Библиотека СОК

Н.М.ЦИРЕЛЬМАН

ТЕОРИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Уфа 2002

Министерство образования Российской Федерации

Уфимский государственный авиационный технический университет

Н.М. ЦИРЕЛЬМАН

ТЕОРИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Часть I

Допущено
Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов 652200 – Двигатели летательных аппаратов и специальностей 130200 – Авиационные двигатели и энергетические установки, 131500 – Авиационная и ракетно-космическая теплотехника и по направлению подготовки бакалавров и магистров 551000 – Авиа- и ракетостроение

Уфа 2002

УДК 621.1 (07)

ББК 31.31 (Я7)
Ц 68

Ц68 **Цирельман Н.М.** Теория и прикладные задачи тепломассопереноса. Часть I: Учеб. пособие/ Н.М.Цирельман; Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа, 2002. – 108 с.
ISBN 5-86911-368-7

В первой части настоящего учебного пособия изложены основные понятия и закономерности процессов теплопроводности, конвективного и лучистого теплообмена. Рассмотрены численно-аналитические методы решения задач по определению нестационарных и стационарных температурных полей в твердых телах при различных краевых условиях. Интегральные характеристики прикладных задач конвективного теплообмена описаны с привлечением аппарата обобщенных переменных. Рассмотрены зависимости для расчета параметров теплообмена излучением твердых тел и газов.

Во второй части этого пособия будут освещены вопросы теплообмена при изменении агрегатного состояния вещества (при кипении и при конденсации), вопросы массопроводности, конвективного массообмена и взаимосвязанной тепломассопроводности.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 131500 – Авиационная и ракетно-космическая теплотехника, 130200 – Авиационные двигатели и энергетические установки и по направлению бакалаврской и магистерской подготовки 551000 – Авиа- и ракетостроение. Учебное пособие будет также полезным для студентов других технических направлений и специальностей.

Ил. 46. Библиогр.: 15 наим.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Уфимского государственного авиационного технического университета

Научный редактор: канд.физ.-мат.наук, доцент С.Ю. Лукащук
Рецензенты: кафедра теоретических основ теплотехники Казанского государственного технического университета им.А.Н.Туполева, зав.кафедрой д-р техн.наук, профессор Ю.Ф.Гортышов;
зам.Генерального конструктора ФГУП НПП «Мотор», канд.техн.наук В.И.Большагин

ISBN 5-86911-368-7

© Уфимский государственный авиационный технический университет, 2002
© Н.М.Цирельман, 2002

Учебное издание

ЦИРЕЛЬМАН Наум Моисеевич

ТЕОРИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Часть I

Редактор З.Г. Кашаева
ЛР № 020258 от 08.01.98
Подписано к печати 28.05.02 . Формат 60×84 1/16.Бумага писчая.
Печать плоская. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 6,8.
Усл. кр.-отт.6,8.Уч.-изд.л. 6,6 . Тираж 300 экз. Заказ № 52 . С(25).

Уфимский государственный авиационный технический университет
Редакционно-издательский комплекс УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса, 12

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

ВВЕДЕНИЕ 3

1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ 5
1.1. Механизм процесса 5
1.2. Основные понятия теплопроводности (и теплопередачи) 5
1.3. Гипотеза Ж.-Б.Фурье 8
1.4. Уравнение Фурье 10
1.5. Краевые условия для уравнения Фурье 15
1.6. Краевая задача нестационарной теплопроводности 19
1.7. Решение краевой задачи нестационарной теплопроводности 21
1.8. Численное решение нелинейной задачи нестационарной теплопроводности 26
1.8.1. Метод элементарных тепловых балансов 26
1.8.2. Метод сеток (метод конечных разностей) 30
1.9. Стационарная теплопроводность 34
1.9.1. Неограниченная пластина 36
1.9.1.1. Вид стационарного температурного поля 36
1.9.1.2. Тепловой поток через однослойную плоскую стенку при ГУ-I 36
1.9.1.3. Тепловой поток через многослойную плоскую стенку при ГУ-I 37
1.9.1.4. Тепловой поток через одно- и многослойную плоскую стенку при ГУ-III 38
1.9.2. Полый цилиндр 41
1.9.2.1. Вид стационарного температурного поля 41
1.9.2.2. Тепловой поток через однослойный полый цилиндр при ГУ-I 42
1.9.2.3. Тепловой поток через многослойный полый цилиндр при ГУ-I 43
1.9.2.4. Тепловой поток через одно- и многослойный полый цилиндр при ГУ-III 44
1.9.3. Обобщенное описание стационарной теплопроводности 46
1.9.4. Тепловая изоляция конструкций 47
1.9.5. Нелинейная стационарная теплопроводность 51

2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН 54

2.1. Схема В.Нуссельта 54
2.2. Основные положения теории подобия и физического моделирования 56
2.2.1. Необходимые условия для подобия распределений скорости и температуры в потоке 57
2.2.2. Достаточные условия для подобия вынужденных течений 58
2.2.3. Достаточные условия для подобия свободных термических течений 61
2.2.4. Достаточные условия для подобия распределений скорости

в вынужденных течениях с наложением свободной термической конвекции ……..……62
2.2.5. Достаточные условия для подобия температурных полей в среде, движущейся вынужденно или свободно ……..63
2.2.6. Необходимые и достаточные условия подобия физических явлений ……..…65
2.3. Установление структуры формул для описания конвективного теплообмена 66
2.4. Особенности формирования динамического и теплового пограничных слоев во внешней и внутренней задачах 70
2.4.1. Обтекание пластины (внешняя задача) ……70
2.4.2. Течение в трубе ……..74
2.5. Критериальные формулы для описания теплообмена во внешней задаче (вынужденное течение) 76
2.6. Критериальные формулы для описания теплообмена во внутренней задаче (вынужденное течение) 78
2.6.1. Теплообмен при ламинарном вязкостном режиме течения ……79
2.6.2. Теплообмен при ламинарном гравитационно-вязкостном течении ……..……80
2.6.3. Теплообмен при турбулентном режиме течения ……81
2.6.4. Теплообмен при переходном режиме течения ……82
2.6.5. Теплообмен при течении жидких металлов и плазмы ……...82
2.7. Теплоотдача при вынужденном поперечном обтекании одиночных труб и трубных пучков ……..……83
2.7.1. Одиночные трубы ……..……..……83
2.7.2. Трубные пучки ……85
2.8. Критериальные формулы для описания теплообмена при свободной конвекции 86
2.8.1. Свободная конвекция в большом объеме 86
2.8.2. Свободная конвекция над горизонтальной поверхностью..... 88
2.8.3. Свободная конвекция в узкой щели 89
2.9. Температурный фактор C_t в задачах конвективного теплообмена 90
3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ 92
3.1. Тепловое излучение твердых тел 92
3.2. Расчет результирующего лучистого потока тепла между телами. Экраны 97
3.3. Особенности излучения газов 100
3.4. Решение задач теплопроводности с граничными условиями по законам излучения ……103
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 104
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ ……..105

ВВЕДЕНИЕ

От характера протекания тепломассопереноса, от уровня температуры и особенностей формирования ее распределений в элементах теплонапряженных конструкций в решающей степени зависит экономичность технического или технологического процесса, массоемкость, габариты, эксплуатационные характеристики и ресурс оборудования.

В качестве примера укажем на то, что при недостаточном охлаждении рабочих лопаток высокотемпературных турбин они перегреваются, механические характеристики их материала вследствие этого ухудшаются, т.е. пределы прочности, длительной прочности, текучести и др. уменьшаются, и так как они находятся под действием больших центробежных сил из-за высоких оборотов ротора двигателя, то может произойти разрушение турбины. При чрезмерном же охлаждении уровень температуры становится приемлемым, однако может сформироваться неблагоприятное распределение температуры с большими ее перепадами в лопатке, что приводит к возникновению опасных по величине термических напряжений. Таким образом, рассмотренные случаи свидетельствуют о необходимости решения проблемы оптимизации систем охлаждения газотурбинного двигателя.

Актуальным поэтому является изучение закономерностей распространения тепла в твердых телах, жидкостях и газах, составляющих предмет теплопередачи.

Существуют различные способы теплопередачи:

1. Распространение тепла внутри твердых тел и в неподвижных жидкостях (газах) называется теплопроводностью (кондукцией). Отметим, что жидкости (газы) неподвижны в том частном случае, когда они находятся в узких щелях (прослойках) определенной толщины.

2. Распространение тепла в движущейся жидкости (газе), тепловое взаимодействие между движущейся средой и поверхностью омываемого ею твердого тела называется конвективным теплообменом.

3. Перенос тепла от поверхности твердого тела к кипящей на ней жидкости и противоположный процесс теплопереноса от конденсирующихся паров к холодной поверхности называются теплообменом при фазовом переходе вещества.

4. Перенос тепловой энергии от одного тела к другому при отсутствии посредника-вещества с помощью механизма электромагнитного излучения представляет собой лучистый теплообмен.

Изложение курса осуществляется рассмотрением каждого из перечисленных способов теплопередачи, так как они осуществляются во многих технических устройствах и процессах. Так, например, в котельном агрегате тепло от движущихся газов (от продуктов сгорания топлива) передается к наружной поверхности труб топочных экранов конвекцией и излучением, так что имеет место так называемый радиационно-конвективный

способ теплопередачи. От наружной поверхности через стенку трубы к внутренней ее поверхности тепло передается теплопроводностью. От внутренней поверхности тепло воспринимается движущейся водой сначала механизмом конвекции, а затем, начиная с некоторого сечения трубы, еще и кипением. Отвод тепла от отработавших в паровой турбине паров рабочего тела осуществляется при их конденсации.

В авиационном газотурбинном двигателе продукты сгорания топлива (чаще всего керосина) при своем движении в проточной части конвекцией и излучением отдают тепло стенкам камеры сгорания, направляющим и рабочим лопаткам, ротору и дискам турбины, стенкам реактивного сопла и др. Во избежание перегрева из-за высоких температур последние охлаждаются воздухом или другими средами механизмом конвекции. Имеются варианты охлаждения лопаток первых ступеней турбины с помощью кипящей в их внутренних полостях жидкости. В материале перечисленных элементов конструкции двигателя тепло распространяется механизмом теплопроводности.

Учет теплового состояния такого ответственного изделия, как авиационный, ракетный или другой тепловой двигатель, столь важен, что его определение с необходимостью производят, например, перед прочностным расчетом, а также для нахождения рабочих параметров, эксплуатационных характеристик и пр.

1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

1.1. Механизм процесса

Механизм процесса обусловлен видом носителя тепла в твердых телах, жидкостях и газах.

В металлах электроны (электронный газ) при своем перемещении переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию беспорядочного теплового движения, осуществляя тем самым процесс теплопроводности, в котором колебания узлов (ионов) решетки принимают незначительное участие при низких и комнатных температурах. С ростом температуры влияние последних усиливается, создавая помехи движению электронного газа, так что чем выше температура чистого метала, тем хуже он проводит тепло. Опыты свидетельствуют, что для сплавов не имеется однозначной связи между ростом их температуры и падением проводимости тепла.

В диэлектриках нет свободных электронов и перенос тепла в них осуществляется за счет колебания узлов решеток (фононная проводимость тепла). Если в каком-то месте диэлектрик нагревают, то усиливающиеся в нем колебания узлов распространяются в теле в виде затухающей волны, так как узлы связаны межмолекулярным взаимодействием.

В полупроводниках, находящихся при низких температурах, мало свободных электронов и тепло в них при этом распространяется, как в диэлектрике. При средних температурах вклад электронной проводимости возрастает, а при высоких температурах она становится преобладающей.

В неподвижных газовых слоях носителями тепла являются хаотически движущиеся молекулы (атомы). Если газ в каком-то месте нагревать, то в нем увеличивается среднеквадратичная скорость движения молекул, которые, сталкиваясь с более удаленными медленными (холодными) молекулами, увеличивают их кинетическую энергию и, как следствие, при этом увеличивается и температура газа.

Наименее изучен процесс теплопроводности в жидкостях. Не вдаваясь в детали теории жидкого состояния вещества, укажем на то, что в настоящее время полагают, что жидкости в течение некоторого очень малого промежутка времени, называемого временем релаксации, можно рассматривать как кристаллические структуры. Затем эти структуры разрушаются и поведение жидкости соответствует газовому состоянию. В каждом из этих чередующихся состояний действует свой механизм переноса тепла.

1.2. Основные понятия теплопроводности (и теплопередачи)

К ним относятся следующие понятия: температура, температурное поле, изотермическая поверхность, изотерма, градиент температуры,

тепловой поток, плотность теплового потока.

Температура – это физическая величина, являющаяся мерой отклонения состояния тела от теплового равновесия с другим телом, называемым эталоном, температуру которого условно принимают равной нулю. В зависимости от выбора тела-эталона различают эмпирические и абсолютные шкалы температур.

В России принята эмпирическая стоградусная шкала Цельсия, в которой тепловое состояние тел сравнивают с тепловым состоянием тающего при нормальном давлении химически чистого водного льда: температуру последнего полагают равной 0°C. Нужно иметь в виду, что в большинстве англоязычных стран мира принята шкала Фаренгейта, и обращать внимание на то, в какой шкале измерения сообщается температура.

В абсолютной шкале температур (в термодинамической шкале температур, в шкале Кельвина) тепловое состояние тела сравнивают с таким его же состоянием, при котором достигается минимальное значение внутренней энергии: температуру последнего состояния полагают равной 0 К.

Связь между значением температуры T в абсолютной шкале и значением температуры t в шкале Цельсия дается соотношением

$$T = t + 273{,}15.$$

Основной задачей теории теплопроводности является определение температуры T в любой точке $M \in \Omega$ (Ω – геометрическая область, занимаемая телом) в любой момент времени $\tau > 0$, отсчитываемый от начала нагревания или охлаждения тела. Совокупность значений $T(M, \tau)$ в фиксированный момент времени τ называется температурным полем в теле. Можно, таким образом, сказать, что основной задачей теории теплопроводности является определение температурного поля в теле в каждый момент времени τ.

Естественно, что температурное поле можно представить в виде совокупности («набора») так называемых изотермических поверхностей. Изотермическая поверхность – это реальная или воображаемая геометрическая поверхность, в каждой точке которой в данный момент времени температура одинакова. Из физических соображений ясно, что изотермические поверхности не могут пересекаться друг с другом, они замыкаются сами на себя или на ограничивающие тело поверхности.

Пересечение изотермических поверхностей плоскостями дает линии–изотермы.

В теории теплопроводности аналитическими методами чаще всего рассматривается распространение тепла в телах простейшей формы – в неограниченной пластине и в сплошных или полых шаре и круговом цилиндре неограниченной или конечной длины. Отметим, что под неограниченной пластиной понимается параллелепипед, у которого две протяженности во много раз больше третьей, называемой толщиной

пластины δ.

На рис. 1.1 изображены в виде примера изотермические поверхности (рис. 1.1, *а*) и изотермы (рис. 1.1, *б*) в неограниченной пластине, в круговом цилиндре неограниченной длины и сплошном шаре в какой-то момент времени при условии, что их ограничивающие поверхности в процессах нагревания или охлаждения поддерживаются изотермическими.

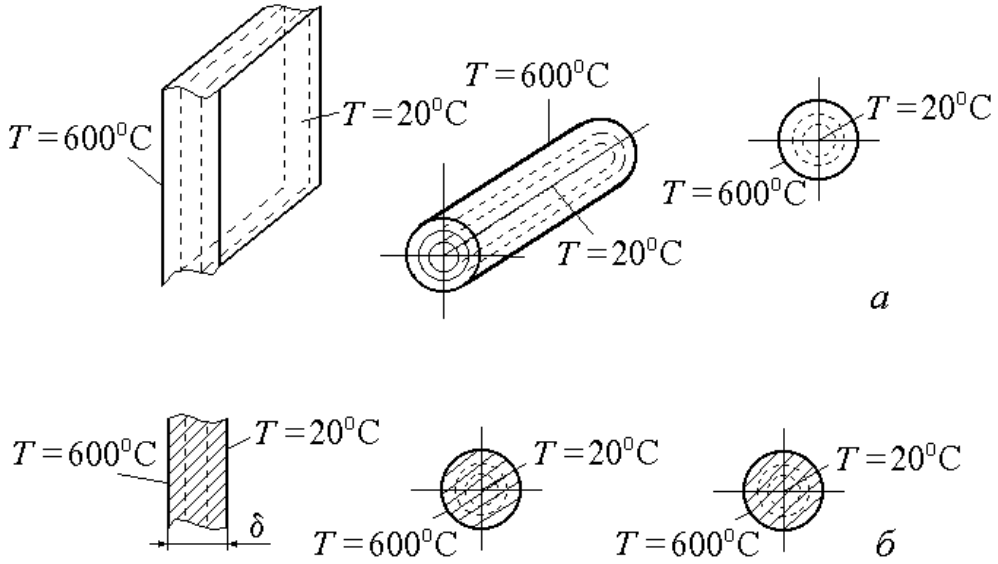


Рис. 1.1

Отметим, что сечения изотермических поверхностей получены плоскостями, перпендикулярными ограничивающим поверхностям пластины, оси цилиндра или проходящими через центр шара.

Рассмотрим в виде примера нагревание прямолинейного бруса (призмы) неограниченной длины с произвольным по форме поперечным сечением, наружная поверхность которого поддерживается изотермической. Выделим в поперечном сечении, перпендикулярном оси бруса, изотермы $T - \Delta T$, T и $T + \Delta T$ (рис. 1.2). Затем на изотермической поверхности с температурой T рассмотрим ее элемент с единичной площадью. Тепло с этой площадки будет передаваться в направлении изотермической поверхности с температурой $T - \Delta T$ ($T - \Delta T < T < T + \Delta T$), очевидно, под действием движущей силы в виде разности температур $T - (T - \Delta T) = \Delta T$.

Предел отношения ΔT к расстоянию Δn, взятому по нормали к рассматриваемым изотермическим поверхностям, т.е. величина

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta T}}{\Delta n} = \frac{\partial T}{\partial n} = \operatorname{grad} T,$$

называется градиентом температуры в указанном месте на изотермической поверхности с температурой T. Величина $\operatorname{grad} T$ является вектором, направленным в сторону больших значений температур в теле.

Именно градиент температуры $\operatorname{grad} T$ выступает в качестве движущей силы процесса теплопроводности.

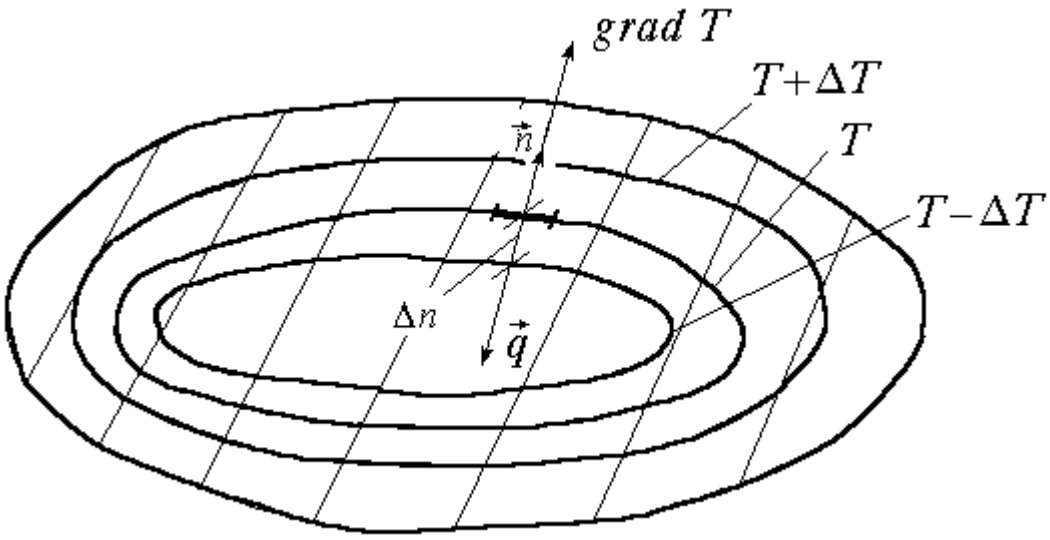


Рис. 1.2

Количество тепла, проходящего через всю площадь изотермической поверхности за время τ, называется тепловым потоком Q [Дж], а та его часть, которая проходит через единицу площади за единицу времени, называется плотностью теплового потока $\vec{q}$ [Вт/м^2]. Плотность теплового потока является вектором, направленным в сторону меньших значений температуры, и для изотропных тел он находится на одной прямой с градиентом температуры $\mathrm{grad}T$, т.е. угол между этими векторами равен π.

1.3. Гипотеза Ж.-Б. Фурье

В 1822 г. вышла книга выдающегося французского математика Ж.-Б. Фурье «Аналитическая теория теплоты», в которой изложен метод нахождения нестационарных температурных полей в твердых телах. Отправной точкой всех имеющихся там выкладок является идея (гипотеза) Ж.-Б. Фурье о виде связи между вектором плотности теплового потока $\vec{q}$ с какого-либо места изотермической поверхности T = const и значением градиента температуры $\mathrm{grad}T$ в этом месте.

Фурье предположил, что существует прямая пропорциональность между величинами $\vec{q}$ и $\mathrm{grad}T$, т.е.

$$|\vec{q}|\sim|\mathrm{grad}T|. \qquad (1.1)$$

Учитывая разнонаправленность указанных в (1.1) векторов, имеем также

$$\vec{q}\sim-\mathrm{grad}T. \qquad (1.1')$$

Чтобы перейти в (1.1′) от пропорции к равенству, Ж.-Б. Фурье ввел

коэффициент пропорциональности λ и получил зависимость

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \tag{1.2}$$

представляющую собой математическую запись его гипотезы.

Величина λ численно равна

$$\lambda = \left| \frac{\vec{q}}{\operatorname{grad} T} \right|, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м К}} \right] \tag{1.3}$$

и совпадает с плотностью теплового потока при значении $|\operatorname{grad} T|$, равном 1 К/м.

Фурье назвал λ коэффициентом теплопроводности материала тела. Зависит величина λ от вида материала тела, его пористости, влажности и, что очень существенно, от самой температуры T. При наличии этой последней зависимости принято представлять (1.2) в виде

$$\vec{q} = -\lambda(T) \operatorname{grad} T. \tag{1.2′}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае зависимость между $\vec{q}$ и T становится нелинейной, что очень осложняет расчет процесса теплопроводности.

Определяется величина λ экспериментально в виде функции названных выше параметров с использованием формулы (1.3), однако не в столь прямом виде.

Численное значение плотности теплового потока q равно модулю (длине) вектора $\vec{q}$ и определяется по формуле

$$q = \vec{q} \cdot \vec{n}^0 = -\lambda \operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0, \tag{1.4}$$

где $\vec{n}^0$ – единичный вектор внешней нормали.

Для вычисления скалярного произведения векторов $\operatorname{grad} T$ и $\vec{n}^0$ надо иметь в виду, что каждый из них в декартовой системе координат равен соответственно

$$\operatorname{grad} T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \vec{n}^0 = \vec{i} \cos\alpha + \vec{j} \cos\beta + \vec{k} \cos\gamma, \tag{1.5}$$

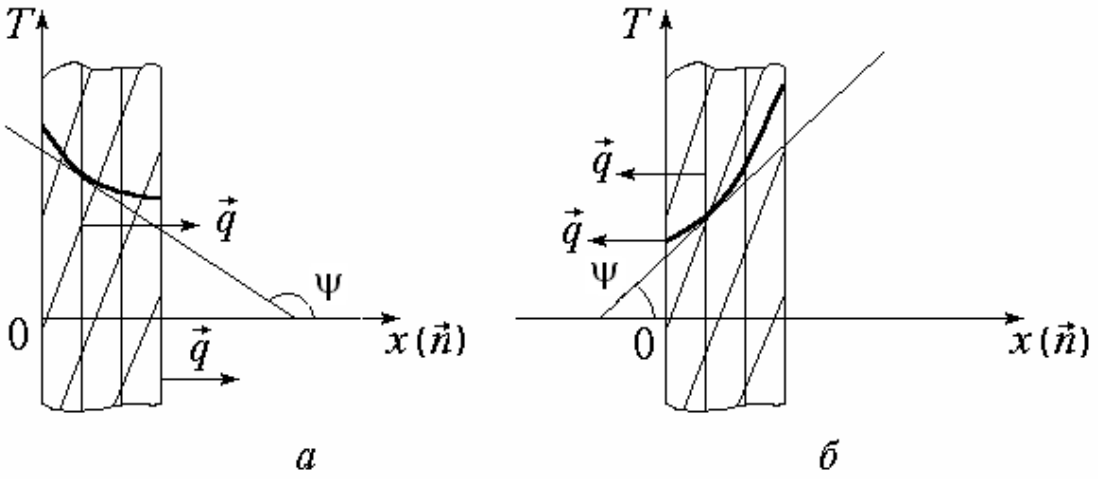
где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орт-векторы, α, β, и γ – углы между осями x, y, z и направлением $\vec{n}$ соответственно. В итоге величина q определяется по формуле

$$q = -\lambda \left(\vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left(\vec{i} \cos\alpha + \vec{j} \cos\beta + \vec{k} \cos\gamma \right). \tag{1.6}$$

Покажем, как надо использовать зависимость (1.6) для нахождения величины q в неограниченной пластине, ограничивающие поверхности которой поддерживаются в процессе теплопроводности изотермическими, так что вектор нормали $\vec{n}$ совпадает с направлением 0x (рис. 1.3).

В этом случае имеем так называемое одномерное температурное поле в теле, при котором вектор $\vec{q}$ через каждую изотермическую поверхность

параллелен 0x или, что то же, параллелен вектору $\vec{h}$.



а *б*

Рис. 1.3

Ясно, что в рассматриваемом примере $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/2$, $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$, так что использование (1.6) дает

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{1.7}$$

Отметим, что величина q получается положительной, если вектор $\vec{q}$ совпадает с направлением $\vec{h}$ (приведенное на рис. 1.3, *а* распределение температуры по толщине пластины относится к этой ситуации), и наоборот, $q < 0$, если $\vec{q}$ и $\vec{h}$ являются разнонаправленными векторами (распределение температуры на рис. 1.3, *б*).

Нетрудно видеть, что в (1.7) величина $\frac{\partial T}{\partial x}$ численно равно tg ψ.

1.4. Уравнение Фурье

Напомним, что основной задачей теории теплопроводности является определение температуры в любой точке тела в любой момент времени от начала его нагревания или охлаждения, т.е. установление связи вида

$$T(M, \tau) = f(M, \tau), \tag{1.8}$$

где $M(x, y, z) \in \Omega$, $\tau > 0$.

Для этого необходимо решать так называемое уравнение Фурье (уравнение теплопроводности).

Уравнение Фурье первоначально установим для самого простого случая одномерного распространения тепла в пластине (рис. 1.3). Выделим двумя плоскостями, параллельными ограничивающим плоскостям тела, слой толщиной dx и рассмотрим прохождение тепла через единицу площади

изотермической поверхности (рис. 1.4).

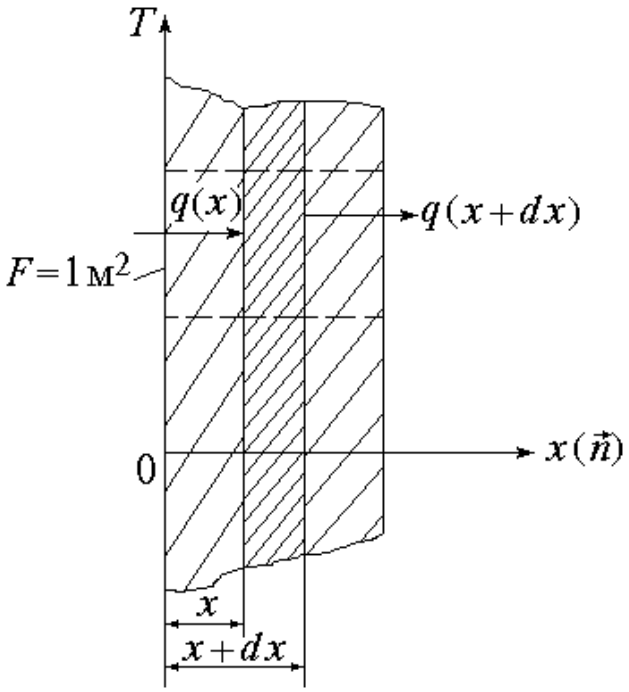


Рис. 1.4

Положим также, что в теле отсутствуют источники объемного тепловыделения, причиной которого может быть наличие химической реакции, ядерного распада, прохождение электрического тока и т.д.

Представляется очевидным, что если в выделенный слой, объем которого равен $1 \cdot dx$, тепла «втекает» больше, чем «вытекает» $(q(x) > q(x+dx))$, то температура в нем во времени будет повышаться $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} > 0\right)$. В противном случае температура понижается $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} < 0\right)$. В обоих случаях имеем процесс нестационарной теплопроводности.

Если же $q(x) = q(x+dx)$, то ясно, что температура в выделенном объеме тела во времени изменяться не будет $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0\right)$ и это соответствует процессу стационарной теплопроводности.

Пусть за время $d\tau$ температура в выделенном объеме изменится на величину dT, так что изменение внутренней энергии за единицу времени составляет

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = cm\frac{\partial T}{\partial \tau},$$

(1.9)

где $m = V \cdot \rho = F \cdot dx \cdot \rho = 1 \cdot dx \cdot \rho$ – масса; c и ρ – удельная теплоемкость и плотность, так что имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx . \qquad (1.9')$$

Знак частной производной $\frac{\partial}{\partial \tau}$ в (1.9′) использован потому, что температура T меняется не только во времени, но и в пространстве (в нашем случае она изменяется по координате x).

Единственной причиной изменения внутренней энергии во времени $\frac{\partial U}{\partial \tau}$ является разность «втекающего» $q(x)$ и «вытекающего» $q(x + dx)$ количества тепла, т.е. верно также равенство

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = q(x) - q(x + dx) . \qquad (1.10)$$

Разложим $q(x + dx)$ в ряд Тейлора в окрестности точки с координатой x и ограничимся линейной частью разложения, тогда получим

$$q(x + dx) \cong q(x) + q'(x)dx$$

и (1.10) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -q'(x)dx . \qquad (1.10')$$

Приравнивая правые части (1.9′) и (1.10′), получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -q'(x) . \qquad (1.11)$$

Таким образом, температура в том или ином месте пластины изменяется во времени $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \neq 0\right)$ лишь в том случае, когда изменяется от места к месту плотность теплового потока $(q'(x) \neq 0)$.

На основании (1.3) имеем

$$q(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

так что уравнение (1.11) при λ = const принимает вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} . \qquad (1.11')$$

Это и есть уравнение Фурье, описывающее нестационарное одномерное (изменяющееся лишь по 0x) температурное поле в пластине.

В случае распространения тепла в прямолинейной призме (брусе) бесконечной длины и произвольной формы поперечного сечения с изотермической ограничивающей поверхностью достаточно рассмотреть распространение тепла в сечении, перпендикулярном оси призмы (рис. 1.2). Таким образом, мы приходим к понятию двухмерного температурного поля,

формирующегося в том случае, когда вектор плотности теплового потока «втекающего» и «вытекающего» в элементарный участок сечения призмы имеет ненулевые компоненты в направлениях 0*x* и 0*y* (рис. 1.5).

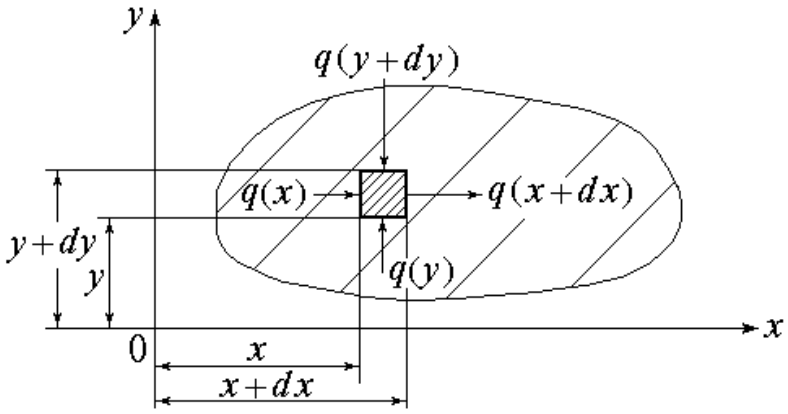


Рис. 1.5

Элементарный участок сечения призмы имеет вид прямоугольника и выделен плоскостями, отстоящими на *x* и *x* + *dx*, а также на *y* и *y* + *dy* от начала координат и имеет протяженность *L* в направлении 0*z*, перпендикулярном плоскости чертежа. В этом случае получаем последовательно

$$m = V \cdot \rho = dx \cdot dy \cdot L \cdot \rho,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx \cdot dy \cdot L, \qquad (1.12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \left[q(x) - q(x+dx)\right]dy \cdot L + \left[q(y) - q(y+dy)\right]dx \cdot L. \qquad (1.13)$$

Далее, с учетом разложений

$$q(x+dx) \cong q(x) + q'(x)dx,$$

$$q(y+dy) \cong q(y) + q'(y)dy$$

следует также

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -q'(x)dx \cdot dy \cdot L - q'(y)dx \cdot dy \cdot L \quad ,$$

(1.14)

и с привлечением (1.12) получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx \cdot dy \cdot L = \left[-q'(x) - q'(y)\right]dx \cdot dy \cdot L.$$

Наконец, учитывая, что при λ = const

$$q(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q'(x) = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

$$q(y) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q'(y) = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

имеем в окончательном виде уравнение Фурье для описания двухмерного температурного поля

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \tag{1.15}$$

Нетрудно показать, что для самого общего случая объемного (трехмерного) температурного поля уравнение Фурье таково:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

(1.16)

Обратим внимание на то, что формулы (1.11′), (1.15), (1.16) получены в предположении того, что теплофизические характеристики материала тела c, ρ, λ неизменны. Уравнению (1.16) можно придать компактный вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla^2 T = -\frac{1}{c\rho} \operatorname{div} \vec{q} = -\frac{1}{c\rho} \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T), \tag{1.16′}$$

где $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности материала тела; $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; div – оператор дивергенции.

Уравнение Фурье представляет собой математическую запись закона сохранения энергии для ее тепловой формы, конкретный вид которой обусловлен использованием гипотезы Фурье $\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$.

В настоящее время справедливость этой гипотезы на основании результатов многочисленных приложений не вызывает сомнений, так что во многих работах эту гипотезу называют законом Фурье.

В математике (раздел «Математическая физика») уравнение (1.16) по ряду признаков отнесено к уравнению параболического типа и исследуются свойства его решения.

Отметим также, что для одномерного распространения тепла в пластине, цилиндре и шаре, когда их ограничивающие поверхности изотермичны, уравнение (1.16) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{a}{x^{s-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{s-1} \frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (1.16'')$$

где x – координата, отсчитанная от одной из плоскостей пластины, от оси цилиндра или от центра шара; s – коэффициент формы тела, равный единице, двум и трем для пластины, цилиндра и шара соответственно.

В заключение отметим, что для практически важного случая зависимости теплофизических характеристик материала тела от температуры – $c = c(T)$, $\rho = \rho(T)$, $\lambda = \lambda(T)$ – уравнения (1.16) и (1.16′′) неприменимы. Можно показать, что вместо них необходимо рассматривать соответственно зависимости

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (1.17)$$

и

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{x^{s-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)x^{s-1}\frac{\partial T}{\partial x}\right). \qquad (1.18)$$

1.5. Краевые условия для уравнения Фурье

Уравнение Фурье представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка и его решение (интегрирование) приводит к появлению в структуре решения произвольных функций от аргументов x, y, z, τ, т.е. получаем при этом неоднозначное решение о температурном поле в теле.

Чтобы эти произвольные функции определить и получить однозначное решение поставленной задачи, очевидно, что к уравнению Фурье должны быть присоединены дополнительные уравнения, представляющие собой математическое описание известных условий протекания исследуемого процесса теплопроводности. Эти условия называются краевыми, так как они содержат в себе информацию об условиях на «краях» рассматриваемого явления.

Процесс нестационарной теплопроводности развивается во времени и в пространстве и имеет на них края.

Временным краем процесса является момент его начала, соответствующий моменту времени $\tau = 0$, отсчитываемому от начала нагревания или охлаждения тела. Температурное поле в теле при $\tau = 0$ полагают известным и представляют в виде зависимости

$$T(M) = T_0(M), \; M \in \Omega, \; \tau = 0. \qquad (1.19)$$

Формула (1.19) является математической записью начального условия задачи нестационарной теплопроводности. При одинаковой начальной температуре во всех точках тела это условие становится простейшим и

принимает вид

$$T(M) = T_0 = \text{const},\ M \in \Omega,\ \tau = 0. \qquad (1.19')$$

В пространственные края включаются все точки на всех ограничивающих тело поверхностях. На пространственных краях полагают известными тепловые условия в течение всего процесса теплопроводности и их математическую запись называют граничными условиями для уравнения Фурье.

Рассматриваемое твердое тело может омываться потоками жидкости (газа), нагреваться (или остывать) излучением, на его поверхностях могут быть размещены нагреватели и т.п. В зависимости от рода известной информации о тепловой обстановке на ограничивающих поверхностях тела различают граничные условия первого (ГУ-I), второго (ГУ-II), третьего (ГУ-III) и четвертого (ГУ-IV) рода.

Если из физических соображений или в результате проведенных измерений известна температура T_W на поверхности Г тела, то мы располагаем граничными условиями первого рода в форме

$$T(M,\tau) = T_w(M,\tau) = f_1(M,\tau),\ M \in \Gamma,\ \tau > 0. \qquad (1.20)$$

В простейшем случае в течение всего процесса во всех точках на всех поверхностях тела температура одинакова, и тогда вместо (1.20) имеем ГУ-I в виде

$$T(M,\tau) = T_w,\ M \in \Gamma,\ \tau > 0. \qquad (1.20')$$

Если известна плотность теплового потока q на поверхности тела, то к уравнению Фурье присоединяют ГУ-II в форме

$$q(M,\tau) = f_2(M,\tau),\ M \in \Gamma,\ \tau > 0. \qquad (1.21)$$

С учетом (1.4) формула (1.21) принимает вид

$$-\lambda \operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0\big|_\Gamma = f_2(M,\tau),\ M \in \Gamma,\ \tau > 0 \qquad (1.21')$$

или

$$\operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0\big|_\Gamma = -f_2(M,\tau)/\lambda,\ M \in \Gamma,\ \tau > 0. \qquad (1.21'')$$

Граничные условия третьего рода (ГУ-III) присоединяют к уравнению Фурье в том частном случае, когда тело омывается потоком жидкости (газа), температура которого $T_{f,0}$ на удалении от тела известна (рис.1.6).

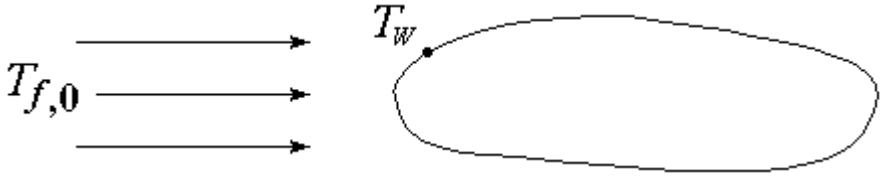


Рис. 1.6

При этом плотность теплового потока, передаваемого от движущейся среды к поверхности тела, полагают пропорциональной разности температур $T_W - T_{f,0}$ (температура поверхности T_W неизвестна и сама подлежит определению)

$$q\big|_\Gamma = q_w \sim T_w - T_{f,0}. \qquad (1.22)$$

Чтобы перейти в (1.22) от пропорции к равенству, вводится коэффициент пропорциональности α, называемый коэффициентом теплоотдачи, так что имеем

$$q\big|_\Gamma = q_w = \alpha(T_w - T_{f,0}),\ \tau > 0. \qquad (1.22')$$

В формуле (1.22′) считаются известными лишь величины $T_{f,0}$ и α. Величина α численно равна плотности теплового потока, передаваемого от поверхности тела при $\left|T_W - T_{f,0}\right| = 1\text{K}$:

$$\alpha = \left|\frac{q_w}{T_w - T_{f,0}}\right|, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\,\text{К}}\right]. \qquad (1.23)$$

Определению величины α посвящается целиком раздел 2 настоящей работы. Здесь же отметим, что величина коэффициента теплоотдачи α характеризует интенсивность теплового взаимодействия между движущейся средой и поверхностью омываемого ею твердого тела. Зависит величина α от следующих факторов:

1) от относительной скорости потока (чем эта скорость больше, тем больше и α);

2) от режима его течения у поверхности тела (в дальнейшем будут рассмотрены ламинарный, переходной и турбулентный режимы течения);

3) от теплофизических свойств движущейся среды (например, для жидкостей α больше, чем для газов);

4) от формы обтекаемого тела (у плохо обтекаемых тел в потоке образуются вихри, он турбулизируется, и вследствие этого α становится больше);

5) от шероховатости поверхности (для большей шероховатости α больше вследствие упомянутой выше турбулизации течения).

Плотность теплового потока, передаваемого через ограничивающую поверхность тела, «входит» внутрь твердого тела (или «выходит») механизмом теплопроводности и для ее определения применима также формула (1.4), так что вместо (1.22′) имеем также

$$-\lambda\,\text{grad}\,T \cdot \overset{\rho_0}{n}\Big|_\Gamma = \alpha(T_w - T_{f,0}), \qquad (1.24)$$

или

$$\operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma} = \frac{-\alpha}{\lambda} T_w + \frac{\alpha}{\lambda} T_{f,0}, \ \tau > 0. \qquad (1.24')$$

Сравнение между собой формул (1.20), (1,21″), (1.24′) свидетельствует о том, что при задании граничных условий первого, второго и третьего рода известна в течение всей длительности процесса на поверхности тела соответственно температура, ее градиент или линейная связь между ними при не зависящих от температуры величинах λ и α.

Граничные условия четвертого рода относятся к специфическому случаю теплового контакта между двумя твердыми телами (рис. 1.7). При этом возможен случай идеального теплового контакта (вариант *а*, когда поверхность Г тел № 1 и № 2 является общей) и неидеального теплового контакта (вариант *б* на рис. 1.7), когда поверхности Г тел № 1 и № 2 разделены газовой прослойкой, слоем окислов, слоем масла и т.п.

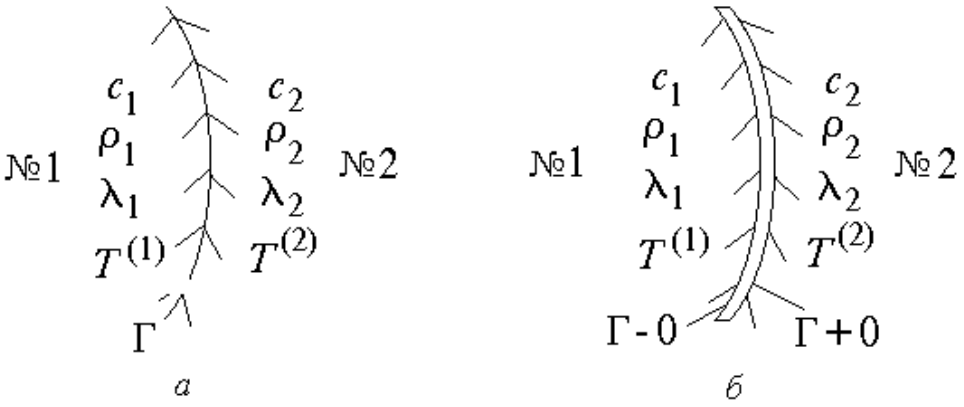


Рис. 1.7

Ясно, что в обоих случаях плотности теплового потока, пересекающего поверхность Г слева (Г–0) направо (Г+0), совпадают, так что с привлечением (1.4) имеем

$$-\lambda_1 \operatorname{grad} T^{(1)} \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma-0} = -\lambda_2 \operatorname{grad} T^{(2)} \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma+0}, \ \tau > 0. \qquad (1.25)$$

В случае идеального теплового контакта на поверхностях Г–0 и Г+0 в течение всего процесса совпадают и температуры контактирующих тел:

$$T^{(1)}\big|_{\Gamma-0} = T^{(2)}\big|_{\Gamma+0}, \ \ \tau > 0, \qquad (1.26)$$

а в случае неидеального теплового контакта имеет место скачок температуры ΔT, формирующийся на термическом сопротивлении, разделяющем оба тела, т.е. выполняется равенство

$$T^{(1)}\big|_{\Gamma-0} = T^{(2)}\big|_{\Gamma+0} + \Delta T, \ \tau > 0. \qquad (1.27)$$

1.6. Краевая задача нестационарной теплопроводности

Из всего вышеизложенного ясно, что для определения нестационарного температурного поля решают уравнение Фурье совместно с присоединенными к нему начальным условием и граничными условиями. Последние содержат, как было сказано, известную из физических соображений или из результатов измерений информацию о тепловой обстановке на ограничивающих поверхностях тела. Совокупность перечисленных уравнений и формирует так называемую краевую задачу теплопроводности, которую решают аналитически или численно.

Рассмотрим для примера задачу нестационарной теплопроводности для тел простейшей формы (пластина, цилиндр, шар), когда их ограничивающая поверхность в течение всего процесса изотермична (одномерное температурное поле), начальная температура T_0 везде одинакова и заданы граничные условия третьего рода, т.е. известны величины коэффициента теплоотдачи α и температура $T_{f,0}$ омывающего тело потока. Пусть полутолщина пластины или радиус цилиндра (шара) равны l_0, а теплофизические характеристики c, ρ, λ материала постоянны. Изобразим сначала графически на рис. 1.8 одно из этих тел (пластину) и развивающееся в нем во времени температурное поле при нагревании ($T_{f,0} > T_0$).

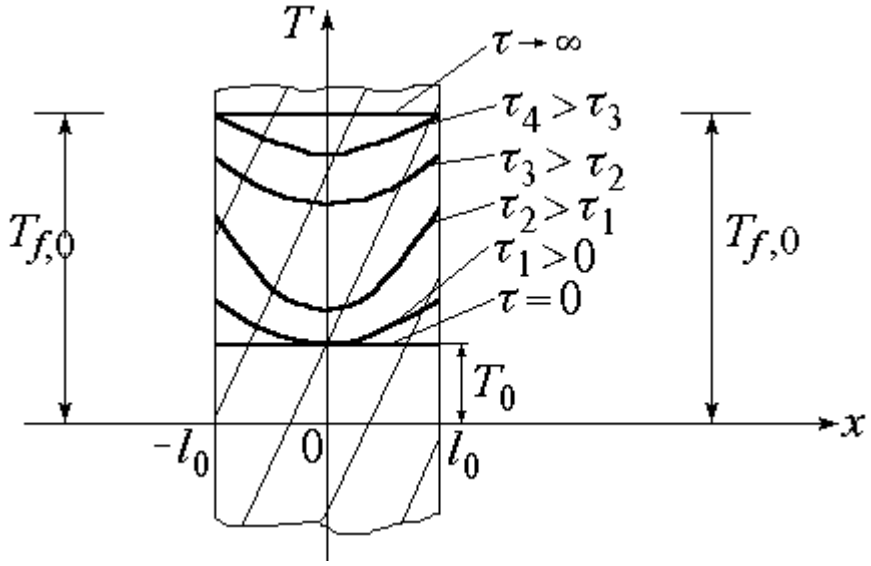


Рис. 1.8

Для рассматриваемой ситуации краевая задача нестационарной теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{a}{x^{s-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{s-1} \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x} \right), \qquad (1.28)$$

$$s = 1, 2, 3;\ \tau > 0;\ 0 < x < l_0,$$

$$T(x) = T_0,\ \tau = 0,\ 0 < x < l_0, \qquad (1.29)$$

$$-\lambda \left.\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=l_0} = \alpha\left[T(l_0,\tau) - T_{f,0}\right],\ \tau > 0, \tag{1.30}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \tau > 0. \tag{1.31}$$

В записи краевой задачи (1.28)–(1.31) отражен факт симметричного развития температурного поля относительно плоскости (оси, центра) симметрии тела, т.е. относительно $x = 0$.

В краевой задаче (1.28) – (1.31) известны форма тела (величина s), его характерный размер l_0, а также величины a, λ, T_0, α, $T_{f,0}$, т.е. известны параметры задачи, изменяющиеся от одной конкретной ситуации к другой, и отыскивается температурное поле $T(x,\tau)$, так что в итоге получаем, что температура T отыскивается из решения задачи (1.28) – (1.31) в виде зависимости от аргументов x, τ и от параметров s, a, λ, T_0, α, $T_{f,0}$, l_0:

$$T = f(x, \tau, s, a, \lambda, T_0, \alpha, T_{f,0}, l_0). \tag{1.32}$$

Таким образом, подлежит определению функция T девяти переменных, теорема существования и единственности которой для краевой задачи (1.28)–(1.31) доказана в математической физике.

Сначала с целью уменьшения числа переменных исходную задачу приводят к безразмерному виду следующим образом.

Вместо «размерной» температуры $T(x,\tau) \in [T_0;\ T_{f,0}]$ вводится безразмерная относительная температура $\theta(x,\tau)$ по правилу

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{f,0} - T_0} \in [0;1],$$

так что в задаче (1.28)–(1.31) надо везде заменить T на θ, подставив

$$T = \theta(T_{f,0} - T_0) + T_0.$$

Далее, вместо размерной протяженности $x \in [0;\ l_0]$ вводится безразмерная протяженность $\xi = x/l_0 \in [0;1]$, так что в исходной задаче надо везде заменить x на $x = \xi \cdot l_0$.

Задача (1.28) – (1.31) принимает в результате таких подстановок вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{a}{l_0^2 \xi^{s-1}} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{s-1}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right), \tag{1.28′}$$

$$s = 1, 2, 3;\ \tau > 0,\ 0 < \xi < 1,$$

$$\theta(\xi) = 0,\ \tau = 0,\ 0 < \xi < 1, \tag{1.29′}$$

$$\frac{\lambda}{l_0}\cdot\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=\alpha\left(1-\theta\big|_{\xi=1}\right),\ \tau>0, \qquad (1.30')$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0,\ \tau>0. \qquad (1.31')$$

Сформируем безразмерные комплексы $\frac{a\tau}{l_0^2}$ в (1.28′) и $\frac{\alpha l_0}{\lambda}$ в (1.30′). Безразмерный комплекс $a\tau/l_0^2$ представляет собой безразмерное время и называется числом Фурье $(\mathrm{Fo}=a\tau/l_0^2)$, а безразмерный комплекс $\alpha l_0/\lambda$ представляет собой известную безразмерную интенсивность внешнего теплообмена потока с поверхностью тела и называется критерием Био $(\mathrm{Bi}=\alpha l_0/\lambda)$. Число Фурье Fo содержит в себе аргумент задачи τ и поэтому является ее безразмерным аргументом, а критерий Био Bi составлен из известных при постановке задачи параметров.

В конечном виде имеем следующую задачу нестационарной теплопроводности относительно искомой температуры θ(ξ, Fo)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{1}{\xi^{s-1}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^{s-1}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right), \qquad (1.28'')$$

$$s=1,2,3;\ \mathrm{Fo}>0,\ 0<\xi<1,$$

$$\theta(\xi)=0,\ \mathrm{Fo}=0,\ 0<\xi<1, \qquad (1.29'')$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=\mathrm{Bi}\cdot\left(1-\theta\big|_{\xi=1}\right),\ \mathrm{Fo}>0, \qquad (1.30'')$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0,\ \mathrm{Fo}>0. \qquad (1.31'')$$

Решение задачи (1.28″)–(1.31″) отыскивается в виде функции от четырех переменных (вместо девяти в (1.32)) как

$$\theta=f(\xi,\mathrm{Fo},s,\mathrm{Bi}). \qquad (1.33)$$

1.7. Решение краевой задачи нестационарной теплопроводности

В указанной в п. 1.3 работе Ж.-Б. Фурье был предложен метод определения нестационарных температурных полей на основе приведения исходной краевой задачи (1.28″)–(1.31″) в частных производных к краевой задаче в обыкновенных производных.

Покажем применение метода Фурье на примере определения температурных полей в неограниченной пластине (s = 1). Для этого сначала

преобразуем краевую задачу (1.28″)–(1.31″), введя новую зависимую переменную

$$\theta^* = 1 - \theta,$$

и получим новую краевую задачу с однородными граничными условиями

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1 \ , \ \mathrm{Fo} > 0, \tag{1.34}$$

$$\theta^*(\xi) = 1, \quad 0 < \xi < 1, \quad \mathrm{Fo} = 0, \tag{1.35}$$

$$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = \mathrm{Bi}\, \theta^*\Big|_{\xi=1}, \quad \mathrm{Fo} > 0, \tag{1.36}$$

$$\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0, \quad \mathrm{Fo} > 0. \tag{1.37}$$

Фурье предложил представить решение θ^* в виде произведения двух функций – функции $f(\mathrm{Fo})$ от времени и функции $\varphi(\xi)$ от координаты:

$$\theta^* = f(\mathrm{Fo})\varphi(\xi), \tag{1.38}$$

так что вместо (1.34)–(1.37) имеем также

$$f'(\mathrm{Fo})\varphi(\xi) = f(\mathrm{Fo})\varphi''(\xi), \quad 0 < \xi < 1, \quad \mathrm{Fo} > 0, \tag{1.39}$$

$$f(\mathrm{Fo} = 0)\varphi(\xi) = 1, \quad 0 < \xi < 1, \tag{1.40}$$

$$\varphi'(\xi = 1) = \mathrm{Bi}\, \varphi(\xi = 1), \ \mathrm{Fo} > 0, \tag{1.41}$$

$$\varphi'(\xi = 0) = 0 \ , \ \mathrm{Fo} > 0. \tag{1.42}$$

Разделим переменные в уравнении (1.39) и получим

$$\frac{f'(\mathrm{Fo})}{f(\mathrm{Fo})} = \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi(\xi)}. \tag{1.43}$$

Равенство функций двух различных аргументов в левой и правой части (1.43) может иметь место лишь в том случае, когда каждая из них равна одной и той же постоянной *B,* так что

$$\frac{f'(\mathrm{Fo})}{f(\mathrm{Fo})} = \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi(\xi)} = B = \mathrm{const}. \tag{1.44}$$

Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{f'(\mathrm{Fo})}{f(\mathrm{Fo})} = B. \tag{1.45}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.45) известно:

$$f(\mathrm{Fo}) = C \exp(B\,\mathrm{Fo}). \tag{1.46}$$

Из физических соображений очевидно, что в апериодических процессах теплопроводности (процессы с тепловым насыщением) температура должна изменяться по убывающей во времени экспоненте, в противном случае температура тела неограниченно возрастала бы во времени. Поэтому постоянная B в (1.46) должна быть отрицательной,

которую принято представлять следующим образом:

$$B = -\mu^2,$$

так что формула (1.46) принимает вид

$$f(\mathrm{Fo}) = C\exp(-\mu^2\,\mathrm{Fo}). \qquad (1.47)$$

Рассмотрим теперь второе уравнение из (1.44) и получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\varphi''(\xi) + \mu^2\varphi(\xi) = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \mathrm{Fo} > 0, \qquad (1.48)$$

которое вместе с граничными условиями (1.41), (1.42) на $\varphi(\xi)$

$$\varphi'(\xi = 1) = \mathrm{Bi}\,\varphi(\xi = 1), \quad \mathrm{Fo} > 0, \qquad (1.49)$$

$$\varphi'(\xi = 0) = 0, \quad \mathrm{Fo} > 0 \qquad (1.50)$$

называется задачей Штурма–Лиувилля на собственные функции $\varphi(\xi)$ и собственные значения μ.

Известное решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.48)

$$\varphi(\xi) = D\cos(\mu\xi) + E\sin(\mu\xi) \qquad (1.51)$$

удовлетворяет условию симметричного развития температурного поля в теле (1.50) при $E = 0$, так что вместо (1.51) получаем решение

$$\varphi(\xi) = D\cos(\mu\xi). \qquad (1.52)$$

Подставляя (1.52) в граничное условие (1.49), приходим к уравнению относительно μ:

$$\mu\sin\mu = \mathrm{Bi}\cos\mu \quad \text{или} \quad \mathrm{ctg}\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}. \qquad (1.53)$$

Трансцендентное уравнение (1.53) называется характеристическим и имеет бесконечно большое количество отрицательных и положительных корней μ_n, из которых, исходя из уже указанного физического смысла задачи, удерживаются только положительные корни $\mu_n > 0$. Таким образом, мы приходим к тому, что каждому корню μ_n соответствуют свои функции времени $f_n(\mathrm{Fo}) = C_n\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo})$ и координаты $\varphi_n(\xi) = D_n\cos(\mu_n\xi)$ и частное решение краевой задачи (1.34)–(1.37) имеет вид

$$\theta_n^* = f_n(\mathrm{Fo})\varphi_n(\xi) = C_n\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo})D_n\cos(\mu_n\xi) = A_n\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo})\cos(\mu_n\xi). \qquad (1.54)$$

Линейность указанной задачи позволяет представить ее решение в виде бесконечной суммы частных решений, построенных для конкретных значений μ_n:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\exp(-\mu_n^2\,\mathrm{Fo})\cos(\mu_n\xi). \qquad (1.55)$$

Постоянные A_n принято называть тепловыми амплитудами и для их нахождения θ^* из (1.55) подставляется в левую часть начального условия

(1.35) и при $\mathrm{Fo} = 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \xi) = 1. \tag{1.56}$$

Умножая обе части полученного равенства на $\cos(\mu_m \xi)$ и интегрируя по $\xi \in (0,1)$, получим

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n \xi)\cos(\mu_m \xi) d\xi = \int_0^1 \cos(\mu_m \xi) d\xi. \tag{1.57}$$

Для краевой задачи (1.34)–(1.37) в математической физике доказана правомерность перестановки в левой части (1.57) порядка интегрирования и суммирования бесконечного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \int_0^1 A_n \cos(\mu_n \xi) \cos(\mu_m \xi) d(\mu_n \xi) = \frac{1}{\mu_m} \int_0^1 \cos(\mu_m \xi) d(\mu_m \xi). \tag{1.57′}$$

Так как функции $\cos(\mu_m \xi)$ и $\cos(\mu_n \xi)$ ортогональны, то выполняются равенства

$$\begin{cases} \int_0^1 \cos(\mu_n \xi)\cos(\mu_m \xi) d(\mu_n \xi) = 0, \quad m \neq n, \\ \int_0^1 \cos(\mu_n \xi)\cos(\mu_m \xi) d(\mu_n \xi) \neq 0, \quad m = n, \end{cases} \tag{1.58}$$

и вместо (1.57′) получаем сначала

$$\int_0^1 A_n \cos^2(\mu_n \xi) d(\mu_n \xi) = \int_0^1 \cos(\mu_n \xi) d(\mu_n \xi)$$

и затем формулу для определения A_n

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \tag{1.59}$$

Суммируя все вышеизложенное, решение поставленной краевой задачи теплопроводности (1.34)–(1.37) для неограниченной пластины таково:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \cos(\mu_n \xi) \tag{1.60}$$

и

$$\theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \cos(\mu_n \xi). \tag{1.61}$$

Аналогичным образом строится решение для цилиндра и шара. Не вдаваясь в детали его получения, укажем, что в структуре решения вида

$$\theta = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(\xi)\varphi_n(\mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(\xi)\exp(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}) \qquad (1.62)$$

имеем

– для цилиндра (s = 2): $A_n = \dfrac{2\mathrm{J}_1(\mu_n)}{\mu_n\left[\mathrm{J}_0^2(\mu_n) + \mathrm{J}_1^2(\mu_n)\right]}$, $f_n(\xi) = \mathrm{J}_0(\mu_n\xi)$ и характеристическое уравнение $\mathrm{J}_0(\mu)/\mathrm{J}_1(\mu) = \mu/\mathrm{Bi}$ (J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, приводимые в справочниках по специальным функциям);

– для шара (s = 3) имеем $A_n = \dfrac{2(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n)}{\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n}$, $f_n(\xi) = \sin\mu_n\xi/(\mu_n\xi)$, характеристическое уравнение $\mathrm{tg}\mu = \mu/(1 - \mathrm{Bi})$.

Решения задачи (1.28″)–(1.31″) для ξ = 0 (плоскость, ось или центр симметрии тела) и ξ = 1 (наружная поверхность тела) табулированы и приводятся в справочных пособиях. Там же дана и графическая их интерпретация, имеющая для случая нагревания вид рис. 1.9.

С помощью графиков решают два типа инженерных задач:

1) определение температуры в указанной точке тела по истечении заданного времени τ от начала его нагревания (охлаждения),

2) определение времени, за которое будет достигнута заданная температура $T(x,\tau)$ в указанной точке тела.

При этом считаются известными величины $a, \lambda, \alpha, T_0, T_{f,0}, l_0, s$.

Для решения первой и второй задачи сначала вычисляют величину критерия Био

$$\mathrm{Bi} = \alpha l_0 / \lambda.$$

Далее, при решении первой задачи заданное время τ обезразмеривают до числа Фурье

$$\mathrm{Fo} = a\tau / l_0^2$$

и по графику для указанной точки тела (путь a на рис. 1.9) находят температуру $\theta(\xi,\mathrm{Fo})$, равную

$$\theta = \frac{T(x,\tau) - T_0}{T_{f,0} - T_0},$$

откуда следует $T(x,\tau) = \theta(T_{f,0} - T_0) + T_0$.

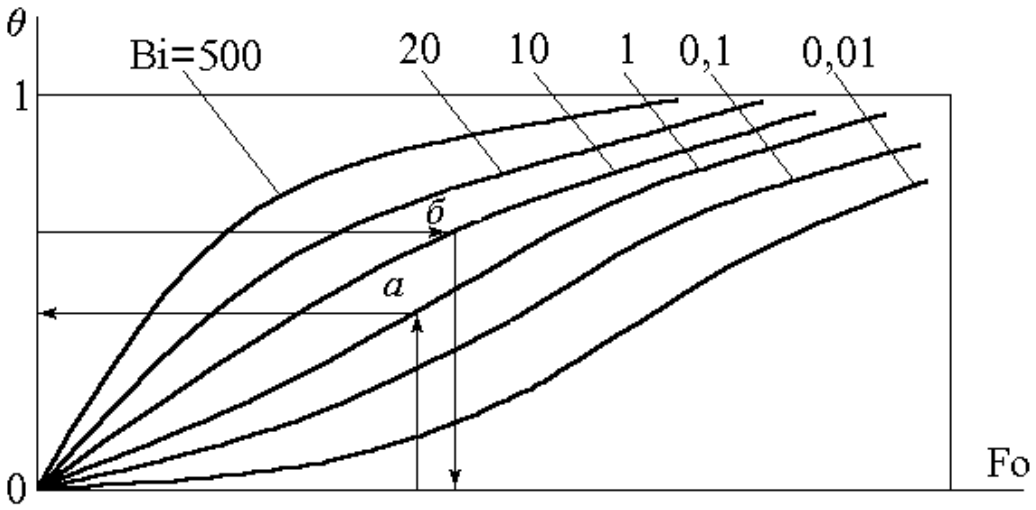


Рис. 1.9

При решении второй задачи заданную температуру $T(x,\tau)$ обезразмеривают по правилу $\theta = \dfrac{T(x,\tau) - T_0}{T_{f,0} - T_0}$ и по графику находят безразмерное время Fo ее достижения (путь *б* на рис. 1.9):

$$\text{Fo} = a\tau / l_0^2, \text{ откуда } \tau = \text{Fo} \cdot l_0^2 / a.$$

В заключение подчеркнем, что здесь рассмотрено решение линейной краевой задачи для ГУ-III. Решения краевой задачи для уравнения (1.28) при ГУ-I, ГУ-II и ГУ-IV также приводятся в справочных пособиях и монографиях, их относительно несложно получить с привлечением численных методов.

1.8. Численное решение нелинейной задачи нестационарной теплопроводности

1.8.1. Метод элементарных тепловых балансов

Определение температурных полей в телах сложной формы при зависящих от температуры характеристиках материала тела ($c = c(T)$, $\rho = \rho(T)$, $\lambda = \lambda(T)$) связано с решением проблемы многомерности и нелинейности, преодолеваемой, в общем случае, с привлечением возможностей ЭВМ.

Рассмотрим случай распространения тепла в пластине с переменными во времени τ параметрами граничных условиях третьего рода на обеих ограничивающих поверхностях (рис. 1.10).

При численном решении температуру определяют в дискретных точках пространства, отстоящих друг от друга на величину шага Δx, и в дискретные моменты времени длительностью $\Delta\tau$ каждый.

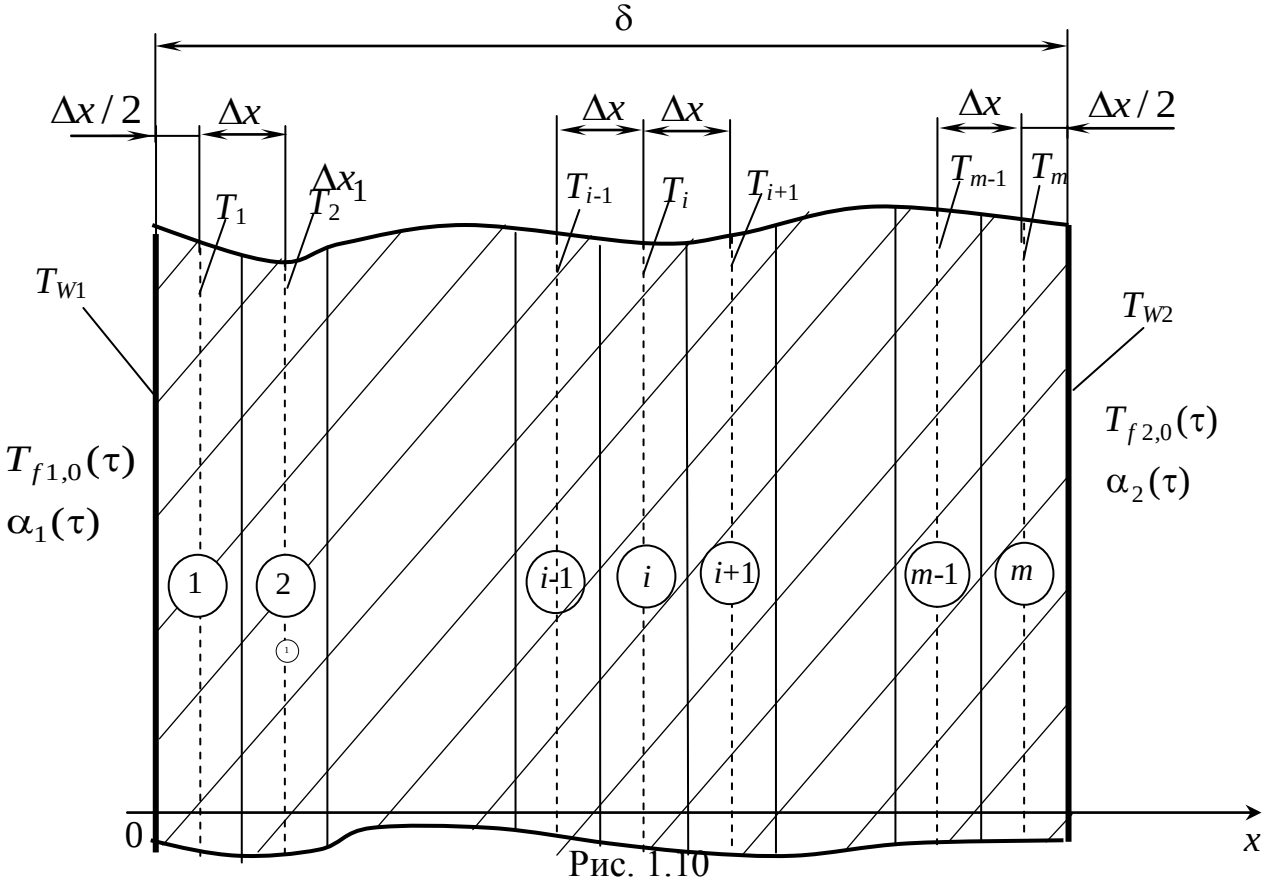


Рис. 1.10

При этом полагают известным распределение температуры в n-й момент времени, т.е. поле температуры

$$T_{w1}^{(n)}, T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, ..., T_{i-1}^{(n)}, T_i^{(n)}, T_{i+1}^{(n)}, ..., T_{m-1}^{(n)}, T_m^{(n)}, T_{w2}^{(n)},$$

и отыскивают распределение, отстоящее от него на временной шаг $\Delta\tau$ в $(n+1)$-й момент времени, т.е. отыскивается поле температуры $T_{w1}^{(n+1)}, T_1^{(n+1)}, T_2^{(n+1)}, ..., T_{i-1}^{(n+1)}, T_i^{(n+1)}, T_{i+1}^{(n+1)}, ..., T_{m-1}^{(n+1)}, T_m^{(n+1)}, T_{w2}^{(n+1)}$. Ясно, что начальное распределение температуры соответствует известному массиву температуры при $n = 0$, т.е. он таков: $T_{w1}^{(0)}, T_1^{(0)}, ..., T_i^{(0)}, ..., T_m^{(0)}, T_{w2}^{(0)}$, , а первый искомый массив имеет вид $T_{w1}^{(1)}, T_1^{(1)}, ..., T_i^{(1)}, ..., T_m^{(1)}, T_{w2}^{(1)}$. После его нахождения он становится начальным распределением при определении массива $T_{w1}^{(2)}, T_1^{(2)}, ..., T_i^{(2)}, ..., T_m^{(2)}, T_{w2}^{(2)}$ и т.д.

Установим алгебраическую систему уравнений, которая решается на ЭВМ при определении температурного поля в теле на каждом временном слое, рассмотрев прохождение тепла параллельно оси $0x$ (рис. 1.10) через поверхность площадью 1 м^2. Тогда изменение внутренней энергии в i-м пространственном слое за 1 с будет равно

$$c_i^{(n)} \rho_i^{(n)} \frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta\tau} \cdot 1 \cdot \Delta x = q_{i-1,\,i} - q_{i,\,i+1}, \qquad (1.63)$$

где $T_i^{(n)}$ и $T_i^{(n+1)}$ - предыдущее и последующее (по истечении временного слоя длительностью $\Delta\tau$) значения температуры в середине i-го слоя пластины; $q_{i-1,\,i}$ и $q_{i,\,i+1}$ - плотности теплового потока, "втекающего" из (i–1)-го слоя в i-й слой и «вытекающего» из него в сторону (i+1)-го слоя; $c_i^{(n)}$ и $\rho_i^{(n)}$ – значения удельной теплоемкости и плотности вещества, выбранные из таблицы (массива) их зависимости от температуры $T_i^{(n)}$ в середине i-го слоя:

$$c_i^{(n)} = f(T_i^{(n)}) \text{ и } \rho_i^{(n)} = f(T_i^{(n)}).$$

В зависимости от того, по какому распределению температуры в теле вычисляются величины $q_{i-1,\,i}$ и $q_{i,\,i+1}$, различают явную и неявную схемы численного решения задачи теплопроводности.

При явной схеме $q_{i-1,\,i}$ и $q_{i,\,i+1}$ определяют по предшествующему распределению температуры (по отношению к искомому), т.е. следующим образом:

$$q_{i-1,\,i}^{(n)} = \lambda_{i-1/2}^{(n)} \frac{T_{i-1}^{(n)} - T_i^{(n)}}{\Delta x}, \qquad q_{i,\,i+1}^{(n)} = \lambda_{i+1/2}^{(n)} \frac{T_i^{(n)} - T_{i+1}^{(n)}}{\Delta x},$$

так что имеем вместо (1.63)

$$c_i^{(n)}\rho_i^{(n)} \frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta\tau} \Delta x = \lambda_{i-1/2}^{(n)} \frac{T_{i-1}^{(n)} - T_i^{(n)}}{\Delta x} - \lambda_{i+1/2}^{(n)} \frac{T_i^{(n)} - T_{i+1}^{(n)}}{\Delta x}, \qquad (1.63')$$

где коэффициенты теплопроводности вычисляются как

$$\lambda_{i-1/2}^{(n)} = f\left(\frac{T_{i-1}^{(n)} + T_i^{(n)}}{2}\right), \qquad \lambda_{i+1/2}^{(n)} = f\left(\frac{T_i^{(n)} + T_{i+1}^{(n)}}{2}\right).$$

При неявной схеме величины $q_{i-1,\,i}$ и $q_{i,\,i+1}$ определяют по искомому распределению температуры, так что вместо (1.63′) получают формулу

$$c_i^{(n)}\rho_i^{(n)} \frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta\tau} = \lambda_{i-1/2}^{(n)} \frac{T_{i-1}^{(n+1)} - T_i^{(n+1)}}{\Delta x^2} - \lambda_{i+1/2}^{(n)} \frac{T_i^{(n+1)} - T_{i+1}^{(n+1)}}{\Delta x^2},$$

$$i \in [2, m-1]. \qquad (1.63'')$$

В системе (1.63′′) из m–2 уравнений искомыми являются $T_{i-1}^{(n+1)}$, $T_i^{(n+1)}$, $T_{i+1}^{(n+1)}$ при $i \in [2, m-1]$, т.е. определению подлежат m–2 неизвестные температуры в середине мысленно выделенных в пластине m слоев толщиной Δx каждый. Дополнительные два уравнения соответствуют условиям распространения тепла в первом и последнем m-м слое, для которых дополнительно к (1.63′′) имеем

$$c_1^{(n)}\rho_1^{(n)}\frac{T_1^{(n+1)}-T_1^{(n)}}{\Delta\tau}=\lambda_{1/2}^{(n)}\frac{T_{w1}^{(n+1)}-T_1^{(n+1)}}{\Delta x^2/2}-\lambda_{1\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_1^{(n+1)}-T_2^{(n+1)}}{\Delta x^2}, \qquad (1.64)$$

$$c_m^{(n)}\rho_m^{(n)}\frac{T_m^{(n+1)}-T_m^{(n)}}{\Delta\tau}=\lambda_{m-1/2}^{(n)}\frac{T_{m-1}^{(n+1)}-T_m^{(n+1)}}{\Delta x^2}-\lambda_{m+1/2}^{(n)}\frac{T_m^{(n+1)}-T_{w2}^{(n+1)}}{\Delta x^2/2}, \quad (1.65)$$

где коэффициенты теплопроводности равны соответственно

$$\lambda_{1/2}^{(n)}=f\left(\frac{T_{w1}^{(n)}+T_1^{(n)}}{2}\right),\ \lambda_{1\frac{1}{2}}^{(n)}=f\left(\frac{T_1^{(n)}+T_2^{(n)}}{2}\right),$$

$$\lambda_{m-1/2}^{(n)}=f\left(\frac{T_{m-1}^{(n)}+T_m^{(n)}}{2}\right),\ \lambda_{m+1/2}^{(n)}=f\left(\frac{T_m^{(n)}+T_{w2}^{(n)}}{2}\right).$$

Однако в формулах (1.64), (1.65) появились новые искомые температуры $T_{w1}^{(n+1)}$ и $T_{w2}^{(n+1)}$ ограничивающих поверхностей пластины. Дополнительные к (1.63″), (1.64), (1.65) уравнения для их нахождения получаются при конечно-разностной аппроксимации граничных условий третьего рода в точках $x = 0$ и $x = \delta$ при $\alpha^{(n+1)}=f((n+1)\Delta\tau)$ и $T_{f,0}{}^{(n+1)}=f((n+1)\Delta\tau)$:

$$\lambda_{1/2}^{(n)}\frac{T_{w1}^{(n+1)}-T_1^{(n+1)}}{\Delta x/2}=\alpha_1{}^{(n+1)}\left(T_{f1,0}{}^{(n+1)}-T_{w1}^{(n+1)}\right),$$

(1.66)

$$\lambda_{m+1/2}^{(n)}\frac{T_m^{(n+1)}-T_{w2}^{(n+1)}}{\Delta x/2}=\alpha_2{}^{(n+1)}\left(T_{w2}^{(n+1)}-T_{f2,0}{}^{(n+1)}\right). \qquad (1.67)$$

Таким образом, мы приходим к замкнутой системе алгебраических уравнений (1.63″), (1.64)–(1.67) относительно искомых температур $T_{w1}^{(n+1)}$, $T_1^{(n+1)},\ldots,T_i^{(n+1)},\ldots,T_m^{(n+1)},T_{w2}^{(n+1)}$ при известных температурах $T_{w1}^{(n)},T_1^{(n)}$, $\ldots,T_i^{(n)},\ldots,T_m^{(n)},T_{w2}^{(n)}$.

Отметим также, что здесь рассмотрена безытерационная неявная схема определения температурного поля на ЭВМ, когда теплофизические свойства материала c, ρ, λ выбираются из соответствующих массивов входной информации по известному на предшествующем временном слое распределению температур.

Соответствующий анализ свидетельствует о том, что явная схема счета является устойчивой при выборе соотношения между шагами Δx и $\Delta\tau$ по правилу

$$\frac{\lambda_i^{(n)}\Delta\tau}{c_i^{(n)}\rho_i^{(n)}\Delta x^2} \le \frac{1}{2}.$$

Неявная же схема счета является абсолютно устойчивой, так что, вообще говоря, не имеется ограничений на выбор величин Δx и $\Delta\tau$. Следует, однако, помнить, что схема проведения счета в конечных разностях должна аппроксимировать исходную задачу теплопроводности, записанную в дифференциальных операторах: например, должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} \approx \frac{\Delta T}{\Delta\tau}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2}.$$

Рассмотренный пример построения системы алгебраических уравнений для численного нахождения одномерного температурного поля называется методом теплового баланса. Он дает представление и о его применении для плоского и объемного случаев.

1.8.2. Метод сеток (метод конечных разностей)

Метод сеток практически совпадает с методом элементарного теплового баланса. Отличие между ними состоит в том, что, во-первых, метод сеток обосновывается формальной дискретизацией уравнений исходной краевой задачи нестационарной теплопроводности и, во-вторых, полученный таким образом разностный аналог уравнения нестационарной теплопроводности относят ко всем элементарным слоям, на которые мысленно разбивается исходная геометрическая область протекания процесса, т.е. не рассматривают отдельно, как в методе элементарного теплового баланса, пристенные слои.

Исходное нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности, имеющее для неограниченной пластины в одномерной постановке вид

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad (1.68)$$

при использовании неявной безытерационной схемы дискретизируется относительно середины i-го слоя (рис. 1.11) следующим

образом:

$$c(T)\rho(T)\left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_i \approx c(T_i)\rho(T_i)\frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta\tau} = c_i^{(n)}\rho_i^{(n)}\frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta\tau},$$

(1.69)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_i \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{i+\frac{1}{2}} - \left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{i-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i+1}^{(n+1)} - T_i^{(n+1)}}{\Delta x} - \right.$$

$$\left. - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_i^{(n+1)} - T_{i-1}^{(n+1)}}{\Delta x}\right] = \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i+1}^{(n+1)} - T_i^{(n+1)}}{\Delta x^2} - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_i^{(n+1)} - T_{i-1}^{(n+1)}}{\Delta x^2}. \qquad (1.70)$$

Приравнивая правые части формул (1.69) , (1.70), получаем разностный аналог уравнения (1.68) в виде

$$c_i^{(n)}\rho_i^{(n)}\frac{T_i^{(n+1)} - T_i^{(n)}}{\Delta\tau} = \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i+1}^{(n+1)} - T_i^{(n+1)}}{\Delta x^2} - \lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_i^{(n+1)} - T_{i-1}^{(n+1)}}{\Delta x^2},$$

(1.71)

где $i = 2,3,\ldots,m+1.$

Для того чтобы уравнение (1.71) было отнесено ко всем элементарным слоям неограниченной пластины, включая первый и последний слои, ее ограничивающие плоскости в отличие от рассмотренного в п. 1.8.1 метода элементарных тепловых балансов мысленно «наращивают» двумя фиктивными слоями (рис. 1.11).

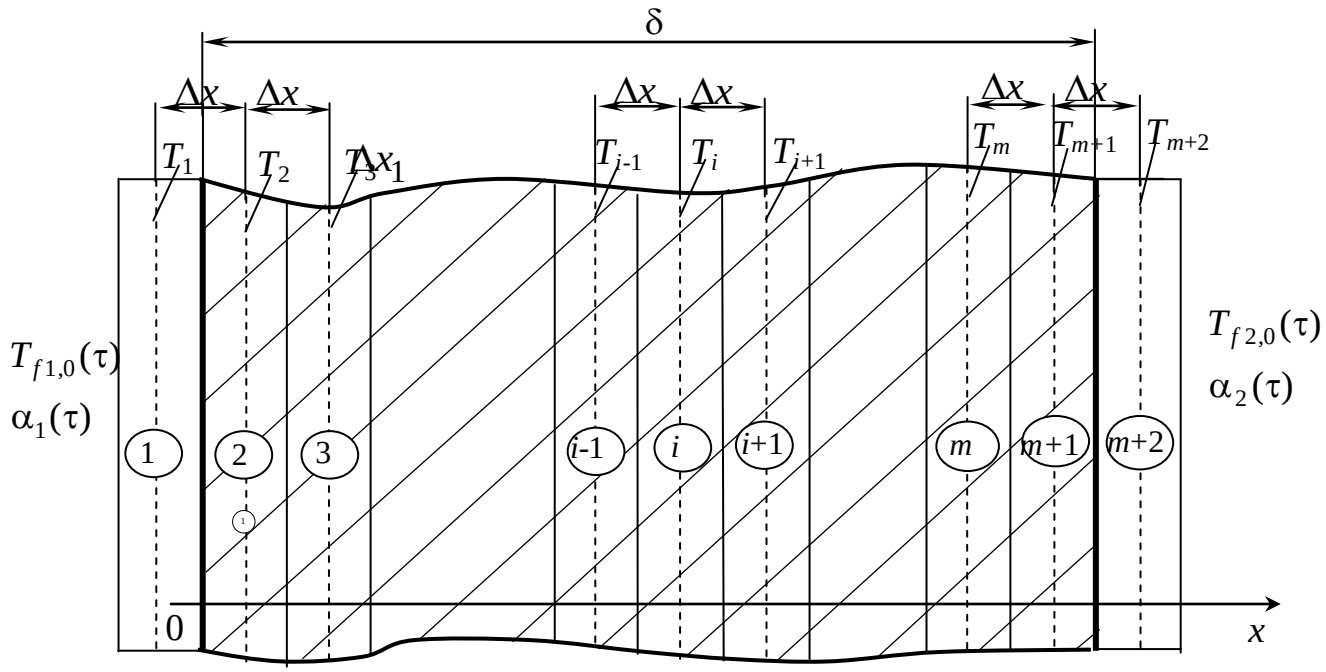


Рис. 1.11

Для решения системы уравнений (1.71) ее нужно замкнуть путем присоединения двух дополнительных уравнений, представляющих собой конечно-разностный аналог граничных условий. При их формулировке полагают, что между серединами первого фиктивного слоя и примыкающего к нему первого (по оси Оx) слоя пластины и между серединами последнего слоя пластины и примыкающего к нему второго фиктивного слоя температуры распределены в пространстве линейно, т.е. выполняются равенства

$$\frac{T_1^{(n+1)} + T_2^{(n+1)}}{2} = T_{W1}^{(n+1)}, \qquad (1.72)$$

$$\frac{T_{m+1}^{(n+1)} + T_{m+2}^{(n+1)}}{2} = T_{W2}^{(n+1)}. \qquad (1.73)$$

С учетом (1.72), (1.73) граничные условия третьего рода (1.66), (1.67) записываются как

$$\lambda_{1\frac{1}{2}}^{(n)} \frac{T_1^{(n+1)} - T_2^{(n+1)}}{\Delta x} = \alpha_1^{(n+1)} \left(T_{f1,0}^{(n+1)} - \frac{T_1^{(n+1)} + T_2^{(n+1)}}{2} \right), \qquad (1.74)$$

$$\lambda_{m+1\frac{1}{2}}^{(n)} \frac{T_{m+1}^{(n+1)} - T_{m+2}^{(n+1)}}{\Delta x} = \alpha_2^{(n+1)} \left(\frac{T_{m+1}^{(n+1)} + T_{m+2}^{(n+1)}}{2} - T_{f2,0}^{(n+1)} \right). \qquad (1.75)$$

Решая совместно систему уравнение (1.71), (1.74), (1.75) на каждом временном слое длительностью $\Delta\tau$ относительно массива $T_1^{(n+1)}, T_2^{(n+1)}, ..., T_{i-1}^{(n+1)}, T_i^{(n+1)}, T_{i+1}^{(n+1)}, ..., T_{m+1}^{(n+1)}, T_{m+2}^{(n+1)}$, находим температуры в серединах двух фиктивных слоев и в серединах m реальных слоев, что позволит найти согласно (1.72), (1.73) и температуры ограничивающих поверхностей $T_{W1}^{(n+1)}$ и $T_{W2}^{(n+1)}$.

Формулы (1.72) и (1.73) представляют собой задание граничных условий первого рода в том случае, если температуры $T_{W1}^{(n+1)}$ и $T_{W2}^{(n+1)}$ не подлежат определению, а заданы. Если же заданы граничные условия второго рода (плотности тепловых потоков $q_{W1}^{(n+1)}$ и $q_{W2}^{(n+1)}$ на ограничивающих поверхностях пластины), то с учетом (1.72), (1.73) они будут представлены в виде

$$\lambda_{1\frac{1}{2}}^{(n)} \frac{T_1^{(n+1)} - T_2^{(n+1)}}{\Delta x} = q_{W,1}^{(n+1)}, \tag{1.76}$$

$$\lambda_{m+1\frac{1}{2}}^{(n)} \frac{T_{m+1}^{(n+1)} - T_{m+2}^{(n+1)}}{\Delta x} = q_{W,2}^{(n+1)}. \tag{1.77}$$

Если направления векторов $\overset{\rho}{q}_{W1}^{(n+1)}$ и $\overset{\rho}{q}_{W2}^{(n+1)}$ совпадают с направлением оси Ox, то в (1.76), (1.77) их численные значения положительны.

Метод сеток позволяет решать и многомерные нелинейные задачи нестационарной теплопроводности. В этом случае на тело наносится сетка, т.е. его, например при рассмотрении двухмерного температурного поля, мысленно делят на элементарные прямоугольники со сторонами Δx и Δy, которые представляют собой шаги по пространственным переменным x и y, при выборе $\Delta\tau$ в качестве шага по времени. Нетрудно видеть (рис. 1.12), что линия, ограничивающая плоскую область, в этом случае заменяется на ломаную, состоящую из участков, параллельных осям 0x и 0y.

Можно показать, что в этом случае исходное нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности вида

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{1.78}$$

при использовании безытерационной неявной схемы имеет следующий конечно-разностный аналог:

$$c_{i,j}^{(n)}\rho_{i,j}^{(n)}\frac{T_{i,j}^{(n+1)}-T_{i,j}^{(n)}}{\Delta\tau}=\lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)}\frac{T_{i-1,j}^{(n+1)}-T_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta x^2}-\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)}\frac{T_{i,j}^{(n+1)}-T_{i+1,j}^{(n+1)}}{\Delta x^2}+$$

$$+\lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i,j-1}^{(n+1)}-T_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta y^2}-\lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i,j}^{(n+1)}-T_{i,j+1}^{(n+1)}}{\Delta y^2}, \qquad (1.79)$$

$$i=1,2,\ldots,M; \quad j=1,2,\ldots,N.$$

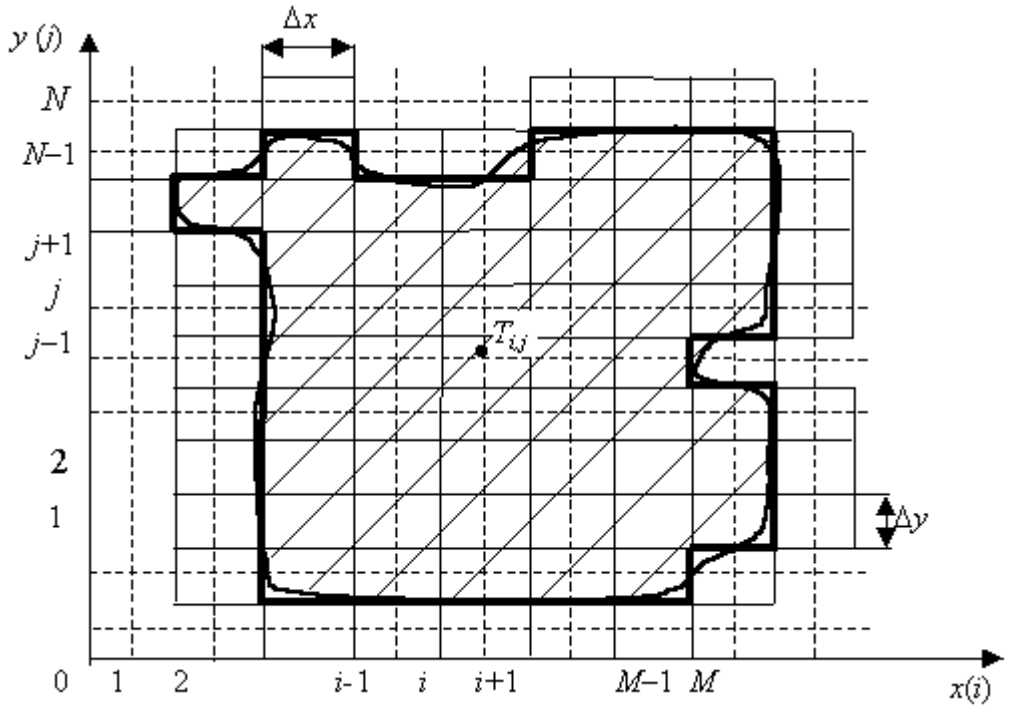


Рис. 1.12

Для того чтобы уравнение (1.79) было отнесено ко всем элементарным прямоугольникам, включая все приповерхностные слои тела, его сеточный аналог, ограниченный ломаной линией (изображена на рис. 1.12 в виде жирной линии), должен быть мысленно «наращен» фиктивными прямоугольными элементами (изображены на рис. 1.12 примыкающими вне границы сеточного аналога). Тогда числа M и N в формуле (1.79)

представляют собой максимальное количество элементарных прямоугольников (в том числе и фиктивных) по направлениям осей $0x$ и $0y$ соответственно.

Для решения системы уравнений (1.79) ее нужно замкнуть путем присоединения дополнительных уравнений, представляющих собой конечно-разностный аналог граничных условий. При их формулировке полагают, как и в одномерной задаче, что между серединами фиктивных и примыкающих к ним прямоугольников температуры распределены в пространстве линейно. Решение построенной таким образом системы уравнений позволяет находить неизвестные температуры $T_{i,j}^{(n+1)}$ в центрах выделенных прямоугольников на каждом временном слое.

Экономичные схемы проведения расчетов на ЭВМ предполагают применение дробных шагов по времени (обосновано акад. Н.Н. Яненко) или расщепление исходной задачи (1.78) на серию локально-одномерных задач по направлениям координатных осей (обосновано акад. А.А.Самарским).

Применительно к рассматриваемой нами задаче вместо конечно-разностных уравнений (1.51) по методу А.А. Самарского на временном слое длительностью $\Delta\tau$ сначала решают серию из (N–2) задач по направлению оси $0x$

$$c_{i,j}^{(n)}\rho_{i,j}^{(n)}\frac{V_{i,j}^{(n+1)}-T_{i,j}^{(n)}}{\Delta\tau}=\lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)}\frac{V_{i-1,j}^{(n+1)}-V_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta x^2}-\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)}\frac{V_{i,j}^{(n+1)}-V_{i+1,j}^{(n+1)}}{\Delta x^2}$$

и затем, используя полученные значения $V_{i,j}^{(n+1)}$, решают серию из (M–2) задач по направлению $0y$:

$$c_{i,j}^{(n)}\rho_{i,j}^{(n)}\frac{T_{i,j}^{(n+1)}-V_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta\tau}=\lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i,j-1}^{(n+1)}-T_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta y^2}-\lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{(n)}\frac{T_{i,j}^{(n+1)}-T_{i,j+1}^{(n+1)}}{\Delta y^2}.$$

Необходимо отметить, что разности температур в разных точках тела в одинаковые моменты времени (в правых частях формул (1.63″), (1.64), (1.65), (1.71), (1.79) и т.д.; в обеих частях (1.66), (1.67), (1.74), (1.75); в левых частях (1.76), (1.77)) построены таким образом, что температуры в них последовательно записываются в порядке их расположения по соответствующим координатным осям. Таким приемом удается простейшим способом сохранить одинаковые знаки левых и правых частей перечисленных выше формул.

1.9. Стационарная теплопроводность

По истечении достаточно длительного времени от начала процесса

теплопроводности (теоретически при $\tau \to \infty$) температурные изменения в теле во времени прекращаются и наступает режим стационарной теплопроводности, когда $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$. В этом режиме при одинаковой температуре омывающей тело среды в нем отсутствуют градиенты температуры (устанавливается однородное температурное поле) и отсутствует теплоперенос (рис. 1.8).

Практический интерес представляет изучение стационарной теплопроводности, связанной с установлением в телах неоднородных температурных полей. Такие поля формируются, например, в одно- и многослойных пластинах, полых цилиндрах и полых шарах, когда температура омывающих сред у ограничивающих поверхностей неодинакова.

Покажем графически в качестве примера формирование во времени стационарного неоднородного одномерного температурного поля в неограниченной пластине, омываемой средами с температурами $T_{f1,0}$ и $T_{f2,0}$ (рис. 1.13), при постоянном значении коэффициента теплопроводности материала λ.

При рассмотрении стационарной теплопроводности обычно решаются два вопроса: 1) определение температуры в любом месте тела, 2) нахождение величины стационарного теплового потока через конструкцию.

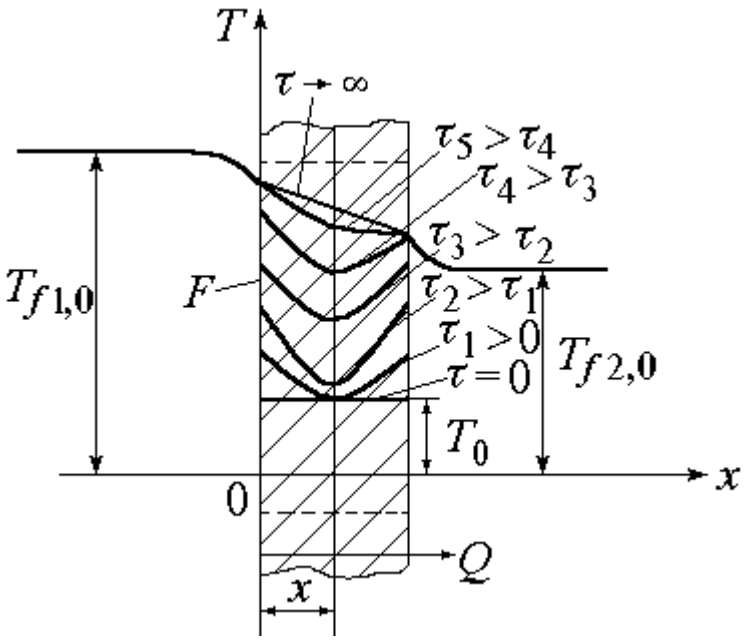


Рис. 1.13

Эти вопросы легко решаются, если привлечь к рассмотрению очевидный физический принцип: ***в стационарном тепловом режиме одинаков тепловой поток, пересекающий любую изотермическую***

поверхность в теле и любую его часть, ограниченную изотермическими поверхностями.

Покажем применение этого принципа на примере одномерного стационарного температурного поля в одно- и многослойных неограниченной пластине и полом цилиндре.

1.9.1. Неограниченная пластина

1.9.1.1. Вид стационарного температурного поля

Стационарный тепловой поток $Q(x)$ через отстоящий на расстоянии x участок изотермической поверхности площадью $F(x)$ (рис. 1.4) за единицу времени равен

$$Q(x) = q(x)F(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} F(x). \qquad (1.80)$$

Разделяя переменные, имеем

$$dT = -\frac{Q(x)}{\lambda F(x)} \cdot dx. \qquad (1.81)$$

Принимаем, что коэффициент теплопроводности одинаков, т.е. λ = const. Кроме того, в стационарном тепловом режиме всегда $Q(x)$ = const, а в пластине и $F(x)$ = const в случае одномерного температурного поля.

Интегрирование (1.81) дает

$$T = -\frac{Q}{\lambda F} x + C_1, \qquad (1.82)$$

где C_1 - произвольная постоянная.

Таким образом, в указанных выше предположениях распределение температуры T по координате x в неограниченной пластине подчиняется линейному закону (рис. 1.13).

1.9.1.2. Тепловой поток через однослойную плоскую стенку при ГУ-I

В этом случае известны температуры T_{w1} и T_{w2} на ограничивающих поверхностях пластины (рис. 1.14).

Проинтегрируем обе части (1.81) при следующих условиях:

$$x = 0 \Rightarrow T = T_{w1},$$

$$x = \delta \Rightarrow T = T_{w2}.$$

Имеем тогда

$$\int_{T_{W1}}^{T_{W2}} dT = -\frac{Q}{\lambda F} \int_0^{\delta} dx \quad \text{и} \quad T_{w2} - T_{w1} = -\frac{Q\delta}{\lambda F},$$

откуда следует формула для расчета стационарного теплового потока через конструкцию

$$Q = (T_{w1} - T_{w2}) / \left(\frac{\delta}{\lambda F} \right).$$

(1.83)

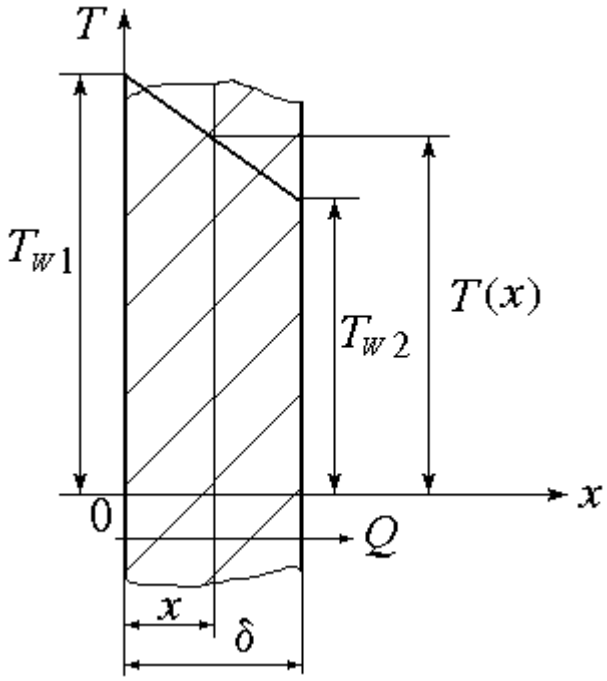


Рис. 1.14

Нетрудно видеть, что формула (1.83) аналогична формуле закона Ома для участка электрической цепи, имеющей вид

$$I = \frac{\Delta U}{R}, \tag{1.84}$$

где I – сила тока, ΔU – разность электрических потенциалов на концах электрического сопротивления величиной R.

Тогда, естественно, в формуле (1.83) величину $\delta/(\lambda F)$ следует полагать равной термическому сопротивлению переносу тепла механизмом теплопроводности через однослойную плоскую стенку:

$$R_{\text{Т, Т, ПЛ}} = \frac{\delta}{\lambda F}. \tag{1.85}$$

1.9.1.3. Тепловой поток через многослойную плоскую стенку при ГУ-I

На рис. 1.15 изображена стенка (пластина), состоящая из m слоев, у материала каждого из которых свое значение коэффициента теплопроводности λ_i и толщина δ_i $(i \in [1, m])$.

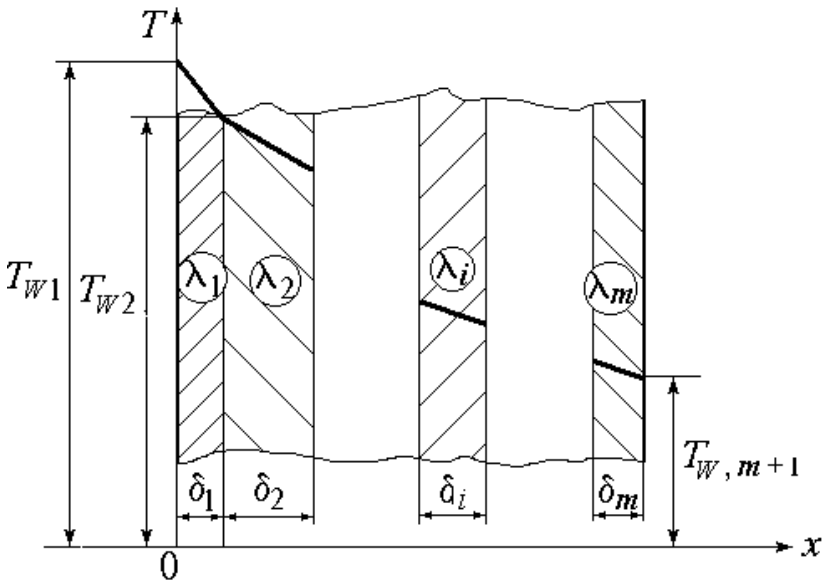


Рис. 1.15

Тепловой поток пересекает все слои конструкции, т.е. он встречает последовательную цепочку термических сопротивлений, каждое из которых равно $\delta_1 / \lambda_1 F, \delta_2 / \lambda_2 F, \ldots, \delta_m / \lambda_m F$, так что по аналогии с законом Ома для силы тока в последовательной цепи электрических сопротивлений, на концах которой заданы потенциалы (в нашем случае – заданы термические потенциалы $T_{w1}, T_{w,m+1}$), имеем

$$Q = \frac{T_{w1} - T_{w,m+1}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1 F} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2 F} + \ldots + \dfrac{\delta_m}{\lambda_m F}} = \frac{T_{w1} - T_{w,m+1}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i F}}. \qquad (1.86)$$

Физический принцип тепловой стационарности позволяет найти и температуру в любом месте конструкции. Так, температура T_{w2} на стыке первого и второго слоев находится из формулы

$$Q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1 F}}$$

при предварительно вычисленной согласно (1.86) левой части.

1.9.1.4. Тепловой поток через одно- и многослойную плоскую стенку при ГУ-III

В этом случае известны температуры $T_{f1,0}$ и $T_{f2,0}$ омывающих пластину сред, коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 соответственно к левой и правой ограничивающим плоскостям. Температуры же T_{w1} и T_{w2} этих плоскостей неизвестны и сами подлежат определению. На рис. 1.16 графически изображено распределение температуры в пластине и в омывающих ее средах.

Падение температуры в омывающих пластину средах от $T_{f1,0}$ до T_{w1} слева от нее и от T_{w2} до $T_{f2,0}$ справа связано с формированием на ограничивающих поверхностях пластины динамического и температурного пограничного слоев. Эти слои движущейся среды испытывают тормозящее и тепловое воздействия со стороны обтекаемой поверхности.

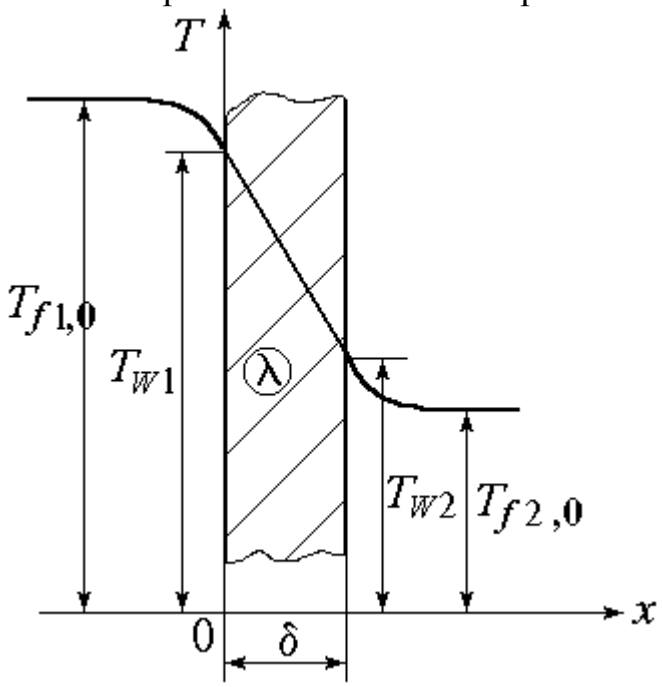


Рис. 1.16

Ясно, что в стационарном тепловом режиме тепловой поток $Q_{f1,w1}$, передаваемый конвективным путем от жидкости (газа) с температурой $T_{f1,0}$ к левой ограничивающей плоскости с искомой температурой T_{w1}, совпадает с тепловым потоком $Q_{w1,w2}$ через стенку, передаваемым механизмом теплопроводности, и с тепловым потоком $Q_{w2,f2}$, отдаваемым механизмом конвекции от правой плоскости с искомой температурой T_{w2} к подвижной среде с температурой $T_{f2,0}$, т.е.

$$Q_{f1,w1} = Q_{w1,w2} = Q_{w2,f2} = Q.$$

Привлекая формулы (1.22′) и (1.83), имеем соответственно

$$Q_{f1,w1} = \alpha_1 (T_{f1,0} - T_{w1}) F ,$$

$$Q_{w1,w2} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda F}},$$

$$Q_{w2,f2} = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2,0}) F ,$$

или

$$T_{f1,0} - T_{w1} = Q \frac{1}{\alpha_1 F},$$

$$T_{w1} - T_{w2} = Q \frac{\delta}{\lambda F},$$

$$T_{w2} - T_{f2,0} = Q \frac{1}{\alpha_2 F}.$$

Складывая левые и правые части, получаем в итоге зависимость для подсчета количества тепла через конструкцию:

$$Q = \frac{T_{f1,0} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \frac{\delta}{\lambda F} + \frac{1}{\alpha_2 F}}. \qquad (1.87)$$

Естественно назвать слагаемые $\frac{1}{\alpha_1 F}$ и $\frac{1}{\alpha_2 F}$ в знаменателе правой части формулы (1.87) термическими сопротивлениями переносу тепла механизмом конвекции через пограничные слои, сформировавшиеся на обтекаемой плоскости, т.е.

$$R_{\text{Т, К, ПЛ}} = \frac{1}{\alpha F}.$$

Формуле (1.87) часто придают вид

$$Q = k (T_{f1,0} - T_{f2,0}) F , \qquad (1.87′)$$

где величина *k*, равная

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}},$$

называется коэффициентом теплопередачи.

Рассмотрение формул (1.87), (1.83), (1.86) свидетельствует о том, что величина теплового потока всегда определяется как частное от деления

разности заданных температур на сумму термических сопротивлений, находящихся между ними.

Температуры T_{w1} и T_{w2}, естественно, определяются из соотношений

$$Q = \frac{T_{f1,0} - T_{w1}}{\frac{1}{\alpha_1 F}} \qquad \text{и} \qquad Q = \frac{T_{w2} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_2 F}},$$

в которых левая часть вычислена согласно (1.87).

В заключение приведем и формулу для определения величины Q в случае многослойной плоской стенки (рис. 1.15) для ГУ-III. В этом случае формула (1.87) принимает вид

$$Q = \frac{T_{f1,0} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_1 F} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{\lambda_i F} + \frac{1}{\alpha_2 F}}, \qquad (1.88)$$

в котором учитывается то обстоятельство, что количество термических сопротивлений со стороны стенки увеличивается.

1.9.2. Полый цилиндр

1.9.2.1. Вид стационарного температурного поля

На рис. 1.17 изображено сечение однослойного полого цилиндра длиной L, внутренняя и наружная поверхности которого отстоят на радиусы r_1 и r_2 от оси симметрии.

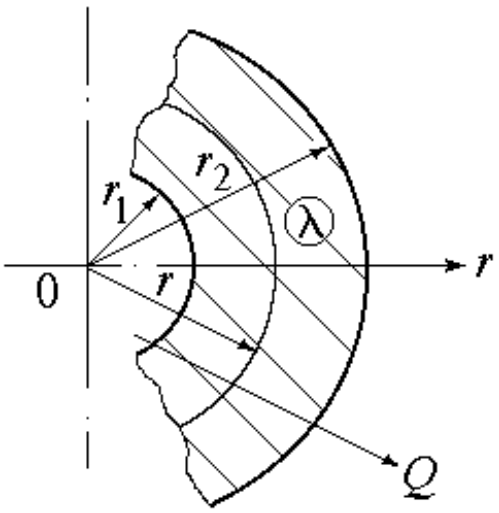


Рис. 1.17

Стационарный тепловой поток $Q(r)$, пересекающий отстоящую на радиус r изотермическую поверхность $F(r)$ за единицу времени, равен

$$Q(r) = q(r)F(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot 2\pi rL\,. \qquad (1.89)$$

Разделяя переменные, имеем

$$dT = -\frac{Q(r)}{2\pi L\lambda} \frac{dr}{r}. \qquad (1.90)$$

Согласно физическому принципу стационарности, справедливо равенство $Q(r)$ = const. Тогда интегрирование (1.90) при постоянном коэффициенте теплопроводности λ = const дает

$$T = -\frac{Q}{2\pi L\lambda} \ln r + C_1, \qquad (1.91)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Таким образом, стационарное распределение температуры T по радиусу r в полом цилиндре подчиняется нелинейному (логарифмическому) закону (рис. 1.18).

1.9.2.2. Тепловой поток через однослойный полый цилиндр при ГУ-I

В этом случае известны температуры T_{w1} и T_{w2} на ограничивающих поверхностях цилиндра (рис. 1.18).

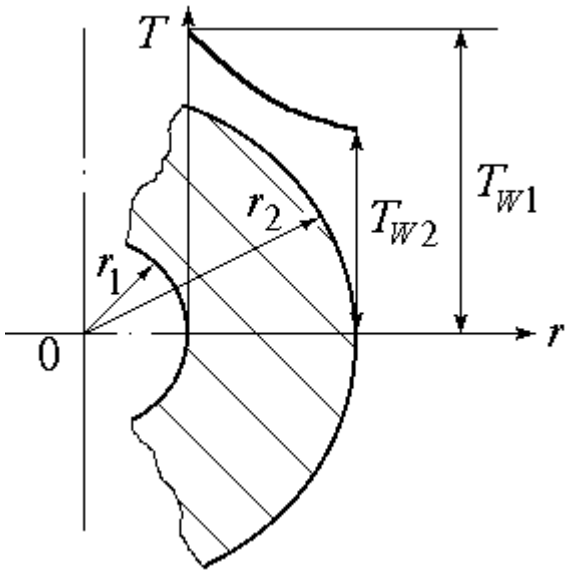


Рис. 1.18

Проинтегрируем обе части (1.90) при следующих условиях:

$$r = r_1 \Rightarrow T = T_{w1},$$
$$r = r_2 \Rightarrow T = T_{w2},$$

т.е. вычислим интегралы

$$\int_{T_{W1}}^{T_{W2}} dT = -\frac{Q}{2\pi L\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r},$$

и получим равенство

$$T_{w2} - T_{w1} = -\frac{Q}{2\pi L\lambda}\cdot \ln\frac{r_2}{r_1},$$

откуда следует формула для расчета теплового потока через конструкцию

$$Q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}, \qquad (1.92)$$

где $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$.

Величина $\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}$ в формуле (1.92) представляет собой термическое сопротивление переносу тепла механизмом теплопроводности через однослойный полый цилиндр, т.е.

$$R_{\text{Т, Т, Ц}} = \frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}.$$

(1.93)

1.9.2.3. Тепловой поток через многослойный полый цилиндр при ГУ-I

На рис. 1.19 изображен такой цилиндр, состоящий из m слоев, у материала каждого из которых свое значение коэффициента теплопроводности λ_i и каждый из которых ограничен радиусами r_i и r_{i+1} $(i \in [1, m])$.

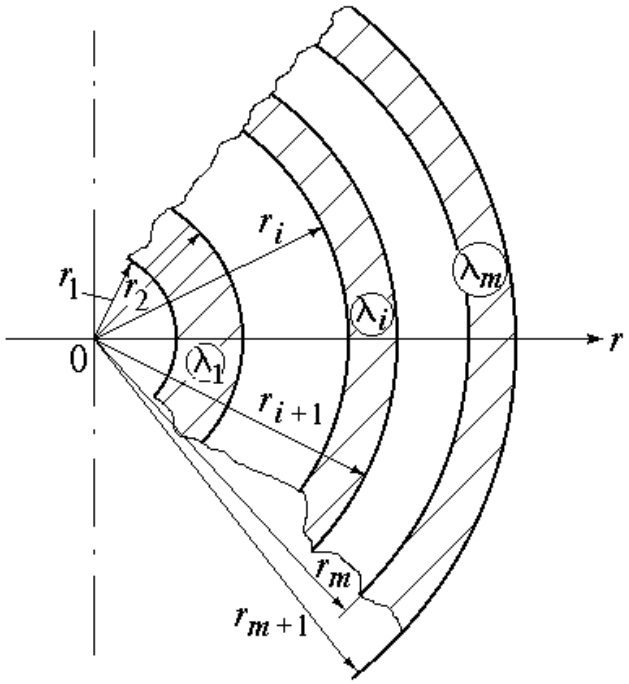


Рис. 1.19

На внутренней поверхности цилиндра ($r = r_1$) задана температура T_{w1}, а на наружной ($r = r_{m+1}$) – температура $T_{w,m+1}$.

По аналогии с изложенным для многослойной пластины (формула (1.86)) для рассматриваемого случая получаем следующую зависимость для величины теплового потока:

$$Q = \frac{T_{w1} - T_{w,m+1}}{\frac{1}{2\pi L\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1} + \ldots + \frac{1}{2\pi L\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i} + \ldots + \frac{1}{2\pi L\lambda_m}\ln\frac{d_{m+1}}{d_m}} = \frac{T_{w1} - T_{w,m+1}}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2\pi L\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}. \quad (1.94)$$

Физический принцип стационарности позволяет найти температуру в любом месте конструкции. Так, например, температура T_{W2} на стыке первого и второго слоев находится из формулы

$$Q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{2\pi L\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1}}$$

при известной согласно (1.94) левой части и т.д.

1.9.2.4. Тепловой поток через одно- и многослойный полый цилиндр при ГУ-III

В этом случае известны температура $T_{f1,0}$ и коэффициент теплоотдачи α_1 со стороны среды, движущейся внутри полого цилиндра (трубы), и

температура $T_{f2,0}$ и коэффициент теплоотдачи α_2 со стороны среды, омывающей его снаружи.

На рис. 1.20 изображена соответствующая температурная схема.

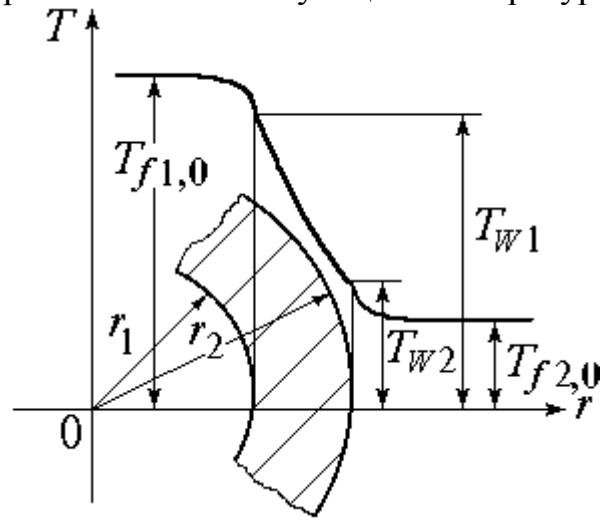


Рис. 1.20

Падение температуры в омывающих средах от $T_{f1,0}$ до T_{w1} внутри цилиндра и от T_{w2} до $T_{f2,0}$ снаружи происходит в пограничных слоях.

Условие стационарности теплового режима таково (см. 1.9.1.4):

$$Q_{f1,w1} = Q_{w1,w2} = Q_{w2,f2} = Q.$$

Привлекая формулы (1.22′) и (1.92), имеем соответственно

$$Q_{f1,w1} = \alpha_1(T_{f1,0} - T_{w1})F_1 = \alpha_1(T_{f1,0} - T_{w1})\pi d_1 L,$$

$$Q_{w1,w2} = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}},$$

$$Q_{w2,f2} = \alpha_2(T_{w2} - T_{f2,0})F_2 = \alpha_2(T_{w2} - T_{f2,0})\pi d_2 L$$

или

$$T_{f1,0} - T_{w1} = Q\frac{1}{\alpha_1\pi d_1 L},$$

$$T_{w1} - T_{w2} = Q\frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1},$$

$$T_{w2} - T_{f2,0} = Q\frac{1}{\alpha_2\pi d_2 L}.$$

Складывая левые и правые части, получаем формулу для расчета теплового потока через конструкцию:

$$Q = \frac{T_{f1,0} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1 L} + \frac{1}{2\pi L\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \pi d_2 L}}. \qquad (1.95)$$

Слагаемые $\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1 L}, \frac{1}{\alpha_2 \pi d_2 L}$ являются термическими сопротивлениями теплопереносу механизмом конвекции через пограничные слои, сформировавшиеся на цилиндрической поверхности, т.е.

$$R_{\text{Т, К, Ц}} = \frac{1}{\alpha \pi d L}.$$

Формуле (1.95) можно придать вид

$$Q = k_l (T_{f1,0} - T_{f2,0}) L, \qquad (1.95')$$

где величина k_l, равная

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \pi d_2}},$$

называется линейным коэффициентом теплопередачи.

Величина теплового потока через трубу длиной 1 м называется линейной плотностью теплового потока, которая рассчитывается как

$$q_l = \frac{T_{f1,0} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \pi d_2}} = \frac{T_{f1,0} - T_{f2,0}}{R_{\text{Т},l}} = k_l (T_{f1,0} - T_{f2,0}),$$

где $R_{\text{Т},l}$ – линейное термическое сопротивление конструкции.

Рассмотрение формул (1.92), (1.94), (1.95) свидетельствует о том, что величина теплового потока и в случае полого цилиндра определяется как частное от деления разности заданных температур на сумму термических сопротивлений, находящихся между ними.

Температуры T_{W1} и T_{W2}, естественно, определяются из соотношений

$$Q = \frac{T_{f1,0} - T_{w1}}{\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1 L}}, \quad Q = \frac{T_{w2} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_2 \pi d_2 L}},$$

в которых левая часть вычислена согласно (1.95).

В заключение приведем и зависимость для определения величины Q в случае многослойной цилиндрической стенки (рис. 1.19) при ГУ-III. В этом случае формула (1.95) принимает вид

$$Q = \frac{T_{f1,0} - T_{f2,0}}{\frac{1}{\alpha_1 \pi d_1 L} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2\pi L \lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 \pi d_{m+1} L}}. \qquad (1.96)$$

1.9.3. Обобщенное описание стационарной теплопроводности

Формулы (1.81), (1.90) могут быть не только объединены в одну, но и применены для полого шара, если их записать в следующем виде:

$$dT = -\frac{Q(x)}{\lambda A} \frac{dx}{x^{s-1}}, \qquad (1.97)$$

где x – координата точки, отсчитанная от ограничивающей плоскости пластины, от оси цилиндра или от центра шара; s – коэффициент геометрической формы тела, равный единице, двум или трем для пластины, полого цилиндра или полого шара соответственно; A – площадь поверхности пластины ($A = F$), площадь цилиндрической поверхности ($A = 2\pi L$) и шаровой поверхности ($A = 4\pi$) единичного радиуса.

Интегрирование степенной функции в правой части (1.97) при $Q(x) = Q = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ и $A = \text{const}$ дает при граничных условиях первого рода

$$\int_{T_{W1}}^{T_{W2}} dT = -\frac{Q}{\lambda A} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^{s-1}} \qquad \text{и} \qquad Q = \frac{T_{W1} - T_{W2}}{\frac{x_2^{-s+2} - x_1^{-s+2}}{(-s+2)\lambda A}}. \qquad (1.98)$$

В формулах (1.98) x_1 и x_2 - координаты ограничивающих поверхностей платины, полых цилиндра и шара, на которых известны температуры T_{W1} и T_{W2}.

Для полого цилиндра ($s = 2$) в знаменателе (1.98) имеем неопределенность вида $0/0$, раскрытие которой по правилу Лопиталя дает $\frac{1}{\lambda A} \ln \frac{x_2}{x_1}$.

Однако можно пользоваться формулой (1.98) для полого цилиндра и

непосредственно без указанного выше преобразования, если вместо $s=2$ положить $s=2\pm\varepsilon$, где ε – малое число, которое мы рекомендуем принять равным $\varepsilon=10^{-3}$.

Для многослойных конструкций расчет стационарного теплового потока в общем случае следует проводить по формуле

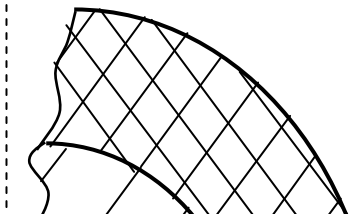
$$Q=\frac{\Delta T}{\dfrac{1}{\alpha_1 A x_1^{s-1}}+\sum_{i=1}^{m}\dfrac{x_{i+1}^{-s+2}-x_i^{-s+2}}{(-s+2)\lambda_i A}+\dfrac{1}{\alpha_2 A x_{m+1}^{s-1}}}. \qquad (1.99)$$

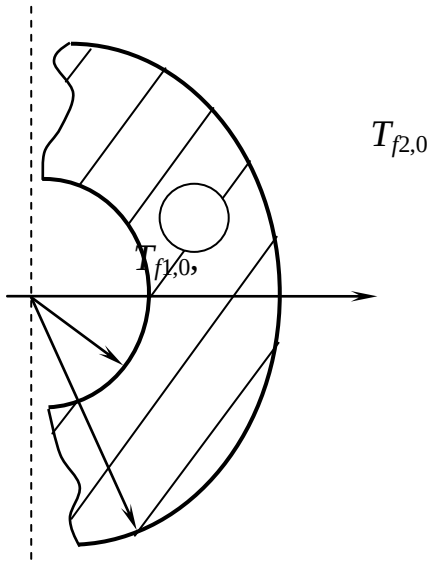
В (1.99) величины Ax_1^{s-1} и Ax_{m+1}^{s-1} - это площади поверхностей, ограничивающих многослойную конструкцию изнутри и снаружи соответственно; m - количество слоев материала (см. (1.58), (1.60), (1.66), (1.68)).

Для граничных условий первого рода (ГУ-I) в числителе (1.99) надо положить $\Delta T=T_{W1}-T_{W,m+1}$, а в знаменателе отбросить первое и последнее слагаемые. Для граничных условий третьего рода (ГУ-III) имеем $\Delta T=T_{f1,0}-T_{f2,0}$ при сохранении всех слагаемых в знаменателе.

1.9.4. Тепловая изоляция конструкций

Тепловая изоляция конструкций различного назначения и, прежде всего, трубопроводов, а также цилиндрических и сферических сосудов имеет целью уменьшение проходящего через них теплового потока. Этого можно достичь в том случае, если в результате нанесения на поверхность тела теплоизолирующего материала величина термического сопротивления конструкции возрастает.





а *б*

Рис.1.21

Рассмотрим фрагмент конструкции до нанесения тепловой изоляции (рис. 1.21, *а*) и после ее нанесения (рис. 1.21, *б*).

В этом случае согласно формуле (1.99) термическое сопротивление неизолированной конструкции равно

$$R_{\text{Т}} = \frac{1}{\alpha_1 A x_1^{s-1}} + \frac{x_2^{-s+2} - x_1^{-s+2}}{(-s+2)\lambda A} + \frac{1}{\alpha_2 A x_2^{s-1}}, \qquad (1.100)$$

а после нанесения слоя изоляции на ее наружную поверхность имеем

$$R_{\text{Т,из}} = \frac{1}{\alpha_1 A x_1^{s-1}} + \frac{x_2^{-s+2} - x_1^{-s+2}}{(-s+2)\lambda A} + \frac{x_3^{-s+2} - x_2^{-s+2}}{(-s+2)\lambda_{\text{из}} A} + \frac{1}{\alpha_2 A x_3^{s-1}}, \qquad (1.101)$$

где $\lambda_{\text{из}}$ – коэффициент теплопроводности теплоизолирующего материала.

Изменение термического сопротивления изолированной конструкции равно

$$\Delta R_{\text{Т,из}} = R_{\text{Т,из}} - R_{\text{Т}} = \frac{x_3^{-s+2} - x_2^{-s+2}}{(-s+2)\lambda_{\text{из}} A} + \frac{1}{\alpha_2 A x_3^{s-1}} - \frac{1}{\alpha_2 A x_2^{s-1}} \qquad (1.102)$$

или

$$\Delta R_{\text{Т,из}} = \frac{x_3^{-s+2} - x_2^{-s+2}}{(-s+2)\lambda_{\text{из}} A} + \frac{1}{\alpha_2 A}\left(\frac{1}{x_3^{s-1}} - \frac{1}{x_2^{s-1}}\right). \qquad (1.102')$$

Функция $\Delta R_{\text{Т,из}}$ согласно (1.102') равна сумме двух слагаемых, имеющих разные знаки. С ростом x_3 первое из этих слагаемых возрастает, а второе – уменьшается. Физический смысл такого их поведения состоит в том, что первое слагаемое в (1.102'), равное

$$\frac{x_3^{-s+2} - x_2^{-s+2}}{(-s+2)\lambda_{\text{из}} A},$$

представляет собой термическое сопротивление переносу тепла теплопроводностью через тепловую изоляцию, возрастающее с увеличением x_3, т.е. с увеличением толщины изоляции. Второе же слагаемое в (1.102') представляет собой изменение термического сопротивления переносу тепла конвекцией со стороны окружающей конструкцию наружной среды, вызванное увеличением площади наружной поверхности (для цилиндра и шара, когда $s>1$) вследствие нанесения тепловой изоляции, убывающее с увеличением x_3, так как имеет место неравенство

$$\frac{1}{\alpha_2 A x_3^{s-1}} < \frac{1}{\alpha_2 A x_2^{s-1}}$$

Очевидно, что нанесение тепловой изоляции должно приводить к тому, чтобы изменение термического сопротивления конструкции было положительной величиной $\Delta R_{\text{Т,из}} > 0$, так как именно это и дает уменьшение теплового потока через теплоизолированную конструкцию. В итоге при известных $\alpha_2, x_2, x_3, \lambda_{\text{из}}$ приходим к необходимости выполнения неравенства

$$\frac{x_3^{-s+2} - x_2^{-s+2}}{(-s+2)\lambda_{\text{из}}} > -\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{1}{x_3^{s-1}} - \frac{1}{x_2^{s-1}}\right). \qquad (1.103)$$

С учетом рекомендаций п.1.9.3 по выбору для цилиндрической трубы величины $s = 2 \pm \varepsilon$ получаем на основании (1.103) следующее ограничение на коэффициент теплопроводности теплоизоляционного материала:

$$\lambda_{из} < \left| \frac{\alpha_2 (x_3^{-s+2} - x_2^{-s+2})}{(-s+2)(x_3^{-s+1} - x_2^{-s+1})} \right|. \qquad (1.104)$$

Анализ формулы (1.104) показывает, что для неограниченной пластины $(s=1)$ имеем $\lambda_{из} < \infty$, т.е. нанесение на пластину любого материала с конечной теплопроводностью приводит к уменьшению теплового потока через нее.

Для полого цилиндра $(s=2)$ в правой части (1.104) получаем неопределенность вида $0/0$, раскрытие которой по правилу Лопиталя дает

$$\lambda_{из} < \frac{\alpha_2 x_2 x_3 \ln(x_3 / x_2)}{x_3 - x_2}, \qquad (1.105)$$

и, наконец, для полого шара $(s=3)$ получаем

$$\lambda_{из} < \frac{\alpha_2 x_2 x_3}{x_2 + x_3}. \qquad (1.106)$$

Выясним влияние координаты x_2 наружной поверхности тела (а, точнее говоря, кривизны этой поверхности $1/x_2$) на эффективность нанесения тепловой изоляции с наперед заданным коэффициентом теплопроводности $\lambda_{из}$ изоляционного материала. С этой целью проведем анализ на наличие экстремума функции $\Delta R_{\text{Т,из}}$ по аргументу x_2. Первая производная от $\Delta R_{\text{Т,из}}$ по x_2 дает

$$\frac{\partial \Delta R_{\text{Т,из}}}{\partial x_2} = -\frac{(-s+2)x_2^{-s+1}}{(-s+2)\lambda_{из}} - \frac{1}{\alpha_2}\left((-s+1)x_2^{-s}\right) = 0$$

или

$$x_2^{-s}\left[x_2 + \frac{(-s+1)\lambda_{из}}{\alpha_2}\right] = 0. \qquad (1.107)$$

Так как $x_2^{-s} \neq 0$, то получаем так называемое критическое значение координаты x_2 равным

$$x_{2\text{кр}} = \frac{(s-1)\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2}, \qquad (1.108)$$

откуда для цилиндра ($s = 2$) следует

$$x_{2\text{кр}} = \frac{\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2}. \qquad (1.109)$$

Так как x_2 представляет собой радиус цилиндра, то вместо (1.109) имеем хорошо известный в теплотехнике результат:

$$d_{\text{кр}} = \frac{2\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2}. \qquad (1.110)$$

Покажем, что в точке $x_{2\text{кр}}$ функция $\Delta R_{\text{Т,из}}$ действительно достигает экстремума и этим экстремумом является минимум. Используя левую часть (1.107), имеем

$$\frac{\partial^2 \Delta R_{\text{Т,из}}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2^{-s+1} + \frac{(-s+1)\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2} x_2^{-s} \right] = (-s+1)x_2^{-s}\left[1 + \frac{\lambda_{\text{из}}}{\alpha_2}(-s)x_2^{-1} \right]. \qquad (1.111)$$

Подстановка в (1.111) вместо x_2 его критического значения (1.108) дает

$$\frac{\partial^2 \Delta R_{\text{Т,из}}}{\partial x_2^2} = (-s+1)x_2^{-s}\left[1 + \frac{x_2}{s-1}(-s)x_2^{-1} \right] = x_2^{-s} > 0.$$

Тем самым доказано, что функция $\Delta R_{\text{Т,из}}$ действительно имеет экстремум, которым является минимум.

Практическим приложением полученного результата является то, что нанесение тепловой изоляции на поверхность цилиндрической трубы приводит к увеличению термического сопротивления $\Delta R_{\text{Т,из}}$, а следовательно, к уменьшению теплового потока Q через нее лишь в том случае, когда наружный диаметр трубы $d_2 > d_{2\text{кр}}$. В противном случае, нанесение тепловой изоляции на наружную поверхность трубы приведет к противоположному эффекту.

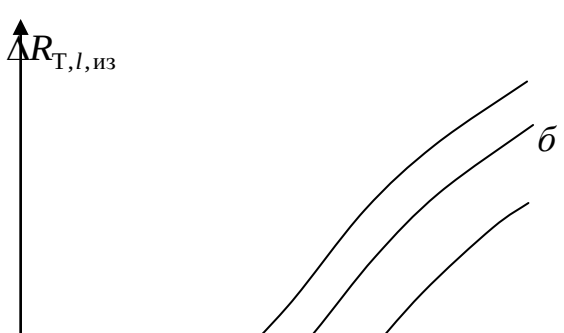


Рис. 1.22

Графическая иллюстрация проведенного выше анализа дана на рис. 1.22, на котором линии *а* и *в* соответствуют непрерывному уменьшению тепловых потерь через конструкцию (росту ее суммарного термического сопротивления $\Delta R_{\text{Т},l,\text{из}}$) при $d_2 \geq d_{2\text{kp}}$, а линия *б* соответствует противоположному случаю $d_2 < d_{2\text{kp}}$, когда нанесение тепловой изоляции до порогового значения $(d_{\text{из}}/d_2)_{\text{п}}$ не приводит к полезному эффекту. Величина $d_{\text{из.п}}$ равна $2x_{3,\text{п}}$ и находится из формулы (1.102′) при $\Delta R_{T,\text{из}} = 0$.

Из (1.108) следует, что для полого шара (s = 3) критический диаметр наружной поверхности оказывается вдвое больше критического диаметра наружной поверхности цилиндра.

Все приведенные здесь результаты получены в предположении того, что одинаковы значения коэффициента теплоотдачи α_2 со стороны среды, омывающей наружную поверхность как неизолированного, так и теплоизолированного тела.

1.9.5. Нелинейная стационарная теплопроводность

Выше была рассмотрена стационарная теплопроводность при λ= const. Реальные материалы характеризуются зависимостью коэффициента теплопроводности λ от температуры. Рассмотрим в качестве примера нелинейную стационарную теплопроводность в неограниченной пластине

при ГУ-I (рис. 1.23) для трех видов материала: а) λ = const; б) λ растет с ростом температуры; в) λ убывает с ростом температуры.

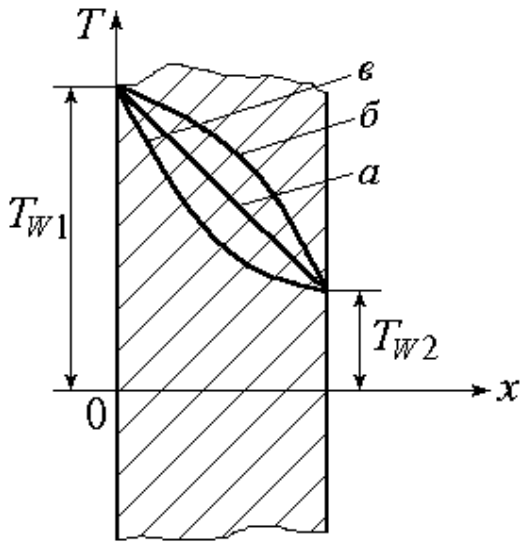


Рис. 1.23

Для этих случаев зависимость (1.2′) для расчета плотности теплового потока дает

$$q = -\lambda(T)\,\mathrm{grad}\,T \cdot \vec{n}^0 = -\lambda(T)\frac{dT}{dx}. \qquad (1.112)$$

Указанная величина q положительна ($q > 0$) и, пересекая изотермические поверхности пластины, везде одинакова.

Тогда имеем также из (1.112)

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda(T)} = \frac{\mathrm{const}}{\lambda(T)} < 0. \qquad (1.113)$$

В диаграмме *T*-*x* (рис. 1.23) производная *dT*/*dx* численно равна тангенсу угла наклона касательной к любой линии, проходящей в ней.

При λ = const имеем на основании (1.113)

$$\frac{dT}{dx} = \mathrm{const},$$

т.е. получаем линейное распределение температуры по толщине пластины (линия *а*).

При росте λ с увеличением температуры в тех местах пластины, где температура выше, будет соответственно меньше модуль производной *dT*/*dx* (линия *б*).

И, наконец, при уменьшении λ с ростом температуры распределение температуры будет соответствовать линии *в*.

Таким образом, в пластине, изготовленной из реального материала, распределение температуры по координате *x* является нелинейным.

Зависимость $\lambda = \lambda(T)$ влияет не только на вид стационарного температурного поля: она приводит и к необходимости учета этой зависимости для подсчета количества тепла *Q*, проходящего через тело.

Для рассмотренной выше неограниченной пластины при простейшей, линейной зависимости λ от температуры

$$\lambda(T) = b + eT \qquad (1.114)$$

вместо (1.52) имеем уже уравнение

$$Q(x) = -(b + eT)\frac{dT}{dx}F(x). \qquad (1.115)$$

Учитывая, что в стационарном тепловом режиме $Q(x) = Q = \text{const}$ и для одномерного распространения тепла в пластине $F(x) = F = \text{const}$, приходим вместо (1.115) к уравнению

$$Q = -(b + eT)\frac{dT}{dx}F \quad \text{или} \quad (b+eT)dT = -Qdx/F. \qquad (1.116)$$

Полагая известными температуры T_{W1} и T_{W2}, получаем

$$\int_{T_{W1}}^{T_{W2}}(b+eT)dT = -\frac{Q}{F}\int_0^{\delta}dx \quad \text{и} \quad \left(bT + eT^2/2\right)\Big|_{T_{W1}}^{T_{W2}} = -Q\delta/F. \qquad (1.117)$$

Левая часть (1.117) приводится к следующему виду:

$$b(T_{W2} - T_{W1}) + e(T_{W2}^2 - T_{W1}^2)/2 = (T_{W2} - T_{W1})\left[b + e(T_{W2} + T_{W1})/2\right].$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с формулой (1.114) второй сомножитель в правой части последнего равенства представляет собой коэффициент теплопроводности материала $\lambda_{ср}$, вычисленные по среднеарифметическому значению температуры $T_{ср} = (T_{W1} + T_{W2})/2$. Тогда вместо (1.117) получаем следующую формулу для расчета количества тепла *Q*, проходящего за единицу времени через пластину:

$$Q = (T_{W1} - T_{W2})/\frac{\delta}{\lambda_{ср}F}.$$

2. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

Для решения задач нестационарной и стационарной теплопроводности

с граничными условиями третьего рода требуется знание коэффициента теплоотдачи α. Формулы для его определения при различном характере теплового взаимодействия движущейся среды и обтекаемой поверхности твердого тела устанавливаются в настоящем разделе.

Помимо этого в некоторых случаях возникает необходимость и в определении температурных полей в потоке жидкости или газа.

Различают конвективный теплообмен при вынужденном и при свободном течении. В первом случае поток побуждается к движению насосами, вентиляторами, компрессорами и т.д.

Во втором же случае движение жидкости или газа возникает у поверхности теплого или холодного тела, внесенного в их объем. При наличии сил тяжести (сил внешнего поля) у поверхности нагретого тела возникает восходящий поток, а у поверхности холодного тела - нисходящий поток. Свободное движение в этом случае называется термическим. Очевидно, что оно будет продолжаться до тех пор, пока имеется разность температур среды T_f и поверхности тела T_W. И при вынужденной, и при свободной конвекции различают ламинарный, переходной и турбулентный режимы течения.

Не вдаваясь в детали, укажем на то, что при ламинарном движении поток «следует» руслу, элементарные струйки не перемешиваются друг с другом, так что перенос тепла от жидкости к омываемой поверхности (и наоборот) осуществляется лишь за счет хаотически движущихся молекул (атомов).

При турбулентном движении элементарные струйки жидкости перемешиваются, так что в потоке наряду с хаотически движущимися молекулами (атомами) хаотически движутся и турбулентные вихри, содержащие огромные количества молекул (атомов). Достигая, наряду с молекулами, обтекаемой поверхности, вихри отдают ей (или воспринимают от нее) тепло. Ясно, что конвективный теплообмен при турбулентном течении значительно интенсивнее, чем при ламинарном.

При переходном режиме течения в потоке одновременно существуют и чередуются во времени и пространстве участки ламинарного и турбулентного движения.

2.1. Схема В.Нуссельта

Построение зависимостей для определения коэффициента теплоотдачи α имеет в своем основании выдвинутое в 1910 г. немецким физиком В.Нуссельтом предположение о том, что каким бы ни был режим вынужденного или свободного течения жидкости, в любом случае у поверхности твердого тела формируется ламинарное движение. Таким образом, В.Нуссельт предложил считать, что перенос тепла в тонком слое жидкости (газа) у обтекаемой поверхности имеет молекулярный характер, так что для этого слоя справедливо использование гипотезы Фурье для

расчета плотности теплового потока.

На рис. 2.1 изображено распределение температуры, которая изменяется от значения T_W на омываемой поверхности до температуры $T_{f,0}$ невозмущенной части течения, принимая промежуточные значения T_f в той его части, которая испытывает «холодящее» действие стенки.

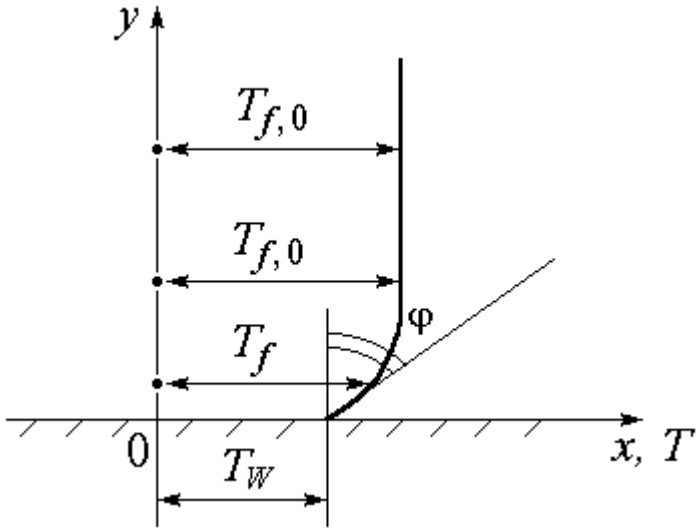


Рис. 2.1

Значение плотности теплового потока в стенку q_w ($q|_{y=0}$) может быть рассчитано двояко:

1) с использованием искомого коэффициента теплоотдачи α по формуле (1.22′)

$$q_w = \alpha(T_w - T_{f0}); \qquad (2.1)$$

2) с привлечением гипотезы Фурье для описания переноса тепла в ламинарно движущихся пристенных слоях жидкости

$$q_W = -\lambda_f \left.\frac{\partial T_f}{\partial y}\right|_{y=0}, \qquad (2.2)$$

где λ_f - коэффициент молекулярной теплопроводности движущейся среды (находится из справочных таблиц или графиков) и $\left.\frac{\partial T_f}{\partial y}\right|_{y=0} = \mathrm{tg}\varphi$.

Приравнивая правые части формул (2.1) и (2.2), получаем зависимость для определения α в рассматриваемом сечении потока

$$\alpha = \frac{-\lambda_f \left.\frac{\partial T_f}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_w - T_{f,0}}. \qquad (2.3)$$

Воспользоваться формулой (2.3) можно, очевидно, лишь в том случае, если предварительно найдено распределение температуры в движущейся среде.

Для этого надо аналитически или численно решить краевую задачу о переносе тепла в потоке жидкости или газа, включающую в себя:

1) уравнение энергии - уравнение Фурье – Кирхгофа,

2) уравнение движения - например, в форме уравнения Навье–Стокса,

3) уравнение неразрывности потока - закон сохранения массы,

4) уравнение состояния движущейся среды: например, для идеального газа - это уравнение Менделеева–Клапейрона,

5) математическую формулировку условий однозначности решения системы уравнений, приведенной в пп. 1-4: описания геометрической области протекания процесса и находящейся в ней среды, распределения температуры и скорости потока в начальный момент времени, распределения температуры и скорости на ограничивающих движущуюся среду поверхностях и во входных сечениях.

Решение указанной краевой задачи в общем случае встречает значительные трудности даже при использовании численных методов. Рациональный выход для описания конвективного теплообмена дает применение методов теории подобия физических явлений и их моделирования.

2.2. Основные положения теории подобия и физического моделирования

Еще И. Ньютон распространил понятие геометрического подобия на физические явления и ввел понятия их кинематического и динамического подобия. Отметим, что одно из двух подобных явлений одинаковой физической природы принято называть натурным (натурное явление или «натура»), а сравниваемое с ним явление при определенных условиях - модельным (модельное явление или «модель»). Кинематическое подобие сравниваемых явлений имеет место в том случае, если в каждой паре сходственным образом расположенных точек «натуры» и «модели» одинаково отношение модулей векторов скорости при их параллельности и сонаправленности. При динамическом подобии сказанное выше относится к векторам одноименных сил.

Для того чтобы установить условия, необходимые и достаточные для подобия, основываясь на физических соображениях, рассмотрим течение жидкости или газа в натурном и модельном каналах (цилиндрических трубах), на оси которых расположены шары (рис. 2.2), и теплообмен в них.

Такое рассмотрение впервые (в несколько отличающейся форме) было предложено на лекциях для студентов Геттингенского университета в Германии великим механиком 20-го века Л.Прандтлем.

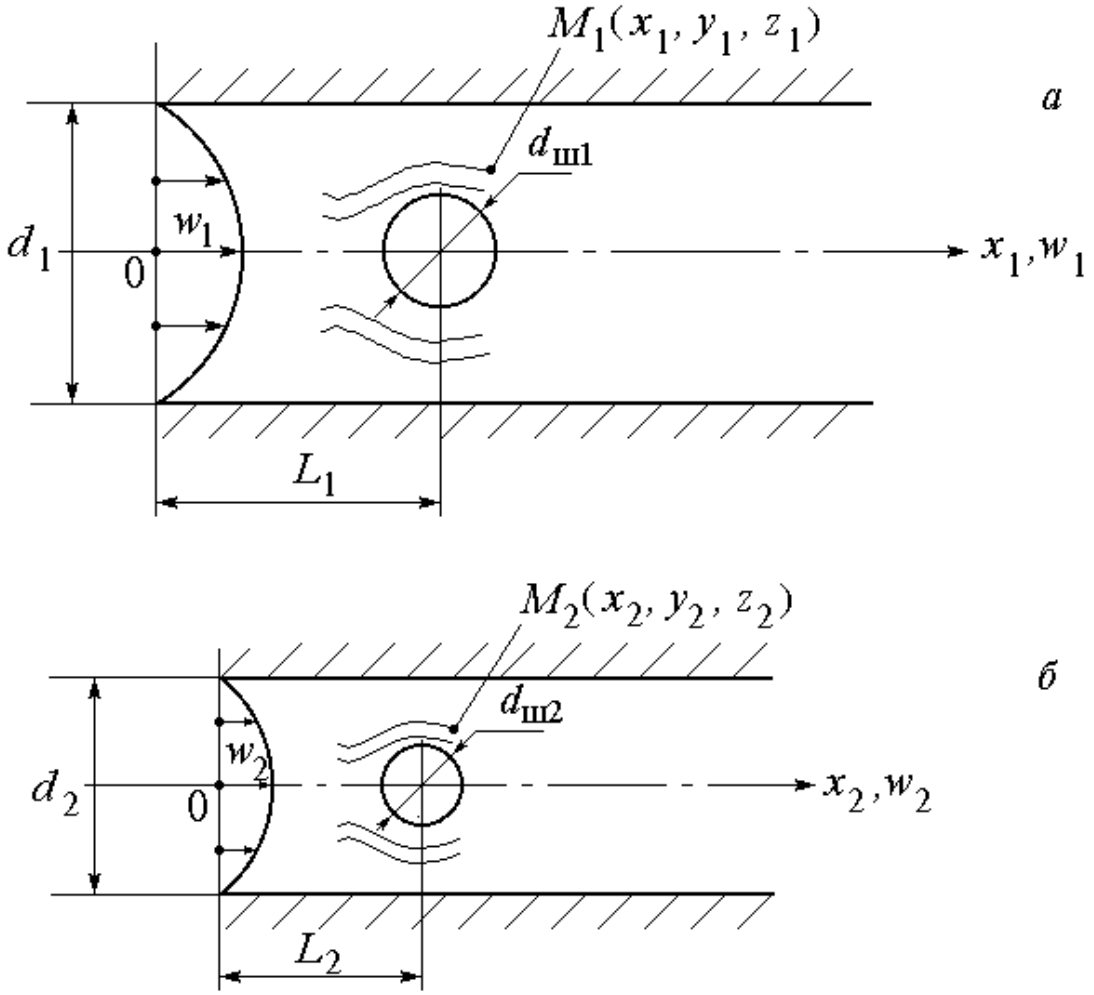


Рис. 2.2

Следуя Л.Прандтлю, зададимся вопросом: «Где еще в природе можно встретить такие же по форме линии тока, которые сформировались при обтекании шара в круглом канале?» (рис. 2.2, *а*). Ответ на этот вопрос ему представлялся очевидным: «При обтекании шара в круглом канале какой-либо жидкостью или газом» (рис. 2.2, *б*). Кроме того, должны выполняться и другие необходимые, а также достаточные условия подобия «натуры» и «модели».

2.2.1. **Необходимые условия для подобия распределений скорости и температуры в потоке**

Необходимые условия для подобия распределения скорости

совершенно очевидны:

1) сравниваемые объекты должны быть геометрически подобны друг другу: они могут быть, например, как в рассматриваемом случае, цилиндрическими трубами с шарами на оси при соотношении размеров

$$L_1 / d_1 = L_2 / d_2, \quad d_{ш1} / d_1 = d_{ш2} / d_2; \tag{2.4}$$

2) свойства среды в них должны подобным образом зависеть от координат, времени, температуры и так далее;

3) распределение скоростей w_1 и w_2 во входном сечении "натуры" ($x_1 = 0$) и "модели" ($x_2 = 0$) должно быть подобным друг другу

$$w_1(0, y_1, z_1) / w_2(0, y_2, z_2) = \text{const};$$

4) если скорость потока на поверхности натурного канала равна нулю, т.е. выполняется гипотеза "прилипания" ближайших к обтекаемой поверхности "натуры" молекул движущейся среды, то аналогичные условия должны быть реализованы и в модели.

Необходимые условия для подобия распределения температуры в движущейся среде, безусловно, должны содержать все перечисленные выше необходимые условия для подобия распределения скорости, которые должны быть дополнены условиями подобия распределения температур во входном сечении “натуры” и “модели” и на всех обтекаемых поверхностях (или на этих поверхностях должны быть подобны распределения плотности тепловых потоков).

При протекании нестационарных процессов необходимые условия для подобия распределения скорости и температуры в потоках должны включать подобие их начальных распределений.

Отметим, что ***если соблюдены необходимые условия подобия явлений при размерном представлении входящих в них величин, то тем самым обеспечено совпадение этих условий в безразмерном представлении***.

Судить, например, о подобии натурного и модельного течений нужно, сравнивая векторы скорости или векторы одноименных сил в каждой паре сходственным образом расположенных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ «натурного» и «модельного» пространства, т.е. выбор точек M_1 и M_2 должен подчиняться соотношениям сходственности их расположения

$$\frac{x_1}{d_1} = \frac{x_2}{d_2}, \quad \frac{y_1}{d_1} = \frac{y_2}{d_2}, \quad \frac{z_1}{d_1} = \frac{z_2}{d_2}. \tag{2.5}$$

2.2.2. Достаточные условия для подобия вынужденных течений

Они устанавливаются, основываясь на следующих рассуждениях.

На движущуюся вынужденно жидкость (газ), находящуюся в элементе

пространства «натуры» или «модели», действуют сила тяжести $\vec{F}_g$, сила вязкостного трения $\vec{F}_\mu$ и сила $\vec{F}_{\Delta p}$, связанная с наличием градиента давления вдоль потока. Векторная сумма этих сил является равнодействующей, а ее значение, взятое с противоположным знаком, называется силой инерции $\vec{F}_i$.

Согласно принципу Даламбера имеем для выделенного элемента пространства соотношение

$$\vec{F}_g + \vec{F}_\mu + \vec{F}_{\Delta p} + \vec{F}_i = 0, \qquad (2.6)$$

представляющее собой уравнение Навье–Стокса, записанное в векторах сил, действующих на движущуюся среду.

В безразмерной форме получаем вместо (2.6)

$$\frac{\vec{F}_g}{\vec{F}_\mu} + 1 + \frac{\vec{F}_{\Delta p}}{\vec{F}_\mu} + \frac{\vec{F}_i}{\vec{F}_\mu} = 0. \qquad (2.6')$$

Ясно, что ***если в каждой паре сходственным образом расположенных точек пространства «натуры» и «модели» одноименные слагаемые левой части (2.6′) совпадают друг с другом, то при выполнении необходимых условий этого достаточно, чтобы утверждать о подобии «натурного» и «модельного» течений, так как уравнения движения в форме (2.6′) и условия однозначности их решения становятся одинаковыми для «натуры» и «модели»***.

В теории подобия доказывается, что достаточно сравнивать между собой не сами отношения указанных сил, а их меры.

Для вынужденного обтекания потоком пластины или при его течении в прямолинейном канале постоянного поперечного сечения влияние градиента давления отсутствует или незначительно и развитие процесса (формирование распределения скорости) определяется отношением силы инерции $\vec{F}_i$ к силе вязкостного трения $\vec{F}_\mu$.

Вычислим меру отношения этих сил для частного случая стационарного течения среды с постоянными физическими свойствами. В этом случае силы $\vec{F}_i$ и $\vec{F}_\mu$, действующие на жидкость или газ, находящиеся в единице объема, таковы:

$$\vec{F}_i = \rho(\vec{w}\,\mathrm{grad})\vec{w}, \quad \vec{F}_\mu = \mu\nabla^2\vec{w}. \qquad (2.7)$$

Надо помнить, что операторы $\vec{w}\cdot\mathrm{grad}$ и $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ действуют не на вектор $\vec{w}$, а на его проекцию w_x, w_y, w_z на оси x, y и z соответственно.

В формуле (2.7) ρ и μ - это соответственно плотность жидкости (газа) и коэффициент динамической вязкости, а оператор $(\vec{w}\cdot\mathrm{grad})$ таков:

$$(\vec{i}\,w_x + \vec{j}\,w_y + \vec{k}\,w_z)\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) = w_x\,\frac{\partial}{\partial x} + w_y\,\frac{\partial}{\partial y} + w_z\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Мера отношения $\dfrac{\vec{F}_i}{\vec{F}_\mu}$ обозначается как $O\left(\dfrac{\vec{F}_i}{\vec{F}_\mu}\right)$ (O – первая буква латинского слова *Ordo* (порядок)).

Итак, имеем

$$O\left(\frac{\vec{F}_i}{\vec{F}_\mu}\right) = O\left(\frac{\rho(\vec{w}\cdot\mathrm{grad})\vec{w}}{\mu\nabla^2\vec{w}}\right). \qquad (2.8)$$

В теории подобия показывается, что в качестве меры искомой величины f назначается какое-либо известное при постановке задачи ее характерное значение f_0, важное для развития явления. В качестве меры производных $\partial f/\partial x, \partial^2 f/\partial x^2$ ... назначаются отношения f_0/x_0, f_0/x_0^2 и т.д., где x_0 - характерное известное значение аргумента x. Меры обязательно назначаются одинаковым образом для «натуры» и «модели». Меры для известных величин - в частности, свойств среды - не назначаются: они выбираются из справочного материала по важной для исследуемого процесса (характерной) переменной, например, по характерной температуре и др.

Назначим в качестве меры для $\vec{w}$ известную скорость потока w_0 на входе в трубу, а в качестве меры для протяженностей x, y, z - ее диаметр d.

Тогда имеем вместо (2.8)

$$O\left(\rho\frac{(\vec{w}\,\mathrm{grad})\vec{w}}{\mu\nabla^2\vec{w}}\right) = \rho\frac{w_0\cdot w_0/d}{\mu\, w_0/d^2} = \rho\frac{w_0 d}{\mu}\ . \qquad (2.9)$$

Безразмерный комплекс в правой части (2.9) является мерой отношения силы инерции к силе вязкостного трения, его величина определяет характер вынужденного течения жидкости (газа). Он называется критерием Рейнольдса и обозначается Re (*Reynolds*):

$$\mathrm{Re} = \rho\frac{w_0 d}{\mu} \quad \text{или} \quad \mathrm{Re} = \frac{w_0 d}{\nu},$$

где $\nu = \mu/\rho$ - коэффициент кинематической вязкости.

Итак, для подобия распределения скоростей в двух безградиентных вынужденных течениях в каналах достаточно, чтобы выполнялось равенство критериев Рейнольдса, составленных для «натуры» и «модели»:

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{w_0 d}{\nu}\right)_1 = \left(\frac{w_0 d}{\nu}\right)_2. \qquad (2.10)$$

Если обозначить характерный для потока размер через l_0 (в рассматриваемом случае $l_0 \equiv d$), то достаточное условие подобия двух вынужденных течений

(2.10) принимает более общий вид

$$\left(\frac{w_0 l_0}{\nu}\right)_1 = \left(\frac{w_0 l_0}{\nu}\right)_2. \qquad (2.10')$$

2.2.3. Достаточные условия для подобия свободных термических течений

Для суждения о подобии двух термических свободных течений вместо (2.6) приходится рассматривать уравнение

$$\vec{F}_{\Delta\gamma} + \vec{F}_{\mu} + \vec{F}_i = 0, \qquad (2.11)$$

в котором $\vec{F}_{\Delta\gamma}$ - сила плавучести (подъемная или опускная), действующая на жидкость (газ).

Согласно закону Архимеда эта сила для жидкости (газа) в пространстве единичного объема определяется следующим образом

$$\vec{F}_{\Delta\gamma} = \rho\vec{g}d\rho, \qquad (2.12)$$

где $\vec{g}$ - ускорение внешнего поля (в частности, земное ускорение), $d\rho$ - отличие плотности вещества ρ в выделенном элементе пространства от значений ρ в его окрестности из-за наличия соответствующей разности температур dT.

Учитывая связь между плотностью ρ и удельным объемом v, преобразуем (2.12) следующим образом

$$\vec{F}_{\Delta\gamma} = \rho\vec{g}d\rho = \rho\vec{g}d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{\vec{g}}{v^2}dv = -\frac{\vec{g}}{v^2}\frac{dv}{dT}\cdot dT =$$

$$= -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \rho\vec{g}\frac{dT}{v} = -\beta\rho\vec{g}dT. \qquad (2.12')$$

Здесь $\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ - термический коэффициент объемного расширения вещества при p = const, так как процесс свободной конвекции, как правило, протекает в изобарных условиях (сила $\vec{F}_{\Delta p}$ в уравнении (2.11) отсутствует). Этот коэффициент для жидкостей определен экспериментально и сведения о его значениях сообщаются в справочном материале. Для идеального газа, когда справедливо уравнение состояния Менделеева−Клапейрона в форме

$$pv = RT,$$

имеем

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T}.$$

При свободном движении сила инерции $\vec{F}_i$ мала и характер течения определяется мерой отношения силы плавучести и силы вязкостного трения, равной

$$O\left(\frac{\vec{F}_{\Delta\gamma}}{\vec{F}_\mu}\right) = O\left(\frac{\beta \vec{g} \rho dT}{\mu \nabla^2 \vec{w}}\right) = \frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}, \qquad (2.13)$$

где ΔT - характерная для процесса разность температур. В качестве таковой принимается разность температуры поверхности T_W и температуры жидкости (газа) $T_{f,0}$ на удалении от нее (теоретически на бесконечном удалении).

Нетрудно видеть, что при свободной конвекции не имеется соображений для назначения в (2.13) характерной скорости w_0 - поле скоростей в этом процессе формируется таким образом, что величина скорости ни в одной точке пространства заведомо неизвестна.

Итак, для подобия распределений скоростей в двух термически свободных течениях достаточно равенства мер отношений $\vec{F}_{\Delta\gamma}$ и $\vec{F}_\mu$, составленных для «натуры» и «модели»:

$$\left(\frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}\right)_1 = \left(\frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}\right)_2. \qquad (2.14)$$

Естественным образом возникает вопрос об исключении в (2.13), (2.14) неизвестной характерной скорости w_0. Для этого надо рассмотреть достаточные условия для подобия температурных распределений.

2.2.4. Достаточные условия для подобия распределений скорости в вынужденных течениях с наложением свободной термической конвекции

При вынужденном ламинарном режиме течения жидкости (газа) в трубах при больших разностях температур потока и омываемой им поверхности процессы теплообмена протекают таким образом, что формирующееся поле температуры и связанное с ним неоднородное поле плотности приводят к возникновению столь сильной свободной термической конвекции, влиянием которой на основное течение пренебречь недопустимо. В этом случае имеем гравитационно-вязкостное течение, уравнение движения которого таково:

$$\vec{F}_{\Delta\gamma} + \vec{F}_\mu + \vec{F}_{\Delta p} + \vec{F}_i = 0$$

или

$$\frac{\rho F_{\Delta\gamma}}{\rho F_{\mu}} + 1 + \frac{\rho F_{\Delta p}}{\rho F_{\mu}} + \frac{\rho F_{i}}{\rho F_{\mu}} = 0.$$

Достаточным условием для подобия таких течений в “натуре” и “модели”, как было показано выше, является равенство вычисленных для них мер отношения важнейших сил:

$$O\left(\frac{\rho F_i}{\rho F_\mu}\right) = \frac{w_0 l_0}{\nu} = \mathrm{Re} \text{ и } O\left(\frac{\rho F_{\Delta\gamma}}{\rho F_\mu}\right) = \frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}.$$

2.2.5. Достаточные условия для подобия температурных полей в среде, движущейся вынужденно или свободно

Подобие температурных полей содержит в себе, прежде всего, требование подобия полей скорости, достаточным условием для которого при вынужденном движении является равенство вычисленных для “натуры” и “модели” критериев Рейнольдса $\mathrm{Re} = w_0 l_0 / \nu$, при свободном движении – равенство безразмерных комплексов $(\beta g \rho \Delta T)/(\mu w_0 / l_0^2)$, а при гравитационно-вязкостном течении – равенство критерия Рейнольдса и безразмерного комплекса $(\beta g \rho \Delta T)/(\mu w_0 / l_0^2)$.

Кроме того, для суждения о подобии температурных полей в двух сравниваемых вынужденных или свободных течениях надо вычислить для них меры отношения алгебраической суммы количества тепла $Q_к$, вносимого и выносимого движущейся средой в выделенный элемент пространства механизмом конвекции, к алгебраической сумме количества тепла $Q_т$, которое вносится и выносится механизмом молекулярной теплопроводности, т.е. для этого достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$O\left(\frac{Q_к}{Q_т}\right)_1 = O\left(\frac{Q_к}{Q_т}\right)_2. \qquad (2.15)$$

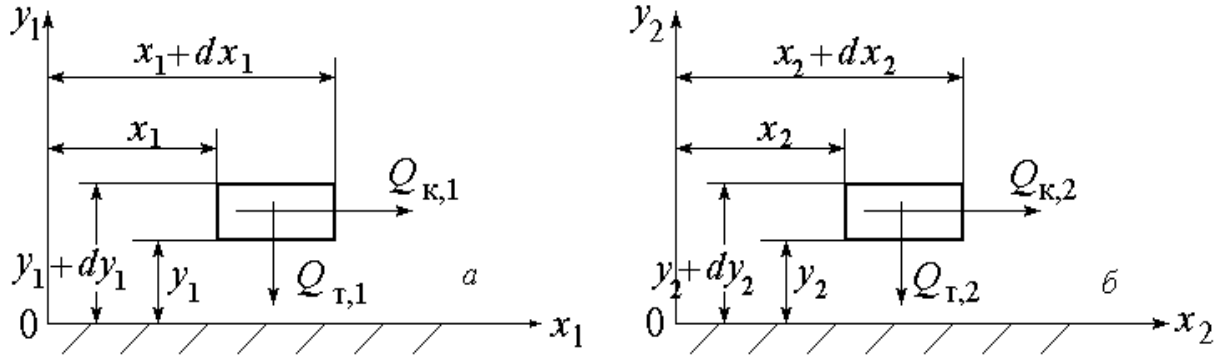


Рис. 2.3

На рис. 2.3 потоки $Q_к$ и $Q_т$ показаны схематически. Для единичного объема при постоянных свойствах среды они равны соответственно

$$Q_к = c\rho\vec{w}\cdot \mathrm{grad}T_f, \quad Q_т = \mathrm{div}(-\lambda_f\, \mathrm{grad}T_f). \tag{2.16}$$

Мера отношения $Q_к$ и $Q_т$ равна

$$O\left(\frac{Q_к}{Q_т}\right) = O\left(\frac{c\rho\vec{w}\cdot \mathrm{grad}T_f}{\mathrm{div}(-\lambda \mathrm{grad}T_f)}\right) = \frac{c\rho w_0 \Delta T_f^0 / l_0}{\lambda_f \Delta T_f^0 / l_0^2} = \frac{w_0 l_0}{a_f}, \tag{2.17}$$

где $c\rho$ и $a_f = \lambda_f/(c\rho)$- объемная теплоемкость и коэффициент температуропроводности, ΔT_f^0 – характерная разность температур в потоке.

Тепловые потоки $Q_к$ и $Q_т$, естественно, должны входить в уравнение переноса тепла в движущейся среде (его называют также уравнением энергии или уравнением Фурье–Кирхгофа), ранее указанное в п. 2.1 и записываемое как

$$c\rho\frac{DT_f}{d\tau} = -\mathrm{div}(-\lambda_f\, \mathrm{grad}T_f),$$

в левой части которого субстанциональная производная $D/d\tau$ учитывает изменение T_f в выделенном элементарном объеме *dxdydz* (рис. 2.3) в связи с непосредственным течением времени τ, а также в связи с тем, что за время $d\tau$ при прохождении через выделенный элементарный объем в общем случае меняются координаты центра масс единичного объема жидкости (газа) на *dx, dy, dz* соответственно. Поэтому в рассматриваемом случае субстанциональная производная равна

$$\frac{DT_f}{d\tau} = \frac{\partial T_f}{\partial\tau} + \frac{\partial T_f}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial T_f}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial T_f}{\partial z}\frac{dz}{d\tau} =$$

$$= \frac{\partial T_f}{\partial\tau} + w_x\frac{\partial T_f}{\partial x} + w_y\frac{\partial T_f}{\partial y} + w_z\frac{\partial T_f}{\partial z} = \frac{\partial T_f}{\partial\tau} + \vec{w}\cdot \mathrm{grad}T_f$$

(здесь учтено, что производные от координат по времени дают соответствующие проекции w_x, w_y, w_z вектора скорости $\vec{w}$).

Безразмерный комплекс в правой части (2.17) является мерой отношения тепловых потоков, переносимых механизмом конвекции и теплопроводности, его величина определяет температурные поля в движущейся среде. Он называется критерием Пекле и обозначается Pe (*Peclet*):

$$\mathrm{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a_f}.$$

Итак, для подобия распределения температуры в двух сравниваемых течениях достаточно, чтобы выполнялись равенства указанных выше безразмерных комплексов, обеспечивающих гидродинамическое подобие течений, и составленных для них критериев Пекле

$$\mathrm{Pe}_1 = \mathrm{Pe}_2 \text{ или } \left(\frac{w_0 l_0}{a_f}\right)_1 = \left(\frac{w_0 l_0}{a_f}\right)_2. \qquad (2.18)$$

Выполняя элементарные преобразования, получаем также

$$\mathrm{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a_f} = \frac{w_0 l_0}{a_f} \cdot \frac{\nu}{\nu} = \frac{w_0 l_0}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a_f} = \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}, \qquad (2.18')$$

где безразмерное отношение ν / a_f называется критерием Прандтля и обозначается Pr (*Prandtl*) в честь уже упомянутого ученого Л. Прандтля.

2.2.6. Необходимые и достаточные условия подобия физических явлений

Суммируя все вышеизложенное в отношении подобия распределений скорости и температуры в потоке и распространяя полученные в этом отношении результаты и на другие физические явления и процессы, приходим к следующему выводу: ***для подобия двух явлений одинаковой физической природы необходимо подобие распределений, соответствующих условиям однозначности решения исследуемой краевой задачи, т.е. необходимо подобие геометрических областей, свойств среды, начальных и граничных распределений искомых величин, и достаточно равенства одноименных критериев подобия, составленных для сравниваемых явлений.***

Это положение составляет суть основной (третьей) теоремы подобия и физического моделирования. Ее сформулировали отечественные ученые акад. М.В. Кирпичев и проф. А.А. Гухман, и она названа в их честь теоремой Кирпичева–Гухмана. Область ее применения весьма обширна, что и будет показано по мере изложения курса.

Подчеркнем, что критерий подобия является мерой отношения важнейших для протекания физических процессов сил, количеств энергии и др.

Считаем необходимым обратить внимание на то, что в ряде отечественных и зарубежных научных изданий наряду с термином «критерий подобия» используется и термин «число подобия».

2.3. Установление структуры формул для описания конвективного теплообмена

Для подобия распределения температуры в двух сходственным образом расположенных сечениях натурного и модельного течений необходимо геометрическое подобие областей и подобие распределений скорости и температуры на всех ограничивающих поверхностях.

Пусть, например, соблюдается подобие осесимметричных температурных полей в натурной и модельной круглых трубах (рис. 2.4).

Согласно схеме Нуссельта имеем величины плотности тепловых потоков в поверхность трубы равными:

1) для «натуры»

$$q_{w,1} = \alpha_1 (T_{w1} - T_{f1,0}) = -\lambda_{f1} \frac{\partial T_{f1}}{\partial r_1'}\bigg|_{r_1'=d_1/2}, \qquad (2.19)$$

2) для «модели»

$$q_{w,2} = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2,0}) = -\lambda_{f2} \frac{\partial T_{f2}}{\partial r_2'}\bigg|_{r_2'=d_2/2}. \qquad (2.20)$$

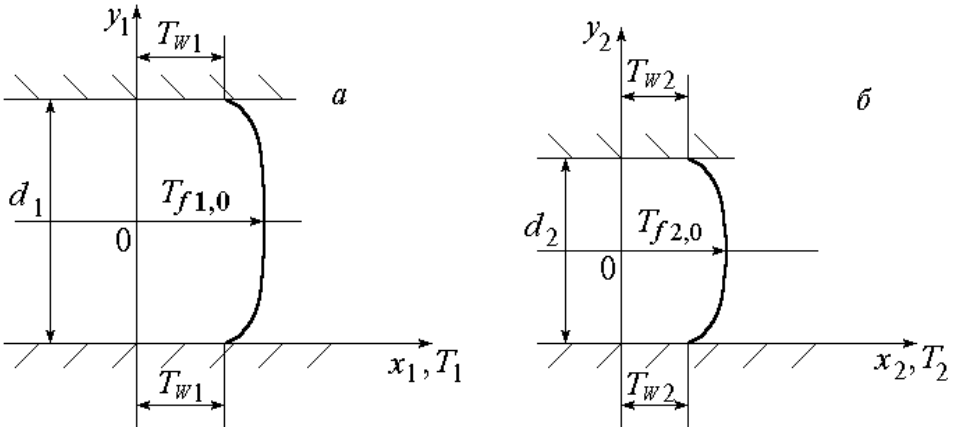


Рис. 2.4

Из формул (2.19), (2.20) следует

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_{f1}} = -\frac{1}{T_{w1} - T_{f1,0}} \frac{\partial T_{f1}}{\partial r_1'}\bigg|_{r_1'=d_1/2}, \qquad (2.19')$$

$$\frac{\alpha_2}{\lambda_{f2}} = -\frac{1}{T_{w2} - T_{f2,0}} \frac{\partial T_{f2}}{\partial r_2'}\bigg|_{r_2'=d_2/2}. \qquad (2.20')$$

Умножим обе части (2.19′), (2.20′) соответственно на d_1 и d_2 и получим

$$\frac{\alpha_1 d_1}{\lambda_{f1}} = -\frac{d_1}{T_{w1} - T_{f1,0}} \frac{\partial T_{f1}}{\partial r_1'}\bigg|_{r_1'=d_1/2}, \qquad (2.19'')$$

$$\frac{\alpha_2 d_2}{\lambda_{f2}} = -\frac{d_2}{T_{w2} - T_{f2,0}} \frac{\partial T_{f2}}{\partial r_2'}\bigg|_{r_2'=d_2/2}. \qquad (2.20'')$$

Учитывая, что температуры T_{w1} и T_{w2} омываемых поверхностей не являются функцией радиусов r_1' и r_2', получаем вместо (2.19″), (2.20″)

$$\frac{\alpha_1 d_1}{\lambda_{f1}} = -\frac{d_1}{T_{w1} - T_{f1,0}} \left.\frac{\partial (T_{f1} - T_{w1})}{\partial r_1'}\right|_{r_1'=d_1/2}, \qquad (2.19''')$$

$$\frac{\alpha_2 d_2}{\lambda_{f2}} = -\frac{d_2}{T_{w2} - T_{f2,0}} \left.\frac{\partial (T_{f2} - T_{W2})}{\partial r_2'}\right|_{r_2'=d_2/2}. \qquad (2.20''')$$

Введя безразмерные относительные температуры движущихся сред и безразмерные радиусы по правилу

$$\theta_{f1} = \frac{T_{f1} - T_{w1}}{T_{f1,0} - T_{w1}}, \quad \theta_{f2} = \frac{T_{f2} - T_{w2}}{T_{f2,0} - T_{w2}} \quad \text{и} \quad \xi_1 = \frac{r_1'}{d_1/2}, \quad \xi_2 = \frac{r_2'}{d_2/2}, \quad (2.21)$$

вместо (2.19″′), (2.20″′) записываем

$$\frac{\alpha_1 d_1}{\lambda_{f1}} = 2 \left.\frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=1}, \qquad (2.19^{IV})$$

$$\frac{\alpha_2 d_2}{\lambda_{f2}} = 2 \left.\frac{\partial \theta_{f2}}{\partial \xi_2}\right|_{\xi_2=1}. \qquad (2.20^{IV})$$

Очевидно, что подобию распределений искомых параметров в размерном представлении соответствует тождественность их распределений в безразмерном виде. Поэтому правые части формул (2.19^{IV}) и (2.20^{IV}) равны друг другу, так что приходим к равенству их левых частей

$$\frac{\alpha_1 d_1}{\lambda_{f1}} = \frac{\alpha_2 d_2}{\lambda_{f2}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\alpha d}{\lambda_f}\right)_1 = \left(\frac{\alpha d}{\lambda_f}\right)_2. \qquad (2.22)$$

Если вместо диаметра d ввести обозначение характерного размера l_0, то получим также равенство

$$\left(\frac{\alpha l_0}{\lambda_f}\right)_1 = \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda_f}\right)_2. \qquad (2.22')$$

Безразмерный комплекс $\alpha l_0/\lambda_f$, который содержит в себе искомый коэффициент теплоотдачи α, называется числом Нуссельта и обозначается Nu (*Nusselt*).

Итак, следствием подобия температурных распределений в «натуре» и «модели» является равенство составленных для них чисел Нуссельта.

Достаточным же условием для этого подобия при вынужденном движении является равенство критериев Рейнольдса и Пекле, составленных для «натуры» и «модели», так что в этом случае справедлива связь

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}) = \varphi(\mathrm{Re}, \mathrm{Re}\cdot \mathrm{Pr}) = \psi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}). \qquad (2.23)$$

Достаточным условием для подобия температурных полей при свободной конвекции является равенство безразмерных комплексов $O\left(\overset{\rho}{F}_{\Delta\gamma} / \overset{\rho}{F}_{\mu}\right) = \dfrac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}$ и критериев Пекле, поэтому имеем

$$\mathrm{Nu} = f\left(O\left(\overset{\rho}{F}_{\Delta\gamma} / \overset{\rho}{F}_{\mu}\right), \mathrm{Pe}\right) = \varphi\left(\frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}, \frac{w_0 l_0}{a_f}\right).$$

При свободной конвекции неизвестна характерная скорость w_0. Чтобы ее исключить, умножим друг на друга аргументы для числа Нуссельта:

$$O\left(\frac{\overset{\rho}{F}_{\Delta\gamma}}{\overset{\rho}{F}_{\mu}}\right) \cdot \mathrm{Pe} = \frac{w_0 l_0}{a_f} \cdot \frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2} = \frac{\beta g l_0^3 \Delta T}{\nu^2} \mathrm{Pr}.$$

Получившийся при этом безразмерный комплекс составлен из величин, заданных при постановке задачи о развитии процесса свободной конвекции. Он называется критерием Рэлея и обозначается Ra (*Rayleigh*) в честь выдающегося физика:

$$\mathrm{Ra} = \frac{\beta g l_0^3 \Delta T}{\nu^2} \mathrm{Pr}.$$

Таким образом, для свободной термической конвекции равенство критериев Рэлея приводит к равенству чисел Нуссельта, так что справедлива зависимость

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Ra}). \qquad (2.24)$$

При гравитационо-вязкостном течении достаточным условием для подобия температурных полей является равенство критериев Рейнольдса, безразмерных комплексов $O\left(\overset{\nu}{F}_{\Delta\gamma} / \overset{\nu}{F}_{\mu}\right) = \beta g \rho \Delta T / \left(\mu w_0 / l_0^2\right)$ и критериев Пекле, поэтому имеем

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Re}, O\left(\overset{\rho}{F}_{\Delta\gamma} / \overset{\rho}{F}_{\mu}\right), \mathrm{Pe}\right) = \varphi\left(\frac{w_0 l_0}{\nu}, \frac{\beta g \rho \Delta T}{\mu w_0 / l_0^2}, \frac{w_0 l_0}{a_f}\right). \qquad (2.25)$$

В приведенных здесь безразмерных аргументах для Nu характерная скорость w_0 известна для вынужденного движения и не имеет прямого отношения к свободному термическому движению. По этой причине, а также с целью уменьшения числа аргументов в правой части (2.25) умножим, как и в случае свободной конвекции, когда это было совершенно необходимо, безразмерный комплекс $O(\overset{\nu}{F}_{\Delta\gamma} / \overset{\nu}{F}_{\mu})$ на критерий Pe и получим, что для

подобия распределений и скорости и температуры в рассмотренных течениях достаточно равенства критериев Re и Ra:

$$\mathrm{Nu} = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Ra}\right). \qquad (2.25')$$

В форме (2.23)–(2.25′) аналитически, численно или экспериментально устанавливаются зависимости для описания конвективного теплообмена, называемые критериальными. В них дается связь между безразмерной интенсивностью конвективного теплообмена, представленной в виде числа Нуссельта, и определяющими его критериями подобия.

В структуре формул (2.23)–(2.25′) в качестве аргументов для числа Нуссельта Nu выступают критерии подобия Re, Pe, Pr, Ra, используемые для суждения о выполнении достаточных условий подобия исследуемых процессов теплообмена.

Необходимые же условия подобия этих процессов находят свое отражение в том, что зависимости вида (2.23)–(2.25′) относят к конкретной геометрической области: к обтеканию пластины, к течению в канале, к обтеканию трубы или пучка труб и т.д. При необходимости в правую часть формул (2.23)–(2.25′) вносят сомножители – поправки на влияние особенностей геометрической области.

Так, при течении в трубах вводится функция влияния $C_L = f(L/d)$ на интенсивность теплообмена относительной протяженности, при обтекании пучка труб используются две поправки – функции отношения продольного и поперечного шага между трубами к их диаметру и т.д.

Критериальные зависимости относят к конкретным граничным условиям: например, к условиям постоянных или изменяющихся определенным образом в направлении течения жидкости (газа) температуры обтекаемой поверхности, плотности теплового потока через нее и т.д.

В структуре формул (2.23)–(2.25′) естественным образом появляются также сомножители – поправки на зависимость плотности, теплоемкости, теплопроводности и вязкости от температуры, координат, времени и др., подобие которых в натурном и модельном явлениях необходимо. На интенсивности конвективного теплообмена наибольшим образом сказывается зависимость динамической вязкости от температуры. Переход от требования совпадения функций $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2$ относительной динамической вязкости от температуры для натуры и модели к их мерам $O(\bar{\mu}_1) = O(\bar{\mu}_2)$ дает в качестве сомножителя-поправки в правую часть (2.23)–(2.25′) так называемый температурный фактор $C_t = f(\mu_f / \mu_w)$, в котором μ_f и μ_w выбраны при характерных температурах потока $T_{f,0}$ и поверхности T_w соответственно.

При рассмотрении нестационарных процессов в число аргументов для искомых безразмерных переменных естественным образом вводится относительное (безразмерное) время $\bar{\tau} = \tau / \tau_0$ с выбором в качестве τ_0

известного отрезка времени в периодическом процессе или характеристического отрезка времени в апериодическом процессе. Можно показать, что в апериодических процессах нестационарной теплопроводности или конвективного теплообмена имеем $\tau_0 = l_0^2 / a$. При этом сравниваемые явления относят к подобным начальным распределениям искомых переменных.

2.4. Особенности формирования динамического и теплового пограничных слоев во внешней и внутренней задачах

2.4.1. Обтекание пластины (внешняя задача)

Внешнее вынужденное обтекание тел различной конфигурации характеризуется тем, что поток жидкости (газа) по нормали к омываемой поверхности простирается достаточно далеко от нее (теоретически в бесконечность). Хорошо изученными считаются гидродинамика и теплообмен при внешнем обтекании пластины и одиночного цилиндра. Рассмотрим, как на поверхности обтекаемой пластины формируется динамический и тепловой пограничные слои.

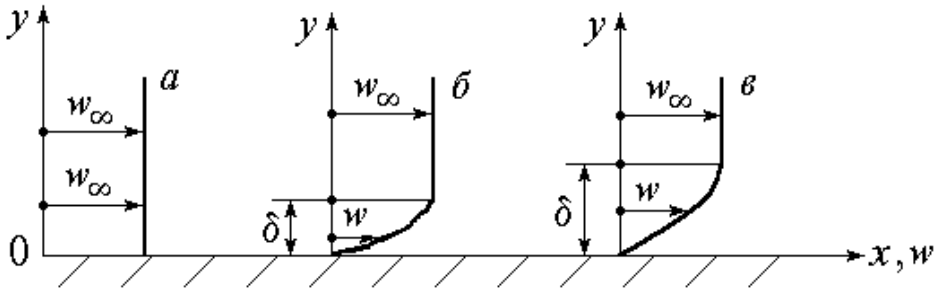


Рис. 2.5

Пусть у передней кромки пластины $x = 0$ профиль скоростей равномерный, т.е. в каждой точке пространства над пластиной в этом поперечном сечении скорость везде одинакова и равна скорости w_∞ набегающего потока (рис. 2.5, *а*).

В настоящее время общепринята так называемая «гипотеза прилипания», согласно которой ближайшие к поверхности тела молекулы жидкости (газа) прилипают к ней, их скорость становится равной нулю. Межмолекулярные силы способствуют тому, что более удаленные от поверхности слои потока испытывают тормозящее действие с ее стороны, так что их скорость и становится меньшей, чем w_∞ (рис. 2.5, *б*; 2.5, *в*). Чем дальше отстоит сечение потока от передней кромки, тем глубже в поток проникает тормозящее действие стенки и тем больше становится толщина динамического пограничного слоя δ. Под величиной δ понимается такое

расстояние по нормали к точке на обтекаемой поверхности, на котором скорость w мало отличается от скорости невозмущенной части течения w_∞ (точнее говоря, отличается на наперед заданную малую величину).

Нетрудно видеть, что во внешней задаче нет принципиальных ограничений на величину δ, она может стать сколь угодно большой.

Детальное рассмотрение внешнего обтекания пластины потоком жидкости (газа) показывает, что, начиная от передней кромки, сначала формируется ламинарный пограничный слой, который затем, ниже по течению, становится неустойчивым, «разваливается». При этом движение в пограничном слое, начиная с расстояния от передней кромки, равного $x = x_{\text{кр}}$, соответствует чередующимся во времени и в пространстве ламинарному и турбулентному течениям – так называемая, переходная область течения. За ней течение на пластине становится турбулентным (рис. 2.6). Для практических приложений переходная область течения условно стягивается в точку, и таким образом полагают, что на пластине имеются лишь участки ламинарного и турбулентного течений.

Самостоятельную задачу представляет определение критического расстояния от передней кромки пластины $x_{\text{кр}}$, начиная с которого ламинарный пограничный слой становится турбулентным.

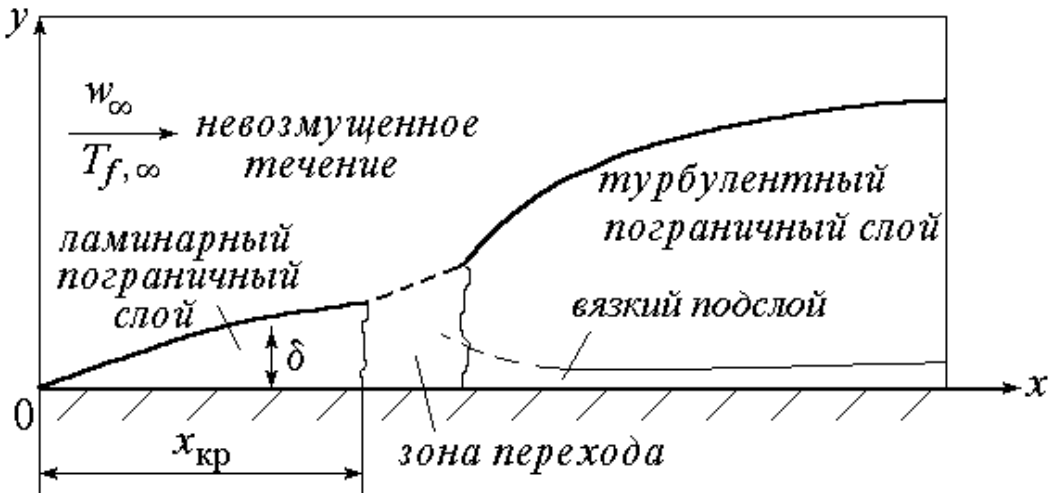


Рис. 2.6

В настоящее время величина $x_{\text{кр}}$ определяется из следующей экспериментально установленной зависимости для критерия Рейнольдса, имеющего $x_{\text{кр}}$ в качестве определяющего размера:

$$\text{Re}_{x_{\text{кр}}} = \frac{w_\infty \cdot x_{\text{кр}}}{\nu} = (3 \div 5) \cdot 10^5, \qquad (2.26)$$

откуда получаем

$$x_{\text{кр}} = \frac{(3 \div 5) \cdot 10^5 \cdot \nu}{w_\infty}.$$

Если на пластину набегает детурбулизированный поток, то в формуле (2.26) следует принимать $\mathrm{Re}_{x_{\text{кр}}} = 5 \cdot 10^5$. Если же поток, приближаясь к передней кромке пластины, «задирался» плохо обтекаемыми телами, турбулизировался, то следует полагать $\mathrm{Re}_{x_{\text{кр}}} = 3 \cdot 10^5$.

Имеются экспериментальные зависимости, позволяющие более точно указать величину $\mathrm{Re}_{x_{\text{кр}}}$ в (2.26), однако для этого следует знать уровень турбулентности набегающего на пластину потока.

В гидромеханике установлено, что толщина ламинарного пограничного слоя равна

$$\delta_{\text{лам}} = 4{,}64 x / \mathrm{Re}_x^{0{,}5}, \qquad (2.27)$$

а толщина турбулентного пограничного слоя в предположении, что участок ламинарного течения пренебрежимо мал, такова:

$$\delta_{\text{турб}} = 0{,}376 x / \mathrm{Re}_x^{0{,}2}, \qquad (2.28)$$

где $\mathrm{Re}_x = w_\infty x / \nu$ – значение критерия Рейнольдса, построенного по локальной координате точки на пластине.

Структура турбулентного пограничного слоя весьма сложна, и в настоящее время его условно разбивают на три участка (трехслойная модель Т. Кармана – В. Шваба), которые отличаются друг от друга относительной интенсивностью молекулярного и молярного (турбулентного) механизмов переноса количества движения, тепла, вещества и т.д.

В такой модели принимают, что в пристенном, вязком подслое, толщина которого определяется по формуле

$$\delta_{\text{вязк}} = 29{,}07 x / \mathrm{Re}_x^{0{,}9}, \qquad (2.29)$$

преобладает молекулярный механизм обменных процессов.

В буферном подслое, который является промежуточным между турбулентным ядром потока и вязким подслоем и толщина которого в сумме с толщиной с вязкого подслоя равна

$$\delta_{\text{буф}} = 174{,}42 x / \mathrm{Re}_x^{0{,}9}, \qquad (2.30)$$

в основном преобладает молярный механизм переноса по сравнению с молекулярным.

В турбулентном же ядре потока интенсивность молекулярного переноса пренебрежимо мала.

Более естественным образом возникает понятие теплового пограничного слоя. Для этого рассмотрим обтекание пластины с одинаковой температурой поверхности T_W потоком жидкости (газа) с температурой $T_{f,\infty}$ в каждой точке сечения у передней кромки (рис. 2.7).

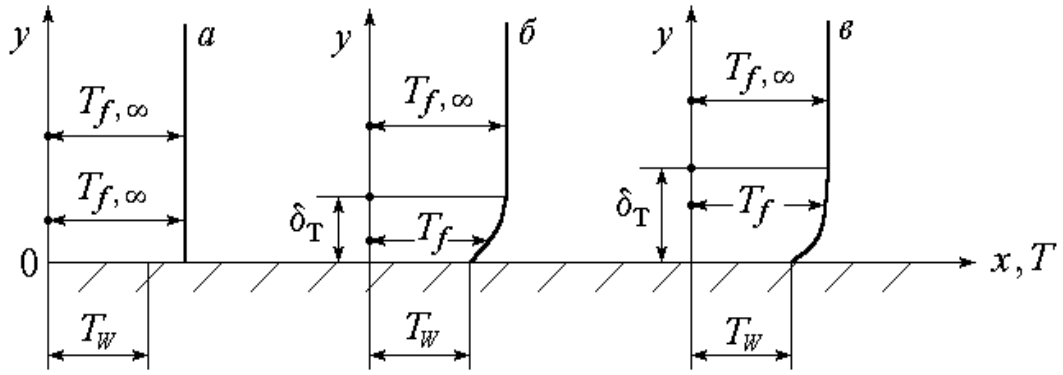


Рис. 2.7

По мере продвижения потока от передней кромки (x = 0) вглубь него проникает «холодящее» действие стенки, так как $T_W < T_{f,\infty}$, и тем большей становится толщина теплового пограничного слоя δ_T. Под величиной δ_T понимается такое расстояние по нормали к точке на обтекаемой поверхности, на котором температура T_f мало отличается от температуры $T_{f,\infty}$ невозмущенной в тепловом отношении части течения (точнее говоря, отличается на наперед заданную малую величину).

Нетрудно видеть, что во внешней задаче нет принципиальных ограничений и на величину δ_T: она может стать любой.

Толщина теплового пограничного слоя на участке ламинарного течения ($0 < x < x_{кр}$) определяется из формулы

$$\delta_{лам,T} / \delta_{лам} = \mathrm{Pr}^{-1/3}. \qquad (2.31)$$

Толщина теплового турбулентного пограничного слоя совпадает с толщиной динамического турбулентного пограничного слоя при условии их формирования от передней кромки пластины. При этом в рамках его трехслойной модели толщина подслоя молекулярной теплопроводности (условно назовем его вязким тепловым подслоем) определяется как

$$\delta_{вяз,T} / \delta_{вяз} = \mathrm{Pr}^{-1/3}. \qquad (2.32)$$

Из последних двух соотношений отчетливо выступает физический смысл критерия Прандтля – $\mathrm{Pr} = \nu / a_f$ – как меры отношения толщин теплового и динамического пограничных слоев, так как ими определяется глубина проникновения в поток динамических и термических возмущений, которые характеризуются соответственно коэффициентами кинематической вязкости ν и температуропроводности a_f.

2.4.2. Течение в трубе

Совершенно иначе формируются скоростные и температурные поля во внутренней задаче, под которой понимаются исследование развития течения и теплообмена при движении потока, со всех сторон стесненного ограничивающими его поверхностями, т.е. при его движении в каналах

(трубах) с различной формой поперечного сечения.

Рассмотрим сначала в виде примера, как в круглой трубе формируется динамический пограничный слой.

Пусть во входном сечении трубы $x = 0$ профиль скоростей равномерный, так что в этом сечении скорость везде одинакова и равна среднерасходной скорости w_0 (рис. 2.8, *а*).

Чем дальше отстоит сечение потока от входного, тем глубже в поток проникает тормозящее действие стенки и тем большей становится толщина динамического пограничного слоя δ (рис. 2.8, *б*). Отметим, что скорость $w_{0,1} > w_0$, так как расход жидкости или газа через трубу неизменен в любом сечении. На расстоянии от входа, равном $(L/d)_{\text{г,стаб}}$, пограничный слой смыкается на оси трубы, т.е. его толщина становится равной ее радиусу – $\delta = d/2$. Дальнейшее увеличение δ невозможно и вследствие этого на расстоянии $(L/d)_{\text{г,стаб}}$ сформировался стабилизированный профиль скорости в потоке, который не изменяется в его более удаленных от входа в трубу сечениях.

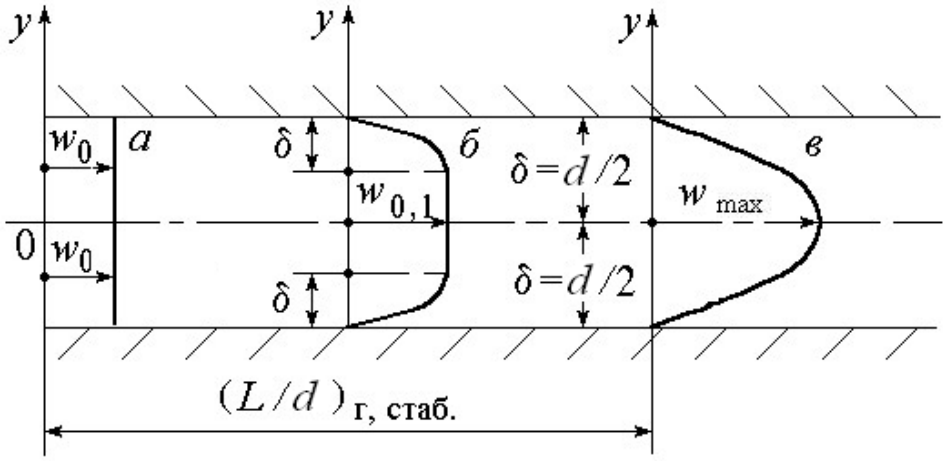


Рис. 2.8

Итак, во внутренней задаче, во-первых, есть предел увеличению толщины динамического пограничного слоя δ – он равен радиусу трубы, и, во-вторых, вследствие этого имеет место явление гидродинамической стабилизации течения.

Детальная картина течения в канале зависит от величины критерия Рейнольдса, определяемого по формуле

$$\mathrm{Re} = w_0 d_\text{Э} / \nu, \qquad (2.33)$$

в которой $d_\text{Э}$ – эквивалентный диаметр поперечного сечения канала, вычисляемый как

$$d_\text{Э} = 4f / P, \qquad (2.34)$$

где f и P – площадь поперечного сечения канала и его смоченный периметр.

Для технически гладких труб при $\mathrm{Re} < 2320$ имеет место ламинарное течение в трубе, а при $\mathrm{Re} > 10^4$ – турбулентный режим. В диапазоне

$2320 < \mathrm{Re} < 10^4$ режим течения является переходным, в котором чередуются указанные выше ламинарное и турбулентное течения.

На начальном участке трубы непосредственно у входа в нее толщину и ламинарного, и турбулентного динамического пограничного слоя можно определить по приведенным выше формулам для обтекания пластины. Однако по мере удаления от входа приходится использовать специальные зависимости, учитывающие разгон ядра потока на участке, предшествующем гидродинамической стабилизации, влияние градиента давления и кривизны стенки канала. На участке стабилизированного турбулентного течения, используя формулу Г. Рейхардта для профиля скорости в поперечном сечении канала, нами получены толщины вязкого и буферного подслоя, которые приведены в таблице.

В этой таблице величины $\overline{\delta}_{\text{вязк}}$ и $\overline{\delta}_{\text{буф}}$ соответствуют $\delta_{\text{вязк}}$ и $\delta_{\text{буф}}$, отнесенным к радиусу трубы.

Таблица

Толщина турбулентного пограничного слоя в круглой трубе

$\mathrm{Re}\cdot 10^{-4}$	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
$\overline{\delta}_{\text{вязк}}\cdot 10^3$	16,3	4,03	2,17	0,51	0,27	0,061	0,032	0,0072	0,0038
$\overline{\delta}_{\text{буф}}\cdot 10^3$	97,8	24,16	13,02	3,05	1,62	0,366	0,192	0,0432	0,0228

Рассмотрим теперь в виде примера, как в круглой трубе формируется тепловой пограничный слой.

Пусть во входном сечении трубы профиль температуры $T_{f,0}$ в потоке равномерный, а температура поверхности трубы T_W везде одинакова (рис. 2.9, *а*).

По мере удаления потока от входного сечения толщина теплового пограничного слоя δ_T становится все большей, и в сечении, отстоящем на расстоянии $(L/d)_{\text{т,стаб}}$, она максимальна и равна радиусу трубы $\delta_T = d/2$ (рис. 2.9, *б*; 2.9, *в*). В этом сечении тепловой пограничный слой сомкнулся на оси трубы и дальнейшее увеличение δ_T становится невозможным. Однако профиль температуры в потоке будет изменяться вниз по течению, так как процесс теплообмена продолжается и температура T_f в каждой точке потока будет стремиться к температуре поверхности T_W. Однако, как показывают исследования, перестройка профиля температуры в потоке при этом будет такой, что при $L/d > (L/d)_{\text{т,стаб}}$ число Нуссельта остается неизменным.

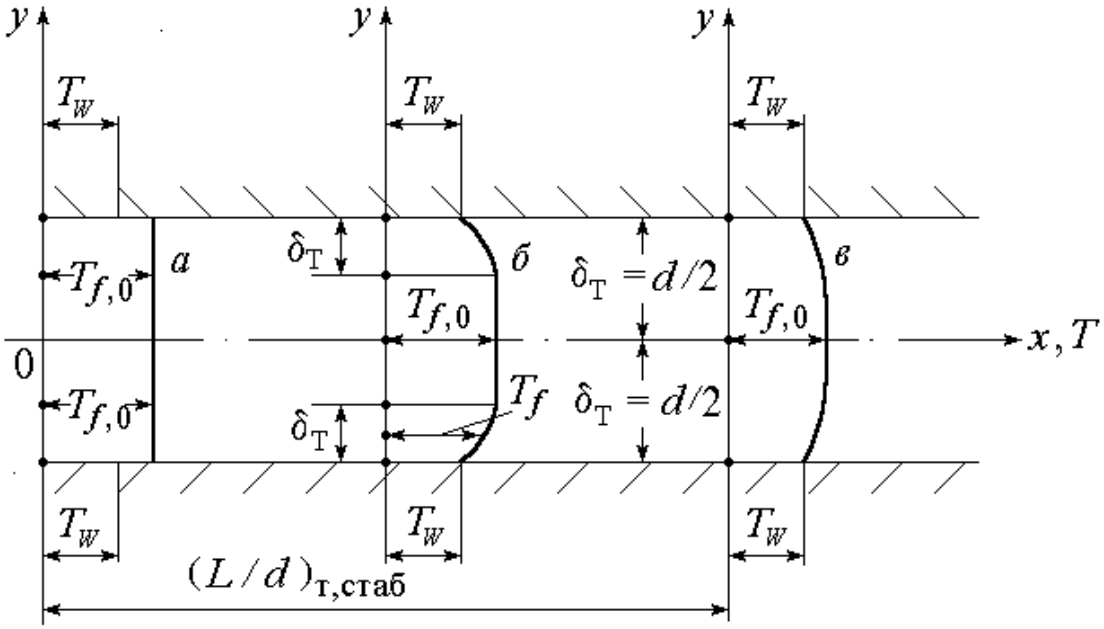


Рис. 2.9

Итак, во внутренней задаче, во-первых, есть предел увеличению толщины теплового пограничного слоя – он совпадает с радиусом трубы, и, во-вторых, вследствие этого имеет место явление тепловой стабилизации в том смысле, что, начиная с определенного сечения потока, число Нуссельта остается неизменным.

При турбулентном течении в трубе величина $\delta_{\text{вязк,Т}}$ равна значению $\delta_{\text{вязк}}$ из таблицы, умноженному на $\text{Pr}^{-1/3}$.

Вследствие указанных принципиальных различий явлений переноса во внешней и внутренней задаче они рассматриваются раздельно.

2.5. Критериальные формулы для описания теплообмена во внешней задаче (вынужденное течение)

Во внешней задаче по мере удаления потока от передней кромки пластины формируются динамический и тепловой пограничные слои, профили скорости и температуры при этом перестраиваются. Вследствие этого существенными для развития процесса являются мера отношения силы инерции к силе вязкостного трения, т.е. критерий Рейнольдса, и мера отношения конвективного потока тепла к потоку тепла, переносимого теплопроводностью, т.е. критерий Пекле. Поэтому критериальная зависимость для описания конвективного теплообмена в рассматриваемой ситуации должна иметь вид

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pe}) = \varphi(\text{Re}, \text{Re}\cdot\text{Pr}) = \psi(\text{Re}, \text{Pr}).$$

На участке ламинарного пограничного слоя $0 < x < x_{\text{кр}}$ (рис. 2.6) критериальная формула для расчета среднего числа Нуссельта такова:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}664\,\mathrm{Re}^{0{,}5}\mathrm{Pr}^{0{,}33}\cdot C_t. \qquad (2.35)$$

Если длина участка ламинарного течения мала, то полагают, что вся пластина омывается течением с турбулентным пограничным слоем. Для этого случая критериальная формула для расчета среднего значения числа Нуссельта установлена в следующем виде:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}0332\,\mathrm{Re}^{0{,}8}\mathrm{Pr}^{0{,}43}\cdot C_t. \qquad (2.36)$$

В формулах (2.35), (2.36) $\mathrm{Nu} = \overline{\alpha}x/\lambda_f$ и $\overline{\alpha}$ – средние значения числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи на участке пластины длиной *x*, отсчитанной от передней кромки; $\mathrm{Re} = w_\infty x/\nu$ – критерий Рейнольдса; C_t – температурный фактор.

Отметим сразу, что величина C_t учитывает влияние направления теплового потока (в стенку или от стенки) на интенсивность конвективного теплообмена. Учет ее влияния будет предметом отдельного рассмотрения.

Для описания конвективного теплообмена на пластине с учетом конечной протяженности участка ламинарного пограничного слоя установлена следующая зависимость для расчета среднего значения коэффициента теплоотдачи на участке турбулентного течения ($x > x_{\text{кр}}$):

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_{\text{лам}}\frac{x_{\text{кр}}}{x} + \overline{\alpha}_{\text{турб}}\frac{x - x_{\text{кр}}}{x}, \qquad (2.37)$$

в которой $\overline{\alpha}_{\text{лам}}$ определяется согласно (2.35), а $\overline{\alpha}_{\text{турб}}$ рассчитывается по формуле

$$\overline{\alpha}_{\text{турб}} = 1{,}25K(L^{0{,}8} - x_1^{0{,}8})/(x - x_{\text{кр}}), \qquad (2.38)$$

где

$$K = 0{,}0296\lambda_f w_\infty^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}43}\,C_t/\nu^{0{,}8}, \quad x_1 = 23{,}13x_{\text{кр}}\,\mathrm{Re}_{x_{\text{кр}}}^{-0{,}375}, \quad L = x + x_1 - x_{\text{кр}}.$$

Величина x_1 равна длине участка такой пластины, от переднего края которой сформировался бы турбулентный пограничный слой той же толщины, которую имеет ламинарный пограничный слой на расстоянии $x_{\text{кр}}$ на реальной пластине длиной *x*.

В приведенных формулах теплофизические характеристики среды λ_f, ν и Pr выбираются из таблиц по температуре набегающего потока $T_{f,\infty}$.

Хотелось бы обратить внимание на важность достоверного определения точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, так как в этом месте скачком возрастает коэффициент теплоотдачи α, и если пластина омывается высокотемпературным потоком

газа, то скачком возрастает и температура поверхности. С ростом температуры материала уменьшаются все известные пределы прочности (на разрыв, на кручение и т.д.), и если конструкция «нагружена» в силовом отношении, то в точке $x=x_{кр}$ она может начать разрушаться.

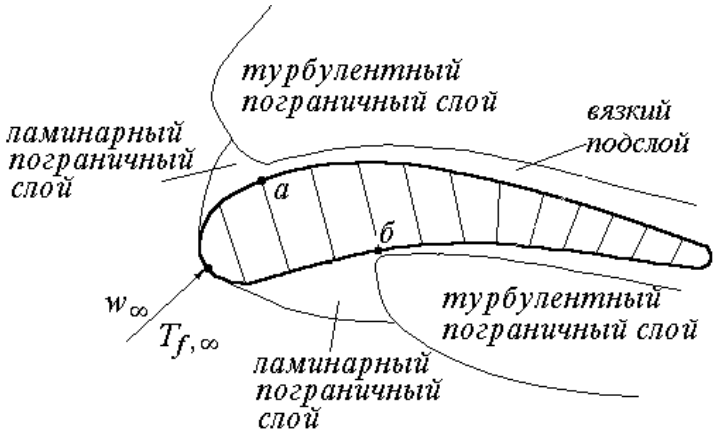


Рис. 2.10

Особенно актуальна эта задача для рабочих лопаток высокотемпературных турбин авиационных двигателей, на спинке (точка *а*) и на корытце (точка *б*) которых наблюдается явление перехода течения в пограничном слое из ламинарного в турбулентное (рис. 2.10).

2.6. Критериальные формулы для описания теплообмена во внутренней задаче (вынужденное течение)

Теплообмен в канале определяется, как это было показано в 2.3, режимом течения и теплофизическими характеристиками движущейся среды, но независимо от них распределение интенсивности теплообмена по длине трубы имеет в соответствии с изложенным в 2.4 вид, приведенный на рис. 2.11.

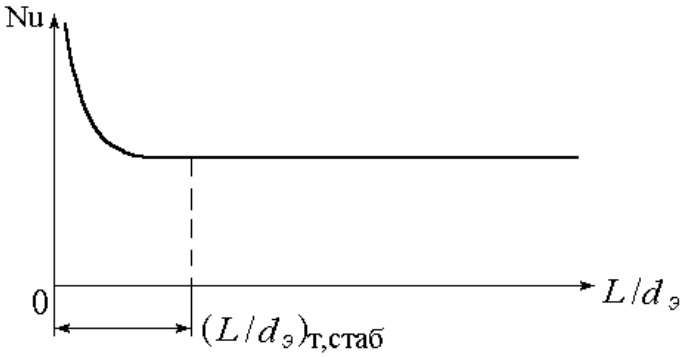


Рис. 2.11

Отметим сразу, что рассматривается теплообмен в канале, на входе которого профиль скоростей уже стабилизировался, т.е. предполагается наличие предвключенного гидродинамического участка, на котором

теплообмен отсутствует.

Вследствие этого при ламинарном режиме течения сила инерции становится пренебрежимо малой по сравнению с силой вязкостного трения, а мера их отношения – критерий Рейнольдса – вырождается и выпадает из числа аргументов для описания интенсивности теплообмена.

При турбулентном режиме течения даже при стабилизировавшемся профиле скорости вследствие турбулентных пульсаций в потоке существенными являются и инерционные силы и силы вязкостного трения, так что мера их отношения – критерий Re – должна быть включена в качестве аргумента для числа Nu. Турбулентные же пульсации температуры на участке стабилизировавшейся теплоотдачи приводят к тому, что существенным для интенсивности теплопереноса в потоке остается и критерий Pe.

2.6.1. Теплообмен при ламинарном вязкостном режиме течения

В этом случае на ламинарное течение (0<Re<2320) не накладывается влияние свободной конвекции, формирующейся из-за значительной разности температур в потоке и на омываемой им теплообменной поверхности. При этом для круглой трубы длина участка тепловой стабилизации оказывается равной

$$(L/d)_{\text{т,стаб}} \cong (0{,}03 \div 0{,}05)\,\text{Pe}, \qquad (2.39)$$

где Pe = $w_0 d/a_f$ – критерий Пекле.

У самого входа в теплообменный участок ($L/d \le 0.0005\text{Pe}$) интенсивность теплообмена при постоянной температуре поверхности круглой трубы определяется по формуле Левека

$$\text{Nu} = 1{,}615\left(\text{Pe}\cdot d/L\right)^{1/3}, \qquad (2.40)$$

где $\text{Nu} = \bar{\alpha} d/\lambda_f$ и $\bar{\alpha}$ – средние значения числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи на участке трубы длиной L.

Если $0.0005\text{Pe} < L/d < (L/d)_{\text{т,стаб}}$, то используется формула (2.40) с заменой в ней коэффициента 1,615 на 1,55, так что с учетом температурного фактора получаем

$$\text{Nu} = 1{,}55\left(\text{Pe}\cdot d/L\right)^{1/3} C_t. \qquad (2.40')$$

Интенсивность стабилизированного теплообмена (когда $L/d \ge (L/d)_{\text{т,стаб}}$) при ламинарном течении определяется в круглой трубе следующим образом:

а) если поверхность трубы является изотермической, то расчетная формула такова

$$\mathrm{Nu} = \alpha d / \lambda_f = 3{,}66, \qquad (2.41)$$

б) если плотность теплового потока в стенку трубы везде одинакова, то имеем

$$\mathrm{Nu} = \alpha d / \lambda_f = 4{,}36. \qquad (2.42)$$

Отсутствие критерия Pe в качестве аргумента для числа Nu в правой части последних двух формул объясняется тем, что в области стабилизировавшегося теплообмена количество тепла, переносимого конвекцией в направлении течения, пренебрежимо мало по сравнению с количеством тепла, переносимого механизмом теплопроводности по направлению к обтекаемой поверхности. Вследствие этого мера их отношения (критерий Pe) вырождается, т.е. также, наряду с критерием Рейнольдса, перестает быть аргументом для числа Nu. Следует иметь в виду, что приведенные рассуждения не относятся к жидким металлам и сильно ионизированным газам (плазме).

Формулы, полученные для описания теплообмена при ламинарном течении в круглой трубе, при определении теплоотдачи в трубах некруглого сечения с использованием их эквивалентного диаметра $d_э$ лишены строгого обоснования, и их применение требует осмотрительности. В самом деле, расчеты показывают, что интенсивность теплообмена в сравниваемых трубах относительно мало отличается лишь у самого входа в теплообменный участок, а по мере удаления от него это различие существенно возрастает, становясь наибольшим для стабилизированных значений Nu. Так, например, при ламинарном течении в щелевом канале эквивалентный диаметр его поперечного сечения естественно равен удвоенной ширине и установленные точные значения числа Нуссельта для изотермической поверхности и постоянной плотности теплового потока в нее соответственно равны 7,54 и 8,24, в то время как числа Нуссельта для эквивалентной круглой трубы оказались бы равными 3,66 и 4,36.

Поэтому при расчете теплоотдачи в каналах с некруглой формой поперечного сечения следует обращаться к соответствующей справочной литературе.

2.6.2. Теплообмен при ламинарном гравитационно-вязкостном течении

Критериальные формулы для описания теплообмена в этом режиме течения ($0 < \mathrm{Re} < 2320$) призваны учесть наложение на ламинарное течение жидкости (газа) термической свободной конвекции, которая возникает при значительных разностях температур потока и омываемой поверхности. При этом если труба расположена горизонтально, то на продольное движение жидкости накладывается ее поперечное течение. В том же случае, когда труба расположена вертикально, на продольное движение накладывается восходящее (температуры трубы выше температуры потока) или нисходящее

течение. Учет влияния свободной конвекции на вынужденное ламинарное движение и теплообмен в канале производят в том случае, когда величина критерия Рэлея, вычисленная с использованием в качестве характерного размера внутреннего диаметра трубы, соответствует неравенству $\mathrm{Ra} \geq \mathrm{Ra}_0 = 5 \cdot 10^5$.

Предложено большое количество экспериментальных зависимостей для описания теплообмена при ламинарном гравитационно-вязкостном течении. Наш опыт их использования позволяет предложить следующую критериальную зависимость для горизонтально расположенной круглой трубы с постоянной температурой омываемой поверхности $T_W = \mathrm{const}$:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_0 \left\{ 1 + [(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_0) \cdot 10^{-6}]^{0,1} \right\}. \qquad (2.43)$$

Здесь $\mathrm{Nu} = \overline{\alpha} d / \lambda_f$ и $\overline{\alpha}$ – искомые средние значения числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи на участке трубы длиною L; $\mathrm{Nu}_0 = \overline{\alpha}_0 d / \lambda_f$ и $\overline{\alpha}_0$ – средние значения числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи на участке трубы длиною L, рассчитанные по формулам для ламинарного вязкостного режима течения; $\mathrm{Ra} = \beta g d^3 \Delta T \, \mathrm{Pr} / \nu^2$ – критерий Рэлея. Если труба расположена вертикально, то полученные по формуле (2.43) значения Nu и $\overline{\alpha}$ уменьшаются на 15 % при совпадении направлений вынужденного и свободного движения, и увеличиваются на 15 % – в противном случае.

2.6.3. Теплообмен при турбулентном режиме течения

При турбулентном режиме течения в канале ($\mathrm{Re} > 10^4$) длина участка тепловой стабилизации в настоящее время принимается равной

$$(L / d_Э)_{\text{т,стаб}} \approx 10 \div 15$$

и для описания теплообмена рекомендуется формула Краусольда–Михеева, полученная на основании обработки огромного количества экспериментальных данных:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}021 \mathrm{Re}^{0,8} \mathrm{Pr}^{0,43} C_L C_t, \qquad (2.44)$$

где $\mathrm{Nu} = \overline{\alpha} d_Э / \lambda_f$ и $\overline{\alpha}$ – средние значения числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи на участке трубы длиною L; $\mathrm{Re} = w_0 d_Э / \nu$ – критерий Рейнольдса; C_t – температурный фактор.

Функция $C_L = f(L / d_Э)$, учитывающая влияние на теплообмен расстояния от входа в канал, экспериментально установлена И.Т. Аладьевым и табулирована им. Для проведения расчетов нам представилось полезным аппроксимировать ее в виде

$$C_L = 1.65 \left(\mathrm{Re} \cdot 10^{-4} \right)^z \left(\frac{L}{d_э} \right)^{-0.128}, \qquad (2.45)$$

где

$$z = -0.08\left(\frac{L}{d_э}\right)^{-0.45} \quad \text{при} \quad \frac{L}{d_э} \le 50\left(\mathrm{Re}\cdot 10^{-4}\right)^{-0.1}.$$

При больших значениях $L/d_э$ имеем $C_L = 1$.

2.6.4. Теплообмен при переходном режиме течения

В переходном режиме ($2320 < \mathrm{Re} < 10^4$) неустойчивость течения приводит и к неустойчивости теплообмена. Вследствие этого опытные данные различных исследователей заметно отличаются друг от друга.

Наш опыт проведения расчетов теплообмена в этой области течения позволяет рекомендовать следующую простую зависимость:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_1 + (\mathrm{Nu}_2 - \mathrm{Nu}_1)\frac{\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{кр}}{10^4 - \mathrm{Re}_{кр}}, \qquad (2.46)$$

где Nu_1 и Nu_2 – значения чисел Нуссельта для ламинарного (вязкостного или гравитационно-вязкостного) режима течения при $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{кр} = 2320$ и для турбулентного режима течения при $\mathrm{Re} = 10^4$, вычисленные по приведенным выше формулам.

Ее использование приводит к вполне приемлемому совпадению с известными экспериментальными данными отечественных и зарубежных исследователей.

Кроме того, известна и другая формула для расчета интенсивности теплообмена в переходном режиме течения

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_т \exp\left[\left(\ln(10^4/\mathrm{Re})/\ln 5\right)^2 \ln(\mathrm{Nu}_л/\mathrm{Nu}_2)\right], \qquad (2.47)$$

где $\mathrm{Nu}_т$ и $\mathrm{Nu}_л$ – числа Нуссельта, полученные по зависимостям для турбулентного и ламинарного режимов течения при формальной подстановке в них критерия Рейнольдса Re, характеризующего переходной режим течения.

2.6.5. Теплообмен при течении жидких металлов и плазмы

Для них кинематическая вязкость ν несоизмеримо больше коэффициента температуропроводности a_f. В этом случае критерий Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/a_f$ имеет порядок 10^{-2} и менее, а критерий Рейнольдса $\mathrm{Re} = w_0 l_0/\nu$ принимает огромные значения и вследствие этого выпадает из числа аргументов в общей формуле для описания интенсивности теплоотдачи при

вынужденном движении вида

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pe}).$$

Для жидких металлов, не подвергающихся систематической очистке, акад. М.А. Михеевым с сотр. установлена следующая экспериментальная зависимость:

$$\mathrm{Nu} = 3{,}4 + 0{,}014\mathrm{Pe}^{0{,}8} C_L,$$

где $C_L = 1{,}7(d/L)^{0{,}16}$ для $5 < L/d < 30$ и $C_L = 1$ для $L/d > 30$.

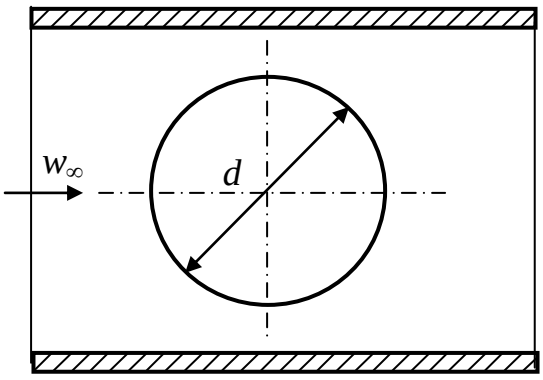
В заключение отметим, что необходимые для проведения расчетов теплообмена в канале значения теплофизических характеристик среды выбираются из таблиц по ее средней температуре.

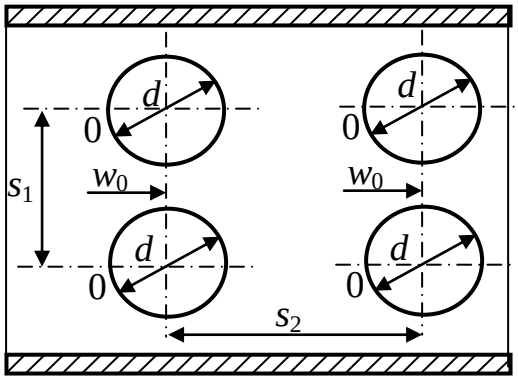
2.7. Теплоотдача при вынужденном поперечном обтекании одиночных труб и трубных пучков

2.7.1. Одиночные трубы

При взаимодействии одиночной трубы (кругового цилиндра) с поперечным потоком жидкости или газа на него действуют не только силы трения, как это было в рассмотренном в п. 2.4.1 случае внешнего обтекания пластины, но также и формирующиеся из-за выпуклости обтекаемой поверхности градиенты давления.

В том же случае, когда такая труба обтекается поперечным потоком, который ограничен по нормали к ее обтекаемой поверхности (например, если она помещена в прямоугольный канал – короб), то поверхность трубы и поверхность короба образуют канал, площадь поперечного сечения которого по направлению потока, начиная от лобовой точки 0 трубы до среднего (миделева) сечения трубы, уменьшается, а от миделева сечения до задней (кормовой) точки цилиндра увеличивается (рис. 2.12, *а*). Точно такая же ситуация складывается и тогда, когда в прямоугольный канал-короб или канал иной формы помещен пучок труб (рис 2.12, *б*) и имеет место течение в поле продольного знакопеременного градиента давления.



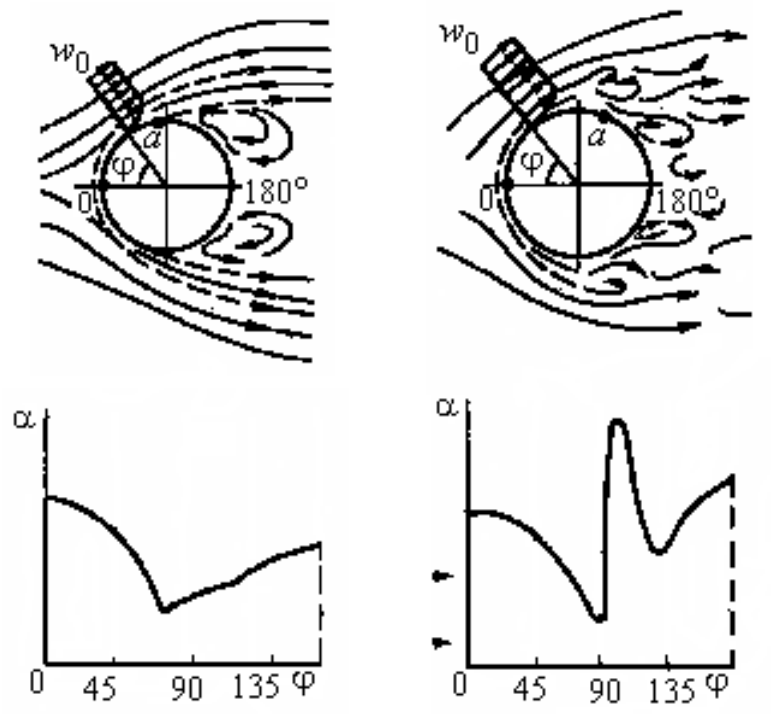


а *б*

Рис. 2.12

При этом если пограничный слой, который образуется по обе стороны от лобовой точки 0 на поверхности одиночного цилиндра, остается ламинарным до точки *а* с угловой координатой φ = 82° (рис. 2.13, *а*), то в ней он отрывается от обтекаемой поверхности и ниже по течению поверхность цилиндра интенсивно омывается вихревыми образованиями, заполняющими кормовую область. В том же случае, если ламинарное течение в пограничном слое перешло в турбулентное до точки с угловой координатой φ = 82°, то, обладая большей энергией в пограничном слое, поток "заходит" за миделево сечение, и там он отрывается от обтекаемой поверхности (рис. 2.13, *б*).

Экспериментальные исследования свидетельствуют о том, что первая ситуация реализуется для $5 < \mathrm{Re} < 2 \cdot 10^5$, а изменение при этом локального коэффициента теплоотдачи в зависимости от угла φ показано на рис. 2.13, *а*. Его рассмотрение свидетельствует о том, что максимальное значение коэффициент теплоотдачи имеет в лобовой точке, так как здесь толщина пограничного слоя минимальна, а наименьшее его значение α соответствует точке *а*, в которой пограничный слой имеет максимальную толщину. В кормовой части цилиндра коэффициент теплоотдачи вновь возрастает и тем интенсивнее, чем больше величина Re.



а *б*

Рис.2.13

Вторая ситуация реализуется при величине критерия Рейнольдса, который больше кризисного значения $\mathrm{Re} = 2 \cdot 10^5$. При этом точка отрыва турбулентного пограничного слоя перемещается до значения ее угловой координаты φ = 120°. Характер изменения коэффициента теплоотдачи в зависимости от величины φ при турбулентном пограничном слое показан на рис. 2.13, *б*.

Подробные исследования выполнены только для ламинарного пограничного слоя. Обобщая экспериментальные данные, А.А. Жукаускас получил следующие критериальные уравнения для описания средних по поверхности цилиндра значений коэффициента теплоотдачи α:
при $\mathrm{Re} = 5 \div 10^3$

$$\mathrm{Nu} = 0.5\mathrm{Re}^{0.5}\mathrm{Pr}^{0,38}C_t C_\psi, \qquad (2.48)$$

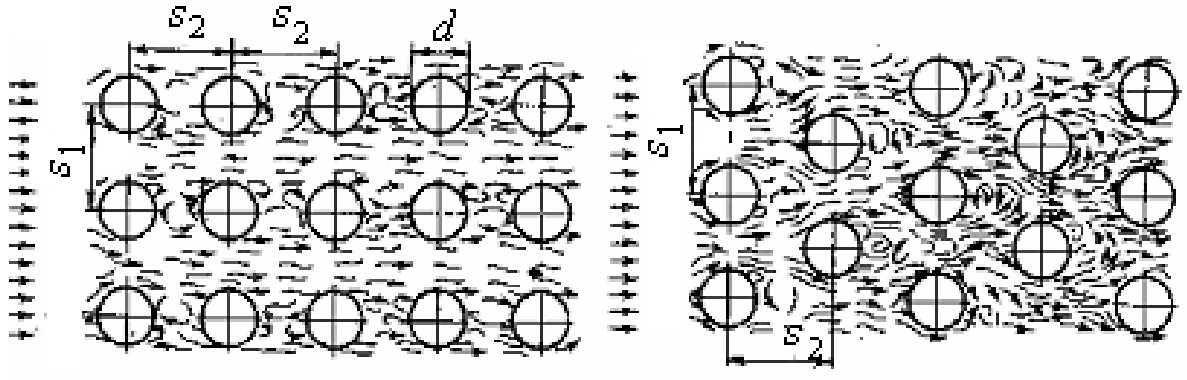
при $\mathrm{Re} = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$

$$\mathrm{Nu} = 0.25\mathrm{Re}^{0.6}\mathrm{Pr}^{0,38}C_t C_\psi. \qquad (2.49)$$

В формулах (2.48), (2.49) в качестве характерного размера принят диаметр цилиндра *d*, в качестве характерной скорости – скорость набегающего потока w_∞, а теплофизические свойства выбраны по температуре набегающего потока. Приведенный в них коэффициент C_ψ учитывает влияние на теплообмен угла атаки ψ, т.е. угла между направлением потока и осью трубы. Вид функции C_ψ установлен экспериментально, и для $\pi/4 \le \psi \le \pi/2$ имеем $C_\psi = \sin\psi$.

2.7.2. Трубные пучки

Теплообменные аппараты с одиночно расположенной трубой в поперечном потоке жидкости применяются редко, чаще они компонуются из трубных пучков. По расположению труб трубные пучки могут быть коридорными (рис. 2.14, *а*) и шахматными (рис. 2.14, *б*).



а *б*

Рис. 2.14

В них трубы первого ряда находятся приблизительно в тех же условиях, что и одиночный цилиндр. На теплообмене второго ряда сказывается турбулизация потока, создаваемая первым рядом, и т.д., но этот эффект постепенно ослабевает по мере увеличения числа предшествующих поперечных рядов. Экспериментально установлено, что начиная с третьего ряда поток практически стабилизируется, поэтому и средний коэффициент теплоотдачи для всех последующих рядов можно считать постоянной величиной. Коэффициент теплоотдачи первого ряда составляет приблизительно 60 % от стабилизированных значений коэффициентов теплоотдачи α_3 как для коридорного, так и для шахматного пучков. Для второго ряда в коридорном пучке эта величина составляет 90 %, а при шахматном расположении труб – 70% от α_3.

На интенсивность теплообмена пучков влияет также плотность пучка, которую можно характеризовать соотношениями между поперечным шагом s_1, продольным шагом s_2 и диаметром труб (рис. 2.12 *б*, 2.14).

Стабилизированный коэффициент теплоотдачи для многорядных в продольном направлении пучков труб в диапазоне $\mathrm{Re} \in [1; 100] \cdot 10^3$ определяется по формулам:

– при коридорном расположении труб

$$\mathrm{Nu} = 0{,}26\,\mathrm{Re}^{0{,}65}\mathrm{Pr}^{0{,}33} C_t C_s, \qquad (2.50)$$

где $C_s = (s_2 / d)^{-0.15}$,

– при шахматном расположении труб

$$\mathrm{Nu} = 0{,}41\,\mathrm{Re}^{0{,}6}\mathrm{Pr}^{0{,}33} C_t C_s, \qquad (2.51)$$

где $C_s = (s_1 / s_2)^{1/6}$ при $s_1 / s_2 < 2$ и $C_s = 1{,}12$ при $s_1 / s_2 \geq 2$.

В числа Nu и Re введены в качестве характерного размера наружный диаметр труб d, в качестве характерной скорости – скорость w_0 в самом узком поперечном сечении между трубами, а все теплофизические параметры отнесены к средней температуре потока.

Средний коэффициент теплоотдачи к пучку из m труб определяется по формуле

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha_i . \qquad (2.52)$$

2.8. Критериальные формулы для описания теплообмена при свободной конвекции

2.8.1. Свободная конвекция в большом объеме

В этом случае предполагается, что жидкая или газообразная среда простирается в бесконечность по нормали к поверхности внесенного в нее

твердого тела. При этом выделяют свободную конвекцию у вертикального расположения пластины (плиты, стены) или трубы и свободную конвекцию у горизонтально расположенной трубы.

При термической свободной конвекции у вертикальной поверхности нагретого тела ($T_W > T_{f,0}$), начиная от нижней кромки, течение в пограничном слое сначала ламинарно. На некотором расстоянии от нижней кромки толщина ламинарного пограничного слоя становится большой, его устойчивость потока теряется и течение в пограничном слое становится локонообразным. Еще выше оно становится турбулентным (рис. 2.15).

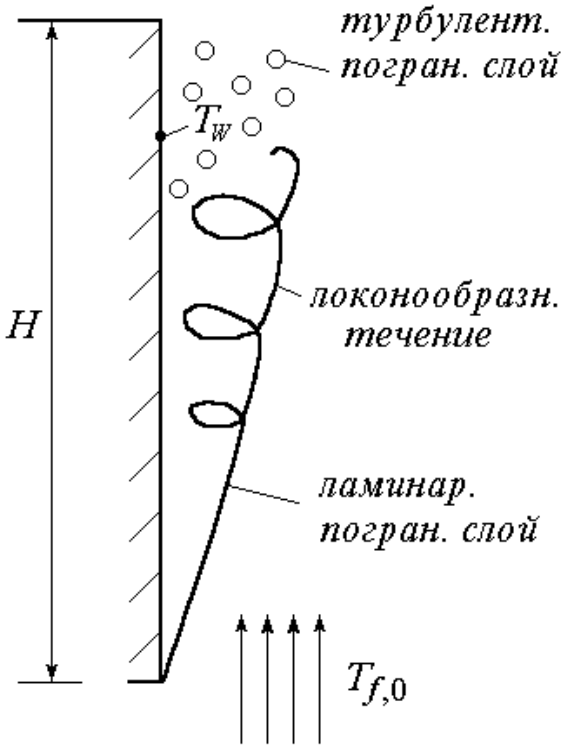


Рис. 2.15

Естественно, что интенсивность теплообмена на выделенном участке плиты зависит от того, какова протяженность находящегося на нем ламинарного, локонообразного или турбулентного течений.

В 2.3 было показано, что критериальные формулы для описания теплообмена при свободной конвекции должны иметь вид связи между числом Нуссельта и критерием Рэлея

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Ra}). \qquad (2.53)$$

Экспериментально установленные зависимости для вертикальной плиты или трубы при постоянной температуре их поверхности T_W = const таковы:

а) для диапазона $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^9$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}76\,\mathrm{Ra}^{0,25}\,C_t; \qquad (2.54)$$

б) для значений $\mathrm{Ra} > 10^9$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}15\,\mathrm{Ra}^{1/3} \cdot C_t, \qquad (2.55)$$

где $\mathrm{Nu} = \overline{\alpha} H / \lambda_f$ и $\overline{\alpha}$ – средние значения числа Нуссельта и коэффициента теплоотдачи на участке высотою H, отсчитанной от нижней кромки; $\mathrm{Ra}=\beta g H^3 (T_W - T_{f,0})\mathrm{Pr}/\nu^2$ – критерий Рэлея; C_t – температурный фактор.

Формула (2.55) соответствует случаям больших значений критерия Рэлея, на которые влияет наибольшим образом высота H плиты (трубы), так как в формулу для расчета Ra входит H^3. При этом практически вся пластина омывается потоком, движущимся свободно в турбулентном режиме, а протяженность участков ламинарного и локонообразного течений пренебрежимо мала.

Нетрудно видеть, что в этом режиме имеет место независимость (автомодельность) величины $\overline{\alpha}$ от протяженности H, что можно показать, если формулу (2.55) привести к виду

$$\overline{\alpha} / \lambda_f = 0{,}15[\beta g (T_w - T_{f,0})\,\mathrm{Pr}/\nu^2]^{1/3} \cdot C_t. \qquad (2.55')$$

Для горизонтально расположенной трубы в диапазоне $10^3 < \mathrm{Ra} < 10^8$ опытные данные при $T_W = \mathrm{const}$ аппроксимируются зависимостью

$$\mathrm{Nu} = 0{,}50\,\mathrm{Ra}^{0{,}25}\, C_t, \qquad (2.56)$$

где $\mathrm{Nu} = \overline{\alpha} d / \lambda_f$ и $\overline{\alpha}$ – средние значения Nu и $\overline{\alpha}$ по периметру трубы с наружным диаметром d; $\mathrm{Ra} = \beta g d^3 (T_w - T_{f,0})\,\mathrm{Pr}/\nu^2$ – критерий Рэлея.

Отметим, что при постоянной плотности теплового потока $q_W = \mathrm{const}$ через поверхность омываемого тела интенсивность теплоотдачи несколько больше (примерно на 7 %), чем при $T_W = \mathrm{const}$.

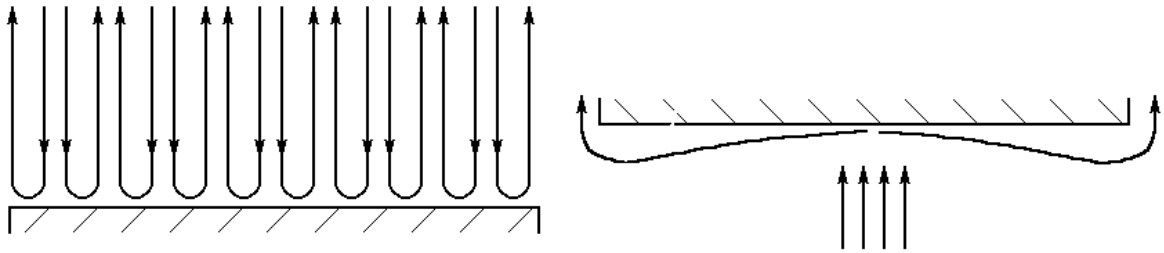
В формулах (2.54)–(2.56) теплофизические характеристики среды выбираются по полусумме температур поверхности и омывающей ее среды $(T_W + T_{f,0})/2$, а разность этих же температур $T_W - T_{f,0}$ подставляется по модулю.

Обращаем внимание на то, что получены критериальные зависимости $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Ra}, C_t)$ и для значений $\mathrm{Ra} < 10^3$, которые приводятся в соответствующей литературе.

2.8.2. Свободная конвекция над горизонтальной поверхностью

Если горизонтальная поверхность твердого тела (плиты) с температурой T_W, большей, чем температура $T_{f,0}$ жидкой или газообразной среды, обращена кверху или книзу, то при этом будет иметь место различная интенсивность теплообмена, которая обусловлена различием свободного движения. Так, если нагретая поверхность обращена кверху, то над ней возникает система восходящих и опускных течений (рис. 2.16, *а*); если же

она обращена книзу, то восходящий поток разделяется на две ветви (рис. 2.16, *б*). Очевидно, что в первом случае толщина образующегося пограничного слоя меньше из-за малых протяженностей движения у омываемой поверхности, чем во втором случае, когда поток в своем движении омывает половину плиты.



а *б*

Рис. 2.16

Коэффициенты теплоотдачи для горизонтально расположенной прямоугольной плиты сначала рассчитывают по приведенным выше формулам для случая ее вертикального расположения, в которых в качестве определяющего размера принимается длина меньшей стороны. А затем в соответствии с рекомендациями акад. М.А. Михеева полученные таким образом значения α увеличивают на 30 %, если теплоотдающая поверхность обращена кверху, или уменьшают на 30 %, если она обращена книзу.

2.8.3. Свободная конвекция в узкой щели

Узкие щели шириной δ, образованные двумя плоскостями с температурами $T_{w1} \neq T_{w2}$, могут располагаться горизонтально и вертикально.

Возникновение свободной конвекции и ее существенное влияние на теплоперенос в горизонтальной щели при $T_{w1} < T_{w2}$ (температура верхней плоскости меньше температуры нижней), как установил Рэлей, возможно при выполнении неравенства

$$\mathrm{Ra} = \beta \frac{g\delta^3}{\nu^2} \mathrm{Pr}(T_{w2} - T_{w1}) > 1700. \qquad (2.57)$$

В этом случае возникает ячеистая структура течения в щели в виде «зацепляющихся» между собой вращающихся ячеек–валиков (рис. 2.17).

Для таких горизонтальных щелей, а также для вертикальных, цилиндрических и шаровых щелей можно рекомендовать следующую формулу акад. М.А. Михеева для расчета так называемого эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_э$ при $\mathrm{Ra} \geq 10^3$:

$$\lambda_э / \lambda_f = 0{,}18\mathrm{Ra}^{0{,}25}, \qquad (2.58)$$

где λ_f – коэффициент молекулярной теплопроводности.

При $\mathrm{Ra} < 10^3$ принимают $\lambda_э = \lambda_f$. Величина $\lambda_э$ подставляется в формулы, установленные в разделе 1, вместо коэффициента теплопроводности материала твердого тела λ при расчете величины стационарных тепловых потоков через щель.

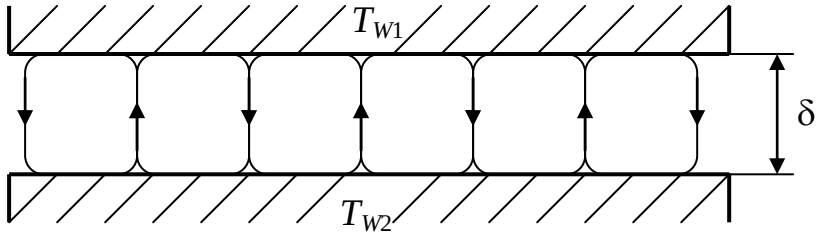


Рис. 2.17

2.9. Температурный фактор C_t в задачах конвективного теплообмена

В число аргументов для описания интенсивности конвективного теплообмена при вынужденной и свободной конвекции наряду с критериями Pe, Re, Pr, Ra входит и температурный фактор C_t.

Уже отмечалось, что величина числа Нуссельта при одинаковом значении Pe (Re и Pr) или Ra зависит существенно от того, нагревается или охлаждается движущаяся среда у поверхности твердого тела.

Причем для нагревающейся жидкости число Нуссельта больше, чем для охлаждающейся. У газов же это влияние направления теплового потока (от стенки в движущуюся среду или наоборот) противоположно.

Дадим объяснение этому эффекту.

Если капельная жидкость омывает теплую поверхность, то самые теплые ее слои находятся у поверхности, их вязкость мала. Из-за этого мала толщина формирующегося пограничного слоя, а следовательно, мало и термическое сопротивление теплопереносу.

Если же капельная жидкость омывает холодную поверхность, то все будет обстоять противоположным образом, так как у жидкостей с понижением температуры вязкость возрастает.

У газов же с понижением температуры вязкость уменьшается и поэтому у них при равных Pe (Re и Pr) или Ra числа Нуссельта будут больше при охлаждении, чем при нагревании.

Предложены различные виды представления температурного фактора C_t в структуре критериальных формул для описания конвективного теплообмена.

Длительное время в отечественной литературе предлагалось вводить

C_t в виде

$$C_t = (\mathrm{Pr}_f/\mathrm{Pr}_w)^{0,25}, \qquad (2.59)$$

где Pr_f и Pr_W – критерии Прандтля, выбираемые из таблиц теплофизических характеристик по температурам потока $T_{f,0}$ и поверхности T_W.

В настоящее время рекомендованы к использованию в расчетной практике другие формулы:

а) для капельных неметаллических жидкостей при $0{,}08 < \mu_W/\mu_f < 40$ и $0{,}7 < \mathrm{Pr}_f < 200$

$$C_t = (\mu_f / \mu_w)^p \ , \qquad (2.60)$$

где μ_f и μ_W – коэффициенты динамической вязкости движущейся среды, выбранные по температурам $T_{f,0}$ и T_W соответственно.

При нагревании жидкости в (2.60) полагают p = 0,11, а при ее охлаждении имеем p = 0,25;

б) динамическая вязкость газа пропорциональна степенной функции термодинамической температуры $\mu_f \sim T_f^r$ и поэтому вместо (2.60) используют зависимость

$$C_t = (T_{f,0} / T_w)^S \ . \qquad (2.61)$$

При нагревании газа и $1{,}0 < T_W / T_{f,0} < 3{,}5$ в формуле (2.61) принимают s=0,5. Вопрос о введении C_t в структуру критериальных формул при охлаждении газов еще нуждается в уточнении и для этого случая до сих пор полагают $C_t \equiv 1$.

В заключение отметим, что именно влияние отношения термодинамических температур $T_W / T_{f,0}$ на теплоперенос в газах и принято называть температурным фактором, так что мы распространили здесь это понятие и на жидкие среды, имея в виду влияние на теплообмен отношения μ_W / μ_f.

3. ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

Теплообмен между твердыми, жидкими и газообразными телами возможен и в том случае, когда они отстоят друг от друга на большие расстояния и их разделяет глубокий вакуум. Примером этому является теплообмен между Солнцем и Землей, отстоящими друг от друга на расстояние примерно в 150 млн км.

В этом случае носителем тепла между телами выступает не вещество, а электромагнитное излучение тела, находящегося при температуре, большей 0

К. Мы будем здесь рассматривать лишь тепловое электромагнитное излучение тел, которое возникает вследствие хаотического теплового движения молекул (атомов), узлов решеток и т.п. При этом движении молекулы (атомы или узлы решеток) возбуждаются и в них происходят переходы электронов с одного энергетического уровня на другой с излучением или поглощением фотонов (квантов энергии).

Таким образом, генерирование электромагнитной энергии вследствие теплового движения молекул (атомов) и узлов решеток происходит в объеме каждого тела независимо от факта существования других тел. Тепловое электромагнитное излучение характеризуется при этом:

1) свойствами непрерывности (при этом говорят о таких характеристиках излучения, как длина волны, частота, спектр) и свойствами дискретности (при этом говорят о потоке фотонов);

2) свойством преломляться при прохождении через некоторые вещества (напр., каменная соль);

3) свойством отражения, интерференции, дифракции и т.д.

Отметим сразу, что мы будем здесь изучать равновесное тепловое излучение тел, т.е. излучение тел, температура которых поддерживается во времени постоянной. Все излагаемые ниже рассуждения и закономерности будут относиться только к нему.

3.1. Тепловое излучение твердых тел

Спектр излучения твердых тел и жидкостей непрерывен, т.е. ими излучается электромагнитная энергия в диапазоне длин волн $\lambda \in (0, \infty)$, где λ – длина волны излучения.

При температурах до 1700 К большая часть электромагнитной энергии излучается в невидимой инфракрасной части спектра, т.е. на длинах волн $\lambda \in [0{,}8 \cdot 10^{-3};\ 0{,}8]$ мм. Отметим, что видимый свет излучается в очень узком диапазоне длин волн $\lambda \in [0{,}4;\ 0{,}8] \cdot 10^{-3}$ мм, примыкающем к левой границе инфракрасной части спектра.

С ростом температуры тела все больше электромагнитной энергии начинает излучаться в видимой части спектра. При огромных же температурах термоядерного взрыва большая часть энергии излучается как в видимой части спектра, так и в области очень коротких длин волн жесткого γ-излучения.

Рассмотрим тепловое термодинамически равновесное излучение твердых атермических тел, т.е. таких тел, которые не способны пропускать через себя электромагнитное излучение. Такие тела–атермики составляют подавляющее большинство используемых в технике или находящихся в природе тел. Исключение составляют лишь тела, изготовленные из кварца или из кристаллов поваренной соли.

В теории теплового излучения тела–атермики рассматриваются с двух точек зрения: как поглотители падающей на них электромагнитной энергии и

как ее излучатели.

Если на атермическое тело падает электромагнитная энергия в количестве $Q_{\text{пад}}$, то часть этой энергии в количестве $Q_{\text{отр}}$ отражается от его поверхности, «рикошетирует» от нее, не претерпев никаких энергетических превращений. Другая же часть в количестве $Q_{\text{погл}}$ поглощается в тонком поверхностном слое толщиной ≈ 1 мкм для металлов и ≈ 1 мм для диэлектриков. Там она превращается в тепло. Ясно, что если температура тела во времени неизменна, то поглощенная часть электромагнитной энергии совпадает с излучаемой этим телом электромагнитной энергией.

Очевидно, что имеет место следующий энергетический баланс:

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{отр}} + Q_{\text{погл}} \qquad (3.1)$$

или

$$1 = \frac{Q_{\text{отр}}}{Q_{\text{пад}}} + \frac{Q_{\text{погл}}}{Q_{\text{пад}}} = R + A, \qquad (3.1')$$

где $\frac{Q_{\text{отр}}}{Q_{\text{пад}}} = R$ и $\frac{Q_{\text{погл}}}{Q_{\text{пад}}} = A$ называются коэффициентами отражения и поглощения.

Они характеризуют свойства поверхности твердого тела по отношению к падающему на него потоку электромагнитной энергии. Достаточно определить один из названных коэффициентов R или A. Как правило, определяют коэффициент поглощения A.

Для этого нужно рассмотреть атермическое тело как излучатель электромагнитной энергии. При этом рассмотрении вводятся три физические характеристики тела – излучательная способность E, спектральная излучательная способность dE_λ и интенсивность спектральной излучательной способности J_λ.

Под излучательной способностью E понимается количество электромагнитной энергии, излученной телом с единицы площади в единицу времени во всем диапазоне длин волн $\lambda \in (0, \infty)$ по всем направлениям, т.е. в полусферическое пространство над выделенной площадкой поверхности тела.

В излучении электромагнитной энергии в окружающую среду принимает участие лишь указанный выше тончайший поверхностный слой вещества, так как излучение глубинных слоев материала твердого тела не достигает его поверхности и поглощается соседними слоями.

Часть величины E, излученная в узком диапазоне длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, называется спектральной излучательной способностью dE_λ (индекс «λ» указывает на то, что эта часть энергии излучена на длинах волн, близких к длине λ).

Величина dE_λ, соответствующая единичному диапазону длин волн $d\lambda = 1$, называется интенсивностью спектральной излучательной способности и равна $J_\lambda = dE_\lambda/d\lambda$.

Из приведенных трех определений следует, что выполняются соотношения

$$E = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} dE_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} J_\lambda d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} J_\lambda d\lambda. \qquad (3.2)$$

Излучательная способность тела E зависит от рода вещества, из которого изготовлено тело, и от его температуры, так как ими определяется степень возбуждения молекул при хаотическом движении, а значит, количество актов внутриатомных переходов электронов с излучением (поглощением) квантов энергии. Кроме того, на величину E влияет и состояние поверхности тела (шероховатость, окисленность, замасленность), так как «выход» генерированной в объеме твердого тела электромагнитной энергии осуществляется с его поверхности.

Вычисление несобственного интеграла в правой части формулы (3.2) стало возможным лишь для так называемого абсолютно черного тела. Это такое воображаемое тело, которое поглощает все падающее на него излучение, а значит, и излучает, если его температура во времени неизменна.

В 1900 г. создатель квантовой теории излучения М.Планк установил формулу для интенсивности спектральной излучательной способности этого тела

$$J_{\lambda,0} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(C_2/(\lambda T)) - 1}, \qquad (3.3)$$

где C_1 и C_2 – физические постоянные (числа), вычисленные М.Планком; λ – длина волны излучения; T – термодинамическая температура.

На рис. 3.1 дана графическая интерпретация закона М.Планка.

Анализ формулы (3.3) на экстремум в области малых значений произведения $\lambda \cdot T$ приводит к заключению о том, что максимум интенсивности спектральной излучательной способности приходится на длину волны λ_{max}, определяемой из соотношения

$$\lambda_{max} \cdot T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}. \qquad (3.4)$$

Указанная зависимость была установлена в 1895 г. В.Вином и называется законом смещения Вина.

Рассмотрение формулы (3.4) и рис. 3.1 показывает, что максимум интенсивности спектральной излучательной способности с ростом температуры тела смещается в область коротких длин волн.

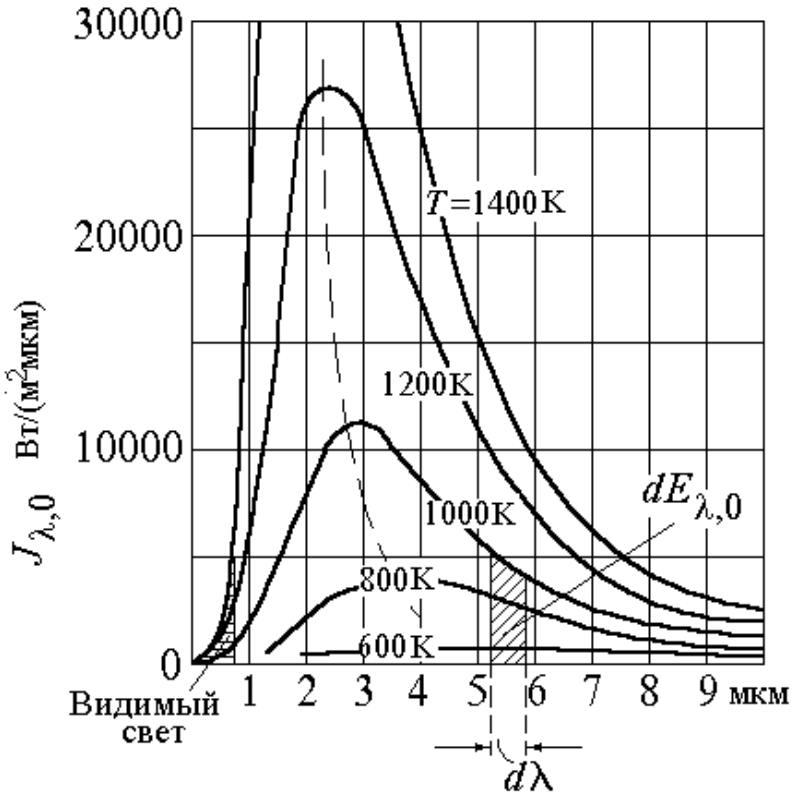


Рис. 3.1

Подстановка $J_{\lambda,0}$ в правую часть формулы (3.2) дает E_0 – величину излучательной способности абсолютно черного тела – равной

$$E_0 = \sigma T^4, \tag{3.5}$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 К^4) – постоянная Стефана–Больцмана.

Зависимость (3.5) называют законом Стефана–Больцмана, так как эти ученые установили ее еще до создания квантовой теории излучения.

Все остальные тела (их называют серыми), находясь при той же температуре, что и абсолютно черное, излучают меньшее количество электромагнитной энергии, долю которой по отношению к E_0 считают степенью черноты поверхности тела

$$\varepsilon = \frac{E(T)}{E_0(T)} = f(T). \tag{3.6}$$

Из формулы (3.6) следует, что величина $E(T)$ равна

$$E(T) = \varepsilon E_0(T) = \varepsilon\sigma T^4. \tag{3.7}$$

Рассмотрение формулы (3.7) не должно приводить к выводу о том, что

$$E(T) \sim T^4,$$

так как степень черноты ε поверхности серого тела сама зависит от многих факторов, в том числе и от температуры. В настоящее время установлено, что

для этих тел справедлива пропорция $E(T) \sim T^{3,2\div3,7}$.

Для спектрального излучения в диапазоне длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$ при $d\lambda\to0$ степень черноты называется спектральной, и она определяется как отношение интенсивностей спектральных излучательных способностей серого J_λ и абсолютно черного $J_{\lambda,0}$ тел

$$\varepsilon_\lambda = \frac{J_\lambda}{J_{\lambda,0}} = \varphi(T, \lambda). \qquad (3.8)$$

Для большинства тел, применяемых в технике, спектральная степень черноты ε_λ во всем диапазоне длин волн излучения $\lambda\in(0,\infty)$ мало отличается от степени черноты поверхности тела ε. Такие тела принято называть абсолютно серыми.

Отношение площадей под кривыми, построенными для одной и той же температуры T = idem, и отношение ординат $bc/ac = b_1c_1/a_1c_1$ позволяет графически определить для этой температуры величины ε и ε_λ (рис. 3.2).

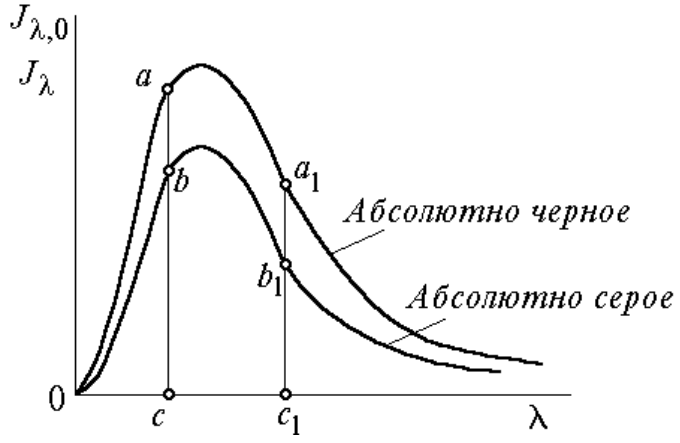


Рис. 3.2

Следует отметить, что величина ε является коэффициентом, осредненным по всей поверхности тела. Степень черноты ε зависит от физических свойств материала тела и состояния его поверхности: шероховатости, запыленности, замасленности, окисленности и т.д., а также, как уже указывалось выше, и от температуры и устанавливается экспериментально.

Можно показать, что степень черноты ε совпадает с коэффициентом поглощения A, и поэтому ε является исчерпывающей характеристикой атермического серого тела в отношении теплового излучения. В самом деле, пусть на 1 м^2 поверхности серого и абсолютно черного тела, находящихся при одинаковой температуре T, за 1 с падает одинаковый лучистый поток энергии $Q_{\text{пад}}$. Тогда в условиях термодинамического равновесия имеем соответственно для этих тел

$$Q_{\text{пад,с}} = Q_{\text{отр,с}} + Q_{\text{погл,с}} = Q_{\text{отр,с}} + E(T), \qquad (3.9)$$

$$Q_{\text{пад,0}} = Q_{\text{погл,0}} = E_0(T). \qquad (3.10)$$

Разделив слагаемые левой и правой частей (3.9) на величины (3.10), получим согласно принятым ранее обозначениям

$$1 = R + A = R + \varepsilon,$$

т.е. коэффициент поглощения A и степень черноты ε любого тела равны друг другу. Это равенство является математической записью закона Кирхгофа.

Для твердых тел с неизменной структурой поверхности степень черноты ε обычно является непрерывной функцией температуры: с увеличением температуры ε увеличивается для металлов и уменьшается для диэлектриков. Исключение из этого правила составляют тела, способные давать окисные пленки на поверхности или быстро менять цветность при повышении температуры, например, свежеполированные металлы при сильном нагревании.

Необходимо отметить, что видимая окраска поверхности тела в отраженных лучах света не дает никакого представления о степени черноты ε, характеризующей, в основном, невидимое тепловое излучение. Так, например, бумага, фарфор, асбест имеют ε порядка 0,8÷0,9, тогда как глазом они воспринимаются как белые тела.

В заключение считаем необходимым обратить внимание на то, что излучение подавляющей части жидкостей подчиняется всем закономерностям излучения твердых тел.

3.2. Расчет результирующего лучистого потока тепла между телами. Экраны

Расчет результирующего лучистого потока энергии между телами, разделенными прозрачной средой, в общем случае, очень сложен, так как его величина зависит от многих факторов: от формы облучающих друг друга тел, от их взаимного расположения в пространстве, от степени черноты их поверхности и др. Не вдаваясь в детали, укажем на то, что для самого распространенного на практике случая, когда одно тело полностью охватывает другое тело, т.е. когда тело *1* находится в полости, образованной телом *2* (рис. 3.3), результирующий поток лучистого тепла подсчитывается по формуле

$$Q_{\text{рез,л,1–2}} = \varepsilon_{\text{п}} C_0 \left[\left(\frac{T_{W1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{W2}}{100} \right)^4 \right] F_1 . \qquad (3.11)$$

В формуле (3.11) обозначены: $\varepsilon_{\text{п}}$ – приведенная степень черноты системы тел *1-2*, определяемая как

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + F_1(1/\varepsilon_2 - 1)/F_2}, \qquad (3.12)$$

где ε_1, F_1, T_{W1} и ε_2, F_2, T_{W2} – степень черноты, площадь и термодинамическая температура поверхности тел 1 и 2 соответственно; C_0 = 5,67 Вт/(м^2 К^4)– константа излучения Стефана–Больцмана, умноженная на 10^8.

В формуле (3.12) сомножители единица при $1/\varepsilon_1$ и F_1/F_2 при $(1/\varepsilon_2 - 1)$ называются коэффициентами облученности первого тела на второе и второго тела на первое соответственно.

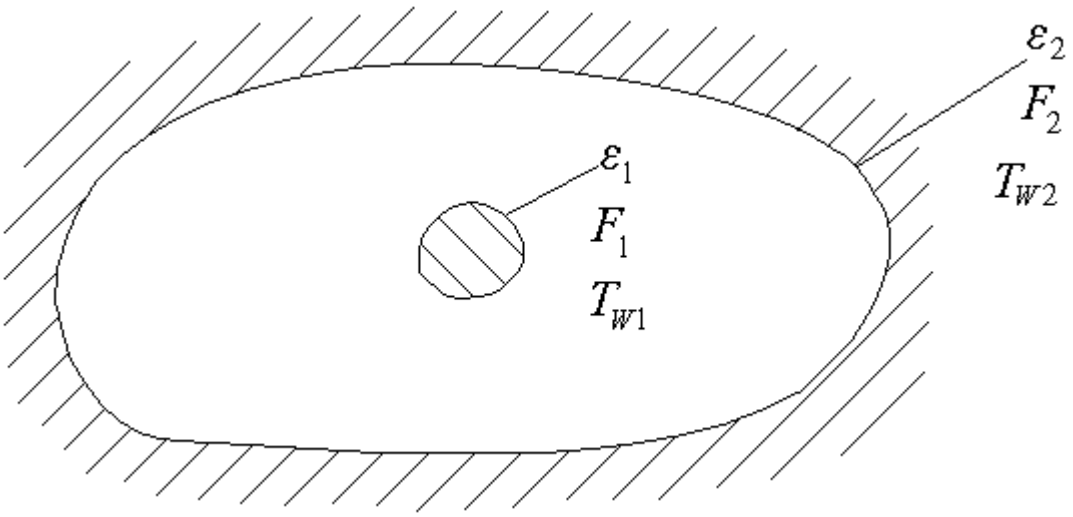


Рис. 3.3

При выводе формулы (3.11) предполагается, что ε_1 и F_1 – это степень черноты и площадь поверхности тела, помещенного в полость, а T_{W1} – температура поверхности тела с большей температурой.

Нетрудно видеть, что если $F_1 << F_2$, то $\varepsilon_{\text{п}} \approx \varepsilon_1$, т.е. когда площадь поверхности тела *1* во много раз меньше площади поверхности тела *2*, то приведенная степень черноты системы этих тел практически совпадает со степенью черноты поверхности тела *1*.

В том частном случае, когда рассматривается теплообмен излучением между двумя параллельными пластинами, в формуле (3.12) надо положить $F_1 = F_2$.

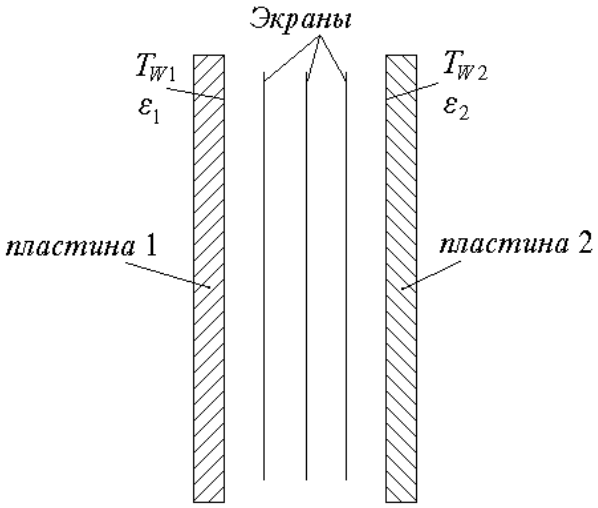


Рис. 3.4

На практике часто между такими телами–пластинами приходится размещать параллельные им пластины–экраны (рис. 3.4), которые предназначены для того, чтобы уменьшить результирующий лучистый поток тепла. Экраны изготавливают, как правило, из фольги металлов, сплавов или диэлектриков. При наличии n экранов приведенная степень черноты систем тел *1* и *2* с плоскими экранами между ними определяется по формуле

$$\varepsilon_{\text{п}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + 2\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\varepsilon_{\text{эк},i}} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - (n+1)}. \qquad (3.13)$$

Рассмотрение формул (3.11) и (3.13) свидетельствует о том, что если степени черноты поверхностей плоских тел *1* и *2* и экранов совпадают друг с другом, то установка одного экрана уменьшает величину $Q_{\text{рез,л},1-2}$ ровно в два раза, а n штук экранов уменьшает $Q_{\text{рез,л},1-2}$ в $(n + 1)$ раз. Тем самым становится очевидной эффективность установки экранов между горячим телом *1* и холодным телом *2* при необходимости защитить тело *2* от лучистого теплового потока.

Применение экранов используется при создании самой эффективной экранно–вакуумной тепловой изоляции тел, конструктивное выполнение которой на рис. 3.5 дано на примере тепловой защиты цилиндрической трубы *1*, внутри которой движется жидкость.

Снаружи труба *1* окружена системой концентрически расположенных экранов *2* в виде цилиндрических оболочек из фольги, отделенных друг от друга ребрами жесткости *3*. Из пространства между экранами вакуум-насосом удаляется воздух и между ними возникает глубокое разрежение, так что затруднен подвод (или отвод) тепла конвекцией и излучением из окружающей среды к поверхности трубы.

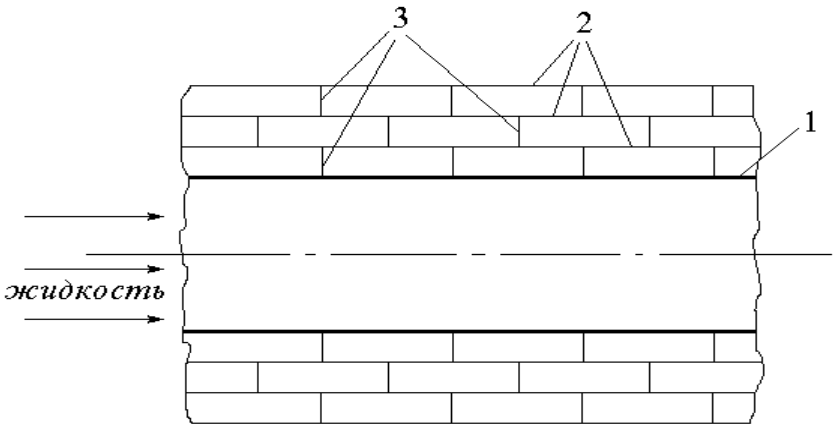


Рис. 3.5

3.3. Особенности излучения газов

Одно- и двухатомные газы теоретически прозрачны для теплового излучения. Поэтому, в частности, сухой и чистый воздух, состоящий, в основном, из двухатомных молекул азота и кислорода, также практически прозрачен для теплового излучения. Трехатомные и многоатомные газы этим свойством не обладают и поэтому их присутствие в газовой смеси делает ее полупрозрачной. Находясь при высокой температуре, такая среда может излучать значительное количество энергии, что и наблюдается в печах для нагрева заготовок, в топках котельных агрегатов, в проточной части газотурбинных двигателей (в камере сгорания, в межлопаточном пространстве турбины и сопле) и др. При этом учету подлежит наличие в продуктах сгорания углеводородного топлива углекислоты CO_2 и водяного пара H_2O, так как содержание SO_2 и SO_3 обычно бывает пренебрежимо малым.

Излучение чистых газов отличается от излучения твердых тел. Во-первых, поглощение и излучение лучистой энергии газами всегда имеет резко выраженный селективный (выборочный) характер: например, спектр поглощения углекислоты и водяного пара состоит из нескольких полос, в пределах которых эти газы испускают (и поглощают) электромагнитную энергию (рис. 3.6).

Второе отличие излучения газов от излучения твердых тел заключается в том, что у газов оно имеет объемный характер (у твердых тел излучение электромагнитной энергии осуществляется с поверхности), так как нужна чрезвычайно большая толщина газового слоя, чтобы излучаемая глубинными элементами энергия была бы всецело поглощена самим газом и совершенно не проникла бы в окружающую среду.

Для того чтобы рассчитать результирующий лучистый поток тепла от газового тела к поверхности охватывающего его твердого тела, необходимо знать не только степень черноты поверхности ε_W, но и степень черноты смеси

газов $\varepsilon_г$.

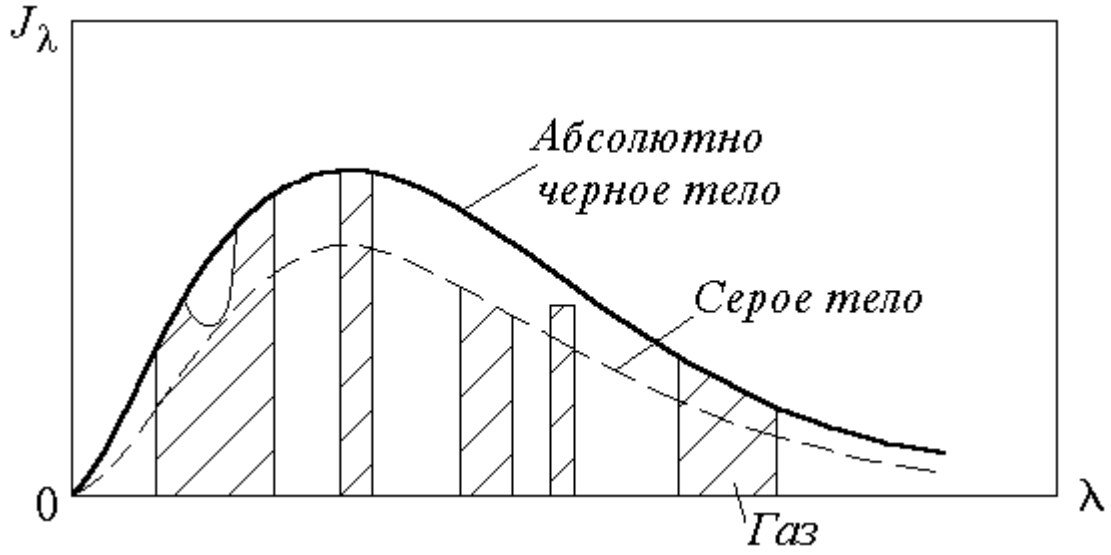


Рис. 3.6

В настоящее время $\varepsilon_г$ рекомендуют определять по формуле

$$\varepsilon_г = \varepsilon_{CO_2} + \beta\varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon, \qquad (3.14)$$

где ε_{CO_2} и ε_{H_2O} – степень черноты компонентов газовой смеси – излучателей электромагнитной энергии; β – поправка на величину парциального давления паров воды в газовой смеси; $\Delta\varepsilon$ – поправка на взаимное перекрывание спектров излучения CO_2 и H_2O. Все величины, входящие в правую часть формулы (3.14), установлены экспериментально.

Степень черноты каждого излучающего компонента зависит от количества его молекул в газовой смеси и от ее температуры $T_г$. Количество молекул–излучателей электромагнитной энергии, естественно, пропорционально парциальному давлению p_{CO_2} и p_{H_2O} в газовой смеси, а также так называемой толщине газового слоя l, определяемой по формуле

$$l = 3{,}6V / F,$$

где V – объем газового тела; F – площадь охватывающей его поверхности твердого тела. Таким образом, искомые степени черноты излучающих компонентов представляют в виде зависимостей

$$\varepsilon_{CO_2} = f(p_{CO_2}, l, T_г), \qquad (3.15)$$

$$\varepsilon_{H_2O} = f(p_{H_2O}, l, T_г). \qquad (3.16)$$

Число аргументов для ε_{CO_2} и ε_{H_2O} в правой части зависимостей (3.15) и (3.16) уменьшают на один, полагая

$$\varepsilon_{CO_2} = \varphi(p_{CO_2} \cdot l, T_г), \qquad (3.17)$$

$$\varepsilon_{H_2O} = \varphi(p_{H_2O} \cdot l, T_г). \qquad (3.18)$$

Именно в таком виде и представляются опытные данные для ε_{CO_2} и ε_{H_2O}. Опытные данные для β приводятся в зависимости от p_{H_2O} для различных значений $p_{H_2O} \cdot l$, а величина $\Delta\varepsilon$ для различных температур газа представляется функцией от $p_{H_2O}/(p_{H_2O} + p_{CO_2})$ для разных значений давления газовой смеси.

Для расчета результирующего лучистого теплового потока от чистого газа к поверхности твердого тела с термодинамической температурой T_W и степенью черноты поверхности ε_W для технических приложений приемлемо использовать формулу

$$Q_{рез,л,\,w-г} = \frac{\varepsilon_W + 1}{2} \cdot \varepsilon_г C_0 \left[\left(\frac{T_г}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_W}{100} \right)^4 \right] F. \qquad (3.19)$$

При проведении тепловых расчетов принято пользоваться также величиной коэффициента теплоотдачи излучения газов $\alpha_л$, который вводится в рассмотрение формулой

$$Q_{рез,л,\,w-г} = \alpha_л (T_г - T_W) F, \qquad (3.20)$$

так что величина $\alpha_л$, естественно, вычисляется как

$$\alpha_л = \frac{\frac{\varepsilon_W + 1}{2} \varepsilon_г C_0 \left[\left(\frac{T_г}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_W}{100} \right)^4 \right]}{T_г - T_W}. \qquad (3.21)$$

Использование коэффициента теплоотдачи излучением $\alpha_л$ целесообразно при расчете лучисто–конвективного теплообмена движущегося у поверхности твердого тела высокотемпературного газа, когда приходится рассчитывать перенос тепла от газа конвекцией и излучением по формуле

$$Q = \alpha_\Sigma (T_г - T_W) F, \qquad (3.22)$$

где $\alpha_\Sigma = \alpha + \alpha_л$ – суммарный коэффициент теплоотдачи, α – коэффициент теплоотдачи механизмом конвекции.

В заключение отметим, что при наличии в газовой смеси сажевых частиц, золы, частиц горящего кокса тепловой расчет приходится вести с учетом того, что имеет место излучение электромагнитной энергии уже не чистым газом, а пламенем с учетом всей сложности этого явления.

3.4. Решение задач теплопроводности с граничными условиями по законам излучения

Сформулированные закономерности излучения твердых тел, жидкостей и газов, как уже было выше подчеркнуто, верны для термодинамически равновесного излучения, т.е. для постоянной во времени температуры тел-излучателей. Тем не менее их применяют при расчетах теплового состояния нагреваемых или охлаждаемых излучением твердых тел, полагая, что они приближенно выполняются и в нестационарных процессах. В этом случае при расчете процессов нестационарной теплопроводности к уравнению Фурье помимо описания начального распределения температуры в теле присоединяют граничное условие по закону излучения между твердыми телами, имеющее на основании зависимости (3.11) вид

$$-\lambda_i \operatorname{grad} T_i \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma_i} = (-1)^{i+1} \varepsilon_{\text{п}} C_0 \frac{F_1}{F_i}\left[\left(\frac{T_{W1}}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{W2}}{100}\right)^4\right], \quad M \in \Gamma_i, \ \tau > 0, \ i = 1,2. \tag{3.23}$$

В формуле (3.23) обозначены: λ_1, F_1, T_{W1} и λ_2, F_2, T_{W2} – коэффициент теплопроводности, площадь поверхности и ее термодинамическая температура соответственно для тела с меньшей и с большей площадью поверхности.

При теплообмене излучением между твердым телом и газом имеем на основании зависимости (3.19) следующее описание граничного условия:

$$-\lambda \operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma} = \frac{\varepsilon_W + 1}{2} \cdot \varepsilon_{\text{г}} C_0 \left[\left(\frac{T_W}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{\text{г}}}{100}\right)^4\right]. \tag{3.24}$$

На практике часто твердое тело участвует в лучисто-конвективном теплообмене с газом. При этом, естественно, граничное условие для решения задач нестационарной и стационарной теплопроводности принимает вид

$$-\lambda \operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma} = \alpha(T_W - T_{\text{г}}) + \frac{\varepsilon_W + 1}{2} \cdot \varepsilon_{\text{г}} C_0 \left[\left(\frac{T_W}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_{\text{г}}}{100}\right)^4\right]. \tag{3.25}$$

Последнее равенство в компактной форме записывается как

$$-\lambda \operatorname{grad} T \cdot \vec{n}^0\big|_{\Gamma} = \alpha_{\Sigma}(T_W - T_{\text{г}}). \tag{3.26}$$

Все величины, используемые в (3.23)–(3.26), описаны выше в 1.5, 3.2, 3.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике/ Под ред. *Кошкина В.К.* – М.: Машиностроение, 1975. – 615 с.
2. Теория теплообмена/ Под ред. *Леонтьева А.И.* – М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.
3. *Жуковский В.С.* Основы теории теплопередачи. – М.: Энергия, 1969.– 224 с.
4. *Юдаев Б.Н.* Теплопередача. – М.: Высшая школа, 1981. – 319 с.
5. *Кутателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979.– 415 с.
6. *Лыков А.В.* Тепломассообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1978.
7. *Петухов Б.С.* Теплообмен в движущейся однофазной среде. – М.: Изд-во МЭИ, 1993. – 350 с.
8. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – М.-Л.: Энергия, 1965. – 424 с.
9. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
10. *Гухман А.А.* Введение в теорию подобия. – М.: Высшая школа, 1973. –299 с.
11. *Гухман А.А.* Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. – М.: Высшая школа, 1974. – 328 с.
12. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. – М.: Энергия, 1973. – 320 с.
13. *Гухман А.А., Зайцев А.А.* Обобщенный анализ. – М.:Факториал, 1998. – 308 с.
14. *Цирельман Н.М.* Методы теории подобия и моделирования тепломассопереноса:Учеб.пособие – Уфа: УГАТУ, 2000. – 94 с.
15. *Гинзбург И.П.* Теория сопротивления и теплопередачи. – Л.:ЛГУ, 1970. – 375 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

К главе 1

1. Дать определение градиента температуры и плотности теплового потока.
2. Указать взаимосвязь между градиентом температуры и плотностью теплового потока в гипотезе Фурье.
3. Каков смысл коэффициента теплопроводности материалов и от чего зависит его величина?
4. Указать физический смысл уравнения нестационарной теплопроводности.
5. Указать граничные условия для уравнения нестационарной теплопроводности и их отличия друг от друга.
6. В чем состоит основная идея применения разделения переменных для получения аналитического описания нестационарных температурных полей?
7. Дать сопоставление явной и неявной схем численного решения задач нестационарной теплопроводности.
8. Дать сопоставление метода элементарного теплового баланса и метода сеток для определения температурных полей.
9. В чем состоит физический принцип стационарности температурных полей?
10. Вид стационарного температурного поля в неограниченной пластине и полом цилиндре.
11. Какова структура формул для определения стационарного теплового потока через конструкцию при граничных условиях I и III родов?
12. Дать определения предельной и критической толщины тепловой изоляции трубопроводов.

К главе 2

1. Каков физический смысл коэффициента теплоотдачи и от чего зависит его величина?
2. Указать отличия в формировании динамического и теплового пограничного слоев во внешней и внутренней задачах конвективного теплообмена.
3. Каковы режимы течения жидкости (газа) и какова интенсивность переноса в них тепла?
4. В чем состоит предположение В.Нуссельта о механизме переноса тепла у обтекаемой поверхности?
5. Каковы необходимые условия подобия физических явлений одинаковой природы?
6. Каковы достаточные условия подобия физических явлений одинаковой природы?
7. Сформулировать основную (третью) теорему теории подобия.

8. Какова структура критериальных формул для описания теплообмена при вынужденном движении?
9. Указать физический смысл вырождения критериев подобия Рейнольдса и Пекле при вынужденном течении в канале.
10. В чем состоят отличия гидродинамики и теплообмена при внешнем обтекании пластины и кругового цилиндра?
11. В чем состоят отличия гидродинамики и теплообмена при обтекании одиночной круглой трубы и пучков труб?
12. Какова структура критериальных формул для описания теплообмена при свободном движении?
13. Как влияет зависимость теплофизических свойств движущейся среды от температуры на интенсивность теплообмена для жидкостей и газов?

К главе 3

1. Дать определение и указать свойства теплового излучения.
2. Назовите основные законы термодинамически равновесного теплового излучения.
3. Как связаны между собой коэффициенты поглощения и отражения для атермических тел?
4. Дать определение интегральной и спектральной степени черноты поверхности тела.
5. От чего зависит величина результирующего лучистого теплового потока между телами?
6. Какие идеи использованы при создании экранно-вакуумной тепловой изоляции?
7. Какие газы излучают (и поглощают) электромагнитную энергию?
8. Каковы отличия излучения и поглощения твердых и газовых тел?
9. От каких факторов зависит степень черноты газовой смеси?
10. Какие параметры определяют величину результирующего лучистого теплового потока между твердым телом и газом?