задает слишком много вопросов. Для решения необходимо знать: число зависимых переменных, изменения вязкости, теплопроводности, коэффициента диффузии, распределения источников и стоков для всех переменных, данные о граничных условиях для соответствующих уравнений и др. Некоторые специально разработаные возможности CONDUCT делают программу легко применимой к решению простых задач. Эта желательная характеристика программы была достигнута за счет разумного использования «значений по умолчанию» для многих параметров и переменных. Другими словами, предполагается, что некоторые величины имеют наиболее часто встречающиеся значения, если они не переопределяются в адаптируемой части. В результате адаптируемая часть программы для простой задачи может быть очень короткой. Объем и сложность адаптируемой части увеличиваются с усложнением рассматриваемой задачи.

Разработка адаптируемой части также облегчается снабжением неизменяемой части программы большим числом общих утилит. Эти утилиты не являются существенной частью программы, но представлены для удобства пользования ею. Примерами таких утилит являются: подпрограммы для построения равномерной и неравномерной сеток и подпрограмма для вывода на печать расчетной сетки и полей переменных.

Так как удачное использование CONDUCT зависит от того, насколько правильно вы подготовите адаптируемую часть, важно полное понимание всей программы. В книге представлены все необходимые детали неизменяемой части и даны инструкции и указания для разработки адаптируемой части. Некоторые представленные варианты адаптируемой части программы (см. гл. 8, 10 и 11) служат в качестве примеров конкретного применения этих идей.

Вычислительная программа, подобная CONDUCT, может бесконечно улучшаться и модернизироваться. В этом смысле нет «совершенной» или «наилучшей» программы. То, что представлено в этой книге, является версией, которая, по моему мнению, подходит для наших целей. Но, конечно, она может быть улучшена. Полезнее, однако, понять программу такой, какая она есть, и научиться хорошо ее использовать. В дальнейшем для определенных случаев можно разработать улучшенную версию программы.

Программа CONDUCT написана на языке ФОРТРАН 77 и может использоваться при работе практически на всех компьютерах без изменений. Результаты, представленные в этой книге, были получены с помощью компилятора Microsoft FORTRAN Compiler Version 4.1 на IBM PC. Ваши результаты могут немного отличаться в зависимости от длины слова, используемой вашим компьютером. Это особенно сказывается на некоторых величинах, которые теоретически должны быть равны нулю, но за счет погрешностей округления при вычислениях принимают малые значения. Несмотря на то что расхождения в значениях этих «бесконечно малых» могут быть очень большими, их не следует принимать во внимание.

1.4. СТРУКТУРА КНИГИ

Общая концепция численных методов описывается в гл. 2, где наша частная численная методика подробно раскрывается применительно к одномерной задаче теплопроводности. В этой главе объяснены, хотя и для одномерного случая, практически все важные идеи, необходимые для дальнейшей работы. Поэтому желательно хорошее понимание материала этой главы.

Математическая формулировка интересующих нас общих физических явлений представлена в гл. 3. В ней обсуждается уравнение теплопроводности, затем оно обобщается для представления других аналогичных процессов. Вычислительная программа CONDUCT предоставляет вычислительную схему для решения этого обобщенного уравнения. Заметим, что в гл. 3 не содержится полной информации о получении уравнения теплопроводности, формулировках уравнений для других процессов, зависимости теплопроводности от температуры и других аспектах. Мы в первую очередь обращаем внимание на форму решаемых дифференциальных уравнений. Для более полной информации о математическом описании теплопроводности и других явлений следует обратиться к специальной литературе.

Так как численную схему удобнее описывать вместе с соответствующими особенностями программы, то предварительный обзор всей вычислительной программы представлен в гл. 4. Это позволяет понять взаимосвязь различных подпрограмм. В этой главе детально описана структура CONDUCT, состоящая из двух частей. Одновременно полезно будет обращаться к листингу неизменяемой части CONDUCT, представленному в прил. 1. В последующих главах вам придется часто обращаться к листингу, так что вы подробно познакомитесь со всей структурой и особенностями программы.

Численный метод, разработанный для одномерной задачи в гл. 2, расширен до общей двумерной постановки в гл. 5. Здесь вы познакомитесь с некоторыми деталями построения CONDUCT и узнаете о численных схемах, соглашениях о знаках и некоторых именах переменных на языке ФОРТРАН. В гл. 5 также дается полная детализация алгебраических уравнений, граничных условий, алгоритма решения, выражения для источникового члена, учета нелинейности и др. Эта глава является главным источником информации о численном методе, реализованном в CONDUCT.

В главах 6 и 7 внимание вновь обращено на структуру вычислительной программы. Подпрограммы, расположенные в неизменяемой части CONDUCT, описаны в гл. 6, в то время как информация о роли различных составляющих адаптируемой части, а также их разработке приведена в гл. 7. Основательное изучение этих глав важно перед использованием CONDUCT.

Книга содержит 15 наглядных приложений программы CONDUCT. Они представлены в главах 8, 10 и 11. Описание каждого приложения начинается с анализа выбранной задачи, обсуждения деталей разработки адаптируемой части, объяснения новых имен на языке ФОРТРАН; дается листинг используемой подпрограммы; представляются соответствующий вывод данных и комментарии к этим результатам. Выбор задач для примеров определяется не тем, что они интересны в практическом приложении, а тем, что позволяют получить разнообразный и наиболее полный опыт использования CONDUCT. Независимо от заинтересованности в некотором частном приложении вы должны изучить все представленные примеры, так как каждый из них разработан для иллюстрации одной (или более) особенности вычислительной программы. Успех использования программы CONDUCT для решения различных задач зависит от того, как хорошо вы изучите 15 примеров, содержащихся в книге.

Адаптируемые части для решения стационарных и нестационарных задач теплопроводности описаны в гл. 8. Перед применением программы для решения задач о течениях в каналах в гл. 9 кратко рассматривается необходимая математическая база для описания полностью развитых течения и теплопереноса в каналах. В гл. 10 приведены описания адаптируемых частей программы для задач о течениях в канале.

Глава 11 посвящена дополнительным примерам применения программы для расчета некоторых сложных течений в каналах, потенциальных течений и течений через пористую среду. В гл. 12 содержатся заключительные замечания о методе и вычислительной программе, некоторые предложения по дальнейшему расширению программы CONDUCT и общие рекомендации.

Глава 2

ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Прежде чем приняться за формулировку численного метода для решения обобщенной двумерной задачи, полезно изучить решение одномерной задачи теплопроводности. В этом случае физическая картина проста и математические вычисления минимальны. В связи с этим множество идей может быть легко изучено в одномерном контексте. Позднее без особых проблем расширим эту технику для решения общих двумерных задач. Таким образом, информация, представленная в данной главе, очень важна для всей последующей работы.

2.1. КОНЦЕПЦИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для получения стационарной одномерной задачи теплопроводности предположим, что температура T зависит только от координаты x. Основное дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+S=0\,, \tag{2.1}$$

где k — теплопроводность; S — источниковый член, описывающий мощность тепловыделения в единице объема среды. Для начала предположим, что k и S постоянны.

В целях получения численного решения уравнения (2.1) выбираем множество точек вдоль оси x и ищем значение температуры в них. Это множество назовем «расчетной сеткой», а точки — «расчетными точками». На рис. 2.1 показан набор расчетных точек, расположенных на одинаковом расстоянии одна от другой и обозначенных как $i-1$, i, $i+1$ и т.д. Расстояние между соседними точками равно δx. Задача численного метода заключается в определении температур T_{i-1}, T_i, T_{i+1} для любого i.

Аналитическим решением уравнения (2.1) является *выражение* для температуры T, зависящей от x. Численное решение, напротив, получается в форме *численных значений* T в конечном числе расчетных точек. Дискретные значения T_{i-1}, T_i, T_{i+1} для любого i находятся из системы алгебраических

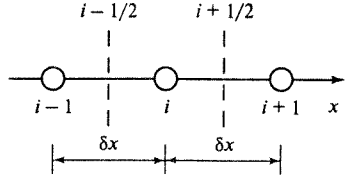


Рис. 2.1. Равномерная расчетная сетка для одномерной задачи

уравнений, которые называются *дискретными аналогами* дифференциального уравнения (2.1). Способ получения дискретных аналогов будет обсуждаться ниже (см. § 2.2).

Когда расчетная область содержит небольшое число расчетных точек, дискретные аналоги представляют собой грубую аппроксимацию дифференциального уравнения. При этом полученное численное решение обычно не совпадает с точным решением дифференциального уравнения. При увеличении числа расчетных точек численное решение становится более корректным и приближается к точному. Для многих задач использование даже небольшого числа расчетных точек приводит к решениям, которые достаточно точны для практических целей, что будет продемонстрировано в этой и других главах.

Для одномерной задачи стационарной теплопроводности уравнение (2.1) обычно может быть решено аналитически. Однако для сложных многомерных задач очень трудно или вообще невозможно получить аналитическое решение. В этих случаях альтернативой является численный метод. Преимущество численного метода заключается в замещении дифференциального уравнения *системой алгебраических уравнений*, которую можно решить с помощью компьютера. Далее будет показано, как могут быть получены подобные алгебраические уравнения.

2.2. ПОЛУЧЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ

Существует множество способов из дифференциального уравнения, подобного уравнению (2.1), получить систему дискретных аналогов — алгебраических уравнений, содержащих T_{i-1}, T_i, T_{i+1} в качестве переменных. В этом параграфе рассмотрим несколько путей получения таких дискретных аналогов и выберем один из них для дальнейшей работы.

Аппроксимация производных. Так как дифференциальное уравнение содержит производные, можно получить дискретный аналог заменой производных подходящей аппроксимацией. Например, вторая производная в уравнении (2.1) может быть аппроксимирована в расчетной точке с индексом i согласно рис. 2.1 как

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{1}{\delta x}\left[\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{i+1/2}-\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)_{i-1/2}\right]. \qquad (2.2)$$

Затем производные dT/dx в точках $i + 1/2$ и $i - 1/2$ могут быть записаны через T_{i-1}, T_i, T_{i+1} в виде:

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_{i+1/2} = k \frac{T_{i+1} - T_i}{\delta x}; \tag{2.3}$$

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_{i-1/2} = k \frac{T_i - T_{i-1}}{\delta x}. \tag{2.4}$$

Подстановка этих выражений в (2.1) приводит к уравнению

$$\frac{k}{(\delta x)^2} [T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i] + S = 0, \tag{2.5}$$

где k и S считаются постоянными в принятом приближении. Уравнение (2.5) является дискретным аналогом уравнения (2.1). Если у нас есть уравнение, подобное (2.5), для каждой расчетной точки области, то можно получить численное решение для температуры T, решив систему алгебраических уравнений.

Использование ряда Тейлора. Это более формальная процедура получения уравнения (2.5). Разложив температуру T_{i+1} в ряд Тейлора, можно записать

$$T_{i+1} = T_i + (\delta x)\left(\frac{dT}{dx}\right)_i + \frac{1}{2}(\delta x)^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i + \ldots \tag{2.6}$$

Аналогично температура T_{i-1} может быть записана как

$$T_{i-1} = T_i - (\delta x)\left(\frac{dT}{dx}\right)_i + \frac{1}{2}(\delta x)^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i + \ldots \tag{2.7}$$

Если в (2.6) и (2.7) пренебречь слагаемыми более высокого порядка по сравнению с $(\delta x)^2$, то, сложив эти выражения, получим

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{(\delta x)^2}. \tag{2.8}$$

Это та же самая аппроксимация, что была получена ранее с применением (2.2)—(2.4). Таким образом, мы снова можем получить уравнение (2.5) подстановкой выражения (2.8) в (2.1).

Метод контрольного объема (МКО). Участок, ограниченный штриховыми линиями на рис. 2.1, является маленькой частью рассматриваемой одномерной расчетной области. Такой участок называют подобластью, конечным объемом или контрольным объемом (КО). Можно получить дискретные уравнения, использовав тепловой баланс в контрольном объеме. В этих целях проинтегрируем уравнение (2.1) по контрольному объему и затем представим результат в виде

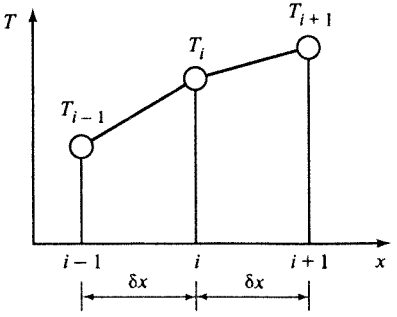


Рис. 2.2. Кусочно-линейный профиль температуры

алгебраического уравнения. После интегрирования (2.1) по x в пределах от $i - 1/2$ до $i + 1/2$ получим

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_{i+1/2} - \left(k\frac{dT}{dx}\right)_{i-1/2} + S\delta x = 0. \qquad (2.9)$$

Так как $-k\,dT/dx$ представляет собой локальную поверхностную плотность теплового потока, уравнение (2.9) очевидно является балансом между тепловыми потоками через грани контрольного объема и количеством тепла, произведенным в контрольном объеме.

Для представления градиента температуры dT/dx в уравнении (2.9) в алгебраической форме мы должны сделать предположение о профиле температуры T *между* расчетными точками. На рис. 2.2 показан простой профиль, известный как кусочно-линейный. Использовав этот профиль, можно записать градиенты температуры на гранях контрольного объема в виде:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{i+1/2} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\delta x}; \qquad (2.10)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{i-1/2} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\delta x}. \qquad (2.11)$$

Подставив эти выражения в (2.9), получим уравнение

$$\frac{k}{\delta x}\left[T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i\right] + S\delta x = 0, \qquad (2.12)$$

эквивалентное выражению (2.5). Это уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{2k}{\delta x}T_i = \frac{k}{\delta x}T_{i+1} + \frac{k}{\delta x}T_{i-1} + S\delta x. \qquad (2.13)$$

В дальнейшем будем применять эту форму записи ко всем дискретным аналогам.

Заметим, что при получении уравнения теплового баланса (2.9) для контрольного объема не было сделано никаких аппроксимаций. Другими словами, уравнение (2.9) так же точно, как и (2.1). Однако

предположение о форме профиля является аппроксимацией, которая улучшается при увеличении числа расчетных точек.

Обсуждение метода контрольного объема. В книге будет использоваться метод контрольного объема для получения дискретных аналогов. Основная причина этого заключается в том, что дискретные аналоги, полученные этим методом, являются не только формальной математической аппроксимацией, но и имеют ясный физический смысл. Интересующие нас дифференциальные уравнения представляют собой законы сохранения. Например, уравнение теплопроводности основано на законе сохранения энергии. В дальнейшем мы используем законы сохранения количества движения при течении в каналах и сохранения массы при течениях в пористых средах. Когда дискретные уравнения получены методом контрольного объема, они представляют собой законы сохранения энергии, количества движения, массы для каждого контрольного объема. Из этого следует, что полученное численное решение удовлетворяет законам сохранения этих величин во всей расчетной области.

На простом примере в этом параграфе показано, что разные методы получения дискретного аналога приводят к одному и тому же конечному уравнению. Но это случается не всегда. Здесь мы использовали очень простое дифференциальное уравнение и выбрали частный случай предположения о профиле для метода контрольного объема. Для более сложных дифференциальных уравнений или для других предположений о форме профиля итоговые дискретные аналоги могут различаться в случае использования рядов Тейлора, метода контрольного объема и других способов. Решение, полученное с помощью метода контрольного объема, всегда будет сохранять баланс (энергии, количества движения и др.) во всей расчетной области, чего нельзя сказать о решениях, найденных другими методами.

2.3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Получим численное решение уравнения (2.1) для простой ситуации. Для области длиной L определим граничные условия:

$$T = T_A \quad \text{при } x = 0; \tag{2.14}$$

$$T = T_B \quad \text{при } x = L. \tag{2.14а}$$

Далее будем использовать следующие заданные величины:

$$k = 1; \quad S = 2; \quad L = 5; \quad T_A = 0; \quad T_B = 15. \tag{2.15}$$

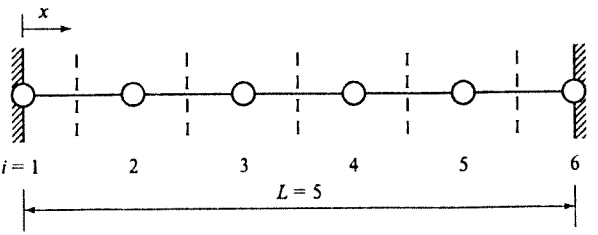


Рис. 2.3. Равномерная сетка с шестью расчетными точками

Дискретные уравнения. Для этого простого примера будем использовать равномерную сетку с $\delta x = 1$, показанную на рис. 2.3. Температуры на границах областей T_1 и T_6 известны [см. (2.15)]:

$$T_1 = 0 \quad \text{и} \quad T_6 = 15. \tag{2.16}$$

Для внутренних расчетных точек 2—5 можно записать дискретные аналоги в форме (2.13). Следовательно, используя значения заданных величин [см. (2.15)], получаем

$$2T_2 = T_3 + 2; \tag{2.17}$$

$$2T_3 = T_4 + T_2 + 2; \tag{2.18}$$

$$2T_4 = T_5 + T_3 + 2; \tag{2.19}$$

$$2T_5 = T_4 + 17. \tag{2.20}$$

Следует заметить, что температуры на границах областей T_1 и T_6 имеют известные значения согласно (2.16).

Решение алгебраических уравнений. Осталось только решить уравнения (2.17)—(2.20) для неизвестных температур. Так как эти уравнения записаны в специальной форме, то может быть применен простой метод решения.

Для начала запишем уравнение (2.17) в виде

$$T_2 = 0{,}5T_3 + 1. \tag{2.21}$$

Подставив выражение (2.21) в (2.18), получим

$$2T_3 = T_4 + 0{,}5T_3 + 1 + 2, \tag{2.22}$$

отсюда

$$T_3 = 2/3T_4 + 2. \tag{2.23}$$

При использовании выражения (2.23) из уравнения (2.19) имеем

$$T_4 = 3/4T_5 + 3. \tag{2.24}$$

Наконец, подставив выражение (2.24) в уравнение (2.20), получим

$$2T_5 = 3/4T_5 + 3 + 17. \qquad (2.25)$$

Поскольку в уравнении (2.25) неизвестным остается только T_5, найдем эту температуру:

$$T_5 = 16. \qquad (2.26)$$

Если используем это значение T_5 в уравнении (2.24), то получим T_4; затем из выражения (2.23) найдем T_3 и из выражения (2.22) — T_2. Таким образом, численное решение задачи выглядит следующим образом:

$$T_2 = 7;\ T_3 = 12;\ T_4 = 15;\ T_5 = 16. \qquad (2.27)$$

Метод, примененный здесь, является мощным средством решения системы алгебраических уравнений определенной формы. Этот алгоритм в общем виде подробно описан в п. 2.4.4.

Сравнение с точным решением. Получив численное решение, интересно сравнить его с точным. Уравнение (2.1) может быть решено для постоянных k, S и граничных условий (2.14):

$$T = T_A + (T_B - T_A)\ \frac{x}{L} + \frac{S}{2k}(L - x)\,x\,. \qquad (2.28)$$

Подставив значения, данные в (2.15), получим

$$T = 8x - x^2. \qquad (2.29)$$

Это выражение может быть использовано для нахождения точных значений T_2, ...,T_5 при $x = 2$, ..., 5 соответственно. В данном частном случае получилось, что точные значения, найденные по выражению (2.29), совпадают с нашим численным решением [см. (2.27)].

Такое замечательное совпадение случается довольно редко и имеет место только в некоторых простых задачах. Однако полезно осознавать, что иногда численное решение не приводит к погрешностям даже при использовании небольшого числа расчетных точек. В рассмотренной здесь задаче точное распределение температуры является параболической функцией согласно (2.29). Замещение ее кусочно-линейной функцией является чистой аппроксимацией. Но случилось так, что выражения (2.10) и (2.11) для градиентов температуры, полученные с помощью этого профиля, корректны и для градиентов при параболическом изменении температуры. Это случайное совпадение в представленной задаче делает наше численное решение идентичным точному.

В общем случае численное решение, полученное только при небольшом числе расчетных точек, будет давать некоторую погрешность по сравнению с точным решением. Если увеличивать число расчетных точек, то эта погрешность будет уменьшаться. На неко-

тором этапе погрешность станет настолько маленькой, что дальнейшее увеличение числа точек будет очень незначительно изменять решение. В таком случае численное решение может рассматриваться для любых практических целей как точное. Для многих задач, не имеющих аналитического решения, численное решение можно также рассматривать в качестве достаточно точного в случае, если при дальнейшем увеличении числа расчетных точек оно не изменяется.

2.4. СТАЦИОНАРНАЯ ОДНОМЕРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

После начального знакомства с методом контрольного объема разработаем его для задачи одномерной стационарной теплопроводности. В этом параграфе приведем основные особенности метода, а дальнейшие усовершенствования будут описаны в § 2.5. И, наконец, расширим метод для нестационарных задач в § 2.6.

Хотя гл. 2 посвящена разработке метода для одномерных задач, все идеи и результаты этой главы будут использоваться в гл. 5, где описывается метод для двумерных задач. На самом деле, чтобы методику, построенную должным образом в одномерном приближении распространить на двумерный случай, нужно очень немного дополнительных усилий. Таким образом, информация, приведенная в этой главе, служит фундаментом для всей дальнейшей работы.

2.4.1. Дискретный аналог

Для стационарной одномерной задачи теплопроводности уравнение (2.1) продолжает быть основным дифференциальным уравнением. Предположим, что теплопроводность k и источниковый член S непостоянны. Рассмотрим участок одномерной расчетной сетки, показанной на рис. 2.4. В отличие от сетки, приведенной на рис. 2.1, здесь нет необходимости рассматривать одинаковые расстояния между расчетными точками. Буквами W, P и E обозначены расчетные точки сетки: P — рассматриваемая точка (**P**oint), а W и E — соответственно «западная» (**W**est) и «восточная» (**E**ast) соседние точки. Штриховыми линиями показаны грани контрольного объема, содержащего точку P. Для обозначения этих граней используются буквы w и e. Точное положение граней контрольного объема будет обсуждаться позднее (см. п. 2.5.7), они могут не всегда располагаться посередине между расчетными точками. Расстояние между точками W и P обозначим как $(\delta x)_w$, а между точками P и E — как $(\delta x)_e$. Ширину контрольного объема обозначим через Δx.

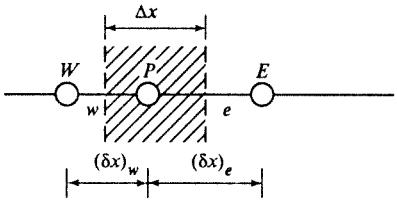


Рис. 2.4. Обобщенная одномерная сетка

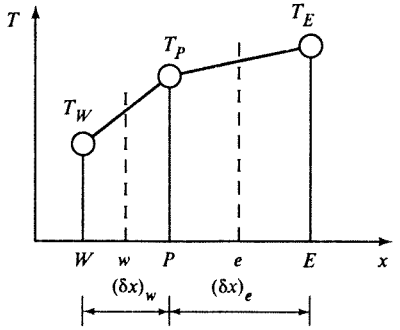


Рис. 2.5. Кусочно-линейный профиль температуры

Запишем уравнение (2.1) в виде

$$-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}+S=0\,, \tag{2.30}$$

где

$$q=-k\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \tag{2.31}$$

— плотность теплового потока.

Проинтегрировав (2.30) по контрольному объему, т.е. от w до e, получим

$$q_w-q_e+\int_w^e S\,\mathrm{d}x=0\,. \tag{2.32}$$

Здесь первые два члена соответствуют плотностям входящего и выходящего потоков тепла, тогда как интеграл обозначает суммарную мощность генерации тепла в контрольном объеме.

Для представления q_w и q_e через температуры в расчетных точках используем кусочно-линейный профиль, приведенный на рис. 2.2. Он также изображен на рис. 2.5 в общем случае неравномерной сетки. В результате получим

$$q_w=\frac{k_w}{(\delta x)_w}\,(T_W-T_P)\,; \tag{2.33}$$

$$q_e=\frac{k_e}{(\delta x)_e}\,(T_P-T_E)\,. \tag{2.34}$$

Индексы при теплопроводности k указывают на зависимость этой величины от x. Обсудим этот факт позднее (см. п. 2.5.2).

Для расчета интеграла от источникового члена обозначим среднюю мощность генерации тепла в контрольном объеме через $\overline{S}$. Тогда

$$\int_w^e S\,\mathrm{d}x = \overline{S}\Delta x. \tag{2.35}$$

Подставив (2.33)—(2.35) в выражение (2.32), получим дискретный аналог в виде

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{2.36}$$

где

$$a_E = k_e/(\delta x)_e; \tag{2.37}$$

$$a_W = k_w/(\delta x)_w; \tag{2.37а}$$

$$a_P = a_E + a_W; \tag{2.37б}$$

$$b = \overline{S}\Delta x. \tag{2.37в}$$

В общем дискретном аналоге (2.36) a_P — коэффициент при T_P; a_E и a_W — коэффициенты при температурах в соседних узлах E и W; b — постоянный член. Когда дискретный аналог записан в форме (2.36), значения коэффициентов a_P, a_E и a_W всегда положительны. Как мы убедимся позднее, это очень важное свойство, соответствующее сути физических процессов.

Так как (2.36) записано для одномерного случая, расчетная точка P имеет только две соседние точки (одну в положительном направлении оси x, а другую — в отрицательном). Следовательно, их будет четыре в двумерном случае и шесть в трехмерном. Для удобства перепишем (2.36) в более общем виде:

$$a_P T_P = \Sigma a_{nb} T_{nb} + b, \tag{2.38}$$

где индекс nb соответствует соседней точке (**neighbor** — сосед) и суммирование ведется по всем соседним точкам.

Пора, вероятно, прокомментировать физический смысл выражений для коэффициентов (2.37)—(2.37в). Для одномерной сетки, показанной на рис. 2.4, предположим, что площадь поперечного сечения контрольного объема (перпендикулярного оси x) равна единице. Тогда грани контрольного объема имеют единичную площадь, а Δx соответствует объему КО. Так как $\overline{S}$ есть средняя мощность генерации тепла в *единице объема*, то постоянный член b [см. (2.37в)] является полной мощностью генерации тепла в контрольном объеме. Из (2.34) видно, что $(\delta x)_e/k_e$ есть *термическое сопротивление* теплопереносу между точками P и E. Выражение (2.37) для a_E является обратным ему.

Поэтому будем интерпретировать коэффициенты a_E и a_W как термические проводимости между точками P и W, а также между точками P и E. Коэффициент a_P является суммой этих проводимостей.

2.4.2. Представление источникового члена

Рассмотрим ребро, присоединенное к твердой поверхности с температурой T_A (рис. 2.6). Ребро обменивается теплом с окружающей жидкостью, имеющей температуру T_∞; коэффициент теплоотдачи равен h. Обычно такую ситуацию рассматривают как одномерную задачу теплопроводности, так как температура ребра почти одинакова в поперечном сечении и изменяется в основном вдоль оси x. Теплообмен ребра с окружающей жидкостью представляется в виде источникового члена. Дифференциальное уравнение для ребра с единичным сечением записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{hP}{A}(T_\infty - T)=0\,. \qquad (2.39)$$

Это уравнение приводится во многих учебниках по теплопереносу. Во втором члене (2.39) P и A соответствуют периметру и площади поперечного сечения ребра. Величина $(hP/A)(T_\infty - T)$ характеризует теплообмен ребра с окружающей средой. Сравнив (2.1) и (2.39), можно определить источниковый член как

$$S=\frac{hP}{A}(T_\infty - T)\,. \qquad (2.40)$$

Ранее (см. п. 2.4.1) мы считали источниковый член S известным. Здесь же мы видим, что S зависит от неизвестной температуры T. В данной ситуации очень важно учесть эту зависимость при построении дискретного аналога.

Для сетки, показанной на рис. 2.4, T_P может быть выбрано в качестве преобладающей температуры в контрольном объеме. Тогда средний источниковый член $\overline{S}$ зависит от T_P. Выразим $\overline{S}$ как линейную функцию от T_P:

$$\overline{S} = S_C + S_P T_P\,. \qquad (2.41)$$

Здесь S_C и S_P — постоянные в линейном выражении (линейная функция выбрана с той целью, чтобы полученные

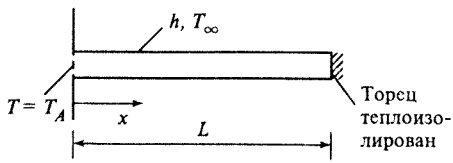


Рис. 2.6. Одномерная задача теплопроводимости ребра

дискретные уравнения оставались линейными, что облегчает процесс решения. Однако, как будет показано в п. 2.5.4, существует возможность учета нелинейности зависимости $S(T)$ даже в рамках линейной теории).

Подставляя (2.41) в (2.35) и записывая дискретный аналог в форме (2.36), получаем несколько отличные от (2.37б) и (2.37в) выражения для a_P и b. Для полноты выпишем окончательные выражения:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{2.42}$$

где

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e}; \tag{2.43}$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w}; \tag{2.43а}$$

$$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta x; \tag{2.43б}$$

$$b = S_C \Delta x. \tag{2.43в}$$

Когда источниковый член не зависит от температуры, S_P становится нулевым, а S_C равно известному значению $\overline{S}$. При этом выражения (2.43б) и (2.43в) превращаются в выражения (2.37б) и (2.37в).

В одномерной задаче теплопроводности ребра, задав источниковый член в виде (2.40), получим:

$$S_C = \frac{hP}{A} T_\infty; \tag{2.44}$$

$$S_P = -\frac{hP}{A}. \tag{2.45}$$

Очень важно заметить, что значение S_P отрицательно. Следовательно, член $-S_P \Delta x$ в выражении (2.43б) дает положительную добавку к a_P. Так как значение a_P должно быть положительным, то чрезвычайно желательно всегда работать с отрицательным S_P. К счастью, многие физические задачи, в частности задача теплопроводности ребра, рассмотренная здесь, вполне естественно приводят к отрицательному S_P. Как поступать в ситуации, когда возможно появление положительного S_P, будет объяснено ниже (см. п. 2.5.4). Более подробное обсуждение подобного представления можно найти также в [6].

2.4.3. Граничные условия

Решение физических задач зависит не только от вида дифференциальных уравнений, но и от граничных условий. Для области, изображенной на рис. 2.7, имеем дискретный аналог типа (2.42) для каждого контрольного объема, содержащего внутреннюю (т.е. находящуюся внутри расчетной области) расчетную точку. Для решения этой системы уравнений необходима дополнительная информация об искомой функции в граничных точках.

Если на границе температура задана, то имеется достаточно алгебраических уравнений для нахождения неизвестных температур во внутренних точках. Вот почему мы смогли решить простую задачу, рассмотренную в § 2.3, без какого-либо сложного расчета граничных условий. Если температура на границе неизвестна, то должна быть известна какая-либо иная информация об искомой фукции (например, плотность теплового потока через поверхность границы). В этом случае необходимо получить дополнительное алгебраическое уравнение для расчета неизвестной температуры на соответствующей границе. В методе контрольного объема это уравнение следует из теплового баланса, записанного для «половинного» контрольного объема, прилегающего к границе. Одномерная область, показанная на рис. 2.7, имеет две границы. Так как дальнейшие действия с ними идентичны, то обсудим только левую границу. Подобные рассуждения применяются и для правой границы области.

На рис. 2.8 представлен увеличенный половинный контрольный объем, прилегающий к левой границе. Интегрируя (2.30) по этому контрольному объему, получаем

$$q_B - q_i + (S_C + S_P T_B)\Delta x = 0, \qquad (2.46)$$

где источниковый член представлен как линейная функция от T_B. Заметим, что здесь Δx есть ширина половинного контрольного объема; эта Δx не то же самое, что Δx для обычного контрольного

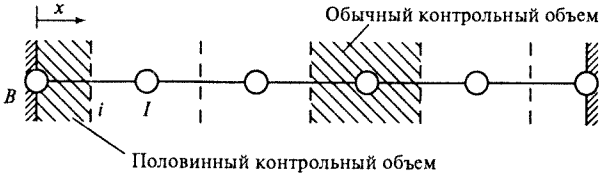


Рис. 2.7. Одномерная сетка с внутренними и граничными расчетными точками

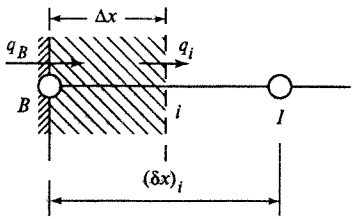


Рис. 2.8. Половиниый контрольиый объем, прилегающий к левой границе

объема. Плотность теплового потока q_i задана выражением типа (2.34), следовательно,

$$q_i = \frac{k_i}{(\delta x)_i}(T_B - T_I). \qquad (2.47)$$

Плотность теплового потока через границу q_B должна определяться из граничных условий.

При этом возможны два основных варианта. Первый — значение q_B задано. В этом случае выражения (2.46) и (2.47) могут быть скомбинированы для получения дискретного аналога этого граничного условия:

$$a_B T_B = a_I T_I + b, \qquad (2.48)$$

где

$$a_I = \frac{k_i}{(\delta x)_i}; \qquad (2.49)$$

$$a_B = a_I - S_P \Delta x; \qquad (2.49а)$$

$$b = S_C \Delta x + q_B. \qquad (2.49б)$$

Здесь q_B, значение которого известно, входит в выражение для постоянного члена b. Значение q_B может быть нулевым или ненулевым. Нулевое значение соответствует теплоизолированной границе или границе, являющейся осью симметрии.

Другой вариант задания граничного условия — плотность теплового потока через границу q_B определяется как линейная функция от температуры на границе T_B. Выразим это следующим образом:

$$q_B = f_C + f_P T_B, \qquad (2.50)$$

где f_C и f_P — коэффициенты линейного выражения.

Подобное граничное условие обычно возникает, когда заданы коэффициент теплоотдачи на границе h и температура окружающей среды T_∞. Тогда

$$q_B = h(T_\infty - T_B), \qquad (2.51)$$

следовательно, можно записать

$$f_C = hT_\infty \quad \text{и} \quad f_P = -h. \qquad (2.52)$$

Полезно отметить похожесть выражений (2.41) и (2.50). Как и для S_P, потребуем, чтобы f_P было отрицательным. Как видно из (2.52), это требование легко выполняется при обычных условиях конвективного теплообмена на границе.

Когда плотность теплового потока через границу задана в виде (2.50), необходимый дискретный аналог можно получить, используя выражения (2.46), (2.47) и (2.50). В этом случае имеем

$$a_B T_B = a_I T_I + b, \tag{2.53}$$

где

$$a_I = \frac{k_i}{(\delta x)_i}; \tag{2.54}$$

$$a_B = a_I - S_P \Delta x - f_P; \tag{2.54а}$$

$$b = S_C \Delta x + f_C. \tag{2.54б}$$

Так как мы потребовали, чтобы $S_P \le 0$ и $f_P \le 0$, члены $-S_P \Delta x$ и $-f_P$ дают положительные вклады в a_B. Дискретные аналоги для граничных контрольных объемов (2.48) и (2.53) подобны обычным дискретным аналогам (2.42), за исключением того, что в граничных уравнениях T_B связано только с T_I.

Граничное условие в виде заданной плотности теплового потока q_B может быть рассмотрено в качестве специального случая (2.50). Если f_C положить равным q_B, а f_P — равным нулю, то выражения (2.53)—(2.54б) могут быть также использованы для реализации заданной плотности теплового потока. Что делать, когда q_B есть нелинейная функция от T_B? Такой случай тоже может быть учтен, и мы обсудим это позднее (см. п. 2.5.5).

С учетом вышеизложенного можно сделать следующий вывод. Когда на границе задана температура, какого-либо уравнения для половинных контрольных объемов не требуется. Если же задана плотность теплового потока q_B (или постоянная, или зависящая от температуры T_B), то общая система алгебраических уравнений включает в себя дополнительные уравнения типа (2.48) или (2.53) для определения переменной температуры T_B.

Уравнения для половинных контрольных объемов могут быть полезными, даже когда температура T_B задана. В этом случае *после* определения значений температуры в расчетных точках мы можем использовать выражения (2.46) и (2.47) для нахождения неизвестной плотности теплового потока q_B в виде

$$q_B = \frac{k_i}{(\delta x)_i} (T_B - T_I) - (S_C + S_P T_B) \Delta x. \tag{2.55}$$

Будет интересно применить эту формулу для решения простого примера, рассмотренного в § 2.3, и получить плотности тепловых

потоков через границы. Тогда мы сможем проверить тепловой баланс во всей расчетной области, сравнив, совпадает ли потеря тепла (в единицу времени) за счет потока через границы с полной мощностью генерации тепла. Если вы хотите это осуществить, то должны получить следующие результаты: потеря тепла (в единицу времени) на левой границе равна 8; на правой — 2, т.е. полная потеря тепла равна 10. Это в точности совпадает со значением SL, которое равно 10, что соответствует полной мощности генерации тепла в стержне длиной L с единичной площадью поперечного сечения. В этой простой задаче численные значения плотностей тепловых потоков через границы полностью согласуются со значениями, полученными дифференцированием точного решения для распределения температуры, заданного в виде (2.29).

2.4.4. Решение системы алгебраических уравнений

Дискретные аналоги в виде (2.42) для внутренних расчетных точек и в виде (2.53) для граничных расчетных точек могут быть одновременно решены как система алгебраических уравнений. Мы уже встречались с таким решением в простой задаче (см. § 2.3). Построим эту процедуру в виде общего алгоритма решения. Так как дискретные аналоги имеют особую и простую форму, они могут быть решены очень эффективным алгоритмом, известным как TDMA[1] (**Tri**-**D**iagonal-**M**atrix **A**lgorithm). Название TDMA происходит из свойства матрицы коэффициентов дискретных аналогов: в этой матрице ненулевые элементы располагаются только на трех смежных диагоналях.

Пронумеруем расчетные точки, как показано на рис. 2.9. Здесь точки *1* и N граничные, а *2*, *3*, ..., $N-1$ — внутренние. Дискретные аналоги могут быть записаны в виде

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i. \tag{2.56}$$

Для $i = 2, 3, \ldots, N-1$ уравнение (2.56) соответствует обычному дискретному аналогу (2.42), при этом коэффициенты a_i, b_i, c_i и d_i, очевидно, соответствуют коэффициентам a_P, a_E, a_W и b. Для граничных точек *1* и N мы должны записать уравнения в виде (2.53):

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + d_1; \tag{2.57}$$

$$a_N T_N = c_N T_{N-1} + d_N, \tag{2.58}$$

[1] В отечественной литературе этот метод называется *методом прогонки* (*Прим. ред.*).

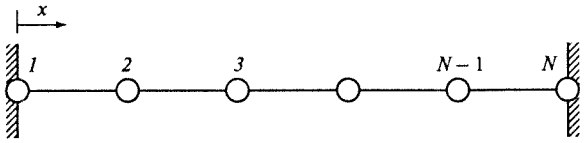


Рис. 2.9. Нумерация расчетных точек

где a_1, b_1 и d_1 — то же, что и a_B, a_I и b в уравнении (2.53), подобное соответствие имеет место и для a_N, b_N и d_N.

Так как граничные точки имеют только по одной соседней точке, то выражения (2.57) и (2.58) могут рассматриваться в виде (2.56), если положить

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad b_N = 0. \tag{2.59}$$

Строго говоря, граничные уравнения (2.57) и (2.58) получаются из (2.53), когда в каком-либо виде задана плотность потока тепла через границу. Что же делать, когда на границе задана температура? Можно также использовать выражения (2.57) и (2.58) для температур на границах, но определить коэффициенты в них таким образом, чтобы получить заданное значение, т.е., если задано T_1, положить

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0 \quad \text{и} \quad d_1 = T_1. \tag{2.60}$$

Аналогично следует поступить, если задано значение T_N. Целесообразно всегда рассматривать T_1 и T_N в качестве неизвестных (даже когда их значения заданы), что позволяет использовать N уравнений для N неизвестных при любых комбинациях граничных условий.

Алгоритм TDMA начинается с записи уравнения (2.57) в виде

$$T_1 = P_1 T_2 + Q_1, \tag{2.61}$$

где

$$P_1 = b_1/a_1 \text{ и } Q_1 = d_1/a_1. \tag{2.62}$$

Соотношение (2.61) подставляется в (2.56) для $i = 2$. В результате получается, что T_2 выражается через T_3. Продолжая процесс последовательной подстановки (или прямой прогонки), можно выразить T_i через T_{i+1}:

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i, \tag{2.63}$$

где P_i и Q_i — новые коэффициенты, появившиеся в процессе подстановки.

Представим, что мы находимся на стадии процесса подстановок, когда только что выразили T_{i-1} в виде

$$T_{i-1} = P_{i-1}T_i + Q_{i-1}. \tag{2.64}$$

Если подставить (2.64) в (2.56), то получится выражение

$$a_iT_i = b_iT_{i+1} + c_i(P_{i-1}T_i + Q_{i-1}) + d_i, \tag{2.65}$$

которое может быть переписано в форме (2.63). Таким образом, можно получить формулы для P_i и Q_i:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}}; \tag{2.66}$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}}. \tag{2.66а}$$

Кстати заметим, что знаменатели в выражениях (2.66) и (2.66а) одинаковые.

Выражения (2.66) и (2.66а) рекурсивные, т.е. P_i и Q_i зависят от значений P_{i-1} и Q_{i-1}. Такой рекурсивный процесс нуждается в отправной точке. Она обеспечивается выражениями (2.62), которые не рекурсивны.

Перейдя к вычислению P_N и Q_N, можно обнаружить, что, так как $b_N = 0$, P_N тоже будет равно нулю (см. (2.59) и (2.66)). В результате согласно (2.63) T_N будет равно Q_N. Рассчитав таким образом значение T_N, можно начать процесс обратной прогонки с использованием формулы (2.63) для получения T_{N-1}, T_{N-2}, ..., T_2 и T_1.

Итоговый алгоритм решения. Алгоритм TDMA может быть разбит на следующие шаги.

1. Вычисляем P_1 и Q_1 по выражениям (2.62).

2. Получаем P_i и Q_i для $i = 2, 3, \ldots, N$, используя рекурсивные выражения (2.66) и (2.66а).

3. Полагаем $T_N = Q_N$.

4. Подставляем найденные значения величин в формулу (2.63) для $i = N-1, N-2, \ldots, 1$ и определяем T_{N-1}, T_{N-2}, ..., T_1.

Такой метод прямой прогонки доступен только для одномерных задач. Однако, как мы увидим позднее (см. § 5.6), алгоритм TDMA играет важную роль и в решении двумерных уравнений.

2.4.5. Типовая задача

Применим разработанную методику к одномерной задаче теплопроводности ребра, приведенной на рис. 2.6. Эта задача позволит получить опыт практически во всех аспектах вычислительной процедуры и оценить возможности численного метода.

Задача описывается уравнением (2.39) и граничными условиями

$$T = T_A \text{ при } x = 0, \tag{2.67}$$

$$q_B = 0 \quad \text{(теплоизолированная граница)} \quad \text{при } x = L. \tag{2.67а}$$

Будем использовать следующие заданные величины:

$$T_A = 200;\ T_\infty = 100;\ k = 50;\ L = 5;\ h = 12;\ P = 6;\ A = 3. \tag{2.68}$$

Здесь, как и в § 2.3, для физических величин не приведены единицы измерения. Подразумевается, что значения даны в произвольной согласованной системе единиц. На практике, конечно, будет удобнее пользоваться конкретной системой единиц и присваивать физическим параметрам фактические значения.

Дискретные аналоги. Снова будем использовать простую равномерную сетку, изображенную на рис. 2.3, для которой $\delta x = 1$. В этом случае обычные контрольные объемы имеют ширину $\Delta x = 1$, а половинные — $\Delta x = 0{,}5$.

Для контрольных объемов, содержащих расчетные точки *2—5*, применяется уравнение (2.42). Величины S_C и S_P для источникового члена в этой задаче заданы в виде (2.44) и (2.45). Подставляя в эти формулы численные значения (см. (2.68)), получаем

$$S_C = 2400 \text{ и } S_P = -24. \tag{2.69}$$

Затем можно будет вычислить коэффициенты в уравнении (2.42) согласно выражениям (2.43)—(2.43в). Таким образом, для четырех внутренних контрольных объемов будем иметь:

$$a_E = 50;\ a_W = 50;\ a_P = 124;\ b = 2400. \tag{2.70}$$

Так как температура на границе T_6 неизвестна, нужно записать уравнение для половинного контрольного объема на правой границе. Это уравнение имеет вид (2.48). В граничном условии (2.67а) плотность теплового потока через границу q_B задана равной нулю. Численные значения коэффициентов в этом уравнении для половинного контрольного объема могут быть получены по (2.49)—(2.49б):

$$a_I = 50;\ a_B = 62;\ b = 1200. \tag{2.71}$$

Используя (2.70), (2.71), можно записать полную систему дискретных аналогов в виде:

$$T_1 = 200; \tag{2.72}$$

$$124T_2 = 50T_3 + 50T_1 + 2400; \tag{2.72а}$$

$$124T_3 = 50T_4 + 50T_2 + 2400; \tag{2.72б}$$

$$124T_4 = 50T_5 + 50T_3 + 2400; \tag{2.72в}$$

$$124T_5 = 50T_6 + 50T_4 + 2400; \tag{2.72г}$$

$$62T_6 = 50T_5 + 1200. \tag{2.72д}$$

Решение уравнений. Для решения уравнений можем применить алгоритм прогонки (см. п. 2.4.4). Значения коэффициентов a_i, b_i, c_i и d_i берутся из (2.72)—(2.72д). Остальные величины рассчитываются согласно алгоритму. Ниже приведены полученные результаты:

Показатель	Значение i					
	1	2	3	4	5	6
a_i	1	124	124	124	124	62
b_i	0	50	50	50	50	0
c_i	0	50	50	50	50	50
d_i	200	2400	2400	2400	2400	1200
P_i	0	0,4032	0,4815	0,5004	0,5051	0
Q_i	200	100	71,26	59,68	54,39	106,68
T_i	200	150,84	126,09	113,86	108,28	106,68

Сравнение с точным решением. Для задачи о теплопроводности ребра уравнение (2.39) с граничными условиями (2.67), (2.67а) может быть решено аналитически. Решение выглядит следующим образом:

$$\frac{T - T_\infty}{T_A - T_\infty} = \frac{\cosh\,[m(L-x)]}{\cosh\,(mL)}, \tag{2.73}$$

где

$$m^2 = hP/(kA). \tag{2.74}$$

Сравним наше численное решение со значениями T, полученными в расчетных точках по (2.73). Это сравнение приведено ниже:

Показатель	Значение i					
	1	2	3	4	5	6
$T_{\text{числ}}$	200	150,84	126,09	113,86	108,28	106,68
$T_{\text{точ}}$	200	150,16	125,38	113,28	107,82	106,25

Видно, что численное решение очень хорошо согласуется с точным. Это особенно впечатляет, если отметить, что для его получения использовано только несколько расчетных точек. При желании можно продолжить исследование этого решения, увеличивая число расчетных точек. В результате обнаружится, что численное решение приближается к точному.

Плотность теплового потока через границу. Плотность теплового потока q_A у основания ребра ($x = 0$) может быть вычислена из уравнения (2.55) для половинного контрольного объема у этой границы. Используя заданные в этой задаче величины, получаем

$$q_{A,\text{числ}} = 3657{,}9. \tag{2.75}$$

Плотность граничного теплового потока q_A, найденная из точного решения (2.73), имеет вид

$$q_A = (hPk/A)^{1/2}(T_A - T_\infty)\,\text{tgh}(mL). \tag{2.76}$$

Подставляя известные данные, получаем

$$q_{A,\text{точ}} = 3457{,}3. \tag{2.77}$$

Снова видно хорошее совпадение численного и точного решений.

Наконец, можно проверить общий тепловой баланс для нашего численного решения. Подсчитаем источниковый член $(S_C + S_P T_P)\Delta x$ для каждого контрольного объема (включая и два половинных контрольных объема). Сумма всех этих членов должна равняться плотности теплового потока q_A у основания ребра. Таким образом, можно показать, что, даже если используется всего несколько расчетных точек, тепловой баланс в точности выполняется (с учетом погрешностей округления калькулятора или компьютера).

Важное отступление. Обсудим особую роль температуры в задачах теплопроводности. В большинстве случаев температура проявляет себя как некоторый потенциал, т.е. поток тепла вызывается *разностью* температур, а само значение температуры не оказывает на него влияния. В рассмотренной задаче вместо $T_A = 200$ и $T_\infty = 100$ мы могли бы использовать или $T_A = 250$ и $T_\infty = 150$, или $T_A = 100$ и $T_\infty = 0$, или $T_A = 2000$ и $T_\infty = 1900$. Тогда наше решение для T просто отличалось бы на постоянное значение. Задача определяется именно разностью температур $T_A - T_\infty$, а не абсолютными значениями T_A и T_∞.

Бесспорно, что *значение* температуры влияет на такие физические свойства, как теплопроводность и теплоемкость. Но для многих задач это влияние может рассматриваться как эффект второго порядка малости. Процессы теплопроводности да и конвекции в первую очередь определяются *разностями* температур, а не конкретными

их значениями. Ситуация изменяется радикальным образом, когда рассматривается тепловое излучение. Плотность потока излучения пропорциональна *абсолютной* температуре в четвертой степени. В этом случае очевидно, что температура играет особую роль, и ее значения не могут быть изменены на произвольную константу.

С учетом этого обсудим некоторую часто совершаемую ошибку. После получения численных и точных значений температуры желательно подсчитать относительную погрешность, которая возникает при численном решении. Можно было бы определить относительную погрешность как $(T_{\text{числ}} - T_{\text{точ}})/T_{\text{точ}}$. Но ошибочно находить относительную погрешность таким образом в задачах теплопроводности и конвекции, так как в этом случае абсолютная температура $T_{\text{точ}}$, оказывается необоснованно важной характеристикой, хотя она может быть уменьшена или увеличена на произвольную константу. Погрешность будет гораздо меньше, если мы используем $T_A = 2000$ и $T_\infty = 1900$ вместо $T_A = 200$ и $T_\infty = 100$. Тем не менее мы решаем, по существу, одну и ту же задачу. Погрешность станет огромной, если локальное значение $T_{\text{точ}}$ окажется близким к нулю. Мы должны помнить, что для расчета теплопроводности важны только *разности* температур, а не их абсолютные *значения*. Удовлетворительно определить относительную погрешность по температуре можно в виде $(T_{\text{числ}} - T_{\text{точ}})/(T_A - T_\infty)$. Для данной физической задачи характерной является разность температур $T_A - T_\infty$, поэтому целесообразно оценивать погрешность численного решения по отношению к этой разности. В общем случае удобно найти относительную погрешность в виде $(T_{\text{числ}} - T_{\text{точ}})/(T_{\max} - T_{\min})$, где $T_{\max}$ и $T_{\min}$ — максимальная и минимальная температуры, задаваемые точным решением.

Эти рассуждения о температуре также применимы к таким величинам, как давление, потенциал скорости и электростатический потенциал. Абсолютные значения этих величин могут произвольно меняться, важны только их разности. Однако подобные рассуждения не применимы к другим физическим величинам. Например, при сравнении значений плотностей теплового потока [см. (2.75) и (2.77)] относительная погрешность может быть определена как $(q_{A,\text{числ}} - q_{A,\text{точ}})/q_{A,\text{точ}}$.

2.5. ДАЛЬНЕЙШИЕ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ

Завершив построение основ численного метода для решений одномерных задач теплопроводности, обсудим некоторые дополнительные особенности. Это обеспечит необходимый фундамент для дальнейшей работы с двумерными задачами.

2.5.1. Построение сетки

Как уже отмечалось, расчетные точки на рис. 2.4 не обязательно должны быть расположены на одинаковом расстоянии одна от другой. Хотя равномерная сетка удобна, свои преимущества имеет и неравномерная сетка. В большинстве задач существуют области, где изменения T очень велики. Если увеличить число расчетных точек в этих областях, то можно получить там хорошее разрешение и повысить точность расчетов. В областях, где происходят плавные изменения T, расчетные точки могут быть расположены достаточно редко. Таким образом, неравномерная сетка позволяет располагать заданное число расчетных точек наиболее эффективно. Для определения конкретного распределения расчетных точек в заданной задаче обычно используются знания об особенностях физических процессов, а также некоторые интуитивные представления, почерпнутые из аналитических решений, и опыт, полученный из предварительных численных решений.

2.5.2. Переменная теплопроводность

Достаточно часто встречаются ситуации, когда теплопроводность k меняется в зависимости от расстояния x. Это может происходить из-за того, что тело состоит из различных материалов или теплопроводность зависит от температуры. В большинстве случаев не имеется формулы для зависимости k от x, известны лишь дискретные значения k в расчетных точках. Тогда наша задача заключается в том, чтобы получить коэффициенты a_E и a_W в уравнении (2.42) через теплопроводности k_W, k_P, k_E в расчетных точках. Для этой цели можно применить различные интерполяции. Методика, которая будет использоваться в этой книге, основана на простой физической концепции и имеет множество преимуществ. Подробное обсуждение этой темы можно найти в [5, 6]. Здесь будет дана только рекомендуемая формулировка.

Если теплопроводность задана только в расчетной точке, то разумно предположить, что ее значение остается постоянным по всему контрольному объему, окружающему эту точку. Другими словами, каждый контрольный объем заполнен материалом с постоянной теплопроводностью (соответствующей ее значению в расчетной точке).

Рассмотрим грань e, показанную на рис. 2.10. Расстояния от этой грани до точек P и E обозначим через $(\delta x)_{e-}$ и $(\delta x)_{e+}$, которые в общем случае могут быть не равны. Как было показано ранее, коэффициент a_E

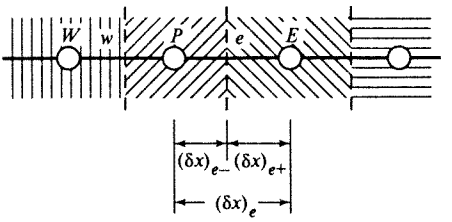


Рис. 2.10. Расстояния от грани *e* до расчетных точек

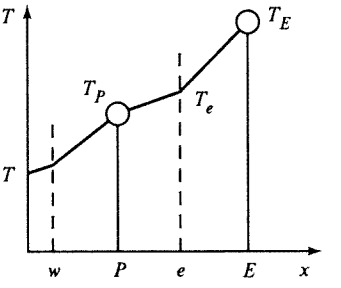


Рис. 2.11. Составной профиль между расчетными точками

[см. (2.43)] соответствует *проводимости* материала между точками P и E. Проводимость — это величина, обратная сопротивлению. *Сопротивление* от точки P до точки E есть сумма сопротивлений отрезков Pe и eE. Таким образом,

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} = \left(\frac{(\delta x)_{e-}}{k_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{k_E} \right)^{-1}. \qquad (2.78)$$

Аналогичная формула может быть получена для a_W.

Одно из преимуществ этой формулы заключается в том, что она справедлива (без применения сгущения сетки или другой специальной техники) в случае больших разрывов в значениях теплопроводности на грани контрольного объема. Таким образом, расчетная область может содержать участки как с высокой теплопроводностью, так и не проводящие тепло.

Интересно рассмотреть еще одну особенность при выводе формулы (2.78). При получении этой формулы мы заменили кусочно-линейный профиль, представленный на рис. 2.5, профилем, состоящим из двух частей и показанным на рис. 2.11. В данном случае зависимость T от x между точками P и E является не просто прямой линией. Так как теплопроводности k_P и k_E различны, то существует излом этой линии на грани e контрольного объема. Плотность теплового потока может быть определена как

$$q_e = \frac{k_P}{(\delta x)_{e-}} (T_P - T_e) = \frac{k_E}{(\delta x)_{e+}} (T_e - T_E). \qquad (2.79)$$

Исключив T_e из этого выражения, получим

$$q_e = \left[\frac{(\delta x)_{e-}}{k_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{k_E} \right]^{-1} (T_P - T_E), \qquad (2.80)$$

откуда напрямую следует формула (2.78).

Из (2.79) можем также вывести формулу для T_e:

$$T_e = \frac{F_P T_P + F_E T_E}{F_P + F_E}, \tag{2.81}$$

где

$$F_P = \frac{k_P}{(\delta x)_{e-}}; \quad F_E = \frac{k_E}{(\delta x)_{e+}}. \tag{2.82}$$

В вычислительной схеме мы получаем температуры в расчетных точках и обычно не определяем температуры на гранях контрольных объемов. Когда необходимо получить температуру на грани, нужно использовать выражение (2.81).

2.5.3. Нелинейность

В § 2.4 были построены дискретные аналоги как *линейные* алгебраические уравнения, которые были решены по алгоритму, разработанному для линейных уравнений. Однако в задачах теплопроводности довольно часто встречаются *нелинейности*. Например, теплопроводность k может зависеть от температуры или скорость генерации тепла S может быть нелинейной функцией от T. Граничные условия также могут быть нелинейными. В этих случаях коэффициенты a_P, a_E, a_W и b в дискретных аналогах зависят от температуры T. Тогда дискретные аналоги уже не являются действительно линейными алгебраическими уравнениями.

Для решения нелинейных задач используются итерации. Сначала задаются значения температуры в расчетных точках. Принимая их за известное температурное поле, рассчитываются предварительные значения коэффициентов в дискретных аналогах. Затем решаются уравнения и получается новое температурное поле. Рассматривая это поле в качестве лучшей оценки для температуры, пересчитываются коэффициенты и снова решаются уравнения. Этот процесс повторяется до тех пор, пока решение не перестанет изменяться от итерации к итерации. Оно называется сошедшимся решением (на самом деле итерации прекращаются, когда изменение решения от итерации к итерации становится меньше некоторого заданного малого числа. Это условие известно как условие выхода из итераций).

Иногда итерационный процесс не сходится, а приводит к дрейфующему или колеблющемуся решению. Такой процесс называется расходящимся. Конечно, очень важно предотвратить расходимость итерационного процесса. Выше (см. п. 2.4.1) мы отмечали, что коэф-

фициенты в дискретном аналоге должны быть положительными, чтобы обеспечить сходимость. Так, настоятельная рекомендация, состоящая в том, что S_P в выражении для источникового члена (2.41) должно иметь отрицательные значения, является решающей для удачной сходимости процесса. По той же причине необходимо, чтобы коэффициент f_P в граничных условиях (2.50) был меньше нуля. Дальнейшие ограничения, позволяющие избежать расходимость, будут обсуждаться в п. 2.5.6.

Использование итераций позволяет, по крайней мере в принципе, решить любую нелинейную задачу. Хотя мы проходим через серию номинально линейных уравнений, окончательное сошедшееся решение является, в свою очередь, точным решением нелинейной задачи.

2.5.4. Линеаризация источникового члена

Общие соображения. В уравнении (2.41) мы выразили осредненный источниковый член в контрольном объеме как линейную функцию от T_P. Когда источниковый член является нелинейной функцией от температуры, величины S_C и S_P, в свою очередь, также становятся функциями от температуры и должны итерационно пересчитываться. Существует множество способов «линеаризации» источникового члена, т.е. нахождения выражений для S_C и S_P. Рассмотрим тот, который является наиболее желательным. Однако не следует игнорировать и другие способы.

Пусть T_P^* представляет собой текущую оценку для T_P. Это может быть начальное заданное значение или значение, полученное на предыдущей итерации. Если источниковый член S является функцией от T, то можно аппроксимировать эту функцию как

$$\overline{S} = \overline{S}^* + \left(\frac{\mathrm{d}\overline{S}}{\mathrm{d}T}\right)^* (T_P - T_P^*), \tag{2.83}$$

где T_P — неизвестная температура.

Если сравнить это выражение с формулой

$$\overline{S} = S_C + S_P T_P, \tag{2.84}$$

то можно получить

$$S_C = \overline{S}^* - \left(\frac{\mathrm{d}\overline{S}}{\mathrm{d}T}\right)^* T_P^*, \tag{2.85}$$

$$S_P = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}T}\right)^* . \qquad (2.85a)$$

Будем использовать подобную практику только тогда, когда это не приводит к значениям $S_P < 0$. В противном случае коэффициент S_P должен быть положен равным нулю, а источниковый член должен целиком выражаться через S_C.

Рассмотрим несколько примеров, чтобы прояснить эту ситуацию.

Примеры. Применим эти положения к некоторым специальным случаям.

1. $S = 7 - 3T$. Очевидно, что здесь $S_C = 7$, $S_P = -3$.

2. $S = 6 + 5T$. Если возьмем $S_C = 6$ и $S_P = 5$, получим положительное значение S_P, что нежелательно. Поэтому используем $S_C = 6 + 5T_P^*$ и $S_P = 0$. Конечно S_C необходимо будет итерационно пересчитывать.

3. $S = 2 - 3T^3$. Воспользуемся соотношениями (2.85) и (2.85а). В результате получим $S_C = 2 + 6(T_P^*)^3$ и $S_P = -9(T_P^*)^2$. Так как S_P всегда будет меньше нуля, это приемлемая линеаризация.

4. $S = 2 + 3T^3$. Применение выражения (2.85а) здесь привело бы к положительному значению S_P. Поэтому используем $S_C = 2 + 3T_P^*$ и $S_P = 0$.

Заключительные замечания. Линеаризация является очень полезной процедурой для представления источникового члена, зависящего от температуры. Она позволяет предугадывать изменения источникового члена, соответствующие изменениям температуры. Однако, чтобы избежать возможной расходимости, мы не используем формулировки, которые могут привести к положительным значениям S_P. Существует большая свобода в выборе конкретных формул для коэффициентов S_C и S_P, обеспечивающих условие $S_P < 0$ и соответствие (при сходимости итераций) рассчитанного по (2.84) источникового члена заданной функции $S = f(T)$.

Можно протестировать различные альтернативные записи S_C и S_P и сравнить соответствующие скорости сходимости. В итоге мы обнаружим, что формулировка, основанная на (2.85) и (2.85а), сходится быстрее всего.

Выражение (2.84) используется не только для линеаризации «истинных» источниковых членов, оно оказывается полезным при реализации областей нерегулярной геометрической формы. Это нестандартное использование источникового члена будет описано ниже (см. § 7.6).

2.5.5. Линеаризация граничных условий

При реализации граничных условий мы выражали плотность теплового потока через границу q_B [см. (2.50)] в виде линейной функции от температуры на границе T_B. Коэффициенты f_C и f_P в (2.50) играют ту же роль, что и коэффициенты S_C, S_P в (2.41). Поэтому рассуждения о линеаризации источникового члена также применимы и к линеаризации плотности теплового потока на границе. Когда q_B является нелинейной функцией от T_B, коэффициенты f_C и f_P выражаются через T_B^* (текущую оценку T_B) и должны быть пересчитаны на каждой итерации. Коэффициент f_P при этом должен быть меньше или равен нулю.

Нелинейную зависимость $q_B = f(T_B)$ будем линеаризовывать как

$$q_B = q_B^* + \left(\frac{\mathrm{d}q_B}{\mathrm{d}T_B}\right)^* (T_B - T_B^*). \tag{2.86}$$

Сравнивая это выражение с (2.50), получаем

$$f_C = q_B^* - \left(\frac{\mathrm{d}q_B}{\mathrm{d}T_B}\right)^* T_B^*, \tag{2.87}$$

$$f_P = \left(\frac{\mathrm{d}q_B}{\mathrm{d}T_B}\right)^*. \tag{2.87a}$$

Очевидно сходство этих выражений с выражениями (2.85) и (2.85а). Еще раз следует отметить, что мы не должны использовать (2.87) и (2.87а), если это приводит к положительному значению f_P (такие физические ситуации чрезвычайно редки; практически всегда естественным образом будут получаться отрицательные значения f_P).

В качестве примера рассмотрим следующее выражение для плотности теплового потока на границе:

$$q_B = 5(T_\infty - T_B) + 2(T_\infty^4 - T_B^4). \tag{2.88}$$

Здесь два слагаемых описывают конвективный теплоперенос и излучение тепла соответственно. С использованием (2.87) и (2.87а) получим:

$$f_C = 5T_\infty + 2T_\infty^4 + 6(T_B^*)^4; \tag{2.89}$$

$$f_P = -(5 + 8(T_B^*)^3). \tag{2.89a}$$

Если T рассматривать как абсолютную температуру (что существенно при наличии излучения), то T_B всегда будет положительной. Поэтому при расчете по (2.89а) получаем отрицательное значение f_P. Коэффициенты f_C и f_P, заданные в виде (2.89) и (2.89а), должны пересчитываться на каждой итерации.

2.5.6. Релаксации

При итерационном решении нелинейной задачи поле температуры меняется после каждой итерации, поэтому коэффициенты в дискретных уравнениях пересчитываются. Если от итерации к итерации эти коэффициенты меняются значительно, мы рискуем получить расходящийся процесс. Поэтому для существенно нелинейной задачи желательно замедлить изменение температуры от итерации к итерации. Это достигается с помощью релаксации. Использование релаксаций не влияет на поле температуры в конечном сошедшемся решении, оно оказывает влияние только на сам процесс сходимости.

Существует множество различных способов введения релаксации. Обсудим только частный случай. Для начала рассмотрим уравнение (2.36) без источникового члена:

$$(a_E + a_W)T_P = a_E T_E + a_W T_W. \tag{2.90}$$

Обобщив эту запись согласно (2.38), получим

$$(\sum a_{nb})T_P = \sum a_{nb} T_{nb}. \tag{2.91}$$

Из этого уравнения следует, что T_P является средней от значений соседних температур, взятых с некоторыми весами. Если эту величину обозначим через $\widetilde{T}$, получим

$$\widetilde{T}_P = \frac{\sum a_{nb} T_{nb}}{\sum a_{nb}}. \tag{2.92}$$

Для замедления изменений T_P от итерации к итерации предположим, что новое значение T_P будет комбинацией $\widetilde{T}_P$ и значения T_P^*, взятого с предыдущей итерации. Таким образом, имеем

$$T_P = \alpha \widetilde{T}_P + (1 - \alpha) T_P^*, \tag{2.93}$$

где α — коэффициент релаксации, $0 \le \alpha \le 1$.

Подставив (2.92) в (2.93) и сделав преобразования, получим

$$(\sum a_{nb} + i)T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + i T_P^*, \tag{2.94}$$

где i — так называемая инерция, заданная в виде

$$i = \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum a_{nb}. \qquad (2.95)$$

Этот способ введения релаксации может быть обобщен на случай полного дискретного аналога (2.38) с источниковыми членами и другими усложнениями. В дальнейшем будем вводить релаксацию заменой (2.38) на выражение

$$(a_P + i)T_P = \sum a_{nb}T_{nb} + b + iT_P^*, \qquad (2.96)$$

где инерция i задана в виде (2.95).

Следует отметить, что введение инерции не меняет сошедшегося решения. Когда оно достигается, то $T_P = T_P^*$ и выполнение уравнения (2.96) влечет за собой выполнение первоначального уравнения (2.38).

Инерция равна нулю, когда $\alpha = 1$. Для меньших значений α роль инерции заключается в поддержании нового T_P близким к T_P^*. При α стремящемся к нулю T_P стремится к T_P^*. Конечно, коэффициент α всегда должен быть отличен от нуля.

Каково наилучшее значение α для заданной задачи? К сожалению, на этот счет не существует каких-либо общих правил. Оптимальное значение α зависит от природы нелинейности, числа расчетных точек, граничных условий и других факторов. Вам придется находить подходящее значение α с помощью предварительных расчетов для заданной задачи. Но все же приятно осознавать, что для нелинейных задач мы можем справиться с возможной расходимостью посредством использования релаксаций.

Все эти рассуждения относятся к релаксации, налагаемой на зависимую переменную T. В дополнение к этому можно налагать релаксации и на вспомогательные величины, такие как теплопроводность k. Если k зависит от T, то на каждой итерации можно использовать

$$k = \alpha k_{\text{н}} + (1 - \alpha)k_{\text{ст}}, \qquad (2.97)$$

где $k_{\text{н}}$ — теплопроводность, полученная при новой температуре; $k_{\text{ст}}$ — теплопроводность при температуре, взятой с предыдущей итерации; α — коэффициент релаксации, который не обязательно имеет то же значение, что в (2.95).

Точно так же можно налагать релаксации на источниковые члены, значения величин на границах и др. Нашей целью является достижение контролируемого и постепенного приближения решения к конечному сошедшемуся решению без больших скачков и колебаний, которые могут возникать без релаксаций.

2.5.7. Построение контрольных объемов

Получая дискретный аналог (см. п. 2.4.1), мы не фиксировали положение граней контрольного объема w и e по отношению к расположению расчетных точек W, P и E. Рассматривая пример в п. 2.4.5, предполагали, что грани контрольных объемов лежат точно посередине между расчетными точками. Это один из возможных способов построения контрольных объемов. Назовем его способом А. Существует и другой способ, который назовем способом В. Он будет использоваться в дальнейшем в книге и в вычислительной программе CONDUCT. Опишем эти два способа. Для начальных исследований одномерных задач можно использовать способ А. Однако вся дальнейшая работа с двумерными задачами будет связана со способом В.

Особенности способа А. На рис. 2.12 показано положение граней контрольных объемов при использовании способа А. При этом способе разбиения сначала расставляются расчетные точки в области на нужном расстоянии одна от другой, не обязательно одинаковом для всех точек. Расчетные точки помещаются также на каждую границу. Затем располагаются грани контрольных объемов точно посередине между расчетными точками. Получаются обычные контрольные объемы у внутренних точек и половинные у границ области. При неравномерной сетке, несмотря на то что каждая грань располагается всегда посередине между точками, сами точки не обязательно лежат в центре соответствующих контрольных объемов.

Особенности способа В. В общем случае задачи теплопроводности могут допускать разрывы в распределении теплопроводности или скорости генерации тепла в одном месте или более внутри расчетной области. В рамках вычислительного метода предполагается, что эти величины постоянны в каждом контрольном объеме и допускаются разрывы на гранях (как показано на рис. 2.10 для теплопроводности). Поэтому важно, чтобы грани контрольных объемов располагались в местах разрывов. В рамках способа А, так как сначала расставляются расчетные точки, часто сложно быть уверенным в том, что получившиеся грани контрольных объемов попадут в нужные места. Способ В разработан для устранения этого недостатка.

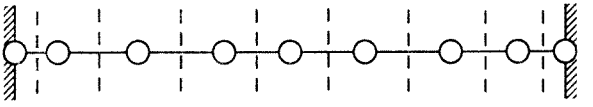


Рис. 2.12. Расположение расчетных точек и граней контрольных объемов при использовании способа А

При применении способа В сначала разбивают всю расчетную область на необходимое число контрольных объемов, которые могут иметь различные размеры. При этом мы точно уверены, что разрывы в распределении теплопроводности или скорости генерации тепла совпадут с гранями контрольных объемов. Затем помещают расчетные точки в геометрический центр каждого контрольного объема. На каждой границе также размещают по расчетной точке. Такое разбиение показано на рис. 2.13.

Для неравномерной сетки, построенной по способу В, грани контрольных объемов не обязательно лежат посередине между расчетными точками, но каждая точка расположена всегда в центре соответствующего контрольного объема. Все контрольные объемы, полученные при использовании способа В, являются обычными, не возникает никаких половинных контрольных объемов. Это приводит к дополнительным удобствам при написании программы.

Однако вы можете удивиться: как же мы собираемся реализовывать граничные условия без половинных контрольных объемов? Оказывается, что в способе В половинные контрольные объемы также могут быть представлены, но в предельной форме. На рис. 2.14, *а* показан половинный контрольный объем, подобный приведенному ранее (см. рис. 2.8). В общем случае грань *i* может располагаться где угодно между точками *B* и *I* (посредством изменения толщины половинного контрольного объема Δx). Как показано на рис. 2.14, *б*, в способе В подразумевается, что грань *i* расположена в точке *B* и значение Δx равно нулю. Таким образом, в способе В имеются половинные контрольные объемы нулевой толщины. При такой

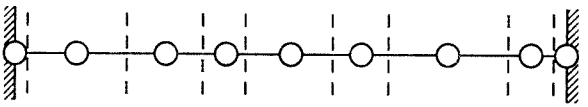


Рис. 2.13. Расположение расчетных точек и граней контрольных объемов при использовании способа В

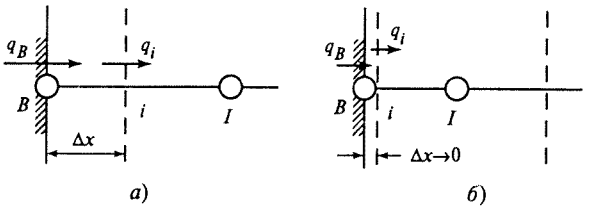


Рис. 2.14. Половинный контрольный объем (*а*) и половинный контрольный объем нулевой толщины для способа В (*б*)

интерпретации все выражения, приведенные в п. 2.4.3, справедливы и для способа В. Необходимо только принять $\Delta x = 0$ в этих выражениях.

Требует комментария еще один аспект, касающийся разбиения, изображенного на рис. 2.14. Плотность теплового потока q_i рассчитывается из предположения о линейном профиле температуры между точками B и I. Эта аппроксимация кажется разумной, когда грань i расположена между точками B и I. Когда же грань i совпадает с точкой B, то плотность теплового потока q_i (которая теперь равна q_B) все еще рассчитывается исходя из линейного профиля температуры между точками B и I.

Такая односторонняя формула для вычисления q_i снижает точность результатов, полученных с помощью способа В. По этой причине в п. 5.5.2 предложена аппроксимация для q_i на границе более высокого порядка. До тех пор можете или не обращать внимания на этот недостаток способа В, или просто использовать способ А для одномерных задач.

2.6. Нестационарная теплопроводность

Завершив рассмотрение стационарной одномерной теплопроводности, расширим метод на случай нестационарных задач.

Введение. Нестационарная одномерная теплопроводность описывается дифференциальным уравнением вида

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S, \qquad (2.98)$$

где правая часть подобна левой части уравнения (2.1). Величины ρ и c соответствуют плотности и массовой теплоемкости материала, следовательно, произведение ρc есть объемная теплоемкость. В этом случае возникают две независимые переменные: координата x и время t. В нестационарной ситуации известно начальное распределение температуры при $t = 0$. Задача заключается в отыскании распределений температуры в последующие моменты времени.

При численном решении нестационарных задач время также становится дискретной величиной. Мы рассматриваем большое число шагов по времени и ищем поле температуры при различных дискретных значениях t, которые соответствуют завершению каждого шага по времени. Узнав, как получить решение для одного шага по времени, можно повторить этот процесс для любого числа шагов. Поэтому основная задача при решении уравнения (2.98) может быть сформулирована так: задано распределение температуры в момент времени t, найти поле температуры в момент времени $t + \Delta t$, где Δt — шаг по времени.

Метод дискретизации. Существует множество методов получения дискретного аналога из уравнения (2.98). Три из них следующие: явный, Кранка—Николсона и полностью неявный. Не будем детально их рассматривать. Они приведены во многих книгах по численным методам. Кроме того, можно обратиться к [6], где они подробно описаны в контексте метода контрольного объема. В представленной книге будет использоваться только полностью неявный метод, так как он единственный (среди трех упомянутых), который позволяет использовать любые значения Δt, не получая физически нереальных результатов. Даже метод Кранка—Николсона, который часто описывается как безусловно устойчивый, может демонстрировать нефизичное поведение, когда Δt превышает некоторое значение (за более подробной информацией по этой теме можно обратиться к [6, 9]). Действительно, для малых значений Δt метод Кранка—Николсона может быть более точным, чем полностью неявный. Однако для наших целей более важно гарантированное получение реалистичных результатов при любых значениях Δt.

Дискретный аналог. Пусть T_P^0 обозначает известное значение T_P в момент времени t. Величина T_P (без верхнего индекса) соответствует неизвестной температуре в момент времени $t + \Delta t$. Если рассматривать температуру T_P в качестве характерной для всего контрольного объема вокруг точки P, то левый член уравнения (2.98) может быть проинтегрирован по контрольному объему:

$$\int_w^e \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\, dx = a_P^0 (T_P - T_P^0), \tag{2.99}$$

где

$$a_P^0 = \frac{(\rho c)_P \Delta x}{\Delta t}. \tag{2.100}$$

Остальные компоненты дискретного аналога могут быть взяты из пп. 2.4.1 и 2.4.2. В результате получим

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{2.101}$$

где

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e}; \tag{2.102}$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w}; \tag{2.102а}$$

$$a_P^0 = \frac{(\rho c)_P \Delta x}{\Delta t}; \tag{2.102б}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_P^0 - S_P\Delta x; \qquad (2.102в)$$

$$b = S_C\Delta x + a_P^0 T_P^0. \qquad (2.102г)$$

Интересно отметить, что если $\Delta t \to \infty$, то $a_P^0 \to 0$ и в результате формулы (2.102)—(2.102г) превращаются в формулы (2.43)—(2.43в).

При выводе уравнения (2.101) полностью неявный метод заключался в использовании неизвестных температур в момент времени $t + \Delta t$ для аппроксимации плотности теплового потока на гранях контрольного объема и источникового члена, зависящего от температуры ($S_C + S_P T_P$). Другими словами, новые (неизвестные) значения температуры превалируют в течение шага по времени.

Другие детали. Все другие детали, рассмотренные в § 2.4 и 2.5, напрямую применимы и к нестационарной задаче. Поэтому представление граничных условий, переменной теплопроводности, решение алгебраических уравнений и другие операции проводятся аналогично.

На самом деле существует только одна дополнительная особенность дискретных аналогов в нестационарной задаче — это присутствие коэффициента a_P^0. Поэтому удобно написать вычислительную программу, основанную на нестационарных уравнениях, и использовать ее как для стационарных, так и для нестационарных задач. Когда желательно применить программу к стационарной задаче, необходимо взять шаг по времени Δt равным очень большому числу (таким образом делая a_P^0 почти нулевым).

2.7. ЗАДАЧИ

2.1. Рассмотрите случай стационарной одномерной теплопроводности. В области длиной 2 на равном расстоянии расположены три расчетные точки (рис. 2.15). Теплопроводность k и источниковой член S имеют постоянные значения во всей области: $k = 5$, $S = 150$. Температура $T_1 = 100$, а в расчетной точке *3* тепло уходит в окружающую среду, имеющую температуру $T_\infty = 20$, при этом коэффициент теплоотдачи $h = 15$. Используя способ А, напишите дискретные аналоги для нахождения неизвестных температур T_2 и T_3. На основе полученных значений покажите, что тепловой баланс в точности сохраняется, т.е. выделение тепла во всей области равно потере его на границах.

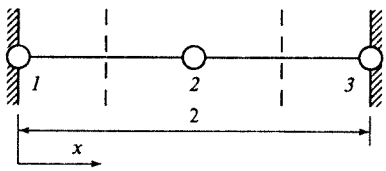


Рис. 2.15. К задаче 2.1

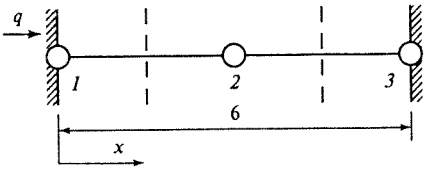


Рис. 2.16. К задаче 2.2

2.2. Рассмотрите случай стационарной одномерной теплопроводности. Стержень длиной 6 имеет постоянную теплопроводность, равную 2,5. Источниковый член задается как $S = 30 - 2T$. Численное решение получается с использованием трех точек, как показано на рис. 2.16. Для случая $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ используйте способ А, чтобы расположить грани контрольных объемов. Граничные условия выберите следующими: плотность теплового потока $q = 15$ при $x = x_1$; теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру $T_\infty = 30$, с коэффициентом теплоотдачи $h = 5$ при $x = x_3$.

Напишите дискретные уравнения для нахождения значений T_1, T_2 и T_3. Решите их с помощью TDMA. С помощью значения T_3 получите плотность теплового потока при $x = x_3$. Рассчитайте значение $S\Delta x$ для каждого контрольного объема. Покажите, что тепловой баланс в точности выполняется.

2.3. Стационарный одномерный процесс теплопроводности в твердом теле с переменной теплопроводностью описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) + S = 0,$$

где $S = 1$. Граничные условия следующие: $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x = 0$ при $x = 0$ и $T = 0$ при $x = 2$. Для трехточечной сетки, показанной на рис. 2.15, значения теплопроводности в расчетных точках задаются как $k = (2 + x)^3$. Запишите дискретные уравнения для точек *1* и *2*. Решите эти уравнения и найдите T_1 и T_2. Напишите уравнение для половинного контрольного объема, содержащего точку *3*. Используйте это уравнение для определения плотности теплового потока через границу при $x = 2$. Покажите, что этот поток равен количеству тепла, выделяющемуся в области в единицу времени.

2.4. Плотность теплового потока на границе задана через граничную температуру в виде $q_B = 10 - 6T_B^3$. Напишите выражения для f_C и f_P, использующиеся в линеаризованной форме для плотности потока через границу.



Рис. 2.17. К задаче 2.5

2.5. Стержень диаметром D и длиной L с теплопроводностью k расположен между горячими поверхностями с температурами T_L и T_R (рис. 2.17). Поверхность стержня охлаждается жидкостью, имеющей температуру T_f, с коэффициентом теплоотдачи h. Используя равномерную сетку, состоящую из трех точек, отстоящих на расстоянии $L/2$ одна от другой, получите дискретное

уравнение для контрольного объема, содержащего центральную точку и построенного с помощью способа А. Подставьте приведенные ниже данные и рассчитайте значение температуры в центральной точке. Используйте уравнения для приграничных контрольных объемов и найдите плотности тепловых потоков на концах стержня. Наконец, покажите, что суммарные потоки на концах стержня равны тепловым потокам, переданным в окружающую жидкость, и выполняется тепловой баланс. Значения параметров в задаче следующие: $T_L = 150$; $T_R = 200$; $T_f = 20$; $k = 120$; $h = 2{,}5$; $D = 0{,}1$; $L = 1$.

2.6. Стационарная одномерная теплопроводность в стержне с переменной площадью поперечного сечения описывается уравнением

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+S=0\,.$$

Получите дискретные уравнения, предполагая, что значения площадей поперечного сечения A на гранях контрольных объемов известны (умножьте уравнение на A и проинтегрируйте по x).

2.7. Одномерная теплопроводность в радиальном направлении в цилиндрической системе координат описывается уравнением

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(kr\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+S=0\,.$$

Получите соответствующие дискретные уравнения (умножьте уравнение на r и затем проинтегрируйте по r). Заметим, что это частный случай ситуации, описанной в задаче 2.6.

2.8. Используя вывод для задачи 2.7, решите следующую задачу об одномерной стационарной теплопроводности в полом цилиндре с постоянными k и S. Внутренняя и внешняя поверхности поддерживаются при постоянных температурах T_i и T_0. Отношение радиусов $r_0/r_i = 4$. Источник задан выражением $Sr_i^2/[k(T_0 - T_i)] = 2{,}5$. Используйте только несколько расчетных точек (например, пять) и сравните с точным решением. Подсчитайте плотность тепловых потоков (если необходимо, можете представить их в безразмерной форме) на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. Покажите, что тепловой баланс в точности выполняется даже при решении на грубой сетке.

2.9. Стационарная одномерная теплопроводность в полой сфере описывается уравнением

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(r^2k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right)+S=0\,,$$

где $k = 2$ и $S = 50$. Граничные условия следующие: на внутренней поверхности ($r = 1$) $T = 100$; на внешней поверхности ($r = 3$) $q = h(T - T_\infty)$, здесь $h = 4$, $T_\infty = 5$.

Используйте трехточечную равномерную расчетную сетку с координатами точек r = 1; 2 и 3. Напишите уравнение для контрольного объема с точкой, имеющей координату r = 2. Рассчитайте числовые значения коэффициентов в этом уравнении. Напишите уравнение для половинного контрольного объема у внешней границы. Решите два этих уравнения и определите температуры при r = 2 и 3.

2.10. В задаче 2.9 найдите плотности тепловых потоков в точках с координатами r = 1 и 3. Рассчитайте также общее количество тепла, выделяемого в теле. На основе этих значений покажите, что тепловой баланс в точности выполняется.

2.11. Для задачи 2.9 напишите дискретное уравнение для контрольного объема с расчетной точкой, имеющей координату r = 2, с источниковым членом S, заданным как $S = 50 - 0{,}3T^{1/2}$. Использовав в качестве текущей оценки температуры в точке значение $T^* = 50$, найдите числовые значения всех коэффициентов дискретного уравнения.

2.12. Сферический объект радиусом R окружен твердым материалом бесконечной протяженности с температурой T_0 на бесконечности. Поверхность сферы имеет температуру T_1. Подсчитайте стационарное распределение температуры вне сферы, использовав пять расчетных точек. Сравните численное решение с точным. Если Q — это суммарная потеря тепла сферой, найдите значение $Q/[kR(T_1 - T_0)]$ из численного решения и сравните с точным значением (поместите внешнюю границу расчетной области на расстояние $4R$ от сферы).

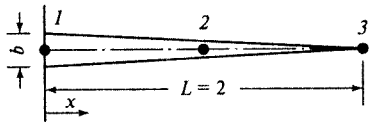


Рис. 2.18. К задаче 2.13

2.13. С помощью равномерной трехточечной сетки решите задачу о одномерной стационарной теплопроводности в треугольном ребре, показанном на рис. 2.18. Ширина основания b = 0,2. Поперечное сечение ребра остается постоянным вдоль направления, перпендикулярного плоскости рисунка. При глубине D в этом направлении и длине dx в направлении координаты x площадь теплообмена с окружающей средой равна $2D\ dx$. Используйте следующие значения параметров: k = 50; T_1 = 120; T_∞ = 20, h = 1 при $x = L$. Напишите дискретные уравнения для T_2 и T_3 (используйте способ А). Решите эти уравнения и найдите значение температуры острого конца ребра T_3.

2.14. Для задачи 2.13 найдите тепловой поток в основании ребра. Затем убедитесь в том, что он равен тепловому потоку в окружающую среду со всей поверхности ребра.

Глава 3

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Так как книга посвящена моделированию явлений, подобных теплопроводности, приведем сначала дифференциальное уравнение теплопроводности, а затем обобщим его для аналогичных процессов. При этом подразумевается, что подробный вывод таких уравнений известен из других источников. Наша цель заключается в том, чтобы получить и понять уравнения, необходимые для построения численного метода и соответствующей вычислительной программы.

3.1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Закон Фурье, описывающий механизм теплопроводности, имеет вид

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.1}$$

где q_x — плотность теплового потока (т.е. количество тепла, перенесенное в единицу времени через единицу площади) в направлении оси x; k — теплопроводность материала. Плотность теплового потока в заданном направлении x пропорциональна градиенту температуры $\partial T/\partial x$ в этом направлении. Знак «минус» в (3.1) соответствует тому, что тепло переносится из области с высокой температурой в область с низкой температурой.

Применение первого закона термодинамики к бесконечно малому контрольному объему в твердом теле или в неподвижной среде приводит к хорошо известному уравнению теплопроводности. Оно содержит члены, которые соответствуют (для единичного объема в единицу времени): а) изменению внутренней энергии; б) переносу тепла за счет теплопроводности; в) генерации энергии (или «источнику тепла») за счет таких процессов, как ядерные или химические реакции, радиоактивность, прохождение через материал электрического тока.

Обозначив три пространственные переменные через декартовы координаты x, y, z и время через t, можем записать уравнение теплопроводности в виде

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + S_h, \tag{3.2}$$

где ρ — плотность; c — удельная теплоемкость; S_h — мощность источника тепла в единице объема.

В этом уравнении величины ρ, c, k и S_h могут зависеть от x, y, z, t и быть функциями температуры T. Наш численный метод и вычислительная программа должны быть достаточно гибкими, чтобы учитывать подобные зависимости.

Дифференциальные уравнения (2.1) и (2.98) (см. гл. 2) могут быть представлены как частные случаи уравнения (3.2). Единственной дополнительной особенностью (3.2) по сравнению с (2.98) является наличие членов, отвечающих за механизм теплопроводности по всем координатным направлениям.

3.2. ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Аналогичные процессы. Уравнение теплопроводности является прямым следствием закона сохранения, представленного первым законом термодинамики, и пропорциональности плотности потока градиенту температуры [см. (3.1)]. Существует множество других физических процессов, при которых соответствующая плотность потока некоторой величины пропорциональна градиенту этой величины и для которых существует закон сохранения. Отсюда следует, что эти процессы будут описываться дифференциальными уравнениями, аналогичными (3.2). К подобным процессам можно отнести диффузию химических компонент, движение заряженных частиц в электромагнитном поле, течение в пористых материалах, потенциальные течения, перенос тепла и влаги в почве, а также полностью развитые течение и теплообмен в каналах. Построив вычислительную процедуру для решения уравнения (3.2), мы сможем применить ее и для любого аналогичного процесса, просто придавая новый смысл величинам T, k, S_h и др. Например, можно интерпретировать T как концентрацию, k как коэффициент диффузии, S_h как скорость химической реакции и т.п. Удобнее работать с таким обобщенным дифференциальным уравнением, так как уравнение теплопроводности и другие аналогичные уравнения станут его частными случаями. В дальнейшем будем основываться на подобном обобщенном дифференциальном уравнении.

Дифференциальное уравнение для обобщенной переменной. Обозначим через ϕ зависимую переменную в обобщенном дифференциальном уравнении. Градиент ϕ приводит к соответствующему

диффузионному потоку. Таким образом, плотность диффузионного потока J_x в направлении x задается в виде

$$J_x = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{3.3}$$

где Γ — обобщенный коэффициент диффузии.

Обобщенное дифференциальное уравнение, представляющее закон сохранения для ϕ, может быть записано в виде

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + S, \tag{3.4}$$

где λ — величина, подобная объемной теплоемкости; S — мощность генерации соответствующей физической величины в единице объема.

Сравнивая уравнение теплопроводности (3.2) с обобщенным дифференциальным уравнением (3.4), заключаем, что для того чтобы обобщенное уравнение описывало процесс теплопроводности, нужно сделать следующую замену:

$$\phi = T; \quad \lambda = \rho c; \quad \Gamma = k; \quad S = S_h. \tag{3.5}$$

В общем случае для каждого значения ϕ существуют соответствующие значения величин λ, Γ и S (на самом деле величины λ, Γ и S следовало бы обозначить как λ_ϕ, Γ_ϕ и S_ϕ, но индекс «ф» для удобства записи будет в большинстве случаев опущен). В простой задаче эти величины могут быть постоянными, но в общем случае нет ничего необычного в том, что они зависят от пространственных координат и времени, а также от самой переменной ϕ.

Связь между переменными. Конкретная задача может иметь в качестве искомых переменных более одной переменной, описываемой обобщенным дифференциальным уравнением. Например, в смеси многих химических компонент зависимыми переменными являются концентрации отдельных компонент. При расчете вынужденной конвекции в канале нужно получить как продольную скорость, так и температуру, решив соответствующие уравнения вида (3.4). В процессах с плазмой зависимая переменная ϕ может представлять собой как температуру электронов, так и температуру тяжелых частиц. Часто поля зависимых переменных ϕ взаимосвязаны, т.е. величины λ, Γ и S для одной переменной ϕ могут зависеть от значений другой переменной ϕ. Поэтому общая вычислительная задача может состоять в решении *системы* нелинейных и взаимосвязанных дифференциальных уравнений вида (3.4).

Тензорные обозначения. Обобщенное дифференциальное уравнение (3.4) записано в декартовой системе координат. Более компактно оно может быть записано в тензорных обозначениях:

$$\lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S, \tag{3.6}$$

где применено соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу. Например, для *трехмерного* случая можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right), \tag{3.7}$$

здесь x_1, x_2 и x_3 — декартовы координаты (x, y и z) по трем направлениям. Будем называть три члена уравнения (3.6) нестационарным, диффузионным и источниковым членом соответственно.

В более общем виде выражение для плотности диффузионного потока (3.3) может быть записано следующим образом:

$$J_i = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \tag{3.8}$$

где J_i — плотность диффузионного потока в направлении координаты x_i.

Диффузионный член в (3.6) удобно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial J_i}{\partial x_i}. \tag{3.9}$$

Выражения для диффузионного члена в трех системах координат. Сфокусируем внимание на *двумерных* задачах, сформулированных в одной из трех координатных систем, представленных в § 1.2. Выражения для $\partial J_i/\partial x_i$ в этих системах имеют вид:

$$(x,y):\ \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y}; \tag{3.10}$$

$$(x,r):\ \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(rJ_y); \tag{3.11}$$

$$(\theta,r):\ \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{1}{r}\frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(rJ_y). \tag{3.12}$$

В уравнениях (3.11) и (3.12) y и r являются координатами в радиальном направлении. Разница между ними заключается только в том, что координата r должна измеряться от оси симметрии или от

полюса, в то время как координата y может быть выбрана произвольно. Таким образом,

$$y = r + \text{некоторая постоянная.} \tag{3.13}$$

Плотности потоков J_x, J_y, J_θ (3.10)—(3.12) соотносятся с градиентами ϕ следующим образом:

$$J_x = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \tag{3.14}$$

$$J_y = -\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \tag{3.15}$$

$$J_\theta = -\left(\frac{\Gamma}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} . \tag{3.16}$$

Для удобства все производные будем рассматривать только в декартовой системе координат (x, y). Однако легко могут быть получены их выражения и в других двух системах.

3.3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В задачах, подобных задачам теплопроводности, обычно встречаются три типа граничных условий. На границе или определено значение ϕ, или задана плотность потока J_i (по нормали к поверхности границы), или описана зависимость между плотностью потока и граничным значением ϕ. Мы рассматривали эти граничные условия в гл. 2 для одномерной задачи теплопроводности. В общем случае вычислительный метод и компьютерная программа должны иметь возможность реализации этих граничных условий для каждой зависимой переменной.

3.4. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Физические переменные, использованные в этой главе и в вычислительной программе CONDUCT, должны быть в общем случае рассмотрены как *размерные* величины, выраженные в любой *согласованной* системе единиц. В вычислительной программе не существует никаких множителей для пересчета единиц измерения. Поэтому нужна аккуратность при использовании величин в британских единицах. При использовании стандартной системы единиц СИ никаких трудностей не возникает. Результаты, полученные CONDUCT, должны рассматриваться как значения реальных физических величин точно так же, как и результаты лабораторного эксперимента.

В гл. 2 мы решали задачи, задавая простые числовые значения физических параметров, таких как теплопроводность k и источниковый член S, без указания используемых единиц измерения. Например, в § 2.3 $k = 1$, $S = 2$, $L = 5$ и т.п. Так же будем поступать и в дальнейшем. Когда единицы измерения не указаны, то числа представляют соответствующие физические величины в любой согласованной системе единиц. В практических приложениях система единиц измерения, конечно, важна, но в нашей книге нет необходимости затруднять работу посредством сложных единиц измерения и чисел.

Однако во многих задачах основные уравнения и их решения обычно выражаются через соответствующие безразмерные величины. Эта процедура существенна для нахождения минимального числа безразмерных параметров, определяющих физический процесс, и для представления решения в обобщенной форме. Если вы привыкли анализировать задачи в безразмерных единицах, то скорее всего зададите разумный вопрос: почему CONDUCT не имеет безразмерную структуру? Этому есть две причины. Во-первых, если вы захотите решить частную задачу, не утруждая себя соответствующим переходом к безразмерным величинам, то должны иметь возможность, задав геометрические характеристики, температуры, плотности тепловых потоков, получить с помощью CONDUCT результаты для различных физических величин. Во-вторых, так как один набор безразмерных переменных неприменим ко всем возможным задачам, то *многоцелевая* вычислительная программа, такая как CONDUCT, не может быть построена на *априорных* определениях необходимых безразмерных величин.

Несмотря на вышеизложенное, программа CONDUCT может быть использована для получения безразмерных решений задач заданного класса. Существуют два способа добиться этого. В рамках первого основное дифференциальное уравнение в *безразмерном* виде сравнивается с уравнением (3.6) (которое решает CONDUCT) и величины t, x, ϕ, Γ, S и др. в вычислительной программе интерпретируются как соответствующие безразмерные переменные. Например, переменная x может обозначать безразмерное расстояние x/L, ϕ может быть использована для представления безразмерной температуры $(T - T_1)/(T_2 - T_1)$, а Γ может быть просто приравнен к единице и т.п. Второй способ очень похож на проведение лабораторного эксперимента. Осуществляем вычисления с *размерными* величинами, но выводим на печать результаты в безразмерном виде. Таким образом, мы можем даже проконтролировать, останутся ли безразмерные результаты неизменными (как и должны), когда изменятся свойства материала, размеры расчетной области и др. Очень

поучительно рассматривать компьютерные вычисления как подобие лабораторному эксперименту. Отличие, однако, заключается в том, что в то время как эксперимент должен быть проведен с реальными размерами и доступными материалами, при вычислениях могут быть использованы любые размеры области и любые свойства материалов (даже фантастические). Из двух способов получения безразмерных решений автор предпочитает второй, но вы можете использовать любой (по вашему вкусу).

Глава 4

СТРУКТУРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Как было отмечено ранее, полезно поближе познакомиться со структурой вычислительной программы CONDUCT. Уже упоминалось, что программа разделена на две части: неизменяемую и адаптируемую. Неизменяемая часть содержит основные вычислительные процедуры, которые будут описаны в гл. 5. Адаптируемая часть обеспечивает основу для информации о специфике решаемой задачи, предоставляемой пользователем. В этой главе дано краткое описание программы, более подробно она рассматривается далее.

4.1. ОБЩАЯ СХЕМА

На рис. 4.1. показана структура вычислительной программы. Здесь приведены все подпрограммы и их взаимосвязи. Показаны только основные «вызовы»; двойными стрелками обозначены многократные вызовы какой-либо подпрограммы. Подпрограммы, заклю-

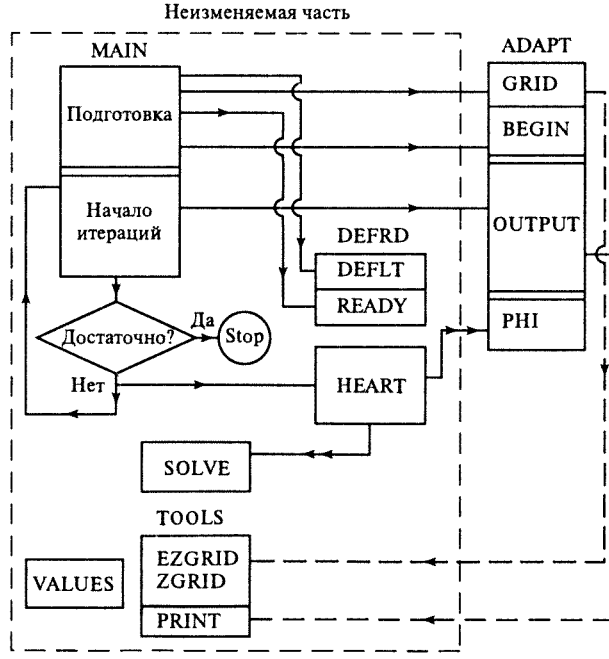


Рис. 4.1. Структура вычислительной программы CONDUCT

ченные в прямоугольник, изображенный штриховыми линиями, составляют неизменяемую часть. Подпрограмма ADAPT определяется деталями, зависящими от конкретной задачи.

Такие подпрограммы, как DEFRD и ADAPT, являются совокупностью некоторого числа процедур, имена которых вписаны в соответствующие прямоугольники на рис. 4.1. Эти совокупности созданы новым способом использования оператора ENTRY. В них все составные части начинаются с ENTRY и для всех практических целей могут использоваться как независимые подпрограммы. Совокупности как таковые никогда не вызываются по их именам, вызываются только составляющие их процедуры. Таким образом, в программе нигде не используется оператор вызова CALL ADAPT, в то время как CALL BEGIN обеспечивает доступ к соответствующей части подпрограммы ADAPT. За исключением VALUES, ни одна из подпрограмм не имеет аргументов, вся необходимая информация передается через блоки COMMON. Применение оператора ENTRY для соединения нескольких процедур в одну подпрограмму уменьшает число блоков COMMON, позволяет различным частям подпрограммы использовать одни и те же переменные без пересылки их через COMMON и сохраняет соответствующую физическую информацию или математические операции.

4.2. ПОДПРОГРАММЫ НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ЧАСТИ

Подпрограмма MAIN управляет последовательностью основных действий через вызов других подпрограмм, как показано на рис. 4.1. Некоторые процедуры вызываются только 1 раз, эти вызовы составляют подготовительную фазу вычислений. Остальные действия выполняются в цикле: каждый проход по циклу соответствует одной итерации для стационарной задачи или одному шагу по времени для нестационарной задачи.

В подпрограмме DEFLT определяются значения «по умолчанию» для большого числа важных переменных. Будет полезно хорошо знать эти значения. Тогда при определении деталей задачи не нужно будет присваивать значения некоторым параметрам, если приемлемы их значения по умолчанию. Например, если в задаче внутреннее выделение тепла принять равным нулю, то вы не должны задавать значение источникового члена, оно по умолчанию равно нулю. Все значения параметров, задаваемые по умолчанию, приведены в прил. 3.

Процедура READY разработана для расчета большого числа геометрических характеристик, которые часто используются в остальной программе. HEART является наиболее важной подпрограммой, реализующей дискретные аналоги обобщенного дифференциального

уравнения, описанного в гл. 3. Для получения численного решения необходимо решить систему алгебраических уравнений, что и делается в подпрограмме SOLVE.

Подпрограмма TOOLS не является существенной частью вычислительной программы. Однако она обеспечивает помощь в построении адаптируемой части программы. Составляющие ее процедуры, названные EZGRID, ZGRID и PRINT, осуществляют некоторые наиболее общие запрашиваемые операции. Если возникает необходимость в их использовании, они должны быть вызваны из адаптируемой части. Подпрограмма VALUES выполняет подобную вспомогательную функцию. Она позволяет задавать значения большого числа переменных в сжатом виде.

Так как обычно не требуется вносить какие-либо изменения в неизменяемую часть программы, то желательно скомпилировать эту часть 1 раз и просто использовать скомпилированную версию (т.е. объектный код) со всеми приложениями CONDUCT.

4.3. ПОДПРОГРАММЫ АДАПТИРУЕМОЙ ЧАСТИ

Подпрограмма ADAPT содержит четыре процедуры: GRID, BEGIN, OUTPUT и PHI. Из них GRID и BEGIN вызываются только 1 раз и обеспечивают соответственно расчет геометрических характеристик сетки и реализацию начальных условий. OUTPUT вызывается 1 раз на каждой итерации. Эта процедура реализует вывод необходимых результатов на печать.

Процедура PHI является наиболее часто вызываемой частью ADAPT. Она также является наиболее важной и вызывается несколько раз за одну итерацию — по разу для каждого решаемого уравнения. Основная ее функция — задать соответствующую информацию о величинах λ, Γ и S [см. (3.6)] для каждой переменной ϕ; здесь также задаются некоторые детали граничных условий для каждой переменной ϕ.

Этот краткий обзор программы CONDUCT должен обеспечить необходимый фундамент для рассмотрения деталей численного анализа, используемых обозначений и применения программы.

Глава 5

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ

В гл. 5 приводится подробное описание численной схемы, воплощенной в CONDUCT. Эта схема является логическим расширением представленной в гл. 2 одномерной процедуры. При описании затрагиваются и другие вопросы, такие как обозначения и нумерация, используемые в программе, соглашения о знаках и др. Также встречаются ссылки на соответствующие подпрограммы вычислительной программы.

5.1. РАСЧЕТНАЯ СЕТКА И КОНТРОЛЬНЫЕ ОБЪЕМЫ

Как мы видели в гл. 2, дифференциальные уравнения вида (3.6) решаются преобразованием их в алгебраические уравнения, называемые дискретными аналогами. Эти уравнения содержат в качестве неизвестных значения ϕ в выбранных дискретных местоположениях, которые образуют сетку и называются расчетными точками. Вокруг каждой расчетной точки строится контрольный объем, и дискретные аналоги получаются интегрированием уравнения (3.6) по таким контрольным объемам.

Построение сетки. Основные принципы построения сетки были приведены для одномерного случая в п. 2.5.7. В CONDUCT применяется рассмотренный выше способ В. Построение контрольных объемов и расчетной сетки в двумерном случае показано на рис. 5.1. Сначала расчетная область разбивается на контрольные объемы, грани которых показаны штриховыми линиями. Затем в геометрические центры контрольных объемов помещаются расчетные точки. На рис. 5.1 сплошными линиями показаны линии сетки, черные точки соответствуют положениям расчетных точек, типичный контрольный объем заштрихован. Видно, что некоторая расчетная точка «сообщается» с четырьмя соседними через четыре грани контрольного объема. Одна из граней приграничного контрольного объема совпадает с границей расчетной области, а граничная точка помещена в центр грани контрольного объема. Удобно представлять контрольный объем нулевой толщины для граничной точки.

В большинстве случаев будем предполагать, что значение переменной в расчетной точке распространяется на весь контрольный объем. Аналогично значение в граничной точке преобладает на всей грани соответствующего контрольного объема. Из этого следует, что границы контрольных объемов должны располагаться так, чтобы

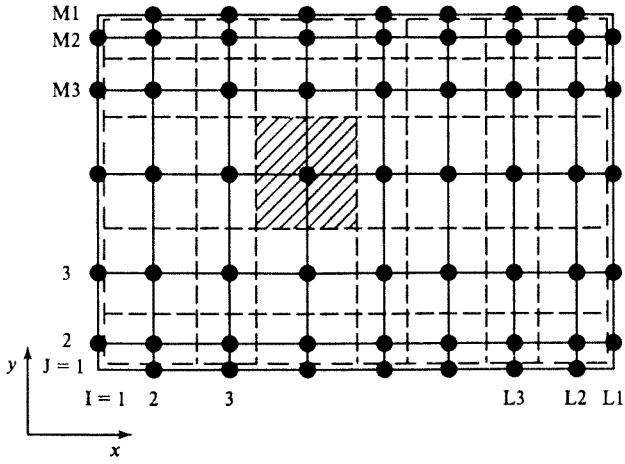


Рис. 5.1. Контрольные объемы и расчетные точки

они совпадали с разрывами в свойствах материала, источниковых членах, граничных условиях и др.

В соответствии с рис. 5.1 местоположение расчетных точек в направлении осей x и y определяется индексами `I` и `J`. Индекс `I` увеличивается вдоль оси x, а индекс `J` — вдоль оси y. Значение `I=1` задает сеточную линию на левой границе, в то время как `I=L1` указывает на правую границу. Аналогично `J=1` и `M1` соответствуют нижней и верхней границам. На самом деле во многих местах в программе левая и нижняя границы области называются границами `I1` и `J1` соответственно, а правая и верхняя — границами `L1` и `M1`. Логичность такого обозначения очевидна. Для удобства введены некоторые дополнительные переменные, определяемые так:

```
L2=L1-1,  L3=L1-2;
```
(5.1)

```
M2=M1-1,  M3=M1-2.
```
(5.2)

Таким образом, сеточные линии `I=2` и `L2` являются первыми внутренними линиями сетки вблизи соответствующих границ, а линии `I=3` и `L3` — вторыми внутренними линиями. Подобными свойствами обладают линии `J=M2` и `M3` (кстати, введение переменных вида `L1`, `L2` и `L3` не означает, что мы заново нумеруем все точки справа налево. У нас есть индексы `L1`, `L2` и `L3`, но нет индексов `L4`, `L5` и т.д. Часто существует необходимость обращения именно к последним трем точкам в каждом направлении. Для этой цели полезны такие переменные, как `L1`, `L2` и `L3`). Таким образом, в диапазонах `I=2, L2` и `J=2, M2` задаются все *внутренние* расчетные точки. Зависимая переменная, например температура, в расчетной

точке (I, J) будет обозначаться как T(I, J). Граничные значения T обозначены как T(1, J), T(L1, J), T(I, 1) и T(I, M1).

Значения зависимой переменной в угловых точках. Следует заметить, что в общем случае значения какой-либо зависимой переменной, сохраняемые в четырех угловых точках расчетной области, не играют никакой роли. Поэтому значения T(1, 1), T(L1, 1), T(L1, M1) и T(1, M1), вообще говоря, бессмысленны. Эти значения распечатываются подпрограммой PRINT (потому что гораздо сложнее сделать так, чтобы они не выводились на печать), но вы должны их игнорировать как бессмысленные числа, не влияющие на решение задачи (это утверждение больше повторяться не будет. При анализе результатов приведенных примеров не ломайте голову над значениями в угловых точках, которые часто могут быть бессмысленными).

Может показаться, что исключение значений в угловых точках из вычислительной схемы неудобно и нежелательно. Однако впоследствии вы убедитесь в обратном. При вычислении любой величины на границе, например средней температуры границы, вам не нужно учитывать угловую точку. Например, средняя температура на верхней границе рассчитывается по T(I, M1) при I=2, ..., L2 (в то время как обычные граничные точки имеют контрольные объемы бесконечно малой толщины, угловые точки содержатся в контрольных объемах с бесконечно малыми размерами по осям x и y.) Угловые точки часто бывают местами разрывов задаваемых граничных условий. Например, если нижняя граница имеет температуру T_1, а левая — T_2, то температура в угловой точке T(1, 1) не может быть определена должным образом. Поэтому очень удобно, что наш метод не требует и не учитывает значение T(1, 1). Если по какой-либо причине (например, для графического изображения результатов) вы захотите получить разумные значения переменных в угловых точках, то можете найти их в результате любой приемлемой экстраполяции. Это действие будет просто дополнительной операцией, не влияющей на решение, получаемое CONDUCT.

Три системы координат. Как было отмечено ранее, программа CONDUCT разработана для трех систем координат. Значение целой переменной MODE указывает на конкретную систему:

MODE=1 — декартова система координат (x, y);

MODE=2 — осесимметричная система координат (x, r);

MODE=3 — полярная система координат (θ, r).

Внешний вид расчетной сетки для MODE=1 и 2 показан на рис. 5.1. Для MODE=2 x — продольная координата, y — координата в радиальном направлении. Соотношение между координатами

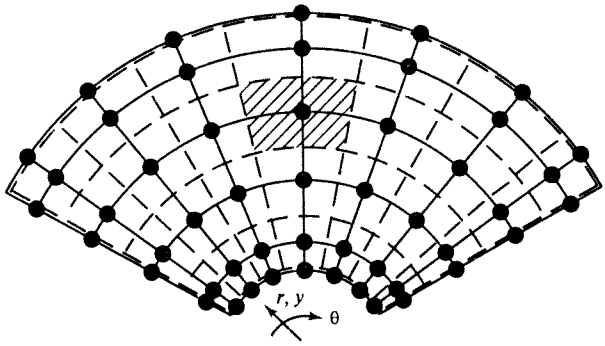


Рис. 5.2. Контрольные объемы и расчетные точки для полярной системы координат (θ, *r*)

y и *r* выражается формулой (3.13). Сетка для MODE = 3 представлена на рис. 5.2.

Здесь угол θ (измеряемый в радианах) замещает координату *x*. В вычислительной программе переменная X(I) интерпретируется как координата *x* для MODE = 1 и 2 и как угол θ для MODE = 3.

Унифицированное представление трех координатных систем стало возможным за счет использования массива R(J) в дополнение к массиву Y(J), содержащему значение координаты *y*. Массив R(J) равен единице для MODE = 1 и содержит локальное значение радиуса *r* для MODE = 2 или 3. Так как переменная X(I) соответствует углу, измеряемому в радианах, для MODE = 3 введен обобщенный множитель SX(J) для направления *x*. Расстояние между расчетными точками (I,J) и (I+1,J) в общем случае задается как SX(J)*(X(I+1)-X(I)). Очевидно, что множитель SX(J) должен быть равен единице для MODE = 1 или 2 и равен *r* для MODE = 3.

Для двумерного случая зависимая переменная в направлении третьей координаты не меняется. Но все же удобно предположить некоторую «глубину» расчетной области по третьей координате. Эта глубина берется равной единице для MODE = 1 или 3. Для MODE = 2 третьей координатой является угол θ. Предполагается, что расчетная область вдоль координаты θ имеет размер в 1 рад. Эти обобщенные геометрические характеристики приведены ниже:

Обобщенные геометрические характеристики

MODE	X(I)	R(J)	SX(J)	«Глубина»
1	*x*	1	1	1
2	*x*	*r*	1	1 рад
3	θ	*r*	*r*	1

Другими величинами, сохраняемыми для каждого контрольного объема, являются: `XCV(I)` и `YCV(J)`, соответствующие его размерам вдоль осей x и y; `YCVR(J)`, представляющее собой $r\Delta y$, и `ARX(J)`, являющееся площадью грани, перпендикулярной оси x.

Вы можете задать вопрос, почему не сохраняется в виде массива площадь грани, перпендикулярной оси y? А сохраняется ли такая величина, как объем КО (рассчитываемый по уравнению (5.9))? Наша позиция заключается в том, что мы сохраняем только те геометрические величины, которые могут быть сохранены в *одномерном* массиве. Величины, которые требуют двумерных массивов, не сохраняются, а рассчитываются по необходимости. Это разумный компромисс между использованием памяти компьютера и продолжительностью расчетов.

5.2. ВЕЛИЧИНЫ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАНЯМИ КОНТРОЛЬНЫХ ОБЪЕМОВ

Существует большое число геометрических величин, которые имеют отношение не к расчетным точкам, а к граням контрольных объемов. Координаты граней по осям x и y задаются как `XU(I)` и `YV(J)`. Используется соглашение о том, что грань с номером `I` лежит между точками `I-1` и `I`. Другими словами, грань имеет тот же номер, что и ближайшая к ней точка в положительном направлении оси координат, т.е. в направлении увеличения `I` или `J`. Это проиллюстрировано на рис. 5.3 для нумерации в направлении оси x. Аналогичная картина наблюдается и в направлении оси y. Частным следствием такого построения контрольных объемов и используемой нумерации является то, что грань `I = 2` и точка `I = 1` совпадают с левой границей расчетной

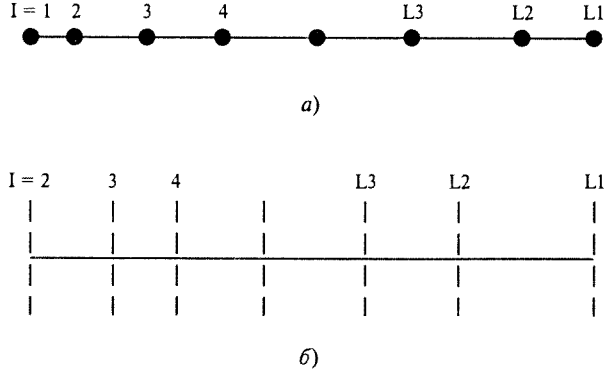


Рис. 5.3. Схемы нумерации расчетных точек (*а*) и граней контрольных объемов (*б*)

области. На правой границе грань и точка задаются как I=L1. Подобные соотношения справедливы и в направлении оси y. В результате

```
XU(2)=X(1),  XU(L1)=X(L1);        (5.3)
YV(2)=Y(1),  YV(M1)=Y(M1),        (5.4)
```

а XU(1) и YV(1) лишены смысла.

При задании сетки пользователем определяются значения XU(I) и YV(J), обозначающие положения граней контрольных объемов. Координаты X(I) и Y(J), а также все остальные геометрические характеристики рассчитываются затем в подпрограмме READY.

Для граней, перпендикулярных оси y, в дополнение к YV(J) сохраняется радиус RV(J). Значения радиуса, соответствующие нижней границе, задаются и в R(1), и в RV(2). Аналогично R(M1) и RV(M1) обозначают радиус верхней границы.

5.3. ОБОБЩЕННОЕ ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Из вышеописанного видно, что значения обобщенной зависимой переменной ϕ сохраняются в расчетных точках. Для сохранения значений различных ϕ используется массив F(I,J,NF), где I и J обозначают положение точки, а NF указывает на конкретную переменную ϕ, например на температуру, скорость, турбулентную кинетическую энергию и др. Дискретное уравнение связывает значение F(I,J,NF) в одной расчетной точке со значениями ее в четырех соседних точках. Такое уравнение получается при интегрировании уравнения (3.6) по контрольному объему, содержащему точку (I,J).

Закон сохранения в контрольном объеме. Типичный контрольный объем показан на рис. 5.4. Проинтегрировав по нему уравнение (3.6), получим

$$\lambda_P \frac{\Delta V}{\Delta t}(\phi_P - \phi_P^0) = J_w A_w - J_e A_e + J_s A_s - J_n A_n + \overline{S}\Delta V. \qquad (5.5)$$

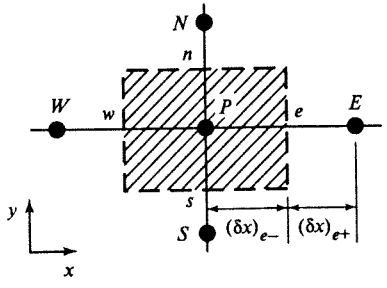


Рис. 5.4. Типичный контрольный объем

Здесь индекс «0» обозначает известное значение ϕ в начале шага по времени Δt; J — плотность диффузионного потока через грань контрольного объема; $\overline{S}$ — осредненный по контрольному объему источниковый член; A, ΔV — площадь грани и объем КО.

Для всех трех систем координат площади граней и объем могут быть рассчитаны с использованием геометрических характеристик, сохраненных программой в памяти:

$$A_e = A_w = \texttt{ARX(J)}; \tag{5.6}$$

$$A_n = \texttt{RV(J+1)*XCV(I)}; \tag{5.7}$$

$$A_s = \texttt{RV(J)*XCV(I)}; \tag{5.8}$$

$$\Delta V = \texttt{YCVR(J)*XCV(I)}. \tag{5.9}$$

Здесь предполагается, что точка P является расчетной точкой `(I,J)`.

Диффузионные потоки. Диффузионные потоки на гранях контрольного объема e и w могут быть рассчитаны следующим образом:

$$J_e A_e = D_e(\phi_P - \phi_E); \tag{5.10}$$

$$J_w A_w = D_w(\phi_W - \phi_P), \tag{5.11}$$

где D_e — проводимость между точками P и E, которая вычисляется по значениям Γ в этих точках. Зная размеры δx_{e-} и δx_{e+}, можно рассчитать D_e по формуле

$$D_e = A_e \left[\frac{(\delta x)_{e-}}{\Gamma_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{\Gamma_E} \right]^{-1}. \tag{5.12}$$

Аналогичным образом определяются значения D на других гранях. Выражения вида (5.10) и (5.11) применяются и для вычисления потоков $J_n A_n$ и $J_s A_s$.

Формулы для расчета диффузионных потоков являются прямым обобщением выражений (2.33), (2.34) и (2.80). Проводимость D_e зависит от площади грани контрольного объема A_e, а в одномерном случае в выражении (2.78) мы использовали единичную площадь.

Линеаризация источникового члена. Так как источниковый член S может зависеть от ϕ, желательно учесть эту зависимость в линеаризованной форме. С этой целью S записывается в виде

$$\overline{S} = S_C + S_P \phi_P, \tag{5.13}$$

где S_P — коэффициент при ϕ_P; S_C — постоянная часть, которая от ϕ_P явно не зависит.

Выражение (5.13) следует из представления источникового члена в виде (2.41). Здесь также применимы все рассуждения, приведенные для линеаризации источникового члена в п. 2.5.4. Когда нет необходимости в линеаризации, следует положить S_P равным нулю, а S_C приравнять к $\overline{S}$. В любом случае S_P никогда не должно иметь положительного значения. Когда зависимость $S = f(\phi)$ нелинейна,

линеаризованная форма (5.13) может быть сформулирована с учетом (2.85) и (2.85а). В этом случае S_C и S_P, зависящие от ϕ_P, рассчитываются исходя из оценочных значений ϕ_P и итерационно пересчитываются в процессе получения решения.

Окончательное выражение для дискретного аналога. Подстановка вышеприведенных выражений для J и $\overline{S}$ в (5.5) приводит к окончательной форме дискретного аналога. Он записывается в виде

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b, \tag{5.14}$$

где

$$a_E = D_e; \tag{5.15}$$

$$a_W = D_w; \tag{5.16}$$

$$a_N = D_n; \tag{5.17}$$

$$a_S = D_s; \tag{5.18}$$

$$b = S_C\Delta V + a_P^0\phi_P^0; \tag{5.19}$$

$$a_P^0 = \frac{\lambda_P\Delta V}{\Delta t}; \tag{5.20}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P\Delta V. \tag{5.21}$$

Здесь проводимости D_e, D_w, D_n и D_s определяются в виде (5.12). Коэффициент a_P^0 связан с нестационарным членом исходного дифференциального уравнения. Когда Δt равно очень большому числу, a_P^0 становится пренебрежимо малым и формулировка сводится к стационарному случаю. В CONDUCT значение Δt, заданное по умолчанию, равно 1.E20, что подходит для стационарных задач. Для нестационарных задач нужно задать приемлемое значение Δt. Если вы используете конечное Δt для стационарных задач, то это соответствует введению коэффициента релаксации в дискретное уравнение.

Можно записать (5.14) в более компактном виде:

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b, \tag{5.22}$$

где индекс nb обозначает точки, соседние по отношению к точке P, а суммирование проводится по четырем соседним точкам.

5.4. СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМЕНА НА ЯЗЫКЕ ФОРТРАН

Коэффициентам уравнения (5.14) для расчетной точки (I,J) присвоены следующие имена на ФОРТРАНе:

$$\texttt{AP(I,J)} = a_P; \quad \texttt{CON(I,J)} = b;$$

$$\texttt{AIP(I,J)} = a_E; \quad \texttt{AIM(I,J)} = a_W;$$

$$\texttt{AJP(I,J)} = a_N; \quad \texttt{AJM(I,J)} = a_S;$$

узел (I+1,J) соответствует точке E, а узел (I,J-1) — точке S и т.д.

Величины λ, Γ, S_C и S_P заданы в массивах ALAM(I,J), GAM(I,J), SC(I,J) и SP(I,J) для *внутренних* расчетных точек. Заметим, что массивы SC и SP эквивалентны массивам CON и AP соответственно, поэтому занимают то же место в компьютерной памяти. Массивы SC и SP используются только в подпрограмме ADAPT для удобства пользователя. В остальной части программы подразумевается, что S_C и S_P содержатся в массивах CON и AP.

Хотя зависимые переменные ϕ сохраняются в F(I,J,NF), индекс NF не используется для массивов ALAM, GAM, SC и SP. Эти массивы рассчитываются наряду с массивами коэффициентов снова и снова для каждой переменной ϕ. Таким образом, на любом этапе вычислений ALAM, GAM, SC и SP содержат значения λ, Γ, S_C и S_P только для *рассматриваемой в данный момент переменной* ϕ. Значения S_C и S_P, задаваемые по умолчанию, равны нулю.

Следует заметить, что мы используем неявное определение типов для имен переменных на ФОРТРАНе. Поэтому переменные, имена которых начинаются с I, J, K, L, M или N, рассматриваются как целые, в то время как остальные предполагаются вещественными. Вот почему для λ используется имя ALAM(I,J), а не LAM(I,J). Из дальнейшего будет видно, что для теплопроводности k и вязкости μ используются имена AK и AMU.

5.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для каждой приграничной расчетной точки соответствующая граничная точка является соседней. Поэтому для граничной точки должно быть задано или значение зависимой переменной, или уравнение для его отыскания. Так как для всех четырех границ расчетной области граничные условия реализуются одинаковым образом, рассмотрим только левую границу.

Реализация граничных условий в одномерном случае была описана в п. 2.4.3. Для двумерной задачи поступим аналогичным образом.

Так как для построения контрольных объемов используется способ B, то толщина половинных контрольных объемов стремится к нулю (см. п. 2.5.7). Это приводит к снижению точности при определении плотности потока на границе. Поэтому представим два типа реализации граничных условий. Реализация первого порядка точности является логическим следствием формулировки, описанной в § 5.3 (или п. 2.4.3). Дополнительно разработано более точное представление. Этот вариант с более высоким порядком аппроксимации рекомендуется в CONDUCT для решения обобщенного уравнения, однако для использования доступен и вариант с первым порядком аппроксимации.

5.5.1. Первый порядок аппроксимации

На рис. 5.5 показана окрестность граничной точки `(1,J)`. Для удобства в дальнейших выкладках индекс `J` будет опущен. Грань контрольного объема при `I = 2`, совпадающая с левой границей области, может рассматриваться лежащей *между* точками с ϕ_1 и ϕ_2, если вокруг точки с ϕ_1 представить контрольный объем бесконечно малой толщины. Тогда плотность потока J_2 на левой границе задается формулой (5.10). Удобно переписать ее в виде

$$J_2 = \texttt{AIP(1,J)} * (\phi_1 - \phi_2), \tag{5.23}$$

где

$$\texttt{AIP(1,J)} = \Gamma_2/\delta. \tag{5.24}$$

Следует заметить, что, в то время как коэффициенты типа `AIP(I,J)` для внутренних контрольных объемов содержат площади граней, коэффициент `AIP(1,J)` для граничного контрольного объема определяется на единицу площади. Это сделано по двум причинам. Во-первых, обычно задается или требуется найти плотность входящего или выходящего через границу потока. Во-вторых, для `MODE = 2` или 3 нижняя граница области совпадает с осью ($r = 0$) и площадь грани там равна нулю. Поэтому величины, проинтегрированные по некоторой площади, не так полезны, как величины, приходящиеся на единицу площади. В дальнейшем будем обозначать `AIP(1,J)` и подобные коэффициенты через `AIP(1)`.

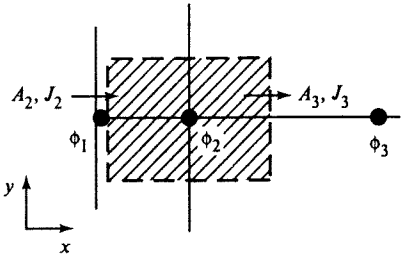


Рис. 5.5. Контрольный объем у левой границы

Из рис. 5.5 видно, что описанный выше способ вычисления плотности потока J_2 на границе соответствует односторонней схеме, так как грань лежит не посередине между точками с переменными ϕ_1 и ϕ_2, что дает ие очень точные результаты. Так как представление граничных условий сильно влияет на все решение и значения плотностей потоков на границе часто являются важным результатом расчетов, то желательно получить более точную формулу для их определения. Что и описывается далее.

5.5.2. Аппроксимация более высокого порядка

Формулы для определения плотности потока (5.10) и (5.23) получены из предположения о кусочно-линейном профиле температуры, что влечет за собой постоянство J между двумя соседними точками. Формула более высокого порядка аппроксимации может быть получена, если считать, что плотность диффузионного потока меняется линейно между гранями контрольного объема. Подобный профиль для граничного контрольного объема показан на рис. 5.6. Предполагаемое распределение J между точками *1* и *2* описывается формулой

$$J = -\Gamma \frac{d\phi}{dx} = J_2 + J'(x - x_1), \qquad (5.25)$$

где

$$J' = (J_3 - J_2)/(2\delta). \qquad (5.26)$$

Проинтегрируем выражение (5.25) по x для получения профиля ϕ. Интегрирование производится только по области, лежащей между точками *1* и *2*, где Γ имеет постоянное значение. Возникающая при интегрировании константа находится из условия

$$\phi = \phi_1 \text{ при } x - x_1 = 0. \qquad (5.27)$$

Еще одно условие, которому удовлетворяет профиль, имеет вид

$$\phi = \phi_2 \text{ при } x - x_1 = \delta. \qquad (5.28)$$

Использование этого условия после некоторых алгебраических преобразований приводит к выражению

$$J_2 = \frac{4}{3}\left[\frac{\Gamma_2}{\delta}(\phi_1 - \phi_2)\right] - \frac{1}{3} J_3 . \qquad (5.29)$$

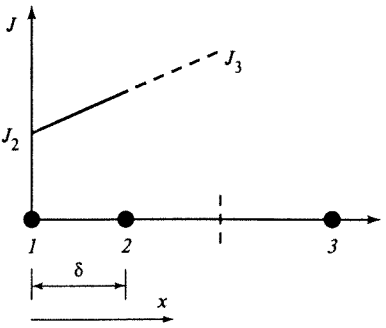


Рис. 5.6. Предположение о профиле плотности потока J:
1—3 — номера точек

Обобщенная форма этого выражения имеет вид

$$J_2 = \beta \left[\frac{\Gamma_2}{\delta} (\phi_1 - \phi_2) \right] - (\beta - 1) J_3 . \qquad (5.30)$$

Если множитель $\beta = 4/3$, получаем выражение (5.29). При $\beta = 1$ это выражение приводит к аппроксимации первого порядка точности, заданной формулами (5.23), (5.24).

Выражение для J_3 с учетом (5.10) может быть записано в виде

$$J_3 A_3 = D_3(\phi_2 - \phi_3), \qquad (5.31)$$

где D_3 — соответствующая проводимость между точками с переменными ϕ_2 и ϕ_3.

Дискретный аналог для приграничного контрольного объема с индексами узловой точки (2, J) должен быть основан на выражении (5.30) для плотности потока J_2 через его левую грань, а не на (5.11). В результате коэффициенты AIM(2) и AIP(2) записываются в виде:

$$\mathtt{AIM(2)} = \beta \frac{\Gamma_2}{\delta} A_2 ; \qquad (5.32)$$

$$\mathtt{AIP(2)} = D_3 + (\beta - 1) A_2 \frac{D_3}{A_3} . \qquad (5.33)$$

Формула для AP(2) [см. (5.21)] обеспечивает отмеченные здесь изменения соседних коэффициентов, появляющихся в выражении для a_P.

Исходя из (5.23) выражение для плотности диффузионного потока J_2 может быть записано в виде

$$J_2 = \mathtt{AIP(1)} * (\phi_1 - \phi_2) + \mathtt{AIM(1)} * (\phi_3 - \phi_2), \qquad (5.34)$$

где

$$\mathtt{AIP(1)} = \beta \frac{\Gamma_2}{\delta} ; \qquad (5.35)$$

$$\mathtt{AIM(1)} = (\beta - 1) \frac{D_3}{A_3} . \qquad (5.36)$$

Использование в данном случае элемента массива AIM(1) несколько необычно. Для точки I=1 существует соседняя точка I+1, но отсутствует соседняя точка I-1. Поэтому в расчете коэффициента AIM(1) нет необходимости. Однако в формуле более высокого порядка аппроксимации для J_2 требуется еще один дополнительный коэффициент. Для этого и используется AIM(1).

Итак, выражения (5.32)—(5.36) могут быть использованы для обоих вариантов аппроксимации граничных условий при соответствующем выборе значении β:

второй порядок аппроксимации при $\beta = 4/3$; (5.37)

первый порядок аппроксимации при $\beta = 1$. (5.38)

В CONDUCT необходимый порядок аппроксимации граничных условий может быть выбран установкой параметра (индикатора) KORD. Он может принимать значения 1 или 2, что соответствует первому или более высокому порядку аппроксимации. Значение KORD, задаваемое по умолчанию, равно 2, и его не часто приходится менять.

5.5.3. Индикаторы граничных условий

Тип граничных условий на левой, правой, нижней и верхней границах расчетной области определяется индикаторами KBCI1(J), KBCL1(J), KBCJ1(I) и KBCM1(I) соответственно. Все эти индикаторы относятся к рассматриваемому в текущий момент значению F(I,J,NF) и должны корректно обновляться для каждого NF.

Индикаторы граничных условий KBC могут принимать значения 1 или 2. В случае KBC=1 на границе известно значение ϕ, т.е. если KBCI1(J)=1, задано значение F(1,J,NF). В случае KBC=2 предполагается, что на границе задана плотность диффузионного потока:

$$J_B = f_C + f_P \phi_B, \tag{5.39}$$

где индекс B соответствует значению на границе.

Заметим, что мы уже имели дело с подобным выражением для плотности теплового потока на границе [см. (2.50)]. Соглашение о знаках, используемое в (5.39), состоит в том, что на любой границе J_B обозначает плотность диффузионного потока, входящего в расчетную область. Таким образом, J_B будет положительным, когда поток поступает в область, и отрицательным, когда выходит из области. В случае, если известно значение плотности диффузионного потока, ему соответствует f_C, а f_P полагается равным нулю. Когда диффузионный поток — линейная функция от ϕ_P, значения f_P, и f_C в общем случае будут ненулевыми. Когда же поток — нелинейная функция от ϕ_B, из (5.39) следует, что f_C и f_P зависят от ϕ_P и должны подвергаться итерационному пересчету. Подобная линеаризация граничных условий была рассмотрена в п. 2.5.5.

Подобие между выражениями (5.39) и (5.13) относительное. Плотность потока через границу J_B рассматривается в виде источникового

члена в контрольном объеме бесконечно малой толщины, содержащем граничную точку. В то время как S_C и S_P рассчитываются на единицу объема, f_C и f_P определяются на единицу площади. В правильно сформулированной задаче f_P должно быть равно нулю или быть отрицательным. Если плотность теплового потока J_B задана через коэффициент конвективного теплообмена h в виде

$$J_B = h(\phi_\infty - \phi_B), \tag{5.40}$$

где ϕ_∞ — переменная, соответствующая температуре окружающей среды, то выражения для f_C и f_P будут иметь вид:

$$f_C = h\phi_\infty; \tag{5.41}$$

$$f_P = -h. \tag{5.41a}$$

Значения f_C для четырех границ области должны быть присвоены элементам массивов `FLXCI1(I)`, `FLXCL1(I)`, `FLXCJ1(J)` и `FLXCM1(J)`. Значения f_P задаются в `FLXPI1(I)`, `FLXPL1(I)` и др. Таким образом, при `KBCI1(J)=2` должны быть определены значения `FLXCI1(J)` и `FLXPI1(J)`.

Все индикаторы `KBC` имеют задаваемые по умолчанию значения, равные единице, а `FLXC` и `FLXP` равны нулю. Объем работы при задании граничных условий увеличивается по мере усложнения граничных условий. Рассмотрим следующие четыре случая:

а) если заданы значения ϕ_B на границе, то необходимо поместить известные значения ϕ_B в соответствующие элементы в `F(I,J,NF)`, но после этого не осуществлять дополнительных действий, чтобы граничные значения ϕ_B рассматривались в качестве известных;

б) для адиабатических границ и поверхностей симметрии плотность диффузионного потока на границе равна нулю. *Все*, что нужно сделать в таком случае, это установить соответствующий `KBC` равным 2 (значение плотности потока равно нулю по умолчанию);

в) если задана плотность потока через границу J_B, нужно выполнить два действия: присвоить переменной `KBC` значение 2 и приравнять соответствующие `FLXC` к известному значению плотности потока. Элементы массива `FLXC` должны быть положительными, если поток поступает в расчетную область, и отрицательными, если выходит из области;

г) если неизвестная плотность потока J_B зависит от неизвестного значения ϕ_B, необходимы три действия: `KBC` приравнивается к 2, а в `FLXC` и `FLXP` заносятся соответствующие значения f_C и f_P. Наиболее часто встречающейся ситуацией для такого типа гранич-

ных условий является случай заданного коэффициента конвективного теплообмена. Тогда для f_C и f_P используются выражения (5.41) и (5.41а).

Таким образом, мы описали, как пользователь должен задавать информацию о граничных условиях в адаптируемой части программы. Последующая обработка этой информации в неизменяемой части программы представлена ниже.

5.5.4. Случай KBC = 1

Когда известно значение зависимой переменной ϕ_B на границе, то необходимо приравнять ее к постоянному члену b дискретного уравнения. Таким образом, если `KBCI1(J)=1`, то необходимые изменения заключаются в следующем:

```
CON(2)=CON(2)+AIM(2)*F(1,J,NF)
```
(5.42)

```
AIM(2)=0.
```
(5.42а)

Здесь для удобства опущен индекс `J` в `CON` и `AIM`.

5.5.5. Случай KBC = 2

Если плотность диффузионного потока J_2 задана в виде

$$J_2 = f_C + f_P\phi_1, \tag{5.43}$$

то выражение (5.34) обеспечивает необходимое алгебраическое уравнение с неизвестным ϕ_1. Оно записывается так:

$$\texttt{AP(1)}\,\phi_1 = \texttt{AIP(1)}\,\phi_2 + \texttt{AIM(1)}*(\phi_2 - \phi_3) + \texttt{CON(1)}, \tag{5.44}$$

где `AIP(1)` и `AIM(1)` были определены по (5.35) и (5.36);

```
AP(1)=AIP(1) -f_P;
```
(5.45)

```
CON(1)=f_C.
```
(5.46)

Неизвестное значение ϕ_1 исключается из дискретного аналога для контрольного объема `(2,J)` с помощью (5.44). В окончательной форме этого уравнения коэффициент `AIM(2)` при неизвестном ϕ_1 будет равен нулю. После того, как система дискретных аналогов будет решена для всех внутренних значений ϕ, можем найти неизвестное ϕ_1 из (5.44).

5.5.6. Вычисление плотности потока на границе

После получения решения системы алгебраических уравнений, состоящей из дискретных аналогов, по (5.34) можно рассчитать плотности диффузионных потоков во всех граничных точках. Полученные значения плотностей потоков могут составлять важный результат вычислений. По этой причине они сохраняются в массивах `FLUXI1(J,NF)`, `FLUXL1(J,NF)`, `FLUXJ1(I,NF)` и `FLUXM1(I,NF)` для левой, правой, нижней и верхней границ соответственно. Мы будем часто использовать эти значения для получения суммарного теплового потока через границу области, коэффициента теплопередачи при течении в канале и др. Как было отмечено выше, всегда используется следующее соглашение о знаках: если значение потока на границе положительно, то поток тепла поступает в рассматриваемую область, отрицательное значение свидетельствует о потере тепла.

5.6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для каждого контрольного объема, содержащего внутреннюю расчетную точку, записывается дискретный аналог вида (5.14). Если в уравнениях для приграничных контрольных объемов сделаны вышеописанные преобразования, то значения ϕ на границе явным образом не входят в систему уравнений. Алгебраические уравнения являются линейными (если их коэффициенты не зависят от искомых переменных), и их в точности столько, сколько неизвестных. Поэтому система уравнений может быть решена с помощью любого приемлемого алгоритма.

В п. 2.4.4 мы использовали метод прогонки для решения одномерных уравнений[1]. Алгоритм прогонки не может быть легко расширен на случай двумерных уравнений. Стандартные *прямые* методы для двумерных уравнений требуют большого объема компьютерной памяти и длительного времени счета. Поэтому мы будем применять итерационный метод решения этих линейных алгебраических уравнений. Как будет видно далее, в итерационнном методе важное место занимает алгоритм прогонки. Описанная ниже процедура решения является комбинацией метода переменных направлений (или метода «линия за линией») и схемы блочной коррекции.

Метод переменных направлений. Если в дискретном аналоге (5.14) в направлении оси y предположить известными ϕ_N и ϕ_S, то в нем останутся только три неизвестные: ϕ_P, ϕ_E и ϕ_W. Построив такие

[1]Имеется в виду размерность исходного дифференциального уравнения по пространственным переменным (*Прим. ред.*).

уравнения с тремя неизвестными вдоль линии, параллельной оси x, получим

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \text{ для } i = 2, \ldots, \mathrm{L2}, \tag{5.47}$$

где ϕ_i, ϕ_{i+1} и ϕ_{i-1} соответствуют ϕ_P, ϕ_E и ϕ_W, а коэффициенты соотносятся следующим образом:

$$a_i = a_P;\ b_i = a_E;\ c_i = a_W;\ d_i = a_N\phi_N^* + a_S\phi_S^* + b\,. \tag{5.48}$$

Здесь ϕ^* обозначает оценочное значение переменной. С учетом принятых способов аппроксимации граничных условий коэффициенты c_2 и b_{L2} равны нулю. Система уравнений (5.47) имеет ту же форму, что и (2.56), поэтому может быть решена алгоритмом прогонки. Для полноты приведем детали алгоритма.

Сначала рассчитаем новые коэффициенты P_i и Q_i из рекуррентных соотношений:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}}; \tag{5.49}$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}} \tag{5.50}$$

для $i = 2, \ldots, \mathrm{L2}$. Так как $c_2 = 0$, то процесс начинается с задания любых значений P_1 и Q_1. В заключение получим, что коэффициент $P_{\mathrm{L2}} = 0$, так как $b_{\mathrm{L2}} = 0$. Значения ϕ_i определяются при использовании формулы

$$\phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i \tag{5.51}$$

в обратном порядке, т.е. для $i = \mathrm{L2}, \mathrm{L2}-1, \ldots, 2$. При $i = \mathrm{L2}$ значение $\phi_{\mathrm{L2}+1}$ в формуле (5.51) не требуется, так как $P_{\mathrm{L2}} = 0$ и, следовательно, $\phi_{\mathrm{L2}} = Q_{\mathrm{L2}}$.

Метод переменных направлений состоит в том, что сначала прогонка применяется для всех линий, параллельных оси x, а затем повторяется для всех линий, параллельных оси y. Рассчитанные новые значения ϕ вдоль линии используются в качестве оценок ϕ^* при решении уравнений для соседней линии. Последовательность выбора линий может быть произвольной. В CONDUCT сначала рассматривается линия вдоль оси x сразу над нижней границей. Затем все параллельные ей линии перебираются снизу вверх до верхней границы и в обратном направлении. После этого применяется прогонка ко всем линиям вдоль оси y слева направо и обратно.

Этот алгоритм обеспечивает быстрое «проникновение» информации о граничных условиях во внутреннюю часть расчетной области. Сходимость метода переменных направлений достигается быстрее при использовании схемы блочной коррекции, которая описывается далее.

Схема блочной коррекции. Представим схему, основанную на использовании дополнительной коррекции [12]. Конкретные детали схемы взяты из [7]. Выразим дискретный аналог (5.14) в виде

$$a\phi_{i,j} = b\phi_{i+1,j} + c\phi_{i-1,j} + d\phi_{i,j+1} + e\phi_{i,j-1} + f$$

$$\text{для } i = 2, \ldots, \mathrm{L2} \text{ и } j = 2, \ldots, \mathrm{M2}, \qquad (5.52)$$

где индексы i, j у коэффициентов a, b, c, d, e и f опущены для удобства. Для приграничных контрольных объемов

$$b_{\mathrm{L2},j} = 0,\ c_{2,j} = 0,\ d_{i,\mathrm{M2}} = 0,\ e_{j,2} = 0. \qquad (5.53)$$

Основная идея схемы блочной коррекции заключается в том, что несошедшиеся значения $\phi^*_{i,j}$ с предыдущей итерации корректируются добавлением поправки $\bar{\phi}_i$, *постоянной* вдоль линии с одним и тем же i. Следовательно,

$$\phi_{i,j} = \phi^*_{i,j} + \bar{\phi}_i\,. \qquad (5.54)$$

Поправка $\bar{\phi}_i$ выбирается таким образом, чтобы в точности выполнялся *интегральный* закон сохранения во всем блоке, образованном контрольными объемами, содержащими линию с постоянным i. Уравнение для $\bar{\phi}_i$ получается подстановкой (5.54) в (5.52) и суммированием таких уравнений по всем j. В результате получаем

$$\mathtt{BL(I)}\,\bar{\phi}_i = \mathtt{BLP(I)}\,\bar{\phi}_{i+1} + \mathtt{BLM(I)}\,\bar{\phi}_{i-1} + \mathtt{BLC(I)}\,, \qquad (5.55)$$

где

$$\mathtt{BL(I)} = \sum(a - d - e)\,; \qquad (5.56)$$

$$\mathtt{BLP(I)} = \sum b\,; \qquad (5.57)$$

$$\mathtt{BLM(I)} = \sum c\,; \qquad (5.58)$$

$$\mathtt{BLC(I)} = \sum(b\phi^*_{i+1,j} + c\phi^*_{i-1,j} + d\phi^*_{i,j+1} + e\phi^*_{i,j-1} + f - a\phi^*_{i,j})\,. \qquad (5.59)$$

В этих выражениях суммирование проводится по j = 2, ..., M2. Система уравнений (5.55), записанных для i = 2, ..., L2, может быть решена с помощью алгоритма прогонки. Так как из (5.53) следует, что BLM(2) и BLP(L2) будут нулевыми, то граничные значения $\bar{\phi}_1$ и $\bar{\phi}_{\mathrm{L2}+1}$ не потребуются.

Следует заметить, что BLC(I) представляет собой суммарную невязку блока, содержащего линию с постоянным i. Поправки $\bar{\phi}_i$ обращают все интегральные невязки в нуль. Другими словами, когда проводится блочная коррекция, то для скорректированного поля ϕ в

каждом блоке выполняется закон сохранения (энергии, массы, момента и др.). Приведенное описание относится к блочной коррекции вдоль линий с постоянным i. Точно такая же процедура выполняется и для линий с постоянным j.

Хотя схема блочной коррекции обычно существенно ускоряет сходимость, иногда она может приводить к нереальным решениям и даже к расходимости. Причина заключается в том, что коррекции, проведенные в соответствии с (5.54), довольно грубы. Если поле $\phi^*_{i,j}$ сильно неравномерное, то постоянные поправки $\bar{\phi}_i$, хотя и корректируют значения *в среднем*, но могут привести к таким *локальным* значениям, которые лежат вне разумного диапазона ϕ. Из-за возможности подобного поведения схемы блочной коррекции в CONDUCT предусмотрено ее отключение. Для этой цели используется индикатор KBLOC(NF). Когда KBLOC(NF) равен нулю, то блочная коррекция не осуществляется. Значения, задаваемые KBLOC(NF) по умолчанию, равны единице.

Повторы алгоритма решения. Так как описанная процедура решения итерационная, то для получения сошедшегося решения она должна быть повторена несколько раз. Опишем, как можно контролировать число этих повторов.

Алгоритм решения реализован в подпрограмме SOLVE. Он состоит из блочной коррекции для направлений по i и по j и следующих за ней четырех проходов методом переменных направлений. Этот полный набор операций повторяется много раз. Число повторов определяется двумя переменными NTIMES(NF) и CRIT(NF), которые задаются пользователем для каждого NF. Переменная NTIMES(NF) определяет *максимально* допустимое число повторов. Всегда делается как минимум один проход по всему алгоритму решения. Переменная CRIT(NF) определяет *фактическое* число повторов алгоритма. Когда локальная относительная погрешность ε везде станет меньше или равной CRIT(NF), итерации прерываются. Локальная относительная погрешность определяется как

$$\varepsilon = |\mathrm{RES}/\mathrm{TERM}|, \tag{5.60}$$

где RES — невязка дискретного аналога,

$$\mathrm{RES} = b\phi^*_{i+1,j} + c\phi^*_{i-1,j} + d\phi^*_{i,j+1} + e\phi^*_{i,j-1} + f - a\phi^*_{i,j}; \tag{5.61}$$

TERM — наибольший из членов дискретного аналога.

По умолчанию переменные NTIMES(NF) и CRIT(NF) равны 10 и 1.E–5 соответственно. Оптимальные значения NTIMES и CRIT зависят от конкретной задачи, поэтому ниже приводятся лишь некоторые общие рекомендации.

Для получения полной сходимости нужно задать значение NTIMES очень большим, а значение CRIT очень маленьким. Однако для практических целей редко приходится использовать значения

CRIT, меньшие 1.E–6. Кроме того, ваш компьютер может не поддерживать достаточное число значащих цифр в вещественных переменных для удовлетворения очень сильному критерию сходимости. На машинах с длиной слова в 32 бита действительные числа содержат только около семи значащих цифр, поэтому значения CRIT < 1.E–6 бесполезны. Если используется большее число расчетных точек, то обычно необходимо большее число повторов алгоритма решения, чтобы погрешность ε стала меньше CRIT. В этом случае нужно использовать большее значение NTIMES. Мы могли бы всегда использовать очень большое значение NTIMES, например 1000, но если задача сформулирована неверно и система алгебраических уравнений не имеет сошедшегося решения, то компьютер будет делать лишние 1000 повторов алгоритма. Предосторожность при выборе значения NTIMES (NF) полезна — вдруг что-то пойдет не так.

Фактическое число повторов алгоритма, выполненных в SOLVE, сохраняется в переменной NTC(NF). Эти результаты могут выводиться на печать для того, чтобы убедиться, сошелся ли алгоритм (при заданном значении CRIT) до того, как был достигнут максимальный предел, установленный переменной NTIMES.

5.7. НЕЛИНЕЙНОСТЬ И РЕЛАКСАЦИИ

Обращение с нелинейностью. Мы уже видели, что задачи, решаемые с помощью CONDUCT, могут быть нелинейными. В этом случае коэффициенты в дискретном аналоге зависят от ϕ. Так как математическое описание задачи может включать несколько взаимосвязанных дифференциальных уравнений, то коэффициенты для одного ϕ могут зависеть от некоторых других ϕ.

Из-за этих связей и нелинейностей итоговое решение получается итерационно. На любом этапе коэффициенты дискретного аналога рассчитываются исходя из текущих приближенных значений всех ϕ. Следующая итерация улучшает это приближение, которое затем используется при пересчете коэффициентов. Если после многочисленных повторений алгоритма все значения ϕ перестают меняться, то достигается сошедшееся решение. Для одномерного случая эти процедуры были рассмотрены в п. 2.5.3. Те же выводы применимы и к двумерным задачам.

Применение релаксаций. Итерационный процесс не всегда приводит к сошедшемуся решению. Иногда значения ϕ колеблются от итерации к итерации или все время «плывут». Такой расходимости итерационного процесса следует избегать. Хотя для линейных уравнений метод переменных направлений, используемый в CONDUCT, гарантированно приводит к сходимости решения, для нелинейных

и взаимосвязанных задач такой уверенности не существует. Действительно, различные составляющие вычислительной схемы разрабатывались с учетом минимизации шанса получить расходимость, но для обеспечения сходимости тем не менее часто требовались дополнительные усилия. Один из способов достижения сходимости, известный как метод релаксации, заключается в замедлении изменения коэффициентов от итерации к итерации вследствие замедления изменения значений ϕ.

Идея метода релаксации была рассмотрена в п. 2.5.6. Распространим ее на случай обобщенного дискретного аналога. В CONDUCT обобщенный дискретный аналог

$$a_P\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b \tag{5.62}$$

преобразован в уравнение

$$(a_P + i)\phi_P = \sum a_{nb}\phi_{nb} + b + i\phi_P^*, \tag{5.63}$$

где i — так называемая инерция, которая определяется формулой

$$i = \frac{1-\alpha}{\alpha}\sum a_{nb}. \tag{5.64}$$

Здесь α — коэффициент релаксации, сохраняемый в массиве переменных RELAX(NF) для всех зависимых переменных. При $\alpha = 1$ релаксация отсутствует. При приближении α к нулю изменения значений ϕ сильно замедляются. Если выбрать $\alpha > 1$, то получим так называемую верхнюю релаксацию (в отличие от определенной ранее нижней при $0 \le \alpha \le 1$, которую мы называли просто релаксацией), т.е. изменения значений ϕ будут увеличены. В общем случае выбирать $\alpha > 1$ не рекомендуется. В CONDUCT все значения RELAX(NF) по умолчанию равны единице.

Как уже было отмечено, коэффициент a_P^0 в дискретном аналоге для нестационарной задачи (5.21) играет ту же роль, что и инерция i для стационарного случая. Поэтому использование конечного шага по времени Δt для решения стационарной задачи эквивалентно релаксации[1]. Выбор техники введения релаксации зависит от типа задачи, опыта и вкуса пользователя.

В примерах применения CONDUCT, приведенных в этой книге, нет необходимости в использовании релаксаций с помощью различных значений RELAX(NF) из-за того, что нелинейности в показательных задачах не столь сильные, чтобы с ними нельзя было справиться без релаксаций. Однако, когда CONDUCT будет применяться

[1] Метод решения стационарных задач, основанный на поиске асимптотического (установившегося) решения соответствующей нестационарной задачи, в отечественной литературе известен как *метод установления* (*Прим. ред.*).

для решения гораздо более сложных задач, может понадобиться введение релаксации на зависимую переменную. В этом случае необходимо будет задать приемлемое значение RELAX(NF), меньшее единицы.

Релаксации для вспомогательных переменных. В дополнение к релаксации зависимых переменных можно применить ее и для других величин. Хотя в неизменяемой части CONDUCT для этого ничего не сделано, можно ввести необходимые релаксации в адаптируемую часть. Формула для введения релаксации на вспомогательную переменную, например коэффициент диффузии Г, имеет вид

$$\Gamma = \alpha\Gamma_{н} + (1 - \alpha)\Gamma_{ст}, \qquad (5.65)$$

где индексы «н» и «ст» обозначают «новое» и «старое» значения Г.

Релаксации вида (5.65) используются в примерах 11 и 13 (см. гл. 11). Таким же образом можно ввести релаксации для источниковых членов и граничных условий. Эта возможность также рассматривалась в п. 2.5.6.

Итерации для нестационарных задач. Если нестационарная задача нелинейна, то в CONDUCT не реализована возможность на некотором шаге по времени выполнять несколько итераций и постоянно пересчитывать коэффициенты дискретных аналогов. Предполагается, что значения коэффициентов, полученные по известным значениям ϕ в момент времени t, достаточно точны в течение всего шага по времени. Из этого следует, что для нелинейных задач шаг по времени Δt должен быть достаточно мал. При решении нестационарных задач коэффициенты релаксации RELAX(NF) всегда должны быть равными единице. Иначе нестационарное решение будет представлять собой результат, соответствующий искусственно измененному уравнению (5.63), а не первоначальной постановке (5.62).

Внешние и внутренние итерации. На этом этапе вы должны хорошо усвоить реализацию итераций, шагов по времени и повторов алгоритма в SOLVE. Для начала обсудим только стационарные задачи. Задача может быть линейной или нелинейной. Для линейной задачи коэффициенты дискретных аналогов (5.14) a_P, a_E, a_W и др. постоянны. Поэтому нужно только решить систему уравнений в SOLVE и получить итоговое решение. Процедура, которую мы используем в SOLVE, итерационная, поэтому нужны многочисленные повторы для получения удовлетворительного решения. Они контролируются параметрами NTIMES(NF) и CRIT(NF). Повторы алгоритма в SOLVE рассматриваются как *внутренние* итерации. *Внешний* итерационный цикл, показанный на блок-схеме программы (см. рис. 4.1), служит для учета нелинейностей за счет пересчета на каждой итерации коэффициентов дискретных аналогов. Эти внешние итерации учитываются с помощью переменной ITER — на любом этапе ITER содержит число завершенных итераций. На каждой внешней итерации мы вызываем HEART, которая, в свою очередь, вызывает SOLVE для каждой рассматриваемой зависимой переменной.

При каждом вызове HEART пересчитывает коэффициенты. Под термином «итерация» обычно подразумевается *внешняя* итерация, которая совершается для учета нелинейностей путем пересчета коэффициентов. Внутренние итерации в SOLVE обычно описываются как повторы алгоритма решения. Таким образом, повторы алгоритма в SOLVE дают решение системы линейных алгебраических уравнений, в SOLVE коэффициенты не пересчитываются; внешние итерации служат для пересчета коэффициентов при учете нелинейности.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что для линейной задачи нужно выполнить только одну итерацию, так как не требуется пересчитывать коэффициенты. Конечно, мы должны использовать достаточно большое значение NTIMES(NF) и достаточно малое значение CRIT(NF), для того чтобы подпрограмма SOLVE дала хорошо сошедшееся решение системы алгебраических уравнений. Хотя для решения линейной задачи достаточно даже одной итерации, мы будем использовать три. Тогда, анализируя после каждой итерации значения некоторых характерных величин, можно *убедиться*, что решение действительно сошлось. Если вдруг окажется, что число повторов в SOLVE недостаточно для получения удовлетворительного по точности решения на первой итерации, то дополнительные расчеты на второй и третьей итерациях помогут получить действительно сошедшееся решение.

Число итераций, необходимое для нелинейных задач, нельзя предсказать заранее. Можно выбрать это число исходя из предварительных расчетов или ввести приемлемый критерий сходимости в адаптируемую часть программы. В неизменяемую часть программы встроено только одно условие прекращения вычислений: они прерываются, когда число завершенных итераций станет равным значению переменной LAST, которой можно присвоить любое желаемое значение. Каким образом критерий сходимости для конкретной задачи может быть введен в адаптируемую часть программы, показано в примере 2 (см. гл. 8).

Рассмотрим нестационарные задачи. При расчетах нестационарных процессов выполнение *каждого* шага по времени, строго говоря, эквивалентно решению полной стационарной задачи, а на следующем шаге по времени начинается новая задача. Если задача нелинейная, то должны реализовываться итерации на одном и том же шаге по времени. Однако в CONDUCT не существует такой возможности. Одна внешняя итерация в стационарной задаче рассматривается как один шаг по времени в нестационарной. Для большинства приложений эта особенность CONDUCT не должна вызывать каких-либо проблем. Если же вы захотите изменить это свойство CONDUCT, то можете ознакомиться с рекомендациями, приведенными в § 12.4.

5.8. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Для некоторых зависимых переменных заданные граничные условия могут привести к ситуации, когда и ϕ, и $\phi + c$, где c — произвольная константа, являются приемлемыми решениями. Это справедливо, например, для задачи о стационарной теплопроводности при заданных плотностях тепловых потоков на всех границах. Аналогичная ситуация встречается в задачах о течении в каналах с заданными плотностями тепловых потоков на стенках. В подобных случаях абсолютные значения переменной ϕ не важны, имеют смысл только разности между значениями ϕ в различных точках, которые не меняются при добавлении к полю ϕ произвольной константы. Подобные переменные называются относительными зависимыми переменными.

Если абсолютные значения таких переменных не единственны, получим ли мы сходящиеся решения? Используемый в SOLVE итерационный метод приводит к сходимости решения, абсолютные значения которого косвенно определяются начальным приближением. Прямые методы решения в данном случае неприемлемы, так как при их использовании матрица коэффициентов оказывается сингулярной.

Однако существуют случаи, когда процедура SOLVE реализует прямой метод решения. В схеме блочной коррекции псевдоодномерная задача для $\bar{\phi}_I$ решается прямым методом с помощью алгоритма прогонки. Когда ϕ является относительной переменной, в схеме блочной коррекции появляется сингулярная матрица. В SOLVE производится проверка на сингулярность, и, если она обнаруживается, в одном из блоков поправка полагается равной нулю, а все остальные значения искомой функции определяются относительно нее.

При выводе на печать относительной переменной желательно каким-либо удобным способом устранить произвольность абсолютных значений ϕ. Например, если температура T в поперечном сечении канала ведет себя как относительная переменная, то на печать лучше выводить $T - T_b$ (где T_b — среднемассовая температура) или $T - T_c$ (где T_c — температура в центре) и т.п. Кроме того, если абсолютные значения T будут очень большими, то может быть полностью потеряна очень важная информация об их разности.

В этой главе была описана вычислительная схема. В процессе описания было сделано большое число ссылок на подпрограммы и имена переменных. Можно приступить к полному описанию вычислительной программы, чему и посвящены следующие две главы.

Глава 6

НЕИЗМЕНЯЕМАЯ ЧАСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Как уже отмечалось, вычислительная программа CONDUCT состоит из двух частей: неизменяемой, содержащей общую вычислительную схему для задач, подобных задачам теплопроводности, и адаптируемой пользователем для конкретизации прикладной задачи. В этой главе подробно излагается неизменяемая часть, адаптируемая часть будет описана в гл. 7.

6.1. ВАЖНЫЕ ИМЕНА НА ЯЗЫКЕ ФОРТРАН

Все важные переменные неизменяемой части программы объединены в COMMON-блоки, которые используются в различных подпрограммах CONDUCT. Во избежание повторов этих блоков в каждой подпрограмме все COMMON-блоки записаны в файл с именем «COMMON», который подключается к соответствующим подпрограммам с помощью оператора INCLUDE. Синтаксис, использованный для INCLUDE в приведенном в конце книги листинге программы (см. прил. 1), применяется в Microsoft FORTRAN Compiler для IBM PC. Если используется другой компилятор, то необходимо изменить синтаксис согласно его требованиям. Если же компилятор не допускает использования оператора INCLUDE, то нужно везде, где встречаются эти операторы, заменить их содержимым файла COMMON.

Этот файл начинается с оператора PARAMETER, определяющего значения констант NI, NJ, NFMAX и NZMAX, которые используются при задании размеров различных массивов. Эти константы определяют размеры массивов, для которых выделяется компьютерная память, но они не задают конкретное число расчетных точек, используемых при вычислениях.

Все зависимые переменные ϕ сохраняются в массиве F(I,J,NF), где индексы I и J соответствуют номерам расчетных точек по осям x и y, а значение NF указывает на конкретную зависимую переменную, например на температуру, скорость и др. Размер массива F задан как F(NI,NJ,NFMAX). Таким образом, максимальные допустимые значения I и J заданы через NI и NJ соответственно. Из этого следует, что число расчетных точек по каждой оси, обозначенное через L1 и M1, не может превышать NI и NJ соответственно; L1 и M1 не могут быть также меньше четырех. Константа NFMAX представляет собой максимальное число различных зависи-

мых переменных, которые мы можем сохранять, а константа NZMAX — максимальное число зон для утилиты ZGRID, которая будет описана ниже. Значения, использованные в PARAMETER, чрезвычайно важны. Если вы хотите использовать более мелкие сетки, большее число зависимых переменных или большее число зон, то легко можете изменить соответствующие значения в PARAMETER.

Смысловое значение массива F(I,J,NF) для каждого NF заранее не определено. Любому NF вы можете приписать любое желаемое значение и задать приемлемые λ, Γ, S_C, S_P и граничные условия. В зависимости от выбранного смыслового значения конкретного NF вы можете также ввести более содержательное имя для части массива F. Таким образом, если вы хотите использовать NF = 2 для температуры, то можете ввести массив T(I,J) в подпрограмму ADAPT и сделать его эквивалентным массиву F(I,J,2). В дальнейшем такая практика будет использоваться во всех рассматриваемых примерах.

Не во всех задачах число зависимых переменных достигает NFMAX. Часто бывает удобно использовать свободное место в массиве F для сохранения значений вспомогательных величин, которые получаются из простых алгебраических соотношений, а не из решения дифференциального уравнения для ф. Например, в дополнение к температуре можно хранить в массиве F соответствующую *безразмерную* температуру. Далее, на некоторой итерации не обязательно решать уравнения для всех зависимых переменных. Для обеспечения всех этих возможностей введен массив KSOLVE(NF). Если какой-либо элемент массива KSOLVE(NF) равен нулю, то соответствующее ему дифференциальное уравнение для F(I,J,NF) не решается. Таким образом различаются зависимые переменные в массиве F и вспомогательные величины. Значение KSOLVE(NF) можно изменять после каждой итерации. Итак, во время итерационного процесса можем «включать» или «выключать» решение уравнений для зависимых переменных. Существует множество других возможностей, появляющихся при использовании KSOLVE.

Есть и другие массивы, которые непосредственно связаны с массивом F. Из них KBLOC(NF), NTIMES(NF), CRIT(NF) и NTC(NF) используются при решении дискретных аналогов и были определены выше (см. § 5.6). Массив RELAX(NF) применяется для задания коэффициента релаксации α (см. § 5.7). Вывод двумерного поля F(I,J,NF) производится в подпрограмме PRINT, если соответствующий индикатор KPRINT(NF) ненулевой, в противном случае вывод на печать для данного NF не происходит. При выводе на печать используется заголовок для переменной F(I,J,NF) длиной 18 символов, который должен быть записан в массив TITLE(NF). Переменная KPLOT(NF) используется в подготовке файла для графической обработки, функция этой переменной подобна функции

KPRINT(NF). Когда значение KPLOT(NF) ненулевое, то соответствующая переменная F(I,J,NF) включается в выходной графический файл. Две важные вспомогательные переменные λ и Γ сохраняются в массивах ALAM(I,J) и GAM(I,J).

Все имена переменных, соответствующих используемым геометрическим характеристикам, были рассмотрены в § 5.1, 5.2. Имена коэффициентов дискретных аналогов были представлены в § 5.4. Индикаторы граничных условий KBCI1(J), KBCL1(J) и др. были определены в п. 5.5.3. В п. 5.5.6 были даны ссылки на массивы, содержащие значения потоков на границах и использующиеся для вывода результатов на печать, такие как FLUXI1(J,NF).

Переменная ITER включает в себя число итераций, выполненных на любом заданном этапе. В нестационарном случае переменная ITER содержит число совершенных шагов по времени. Для задания шага по времени Δt используется переменная DT, значение времени в предшествующий момент t сохраняется в переменной TIME. Индикатор KSTOP определяет, когда вычисления должны быть прерваны. Сначала KSTOP равен нулю, когда он становится ненулевым, итерационный процесс прекращается. Единственным критерием остановки итераций в неизменяемой части служит равенство ITER значению LAST, где LAST — общее число итераций (или шагов по времени), заданное пользователем. Однако вы свободно можете вводить условие остановки вычислений в подпрограмме ADAPT, делая KSTOP ненулевым, когда решение достигает желаемого результата.

Переменные SMALL и BIG равны очень маленькому и очень большому числу соответственно. Полагается, что SMALL = 1.E–20, а BIG = 1.E20. Если компьютер имеет другой диапазон и не поддерживает такие числа, то требуется изменить их должным образом. Часто переменная SMALL добавляется к знаменателю, чтобы избежать деления на нуль. Переменная BIG используется для аппроксимации бесконечности.

Познакомившись с основными переменными, можно приступить к рассмотрению различных подпрограмм неизменяемой части программы. При чтении их описания будет полезно обращаться к рис. 4.1 и к листингу неизменяемой части программы (см. прил. 1). Список переменных на ФОРТРАНе приведен в прил. 2.

6.2. ПОДПРОГРАММА MAIN

Эта часть программы настолько короткая, что фактически не требует пояснений. Сначала вызывается подпрограмма DEFLT для задания значений по умолчанию многих важных переменных (далее это

будет коротко описано). Затем вызывается подпрограмма GRID для получения информации о геометрических характеристиках расчетной области, рассматриваемой в задаче, и сетки, определенной пользователем. Далее производится вызов подпрограммы READY для расчета геометрических характеристик. Начальная стадия заканчивается вызовом подпрограмма BEGIN, где определяются начальные значения зависимых переменных. Итерационный процесс начинается с оператора CALL OUTPUT. В зависимости от значения переменной KSTOP или прекращаются вычисления, или вызывается подпрограмма HEART, где производится один (внешний) итерационный цикл для определения всех соответствующих переменных.

6.3. ПОДПРОГРАММА DEFRD

Из листинга (см. прил. 1) видно, что DEFRD состоит из двух процедур — DEFLT и READY. Это отражено также на рис. 4.1. Для объединения их в одну подпрограмму используется выражение ENTRY. Структура такой конструкции выглядит следующим образом:

```
SUBROUTINE  DEFRD
ENTRY  DEFLT
. . . . . .
RETURN
ENTRY  READY
. . . . . .
RETURN
END
```

Легко заметить, что DEFLT и READY являются, по сути, отдельными подпрограммами. В этом частном случае такая конструкция не имеет явных преимуществ, однако мы будем использовать ее в адаптирумой части программы, где выигрыш от этого будет значительным.

Процедура DEFLT. Когда многоцелевая программа типа CONDUCT содержит такое большое число важных переменных и индикаторов, их правильное определение для каждой задачи является серьезной проблемой. Однако в CONDUCT эта задача облегчается разумным использованием значений, заданных по умолчанию для большинства этих параметров. В качестве значений по умолчанию для каждой переменной выбраны логически оправданные или наиболее часто встречающиеся значения. Было бы хорошо выучить все значения, задаваемые по умолчанию в программе. Тогда в подпрограмме ADAPT можно ограничиться только теми величинами, значения которых должны отличаться от их значений по умолчанию. Список всех пере-

менных и их значения, задаваемые по умолчанию, приведены в прил. 3. Все эти значения и устанавливаются в подпрограмме DEFLT.

Процедура READY. Функция READY заключается в расчете и сохранении значений величин, представленных в § 5.1, 5.2. В памяти сохраняются только одномерные геометрические характеристики. Величины вида YCVR(J)*XCV(I), хотя и полезны для дальнейшей работы, не сохраняются, так как для этого требуется введение двумерного массива. Унифицированное использование трех систем координат для MODE = 1, 2 и 3 становится возможным благодаря должному определению обобщенных геометрических характеристик, сделанному в READY. Ни в одном месте программы не нужно использовать оператор IF при программировании различных формул для каждой системы координат.

READY выполняет также еще одну функцию. Эта подпрограмма печатает заголовок с указанием используемой системы координат. Этот заголовок довольно важен, так как, если вы случайно используете не ту систему координат, сразу будете предупреждены. READY распечатывает текстовую переменную HEADER, которая содержит представленный пользователем заголовок задачи длиной до 64 символов.

6.4. ПОДПРОГРАММА HEART

Самая важная вычислительная часть CONDUCT содержится в подпрограмме HEART. Здесь рассчитываются коэффициенты дискретных аналогов и производятся модификации граничных условий. Взгляд, брошенный на подпрограмму HEART, прежде всего наткнется на внешний оператор цикла DO с параметрами N=1, NFMAX, предназначенный для организации последовательных вычислений каждой зависимой переменной. Внутри цикла производится вызов подпрограммы PHI, где пользователь определяет значения ALAM(I,J), GAM(I,J), SC(I,J), SP(I,J) и индикаторы граничных условий KBC. В заключение вызывается подпрограмма SOLVE для итерационного решения системы алгебраических уравнений.

В конце HEART увеличиваются значения TIME и ITER, а если ITER достигает своего предельного значения, определяемого переменной LAST, то KSTOP присваивается значение единицы.

Познакомившись с CONDUCT, вы должны более подробно изучить подпрограмму HEART. Только тогда вы полностью поймете, как рассчитываются коэффициенты дискретных аналогов.

6.5. ПОДПРОГРАММА SOLVE

Задача подпрограммы SOLVE заключается в итерационном решении системы линейных алгебраических уравнений вида (5.14). Алгоритм решения, реализованный в SOLVE, описан в § 5.6. Кроме повторов алгоритма нужное число раз в конце SOLVE реализованы некоторые дополнительные функции. Так, например, производится вычисление неизвестных значений ϕ на границе, когда индикатор граничных условий KBC = 2. Следует отметить, что алгоритм решения в SOLVE оперирует значениями ϕ только во внутренних точках. Когда решение получено, неизвестные значения ϕ на границе находятся из уравнений вида (5.44). В этой подпрограмме рассчитываются также плотности диффузионных потоков на границах, которые затем сохраняются в массивах FLUXI1(J,NF), FLUXL1(J,NF), FLUXJ1(I,NF), FLUXM1(I,NF). Это позволяет выводить их на печать, а также производить с ними другие действия. Используется следующее соглашение о знаках: поток положителен, если он *поступает* в исследуемую область.

Как вам уже известно, в подпрограмме DEFLT большому числу переменных по умолчанию присваиваются некоторые значения. Однако некоторые переменные должны после каждого их использования принимать первоначальное значение. Такими переменными являются, например, источниковые члены SC(I,J) и SP(I,J), все параметры граничных условий KBC, FLXC и FLXP и др. Этим переменным присваиваются их значения по умолчанию в конце подпрограмме SOLVE (заметим, что SC и SP эквивалентны CON и AP соответственно. В неизменяемой части программы имена SC и SP не используются).

6.6. ПОДПРОГРАММА TOOLS

Описанные выше подпрограммы являются важными составляющими неизменяемой части CONDUCT. Подпрограмма TOOLS — это набор необязательных процедур, облегчающих пользователю работу. Они не вызываются из неизменяемой части. Можете вызывать их из подходящих мест подпрограммы ADAPT. Подпрограмма TOOLS состоит из четырех процедур: EZGRID, ZGRID, PRINT и PLOT.

Процедура EZGRID. Пользователь должен задать значения массивов, характеризующих положения граней контрольных объемов XU(I) и YV(J). В общем случае сетка может быть неравномерной и конкретное распределение величин XU(I) и YV(J) зависит от особенностей задачи. Однако часто бывает необходимо задать равномерную сетку так, чтобы все контрольные объемы имели одинаковые размеры как по

оси x, так и по оси y. Это может быть достигнуто вызовом EZGRID из процедуры GRID, входящей в состав подпрограммы ADAPT.

Входные данные, необходимые для EZGRID, состоят из значений переменных XL и YL, соответствующих размерам расчетной области по осям x и y, и из желаемого числа контрольных объемов. При этом с помощью переменной NCVLX задается число контрольных объемов в направлении координаты x, а с помощью переменной NCVLY — соответствующее их число в направлении координаты y (для MODE = 3 переменная XL задает размер области по углу, рад). На выходе из процедуры EZGRID определены значения переменных L1, M1 и координаты граней контрольных объемов, хранящиеся в массивах XU(I) и YV(J). Процедура EZGRID может быть использована и для введения некоторых простых неравномерностей при построении сетки. С помощью формулы

$$\frac{\mathrm{XU(I)}}{\mathrm{XL}} = \left(\frac{\mathrm{I-2}}{\mathrm{L1-2}}\right)^n, \tag{6.1}$$

где n — положительное число, можно получить соответствующую неравномерную сетку при различных n.

Зависимости, получаемые согласно (6.1), изображены на рис. 6.1. При $n > 1$ сетка оказывается мельче около левой границы, а вблизи правой границы она становится грубой и почти равномерной. При $n < 1$ сетка грубая у левой границы и мелкая и почти равномерная у правой границы.

Такое разбиение у левой и правой границ может быть изменено на противоположное, если использовать формулу

$$\frac{\mathrm{XU(I)}}{\mathrm{XL}} = 1-\left(1-\frac{\mathrm{I-2}}{\mathrm{L1-2}}\right)^n. \tag{6.2}$$

Зависимости, получаемые согласно (6.2), показаны на рис. 6.2.

В процедуре EZGRID координаты граней XU(I) рассчитываются по (6.1) и (6.2). При $n = 1$, что задается по умолчанию, рассчитыва-

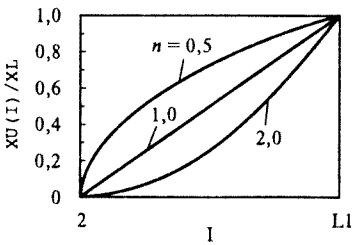


Рис. 6.1. Положения граней контрольных объемов при использовании формулы (6.1)

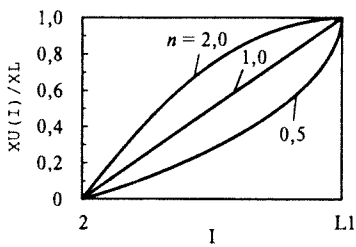


Рис. 6.2. Положения граней контрольных объемов при использовании формулы (6.2)

ется равномерная сетка. Другие значения n приводят к соответствующим неравномерностям. Значение n для оси x содержится в переменной POWERX. Хотя значения n в (6.1) и (6.2) всегда должны быть положительными, мы используем знак POWERX для выбора между формулами (6.1) и (6.2). Если POWERX > 0, EZGRID использует формулу (6.1), если же POWERX < 0, — (6.2) (где n = ABS (POWERX)). Неравномерность разбиения по оси y создается точно так же. Для задания степени неравномерности в этом направлении используется переменная POWERY.

По умолчанию POWERX и POWERY равны единице. Если вы не измените эти значения, то получите равномерную сетку. Обычно нежелательно использовать значения POWERX и POWERY больше 2 и меньше 0,5, так как это приводит к чрезмерной неравномерности сетки.

Процедура ZGRID. Расширенной версией EZGRID является процедура ZGRID, в которой область делится по осям x и y на различные зоны и для каждой зоны создается сетка, как в EZGRID.

Для нашей вычислительной процедуры очень важно, чтобы разрывы в распределении теплопроводности, источниковых членов и в граничных условиях совпадали с гранями контрольных объемов. При произвольном расположении разрывов не всегда можно добиться этого при использовании равномерной сетки или сетки, рассчитываемой по (6.1) и (6.2). В этом случае можно разделить расчетную область по оси x (так же, как и по оси y) на различные зоны таким образом, чтобы их границы совпадали с разрывами. Тогда можно задавать число контрольных объемов и значение n для каждой зоны в отдельности. Процедура ZGRID обеспечивает построение именно такой сетки.

Для ZGRID требуются следующие входные данные: число зон NZX и NZY по осям x и y соответственно, а также размер зоны, число контрольных объемов и значения n для каждой зоны в отдельности. Эти величины задаются с помощью массивов

```
(XZONE(NZ),NCVX(NZ),POWRX(NZ),NZ = 1,NZX)
```

и

```
(YZONE(NZ),NCVY(NZ),POWRY(NZ),NZ=1,NZX).
```

Используя эти данные, ZGRID рассчитывает XU(I), YV(J), L1 и M1.

Переменные POWRX(NZ) и POWRY(NZ) имеют тот же смысл, что и POWERX и POWERY в EZGRID, и по умолчанию равны единице. Число зон NZX и NZY должно быть не выше NZMAX, заданного в операторе PARAMETER файла COMMON.

Процедура PRINT. Когда найдено решение физической задачи, желательно вывести на печать информацию о сетке и двумерные поля зависимых переменных. Такой вывод осуществляется при вызове

процедуры PRINT. Хотя обычно PRINT вызывается тогда, когда уже достигнуто сошедшееся решение, в принципе эту утилиту можно вызывать в любое время. Удобным местом для вызова PRINT является OUTPUT в подпрограмме ADAPT, где желателен дополнительный вывод результатов, обеспечиваемый PRINT.

Вывод результатов процедурой PRINT включает в себя распечатку значений X(I) и Y(J), предваряющую двумерные поля тех F(I,J,NF), для которых значение KPRINT(NF) отлично от нуля. Для каждого NF в целях идентификации поля F распечатывается заголовок TITLE(NF) длиной до 18 символов, задаваемый пользователем.

Если вы вызываете PRINT из ADAPT более 1 раза (например, для получения полей температуры в различные моменты времени в нестационарной задаче), то можно избежать распечатки каждый раз одних и тех же значений X(I) и Y(J). Для этой цели служит переменная KPGR. Обычно KPGR = 1, при этом вы получаете распечатку сеточных характеристик. При KPGR = 0 сетка не выводится на печать. Если вы вызываете PRINT несколько раз, то можете установить KPGR = 0 после первого вызова PRINT.

Процедура PLOT. Если необходимо записать результаты вычислений в файл для графической обработки или для других целей, то используется процедура PLOT. Она записывает в файл информацию о сетке и полях F(I,J,NF), для которых KPLOT(NF) имеет ненулевое значение. Имя файла задается пользователем как значение текстовой переменной PLOTF.

Процедура PLOT в CONDUCT разработана в целях создания файла для построения цветных графиков программой microGRAPHICS[1]. Этот графический пакет может создавать цветные изображения полей переменных, сетки, изолиний любой скалярной величины, векторов и профилей любой переменной по любой координате. Все это может быть создано как для расчетной области целиком, так и для небольшого фрагмента, который вы захотите увеличить. Когда расчетная область содержит неактивные (заблокированные) участки, например ребра в сечении канала, то они прорисовываются с помощью программы microGRAPHICS, если в соответствующих контрольных объемах задать IBLOCK(I,J) = 1. По умолчанию значения IBLOCK(I,J) = 0, что соответствует отсутствию заблокированных зон. Программа microGRAPHICS разработана для работы на IBM PC и совместимых с ними компьютерах, при этом требуются видеокарты EGA или VGA и соответствующий цветной монитор.

Если вы используете графический пакет, отличный от microGRAPHICS, то можете соответствующим образом изменить процедуру PLOT. Если же вы не собираетесь использовать какие-

[1]Графический пакет microGRAPHICS не входит в состав CONDUCT и поставляется фирмой Innovative Research, Inc. на коммерческой основе (*Прим. ред.*).

либо графические построения, то можете просто игнорировать все ссылки на PLOT в этой книге. В связи с этим при описании примеров процедура PLOT не рассматривается, хотя в ADAPT включены операторы для вызова PLOT и определения массива IBLOCK(I,J) в тех местах, где это необходимо.

6.7. ПОДПРОГРАММА VALUES

Еще одной подпрограммой, реализованной в CONDUCT, является VALUES. Она вызывается из DEFLT и представляет собой удобную заготовку. Все ее функции могут быть выполнены с помощью простых арифметических выражений, операторов READ или, возможно, DATA. Подпрограмма VALUES задает в сжатой форме числовые значения нескольких величин. Она не может рассматриваться с точки зрения вычислительной эффективности, ее основная задача — обеспечивать удобство пользователю.

Из листинга VALUES видно как используются операторы ENTRY, которые позволяют входить в эту подпрограмму с различным числом аргументов. Так как аргументы должны быть определенного типа, представлено два набора точек входа. Входы, обозначенные DATA9, DATA8, ..., используются только для вещественных переменных, а INTA9, INTA8, ... — только для целых.

Вызов вида

```
CALL DATA4(A,2.5,G1,7.8,HG,1.2,B,5.0)
```

выполняет те же функции, что и выражения

```
A = 2.5
G1= 7.8
HG= 1.2
B = 5.0
```

Эти функции иногда могут быть выполнены с помощью оператора

```
DATA A,G1,HG,B/2.5,7.8,1.2,5.0/
```

Однако при использовании оператора DATA есть множество ограничений, состоящих из неисполняемого оператора и задания данных на стадии компиляции. Можно использовать DATA только в COMMON-блоках, объединенных в BLOCK DATA. Различные компиляторы налагают дополнительные ограничения на применение самих BLOCK DATA. Подпрограмма VALUES позволяет получить преимущества оператора DATA, избегая сопутствующих ограничений.

Числовая часть в названиях точек входа ENTRY, например DATA6 или INTA4, обозначает число переменных, которым будут присвоены значения. Хотя для полноты представлены DATA1 и INTA1, никакой выгоды от их использования нет. Вызов

```
CALL DATA1(Q,3.7)
```

проще выполнить как

```
Q = 3.7
```

Аргументы с четными номерами при вызове VALUES могут быть константами, переменными или выражениями. Например, можем использовать

```
CALL DATA3(RHO,1.2,U,22.,CP,127.)
CALL DATA2(RHOCP,RHO*CP,USQ,U*U)
```

Внимание. В вызовах вида DATA9, DATA8, ... все аргументы должны быть вещественными переменными, а вида INTA9, INTA8, ... — целыми. Выражения вида

```
CALL DATA2(A,12,B,3.5)
CALL INTA3(I,1,J,10.,K5)
```

приведут к неверным значениям A и J. Кроме того, числовая часть в имени точки входа должна в точности соответствовать числу задаваемых переменных. Например, вы не можете вызвать DATA4 и задать значения более чем четырех переменных. Выражения вида

```
CALL DATA3(A,1.2,B,1.5)
CALL DATA3(A,1.2,B,1.5,C,27.,D,108.)
```

неверны. Компилятор, возможно, и не сообщит об ошибке, но результат будет непредсказуем.

Глава 7

АДАПТИРУЕМАЯ ЧАСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

В отличие от неизменяемой части CONDUCT, завершенной во всех отношениях, адаптируемая часть представляет собой только «каркас». Она наполняется содержанием исходя из конкретной задачи и искомой информации. Примеры различных приложений CONDUCT, приведенные в этой книге, являются демонстрационными. При их подборе вовсе не требовалось, чтобы они были универсальными или важными с практической точки зрения. Эти примеры должны помочь в освоении вычислительной программы. Прежде чем приступить к рассмотрению примеров, необходимо изучить основную информацию по подпрограмме ADAPT.

7.1. СТРУКТУРА ПОДПРОГРАММЫ ADAPT

Подпрограмма ADAPT состоит из четырех отдельных процедур: GRID, BEGIN, OUTPUT и PHI. Она связана с неизменяемой частью программы посредством выражений COMMON из подключаемого файла COMMON. Мы также используем структуру ENTRY-RETURN, рассмотренную в § 6.3, для объединения нескольких процедур в одну подпрограмму. Таким образом, не надо повторять операторы COMMON во всех процедурах. Более важным преимуществом является возможность введения новых переменных без включения их в COMMON, так как они автоматически будут доступны из любой части ADAPT. Это преимущество является основанием для применения ADAPT с указанной структурой вместо написания четырех отдельных подпрограмм. Такая реализация сохраняет также всю информацию, зависящую от конкретных деталей задачи, физически в одном месте.

Конкретная реализация четырех процедур в ADAPT выполнена согласно блок-схеме, представленной на рис. 4.1. Поэтому при построении какой-либо процедуры полезно знать, что к моменту ее вызова все ранее определенные процедуры уже как минимум 1 раз были выполнены.

Важно изучить структуру программы (см. рис. 4.1) для определения частоты вызова различных частей ADAPT. Процедуры GRID и BEGIN вызываются только единожды, OUTPUT — 1 раз на каждой итерации, PHI — по 1 разу на каждой итерации для каждого NF, для которого KSOLVE(NF) $\neq 0$.

Знание частоты вызова полезно при нестандартном применении частей ADAPT. Эти процедуры представляют собой стратегически важные фрагменты программы, в которых пользователь может прерывать вычисления или корректировать исполнение неизменяемой части. Например, величины, которые не будут меняться при вычислениях, удобно ввести в GRID или BEGIN. В то же время нежелательно включать в GRID или BEGIN операции, которые зависят от изменения величин при итерационном процессе.

7.2. ОБЪЯВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Ранее уже отмечалось, что различным частям массива F можно присвоить удобные и имеющие некоторый смысл имена с помощью использования оператора DIMENSION и EQUIVALENCE. Например, если в задаче о течении в канале F(I,J,1) и F(I,J,2) содержат значения продольной скорости w и температуры T, то можно ввести переменные W(I,J) и T(I,J) следующим образом:

```
DIMENSION W(NI,NJ),T(NI,NJ)
EQUIVALENCE (F(1,1,1),W(1,1)),(F(1,1,2),T(1,1))
```

Для некоторых из вас концепция использования двумерных массивов, эквивалентных некоторой части трехмерных, может оказаться новой. Это возможно потому, что в ФОРТРАНе при сохранении массива F(I,J,NF) сначала сохраняются все элементы F(I,J,1), затем элементы F(I,J,2) и т.д. Таким образом, трехмерный массив сохраняется в виде совокупности двумерных массивов, которым можно присвоить эквивалентные имена T(I,J) или W(I,J). Это возможно также потому, что NF — третий индекс. Если бы мы использовали F(NF,I,J) или F(I,NF,J), то не смогли бы сделать массив T(I,J) эквивалентным соответствующей части F.

Если планируется использование дополнительных массивов, то их следует объявить в начале процедуры. Для уменьшения объема требуемой памяти предпочтительнее использовать уже имеющиеся массивы вместо объявления новых. Некоторые части массива F в заданной задаче могут остаться свободными, поэтому можно их использовать для других целей, возможно, сделав их эквивалентными массивам с другими именами.

7.3. ПРОЦЕДУРА GRID

Функция процедуры GRID — предоставление информации о расчетной сетке. В частности, необходимо задать значения MODE, L1, M1, XU(I) для I = 2, ..., L2 и YV(J) для J = 2, ..., M2. При MODE = 2 или 3 дополнительно должно быть задано значение радиуса R(1) для нижней границы области. Грани контрольных объемов

не обязательно должны равномерно отстоять одна от другой, но их координаты XU(I) и YV(J) с увеличением I и J соответственно должны расти. Для MODE = 2 или 3 значения YV(J) должны увеличиваться в радиальном направлении. Значения XU(2) или YV(2) не обязательно должны равняться нулю. Значение R(1) может быть ненулевым, но никогда не может быть отрицательным.

Если требуется равномерная сетка, то вместо XU(I), YV(J), L1 и M1 следует задать длины XL и YL, число контрольных объемов в переменных NCVLX и NCVLY, а затем вызвать EZGRID. Можно также задать некоторые простые неравномерности с помощью значений POWERX или POWERY, как описано в § 6.6.

Использование неравномерной сетки является мощным средством эффективного расположения заданного числа расчетных точек. Можно легко учесть разрывы в граничных условиях, свойствах материала и распределении источников, совместив места разрывов с гранями контрольных объемов. Для создания приемлемой неравномерной сетки часто бывает полезно использование предварительных расчетов на грубых сетках, которые можно создавать с помощью EZGRID, ZGRID, а также самостоятельно разработав GRID.

При построении GRID помните, что ни одна составляющая неизменяемой части программы (за исключением DEFLT) еще не была выполнена. Поэтому ни геометрические величины, ни целые числа, такие как L2 или M2, еще не были рассчитаны. То, что GRID является самой первой вызываемой процедурой, предполагает множество возможностей при ее написании. Например, можно распечатать заголовок для задачи, открыть какие-нибудь файлы, выполнить некоторые предварительные действия и ввести данные оператором READ. В примерах, приведенных в книге, мы будем задавать в GRID желаемые значения текстовых переменных HEADER, PRINTF и PLOTF, которые соответствуют заголовку задачи, имени файла для вывода результатов и имени файла для графической обработки.

Вывод результатов требует некоторых пояснений. В настоящее время основным устройством вывода для большинства компьютеров является монитор. Поэтому при обычном выводе результаты быстро «пробегут» по экрану и будут потеряны. В CONDUCT реализована возможность сохранения результатов в файле. Имя файла, который используется для этой цели, содержится в PRINTF. Этот файл открывается в начале процедуры READY как UNIT = 7. Стандартному устройству вывода (экрану) соответствует UNIT = 6. Имеется три возможности вывода результатов: только на экран, только в файл или на экран и в файл одновременно. Для выбора одной из этих возможностей служит переменная KOUT, равная 1, 2 или 3 соответственно. Значение, заданное KOUT по умолчанию, равно 3, что приводит к выводу

результатов на экран и в файл. Если же нужно изменить значение KOUT, то это должно быть сделано в процедуре GRID, так как KOUT используется сразу же после этого в процедуре READY.

Весь вывод результатов в CONDUCT помещен в цикл вида

```
DO 100 IUNIT=IU1,IU2
WRITE(IUNIT,110)---
110 FORMAT(---)
100 CONTINUE
```

Значения IU1 и IU2 определяются в начале процедуры READY на основании заданного значения KOUT.

7.4. ПРОЦЕДУРА BEGIN

Основная функция BEGIN заключается в определении начальных значений F(I,J,NF) для соответствующих NF. В случае стационарных задач начальные значения представляют собой только первое приближение. Для нестационарных задач эти значения соответствуют известным данным в момент времени $t = 0$. Если где-либо на границе известны значения F, то желательно сразу же их задать в соответствующих граничных точках для каждого F(I,J,NF). Эти значения останутся неизменными, если соответствующие значения KBC в PHI будут сохранены равными единице.

В BEGIN удобно задавать начальные значения других переменных или параметры, остающиеся неизменными в процессе вычислений, а также большое число значений для свойств материала, плотностей тепловых потоков, граничных условий и других определяющих параметров. В случае нестационарной задачи значение шага по времени Δt должно быть задано в переменной DT. Однако, если необходимо изменять DT после каждого шага по времени, то это следует делать в OUTPUT.

В демонстрационных примерах процедура BEGIN начинается с задания значений переменным TITLE(NF), KSOLVE(NF), KPRINT(NF) и др. для соответствующих зависимых переменных, затем определяются константы для свойств материала и граничных условий и, наконец, заполняется массив F(I,J,NF).

7.5. ПРОЦЕДУРА OUTPUT

В то время как другие части ADAPT должны предоставлять некоторый минимум информации для неизменяемой части программы, в отношении процедуры OUTPUT такие требования не выдвигаются. Программа будет хорошо работать, даже если оставить OUTPUT пустой. Однако (с точки зрения пользователя) OUTPUT имеет самую

важную функцию. Основная задача OUTPUT — обеспечить вывод результатов на печать. Пользователь имеет полную свободу в разработке деталей вывода результатов.

Обычно желательно вывести краткую информацию (не больше одной-двух строк) после каждой итерации и распечатать двумерные поля нужных переменных ϕ после заключительной итерации. Краткий вывод после каждой итерации полезен для наблюдения за процессами сходимости стационарного решения или эволюции во времени нестационарного решения. Распечатка двумерных полей может быть произведена вызовом процедуры PRINT, созданной специально для этого.

С помощью OUTPUT можно обработать полученные результаты после завершения расчетов. Можно, например, рассчитать число Нуссельта, коэффициент трения, суммарный тепловой поток, среднюю температуру и др. Если необходимо, зависимые переменные F(I,J,NF) перед тем, как их распечатает PRINT, могут быть переведены в безразмерные величины.

В OUTPUT также может быть введен какой-либо критерий сходимости для остановки вычислений. Например, можно следить за изменениями некоторой представляющей интерес величины (коэффициента трения, теплового потока, максимальной температуры в области и др.) и сделать KSTOP ненулевым, когда изменения от итерации к итерации станут достаточно малыми, или же можно наблюдать за изменениями F(I,J,NF) в некоторой выбранной точке.

Желательно проверить выполнение теплового баланса во всей расчетной области. Для этого рассчитываются суммарный теплоперенос через границы области и суммарная генерация тепла внутри нее. Удобно проводить эти вычисления в OUTPUT и выводить тепловой баланс на каждой итерации. Когда решение сойдется, тепловой баланс должен в точности выполниться (с учетом погрешностей округления).

Так как подпрограмма OUTPUT вызывается 1 раз на каждой итерации, то в ней удобно изменять любые величины, которые меняются в зависимости от номера итерации или временных шагов. Если нужно изменить значения переменной KSOLVE(NF) для «включения» или «выключения» решения уравнения для соответствующего ϕ, то это должно быть сделано в OUTPUT. В случае нестационарной задачи пересчитывать температуру границы или менять шаг по времени Δt также следует в OUTPUT.

7.6. ПРОЦЕДУРА PHI

В процедуре PHI содержится, наверное, наиболее важная информация о решаемой задаче. Для задач, описываемых сложными математическими моделями, PHI может быть достаточно громоздкой.

В то же время для большинства часто встречающихся задач используются и довольно простые варианты PHI.

Неизменяемая часть процедуры обеспечивает решение обобщенных дифференциальных уравнений для большого числа различных переменных ϕ. Физический смысл F(I,J,NF) не предопределен. Как же программа узнает смысл и физическое поведение каждой зависимой переменной ϕ? Это происходит не с помощью информации, записанной в TITLE(NF), а с помощью данных, определенных в PHI для каждого значения NF.

Значение KSOLVE(NF) для каждого NF проверяется в подпрограмме HEART. Если KSOLVE(NF) ≠ 0, то начинается процесс расчета коэффициентов дискретных аналогов для соответствующего F(I,J,NF). В начале этого процесса происходит вызов PHI. Задача процедуры PHI заключается в определении и последующем предоставлении значений λ, Γ, S_C, S_P и информации о граничных условиях неизменяемой части CONDUCT. Величинам λ и Γ соответствуют массивы ALAM(I,J) и GAM(I,J) при I=2, ..., L2 и J=2, ..., M2. Значения λ нужны только в случае нестационарных задач. В PHI также определяются значения коэффициентов источниковых членов S_C и S_P [см. (5.13)]. Они задаются массивами SC(I,J) и SP(I,J) для I=2, ..., L2 и J=2, ..., M2. Единицы измерения S_C и $S_P\phi_P$ должны соответствовать единицам измерения скорости генерации в *единице объема*. Кроме того, S_P должен быть отрицательным или равным нулю. Значения S_C и S_P, задаваемые по умолчанию, равны нулю, поэтому если в исходном уравнении отсутствуют источниковые члены, то не требуется выполнять никаких дополнительных действий. Наконец, задача PHI заключается в задании граничных условий с помощью индикаторов KBCI1(J), KBCL1(J), KBCJ1(I), KBCM1(I) и переменных FLXC и FLXP. Эти действия подробно были описаны в п. 5.5.3, поэтому не требуют дополнительного уточнения. Все индикаторы KBC, заданные по умолчанию, равны единице, а переменные FLXC и FLXP — нулю.

Существует простой способ определения линейности или нелинейности задачи. Если для задания величин λ, Γ, S_C, S_P и граничных условий требуются значения неизвестной зависимой переменной [(F(I,J,NF) или эквивалентной ей], то задача нелинейна. Если же эти величины в PHI могут быть рассчитаны без привлечения значений F(I,J,NF), то задача линейна.

7.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Вычислительная программа CONDUCT может быть использована для двумерных областей любой геометрической формы. Однако, когда область имеет неправильную форму, необходимо произвести до-

полнительные действия в адаптируемой части программы. Представление различных типов граничных условий для областей сложной геометрической формы обычно вызывает некоторые трудности. Поэтому при первом прочтении этой главы можете пропустить этот параграф. Однако к тому времени, как вы приступите к изучению примера 3 (см. гл. 8), вы должны ознакомиться с ним.

7.7.1. Основная концепция

CONDUCT и расчетные области сложной геометрической формы. Вычислительный метод в CONDUCT использует расчетные сетки для трех систем координат, показанных на рис. 1.1. В результате программа непосредственно применима только к расчетным областям, которые простейшим образом изображаются в этих системах. Так, программа легко используется, если расчетная область является прямоугольником для MODE = 1 или 2 и сектором круга или кольца для MODE = 3. Все остальные области в рамках нашей программы должны рассматриваться в качестве областей сложной геометрической формы.

Использование CONDUCT в случае сложной геометрической формы области возможно с применением особой технологии, описанной в этом параграфе. Эта технология является всего лишь вычислительной уловкой, разработанной в целях использования программы в случае областей сложной формы. За счет использования традиционных систем координат вычислительный метод и программа очень просты, удобны и эффективны. В то же время программу довольно непросто применить для областей сложной геометрической формы. Если бы в центре внимания находились области произвольной геометрической формы, то мы могли бы построить программу, использующую криволинейные неортогональные расчетные сетки или метод конечных элементов. Но тогда программа стала бы намного сложнее по структуре, а также трудна для понимания и использования. В представленной книге, сфокусированной на физическом понимании процессов, выбор простых систем координат кажется вполне оправданным.

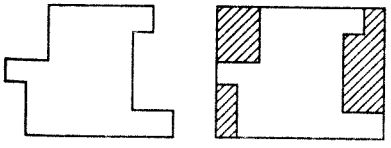
Обсудив этот вопрос, заметим, что на самом деле с помощью CONDUCT можно адекватно представлять множество областей сложной геометрической формы. Необходимые для этого вычислительные приемы основаны на физических принципах, которые следует понять прежде чем использовать. Наконец, если область имеет очень сложную геометрическую форму, CONDUCT может не подходить для решения такой задачи.

Активные и неактивные контрольные объемы. Программа формально может быть применена к областям, имеющим форму пря-

моугольника или сектора. Для удобства рассмотрим этот вопрос для прямоугольной формы (MODE = 1, 2), но те же идеи легко применимы и к части круга или кольца (MODE = 3). Представление некоторой области сложной формы начинается с того, что ее вписывают в прямоугольник. Эта процедура показана на рис. 7.1. Некоторые границы реальной области попадают внутрь расчетной. Мы должны разбить расчетную область так, чтобы границы исходной области совпали с гранями контрольных объемов. Контрольные объемы, лежащие внутри реальной области, называются *активными*. Нас интересует решение именно в них. Контрольные объемы, лежащие вне реальной области (показаны штриховкой на рис. 7.1), являются *неактивными*. Они используются для образования расчетной области простой формы, но решение в них не ищется.

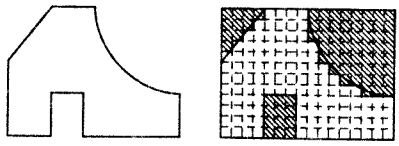
Для области, представленной на рис. 7.1, *а*, легко построить контрольные объемы так, чтобы они целиком лежали или внутри, или снаружи реальной области. Кривые или наклонные границы, показанные, например на рис. 7.2, нужно аппроксимировать ступенчатыми линиями. Хотя мы будем находить решение в приближенной области, полученная погрешность в решении (для достаточно мелкой сетки) обычно удивительно мала. Точность решения при ступенчатой аппроксимации гладкой линии *кажется* хуже, чем она получается на самом деле. В задачах о течении в каналах эта аппроксимация не приводит к замещению гладких стенок шероховатыми. Наконец, всегда можно использовать более мелкую сетку для улучшения аппроксимации формы области и уменьшения погрешности в решении. При использовании CONDUCT у вас будет множество способов проверки точности этой процедуры, например расчеты для круглой области с прямоугольной сеткой.

Так как мы хотим получить решение в активных контрольных объемах, то должны таким образом представить неактивные области, чтобы активные контрольные объемы «ощущали» заданные граничные условия. Далее для этого будут предложены некоторые приемы. Познакомившись с этими в основном вычислительными



а) *б)*

Рис. 7.1. Представление области со сложной геометрией:
а — реальная область, *б* — итоговая расчетная область, содержащая реальную



а) *б)*

Рис. 7.2. Представление наклонных и закругленных границ:
а — реальная область; *б* — расчетная область с активными и неактивными контрольными объемами

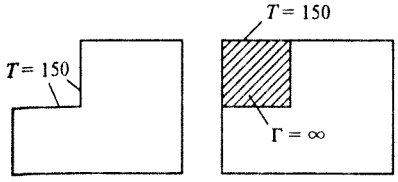
приемами, при необходимости вы сами сможете разработать дополнительные процедуры подобного рода. Большая часть представленного описания дана для задач теплопроводности. Однако в уравнениях используется обобщенная переменная ϕ и все описанное применимо к любой зависимой переменной.

7.7.2. Постановка различных граничных условий

Задано значение ϕ. Рассмотрим реальную область, на границе которой задано значение температуры T (рис. 7.3). Так как эта граница располагается *внутри* расчетной (формальной) области, то мы не можем непосредственно задать температуру на этой границе. Однако, как показано на рис. 7.3, *б*, мы можем задать известную температуру, равную 150, на *внешней* границе заштрихованной части области (которая совпадает с границей расчетной области) и положить теплопроводность, т.е. `GAM(I,J)`, внутри заштрихованной подобласти равной очень большому числу, например `1.E20`. В результате во всей подобласти с такой большой теплопроводностью установится температура 150, заданная на границе расчетной области. Таким образом реализуются граничные условия для реальной области.

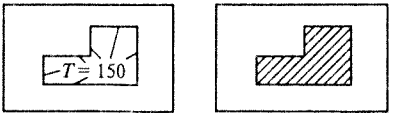
Подобным образом можно поступить с контрольными объемами, соответствующими твердому материалу в задачах о течениях в каналах с внутренними ребрами или другими твердыми выступами у стенок канала. В уравнении для скорости следует положить скорость на границе расчетной области равной нулю, а `GAM(I,J)` в контрольных объемах, соответствующих твердому материалу, сделать очень большим. В результате скорость во всей области твердых стенок будет постоянна и равна нулевой скорости на границе. Таким образом, нулевые значения скорости в области твердых стенок обеспечивают соответствующие граничные условия для течения жидкости в других контрольных объемах. В уравнении для скорости массив `GAM(I,J)` содержит значения вязкости. Интересно заметить, что такая тактика позволяет представлять твердый материал как жидкость с очень большой вязкостью.

Практика задания массива `GAM(I,J)` равным большому числу полезна, когда неактивная область соприкасается с границей расчетной области. Только тогда заданное значение переменной ϕ на формальной границе распространяется по всей области с большим значением `GAM(I,J)`. Иногда неактивная область образует «остров», как показано на рис. 7.4, полностью изолированный от формальных границ. Тогда в неактивной области недостаточно положить `GAM(I,J)` равным большому числу. Дополнительно необходимо реализовать известное значение переменной ϕ в одной или более рас-



а) б)

Рис. 7.3. Граничные условия с заданной температурой:
а — для реальной области; *б* — для формальной области



а) б)

Рис. 7.4. Внутренняя граница с известной температурой:
а — реальная область; *б* — неактивный участок, образующий «остров»

четных точках внутри острова. Это можно сделать, задав S_C и S_P в выбранных точках следующим образом:

$$S_C = M\phi_{зад}; \tag{7.1}$$

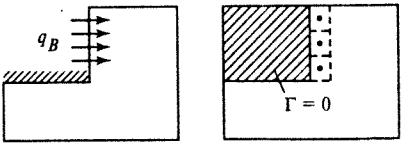
$$S_P = -M, \tag{7.1а}$$

где M — очень большое число, например `1.E20`; заданное значение ϕ обозначено через $\phi_{зад}$. Источниковые члены, определенные по (7.1) и (7.1а), обычно очень велики по сравнению с остальными членами дискретного аналога (5.14). Если их подставить в выражения для коэффициентов (5.15)—(5.21), то дискретный аналог сведется к равенству:

$$\phi_P = \phi_{зад}. \tag{7.2}$$

Таким образом, известное значение ϕ может быть задано в расчетной точке внутри острова. Так как для контрольных объемов внутри острова характерно большое значение `GAM(I,J)`, то ϕ по всему острову будет одинаковым и равным $\phi_{зад}$ (значение `GAM(I,J)` в той расчетной точке, где заданы источниковые члены в виде (7.1) и (7.1а), не должно быть столь же велико, иначе источниковые члены не будут преобладать в уравнении и результат не совпадет с (7.2). Хотя значение `GAM(I,J)` должно быть большим, оно не должно превышать значение M. Если M = `1.E20`, то `GAM(I,J)` может быть установлено равным `1.E15`).

Задана плотность потока. Предположим, что для области, показанной на рис. 7.3, *а*, в качестве граничного условия задано не значение температуры, а равенство нулю потока тепла через границу. Такое условие легко реализовать, приравняв `GAM(I,J)` к *нулю* в расчетных точках неактивной области. Так как через материал с нулевой теплопроводностью тепловой поток не проходит, то таким образом мы задаем граничное условие с нулевым потоком на границе реальной области.



а) *б*)

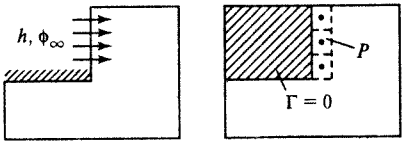
Рис. 7.5. Граничное условие с заданной плотностью теплового потока:
а — реальная область; *б* — расчетная область с выделенными контрольными объемами, получающими тепло из неактивного участка

Рассмотрим ситуацию (рис. 7.5), когда задана ненулевая плотность потока q_B. Реализуем ее в два этапа. Сначала задаем `GAM(I,J)` в заштрихованной области равным нулю. Это будет соответствовать *нулевому* потоку через рассматриваемую поверхность. Затем представим заданную плотность потока q_B в качестве дополнительного источникового члена в приграничных контрольных объемах, показанных на рис. 7.5, *б*. Это те контрольные объемы, в которые поступает тепловой поток. Дополнительный источниковый член для них имеет вид

$$S_{C,\text{доп}} = q_B A/\Delta V, \tag{7.3}$$

где A — площадь грани контрольного объема, через которую поступает поток; ΔV — объем КО. Деление на ΔV необходимо из-за того, что источниковый член S определяется как скорость генерации в единице объема. Значение S_C в (5.19) умножается на ΔV, таким образом, в итоговом дискретном аналоге будет присутствовать величина $q_B A$.

Конвективный теплообмен на границе. Рассмотрим наиболее общее граничное условие, показанное на рис. 7.6, с заданым коэффициентом теплоотдачи h и температурой окружающей среды ϕ_∞. Зададим `GAM(I,J) = 0` внутри неактивной области (исключив таким образом теплоперенос через рассматриваемую поверхность) и введем дополнительные источниковые члены в приграничных контрольных объемах. На рис. 7.7 показан типичный приграничный



а) *б*)

Рис. 7.6. Конвективное граничное условие:
а — реальная область; *б* — расчетная область с выделенными контрольными объемами, которые обмениваются теплом с неактивным участком

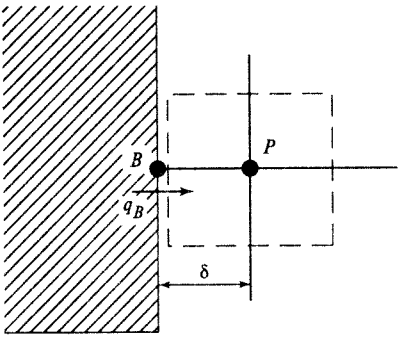


Рис. 7.7. Приграничный контрольный объем

контрольный объем. Для границы с конвективным теплообменом можно представить q_B в следующем виде:

$$q_B = h(\phi_\infty - \phi_B). \tag{7.4}$$

Теплоперенос из точки B в точку P (рис. 7.7) определяется выражением

$$q_B = \frac{\Gamma}{\delta}(\phi_B - \phi_P), \tag{7.5}$$

где δ — расстояние, показанное на рис. 7.7; Γ — теплопроводность в приграничном контрольном объеме.

Исключив ϕ_B из (7.4) и (7.5), получим

$$q_B = \left[\frac{1}{h} + \frac{\delta}{\Gamma}\right]^{-1}(\phi_\infty - \phi_P)\ . \tag{7.6}$$

Выражение в квадратных скобках является термическим сопротивлением теплопереносу между окружающей средой и расчетной точкой P. Если A — площадь, через которую тепловой поток поступает в контрольный объем, ΔV — объем этого КО, то дополнительный источниковый член при таком граничном условии будет иметь вид

$$S_{\text{доп}} = \frac{A}{\Delta V}\left[\frac{1}{h} + \frac{\delta}{\Gamma}\right]^{-1}(\phi_\infty - \phi_P). \tag{7.7}$$

Предполагается, что дополнительный источниковый член в (7.7) будет содержать обе части S_C и S_P:

$$S_{C,\,\text{доп}} = \frac{A}{\Delta V}\left[\frac{1}{h} + \frac{\delta}{\Gamma}\right]^{-1}\phi_\infty\,; \tag{7.8}$$

$$S_{P,\,\text{доп}} = -\frac{A}{\Delta V}\left[\frac{1}{h} + \frac{\delta}{\Gamma}\right]^{-1}. \tag{7.8а}$$

Задано значение ϕ (другой подход). Если коэффициент теплоотдачи h (см. рис. 7.6) станет очень большим, то температура границы приблизится к ϕ_∞. Это обеспечивает еще один способ задания известной температуры на границе физической области. Конечно, для задачи, показанной на рис. 7.3, подходит и процедура с большим значением Γ, но она не будет «работать» в случае более сложных граничных условий, например, таких, которые приведены на рис. 7.8. В этом случае необходимо задавать дополнительные

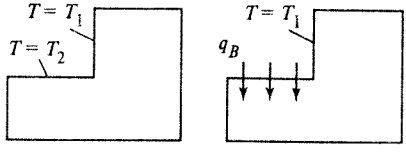


Рис. 7.8. Примеры граничных условий, которые нельзя реализовать установлением большой теплопроводности в неактивной зоне

источниковые члены для приграничных контрольных объемов. Если температуру в точке B задать как $\phi_{зад}$, то требуемые дополнительные источниковые члены в типичном контрольном объеме, показанном на рис. 7.7, будут иметь вид:

$$S_{C,\,доп} = \frac{A}{\Delta V}\,\frac{\Gamma}{\delta}\,\phi_{зад}; \tag{7.9}$$

$$S_{P,\,доп} = -\frac{A}{\Delta V}\,\frac{\Gamma}{\delta}\,. \tag{7.9а}$$

Эти выражения получены из (7.8) и (7.8а) при очень большом коэффициенте теплоотдачи h.

7.7.3. Заключительные комментарии и напоминания

Методика, описанная для представления области со сложной геометрией, должна быть тщательно изучена. Приведем некоторые комментарии и предостережения.

1. Способ выражения проводимости между двумя соседними расчетными точками в виде формул (2.78) и (5.12) позволяет реализовывать разрывы в распределении GAM(I,J). Вот почему мы легко можем положить GAM(I,J) равным нулю или очень большому числу и получить соответствующие результаты.

2. Включение неактивных участков в расчетную область посредством больших значений Г или источниковых членов может сильно повлиять на схему блочной коррекции, описанную в § 5.6. Если блок содержит некоторый неактивный контрольный объем, то при решении уравнения для этого блока получаем $\bar{\phi}_i = 0$. Поэтому блочная коррекция не работает должным образом, если большинство блоков содержат неактивные контрольные объемы. При этом используется схема выборочной блочной коррекции, которая исключает неактивные контрольные объемы из вычислений. Это делается в подпрограмме SOLVE, где коэффициенты дискретных аналогов, превышающие 1.E20, не участвуют в схеме блочной коррекции.

3. Описанное представление области со сложной геометрией также подходит и для задач сопряженного теплообмена, в которых теплопроводность в твердом теле рассматривается вместе с конвекцией в прилегающей жидкости. Это будет использоваться в некоторых демонстрационных примерах применения программы к задачам о течении в каналах.

4. Выведенные на печать двумерные поля переменной ϕ будут содержать значения во всех расчетных точках, включая и те, что лежат в неактивных областях. Обычно не следует обращать внимания

на эти значения, особенно если GAM(I,J) в неактивной зоне равно нулю. В этом случае значения ϕ в активной области никак не зависят от значений этой переменной в неактивной зоне. Даже если рассчитанные значения ϕ в неактивной зоне выглядят абсурдными, они не влияют на решение в активной области.

5. Выведенные на печать результаты содержат значения ϕ в расчетных точках, а не на гранях контрольных объемов. Внутренние границы (см. точку B на рис. 7.7) совпадают с гранями контрольных объемов, и значения ϕ на них не выводятся автоматически. Если нужно знать значение ϕ_B, то его можно найти по (7.4) и (7.5).

6. Когда применяется ступенчатая аппроксимация наклонной или кривой границы (см. рис. 7.2), площадь поверхности изначальной границы может получиться существенно меньше площади поверхности границы со ступеньками. Поэтому необходима осторожность в использовании площади в выражениях для тепловых потоков, коэффициентов теплопереноса и др. Например, если задан суммарный тепловой поток через наклонную границу, то при вычислении *средней плотности* теплового потока лучше использовать реальную площадь границы, а не искусственно увеличенную при ступенчатой аппроксимации. Если задана плотность теплового потока, перпендикулярного наклонной границе, то мы должны использовать ее компоненты q_x и q_y по осям x и y соответственно. Запомните, что вычислительные приемы для представления области со сложной геометрией только тогда хорошо работают, когда они используются грамотно и осторожно.

7. Если заданную в одной или нескольких точках температуру нужно распространить с помощью (7.1) и (7.1а) по всему острову, изображенному, например на рис. 7.4, то необходимо во всех точках острова положить GAM(I,J) равным очень большому числу. Это гарантирует соблюдение желаемой температуры во всем острове вплоть до граней контрольных объемов, которые совпадают с внешней поверхностью острова. Тогда для контрольных объемов в активной области будут реализованы требуемые граничные условия.

8. Заметим, что с помощью формул (7.3) и (7.9) можно получить *дополнительные* источниковые члены для приграничных контрольных объемов, необходимые для задания граничных условий. Они должны быть *добавлены* к обычным источниковым членам. Распространенной является ошибка использования (7.3) или (7.9) просто для заполнения массивов SC(I,J) и SP(I,J), тем самым игнорируется генерация тепла, которая может иметь место в этих контрольных объемах. Это проиллюстрировано в примере 4 (см. § 8.4).

9. Мы уже видели множество интересных способов использования источниковых членов S_C и S_P. Если бы в вычислительной про-

цедуре не применялось линейное выражение для источникового члена [см. (2.41) и (5.13)], то большинство из этих удобных способов было бы недоступно.

10. Наконец, использование неактивных контрольных объемов для представления областей со сложной геометрией является в ряде случаев недопустимо расточительным приемом, потому что бессмысленные значения переменных в этих объемах сохраняются в памяти и над ними производятся арифметические действия. Тем не менее то, что программа, имеющая все преимущества работы с простыми областями, может быть также применена к областям сложной геометрической формы, представляет существенную практическую ценность.

7.8. Рекомендации по начальной работе с программой

Сейчас, когда описание программы CONDUCT уже завершено, можно рассмотреть множество возможных ее применений. При этом очень важно приобрести опыт в ее использовании. Поэтому трудно переоценить необходимость начальных пробных исследований. Такие исследования полезны при изучении как поведения физической задачи, так и особенностей самой программы. Они могут быть выполнены с использованием грубых сеток, что уменьшит время расчетов и облегчит изучение результатов.

Для решения любой задачи не начинайте писать подпрограмму ADAPT «с нуля». Вы всегда должны начинать с одного из имеющихся примеров ADAPT и шаг за шагом изменять его, пока не запрограммируете нужную задачу. Адаптируемую часть необходимо периодически тестировать после нескольких изменений. Тогда, если результаты нежелательны, легко можно обнаружить, какие изменения «ответственны» за возникшую проблему. Должно быть подавлено искушение перейти сразу к сложным задачам. Подпрограмма ADAPT и ваш опыт должны постепенно расти, чтобы потом достичь удачного решения физической задачи. Даже здесь «Walk before you run» (иди, прежде чем бежать) продолжает оставаться мудрой политикой.

В демонстрационных примерах используемые сетки достаточно грубы. Это сделано для того, чтобы избежать громоздкого вывода результатов. Для начальной работы с CONDUCT вам также лучше использовать грубые сетки. Однако разумные результаты, полученные на грубых сетках, не должны рассматриваться в качестве точных решений дифференциальных уравнений. Если требуются точные численные значения, то вы должны использовать существенно более мелкую сетку. Для некоторого заданного типа задач нужно определить, насколько мелкой должна быть сетка, чтобы дальнейшее уменьшение ее характерных размеров существенно не влияло на ре-

шение. Для нестационарных задач шаг по времени Δt также должен быть достаточно мал для получения точного решения.

В заключение заметим: вы не должны забывать, что вычислительная программа, такая как CONDUCT, является просто инструментом для решения системы дифференциальных уравнений численным методом. Если уравнения удовлетворительно описывают реальность, то рассчитанные результаты очень полезны. Однако, когда математическая модель сомнительна, то результаты вычислений настолько же «хороши», насколько лежащие в их основе уравнения. В таких случаях желательно провести некоторую экспериментальную проверку, которая часто приводит к дальнейшей доработке и корректировке математической модели. Нет безусловных гарантий того, что итерационный метод, используемый в CONDUCT, приведет к сходимости решений для всех типов нелинейностей. Несмотря на это, вы можете черпать надежду из эмпирически доказанного факта, что программа позволяет решать очень большое число сложных задач. Подобный успех ожидает и вас.

7.9. Введение в примеры

Главы 8, 10 и 11 содержат примеры применения CONDUCT для решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности, полностью развитого течения, теплопереноса в каналах и др. Обсудим некоторые общие характеристики всех этих примеров.

Примеры применения CONDUCT, данные в книге, иллюстрируют, как многоцелевая вычислительная программа может быть использована для решения множества прикладных задач. Примеры разработаны для помощи студентам в учебном процессе, поэтому служат той же цели, что и решение задач в большинстве учебников. Каждая задача выбрана для акцентирования внимания на нескольких специальных возможностях программы. Другие усложнения намеренно сведены к минимуму. Так как простота чрезвычайно важна для изучения, то стиль программирования в подпрограмме ADAPT часто сохранен в грубоватой, необобщенной и немного неэффективной форме. Оптимальных, эффективных и обобщенных действий алгоритма мы умышленно избегаем, так как они сложны для понимания. По этой же причине не используется оператор READ, а числовые данные задаются напрямую в подпрограмме ADAPT. Это значит, что мы должны перекомпилировать подпрограмму каждый раз, когда нужно ввести изменения в данные. Да, это так, но в демонстрационных приложениях мы добивались ясности и простоты, а не эффективности.

Физические задачи, выбранные в качестве примеров, значения величин, единицы измерения, свойства жидкости и др. не обязатель-

но имеют практический смысл. Часто задачи специально придуманы для иллюстрации некоторой вычислительной особенности. Предположения о физических процессах могут не иметь место в действительности. В большинстве случаев целью является демонстрация методов решения задачи с помощью программы, а не выбор задачи, которая важна в инженерной практике. Постановка задач теплопроводности (см. гл. 8) и результаты приведены в *размерных* величинах. В случае задач о течении в каналах (см. гл. 10) целью является анализ решения в *безразмерном* виде. Когда задаются значения физических величин, например, теплопроводности или источникового члена, используются простые числа ($k = 2$, $S = 5$) и не приводятся единицы измерения. При практическом применении CONDUCT нужно использовать реальные значения свойств материала в некоторой удобной системе единиц измерения. Однако для реализации целей, которые преследует эта книга, нет никаких особых преимуществ в задании материала в виде алюминия с теплопроводностью 204 Вт/(м · К).

Все решения в примерах получены с использованием одной частной сетки. Не проведено улучшение сетки, чтобы убедиться в том, что численное решение достаточно близко к точному. В большинстве примеров не применялся критерий сходимости для прерывания последовательности итераций, вместо этого было заранее задано число итераций и рассматривалось приближение к сошедшемуся решению. Это не значит, что улучшение сетки и использование критерия сходимости не важны. Предполагается, что эти проблемы будут изучены вами самостоятельно.

Следует внимательно изучить все примеры в книге. Описания, данные в главах 8, 10 и 11, содержат всю основную информацию, но вы должны попытаться понять каждую строку в подпрограмме ADAPT. Первые несколько примеров рассмотрены очень подробно, в последующих примерах обсуждаются только дополнительные особенности. После изучения представленных примеров желательно поэкспериментировать с программой, внеся небольшие изменения в исходные данные. Подобное первоначальное знакомство с процессом решения задачи и поведением программы очень полезно. Вы должны побороть искушение сразу перейти к сложным приложениям, представляющим практический интерес.

Когда фаза обучения закончена, необходимость в легких для понимания и, возможно, неэффективных формах адаптируемых подпрограмм теряет актуальность. Для заданного класса задач могут быть написаны более общие и эффективные процедуры. Если вы собираетесь много раз запускать программу, то для нее желательно построить специальную автоматическую версию ADAPT, в которой необходимые данные получаются интерактивно с использованием оператора READ или файла данных.

Глава 8

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ CONDUCT ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Познакомившись с деталями неизменяемой части CONDUCT и с основами структуры адаптируемой части, приступим к созданию конкретных версий ADAPT для решения частных задач. Представленные в книге примеры создания ADAPT служат иллюстрацией некоторых аспектов математической формулировки задачи и связанного с этим программирования. В каждом примере рассмотрим постановку задачи, соответствующее построение подпрограммы ADAPT, список новых имен, вводимых на ФОРТРАНе, листинг получившейся подпрограммы ADAPT, результаты вычислений и приведем некоторые комментарии к ним. В процессе ознакомления с описанием ADAPT придется часто обращаться к листингу этой подпрограммы. Закончив тщательное изучение представленных примеров, вы сможете самостоятельно разработать приложения программы к другим задачам.

8.1. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА (ПРИМЕР 1)

8.1.1. Постановка задачи

Начнем с очень простой задачи о стационарной теплопроводности в плоском теле квадратной формы. Как показано на рис. 8.1, на границе задана температура T_w. Тело имеет постоянную теплопроводность k, мощность источника тепла также постоянна и равна S.

Будем использовать следующие значения параметров:

$$T_w = 0;\ k = 1;\ S = 5. \qquad (8.1)$$

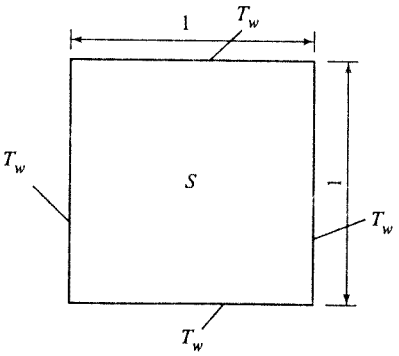


Рис. 8.1. К задаче о стационарной теплопроводности при наличии внутренних источников тепла

Нашей целью является расчет стационарного поля температуры. В данном примере часто будут использоваться значения параметров, задаваемые по умолчанию, поэтому итоговая подпрограмма ADAPT будет довольно короткой.

8.1.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Построим равномерную сетку, задав размеры области XL и YL, число контрольных объемов по каждой оси сделаем равным пяти. Здесь по умолчанию MODE = 1. Также по умолчанию используем заданные величины POWERX и POWERY. В результате равномерная сетка создается вызовом процедуры EZGRID.

BEGIN. Обозначив выбранную переменную через NF = 1, зададим числовые значения в соответствии с (8.1). Затем заполним массив T(I,J) значениями TW, задав таким образом граничные условия в граничных точках и приемлемое начальное условие во внутренних точках.

OUTPUT. На каждой итерации выведем на печать значения температуры в трех характерных точках. Этот вывод результатов поможет проверить сходимость решения. На последней итерации выведем на печать поле температуры T(I,J), вызвав PRINT.

PHI. Зададим значения Γ и S_C. По умолчанию $S_P = 0$. Так как на всей границе задана температура, не нужно менять значения индикатора KBC.

8.1.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

COND — теплопроводность k [см. (8.1)];
SOURCE — мощность источника тепла в единице объема S [см. (8.1)];
T(I,J) — температура T;
TW — температура на границе T_w [см. (8.1)].

8.1.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C ------------------------------------------------------------
C-- EXAMPLE 1 - STEADY CONDUCTION WITH HEAT GENERATION
C ------------------------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C ************************************************
      DIMENSION T(NI,NJ)
      EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1))
C -*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY GRID
```

```
      HEADER='STEADY CONDUCTION WITH HEAT GENERATION'
      PRINTF='PRINT1'
      PLOTF='PLOT1'
      CALL DATA2(XL,1.,YL,1.)
      CALL INTA2(NCVLX,5,NCVLY,5)
      CALL EZGRID
      RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY BEGIN
      TITLE(1)=' TEMPERATURE '
      CALL INTA4(KSOLVE(1),1,KPRINT(1),1,KPLOT(1),1,LAST,3)
      CALL DATA3(TW,0.,COND,1.,SOURCE,5.)
      DO 100 J=1,M1
      DO 100 I=1,L1
      T(I,J)=TW
100   CONTINUE
      RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY OUTPUT
      DO 200 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,210)
210     FORMAT(2X,'ITER',3X,'T(2,2)',4X,'T(4,2)',4X,
     1       'T(6,3)')
        WRITE(IUNIT,220) ITER,T(2,2),T(4,2),T(6,3)
220     FORMAT(2X,I2,2X,1P3E10.2)
200   CONTINUE
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        CALL PRINT
        CALL PLOT
      ENDIF
      RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY PHI
      DO 300 J=2,M2
      DO 300 I=2,L2
        GAM(I,J)=COND
        SC(I,J)=SOURCE
300   CONTINUE
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

8.1.5. Результаты расчетов

```
RESULTS OF CONDUCT FOR CARTESIAN COORDINATE SYSTEM
**************************************************

STEADY CONDUCTION WITH HEAT GENERATION

 ITER       T(2,2)      T(4,2)      T(6,3)
 0        0.00E+00    0.00E+00    0.00E+00
 1        6.81E-02    1.46E-01    1.29E-01
 2        6.81E-02    1.46E-01    1.29E-01
 3        6.81E-02    1.46E-01    1.29E-01

 I =     1        2        3        4        5        6        7
 X = 0.00E+00 1.00E-01 3.00E-01 5.00E-01 7.00E-01 9.00E-01 1.00E+00

 J =     1        2        3        4        5        6        7
 Y = 0.00E+00 1.00E-01 3.00E-01 5.00E-01 7.00E-01 9.00E-01 1.00E+00

****** TEMPERATURE ******

 I =     1        2        3        4        5        6        7
  J
  7  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
  6  0.00E+00 6.81E-02 1.29E-01 1.46E-01 1.29E-01 6.81E-02 0.00E+00
  5  0.00E+00 1.29E-01 2.71E-01 3.13E-01 2.71E-01 1.29E-01 0.00E+00
  4  0.00E+00 1.46E-01 3.13E-01 3.63E-01 3.13E-01 1.46E-01 0.00E+00
  3  0.00E+00 1.29E-01 2.71E-01 3.13E-01 2.71E-01 1.29E-01 0.00E+00
  2  0.00E+00 6.81E-02 1.29E-01 1.46E-01 1.29E-01 6.81E-02 0.00E+00
  1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
```

8.1.6. Обсуждение результатов

Как и ожидалось, решение сошлось за одну итерацию. Окончательные результаты показывают, что выделение тепла создает высокую температуру в центре тела. Заметим также, что распределение температуры симметрично относительно горизонтальной и вертикальной линий, проходящих через центр тела.

Точное решение этой задачи дает *максимальную* температуру, равную 0,368. Если сравнить его с численным решением (результат которого составляет 0,363), то можно сделать вывод, что совпадение очень хорошее, учитывая малое число используемых расчетных точек.

8.1.7. Заключительные замечания

Вы ознакомились с первым применением программы CONDUCT. Далее можно рассмотреть различные варианты этой задачи. Измените число расчетных точек, значения k и S или размеры расчетной области. Для области, представляющей собой квадрат со стороной L, безразмерная температура $k(T - T_w)/(SL^2)$ является функцией безразмерных координат x/L и y/L. Можно проверить это утверждение, решив задачу с различными значениями k, S, L и других параметров и показав, что безразмерная температура остается неизменной. Точное решение дает максимальное значение этой безразмерной температуры, равное 0,0737.

Такие простые исследования с использованием CONDUCT полезны при ознакомлении с программой. Изучая результаты, вы также улучшите свое понимание взаимосвязи между температурой, теплопроводностью, мощностью источника тепла и др.

8.2. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ (ПРИМЕР 2)

8.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим довольно сложную ситуацию. Задача разработана для иллюстрации таких особенностей, как различные граничные условия, переменная теплопроводность и непостоянный источниковый член (рис. 8.2). Численные значения и соотношения для свойств материала заданы следующими:

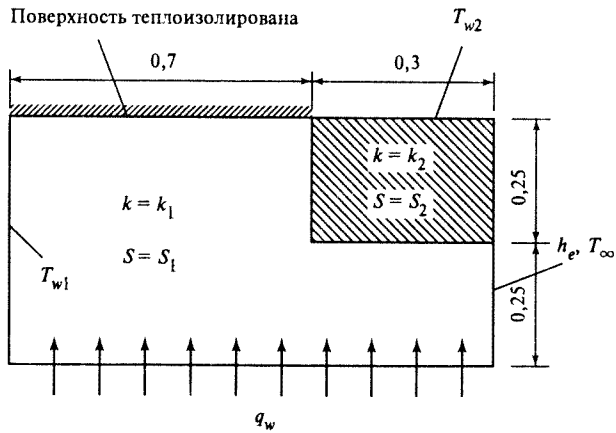


Рис. 8.2. К задаче стационарной теплопроводности при смешанных граничных условиях

$$T_{w1} = 100;\ T_{w2} = 20;\ T_\infty = 5; \tag{8.2}$$

$$k_1 = 5;\ k_2 = 1 + 0{,}01T;\ h_e = 20;\ q_w = 800; \tag{8.2а}$$

$$S = \begin{cases} 0 & \text{(в заштрихованной области);} \\ a - bT^3 & \text{(в незаштрихованной области),} \end{cases} \tag{8.2б}$$

где $a = 10^3$; $b = 4 \cdot 10^{-5}$.

8.2.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Так как в задаче присутствуют разрывы в распределении теплопроводности и в граничных условиях, следует использовать сетку, у которой грани контрольных объемов совпадают с указанными разрывами. Выберем десять контрольных объемов по оси x и шесть по оси y.

BEGIN. Так как задача нелинейна, необходимы итерации. Выберем критерий сходимости и будем прекращать вычисления, когда удовлетворяется этот критерий. При этом желательно задать некоторые минимальное (ITRMIN) и максимальное (LAST) число итераций. Эти величины определяются в процедуре BEGIN вместе с числовыми значениями T_{w1}, T_{w2} и других параметров [см. (8.2)]. Наконец, массив T(I,J) заполняется таким образом, чтобы T_{w1} было выбрано в качестве начального приближения во всех внутренних точках, а граничные условия в соответствующих точках задавались равными T_{w1} и T_{w2}.

OUTPUT. В дополнение к печати желаемых результатов добавим вывод приемлемого критерия сходимости. Можно судить о сходимости по изменениям от итерации к итерации значений T(I,J) или по изменениям некоторой относительной величины. В качестве основы для критерия сходимости будем использовать суммарный тепловой поток через левую границу области. Эта величина, обозначенная через HTFLX, рассчитывается суммированием потоков через грани всех контрольных объемов на этой границе. В этих вычислениях используем величину FLUXI1(J,1), определенную в неизменяемой части CONDUCT. Заметим, что J — индекс узловой точки, лежащей на левой границе, а 1 — значение NF для переменной T(I,J).

На каждой итерации выведем на печать несколько характерных значений T(I,J) и значения переменной HTFLX. Величина HTFLX на предыдущей итерации сохраняется в переменной с именем HTFLXO. В качестве критерия сходимости используется условие

малости относительного изменения HTFLX (следует обратить внимание на использование здесь модуля функции. Требуется, чтобы изменения были малы. Если же модуль не использовать, то критерий будет удовлетворяться даже в том случае, когда относительные изменения HTFLX будут большие, но отрицательные).

Этот частный пример был выбран для иллюстрации построения и применения критерия сходимости. Подобный критерий должен быть использован во всех нелинейных задачах. Однако в целях упрощения мы не будем использовать критерий сходимости в остальных примерах этой книги. Будем просто задавать переменную LAST, равной желаемому числу итераций (это число может быть найдено из некоторых предварительных расчетов). Только в этом примере проиллюстрирована проверка общего теплового баланса. Представление подобных балансов очень полезно. Рекомендуется включать их в те приложения, которые вы разрабатываете. Для полностью сошедшегося решения общий тепловой баланс должен в точности выполняться (с учетом погрешностей округления компьютера).

Общий тепловой баланс рассчитывается после удовлетворения критерия сходимости. Для его расчета сначала определяются суммарные тепловые потоки через четыре границы области. Затем заданный источниковый член интегрируется по всей незаштрихованной области (см. рис. 8.2). И наконец, определяется разность между выходящим тепловым потоком и суммарной генерацией тепла в области. Следует ожидать, что разница будет равна нулю (или будет очень малой).

После окончания расчетов на печать выводятся локальные тепловые потоки через четыре границы области, величины для определения теплового баланса и поле T(I,J), которое печатается по вызову PRINT. Для прерывания вычислений полагается KSTOP = 1.

PHI. Заштрихованная область распознается с помощью оператора IF. Значения теплопроводности определяются по (8.2а). Источниковый член в незаштрихованной зоне линеаризован в соответствии с процедурой, описанной в п. 2.5.4. Определить S_C и S_P можно следующим образом:

$$S_C = a + 2b(T_P^*)^3; \tag{8.3}$$

$$S_P = -3b(T_P^*)^2. \tag{8.3а}$$

Источниковый член в заштрихованной области остается нулевым по умолчанию. И наконец, граничные условия задаются через необходимые значения KBC, FLXC и FLXP.

8.2.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

AK1 — теплопроводность k_1 [см. (8.2а)];
DIFF — относительная разность для критерия сходимости;
GEN — суммарное выделение тепла;
HE — коэффициент теплоотдачи h_e на правой границе [см. (8.2а)];
HTBAL — характеристика теплового баланса;
HTFLX, HTL — суммарный тепловой поток через левую границу;
HTFLXO — значение HTFLX с предыдущей итерации;
HTB — суммарный тепловой поток через нижнюю границу;
HTOUT — то же через границу расчетной области;
HTR — то же через правую границу;
HTT — то же через верхнюю границу;
ITRMIN — минимальное число выполняемых итераций;
QW — постоянная плотность теплового потока q_w через нижнюю границу;
T(I,J) — температура T;
TINF — температура окружающей среды T_∞ [см. (8.2)];
TW1, TW2 — температуры границ T_{w1} и T_{w2} [см. (8.2)].

8.2.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------------------------------
C- EXAMPLE 2 - STEADY CONDUCTION WITH MIXED BOUNDARY
CONDITIONS
C-------------------------------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C*****************************************************************
     DIMENSION T(NI,NJ)
     EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1))
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
     ENTRY GRID
     HEADER='STEADY CONDUCTION WITH MIXED BOUNDARY
    1 CONDITIONS'
     PRINTF='PRINT2'
     PLOTF='PLOT2'
     CALL DATA2(XL,1.,YL,0.5)
     CALL INTA2(NCVLX,10,NCVLY,6)
     CALL EZGRID
     RETURN
```

```
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
      ENTRY BEGIN
      TITLE(1)=' TEMPERATURE '
      CALL INTA5(KSOLVE(1),1,KPRINT(1),1,KPLOT(1),1,
     1 ITRMIN,3,LAST,15)
      CALL DATA6(AK1,5.,TW1,100.,TW2,20.,TINF,5.,
     1 HE,20.,QW,800.)
      DO 100 J=1,M1
      DO 100 I=1,L1
      T(I,J)=TW1
100   CONTINUE
      DO 110 I=2,L2
      IF(X(I).GT.0.7) T(I,M1)=TW2
110   CONTINUE
      HTFLXO=0.
      RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
      ENTRY OUTPUT
      HTFLX=0.
      DO 200 J=2,M2
        HTFLX=HTFLX+ARX(J)*FLUXI1(J,1)
200   CONTINUE
      DO 210 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,220)
220   FORMAT(2X,'ITER',3X,'T(3,3)',4X,'T(5,4)',4X,'T(10,7)'
     1 ,4X,'HEAT FLOW (LEFT FACE)')
      WRITE(IUNIT,230) ITER,T(3,3),T(5,4),T(10,7),HTFLX
230   FORMAT(2X,I2,2X,1P3E10.2,8X,1PE11.3)
210   CONTINUE
CREATE A CONVERGENCE CRITERION
      IF(ITER.LT.ITRMIN) RETURN
      DIFF=ABS((HTFLX-HTFLXO)/(HTFLX+SMALL))
      HTFLXO=HTFLX
      IF(DIFF.LE.1.E-5.OR.ITER.EQ.LAST) THEN
CALCULATE QUANTITIES FOR OVERALL HEAT BALANCE
      HTR=0.
      DO 231 J=2,M2
      HTR=HTR+ARX(J)*FLUXL1(J,1)
231   CONTINUE
      HTL=HTFLX
      HTB=QW*XL
      HTT=0.
      DO 232 I=2,L2
        IF(X(I).GT.0.7) HTT=HTT+XCV(I)*FLUXM1(I,1)
232   CONTINUE
      HTOUT=-(HTL+HTR+HTB+HTT)
```

```
      GEN=0.
      DO 233 J=2,M2
      DO 233 I=2,L2
        IF(X(I).GT.0.7.AND.Y(J).GT.0.25) GO TO 233
        GEN=GEN+(1000.-4.E-5*T(I,J)**3)*XCV(I)*YCV(J)
233   CONTINUE
      HTBAL=HTOUT-GEN
CONSTRUCT FINAL PRINTOUT
      DO 240 IUNIT=IU1,IU2
        WRITE(IUNIT,250)
250     FORMAT(1X,/,' J',8X,'Y(J)',5X,'FLUX(LEFT)',4X,
     1  'FLUX(RIGHT)')
        DO 260 J=M2,2,-1
          WRITE(IUNIT,270) J,Y(J),FLUXI1(J,1),FLUXL1(J,1)
270       FORMAT(1X,I2,5X,1PE9.2,3X,1PE9.2,5X,1PE9.2)
260     CONTINUE
        WRITE(IUNIT,280)
280     FORMAT(1X,/,' I',8X,'X(I)',5X,'FLUX(BOTTOM)',2X,
1       'FLUX(TOP)')
        DO 290 I=2,L2
          WRITE(IUNIT,270) I,X(I),FLUXJ1(I,1),FLUXM1(I,1)
290     CONTINUE
        WRITE(IUNIT,291) HTOUT,GEN,HTBAL
291     FORMAT(/1X,'OVERALL HEAT BALANCE'/1X,20('*')/1X,
1       'HEAT OUTFLOW',5X,'GENERATION',6X,'DIFFERENCE'/2X,
2       1PE10.3,6X,1PE10.3,5X,1PE10.3)
240   CONTINUE
      CALL PRINT
      CALL PLOT
      KSTOP=1
    ENDIF
    RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
    ENTRY PHI
    DO 300 J=2,M2
    DO 300 I=2,L2
      IF(X(I).GT.0.7.AND.Y(J).GT.0.25) THEN
        GAM(I,J)=1.+0.01*T(I,J)
      ELSE
        GAM(I,J)=AK1
        TP2=4.E-5*T(I,J)**2
        SC(I,J)=1000.+2.*TP2*T(I,J)
        SP(I,J)=-3.*TP2
      ENDIF
300 CONTINUE
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
```

```
      DO 310 I=2,L2
        KBCJ1(I)=2
        FLXCJ1(I)=QW
        IF(X(I).LT.0.7) KBCM1(I)=2
310   CONTINUE
      DO 320 J=2,M2
        KBCL1(J)=2
        FLXCL1(J)=HE*TINF
        FLXPL1(J)=-HE
320   CONTINUE
      RETURN
      END
C CCCC
```

```
OVERALL HEAT BALANCE
********************
HEAT OUTFLOW    GENERATION      DIFFERENCE
3.885E+02       3.885E+02       -8.809E-04

I=      1         2         3         4         5         6         7
X= 0.00E+00 5.00E-02 1.50E-01 2.50E-01 3.50E-01 4.50E-01 5.50E-01
I=      8         9        10        11        12
X= 6.50E-01 7.50E-01 8.50E-01 9.50E-01 1.00E+00
J=      1         2         3         4         5         6         7
Y= 0.00E+00 4.17E-02 1.25E-01 2.08E-01 2.92E-01 3.75E-01 4.58E-01
J=      8
Y= 5.00E-01
****** TEMPERATURE ******
```

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
8	1.00E+02	1.06E+02	1.17E+02	1.25E+02	1.29E+02	1.28E+02	1.21E+02
7	1.00E+02	1.06E+02	1.18E+02	1.25E+02	1.29E+02	1.28E+02	1.21E+02
6	1.00E+02	1.07E+02	1.19E+02	1.27E+02	1.31E+02	1.30E+02	1.25E+02
5	1.00E+02	1.08E+02	1.21E+02	1.30E+02	1.35E+02	1.35E+02	1.31E+02
4	1.00E+02	1.09E+02	1.24E+02	1.35E+02	1.41E+02	1.42E+02	1.38E+02
3	1.00E+02	1.11E+02	1.30E+02	1.42E+02	1.49E+02	1.51E+02	1.47E+02
2	1.00E+02	1.16E+02	1.39E+02	1.52E+02	1.60E+02	1.61E+02	1.58E+02
1	1.00E+02	1.22E+02	1.45E+02	1.59E+02	1.66E+02	1.68E+02	1.64E+02

I =	8	9	10	11	12
J					
8	1.07E+02	2.00E+01	2.00E+01	2.00E+01	1.00E+02
7	1.08E+02	5.48E+01	3.70E+01	2.60E+01	1.73E+01
6	1.14E+02	8.80E+01	6.42E+01	4.12E+01	2.67E+01
5	1.22E+02	1.06E+02	8.48E+01	5.88E+01	3.92E+01
4	1.30E+02	1.17E+02	9.87E+01	7.66E+01	6.48E+01
3	1.39E+02	1.26E+02	1.08E+02	8.50E+01	7.21E+01
2	1.50E+02	1.37E+02	1.19E+02	9.50E+01	8.07E+01
1	1.56E+02	1.43E+02	1.25E+02	1.01E+02	1.00E+02

8.2.6. Обсуждение результатов

В этой задаче нелинейность k была достаточно слабая и источниковый член был оптимально линеаризован. Поэтому видно, что решение сошлось очень быстро.

Распечатка результатов дает нам значения заданных и искомых локальных плотностей потоков на всех границах области. Для адиабатического участка верхней границы полученная плотность потока очень мала, но не равна нулю. Эти малые числа являются результатом погрешностей округления при расчетах.

При анализе температурного поля видно, что локальные температуры превышают температуры на границах. Это обусловлено внутренним выделением тепла и заданными граничными плотностями тепловых потоков. На нижней границе температура довольно высокая, что связано со значением заданной плотности теплового потока на этой границе.

8.2.7. Заключительные замечания

В этой задаче реализованы переменная теплопроводность, нелинейный источниковый член и различные граничные условия. Основываясь на этом, можно применять CONDUCT к большому числу задач стационарной теплопроводности. Реализация областей со сложной геометрией и нелинейных граничных условий будет показана в следующих двух примерах.

8.3. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ОБЛАСТИ С ВЫРЕЗАМИ (ПРИМЕР 3)

8.3.1. Постановка задачи

На рис. 8.3 представлено квадратное тело с прямоугольными вырезами. На внутренних поверхностях вырезов заданы значения температуры. Нижняя граница обменивается теплом с окружающей средой посредством конвекции и излучения. Плотность теплового потока на нижней границе задана в виде

$$q_B = a(T_\infty - T_B) + b(T_\infty^4 - T_B^4), \qquad (8.4)$$

где T_∞ и T_B — температуры окружающей среды и границы.

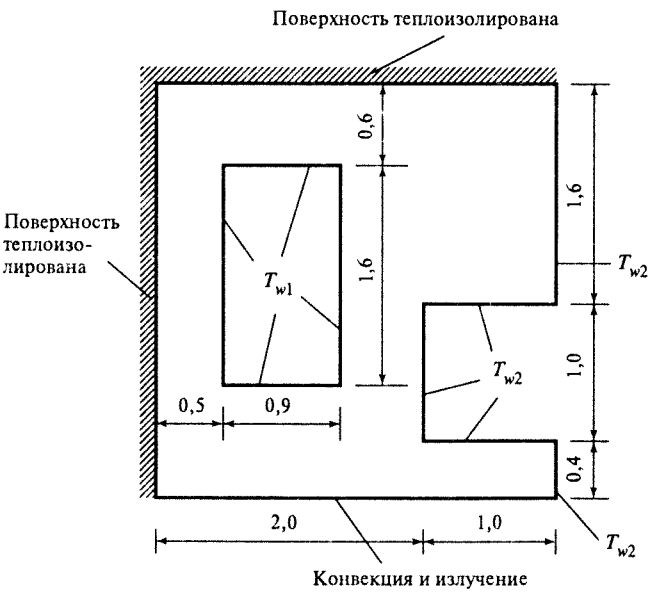


Рис. 8.3. К задаче о стационарной теплопроводности в области с вырезами

Геометрические характеристики области показаны на рис. 8.3. Значения других параметров равны:

$$T_{w1} = 400; \quad T_{w2} = 500; \quad T_{\infty} = 300; \tag{8.5}$$

$$k = 12; \quad a = 50; \quad b = 2 \cdot 10^{-8}. \tag{8.5а}$$

Из-за слагаемого, описывающего теплообмен за счет излучения в выражении (8.4), все температуры рассматриваются как абсолютные.

8.3.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Эта задача позволяет продемонстрировать использование процедуры ZGRID. Можно определить зоны так, что их границы совпадут с различными нерегулярностями геометрической формы области. Из рис. 8.3 видно, что приемлемым будет разбиение на четыре зоны по оси x и на пять зон по оси y. Затем каждая зона может быть поделена на любое желаемое число контрольных объемов. Вся эта информация задается в процедуре GRID перед вызовом ZGRID. Так как POWRX(NZ) и POWRY(NZ) будут заданы по умолчанию равными единице, то в каждой зоне получим равномерную сетку.

BEGIN. Зададим значения T_{w1}, T_{w2}, k и других параметров согласно (8.5) и (8.5а). Единственная известная температура на внешней границе T_{w2}, поэтому присваиваем это значение всем элементам массива T(I,J).

OUTPUT. Из-за нелинейных граничных условий решать эту задачу будем итерационным методом. Для наблюдения за сходимостью решения после каждой итерации выведем значения температуры в некоторых точках области и суммарный тепловой поток HTFLY на нижней границе. Эта величина рассчитывается суммированием потоков на всей нижней границе. Здесь XCV(I) используется в качестве площади грани (при единичной «глубине») каждого контрольного объема вдоль границы.

После заключительной итерации вывод поля T(I,J) обеспечивается вызовом PRINT.

PHI. Основная реализация области со сложной геометрией сделана в PHI через соответствующие значения GAM(I,J). Два выреза представлены как области с большой теплопроводностью, в результате этого в каждом вырезе устанавливается практически постоянная температура. Это необходимо для задания температур T_{w1} и T_{w2} на поверхностях вырезов.

В начале процедуры PHI элементам массива GAM(I,J) присваиваются значения теплопроводности AK, но, когда расчетная

точка попадает в область выреза, это значение замещается очень большим числом. Эти специфические области определяются с помощью операторов IF.

Определения GAM(I,J) достаточно для задания выреза у правой границы, так как эта область соприкасается с границей и, следовательно, заданная на границе расчетной области температура устанавливается во всей области с большой теплопроводностью. Для левого выреза не существует соприкасающейся с ним границы и известная температура T_{w1} не может быть задана посредством какой-либо внешней границы расчетной области. Поэтому (см. § 7.6) необходимо задать температуру, равную T_{w1}, в одной или нескольких расчетных точках внутри выреза. В данном случае применяется (7.1) и (7.1а) для задания T(4,6), равного T_{w1}, с помощью больших источниковых членов.

Заслуживает упоминания еще одна тонкость. Для левого выреза используются большие значения теплопроводности и источниковых членов. Однако применение больших источниковых членов будет иметь успех только в том случае, если они будут намного больше всех остальных членов дискретного аналога. Если же теплопроводность будет такой же большой, то с помощью источниковых членов не удастся реализовать нужную температуру в выбранной расчетной точке. По этой причине полагается, что теплопроводность равна 1.E12, в то время как источниковые члены рассчитываются с помощью большого числа BIG, имеющего значение 1.E20.

Нелинейные граничные условия на нижней границе линеаризуются согласно рекомендациям п. 2.5.5. Выражения для f_C и f_P имеют вид:

$$f_C = aT_\infty + bT_\infty^4 + 3b(T_B^*)^4; \tag{8.6}$$

$$f_P = -(a + 4b(T_B^*)^3). \tag{8.6а}$$

Соответствующие граничные условия задаются через KBC, FLXC и FLXP.

8.3.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

AK — теплопроводность k;
AQ, BQ — константы a и b [см. (8.5а)];
HTFLY — суммарный тепловой поток на нижней границе;
T(I,J) — температура T;
TINF — температура окружающей среды T_∞, [см. (8.5)];

TW1, TW2 — температуры границ T_{w1} и T_{w2} [см. (8.5)].

8.3.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE ADAPT
C ------------------------------------------------------------------
C---EXAMPLE 3 - STEADY CONDUCTION IN IRREGULAR GEOMETRY
C ------------------------------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C ******************************************************************
     DIMENSION T(NI,NJ)
     EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1))
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
     ENTRY GRID
     HEADER='STEADY CONDUCTION IN IRREGULAR GEOMETRY'
     PRINTF='PRINT3'
     PLOTF='PLOT3'
     CALL INTA5(NZX,4,NCVX(1),2,NCVX(2),4,NCVX(3),2,
    1 NCVX(4),4)
     CALL DATA4(XZONE(1),0.5,XZONE(2),0.9,XZONE(3),0.6,
    1 XZONE(4),1.)
     CALL INTA6(NZY,5,NCVY(1),2,NCVY(2),2,NCVY(3),2,
    1 NCVY(4),4,NCVY(5),2)
     CALL DATA5(YZONE(1),0.4,YZONE(2),0.4,YZONE(3),0.6,
    1 YZONE(4),1.0,1YZONE(5),0.6)
     CALL ZGRID
     RETURN
C -*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
     ENTRY BEGIN
     TITLE(1)=' TEMPERATURE '
     CALL INTA4(KSOLVE(1),1,KPRINT(1),1,KPLOT(1),1,LAST,10)
     CALL DATA6(TW1,400.,TW2,500.,TINF,300.,AQ,50.,
    1 BQ,2.E-8,AK,12.)
     DO 100 J=1,M1
     DO 100 I=1,L1
       T(I,J)=TW2
100  CONTINUE
     RETURN
C -*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
     ENTRY OUTPUT
     HTFLY=0.
     DO 200 I=2,L2
       HTFLY=HTFLY+XCV(I)*FLUXJ1(I,1)
200  CONTINUE
     DO 210 IUNIT=IU1,IU2
       IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,220)
220    FORMAT(2X,'ITER',3X,'T(2,12)',3X,'T(5,4)',
    1   3X,'T(10,12)',4X,'HEAT FLOW (BOTTOM FACE)')
       WRITE(IUNIT,230) ITER,T(2,12),T(5,4),T(10,12),HTFLY
230    FORMAT(2X,I2,2X,1P3E10.2,9X,1PE11.3)
210  CONTINUE
```

```
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        CALL PRINT
C-----------------------------------------------------------------------
COME HERE TO FILL IBLOCK(I,J) BEFORE CALLING PLOT
      DO 240 J=2,M2
      DO 240 I=2,L2
        IF(X(I).GT.0.5.AND.X(I).LT.1.4.AND.Y(J).
     1    GT.0.8.AND.Y(J).LT.2.4) IBLOCK(I,J)=1
        IF(X(I).GT.2..AND.Y(J).GT.0.4.AND.Y(J).LT.1.4)
     1    IBLOCK(I,J)=1
240   CONTINUE
      CALL PLOT
C-----
      ENDIF
      RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
      ENTRY PHI
      DO 300 J=2,M2
      DO 300 I=2,L2
        GAM(I,J)=AK
        IF(X(I).GT.0.5.AND.X(I).LT.1.4.AND.Y(J). GT.0.8.
     1  AND.Y(J).LT.2.4) GAM(I,J)=1.E12
        IF(X(I).GT.2.0.AND.Y(J).GT.0.4.AND.Y(J).LT.1.4)
     1  GAM(I,J)=1.E12
300   CONTINUE
      SC(4,6)=BIG*TW1
      SP(4,6)=-BIG
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
      DO 310 I=2,L2
        KBCM1(I)=2
        KBCJ1(I)=2
        FLXCJ1(I)=AQ*TINF+BQ*TINF**4+3.*BQ*T(I,1)**4
        FLXPJ1(I)=-(AQ+4.*BQ*T(I,1)**3)
310   CONTINUE
      DO 320 J=2,M2
        KBCI1(J)=2
320   CONTINUE
      RETURN
      END
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

8.3.5. Результаты расчетов

```
RESULTS OF CONDUCT FOR CARTESIAN COORDINATE SYSTEM
**************************************************

STEADY CONDUCTION IN IRREGULAR GEOMETRY

ITER T(2,12)      T(5,4)    T(10,12)    HEAT FLOW (BOTTOM FACE)
0    5.00E+02   5.00E+02   5.00E+02          0.000E+00
1    4.22E+02   3.81E+02   4.66E+02         -7.193E+03
2    4.05E+02   3.73E+02   4.57E+02         -7.502E+03
3    4.02E+02   3.73E+02   4.56E+02         -7.486E+03
4    4.01E+02   3.73E+02   4.56E+02         -7.483E+03
```

```
5    4.01E+02    3.73E+02    4.56E+02          -7.483E+03
6    4.01E+02    3.73E+02    4.56E+02          -7.483E+03
7    4.01E+02    3.73E+02    4.56E+02          -7.483E+03
ITER   T(2,12)     T(5,4)    T(10,12)    HEAT FLOW (BOTTOM FACE)
8     4.01E+02   3.73E+02    4.56E+02          -7.482E+03
9     4.01E+02   3.73E+02    4.56E+02          -7.482E+03
10    4.01E+02   3.73E+02    4.56E+02          -7.482E+03

I=      1        2         3         4         5         6         7
X= 0.00E+00 1.25E-01 3.75E-01 6.13E-01 8.37E-01 1.06E+00 1.29E+00
I=      8        9        10        11        12        13        14
X= 1.55E+00 1.85E+00 2.13E+00 2.38E+00 2.63E+00 2.88E+00 3.00E+00
J=      1        2         3         4         5         6         7
Y= 0.00E+00 1.00E-01 3.00E-01 5.00E-01 7.00E-01 9.50E-01 1.25E+00
J=      8        9        10        11        12        13        14
Y= 1.52E+00 1.77E+00 2.02E+00 2.27E+00 2.55E+00 2.85E+00 3.00E+00


****** TEMPERATURE ******

I=      1        2         3         4         5         6         7
J
14 5.00E+02 4.02E+02 4.02E+02 4.03E+02 4.05E+02 4.09E+02 4.15E+02
13 4.02E+02 4.02E+02 4.02E+02 4.03E+02 4.05E+02 4.09E+02 4.14E+02
12 4.01E+02 4.01E+02 4.01E+02 4.02E+02 4.02E+02 4.04E+02 4.09E+02
11 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02
10 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02
9  3.99E+02 3.99E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02
8  3.97E+02 3.98E+02 3.99E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02
7  3.94E+02 3.95E+02 3.98E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02
6  3.86E+02 3.87E+02 3.93E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02 4.00E+02
5  3.73E+02 3.74E+02 3.78E+02 3.88E+02 3.91E+02 3.93E+02 3.99E+02
4  3.60E+02 3.60E+02 3.64E+02 3.69E+02 3.73E+02 3.78E+02 3.86E+02
3  3.45E+02 3.45E+02 3.47E+02 3.50E+02 3.54E+02 3.59E+02 3.67E+02
2  3.28E+02 3.28E+02 3.30E+02 3.32E+02 3.34E+02 3.37E+02 3.43E+02
1  5.00E+02 3.20E+02 3.21E+02 3.22E+02 3.24E+02 3.26E+02 3.30E+02
I=      8        9        10        11        12        13        14
J
14 4.25E+02 4.40E+02 4.55E+02 4.68E+02 4.81E+02 4.94E+02 5.00E+02
13 4.25E+02 4.40E+02 4.55E+02 4.69E+02 4.81E+02 4.94E+02 5.00E+02
12 4.21E+02 4.39E+02 4.56E+02 4.69E+02 4.82E+02 4.94E+02 5.00E+02
11 4.15E+02 4.39E+02 4.57E+02 4.71E+02 4.83E+02 4.95E+02 5.00E+02
10 4.15E+02 4.41E+02 4.61E+02 4.75E+02 4.86E+02 4.95E+02 5.00E+02
9  4.16E+02 4.46E+02 4.69E+02 4.81E+02 4.90E+02 4.97E+02 5.00E+02
8  4.19E+02 4.55E+02 4.84E+02 4.92E+02 4.96E+02 4.99E+02 5.00E+02
7  4.22E+02 4.69E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02
6  4.22E+02 4.71E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02
5  4.19E+02 4.66E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02
4  4.06E+02 4.52E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02 5.00E+02
3  3.83E+02 4.16E+02 4.58E+02 4.67E+02 4.73E+02 4.87E+02 5.00E+02
2  3.53E+02 3.73E+02 3.95E+02 4.04E+02 4.16E+02 4.49E+02 5.00E+02
1  3.37E+02 3.51E+02 3.65E+02 3.72E+02 3.81E+02 4.08E+02 5.00E+02
```

8.3.6. Обсуждение результатов

Хорошо видно, что наш способ линеаризации обеспечивает очень быструю сходимость. В полученном поле температуры можно выделить области вырезов, где видны постоянные значения 400 и 500. Температуры в левом верхнем углу почти равны 400 из-за адиабатических граничных условий и близости выреза с температурой 400. Температура на нижней границе близка к 300 (к температуре окружающей среды).

8.3.7. Заключительные замечания

Геометрические нерегулярности, рассмотренные в этой задаче, были довольно простыми. Вырезы имели прямоугольную форму, и на их поверхностях была задана постоянная температура, которая моделировалась с помощью больших значений теплопроводности. В следующем примере рассмотрим реализацию закругленной границы и более сложных граничных условий.

8.4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ОБЛАСТИ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ (ПРИМЕР 4)

8.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричное тело, геометрическая форма которого показана на рис. 8.4. Закругленная граница справа — это дуга окружности радиусом, равным единице. На этом же рисунке представлены и граничные условия. Будем использовать следующие значения параметров:

$$T_{w1} = 200;\ T_{w2} = 100;\ T_{\infty} = 20; \tag{8.7}$$

$$k = 2;\ q_w = 1;\ h_e = 5; \tag{8.7а}$$

$$S = 50 - 4T. \tag{8.7б}$$

8.4.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Хотя такие процедуры, как `EZGRID` и `ZGRID`, очень полезны, не обязательно использовать их для всех задач. Иногда может быть более удобным построить сетку «вручную». На примере данной задачи продемонстрируем этот прием.

Для начала определим область как осесимметричную, присвоив `MODE` = 2. Затем зададим внутренний радиус `R(1)`. По оси y исполь-

зуем равномерную сетку, содержащую девять контрольных объемов, что позволит учесть все геометрические особенности. В направлении оси x равномерную сетку зададим только до точки $x = 1$. За этой точкой положения граней контрольных объемов `XU(I)` рассчитываются таким образом, чтобы реальная граница, представляющая собой дугу окружности, проходила через центры вертикальных граней контрольных объемов, составляющих заблокированную область. На рис. 8.5 показаны контрольные объемы и геометрическая форма физической области. С учетом использования грубой сетки ступенчатая граница заблокированной области дает довольно хорошее приближение к закругленной границе. Конечно, приближение может быть улучшено за счет применения более мелких сеток.

Рассмотренный частный случай построения сетки — только один из многих возможных. Мы могли бы использовать равномерную сетку по оси x и рассчитывать соответствующие `YV(J)` для наилучшего приближения границы к дуге (в этом случае, однако, возникают проблемы с реализацией вырезов у левой границы области). Возможно также использование неравномерных сеток и по оси x, и по оси y.

BEGIN. Сначала задаются числовые значения различных переменных, соответствующих параметрам задачи [см. (8.7)—(8.7б)]. Массив `T(I,J)` заполняем таким образом, чтобы обеспечить

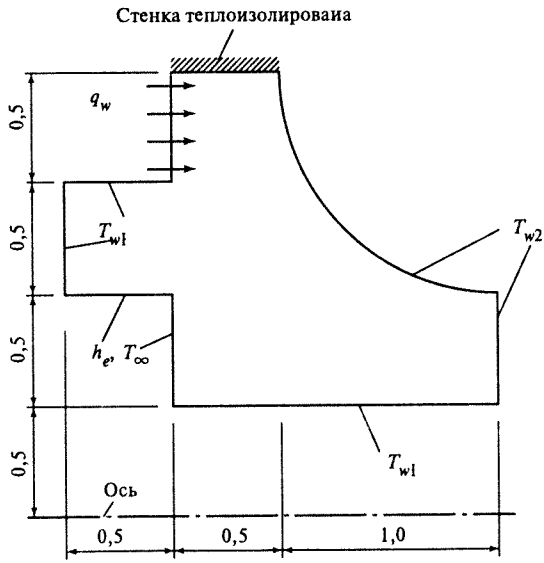


Рис. 8.4. К задаче теплопроводности в осесимметричной области сложной геометрической формы

значения T_{w1} и T_{w2} на соответствующих границах и T_{w1} в качестве начального условия во всех остальных точках.

OUTPUT. В этой задаче на печать выводятся несколько характерных температур в области после каждой итерации и все поле температуры `T(I,J)` после заключительной итерации.

PHI. Используется два способа задания граничных условий для различных нерегулярностей. Постоянная температура на закругленной границе может быть легко получена заданием теплопроводности в заблокированной области, равной большому числу. Для моделирования вырезов у левой границы области полагаем теплопроводность в заблокированных контрольных объемах равной нулю, и заданные граничные условия реализуем через дополнительные источниковые члены в прилегающих к вырезам «активных» контрольных объемах. Этот способ был описан в п. 7.7.2.

При заполнении массива `GAM(I,J)` сначала всем его элементам присваивается значение k, а затем значения в контрольных объемах, соответствующих вырезам слева, заменяются нулем. Задание большой теплопроводности в контрольных объемах заблокированной области, лежащей выше дуги, производится в два этапа. Сначала значения `GAM(I,J)` в квадрате, содержащем дугу, задаются равными большому числу, а затем значения `GAM(I,J)` для точек, лежащих ниже дуги, восстанавливаются равными k.

Зависящий от температуры источниковый член [см. (8.7 б)] определяется с помощью задания соответствующих значений `SC(I,J)` и `SP(I,J)`. Для реализации граничных условий на

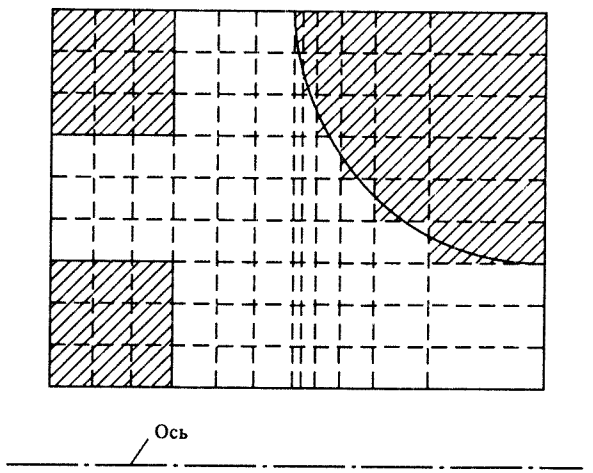


Рис. 8.5. Построение расчетной сетки для примера 4

поверхностях вырезов *дополнительные* источниковые члены прибавляются к заданным в тех контрольных объемах, которые получают тепловой поток из вырезов. Детали такого представления граничных условий подробно описаны в п. 7.7.2. Заметим, что при определении источниковых членов в приграничных контрольных объемах идентификаторы массивов SC(I,J) и SP(I,J) присутствуют и в правых частях выражений на ФОРТРАНе, что необходимо для учета *дополнительных* источниковых членов в этих контрольных объемах. Если опустить SC(I,J) или SP(I,J) в правых частях соответствующих выражений, то обычные источниковые члены [заданные соотношением (8.7б)] для этих контрольных объемов не будут учтены.

Наконец, короткий теплоизолированный участок на верхней границе реализуется установкой KBC = 2.

8.4.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

ABYV — отношение площади грани к объему КО;
COND — теплопроводность k [см. (8.7а)];
CONS — ABYV/RES;
DX, DY — размеры контрольных объемов по осям x и y;
GBYD — тепловая (термическая) проводимость;
HE — коэффициент теплоотдачи h_e [см. (8.7а)];
QW — постоянная плотность теплового потока q_w через нижнюю границу [см. (8.7а)];
RES — тепловое (термическое) сопротивление;
T(I,J) — температура T;
TINF — температура окружающей среды T_∞ [см. (8.7)];
TW1, TW2 — температуры границ T_{w1} и T_{w2} [см. (8.7)];
YM — координата y для середины грани контрольного объема.

8.4.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------
C-- EXAMPLE 4 - CONDUCTION IN A COMPLEX CYLINDRICAL GEOMETRY
C-------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C***********************************************************
    DIMENSION T(NI,NJ)
    EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1))
C***********************************************************
```

```
      ENTRY GRID
      HEADER='CONDUCTION IN A COMPLEX CYLINDRICAL GEOMETRY'
      PRINTF='PRINT4'
      PLOTF='PLOT4'
      MODE=2
      R(1)=0.5
      L1=14
      M1=11
      YV(2)=0.
      DY=1.5/FLOAT(M1-2)
      DO 10 J=3,M1
        YV(J)=YV(J-1)+DY
10  CONTINUE
      XU(2)=0.
      DX=1./6.
      DO 20 I=3,8
        XU(I)=XU(I-1)+DX
20  CONTINUE
CONSTRUCT CONTROL-VOLUME FACES TO MATCH CIRCULAR BOUNDARY
      DO 30 I=9,13
        J=19-I
        YM=0.5*(YV(J)+YV(J-1))
        XU(I)=2.-SQRT(1.-(YM-1.5)**2.)
30  CONTINUE
      XU(L1)=2.
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        CALL PRINT
C-----
COME HERE TO FILL IBLOCK(I,J) BEFORE CALLING PLOT
        DO 230 J=2,M2
        DO 230 I=2,L2
          IF(X(I).LT.0.5.AND.Y(J).GT.1.0) IBLOCK(I,J)=1
          IF(X(I).LT.0.5.AND.Y(J).LT.0.5) IBLOCK(I,J)=1
          IF(X(I).GT.1.0.AND.Y(J).GT.0.5) IBLOCK(I,J)=1
230     CONTINUE
        DO 240 J=5,9
        DO 240 I=8,17-J
          IBLOCK(I,J)=0
240     CONTINUE
        CALL PLOT
C-----
      ENDIF
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
      SP(I,5)=SP(I,5)-CONS
340 CONTINUE
    DO 350 I=2,L2
      KBCM1(I)=2
350 CONTINUE
    RETURN
    END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

8.4.5. Результаты расчетов

```
RESULTS OF CONDUCT FOR AXISYMMETRIC COORDINATE SYSTEM
******************************************************

CONDUCTION IN A COMPLEX CYLINDRICAL GEOMETRY

ITER T(4,5)     T(6,10)    T(10,4)    T(12,4)
0    1.00E+02   1.00E+02   1.00E+02   1.00E+02
1    1.16E+02   9.19E+01   1.15E+02   1.13E+02
2    1.16E+02   9.19E+01   1.15E+02   1.13E+02
3    1.16E+02   9.19E+01   1.15E+02   1.13E+02

I=      1         2         3         4         5         6         7
X= 0.00E+00 8.33E-02 2.50E-01 4.17E-01 5.83E-01 7.50E-01 9.17E-01

I=      8         9         10        11        12        13        14
X= 1.02E+00 1.06E+00 1.14E+00 1.26E+00 1.47E+00 1.80E+00 2.00E+00

J=      1         2         3         4         5         6         7
Y= 0.00E+00 8.33E-02 2.50E-01 4.17E-01 5.83E-01 7.50E-01 9.17E-01

J=      8         9         10        11
Y= 1.08E+00 1.25E+00 1.42E+00 1.50E+00

****** TEMPERATURE ******

I =     1         2         3         4         5         6         7
J
11 1.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 9.04E+01 9.17E+01 9.58E+01
10 2.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 9.08E+01 9.19E+01 9.58E+01
9  2.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 9.40E+01 9.38E+01 9.59E+01
8  2.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 1.02E+02 9.81E+01 9.69E+01
7  2.00E+02 1.93E+02 1.83E+02 1.68E+02 1.21E+02 1.05E+02 9.90E+01
6  2.00E+02 1.83E+02 1.58E+02 1.39E+02 1.18E+02 1.06E+02 1.01E+02
5  2.00E+02 1.68E+02 1.34E+02 1.16E+02 1.09E+02 1.06E+02 1.05E+02
4  2.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 9.98E+01 1.10E+02 1.14E+02
3  2.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 1.13E+02 1.28E+02 1.34E+02
2  2.00E+02 1.25E+01 1.25E+01 1.25E+01 1.55E+02 1.68E+02 1.72E+02
1  1.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02

I =     8         9         10        11        12        13        14
J
11 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02
10 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02
9  9.94E+01 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02
```

```
8  9.84E+01 9.92E+01 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02
I =    8        9        10       11       12       13       14
J
7  9.86E+01 9.87E+01 9.92E+01 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02
6  1.00E+02 9.98E+01 9.96E+01 9.97E+01 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02
5  1.05E+02 1.04E+02 1.04E+02 1.04E+02 1.02E+02 1.00E+02 1.00E+02
4  1.15E+02 1.15E+02 1.15E+02 1.15E+02 1.13E+02 1.05E+02 1.00E+02
3  1.36E+02 1.36E+02 1.37E+02 1.37E+02 1.35E+02 1.23E+02 1.00E+02
2  1.72E+02 1.73E+02 1.73E+02 1.73E+02 1.72E+02 1.61E+02 1.00E+02
1  2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 2.00E+02 1.00E+02
```

8.4.6. Обсуждение результатов

Из полученных результатов видно, что решение этой линейной задачи сошлось за одну итерацию. В выведенном поле температуры значение 100 занимает всю неактивную зону, расположенную выше закругленной границы. Значения температуры в двух вырезах не влияют на активную область, поэтому их следует игнорировать (кстати, эти области имеют температуру, равную 12,5. Так как теплопроводность в этих областях равна нулю, то температура устанавливается таким образом, чтобы источниковый член был также равен нулю. Из (8.7б) видно, что нулевой источниковый член соответствует температуре 12,5).

8.4.7. Заключительные замечания

В четырех представленных примерах проиллюстрированы все возможные сложности, возникающие при решении задач о стационарной теплопроводности. Проанализировав эти примеры, можно рассмотреть множество интересных приложений программы CONDUCT. Далее (см. § 8.5 и 8.6) решены две задачи о нестационарной теплопроводности. В первой задаче температура будет меняться со временем и в итоге достигнет стационарного распределения. Во второй же будут иметь место периодические изменения температуры во времени.

8.5. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА (ПРИМЕР 5)

8.5.1. Постановка задачи

Рассчитаем зависящее от времени распределение температуры в теле, в котором мгновенно изменили граничные условия и увеличили выделение тепла. Решение этой задачи — первый опыт работы в полярной системе координат (θ, r).

В полукруглом теле, показанном на рис. 8.6, задана постоянная начальная температура T_0. Начиная с момента времени $t = 0$ к плоским границам подводится тепловой поток плотностью q_B, температура на внутренней поверхности радиусом R_1 возрастает до значения T_i, внешняя поверхность омывается жидкостью с температурой T_∞ (что обеспечивает конвективный теплообмен с коэффициентом теплоотдачи h_e), в области, лежащей между поверхностями радиусами R_1 и R_2, выделяется тепло, при этом объемная мощность источника S. Так как эти условия остаются постоянными во времени, в теле в конце концов устанавливается стационарное распределение температуры. Нашей целью является расчет нестационарных полей температуры и окончательного стационарного ее распределения.

Будем использовать следующие значения параметров:

$$T_0 = 50; \quad T_i = 100; \quad T_\infty = 20; \tag{8.8}$$

$$R_1 = 0{,}5; \quad R_2 = 0{,}75; \quad R_3 = 1{,}5; \tag{8.8а}$$

$$q_{B1} = 60; \quad h_e = 5; \quad S = 10^3; \tag{8.8б}$$

$$k = 1; \ \rho c = 1. \tag{8.8в}$$

Учитывая симметричность геометрических форм и граничных условий, ограничим наши вычисления левой половиной области, как показано на рис. 8.6.

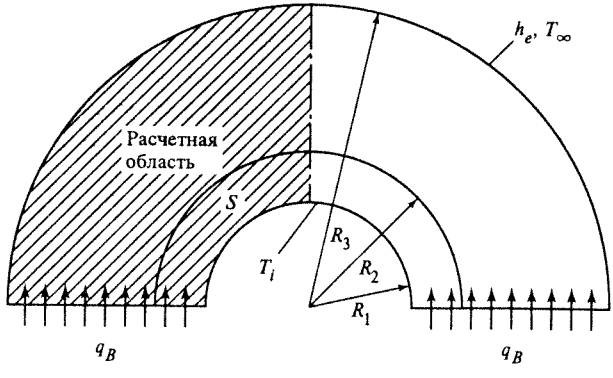


Рис. 8.6. К задаче о нестационарной теплопроводности при наличии внутренних источников тепла

8.5.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Для полярной системы координат (MODE = 3) значения x в вычислительной программе воспринимаются как углы θ, выраженные в радианах. Используем процедуру ZGRID и создадим одну зону по координате θ и две зоны по координате r. Если MODE = 2 или 3, то должен быть задан радиус внутренней поверхности R(1).

BEGIN. В случае нестационарной задачи итерации представляют собой шаги по времени. В данном случае сделаем 35 шагов по времени с постоянно увеличивающимся значением Δt. Впоследствии будет видно, что стационарное распределение температуры достигается примерно за 30 шагов.

Зададим значения соответствующих переменных [см. (8.8)—(8.8в)]. Переменной DT присвоено начальное значение Δt, которое впоследствии будет увеличиваться. Массив температур T(I,J) заполнен начальным значением T_0. Для стационарных задач эти начальные значения представляют собой лишь начальное *приближение*, а для нестационарных задач заданные в BEGIN значения T(I,J) для внутренних точек являются *известными* начальными температурами.

Наконец, на внутренней границе зададим температуру T_i.

OUTPUT. В нестационарных задачах новое поле температуры получается на каждом шаге по времени. Часто бывает неудобно вызывать PRINT для полного вывода каждого нового поля. Вместо этого можно после каждого временного шага выводить на печать лишь несколько полезных величин, а все поле распечатывать после некоторого числа шагов по времени.

В этом примере на каждом временном шаге выводится на печать четыре характерные температуры и суммарные тепловые потоки на внутренней и внешней поверхностях тела. При вычислении этих потоков величины XCV(I)*RV(2) и XCV(I)*RV(M1) представляют собой площади (при единичной «глубине») граней контрольных объемов на внешней и внутренней границе соответственно.

Во многих нестационарных задачах температура меняется очень быстро в начале процесса и довольно медленно в конце. Поэтому целесообразно использовать очень маленькие шаги по времени для расчета начальных изменений, а затем постепенно увеличивать их. Одним из удобных способов увеличения шага является применение выражения

```
DT = DT*1.2,
```

в соответствии с которым шаг по времени увеличивается на 20 % каждый раз. Можно начать расчет с очень малого значения DT, иметь

разумно небольшие значения Δt в течение начального этапа и в итоге достигнуть существенно больших значений Δt, приемлемых для финального приближения к стационарному решению.

В этой задаче процедура PRINT вызывается только после заключительного шага по времени и на печать выводится только стационарное распределение температуры. Если вы желаете получить некоторое число промежуточных полей температуры, то для удобства нужно положить KPGR = 0 после первого вызова PRINT. Тогда информация о сетке не будет больше выводиться вместе с полями температуры.

PHI. Для решения нестационарных задач обычно требуется два дополнительных действия: во-первых, задание DT и, во-вторых, заполнение массива ALAM(I,J). Поэтому в процедуре PHI в дополнение к GAM(I,J) и SC(I,J) задается массив ALAM(I,J).

Определение граничных условий заключается в задании конвективного теплообмена на внешней границе, известного теплового потока на плоской поверхности и условия равенства нулю потока на вертикальной линии симметрии. Все эти величины задаются через соответствующие значения KBC, FLXC и FLXP.

8.5.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

COND — теплопроводность k [см. (8.8в)];
HE — коэффициент теплоотдачи h_e [см. (8.8б)];
PI — число π;
QB — постоянная плотность теплового потока q_B [см. (8.8б)];
QBTM — суммарный тепловой поток через нижнюю границу;
QTOP — то же через верхнюю границу;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc [см. (8.8в)];
SOURCE — мощность источника тепла в единице объема S, [см. (8.8б)];
T(I,J) — температура T;
TI — температура на внутренней поверхности T_i [см. (8.8)];
TINF — температура окружающей среды T_∞ [см. (8.8)];
TZERO — начальная температура T_0 при $t = 0$ [см. (8.8)].

8.5.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE ADAPT
C-----------------------------------------------------------------
C---EXAMPLE 5 - UNSTEADY CONDUCTION WITH HEAT GENERATION
C-----------------------------------------------------------------
```

```
$INCLUDE:'COMMON'
C *********************************************************
      DIMENSION T(NI,NJ)
      EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1))
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY GRID
      HEADER='UNSTEADY CONDUCTION WITH HEAT GENERATION'
      PRINTF='PRINT5'
      PLOTF='PLOT5'
      MODE=3
      PI=3.14159
      CALL INTA5(NZX,1,NCVX(1),10,NZY,2,NCVY(1),3,NCVY(2),9)
      CALL DATA4(XZONE(1),0.5*PI,POWRX(1),1.2,YZONE(1),0.25,
     1 YZONE(2),0.75)
      CALL ZGRID
      R(1)=0.5
      RETURN
C -*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
      ENTRY BEGIN
      TITLE(1)=' TEMPERATURE '
      CALL INTA4(KSOLVE(1),1,KPRINT(1),1,KPLOT(1),1,LAST,35)
      CALL DATA6(COND,1.,RHOCP,1.,SOURCE,1000.,HE,5.,
     1   QB,60.,DT,0.001)
      CALL DATA3(TINF,20.,TZERO,50.,TI,100.)
      DO 100 J=1,M1
      DO 100 I=1,L1
        T(I,J)=TZERO
100 CONTINUE
      DO 110 I=2,L2
        T(I,1)=TI
110 CONTINUE
      RETURN
C -*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
      ENTRY OUTPUT
        QBTM=0.
        QTOP=0.
        DO 200 I=2,L2
          QBTM=QBTM+XCV(I)*RV(2)*FLUXJ1(I,1)
          QTOP=QTOP+XCV(I)*RV(M1)*FLUXM1(I,1)
200     CONTINUE
      DO 210 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,220)
220     FORMAT(1X,'ITER',3X,'TIME',4X,'T(4,4)',3X,'T(10,4)',
     1     2X,'T(7,10)',1X,'T(10,10)',4X,'QBTM',6X,'QTOP')
        WRITE(IUNIT,230) ITER,TIME,T(4,4),T(10,4),
     1     T(7,10),T(10,10),QBTM,QTOP
230 FORMAT(2X,I2,1X,1P5E9.2,1P2E10.2)
210 CONTINUE
      DT=DT*1.2
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        CALL PRINT
        CALL PLOT
      ENDIF
```

```
      RETURN
C-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
      ENTRY PHI
      DO 300 J=2,M2
      DO 300 I=2,L2
        ALAM(I,J)=RHOCP
        GAM(I,J)=COND
          IF(Y(J).LT.0.25) SC(I,J)=SOURCE
300   CONTINUE
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
      DO 310 J=2,M2
        KBCI1(J)=2
        KBCL1(J)=2
        FLXCI1(J)=QB
310   CONTINUE
      DO 320 I=2,L2
        KBCM1(I)=2
        FLXCM1(I)=HE*TINF
        FLXPM1(I)=-HE
320   CONTINUE
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

8.5.5. Результаты расчетов

```
RESULTS OF CONDUCT FOR POLAR COORDINATE SYSTEM
**********************************************

UNSTEADY CONDUCTION WITH HEAT GENERATION

ITER TIME    T(4,4) T(10,4)   T(7,10) T(10,10)  QBTM     QTOP
0  0.00E+00 5.00E+01 5.00E+01 5.00E+01 5.00E+01  0.00E+00  0.00E+00
1  1.20E-03 5.13E+01 5.12E+01 5.00E+01 5.00E+01  8.71E+02 -2.88E+02
2  2.64E-03 5.29E+01 5.29E+01 5.00E+01 5.00E+01  6.02E+02 -2.71E+02
3  4.37E-03 5.52E+01 5.51E+01 4.99E+01 4.99E+01  4.21E+02 -2.55E+02
4  6.44E-03 5.80E+01 5.77E+01 4.98E+01 4.98E+01  3.00E+02 -2.40E+02
5  8.93E-03 6.13E+01 6.09E+01 4.96E+01 4.96E+01  2.18E+02 -2.26E+02
6  1.19E-02 6.50E+01 6.43E+01 4.94E+01 4.94E+01  1.60E+02 -2.13E+02
7  1.55E-02 6.90E+01 6.79E+01 4.90E+01 4.90E+01  1.15E+02 -2.00E+02
8  1.98E-02 7.30E+01 7.16E+01 4.85E+01 4.85E+01  7.95E+01 -1.88E+02
9  2.50E-02 7.71E+01 7.53E+01 4.79E+01 4.79E+01  4.93E+01 -1.77E+02
10 3.12E-02 8.11E+01 7.88E+01 4.73E+01 4.72E+01  2.33E+01 -1.67E+02
11 3.86E-02 8.50E+01 8.22E+01 4.67E+01 4.66E+01  4.30E-01 -1.57E+02
12 4.75E-02 8.86E+01 8.53E+01 4.62E+01 4.61E+01 -1.97E+01 -1.49E+02
13 5.82E-02 9.20E+01 8.81E+01 4.59E+01 4.58E+01 -3.74E+01 -1.42E+02
14 7.10E-02 9.51E+01 9.06E+01 4.58E+01 4.56E+01 -5.29E+01 -1.37E+02
15 8.64E-02 9.79E+01 9.29E+01 4.60E+01 4.57E+01 -6.63E+01 -1.34E+02
16 1.05E-01 1.00E+02 9.48E+01 4.66E+01 4.61E+01 -7.77E+01 -1.34E+02
17 1.27E-01 1.03E+02 9.64E+01 4.73E+01 4.66E+01 -8.74E+01 -1.36E+02
18 1.54E-01 1.04E+02 9.78E+01 4.83E+01 4.74E+01 -9.56E+01 -1.40E+02
19 1.86E-01 1.06E+02 9.90E+01 4.94E+01 4.83E+01 -1.02E+02 -1.45E+02
20 2.24E-01 1.07E+02 1.00E+02 5.06E+01 4.92E+01 -1.08E+02 -1.51E+02
21 2.70E-01 1.09E+02 1.01E+02 5.18E+01 5.02E+01 -1.13E+02 -1.57E+02
22 3.25E-01 1.10E+02 1.02E+02 5.28E+01 5.10E+01 -1.17E+02 -1.62E+02
23 3.91E-01 1.10E+02 1.02E+02 5.37E+01 5.18E+01 -1.20E+02 -1.67E+02
```

```
24 4.71E-01 1.11E+02 1.03E+02 5.44E+01 5.24E+01 -1.23E+02 -1.71E+02
ITER TIME   T(4,4) T(10,4)   T(7,10) T(10,10)  QBTM     QTOP
25 5.66E-01 1.11E+02 1.03E+02 5.49E+01 5.29E+01 -1.24E+02 -1.74E+02
26 6.81E-01 1.12E+02 1.03E+02 5.53E+01 5.32E+01 -1.26E+02 -1.76E+02
27 8.18E-01 1.12E+02 1.03E+02 5.55E+01 5.34E+01 -1.26E+02 -1.77E+02
28 9.83E-01 1.12E+02 1.03E+02 5.56E+01 5.35E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
29 1.18E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.57E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
30 1.42E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.57E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
31 1.70E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.58E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
32 2.04E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.58E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
33 2.46E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.58E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
34 2.95E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.58E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
35 3.54E+00 1.12E+02 1.03E+02 5.58E+01 5.36E+01 -1.27E+02 -1.78E+02
I=      1         2         3         4         5         6         7
TH= 0.00E+00 4.96E-02 1.63E-01 2.99E-01 4.47E-01 6.03E-01 7.67E-01
I=      8         9        10        11        12
TH= 9.37E-01 1.11E+00 1.29E+00 1.43E+00 1.57E+00
J=      1         2         3         4         5         6         7
Y= 0.00E+00 4.17E-02 1.25E-01 2.08E-01 2.92E-01 3.75E-01 4.58E-01
J=      8         9        10        11        12        13        14
Y= 5.42E-01 6.25E-01 7.08E-01 7.92E-01 8.75E-01 9.58E-01 1.00E+00

****** TEMPERATURE ******
-----------
I =     1         2         3         4         5         6         7
J
14 5.00E+01 4.41E+01 3.99E+01 3.72E+01 3.56E+01 3.45E+01 3.38E+01
13 5.28E+01 4.90E+01 4.40E+01 4.09E+01 3.88E+01 3.75E+01 3.67E+01
12 6.18E+01 5.81E+01 5.23E+01 4.82E+01 4.56E+01 4.38E+01 4.27E+01
11 7.02E+01 6.66E+01 6.04E+01 5.58E+01 5.26E+01 5.05E+01 4.91E+01
10 7.81E+01 7.47E+01 6.84E+01 6.34E+01 5.98E+01 5.74E+01 5.58E+01
9  8.56E+01 8.24E+01 7.63E+01 7.11E+01 6.73E+01 6.46E+01 6.28E+01
8  9.30E+01 9.00E+01 8.42E+01 7.90E+01 7.50E+01 7.22E+01 7.03E+01
7  1.00E+02 9.74E+01 9.20E+01 8.70E+01 8.30E+01 8.02E+01 7.82E+01
6  1.07E+02 1.05E+02 9.98E+01 9.51E+01 9.13E+01 8.86E+01 8.67E+01
5  1.14E+02 1.12E+02 1.08E+02 1.03E+02 1.00E+02 9.75E+01 9.57E+01
4  1.22E+02 1.19E+02 1.15E+02 1.12E+02 1.09E+02 1.07E+02 1.06E+02
3  1.21E+02 1.19E+02 1.16E+02 1.13E+02 1.11E+02 1.10E+02 1.09E+02
2  1.11E+02 1.10E+02 1.08E+02 1.07E+02 1.06E+02 1.05E+02 1.05E+02
1  5.00E+01 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02

I=      8         9        10        11        12
J
14 3.33E+01 3.30E+01 3.29E+01 3.28E+01 5.00E+01
13 3.61E+01 3.58E+01 3.56E+01 3.55E+01 3.55E+01
12 4.20E+01 4.15E+01 4.12E+01 4.11E+01 4.11E+01
11 4.82E+01 4.76E+01 4.72E+01 4.71E+01 4.71E+01
10 5.47E+01 5.40E+01 5.36E+01 5.34E+01 5.34E+01
9  6.16E+01 6.09E+01 6.04E+01 6.02E+01 6.02E+01
8  6.90E+01 6.82E+01 6.77E+01 6.75E+01 6.75E+01
7  7.69E+01 7.60E+01 7.55E+01 7.53E+01 7.53E+01
6  8.54E+01 8.45E+01 8.40E+01 8.38E+01 8.38E+01
5  9.45E+01 9.37E+01 9.33E+01 9.31E+01 9.30E+01
4  1.05E+02 1.04E+02 1.03E+02 1.03E+02 1.03E+02
3  1.08E+02 1.08E+02 1.07E+02 1.07E+02 1.07E+02
2  1.05E+02 1.05E+02 1.05E+02 1.04E+02 1.04E+02
1  1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 5.00E+01
```

8.5.6. Обсуждение результатов

Решение этой задачи демонстрирует некоторые интересные тенденции в изменении локальных температур. Из выводимых на печать температур в четырех точках значения `T(4,4)` и `T(10,4)` соответствуют точкам, расположенным вблизи внутренней поверхности, в то время как `T(7,10)` и `T(10,10)` — точкам, находящимся во внешней области. В начале процесса высокая температура внутренней поверхности, наличие теплового потока плотностью q_B и выделение тепла приводят к увеличению температуры во внутренней области, и поэтому `T(4,4)` и `T(10,4)` монотонно возрастают. В то же время внешняя граница омывается более холодной жидкостью с температурой T_∞. В результате `T(7,10)` и `T(10,10)` постепенно уменьшаются в течение некоторого времени. Однако в конце концов эти температуры также начинают возрастать из-за все увеличивающегося влияния высокой температуры во внутренней области.

Тепловой поток `QTOP` на внешней поверхности всегда отрицателен, что свидетельствует о теплоотдаче в окружающую холодную жидкость. На внутренней поверхности поток `QBTM` сначала положителен, так как тепло поступает в область от границы с высокой температурой T_i. Однако впоследствии внутреннее тепловыделение приводит к тому, что температуры внутри области начинают превышать значения T_i, в результате чего `QBTM` становится отрицательным.

Заключительное стационарное распределение температуры демонстрирует ожидаемый эффект от заданных различных граничных условий. Самая высокая температура находится на границе с заданной плотностью теплового потока, в то время как самая низкая — около внешней границы, соприкасающейся с холодной внешней средой.

8.5.7. Заключительные замечания

Описание приложения программы CONDUCT к решению нестационарной задачи показывает, что дополнительные усилия, необходимые для этого класса задач, невелики. В то же время можно получать обширную и интересную информацию о поле температуры, зависящем от времени. В этом примере не рассматриваются какие-либо нерегулярности геометрии, однако нет причин, из-за которых вы бы не смогли применить технику, описанную в предыдущих примерах, для анализа нестационарной теплопроводности в областях сложной геометрической формы. Мы использовали граничные условия, которые остаются постоянными с течением времени. Если граничные температуры или тепловые потоки будут постоянно меняться,

то стационарное состояние не будет достигнуто. В случае периодически изменяющихся граничных условий все поле температуры в конце концов становится периодическим. Такая ситуация рассмотрена в следующем примере.

8.6. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ГРУНТЕ ВБЛИЗИ ФУНДАМЕНТА ЗДАНИЯ (ПРИМЕР 6)

8.6.1. Постановка задачи

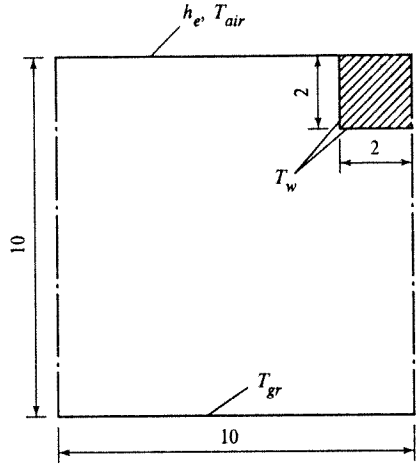


Рис. 8.7. К задаче о нестационарной теплопроводности в грунте вблизи фундамента здания

Для иллюстрации периодически изменяющегося решения рассмотрим изменения распределения температуры в грунте, вызванные сезонными колебаниями температуры воздуха. Дополнительное влияние на температурное поле оказывает фундамент здания, поддерживаемый при постоянной температуре в течение всего года.

Геометрические характеристики и граничные условия задачи показаны на рис. 8.7. На верхней поверхности грунта заданы условия конвективного теплообмена с окружающим воздухом, имеющим температуру T_{air}. Эта температура периодически меняется в течение года. Фундамент здания показан штриховкой, его температура поддерживается равной T_w. Нижняя граница грунта, расположенная на существенном удалении от поверхности, имеет известную температуру T_{gr}. Эта «глубинная» температура принимается постоянной в течение всего года.

Предполагается, что левая граница грунта расположена далеко от здания, поэтому тепловой поток через нее равен нулю. Правая граница представляет собой линию симметрии фундамента здания (заштрихованная область принадлежит только левой половине фундамента), поэтому тепловой поток через нее также равен нулю.

Будем использовать следующую зависимость для температуры воздуха:

$$T_{air} = 50 + 50 \sin(2\pi t/P), \qquad (8.9)$$

где период $P = 12$. Остальные параметры примем равными:

$$k = 2; \quad \rho c = 3; \quad h_e = 5; \tag{8.10}$$

$$T_w = 70; \quad T_{gr} = 50. \tag{8.10а}$$

Хотя задача приближена к реальному процессу теплопроводности в грунте около фундамента здания, мы избегаем задания конкретных величин и свойств материала в некоторой системе единиц. Только значения температуры воздуха могут быть истолкованы как грубое подобие летних и зимних температур в градусах Фаренгейта. Значение $P = 12$ может навести на мысль измерять время t в месяцах. Однако никакого дополнительного сходства с реальной ситуацией не подразумевается.

Для проведения расчетов нестационарных задач необходимо знать начальное распределение температуры. Если предположить, что вся почва изначально имела постоянную температуру, и провести вычисления для некоторого числа периодов (т.е. лет), то можно обнаружить, что через несколько первых периодов все решение становится периодическим. Это «стационарно периодическое» состояние и изучается в таких задачах.

8.6.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Геометрические особенности области, показанной на рис. 8.7, приводят к необходимости использования процедуры `ZGRID` с двумя зонами как по оси x, так и по оси y. Так как температура грунта будет резко изменяться вблизи фундамента здания, желательно обеспечить здесь лучшую сетку. Это сделано установкой параметров `POWRX(1)` и `POWRY(1)` равными −1,5. Отрицательные значения параметра дают сгущение сетки в конце зоны.

BEGIN. Общее число шагов по времени выбирается равным 120. Переменной `DT` присваивается значение `DT`= 0,5 (равное половине месяца). Таким образом, заданный период $P = 12$ проходится за 24 шага, а 120 шагов соответствуют пяти периодам (годам). Здесь же определяются значения переменных, соответствующих данным (8.9), (8.10) и (8.10а). Элементам массива `T(I,J)` присваиваются значения T_{gr}, за исключением участка внешней границы, где температура задается равной T_w.

OUTPUT. Если бы поле температуры выводилось на каждом шаге по времени, то это привело бы к огромному количеству выходных данных. Включать такую распечатку результатов в книгу

нецелесообразно, однако вы можете изменить ADAPT для получения более детального вывода результатов.

Мы вообще не будем представлять распечатанное поле температуры. Лучше выведем на печать температуры в пяти точках на вертикальной линии. Это даст нам некоторое представление о профиле температуры в почве в различные моменты времени. Вместо того чтобы выводить эти данные после каждого шага по времени, мы ради экономии выведем их после каждого третьего шага.

Для наглядности вывода периодического решения будем выводить разделительную линию (строку из ***) после завершения каждого цикла, т.е. через 24 шага по времени.

PHI. В данной задаче массивы ALAM(I,J) и GAM(I,J) определяются просто. В области, занятой фундаментом здания, значение теплопроводности очень большое, таким образом, вся эта область будет поддерживаться при температуре T_w.

Нулевой тепловой поток на левой и правой границах задается через соответствующие значения KBC. Для задания граничного условия на участке верхней границы, соприкасающейся с воздухом, сначала рассчитывается значение T_{air}, зависящее от времени. Следует заметить, что при расчете используется время TIME+DT, а не просто TIME. Граничные условия для поля температуры задаются в конце шага по времени, что соответствует времени TIME+DT (кстати, не пишите здесь TIME = TIME+DT. Переменная TIME увеличивается в неизменяемой части программы CONDUCT. Ваше переопределение TIME будет искажать эти вычисления).

Получив значение T_{air}, можно задать граничное условие конвективного теплообмена на участке верхней границы через соответствующие значения KBC, FLXC и FLXP.

8.6.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

ARGU — аргумент $2\pi t/P$ в выражении для нахождения температуры воздуха;
COND — теплопроводность k [см. (8.10)];
HE — коэффициент теплоотдачи h_e [см. (8.10)];
P — период изменения температуры воздуха;
PI — число π;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc;
T(I,J) — температура T;

TAIR — температура воздуха T_{air} [см. (8.9)];

TGR — температура грунта T_{gr} [см. (8.10а)];

TW — температура стенки T_w [см. (8.10а)].

8.6.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------------------------------
C---EXAMPLE 6 - UNSTEADY CONDUCTION AROUND AN
C---UNDERGROUND BUILDING
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
$INCLUDE:'COMMON'
C ***********************************************************
      DIMENSION T(NI,NJ)
      EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1))
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY GRID
      HEADER='UNSTEADY CONDUCTION AROUND AN UNDERGROUND
     1   BUILDING'
      PRINTF='PRINT6'
      PI=3.14159
      CALL INTA3(NZX,2,NCVX(1),9,NCVX(2),3)
      CALL DATA2(XZONE(1),8.,XZONE(2),2.)
      CALL INTA3(NZY,2,NCVY(1),9,NCVY(2),3)
      CALL DATA2(YZONE(1),8.,YZONE(2),2.)
      CALL DATA2(POWRX(1),-1.5,POWRY(1),-1.5)
      CALL ZGRID
      RETURN
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY BEGIN
      TITLE(1)=' TEMPERATURE '
      CALL INTA2(KSOLVE(1),1,LAST,120)
      CALL DATA7(COND,2.,RHOCP,3.,HE,5.,P,12.,DT,0.5,
     1   TGR,50.,TW,70.)
      DO 100 J=1,M1
      DO 100 I=1,L1
        T(I,J)=TGR
100   CONTINUE
      DO 110 I=2,L2
        IF(X(I).GT.8.) T(I,M1)=TW
110   CONTINUE
      RETURN
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY OUTPUT
      DO 200 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,210)
210   FORMAT(1X,'ITER',3X,'TIME',5X,'T(2,14)',3X,
     1   'T(2,13)',3X,'T(2,12)',3X,'T(2,11)',3X,'T(2,10)')
      IF(MOD(ITER,3).EQ.0) THEN
        WRITE(IUNIT,240) ITER,TIME,T(2,14),T(2,13),T(2,12),
```

```
  1                        T(2,11),T(2,10)
240    FORMAT(1X,I3,1P6E10.2)
       IF(MOD(ITER,24).EQ.0) WRITE(IUNIT,250)
250    FORMAT(1X,69('*'))
     ENDIF
200  CONTINUE
     RETURN
C *-*-*-*
```

```
27  1.35E+01 7.23E+01 6.28E+01 5.14E+01 4.69E+01 4.63E+01
30  1.50E+01 8.84E+01 7.94E+01 6.53E+01 5.65E+01 5.32E+01
33  1.65E+01 8.21E+01 7.91E+01 7.08E+01 6.32E+01 5.91E+01
36  1.80E+01 5.72E+01 6.21E+01 6.47E+01 6.29E+01 6.06E+01
39  1.95E+01 2.83E+01 3.83E+01 5.05E+01 5.58E+01 5.68E+01
42  2.10E+01 1.22E+01 2.16E+01 3.66E+01 4.61E+01 4.98E+01
45  2.25E+01 1.84E+01 2.19E+01 3.10E+01 3.94E+01 4.38E+01
48  2.40E+01 4.33E+01 3.89E+01 3.71E+01 3.96E+01 4.23E+01
**************************************************
51  2.55E+01 7.23E+01 6.27E+01 5.13E+01 4.67E+01 4.61E+01
54  2.70E+01 8.84E+01 7.93E+01 6.52E+01 5.64E+01 5.31E+01
57  2.85E+01 8.21E+01 7.91E+01 7.07E+01 6.31E+01 5.91E+01
60  3.00E+01 5.72E+01 6.21E+01 6.47E+01 6.29E+01 6.07E+01
63  3.15E+01 2.83E+01 3.83E+01 5.05E+01 5.58E+01 5.68E+01
66  3.30E+01 1.22E+01 2.17E+01 3.66E+01 4.61E+01 4.99E+01
69  3.45E+01 1.84E+01 2.19E+01 3.11E+01 3.94E+01 4.39E+01
72  3.60E+01 4.33E+01 3.89E+01 3.72E+01 3.97E+01 4.23E+01
**************************************************
75  3.75E+01 7.23E+01 6.27E+01 5.13E+01 4.67E+01 4.62E+01
78  3.90E+01 8.84E+01 7.93E+01 6.52E+01 5.65E+01 5.31E+01
81  4.05E+01 8.21E+01 7.91E+01 7.08E+01 6.32E+01 5.92E+01
84  4.20E+01 5.72E+01 6.21E+01 6.47E+01 6.30E+01 6.07E+01
87  4.35E+01 2.83E+01 3.83E+01 5.06E+01 5.59E+01 5.69E+01
90  4.50E+01 1.22E+01 2.17E+01 3.67E+01 4.62E+01 5.00E+01
93  4.65E+01 1.84E+01 2.19E+01 3.11E+01 3.95E+01 4.39E+01
96  4.80E+01 4.33E+01 3.89E+01 3.72E+01 3.97E+01 4.24E+01
**************************************************
99  4.95E+01 7.23E+01 6.27E+01 5.13E+01 4.68E+01 4.62E+01
102 5.10E+01 8.84E+01 7.94E+01 6.53E+01 5.65E+01 5.32E+01
105 5.25E+01 8.21E+01 7.91E+01 7.08E+01 6.32E+01 5.92E+01
108 5.40E+01 5.73E+01 6.21E+01 6.47E+01 6.30E+01 6.08E+01
111 5.55E+01 2.83E+01 3.83E+01 5.06E+01 5.59E+01 5.70E+01
114 5.70E+01 1.22E+01 2.17E+01 3.67E+01 4.62E+01 5.00E+01
117 5.85E+01 1.84E+01 2.19E+01 3.11E+01 3.95E+01 4.40E+01
120 6.00E+01 4.33E+01 3.89E+01 3.72E+01 3.97E+01 4.24E+01
**************************************************
```

8.6.6. Обсуждение результатов

Из анализа результатов, видно, что поле температуры становится почти полностью периодическим к пятому циклу. В периодическом распределении температуры может быть заметен эффект тепловой инерции грунта. При `ITER = 99` температура поверхности почвы `T(2,14)` достаточно велика, но в глубине можно обнаружить значения температур меньше 50. Это может быть уподоблено «памяти» о предыдущей зиме, сохраненной грунтом. Точно так же в первый зимний месяц (соответствующий `ITER = 111`), несмотря на то что температура `T(2,14)` низкая, в глубине можно обнаружить значения выше 50. Это показывает, что, хотя температура в каждой точке меняется во времени периодически, тепловая инерция создает сдвиг по фазе между колебаниями температуры в различных точках.

8.6.7. Заключительные замечания

Возможность расчета «стационарных периодических» процессов полезна для многих приложений, таких как теплопроводность в стенках двигателей внутреннего сгорания, суточный нагрев или охлаждение здания и теплоперенос в регенераторах. Интересные физические результаты могут быть получены из анализа периодического поведения поля температуры. Легко обнаружить что периодическое изменение температуры на границе вызывает температурные волны вдоль пространственной координаты в теле. При движении вдоль этой координаты амплитуда этих волн экспоненциально уменьшается.

Примеры, приведенные в этой главе, должны дать вам возможность использовать CONDUCT для решения множества стационарных и нестационарных задач теплопроводности. Вы должны использовать эту возможность для решения сложных и интересных проблем и одновременно углублять ваше понимание физических явлений.

Задачи теплопроводности — это только один из классов задач, которые могут быть решены с помощью программы CONDUCT. Другой важный класс образуют задачи о полностью развитых течениях и теплопереносе в каналах. В следующей главе кратко рассмотрим математическую постановку такого рода задач. В гл. 10 будут представлены некоторые примеры применения программы CONDUCT для решения задач о течениях в каналах.

8.7. ЗАДАЧИ

8.1. Для начала используйте CONDUCT для решения одномерных задач. Если вы хотите рассчитать распределение температуры по оси x, задайте нулевой тепловой поток на границах, перпендикулярных оси y (заметим, что M1 должно быть не меньше 4). Решите задачу, приведенную в п. 2.4.5, с применением CONDUCT. Результаты этой задачи не обязательно совпадут с результатами, полученными в п. 2.4.5, так как в CONDUCT для построения сетки используется способ B, а не способ A.

8.2. Решите одномерную задачу стационарной теплопроводности в полом цилиндре с внутренним и внешним радиусами, равными соответственно 0,5 и 2. Температуру на внутренней и внешней поверхностях задайте равными 100 и 200 соответственно. Покажите, что полученное решение одномерно. В этом случае температура по радиусу должна изменяться по логарифмическому закону. Сравните численные значения T в расчетных точках с точным решением. Для разумно выбранного числа расчетных точек в радиальном направлении совпадение должно быть хорошим.

Вычислите тепловые потоки на внутренней и внешней поверхностях и сравните их с точным решением.

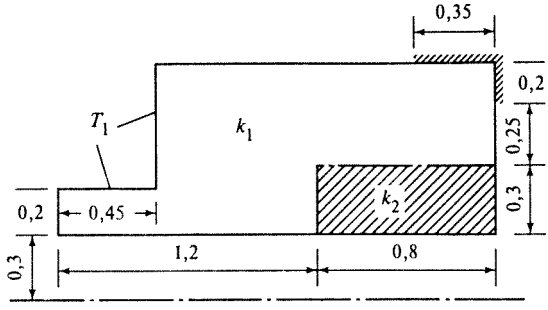


Рис. 8.8. К задаче 8.3

8.3. Напишите процедуру GRID для задачи, условие которой приведено на рис. 8.8. Используйте L1 = 13 и M1 = 11. Убедитесь, что грани контрольных объемов совпадают с имеющимися разрывами.

8.4. Рассчитайте распределение температуры в поперечном сечении длинного цилиндра. Теплопроводность везде равна 2,2. Граничные условия следующие: одна половина внешней поверхности цилиндра теплоизолирована, в то время как другая омывается жидкостью с температурой 500, коэффициент теплоотдачи равен 22. В половине сечения с теплоизолированной границей происходит выделение тепла с $S = 2000$; в другой половине источниковый член равен нулю. Расчетная сетка — равномерная с L1 = 12, M1 = 16. Напишите процедуру PHI для задания теплопроводности, источниковых членов и граничных условий.

8.5. Для случая стационарной теплопроводности в плоском теле, представленном на рис. 8.9, $k = 5$, $T_1 = 20$, $T_2 = 50$, $q = 250$. На верхней поверхности тела граничные условия включают в себя конвективный теплообмен с внешней средой $h = 2{,}9$, $T_\infty = 5$ и потери тепла излучением, составляющие $2{,}5(T_B^4 - T_\infty^4)$, где T_B — температура границы. Расчетная сетка — равномерная с L1 = 11 и M1 = 8. Напишите часть процедуры PHI, которая необходима для задания граничных условий, соответствующих теплообмену за счет совместного действия конвекции и излучения.

8.6. Рассчитайте поле температуры для случая, описанного в задаче 8.5.

8.7. В случае стационарной теплопроводности для тела, представленного на рис. 8.10, граничные условия задаются в виде потока плотностью $q = 50$, поступающего в тело, как показано на рисунке. При L1 = 10 и M1 = 14 напишите ту часть PHI, которая необходима для задания этого граничного условия.

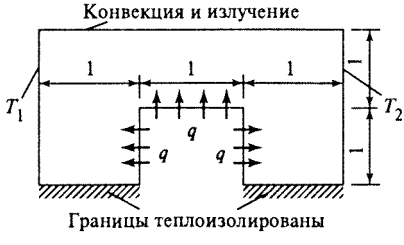


Рис. 8.9. К задаче 8.5

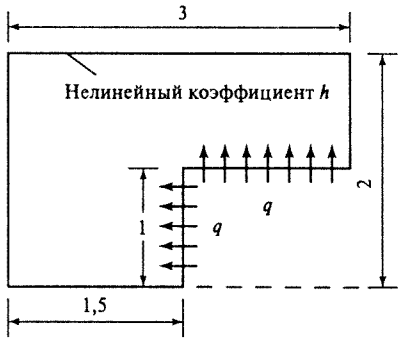


Рис. 8.10. К задаче 8.7

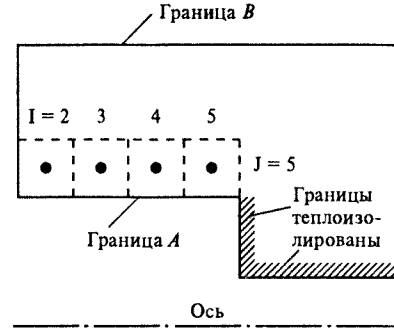


Рис. 8.11. К задаче 8.9

8.8. Для случая, описанного в задаче 8.7, граничное условие на верхней поверхности выражается через нелинейный коэффициент теплоотдачи h и температуру внешней среды $T_\infty = 25$. Коэффициент теплоотдачи задается в виде $h = 2{,}8(\mathtt{T(I,M1)} - T_\infty)^{1/4}$. Предположив, что `T(I,M1)` всегда больше T_∞, напишите соответствующую часть `PHI` для задания этого граничного условия.

8.9. Для случая стационарной теплопроводности в показанном на рис. 8.11 осесимметричном теле условие на границе A задано в виде коэффициента теплоотдачи $h = 5$ и температуры окружающей среды $T_\infty = 25$. Предположив, что теплопроводность уже была корректно задана в массиве `GAM(I,J)`, напишите соответствующую часть `PHI`, необходимую для задания этого граничного условия.

8.10. Измените подпрограмму `ADAPT` примера 1 (см. § 8.1) для расчета интегральных потоков на четырех границах. Проверьте и покажите, что тепловой баланс в точности выполняется с учетом погрешностей округления.

Внесите дальнейшие изменения для учета непостоянных источникового члена и теплопроводности. Исследуйте изменения поля температуры. Снова проверьте выполнение теплового баланса.

8.11. Для случая стационарной теплопроводности в плоском теле с $k = 10$ граничные условия задаются в виде плотности теплового потока $q = 50$ (рис. 8.12). Предположив, что была построена равномерная сетка с `L1 = 11` и `M1 = 10`, напишите ту часть `PHI`, которая необходима для реализации этого граничного условия. Граничные условия на нижней поверхности следующие: коэффициент теплоотдачи $h = 3{,}8$, температура окружающей среды $T_\infty = 300$, потеря тепла за счет излучения задается выражением $2{,}34(\mathtt{T(I,1)}^4 - T_\infty^4)$, при этом `T(I,1)` всегда остается больше T_∞. Напишите соответствующую часть `PHI` для реализации этого условия.

8.12. В большую бетонную плиту толщиной 3 для прочности встроили металлические балки квадратного поперечного сечения 1×1 (рис. 8.13). Верхняя и нижняя поверхности плиты имеют температуру 0 и 100 соответственно. Теплопровод-

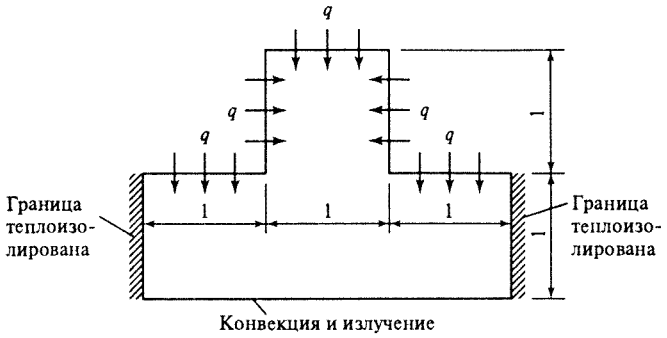


Рис. 8.12. К задаче 8.11

ность металла k_m намного больше, чем бетона k_0. Рассчитайте стационарное распределение температуры в плите. Покажите, что, так как k_m/k_0 очень велико, различные значения этого отношения приводят практически к одним и тем же решениям. Выведите на печать тепловые потоки на поверхностях плиты и покажите, что тепловой баланс хорошо выполняется. На чертеже расчетной области с изображением используемой сетки сделайте приблизительные наброски изотерм

$$\frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} = 0,\ 0;\ 1,\ 0{,}2;\ \ldots;\ 1{,}0.$$

8.13. Для задачи, условие которой представлено на рис. 8.14, напишите процедуры `GRID` и `PHI`. Целью является решение задачи стационарной теплопроводности с источниковым членом $S = 300 - 0{,}2T$ во всем теле. Тело имеет прямоугольное отверстие в центре, температура поверхности которого $T_0 = 100$. Теплопроводность тела равна 2,4. Используйте наименьшую из возможных расчетную область. Возьмите `L1` = 11 и `M1` = 10. Известно также, что $h = 7$, $T_\infty = 20$.

8.14. Для задачи, условие которой представлено на рис. 8.15, напишите процедуры `GRID` и `PHI`. Решите задачу стационарной теплопроводности с постоянным источником тепла во всем теле $S = 300$. Используйте `L1` = 11 и `M1` = 8.

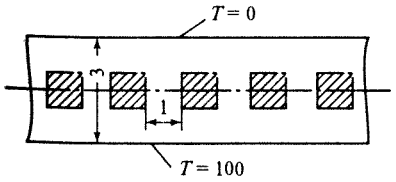


Рис. 8.13. К задаче 8.12

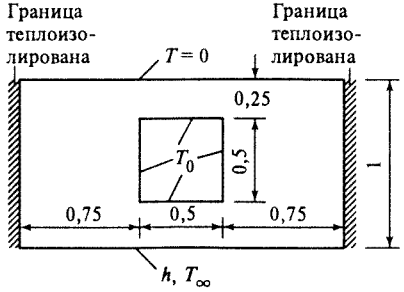


Рис. 8.14. К задаче 8.13 →

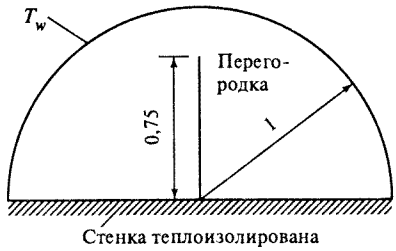


Рис. 8.15. К задаче 8.14

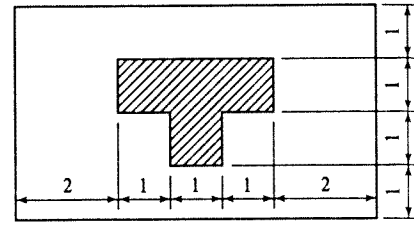


Рис. 8.16. К задаче 8.15

8.15. Тонкая металлическая пластина размерами 7×4 имеет толщину 0,3 (рис. 8.16). Со всех сторон она омывается жидкостью, имеющей температуру $T_\infty = 10$. Коэффициент теплоотдачи равен 17. Заштрихованная область представляет собой интегральную схему, встроенную в пластину. В схеме выделяется тепло с $S = 55$ на единицу объема. Теплопроводность металлической пластины равна 5,5, в то время как для заштрихованной области она равна 1,2. Изменения температуры по толщине пластины пренебрежимо малы. Напишите подпрограмму ADAPT для нахождения стационарного поля температуры в пластине. Распечатайте также значения суммарного выделения тепла в области и суммарной потери тепла через все поверхности пластины. Следует ли ожидать, что эти величины будут в точности равны?

8.16. Решите задачу стационарной теплопроводности, условия которой представлены на рис. 8.17. Используйте L1 = 13 и M1 = 9. Убедитесь, что грани контрольных объемов совпадают с имеющимися разрывами. В объеме тела выделяется тепло, $S = 100 - 0{,}5T$.

8.17. Рассчитайте стационарное распределение температуры для ситуации, показанной на рис. 8.18. В задаче рассматривается полукруглое тело с вырезом.

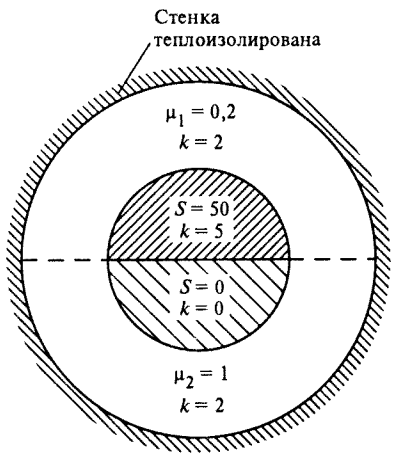


Рис. 8.17. К задаче 8.16

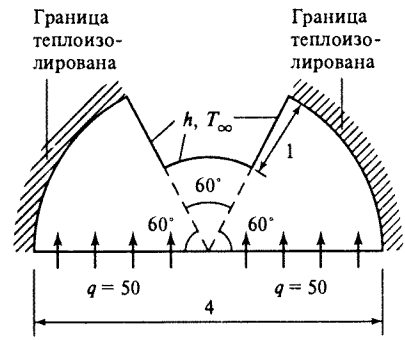


Рис. 8.18. К задаче 8.17

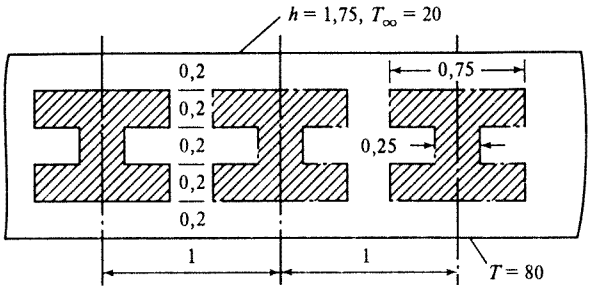


Рис. 8.19. К задаче 8.18

Поверхность выреза соприкасается с жидкостью, имеющей температуру $T_\infty = 20$, и обменивается с ней теплом, коэффициент теплоотдачи $h = 7{,}5$. Остальная закругленная граница теплоизолирована, а через плоскую поверхность тела поступает равномерный тепловой поток плотностью $q = 50$. Теплопроводность k и теплоемкость c_p равны 1,9 и 4,1 соответственно[1]. Вычислите суммарный тепловой поток через поверхность выреза (который должен быть равен суммарному тепловому потоку через плоскую поверхность тела).

8.18. В бетонную плиту для прочности встроили стальные балки (рис. 8.19). Теплопроводность бетона и стали равна 1 и 100 соответственно. Нижняя граница имеет постоянную температуру, равную 80, а верхняя обменивается теплом с окружающей средой, имеющей температуру 20, коэффициент теплоотдачи равен 1,75. Использовав наименьшую расчетную область, найдите распределение температуры в теле и суммарный тепловой поток через верхнюю границу. Сравните его с потоком в случае отсутствия встроенных стальных балок (этот случай приводит к одномерной задаче, и вы можете определить поток по простой формуле, не используя CONDUCT). Вы обнаружите, что области стальных балок имеют практически постоянную температуру. Почему?

8.19. В области, занимаемой бетоном (см. задачу 8.18), происходит объемное выделение тепла с $S = 2{,}5 - 0{,}01T$ (это может произойти в случае некоторых химических реакций в бетоне). Для условий задачи 8.18 найдите стационарное распределение температуры в области. Определите также :

а) суммарный тепловой поток через нижнюю поверхность;

б) суммарный тепловой поток через верхнюю поверхность;

в) суммарное выделение тепла в бетоне.

Зная эти три величины, покажите, что тепловой баланс в точности выполняется.

8.20. Тонкая круглая металлическая пластина диаметром 8 и толщиной 0,2 со всех сторон омывается жидкостью с температурой $T_\infty = 20$ (рис. 8.20). Коэффициент теплоотдачи равен 25. Заштрихованные области представляют собой интегральные схемы, встроенные в пластину. Схемы выделяют тепло, $S = 100$. Теплопроводность металлической пластины и встроенных схем равна 2,2. Изменение температуры по толщине пластины пренебрежимо мало. Подготовьте

[1]Задание теплоемкости в данной постановке задачи излишне (*Прим. ред.*).

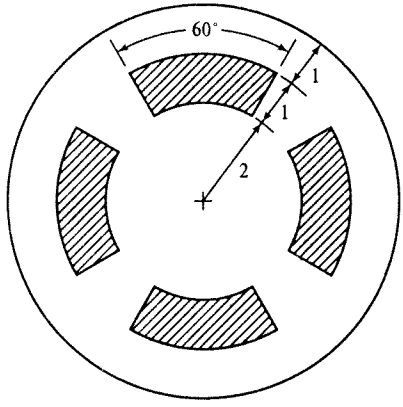


Рис. 8.20. К задаче 8.20

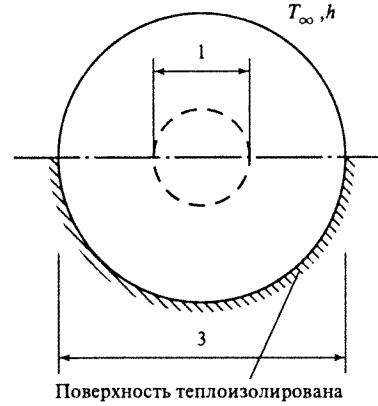


Рис. 8.21. К задаче 8.21

подпрограмму ADAPT для получения стационарного распределения температуры в пластине. Рассчитайте также и выведите на печать: а) суммарную генерацию тепла G в области; б) суммарную потерю тепла Q со всех поверхностей пластины; в) величину $G-Q$, характеризующую выполнение теплового баланса.

8.21. В сплошном цилиндре диаметром 3 с постоянной теплопроводностью $k = 2$ во внутренней цилиндрической части диаметром 1 происходит выделение тепла с $S = 500$ (рис. 8.21). Одна половина внешней поверхности цилиндра теплоизолирована, в то время как другая омывается жидкостью с $T_\infty = 15$. Коэффициент теплоотдачи (который может являться результатом свободной конвекции у внешней поверхности) зависит от локальной температуры внешней поверхности T_S следующим образом: $h = 2{,}5(T_S - T_\infty)$. Подготовьте подпрограмму ADAPT и рассчитайте стационарное распределение температуры. В дополнение к стандартному выводу результатов на печать сделайте распечатку локальных значений теплового потока через внешнюю поверхность цилиндра. Выведите также на печать невязку теплового баланса. Для реализации нелинейных граничных условий на внешней границе используйте приемлемую линеаризацию.

8.22. Рассмотрим цилиндрическое ребро диаметром 5 и длиной 20 с теплопроводностью 2,5 (рис. 8.22). Основание ребра имеет температуру T_0. Конец ребра теплоизолирован. Боковая поверхность омывается жидкостью с температурой T_∞, коэффициент теплоотдачи $h = 0{,}35$. Использовав следующие значения: $T_0 = 100$, $T_\infty = 20$, рассчитайте стационарное распределение температуры в ребре. Найдите суммарный тепловой поток через боковую поверхность ребра и тепловой поток, поступающий в ребро через его основание. Покажите, что эти величины равны.

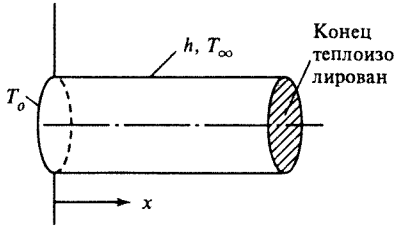


Рис. 8.22. К задаче 8.22

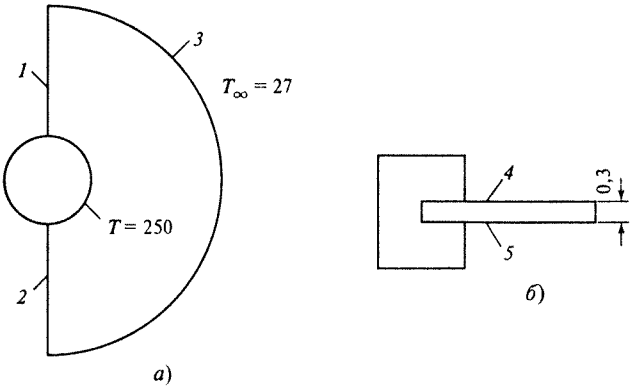


Рис. 8.23. К задаче 8.24:
а — вид сверху; *б* — вид сбоку

8.23. Для случая, описанного в задаче 8.22, предположите, что изначально все ребро имело температуру 100. При тех же граничных условиях рассчитайте нестационарное распределение температуры в ребре. Продолжите расчет до тех пор, пока поле температуры не станет стационарным.

8.24. К круглому стержню диаметром 2 присоединено полукруглое ребро толщиной 0,3 с внешним радиусом 3,5 (рис. 8.23). Поверхность стержня имеет постоянную температуру 250. Ребро теряет тепло в окружающую среду, имеющую температуру T_∞ = 27, коэффициент теплоотдачи равен 12. Съем тепла с ребра происходит с плоских концов *1* и *2*, полукруглого торца *3*, верхней и нижней поверхностей *4* и *5*. Теплопроводность материала ребра равна 3,7. Изменение температуры по толщине ребра пренебрежимо мало. Подготовьте подпрограмму ADAPT для получения стационарного распределения температуры в ребре. Обеспечьте вывод на печать значений суммарного теплового потока через поверхность ребра.

Глава 9

ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛОПЕРЕНОС В КАНАЛАХ

Как уже было отмечено, поля скорости и температуры при полностью развитом течении в каналах описываются обобщенным уравнением типа (3.6). Поэтому программа CONDUCT легко может быть применена для анализа полностью развитого течения и теплопереноса. В этой главе рассмотрим основные концепции и уравнения применительно к течениям в каналах. В гл. 10 приведем несколько примеров использования CONDUCT для решения таких задач.

9.1. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

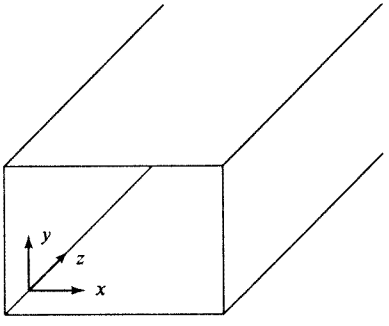


Рис. 9.1. Канал прямоугольного сечения

Хотя каналы могут иметь любую геометрическую форму, для простоты рассмотрим прямой канал прямоугольного поперечного сечения, изображенный на рис. 9.1. Течение в основном направлено вдоль оси z (назовем ее продольной координатой, в отличие от поперечных координат x и y). Среди трех компонент скорости u, v и w продольная составляющая w обычно намного больше поперечных u и v. Течение вызывается градиентом давления $\partial p/\partial z$, который обычно отрицателен. Давление практически постоянно в поперечном сечении и изменяется вдоль оси z.

Так как изменения скорости и температуры по оси z малы по сравнению с изменениями их по оси x или y, то очень часто пренебрегают вязким напряжением, вызванным градиентом $\partial w/\partial z$, и переносом тепла за счет градиента $\partial T/\partial z$. При этом обычно член $\partial p/\partial z$ в уравнении для продольной составляющей скорости полагают равным $\partial \bar{p}/\partial z$, где $\bar{p}$ соответствует среднему значению давления в поперечном сечении.

Течение в канале может быть стационарным или нестационарным. Мы рассмотрим только стационарные течения.

9.2. НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК И ПОЛНОСТЬЮ РАЗВИТОЕ ТЕЧЕНИЕ

Рассмотрим течение (рис. 9.2) жидкости в канале при однородном поле скорости w на входе. По мере того как жидкость движется вдоль канала, течение у стенки замедляется из-за трения о стенки. Скорость течения в ядре потока остается постоянной по сечению, но

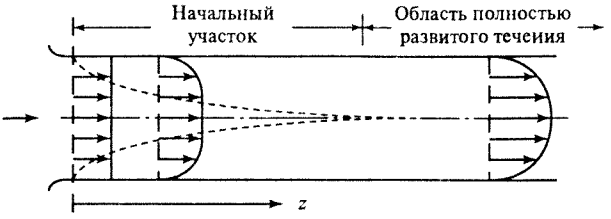


Рис. 9.2. Развитие течения

увеличивается вдоль канала. При этом происходит переток жидкости от пристеночной области в ядро потока. Пограничные слои у стенок канала постепенно растут и в конце концов сливаются. На этом этапе ядро потока исчезает и во всем поперечном сечении преобладают ненулевые градиенты скоростей. К этому моменту развитие профиля скорости завершается и поле течения для всех последующих сечений становится независимым от продольной координаты z. Градиент давления $d\bar{p}/dz$ также перестает изменяться вдоль оси z.

Область течения, в которой компоненты скорости не зависят от продольной координаты, называется *областью полностью гидродинамически развитого течения*[1]. Область, в которой распределение скорости определяется геометрической формой канала и приходит в соответствие с трением на стенках, называется *начальным участком*.

Задачи о течениях в прямоугольном канале являются в общем случае трехмерными. Однако для области полностью развитого течения задача становится двумерной, так как изменения скорости вдоль координаты z отсутствуют (для двумерных течений, например в канале круглого сечения или в плоскопараллельном канале, задача о полностью развитом течении становится одномерной). Можно получить решение сразу для полностью развитого течения, не рассматривая начальный участок. Таким образом, ограничиваясь полностью развитым течением, мы уменьшаем размерность задачи и выигрываем за счет гораздо более простых вычислений.

Во многих практических задачах длина канала намного больше его поперечных размеров. Таким образом, начальный участок занимает только небольшую часть длины канала. В таком случае разумно рассматривать весь канал, основываясь на полностью развитом течении. Поэтому анализ полностью развитых течений имеет существенную практическую значимость.

Рассмотрим, что происходит с поперечными компонентами скорости в области полностью развитого течения. В ситуации, показанной на рис. 9.2, течение становится строго продольным и попереч-

[1] В отечественной литературе употребляется термин *гидродинамически стабилизированное* течение (*Прим. ред.*).

ные скорости u и v равны нулю. Однако существуют более сложные течения, при которых поперечные скорости отличны от нуля и в области полностью развитого течения. Подобная особенность наблюдается при течениях в криволинейных или вращающихся каналах, а также при течениях со свободной конвекцией и при некоторых турбулентных течениях в каналах некруглого поперечного сечения. В зависимости от того, равны поперечные компоненты скорости нулю или нет, полностью развитые течения могут быть разделены на простые и сложные.

Сложное полностью развитое течение в канале характеризуется следующими зависимостями:

$$u = u(x, y); \tag{9.1}$$

$$v = v(x, y); \tag{9.2}$$

$$w = w(x, y); \tag{9.3}$$

Заметим, что скорости u, v и w независимы от продольной координаты z, при этом скорости u и v могут быть ненулевыми, даже если они не зависят от z.

Простые полностью развитые течения в канале определяются следующим образом:

$$u = 0; \tag{9.4}$$

$$v = 0; \tag{9.5}$$

$$w = w(x, y); \tag{9.6}$$

Еще одной характеристикой простого полностью развитого течения является то, что давление постоянно по поперечному сечению и меняется линейно вдоль продольной координаты, т.е.

$$p = p(z); \tag{9.7}$$

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = \text{const}. \tag{9.8}$$

Как мы скоро увидим, только *простые* полностью развитые течения описываются уравнениями типа уравнений теплопроводности, поэтому попадают в область применения CONDUCT. Для *сложных* полностью развитых течений также можно упростить вычисления за счет уменьшения размерности, но из-за наличия поперечных скоростей требуется включение в основные дифференциальные уравнения конвективных членов. Для определения этих скоростей необходимо решение взаимосвязанных уравнений движения и неразрывности в поперечном сечении, что представляет собой задачу слишком сложную, чтобы ее включать в данную книгу.

Простые полностью развитые течения обычно реализуются вдали от входа в прямые каналы постоянного поперечного сечения. Чтобы течение оставалось полностью развитым, такие свойства жидкости, как вязкость и плотность (а также теплопроводность и

теплоемкость при рассматриваемом далее полностью развитом теплопереносе), должны оставаться постоянными. Что касается геометрической формы, то поперечное сечение канала может быть представлено в декартовой (x, y) или полярной (θ, r) системе координат (т.е. MODE = 1 или 3). Осесимметричная система координат (x, r) при анализе течений в каналах не используется, в этой системе координат (MODE = 2) можно представить *закругленный (изогнутый) канал прямоугольного* поперечного сечения, но это приведет к *сложному* течению, которое не может быть описано с помощью CONDUCT.

9.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТИ

9.3.1. Основные уравнения

В случае стационарного ламинарного трехмерного течения в канале уравнение для составляющей скорости вдоль оси z может быть записано в виде

$$\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}, \quad (9.9)$$

где в левой части представлены конвективные члены, а в правой — члены, соответствующие вязким напряжениям и градиенту давления. С помощью выражений (9.4)—(9.8) для простого полностью развитого течения, которое здесь и рассматривается, преобразуем (9.9) к виду

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (9.10)$$

С физической точки зрения это уравнение представляет собой баланс между давлением и вязким напряжением, вызываемым изменениями w по сечению. Интересно, что в выражении (9.10) отсутствует плотность жидкости. Заметим также, что $\partial p/\partial z$ — просто константа во всем поперечном сечении. Видно, что (9.10) будет соответствовать стационарному уравнению (3.6), если сделать следующие замены:

$$\phi = w; \quad (9.11)$$

$$\Gamma = \mu; \quad (9.12)$$

$$S = \mathrm{d}p/\mathrm{d}z. \quad (9.13)$$

Таким образом, расчет поля продольной скорости с математической точки зрения подобен решению задачи теплопроводности с постоянной скоростью генерации тепла.

9.3.2. Безразмерная форма

Для нахождения параметров, определяющих поле скорости, полезно представить (9.10) в безразмерном виде. При постоянной вязкости это уравнение удобно записать как

$$0 = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right) + 1, \tag{9.14}$$

где безразмерные координаты X и Y имеют вид

$$X = x/D; \tag{9.15}$$

$$Y = y/D. \tag{9.16}$$

Здесь D — некоторый характерный размер поперечного сечения канала, например диаметр или радиус круглого канала, длина одной из сторон прямоугольного сечения канала или гидравлический диаметр, вычисляется по формуле (9.18). Безразмерная скорость

$$W = \frac{\mu w}{-(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)D^2}. \tag{9.17}$$

При течении в канале давление p уменьшается вдоль оси z. Поэтому величина $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ положительна.

Так как выражение (9.14) не содержит параметров, то его решение зависит только от граничных условий. Они задаются геометрическими характеристиками канала и требованием, чтобы скорость w на стенках равнялась нулю. Таким образом, распределение безразмерной скорости W зависит только от формы канала (а не от физических размеров) и не зависит от значений вязкости, перепада давления, числа Рейнольдса и др. Размерная скорость w может быть найдена по (9.17) при подстановке конкретных значений вязкости, градиента давления и характерного размера.

9.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЧЕНИЯ

Течение в канале обычно характеризуется некоторыми специальными величинами и параметрами. Рассмотрим некоторые из них.

Некоторые полезные определения. Гидравлический диаметр поперечного сечения канала рассчитывается по формуле

$$D_h = 4A/P, \tag{9.18}$$

где A — площадь поперечного сечения; P — смоченный периметр (длина той границы, на которой жидкость соприкасается со стенками канала). Число 4 в (9.18) используется для того, чтобы сделать гидравлический диаметр D_h круглой трубы равным диаметру этой

трубы. Для канала квадратного поперечного сечения D_h равно длине стороны квадрата.

Средняя скорость $\overline{w}$ в поперечном сечении канала определяется таким образом, чтобы объемный расход через канал был равен $\overline{w}A$:

$$\overline{w} = \frac{\iint w\,dx\,dy}{A} = \frac{\iint w\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}. \tag{9.19}$$

Здесь двойные интегралы обозначают интегрирование по поперечному сечению канала.

Число Рейнольдса для течения в канале определяется выражением

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \overline{w} D_h}{\mu}, \tag{9.20}$$

где ρ и μ — плотность и вязкость жидкости.

Безразмерной характеристикой градиента давления является коэффициент трения f, который определяется тремя-четырьмя различными способами. В дальнейшем будем использовать следующее выражение:

$$f = \frac{(dp/dz)D_h}{(1/2)\rho \overline{w}^2}. \tag{9.21}$$

Нужно быть очень внимательным при сравнении значений f, полученных по (9.21), со значениями, найденными по другим источникам. Другие часто встречающиеся способы определения дают значения f, в 2 или 4 раза меньшие, чем рассчитанные по (9.21).

Полностью развитое течение. Из (9.17), (9.20) и (9.21) следует, что

$$f\,\mathrm{Re} = 2(D_h/D)^2/\overline{W}, \tag{9.22}$$

где $\overline{W}$ — безразмерная средняя скорость согласно (9.17). После получения W в виде функции от X и Y можно рассчитать $\overline{W}$ по формуле, аналогичной (9.19). Так как $\overline{W}$ зависит только от формы канала, как и отношение D_h/D, то из (9.22) следует, что для полностью развитого ламинарного течения произведение $f\mathrm{Re}$ постоянно для канала заданной формы. Значение $f\mathrm{Re}$ для круглой трубы равно 64, а для плоскопараллельного канала — 96.

Хотя W является приемлемой безразмерной скоростью для получения (9.14), другой полезной безразмерной величиной может быть $w/\overline{w}$. Для канала некоторой заданной формы существует универсальное распределение $w/\overline{w}$.

Важность интегральных параметров. Численный расчет поля скорости в канале заканчивается, когда решено уравнение (9.10) или (9.14). Вычисление значений величин $\overline{W}$ или $f\mathrm{Re}$ является просто последующей обработкой результатов. Вы должны понимать, что такая обработка не существенна для основной задачи получения поля скорости. Она проводится для представления результатов в форме, обычной и знакомой инженерам. На практике широко распространены различные определения коэффициента трения и соответствующих величин. Ни одно из них не должно рассматриваться как более правильное или главное. Когда между определением величины и ее рассчитанным значением поддерживается должное соответствие, может иметь место любое представление результатов.

9.5. ПОЛНОСТЬЮ РАЗВИТЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Предварительное ознакомление. Точно так же, как поле скорости в канале имеет начальный участок и область полностью развитого течения, поле температуры характеризуется аналогичными тенденциями. На рис. 9.3 показаны профили температуры в различных поперечных сечениях канала. Жидкость втекает в канал, имея постоянную температуру. Затем около стенок канала формируются и постепенно увеличиваются температурные пограничные слои. В итоге профиль температуры по сечению устанавливается и не меняется вдоль координаты z. Участок, где температура $T = T(x, y)$ и $\partial T/\partial z = 0$, можно рассматривать в качестве области полностью развитого теплообмена, но, как будет показано далее, это определение ограничивает область применения анализа полностью развитого теплообмена довольно неинтересными случаями.

В ситуации, показанной на рис. 9.3, жидкость получает тепло от верхней стенки и теряет его на нижней. В области полностью развитого теплообмена жидкость интегрально не получает и не теряет тепло (вот почему температура не меняется вдоль оси z). В этой области движение жидкости абсолютно не влияет на распределение температуры. Задача вырождается в простую задачу стационарной

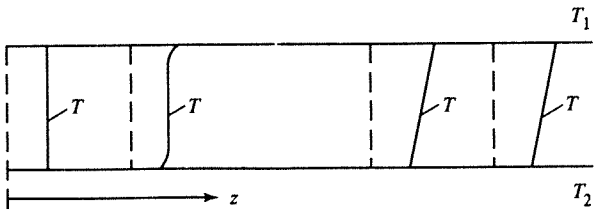


Рис. 9.3. Развитие поля температуры

теплопроводности в поперечном сечении без каких-либо источников тепла. Хотя такая задача легко решается с применением CONDUCT, она не соответствует реальной ситуации. При течениях в каналах обычно имеет место охлаждение или нагрев жидкости.

Если жидкость в канале подвергается охлаждению или нагреву, то температура T должна меняться вдоль оси z. Но даже в этом случае для поля температуры можно ввести понятие области полностью развитого теплообмена[1].

Область полностью развитого теплообмена. Когда некоторая безразмерная температура Θ становится независимой от z, хотя T продолжает зависеть от x, y и z, поле температуры будет рассматриваться в качестве полностью развитого. Таким образом, для области полностью развитого теплообмена

$$\Theta = \Theta(x, y). \tag{9.23}$$

Это значит, что *форма* температурного профиля остается постоянной при различных значениях z. Другими словами, рассматриваемая область полностью развитого теплообмена характеризуется постоянным коэффициентом теплоотдачи (см. п. 9.6.2).

Так как на поле температуры оказывают влияние скорости в канале, то важным условием существования области полностью развитого теплообмена является полностью развитое поле скорости. Для того чтобы итоговое поле температуры имело неизменную форму, необходима некоторая степень регулярности тепловых граничных условий. Некоторые граничные условия для температуры в области полностью развитого теплообмена рассмотрены в пп. с 9.6.3—9.6.6.

9.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

9.6.1. Дифференциальное уравнение

Уравнение энергии для стационарного медленного течения в канале без вязкой диссипации записывается в виде

$$\rho c_p \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z} \right), \tag{9.24}$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; k — теплопроводность жидкости. Левая часть (9.24) соответствует конвективному переносу энтальпии в канале, а члены правой части описывают теплопроводность в жидкости. Так как обычно перенос тепла вдоль оси z очень мал по сравнению с переносом в поперечном его

[1] В отечественной литературе эту область канала принято называть *областью стабилизированного теплообмена* (*Прим. ред.*).

сечении, то последним членом в уравнении (9.24) можно пренебречь. При *простом* полностью развитом течении в канале поперечные скорости u и v равны нулю, поэтому (9.24) упрощается и принимает вид

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{9.25}$$

Уравнение (9.25) соответствует стационарной форме обобщенного дифференциального уравнения (3.6) при следующей замене:

$$\phi = T; \tag{9.26}$$

$$\Gamma = k; \tag{9.27}$$

$$S = -\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z}. \tag{9.28}$$

Таким образом, анализ теплообмена в канале сводится к решению задачи типа задачи теплопроводности при формальном рассмотрении конвективного переноса вдоль канала в виде источникового члена. Конечно, задача может быть решена в том случае, если задан источниковый член. Это значит, что производная $\partial T/\partial z$ должна быть задана или найдена из имеющейся информации. Такая возможность появляется, когда профили температуры похожи при различных z. Распределение w в (9.28) предполагается известным из анализа полностью развитого поля скорости.

9.6.2. Некоторые полезные определения

Пусть q_w обозначает локальную плотность теплового потока на стенке канала. В общем случае эта плотность потока непостоянна по всему периметру канала, через который осуществляется теплообмен. Через Q_w обозначим суммарный тепловой поток на единицу продольной длины канала. Следовательно,

$$Q_w = \int q_w \, ds, \tag{9.29}$$

где S — участок периметра поперечного сечения канала; интегрирование проводится по всему обогреваемому участку периметра.

Средняя температура жидкости в заданном поперечном сечении обычно ищется в виде так называемой среднемассовой температуры, которая определяется выражением:

$$T_b = \frac{\iint \rho c w T \, dx \, dy}{\iint \rho c w \, dx \, dy}. \tag{9.30}$$

Интегрирование проводится по всему сечению канала. Для постоянных ρ и c_p выражение (9.30) упрощается:

$$T_b = \frac{\iint wT\,dx\,dy}{\overline{w}A}, \tag{9.31}$$

где $\overline{w}$ — средняя скорость; A — площадь поперечного сечения канала. Удобство такого определения T_b заключается в том, что суммарный поток энтальпии через сечение канала может быть рассчитан как $(\rho\overline{w}A)c_pT_b$.

Локальный коэффициент теплоотдачи h в некоторой точке на стенке канала определяется выражением

$$h = q_w/(T_w - T_b), \tag{9.32}$$

где T_w — локальная температура стенки. Можно также задать формулу для коэффициента теплоотдачи, основанную на средней или любой другой представительной температуре стенки. Средний коэффициент теплоотдачи $\overline{h}$ получается в результате осреднения локальных значений h или на основании средней плотности теплового потока $\overline{q_w}$ и средней температуры стенки $\overline{T}_w$. Хотя может быть использовано любое из этих определений, все же желательно применить то, которое позволит легко рассчитать интересующую нас физическую величину.

Безразмерной формой коэффициента теплоотдачи является число Нуссельта. Оно определяется как

$$\mathrm{Nu} = hD/k, \tag{9.33}$$

где D — характерный размер поперечного сечения канала; k — теплопроводность жидкости.

Среднее число Нуссельта $\overline{\mathrm{Nu}}$ рассчитывается по $\overline{h}$ аналогичным образом. Используя значения Nu или $\overline{\mathrm{Nu}}$, встречающиеся в литературе, вы должны внимательно изучить определения, на которых они основаны. Иначе могут иметь место некоторые ошибочные вычисления. И запомните, что в большинстве случаев нет плохих или хороших определений — они просто разные.

Один из способов определения области полностью развитого теплообмена заключается в требовании, чтобы коэффициент теплоотдачи h или число Нуссельта Nu не зависели от координаты z. Число Нуссельта для полностью развитого теплообмена при ламинарном течении есть величина постоянная, которая не зависит от чисел Рейнольдса и Прандтля. Оно зависит только от геометрических особенностей канала и граничных условий для температуры.

Существует четыре часто встречающихся вида граничных условий для температуры, при которых реализуется область полностью развитого теплообмена. Математические характеристики этих граничных условий рассматриваются в пп. 9.6.3—9.6.6.

9.6.3. Постоянная локальная плотность теплового потока

Когда задано распределение локальной плотности теплового потока q_w по периметру канала, которое остается неизменным вдоль оси z, то в области полностью развитого теплообмена температуры во всех точках поперечного сечения меняются по z одинаково и линейно, т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z} = \text{const}. \tag{9.34}$$

Другими словами, распределение температуры в некотором сечении может быть получено добавлением константы к температуре в другом сечении.

Для соблюдения баланса энергии для канала необходимо, чтобы приращение потока энтальпии на единице продольной длины канала равнялось потоку тепла, подведенного через стенки этого участка канала. Таким образом,

$$Q_w = \rho \overline{w} A c_p \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z}. \tag{9.35}$$

Следовательно, значение $\partial T/\partial z$, необходимое в (9.28), может быть получено по (9.35) при известном Q_w. Если же известно $\partial T/\partial z$, то по уравнению (9.35) можно рассчитать Q_w.

Чтобы показать независимость распределения безразмерной температуры от такого параметра, как число Рейнольдса или число Прандтля, поступим следующим образом. Член в левой части (9.25) можно записать в виде

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{w}{\overline{w}} \rho c_p \overline{w} \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z}. \tag{9.36}$$

Используя это выражение, можно преобразовать уравнение (9.25) к удобной безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{w}{\overline{w}} = 0, \tag{9.37}$$

где безразмерные координаты X и Y заданы, как и ранее, соотношениями (9.15) и (9.16), а безразмерная температура

$$\Theta = \frac{T_w - T}{(\overline{w} D^2/\alpha)(\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z)}. \tag{9.38}$$

Здесь α — температуропроводность, определяемая формулой

$$\alpha = k/(\rho c_p); \tag{9.39}$$

T_w — температура стенки в некоторой точке периметра канала.

Уравнение (9.37) соответствует (3.6) с источниковым членом $w/\overline{w}$, который известен из решения уравнения движения.

Если среднее число Нуссельта $\overline{\mathrm{Nu}}$ определено как

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{D}{k(T_w - T_b)} \frac{Q_w}{P}, \tag{9.40}$$

где P — обогреваемый участок периметра канала, то из (9.35), (9.38) можно получить

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{1}{\Theta_b} \frac{A}{PD}. \tag{9.41}$$

Здесь Θ_b — безразмерная температура, соответствующая T_b. Так как для канала с заданными формой и распределением теплового потока на стенках уравнение (9.37) имеет единственное решение, то число Нуссельта в виде (9.41) является константой, не зависящей от чисел Рейнольдса и Прандтля (локальное число Нуссельта в общем случае будет изменяться по периметру в результате изменения локальной плотности теплового потока, а также вследствие геометрических особенностей поперечного сечения канала).

Можно определить безразмерную температуру, основываясь на T_w и T_b в виде $(T - T_w)/(T_b - T_w)$. Эта температура аналогична безразмерной скорости $w/\overline{w}$.

9.6.4. Постоянная линейная плотность теплового потока вдоль канала при постоянной температуре стенок

Если стенки канала имеют большую теплопроводность, то за счет нее их температура в заданном сечении канала станет постоянной. В этом случае неизвестно локальное изменение плотности теплового потока q_w, но задано постоянное значение Q_w.

Этот случай очень похож на рассмотренный в п. 9.6.3. Уравнения (9.34)—(9.41) здесь также справедливы с учетом того, что T_w — постоянная температура стенки.

9.6.5. Постоянная температура по периметру и длине канала

Когда стенки канала имеют постоянную температуру по его периметру и длине, то формируется область полностью развитого теплообмена другого типа. В такой ситуации жидкость продолжает нагреваться или охлаждаться до тех пор, пока ее температура не достигнет температуры стенок. В случаях, рассмотренных в пп. 9.6.3 и 9.6.4, неизменными остаются разность температур $T_w - T_b$ и соответствующий тепловой поток Q_w. При постоянной температуре стенок разность температур и тепловой поток экспоненциально уменьшаются вдоль оси z.

Области полностью развитого теплообмена характеризуются подобными формами профилей температуры, т.е. отношение $(T_w - T)/(T_w - T_b)$ не зависит от z. Другими словами, хотя разность температур $T_w - T$ убывает по оси z, разность $T_w - T_b$ уменьшается с той же скоростью. Так как

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_b} = f(x, y) , \tag{9.42}$$

то

$$\ln(T_w - T) - \ln(T_w - T_b) = \ln[f(x, y)]. \tag{9.43}$$

Дифференцируя (9.43) по z, получаем

$$\frac{1}{T_w - T}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{T_w - T_b}\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z} . \tag{9.44}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_w - T}{T_w - T_b}\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z} . \tag{9.45}$$

Если известно $\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z$, то локальное значение $\partial T/\partial z$ может быть рассчитано в соответствии с (9.45). Соотношение между $\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z$ и Q_w [см. (9.35)] остается справедливым и в этом случае. Поэтому, если известно Q_w, может быть найдено и $\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z$.

При решении (9.25) выражение для источникового члена (9.28) может быть записано в виде

$$S = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b}\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z} . \tag{9.46}$$

Из-за наличия T в (9.46), появляется искушение линеаризовать источниковый член, положив

$$S_C = -\frac{\rho c_p w T}{T_w - T_b}\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z}. \tag{9.47}$$

и

$$S_P = \frac{\rho c_p w}{T_w - T_b}\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z}. \tag{9.48}$$

Однако это приводит к положительному S_P, так как когда $(T_w - -T_b) > 0$, то $\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z > 0$. Как было объяснено ранее, для обеспечения сходимости итерационного процесса нежелательно использовать положительные значения S_P. Поэтому рекомендуется следующее представление источникового члена:

$$S_C = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b}\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}z}; \tag{9.49}$$

$$S_P = 0. \tag{9.50}$$

Конечно, S_C рассчитывается на каждой итерации по значениям T и T_b, известным с предыдущей итерации. К счастью, этот итерационный процесс сходится очень быстро. Это объясняется тем, что отношение $(T_w - T)/(T_w - T_b)$ зависит только от распределения температуры, а не от абсолютного значения T. Поэтому решение, начатое даже с произвольного приближения T, сходится довольно быстро.

Уравнение (9.25) можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2} + \frac{w}{\bar{w}}\frac{\Theta}{\Theta_b} = 0, \tag{9.51}$$

где Θ определяется по (9.38). Следует заметить, что, так как и $T_w - T$, и $\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z$ убывают по оси z, безразмерная температура Θ остается независимой от z. Граничным условием для (9.51) является равенство нулю значения Θ на стенке.

Число Нуссельта для случая постоянной температуры на стенках определяется также по (9.41). Из этого следует, что Nu зависит только от формы поперечного сечения канала и не зависит от других параметров.

9.6.6. Постоянный внешний коэффициент теплоотдачи

Расширением граничного условия с постоянной температурой стенок является случай, когда канал помещен в среду с постоянной температурой T_∞ и обменивается с ней теплом в соответствии с выражением

$$q_w = h_e(T_\infty - T_w), \tag{9.52}$$

где h_e — постоянный коэффициент теплоотдачи, заданный на внешней поверхности канала. В этом случае постановка задачи аналогична рассмотренной в п. 9.6.5. Единственное отличие заключается в том, что вместо T_w нужно использовать T_∞ (температура T_w не остается постоянной, а экспоненциально приближается к T_∞). Таким образом, безразмерная температура Θ определяется как

$$\Theta = \frac{T_\infty - T}{(\overline{w}D^2/\alpha)(\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z)}, \tag{9.53}$$

и удовлетворяет (9.51).

Граничное условие, заданное через внешний коэффициент теплоотдачи и постоянную температуру окружающей среды, может рассматриваться в качестве граничного условия общего вида, из которого можно вывести более простые граничные условия. Например, если внешний коэффициент теплоотдачи становится очень большим, то температура стенки T_w почти совпадает с температурой окружающей среды T_∞, и мы имеем граничное условие с постоянной температурой. При малом коэффициенте теплоотдачи разность $T_\infty - T_w$ становится намного больше, чем перепады температуры внутри канала, тогда на границе достигается условие постоянства теплового потока. Более подробно эти вопросы рассмотрены в [15].

9.6.7. Более сложные граничные условия

Можно реализовать более сложные граничные условия, применяя граничное условие заданного теплового потока или температуры на стенках только к участку периметра канала, а остальную часть периметра считать адиабатической. Полученные ранее выражения справедливы и в том случае, когда на периметре канала существуют неактивные зоны (с нулевым тепловым потоком).

Однако, когда на одном участке периметра задан ненулевой тепловой поток, а на остальной границе задана температура, то концепция области полностью развитого теплообмена должна быть пере-

смотрена. Такие граничные условия могут привести к довольно неинтересным физическим ситуациям, описанным в § 9.5. При условии полностью развитого теплообмена заданный тепловой поток будет поступать в канал через часть границы и покидать его через остальную часть, для которой задана температура. Температурное поле не будет меняться по продольной оси z. Поэтому интегрально жидкость не будет получать или терять тепло. С вычислительной точки зрения задача вырождается в случай чистой теплопроводности и движение жидкости не играет никакой роли.

9.7. ВВЕДЕНИЕ В ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ О ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ

Использовав эту главу в качестве основы, в гл. 10 рассматривается применение CONDUCT для решения четырех задач о течениях в каналах. В гл. 11 приводятся дополнительные примеры решения задач о некоторых сложных течениях в каналах. Рассмотрим некоторые общие черты этих приложений.

Свойства жидкости и физические параметры. Для заданных формы канала и граничных условий будет получено решение в безразмерном виде, которое не зависит от значений вязкости, теплопроводности, перепада давления, теплового потока и др. Поэтому можно задавать произвольные значения этих физических величин. Будут использоваться простые числа, например $\mu = 1$, $k = 1$ и т.п. Однако может быть доказано, что *безразмерное* решение не изменится, если эти значения будут заменены на некоторые другие, например $\mu = 27{,}9$, $k = 0{,}458$ и т.п.

Если задана температура на границе T_w, то ее значение может быть произвольным. Однако лучше приравнять ее нулю. Причина заключается в том, что мы можем не знать значение перепада температур в поперечном сечении канала. Если положим $T_w = 100$, то можно получить значения внутренних температур равными 99,997, 99,998, ... и потерять точность при вычислении разностей температур. С точки зрения получения информации о перепаде температуры использование $T_w = 0$ будет наилучшим выбором.

Последовательность вычислений. В задачах о течениях в каналах (см. гл. 10) будут задаваться NF = 1 для скорости w и NF = 2 для температуры T. Сначала будет решаться уравнение для скорости w, а затем полученное поле w будет использоваться для определения источникового члена в уравнении для температуры. Так как уравнение для скорости линейно, оно может быть решено за одну итерацию. Согласно нашей практике для линейных задач будут выполняться три итерации для определения w. В течение этих трех итераций

только KSOLVE(1) будет ненулевым. При завершении этих итераций следует положить KSOLVE(1) = 0 и KSOLVE(2) = 1. Таким образом будет «включено» решение уравнения для температуры. При граничных условиях, представленных выше (см. пп. 9.6.3 и 9.6.4), уравнение для температуры линейно, поэтому будут проведены только три итерации. Если будут использоваться граничные условия, описанные в пп. 9.6.5 и 9.6.6, то при решении нелинейных уравнений для температуры потребуется некоторое число итераций для сходимости процесса.

Когда задана плотность теплового потока на границе, то Q_w и величина dT_b/dz связаны выражением (9.35), их значения не могут быть выбраны произвольно. Если вы определите Q_w и dT_b/dz независимо одно от другого, то не будет выполняться тепловой баланс и вы не получите сошедшегося решения.

Интегральные результаты. В задачах о течениях в каналах обычно представляют интерес значения fRe и Nu. Хотя расчет этих величин включен в примеры, их определение несущественно для расчета течения в канале. Число Нуссельта в каждой задаче будет находиться одинаковым образом, однако могут иметь место и другие определения.

Вычисление этих величин основано на средних значениях скорости $\overline{w}$ и температуры T_b, для расчета которых используются (9.19) и (9.31). Если значения w и T сохранены в массивах W(I,J) и T(I,J), то расчет $\overline{w}$ и T_b может быть выполнен следующим образом:

```
      ASUM=0.
      WSUM=0.
      TSUM=0.
      DO  200  J=2,M2
      DO  200  I=2,L2
      AR=XCV(I)*YCVR(J)
      ASUM=ASUM+AR
      WSUM=WSUM+W(I,J)*AR
      TSUM=TSUM+W(I,J)*T(I,J)*AR
  200 CONTINUE
      WBAR=WSUM/ASUM
      TB=TSUM/(WSUM+SMALL)
```

Здесь ASUM — площадь поперечного сечения канала A; WBAR — скорость $\overline{w}$; TB — температура T_b; WSUM — объемный расход через канал; AR — часть поперечного сечения канала, занимаемая одним контрольным объемом. Использованное выражение для определения AR верно при MODE = 1 и 3 (MODE = 2 не рассматривается для простых полностью развитых течений в каналах). При вычислении TB

в знаменатель добавляется величина SMALL во избежание возможного деления на нуль.

Представление ребер. Каналы в большинстве случаев имеют ребра и другие твердые вставки. Такая геометрия каналов будет реализована по общему методу, описанному в § 7.7. Когда ребра соприкасаются с внешней границей, компоненты вектора скорости на твердой поверхности оказываются равными нулю вследствие большого значения GAM(I,J). Когда же твердый объект образует остров, то в дополнение к большим GAM(I,J) в твердом теле скорость в одной (как минимум) расчетной точке внутри острова полагается равной нулю с помощью больших S_C и S_P.

Сопряженный теплоперенос в канале с внутренними ребрами может быть рассчитан достаточно легко. Необходимо принять значения GAM(I,J) в твердой и жидкой областях равными соответствующим теплопроводностям этих сред.

Если нужно получить температуру на поверхности ребра, то в таких ситуациях необходимо использовать выражение (2.81).

9.8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как было показано выше, ограничение случаем полностью развитого течения позволило уменьшить размерность задачи и упростить вычисления. Простые полностью развитые течения описываются уравнениями теплопроводности. При решении уравнения для скорости используется постоянный градиент давления в качестве источникового члена. Для определенных граничных условий существует область полностью развитого теплообмена, в которой профили температуры демонстрируют некоторое поподобие. Конвективный член уравнения энергии может рассматриваться в виде источникового члена, зависящего от распределения скорости в поперечном сечении канала.

Данные о перепаде давления и тепловом потоке, полученные из анализа полностью развитых течений в каналах, могут быть использованы для характеристики длинных каналов, в которых на большей части длины выполняются условия полностью развитого течения.

За дополнительной информацией о течениях и теплообмене в каналах можно обращаться к [2, 13].

Глава 10

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ CONDUCT ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТЕЧЕНИЯХ И ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ В КАНАЛАХ

Интересным и важным классом задач, для решения которых может быть применена программа CONDUCT, являются задачи о полностью развитых течениях и теплообмене в каналах. В этой главе мы применим теорию, сформулированную в гл. 9, для анализа каналов с различными формами и граничными условиями для температуры.

10.1. КАНАЛ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ПОДОГРЕВОМ НА СТЕНКЕ (ПРИМЕР 7)

10.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим канал прямоугольного сечения, показанный на рис. 10.1. Граничные условия для температуры следующие: на нижней стенке задан постоянный тепловой поток плотностью q_w, а на остальных трех тепловой поток равен нулю. Так как задача симметричная, в качестве расчетной области будем использовать только левую половину сечения канала (для поля скорости существует и горизонтальная линия симметрии, поэтому для расчетов можно было бы использовать четверть сечения. Однако заданные граничные условия для

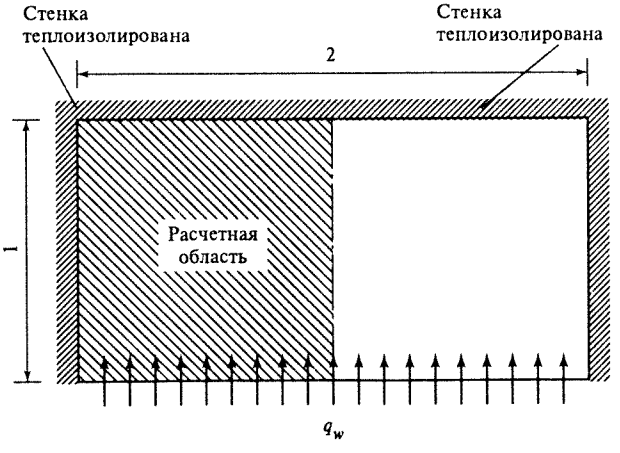


Рис. 10.1. Канал прямоугольного сечения с подогревом нижней стенки

температуры не приводят к симметрии поля температуры относительно центральной горизонтальной линии).

Наша задача состоит в отыскании распределений скорости и температуры в поперечном сечении канала. Будут рассчитаны также значение $f\mathrm{Re}$, интегральное число Нуссельта и локальные числа Нуссельта на обогреваемой стенке.

10.1.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Построим неравномерную сетку таким образом, чтобы она была мельче у стенок канала. По оси x это можно сделать с помощью одной зоны с мелкой сеткой у ее левой границы (положив `POWX(1) = 1.2`). По оси y зададим две зоны и возьмем значения `POWRY(1)` и `POWRY(2)` равными 1.2 и −1.2 соответственно для получения мелкой сетки около верхней и нижней стенок.

BEGIN. Используем `NF = 1` и 2 для *размерных* скорости и температуры, а `NF = 3` и 4 для соответствующих *безразмерных* величин. Задача линейна и по w и по T. Проведем первые три итерации для нахождения w и следующие три для определения T. Поэтому изначально только `KSOLVE(1) = 1`.

Свойствам жидкости, градиенту давления и плотности теплового потока присваиваем произвольные значения. Что касается начальных w и T, то нулевые значения их, задаваемые по умолчанию, считаются приемлемыми. Они дают нужные скорости на стенках и служат удовлетворительным приближением для температуры.

OUTPUT. После трех итераций необходимо выключить решение уравнения для определения w и включить решение уравнения для нахождения T. Это реализуется в начале `OUTPUT`. Затем рассчитываются интегральные характеристики, такие как $\overline{w}$, T_b, $f\mathrm{Re}$, $\overline{\mathrm{Nu}}$ и др. При определении интегрального числа Нуссельта используется средняя температура стенки `TWAV`. Эта величина рассчитывается интегрированием по стенке локальных температур. В качестве характерного размера при определении числа Нуссельта используется гидравлический диаметр.

После каждой итерации выводятся на печать характерные значения w и T, а также $f\mathrm{Re}$ и $\overline{\mathrm{Nu}}$. Заключительный вывод состоит из значений локальных чисел Нуссельта на нижней стенке и двумерных полей обезразмеренных w и T. Эти безразмерные значения хранятся в массивах `F(I,J,3)` и `F(I,J,4)` до вызова процедуры `PRINT`.

PHI. Так как имеются две зависимые переменные w и T, то массивы `GAM(I,J)` и `SC(I,J)` определяются отдельно для каждой переменной. Для скорости w коэффициент диффузии Γ равен вязкости μ,

а источниковый член — $(-\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)$. Для температуры T коэффициент Г полагается равным теплопроводности жидкости k, а источниковый член задается формулой

$$S_C = -\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z}, \tag{10.1}$$

где $\partial T/\partial z$ соответствует заданной плотности теплового потока q_w [см. (9.29) и (9.35)].

Очень важно согласовать заданные плотности тепловых потоков с соответствующим $\partial T/\partial z$. Общее поступление тепла в область через границы должно в точности равняться интегралу по всей области от источникового члена. Иначе не будет достигнуто стационарного решения.

При задании граничных условий полагается `KBCL1(J) = 2` для представления правой границы в виде оси симметрии (с нулевым потоком) и для w, и для T. Для определения w больше не нужно никакой информации о граничных условиях, так как на остальных трех границах известно ее значение (равное нулю). Только для нахождения температуры на этих границах задается условие известного потока через соответствующие значения `KBC` и `FLXC`.

10.1.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

`AMU` — вязкость μ;
`ANU` — среднее число Нуссельта;
`ANULOC` — локальные числа Нуссельта на нижней стенке;
`AR` — площадь контрольного объема $\mathrm{d}A$;
`ASUM` — площадь поперечного сечения;
`COND` — теплопроводность k;
`CP` — теплоемкость c_p;
`DEN` — плотность ρ;
`DH` — гидравлический диаметр D_h;
`DPDZ` — продольный градиент давления $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$;
`DTDZ` — продольный градиент температуры $\partial T/\partial z$;
`FRE` — произведение $f\mathrm{Re}$;
`QW` — плотность теплового потока на стенке q_w;
`RE` — число Рейнольдса;
`RHOCP` — объемная теплоемкость ρc_p;
`T(I,J)` — температура T;
`TB` — среднемассовая температура T_b;
`TSUM` — $\int wT\,\mathrm{d}A$;

TWAV — средняя температура обогреваемой стенки;
W(I,J) — продольная скорость w;
WBAR — средняя скорость в сечении $\overline{w}$;
WP — смоченный периметр;
WSUM — $\int w \, dA$.

10.1.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------
C---EXAMPLE 7 - RECTANGULAR DUCT WITH ONE HEATED WALL
C-------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C*-*-*-
```

```
      ASUM=0.
      WSUM=0.
      TSUM=0.
      DO 200 J=2,M2
      DO 200 I=2,L2
        AR=XCV(I)*YCV(J)
        ASUM=ASUM+AR
        WSUM=WSUM+W(I,J)*AR
        TSUM=TSUM+W(I,J)*T(I,J)*AR
  200 CONTINUE
      WBAR=WSUM/ASUM
      TB=TSUM/(WSUM+SMALL)
      WP=2.*X(L1)+Y(M1)
      DH=4.*ASUM/WP
      RE=DH*WBAR*DEN/AMU
      FRE=-2.*DPDZ*DH/(DEN*WBAR**2+SMALL)*RE
      TWAV=0.
      DO 210 I=2,L2
        TWAV=TWAV+XCV(I)*T(I,1)
  210 CONTINUE
      TWAV=TWAV/X(L1)
      ANU=QW*DH/(COND*(TWAV-TB)+SMALL)
      DO 220 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,230)
  230   FORMAT(2X,'ITER',4X,'W(5,8)',4X,'W(3,7)',
     1       4X,'T(5,8)',4X,'T(3,7)',5X,'FRE',8X,'NU')
        WRITE(IUNIT,240) ITER,W(5,8),W(3,7),T(5,8),
     1       T(3,7),FRE,ANU
  240   FORMAT(3X,I2,2X,1P6E10.2)
  220 CONTINUE
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
COME HERE TO CALCULATE LOCAL NU ON BOTTOM WALL
        DO 250 I=2,L2
          ANULOC=QW*DH/(COND*(T(I,1)-TB)+SMALL)
          DO 260 IUNIT=IU1,IU2
            IF(I.EQ.2) WRITE(IUNIT,270)
  270       FORMAT(//,' I',8X,'X(I)',7X,
     1             'LOCAL NU (BOTTOM WALL)')
            WRITE(IUNIT,280) I,X(I),ANULOC
  280       FORMAT(1X,I2,5X,1PE9.2,11X,1PE9.2)
  260     CONTINUE
  250   CONTINUE
        DO 290 J=1,M1
        DO 290 I=1,L1
          F(I,J,3)=W(I,J)/WBAR
        F(I,J,4)=(T(I,J)-TWAV)/(TB-TWAV)
  290   CONTINUE
        CALL PRINT
        CALL PLOT
      ENDIF
      RETURN
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      ENTRY PHI
      IF(NF.EQ.1) THEN
        DO 300 J=2,M2
        DO 300 I=2,L2
```

```
          GAM(I,J)=AMU
          SC(I,J)=-DPDZ
300     CONTINUE
      ENDIF
      IF(NF.EQ.2) THEN
        DTDZ=QW*X(L1)/(WSUM*RHOCP)
        DO 320 J=2,M2
        DO 320 I=2,L2
          GAM(I,J)=COND
          SC(I,J)=-RHOCP*DTDZ*W(I,J)
320     CONTINUE
      ENDIF
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
        DO 310 J=2,M2
          KBCL1(J)=2
310     CONTINUE
      IF(NF.EQ.2) THEN
        DO 330 J=2,M2
          KBCI1(J)=2
330     CONTINUE
        DO 340 I=2,L2
          KBCJ1(I)=2
          FLXCJ1(I)=QW
          KBCM1(I)=2
340     CONTINUE
      ENDIF
      RETURN
      END
C CCCC
```

```
J=      1         2         3         4         5         6         7
Y= 0.00E+00 3.62E-02 1.19E-01 2.19E-01 3.27E-01 4.41E-01 5.59E-01
J=      8         9        10        11        12
Y= 6.73E-01 7.81E-01 8.81E-01 9.64E-01 1.00E+00

****** AXIAL VELOCITY W ******
I=      1         2         3         4         5         6         7
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 0.00E+00 4.77E-03 1.03E-02 1.36E-02 1.53E-02 1.61E-02 1.62E-02
10 0.00E+00 1.25E-02 2.99E-02 4.05E-02 4.61E-02 4.85E-02 4.88E-02
9  0.00E+00 1.84E-02 4.65E-02 6.44E-02 7.41E-02 7.82E-02 7.88E-02
8  0.00E+00 2.22E-02 5.81E-02 8.17E-02 9.46E-02 1.00E-01 1.01E-01
7  0.00E+00 2.41E-02 6.40E-02 9.09E-02 1.06E-01 1.12E-01 1.13E-01
6  0.00E+00 2.41E-02 6.40E-02 9.09E-02 1.06E-01 1.12E-01 1.13E-01
5  0.00E+00 2.22E-02 5.81E-02 8.17E-02 9.46E-02 1.00E-01 1.01E-01
4  0.00E+00 1.84E-02 4.65E-02 6.44E-02 7.41E-02 7.82E-02 7.88E-02
3  0.00E+00 1.25E-02 2.99E-02 4.05E-02 4.61E-02 4.85E-02 4.88E-02
2  0.00E+00 4.77E-03 1.03E-02 1.36E-02 1.53E-02 1.61E-02 1.62E-02
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00

****** TEMPERATURE ******
I=      1         2         3         4         5         6         7
J
12 0.00E+00 8.18E-02 6.89E-02 4.47E-02 2.01E-02 4.59E-03 0.00E+00
11 8.37E-02 8.23E-02 6.92E-02 4.49E-02 2.01E-02 4.58E-03 2.59E-03
10 8.76E-02 8.60E-02 7.17E-02 4.60E-02 2.04E-02 4.50E-03 2.46E-03
9  9.99E-02 9.81E-02 8.15E-02 5.35E-02 2.62E-02 9.43E-03 7.29E-03
8  1.24E-01 1.22E-01 1.04E-01 7.32E-02 4.41E-02 2.65E-02 2.42E-02
7  1.65E-01 1.63E-01 1.43E-01 1.11E-01 8.06E-02 6.24E-02 6.00E-02
6  2.24E-01 2.22E-01 2.02E-01 1.70E-01 1.39E-01 1.21E-01 1.19E-01
5  2.98E-01 2.96E-01 2.77E-01 2.47E-01 2.17E-01 2.00E-01 1.97E-01
4  3.81E-01 3.79E-01 3.63E-01 3.35E-01 3.07E-01 2.91E-01 2.89E-01
3  4.68E-01 4.67E-01 4.52E-01 4.27E-01 4.01E-01 3.85E-01 3.83E-01
2  5.47E-01 5.46E-01 5.33E-01 5.09E-01 4.84E-01 4.68E-01 4.66E-01
1  0.00E+00 5.82E-01 5.69E-01 5.45E-01 5.20E-01 5.05E-01 0.00E+00

****** W/WBAR ******
I=   1         2         3         4         5         6         7
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 0.00E+00 8.20E-02 1.78E-01 2.34E-01 2.63E-01 2.76E-01 2.78E-01
10 0.00E+00 2.16E-01 5.15E-01 6.96E-01 7.93E-01 8.34E-01 8.39E-01
9  0.00E+00 3.16E-01 8.00E-01 1.11E+00 1.27E+00 1.35E+00 1.35E+00
8  0.00E+00 3.82E-01 9.98E-01 1.40E+00 1.63E+00 1.72E+00 1.74E+00
7  0.00E+00 4.15E-01 1.10E+00 1.56E+00 1.82E+00 1.93E+00 1.94E+00
6  0.00E+00 4.15E-01 1.10E+00 1.56E+00 1.82E+00 1.93E+00 1.94E+00
5  0.00E+00 3.82E-01 9.98E-01 1.40E+00 1.63E+00 1.72E+00 1.74E+00
4  0.00E+00 3.16E-01 8.00E-01 1.11E+00 1.27E+00 1.35E+00 1.35E+00
3  0.00E+00 2.16E-01 5.15E-01 6.96E-01 7.93E-01 8.34E-01 8.39E-01
2  0.00E+00 8.20E-02 1.78E-01 2.34E-01 2.63E-01 2.76E-01 2.78E-01
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
```

```
****** (T-TWAV)/(TB-TWAV) ******

I=      1          2          3          4          5          6          7
J
12 1.41E+00 1.20E+00 1.23E+00 1.30E+00 1.36E+00 1.40E+00 1.41E+00
11 1.19E+00 1.20E+00 1.23E+00 1.30E+00 1.36E+00 1.40E+00 1.41E+00
10 1.18E+00 1.19E+00 1.23E+00 1.29E+00 1.36E+00 1.40E+00 1.41E+00
 9  1.15E+00 1.16E+00 1.20E+00 1.27E+00 1.34E+00 1.39E+00 1.39E+00
 8  1.09E+00 1.09E+00 1.14E+00 1.22E+00 1.30E+00 1.34E+00 1.35E+00
 7  9.80E-01 9.86E-01 1.04E+00 1.12E+00 1.20E+00 1.25E+00 1.26E+00
 6  8.27E-01 8.32E-01 8.84E-01 9.69E-01 1.05E+00 1.10E+00 1.10E+00
 5  6.33E-01 6.39E-01 6.87E-01 7.68E-01 8.44E-01 8.90E-01 8.96E-01
 4  4.15E-01 4.20E-01 4.63E-01 5.37E-01 6.08E-01 6.52E-01 6.57E-01
 3  1.88E-01 1.92E-01 2.29E-01 2.96E-01 3.63E-01 4.05E-01 4.10E-01
 2 -2.02E-02-1.65E-02 1.78E-02 8.14E-02 1.46E-01 1.87E-01 1.92E-01
 1  1.41E+00-1.10E-01-7.64E-02-1.31E-02 5.14E-02 9.20E-02 1.41E+00
```

10.1.6. Обсуждение результатов

Как и ожидалось, решения *линейных* уравнений и для w, и для T сошлись за одну итерацию каждое. На первых трех итерациях выводимые на печать значения числа Нуссельта должны быть проигнорированы, так как уравнение для температуры начинает решаться только с четвертой итерации.

Значение $f\mathrm{Re}$, полученное из точного решения для прямоугольного канала с отношением высоты к длине 0,5, равно 62,19. Даже при использовании грубой сетки рассчитанное значение, равное 61.1, отличается от точного решения не более чем на 2 %.

Видно, что вдоль обогреваемой стенки локальные числа Нуссельта возрастают слева направо. Этого следовало ожидать, так как жидкость в углу канала движется медленнее, чем над центром нижней стенки.

Распечатанное поле скорости демонстрирует ожидаемую симметрию для верхней и нижней половин расчетной области. Максимальное значение $w/\overline{w}$ = 1,94, что очень хорошо согласуется с точным значением 1,99.

Требуется пояснить появление отрицательных значений температуры. Так как тепловой поток через обогреваемую стенку постоянен, соответствующая температура стенки не постоянна. При определении безразмерной температуры мы использовали среднюю температуру стенки TWAV. Точки, в которых локальная температура больше средней температуры стенки, имеют отрицательные значения безразмерной температуры.

10.1.7. Заключительные замечания

Этот пример для простого канала прямоугольного сечения проиллюстрировал большое число основных особенностей, появляющихся при расчетах течений в каналах. Если бы форма канала была квад-

ратной, то расчеты поля скорости здесь и поля температуры в примере 1 (см. гл. 8) были бы математически подобными задачами. Интересно отметить, что кажущиеся различными задачи о течениях в канале и температурном поле в твердом теле с источником тепла идентичны с точки зрения математики.

В последующих примерах этой главы мы рассмотрим более сложные формы каналов и граничные условия, а также сопряженный теплообмен.

10.2. КРУГЛАЯ ТРУБА С РАДИАЛЬНЫМИ РЕБРАМИ (ПРИМЕР 8)

10.2.1. Постановка задачи

Часто к стенкам канала прикрепляют ребра для увеличения площади поверхности, за счет чего улучшается теплообмен. Присутствие ребер приводит также и к увеличению перепада давления по длине канала при том же расходе через его сечение. Рассмотрим круглую трубу с ребрами, показанную на рис. 10.2. При вычислении темпера-

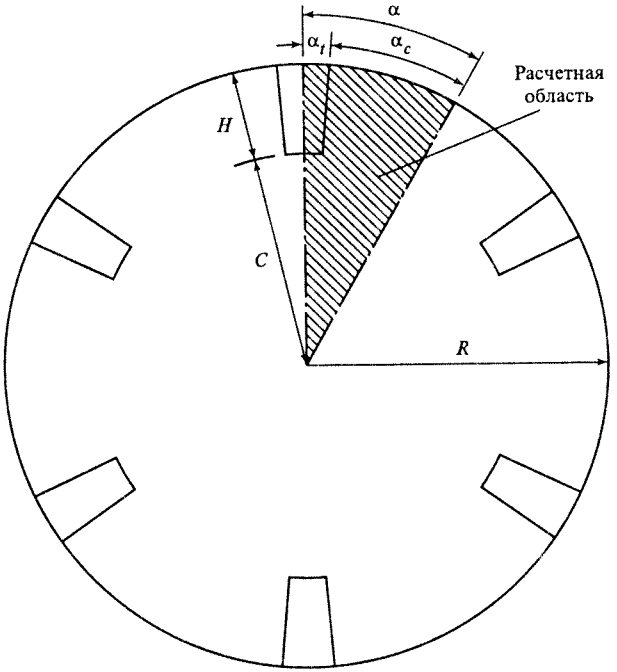


Рис. 10.2. Круглая труба с радиальными ребрами

турного поля нужно рассчитывать теплопроводность в твердом ребре совместно с конвекцией жидкости в канале. Такие задачи называются сопряженными задачами теплообмена. Из-за особенностей метода, использованного в CONDUCT, реализация задач сопряженного теплообмена требует небольших усилий и происходит почти автоматически.

Труба, показанная на рис. 10.2, имеет шесть равномерно расположенных ребер. С учетом приведенных на рисунке обозначений геометрия ребер может быть задана следующим образом:

$$H/R = 0{,}3; \tag{10.2}$$

$$\alpha_t/\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-1}. \tag{10.2а}$$

В качестве граничного условия для температуры используется постоянное по периметру значение T_w на внешней стенке трубы; предполагается, что эта температура в продольном направлении меняется линейно. Следовательно, труба получает постоянный поток тепла на единицу продольной длины. При таких граничных условиях все температуры в сечении канала меняются одинаково линейно по оси z. Другими словами, величина $\partial T/\partial z$ постоянна.

Для завершения постановки задачи необходимо определить отношение теплопроводностей твердого материала и жидкости. Возьмем следующее значение:

$$k_{fin}/k_{fluid} = 3{,}5. \tag{10.2б}$$

Численно будут получены поля продольной скорости и температуры и, следовательно, значения fRe и числа Нуссельта. Из-за симметрии решение будет найдено для заштрихованной области, показанной на рис. 10.2; эта область ограничена осевой линией ребра и линией, проходящей посередине между соседними ребрами.

10.2.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Для задания геометрических величин предполагается, что радиус трубы `RAD` = 1. Все другие необходимые размеры рассчитываются в соответствии с (10.2) и (10.2а). Сетка строится с использованием процедуры `ZGRID` с двумя зонами по θ и по r. Размеры зон по θ равны α_t и α_c. По r длины зон составляют C и H. Кроме вызова `ZGRID`, задаются также значения `R(1)` и `MODE`.

BEGIN. В отличие от примера 7 здесь не будут использоваться различные массивы для полей размерных и безразмерных скоростей и температур. Для сохранения размерных скоростей и температур используются массивы `W(I,J)` и `T(I,J)` (которые эквивалентны `F(I,J,NF)` для `NF` = 1 и 2 соответственно), однако перед заключительной распечаткой результатов элементам этих же массивов

присваиваются значения *безразмерных* переменных w, T. Для указания истинного смысла этих массивов при выводе используется их описание безразмерного вида с помощью задания текстовых переменных TITLE(1) и TITLE(2).

Значения таких величин, как градиенты давления и температуры, температура стенки, а также свойства жидкости задаются произвольно. Как было отмечено ранее, значения этих величин не влияют на решение задачи в безразмерном виде.

Поле W(I,J) изначально полагается нулевым, тем самым обеспечиваются верные значения скоростей на твердых стенках области. Температуры T(I,J) задаются равными T_w, что приводит к правильным их значениям на внешней поверхности трубы.

OUTPUT. В данном случае большая часть структуры OUTPUT практически такая же, как и в примере 7. Переход от решения уравнения для скорости к решению уравнения для температуры, а также суммирование по всему поперечному сечению для вычисления $\overline{w}$ и T_b являются стандартными процедурами. В цикле, где производится суммирование, произведение XCV(I)*YCVR(J) для полярной системы координат представляет собой площадь поперечного сечения, занимаемую одним контрольным объемом. Так как средняя скорость $\overline{w}$ должна быть рассчитана только для той части сечения, где есть течение, то при расчете площади не учитываются контрольные объемы, расположенные в ребре.

Для вычисления среднего числа Нуссельта необходимо учесть, что средний тепловой поток может быть рассчитан на единицу площади реальной поверхности теплообмена (включая дополнительную площадь поверхности ребер) или на единицу площади поверхности трубы без ребер. Если использовать число Нуссельта в качестве меры суммарного теплопереноса, то для трубы с ребрами предпочтительнее использовать второй вариант. Тогда можно сравнивать числа Нуссельта для оценки эффективности теплообмена при различных формах ребер. В то же время использование фактической поверхности теплообмена приведет к меньшему значению числа Нуссельта, так как средний тепловой поток на единицу *фактической* площади может быть довольно малым.

Исходя из этих рассуждений предполагается, что обогреваемый участок периметра HP отличен от смоченного периметра WP. В качестве HP берется просто внешний периметр расчетной области. Суммарный тепловой поток на единицу продольной длины рассчитывается исходя из значения $\partial T/\partial z$, а затем делением его на HP получается средний тепловой поток. При определении среднего числа Нуссельта в качестве характерного размера используется диаметр трубы.

После каждой итерации на печать выводятся значения некоторых характерных скоростей и температур, произведение fRe и число Нуссельта. При окончательном выводе результатов распечатываются изменения локального числа Нуссельта на внешней поверхности трубы. При их вычислении используется локальная плотность теплового потока FLUXM1(I,2), где I обозначает позицию на внешней границе, а 2 — значение NF для температуры как зависимой переменной (величина FLUXM1(I,1) соответствует вязкому напряжению на границе).

Перед вызовом подпрограммы PRINT поля W(I,J) и T(I,J) приводятся к безразмерному виду. Как будет видно далее, расчет скорости в твердом материале ребра дает очень маленькие (но ненулевые) ее значения. Для наглядности выведенных полей все малые значения W(I,J) в области ребра заменяются нулем. После таких предварительных действий для вывода на печать полей зависимых переменных вызывается PRINT.

PHI. При вычислении поля скорости область, занимаемая ребром, рассматривается в качестве участка с очень большой вязкостью. В результате во всей этой области значение w будет постоянным и равным нулевому значению скорости на границе. Конечно, рассчитанные значения w в ребре не будут равняться точно нулю. Насколько малым будет значение w зависит от того, насколько велико значение вязкости в ребре. Если взять эти фиктивные значения вязкости равными 1.E20, то «нулевые» скорости возможно будут порядка 1.E-20. Для создания более наглядного вывода применяется замещение этих малых скоростей нулями в OUTPUT.

Для NF = 1 полагаем GAM(I,J) равным вязкости жидкости. Если же расчетная точка лежит в ребре, то это значение замещается очень большим числом. Источниковый член SC(I,J) приравнивается к $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$.

Для нахождения температуры (т.е. для NF = 2) делаем почти то же самое, только значения GAM(I,J) в ребре берутся не большими, а полагаются равными теплопроводности твердого материала. Для определения источникового члена SC(I,J) используется выражение (10.1).

В этой задаче граничные условия для w и T подобны по своей природе. На внешней границе области заданы значения и w и T. Все остальные границы рассматриваются в качестве границ с нулевыми потоками. Исходя из этих рассуждений и задаются значения KBC.

Применение подобных граничных условий и для w и для T довольно необычно. В большинстве задач будут иметь место некоторые отличия в граничных условиях для двух зависимых перемен-

ных. Поэтому нужно внимательно относиться к заданию граничного условия для рассматриваемого NF.

10.2.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

ALPHA — половина угла между ребрами (см. рис. 10.2);
ALPHAC — α_c (см. рис. 10.2);
ALPHAT — α_t (см. рис. 10.2);
AMU — вязкость μ;
ANU — среднее число Нуссельта;
ANULOC — локальные числа Нуссельта на стенке трубы;
AR — площадь контрольного объема dA;
ASUM — площадь поперечного сечения;
C — зазор C (см. рис. 10.2);
CNDFIN — теплопроводность ребра k_{fin} [см. (10.2б)];
COND — теплопроводность жидкости k_{fluid} [см. (10.2б)];
CP — теплоемкость c_p;
DEN — плотность ρ;
DH — гидравлический диаметр D_h;
DIA — диаметр трубы;
DPDZ — продольный градиент давления dp/dz;
DTDZ — продольный градиент температуры $\partial T/\partial z$;
FRE — произведение $f\,\mathrm{Re}$;
H — высота ребра H;
HP — обогреваемый участок периметра;
HRATIO — отношение высоты ребра к радиусу H/R [(см. (10.2)];
NFINS — число ребер;
PI — число π;
QW — средняя плотность теплового потока на стенке q_w;
RAD — радиус трубы R;
RE — число Рейнольдса;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc_p;
T(I,J) — температура T;
TB — среднемассовая температура T_b;
TRATIO — отношение α_t/α [(см. (10.2а)];
TSUM — $\int wT\,dA$;
TW — температура стенки T_w;
W(I,J) — продольная скорость w;

WBAR — средняя скорость в сечении $\bar{w}$;

WP — смоченный периметр;

WSUM — $\int w \, dA$.

10.2.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------
C---EXAMPLE 8 - CIRCULAR TUBE WITH RADIAL INTERNAL FINS
C-------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      T(I,J)=TW
100 CONTINUE
    RETURN
C *-*-*-*
```

```
      CALL PRINT
C---
COME HERE TO FILL IBLOCK(I,J) BEFORE CALLING PLOT
      DO 295 J=2,M2
      DO 295 I=2,L2
        IF(X(I).LT.ALPHAT.AND.Y(J).GT.C) IBLOCK(I,J)=1
295   CONTINUE
      CALL PLOT
C---
    ENDIF
    RETURN
C *-*-*-*
```

I	TH(I)	LOCAL NU (TUBE WALL)
2	1.31E-02	9.00E+00
3	3.93E-02	9.03E+00
4	6.54E-02	9.09E+00
5	1.10E-01	2.71E+00
I	TH(I)	LOCAL NU (TUBE WALL)
6	1.74E-01	2.94E+00
7	2.37E-01	3.15E+00
8	3.01E-01	3.32E+00
9	3.65E-01	3.45E+00
10	4.28E-01	3.53E+00
11	4.92E-01	3.58E+00

I=	1	2	3	4	5	6	7
TH=	0.00E+00	1.31E-02	3.93E-02	6.54E-02	1.10E-01	1.74E-01	2.37E-01
I=	8	9	10	11	12		
TH=	3.01E-01	3.65E-01	4.28E-01	4.92E-01	5.24E-01		

J=	1	2	3	4	5	6	7
Y=	0.00E+00	4.37E-02	1.31E-01	2.19E-01	3.06E-01	3.94E-01	4.81E-01
J=	8	9	10	11	12	13	14
Y=	5.69E-01	6.56E-01	7.37E-01	8.13E-01	8.87E-01	9.62E-01	1.00E+00

****** W/WBAR ******

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.54E-02	7.89E-02	1.09E-01
12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.06E-02	2.01E-01	2.88E-01
11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.22E-01	3.10E-01	4.47E-01
10	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.06E-01	4.61E-01	6.29E-01
9	5.21E-01	5.23E-01	5.40E-01	5.76E-01	6.75E-01	8.06E-01	9.15E-01
8	1.14E+00	1.14E+00	1.14E+00	1.15E+00	1.18E+00	1.22E+00	1.27E+00
7	1.55E+00	1.55E+00	1.55E+00	1.56E+00	1.56E+00	1.58E+00	1.59E+00
6	1.86E+00	1.86E+00	1.86E+00	1.86E+00	1.86E+00	1.86E+00	1.87E+00
5	2.08E+00	2.08E+00	2.08E+00	2.08E+00	2.08E+00	2.09E+00	2.09E+00
4	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00
3	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00
2	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00
1	0.00E+00	2.42E+00	2.42E+00	2.42E+00	2.42E+00	2.42E+00	2.42E+00

I=	8	9	10	11	12
J					
14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
13	1.29E-01	1.43E-01	1.52E-01	1.56E-01	1.56E-01
12	3.50E-01	3.91E-01	4.17E-01	4.29E-01	4.31E-01
11	5.43E-01	6.08E-01	6.47E-01	6.66E-01	6.69E-01
10	7.41E-01	8.16E-01	8.62E-01	8.84E-01	8.87E-01
9	9.99E-01	1.06E+00	1.10E+00	1.12E+00	1.12E+00
8	1.31E+00	1.34E+00	1.37E+00	1.38E+00	1.38E+00
7	1.61E+00	1.63E+00	1.64E+00	1.64E+00	1.64E+00
6	1.87E+00	1.88E+00	1.88E+00	1.88E+00	1.88E+00
5	2.09E+00	2.09E+00	2.09E+00	2.09E+00	2.09E+00
4	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00	2.25E+00
3	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00	2.36E+00
2	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00	2.41E+00
1	2.42E+00	2.42E+00	2.42E+00	2.42E+00	0.00E+00

```
****** (T-TW)/(TB-TW) ******
```

I = J	1	2	3	4	5	6	7
14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
13	4.90E-02	4.90E-02	4.92E-02	4.95E-02	5.17E-02	5.60E-02	6.00E-02
12	1.52E-01	1.52E-01	1.52E-01	1.53E-01	1.60E-01	1.74E-01	1.86E-01
11	2.58E-01	2.58E-01	2.59E-01	2.61E-01	2.75E-01	2.99E-01	3.19E-01
10	3.61E-01	3.61E-01	3.63E-01	3.68E-01	3.99E-01	4.37E-01	4.64E-01
9	5.64E-01	5.65E-01	5.68E-01	5.76E-01	5.95E-01	6.20E-01	6.41E-01
8	8.19E-01	8.19E-01	8.20E-01	8.22E-01	8.27E-01	8.36E-01	8.46E-01
7	1.03E+00	1.03E+00	1.03E+00	1.04E+00	1.04E+00	1.04E+00	1.04E+00
6	1.22E+00	1.22E+00	1.22E+00	1.22E+00	1.22E+00	1.22E+00	1.22E+00
5	1.37E+00	1.3 E+00	1.37E+00	1.37E+00	1.37E+00	1.37E+00	1.37E+00
4	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00
3	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00
2	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00
1	0.00E+00	1.62E+00	1.62E+00	1.62E+00	1.62E+00	1.62E+00	1.62E+00

I = J	8	9	10	11	12
14	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
13	6.32E-02	6.56E-02	6.72E-02	6.80E-02	6.81E-02
12	1.96E-01	2.03E-01	2.08E-01	2.10E-01	2.10E-01
11	3.35E-01	3.47E-01	3.54E-01	3.58E-01	3.58E-01
10	4.84E-01	4.98E-01	5.06E-01	5.11E-01	5.11E-01
9	6.57E-01	6.70E-01	6.78E-01	6.82E-01	6.82E-01
8	8.55E-01	8.62E-01	8.67E-01	8.70E-01	8.70E-01
7	1.05E+00	1.05E+00	1.05E+00	1.05E+00	1.05E+00
6	1.22E+00	1.22E+00	1.23E+00	1.23E+00	1.23E+00
5	1.37E+00	1.37E+00	1.37E+00	1.37E+00	1.37E+00
4	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00	1.49E+00
3	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00
2	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00	1.61E+00
1	1.62E+00	1.62E+00	1.62E+00	1.62E+00	0.00E+00

10.2.6. Обсуждение результатов

В этой задаче уравнения для скорости и температуры линейны, поэтому решения их сошлись за одну итерацию каждое.

Распечатка локальных чисел Нуссельта на внешней поверхности показывает, что значения этих чисел очень большие при I = 2, 3 и 4. Эти значения относятся к основанию ребра. Очевидно, что большой тепловой поток поступает в материал ребра, имеющий довольно большую теплопроводность. Локальные числа Нуссельта на остальной части внешней поверхности возрастают при удалении от ребра. Это может быть объяснено на основании анализа поля скорости. Сопротивление течению, вызываемое наличием ребра, приводит к снижению скорости в его окрестности. Замедление течения приводит к уменьшению локального теплового потока в этой области.

В полученном поле скорости по нулевым значениям w можно определить область, занятую ребром. Ребра влияют на распределение скорости таким образом, что скорость уменьшается во внешней час-

ти трубы и увеличивается во внутренней. Заметим, что полученное максимальное значение $\overline{w}$ равно 2,42, а для круглой трубы без ребер соответствующее значение равно 2.

Поле температуры показывает, что она изменяется и в материале ребра, и в жидкости. Хотя граничные условия для w и T подобны, полученные поля безразмерных w и T не будут идентичными. Это происходит из-за различия источниковых членов. Уравнение для продольной скорости имеет постоянный источниковый член по всему сечению, в то время как для температуры он пропорционален локальной скорости.

10.2.7. Заключительные замечания

Задачи о течении в трубах с внутренними ребрами интересны во многих отношениях. Хотя ребра увеличивают площадь поверхности, они также замедляют течение жидкости в окрестности стенки трубы. Если используется большое число ребер, то они в предельном случае просто уменьшат эффективный диаметр трубы. Увеличение высоты ребра дает большую площадь поверхности, но перепад температуры вдоль ребра может привести к тому, что такое добавление поверхности окажется неэффективным. Это приложение CONDUCT дает возможность исследовать названную и другие подобные проблемы.

При определении числа Нуссельта мы использовали среднюю плотность теплового потока на внешней поверхности трубы. Это позволяет сравнивать характеристики труб с различными ребрами. Однако при определении fRe мы воспользуемся гидравлическим диаметром трубы с ребрами. Если бы мы использовали просто диаметр трубы, то могли бы судить о перепаде давления в трубах с различными ребрами по значениям fRe.

Рассчитанное значение fRe = 41,5. Оно меньше 64, что соответствует трубе без ребер, но это не значит, что перепад давления будет меньше в трубе с внутренним оребрением. Кажущееся малым значение fRe было получено из-за использования в его определении гидравлического диаметра. Если заменить гидравлический диаметр диаметром трубы, то fRe окажется равным 113,6.

Граничные условия, использованные в примерах 7 и 8, приводят к линейному уравнению для температуры. В следующих двух примерах мы столкнемся с нелинейными источниковыми членами в уравнении для температуры.

10.3. КОЛЬЦЕВОЙ КАНАЛ С ПЕРЕГОРОДКАМИ (ПРИМЕР 9)

10.3.1. Постановка задачи

Решим задачу для теплообменника, который состоит из двух концентрических труб; одна жидкость течет во внутренней трубе, а другая — в пространстве между трубами. Теплообмен между этими жидкостями может происходить только через поверхность внутренней трубы, которая имеет довольно малую площадь. Поэтому для увеличения площади теплообмена к внешней стороне внутренней трубы присоединяют ребра. Если ребра достигают внешней трубы, как показано на рис. 10.3, то кольцевая область разделяется на секторы. Расчет течения и теплообмена в таком разделенном на секторы канале и является целью этого примера.

Из-за симметрии расчетной областью будет кольцевой сектор, ограниченный ребром и линией, лежащей посередине между соседними ребрами. Эта область на рис. 10.3 показана штриховкой.

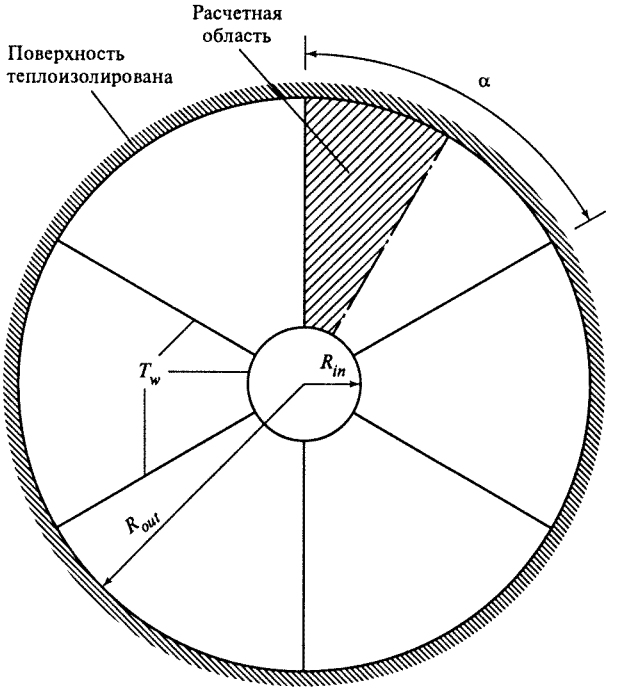


Рис. 10.3. Кольцевой канал с перегородками

Имеется шесть ребер. Угол между соседними ребрами равен 60°. Отношение радиусов $R_{in}/R_{out} = 0{,}2$.

Граничные условия для температуры состоят из условия адиабатичности внешней стенки и известной постоянной температуры во внутренней трубе и ребрах. Толщина ребер пренебрежимо мала, поэтому предполагается, что они имеют достаточно высокую теплопроводность для поддержания одинаковой температуры во всем ребре. Температура внутренней трубы и ребер не только постоянна по сечению, но остается постоянной и вдоль продольной координаты z. Такое условие может быть получено при течении во внутренней трубе конденсирующейся жидкости.

10.3.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Так как геометрическая форма расчетной области очень проста, то для подготовки равномерной сетки используется процедура `EZGRID`. Здесь `XL` обозначает размер области по координате θ в радианах. Задаются также значения `MODE` и `R(1)`.

BEGIN. В этой задаче, хотя уравнение для скорости линейно, из-за граничного условия нелинейно уравнение для температуры. Поэтому проводятся обычные три итерации для скорости и семь итераций для температуры. Таким образом процедура `LAST = 10`. В дополнение к обычно задаваемым значениям свойств жидкости задается также значение dT_b/dz. Выбор произвольного значения для этой величины физически соответствует выбору некоторого сечения $z = \text{const}$. Конечно, решение в безразмерном виде не будет зависеть от заданного dT_b/dz.

Массивам `W(I,J)` и `T(I,J)` присваиваются начальные значения, которые равны их соответствующим граничным значениям.

OUTPUT. Большая часть подпрограммы `OUTPUT` строится так же, как и в предыдущих двух примерах. При определении числа Нуссельта используется площадь теплообмена, включающая в себя площади поверхностей внутренней трубы и ребра, а в качестве характерного размера берется высота ребра `YL`. Суммарный тепловой поток на единицу продольной длины определяется с использованием dT_b/dz.

Перед заключительным выводом результатов рассчитываются локальные числа Нуссельта на поверхностях внутренней трубы и ребра, а поля `W(I,J)` и `T(I,J)` приводятся к безразмерному виду.

PHI. Вначале задаются массивы `GAM(I,J)` и `SC(I,J)`. Для получения локального значения $\partial T/\partial z$ из dT_b/dz используется (9.45). Переменная `TEMP` соответствует отношению $(T - T_w)/(T_b - T_w)$. Тот факт, что для вычисления источникового члена `SC(I,J)` необхо-

димы значения T(I,J) и TB, свидетельствует о нелинейном характере уравнения для температуры.

Включение слагаемого SMALL в знаменатель при вычислении переменной TEMP служит для предотвращения деления на нуль, что может произойти в начале расчетов, когда $T_b = T_w$. В чем же заключается необходимость включения аналогичного слагаемого SMALL в числитель? Это очень важная деталь, требующая некоторых пояснений. Если не включать SMALL в числитель, то переменная TEMP вначале будет равна нулю, что приведет к нулевому источниковому члену в уравнении для температуры. В результате при решении уравнения для температуры все значения T(I,J) получатся равными температуре на границе T_w. Значение переменной TEMP будет оставаться нулевым и на последующих итерациях, поэтому никогда не получится нужного решения для поля температуры. Включение переменной SMALL в числитель предотвращает «застревание» решения на начальном приближении.

Конечно, эта сложность возникает из-за выбора начального приближения. Если вначале положить значения T(I,J) во внутренних точках отличными от значения T_w, то проблем не возникнет. Это проиллюстрировано в примере 10.

Граничные условия для этой задачи состоят из условия равенства нулю потока через линию симметрии и (только для температуры) нулевого потока на внешней границе. Они задаются с помощью индикаторов KBC на соответствующих границах.

10.3.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

ALPHA — угол между соседними ребрами;
AMU — вязкость μ;
ANU — среднее число Нуссельта;
ANUI — локальные числа Нуссельта на стенке внутренней трубы;
ANULFT — локальные числа Нуссельта на левой границе;
AR — площадь контрольного объема dA;
ASUM — площадь поперечного сечения;
COND — теплопроводность k;
CP — теплоемкость c_p;
DEN — плотность ρ;
DH — гидравлический диаметр D_h;
DPDZ — продольный градиент давления dp/dz;
DTDZ — продольный градиент температуры $\partial T/\partial z$;
DTBDZ — продольный градиент среднемассовой температуры dT_b/dz;

FRE — произведение fRe;
HP — обогреваемый участок периметра;
PI — число π;
QW — плотность теплового потока на стенке q_w;
RE — число Рейнольдса;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc_p;
RIN — радиус внутренней трубы R_{in};
ROUT — радиус внешней трубы R_{out};
T(I,J) — температура T;
TB — среднемассовая температура T_b;
TEMP — временная переменная для $(T - T_w)/(T_b - T_w)$;
TSUM — $\int wT\,dA$;
TW — температура стенки T_w;
W(I,J) — продольная скорость w;
WBAR — средняя скорость в сечении $\overline{w}$;
WP — смоченный периметр;
WSUM — $\int w\,dA$.

10.3.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------
C---EXAMPLE 9 - ANNULAR SECTOR DUCT
C-------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      CALL INTA6(KSOLVE(1),1,KPRINT(1),1,KPRINT(2),1,
     1              KPLOT(1),1,KPLOT(2),1,LAST,10)
      CALL DATA7(AMU,1.,COND,1.,CP,1.,DEN,1.,DPDZ,-1.,TW,
     1                0.,DTBDZ,1.)
      RHOCP=DEN*CP
      DO 100 J=1,M1
      DO 100 I=1,L1
        W(I,J)=0.
        T(I,J)=TW
  100 CONTINUE
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
265         FORMAT(1X,I2,5X,1PE9.2,10X,1PE9.2)
250       CONTINUE
240     CONTINUE
        DO 270 J=M2,2,-1
          ANULFT=FLUXI1(J,2)*YL/(COND*(TW-TB)+SMALL)
          DO 275 IUNIT=IU1,IU2
            IF(J.EQ.M2) WRITE(IUNIT,280)
280         FORMAT(//,' J',8X,'Y(J)',7X,
  1                 'LOCAL NU (SIDE WALL)')
            WRITE(IUNIT,285) J,Y(J),ANULFT
285         FORMAT(1X,I2,5X,1PE9.2,10X,1PE9.2)
275       CONTINUE
270     CONTINUE
        DO 290 J=1,M1
        DO 290 I=1,L1
          W(I,J)=W(I,J)/WBAR
          T(I,J)=(T(I,J)-TW)/(TB-TW)
290     CONTINUE
        CALL PRINT
        CALL PLOT
      ENDIF
      RETURN
C *-*-*-*
```

10.3.5. Результаты расчетов

```
RESULTS OF CONDUCT FOR POLAR COORDINATE SYSTEM
**********************************************

ANNULAR SECTOR DUCT

ITER   W(6,8)      W(4,11)     T(6,8)     T(4,11)      FRE        NU
0     0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00   0.00E+00
1     3.43E-02   7.16E-03   0.00E+00   0.00E+00   5.80E+01   3.80E+17
ITER   W(6,8)      W(4,11)     T(6,8)     T(4,11)      FRE        NU
2     3.43E-02   7.16E-03   0.00E+00   0.00E+00   5.80E+01   3.80E+17
3     3.43E-02   7.16E-03   0.00E+00   0.00E+00   5.80E+01   3.80E+17
4     3.43E-02   7.16E-03  -1.47E-03  -1.09E-03   5.80E+01   3.86E+00
5     3.43E-02   7.16E-03  -1.84E-03  -1.33E-03   5.80E+01   3.27E+00
6     3.43E-02   7.16E-03  -1.89E-03  -1.38E-03   5.80E+01   3.21E+00
7     3.43E-02   7.16E-03  -1.90E-03  -1.39E-03   5.80E+01   3.20E+00
8     3.43E-02   7.16E-03  -1.90E-03  -1.39E-03   5.80E+01   3.19E+00
9     3.43E-02   7.16E-03  -1.90E-03  -1.39E-03   5.80E+01   3.19E+00
10    3.43E-02   7.16E-03  -1.90E-03  -1.39E-03   5.80E+01   3.19E+00

I       TH(I)          LOCAL NU (INNER WALL)
2     5.24E-02            2.13E-01
3     1.57E-01            6.24E-01
4     2.62E-01            9.75E-01
5     3.67E-01            1.23E+00
6     4.71E-01            1.37E+00

J       Y(J)           LOCAL NU (SIDE WALL)
11    7.60E-01           3.94E+00
10    6.80E-01           4.30E+00
9     6.00E-01           4.62E+00
8     5.20E-01           4.76E+00
7     4.40E-01           4.63E+00
6     3.60E-01           4.19E+00
5     2.80E-01           3.49E+00
4     2.00E-01           2.61E+00
3     1.20E-01           1.69E+00
2     4.00E-02           7.08E-01

I=      1          2          3          4          5          6          7
TH=   0.00E+00 5.24E-02 1.57E-01 2.62E-01 3.67E-01 4.71E-01 5.24E-01

J=      1          2          3          4          5          6          7
Y=    0.00E+00 4.00E-02 1.20E-01 2.00E-01 2.80E-01 3.60E-01 4.40E-01

J=      8          9          10         11         12
Y=    5.20E-01 6.00E-01 6.80E-01 7.60E-01 8.00E-01

****** W/WBAR ******

I=      1          2          3          4          5          6          7
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 0.00E+00 1.68E-01 3.32E-01 4.19E-01 4.67E-01 4.89E-01 4.92E-01
10 0.00E+00 3.50E-01 7.88E-01 1.04E+00 1.19E+00 1.25E+00 1.26E+00
9  0.00E+00 4.31E-01 1.04E+00 1.42E+00 1.65E+00 1.75E+00 1.76E+00
8  0.00E+00 4.54E-01 1.14E+00 1.60E+00 1.87E+00 2.01E+00 2.02E+00
7  0.00E+00 4.37E-01 1.13E+00 1.60E+00 1.91E+00 2.05E+00 2.07E+00
6  0.00E+00 3.92E-01 1.03E+00 1.49E+00 1.78E+00 1.93E+00 1.94E+00
```

```
5  0.00E+00 3.28E-01 8.72E-01 1.27E+00 1.54E+00 1.67E+00 1.68E+00
4  0.00E+00 2.51E-01 6.75E-01 9.93E-01 1.20E+00 1.31E+00 1.32E+00
I=      1         2         3         4         5         6         7
J
3  0.00E+00 1.68E-01 4.52E-01 6.66E-01 8.09E-01 8.81E-01 8.90E-01
2  0.00E+00 7.29E-02 1.93E-01 2.81E-01 3.40E-01 3.69E-01 3.73E-01
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00

****** (T-TW)/(TB-TW) ******
-------------------------
I=      1         2         3         4         5         6         7
J
12 0.00E+00 2.46E-01 7.32E-01 1.17E+00 1.50E+00 1.69E+00 0.00E+00
11 0.00E+00 2.46E-01 7.33E-01 1.17E+00 1.51E+00 1.69E+00 1.71E+00
10 0.00E+00 2.48E-01 7.41E-01 1.19E+00 1.54E+00 1.73E+00 1.76E+00
9  0.00E+00 2.42E-01 7.28E-01 1.18E+00 1.53E+00 1.72E+00 1.74E+00
8  0.00E+00 2.25E-01 6.75E-01 1.09E+00 1.42E+00 1.60E+00 1.62E+00
7  0.00E+00 1.94E-01 5.80E-01 9.36E-01 1.21E+00 1.37E+00 1.38E+00
6  0.00E+00 1.53E-01 4.56E-01 7.31E-01 9.43E-01 1.06E+00 1.07E+00
5  0.00E+00 1.09E-01 3.23E-01 5.13E-01 6.58E-01 7.37E-01 7.47E-01
4  0.00E+00 6.79E-02 2.00E-01 3.16E-01 4.03E-01 4.50E-01 4.55E-01
3  0.00E+00 3.49E-02 1.03E-01 1.61E-01 2.04E-01 2.27E-01 2.30E-01
2  0.00E+00 1.10E-02 3.22E-02 5.04E-02 6.37E-02 7.08E-02 7.17E-02
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
```

10.3.6. Обсуждение результатов

Нелинейность уравнения для температуры не позволяет получить сошедшееся решение для T за одну итерацию. Однако видно, что наше решение сошлось за четыре итерации.

Рассчитанное произведение $f\,\mathrm{Re} = 58{,}0$. Это очень хорошо согласуется с точным значением, равным 58,56, несмотря на сравнительно грубую расчетную сетку.

Локальное число Нуссельта на стенке внутренней трубы растет при удалении от ребра. На боковой стенке (т.е. на ребре) максимальное значение числа Нуссельта характерно примерно для середины ребра. Все эти тенденции согласуются с нашими прогнозами, основанными на том, что локальный тепловой поток будет тем больше, чем больше скорость течения вблизи поверхности.

При выводе полей зависимых переменных получены ожидаемые распределения безразмерных скорости и температуры. Кольцевой канал узок вблизи внутренней трубы и широк у внешней. Поэтому максимальная скорость в сечении достигается на периферии. Это видно из полученных результатов. Наибольшее значение безразмерная температура имеет не на внешней адиабатической границе, а в области, лежащей несколько ближе к центру. Это является следствием зависимости источникового члена от локальной скорости течения.

10.3.7. Заключительные замечания

Основная новая особенность в этом примере — это граничное условие с *постоянной температурой*, которое приводит к нелинейному уравнению для температуры. Все остальные аспекты задачи могут уже показаться довольно рутинными. Более общей формой граничного условия с постоянной температурой T_w служит задание *внешнего коэффициента теплоотдачи и постоянной температуры окружающей среды*. Эта ситуация проиллюстрирована в следующем примере.

10.4. МАССИВ РЕБЕР (ПРИМЕР 10)

10.4.1. Постановка задачи

На рис. 10.4 показаны параллельные пластины с присоединенными к ним в шахматном порядке ребрами. Рассмотрим полностью развитое течение в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Геометрические характеристики канала заданы следующим образом:

$$S/H = 1;\ H_{fin}/H = 0{,}75;\ t/S = 0{,}2, \qquad (10.3)$$

где S — расстояние между ребрами; H — расстояние между параллельными пластинами; H_{fin} — высота ребер; t — толщина ребер. Эти размеры показаны на рис. 10.4.

Граничные условия для температуры заданы в виде известных коэффициентов теплоотдачи на внешних поверхностях верхней и нижней пластин и постоянной температуры окружающей среды T_∞. Коэффициенты теплоотдачи на обеих поверхностях выражаются через числа Био Bi. Определение числа Био подобно определению числа

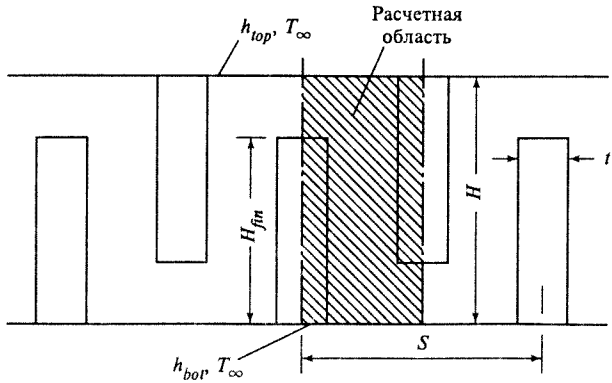


Рис. 10.4. Массив ребер

Нуссельта, только число Био характеризует *внешний*, а не к внутренний теплообмен. Таким образом,

$$\mathrm{Bi} = h_e H/k, \tag{10.4}$$

где h_e — коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности; H — характерный размер; k — теплопроводность жидкости в канале. Для рассматриваемой задачи числа Био на нижней и верхней пластинах задаются равными:

$$\mathrm{Bi}_{bot} = 0{,}2;\ \mathrm{Bi}_{top} = 5. \tag{10.5}$$

Отношение теплопроводностей $k_{fin}/k_{fluid} = 1{,}8$.

Если массив ребер очень протяженный по оси x, то вертикальные линии, проходящие через центры ребер, представляют собой линии симметрии. Поэтому выбранная нами расчетная область лежит между двумя линиями симметрии, как показано на рис. 10.4.

10.4.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Для рассмотренных в нашей задаче геометрических характеристик подходит процедура `ZGRID`. Поэтому после задания необходимой геометрической информации вызывается `ZGRID`.

BEGIN. Коэффициенты теплоотдачи на внешних поверхностях верхней и нижней пластин рассчитываются из заданных чисел Био. Значение $\mathrm{d}T_b/\mathrm{d}z$ задается, как и в предыдущем примере, произвольно.

При задании начальных условий для `T(I,J)` можно было бы использовать T_∞. Однако это приведет к той же неприятности (когда решение «застревает» на начальном приближении), с которой мы столкнулись в примере 9, и потребует аналогичного ее разрешения. Поступим по-другому — возьмем начальные значения `T(I,J)` равными T_∞+1.

OUTPUT. Большая часть этой процедуры имеет ту же структуру, что и в предыдущих примерах. При вычислении площади поперечного сечения не учитываются области, занятые ребрами. Определение интегрального числа Нуссельта основано на рассчитанной по внешней поверхности верхней и нижней пластин средней плотности теплового потока; дополнительная площадь поверхности, задаваемая ребрами, при определении средней плотности теплового потока не используется. Разность температур, используемая в определении коэффициента теплоотдачи, берется в виде $T_\infty - T_b$. В дополнение к интегральному числу Нуссельта отдельно для верхней и нижней пластин через соответствующие тепловые потоки на них рассчитываются средние числа Нуссельта.

Следует помнить, что существует множество способов определения числа Нуссельта. В данном случае можно рассчитать некоторую

среднюю температуру стенки T_w и использовать $T_w - T_b$ в качестве разности температур при вычислении коэффициента теплоотдачи на внутренней поверхности. Какой способ использовать, зависит от цели вычислений, удобства и личного вкуса. Определения, включенные в примеры этой книги, являются просто иллюстрациями; они, конечно, не единственно возможные. Вы свободны в представлении всех результатов расчетов течений в каналах любым выбранным вами способом.

Для окончательного вывода результатов на печать используется замещение очень маленьких значений скорости в ребрах нулями (см. пример 8).

PHI. При построении процедуры PHI в основном осуществляется следующее: в области, занимаемой ребрами, вязкость задается очень большой, а теплопроводность соответствующей ее значению для материала ребра; локальные значения $\partial T/\partial z$ получаются из dT_b/dz согласно (9.45); на верхней и нижней пластинах задаются граничные условия конвективного теплообмена.

10.4.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

AMU — вязкость μ;
ANU — интегральное число Нуссельта;
ANUB — среднее число Нуссельта на нижней пластине;
ANUT — то же на верхней пластине;
AR — площадь контрольного объема dA;
ASUM — площадь поперечного сечения;
BIBOT — число Био на нижней пластине [см. (10.5)];
BITOP — то же на верхней пластине;
C — зазор $H - H_{fin}$;
CNDFIN — теплопроводность ребра k_{fin};
COND — то же жидкости k_{fluid};
CP — теплоемкость c_p;
DEN — плотность ρ;
DH — гидравлический диаметр D_h;
DPDZ — продольный градиент давления dp/dz;
DTDZ — продольный градиент температуры $\partial T/\partial z$;
DTBDZ — продольный градиент среднемассовой температуры dT_b/dz;
FRE — произведение fRe;
H — высота H;
HBOT — коэффициент теплоотдачи h_{bot};

HFIN — высота ребра H_{fin};
HP — обогреваемый участок периметра;
HTOP — коэффициент теплоотдачи h_{top};
PI — число π;
QBOT — суммарный тепловой поток через нижнюю пластину;
QTOP — то же через верхнюю пластину;
QW — плотность теплового потока на стенке q_w;
RE — число Рейнольдса;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc_p;
S — расстояние между ребрами S;
SHALF — 1/2 расстояния между ребрами;
T(I,J) — температура T;
TB — среднемассовая температура T_b;
TEMP — временная переменная для $(T - T_\infty)/(T_b - T_\infty)$;
TH — толщина ребра t;
TINF — температура окружающей среды T_∞;
TSUM — $\int wT\,dA$;
TW — температура стенки T_w;
W(I,J) — продольная скорость w;
WBAR — средняя скорость в сечении $\overline{w}$;
WP — смоченный периметр;
WSUM — $\int w\,dA$;
X1 — половина толщины ребра;
X2 — SHALF – X1

10.4.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------------
C---EXAMPLE 10 - STAGGERED FIN ARRAY
C-------------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      H=1.
      S=H
      SHALF=0.5*S
      TH=0.2*S
      X1=0.5*TH
      X2=SHALF-X1
      HFIN=0.75*H
      C=H-HFIN
      CALL INTA4(NZX,3,NCVX(1),2,NCVX(2),8,NCVX(3),2)
      CALL DATA3(XZONE(1),X1,XZONE(2),X2-X1,XZONE(3),X1)
      CALL INTA4(NZY,3,NCVY(1),3,NCVY(2),5,NCVY(3),3)
      CALL DATA3(YZONE(1),C,YZONE(2),HFIN-C,YZONE(3),C)
      CALL ZGRID
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
      DH=4.*ASUM/WP
      RE=DH*WBAR*DEN/AMU
      FRE=-2.*DPDZ*DH/(DEN*WBAR**2+SMALL)*RE
      HP=S
      QW=DTBDZ*RHOCP*WSUM/HP
      ANU=QW*H/(COND*(TINF-TB)+SMALL)
      QTOP=0.
      QBOT=0.
      DO 210 I=2,L2
        QTOP=QTOP+FLUXM1(I,2)*XCV(I)
        QBOT=QBOT+FLUXJ1(I,2)*XCV(I)
  210 CONTINUE
      ANUT=QTOP*H/(SHALF*COND*(TINF-TB)+SMALL)
      ANUB=QBOT*H/(SHALF*COND*(TINF-TB)+SMALL)
      DO 220 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,230)
  230   FORMAT(1X,'ITER',2X,'W(8,8)',5X,'T(8,8)',6X,
     1         'FRE',8X,'NU',7X,'NU(TOP)',3X,'NU(BOTTOM)')
        WRITE(IUNIT,240) ITER,W(8,8),T(8,8),
     1             FRE,ANU,ANUT,ANUB
  240   FORMAT(1X,I2,1P6E11.3)
  220 CONTINUE
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        DO 250 J=1,M1
        DO 250 I=1,L1
          W(I,J)=W(I,J)/WBAR
          IF(W(I,J).LT.1.E-10) W(I,J)=0.
          T(I,J)=(T(I,J)-TINF)/(TB-TINF)
  250   CONTINUE
        CALL PRINT
C-----
COME HERE TO FILL IBLOCK(I,J) BEFORE CALLING PLOT
        DO 260 J=2,M2
        DO 260 I=2,L2
          IF(X(I).LT.X1.AND.Y(J).LT.HFIN) IBLOCK(I,J)=1
          IF(X(I).GT.X2.AND.Y(J).GT.C) IBLOCK(I,J)=1
  260   CONTINUE
C-----
        CALL PLOT
      ENDIF
      RETURN
C*-*-*-
```

```
      IF(NF.EQ.2) THEN
        DO 310 J=2,M2
        DO 310 I=2,L2
          GAM(I,J)=COND
          IF(X(I).LT.X1.AND.Y(J).LT.HFIN) GAM(I,J)=CNDFIN
          IF(X(I).GT.X2.AND.Y(J).GT.C) GAM(I,J)=CNDFIN
          TEMP=(T(I,J)-TINF)/(TB-TINF+SMALL)
          DTDZ=TEMP*DTBDZ
          SC(I,J)=-RHOCP*DTDZ*W(I,J)
310     CONTINUE
      ENDIF
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
      DO 320 J=2,M2
        KBCI1(J)=2
        KBCL1(J)=2
320   CONTINUE
      IF(NF.EQ.2) THEN
        DO 330 I=2,L2
          KBCM1(I)=2
          KBCJ1(I)=2
          FLXCM1(I)=HTOP*TINF
          FLXPM1(I)=-HTOP
          FLXCJ1(I)=HBOT*TINF
FLXPJ1(I)=-HBOT
330   CONTINUE
ENDIF
RETURN
END
C CCCC
```

```
J=      1          2          3          4          5          6          7
Y= 0.00E+00 4.17E-02 1.25E-01 2.08E-01 3.00E-01 4.00E-01 5.00E-01
J=      8          9          10         11         12         13
Y= 6.00E-01 7.00E-01 7.92E-01 8.75E-01 9.58E-01 1.00E+00
```

****** W/WBAR ******

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
12	6.49E-01	6.51E-01	6.63E-01	6.78E-01	6.87E-01	6.82E-01	6.58E-01
11	1.25E+00	1.26E+00	1.31E+00	1.38E+00	1.44E+00	1.45E+00	1.41E+00
10	8.15E-01	8.30E-01	9.52E-01	1.27E+00	1.48E+00	1.61E+00	1.62E+00
9	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.45E-01	1.04E+00	1.39E+00	1.55E+00
8	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.76E-01	9.39E-01	1.31E+00	1.49E+00
7	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.67E-01	9.20E-01	1.29E+00	1.47E+00
6	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.67E-01	9.21E-01	1.29E+00	1.48E+00
5	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.69E-01	9.27E-01	1.31E+00	1.52E+00
4	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.57E-01	8.98E-01	1.28E+00	1.52E+00
3	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.07E-01	7.59E-01	1.08E+00	1.29E+00
2	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.70E-01	3.83E-01	5.20E-01	6.07E-01
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

I=	8	9	10	11	12	13	14
J							
13	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
12	6.07E-01	5.20E-01	3.83E-01	1.70E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
11	1.29E+00	1.08E+00	7.59E-01	3.07E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
10	1.52E+00	1.28E+00	8.98E-01	3.57E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
9	1.52E+00	1.31E+00	9.27E-01	3.69E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
8	1.48E+00	1.29E+00	9.21E-01	3.67E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
7	1.47E+00	1.29E+00	9.20E-01	3.67E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
6	1.49E+00	1.31E+00	9.39E-01	3.76E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
5	1.55E+00	1.39E+00	1.04E+00	4.45E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
4	1.62E+00	1.61E+00	1.48E+00	1.27E+00	9.52E-01	8.30E-01	8.15E-01
3	1.41E+00	1.45E+00	1.44E+00	1.38E+00	1.31E+00	1.26E+00	1.25E+00
2	6.58E-01	6.82E-01	6.87E-01	6.78E-01	6.63E-01	6.51E-01	6.49E-01
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

****** (T-TINF)/(TB-TINF) ******

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
13	-4.10E+02	3.88E-01	3.87E-01	3.87E-01	3.86E-01	3.85E-01	3.85E-01
12	4.68E-01	4.68E-01	4.67E-01	4.66E-01	4.66E-01	4.65E-01	4.64E-01
11	6.24E-01	6.24E-01	6.23E-01	6.21E-01	6.20E-01	6.17E-01	6.15E-01
10	7.66E-01	7.66E-01	7.64E-01	7.58E-01	7.55E-01	7.53E-01	7.49E-01
9	8.77E-01	8.77E-01	8.77E-01	8.76E-01	8.76E-01	8.77E-01	8.75E-01
8	9.68E-01	9.68E-01	9.70E-01	9.76E-01	9.82E-01	9.87E-01	9.88E-01
7	1.05E+00	1.05E+00	1.05E+00	1.06E+00	1.07E+00	1.08E+00	1.08E+00
6	1.12E+00	1.12E+00	1.12E+00	1.13E+00	1.15E+00	1.16E+00	1.16E+00
5	1.17E+00	1.17E+00	1.17E+00	1.19E+00	1.20E+00	1.21E+00	1.22E+00
4	1.20E+00	1.20E+00	1.20E+00	1.22E+00	1.23E+00	1.25E+00	1.26E+00
3	1.21E+00	1.21E+00	1.21E+00	1.23E+00	1.24E+00	1.25E+00	1.27E+00
2	1.21E+00	1.21E+00	1.21E+00	1.22E+00	1.23E+00	1.24E+00	1.25E+00
1	-4.10E+02	1.20E+00	1.21E+00	1.21E+00	1.22E+00	1.23E+00	1.24E+00

I=	8	9	10	11	12	13	14
J							
13	3.85E-01	3.86E-01	3.89E-01	3.96E-01	4.33E-01	4.38E-01	-4.10E+02
12	4.63E-01	4.64E-01	4.67E-01	4.74E-01	4.86E-01	4.90E-01	4.90E-01
11	6.12E-01	6.09E-01	6.06E-01	6.03E-01	6.02E-01	6.02E-01	6.02E-01
10	7.44E-01	7.38E-01	7.31E-01	7.23E-01	7.17E-01	7.15E-01	7.14E-01
9	8.70E-01	8.63E-01	8.54E-01	8.43E-01	8.35E-01	8.31E-01	8.31E-01

```
I=      8         9        10        11        12        13        14
J
8   9.86E-01  9.79E-01  9.69E-01  9.58E-01  9.49E-01  9.45E-01  9.44E-01
7   1.08E+00  1.08E+00  1.07E+00  1.06E+00  1.05E+00  1.04E+00  1.04E+00
6   1.16E+00  1.16E+00  1.15E+00  1.14E+00  1.13E+00  1.12E+00  1.12E+00
5   1.23E+00  1.22E+00  1.22E+00  1.20E+00  1.19E+00  1.19E+00  1.19E+00
4   1.26E+00  1.27E+00  1.26E+00  1.26E+00  1.25E+00  1.25E+00  1.25E+00
3   1.27E+00  1.28E+00  1.28E+00  1.28E+00  1.28E+00  1.28E+00  1.28E+00
2   1.26E+00  1.27E+00  1.27E+00  1.28E+00  1.28E+00  1.28E+00  1.28E+00
1   1.25E+00  1.26E+00  1.26E+00  1.27E+00  1.27E+00  1.27E+00 -4.10E+02
```

10.4.6. Обсуждение результатов

Видно, что решение нелинейного уравнения для температуры сошлось всего за несколько итераций. Рассчитанное значение интегрального числа Нуссельта, как и ожидалось, лежит между значениями чисел Нуссельта для верхней и нижней пластин. Полезно рассмотреть также отношения между этими числами Нуссельта и числами Био, заданными в качестве граничных условий, но сделаем это ниже.

В выведенном на печать поле $w/\ \overline{w}$ легко обнаружить области ребер по нулевым значениям скорости. При заданном в задаче шахматном расположении ребер ожидалась некоторого рода симметрия в распределении скорости. Другими словами, если считывать значения скорости вдоль любой вертикальной линии в левой половине расчетной области снизу вверх, то они должны в точности совпадать со значениями вдоль симметрично расположенной линии в правой половине при считывании сверху вниз. Полученное решение демонстрирует подобную симметрию. Например, значения $w/\ \overline{w}$ при I = 5 для J = 1, 2, 3, ... совпадают со значениями $w/\ \overline{w}$ при I = 10 для J = 13, 12, 11, ...

Поле температуры также имело бы такую симметрию, если бы использовались равные значения числа Био на верхней и нижней пластинах. Однако из-за различных чисел Био значения безразмерной температуры у нижней границы намного больше, чем у верхней. Для более конкретного обсуждения предположим, что температура жидкости в канале выше температуры окружающей среды. В такой ситуации следовало бы ожидать, что максимальная температура будет вблизи центра канала, а минимальная около границ. Однако из-за меньшего значения числа Био у нижней пластины рассчитанное распределение температуры существенно несимметрично, температура в нижней половине канала заметно выше, чем в верхней.

Температура T_w на нижней границе, которая должна быть в обычной ситуации меньше T_b, на самом деле больше T_b. Если рассчитать коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности нижней границы, основываясь на разности температур $T_w - T_b$, то получится отрицательное значение. Это означает, что для такого несимметрич-

ного поля температуры разность $T_w - T_b$ не подходит для определения коэффициента теплоотдачи на нижней границе.

Вернемся к числам Нуссельта, рассчитанным отдельно для верхней и нижней границы. Они связаны с соответствующими числами Био на этих границах. Различие состоит только в том, что при заданном тепловом потоке расчет чисел Био основан на внешней разности температур $T_\infty - T_w$, в то время как определение чисел Нуссельта основано на $T_\infty - T_b$. Обычно значение $T_\infty - T_b$ больше, чем $T_\infty - T_w$, поэтому числа Нуссельта будут меньше, чем соответствующие числа Био, что и наблюдается на верхней границе, где полученное значение числа Нуссельта равно 1,984 и, очевидно, меньше Bi_{bot}, которое равно 5. Однако на нижней границе $T_\infty - T_b$ меньше, чем $T_\infty - T_w$, в результате рассчитанное число Nu на нижней границе несколько больше, чем заданное число Bi_{top}.

10.4.7. Заключительные замечания

Как было описано в п. 9.6.6, использованное здесь граничное условие конвективного теплообмена является более общим граничным условием, из которого можно получить условие постоянной температуры или постоянного потока. Это обобщенное граничное условие предпочтительнее применять и в практических задачах.

В четырех примерах этой главы мы познакомились со многими особенностями различных течений в каналах. Они включают в себя представление ребер, сопряженный теплоперенос и множество различных граничных условий для температуры. Основываясь на этом, можно применять CONDUCT для решения широкого круга задач о течениях в каналах. Используя программу, вы должны быть внимательны и решать только те задачи, в которых рассматривается полностью развитое течение. Одна из распространенных ошибок заключается в применении таких граничных условий для температуры, которые не приводят к полностью развитому течению или приводят к тривиальным постановкам, примеры которых приведены в § 9.5. Поэтому очень важно хорошее понимание основ того, что вы предполагаете рассчитать.

В следующей главе рассмотрим некоторые сложные течения в каналах, такие как течение неньютоновской жидкости и турбулентное течение. Другими примерами применения CONDUCT являются решения задач о потенциальном обтекании и течении в пористых средах.

10.5. ЗАДАЧИ

10.1. С помощью CONDUCT решите задачу о полностью развитых течении и теплообмене в круглой трубе. Точное значение $f\mathrm{Re} = 64$. При граничном условии постоянной плотности теплового потока число Нуссельта равно 4,364. Когда задается постоянная по периметру и длине канала температура, число Нуссельта равно 3,657. Проверьте тот факт, что численное решение приближается к этим значениям при улучшении сетки.

10.2. Решите задачу, описанную в [15], при различных значениях внешнего коэффициента теплоотдачи и сравните с опубликованными результатами.

10.3. Формулировка задачи (рис. 10.5) соответствует полностью развитым течению и теплообмену в круглой трубе с внутренними ребрами. Труба имеет шесть равномерно распределенных по периметру ребер. Другие геометрические характеристики показаны на рис. 10.5. Вычислите значения $f\mathrm{Re}$ и $w/\overline{w}$. Для определения числа Re используйте гидравлический диаметр. Рассчитайте полностью развитое поле температуры при условии, что в материале, формирующем стенку трубы и ребра, происходит выделение тепла источником мощностью S (это обычно реализуется пропусканием через трубу электрического тока). Внешняя поверхность трубы теплоизолирована. Вычислите число Нуссельта, основываясь на среднем тепловом потоке и средней температуре на поверхности соприкосновения жидкости с материалом трубы. В качестве характерного размера при определении числа Nu можете использовать диаметр трубы. Убедитесь, что значение $\partial T/\partial z$ согласуется со значением S.

10.4. Разработайте подпрограмму ADAPT для расчета полностью развитых течения и теплообмена в массиве ребер, накрытых кожухом (рис. 10.6). Жидкость течет только в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Кожух теплоизолирован, а на внешней поверхности нижней пластины заданы условия конвективного теплообмена — температура окружающей среды T_∞ и коэффициент теплоотдачи h_e. Возьмите $k_{fin}/k_{fluid} = 2{,}8$, $h_e H/k = 3{,}5$, где k — теплопроводность жидкости. Обеспечьте вывод на печать безразмерных полей продольной скорости и температуры, значений числа Нуссельта и произведения $f\mathrm{Re}$.

10.5. Рассмотрите задачу о массиве ребер, накрытых кожухом, представленную в [14]. Выполните расчеты для тех же случаев и сравните с опубликованными результатами.

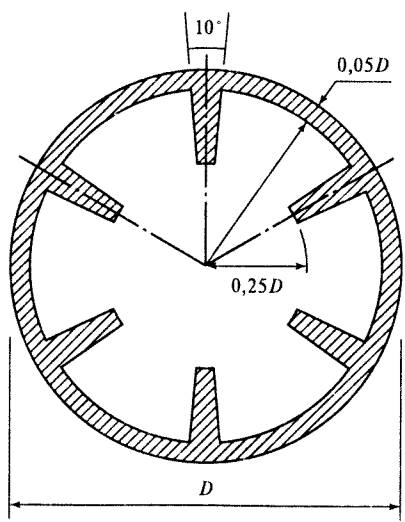


Рис. 10.5. К задаче 10.3

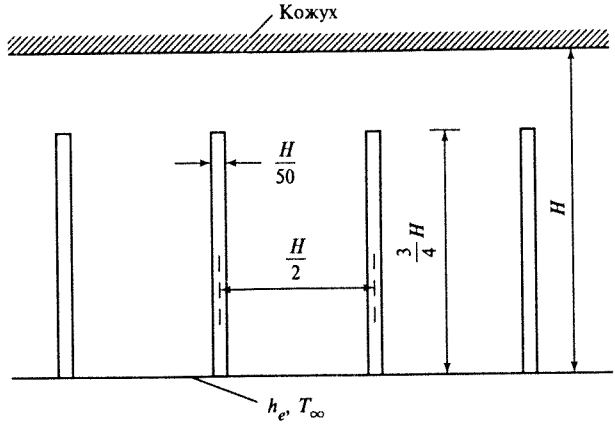


Рис. 10.6. К задаче 10.4

10.6. На рис. 10.7 показано поперечное сечение прямоугольного канала с тонкой перегородкой посередине. Перегородка не оказывает никакого сопротивления теплопереносу. Граничные условия следующие: на боковых стенках $q = 100$, на нижней стенке канала $q = 300$. Напишите подпрограмму ADAPT для решения этой задачи. Выведите на печать значения $w/\overline{w}$ и безразмерное поле температуры, а также значения fRe и Nu.

10.7. Рассчитайте полностью развитые поля скорости и температуры в канале полукруглого сечения со следующими граничными условиями: плоская стенка имеет постоянную температуру, а остальная граница теплоизолирована. Выведите на печать поля $w/\overline{w}$ и $(T - T_w)/(T_b - T_w)$ в поперечном сечении и значения fRe и Nu. Можете вычислить число Nu по среднему тепловому потоку на греющей стенке и использовать диаметр канала в качестве характерного размера.

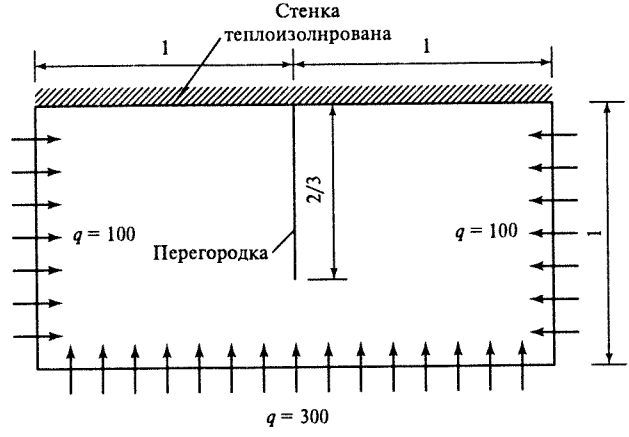


Рис. 10.7. К задаче 10.6

Выведите на печать распределение локального числа Нуссельта вдоль греющей стенки. Точное значение fRe (основанное на гидравлическом диаметре) равно 63,07.

10.8. В канале квадратного сечения имеется прямоугольная вставка (рис. 10.8), которая сделана из материала с очень малой теплопроводностью. На внешней поверхности канала граничные условия для температуры задаются с помощью внешнего коэффициента теплоотдачи $h_e = 25$ и температуры окружающей среды $T_\infty = 20$. Теплопроводность жидкости $k = 2$. Размеры канала показаны на рисунке. Выведите на печать распределения $w/\overline{w}$ и $(T - T_\infty)/(T_b - T_\infty)$, а также значения fRe и Nu.

10.9. Плата с электрическими схемами может быть представлена в виде выделяющих тепло блоков, расположенных на теплоизолированной пластине и накрытых другой теплоизолированной пластиной, используемой в качестве кожуха (рис. 10.9). Охлаждающая жидкость течет в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Теплопроводность материала блоков в 4 раза больше теплопроводности жидкости. В каждом блоке находится постоянный источник тепла. Рассчитайте полностью развитые течение и теплообмен. Выведите на печать распределения $w/\overline{w}$ и $(T - T_w)/(T_b - T_w)$, а также значения fRe и Nu. В качестве T_w возьмите среднюю температуру поверхности блоков.

10.10. Внутренние поверхности показанного на рис. 10.10 канала квадратного сечения поддерживаются при постоянной температуре T_∞, тогда как внешняя

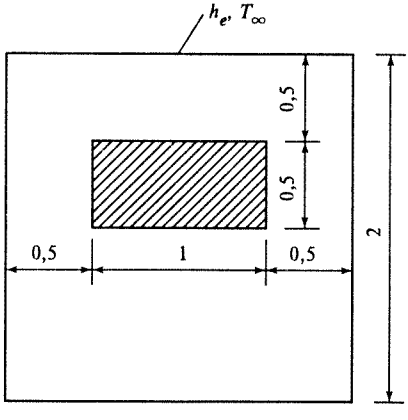


Рис. 10.8. К задаче 10.8

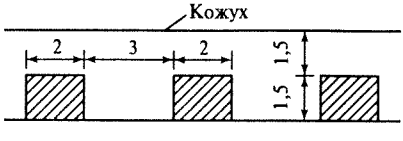


Рис. 10.9. К задаче 10.9

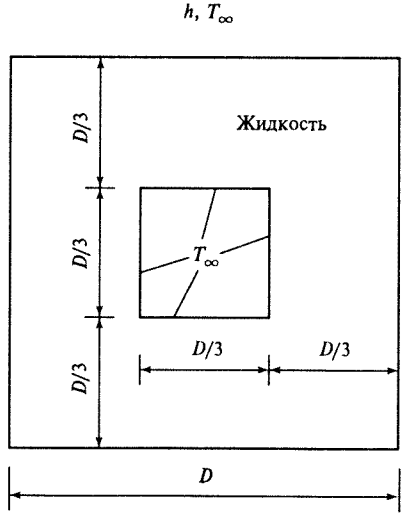


Рис. 10.10. К задаче 10.10

поверхность обменивается теплом с окружающей средой, имеющей температуру T_∞, коэффициент теплоотдачи равен h. Значение h задается с помощью числа Био $hD/k = 5{,}8$, где k — теплопроводность жидкости. Напишите подпрограмму ADAPT для расчета полностью развитых течения и теплообмена в этом канале. Рассчитайте распределения $w/\overline{w}$ и $(T - T_\infty)/(T_b - T_\infty)$, а также значения fRe и Nu (можете определить число Nu любым разумным способом и реализовать это в программе).

10.11. На рис. 10.11 показан бесконечный массив стержней квадратного (1×1) поперечного сечения. Жидкость течет между стержнями вдоль оси z, перпендикулярной плоскости рисунка. На поверхности стержней поддерживается температура T_w, которая линейно возрастает вдоль оси z. Напишите подпрограмму ADAPT для расчета полностью развитых полей скорости и температуры. Вычислите значения fRe и Nu.

10.12. Решите задачу о течении в канале (рис. 10.12). Внешний и внутренний диаметры канала равны d и D соответственно, причем $D/d = 2$. Внутренний цилиндр диаметром d сделан из сплошного материала, в зазоре текут две различные жидкости. В нижней половине динамическая вязкость жидкости равна μ_1, а в верхней — μ_2, причем $\mu_2/\mu_1 = 2{,}5$. Обе жидкости имеют одну и ту же плотность ρ. Рассчитайте безразмерное поле скорости $w/\overline{w}$ и значение fRe (для определения числа Re используйте μ_1). Процессы теплообмена характеризуются выделением тепла источником мощностью S в верхней половине внутреннего цилиндра и тепловым потоком $0{,}25Sd$ через дугу длиной 60° на внешней границе. Остальная часть поверхности внешнего цилиндра теплоизолирована. Нижняя половина внутреннего цилиндра сделана из теплонепроводящего материала. И обе жидкости, и тепловыделяющий материал имеют одинаковые значения теплопроводности k и теплоемкости c_p. Рассчитайте безразмерное поле температуры и число $\mathrm{Nu} = h(D - d)/k$, где коэффициент h определен по средней температуре стенок с

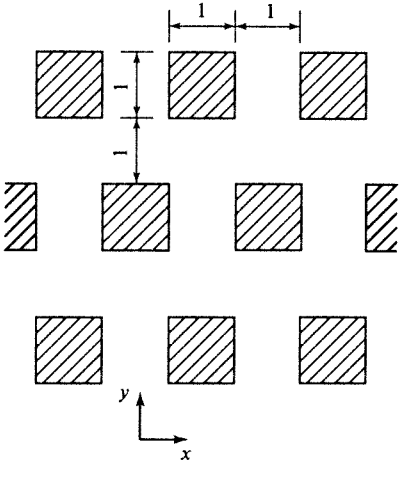


Рис. 10.11. К задаче 10.11

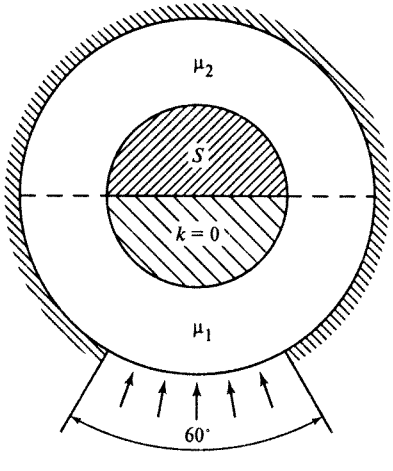
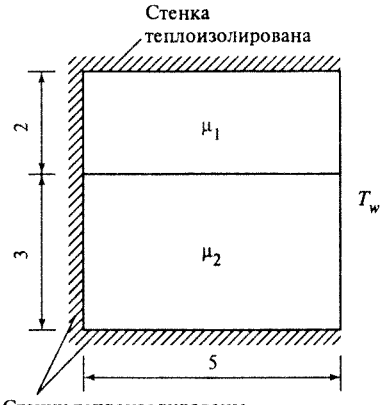


Рис. 10.12. К задаче 10.12



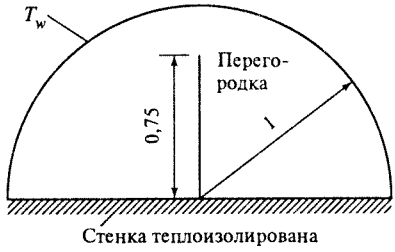


Рис. 10.14. К задаче 10.14

Рис. 10.13. К задаче 10.13

теплообменом. Этими стенками являются дуга длиной 60° на внешнем цилиндре и верхняя половина внутреннего цилиндра.

10.13. Решите задачу течения в канале (рис. 10.13) двух жидкостей с различными динамическими вязкостями μ_1 и μ_2, причем $\mu_2/\mu_1 = 4{,}5$. Правая стенка вдоль канала поддерживается при постоянной температуре T_w. Обе жидкости имеют одинаковую плотность ρ. Рассчитайте безразмерное поле скорости $w/\overline{w}$ и значение $f\mathrm{Re}$. При определении числа Re можете использовать μ_1. Обе жидкости имеют одинаковые теплопроводности k и теплоемкости c_p. Найдите безразмерное поле температуры и число Нуссельта, основываясь на среднем тепловом потоке через правую стенку.

10.14. Рассмотрите канал полукруглого сечения с перегородкой посередине (рис. 10.14). Перегородка не оказывает сопротивления теплопереносу. Граничные условия следующие: температура стенки T_w остается постоянной по закругленной границе и вдоль канала; плоская стенка канала теплоизолирована. Найдите безразмерные поля скорости и температуры. Вычислите значения $f\mathrm{Re}$ и Nu, определенные по диаметру канала.

10.15. Жидкость течет вдоль оси, перпендикулярной плоскости рис. 10.15. Верхняя и нижняя пластины теплоизолированы. Тепловыделяющие блоки прикреплены к ним в шахматном порядке. Мощность источника тепла в нижних блоках в 2 раза больше, чем в верхних. Теплопроводность твердого материала в 2,5 раза больше, чем жидкости. Рассчитайте полностью развитые поля скорости

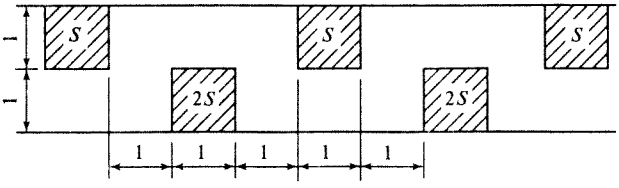


Рис. 10.15. К задаче 10.15

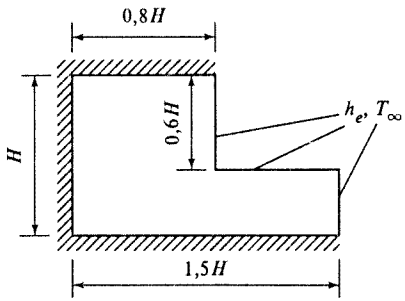


Рис. 10.16. К задаче 10.16

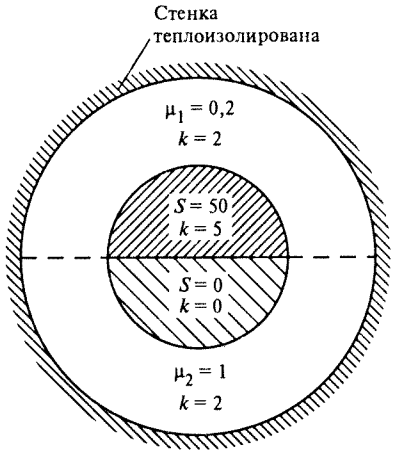


Рис. 10.17. К задаче 10.17 →

и температуры. Обеспечьте вывод на печать полей $w/\overline{w}$ и безразмерной температуры.

10.16. Напишите подпрограмму ADAPT для расчета полностью развитых течения и теплообмена в канале, показанном на рис. 10.16. Жидкость течет только вдоль оси z, перпендикулярной плоскости рисунка. Граничные условия для температуры показаны на рисунке (некоторые поверхности теплоизолированы, а другие обмениваются теплом с окружающей средой, имеющей температуру T_∞, коэффициент теплоотдачи равен h_e). Пусть $h_eH/k = 3{,}5$, где k — теплопроводность жидкости в канале. Обеспечьте вывод на печать безразмерных полей продольной скорости и температуры, а также значений fRe и Nu (расчет которого основан на H, $T_\infty - T_b$ и средней плотности теплового потока через стенки с теплообменом).

10.17. Рассмотрите течение в зазоре, образованном сплошным стержнем диаметром 2, вставленным в теплоизолированную трубу диаметром 5 (рис. 10.17). В верхней и нижней половинах зазора текут жидкости с разными динамическими вязкостями $\mu_1 = 0{,}2$ и $\mu_2 = 1$; обе жидкости имеют одинаковые теплопроводности $k = 2$. Нижняя половина стержня имеет нулевую теплопроводность, и там не выделяется тепло, в то время как для верхней половины теплопроводность $k = 5$ и $S = 50$. Напишите подпрограмму ADAPT и рассчитайте полностью развитые поля скорости и температуры. Выведите на печать безразмерные поля скорости и температуры, а также значения fRe и Nu.

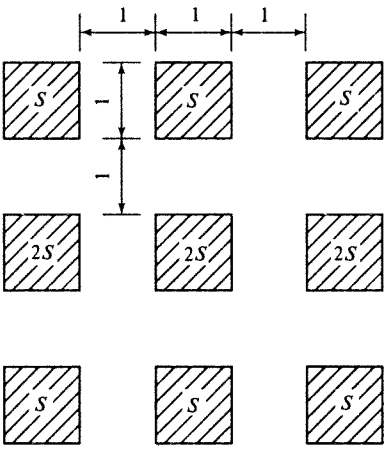


Рис. 10.18. К задаче 10.18

10.18. На рис. 10.18 показан бесконечный массив стержней квадратного поперечного сечения. Жидкость течет между

стержнями в направлении z, перпендикулярном плоскости рисунка. В стержнях выделяется тепло источниками мощностями S и $2S$ в перемежающихся рядах, как показано на рисунке. Возьмите $k_{solid} / k_{fluid} = 2{,}1$. Напишите подпрограмму ADAPT для расчета полностью развитых полей скорости и температуры.

10.19. Решите задачу о теплообмене, приведенную в [16], при различных внешних коэффициентах теплоотдачи и сравните с опубликованными результатами.

10.20. В [13] найдите два канала интересной геометрической формы, для которых приведены результаты решения задачи о полностью развитом течении. Используйте CONDUCT для какого-либо диапазона значений параметров этих задач и сравните результаты.

Глава 11

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОГРАММЫ CONDUCT

Мы уже рассмотрели применение CONDUCT для решения задач о стационарной и нестационарной теплопроводности, различных течениях в каналах и связанном с ними теплообмене. В этой главе продемонстрируем использование программы для решения задач о более сложных течениях в каналах и других задач, таких как потенциальное обтекание и течение в пористой среде. Целью этих примеров является расширение ваших представлений по дальнейшему использованию программы. Однажды осознав, что с учетом некоторых ограничений программа может быть применена для решения многообразных задач, вы начнете исследовать вытекающие из этого практические возможности.

Так как детальные описания неньютоновского и турбулентного течений, а также течения в пористой среде находятся заведомо за рамками этой книги, то соответствующая информация будет дана довольно кратко. Несмотря на это, проблем с пониманием основных приведенных здесь концепций возникать не должно.

11.1. НЕНЬЮТОНОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОЛУКРУГЛОМ КАНАЛЕ (ПРИМЕР 11)

11.1.1. Постановка задачи

При ньютоновском течении в канале возникающие из-за продольного течения вязкие напряжения пропорциональны градиенту продольной скорости. Для неньютоновского течения отношение между вязким напряжением и градиентами скорости более сложное. Для некоторых жидкостей напряжение можно считать пропорциональным градиенту скорости в некоторой степени. Такие жидкости известны как «степенные» жидкости (power-law fluids).

Если попытаться реализовать степенную зависимость для вязких напряжений в рамках нашего стандартного ньютоновского течения, то можно обнаружить, что получившаяся вязкость зависит от градиентов скорости. Таким образом, с вычислительной точки зрения расчет неньютоновского течения является *нелинейной* задачей, в которой вязкость будет некоторой функцией от неизвестных градиентов скорости.

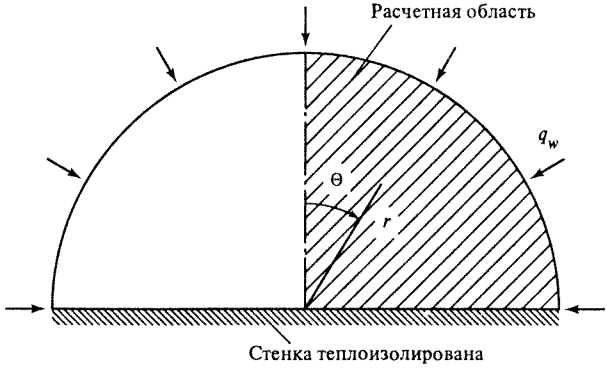


Рис. 11.1. Неньютоновское течение в полукруглом канале

Рассмотрим полностью развитое неньютоновское течение в полукруглом канале, показанном на рис. 11.1. Для степенной жидкости вязкость μ задается по формуле

$$\mu = K\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right]^{(n-1)/2}, \qquad (11.1)$$

где константа K и параметр n в показателе степени зависят от свойств жидкости. Значение $n = 1$ соответствует ньютоновскому течению. В нашем примере возьмем $n = 0{,}5$, чтобы проиллюстрировать существенное отклонение от ньютоновского поведения.

Для определения числа Рейнольдса зададим некоторую характерную вязкость по формуле

$$\mu_{ref} = K\left(\frac{\overline{w}}{D_h}\right)^{n-1}, \qquad (11.2)$$

где D_h — гидравлический диаметр канала.

Граничные условия для температуры включают в себя заданную постоянную плотность теплового потока на закругленной части канала и адиабатные условия для плоского участка. Из-за симметрии будем проводить расчеты только для правой половины канала.

11.1.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Так как геометрическая форма канала довольно проста, можно построить равномерную сетку с использованием процедуры `EZGRID`. Для полярной системы координат задаются значения `MODE = 3` и `R(1) = 0`.

BEGIN. В этой задаче уравнение для скорости нелинейно, а для температуры линейно. Следовательно, первые 15 итераций выпол-

няются, чтобы получить сошедшееся решение для w, и заключительные 3 итерации для нахождения T. Поэтому переменная LAST равна 18.

Обычные свойства жидкости задаются в процедуре BEGIN. Здесь RK соответствует константе K в (11.1), а POWER — параметру n в показателе степени. Постоянная вязкость AMU используется, как будет пояснено далее, только для начала процесса решения. REGAM — коэффициент релаксации, также обсуждаемый далее.

OUTPUT. Для вычисления числа Рейнольдса используется характерная вязкость μ_{ref}, определенная по (11.2). В программе ей соответствует переменная AMUR. Затем рассчитывается средняя температура на закругленной границе области, на которой задана постоянная плотность теплового потока. При этом XCV(I) обозначает размер грани каждого контрольного объема по углу. Остальная часть OUTPUT вам уже должна быть известна.

PHI. Так как вязкость μ [см. (11.1)], является функцией производных от скорости, то нельзя получить разумного значения μ из начального нулевого приближения для W(I,J). Для преодоления этого затруднения применяется следующее. Первая итерация выполняется для ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью AMU. В результате получаются разумные значения скорости, которые могут быть использованы при вычислении вязкости μ по (11.1). Затем значения μ пересчитываются после каждой итерации, и таким образом приближаются к окончательному решению.

Эта процедура, однако, имеет один существенный недостаток. Постоянное значение вязкости AMU при заданном значении DPDZ на первой итерации даст соответствующие значения скоростей w. Значения μ, полученные по (11.1) и зависящие от скорости w, могут сильно отличаться от значения AMU. Скорости w на новой итерации при этих значениях μ с тем же DPDZ могут также измениться очень сильно. Это, в свою очередь, приведет к большим изменениям в значениях μ на следующей итерации и к соответствующим изменениям значений w и т.д. Может потребоваться очень много итераций для достижения сходимости.

Существует способ избавиться от этого недостатка. После первой итерации определяется μ, с использованием поля скорости, полученного для ньютоновской жидкости. Затем рассчитывается среднее значение μ. Оно может довольно сильно отличаться от постоянной вязкости AMU, которая использовалась на первой итерации. Для получения примерно тех же значений скорости w с новым полем μ градиент давления DPDZ подстраивается следующим образом:

```
DPDZ = DPDZ*GAMAV/AMU                    (11.3)
```

где GAMAV — среднее значение μ. Такая подстройка в принципе может проводиться после каждой итерации. Однако основное ее влия-

ние скажется только после первой итерации. Поэтому выполняется это действие только 1 раз.

Итак, на первой итерации течение считается ньютоновским, рассчитываются соответствующие значения вязкости μ, находится ее среднее значение, подстраивается градиент давления и продолжается выполнение итерации, пересчитывание μ, без изменения градиента давления.

Хотя основные колебания значений w от итерации к итерации подавляются этой процедурой, можно дополнительно управлять изменениями w с помощью релаксаций. Этот процесс был описан в § 5.7. Можно также применить релаксацию к вязкости μ [см. (5.65)]. Здесь мы проиллюстрируем применение релаксации для μ, используя коэффициент релаксации REGAM.

Для определения μ по (11.1) требуется вычисление производных от w. В некотором контрольном объеме производные по направлению θ вычисляются исходя из значений w на обеих перпендикулярных оси θ гранях. Скорости на гранях получаются с помощью интерполяции. Эти значения обозначаются через WP и WM. Так как используется равномерная сетка, то интерполирование вырождается в нахождение средних значений w в соседних точках с соответствующими изменениями в приграничных контрольных объемах. Аналогичная процедура используется при вычислении производных по радиусу. Если бы использовалась неравномерная сетка, то была бы нужна более сложная интерполяция. Этот случай будет показан для турбулентного течения в примере 13 (см. § 11.3).

Рассчитав производные, можно использовать (11.1) для получения μ. И наконец массив GAM(I,J) заполняется соответствующими значениями μ с учетом релаксации. За вычислением μ следует определение поправки DPDZ (см. выше). Эта поправка рассчитывается только для ITER = 1.

Остальная часть подпрограммы PHI должна быть уже знакома. Она содержит задание SC(I,J) для вычисления скорости, GAM(I,J) и SC(I,J) для расчета температуры и соответствующих граничных условий для определения этих переменных.

11.1.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

AMU — ньютоновская вязкость μ;
AMUR — характерная вязкость μ_{ref} [см. (11.2)];
ANU — среднее число Нуссельта;
AR — площадь контрольного объема, dA;
ASUM — площадь поперечного сечения;
COND — теплопроводность k;

CP — теплоемкость c_p;
DEN — плотность ρ;
DH — гидравлический диаметр D_h;
DPDZ — продольный градиент давления dp/dz;
DTDZ — продольный градиент температуры $\partial T/\partial z$;
DWDX — $(1/r)(\partial w/\partial \theta)$;
DWDY — $\partial w/\partial r$;
FRE — произведение $f\mathrm{Re}$;
GAMAV — среднее значение неньютоновской вязкости μ;
GAMT — промежуточное значение неньютоновской вязкости μ;
HP — обогреваемый участок периметра;
PI — число π;
POWER — параметр n в показателе степени [см. (11.1)];
QW — плотность теплового потока на стенке q_w;
RE — число Рейнольдса;
REGAM — коэффициент релаксации для неньютоновской вязкости μ;
REL — временная переменная 1−REGAM;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc_p;
RK — константа K [см. (11.1)];
T(I,J) — температура T;
TB — среднемассовая температура T_b;
TSUM — $\int wT\,dA$;
TWAV — средняя температура греющей стенки T_w;
W(I,J) — продольная скорость w;
WBAR — средняя скорость в сечении $\overline{w}$;
WM — скорость на грани;
WP — смоченный периметр или скорость на грани;
WSUM — $\int w\,dA$.

11.1.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------
C---EXAMPLE 11 - NON-NEWTONIAN FLOW IN A SEMICIRCULAR DUCT
C-------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      HEADER='NON-NEWTONIAN FLOW IN A SEMICIRCULAR DUCT'
      PRINTF='PRINT11'
      PLOTF='PLOT11'
      CALL DATA2(R(1),0.,PI,3.14159)
      CALL DATA2(XL,0.5*PI,YL,1.)
      CALL INTA3(MODE,3,NCVLX,10,NCVLY,16)
      CALL EZGRID
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
      DO 240 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,250)
250     FORMAT(1X,'ITER',2X,'W(3,4)',5X,'F.RE',5X,
     1             'T(5,4)',6X,'NU')
        WRITE(IUNIT,260) ITER,W(3,4),FRE,T(5,4),ANU
260     FORMAT(2X,I2,1P4E10.2)
240   CONTINUE
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        DO 270 J=1,M1
        DO 270 I=1,L1
          W(I,J)=W(I,J)/WBAR
          T(I,J)=(T(I,J)-TWAV)/(TB-TWAV)
270     CONTINUE
        CALL PRINT
        CALL PLOT
      ENDIF
      RETURN
C *-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      ENTRY PHI
      IF(NF.EQ.1) THEN
        REL=1.-REGAM
        DO 300 J=2,M2
        DO 300 I=2,L2
          IF(ITER.EQ.0) THEN
            GAM(I,J)=AMU
          ELSE
            WP=0.5*(W(I+1,J)+W(I,J))
            WM=0.5*(W(I,J)+W(I-1,J))
            IF(I.EQ.2) WM=W(I-1,J)
            IF(I.EQ.L2) WP=0.
            DWDX=(WP-WM)/(XCV(I)*SX(J))
            WP=0.5*(W(I,J+1)+W(I,J))
            WM=0.5*(W(I,J)+W(I,J-1))
            IF(J.EQ.2) WM=0.
            IF(J.EQ.M2) WP=0.
            DWDY=(WP-WM)/YCV(J)
            GAMT=RK*(DWDX**2+DWDY**2)**((POWER-1.)*0.5)
            IF(ITER.EQ.1) GAM(I,J)=GAMT
            GAM(I,J)=REGAM*GAMT+REL*GAM(I,J)
          ENDIF
300     CONTINUE
COME HERE TO ADJUST THE PRESSURE GRADIENT
        IF(ITER.EQ.1) THEN
          GAMAV=0.
          DO 310 J=2,M2
          DO 310 I=2,L2
            GAMAV=GAMAV+GAM(I,J)*XCV(I)*YCVR(J)
310       CONTINUE
          GAMAV=GAMAV/ASUM
          DPDZ=DPDZ*GAMAV/AMU
        ENDIF
        DO 320 J=2,M2
        DO 320 I=2,L2
          SC(I,J)=-DPDZ
```

```
320    CONTINUE
     ENDIF
     IF(NF.EQ.2) THEN
       DO 330 J=2,M2
       DO 330 I=2,L2
         GAM(I,J)=COND
         SC(I,J)=-RHOCP*W(I,J)*DTDZ
330    CONTINUE
     ENDIF
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
       DO 340 J=2,M2
         KBCI1(J)=2
340    CONTINUE
       DO 350 I=2,L2
         KBCJ1(I)=2
350    CONTINUE
     IF(NF.EQ.2) THEN
       DO 360 J=2,M2
         KBCL1(J)=2
360    CONTINUE
       DO 370 I=2,L2
         KBCM1(I)=2
         FLXCM1(I)=QW
370    CONTINUE
     ENDIF
     RETURN
     END
C CCCC
```

```
18   9.53E-02  2.46E+01 -5.97E-01  3.33E+00
I=      1         2         3         4         5         6         7
TH= 0.00E+00 7.85E-02 2.36E-01 3.93E-01 5.50E-01 7.07E-01 8.64E-01
I=      8         9         10        11        12
TH= 1.02E+00 1.18E+00 1.34E+00 1.49E+00 1.57E+00

J=      1         2         3         4         5         6         7
Y= 0.00E+00 3.13E-02 9.38E-02 1.56E-01 2.19E-01 2.81E-01 3.44E-01
J=      8         9         10        11        12     13        14
Y= 4.06E-01 4.69E-01 5.31E-01 5.94E-01 6.56E-01 7.19E-01 7.81E-01
J=      15        16        17        18
Y= 8.44E-01 9.06E-01 9.69E-01 1.00E+00

****** W/WBAR ******
```

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
18	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
17	2.82E-01	2.82E-01	2.80E-01	2.75E-01	2.66E-01	2.54E-01	2.35E-01
16	7.72E-01	7.72E-01	7.65E-01	7.50E-01	7.26E-01	6.90E-01	6.38E-01
15	1.15E+00	1.15E+00	1.14E+00	1.11E+00	1.08E+00	1.02E+00	9.42E-01
14	1.42E+00	1.42E+00	1.40E+00	1.37E+00	1.33E+00	1.26E+00	1.16E+00
13	1.60E+00	1.59E+00	1.58E+00	1.55E+00	1.50E+00	1.42E+00	1.32E+00
12	1.70E+00	1.70E+00	1.69E+00	1.66E+00	1.61E+00	1.53E+00	1.42E+00
11	1.75E+00	1.75E+00	1.74E+00	1.71E+00	1.67E+00	1.59E+00	1.49E+00
10	1.77E+00	1.77E+00	1.76E+00	1.74E+00	1.70E+00	1.63E+00	1.53E+00
9	1.77E+00	1.77E+00	1.77E+00	1.75E+00	1.71E+00	1.64E+00	1.54E+00
8	1.77E+00	1.77E+00	1.76E+00	1.74E+00	1.70E+00	1.63E+00	1.52E+00
7	1.74E+00	1.74E+00	1.73E+00	1.70E+00	1.65E+00	1.58E+00	1.46E+00
6	1.68E+00	1.67E+00	1.66E+00	1.62E+00	1.57E+00	1.48E+00	1.35E+00
5	1.54E+00	1.53E+00	1.52E+00	1.47E+00	1.41E+00	1.32E+00	1.19E+00
4	1.29E+00	1.29E+00	1.27E+00	1.23E+00	1.17E+00	1.08E+00	9.57E-01
3	9.14E-01	9.12E-01	8.94E-01	8.59E-01	8.06E-01	7.34E-01	6.43E-01
2	3.59E-01	3.58E-01	3.50E-01	3.34E-01	3.10E-01	2.78E-01	2.40E-01
1	0.00E+00	2.83E-01	2.76E-01	2.63E-01	2.44E-01	2.18E-01	1.87E-01

I=	8	9	10	11	12
J					
18	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
17	2.09E-01	1.72E-01	1.20E-01	4.77E-02	0.00E+00
16	5.64E-01	4.61E-01	3.18E-01	1.26E-01	0.00E+00
15	8.31E-01	6.79E-01	4.73E-01	1.92E-01	0.00E+00
14	1.03E+00	8.44E-01	5.95E-01	2.45E-01	0.00E+00
13	1.17E+00	9.68E-01	6.91E-01	2.84E-01	0.00E+00
12	1.27E+00	1.06E+00	7.61E-01	3.10E-01	0.00E+00
11	1.34E+00	1.12E+00	8.04E-01	3.23E-01	0.00E+00
10	1.37E+00	1.15E+00	8.21E-01	3.24E-01	0.00E+00
9	1.38E+00	1.15E+00	8.12E-01	3.15E-01	0.00E+00
8	1.36E+00	1.12E+00	7.77E-01	2.95E-01	0.00E+00
7	1.29E+00	1.05E+00	7.17E-01	2.67E-01	0.00E+00
6	1.18E+00	9.46E-01	6.33E-01	2.31E-01	0.00E+00
5	1.02E+00	8.03E-01	5.27E-01	1.89E-01	0.00E+00
4	8.07E-01	6.22E-01	3.99E-01	1.40E-01	0.00E+00
3	5.32E-01	4.02E-01	2.53E-01	8.71E-02	0.00E+00
2	1.95E-01	1.44E-01	8.89E-02	3.01E-02	0.00E+00
1	1.51E-01	1.11E-01	6.80E-02	2.29E-02	0.00E+00

```
****** (T-TWAV)/(TB-TWAV) ******
```

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
18	-5.02E-02	2.23E-01	2.06E-01	1.73E-01	1.25E-01	6.24E-02	-1.07E-02
17	3.11E-01	3.09E-01	2.93E-01	2.59E-01	2.11E-01	1.49E-01	7.55E-02
16	4.90E-01	4.88E-01	4.71E-01	4.38E-01	3.89E-01	3.27E-01	2.53E-01
15	6.68E-01	6.66E-01	6.49E-01	6.16E-01	5.67E-01	5.05E-01	4.31E-01
14	8.38E-01	8.35E-01	8.19E-01	7.86E-01	7.38E-01	6.76E-01	6.03E-01
13	9.94E-01	9.92E-01	9.76E-01	9.44E-01	8.98E-01	8.37E-01	7.66E-01
12	1.14E+00	1.13E+00	1.12E+00	1.09E+00	1.04E+00	9.85E-01	9.16E-01
11	1.26E+00	1.26E+00	1.24E+00	1.21E+00	1.17E+00	1.12E+00	1.05E+00
10	1.36E+00	1.36E+00	1.35E+00	1.32E+00	1.28E+00	1.23E+00	1.17E+00
9	1.45E+00	1.45E+00	1.43E+00	1.41E+00	1.37E+00	1.33E+00	1.28E+00
8	1.51E+00	1.51E+00	1.50E+00	1.48E+00	1.45E+00	1.41E+00	1.37E+00
7	1.56E+00	1.56E+00	1.55E+00	1.53E+00	1.51E+00	1.47E+00	1.44E+00
6	1.59E+00	1.59E+00	1.58E+00	1.57E+00	1.55E+00	1.52E+00	1.49E+00
5	1.60E+00	1.60E+00	1.59E+00	1.58E+00	1.57E+00	1.55E+00	1.53E+00
4	1.60E+00	1.60E+00	1.59E+00	1.59E+00	1.58E+00	1.57E+00	1.55E+00
3	1.59E+00	1.59E+00	1.58E+00	1.58E+00	1.58E+00	1.57E+00	1.57E+00
2	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00
1	-5.02E-02	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00

I=	8	9	10	11	12
J					
18	-9.02E-02	-1.69E-01	-2.38E-01	-2.81E-01	-5.02E-02
17	-4.15E-03	-8.34E-02	-1.52E-01	-1.96E-01	-2.01E-01
16	1.73E-01	9.28E-02	2.27E-02	-2.26E-02	-2.83E-02
15	3.50E-01	2.69E-01	1.98E-01	1.51E-01	1.45E-01
14	5.23E-01	4.42E-01	3.71E-01	3.23E-01	3.17E-01
13	6.88E-01	6.09E-01	5.38E-01	4.91E-01	4.85E-01
12	8.41E-01	7.66E-01	6.98E-01	6.53E-01	6.47E-01
11	9.82E-01	9.11E-01	8.49E-01	8.07E-01	8.01E-01
10	1.11E+00	1.04E+00	9.88E-01	9.50E-01	9.45E-01
9	1.22E+00	1.16E+00	1.11E+00	1.08E+00	1.08E+00
8	1.32E+00	1.27E+00	1.23E+00	1.20E+00	1.20E+00
7	1.40E+00	1.36E+00	1.32E+00	1.30E+00	1.30E+00
6	1.46E+00	1.43E+00	1.41E+00	1.39E+00	1.39E+00
5	1.51E+00	1.49E+00	1.47E+00	1.46E+00	1.46E+00
4	1.54E+00	1.53E+00	1.52E+00	1.52E+00	1.52E+00
3	1.56E+00	1.56E+00	1.55E+00	1.55E+00	1.55E+00
2	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00
1	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	1.57E+00	-5.02E-02

11.1.6. Обсуждение результатов

Из полученных результатов видно, что использованная итерационная процедура приводит к довольно хорошей сходимости. Не заметно никаких сильных колебаний значений w. Как и ожидалось, решение уравнения для температуры сошлось за одну итерацию. Использование коэффициента релаксации REGAM в данном случае не помогло; на самом деле, если бы мы использовали REGAM = 1, решение сошлось бы немного быстрее. Однако мы ввели REGAM для демонстрации самой идеи использования релаксации, которая очень полезна в более сложных задачах (см. пример 13).

Для оценки полученных полей безразмерных скорости и температуры мы должны сравнить их с решением для соответствующего

ньютоновского течения. При параметре n в степенном законе, равном 0,5, вязкость мала около стенок и велика в середине канала. Поэтому по сравнению с ньютоновским течением ожидается, что полученное решение будет иметь большие градиенты у стенок канала и практически неизменяемые значения полученных величин в его середине. В выведенном на печать поле $w/\overline{w}$ видна большая область, где значения $w/\overline{w}$ лежат в диапазоне 1,70—1,77. Для более детального изучения неньютоновского течения можно сравнить найденное решение с решением для ньютоновского течения, которое можно получить, просто вызвав PRINT после первой итерации.

В распечатанном поле температуры некоторые значения отрицательны. Подобная особенность была объяснена в § 10.1 (см. пример 7). Это происходит из-за использования в определении безразмерной температуры средней температуры стенки TWAV.

11.1.7. Заключительные замечания

В этом примере мы нашли решение нелинейного уравнения для продольной скорости. Так как нашей целью было получение окончательного решения в безразмерном виде, то мы могли свободно подстраивать градиент давления. Если бы был задан размерный градиент давления и конкретное значение константы K [см. (11.1)] для реальной степенной жидкости, то было бы сложно начать процесс решения, так как никаких предположений о значении продольной скорости сделать нельзя. В этом случае лучше получить решение в безразмерном виде, как мы и сделали, а затем перевести его в размерный вид так, чтобы получить заданный градиент давления.

Интересно отметить, что моделирование неньютоновского течения во многом похоже на моделирование турбулентного течения, которое будет обсуждаться в § 11.3. Перед этим рассмотрено течение жидкости с вязкостью, зависящей от температуры.

11.2. ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ (ПРИМЕР 12)

11.2.1. Постановка задачи

У многих жидкостей вязкость зависит от температуры. Если изменения вязкости существенны, то они могут оказать заметное влияние на распределение скорости в канале. Для исследования влияния вязкости, зависящей от температуры, рассмотрим задачу о течении в кольцевом секторе (см. пример 9). Используем ту же сетку и зададим

зависимость вязкости от температуры. Это позволит легко сравнить результаты этого примера с результатами, полученными при постоянной вязкости в примере 9.

Конечно, мы должны выбрать задачу, которая приводит к полностью развитому течению. Если взять любые граничные условия, использованные в примерах гл. 10, то поле скорости с зависящей от температуры вязкостью никогда не станет полностью развитым из-за того, что при этих граничных условиях происходит постоянный рост или понижение температуры вдоль оси z. Поэтому при таких граничных условиях для температуры невозможно получить полностью развитое поле скорости (т.е. распределение скорости, которое не меняется вдоль оси z).

Необходимо, чтобы температура менялась в поперечном сечении, но оставалась постоянной вдоль оси z. Этому условию удовлетворяют «неинтересные» случаи полностью развитого теплообмена, которые были упомянуты в § 9.5. Хотя такие температурные поля неинтересны в отношении конвективного теплообмена, они подходят для изучения влияния зависящей от температуры вязкости.

С учетом вышесказанного выбраны геометрические характеристики канала, использованные в примере 9 и представленные на рис. 11.2. Граничные условия для температуры включают в себя постоянную температуру T_1 на внутренней трубе и боковых стенках и

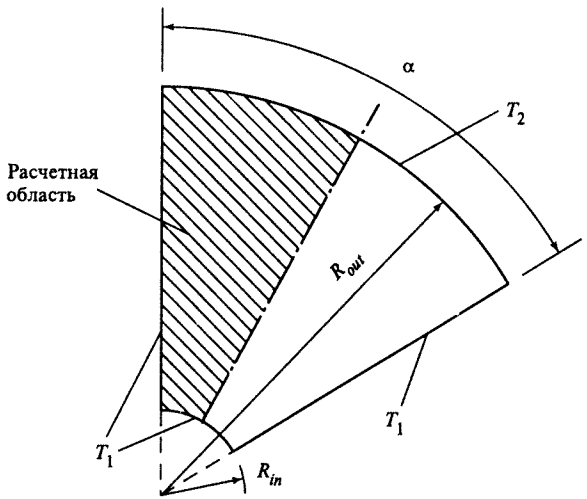


Рис. 11.2. Течение в канале жидкости с вязкостью, зависящей от температуры

постоянную температуру T_2 на внешней границе. Вязкость жидкости μ является линейной функцией от температуры:

$$\mu = a + bT. \tag{11.4}$$

Будем использовать следующие значения величин:

$$T_1 = 100;\ T_2 = 0; \tag{11.5}$$

$$a = 1{,}0;\ b = 0{,}04. \tag{11.6}$$

11.2.2. Построение подпрограммы ADAPT

Подпрограмма ADAPT для этой задачи очень похожа на вариант из примера 9. Поэтому рассмотрим только отличия.

BEGIN. Сначала задаются константы [см. (11.5) и (11.6)], затем заполняется массив `T(I,J)` таким образом, чтобы задать соответствующие граничные условия в граничных точках.

В этой задаче температура не меняется вдоль оси z (т.е. $\partial T/\partial z$). Поэтому уравнение теплопроводности не имеет источникового члена. Это делает уравнение для температуры независимым от поля скорости (на распределение температуры не оказывает влияния, существование течения в канале). В то же время поле скорости теперь зависит от поля температуры, так как температура влияет на вязкость.

Из-за такой инверсии зависимостей сначала решается уравнение для температуры и только после получения сошедшегося решения начинает решаться уравнение для скорости. Уравнения и для температуры, и для скорости все еще линейны, поэтому выполняются обычные три итерации для решения каждого уравнения.

OUTPUT. Здесь не вычисляются такие величины, как T_b, число Нуссельта и др. При определении числа Рейнольдса вязкость берется как константа a из (11.4). Другими словами, в качестве характерной вязкости для расчета числа Рейнольдса используется вязкость при $T = 0$.

PHI. Новым является только вычисление `GAM(I,J)` для скорости w согласно (11.4).

11.2.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

`ALPHA` — угол между соседними ребрами;
`AMU` — константа a в выражении (11.4);
`AR` — площадь контрольного объема dA;
`ASUM` — площадь поперечного сечения;
`BMU` — константа b в выражении (11.4);

COND — теплопроводность k;
CP — теплоемкость c_p;
DEN — плотность ρ;
DH — гидравлический диаметр D_h;
DPDZ — продольный градиент давления dp/dz;
FRE — произведение $f\mathrm{Re}$;
PI — число π;
RE — число Рейнольдса;
QW — плотность теплового потока на стенке q_w;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc_p;
RIN — радиус внутренней трубы R_{in};
ROUT — радиус внешней трубы R_{out};
T(I,J) — температура T;
T1, T2 — температуры стенок T_1 и T_2;
W(I,J) — продольная скорость w;
WBAR — средняя скорость в сечении $\overline{w}$;
WP — смоченный периметр;
WSUM — $\int w\,dA$.

11.2.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------
C---EXAMPLE 12 - DUCT FLOW WITH TEMPERATURE-DEPENDENT
VISCOSITY
C-------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      TITLE(2)=' (T-T2)/(T1-T2)'
      CALL INTA6(KSOLVE(2),1,KPRINT(1),1,KPRINT(2),1,
     1           KPLOT(1),1,KPLOT(2),1,LAST,6)
      CALL DATA8(AMU,1.,BMU,0.04,COND,1.,CP,1.,DEN,1.,
     1           DPDZ,-  1.,T1,100.,-1 T2,0.)
      RHOCP=DEN*CP
      DO 100 J=1,M1
      DO 100 I=1,L1
        W(I,J)=0.
        T(I,J)=T1
        T(I,M1)=T2
  100 CONTINUE
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
      DO 300 J=2,M2
      DO 300 I=2,L2
        GAM(I,J)=AMU+BMU*T(I,J)
        SC(I,J)=-DPDZ
300   CONTINUE
    ENDIF
    IF(NF.EQ.2) THEN
      DO 310 J=2,M2
      DO 310 I=2,L2
        GAM(I,J)=COND
310   CONTINUE
    ENDIF
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
    DO 320 J=2,M2
      KBCL1(J)=2
320 CONTINUE
    RETURN
    END
C CCCC
```

```
I=      1         2         3         4         5         6         7
J
2  0.00E+00 4.91E-02 1.31E-01 1.92E-01 2.32E-01 2.53E-01 2.55E-01
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00

****** (T-T2)/(T1-T2) ******

I=      1         2         3         4         5         6         7
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 1.00E+00 4.24E-01 1.75E-01 1.11E-01 8.77E-02 7.91E-02 7.80E-02
10 1.00E+00 7.45E-01 4.57E-01 3.27E-01 2.67E-01 2.43E-01 2.40E-01
9  1.00E+00 8.61E-01 6.41E-01 5.08E-01 4.36E-01 4.04E-01 4.00E-01
8  1.00E+00 9.14E-01 7.60E-01 6.50E-01 5.83E-01 5.51E-01 5.47E-01
7  1.00E+00 9.44E-01 8.40E-01 7.59E-01 7.05E-01 6.78E-01 6.75E-01
6  1.00E+00 9.64E-01 8.96E-01 8.40E-01 8.02E-01 7.82E-01 7.79E-01
5  1.00E+00 9.78E-01 9.36E-01 9.00E-01 8.75E-01 8.62E-01 8.60E-01
4  1.00E+00 9.87E-01 9.63E-01 9.43E-01 9.28E-01 9.20E-01 9.20E-01
3  1.00E+00 9.94E-01 9.82E-01 9.72E-01 9.65E-01 9.61E-01 9.60E-01
2  1.00E+00 9.98E-01 9.94E-01 9.91E-01 9.89E-01 9.88E-01 9.88E-01
1  1.00E+00 1.00E+00 1.00E+00 1.00E+00 1.00E+00 1.00E+00 1.00E+00
```

11.2.6. Обсуждение результатов

Решения линейных уравнений для T и w сходятся за одну итерацию каждое. Вычисленное значение $f\mathrm{Re} = 185$, что намного больше значения $f\mathrm{Re} = 58$ (см. пример 9). Основная причина такого отличия заключается в том, что при определении числа Рейнольдса мы использовали значение вязкости, равное единице, хотя она меняется в расчетной области от 1 до 5. Если же при вычислении числа Рейнольдса использовать $\mu = 3$, то $f\mathrm{Re}$ будет равно 61,7, что гораздо ближе к результату, найденному в примере 9.

Основное влияние переменной вязкости проявляется в распределении безразмерной скорости $w/\overline{w}$. Скорости намного выше у внешней стенки, где вязкость меньше. Положение максимума скорости сместилось в сторону внешней стенки. Скорости вблизи внутренней стенки, напротив, уменьшились.

11.2.7. Заключительные замечания

Этот пример имеет много особенностей. Здесь мы впервые столкнулись с ситуацией, когда поле скорости зависит от распределения температуры, а поле температуры не зависит от скоростей. В итоге в уравнении для температуры отсутствует источниковый член. По результатам этого примера можно изучить влияние переменной вязкости на поле скорости. Переменная вязкость другого рода возникает при турбулентном течении, которое мы рассмотрим в следующем примере.

11.3. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ (ПРИМЕР 13)

Расчет турбулентных течений является сложной задачей. Этот параграф не преследует цели дать полное представление о турбулентности. Будут приведены только основные детали, необходимые для понимания особенностей применения CONDUCT для решения задач о турбулентном течении в канале. Для более полного ознакомления с турбулентным течением следует обратиться к другим источникам.

11.3.1. Постановка задачи

Турбулентное течение обычно моделируется теми же уравнениями, что и ламинарное, только к молекулярной вязкости добавляется так называемая турбулентная вязкость μ_t. Турбулентная вязкость в основном зависит от градиентов скорости (вот почему турбулентное течение в некотором отношении подобно неньютоновскому течению).

Для полностью развитого турбулентного течения в канале произведение $f\mathrm{Re}$ не постоянно, а зависит от значения числа Рейнольдса.

На рис. 11.3 показан канал квадратного сечения. Предполагается, что течение в этом канале турбулентное. Рассчитаем для этого случая полностью развитые поля скорости и температуры. Граничные условия для температуры задаются в виде теплового потока на двух вертикальных стенках и адиабатных условий на горизонтальных стенках. Из-за симметрии расчетная область представляет собой одну четверть сечения, как показано на рис. 11.3. Задача заключается в получении безразмерного решения при следующих значениях чисел Re и Pr:

$$\mathrm{Re} = 10^5;\ \mathrm{Pr} = 0{,}7. \tag{11.7}$$

В этом примере используется модель, основанная на длине пути смешения [8]. Уравнение для турбулентной вязкости в соответствии с выбранной моделью выглядит следующим образом:

$$\mu_t = \rho L^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{11.8}$$

где ρ — плотность; L — так называемая длина пути смешения, которая вычисляется по формуле

$$L = \left[L_x^{-m} + L_y^{-m}\right]^{-1/m}, \tag{11.9}$$

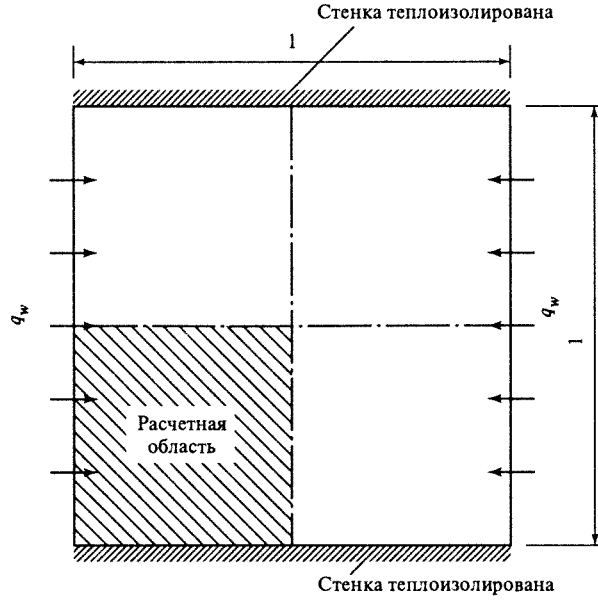


Рис. 11.3. Турбулентное течение в канале квадратного сечения

здесь m — постоянная величина. Для расчета течений в каналах удовлетворительным является значение $m = 20$.

Длины L_x и L_y находятся как произведение двух функций:

$$L_x = D(x^+)\Lambda(S, X); \tag{11.10}$$

$$L_y = D(y^+)\Lambda(H, Y), \tag{11.10a}$$

где $2S$ соответствует ширине канала по оси x, а $2H$ — по оси y. Функции D и Λ определяются выражениями:

$$D(p) = 1 - \exp(-p/26); \tag{11.11}$$

$$\Lambda(p, q) = p\,[0{,}14 - 0{,}08\,(1 - q/p)^2 - 0{,}06\,(1 - q/p)^4]. \tag{11.12}$$

Величины x^+ и y^+ — безразмерные расстояния, вычисляемые по формулам:

$$x^+ = x(\rho\tau_w)^{1/2}/\mu; \tag{11.13}$$

$$y^+ = y(\rho\tau_w)^{1/2}/\mu. \tag{11.14}$$

Здесь μ — молекулярная вязкость; τ_w — касательное напряжение на стенке. При расчете x^+ касательное напряжение τ_w берется в точках $(0, y)$, а при определении y^+ значение τ_w соответствует точкам $(x, 0)$.

Наряду с турбулентной вязкостью μ_t необходимо знать и турбулентную теплопроводность, которая задается по формуле

$$k_t = c_p \mu_t / \mathrm{Pr}_t, \qquad (11.15)$$

где Pr_t — турбулентное число Прандтля, которое имеет постоянное значение, равное 0,9.

Турбулентная вязкость μ_t равна нулю на стенке канала, но становится очень большой (по сравнению с молекулярной вязкостью μ) в его центральной части. В результате профиль скорости имеет очень большие градиенты около стенок канала. Для корректного учета этих резких изменений потребуются сетки, имеющие не менее 50 узлов в области больших градиентов. Печать результатов для таких сеток чрезмерно громоздкая, учитывая объем этой книги. Поэтому будет использоваться более грубая сетка. Полученные результаты будут не очень точны, но вы сможете самостоятельно рассчитать вариант, в котором задано большее число расчетных точек.

11.3.2. Построение подпрограммы ADAPT

В этой задаче кроме массивов `W(I,J)` и `T(I,J)` необходимо определить некоторое число дополнительных двумерных массивов. Массив `AMUT(I,J)` вводится для хранения значений μ_t, массивы `XPLUS(I,J)` и `YPLUS(I,J)` — для хранения x^+ и y^+ соответственно. Эти массивы заданы эквивалентными `F(I,J,NF)` для `NF` = 3, 4 и 5. Поэтому легко распечатать эти массивы с помощью вызова подпрограммы `PRINT`. Отметим, что новые массивы занимают память, уже зарезервированную для F, и не требуют дополнительной памяти.

Для вычисления функций D и Λ [см. (11.11) и (11.12)] в программе используются оператор-функции `DFACT(ARG)` и `CAPL(A1,A2)`. Они необходимы для расчета длины пути смешения.

GRID. Из-за резкого изменения скорости около стенок желательно использовать для этой области очень мелкую сетку. Это реализуется заданием переменных `POWERX` и `POWERY`, равных 3, и вызовом процедуры `EZGRID`. Обычно не рекомендуется выбирать значение показателя степени больше 2. Однако в случае турбулентного течения необходимость в использовании мелкой сетки у стенок настолько велика, что желательно взять большее значение.

Подпрограмма BEGIN. Перед выводом на печать значений турбулентной вязкости μ_t задаются соответствующие значения переменных `TITLE(3)` и `KPRINT(3)`.

Так как турбулентная вязкость зависит от скорости w, уравнение для скорости нелинейно. Получив сошедшееся решение для w, можно приступить к рассмотрению линейного уравнения для температуры.

Поэтому сначала выполняются 15 итераций для решения уравнения для скорости, а затем 3 итерации — для температуры. Таким образом, значение LAST = 18.

Для турбулентной вязкости используется коэффициент релаксации REGAM.

OUTPUT. Практически все детали этой процедуры вам должны быть уже знакомы. Для турбулентного течения вместо величины $f\mathrm{Re}$ рассчитывается коэффициент трения f, который в программе обозначен через FRIC.

Решение находится для заданного значения числа Рейнольдса, равного 10^5. Так как средняя скорость $\overline{w}$ меняется на каждой итерации, постоянно пересчитывается молекулярная вязкость AMU, чтобы получить заданное число Рейнольдса (с физической точки зрения это равносильно подбору такой жидкости, которая при заданном градиенте давления даст желаемое число Рейнольдса). Измененное значение AMU выводится на печать после каждой итерации. Ожидается, что при приближении к сошедшемуся решению AMU станет постоянным.

PHI. Эта подпрограмма в общих чертах похожа на PHI в примере 11. Для получения турбулентной вязкости по (11.8) нужны градиенты скорости. Для этого первая итерация выполняется для ламинарного течения с GAM(I,J) равным молекулярной вязкости AMU. Впоследствии GAM(I,J) становится равным $\mu + \mu_t$, где μ_t задается по (11.8). Величины FLUXI1(J,1) и FLUXJ1(I,1) берутся в качестве касательных напряжений на стенке канала.

Для вычисления производных от скорости в (11.8) значения w на гранях контрольных объемов находятся с помощью интерполяции. По каждому направлению эти значения обозначаются как WP и WM. Так как применяется неравномерная сетка, то грань контрольного объема лежит не *посередине* между соседними расчетными точками. Используется линейная интерполяция, основанная на конкретных размерах каждого контрольного объема и соответствующим образом модифицированная для приграничных контрольных объемов. Более точной процедурой для получения значений w на гранях контрольного объема является использование выражений вида (2.81), однако в данном случае нет необходимости в подобных усложнениях.

Чтобы регулировать изменения μ_t от итерации к итерации, вводится релаксация согласно (5.65) с коэффициентом релаксации REGAM.

После первой итерации рассчитывается среднее значение GAM(I,J) и градиент давления пересчитывается таким же образом, как и в процедуре, описанной в примере 11.

В уравнении для температуры GAM(I,J) берется равным $k + k_t$, где турбулентная теплопроводность задается по (11.15).

11.3.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

A1, A2 — аргументы функции CAPL;
AMU — вязкость μ;
AMUT(I, J) — *турбулентная* вязкость μ_t;
ANU — среднее число Нуссельта;
AR — площадь контрольного объема dA;
ARG — аргумент функции DFACT;
ASUM — площадь поперечного сечения;
CAPL(A1, A2) — длина пути смешения по Никурадзе Λ [см. (11.12)];
COND — теплопроводность k;
CP — теплоемкость c_p;
DEN — плотность ρ;
DFACT(ARG) — функция Ван Дриста D [см. (11.11)];
DH — гидравлический диаметр D_h;
DPDZ — продольный градиент давления dp/dz;
DTDZ — то же температуры $\partial T/\partial z$;
DWDX — $\partial w/\partial x$;
DWDY — $\partial w/\partial y$;
FM, FP — интерполяционные коэффициенты;
FRIC — коэффициент трения f;
GAMAV — среднее значение *эффективной* вязкости $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$;
GAMAVP — значение GAMAV на предыдущей итерации;
GAMT — промежуточное значение *турбулентной* вязкости μ_t;
HP — обогреваемый участок периметра;
PR — число Прандтля;
PRT — турбулентное число Прандтля;
QW — плотность теплового потока на стенке q_w;
RE — число Рейнольдса;
REGAM — коэффициент релаксации для *турбулентной* вязкости;
REL — временная переменная 1−REGAM;
RHOCP — объемная теплоемкость ρc_p;
RL — итоговая длина пути смешения L;
RLX, RLY — длины пути смешения L_x и L_y;
T(I, J) — температура T;
TAUW — касательное напряжение на стенке τ_w;
TB — среднемассовая температура T_b;
TSUM — $\int wT\, dA$;
TWAV — средняя температура греющей стенки T_w;
W(I, J) — продольная скорость w;

WBAR — средняя скорость в сечении $\overline{w}$;
WM — скорость на грани;
WP — смоченный периметр или скорость на грани;
WSUM — $\int w \, dA$;
XPLUS(I,J) — безразмерное расстояние x^+ [см. (11.13)];
YPLUS(I,J) — то же y^+ [см. (11.14)].

11.3.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------------
C---EXAMPLE 13 - TURBULENT FLOW IN A SQUARE DUCT
C-------------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
          GAM(I,J)=AMU
        ELSE
          TAUW=ABS(FLUXI1(J,1))
          XPLUS(I,J)=X(I)*SQRT(TAUW*DEN)/AMU
          TAUW=ABS(FLUXJ1(I,1))
          YPLUS(I,J)=Y(J)*SQRT(TAUW*DEN)/AMU
          RLX=DFACT(XPLUS(I,J))*CAPL(XL,X(I))
          RLY=DFACT(YPLUS(I,J))*CAPL(YL,Y(J))
          RL=(RLX**(-20)+RLY**(-20))**(-0.05)
          FP=1.
          IF(I.NE.L2) FP=XCV(I)/(XCV(I)+XCV(I+1))
          WP=FP*W(I+1,J)+(1.-FP)*W(I,J)
          FM=1.
          IF(I.NE.2) FM=XCV(I)/(XCV(I)+XCV(I-1))
          WM=FM*W(I-1,J)+(1.-FM)*W(I,J)
          DWDX=(WP-WM)/XCV(I)
          FP=1.
          IF(J.NE.M2) FP=YCV(J)/(YCV(J)+YCV(J+1))
          WP=FP*W(I,J+1)+(1.-FP)*W(I,J)
          FM=1.
          IF(J.NE.2) FM=YCV(J)/(YCV(J)+YCV(J-1))
          WM=FM*W(I,J-1)+(1.-FM)*W(I,J)
          DWDY=(WP-WM)/YCV(J)
          GAMT=DEN*RL**2*SQRT(DWDX**2+DWDY**2)
          IF(ITER.EQ.1) AMUT(I,J)=GAMT
          AMUT(I,J)=REGAM*GAMT+REL*AMUT(I,J)
          GAM(I,J)=AMU+AMUT(I,J)
        ENDIF
300   CONTINUE
COME HERE TO ADJUST THE PRESSURE GRADIENT
      IF(ITER.EQ.1) THEN
        GAMAV=0.
        DO 305 J=2,M2
        DO 305 I=2,L2
          GAMAV=GAMAV+GAM(I,J)*XCV(I)*YCV(J)
305     CONTINUE
        GAMAV=GAMAV/ASUM
        DPDZ=DPDZ*GAMAV/GAMAVP
        GAMAVP=GAMAV
      ENDIF
      DO 307 J=2,M2
      DO 307 I=2,L2
        SC(I,J)=-DPDZ
307   CONTINUE
    ENDIF
C
    IF(NF.EQ.2) THEN
      DO 310 J=2,M2
      DO 310 I=2,L2
        GAM(I,J)=COND+CP*AMUT(I,J)/PRT
        SC(I,J)=-RHOCP*W(I,J)*DTDZ
310   CONTINUE
    ENDIF
COME HERE TO SPECIFY BOUNDARY CONDITIONS
    DO 320 I=2,L2
      KBCM1(I)=2
```

```
320 CONTINUE
    DO 330 J=2,M2
      KBCL1(J)=2
330 CONTINUE
C
    IF(NF.EQ.2) THEN
      DO 340 I=2,L2
        KBCJ1(I)=2
340   CONTINUE
      DO 350 J=2,M2
        KBCI1(J)=2
        FLXCI1(J)=QW
350   CONTINUE
    ENDIF
    RETURN
    END
C CCCC
```

****** W/WBAR ******

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
12	0.00E+00	7.66E-02	3.97E-01	6.97E-01	8.14E-01	9.14E-01	9.96E-01
11	0.00E+00	7.60E-02	3.95E-01	6.95E-01	8.11E-01	9.11E-01	9.92E-01
10	0.00E+00	7.18E-02	3.82E-01	6.76E-01	7.89E-01	8.86E-01	9.64E-01
9	0.00E+00	6.56E-02	3.62E-01	6.46E-01	7.55E-01	8.46E-01	9.20E-01
8	0.00E+00	5.81E-02	3.36E-01	6.08E-01	7.11E-01	7.96E-01	8.63E-01
7	0.00E+00	4.99E-02	3.06E-01	5.62E-01	6.58E-01	7.34E-01	7.99E-01
6	0.00E+00	4.11E-02	2.70E-01	5.05E-01	5.93E-01	6.65E-01	7.34E-01
5	0.00E+00	3.17E-02	2.26E-01	4.32E-01	5.15E-01	5.93E-01	6.58E-01
4	0.00E+00	2.15E-02	1.67E-01	3.33E-01	4.32E-01	5.05E-01	5.62E-01
3	0.00E+00	5.75E-03	4.98E-02	1.67E-01	2.26E-01	2.70E-01	3.06E-01
2	0.00E+00	6.81E-04	5.75E-03	2.15E-02	3.17E-02	4.11E-02	4.99E-02
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

I=	8	9	10	11	12
J					
12	1.07E+00	1.13E+00	1.19E+00	1.24E+00	0.00E+00
11	1.06E+00	1.13E+00	1.18E+00	1.23E+00	1.24E+00
10	1.03E+00	1.09E+00	1.14E+00	1.18E+00	1.19E+00
9	9.82E-01	1.04E+00	1.09E+00	1.13E+00	1.13E+00
8	9.23E-01	9.82E-01	1.03E+00	1.06E+00	1.07E+00
7	8.63E-01	9.20E-01	9.64E-01	9.92E-01	9.96E-01
6	7.96E-01	8.46E-01	8.86E-01	9.11E-01	9.14E-01
5	7.11E-01	7.55E-01	7.89E-01	8.11E-01	8.14E-01
4	6.08E-01	6.46E-01	6.76E-01	6.95E-01	6.97E-01
3	3.36E-01	3.62E-01	3.82E-01	3.95E-01	3.97E-01
2	5.81E-02	6.56E-02	7.18E-02	7.60E-02	7.66E-02
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

****** (T-TWAV)/(TB-TWAV) ******

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
12	1.13E+00	1.75E-01	3.97E-01	6.18E-01	7.14E-01	7.99E-01	8.73E-01
11	1.23E-01	1.71E-01	3.93E-01	6.16E-01	7.12E-01	7.98E-01	8.72E-01
10	9.32E-02	1.41E-01	3.70E-01	6.00E-01	6.99E-01	7.88E-01	8.65E-01
9	4.35E-02	9.15E-02	3.30E-01	5.73E-01	6.78E-01	7.71E-01	8.52E-01
8	-2.43E-02	2.36E-02	2.74E-01	5.35E-01	6.49E-01	7.48E-01	8.32E-01
7	-1.12E-01	-6.40E-02	2.03E-01	4.87E-01	6.12E-01	7.17E-01	8.05E-01
6	-2.25E-01	-1.77E-01	1.09E-01	4.25E-01	5.64E-01	6.77E-01	7.85E-01
5	-3.80E-01	-3.32E-01	-2.17E-02	3.38E-01	5.03E-01	6.49E-01	7.78E-01
4	-6.13E-01	-5.65E-01	-2.22E-01	2.14E-01	4.66E-01	6.43E-01	7.78E-01
3	-1.02E+00	-9.71E-01	-6.09E-01	1.30E-01	4.59E-01	6.42E-01	7.78E-01
2	-1.04E+00	-9.91E-01	-6.28E-01	1.22E-01	4.58E-01	6.42E-01	7.78E-01
1	1.13E+00	-9.92E-01	-6.29E-01	1.21E-01	4.58E-01	6.42E-01	7.78E-01

I=	8	9	10	11	12
J					
12	9.42E-01	1.01E+00	1.07E+00	1.12E+00	1.13E+00
11	9.41E-01	1.01E+00	1.07E+00	1.12E+00	1.13E+00
10	9.35E-01	1.00E+00	1.06E+00	1.11E+00	1.12E+00
9	9.25E-01	9.93E-01	1.06E+00	1.11E+00	1.12E+00
8	9.08E-01	9.86E-01	1.06E+00	1.12E+00	1.12E+00
7	8.95E-01	9.85E-01	1.07E+00	1.12E+00	1.13E+00
6	8.90E-01	9.87E-01	1.07E+00	1.12E+00	1.13E+00
5	8.91E-01	9.89E-01	1.07E+00	1.13E+00	1.13E+00
4	8.91E-01	9.91E-01	1.07E+00	1.13E+00	1.14E+00
3	8.92E-01	9.91E-01	1.07E+00	1.13E+00	1.14E+00
2	8.92E-01	9.91E-01	1.07E+00	1.13E+00	1.14E+00
1	8.92E-01	9.91E-01	1.07E+00	1.13E+00	1.13E+00

```
****** TURB. VISCOSITY ******
```

I=	1	2	3	4	5	6	7
J							
12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
11	0.00E+00	1.01E-09	1.94E-06	3.73E-05	7.43E-05	1.47E-04	2.25E-04
10	0.00E+00	9.11E-10	1.81E-06	3.58E-05	7.22E-05	1.43E-04	2.20E-04
9	0.00E+00	7.73E-10	1.61E-06	3.35E-05	6.89E-05	1.37E-04	2.16E-04
8	0.00E+00	6.22E-10	1.38E-06	3.05E-05	6.49E-05	1.31E-04	2.26E-04
7	0.00E+00	4.72E-10	1.13E-06	2.69E-05	6.08E-05	1.34E-04	2.47E-04
6	0.00E+00	3.33E-10	8.65E-07	2.28E-05	6.02E-05	1.49E-04	1.34E-04
5	0.00E+00	2.07E-10	5.94E-07	1.83E-05	6.70E-05	6.02E-05	6.08E-05
4	0.00E+00	1.00E-10	3.32E-07	1.63E-05	1.83E-05	2.28E-05	2.69E-05
3	0.00E+00	7.78E-12	5.27E-08	3.32E-07	5.94E-07	8.65E-07	1.13E-06
2	0.00E+00	1.45E-13	7.78E-12	1.00E-10	2.07E-10	3.33E-10	4.72E-10
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

I=	8	9	10	11	12
J					
12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
11	2.99E-04	3.46E-04	3.41E-04	2.56E-04	0.00E+00
10	2.99E-04	3.68E-04	3.77E-04	3.41E-04	0.00E+00
9	3.18E-04	4.02E-04	3.68E-04	3.46E-04	0.00E+00
8	3.45E-04	3.18E-04	2.99E-04	2.99E-04	0.00E+00
7	2.26E-04	2.16E-04	2.20E-04	2.25E-04	0.00E+00
6	1.31E-04	1.37E-04	1.43E-04	1.47E-04	0.00E+00
5	6.49E-05	6.89E-05	7.22E-05	7.43E-05	0.00E+00
4	3.05E-05	3.35E-05	3.58E-05	3.73E-05	0.00E+00
3	1.38E-06	1.61E-06	1.81E-06	1.94E-06	0.00E+00
2	6.22E-10	7.73E-10	9.11E-10	1.01E-09	0.00E+00
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

11.3.6. Обсуждение результатов

Примененная итерационная процедура привела к достаточно хорошей сходимости решения за 10 итераций. Обратите внимание на изменения значения молекулярной вязкости AMU, которое в конце концов становится постоянным. В этом случае введение релаксации с применением коэффициента REGAM оказывается полезным. Если бы мы использовали REGAM = 1., то сходимость достигалась бы медленнее.

Вычисленные значения f и Nu не очень точны из-за того, что расчетная сетка слишком груба для учета резких изменений у стенок канала. Когда задача решается на сетке, имеющей 50×50 узлов, то результаты оказываются следующими:

$$f = 1{,}67 \cdot 10^{-2};\ \mathrm{Nu} = 162. \qquad (11.16)$$

Эти значения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными результатами, приведенными в [8] для $\mathrm{Re} = 10^5$ (кстати, в [8] допущена ошибка. Приведенные значения f не согласуются с его определением. Авторы дают то же определение f, что мы применяем в данной книге. Однако, когда они строят экспериментальные графики для f, значения становятся в 4 раза меньше, чем они должны быть.

Поэтому для Re = 10^5 значение f из [8] при сравнении со значением f, полученным нами по (11.16), должно быть умножено на 4).

По распечатанному полю безразмерной скорости $w/\overline{w}$ видно, что, несмотря на использование очень мелкой сетки у стенок, скорость там возрастает достаточно быстро (в пределах нескольких расчетных точек). Распределение скорости в центре канала довольно равномерное. При *ламинарном* течении в квадратном канале максимальное значение $w/\overline{w}$ несколько больше 2. Рассчитанное же здесь максимальное значение $w/\overline{w}$ равно 1,24. Это указывает на то, что профиль скорости в большей части поперечного сечения почти постоянен. Можно также сравнить рассчитанные профили с экспериментальными результатами, приведенными в [8], и убедиться, что совпадение достаточно удовлетворительное.

Отрицательные значения поля безразмерной температуры являются результатом использования при ее определении *средней* температуры стенки.

11.3.7. Заключительные замечания

Известно, что при полностью развитом турбулентном течении в некруглых каналах появляются слабые вторичные течения в сечении канала. Если учитывать такую особенность, то получившееся течение будет охарактеризовано, согласно терминологии гл. 9, как сложное полностью развитое течение, которое лежит вне области применения CONDUCT. Для расчета вторичных течений требуется более сложная модель турбулентности. К счастью, влияние вторичных течений на интегральные величины, например, f и Nu, невелико. Вот почему мы смогли получить хорошее совпадение с экспериментальными результатами, проигнорировав вторичные течения при постановке задачи.

На этом примере показано, что программа CONDUCT может быть с успехом применена для решения задач, характеризующихся сложными математическими моделями. В таких ситуациях вычислительная программа становится инструментом для исследований. Вы можете использовать этот инструмент для расчета по выбранной математической модели, сравнить результаты с экспериментальными данными, если необходимо, то модифицировать модель и продолжить расчеты до получения удовлетворительных результатов для некоторых физических процессов.

11.4. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ (ПРИМЕР 14)

Программа CONDUCT может быть использована для анализа процессов, отличных от теплопроводности и течения в каналах. В этом параграфе программа применяется для расчета потенциального течения, которое характеризуется существованием потенциала скорости ϕ. Компоненты скорости при двумерном потенциальном течении определяются следующим образом:

$$u = -\partial\phi\ \partial x;\ v = -\partial\phi\ \partial y, \tag{11.17}$$

где u и v — компоненты скорости по осям x и y соответственно. В стационарной постановке при постоянной плотности для компонент скорости выполняется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{11.18}$$

Подставив (11.17) в (11.18), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = 0. \tag{11.19}$$

Это уравнение соответствует обобщенному дифференциальному уравнению при

$$\Gamma = 1 \text{ и } S = 0 \tag{11.20}$$

и может быть решено с помощью CONDUCT.

11.4.1. Постановка задачи

Интересующая нас задача показана на рис. 11.4. Поток с постоянной скоростью входит в канал между двумя параллельными пластинами. На нижней пластине находится твердое прямоугольное пре-

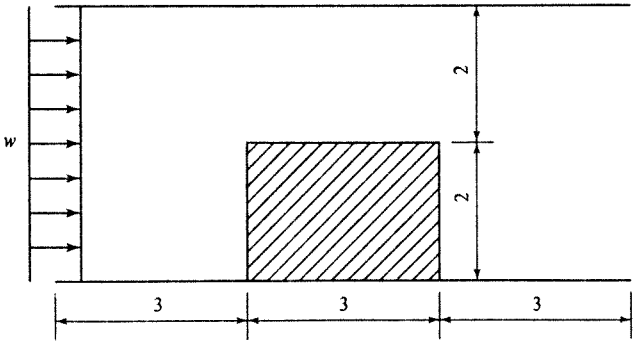


Рис. 11.4. Потенциальное обтекание препятствия

пятствие. Задача заключается в расчете потенциального течения в такой постановке.

Для равномерного, невозмущенного течения вдоль оси x соответствующий потенциал скорости

$$\phi = -Ax, \tag{11.21}$$

где A — константа. В ситуации, изображенной на рис. 11.4, разумно предположить, что потенциал скорости на входной и выходной границах расчетной области задается по (11.21). Без потери общности можно взять $A = 1$.

11.4.2. Построение подпрограммы ADAPT

GRID. Три новых массива: `POT(I,J)`, `U(I,J)` и `V(I,J)` задаются эквивалентными `F(I,J,NF)` при `NF` = 1, 2 и 3 соответственно. Эти три массива будут содержать значения переменных ϕ, u и v, причем потенциал скорости — основная зависимая переменная, а компоненты скорости u и v определяются по (11.17).

Так как геометрическая форма расчетной области достаточна проста, используется равномерная сетка, а число контрольных объемов по каждому направлению выбирается таким образом, чтобы их грани совпадали с поверхностями твердого препятствия.

BEGIN. В данном случае будет интересно вывести на печать в дополнение к потенциалу ϕ еще и значения u и v. Поэтому `TITLE(NF)` и `KPRINT(NF)` задаются для `NF` = 1, 2 и 3.

Значения `POT(I,J)` изначально рассчитываются согласно (11.21) при $A = 1$. Это обеспечивает задание значений ϕ на входной и выходной границах.

OUTPUT. Величины u и v — независимые переменные, они определяются по значениям ϕ с использованием (11.17). Эти выражения показывают, что u и v подобны плотности теплового потока q в (2.31) и их удобно определять на гранях контрольных объемов. Поэтому, хотя используются индексы `(I,J)` для u и v, компонента скорости `U(I,J)` не соответствует расчетной точке `(I,J)`. Предполагается, что `U(I,J)` определена в точке с координатами `XU(I)` и `Y(J)`, лежащей на грани контрольного объема. Аналогично `V(I,J)` — компонента скорости по оси y определена в точке с координатами `X(I)` и `YV(J)` (теперь вы понимаете, почему мы обозначили положения граней контрольных объемов через `XU(I)` и `YV(J)`? Величина `XU(I)` — это координата x для `U(I,J)`, а величина `YV(J)` — координата y для `V(I,J)`. Кстати, такое смещенное положение узловых точек для скоростей используется и в более сложных методах расчета течений жидкостей, описанных, например в [6]).

Следствием такой нумерации для U(I,J) и V(I,J) является то, что величины U(1,J) и V(I,1) не имеют смысла. Они будут выведены (так как исключить их не очень просто), но их следует игнорировать.

С учетом вышесказанного легко понять алгоритм вычисления U(I,J) и V(I,J) согласно (11.17). Скорости на входной и выходной границах U(2,J) и U(L1,J) рассчитываются через FLUXI1(J,1) и FLUXL1(J,1), так как используется реализация граничных условий второго порядка аппроксимации и все подобающие потоки содержатся в массивах FLUX.

Далее будет видно, что нулевая скорость в твердом препятствии достигается с помощью нулевых значений GAM(I,J) в этой области. В процедуре OUTPUT определяются контрольные объемы, лежащие в области препятствия, и компоненты скорости на четырех гранях этих контрольных объемов полагаются равными нулю.

Вычисление компонент скорости U(I,J) и V(I,J) может быть отложено до окончательного вывода результатов на печать. Однако хотелось бы вывести после каждой итерации несколько типичных значений компонент скорости. Поэтому вычисление U(I,J) и V(I,J) производится на каждой итерации.

PHI. Элементы массива GAM(I,J) равны единице везде, кроме расчетных точек, лежащих в области твердого препятствия, для которых GAM(I,J) равно нулю. Верхняя и нижняя границы расчетной области рассматриваются как границы с нулевым потоком.

11.4.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

POT(I,J) — потенциал скорости ϕ;
U(I,J) — компонента скорости по оси x;
V(I,J) — компонента скорости по оси y.

11.4.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------
C----EXAMPLE 14 - POTENTIAL FLOW OVER A BLOCK
C-------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
      DIMENSION POT(NI,NJ),U(NI,NJ),V(NI,NJ)
      EQUIVALENCE (F(1,1,1),POT(1,1)),(F(1,1,2),U(1,1)),
     1           (F(1,1,3),V(1,1))
C*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-
```

```
      ENTRY GRID
      HEADER='POTENTIAL FLOW OVER A BLOCK'
      PRINTF='PRINT14'
      PLOTF='PLOT14'
      CALL INTA2(NCVLX,12,NCVLY,10)
      CALL DATA2(XL,9.,YL,4.)
      CALL EZGRID
      RETURN
C *-*-*-*
```

```
      DO 270 I=2,L2
        IF(X(I).GT.3..AND.X(I).LT.6..AND.Y(J).LT.2.)
  1                          IBLOCK(I,J)=0.
270   CONTINUE
C----
      CALL PLOT
    ENDIF
    RETURN
C *-*-*-*
```

```
I=      1          2          3          4          5          6          7
J
6  0.00E+00 -2.28E-01 -6.82E-01 -1.13E+00 -1.52E+00 -2.77E+00 -3.93E+00
5  0.00E+00 -2.10E-01 -6.23E-01 -1.00E+00 -1.28E+00 -2.61E+00 -3.88E+00
4  0.00E+00 -1.95E-01 -5.74E-01 -9.02E-01 -1.12E+00 -2.50E+00 -3.84E+00
3  0.00E+00 -1.85E-01 -5.40E-01 -8.37E-01 -1.02E+00 -2.44E+00 -3.82E+00
2  0.00E+00 -1.79E-01 -5.23E-01 -8.04E-01 -9.71E-01 -2.41E+00 -3.81E+00
1  0.00E+00 -1.78E-01 -5.20E-01 -8.00E-01 -9.65E-01 -2.40E+00 -3.80E+00
I=      8          9         10         11         12         13         14
J
12 -4.96E+00 -5.86E+00 -6.71E+00 -7.45E+00 -8.11E+00 -8.71E+00 -9.00E+00
11 -4.96E+00 -5.87E+00 -6.72E+00 -7.46E+00 -8.11E+00 -8.71E+00 -9.00E+00
10 -4.96E+00 -5.88E+00 -6.75E+00 -7.48E+00 -8.12E+00 -8.71E+00 -9.00E+00
9  -4.97E+00 -5.91E+00 -6.81E+00 -7.54E+00 -8.15E+00 -8.72E+00 -9.00E+00
8  -4.98E+00 -5.95E+00 -6.93E+00 -7.62E+00 -8.20E+00 -8.74E+00 -9.00E+00
7  -4.99E+00 -5.99E+00 -7.13E+00 -7.74E+00 -8.26E+00 -8.75E+00 -9.00E+00
6  -5.07E+00 -6.23E+00 -7.48E+00 -7.87E+00 -8.32E+00 -8.77E+00 -9.00E+00
5  -5.12E+00 -6.39E+00 -7.72E+00 -8.00E+00 -8.38E+00 -8.79E+00 -9.00E+00
4  -5.16E+00 -6.50E+00 -7.88E+00 -8.10E+00 -8.43E+00 -8.80E+00 -9.00E+00
3  -5.18E+00 -6.56E+00 -7.98E+00 -8.16E+00 -8.46E+00 -8.82E+00 -9.00E+00
2  -5.19E+00 -6.59E+00 -8.03E+00 -8.20E+00 -8.48E+00 -8.82E+00 -9.00E+00
1  -5.20E+00 -6.60E+00 -8.03E+00 -8.20E+00 -8.48E+00 -8.82E+00 -9.00E+00

****** U VELOCITY ******
I=      1          2          3          4          5          6          7
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 0.00E+00 7.75E-01 7.98E-01 8.69E-01 9.90E-01 1.13E+00 1.21E+00
10 0.00E+00 7.62E-01 7.84E-01 8.54E-01 9.83E-01 1.15E+00 1.22E+00
9  0.00E+00 7.37E-01 7.57E-01 8.24E-01 9.65E-01 1.20E+00 1.25E+00
8  0.00E+00 7.01E-01 7.16E-01 7.71E-01 9.20E-01 1.30E+00 1.29E+00
7  0.00E+00 6.57E-01 6.64E-01 6.93E-01 8.07E-01 1.52E+00 1.34E+00
6  0.00E+00 6.10E-01 6.06E-01 5.90E-01 5.24E-01 0.00E+00 0.00E+00
5  0.00E+00 5.64E-01 5.51E-01 5.02E-01 3.71E-01 0.00E+00 0.00E+00
4  0.00E+00 5.26E-01 5.06E-01 4.37E-01 2.87E-01 0.00E+00 0.00E+00
3  0.00E+00 4.98E-01 4.74E-01 3.96E-01 2.42E-01 0.00E+00 0.00E+00
2  0.00E+00 4.84E-01 4.58E-01 3.76E-01 2.23E-01 0.00E+00 0.00E+00
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
I=      8          9         10         11         12         13         14
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 1.23E+00 1.21E+00 1.13E+00 9.90E-01 8.69E-01 7.98E-01 7.75E-01
10 1.24E+00 1.22E+00 1.15E+00 9.83E-01 8.54E-01 7.84E-01 7.62E-01
9  1.26E+00 1.25E+00 1.20E+00 9.65E-01 8.24E-01 7.57E-01 7.37E-01
8  1.28E+00 1.29E+00 1.30E+00 9.20E-01 7.71E-01 7.16E-01 7.01E-01
7  1.30E+00 1.34E+00 1.52E+00 8.07E-01 6.93E-01 6.64E-01 6.57E-01
6  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 5.24E-01 5.90E-01 6.06E-01 6.10E-01
5  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 3.71E-01 5.02E-01 5.51E-01 5.64E-01
4  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 2.87E-01 4.37E-01 5.06E-01 5.26E-01
3  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 2.42E-01 3.96E-01 4.74E-01 4.98E-01
2  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 2.23E-01 3.76E-01 4.58E-01 4.84E-01
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00

****** V VELOCITY ******
I=      1          2          3          4          5          6          7
J
12 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
11 0.00E+00 1.23E-02 3.79E-02 6.46E-02 7.67E-02 3.92E-02 1.07E-02
10 0.00E+00 2.41E-02 7.54E-02 1.33E-01 1.67E-01 7.58E-02 1.95E-02
9  0.00E+00 3.48E-02 1.11E-01 2.09E-01 2.94E-01 1.02E-01 2.33E-02
8  0.00E+00 4.30E-02 1.41E-01 2.88E-01 4.99E-01 9.71E-02 1.78E-02
```

```
I=      1       2         3       4         5       6      7
J
7  0.00E+00 4.68E-02 1.56E-01 3.49E-01 8.79E-01 0.00E+00 0.00E+00
6  0.00E+00 4.48E-02 1.48E-01 3.13E-01 5.99E-01 0.00E+00 0.00E+00
5  0.00E+00 3.75E-02 1.22E-01 2.44E-01 4.01E-01 0.00E+00 0.00E+00
4  0.00E+00 2.67E-02 8.57E-02 1.64E-01 2.48E-01 0.00E+00 0.00E+00
3  0.00E+00 1.38E-02 4.39E-02 8.17E-02 1.19E-01 0.00E+00 0.00E+00
2  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
I=      8         9         10        11        12        13        14
J
12  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00 0.00E+00
11 -1.07E-02 -3.92E-02 -7.67E-02 -6.46E-02 -3.79E-02 -1.23E-02 0.00E+00
10 -1.95E-02 -7.58E-02 -1.67E-01 -1.33E-01 -7.54E-02 -2.41E-02 0.00E+00
9  -2.33E-02 -1.02E-01 -2.94E-01 -2.09E-01 -1.11E-01 -3.48E-02 0.00E+00
8  -1.78E-02 -9.71E-02 -4.99E-01 -2.88E-01 -1.41E-01 -4.30E-02 0.00E+00
7   0.00E+00  0.00E+00 -8.79E-01 -3.49E-01 -1.56E-01 -4.69E-02 0.00E+00
6   0.00E+00  0.00E+00 -5.99E-01 -3.13E-01 -1.48E-01 -4.48E-02 0.00E+00
5   0.00E+00  0.00E+00 -4.01E-01 -2.44E-01 -1.22E-01 -3.75E-02 0.00E+00
4   0.00E+00  0.00E+00 -2.48E-01 -1.64E-01 -8.57E-02 -2.67E-02 0.00E+00
3   0.00E+00  0.00E+00 -1.19E-01 -8.17E-02 -4.39E-02 -1.38E-02 0.00E+00
2   0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00 0.00E+00
1   0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00 0.00E+00
```

11.4.6. Обсуждение результатов

Задача линейна, и решение сходится за одну итерацию. Для определения занятой препятствием области в распечатанном поле скоростей могут быть использованы нулевые значения. Видно, что поле скоростей в левой половине расчетной области в точности симметрично полю скоростей в правой половине. Это согласуется с особенностями потенциальных течений, которые дают симметричное поле течения вокруг симметричных тел, например цилиндров или сфер. Мы могли бы выполнить расчеты только для левой половины расчетной области. Поле скоростей может быть использовано при построении векторов скорости, которые полезны при визуализации поля течения.

11.4.7. Заключительные замечания

Потенциальное обтекание тел является важным разделом в механике жидкости. Этот пример показывает, как программа CONDUCT может быть использована для расчетов потенциальных течений. Большинство интересующих нас тел имеют формы, которые не могут быть хорошо описаны в наших координатных системах. Однако вы можете использовать технологию, представленную в § 7.7 и проиллюстрированную в примере 4 (см. § 8.4), для аппроксимации кривых границ подобных тел. Даже при использовании грубых сеток вы получите удивительно хорошие решения.

11.5. ПРОСАЧИВАНИЕ ВОДЫ ПОД ДАМБОЙ (ПРИМЕР 15)

В заключительном примере рассмотрим течение в пористой среде, например в грунте. Для таких течений справедлив закон Дарси, утверждающий, что компоненты скорости в пористом материале можно представить в виде:

$$u = -C\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad v = -C\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{11.22}$$

где p — давление; C — постоянная Дарси для материала (зависящая от его проницаемости).

Выражения (11.22) очень похожи на (11.17) для потенциального течения. Поэтому с применением (11.18) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0. \tag{11.23}$$

Таким образом, если давление p выбрано в качестве зависимой переменной, то уравнение (11.23) соответствует обобщенному дифференциальному уравнению при

$$\Gamma = C \text{ и } S = 0. \tag{11.24}$$

11.5.1. Постановка задачи

На рис. 11.5 показано основание дамбы с окружающим проницаемым грунтом. Заштрихованная область соответствует подземной части дамбы. Верхняя граница на рис. 11.5 представляет собой дно водохранилища, создаваемого с помощью дамбы. Конечно, дамба продолжается и выше этой линии, а слева находится большое количество воды. С правой стороны дамбы уровень воды сравнительно

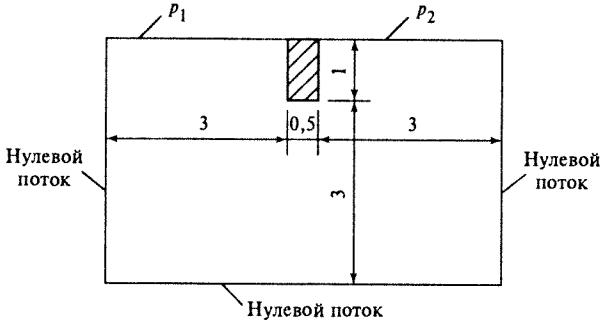


Рис. 11.5. К задаче о просачивании воды под дамбой

низок. Из-за разности уровней воды по обеим сторонам дамбы на верхней границе действуют гидростатические давления p_1 и p_2, причем $p_1 > p_2$. Эта разность давлений вызывает фильтрацию воды в грунте под дамбой и около нее.

На других границах будем рассматривать нулевые потоки, как показано на рис. 11.5. Можно предположить, что правая и левая границы находятся так далеко от дамбы, что течение через них пренебрежимо мало. То же применимо и к нижней границе, но можно также допустить, что под нижней границей находится непроницаемый слой.

Геометрические характеристики представлены на рис. 11.5. Значения параметров заданы следующими:

$$C = 1;\ p_1 = 100;\ p_2 = 0. \qquad (11.25)$$

Нашей целью является расчет распределения давления p и соответствующего поля скорости.

11.5.2. Построение подпрограммы ADAPT

Как и в примере 14, вводятся массивы `U(I,J)` и `V(I,J)` для хранения результатов расчета компонент скорости.

GRID. С помощью подпрограммы `ZGRID` создается неравномерная сетка. По оси x сетка сделана более мелкой у поверхности дамбы.

BEGIN. Для постоянной Дарси C используется переменная `DC`. Массив `P(I,J)` заполняется соответствующими значениями на верхней границе.

OUTPUT. Вычисление компонент скорости `U(I,J)` и `V(I,J)` производится так же, как и в примере 14 (см. п. 11.4.2).

PHI. Элементы массива `GAM(I,J)` задаются равными постоянной Дарси, кроме значений внутри дамбы, где элементы `GAM(I,J)` полагаются нулевыми для моделирования непроницаемого материала. Реализация граничных условий в этом примере простая.

11.5.3. Дополнительные имена на ФОРТРАНе

`DC` — постоянная Дарси C;
`P(I,J)` — давление;
`U(I,J)` — компонента скорости по оси x;
`V(I,J)` — компонента скорости по оси y.

11.5.4. Листинг подпрограммы ADAPT

```
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE ADAPT
C-------------------------------------
C---EXAMPLE 15 - WATER SEEPAGE UNDER A DAM
C-------------------------------------
$INCLUDE:'COMMON'
C *-*-*-*
```

```
      DO 220 I=3,L2
        U(I,J)=-DC*(P(I,J)-P(I-1,J))/(X(I)-X(I-1))
220   CONTINUE
      DO 230 J=2,M2
      DO 230 I=2,L2
        IF(X(I).GT.3..AND.X(I).LT.3.5.AND.Y(J).GT.3.) THEN
          U(I,J)=0.
          U(I+1,J)=0.
          V(I,J)=0.
          V(I,J+1)=0.
        ENDIF
230   CONTINUE
      DO 240 IUNIT=IU1,IU2
        IF(ITER.EQ.0) WRITE(IUNIT,250)
250     FORMAT(1X,'ITER',2X,'P(3,5)',5X,'U(3,5)',5X,
     1          'V(3,5)',5X,'P(5,5)',5X,'U(5,5)',5X,'V(5,5)')
        WRITE(IUNIT,260) ITER,P(3,5),U(3,5),V(3,5),
     1  P(5,5),U(5,5),V(5,5)
260     FORMAT(1X,I2,1P6E11.2)
240   CONTINUE
      IF(ITER.EQ.LAST) THEN
        CALL PRINT
C-----
COME HERE TO FILL IBLOCK(I,J) BEFORE CALLING PLOT
        DO 270 J=2,M2
        DO 270 I=2,L2
          IF(X(I).GT.3..AND.X(I).LT.3.5.AND.Y(J).GT.3.)
     1                        IBLOCK(I,J)=1
270     CONTINUE
        CALL PLOT
C-----
      ENDIF
      RETURN
C *-*-*-*
```

11.5.5. Результаты расчетов

```
RESULTS OF CONDUCT FOR CARTESIAN COORDINATE SYSTEM
**************************************************

WATER SEEPAGE UNDER A DAM

ITER    P(3,5)   U(3,5)    V(3,5)   P(5,5)   U(5,5)   V(5,5)
0    0.00E+00 0.00E+00  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00  0.00E+00
1    7.33E+01 2.92E+00 -6.14E+00 6.37E+01 9.50E+00 -4.94E+00
2    7.33E+01 2.92E+00 -6.15E+00 6.37E+01 9.49E+00 -4.95E+00
3    7.33E+01 2.92E+00 -6.15E+00 6.37E+01 9.49E+00 -4.95E+00
I =     1        2        3        4        5        6        7
X = 0.00E+00 3.52E-01 1.04E+00 1.69E+00 2.28E+00 2.78E+00 3.13E+00
I =     8        9       10       11       12       13       14
X = 3.38E+00 3.72E+00 4.22E+00 4.81E+00 5.46E+00 6.15E+00 6.50E+00

J =     1        2        3        4        5        6        7
Y = 0.00E+00 2.50E-01 7.50E-01 1.25E+00 1.75E+00 2.25E+00 2.75E+00
J =     8        9       10       11
Y = 3.17E+00 3.50E+00 3.83E+00 4.00E+00

****** PRESSURE ******

I=      1        2        3        4        5        6        7
J
11 0.00E+00 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 1.00E+02 0.00E+00
10 9.78E+01 9.78E+01 9.76E+01 9.71E+01 9.65E+01 9.61E+01 5.56E+01
9  9.36E+01 9.35E+01 9.28E+01 9.15E+01 8.96E+01 8.80E+01 5.92E+01
8  8.95E+01 8.93E+01 8.82E+01 8.60E+01 8.27E+01 7.92E+01 5.81E+01
7  8.46E+01 8.44E+01 8.29E+01 7.97E+01 7.43E+01 6.59E+01 5.41E+01
6  7.96E+01 7.94E+01 7.75E+01 7.37E+01 6.78E+01 6.00E+01 5.27E+01
5  7.55E+01 7.53E+01 7.33E+01 6.94E+01 6.37E+01 5.72E+01 5.20E+01
4  7.25E+01 7.22E+01 7.02E+01 6.64E+01 6.12E+01 5.57E+01 5.15E+01
3  7.04E+01 7.02E+01 6.82E+01 6.46E+01 5.98E+01 5.49E+01 5.13E+01
2  6.94E+01 6.92E+01 6.72E+01 6.37E+01 5.91E+01 5.46E+01 5.12E+01
1  0.00E+00 6.90E+01 6.71E+01 6.36E+01 5.91E+01 5.45E+01 5.12E+01
I=      8        9       10       11       12       13       14
J
11 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
10 2.90E+01 3.93E+00 3.46E+00 2.85E+00 2.41E+00 2.18E+00 2.15E+00
9  3.50E+01 1.20E+01 1.04E+01 8.51E+00 7.17E+00 6.50E+00 6.41E+00
8  4.00E+01 2.08E+01 1.73E+01 1.40E+01 1.18E+01 1.07E+01 1.05E+01
7  4.59E+01 3.41E+01 2.57E+01 2.03E+01 1.71E+01 1.56E+01 1.54E+01
6  4.73E+01 4.00E+01 3.22E+01 2.63E+01 2.25E+01 2.06E+01 2.04E+01
5  4.80E+01 4.28E+01 3.63E+01 3.06E+01 2.67E+01 2.47E+01 2.45E+01
4  4.85E+01 4.43E+01 3.88E+01 3.36E+01 2.98E+01 2.78E+01 2.75E+01
3  4.87E+01 4.51E+01 4.02E+01 3.54E+01 3.18E+01 2.98E+01 2.96E+01
2  4.88E+01 4.54E+01 4.09E+01 3.63E+01 3.28E+01 3.08E+01 3.06E+01
1  4.88E+01 4.55E+01 4.09E+01 3.64E+01 3.29E+01 3.10E+01 0.00E+00

****** U VELOCITY ******

I=      1        2        3        4        5        6        7
J
11 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
10 0.00E+00 0.00E+00 3.29E-01 6.91E-01 1.03E+00 9.40E-01 0.00E+00
9  0.00E+00 0.00E+00 9.79E-01 2.07E+00 3.17E+00 3.16E+00 0.00E+00
8  0.00E+00 0.00E+00 1.59E+00 3.43E+00 5.65E+00 6.98E+00 0.00E+00
7  0.00E+00 0.00E+00 2.25E+00 4.97E+00 9.03E+00 1.69E+01 3.43E+01
6  0.00E+00 0.00E+00 2.73E+00 5.86E+00 9.98E+00 1.56E+01 2.11E+01
5  0.00E+00 0.00E+00 2.92E+00 6.03E+00 9.49E+00 1.30E+01 1.53E+01
```

```
I=      1          2          3          4          5          6          7
J
4  0.00E+00 0.00E+00 2.93E+00 5.85E+00 8.67E+00 1.10E+01 1.22E+01
3  0.00E+00 0.00E+00 2.88E+00 5.60E+00 8.00E+00 9.74E+00 1.05E+01
2  0.00E+00 0.00E+00 2.84E+00 5.45E+00 7.64E+00 9.13E+00 9.75E+00
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
I=      8          9         10         11         12         13         14
J
11 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
10 0.00E+00 0.00E+00 9.40E-01 1.03E+00 6.91E-01 3.29E-01 0.00E+00
9  0.00E+00 0.00E+00 3.16E+00 3.17E+00 2.07E+00 9.79E-01 0.00E+00
8  0.00E+00 0.00E+00 6.98E+00 5.65E+00 3.43E+00 1.59E+00 0.00E+00
7  3.29E+01 3.43E+01 1.69E+01 9.03E+00 4.97E+00 2.25E+00 0.00E+00
6  2.18E+01 2.11E+01 1.56E+01 9.98E+00 5.86E+00 2.73E+00 0.00E+00
5  1.56E+01 1.53E+01 1.30E+01 9.49E+00 6.03E+00 2.92E+00 0.00E+00
4  1.24E+01 1.22E+01 1.10E+01 8.67E+00 5.85E+00 2.93E+00 0.00E+00
3  1.06E+01 1.05E+01 9.74E+00 8.00E+00 5.60E+00 2.88E+00 0.00E+00
2  9.85E+00 9.75E+00 9.13E+00 7.64E+00 5.45E+00 2.84E+00 0.00E+00
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00

****** V VELOCITY ******

I=      1          2          3          4          5          6          7
J
11 0.00E+00 -1.31E+01 -1.45E+01 -1.72E+01 -2.08E+01 -2.34E+01  0.00E+00
10 0.00E+00 -1.30E+01 -1.43E+01 -1.70E+01 -2.08E+01 -2.41E+01  0.00E+00
9  0.00E+00 -1.25E+01 -1.38E+01 -1.64E+01 -2.08E+01 -2.66E+01  0.00E+00
8  0.00E+00 -1.17E+01 -1.28E+01 -1.52E+01 -2.00E+01 -3.19E+01  0.00E+00
7  0.00E+00 -1.01E+01 -1.08E+01 -1.20E+01 -1.31E+01 -1.18E+01 -2.79E+00
6  0.00E+00 -8.21E+00 -8.47E+00 -8.68E+00 -8.10E+00 -5.52E+00 -1.53E+00
5  0.00E+00 -6.14E+00 -6.15E+00 -5.92E+00 -4.95E+00 -2.94E+00 -8.16E-01
4  0.00E+00 -4.06E+00 -3.98E+00 -3.67E+00 -2.87E+00 -1.59E+00 -4.38E-01
3  0.00E+00 -2.01E+00 -1.95E+00 -1.75E+00 -1.32E+00 -7.12E-01 -1.95E-01
2  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00
1  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00  0.00E+00
I=      8          9         10         11         12         13         14
J
11 0.00E+00 2.34E+01 2.08E+01 1.72E+01 1.45E+01 1.31E+01 0.00E+00
10 0.00E+00 2.41E+01 2.08E+01 1.70E+01 1.43E+01 1.30E+01 0.00E+00
9  0.00E+00 2.66E+01 2.08E+01 1.64E+01 1.38E+01 1.25E+01 0.00E+00
8  0.00E+00 3.19E+01 2.00E+01 1.52E+01 1.28E+01 1.17E+01 0.00E+00
7  2.79E+00 1.18E+01 1.31E+01 1.20E+01 1.08E+01 1.01E+01 0.00E+00
6  1.53E+00 5.52E+00 8.10E+00 8.68E+00 8.47E+00 8.21E+00 0.00E+00
5  8.16E-01 2.94E+00 4.95E+00 5.92E+00 6.15E+00 6.14E+00 0.00E+00
4  4.38E-01 1.59E+00 2.87E+00 3.67E+00 3.98E+00 4.06E+00 0.00E+00
3  1.95E-01 7.12E-01 1.32E+00 1.75E+00 1.95E+00 2.01E+00 0.00E+00
2  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
1  0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00 0.00E+00
```

11.5.6. Обсуждение результатов

Мы рассмотрели линейную задачу, поэтому ее решение сошлось за одну итерацию. Поле скорости демонстрирует ожидаемую картину течения. Компонента скорости u положительна, что соответствует направлению течения слева направо. Значения v отрицательны в области, лежащей слева от дамбы, и положительны справа. Таким образом, слева от дамбы течение направлено вниз, а справа — вверх.

11.5.7. Заключительные замечания

Концепция течений в пористых материалах, основанная на законе Дарси, имеет множество практических приложений. С помощью этой концепции можно анализировать течения в почве, через гранулированные среды, фильтры и спрессованные материалы, в изоляции зданий; просачивание через стенки кровеносных сосудов и другие подобные течения. Аналогия между теплопроводностью и течением Дарси дает нам не только метод расчета течений в пористых средах, но также углубляет понимание этих двух различных физических процессов.

11.6. ЗАДАЧИ

11.1. Измените пример 13 (см. § 11.3), использовав другие граничные условия для температуры, например, на одной стенке или более положите постоянной температуру или плотность теплового потока. С помощью численных экспериментов убедитесь в том, что среднее число Нуссельта для турбулентного течения не сильно зависит от используемых граничных условий для температуры [в отличие от ламинарного течения (сравните с числами Нуссельта, полученными в задаче 10.1)].

11.2. Примените CONDUCT для решения хорошо известной задачи о потенциальном обтекании цилиндра. Сделайте это при MODE = 1, аппроксимируя границу цилиндра ступенчатой поверхностью. Или примите MODE = 3 и задайте известное поле потенциала для невозмущенного потока в качестве граничных условий на большой окружности, используемой как внешняя граница.

11.3. В [17] решена задача о течении в вертикальном массиве ребер, вызванном естественной конвекцией. Проведите вычисления, использовав те же параметры, и сравните с опубликованными результатами.

11.4. В [10] представлена модель турбулентности для трубы с внутренними ребрами. Использовав пример 13 (см. § 11.3), проведите сравнительные вычисления.

11.5. В [11] решена задача о течении в трубе с внутренними ребрами, вызванном естественной конвекцией. Использовав CONDUCT, решите ту же задачу.

11.6. Рассмотрите полностью развитое течение с одной или несколькими стенками, движущимися в продольном направлении. Для различных градиентов давления вы можете получить интересные картины течения, некоторые из которых могут содержать области обратного течения.

11.7. Заметим, что решение задачи 11.6 может быть получено суперпозицией. Сначала рассчитайте течение с неподвижными стенками и ненулевым градиентом давления, затем с движущейся стенкой (или с несколькими движущимися стенками) при нулевом градиенте давления. Сумма этих двух решений с различными весовыми коэффициентами даст полное семейство решений задачи с движущимися стенками.

11.8. Используйте CONDUCT для расчета колебаний скорости при полностью развитом течении в канале. Предположите, что градиент давления — это периодическая функция от времени. Выполните расчет нестационарного поля скорости. Вы увидите, что распределения скоростей при колеблющемся течении сильно отличаются от случая стационарного течения.

11.9. Используйте пример 14 (см. § 11.4) для расчета потенциальных течений вокруг крыльев различных форм. Здесь вам придется аппроксимировать границы прямоугольными ступеньками.

11.10. Измените пример 15 (см. § 11.5), введя большой непроницаемый объект в середину расчетной области. Исследуйте, как существование этого объекта влияет на картину течения.

Глава 12

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой главе мы кратко подведем итоги, обсудим некоторые дальнейшие шаги для расширения возможностей CONDUCT и дадим заключительные рекомендации по использованию вычислительной программы.

12.1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Численный метод, который мы использовали в этой книге, характеризуется одновременно и универсальностью и простотой. В рамках рассмотренного класса физических задач этот метод может быть применен к широкому спектру проблем. Задачи теплопроводности могут быть стационарными или нестационарными, с линейными или нелинейными граничными условиями; теплопроводность может быть непостоянной и зависеть от температуры; генерация тепла может быть произвольной, в частности зависящей от температуры. Описанный метод может использоваться для расчета полей скорости и температуры при полностью развитых течениях и для других приложений, таких как потенциальное течение, течение в пористых средах, электромагнитные поля, массовая диффузия при сложных химических реакциях и т.п. При рассмотрении задач о течениях в каналах при необходимости можно моделировать в расчетной области твердые ребра или перемычки и рассчитывать сопряженный теплоперенос. Подобные интересные особенности могут быть реализованы и в приложениях другого типа.

Несмотря на универсальность, этот метод достаточно прост для понимания и реализации. Эти преимущества обусловлены в основном использованием метода контрольного объема, при котором решаемые алгебраические уравнения представляют собой законы сохранения физических величин, таких как энергия, масса или импульс, для каждого контрольного объема в отдельности. Поэтому эти алгебраические уравнения имеют ясный физический смысл, и, получая окончательное решение, мы знаем, что в точности выполняется закон сохранения энергии (массы и т.п.) для всех маленьких контрольных объемов, на которые была разбита расчетная область. Этот метод основан преимущественно на понимании физических особенностей рассматриваемых процессов. Кроме того, разве не замечательно, что мы можем решать очень сложные задачи, не обращаясь к рядам Фурье, функциям Бесселя, полиномам Лежандра и другому подобному математическому аппарату.

Благодаря простоте метод не только удобен в использовании, но и помогает лучше понять соответствующие физические процессы.

12.2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА

Описание программы CONDUCT преследовало цель познакомить читателя с примером построения многоцелевой вычислительной программы для некоторого класса физических задач. Мы убедились, что использование адаптируемых подпрограмм, содержание которых зависит от конкретной задачи, обеспечивает пользователю практически неограниченную гибкость в определении деталей задачи и в структуре вывода результатов. При написании адаптируемой подпрограммы вы испытываете чувство сопричастности процессу решения задачи. Кроме того, у вас остается возможность для некоторого узкого класса задач создавать автоматическую версию программы, которая просто запрашивает значения нескольких параметров.

Бывает сложно использовать многоцелевую программу потому, что из-за своей гибкости и других особенностей она требует большого количества соответствующих входных данных. В рамках CONDUCT мы устранили это неудобство, задав многим параметрам значения по умолчанию. Поэтому, как мы уже убедились, для простой задачи нужно написать очень короткую адаптируемую часть. При возрастании сложности решаемой задачи увеличивается и объем подпрограммы ADAPT.

В рамках CONDUCT вы берете на себя всю ответственность за конкретное решение задачи. Полученные результаты непосредственно зависят от того, как вами реализована подпрограмма ADAPT. Некоторые величины будут сохранять свои значения по умолчанию, но вы всегда можете переопределить их. Этот полный контроль над деталями задачи позволяет использовать CONDUCT для различных целей.

12.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ

В этой книге мы использовали CONDUCT для решения 15 различных задач. Задачи были разработаны для демонстрации возможностей CONDUCT и различных технологий, применяемых в ADAPT. С такой подготовкой вы в состоянии применять программу для реализации большого числа интересных приложений.

Упомянем несколько возможностей. Можно использовать программу для изучения различных способов размещения теплоизоляции в стенах зданий, для определения температуры в электрических цепях и электронных платах или для предварительных расчетов

периодической теплопроводности в цилиндре двигателя. Различные каналы и галереи ребер с разными граничными условиями для температуры представляют собой огромный массив возможных интересных приложений. Можно пойти дальше и попробовать решить задачу о полностью развитом течении в канале, вызванном естественной конвекцией, когда поля температуры и скорости влияют одно на другое. В примере 13 для турбулентного течения мы использовали модель турбулентности, основанную на длине пути смешения. Можно попробовать более сложную k—ε-модель [3].

Можно применить программу для расчетов потенциальных течений вокруг крыла, распространения влаги в почве, массовой диффузии при химических реакциях и электромагнитных полей.

12.4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОГРАММЫ CONDUCT

Программа CONDUCT в ее нынешнем виде позволяет создать множество сложных приложений, однако можно расширить возможности этой программы, скорректировав неизменяемую часть. Конечно, приступать к этому следует только тогда, когда вы очень хорошо познакомитесь с программой и будете уверены в правильности реализации необходимых изменений. Приведем несколько предложений для тех, кто хотел бы расширить программу.

Контактное термическое сопротивление. С помощью CONDUCT можно решить задачу для случая, когда два материала с разными значениями теплопроводности расположены вплотную. На практике, так как контактные поверхности не идеально гладкие, на стыке существует контактное термическое сопротивление в дополнение к термическому сопротивлению самих материалов. В большинстве случаев значения контактного термического сопротивления могут быть найдены из теоретических соотношений или экспериментальных данных. Программа CONDUCT может быть изменена для включения заданных пользователем значений контактного сопротивления в расчет коэффициентов дискретных уравнений для соседних точек.

Переменная толщина. При использовании CONDUCT для решения двумерной задачи теплопроводности в прямоугольной пластине, обычно предполагается, что эта пластина везде имеет одинаковую толщину. В действительности пластина может иметь переменную толщину, что влияет на площадь сечения, через которое проходит тепловой поток. Переменная толщина окажет влияние и на внутреннее выделение тепла. Можно модифицировать CONDUCT для учета произвольного изменения толщины пластины.

Кстати, учет переменной толщины был продемонстрирован при использовании CONDUCT для частного случая. Рассматриваемая область с осесимметричной геометрией (MODE = 2) имеет размер по углу, равный 1 рад. Это значит, что толщина в некоторой точке расчетной области равна радиусу r, соответствующему этой точке. Как мы видели, изменение r влияло на соответствующие площади и объемы. Если модифицировать CONDUCT для учета произвольного изменения толщины, то геометрия области с MODE = 2 будет частным случаем, когда толщина равна радиусу.

Итерации на одном шаге по времени. При решении стационарных нелинейных задач мы выполняли множество итераций, что позволяло учитывать нелинейности, пересчитывая коэффициенты. Однако на шаге по времени в нестационарной задаче коэффициенты не пересчитываются. Подразумевается, что зависимая переменная и, следовательно, коэффициенты меняются незначительно, особенно если шаг по времени мал. Обычно это так, но имеются «существенно» нелинейные задачи, для которых желательно проводить итерации на каждом шаге по времени. Можно изменить CONDUCT, введя дополнительный итерационный цикл.

Цена этих итераций довольно высока. В настоящее время мы не сохраняем в компьютерной памяти отдельно старые ϕ_P^0 и новые ϕ_P значения зависимой переменной. Имеется только один массив F(I,J,NF), содержащий старые значения ϕ_P^0 в начале шага по времени. Когда рассчитываются новые значения ϕ_P, они заменяют содержание того же массива F(I,J,NF). Так как нет никаких дополнительных итераций на этом временном шаге, то старые значения ϕ_P^0 не нужны. Если же вы захотите ввести эти итерации, то вам придется сохранять значения ϕ_P^0 и ϕ_P в разных массивах. В течение этих итераций ϕ_P^0 останутся неизменными, а ϕ_P будут итерационно меняться до достижения сошедшегося решения на этом временном шаге. Как только начнется следующий шаг по времени, значения ϕ_P передаются в массив ϕ_P^0, а затем рассчитываются новые ϕ_P, соответствующие новому временному шагу.

Это дополнительное требование сохранения ϕ_P^0 является основной причиной того, что в CONDUCT не реализованы итерации на одном шаге по времени.

Криволинейные ортогональные системы координат. В CONDUCT мы рассматривали сложные кривые границы, аппроксимируя

их совокупностью прямоугольных ступенек. Эта процедура сохраняет преимущества использования прямоугольных сеток, но неудобна для очень сложных форм области. Программа CONDUCT может быть перестроена для работы в криволинейных системах координат так, что практически любая геометрическая форма области может быть представлена соответствующей криволинейной сеткой. Кроме некоторого усложнения расчета длин, площадей и объемов, основная структура CONDUCT останется неизменной. Модифицированная программа будет изящнее и точнее описывать произвольную форму.

Использование полярной системы координат (θ, r) (MODE = 3) является примером применения криволинейной ортогональной системы координат. В этом случае различные длины, площади и объемы являются простыми функциями от радиуса r. Она и должна быть расширена до обобщенной ортогональной системы координат.

Крнволинейные неортогональные системы координат. Часто бывает сложно придумать *ортогональную* криволинейную систему координат для области заданной геометрической формы. В то же время легко построить *неортогональные* системы координат; в принципе они могут быть нарисованы даже вручную. Поэтому следующим шагом будет подготовка версии CONDUCT для случая неортогональной системы координат. В дополнение к усложнению геометрической части мы должны учесть и другую форму дискретных уравнений. Так как грань контрольного объема уже не будет перпендикулярна линии, соединяющей две расчетные точки, то поток через грань будет описываться более сложной формулой. Если вы заинтересовались такой возможностью, то можете обратиться к [1] и др.

Третье измерение. Если вы работаете с декартовой или полярно-цилиндрической системой координат, то расширение CONDUCT на три измерения не вызовет сложностей. При построении численного метода мы не использовали каких-либо предположений, которые ограничивались бы только двумерным случаем. В CONDUCT реализован метод для двумерного случая, но трехмерная реализация возможна с использованием тех же принципов. Конечно, переходя к решению трехмерных задач нужно быть готовым к значительным увеличениям компьютерной памяти и времени счета. Но это не является существенным ограничением для написания трехмерной версии.

12.5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОГРАММЫ CONDUCT

Такая вычислительная программа, как CONDUCT, способствует приобретению навыков решения задач и углублению понимания физических процессов. Для того чтобы вы могли получить максимальную пользу, приведем некоторые рекомендации.

Хорошо ознакомьтесь с CONDUCT . Используйте программу для решения большого числа простых задач. Упражняйтесь, реализуя различные возможности программы. Решайте множество задач в дополнение к тем, что вас интересуют в настоящее время.

Двигайтесь от простого к сложному. Распространенная ошибка при использовании программы, подобной CONDUCT, заключается в ее применении сразу для решения очень сложной задачи. В этом случае неопытного пользователя может постигнуть неудача. Наилучшая стратегия заключается в том, чтобы начать с очень простой идеализации вашей итоговой задачи, добавлять только несколько усложнений за 1 раз и двигаться к заключительному решению сложной задачи, последовательно решая промежуточные задачи.

Всегда изменяйте уже существующую подпрограмму ADAPT. Неразумно писать адаптируемую часть программы «с нуля». Начинайте с уже существующей версии ADAPT, сделайте несколько изменений и протестируйте их. Таким образом постепенно постройте адаптируемую часть для задачи, которую надо решить.

Проверяйте точность. Численные решения, даже когда они выглядят разумными, не обязательно точны, если не используется большое число расчетных точек. Если вы хотите доверять численным значениям, полученным при расчетах, то должны убедиться, что у вас достаточно мелкая сетка. Дальнейшее уменьшение размера сетки не должно приводить к ощутимому изменению решения. Используйте также проверку выполнения законов сохранения и сравнивайте (если возможно) ваши численные результаты с точными решениями.

Создавайте подобающий вывод результатов. В каждой физической задаче существуют величины, представляющие основной интерес. Выводя их на печать, вы тем самым фокусируете внимание на основном результате решения. По этим характеристикам вы также быстро сможете проверить разумность рассчитанных значений.

Изучайте результаты. В этой книге мы не раз обсуждали возможность использования численных решений для углубления понимания физических явлений. Когда вы настраиваете CONDUCT для решения конкретной задачи, у вас есть некоторые прогнозы по поводу результатов. Вы должны изучать полученные результаты и сопоставлять их с ожидаемыми. Случается, что результаты на первый взгляд удивляют, но тщательное их изучение позволит вам изменить

первоначальные оценки. В то же время это поможет выявить некоторые ошибки, которые вы могли допустить при настройке CONDUCT. В любом случае тщательное изучение результатов обогатит ваше понимание лежащих в основе задачи физических явлений.

Получайте удовольствие. Моделирование сложных физических явлений с использованием вычислительной программы является увлекательным занятием. С помощью численного моделирования можно удовлетворить свое научное любопытство точно так же, как при изучении физических явлений в лабораторных экспериментах. Такой инструмент, как CONDUCT, дает возможность моделировать широкий диапазон физических явлений. Вы поймете, что это наиболее захватывающий вид деятельности.

ЛИСТИНГ НЕИЗМЕНЯЕМОЙ ЧАСТИ ПРОГРАММЫ CONDUCT

Файл «COMMON»

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      PARAMETER(NI=52,NJ=52,NFMAX=5,NZMAX=10)
      CHARACTER*18 TITLE
      CHARACTER*64 HEADER,PRINTF,PLOTF
      COMMON F(NI,NJ,NFMAX),ALAM(NI,NJ),GAM(NI,NJ),CON(NI,NJ),
     1   AIP(NI,NJ),AIM(NI,NJ),AJP(NI,NJ),AJM(NI,NJ),AP(NI,NJ),
     2   IBLOCK(NI,NJ),X(NI),XU(NI),XCV(NI),ARX(NJ),Y(NJ),
     3   YV(NJ),YCV(NJ),YCVR(NJ),R(NJ),RV(NJ),SX(NJ),PTX(NI),
     4   QTX(NI),PTY(NJ),QTY(NJ),FLUXI1(NJ,NFMAX),
     5   FLUXL1(NJ,NFMAX),FLUXJ1(NI,NFMAX),FLUXM1(NI,NFMAX),
     6   KBCI1(NJ),KBCL1(NJ),KBCJ1(NI),KBCM1(NI),
     7   FLXCI1(NJ),FLXCL1(NJ),FLXCJ1(NI),FLXCM1(NI),
     8   FLXPI1(NJ),FLXPL1(NJ),FLXPJ1(NI),FLXPM1(NI)
      COMMON/GENL/NF,L1,L2,L3,M1,M2,M3,ITER,SMALL,BIG,
     1   LAST,TIME,DT,MODE,KORD,KOUT,IU1,IU2,KPGR,KSTOP
      COMMON/NFF/RELAX(NFMAX),KPRINT(NFMAX),KSOLVE(NFMAX),
     1   KBLOC(NFMAX),KPLOT(NFMAX),NTIMES(NFMAX),NTC(NFMAX),
     2   CRIT(NFMAX)
      COMMON/TTL/TITLE(NFMAX),HEADER,PRINTF,PLOTF
      COMMON/EZG/NCVLX,NCVLY,XL,YL,POWERX,POWERY
      COMMON/ZG/NZX,NZY,NCVX(NZMAX),NCVY(NZMAX),XZONE(NZMAX),
     1   YZONE(NZMAX),POWRX(NZMAX),POWRY(NZMAX)
      DIMENSION SC(NI,NJ),SP(NI,NJ)
      EQUIVALENCE (CON,SC),(AP,SP)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

Неизменяемая часть программы CONDUCT

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
        PROGRAM CONDUCT
COMPUTER PROGRAM 'CONDUCT' BY DR. SUHAS V. PATANKAR
COPYRIGHT (C) 1991 INNOVATIVE RESEARCH, INC.
C*************************************************
$INCLUDE:'COMMON'
C*************************************************
CALCULATIONS IN THE GETTING-READY PHASE
      CALL DEFLT
      CALL GRID
      CALL READY
      CALL BEGIN
```

```
 10  CONTINUE
COME HERE TO START THE ITERATION OR TIME-STEP LOOP
      CALL OUTPUT
      IF(KSTOP.NE.0) STOP
      CALL HEART
      GO TO 10
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE DEFRD
C*****************************************************
$INCLUDE:'COMMON'
C*****************************************************
C
      ENTRY DEFLT
C
COME HERE TO SET THE DEFAULT VALUES
C
      HEADER='USE THE CHARACTER VARIABLE HEADER TO SPECIFY A
     1 PROBLEM TITLE'
      PRINTF='PRINT1'
      PLOTF='PLOT1'
      CALL INTA7(KSTOP,0,LAST,5,ITER,0,KORD,2,MODE,1,
     1           KPGR,1,KOUT,3)
      CALL DATA5(SMALL,1.E-20,BIG,1.E+20,TIME,0.,DT,1.E+20,
     1           R(1),0.)
      CALL DATA2(POWERX,1.,POWERY,1.)
      DO 10 NZ=1,NZMAX
      POWRX(NZ)=1.
 10   POWRY(NZ)=1.
      DO 20 N=1,NFMAX
      CRIT(N)=1.E-5
      KSOLVE(N)=0
      NTIMES(N)=10
      KBLOC(N)=1
      RELAX(N)=1.
      TITLE(N)=' '
      KPRINT(N)=0
      KPLOT(N)=0
      DO 30 I=2,NI
      FLUXJ1(I,N)=0.
 30   FLUXM1(I,N)=0.
      DO 40 J=2,NJ
      FLUXI1(J,N)=0.
 40   FLUXL1(J,N)=0.
 20   CONTINUE
      DO 50 J=1,NJ
      DO 50 I=1,NI
      CON(I,J)=0.
```

```
      AP(I,J)=0.
      ALAM(I,J)=1.
      GAM(I,J)=1.
      IBLOCK(I,J)=0
      DO 60 N=1,NFMAX
   60 F(I,J,N)=0.
   50 CONTINUE
      DO 70 I=2,NI
      KBCJ1(I)=1
      KBCM1(I)=1
      FLXCJ1(I)=0.
      FLXCM1(I)=0.
      FLXPJ1(I)=0.
      FLXPM1(I)=0.
   70 CONTINUE
      DO 80 J=2,NJ
      KBCI1(J)=1
      KBCL1(J)=1
      FLXCI1(J)=0.
      FLXCL1(J)=0.
      FLXPI1(J)=0.
      FLXPL1(J)=0.
   80 CONTINUE
C
      RETURN
C*****************************************************
      ENTRY READY
C
      IF(KOUT.NE.1) OPEN(UNIT=7,FILE=PRINTF)
      IU1=6
      IF(KOUT.EQ.2) IU1=7
      IU2=7
      IF(KOUT.EQ.1) IU2=6
CREATE INITIAL OUTPUT
      DO 100 IUNIT=IU1,IU2
C
      IF(MODE.EQ.1) WRITE(IUNIT,1)
   1  FORMAT(1X,'RESULTS OF CONDUCT FOR CARTESIAN COORDINATE
SYSTEM' 1/1X,50(1H*)//)
      IF(MODE.EQ.2) WRITE(IUNIT,2)
   2  FORMAT(1X,'RESULTS OF CONDUCT FOR AXISYMMETRIC COORDINATE
SYSTEM' 1/1X,53(1H*)//)
      IF(MODE.EQ.3) WRITE(IUNIT,3)
   3  FORMAT(1X,'RESULTS OF CONDUCT FOR POLAR COORDINATE
SYSTEM' 1/1X,46(1H*)//)
      WRITE(IUNIT,5) HEADER
   5  FORMAT(1X,64('-')/1X,A64/1X,64('-')//)
      IF(L1.GT.NI.OR.M1.GT.NJ.OR.L1.LT.4.OR.M1.LT.4) THEN
```

```
      WRITE(IUNIT,6)
    6 FORMAT(1X,'EXECUTION TERMINATED DUE TO ONE(OR MORE) OF
 THE FOLLOWI
     1NG REASON(S)'/2X,'1) L1 GREATER THAN NI'/2X,'2) M1
 GREATER THAN NJ
    2 '/2X,'3) L1 LESS THAN 4'/2X,'4) M1 LESS THAN 4'/)
      KSTOP=1
      ENDIF
  100 CONTINUE
      IF(KSTOP.NE.0) STOP
 CALCULATE GEOMETRICAL QUANTITIES
      L2=L1-1
      L3=L2-1
      M2=M1-1
      M3=M2-1
      X(1)=XU(2)
      DO 110 I=2,L2
  110 X(I)=0.5*(XU(I+1)+XU(I))
      X(L1)=XU(L1)
      Y(1)=YV(2)
      DO 120 J=2,M2
  120 Y(J)=0.5*(YV(J+1)+YV(J))
      Y(M1)=YV(M1)
      DO 130 I=2,L2
  130 XCV(I)=XU(I+1)-XU(I)
      DO 140 J=2,M2
  140 YCV(J)=YV(J+1)-YV(J)
      IF(MODE.EQ.1) THEN
      DO 150 J=1,M1
      RV(J)=1
  150 R(J)=1
      ELSE
      RY1=R(1)-Y(1)
      DO 160 J=2,M1
      160 R(J)=Y(J)+RY1
      RV(2)=R(1)
      DO 170 J=3,M2
  170 RV(J)=RV(J-1)+YCV(J-1)
      RV(M1)=R(M1)
      ENDIF
      IF(MODE.EQ.3) THEN
      DO 180 J=1,M1
  180 SX(J)=R(J)
      ELSE
      DO 190 J=1,M1
      SX(J)=1.
  190 CONTINUE
      ENDIF
```

```
      DO 200 J=2,M2
      YCVR(J)=R(J)*YCV(J)
      IF(MODE.EQ.3) THEN
      ARX(J)=YCV(J)
      ELSE
      ARX(J)=YCVR(J)
      ENDIF
 200  CONTINUE
C
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE HEART
C*****************************************************
$INCLUDE:'COMMON'
C*****************************************************
CONSTRUCT LOOP FOR ALL EQUATIONS
      DO 999 N=1,NFMAX
      NF=N
      IF(KSOLVE(NF).EQ.0) GO TO 999
C
      CALL PHI
C
CALCULATE COEFFICIENTS IN THE DISCRETIZATION EQUATION
C
      BETA=4./3.
      IF(KORD.EQ.1) BETA=1.
      RLX=(1.-RELAX(NF))/RELAX(NF)
CONSIDER VOLUMETRIC TERMS
      DO 10 J=2,M2
      DO 10 I=2,L2
      VOL=YCVR(J)*XCV(I)
      APT=ALAM(I,J)/DT
      CON(I,J)=(CON(I,J)+APT*F(I,J,NF))*VOL
      AP(I,J)=(APT-AP(I,J))*VOL
10    CONTINUE
COEFFICIENTS FOR X-DIRECTION DIFFUSION
      DO 20 J=2,M2
      DO 20 I=2,L3
      DIFF=ARX(J)*2.*GAM(I,J)*GAM(I+1,J)/((XCV(I)*GAM(I+1,J)+
     1 XCV(I+1)*GAM(I,J)+SMALL)*SX(J))
      AIP(I,J)=DIFF+SMALL
      AIM(I+1,J)=AIP(I,J)
 20   CONTINUE
      DO 30 J=2,M2
CONSIDER I=1 BOUNDARY
      DIFF=GAM(2,J)/(0.5*XCV(2)*SX(J))+SMALL
      AIM(2,J)=BETA*DIFF
```

```
      AIP(1,J)=AIM(2,J)
      AIM(2,J)=AIM(2,J)*ARX(J)
      AIM(1,J)=(BETA-1.)*AIP(2,J)/ARX(J)
      AIP(2,J)=AIP(2,J)+AIM(1,J)*ARX(J)
      IF(KBCI1(J).EQ.1) THEN
      CON(2,J)=CON(2,J)+AIM(2,J)*F(1,J,NF)
      ELSE
      AP(1,J)=AIP(1,J)-FLXPI1(J)
      CON(1,J)=FLXCI1(J)
      TEMP=AIM(2,J)/AP(1,J)
      AP(2,J)=AP(2,J)-AIP(1,J)*TEMP
      AIP(2,J)=AIP(2,J)-AIM(1,J)*TEMP
      CON(2,J)=CON(2,J)+CON(1,J)*TEMP
      ENDIF
      AP(2,J)=AP(2,J)+AIM(2,J)
      AIM(2,J)=0.
CONSIDER I=L1 BOUNDARY
      DIFF=GAM(L2,J)/(0.5*XCV(L2)*SX(J))+SMALL
      AIP(L2,J)=BETA*DIFF
      AIM(L1,J)=AIP(L2,J)
      AIP(L2,J)=AIP(L2,J)*ARX(J)
      AIP(L1,J)=(BETA-1.)*AIM(L2,J)/ARX(J)
      AIM(L2,J)=AIM(L2,J)+AIP(L1,J)*ARX(J)
      IF(KBCL1(J).EQ.1) THEN
      CON(L2,J)=CON(L2,J)+AIP(L2,J)*F(L1,J,NF)
      ELSE
      AP(L1,J)=AIM(L1,J)-FLXPL1(J)
      CON(L1,J)=FLXCL1(J)
      TEMP=AIP(L2,J)/AP(L1,J)
      AP(L2,J)=AP(L2,J)-AIM(L1,J)*TEMP
      AIM(L2,J)=AIM(L2,J)-AIP(L1,J)*TEMP
      CON(L2,J)=CON(L2,J)+CON(L1,J)*TEMP
      ENDIF
      AP(L2,J)=AP(L2,J)+AIP(L2,J)
      AIP(L2,J)=0.
 30   CONTINUE
COEFFICIENTS FOR Y-DIRECTION DIFFUSION
      DO 40 J=2,M3
      DO 40 I=2,L2
      AREA=RV(J+1)*XCV(I)
      DIFF=AREA*2.*GAM(I,J)*GAM(I,J+1)/(YCV(J)*GAM(I,J+1)+
     1   YCV(J+1)*GAM(I,J)+SMALL)
      AJP(I,J)=DIFF+SMALL
      AJM(I,J+1)=AJP(I,J)
 40   CONTINUE
      DO 50 I=2,L2
CONSIDER J=1 BOUNDARY
      AREA=RV(2)*XCV(I)
```

```
      DIFF=GAM(I,2)/(0.5*YCV(2))+SMALL
      AJM(I,2)=BETA*DIFF
      AJP(I,1)=AJM(I,2)
      AJM(I,2)=AJM(I,2)*AREA
      AJM(I,1)=(BETA-1.)*AJP(I,2)/(RV(3)*XCV(I))
      AJP(I,2)=AJP(I,2)+AJM(I,1)*AREA
      IF(KBCJ1(I).EQ.1) THEN
      CON(I,2)=CON(I,2)+AJM(I,2)*F(I,1,NF)
      ELSE
      AP(I,1)=AJP(I,1)-FLXPJ1(I)
      CON(I,1)=FLXCJ1(I)
      TEMP=AJM(I,2)/AP(I,1)
      AP(I,2)=AP(I,2)-AJP(I,1)*TEMP
      AJP(I,2)=AJP(I,2)-AJM(I,1)*TEMP
      CON(I,2)=CON(I,2)+CON(I,1)*TEMP
      ENDIF
      AP(I,2)=AP(I,2)+AJM(I,2)
      AJM(I,2)=0.
CONSIDER J=M1 BOUNDARY
      AREA=RV(M1)*XCV(I)
      DIFF=GAM(I,M2)/(0.5*YCV(M2))+SMALL
      AJP(I,M2)=BETA*DIFF
      AJM(I,M1)=AJP(I,M2)
      AJP(I,M2)=AJP(I,M2)*AREA
      AJP(I,M1)=(BETA-1.)*AJM(I,M2)/(RV(M2)*XCV(I))
      AJM(I,M2)=AJM(I,M2)+AJP(I,M1)*AREA
      IF(KBCM1(I).EQ.1) THEN
      CON(I,M2)=CON(I,M2)+AJP(I,M2)*F(I,M1,NF)
      ELSE
      AP(I,M1)=AJM(I,M1)-FLXPM1(I)
      CON(I,M1)=FLXCM1(I)
      TEMP=AJP(I,M2)/AP(I,M1)
      AP(I,M2)=AP(I,M2)-AJM(I,M1)*TEMP
      AJM(I,M2)=AJM(I,M2)-AJP(I,M1)*TEMP
      CON(I,M2)=CON(I,M2)+CON(I,M1)*TEMP
      ENDIF
      AP(I,M2)=AP(I,M2)+AJP(I,M2)
      AJP(I,M2)=0.
 50   CONTINUE
COME HERE TO INTRODUCE UNDERRELAXATION
CONSTRUCT AP(I,J) AND CON(I,J) IN THEIR FINAL FORM
      DO 60 J=2,M2
      DO 60 I=2,L2
      ANB=AIP(I,J)+AIM(I,J)+AJP(I,J)+AJM(I,J)
      AINR=ANB*RLX
      AP(I,J)=AP(I,J)+ANB+AINR
      CON(I,J)=CON(I,J)+AINR*F(I,J,NF)
 60   CONTINUE
```

```
C
CALL THE SOLVE ROUTINE TO OBTAIN THE SOLUTION OF THE
C DISCRETIZATION EQUATIONS
C
      CALL SOLVE
999   CONTINUE
C
      TIME=TIME+DT
      ITER=ITER+1
      IF(ITER.GE.LAST) KSTOP=1
      RETURN
      END
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE SOLVE
C ***************************************************
$INCLUDE:'COMMON'
      DIMENSION RT(6)
C ***************************************************
      BIG1=1.E+10
      SMALL1=1.0E-5
      LL2=2*L2
      LL=LL2-2
      MM2=2*M2
      MM=MM2-2
      N=NF
      NTM=NTIMES(N)
      DO 999 NT=1,NTM
      NTT=NT
      ICON=1
COME HERE TO PERFORM THE I-DIRECTION BLOCK CORRECTION
C-----------------------------------------
      PTX(1)=0.
      QTX(1)=0.
      DO 10 I=2,L2
      BL=SMALL
      BLP=0.
      BLM=0.
      BLC=0.
      DO 20 J=2,M2
      IF(AP(I,J).LT.BIG1) THEN
      BL=BL+AP(I,J)
      IF(AP(I,J+1).LT.BIG1) BL=BL-AJP(I,J)
      IF(AP(I,J-1).LT.BIG1) BL=BL-AJM(I,J)
      IF(AP(I+1,J).LT.BIG1) BLP=BLP+AIP(I,J)
      IF(AP(I-1,J).LT.BIG1) BLM=BLM+AIM(I,J)
CONVERGENCE CRITERION FOR THE SOLUTION ROUTINE
      RT(1)=AIP(I,J)*F(I+1,J,N)
      RT(2)=AIM(I,J)*F(I-1,J,N)
```

```
      RT(3)=AJP(I,J)*F(I,J+1,N)
      RT(4)=AJM(I,J)*F(I,J-1,N)
      RT(5)=-AP(I,J)*F(I,J,N)
      RT(6)=CON(I,J)
      RES=0
      TERM=1.0E-8
      DO 30 IRT=1,6
      RES=RES+RT(IRT)
   30 TERM=MAX(TERM,ABS(RT(IRT)))
      IF(ABS(RES/TERM).GT.CRIT(N))ICON=0
      BLC=BLC+RES
      ENDIF
   20 CONTINUE
      DENOM=BL-PTX(I-1)*BLM
      IF(ABS(DENOM/BL).LT.SMALL1) DENOM=BIG
      PTX(I)=BLP/DENOM
      QTX(I)=(BLC+BLM*QTX(I-1))/DENOM
   10 CONTINUE
      IF(NTT.NE.1.AND.ICON.EQ.1) GO TO 990
      IF(KBLOC(NF).EQ.0) GO TO 80
      BL=0.
      DO 40 I=L2,2,-1
      BL=BL*PTX(I)+QTX(I)
      DO 40 J=2,M2
      IF(AP(I,J).LT.BIG1) F(I,J,N)=F(I,J,N)+BL
   40 CONTINUE
COME HERE TO PERFORM THE J-DIRECTION BLOCK CORRECTION
C-----------------------------------------------
      PTY(1)=0.
      QTY(1)=0.
      DO 50 J=2,M2
      BL=SMALL
      BLP=0.
      BLM=0.
      BLC=0.
      DO 60 I=2,L2
      IF(AP(I,J).LT.BIG1) THEN
      BL=BL+AP(I,J)
      IF(AP(I+1,J).LT.BIG1) BL=BL-AIP(I,J)
      IF(AP(I-1,J).LT.BIG1) BL=BL-AIM(I,J)
      IF(AP(I,J+1).LT.BIG1) BLP=BLP+AJP(I,J)
      IF(AP(I,J-1).LT.BIG1) BLM=BLM+AJM(I,J)
      BLC=BLC+CON(I,J)+AIP(I,J)*F(I+1,J,N)+AIM(I,J)*F(I-1,J,N)
     1 +AJP(I,J)*F(I,J+1,N)+AJM(I,J)*F(I,J-1,N)-AP(I,J)*F(I,J,N)
      ENDIF
   60 CONTINUE
      DENOM=BL-PTY(J-1)*BLM
      IF(ABS(DENOM/BL).LT.SMALL1) DENOM=BIG
```

```
      PTY(J)=BLP/DENOM
      QTY(J)=(BLC+BLM*QTY(J-1))/DENOM
   50 CONTINUE
      BL=0.
      DO 70 J=M2,2,-1
      BL=BL*PTY(J)+QTY(J)
      DO 70 I=2,L2
      IF(AP(I,J).LT.BIG1) F(I,J,N)=F(I,J,N)+BL
   70 CONTINUE
   80 CONTINUE
CARRY OUT THE I-DIRECTION TDMA
C-----------------------------------------
      DO 90 JJ=2,MM
      J=MIN(JJ,MM2-JJ)
      PTX(1)=0.
      QTX(1)=0
      DO 100 I=2,L2
      DENOM=AP(I,J)-PTX(I-1)*AIM(I,J)
      PTX(I)=AIP(I,J)/DENOM
      TEMP=CON(I,J)+AJP(I,J)*F(I,J+1,N)+AJM(I,J)*F(I,J-1,N)
      QTX(I)=(TEMP+AIM(I,J)*QTX(I-1))/DENOM
  100 CONTINUE
      DO 110 I=L2,2,-1
  110 F(I,J,N)=F(I+1,J,N)*PTX(I)+QTX(I)
   90 CONTINUE
CARRY OUT THE J-DIRECTION TDMA
C-----------------------------------------
      DO 120 II=2,LL
      I=MIN(II,LL2-II)
      PTY(1)=0.
      QTY(1)=0
      DO 130 J=2,M2
      DENOM=AP(I,J)-PTY(J-1)*AJM(I,J)
      PTY(J)=AJP(I,J)/DENOM
      TEMP=CON(I,J)+AIP(I,J)*F(I+1,J,N)+AIM(I,J)*F(I-1,J,N)
      QTY(J)=(TEMP+AJM(I,J)*QTY(J-1))/DENOM
  130 CONTINUE
      DO 140 J=M2,2,-1
  140 F(I,J,N)=F(I,J+1,N)*PTY(J)+QTY(J)
  120 CONTINUE
C-----------------------------------------
  999 CONTINUE
      NTC(N)=NTT
      GO TO 991
  990 NTC(N)=NTT-1
  991 CONTINUE
CALCULATE THE UNKNOWN BOUNDARY VALUES AND FLUXES
C-----------------------------------------
```

```
      DO 160 I=2,L2
      TEMP=AJM(I,1)*(F(I,3,N)-F(I,2,N))
      IF(KBCJ1(I).EQ.2)
     1 F(I,1,N)=(AJP(I,1)*F(I,2,N)-TEMP+CON(I,1))/AP(I,1)
      FLUXJ1(I,N)=AJP(I,1)*(F(I,1,N)-F(I,2,N))+TEMP
      TEMP=AJP(I,M1)*(F(I,M3,N)-F(I,M2,N))
      IF(KBCM1(I).EQ.2)
     1 F(I,M1,N)=(AJM(I,M1)*F(I,M2,N)-TEMP+CON(I,M1))/AP(I,M1)
160   FLUXM1(I,N)=AJM(I,M1)*(F(I,M1,N)-F(I,M2,N))+TEMP
      DO 170 J=2,M2
      TEMP=AIM(1,J)*(F(3,J,N)-F(2,J,N))
      IF(KBCI1(J).EQ.2)
     1 F(1,J,N)=(AIP(1,J)*F(2,J,N)-TEMP+CON(1,J))/AP(1,J)
      FLUXI1(J,N)=AIP(1,J)*(F(1,J,N)-F(2,J,N))+TEMP
      TEMP=AIP(L1,J)*(F(L3,J,N)-F(L2,J,N))
      IF(KBCL1(J).EQ.2)
     1 F(L1,J,N)=(AIM(L1,J)*F(L2,J,N)-TEMP+CON(L1,J))/AP(L1,J)
170   FLUXL1(J,N)=AIM(L1,J)*(F(L1,J,N)-F(L2,J,N))+TEMP
C
COME HERE TO RESET CON,AP,KBC,FLXC, AND FLXP
C-------------------------------------------
      DO 180 J=2,M2
      KBCI1(J)=1
      KBCL1(J)=1
      FLXCI1(J)=0.
      FLXCL1(J)=0.
      FLXPI1(J)=0.
      FLXPL1(J)=0.
      DO 180 I=2,L2
      CON(I,J)=0.
      AP(I,J)=0.
180   CONTINUE
      DO 190 I=2,L2
      KBCJ1(I)=1
      KBCM1(I)=1
      FLXCJ1(I)=0.
      FLXCM1(I)=0.
      FLXPJ1(I)=0.
      FLXPM1(I)=0.
190   CONTINUE
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE TOOLS
C*****************************************************
$INCLUDE:'COMMON'
C*****************************************************
      ENTRY EZGRID
```

```
C
CONSTRUCT THE X-DIRECTION GRID
      L1=NCVLX+2
      XU(2)=0.
      XU(L1)=XL
      L2=L1-1
      FCVLX=FLOAT(NCVLX)
      DO 20 I=3,L2
      DD=FLOAT(I-2)/FCVLX
      IF(POWERX.GT.0.) THEN
      XU(I)=XL*DD**POWERX
      ELSE
      XU(I)=XL*(1.-(1.-DD)**(-POWERX))
      ENDIF
 20   CONTINUE
CONSTRUCT THE Y-DIRECTION GRID
      M1=NCVLY+2
      YV(2)=0.
      YV(M1)=YL
      M2=M1-1
      FCVLY=FLOAT(NCVLY)
      DO 30 J=3,M2
      DD=FLOAT(J-2)/FCVLY
      IF(POWERY.GT.0.) THEN
      YV(J)=YL*DD**POWERY
      ELSE
      YV(J)=YL*(1.-(1.-DD)**(-POWERY))
      ENDIF
 30   CONTINUE
      RETURN
C*****************************************************
      ENTRY ZGRID
CONSTRUCT THE GRID ZONE-BY-ZONE
C
CONSIDER THE X DIRECTION
      XU(2)=0.
      I2=2
      DO 100 NZ=1,NZX
      FCVLX=FLOAT(NCVX(NZ))
      ILAST=I2
      I1=ILAST+1
      I2=ILAST+NCVX(NZ)
      DO 100 I=I1,I2
      DD=FLOAT(I-ILAST)/FCVLX
      IF(POWRX(NZ).GT.0.) THEN
      XU(I)=XU(ILAST)+XZONE(NZ)*DD**POWRX(NZ)
      ELSE
      XU(I)=XU(ILAST)+XZONE(NZ)*(1.-(1.-DD)**(-POWRX(NZ)))
```

```
      ENDIF
100   CONTINUE
      L1=I2
C
CONSIDER THE Y DIRECTION
      YV(2)=0.
      J2=2
      DO 110 NZ=1,NZY
      FCVLY=FLOAT(NCVY(NZ))
      JLAST=J2
      J1=JLAST+1
      J2=JLAST+NCVY(NZ)
      DO 110 J=J1,J2
      DD=FLOAT(J-JLAST)/FCVLY
      IF(POWRY(NZ).GT.0.) THEN
      YV(J)=YV(JLAST)+YZONE(NZ)*DD**POWRY(NZ)
      ELSE
      YV(J)=YV(JLAST)+YZONE(NZ)*(1.-(1.-DD)**(-POWRY(NZ)))
      ENDIF
110   CONTINUE
      M1=J2
      RETURN
C*****************************************************
      ENTRY PRINT
C
      DO 999 IUNIT=IU1,IU2
C
COME HERE TO ARRANGE THE PRINTOUT OF TWO-DIMENSIONAL FIELDS
      IF(KPGR.NE.0) THEN
C
CREATE PRINTOUT FOR GRID
C
      WRITE(IUNIT,1)
    1 FORMAT(' ')
      IBEG=1
      IEND=L1
      IREP=(IEND-IBEG+7)/7
      DO 200 K=1,IREP
      INCR=MIN(6,IEND-IBEG)
      ISTOP=IBEG+INCR
      WRITE(IUNIT,2) (I,I=IBEG,ISTOP)
    2 FORMAT(/2X,'I =',2X,7(I4,5X))
      IF(MODE.EQ.3) THEN
      WRITE(IUNIT,3) (X(I),I=IBEG,ISTOP)
    3 FORMAT(1X,'TH =',1P7E9.2)
      ELSE
      WRITE(IUNIT,4) (X(I),I=IBEG,ISTOP)
    4 FORMAT(2X,'X =',1P7E9.2)
```

```
      ENDIF
      IBEG=ISTOP+1
  200 CONTINUE
C
      WRITE(IUNIT,1)
      JBEG=1
      JEND=M1
      JREP=(JEND-JBEG+7)/7
      DO 210 K=1,JREP
      INCR=MIN(6,JEND-JBEG)
      JSTOP=JBEG+INCR
      WRITE(IUNIT,5) (J,J=JBEG,JSTOP)
    5 FORMAT(/2X,'J =',2X,7(I4,5X))
      WRITE(IUNIT,6) (Y(J),J=JBEG,JSTOP)
    6 FORMAT(2X,'Y =',1P7E9.2)
      JBEG=JSTOP+1
  210 CONTINUE
      ENDIF
CREATE PRINTOUT FOR THE VALUES OF DEPENDENT VARIABLES
      DO 220 N=1,NFMAX
      IF(KPRINT(N).NE.0) THEN
      WRITE(IUNIT,7) TITLE(N)
    7 FORMAT(/1X,6(1H*),3X,A18,3X,6(1H*)/9X,20(1H-))
      IBEG=1
      JBEG=1
      IEND=L1
      JEND=M1
      IREP=(IEND-IBEG+7)/7
      DO 230 K=1,IREP
      INCR=MIN(6,IEND-IBEG)
      ISTOP=IBEG+INCR
      WRITE(IUNIT,8) (I,I=IBEG,ISTOP)
    8 FORMAT(/' I =',I6,6I9)
      WRITE(IUNIT, 9)
    9 FORMAT(' J')
      DO 240 J=JEND,JBEG,-1
      WRITE(IUNIT,10) J,(F(I,J,N),I=IBEG,ISTOP)
   10 FORMAT(1X,I2,3X,1P7E9.2)
  240 CONTINUE
      IBEG=ISTOP+1
  230 CONTINUE
      ENDIF
  220 CONTINUE
  999 CONTINUE
      RETURN
C*****************************************************
      ENTRY PLOT
      OPEN(UNIT=8,FILE=PLOTF)
```

```
COME HERE TO CREATE DATA FOR PLOTTING
C
     KFLOW=2
     WRITE(8,300) HEADER
300  FORMAT(A64)
     WRITE(8,310) KFLOW,L1,M1,NFMAX,MODE,(KPLOT(I),I=1,NFMAX)
310  FORMAT(18I5)
     IBLOK=0
     DO 320 J=2,M2
     DO 320 I=2,L2
     IF(IBLOCK(I,J).EQ.1) THEN
     IBLOK=1
     GO TO 330
     ENDIF
320  CONTINUE
330  CONTINUE
     WRITE(8,310) IBLCK
     WRITE(8,340) (TITLE(N),N=1,NFMAX)
340  FORMAT(4A18)
     WRITE(8,350) (X(I),I=1,L1),(Y(J),J=1,M1),(XU(I),I=2,L1)
     1,(YV(J),J=2,M1),(R(J),J=1,M1)
350  FORMAT(5E12.6)
     DO 360 N=1,NFMAX
     IF(KPLOT(N).NE.0) WRITE(8,350) ((F(I,J,N),I=1,L1),J=1,M1)
360  CONTINUE
     IF(IBLOK.EQ.1) THEN
     WRITE(8,310) ((IBLOCK(I,J),I=1,L1),J=1,M1)
     ENDIF
     CLOSE(8)
     RETURN
     END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
     SUBROUTINE VALUES
C*****************************************************
C
CREATE A FACILITY TO ASSIGN VALUES TO REAL VARIABLES
C
     ENTRY DATA9(A1,C1,A2,C2,A3,C3,A4,C4,A5,C5,A6,C6,A7,C7,
           A8,C8,A9,C9)
     A9=C9
     ENTRY DATA8(A1,C1,A2,C2,A3,C3,A4,C4,A5,C5,A6,C6,
                 A7,C7,A8,C8)
     A8=C8
     ENTRY DATA7(A1,C1,A2,C2,A3,C3,A4,C4,A5,C5,A6,C6,A7,C7)
     A7=C7
     ENTRY DATA6(A1,C1,A2,C2,A3,C3,A4,C4,A5,C5,A6,C6)
     A6=C6
     ENTRY DATA5(A1,C1,A2,C2,A3,C3,A4,C4,A5,C5)
```

```
      A5=C5
      ENTRY DATA4(A1,C1,A2,C2,A3,C3,A4,C4)
      A4=C4
      ENTRY DATA3(A1,C1,A2,C2,A3,C3)
      A3=C3
      ENTRY DATA2(A1,C1,A2,C2)
      A2=C2
      ENTRY DATA1(A1,C1)
      A1=C1
      RETURN
C*****************************************************
CREATE A FACILITY TO ASSIGN VALUES TO INTEGER VARIABLES
C
      ENTRY INTA9(I1,J1,I2,J2,I3,J3,I4,J4,I5,J5,I6,J6,I7,
                  J7,I8,J8,I9,J9)
      I9=J9
      ENTRY INTA8(I1,J1,I2,J2,I3,J3,I4,J4,I5,J5,I6,J6,I7,
                  J7,I8,J8)
      I8=J8
      ENTRY INTA7(I1,J1,I2,J2,I3,J3,I4,J4,I5,J5,I6,J6,I7,J7)
      I7=J7
      ENTRY INTA6(I1,J1,I2,J2,I3,J3,I4,J4,I5,J5,I6,J6)
      I6=J6
      ENTRY INTA5(I1,J1,I2,J2,I3,J3,I4,J4,I5,J5)
      I5=J5
      ENTRY INTA4(I1,J1,I2,J2,I3,J3,I4,J4)
      I4=J4
      ENTRY INTA3(I1,J1,I2,J2,I3,J3)
      I3=J3
      ENTRY INTA2(I1,J1,I2,J2)
      I2=J2
      ENTRY INTA1(I1,J1)
      I1=J1
      RETURN
      END
CCCC
```

СПИСОК ИМЕН НА ФОРТРАНе

Приведем список, куда включены имена только тех переменных, значение которых существенно. Другие переменные, которые используются для временного хранения величин, в список не входят, но их смысл легко понять из контекста.

`AIM(I,J)` — коэффициент a_W;

`AINR` — инерция I [см. (5.64)];

`AIP(I,J)` — коэффициент a_E;

`AJM(I,J)` — коэффициент a_S;

`AJP(I,J)` — коэффициент a_N;

`ALAM(I,J)` — коэффициент λ [см. (3.4)];

`ANB` — сумма соседних коэффициентов;

`AP(I,J)` — коэффициент a_P; массив, эквивалентный S_P;

`APT` — коэффициент a_P^0 для нестационарного члена [см. (5.20)];

`AREA` — площадь грани контрольного объема;

`ARX(I,J)` — площадь грани контрольного объема, перпендикулярной оси x;

`BETA` — коэффициент в выражениях для аппроксимации на границах;

`BIG` — очень большое число, например `1.E20`;

`BL` — коэффициент, используемый в блочной коррекции;

`BLC` — то же;

`BLM` — »

`BLP` — »

`CON(I,J)` — постоянный член b; массив, эквивалентный S_C;

`CRIT(NF)` — константа для критерия сходимости, используемого в подпрограмме `SOLVE`;

`DIFF` — диффузионная проводимость D;

`DT` — шаг по времени Δt;

`F(I,J,NF)` — различные функции ϕ;

`FLUXI1(J,NF)` — плотность диффузионного потока через левую границу;

`FLUXJ1(I,NF)` — то же через нижнюю границу;

FLUXL1(J,NF) — то же через правую границу;
FLUXM1(I,NF) — то же через верхнюю границу;
FLXCI1(J) — константа f_C для потока через левую границу;
FLXCJ1(I) — то же через нижнюю границу;
FLXCL1(J) — то же через правую границу;
FLXCM1(I) — то же через верхнюю границу;
FLXPI1(J) — константа f_P для потока через левую границу;
FLXPJ1(I) — то же через нижнюю границу;
FLXPL1(J) — то же через правую границу;
FLXPM1(I) — то же через верхнюю границу;
GAM(I,J) — коэффициент диффузии Г;
HEADER — 64-символьный заголовок задачи;
I — индекс, определяющий положение по оси x;
IBLOCK(I,J) — индекс, обозначающий блокировку контрольных объемов;
ITER — счетчик итераций;
IU1, IU2 — индексы для устройств вывода;
J — индекс, определяющий положение по оси y;
KBCI1(J) — индикатор для левой границы (равен единице для заданного ф и двум для заданных f_C и f_P) [см. (5.39)];
KBCJ1(I) — то же для нижней границы;
KBCL1(J) — то же для правой границы;
KBCM1(I) — то же для верхней границы;
KBLOC(NF) — индикатор блочной коррекции (блочная коррекция применяется при ненулевом значении индикатора);
KORD — индикатор задания порядка аппроксимации граничных условий (равен единице и двум соответственно для первого и второго порядков аппроксимации);
KOUT — индикатор вывода результатов [равен единице (на экран), двум (в файл), трем (и на экран, и в файл)];
KPGR — индикатор вывода на печать сеточных массивов [массивы X(I) и Y(J) выводятся на печать при ненулевом значении индикатора];
KPLOT(NF) — индикатор графической обработки [F(I,J,NF) включается в файл графической обработки при ненулевом значении индикатора];
KPRINT(NF) — индикатор вывода на печать зависимой переменной [F(I,J,NF) выводится на печать при ненулевом значении индикатора];
KSOLVE(NF) — индикатор решения обобщенного дискретного уравнения (решается при ненулевом значении индикатора);

KSTOP — индикатор прекращения вычислений (вычисления прекращаются при ненулевом значении индикатора);
L1 — значение I на правой границе;
L2 — L1−1;
L3 — L2−1;
LAST — максимальное число итераций;
M1 — значение J на верхней границе;
M2 — M1−1;
M3 — M2−1;
MODE — индикатор для задания системы координат [равен 1 для (x, y), 2 для (x, r), 3 для (θ, r)];
N — обычно то же, что и NF;
NCVLX — число контрольных объемов в области по оси x;
NCVLY — то же в области по оси y;
NCVX(NZ) — то же в зоне по оси x;
NCVY(NZ) — то же в зоне по оси y;
NF — индекс для определения конкретных ϕ;
NFMAX — максимальное значение NF;
NI — максимальное число расчетных точек по оси x;
NJ — то же по оси y;
NTC(NF) — число повторов алгоритма, выполненных в подпрограмме SOLVE;
NTIMES(NF) — максимальное число повторов алгоритма в подпрограмме SOLVE;
NZ — индекс для определения конкретной зоны;
NZMAX — максимальное число зон;
NZX — число зон по оси x;
NZY — то же по оси y;
PLOTF — 64-символьная переменная для имени файла с данными для графической обработки;
POWERX — параметр неравномерности сетки по оси x;
POWERY — то же по оси y;
POWRX(NZ) — то же в зоне по оси x;
POWRY(NZ) — то же в зоне по оси y;
PRINTF — 64-символьная переменная с именем файла для вывода результатов;
PTX(I),PTY(J) — коэффициенты в алгоритме прогонки;
QTX(I),QTY(J) — то же;
R(J) — единица при MODE = 1; радиус r для расчетной точки (I,J) при MODE = 2 или 3;
RELAX(NF) — коэффициент релаксации α для F(I,J,NF);

RV(J) — значение радиуса r на грани контрольного объема с координатой YV(J);

SC(I,J) — постоянная часть в линеаризованном выражении источникового члена S_C [см. (5.13)];

SMALL — очень малое число, например 1.E−20;

SP(I,J) — коэффициент S_P в выражении (5.13);

SX(J) — множитель для расчетных точек с координатой Y(J) по направлению x;

TIME — время t в нестационарных задачах;

TITLE(NF) — 18-символьный заголовок для F(I,J,NF);

VOL — объем КО;

X(I) — координата x узловой точки с номером I;

XCV(I) — размер контрольного объема по оси x;

XL — размер расчетной области по оси x;

XU(I) — значение x на грани контрольного объема;

XZONE(NZ) — размер зоны по оси x;

Y(J) — координата y узловой точки с номером J;

YCV(J) — размер контрольного объема по оси y;

YCVR(J) — площадь $r\Delta y$ грани контрольного объема;

YL — размер расчетной области по оси y;

YV(J) — значение y на грани контрольного объема;

YZONE(NZ) — размер зоны по оси y.

ЗНАЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ, ЗАДАВАЕМЫХ ПО УМОЛЧАНИЮ

Имя переменной	Значение	Комментарий
ALAM(I,J)	1.	Значение $\lambda = 1$
BIG	1.E20	Очень большое число (аналог бесконечности)
CRIT(NF)	1.E–5	Критерий выхода в алгоритме прогонки
DT	1.E20	Шаг по времени для стационарных задач
F(I,J,N)	0.	Все переменные изначально равны нулю
FLXCI1(J)	0.	$f_C = 0$ на границе с I = 1
FLXCJ1(I)	0.	То же J = 1
FLXCL1(J)	0.	То же I = L1
FLXCM1(I)	0.	То же J = M1
FLXPI1(J)	0.	$f_P = 0$ на границе с I = 1
FLXPJ1(I)	0.	То же J = 1
FLXPL1(J)	0.	То же I = L1
FLXPM1(I)	0.	То же J = M1
GAM(I,J)	1.	Везде одинаковое значение Г, равное единице
IBLOCK(I,J)	0	В расчетной области отсутствуют заблокированные КО
ITER	0	Начальное значение счетчика итераций
KBCI1(J)	1	Задано значение ϕ при I = 1
KBCJ1(I)	1	То же J = 1
KBCL1(J)	1	То же I = L1
KBCM1(I)	1	То же J = M1
KBLOC(NF)	1	Выполняется блочная коррекция
KORD	2	На границах реализуется аппроксимация второго порядка
KOUT	3	Результаты выводятся на экран и в файл с именем PRINTF
KPGR	1	Распечатываются координаты расчетных точек
KPLOT(NF)	0	Данные в файл для графики не записываются
KPRINT(NF)	0	Поле переменной не выводится на печать

KSOLVE(NF)	0	Уравнение для переменной не решается
KSTOP	0	Выполнение расчетов не прекращается
LAST	5	Выполняются пять итераций
MODE	1	Декартова система координат
NTIMES(NF)	10	В подпрограмме SOLVE выполняются 10 повторов алгоритма
PLOTF	PLOT1	Имя файла для графической обработки
POWERX	1.	Равномерная сетка по оси x
POWERY	1.	То же по оси y
POWRX(NZ)	1.	Во всех зонах равномерная сетка по оси x
POWRY(NZ)	1.	То же по оси y
PRINTF	PRINT1	Имя файла для вывода результатов
R(1)	0.	Радиус при J = 1
RELAX(NF)	1.	Релаксации не используются
SC(I,J)	0.	Коэффициент $S_C = 0$
SMALL	1.E-20	Малое (практически нулевое) число
SP(I,J)	0.	Коэффициент $S_P = 0$
TIME	0.	Начальный момент времени

ПАМЯТКА ПО ПОСТРОЕНИЮ ПОДПРОГРАММЫ ADAPT

Общая часть. Используйте выражения с операторами DIMENSION и EQUIVALENCE с целью введения удобных имен для частей массива F.

GRID. Определите переменную HEADER и имена файлов для вывода результатов и графической обработки. Затем задайте MODE, L1, M1, XU(I) (I = 2,L1) и YV(J) (J = 2,M1). Если MODE ≠ 1, задайте также R(1). Помните, что 4 ≤ L1 ≤ NI и 4 ≤ M1 ≤ NJ. Для построения равномерной сетки необходимо задать MODE, NCVLX, NCVLY, XL и YL, а также R(1) для MODE ≠ 1, затем вызвать подпрограмму EZGRID. С использованием переменных POWERX и POWERY можно ввести простую неравномерность сетки. Для более сложных сеток следует использовать подпрограмму ZGRID с соответствующими входными данными.

BEGIN. Задайте значения для массивов переменных KSOLVE(NF), KPRINT(NF), TITLE(NF), RELAX(NF), NTIMES(NF), CRIT(NF),... если для задачи неприемлемы их значения по умолчанию. Заполните массивы F(I,J,NF) их начальными значениями, используя корректные значения на границах, если они известны.

OUTPUT. Реализуйте вывод любых желаемых результатов. Пересчитайте величины, которые изменяются после каждой итерации или шага по времени. Для распечатки полей переменных F(I,J,NF) можете вызвать подпрограмму PRINT.

PHI. Для каждого используемого NF задайте массив ALAM(I,J), GAM(I,J), SC(I,J) и SP(I,J) при I = 2, L2 и J = 2,M2. Определите подобающие значения KBC и соответствующие FLXC и FLXP для граничных точек, в которых не заданы значения зависимой переменной.

Список литературы

1. **Karki K.C., Patankar S.V.** Calculation Procedure for Viscous Incompressible Flows in Complex Geometries // Num. Heat Transfer. 1988.Vol. 14. P. 295.
2. **Kays W.M., Crawford M.E.** Convective Heat and Mass Transfer. New York: McGraw-Hill, 1980.
3. **Launder B.E., Spalding D.B.** The Numerical Computation of Turbulent Flow // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1974. Vol. 3. P. 269.
4. **Leinhard J.H.** Heat Conduction through «Yin-Yang» Bodies // J. Heat Transfer. 1981. Vol. 103. P. 600.
5. **Patankar S.V.** A Numerical Method for Conduction in Composite Materials, Flow in Irregular Geometries and Conjugate Heat Transfer // Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf. Toronto, 1978. Vol. 3. P. 297.
6. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984.
7. **Patankar S.V.** A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations // Num. Heat Transfer. 1981. Vol. 4. P. 409.
8. **Patankar S.V., Acharya S.** Development of a Turbulence Model for Rectangular Passages // Trans. CSME. 1984. Vol. 8. P. 146.
9. **Patankar S.V., Baliga B.R.** A New Finite-Difference Scheme for Parabolic Equations // Num. Heat Transfer. 1978. Vol. 1. P. 27.
10. **Patankar S.V., Ivanovic M., Sparrow E.M.** Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer in Internally Finned Tubes and Annuli // J. Heat Transfer. 1979. Vol. 101. P. 29.
11. **Prakash C., Patankar S.V.** Combined Free and Forced Convection in Vertical Tubes with Radial Internal Fins // J. Heat Transfer. 1981. Vol. 103. P. 566.
12. **Settari A., Aziz K.** A Generalization of the Additive Correction Methods for the Iterative Solution of Matrix Equations // SIAM J. Num. Analysis. 1973. Vol. 10. P. 506.
13. **Shah R.K., London A.L.** Laminar Flow Forced Convection in Ducts. New York: Academic Press, 1978.
14. **Sparrow E.M., Baliga B.R., Patankar S.V.** Forced Convection Heat Transfer from a Shrouded Fin Array with and without Tip Clearance // J. Heat Transfer. 1978. Vol. 100. P. 572.

15. **Sparrow E.M., Patankar S.V.** Relationships among Boundary Conditions and Nusselt Numbers for Thermally Developed Duct Flows // J. Heat Transfer. 1977. Vol. 99. P. 483.
16. **Sparrow E.M., Patankar S.V., Shahrestani H.** Laminar Heat Transfer in a Pipe Subjected to a Circumferentially Varying External Heat Transfer Coefficient // Num. Heat Transfer. 1978. Vol. 1. P. 117.
17. **Zhang Z., Patankar S.V.** Influence of Buoyancy on the Vertical Flow and Heat Transfer in a Shrouded Fin Array // J. Heat Mass Transfer. 1984. Vol. 27. P. 137.

Учебное издание

Патанкар Сухас В.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ В КАНАЛАХ

Редактор *Н.Н. Сошникова*
Обложка художника *А.Ю. Земляруба*
Технический редактор *Т.А. Дворецкова*
Корректоры *Р.М. Ваничкина, В.В. Сомова*
Компьютерная верстка *В.В. Пак*

ЛР № 020528 от 05.06.97

Подписано в печать с оригинала-макета 10.11.2003. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,5. Усл.-кр. отт. 19,5. Уч.-изд. л. 19,8.
Тираж 2000 экз. С-015

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14

ООО «МБА ГАРАНТ»
Заказ 18/03 от 03.12.03 г.

Отпечатано в ФГУП Издательство «Известия»
Управления делами Президента РФ
127994, ГСП-4, Москва, К-6, Пушкинская пл., д. 5
Телефоны: (7 095) 200 3636, 200 3020
e-mail: izd.izv@ru.net
Заказ 3732