Д.А. Лабунцов, В.В. Ягов

# МЕХАНИКА ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ

*Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по направлению 651100 «Техническая физика»*

Москва Издательство МЭИ 2000

УДК 536.423.1+536.24(075.8)
ББК 31.31я73
Л 127

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997—2000 годы»*

Рецензенты: академик РАН А.И. Леонтьев (МГТУ им. Баумана),
доктор техн наук Ю А. Зейгарник (ИВТ РАН)
доктор техн. наук, профессор В И Хвесюк (МГТУ им. Баумана)

**Лабунцов Д.А, Ягов В.В.**

Л 127 Механика двухфазных систем: Учебное пособие для вузов — М.: Издательство МЭИ, 2000. — 374 с.: ил.

ISBN 5-7046-0758-6

Изложены общие принципы построения математического описания многофазных систем; особое внимание уделено формулировке универсальных и специальных условий совместности на межфазных границах. Анализируется гидростатическое равновесие газожидкостных систем; волновое движение на поверхности тяжелой жидкости, классические неустойчивости Тейлора и Гельмгольца; гидродинамика гравитационных пленок Рассмотрены закономерности стационарного движения дискретной частицы (капли или пузырька) в несущей фазе, механизм и количественные характеристики роста паровых пузырьков в объеме равномерно перегретой жидкости и на обогреваемой твердой стенке. Приводятся характеристики течения газожидкостных потоков в канале, методы расчета истинного объемного паросодержания и трения в потоках различной структуры; методы расчеты теплообмена и кризисов при пузырьковом кипении в трубах.

Для студентов технических университетов, специализирующихся в области тепловой и атомной энергетики, авиационной и космической техники, химической технологии.

**УДК 536.423.1+536.24(075.8)**
**ББК 31.31я73**

**ISBN 5-7046-0758-6**

© Лабунцов Д.А., Ягов В.В., 2000

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие . . . . . 5

*Глава первая.* **Математическое описание двухфазных систем** . . . . . 11

1.1. Введение . . . . . 11
1.2. Общая форма законов сохранения . . . . . 18
1.3. Закон сохранения массы . . . . . 20
1.4. Закон сохранения импульса . . . . . 23
1.5. Закон сохранения энергии . . . . . 29
1.6. Законы сохранения для смесей . . . . . 33
1.7. Универсальные условия совместности . . . . . 41
1.8. Специальные условия совместности (квазиравновесная схема) . . . . . 57
1.9. Неравновесные эффекты на межфазной границе . . . . . 60

*Глава вторая.* **Основы гидростатики газожидкостных систем** . . . . . 78

2.1. Поверхностные явления . . . . . 78
2.2. Общее уравнение гидростатического равновесия . . . . . 89
2.3. Равновесная форма свободной поверхности жидкости, характеризуемой одним радиусом кривизны (капилляры, плоские задачи) . . . . . 92
2.4. Равновесная форма осесимметричных межфазных поверхностей . . . . . 101
2.5. Приближенные аналитические соотношения для малых капель и пузырей . . . . . 120

*Глава третья.* **Волны на границе раздела фаз и устойчивость** . . . . . 125

3.1. Основные характеристики волновых движений . . . . . 125
3.2. Анализ волнового движения плоской границы раздела неподвижных фаз . . . . . 130
3.3. Исследование результатов анализа. Волны на поверхности жидкости . . 136
3.4. Неустойчивость Тейлора . . . . . 143
3.5. Волны на границе раздела при относительном движении фаз . . . . . 146
3.6. Анализ результатов. Неустойчивость Гельмгольца . . . . . 151

*Глава четвертая.* **Гидродинамика жидких пленок** . . . . . 155

4.1. Основные понятия . . . . . 155
4.2. Ламинарное течение жидкой пленки . . . . . 156
4.3. Волновой режим течения пленки . . . . . 162
4.4. Турбулентное течение в пленках . . . . . 173
4.5. Теплообмен в гравитационных пленках . . . . . 176

*Глава пятая.* **Установившееся движение дискретной частицы в жидкости** . . . . . 182

5.1. Общие свойства течения невязкой жидкости . . . . . 182
5.2. Движение сферы в идеальной жидкости . . . . . 187

5.3. Обтекание твердой сферы вязкой жидкостью при Re << 1 . . . . . 191
5.4. Качественные закономерности движения газовых пузырей в жидкости . . . . . 201
5.5. Закономерности движения сферических пузырей (капель) в жидкости при Re << 1 . . . . . 210
5.6. Газовые пузырьки в жидкости при Re > 1 . . . . . 216
5.7. Особенности движения капель в газовых потоках . . . . . 225

*Глава шестая.* **Неустановившееся движение газовой полости в жидкости** . . . . . 231
6.1. Динамика расширяющейся газовой полости . . . . . 231
6.2. Кавитация. Схлопывание сферической полости . . . . . 235
6.3. Закономерности роста парового пузыря в объеме перегретой жидкости . . . . . 242
6.4. Рост паровых пузырьков на твердой поверхности нагрева . . . . . 262
6.5. Закономерности отрыва паровых пузырей от твердой поверхности . . . . 271

*Глава седьмая.* **Адиабатные двухфазные потоки в каналах** . . . . . 287
7.1. Классификация двухфазных потоков . . . . . 288
7.2. Количественные характеристики двухфазных потоков . . . . . 292
7.3. Структура (режимы течения) двухфазных потоков . . . . . 298
7.4. Расчет истинного объемного паросодержания в потоках квазигомогенной структуры . . . . . 309
7.5. Гидравлическое сопротивление двухфазных потоков квазигомогенной структуры . . . . . 318
7.6. Кольцевые двухфазные течения . . . . . 326
7.7. Эмпирические методы расчета двухфазных потоков . . . . . 331

*Глава восьмая.* **Двухфазные течения в условиях теплообмена** . . . . . 334
8.1. Изменение структуры потока по длине обогреваемого канала . . . . . 334
8.2. Теплообмен при пузырьковом кипении . . . . . 340
8.3. Теплообмен при кипении жидкости в условиях вынужденного движения . . . . . 355
8.4. Кризис теплообмена при кипении жидкостей в каналах . . . . . 361

*Приложение.* Запись основных дифференциальных уравнений в криволинейных координатах . . . . . 366

Список литературы . . . . . 370

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие современные технологии, такие как тепловая и атомная энергетика, химические, в частности нефтехимические производства, трубопроводный транспорт — список легко может быть продолжен — в большой мере основаны на использовании многофазных систем, прежде всего газожидкостных. Процессы в таких системах на протяжении уже нескольких десятков лет активно исследуются в научных лабораториях, что отражено в многочисленных монографиях, перечень которых далеко не исчерпывается в списке литературы к настоящему изданию. Более 25 лет существует специальный международный журнал, посвященный многофазным течениям*, множество статей публикуется в других журналах, в трудах международных и национальных научных конференций.

На этом фоне учебная литература выглядит более чем скромно: фактически на русском языке вышло лишь учебное пособие [17], посвященное процессам в парожидкостных системах. Начальные сведения о двухфазных системах даются в [13, 30, 39]. Между тем в учебных планах ряда инженерных специальностей еще в 70—80 гг. (прошлого века) появились курсы, содержание которых, несмотря на их разнообразие и непохожесть, можно отразить общим названием «Механика многофазных систем».

В Московском энергетическом институте курс «Механика двухфазных систем» преподается начиная с 1975 г. Настоящее учебное пособие отражает опыт преподавания, накопленный за эти годы. Как по построению, так и по содержанию пособие принципиально отличается от [17] или от известной книги Уоллиса [42], в основу которой положен конспект лекций, прочитанный ее автором для студентов. Лишь две последние главы настоящей книги (7 и 8) содержат материал, включаемый в традиционные издания по механике многофазных систем. Ориентируясь на учебные цели, авторы стремились не только к систематизации предлагаемого материала, но и к доказательности основных положений, не избегая необходи-

* International Journal of Multiphase Flow, Elsevier Science Ltd.

мых математических выкладок. При этом приоритет всегда отдавался физической интерпретации получаемых результатов.

Первая глава дает теоретическую основу для всего последующего изложения — общие принципы составления математического описания многофазных систем. При выводе уравнений сохранения массы, импульса, энергии и массы компонента в бинарной смеси, выражающих соответствующие фундаментальные законы сохранения, используется универсальность содержания и формы этих законов при эйлеровом методе описания. Тот же подход использован при формулировке условий на межфазных границах (поверхностях сильных разрывов): универсальные условия совместности в общей форме выводятся из интегрального уравнения сохранения произвольного свойства сплошной среды, а конкретные соотношения для потоков массы, импульса, энергии и массы компонента смеси на границах раздела получаются из общего как частные случаи. В настоящем издании, по-видимому, впервые в учебной литературе показано, что в реальных (необратимых) процессах конечной интенсивности на поверхности, разделяющей конденсированную и газовую фазы, всегда возникает неравновесность, приводящая к появлению конечной скорости скольжения газа относительно обтекаемой поверхности и к неравенству температур соприкасающихся фаз («скачок температур»). При анализе неравновесности на межфазной поверхности в книге используются новые научные результаты, полученные, в частности, Д.А. Лабунцовым и А.П. Крюковым (см. [18]).

В учебном пособии впервые в практике инженерных вузов дается изложение задач равновесия газожидкостных систем, определяемого массовыми и капиллярными силами (глава вторая). Эти задачи актуальны, прежде всего, для космонавтики и поэтому обычно не рассматриваются в книгах, посвященных двухфазным системам «земного назначения». Однако отсутствие ясного представления о содержании задач гидростатики, в которых существенны силы поверхностного натяжения, во многих случаях является причиной ошибок, которые нередко встречаются не только в ответах студентов, но и в научных публикациях.

Из огромного разнообразия задач, актуальных для волновых течений жидкости [35], в книге рассматриваются в первую очередь две классические проблемы устойчивости горизонтальной границы раз-

дела двух невязких жидкостей в отсутствие их относительного движения — неустойчивость Тейлора и при наличии такого движения — неустойчивость Гельмгольца (глава третья). В настоящее время трудно указать какой-либо учебник для технических университетов, где бы давалось достаточно полное изложение этого вопроса. В гл. 3 рассматриваются также капиллярно-гравитационные волны на поверхности тяжелой жидкости, даются краткие сведения о волнах конечной амплитуды, в частности об уединенных волнах (солитонах).

Четвертая глава учебного пособия посвящена течению в жидких пленках. Здесь, как и в предыдущей главе, перед авторами стояла задача отобрать наиболее существенное из чрезвычайно широкого круга вопросов, рассматриваемых в специальной литературе. Мы остановились на анализе течения ламинарных пленок, их устойчивости (в линейном приближении), а также на анализе усредненных характеристик турбулентных пленок. Эти начальные знания гидродинамики пленочного течения дают необходимую основу для изучения более сложных задач, встречающихся в инженерной практике. Четвертая глава знакомит читателя с задачами теплообмена, в данном случае — с классической задачей Нуссельта о конденсации пара на вертикальной плоскости и с задачей о теплообмене при испарении пленки. Рассмотрение этих вопросов оправдано, поскольку жидкие пленки чаще всего встречаются в различного рода теплообменных устройствах.

При моделировании поведения жидкостных систем в каналах или объемах иной геометрической конфигурации во многих случаях невозможно обойтись без информации о закономерностях взаимодействия дискретной частицы (капли или пузырька) с окружающей («несущей») фазой. Некоторые из этих закономерностей рассматриваются в пятой и шестой главах книги. Пятая глава посвящена установившемуся движению дискретной частицы в сплошной среде. Здесь рассмотрены классические задачи об обтекании сферы идеальной жидкостью и вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, поскольку их результаты далее использованы при анализе движения газовых пузырей и жидких капель. Экспериментальные исследования всплывания газовых пузырьков в неподвижной жидкости показывают, что при различных сочетаниях объема пузырька и свойств жидкости (прежде всего, вязкости) изменяются не только закономерности его движения, но и форма. Это обстоятельство де-

лает невозможным установление единого (универсального) закона подъемного движения пузырька в жидкости и определяет целесообразность использования в анализе методов теории подобия. Для различных диапазонов чисел Вебера и Рейнольдса в книге рассматриваются результаты опытных наблюдений и теоретических исследований взаимосвязи размеров, формы и скорости всплывающих пузырьков. Методы анализа движения жидкости со свободной поверхностью применены к гравитационному всплыванию крупных газовых пузырей, имеющих форму сферического сегмента.

В шестой главе рассматривается нестационарное движение газовых (паровых) пузырьков в жидкости. Наряду с классическими задачами Рэлея о сферически симметричном росте и кавитационном схлопывании газовой полости в жидкости здесь рассматривается задача о росте парового пузырька в однородно перегретой жидкости, ранее в учебную литературу не включавшаяся. При анализе динамики паровых пузырьков на твердой стенке, т.е. при кипении, используются результаты оригинальных работ авторов книги, среди которых, в частности, принципиально важным является рассмотрение задачи об отрыве паровых пузырьков от твердой стенки. В пособии дается строгая постановка задач и излагаются приближенные асимптотические решения для отрыва пузырька в предельных случаях высоких и низких приведенных давлений.

Гл. 7 и 8 в наибольшей степени имеют прикладной характер. В гл. 7 вводятся основные количественные характеристики, обычно используемые при одномерном описании двухфазных потоков в каналах: расходные и истинные паросодержания, истинные и приведенные скорости фаз, скорость смеси, коэффициент скольжения, плотность смеси. При рассмотрении методов прогнозирования режимов течения (структуры) двухфазной смеси акцент делается на методы, основанные на определенных физических моделях. Расчет трения и истинного объемного паросодержания дается раздельно для потоков квазигомогенной структуры и кольцевых течений. В гл. 8 описаны двухфазные потоки в трубах в условиях теплообмена. Приводится современная методика расчета теплоотдачи при пузырьковом кипении жидкостей в условиях свободного и вынужденного движения. Сложная проблема кризиса кипения в каналах излагается прежде всего как качественная характеристика закономерностей возникновения пленочного кипения при различных значениях

относительной энтальпии потока. Для кризиса кипения в условиях больших недогревов жидкости до температуры насыщения и высоких скоростей течения рассматривается простая физическая модель, позволяющая получить надежное расчетное соотношение.

В приложении приводятся сведения об ортогональных криволинейных координатах и даются выражения для некоторых дифференциальных операторов поля в сферической и цилиндрической системах координат.

Такая структура и содержание учебного пособия, в главных чертах, были заложены еще в 70-е годы под руководством и при непосредственном участии Дмитрия Александровича Лабунцова (1929—1992 гг.). Вернувшись в 1973 г. на работу в МЭИ (в качестве заведующего кафедрой) он горячо поддержал включение в учебные планы двух инженерных специальностей курса «Механика двухфазных систем». Вместе с тем именно Лабунцов предложил решительно отойти от того содержания курса, которое складывалось в те годы под влиянием отечественных [16] и зарубежных [37, 42, 74] монографий. В 1975 г. в течение одного семестра Дмитрий Александрович прочитал первую часть курса, соответствующую первым трем главам настоящей книги. Вторую часть (осенний семестр 1975 г.) готовить и впервые читать довелось мне, но Лабунцов тогда посетил все мои лекции и его редкие и очень деликатные по форме замечания многое значили для дальнейшей работы над курсом. В условиях полного отсутствия какой-либо учебной литературы для нас было важным издать внутривузовским изданием в МЭИ учебные пособия [19—21], к которым позднее добавилось [23]. Содержание этих пособий в значительной мере вошло в гл. 1—3, 5, 6 настоящей книги.

В последующем я в течение многих лет читал «Механику двухфазных систем» в МЭИ и читаю аналогичный по содержанию курс для студентов МФТИ, проходящих специальную подготовку в ИБРАЭ РАН (Институт проблем безопасного развития атомной энергетики). Безусловно, в некоторых разделах курса за эти годы появился материал, отражающий новые научные результаты, заново написаны гл. 4, 7, 8; многие вопросы изложены в новой редакции. Но в целом книга выходит, на мой взгляд, такой, какой она могла бы выйти при жизни Д. А. Лабунцова. В нее без существенных изменений вошли разделы, написанные им для упомянутых выше учебных пособий, его черновые материалы использованы при написании гл. 4.

Книга адресована, в первую очередь, студентам технических университетов, специализирующимся в области тепловой и атомной энергетики, авиационной и космической техники, химической технологии; она будет полезна студентам физических специальностей классических университетов. Как учебник она естественным образом дополняется изданным в МЭИ сборником задач А.С. Куликова и А.П. Крюкова*, представляющим расчетные задания и соответствующие методические указания по большей части разделов курса.

Думаю, что необходимую для себя информацию найдут в этой книге аспиранты соответствующих научных специальностей, а также научные сотрудники.

Вместе с тем, я с благодарностью готов принять замечания и пожелания по содержанию, построению и оформлению книги, которые будут особенно ценны в случае последующего ее переиздания. Отзывы и пожелания следует направлять в Издательство МЭИ по адресу: 111250, Москва, Красноказарменная, 14.

Автор признателен рецензентам академику РАН А.И. Леонтьеву, доктору техн. наук Ю. А. Зейгарнику и профессору В.И. Хвесюку за поддержку и полезные советы.

*В.В. Ягов*

* А.С. Куликов, А.П. Крюков. Механика двухфазных систем: Сборник задач. М.: Издательство МЭИ, 1999.

Глава первая

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ

## 1.1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1.1. ОБЪЕКТ АНАЛИЗА

Природные явления и техника дают огромное число примеров многофазных систем. Касаясь лишь технических устройств, укажем на генерацию и последующую конденсацию пара в установках тепловой и атомной энергетики, процессы дистилляции, ректификации, выпарки, используемые в химической технологии, холодильной и криогенной технике, пищевых производствах. Нетрудно убедиться, что различные типы многофазных (гетерофазных) систем (жидкость—газ, жидкие эмульсии, потоки жидкости или газа с твердыми частицами) встречаются чаще, чем однофазные. В настоящем издании предметом анализа будут в основном *двухфазные системы*.

На рис. 1.1, *а* и *б*, изображены типичные примеры двухфазных систем: показано движение газовых (или паровых) пузырьков в потоке жидкости и расслоенный газожидкостный поток. При анализе такого рода гетерофазных систем принимаются следующие предположения:

1. Каждая фаза является сплошной средой. Она занимает макроскопические объемы пространства.

2. Межфазные границы интерпретируются как геометрические поверхности. При переходе через границу свойства (плотность, внутренняя энергия, энтальпия и т.п.) изменяются скачком.

В общем случае в системе может происходить обмен массой, импульсом и энергией как между отдельными фазами, так и внутри

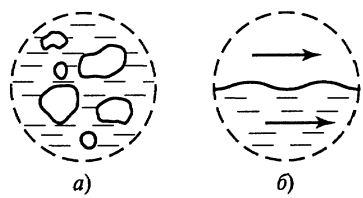



**Рис. 1.1. Примеры объектов анализа механики гетерофазных систем**

*а* — пузырьковый режим течения двухфазной смеси; *б* — расслоенный газожидкостный поток

каждой из фаз. Под механикой гетерофазных систем будем понимать не только движение и динамическое взаимодействие фаз, но и процессы массо- и энергообмена. Следует отметить, что эти явления взаимосвязаны.

В пределах каждой отдельной фазы правомерны обычные дифференциальные уравнения сплошной среды, отражающие фундаментальные законы сохранения массы, импульса и энергии. Далее их будем просто именовать *уравнениями сохранения.* На межфазных поверхностях обязаны выполняться определенные граничные условия, отражающие эффекты взаимодействия фаз. Эти условия кратко будем именовать *условиями совместности.*

Совокупность систем уравнений сохранения для каждой из фаз и условий совместности составляет *математическое описание* (теоретическую основу) механики гетерофазных систем.

Для простых систем математическое описание может быть проинтегрировано. В более сложных случаях получение аналитических решений сопряжено со значительными математическими трудностями.

Математическое описание гетерофазных систем является основой для анализа условий подобия двухфазных потоков.

### 1.1.2. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Понятие движения бессодержательно, если не указана система отсчета (система координат), относительно которой происходит перемещение объекта исследования. Выбор системы координат зависит от воли исследователя или местонахождения наблюдателя. Поэтому один и тот же процесс может быть описан в разных системах отсчета. Часто системы отсчета, удобные для лабораторного изучения процесса, называют *лабораторными.* В одних случаях в качестве лабораторной системы координат может применяться система отсчета, «привязанная» к поверхности Земли, в других — система отсчета, неподвижная относительно центра инерции автономного объекта (спутника, самолета и т.д.). Часто удобно анализировать процессы в системе отсчета, «закрепленной» на граничной поверхности области протекания явления, т.е. на стенках канала, на поверхности сосуда и т.д.

Однако следует отметить, что изучаемые движения и процессы управляются физическими законами, которые не могут зависеть от нашего субъективного выбора системы отсчета (или точки наблюдения), что составляет содержание принципа относительно-

сти. Это положение открывает возможность применения, кроме естественных лабораторных систем отсчета, также иных, специфических для каждой проблемы координатных систем, удобных для анализа ее отдельных деталей. В частности, при описании двухфазных потоков в качестве таких специфических систем могут выступать системы, привязанные к центру инерции одной из фаз, к поверхности раздела фаз и т.д. Такие системы называют *собственными системами отсчета.*

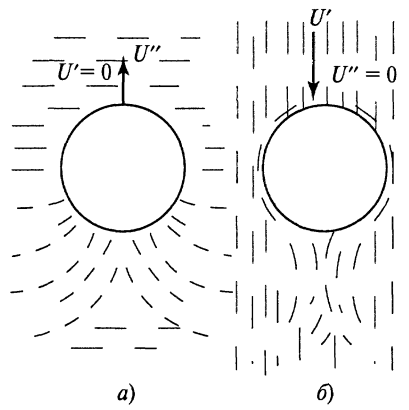



**Рис. 1.2. Схема движения газового пузырька в жидкости в лабораторной (*а*) и собственной (*б*) системах отсчета**

В качестве примера (рис. 1.2, *а*) показана картина всплывания газового пузырька в спокойной жидкости при наблюдении из системы отсчета, в которой жидкость и стенки заключающие ее сосуда неподвижны (лабораторная система координат). Для этой задачи можно также выбрать систему отсчета, привязанную к центру инерции пузырька. Тогда картина процесса в этой собственной системе координат примет вид рис. 1.2, *б*: вместо стационарного всплывания неподвижный пузырек обтекается встречным потоком жидкости.

Механика явления одинакова, но для описания процесса случай (*б*) имеет ряд преимуществ технического характера.

### 1.1.3. МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ

Кроме выбора системы отсчета в механике сплошных сред принципиальное значение имеет сам метод описания процессов. Рассмотрим этот вопрос. Пусть фиксирована некоторая декартова система отсчета $x_1$, $x_2$, $x_3$ или $\{x_k\}$, $k = 1, 2, 3$. В пространстве $\{x_k\}$ происходит движение сплошной среды.

Один из возможных методов анализа и описания заключается в том, что в пространстве $\{x_k\}$ фиксируется некоторый контрольный объем $V$ с поверхностью $F$. Этот объем неподвижен (в системе отсчета $\{x_k\}$) и является лишь воображаемым контрольным элементом

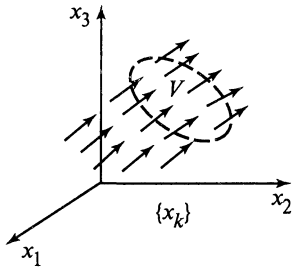



**Рис. 1.3. Эйлеров контрольный объем в системе координат $\{x_k\}$**

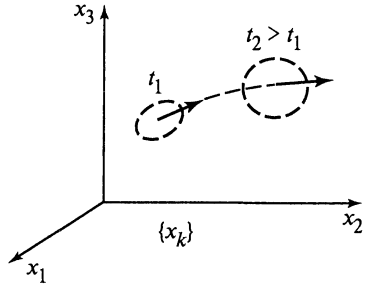



**Рис. 1.4. Лагранжева контрольная масса в системе координат $\{x_k\}$**

пространства. Среда свободно проходит через его границы (рис. 1.3). Такой подход называют описанием «с точки зрения *Эйлера*».

Другой метод принадлежит *Лагранжу*. В той же системе отсчета $\{x_k\}$ можно выделить в качестве объекта наблюдения определенную индивидуальную порцию материи (вещества). Эта контрольная масса вещества движется относительно системы отсчета $\{x_k\}$. В разные моменты ее объем в общем случае может быть разным; ее граница перемещается в пространстве и деформируется во времени. Важно отметить, что эта граница индивидуальной порции вещества макроскопически непроницаема. Условная графическая интерпретация такого подхода показала на рис. 1.4, где для двух моментов времени показаны пространственное расположение и форма индивидуальной порции вещества, рассматриваемой в качестве объекта анализа. Такой подход называют описанием «с точки зрения *Лагранжа*».

Различие подходов состоит в следующем:

эйлеров контрольный объем проницаем для вещества и неподвижен в пространстве $\{x_k\}$;

лагранжева контрольная масса вещества неизменна, ее поверхность макроскопически непроницаема, она перемещается в пространстве $\{x_k\}$.

В настоящем курсе будет отдаваться предпочтение эйлерову методу описания как практически более рациональному.

### 1.1.4. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

В настоящем издании используется в основном математический аппарат, к практическому применению которого студенты подготов-

лены обычным вузовским курсом высшей математики. Некоторая специфика будет состоять в широком использовании векторных величин и соответствующих векторных дифференциальных операторов, а также в использовании в различных действиях с такими величинами метода «немого суммирования», который был предложен А. Эйнштейном. Сущность метода будет ясна из нижеследующего. Векторный дифференциальный оператор $\nabla$ («набла») имеет смысл вектора с проекциями (в системе координат $\{x_k\}$):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{i}_3 = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{i}_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{i}_k,$$

где $\mathbf{i}_k$ ($k = 1, 2, 3$) — единичные ортогональные векторы.

В последнем равенстве использован метод немого суммирования по дважды повторяющемуся индексу. Использование этого метода для записи в проекциях произвольного вектора $\mathbf{A}$ дает

$$\mathbf{A} = A_k \mathbf{i}_k,$$

т.е. немое суммирование позволяет опускать знак суммирования, что заметно упрощает форму записи, а во многих случаях — и математические выкладки.

В применении к вектору $\mathbf{A}$ оператор $\nabla$ можно представить как скалярное произведение

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) \equiv \operatorname{div}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{i}_k \cdot A_m \mathbf{i}_m\right) = \frac{\partial A_k}{\partial x_k}.$$

Здесь использовано то обстоятельство, что произведение

$$(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m) \equiv \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m; \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases}$$

где $\delta_{km}$ — символ Кронекера (единичный тензор второго ранга).

Заметим, что повторяющиеся индексы можно обозначать любой буквой, т.е.

$$A_k \mathbf{i}_k \equiv A_m \mathbf{i}_m \equiv A_n \mathbf{i}_n \equiv \ldots .$$

Применение $\nabla$ к скалярной функции дает градиент этой функции

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\mathbf{i}_k.$$

Оператор Лапласа $\nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi$ можно представить как

$$\nabla^2\varphi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = (\nabla \cdot \nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_k}.$$

И, наконец, укажем, что

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},$$

при этом произвольная проекция вектора $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ выражается через единичный тензор Леви-Чивита $\varepsilon_{ijk}$ как

$$\mathrm{rot}_i\,\mathbf{A} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k.$$

(Необходимые сведения о тензорном анализе можно получить, например в [34].)

### 1.1.5. МОДЕЛИ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ

В общем случае положение и форма межфазных границ в многофазных системах не могут быть определены заранее. Этим гетерофазные системы принципиально отличаются от гомогенных, для которых границы области протекания процесса, как правило, бывают известны (твердые ограничивающие поверхности), и на них задаются граничные условия — условия однозначности математического описания процесса. В многофазных (в частности, в двухфазных газожидкостных) системах эволюция межфазных границ могла бы быть определена только в процессе решения задачи. Это означает, что в исходном математическом описании условия совместности могут быть записаны для границ раздела неизвестной формы. В настоящее время имеются лишь единичные примеры численного решения задач механики газожидкостных систем в такой строгой постановке, когда форма межфазной границы не задается, а определяется в процессе решения. При этом речь идет о достаточно простых задачах, например о росте одиночного парового пузырька на твердой обогреваемой поверхности в первоначально неподвижной жидкости.

Для решения прикладных задач механики многофазных систем вводят различные упрощающие модели. Простейшая из них — *гомогенная модель*, суть которой состоит в замене реальной многофазной среды некоторой гипотетической с эффективными свойствами: плотностью смеси, скоростью смеси, вязкостью смеси. К та-

кой гомогенной среде применяют обычные уравнения сохранения (как к однофазной жидкости). Чаще всего гомогенную модель используют в одномерном приближении, когда параметры двухфазного потока усредняются по сечению канала. Возможности этой модели обсуждаются в гл. 7.

*Модель раздельного течения* представляет собой нечастый случай, при котором реальная картина газожидкостного течения воспроизводится в модели достаточно точно. Взаимодействие газового (парового) потока со стекающей пленкой жидкости, кольцевые двухфазные потоки, в которых преобладающая часть жидкости течет в виде тонкой пленки по стенке, а в ядре потока движется газ, расслоенные течения в горизонтальных каналах — это те задачи, для которых модель раздельного течения вполне уместна. В рамках этой модели уравнения сохранения записываются отдельно для газовой и жидкой фаз, при этом форма границы раздела предполагается известной (плоской или цилиндрической). Реальная картина и в этих видах течений, как правило, намного сложнее той, что принимается в модели (в ней обычно не учитывают наличие жидких капель в потоке газа, волны на межфазной поверхности), но модель раздельного течения здесь, конечно, значительно ближе к реальности, чем гомогенная.

Широкое применение вычислительной техники в проектных расчетах сделало чрезвычайно популярной *модель многоскоростного континуума*. Согласно этой модели каждая фаза заполняет собою один и тот же объем, занятый многофазной смесью. Для каждой фазы определяется плотность, отнесенная к полному объему смеси, скорость и другие параметры. Таким образом, в каждой точке объема, занятого смесью, состоящей из $N$ фаз, определяют $N$ плотностей, $N$ скоростей и т.д. [30]. При таком подходе основные трудности расчета переносятся на моделирование межфазного обмена массой, импульсом и энергией. Для такого моделирования требуется вводить гипотезы о форме и площади поверхности межфазных границ и закономерностях переноса через эти границы. Наиболее естественным здесь является использование *метода контрольной ячейки*, т.е. анализ такой структуры рассматриваемой многофазной системы, которая моделирует существенные характеристики этой системы. В пределах контрольной ячейки форма межфазной поверхности обычно идеализируется, что делает возможным получать строгие

решения. При этом используется тот подход к анализу, который в принципиальных чертах сформулирован в п. 1.1.1. Именно этот подход выявляет те фундаментальные закономерности процессов, без знания которых невозможно построение надежных моделей двухфазных систем для инженерных расчетов.

## 1.2. ОБЩАЯ ФОРМА ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Содержание законов сохранения массы, импульса и энергии при эйлеровом методе описания имеет идентичный характер. Общая формулировка законов сохранения:

полное изменение за единицу времени некоторого свойства $A$ (массы, импульса, энергии) внутри эйлерова контрольного объема $V$ равно суммарному притоку этого свойства через поверхность $F$ плюс возможное объемное возникновение свойства $A$ внутри объема $V$.

Менее строго это значит, что изменение свойства $A$ определяется его внешним притоком в контрольный объем и возможным внутренним возникновением в объеме. Свойство $A$ при этом рассматривается как удельная (на единицу объема), аддитивная величина.

Аналитически эта формулировка выражается так:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_F J_k\,\mathrm{d}F_k + \int_V \dot{N}_A\,\mathrm{d}V. \qquad (1.1)$$

Слева — величина, определяющая изменение $A$ внутри объема $V$ в единицу времени. Величина $\dot{N}_A$ — скорость объемного возникновения $A$ в единице объема, так что второе слагаемое справа определяет внутреннее производство $A$ в контрольном объеме. Первый интеграл правой части характеризует суммарный приток свойства $A$ через поверхность $F$. Действительно, произведение $J_k\mathrm{d}F_k$ есть индексная форма записи (с использованием суммирования по дважды повторяющемуся индексу) скалярного произведения векторов $(\mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{F})$. Вектор $\mathbf{J}$ характеризует плотность потока свойства $A$; $\mathrm{d}\mathbf{F}$ — направленный элемент поверхности, т.е. вектор с модулем, равным площади поверхности $\mathrm{d}F$, и положительным направлением, совпадающим с внешней нормалью к поверхности (рис. 1.5).

Таким образом, произведение $J_k \mathrm{d}F_k = (\mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F})$ есть «убыль» свойства $A$ из объема $V$ через площадку $\mathrm{d}F$, а взятый со знаком минус интеграл от этого произведения по всей поверхности $F$ соответствует внешнему «притоку» свойства $A$ в контрольный объем.

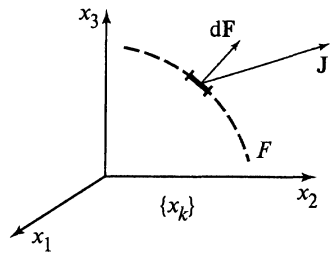



**Рис. 1.5. Схема, поясняющая смысл произведения $J_k \mathrm{d}F_k$ в уравнении (1.1)**

Соотношение (1.1) будем называть *общей формулировкой законов сохранения в интегральном виде*, или *интегральным уравнением сохранения в общей форме.*

Если внутри контрольного объема среда однородна (т.е. весь объем находится в пределах одной фазы), то из соотношения (1.1) можно получить общее уравнение законов сохранения в дифференциальной форме.

В сплошной однородной среде все характеристики меняются непрерывным образом. В частности, $J_k$ будут непрерывными и дифференцируемыми функциями координат. При выполнении последнего условия справедлива формула Остроградского—Гаусса (переводящая интеграл по поверхности в интеграл по объему и обратно)

$$\int_F J_k \, \mathrm{d}F_k = \int_V \frac{\partial J_k}{\partial x_k} \, \mathrm{d}V.$$

(Для запоминания можно пользоваться правилом $\mathrm{d}F_k \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \mathrm{d}V$).

Используя формулу Остроградского—Гаусса и учитывая произвольность объема, получаем из (1.1):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial J_k}{\partial x_k} + \dot{N}_A. \qquad (1.1a)$$

Это соотношение определяет *общую формулировку законов сохранения в дифференциальном виде*, или *дифференциальное уравнение сохранения в общей форме.* Из самого метода вывода (1.1а) ясно, что это соотношение и каждое его слагаемое имеют такой же смысл, что и исходное уравнение (1.1). Различие лишь в том, что в (1.1а) все величины относятся к бесконечно малому эйлерову

контрольному объему. В частности, $-\dfrac{\partial J_k}{\partial x_k}$ представляет суммарное поступление свойства $A$ через поверхность внутрь бесконечно малого эйлерова объема.

Важно иметь в виду, что уравнение (1.1) имеет более общую область применения. Оно правомерно и тогда, когда внутри эйлерова объема находятся две фазы (т.е. среда неоднородна). В этом случае интегралы по объему разбиваются на части, охватывающие области отдельных фаз, интеграл по поверхности подразделяется на две части, отвечающие также двум фазам. Внутри контрольного объема располагается также участок межфазной поверхности, на котором возможно возникновение свойства $A$, учитываемое в последнем слагаемом (1.1).

Общая формулировка законов сохранения в виде уравнений (1.1) или (1.1а) позволяет достаточно просто получать соотношения для законов сохранения массы, импульса, энергии. При этом требуется лишь расшифровка величин $A$, $J_k$, $\dot{N}_A$.

### 1.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

Для записи закона сохранения массы нужно принять: $A = \rho$ — плотность (масса вещества в единице объема); $\mathbf{J} = \rho\mathbf{u}$ — массовая скорость вследствие макроскопического движения среды; $\mathbf{u}$ — макроскопическая скорость среды; $\dot{N}_A = 0$ — масса не может возникать или исчезать (рассматривается нерелятивистская механика).

Тогда из (1.1) и (1.1а) имеем:

интегральное уравнение сохранения массы

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_F \rho u_k\,\mathrm{d}F_k = 0; \tag{1.2}$$

дифференциальное уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0. \tag{1.2а}$$

Закон сохранения массы позволяет получить полезное для последующих преобразований соотношение. Вспомним сначала понятие субстанциональной производной. Это понятие соответствует методу описания движения сплошной среды по Лагранжу. Пусть индивидуальная дифференциально малая масса вещества в момент времени $t$ находится вокруг точки $x_k(t)$ пространства. В следующие моменты времени контрольная масса занимает другие области пространства, причем $x_k(t)$ могут всюду рассматриваться как координаты контрольной массы. Если состояние вещества характеризуется величиной $B$ (плотность, внутренняя энергия, температура и т.д.), то для лагранжевой контрольной массы

$$B = B[t, x_k(t)].$$

Полная (субстанциональная, индивидуальная) производная от $B$ по времени по правилу дифференцирования сложной функции имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial x_k}{\partial t} = u_k \text{ — } k\text{-я проекция вектора скорости.}$$

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B}{\partial t} + u_k\frac{\partial B}{\partial x_k},$$

где первое слагаемое в правой части — это локальная производная по времени, а второе — конвективная производная.

Поскольку в нашем учебном пособии предпочтение отдано эйлерову методу описания, субстанциональная производная будет использоваться в основном в промежуточных выкладках. Пусть, в частности, $B$ — некоторое удельное (на единицу массы) свойство среды. Тогда использование для этого свойства общей формулировки

законов сохранения (1.1а) во многих случаях приведет к появлению выражения вида:

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k B)}{\partial x_k}.$$

Элементарные преобразования и использование закона сохранения массы (1.2а) приводят к выражению

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k B)}{\partial x_k} = \rho\left[\frac{\partial B}{\partial t} + u_k \frac{\partial B}{\partial x_k}\right] + B\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k}\right] =$$

$$= \rho \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.3)$$

Если, в частности, $B$ — удельный объем среды, т.е.

$$B = v \equiv \frac{1}{\rho},$$

то из (1.3) следует:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Полученное соотношение позволяет дать определенное физическое толкование дивергенции скорости: дивергенция скорости представляет собой относительное субстанциональное изменение удельного объема среды.

Используя субстанциональную производную, уравнение (1.2а) можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \qquad (1.2б)$$

Для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$) имеем

$$\int_F u_k \, \mathrm{d}F_k = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Последнее соотношение — это известное дифференциальное уравнение неразрывности (сплошности) несжимаемой среды.

**Пример.** Применим соотношение (1.2) для случая стационарного одномерного течения среды через канал переменного сечения (рис. 1.6). Выделим два сечения *I*—*I* и *II*—*II* площадью $F_I$ и $F_{II}$.

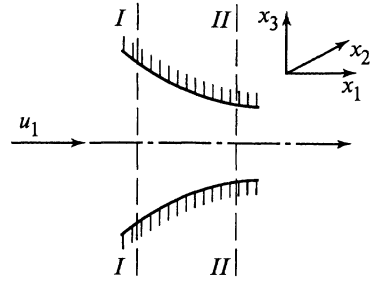



**Рис. 1.6. Схема одномерного течения в канале переменного сечения**

Вследствие предположения о стационарности первое слагаемое в (1.2) равно нулю, второе слагаемое:

$$-\int_F \rho u_k \, dF_k = -\left( \int_{F_I} \rho u_k \, dF_k + \int_{F_{II}} \rho u_k \, dF_k \right) =$$

$$= (\rho u F)_I - (\rho u F)_{II} = 0 .$$

Итак, в рассматриваемом случае имеем

$$\rho u F = \text{const},$$

где const = $G$ — массовый расход вещества.

(Конечно, это соотношение элементарно и может быть записано сразу же без вывода.)

## 1.4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

### 1.4.1. ВЫВОД В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

Импульс единицы объема сплошной среды определяется как $\rho \mathbf{u}$, а вектор скорости $\mathbf{u}$ можно толковать как импульс единицы массы.

Импульс единицы объема $\rho \mathbf{u}$ есть вектор. Векторное уравнение баланса импульса можно разложить на три уравнения баланса проекций импульса на оси $x_k$. Рассмотрим проекцию импульса на одну из осей $\rho u_l$. Величина $\rho u_l$ есть скаляр. Для нее могут быть применены общие соотношения закона сохранения (1.1) и (1.1а).

Здесь следует принять: $A = \rho u_l$ — $l$-проекция импульса единицы объема; $J_k = \Pi_{kl}$ — тензор плотности потока импульса (подробнее — ниже); $\dot{N}_A = \rho g_l$ — возникновение импульса вследствие действия внешнего поля массовых сил $\mathbf{g}$.

Под массовыми силами мы будем понимать только силы гравитации (так что в невесомости $\dot{N}_A = 0$). В общем случае в ускорение $\mathbf{g}$ могут давать вклад массовые силы другой природы (центробежные, электрические, магнитные).

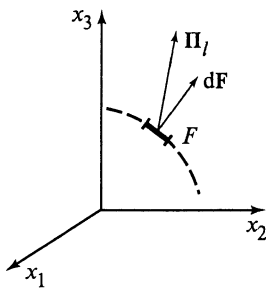



**Рис. 1.7. Схема переноса *l*-проекции импульса через элементарную площадку d*F***

Итак, имеем:

интегральное уравнение закона сохранения импульса

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_F \Pi_{kl}\,\mathrm{d}F_k + \int_V \rho g_l\,\mathrm{d}V; \qquad (1.4)$$

дифференциальное уравнение сохранения импульса

$$\frac{\partial(\rho u_l)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial x_k} = \rho g_l. \qquad (1.4а)$$

Пояснений требует величина $\Pi_{kl}$. Ее смысл ясен из рис. 1.7. Если вектор плотности потока $l$-проекции импульса в некоторой точке поверхности $F$ определяется величиной $\Pi_l$, то перенос $l$-проекции импульса через бесконечно малую площадь поверхности d$F$ в окрестности рассматриваемой точки выражается скалярным произведением

$$\Pi_l\,\mathrm{d}\mathbf{F} = \Pi_{kl}\,\mathrm{d}F_k.$$

Тензор $\Pi_{kl}$ может рассматриваться как $k$-проекция вектора $\Pi_l$. Поскольку для любой другой проекции импульса, например $\rho u_m$, вектор плотности потока $\Pi_m$ отличен от $\Pi_l$, т.е. $\Pi_{km} \neq \Pi_{kl}$, то становится понятной неизбежность использования тензорных величин в уравнении сохранения импульса. В рассматриваемом случае первый индекс $k$ у тензора $\Pi_{kl}$ определяет направление нормали к площадке, а второй $l$ показывает, какая из проекций импульса через эту площадку переносится.

### 1.4.2. ТЕНЗОРЫ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИМПУЛЬСА, ДАВЛЕНИЙ И ВЯЗКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В сплошной среде перенос импульса через контрольную эйлерову поверхность осуществляется конвективным и молекулярным путем. В соответствии с этим тензор плотности потока импульса $\Pi_{kl}$ подразделяется на две части:

$$\Pi_{kl} = \rho u_k u_l + P_{kl}, \qquad (а)$$

где $\rho u_k u_l$ — часть потока импульса, переносимого конвективным путем, т.е. вследствие макроскопического движения среды; $P_{kl}$ — часть потока импульса, переносимого молекулярным путем, т.е. за счет теплового движения и силового взаимодействия молекул среды. Эту часть тензора плотности потока импульса называют *тензором давлений*. Связь тензора давлений с другими параметрами среды определяется *моделью* этой среды. В невязкой среде (идеальная жидкость)

$$P_{kl} = p\delta_{kl}, \qquad (б)$$

где $p$ — давление (скаляр);

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 \text{ при } k = l; \\ 0 \text{ при } k \neq l \end{cases}$$ — введенный ранее единичный тензор (символ или дельта Кронекера).

Ясно, что в идеальной жидкости предполагаются только нормальные напряжения.

В реальной (вязкой) среде в выражении (б) для тензора давлений необходимо учесть вязкие напряжения

$$P_{kl} = p\delta_{kl} - \tau_{kl}, \qquad (в)$$

где $\tau_{kl}$ — *тензор вязких напряжений*, знак «минус» отражает связь вязких напряжений именно с потерей импульса за счет внутреннего трения.

Тензор потока импульса симметричен, т.е.

$$\Pi_{kl} = \Pi_{lk} \quad (\tau_{kl} = \tau_{lk})$$

(так как внутри текучей среды не могут существовать внутренние неуравновешенные моменты импульса).

Вследствие симметрии всего имеется шесть различных компонент $\Pi_{kl}$: три нормальных $\Pi_{11}$, $\Pi_{22}$, $\Pi_{33}$ и три касательных $\Pi_{12} = \Pi_{21}$, $\Pi_{13} = \Pi_{31}$, $\Pi_{23} = \Pi_{32}$.

Развернутые выражения нормальных и касательных компонент имеют следующий вид:

$$\Pi_{11} = \rho u_1^2 + p - \tau_{11};$$

$$\Pi_{12} = \Pi_{21} = \rho u_1 u_2 - \tau_{12} \text{ и т.д.}$$

*Тензор вязких напряжений* $\tau_{kl}$ возникает из-за наличия в потоке относительного движения соседних слоев среды, что возможно

лишь при наличии градиентов скорости. Если эти градиенты не слишком велики, то мерой такого движения являются производные вида $\partial u_k / \partial x_l$, т.е. первые производные скорости по координате, а зависимость тензора вязких напряжений от этих производных должна быть линейной. При этом следует учитывать, что величина $\tau_{kl}$ симметрична. Наиболее общий возможный вид такого линейного соотношения

$$\tau_{kl} = a\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) + b\,\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\,\delta_{kl}. \qquad \text{(г)}$$

В несжимаемой жидкости $\partial u_m / \partial x_m = 0$. Поэтому в последнем соотношении $a = \mu$ — обычный коэффициент динамической вязкости. В общем случае сжимаемой среды определение второго коэффициента $b$ в соотношении (г) требует дополнительных соображений. Обычно постулируется, что среднеарифметическое трех нормальных компонент тензора давлений $P_{kk}$ равно давлению среды:

$$\frac{1}{3}\,(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = \frac{1}{3}\,P_{kk} = p. \qquad \text{(д)}$$

Этой предпосылки достаточно для определения коэффициента $b$. Действительно из (в) и (д) имеем

$$\frac{1}{3}\,\tau_{kk} = 0.$$

Это означает, что сумма трех нормальных компонент тензора вязких напряжений равна нулю (хотя каждая из этих компонент $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ в общем случае отлична от нуля).

Используя последнее равенство в (г), получаем

$$2\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + b\,\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\,\delta_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\,(2\mu + 3b) = 0$$

или

$$b = -\frac{2}{3}\,\mu.$$

Таким образом,

$$\tau_{kl} = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{kl} \right). \qquad \text{(е)}$$

Это известный *обобщенный закон вязкого трения Ньютона.*

Физически более строгим было бы введение коэффициента «второй вязкости» [24] по соотношению:

$$\frac{1}{3} P_{kk} = p - \mu' \frac{\partial u_m}{\partial x_m}.$$

Можно показать, однако, что влияние члена $\mu' \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m}$ будет существенным лишь в условиях экстремально быстрого изменения плотности вещества (типа ситуации в ударных волнах). Однако из-за отсутствия обоснованных теоретических и надежных опытных данных в отношении $\mu'$ даже в газовой динамике обычно полагают $\mu' = 0$.

### 1.4.3. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

С учетом отношения (а) уравнение (1.4а) принимает вид

$$\frac{\partial (\rho u_l)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k u_l)}{\partial x_k} = - \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l.$$

Используя следствие из закона сохранения массы (1.3) (здесь $B = u_l$), находим

$$\rho \frac{\mathrm{d} u_l}{\mathrm{d} t} = - \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l. \qquad \text{(1.4б)}$$

Дальнейшие преобразования связаны с рассмотрением выражения для тензора давлений. Соотношение (в) дает

$$\rho \frac{\mathrm{d} u_l}{\mathrm{d} t} = - \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l. \qquad \text{(1.4в)}$$

Это уравнение известно как дифференциальное *уравнение сплошной среды в напряжениях.* (При выводе этого уравнения учтено, что $\dfrac{\partial(p\delta_{kl})}{\partial x_k} = \dfrac{\partial p}{\partial x_l}$).

Подстановка в (1.4в) выражения для тензора вязких напряжений согласно соотношению (е) при $\mu$ = const приводит к *уравнению Навье—Стокса* для вязкой сжимаемой жидкости

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_l}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p}{\partial x_l} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \rho g_l. \qquad (1.4г)$$

В случае несжимаемой жидкости второе слагаемое в круглых скобках обращается в нуль.

Наконец, приведем векторную форму уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{g}. \qquad (1.4д)$$

**Пример.** Учитывая (1.4) и остальные соотношения § 1.4, записать выражение для перепада давлений при одномерном стационарном течении сжимаемой невязкой среды в канале постоянного сечения (рис. 1.8).

Применяя к контрольному объему *I—II* соотношение (1.4), имеем

$$-\int_F \Pi_{kl}\,\mathrm{d}F_k = -\left(\int_{F_I}\Pi_{11}\,\mathrm{d}F_1 + \int_{F_{II}}\Pi_{11}\,\mathrm{d}F_1\right) = F[(\Pi_{11})_I - (\Pi_{11})_{II}] = 0.$$

Но

$$\Pi_{11} = \rho u_1 u_1 + p,$$

поэтому

$$p_I - p_{II} = (\rho u_1^2)_{II} - (\rho u_1^2)_I.$$

Используя уравнение сохранения массы

$$F(\rho u_1)_I = F(\rho u_1)_{II} = G,$$

где $G$ — массовый расход, имеем окончательно

$$p_I - p_{II} = \frac{G}{F}(u_{II} - u_I).$$

Таким образом, если скорость увеличивается (плотность падает), то $p_I > p_{II}$, если скорость падает (плотность растет), то $p_I < p_{II}$.

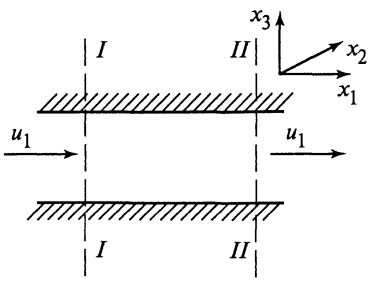



**Рис. 1.8. Схема одномерного течения в канале постоянного сечения**

## 1.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

### 1.5.1. ВЫВОД В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

В движущейся сплошной среде вследствие внутреннего вязкого трения часть механической энергии переходит в тепло. Это явление называют вязкой диссипацией механической энергии. Вместе с тем в условиях теплообмена происходит тепловое расширение отдельных участков среды; при этом внутренняя (тепловая) энергия среды частично переходит в механическую энергию движения.

В силу этого при формулировке закона сохранения энергии следует рассматривать полную энергию среды

$$e_* = e + \frac{1}{2}\,\mathbf{u}^2,$$

т.е. сумму внутренней $e$ и кинетической $\frac{1}{2}\,\mathbf{u}^2$ энергии единицы массы вещества. Аналогично вводится понятие полной энтальпии среды

$$h_* = h + \frac{1}{2}\,\mathbf{u}^2 = e_* + p/\rho,$$

где $p$ и $\rho$ — давление и плотность среды; $h = e + p/\rho$ — обычная энтальпия среды.

Для перехода от общих соотношений (1.1) и (1.1а) к уравнению закона сохранения энергии необходимо принять: $A = \rho\, e_*$ — полная энергия единицы объема; $\mathbf{J} = \mathbf{E}$ ($J_k = E_k$) — плотность потока энергии; $\dot{N}_A = \rho g_k u_k + \dot{q}_V$, где $\rho\, u_k\, g_k$ — мощность внешней массовой силы (силы тяжести), которая в нашем рассмотрении выступает как источник энергии (в невесомости эта часть $\dot{N}_A = 0$); $\dot{q}_V$ — внутренние источники тепла (эта часть $\dot{N}_A$ актуальна, например, для электропроводных жидкостей).

Имеем:

интегральное уравнение сохранения энергии

$$\int_V \frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t}\,\mathrm{d}V = -\int_F E_k\,\mathrm{d}F_k + \int_V (\rho g_k u_k + \dot{q}_V)\,\mathrm{d}V; \qquad (1.5)$$

дифференциальное уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t} + \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \rho g_k u_k + \dot{q}_V. \qquad (1.5а)$$

### 1.5.2. ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

Рассмотрим поток энергии $E_k$ (точнее, $k$-ю проекцию вектора плотности потока энергии). Через поверхность эйлерова контрольного объема энергия подводится:

за счет *конвективного* потока полной энергии вследствие макроскопического движения среды $\rho u_k e_*$;

вследствие работы сил давления и вязкого напряжения в единицу времени $u_l P_{kl}$;

за счет молекулярного механизма переноса энергии $q_k$ (в однокомпонентной среде эта часть потока энергии называется потоком теплоты и согласно закону Фурье определяется как $q_k = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x_k}$, где $\lambda$ — теплопроводность).

Таким образом, плотность потока энергии (в проекции на ось $x_k$)

$$E_k = \rho u_k e_* + u_l P_{kl} + q_k. \qquad (а)$$

Используя развернутую запись тензора давлений $P_{kl}$, получаем другое выражение для плотности потока энергии. Действительно,

$$\rho u_k e_* + u_l P_{kl} = \rho u_k e_* + u_l p \delta_{kl} - u_l \tau_{kl} = \rho u_k (e_* + p/\rho) - u_l \tau_{kl}.$$

Вспоминая определение полной энтальпии среды, получаем

$$E_k = \rho u_k h_* - u_l \tau_{kl} + q_k. \qquad (б)$$

Согласно последнему соотношению поток энергии через любой элемент контрольной поверхности состоит из конвективного потока полной энтальпии среды, работы вязких напряжений в единицу времени и молекулярного переноса энергии.

Такая интерпретация удобна тем, что в невязкой ($\tau_{kl} = 0$) и нетеплопроводной ($q_k = 0$) среде поток энергии сводится лишь к $E_k = \rho u_k h_*$, т.е. представляет собой конвективный поток полной энтальпии. Такой подход широко используется в газовой динамике.

Выражение плотности потока энергии (а) или (б) представляет интерес для анализа двухфазных систем. Поскольку эта величина определяет поток энергии, переносимой через любую контрольную поверхность, выражение $E_k$ может быть использовано для анализа переноса энергии через поверхности раздела фаз. Такой анализ приводится в следующих разделах.

### 1.5.3. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Запишем уравнение (1.5а) с учетом (а)

$$\frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k e_*)}{\partial x_k} = -\frac{\partial(P_{kl} u_l)}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \rho g_k u_k + \dot{q}_V.$$

Используя соотношение (1.3), имеем

$$\rho \frac{\mathrm{d} e_*}{\mathrm{d} t} = -u_l \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - P_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \rho g_k u_k + \dot{q}_V. \qquad (1.5б)$$

Умножив на $u_l$ уравнение сохранения импульса (1.4б), получим соотношение баланса кинетической энергии

$$\rho u_l \frac{\mathrm{d} u_l}{\mathrm{d} t} = -u_l \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho u_l g_l.$$

Так как $u_l u_l \equiv u_k u_k = \mathbf{u}^2$, то

$$\rho \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)}{\mathrm{d} t} = -u_l \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho u_k g_k. \qquad (1.5в)$$

Вычитая из уравнения сохранения полной энергии (1.5б) уравнение сохранения кинетической энергии (1.5в), получаем *уравнение баланса внутренней энергии*

$$\rho \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -P_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \dot{q}_V. \qquad (1.5г)$$

Далее имеем

$$P_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = p \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} - \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

Используя последнее соотношение в (1.5г), получаем

$$\rho \left( \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right) = \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \dot{q}_V. \qquad (1.5д)$$

Теперь видно, что это обычная запись уравнения первого закона термодинамики: приращение внутренней энергии плюс работа расширения равны подводимому теплу. Последняя величина складывается из тепла, подводимого извне через поверхность единичного контрольного объема $-\frac{\partial q_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}\right)$, и тепла, выделяющегося внутри объема: $\tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$, которое представляет собой интенсивность вязкой диссипации кинетической энергии потока, и внутренних источников тепла $\dot{q}_V$.

Для $p$ = const и в отсутствие внутренних источников тепла ($\dot{q}_V = 0$) это уравнение упрощается:

$$\rho \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k}. \qquad (1.5е)$$

Поскольку при $p$ = const $\mathrm{d}h = c_p \mathrm{d}T$ ($c_p$ — изобарная теплоемкость), то при замене $q_k$ согласно закону Фурье уравнение (1.5е) позволяет найти поле температур в однородной среде.

**Пример.** Одномерное стационарное невязкое течение нетеплопроводной жидкости (см. рис. 1.6).

Из уравнения (1.5) для рассматриваемых условий имеем

$$\int_F E_k \, \mathrm{d}F_k = 0;$$

так как $E_k = E_1 = \rho u_1 h_*$, то

$$-\int_F E_k \, \mathrm{d}F_k = -\left( \int_{F_I} E_1 \, \mathrm{d}F_1 + \int_{F_{II}} E_1 \, \mathrm{d}F_1 \right) = 0,$$

т.е. имеем:

$$(\rho u_1 F h_*)_I = (\rho u_1 F h_*)_{II} = \rho u_1 F h_* = \text{const}.$$

Поскольку $\rho u_1 F = \text{const}$, то окончательно: $h_* = \text{const}$.

Таким образом, в рассмотренном примере закон сохранения энергии приводит к выводу о постоянстве полной энтальпии потока в канале переменного сечения.

## 1.6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ СМЕСЕЙ

### 1.6.1. БИНАРНЫЕ СМЕСИ

В предыдущих параграфах объектом анализа была однокомпонентная сплошная среда. Настоящий параграф посвящен рассмотрению законов сохранения для сплошной среды — смеси. (Например, влажный воздух как смесь воздуха и пара, растворы двух жидкостей, растворы твердого вещества в жидкостях). Анализируя, ограничиваемся случаем, когда в объеме среды не происходит химических реакций (гомогенных реакций), а смесь является бинарной.

Обозначим компоненты бинарной смеси верхними индексами «*a*» и «*b*». Состав смеси может быть задан в виде объемной концентрации массы компонентов (парциальной плотности компонентов)

$$\rho = \rho^a + \rho^b \qquad \text{(а)}$$

или в относительных массовых долях, так называемых массовых концентрациях

$$1 = C^a + C^b. \qquad \text{(б)}$$

Здесь $\rho^a$ и $\rho^b$ — количество вещества $a$ и $b$ в единице объема смеси; $\rho$ — плотность смеси; $C^a = \rho^a/\rho$, $C^b = \rho^b/\rho$ — массовые концентрации компонентов смеси.

Известно, что применяются и иные формы задания концентрации: молярные концентрации и объемные доли. В данном курсе они не используются.

Введенные выше законы сохранения массы импульса и энергии остаются справедливыми в своей общей форме записи также и для смеси в целом. Специфика того, что перенос энергии и импульса молекулярным путем в смеси происходит несколько иначе, чем в однокомпонентной среде, находит свое отражение в конкретном виде потока энергии $\dot{e}_k$ и вязких напряжений $\tau_{kl}$. Эти выражения рассматриваются ниже.

Поскольку для бинарной смеси число переменных увеличивается на единицу (дополнительной зависимой переменной является концентрация одного из компонентов), должно существовать еще одно уравнение, которое совместно с уже выведенными законами сохранения образует математическое описание процессов в смеси. В качестве этого дополнительного уравнения выступает уравнение диффузии, в основе которого лежит закон сохранения массы компонента бинарной смеси.

Выведем это уравнение. Используя общую форму записи законов сохранения, рассмотрим массу компонента *a*. Тогда имеем: $A = \rho^a$ — плотность компонента; $\mathbf{J} = \mathbf{J}^a$ — массовый поток компонента смеси через эйлерову контрольную поверхность; $\dot{N}_A = 0$ — масса не возникает и не исчезает в объеме смеси.

Имеем:

интегральная форма закона сохранения массы компонента

$$\int_V \frac{\partial \rho^a}{\partial t}\, \mathrm{d}V = -\int_F J_k^a\, \mathrm{d}F_k; \tag{1.6}$$

дифференциальная форма

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial J_k^a}{\partial x_k} = 0. \tag{1.6а}$$

Аналогичные выражения можно записать для *b*-компонента. Например,

$$\frac{\partial \rho^b}{\partial t} + \frac{\partial J_k^b}{\partial x_k} = 0.$$

Потоки $\mathbf{J}^a$ и $\mathbf{J}^b$ можно представить состоящими из двух частей. Перенос вещества $a$ или $b$ через элемент поверхности эйлерова объема прежде всего связан просто с движением смеси, как целого, со скоростью $\mathbf{u}$. Соответствующие величины равны, очевидно:

$$\rho^a \mathbf{u} = C^a \rho \mathbf{u};$$

$$\rho^b \mathbf{u} = C^b \rho \mathbf{u}$$

и представляют собой *конвективные потоки массы компонентов смеси.* Вторая часть потоков $\mathbf{J}^a$ и $\mathbf{J}^b$ обусловлена молекулярным перемешиванием компонентов (диффузией). Диффузионные потоки будем обозначать символами $\mathbf{j}^a$ и $\mathbf{j}^b$.

Итак,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{J}^a &= \rho^a \mathbf{u} + \mathbf{j}^a; \\ \mathbf{J}^b &= \rho^b \mathbf{u} + \mathbf{j}^b. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(в)}$$

Поскольку сумма $\mathbf{J}^a + \mathbf{J}^b = \rho \mathbf{u}$, из последних соотношений следует, что $\mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b = 0$.

Таким образом, дополнительное уравнение диффузии, представляющее собой закон сохранения массы компонента смеси, имеет вид (в дифференциальной форме)

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^a u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial j_k^a}{\partial x_k} = 0. \qquad (1.6б)$$

Аналогичный вид имеет уравнение для второго компонента, но оно не дает новых сведений, так как является следствием уравнения сохранения массы смеси в целом и уже записанного соотношения для компонента $a$.

Итак, в бинарной смеси (при отсутствии гомогенных химических реакций) выполняются общие для сплошных сред законы сохранения массы, импульса и энергии, а также закон сохранения массы компонента (уравнение диффузии). Совокупность уравнений, выражающих законы сохранения для бинарных смесей, дана (с использованием общего соотношения (1.1) или (1.1а)) в табл. 1.1 и 1.2.

Подчеркнутые величины в табл. 1.2 — это молекулярные потоки массы компонента $j_k^a$, «вязкой» составляющей $l$-проекции импульса $\tau_{kl}$ и энергии $\dot{e}_k$. Они обусловлены необратимыми процесса-

*Таблица 1.1.* **Величины, входящие в уравнения законов сохранения для бинарных смесей**

| Закон сохранения | $A$ | $J_k$ | $\dot{N}_A$ |
|---|---|---|---|
| массы (смеси) | $\rho$ | $\rho u_k$ | 0 |
| массы компонента $a$ | $\rho^a$ | $J_k^a$ | 0 |
| импульса | $\rho u_l$ | $\Pi_{kl}$ | $\rho g_l$ |
| энергии* | $\rho e_*$ | $E_k$ | $\rho g_k u_k + \dot{q}_V$ |

* В уравнении энергии ввиду малого значения кинетическая энергия диффузии не учитывается. Эта величина квадратична относительно диффузионных потоков:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{j}^a}{\rho^a}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{j}^b}{\rho^b}\right)^2\right].$$

*Таблица 1.2.* **Расшифровка значений потоков $J_k$**

| Поток $J_k$ | Развернутая запись |
|---|---|
| массы (смеси) | $\rho u_k$ |
| массы компонента $J_k^a$ | $\rho^a u_k + \underline{j_k^a}$ |
| $l$-проекции импульса $\Pi_{kl}$ | $\rho u_k u_l + p\delta_{kl} - \underline{\tau_{kl}}$ |
| полной энергии $E_k$ | $\rho u_k e_* + P_{kl} u_l + \underline{\dot{e}_k}$ |

ми молекулярного перемешивания в объеме смеси. Эти молекулярные потоки определяют специфику бинарных смесей по сравнению с однокомпонентной средой. Для замкнутого описания процессов необходимо иметь развернутые выражения для потоков $j_k^a$, $\tau_{kl}$ и $\dot{e}_k$.

### 1.6.2. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ПОТОК МАССЫ КОМПОНЕНТА В СМЕСИ

Основной причиной появления молекулярных потоков массы компонентов в смеси является неоднородность их концентраций. Вследствие молекулярного перемешивания смеси осуществляется перенос вещества данного компонента из области с более высокой концентрацией в область с пониженной концентрацией. Этот процесс описывается законом концентрационной диффузии — законом Фика (который во многом похож на закон теплопроводности Фурье):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j}^a &= -\rho D \nabla C^a = -\rho D \frac{\partial C^a}{\partial x_k}\mathbf{i}_k; \\ \mathbf{j}^b &= -\rho D \nabla C^b = -\rho D \frac{\partial C^b}{\partial x_k}\mathbf{i}_k, \end{aligned}\right\} \qquad (\text{г})$$

где $D$ — коэффициент взаимной диффузии, который обычно для данной пары веществ практически не зависит от концентрации, м$^2$/с (знак «минус» отражает взаимообратную ориентацию векторов градиента и потока).

Однако, строго говоря, закон молекулярной диффузии в общем случае имеет существенно более сложный вид. Перенос массы компонентов в смеси происходит также под действием градиентов температуры и давления. Соответствующие эффекты именуют *термо-* и *бародиффузией.* Общее выражение для $\mathbf{j}^a$ и $\mathbf{j}^b$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j}^a &= -\rho D\left[\nabla C^a + \frac{K_T^{ab}}{T}\nabla T + \frac{K_p^{ab}}{p}\nabla p\right]; \\ \mathbf{j}^b &= -\rho D\left[\nabla C^b + \frac{K_T^{ba}}{T}\nabla T + \frac{K_p^{ba}}{p}\nabla p\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (д)$$

Безразмерные коэффициенты термодиффузии $K_T$ и бародиффузии $K_p$ зависят от концентрации и при переходе к чистому однокомпонентному веществу обращаются в нуль:

$$K_T\Big|_{\substack{C^a \to 1 \\ (C^b \to 1)}} \to 0; \quad K_p\Big|_{\substack{C^a \to 1 \\ (C^b \to 1)}} \to 0.$$

Кроме того, очевидно, что $K_T^{ab} = -K_T^{ba}$; $K_p^{ab} = -K_p^{ba}$. Это следует из условия $\mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b = 0$. Эффекты бародиффузии обычно на практике совершенно незначительны и с полным основанием могут не учитываться. Заметное влияние эффекты термодиффузии могут оказывать в газовых смесях при существенно различной массе молекул (водород—фреон и т.п.), значительных температурных градиентах и средних концентрациях компонентов. Все эти условия одновременно имеют место не часто. Поэтому во многих случаях могут быть опущены и термодиффузионные эффекты. Тогда мы возвращаемся к соотношениям (г) закона Фика. Именно эти случаи и будут рассматриваться далее.

С учетом выражения для $j_k^a$ уравнение конвективной диффузии (1.6б) принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}c^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(D\frac{\partial c^a}{\partial x_k}\right). \qquad (1.6в)$$

### 1.6.3. ВЛИЯНИЕ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ПОТОКОВ МАССЫ НА ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ В СМЕСИ

В бинарной смеси поверхность эйлерова контрольного объема пересекают не только конвективный поток смеси, но и молекулярные потоки массы компонента, которые переносят импульс и энергию. Это и вносит особенности в выражения для тензора вязких напряжений и вектора плотности молекулярного потока энергии в смесях.

Потоки массы компонентов смеси:

$$\mathbf{J}^a = \rho^a\mathbf{u} + \mathbf{j}^a; \quad \mathbf{J}^b = \rho^b\mathbf{u} + \mathbf{j}^b$$

обусловливают перенос импульса, определяемый выражениями:

$$\frac{1}{\rho^a}J_k^aJ_l^a; \quad \frac{1}{\rho^b}J_k^bJ_l^b$$

(аналогично выражению $\rho u_k u_l \equiv \frac{1}{\rho}(\rho u_k)(\rho u_l)$ для однокомпонентной среды).

Раскрывая выражения $\mathbf{J}^a$ и $\mathbf{J}^b$, имеем

$$(\rho^a+\rho^b)u_ku_l + u_l(j_k^a+j_k^b) + u_k(j_l^a+j_l^b) + \frac{1}{\rho^a}j_k^aj_l^a + \frac{1}{\rho^b}j_k^bj_l^b.$$

Первое слагаемое равно $\rho u_k u_l$, т.е. представляет собой перенос импульса сплошной среды вследствие конвекции. Второе и третье слагаемые равны нулю, так как $\mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b = 0$. Два последних определяют искомый перенос импульса вследствие диффузии. При $\mathbf{j}^a = -\mathbf{j}^b = 0$ эти слагаемые исчезают. Однако молекулярный перенос импульса

(из-за вязкости среды) остается, так что строгое выражение для вязких напряжений в смеси при наличии диффузии имеет вид

$$\tau_{kl} = \overset{\circ}{\tau}_{kl} - \left( \frac{j_k^a j_l^a}{\rho^a} + \frac{j_k^b j_l^b}{\rho^b} \right), \qquad \text{(е)}$$

где $\overset{\circ}{\tau}_{kl}$ — касательное напряжение, выраженное через динамическую вязкость смеси. Добавка за счет диффузионных потоков квадратична относительно малых величин $\mathbf{j}^a$ и $\mathbf{j}^b$ и потому обычно несущественна.

Таким образом, вязкие напряжения в бинарной смеси с хорошим приближением можно выражать в той же форме, которая использовалась для однокомпонентной среды. При этом динамическая вязкость $\mu$ в таком соотношении приобретает смысл вязкости смеси $\mu^{ab}$. Ее значения для различных бинарных смесей приводятся в справочниках. Правило аддитивности для $\mu^{ab}$ не выполняется. Известны теоретические и полуэмпирические формулы, выражающие $\mu^{ab}$ через $\mu^a$, $\mu^b$ и концентрацию компонентов.

*Поток энергии* $\dot{\mathbf{e}}$, переносимый молекулярным путем при наличии диффузионного переноса вещества, должен включать в себя перенос энергии за счет диффузии. В этих условиях (из-за проницаемости контрольной поверхности, относительно которой данный поток энергии рассматривается) понятие потока теплоты становится неоднозначным и его применение может привести к различным двусмысленностям и недоразумениям. Поэтому при анализе процессов в смесях предпочтительнее использовать понятие потока энергии, переносимого молекулярным путем, а не потока теплоты. (Мы пишем $\dot{\mathbf{e}}$, а не $\mathbf{q}$.)

Выражение для потока энергии в бинарной смеси имеет вид

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda^{ab} \nabla T + h^a \mathbf{j}^a + h^b \mathbf{j}^b. \qquad \text{(ж)}$$

Первый член имеет структуру закона Фурье, причем здесь используется теплопроводность смеси, которая задается в таблицах свойств смесей; для нее существуют приближенные соотношения, позволяющие найти $\lambda^{ab}$ по $\lambda^a$ и $\lambda^b$ и концентрации (правило аддитивности обычно не выполняется). Два следующих слагаемых ха-

рактеризуют перенос энергии за счет диффузии. Величины $h^a$ и $h^b$ представляют собой парциальные энтальпии компонентов (см. термодинамику растворов) $h = h^a C^a + h^b C^b$.

Для газов при не очень высоких давлениях $h^a = h_0^a$, $h^b = h_0^b$, т.е. парциальные энтальпии равны энтальпиям чистых компонентов (идеальные смеси). В жидких смесях при растворении компонентов выделяется теплота смешения, отличная от нуля (неидеальные смеси). В этих условиях $h^a \neq h_0^a$, $h^b \neq h_0^b$.

Выражение для потока энергии (ж) можно записать, используя равенство $\mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b = 0$, в виде

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda^{ab} \nabla T + (h^a - h^b)\mathbf{j}^a .$$

Ранее такая форма записи была популярна. При этом величина $\dot{\mathbf{e}}$ нестрого именовалась «потоком тепла», а разность $(h^a - h^b)$ называлась «теплотой переноса» вследствие диффузии.

Для газов энтальпия смеси $h$ практически не зависит от давления. Используя известное в термодинамике растворов выражение для полной производной энтальпии смеси при $p = \text{const}$:

$$\mathrm{d}h = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_C \mathrm{d}T + h^a \,\mathrm{d}C^a + h^b \,\mathrm{d}C^b$$

и выражение закона Фика $\mathbf{j}^a = -\rho D \nabla C^a$, $\mathbf{j}^b = -\rho D \nabla C^b$, находим, что

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_C \nabla T - \frac{1}{\rho D}\,(h^a \mathbf{j}^a + h^b \mathbf{j}^b).$$

Отсюда имеем

$$h^a \mathbf{j}^a + h^b \mathbf{j}^b = \rho D \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_C \nabla T - \rho D \nabla h .$$

Величина $\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_C = c_p^{ab}$ называется «замороженной» теплоемкостью, т.е. теплоемкостью при неизменном составе. Для идеальных смесей (применимо для смеси газов)

$$c_p^{ab} = c_p^a C^a + c_p^b C^b .$$

В итоге исходное соотношение (ж) принимает вид

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda^{ab}(1 - \mathrm{Le})\nabla T - \rho D \nabla h.$$

Здесь введено число Льюиса—Семенова*

$$\mathrm{Le} = \frac{\rho D c_p^{ab}}{\lambda^{ab}} = \frac{D}{a^{ab}},$$

где $a^{ab}$ — температуропроводность смеси.

Удобство новой записи состоит в том, что для многих газовых смесей число Le ≈ 1. Полагая Le = 1, находим, что поток энергии в бинарной газовой смеси определяется лишь градиентом энтальпии смеси

$$\dot{\mathbf{e}} = -\rho D \nabla h.$$

В жидкостях такого рода преобразования не дают существенных выгод. При этом следует иметь в виду, что для жидкостей из-за малого коэффициента диффузии и относительно большой теплопроводности (Le << 1; $D << a^{ab}$) обычно оправдано приближение, не учитывающее диффузионного переноса энергии. Применимость этого заключения требует конкретных оценок для тех или иных условий.

## 1.7. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ

### 1.7.1. СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ФАЗ

При феноменологическом подходе граница раздела фаз рассматривается как геометрическая поверхность, разделяющая области с резко отличными свойствами (фазы). Такого рода поверхности называют поверхностями сильных разрывов [34]. В общем случае межфазная граница проницаема для вещества (фазовые переходы), импульса (относительное движение фаз) и энергии (теплообмен и фазовые переходы). При описании условий межфазного взаимодействия важное значение имеет понятие скорости движения поверхности раздела фаз в пространстве.

Если через движущуюся поверхность раздела фаз происходит перенос вещества (фазовые переходы), то скорости движения по-

* Иногда этому названию ставят в соответствие обратную величину.

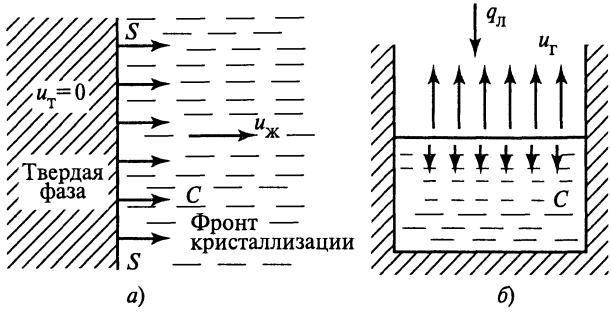



**Рис. 1.9. Схема движения в пространстве фронта кристаллизации жидкости (*а*) и фронта испарения (*б*)**

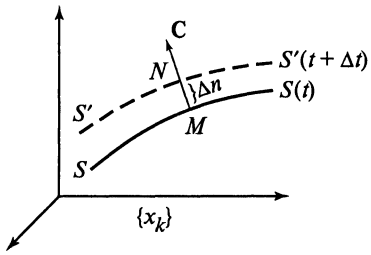



**Рис. 1.10. К определению скорости движения границы раздела фаз**

верхности нельзя поставить в соответствие скорости каких-то материальных частиц той или иной фазы.

На рис. 1.9 в виде примеров показаны качественные схемы движения фронта кристаллизации жидкости (рис. 1.9, *а*) и фронта испарения (рис. 1.9, *б*). Во втором случае предполагается, что нижняя и боковые стенки сосуда адиабатны, тепло к свободной поверхности жидкости подводится сверху за счет излучения $q_л$.

Скорость движения границы $C$ в обоих случаях не совпадает со скоростями фаз у границы. В случае *а* твердая фаза неподвижна ($u_т = 0$), в жидкости может иметь место свободная конвекция, но $u_ж \neq C$. В случае *б* неподвижна жидкая фаза ($u_ж = 0$), образующийся пар поднимается вверх ($u_г > 0$), поверхность раздела перемещается вниз ($C < 0$).

В общем случае скорость перемещения границы (поверхности разрыва) в некоторой точке $M$ в системе координат $\{x_k\}$ определяется соотношением (рис. 1.10)

$$\mathbf{C} = \mathbf{n}^\circ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \mathbf{n}^\circ \frac{\partial n}{\partial t}, \tag{1.7}$$

или

$$\mathbf{C} = |C| \cdot \mathbf{n}^\circ,$$

где $\mathbf{n}^\circ$ — единичный вектор нормали, проведенной из данной точки поверхности в сторону перемещения границы; $\Delta n = MN$ — расстояние вдоль нормали между исходной точкой $M$ и новым положением границы; $|C|$ — модуль вектора $\mathbf{C}$.

Выведем соотношение для $\mathbf{C}$ при условии, что уравнение поверхности раздела фаз (поверхности разрыва) задано в аналитической форме. Уравнение поверхности имеет вид

$$\Phi_S[t,\ \mathbf{r}(t)] = 0, \qquad (*)$$

где $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат к данной точке поверхности.

Дифференцируя уравнение (*), находим

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \Phi_S}{\partial t}\right) \Big/ \left(\frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{r}}\right).$$

Имея в виду определение (1.7), скорость поверхности $\mathbf{C}$ определяется как $\partial \mathbf{r}/\partial t$, если приращение радиус-вектора $\mathbf{r}$ происходит вдоль нормали $\mathbf{n}$ к поверхности (см. рис. 1.10). Тогда производная

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{n}} = \operatorname{grad} \Phi_S \equiv \nabla \Phi_S.$$

Следовательно,

$$\mathbf{C} = -\frac{\partial \Phi_S / \partial t}{\nabla \Phi_S}. \qquad (1.8)$$

Модуль скорости границы: $|C| = \left|\sqrt{\mathbf{C}^2}\right|$, т.е.

$$|C| = \left| \frac{\dfrac{\partial \Phi_S}{\partial t}}{\sqrt{(\nabla \Phi_S)^2}} \right|. \qquad (1.8а)$$

Единичный вектор $\mathbf{n}^\circ$, определяющий направление скорости, находится из выражения

$$\mathbf{n}^\circ = \mathbf{C}/|C|.$$

Соотношения (1.8) и (1.8а) правомерны при рассмотрении движения границы в любой системе координат как декартовой, так и криволинейной ортогональной (например, сферической). Ниже эти соотношения даны для декартовой системы координат и приведены примеры их использования.

В декартовой системе координат:

$$\nabla\Phi_S = \frac{\partial\Phi_S}{\partial x_k} i_k;$$

$$(\nabla\Phi_S)^2 = \frac{\partial\Phi_S}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi_S}{\partial x_k}.$$

Соотношения (1.8) и (1.8а) принимают вид:

$$\mathbf{C} = -\frac{\partial\Phi_S}{\partial t}\frac{\partial\Phi_S/\partial x_k}{\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial x_k}} i_k; \tag{1.9}$$

$$|C| = \left|\frac{\partial\Phi_S/\partial t}{\sqrt{\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial x_k}\dfrac{\partial\Phi_S}{\partial x_k}}}\right|. \tag{1.9а}$$

**Пример 1.** Найти выражение для скорости движения поверхности раздела фаз, показанной на рис. 1.11.

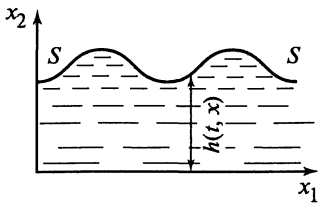



**Рис. 1.11. Волновое движение границы раздела фаз**

Величина $h(t, x_1)$ есть известная функция времени и координаты $x_1$. Например, если по поверхности распространяется прогрессивная волна, то $h = h_0 + a\sin(kx - \omega t)$ (см. гл. 3).

Уравнение поверхности

$$\Phi_S = h(t, x_1) - x_2 = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t};$$

$$\nabla \Phi_S = \frac{\partial h}{\partial t}\,\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2;$$

$$(\nabla \Phi_S)^2 = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2.$$

Имеем:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial h/\partial t}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2}\left(\mathbf{i}_2 - \frac{\partial h}{\partial x_1}\,\mathbf{i}_1\right);$$

$$|C| = \left|\frac{\partial h/\partial t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2}}\right|;$$

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\partial h/\partial t}{|\partial h/\partial t|}\,\frac{\mathbf{i}_2 - (\partial h/\partial x_1)\mathbf{i}_1}{\left|\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2}\right|}.$$

**Пример 2.** Сферический паровой пузырек в жидкости изменяет свой объем (за счет фазового перехода). Известна зависимость $R_S(t)$. Найти скорость движения границы (рис. 1.12).

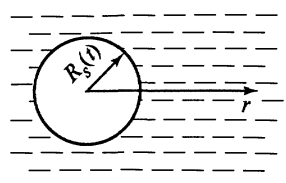



**Рис. 1.12. Схема роста парового пузырька в объеме жидкости**

Уравнение границы:

$$\Phi_S = R_S(t) - r = 0.$$

Находим:

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}R_S}{\mathrm{d}t}; \quad \nabla \Phi_S = -\mathbf{i}_r.$$

Имеем:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathrm{d}R_S}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{i}_r;$$

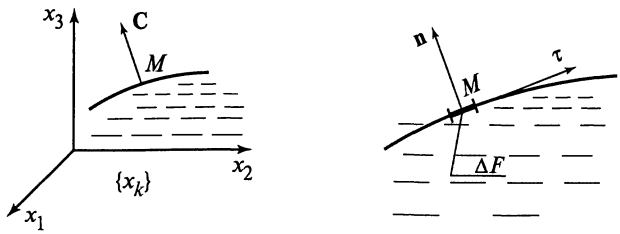
$$|C| = \left|\frac{\mathrm{d}R_S}{\mathrm{d}t}\right|;$$

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathrm{d}R_S/\mathrm{d}t}{\left|\dfrac{\mathrm{d}R_S}{\mathrm{d}t}\right|}\,\mathbf{i}_r.$$

Этот результат, конечно, можно было получить сразу из физических соображений ввиду его простоты.

### 1.7.2. СОБСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Пусть известно, что в точке $M$ на межфазной поверхности скорость движения поверхности относительно лабораторной системы координат $\{x_k\}$ равна $\mathbf{C}$ (рис. 1.13, *а*). Если теперь поместить в точку $M$ начало новой координатной системы $\{n, \tau\}$, которая движется со скоростью $\mathbf{C}$, то в этой новой системе отсчета точка $M$ оказывается неподвижной (рис. 1.13, *б*). Такая система координат, «привязан-




*а* *б*

**Рис. 1.13. Граница раздела в лабораторной (*а*) и собственной (*б*) системах отсчета**

ная» к данной точке поверхности раздела фаз, называется собственной системой отсчета. При этом одну из ее осей целесообразно направлять по нормали к поверхности — ось $n$, другие оси расположить в плоскости, касательной к поверхности. На рис. 1.13, *б* изображен плоский случай, которому соответствуют оси $n$ и $\tau$.

Дифференциально малый элемент межфазной поверхности в окрестности точки $M$ всегда может рассматриваться с достаточной точностью как плоский (см. рис. 1.13, *б*) при любой плавной форме очертания границы (без изломов).

Введенная в рассмотрение собственная система отсчета позволяет определить так называемые универсальные условия совместности на границе раздела фаз (на поверхности разрыва).

### 1.7.3. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

Построим в собственной системе отсчета вокруг точки $M$ контрольный эйлеров объем $\Delta F(h' + h'')$, который состоит из малых объемов соприкасающихся фаз $\Delta F h'$ и $\Delta F h''$ и содержит элемент межфазной поверхности площадью $\Delta F$ (рис. 1.14).

Запишем для этого объема общее соотношение законов сохранения в интегральной форме

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_F J_k\,\mathrm{d}F_k = \int_V \dot{N}_A\,\mathrm{d}V.$$

Если теперь устремить $h'$ и $h''$ к нулю, то первый интеграл левой части уравнения сохранения стремится к нулю:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \Delta F \underset{h''\to 0}{h''} \frac{\partial A''}{\partial t} + \Delta F \underset{h'\to 0}{h'} \frac{\partial A'}{\partial t} \to 0;$$

второй интеграл при тех же условиях

$$\int_{F\ \substack{h''\to 0\\ h'\to 0}} J_k\,\mathrm{d}F_k = \Delta F(J_n'' - J_n'),$$

т.е. при $h'' \to 0$, $h' \to 0$ остается конечным.

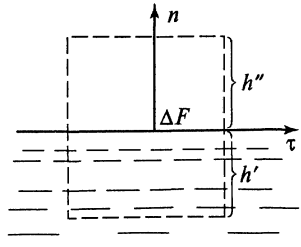



**Рис. 1.14. Контрольный объем в окрестности точки *M* на поверхности раздела фаз**

Наконец, интеграл правой части

$$\int\limits_{\substack{V \\ h''\to 0 \\ h'\to 0}} \dot{N}_A \, \mathrm{d}V = \Delta F \underset{h''\to 0}{h''} \dot{N}_A'' + \Delta F \underset{h'\to 0}{h'} \dot{N}_A' + \Delta F \dot{N}_F$$

при $h' \to 0$, $h'' \to 0$ стремится к $\Delta F \dot{N}_F$, где $\dot{N}_F$ — есть поверхностная плотность возникновения свойства $A$ на поверхности раздела фаз, которая может быть отлична от нуля (см. ниже).

Таким образом, при стягивании объема $\Delta F(h'' + h')$ к плоской поверхности $\Delta F$ из общего соотношения законов сохранения получаем

$$J_n'' - J_n' = \dot{N}_F. \tag{1.10}$$

Это соотношение представляет собой общую форму записи универсальных условий совместности на границе раздела фаз: разность нормальных проекций потоков свойства $A$ по обе стороны границы равна поверхностной плотности возникновения свойства $A$ на границе. Подчеркнем, что соотношение записано в собственной системе отсчета.

Из вывода непосредственно следует, что универсальные условия совместности есть просто специфическая форма записи общих законов сохранения применительно к межфазной поверхности (или, иначе, к поверхности разрыва).

Для сокращенной записи разности одноименных величин по обе стороны границы раздела фаз (поверхности разрыва) будем использовать далее символ «прямые скобки»:

$$[J_n] = J_n'' - J_n';$$

$$[T] = T'' - T';$$

$$[u_n] = u_n'' - u_n'$$

и т.д. После введения этого сокращения общая форма записи универсальных условий совместности принимает вид

$$[J_n] = \dot{N}_F. \tag{1.10а}$$

Из вывода этого соотношения видно, что потоки $J_n$ свойства $A$ должны записываться в собственной системе отсчета.

### 1.7.4. РАЗВЕРНУТАЯ ЗАПИСЬ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ СОВМЕСТНОСТИ

Для записи универсальных условий совместности в развернутом виде нужно лишь конкретизировать $J_n$ и $\dot{N}_F$. Сделаем это сначала для однокомпонентных систем.

*Поток массы.* Масса вещества не может возникать (исчезать) на поверхности. Поэтому $\dot{N}_F = 0$; $J_n = \rho \tilde{u}_n$, где $\tilde{u}_n$ — нормальная проекция скорости данной фазы, причем сама скорость определена в собственной системе отсчета (на что указывает индекс «тильда»). Иначе говоря, $\tilde{u}_n$ — скорость частиц данной фазы по нормали к элементу межфазной границы при «наблюдении» этого движения из системы координат, «привязанной» к границе.

Имеем:

$$[\rho \tilde{u}_n] = 0. \tag{1.11}$$

Это соотношение определяет материальный баланс на границе раздела фаз.

*Поток импульса.* В собственной системе координат $\{n, \tau_1, \tau_2\}$ компоненты тензора плотности потока импульса имеют вид:

$\Pi_{nn}$ — перенос вдоль нормали к поверхности нормальной проекции импульса;

$\Pi_{n\tau_1}$ — перенос вдоль нормали к поверхности касательной $\tau_1$ проекции импульса;

$\Pi_{n\tau_2}$ — перенос вдоль нормали к поверхности касательной $\tau_2$ проекции импульса;

$\Pi_{\tau_1\tau_1}$, $\Pi_{\tau_2\tau_2}$, $\Pi_{\tau_2\tau_1}$ — не дают вклада в перенос импульса вдоль нормали $n$ к поверхности.

Таким образом, необходимо рассматривать перенос нормальной $\Pi_{nn}$ и касательных компонент $\Pi_{n\tau}$ импульса через поверхность (символом $\Pi_{n\tau}$ мы будем в дальнейшем обозначать тензор потока любой из касательных компонент импульса).

На межфазной границе, разделяющей две жидкости или жидкую и паровую фазы, действует поверхностное натяжение, которое при

наличии кривизны границы вызывает поверхностную плотность возникновения нормальной компоненты импульса $\dot{N}_F = 2\sigma H$, где $H$ — средняя кривизна поверхности; $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения (подробнее см. гл. 2).

Итак,

$$[\Pi_{nn}] = 2\sigma H. \tag{1.12}$$

Для касательных компонент $\dot{N}_F = 0$ (если $\sigma$ не изменяется вдоль поверхности), следовательно,

$$[\Pi_{n\tau}] = 0. \tag{1.13}$$

*Поток энергии.* Если в системе отсутствует лучистый или иной внешний подвод энергии к границе раздела фаз, то следует считать, что поверхностная плотность возникновения энергии равна нулю: $\dot{N}_F = 0$ *; $J_n = E_n$.

Имеем:

$$[E_n] = 0. \tag{1.14}$$

Совокупность соотношений (1.11)—(1.14) представляет собой искомые универсальные условия совместности на межфазной поверхности (поверхности разрыва) в однокомпонентных двухфазных системах.

Развернутые выражения потоков $\Pi_{nn}$, $\Pi_{n\tau}$ и $E_n$ в собственной системе отсчета имеют следующий вид:

$$\Pi_{nn} = \rho \tilde{u}_n \tilde{u}_n + p - \tau_{nn};$$

$$\Pi_{n\tau} = \rho \tilde{u}_n \tilde{u}_\tau - \tau_{n\tau};$$

$$E_n = \rho \tilde{u}_n \tilde{h}_* - \tilde{u}_i \tau_{ni} + q_n \quad \text{(суммирование по } i = n, \tau),$$

где

$$\tilde{h}_* = h + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{2}.$$

* Изменение избыточной свободной энергии поверхности раздела фаз ($d\sigma/dt$) во всех практически важных случаях может не учитываться.

*В бинарной двухфазной системе* уравнения (1.11)—(1.14) справедливы (с учетом анализа, содержащегося в § 1.6). При этом в выражении для полного потока энергии $E_n$ поток теплоты $q_n$ должен быть заменен молекулярным потоком энергии $\dot{e}_n$ по соотношению (ж) § 1.6. Кроме указанных уравнений, для бинарной системы необходимо записать уравнение сохранения массы компонента на границе раздела, т.е. еще одно универсальное условие совместности. Для компонента $a$ имеем

$$[J_n^a]^{\cdot} = 0, \tag{1.15}$$

где $J_n^a = \rho^a \tilde{u}_n + j_n^a$ — поток компонента $a$ через межфазную поверхность.

Соотношение (1.15) означает, что вещество $a$ не возникает (исчезает) на поверхности раздела фаз (поверхности разрыва).

Таким образом, в общем случае совокупность соотношений (1.11)—(1.15) представляет собой универсальные условия совместности на межфазных поверхностях.

### 1.7.5. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Рассмотрим частные случаи записи универсальных условий совместности для однокомпонентных систем.

1. *Обе фазы невязкие, нетеплопроводные* ($\tau = 0$, $q = 0$), *влиянием поверхностного натяжения можно пренебречь* ($\sigma = 0$).

Имеем:

для потока массы $[\rho \tilde{u}_n] = 0$, т.е.

$$\rho'' \tilde{u}''_n = \rho' \tilde{u}'_n = \dot{m}$$

— поток массы, пересекающий единичную площадку поверхности раздела фаз;

для нормальной компоненты потока импульса

$$[\rho \tilde{u}_n^2 + p] = 0;$$

для касательной компоненты потока импульса

$$\rho''\tilde{u}''_n\tilde{u}''_\tau - \rho'\tilde{u}'_n\tilde{u}'_\tau = \dot{m}[\tilde{u}_\tau] = 0,$$

т.е. $[\tilde{u}_\tau] = 0$;

для потока энергии

$$\left[h + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{2}\right] = 0.$$

Это так называемые условия Ренкина—Гюгонио, лежащие в основе газодинамики разрывных течений (ударные волны, скачки уплотнения и т.д.).

2. *Скорости фаз* $|\tilde{u}| << C_{зв}$ (*где* $C_{зв}$ — *скорость звука в паре*), т.е. *фазовые переходы,* происходящие в системе, *имеют умеренную интенсивность* (следует отметить, что это условие удовлетворяется в большинстве практических ситуаций).

В рассматриваемом случае фазы считаются вязкими и теплопроводными. Универсальные условия совместности имеют вид:

$$[\rho\tilde{u}_n] = 0;$$

$$\dot{m}[\tilde{u}_n] + [p] - [\tau_{nn}] = 2\sigma H;$$

$$\dot{m}[\tilde{u}_\tau] - [\tau_{n\tau}] = 0.$$

В вязкой среде обычно выполняется дополнительное кинематическое условие отсутствия «скольжения» фаз на границе раздела (подробнее ниже):

$$[\tilde{u}_\tau] = 0.$$

Отсюда имеем

$$[\tau_{n\tau}] = 0,$$

что означает равенство касательных вязких напряжений по обе стороны границы. Уравнение энергетического баланса принимает следующий вид:

$$\dot{m}[h] + [q_n] = 0,$$

причем здесь $[h] = h_{LG}$ — теплота фазового перехода, которая предполагается существенно большей по сравнению со слагаемым $\tilde{\mathbf{u}}^2/2$,

т.е. $\tilde{\mathbf{u}}^2/2 << h_{LG}$, что и дает основание опустить изменение кинетической энергии при фазовом переходе в уравнении энергетического баланса. При испарении и конденсации $[h] = h_{LG}$ — теплоте испарения, представляющей собой разность энтальпий пара и жидкости на линии насыщения ($h_{LG} = h''_s - h'_s$)*. Как квадратичная по $\tilde{u}$ величина, слагаемое $(\tilde{u}_i \tau_{ni})$ также может быть исключено из баланса энергии.

3. *Поверхность раздела фаз непроницаема* ($\dot{m} = 0$); обе фазы вязкие и теплопроводные, скорости фаз намного меньше скорости звука. Это приводит к дальнейшим упрощениям:

$$[p] - [\tau_{nn}] = 2\sigma H;$$

$$[\tilde{u}_\tau] = 0;$$

$$[\tau_{n\tau}] = 0;$$

$$[q_n] = 0.$$

Последнее условие означает, что поток тепла теплопроводностью при переходе через поверхность раздела фаз не испытывает скачка.

Если фазы неподвижны и теплообмен отсутствует, то $\tau_{nn} = \tau_{n\tau} = 0$; $u_\tau = 0$; $q_n = 0$.

Тогда из вышеприведенных соотношений остается лишь первое, которое принимает вид

$$[p] = 2\sigma H.$$

Это известная формула Лапласа для скачка давлений на искривленной поверхности газ—жидкость.

### 1.7.6. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ В «ЛАБОРАТОРНОЙ» СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Соотношения (1.11)—(1.15) получены для «собственной» системы отсчета. То же относится и к рассмотренным выше частным случаям. Между тем, в приложениях универсальные условия совмест-

* Такое обозначение теплоты фазового перехода рекомендовано Международным комитетом по тепло- и массообмену. В отечественной литературе теплота испарения обозначается обычно буквой $r$. В настоящей книге мы следуем рекомендации Международного комитета, поскольку обозначение $h_{LG}$ указывает на физический смысл теплоты парообразования как разности энтальпий соответствующих фаз. Кроме того, традиционное обозначение создает некоторые неудобства, так как той же буквой обозначается радиальная координата в сферической и цилиндрической системах координат.

ности удобно записывать не в собственной, а в лабораторной системе координат, в которой поверхность сама движется со скоростью **C**. Такой переход достаточно прост. При раскрытии соотношений (1.11)—(1.15) следует всюду вместо скоростей писать их выражения в лабораторной системе координат:

$$\tilde{u}_n = u_n - \mathbf{C}.$$

Таким образом, например соотношение (1.11) приобретает вид

$$[\rho (u_n - C)] = 0$$

или

$$\rho'' (u''_n - C) = \rho' (u'_n - C).$$

Остальные величины:

$$\Pi_{nn} = \rho (u_n - C)^2 + p - \tau_{nn};$$

$$\Pi_{n\tau} = \rho (u_n - C)\, u_\tau - \tau_{n\tau};$$

$$E_n = \rho (u_n - C) h_* - \{u_\tau \tau_{n\tau} + (u_n - C)\tau_{nn}\} + q_n,$$

где

$$h_* = h + \frac{(u_n - C)^2}{2} + \frac{u_\tau^2}{2}.$$

При расшифровке этих выражений задача сводится к записи в лабораторной системе координат составляющих скорости $u_n$ и $u_\tau$, теплового потока $q_n$ и компонент тензора вязких напряжений $\tau_{nn}$ и $\tau_{n\tau}$.

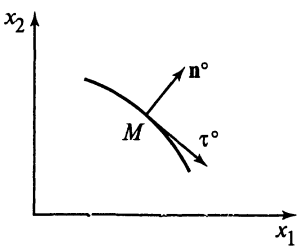



**Рис. 1.15. Граница раздела фаз в системе координат $\{x_1, x_2\}$**

Ниже приведены примеры использования этих соотношений в лабораторной системе отсчета.

**Пример 1.** Пусть в системе координат $\{x_1, x_2\}$ известна скорость межфазной поверхности $|C|$ и направление $\mathbf{n}^\circ$ (рис. 1.15) в данной точке $M$.

Выразить $\tilde{u}_n$, $\tilde{u}_\tau$, $\tau_{nn}$, $\tau_{n\tau}$, $q_n$ через соответствующие величины в системе $\{x_1, x_2\}$.

Выражение для $\mathbf{n}^\circ$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{n}^\circ = \alpha \mathbf{i}_1 + \beta \mathbf{i}_2,$$

где

$$\alpha = \frac{C_1}{\left|\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\right|}; \quad \beta = \frac{C_2}{\left|\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\right|}$$

— направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}^\circ$.

Из условий $\mathbf{n}^\circ \cdot \boldsymbol{\tau}^\circ = 0$; $|\mathbf{n}^\circ| = |\boldsymbol{\tau}^\circ| = 1$ нетрудно найти выражение для единичного вектора касательной $\boldsymbol{\tau}^\circ = \beta \mathbf{i}_1 - \alpha \mathbf{i}_2$.

Нормальная и касательная к поверхности компоненты вектора скорости:

$$u_n = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^\circ) = \alpha u_1 + \beta u_2;$$

$$u_\tau = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}^\circ) = \beta u_1 - \alpha u_2.$$

Из определения потока теплоты (энергии), как вектора, имеем

$$q_n = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}^\circ) = \alpha q_1 + \beta q_2.$$

По определению тензора*:

$$\tau_{nn} = \alpha^2 \tau_{11} + 2\alpha\beta\tau_{12} + \beta^2 \tau_{22};$$

$$\tau_{n\tau} = \alpha\beta\tau_{11} + (\beta^2 - \alpha^2)\tau_{12} - \alpha\beta\tau_{22}.$$

Следовательно, все величины в собственной системе координат $\{n, \tau\}$ легко выражаются через соответствующие величины в лабораторной системе отсчета $\{x_1, x_2\}$.

В частности, скорость фазы относительно границы

$$\tilde{u}_n = u_n - C = \alpha u_1 + \beta u_2 - C.$$

Поэтому поток вещества через поверхность раздела фаз

$$\dot{m} = \rho''\{(\alpha u_1'' + \beta u_2'') - C\} = \rho'\{(\alpha u'_1 + \beta u'_2) - C\}.$$

Аналогично записываются остальные соотношения (1.11)—(1.15).

---

* В системе координат $\{y_k\}$ компоненты тензора $\tau_{ij} = (\partial y_i/\partial x_l)(\partial y_j/\partial x_m)\tau_{lm}$, где $\tau_{lm}$ — компоненты тензора в системе $\{x_k\}$. Производные $\partial y_i/\partial x_k$ зависят от взаимного расположения координат («новых» $\{y_k\}$ и «старых» $\{x_k\}$).

В нашем случае координатам $\{y_k\}$ соответствуют координаты $\{n, \tau\}$, а производные $\partial y_i/\partial x_k$ находятся из соотношений:

$$\mathrm{d}n = \alpha\,\mathrm{d}x_1 + \beta\,\mathrm{d}x_2;$$

$$\mathrm{d}\tau = \beta\,\mathrm{d}x_1 - \alpha\,\mathrm{d}x_2.$$

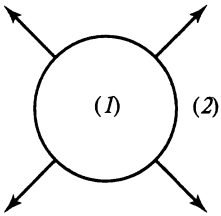



**Рис. 1.16. Рост сферического объема фазы (*1*) внутри фазы (*2*)**

**Пример 2.** Сферический пузырек пара постоянной плотности вследствие фазового перехода изменяется в объеме с известной скоростью границы $C$ (рис 1.16). Найти взаимосвязь между скоростью конденсата на границе и скоростью $C$. Найти аналогичное соотношение между скоростью границы и скоростью пара на границе сферической капли жидкости.

В условиях неизменной плотности внутренней фазы (фаза *1* — пар или жидкость) ее скорость в таких задачах в сферической системе координат равна нулю: $u^{(1)} = 0$.

Условие материального баланса:

$$\rho^{(1)}(u^{(1)} - C) = \rho^{(2)}(u^{(2)} - C)$$

с учетом $u^{(1)} = 0$ приводит к соотношению

$$u^{(2)} = C\left(1 - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}}\right),$$

которое представляет собой решение для обоих случаев.

Для парового пузырька ($\rho^{(1)} = \rho''$; $\rho^{(2)} = \rho'$; $u^{(2)} = u'$):

$$u' = C\left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right),$$

т.е. скорость жидкости совпадает по направлению со скоростью границы $C$ и лишь немного меньше ее численно.

Для капли жидкости (при конденсации или испарении) скорость пара противоположна по направлению скорости границы $C$ и существенно больше ее численно:

$$u'' = -C\frac{\rho' - \rho''}{\rho''}.$$

## 1.8. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ (КВАЗИРАВНОВЕСНАЯ СХЕМА)

Универсальные условия совместности, приведенные выше, представляют собою по существу приложение общих фундаментальных законов сохранения к поверхностям разрыва. Поэтому они одинаково справедливы для самых различных классов физических задач: фазовые переходы, газодинамические поверхности разрыва, фронт горения или детонации и т.д. Однако для однозначной формулировки прикладных задач определенного класса (в частности,

задач фазовых переходов, тепло- и массообмена в двухфазных системах) этих условий недостаточно. Для замыкания описания необходимо внести еще дополнительные, или *специальные условия совместности.* Эти условия призваны учесть физические особенности данного класса задач.

В настоящее время для широкого круга задач фазовых переходов, тепло- и массообмена в двухфазных системах применяется так называемая *квазиравновесная схема,* являющаяся основой для формулировки специальных условий совместности. Содержание квазиравновесной схемы основано на гипотезе о том, что характеристики соприкасающихся фаз взаимосвязаны *условиями термодинамического равновесия.* Эта схема является некоторым приближением, так как процессы фазовых переходов, тепло- и массообмена, для которых она применяется, являются, безусловно, неравновесными. Название «квазиравновесная» отражает приближенный характер этой модели.

Содержание квазиравновесной схемы для ряда конкретных процессов рассматривается ниже.

1. *На непроницаемой поверхности* специальные условия совместности сводятся к следующему:

$$[T] = 0;$$

$$[u_\tau] = 0,$$

т.е. на границе раздела фаз отсутствуют скачок температур и скачок касательных компонент скорости.

2. *Фазовые переходы в однокомпонентных системах (проницаемая поверхность).*

В этом случае сохраняются условия отсутствия скачков температур и касательных компонент скорости:

$$[T] = 0;$$

$$[u_\tau] = 0.$$

Кроме того, появляется дополнительное условие

$$T'' = T' = T_s(p''),$$

где $T_s$ — температура насыщения.

Таким образом, при фазовых переходах в однокомпонентных средах температуры фаз на границе одинаковы и равны температуре насыщения при актуальном давлении в паровой фазе. (Малой поправкой Томсона, отражающей изменение равновесной температуры с кривизной, во многих приложениях можно пренебречь.)

3. *Фазовые переходы в бинарной системе, полупроницаемая поверхность.*

В этом случае один из компонентов фазы (например, воздух) не растворим в жидкости (вода). При этом специальные условия совместности, помимо уже привычных требований:

$$[T] = 0, \quad \text{т.е.} \quad T' = T''; \quad [u_\tau] = 0,$$

включают в себя соотношение

$$C^{a''} = C_s^{a''}(p, T),$$

т.е. концентрация активного компонента в парогазовой фазе равна равновесной при температуре поверхности и давлении в системе. (Иначе, парциальное давление активного компонента на поверхности равно давлению насыщения вещества при температуре поверхности.) Зависимости равновесной концентрации $C_s^{a''}$ от температуры (рис. 1.17) для некоторых бинарных систем приводятся в справочниках; приближенно они могут быть получены расчетами, если известна $p$, $T$-диаграмма для чистого активного компонента.

Найдем, к примеру, равновесную концентрацию водяного пара в атмосферном воздухе с температурой $T''_\infty = 25$ °С на границе с поверхностью водяной капли, имеющей температуру 18 °С. При этой температуре по таблицам термодинамических параметров воды и водяного пара определяем плотность насыщенного пара $\rho_s^{a''} \approx$ $\approx 0{,}0154$ кг/м$^3$ (соответствующее давление насыщения $p''_s = 2{,}06$ кПа). Плотность сухого воздуха при давлении 100 кПа и температуре 25 °С $\rho^{b''} = 1{,}17$ кг/м$^3$. В рассматриваемых условиях смесь газов можно считать идеальной, так что искомая равновесная концентрация

$$C_s^{a''} = \frac{\rho_s^{a''}}{\rho_s^{a''} + \rho^{b''}} \cong 0{,}0116.$$

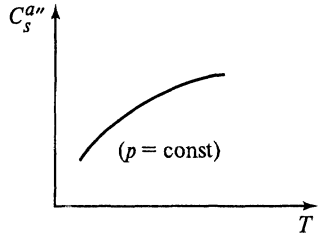



**Рис. 1.17. Примерный вид зависимости от температуры равновесной концентрации компонента *a* в бинарной смеси с полупроницаемой поверхностью раздела**

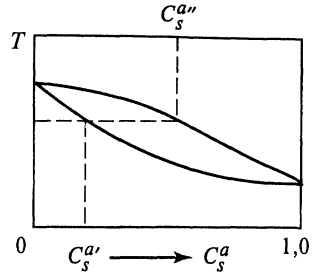



**Рис. 1.18. Примерный вид диаграммы фазового равновесия для бинарной смеси взаиморастворимых компонентов**

Если концентрация водяного пара в воздухе вдали от поверхности капли $C_\infty^{a''} < C_s^{a''}$, то капля будет испаряться, а при $C_\infty^{a''} > C_s^{a''}$ пар из воздуха будет конденсироваться на поверхности капли.

4. *Фазовые переходы в бинарной системе, проницаемая поверхность.*

В этом случае оба компонента взаиморастворимы в обеих фазах. Специальные условия совместности:

$$[T] = 0;$$

$$[u_\tau] = 0;$$

$$C^{a'} = C_s^{a'}(p, T);$$

$$C^{a''} = C_s^{a''}(p, T).$$

Таким образом, для бинарных смесей с проницаемой границей накладываются определенные ограничения на концентрации каждого из компонентов по обе стороны границы: эти концентрации равны равновесным концентрациям при давлении в системе и температуре поверхности раздела фаз. Из рис. 1.18 ясно, что в общем случае равновесные концентрации рассматриваемого компонента *a* не одинаковы в жидкой и паровой фазах при фиксированных температуре и давлении.

Использование соотношений, вытекающих из квазиравновесной схемы, позволяет составить замкнутое описание процессов.

Рассматриваемая схема тем более оправдана, чем меньше степень неравновесности реальных процессов.

## 1.9. НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЭФФЕКТЫ НА МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕ

### 1.9.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Квазиравновесная схема, которая во многих практических случаях оказывается оправданной, представляет собой приближенную модель. В принципиальном плане важными являются следующие вопросы:

1. Каковы границы правомерности использования квазиравновесной модели?

2. Каковы значения возможных погрешностей при использовании этой модели?

3. Каково содержание более точных специальных условий совместности, учитывающих неравновесные эффекты на межфазных границах?

Для ответа на эти вопросы необходимо располагать сведениями о реальной природе неравновесных явлений, возникающих на границе фаз в процессах тепло- и массообмена и фазовых переходов. Теория таких явлений крайне сложна и еще недостаточно разработана.

Общие физические оценки показывают, что неравновесные эффекты должны в первую очередь проявляться в газовой (паровой) фазе у межфазной границы. В конденсированных фазах (жидкость, твердое тело) отклонения от условий локального термодинамического равновесия наступают, по-видимому, позже, при существенно более высоких интенсивностях процессов переноса.

Теоретические расчеты пристенных неравновесных эффектов в газовой фазе базируются на молекулярно-кинетической теории. Основным исходным соотношением анализа является известное кинетическое уравнение Больцмана. Не ставя целью далее излагать сколь-либо подробно теорию этих эффектов (которая сейчас является самостоятельным разделом теоретической физики и достаточно сложна), укажем лишь на принципиальную сторону кинетического

подхода. Для этого приведем упрощенную форму основного кинетического уравнения, так называемое релаксационное кинетическое уравнение, которое сохраняет все основные черты более строгого уравнения Больцмана.

Будем рассматривать одномерный стационарный процесс переноса (вдоль оси $x_1$ на рис. 1.19) в газовой фазе вблизи межфазной границы $S$—$S$.

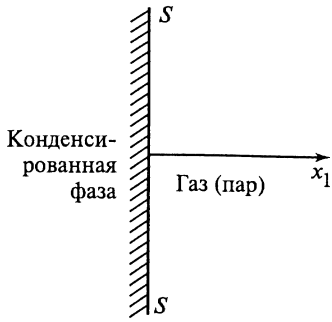



**Рис. 1.19. Схема расположения фаз у границы раздела**

Для этого случая релаксационное кинетическое уравнение имеет вид

$$C_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{\tau}(f_{eq} - f),$$

где $C_1$ — скорость движения молекул в проекции на ось $x_1$; $f$ — функция распределения молекул по скоростям; $f_{eq}$ — локально-равновесная функция распределения молекул по скоростям; $\tau$ — время релаксации, имеющее порядок величины среднего времени свободного пробега молекул между столкновениями.

При наличии переноса тепла, импульса или массы вдоль оси $x_1$ действительная функция распределения $f$ у поверхности изменяется вдоль координаты $x_1$. Это обусловлено тем, что при наличии процессов переноса функция распределения на поверхности (т.е. при $x_1 \to +0$) неравновесна, причем эта неравновесность имеет специфические черты, обусловленные механизмом обменных процессов на межфазной поверхности.

Качественный характер пристенной неравновесности может быть объяснен с помощью следующих соображений. При передаче тепла от газа к стенке имеется различие в спектрах молекул, летящих из объема к стенке и движущихся после отражения стенкой в направлении объема газа. Падающий спектр содержит более быстрые («горячие») молекулы по сравнению с отраженным. Функция распределения $f$ может быть подразделена на две части $f^+, f^-$, отвечающие отраженным и падающим молекулам, причем $f^+ \neq f^-$. Таким образом, распределение молекул по скоростям носит как бы

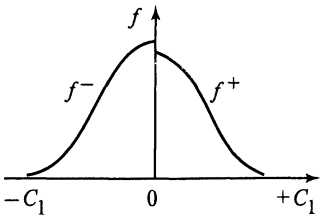



**Рис. 1.20. Примерный вид функции распределения в окрестности границы раздела фаз**

разрывный характер (т.е. различно для $C_1 > 0$ и $C_1 < 0$). Условно эта разрывность показана на рис. 1.20.

Аналогичное положение имеет место при переносе импульса и вещества. При переносе касательной составляющей импульса в падающем и отраженном спектрах молекул содержится разный «запас» касательной составляющей импульса газа. В процессе переноса массы (конденсация, испарение) падающий и отраженный спектры молекул переносят разную плотность вещества (их разность и определяет результирующий поток вещества). Таким образом, состояние газа (пара) на поверхности неравновесно и эта неравновесность усиливается по мере повышения интенсивности процессов переноса. По мере удаления от поверхности разрывный характер в распределении молекул постепенно утрачивается за счет «перемешивания» молекул вследствие их столкновений. Такой процесс, строго говоря, носит асимптотический характер, т.е. перестроение функции распределения происходит плавно с затухающей интенсивностью по мере удаления от поверхности. Основное изменение, однако, приходится на весьма тонкий слой у поверхности, эффективная толщина которого имеет порядок средней длины пробега молекул. Этот слой называется *слоем Кнудсена.* В плотных газах и парах, характеризующихся малыми числами Кнудсена

$$\mathrm{Kn} = \frac{l_{\text{мол}}}{L} << 1,$$

где $l_{\text{мол}}$ — длина свободного пробега молекул; $L$ — линейный масштаб области, охваченной процессами переноса в газовой фазе (толщина пограничного слоя Прандтля, поперечное сечение канала и т.д.), толщина слоя Кнудсена совершенно ничтожна по сравнению с макроскопическими геометрическими масштабами задачи (их отношение имеет порядок числа Kn). Однако анализ процессов в слое Кнудсена дает возможность найти уточненные неравновесные макроскопические граничные условия на межфазной поверхности.

За пределами слоя Кнудсена действительная функция распределения $f$ также в общем случае не совпадает с локально равновесной $f_{eq}$, однако здесь характер неравновесности иной. Функция распре-

деления не носит более разрывного характера, и ее отличие от равновесной связано с переменностью осредненных (макроскопических) характеристик газа в пространстве (градиенты температур, скорости газа и т.д.). В этой области оказываются правомерными феноменологические законы переноса тепла (закон Фурье), импульса (закон вязкого трения Ньютона) и вещества (закон диффузии Фика). В слое Кнудсена эти законы не выполняются. Таким образом, схема пристенной области, условно изображенная на рис. 1.21, состоит из слоя Кнудсена *I*, к которому примыкает область сплошной среды *II*. В ней выполняются уравнения Навье—Стокса. Часто эта область называется *навье-стоксовой областью*.

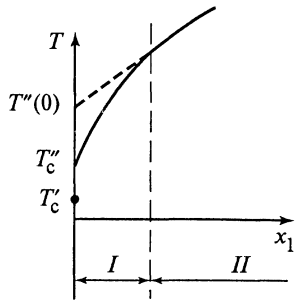



**Рис. 1.21. Поле температур в слое Кнудсена и навье-стоксовой области**

В большинстве реальных ситуаций интенсивность процессов переноса по сравнению с интенсивностью молекулярного перемешивания и молекулярными обменными процессами оказывается невысокой. Для этих условий сами отклонения функции распределения от локально-равновесной оказываются также небольшими:

$$f - f_{eq} << f_{eq}$$

и тогда можно в теоретическом анализе использовать только первые степени отклонения от равновесия (и опускать более высокие степени, как бесконечно малые величины). Такая операция называется линеаризацией, а основанная на ней неравновесная теория — линейной теорией.

Прежде чем переходить к рассмотрению результатов линейной теории неравновесных эффектов на межфазных границах, целесообразно остановиться еще на следующем моменте. Для практических приложений детальное описание полей температур, скоростей и т.д. в слое Кнудсена не представляет интереса из-за весьма малых размеров этого слоя. Поэтому результаты теоретического описания обычно представляют в специфической форме. Содержание этого приема рассмотрим на примере передачи тепла через непроницаемую поверхность. На рис. 1.21 схематически показано полученное теоретически действительное распределение температуры газа у поверхности, включая слой Кнудсена. Пунктиром показана экстраполяция температурного поля из внешней области (из навье-стоксовой

области) к поверхности. Соответственно, имеется *действительный* температурный скачок на поверхности $\Delta T_c = T_c'' - T_c'$ и *экстраполированный* (или фиктивный) скачок температур $\Delta T = T''(0) - T_c'$. Здесь $T_c''$ — действительная температура газа на поверхности; $T''(0)$ — экстраполированное значение температуры газа на поверхности (фиктивная величина).

Для практики достаточно иметь значение экстраполированного скачка температур $T''(0) - T_c'$, ибо по нему может быть построено правильное распределение температур во всем объеме газа (за исключением несущественного в приложениях тонкого слоя Кнудсена) на основе обычных уравнений сплошной среды. Поэтому для приложений важны значения экстраполированных параметров газа на поверхности. Действительные значения представляют лишь теоретический интерес*.

В последующих разделах под параметрами газа на поверхности понимаются именно экстраполированные величины.

### 1.9.2. ПЕРЕНОС ТЕПЛА ЧЕРЕЗ НЕПРОНИЦАЕМУЮ ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА ФАЗ

При отсутствии переноса массы (непроницаемая граница) вблизи поверхности раздела фаз перенос тепла осуществляется теплопроводностью. Неравновесная линейная кинетическая теория для таких условий приводит к заключению, что температура газа на поверхности $T''(0)$ не равна температуре конденсированной фазы на поверхности $T'(0)$ ($T_c'$ на рис. 1.21). Скачок температур $T''(0) - T'(0)$ оказывается пропорциональным тепловому потоку у поверхности в газовой фазе:

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{n \to 0}.$$

Итоговое соотношение кинетической теории для скачка температур содержит также коэффициент энергетической аккомодации $\alpha$, который отражает эффективность энергообмена при соударении и отражении молекул газа от поверхности конденсированной фазы.

* Часто в литературе (в основном в прикладных руководствах и пособиях) об истинных параметрах и скачках вообще не упоминается.

Этот коэффициент был введен Кнудсеном в 1911 г., и его определение имеет вид

$$\alpha = \frac{E_{\text{отр}} - E_{\text{пад}}}{E_{\text{с}} - E_{\text{пад}}},$$

где $E_{\text{пад}}$ — энергия падающего на поверхность потока молекул; $E_{\text{отр}}$ — энергия отраженного от поверхности потока молекул; $E_{\text{с}}$ — энергия отраженного потока в случае, если газ находится в равновесии с поверхностью и имеет температуру поверхности. Значения $\alpha$ могут изменяться от 0 до 1. При $\alpha = 1$ имеет место наиболее полный обмен энергией. Коэффициент энергетической аккомодации должен зависеть от рода газа, материала и состояния поверхности. Опытные данные показывают, что в обычных условиях $\alpha \approx 0{,}9$—1.

Итоговое соотношение линейной кинетической теории [18] имеет вид

$$\theta(0) = -\sqrt{\pi}\,\frac{1 - 0{,}41\alpha}{\alpha}\,\tilde{q}, \qquad (1.16)$$

где $\theta(0) = \dfrac{T''(0) - T'(0)}{T}$ — безразмерный температурный скачок на поверхности; $\tilde{q} = \dfrac{q}{q_*} = \dfrac{q}{p''\sqrt{2R_i T}}$ — безразмерный тепловой поток на поверхности; $R_i$ — газовая постоянная.

В качестве характерной температуры $T$, входящей в безразмерные параметры $\theta$ и $\tilde{q}$, можно брать любую из температур фаз, т.е.

$$T \approx T'(0) \approx T''(0).$$

Положительное значение поток тепла $q$ в соотношении (1.16) имеет при передаче тепла от поверхности к газу.

При $\alpha = 1$ из соотношения (1.16) следует, что

$$\theta(0) = -1{,}05\tilde{q}. \qquad (1.16а)$$

Целесообразность записи приведенных соотношений в безразмерной форме видна из следующих соображений. Масштабная величина для потока тепла $q_*$ пропорциональна одностороннему потоку энергии, переносимому через единичную контрольную поверх-

ность за счет теплового движения молекул газа. Это заключение становится понятным, если записать $q_*$ в форме:

$$q_* = R_i \rho'' C_{\text{тепл}} T,$$

где $C_{\text{тепл}} = \sqrt{2R_i T}$ — наиболее вероятная тепловая скорость движения молекул газа (которая, как известно, имеет порядок скорости звука в газе); $R_i$ — газовая постоянная.

Поэтому отношение

$$\tilde{q} = q/q_*$$

имеет смысл *параметра неравновесности* в процессе передачи тепла в газе. Таким образом, приведенное соотношение (1.16) есть *уточненное специальное условие* на поверхности раздела фаз, которое при строгом подходе должно заменять приближенное соотношение квазиравновесной схемы: $[T] = 0$. Можно видеть, что квазиравновесное приближение тем более оправдано, чем ниже значение параметра неравновесности $\tilde{q}$.

При фиксированном потоке тепла $q$ скачок температур $T''(0) - T'(0)$ растет по мере снижения давления газа, так как при этом уменьшается $q_*$. Обычно при атмосферном давлении скачок температур в большинстве практических задач несуществен.

При обтекании поверхности газовым потоком высокой скорости (аэродинамика) роль скачка температур на поверхности зависит от скорости обтекания (числа Маха), что легко показать, проведя следующие оценки.

При внешнем обтекании высокоскоростным потоком выражение для теплового потока можно выразить через число Стантона:

$$q = \mathrm{St}\,\rho'' u''_\infty (h''_c - h''_\infty),$$

где $(h''_c - h''_\infty)$ — разность полных энтальпий (энтальпий торможения) газа. Используя это выражение и учитывая, что отношение

$$\frac{u''_\infty}{C_{\text{тепл}}} \approx \mathrm{M},$$

где M — число Маха, а газовая постоянная $R_i$ по порядку величины близка теплоемкости газа $c''_p$, находим, что

$$\frac{c_p''[T''(0)-T'(0)]}{h_c''-h_\infty''} \approx \mathrm{St}\cdot\mathrm{M}.$$

Из проведенной оценки видно, что роль скачка температур возрастает по мере роста числа М. Абсолютные давления в этой ситуации несущественны.

### 1.9.3. ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ НЕПРОНИЦАЕМУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

При движении газового потока вдоль непроницаемой поверхности раздела фаз через поверхность осуществляется перенос касательной составляющей импульса, обусловленный вязкостью газа, который вызывает касательные напряжения трения на поверхности.

Кинетическое описание процесса показывает, что в действительности скорость газа на поверхности не равна нулю (при рассмотрении процесса в системе координат, в которой поверхность конденсированной фазы неподвижна), как это принимается в квазиравновесной схеме (рис. 1.22).

Линейная теория приводит к выводу, что скорость газа на поверхности $u''(0)$, называемая скоростью «скольжения», пропорциональна касательному напряжению на поверхности $\tau$. Для рассматриваемых условий существенно, насколько полно происходит потеря продольной составляющей импульса после столкновения и отражения молекул от поверхности. Этот эффект характеризуется коэффициентом аккомодации продольной составляющей импульса (аналогичным по структуре коэффициенту энергетической аккомодации). Существующие экспериментальные данные показывают, что этот коэффициент близок к единице (полное торможение падающего потока после столкновения и отражения молекул от поверхности). Поэтому итоговое соотношение линейной кинетической теории приведем для этого частного случая. Оно имеет вид

$$\tilde{u}(0) = \tilde{\tau}, \qquad (1.17)$$

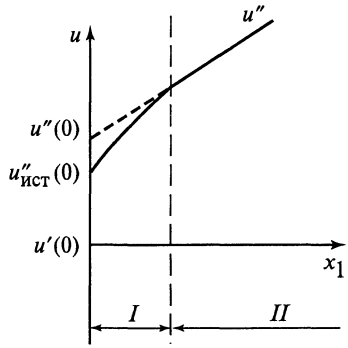



**Рис. 1. 22. Истинный и экстраполированный профили скорости**

где $\tilde{u}(0) = \dfrac{u''(0)}{C_{\text{тепл}}}$ — безразмерная скорость скольжения; $\tilde{\tau} = \dfrac{\tau}{p''} =$

$= \dfrac{\tau}{\rho''\,(C^2_{\text{тепл}}/2)}$ — безразмерное касательное напряжение.

В соотношении (1.17) безразмерная величина

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{p''}$$

имеет смысл *параметра неравновесности.*

Из соотношения (1.17) следует, что выводы квазиравновесного приближения $u''(0) = 0$ будут выполняться тем точнее, чем ниже параметр неравновесности.

При фиксированной величине $\tau$ скорость скольжения растет по мере снижения давления в системе. При умеренных скоростях и атмосферном давлении квазиравновесное приближение обычно оказывается оправданным.

При внешнем обтекании тела высокоскоростным потоком газа (аэродинамика) роль скорости скольжения зависит от скорости потока (числа Маха). Это можно показать путем следующих оценок. При внешнем обтекании тела касательное напряжение можно выразить через коэффициент сопротивления трения $c_f$:

$$\tau = \frac{c_f}{2}\,\rho''u''^2_\infty.$$

После подстановки этого выражения в соотношение (1.17) и учета того, что

$$\frac{u''_\infty}{C_{\text{тепл}}} \approx \text{M},$$

находим

$$\frac{u''(0)}{u''_\infty} \approx c_f \text{M}.$$

Таким образом, по мере роста числа Маха значение $\dfrac{u''(0)}{u''_\infty}$ увеличивается. При турбулентном течении газа, когда $c_f$ изменяется в относительно узких пределах, абсолютные давления несущественны.

Приведенные соображения показывают, что эффекты скольжения имеют существенное значение при полетах скоростных самолетов и космических аппаратов. В последнем случае из-за высокой разреженности атмосферы (аномально высокая кинематическая вязкость $\nu = \mu/\rho''$) режим обтекания поверхности космического объекта может оказаться ламинарным даже при очень высоких скоростях движения. Тогда эффект скольжения увеличивается со снижением давления, поскольку при ламинарном течении $c_f \sim 1/(\rho'')^{1/2}$.

### 1.9.4. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

Кинетический анализ показывает, что при испарении и конденсации граничные условия на межфазной поверхности оказываются более сложными, чем это принимается в квазиравновесном приближении:

$$[T] = 0; \quad T'(0) = T''(0) = T_s(p).$$

Для рассмотрения результатов кинетического описания необходимо ввести следующие величины:

$T'(0)$ — температура поверхности конденсированной фазы;

$p_{sc}$ — давление насыщения, отвечающее температуре поверхности, т.е. $p_{sc} = p_s\{T'(0)\}$; это — расчетная величина, отличная от актуального давления в системе;

$p''_\infty$ — актуальное давление пара вблизи поверхности (за пределами слоя Кнудсена);

$T''(0)$ — температура пара на поверхности раздела фаз (экстраполированное значение);

$j$ — поток вещества, пересекающий единичную площадку поверхности раздела фаз;

$q$ — поток тепла, пересекающий единичную площадку поверхности раздела фаз;

(положительные величины $j$ и $q$ отвечают потокам, передаваемым в паровую фазу);

$\beta$ — коэффициент конденсации (испарения), показывающий какая часть молекул пара, достигающих поверхности раздела фаз, конденсируется. Этот коэффициент (имеющий смысл коэффициента материальной аккомодации) лежит в пределах 0—1 и определяется экспериментально.

Результаты линейной теории показывают следующее:

1) давление в пределах слоя Кнудсена постоянно и равно $p''_\infty$, так что конденсированная фаза находится под тем же давлением, что и пар (без учета поверхностного натяжения на искривленной границе);

2) если $T_s$ есть расчетная температура насыщения при актуальном давлении в паровой фазе $p''_\infty$, то оказывается, что ни $T'(0)$, ни $T''(0)$ не равны $T_s$;

3) на поверхности раздела фаз существует скачок температур $[T] = T''(0) - T'(0)$, пропорциональный потоку вещества $j$ (если влияние теплового потока несущественно).

Кроме того, характеристикой процесса является разность $p''_\infty - p_{sc}$, которая специфична для задач фазовых переходов. Неверно было бы эту разность именовать «скачком давления» (хотя, к сожалению, в литературе такие толкования встречаются еще довольно часто). Величина $p''_\infty - p_{sc}$ представляет просто разность между актуальным давлением в системе и расчетным давлением насыщения $p_{sc}$, определяемым по температуре поверхности конденсированной фазы $T'(0)$.

Для записи количественных соотношений линейной теории целесообразно использовать величины:

безразмерный тепловой поток

$$\tilde{q} = \frac{q}{q_*} = \frac{q}{p''_\infty \sqrt{2R_i T}};$$

безразмерный массовый поток

$$\tilde{j} = \frac{j}{\rho'' \sqrt{2R_i T}} = \frac{j}{\rho'' C_{\text{тепл}}} = \frac{u''}{C_{\text{тепл}}};$$

безразмерный скачок температур

$$\theta(0) = \frac{T''(0) - T'(0)}{T};$$

безразмерная разность давлений

$$\tilde{\Delta} p = \frac{p''_\infty - p_{sc}}{p}.$$

С учетом этих обозначений итоги кинетического анализа [18] имеют вид:

$$\theta(0) = -0{,}45\tilde{j} - 1{,}05\tilde{q}; \tag{1.18}$$

$$\tilde{\Delta} p = -2\sqrt{\pi}\,\frac{1-0{,}4\beta}{\beta}\,\tilde{j} - 0{,}44\tilde{q}. \tag{1.19}$$

Эти соотношения содержат интересную информацию о специфике неравновесных эффектов при фазовых переходах. Последующий анализ показывает характерные особенности процесса.

*Анализ соотношений (1.18) и (1.19).*

1. При отсутствии потока массы $\tilde{j} = 0$ соотношение (1.18) переходит в соотношение (1.16а) о температурном скачке на непроницаемой поверхности (в предположении $\alpha = 1$, которое принято в анализе). Второе соотношение (1.19) при том же условии $\tilde{j} = 0$ определяет характерное значение $\Delta p$ в двухфазных однокомпонентных системах при наличии потока тепла и отсутствии потока массы.

2. В системах, где безразмерный поток тепла $\tilde{q}$ существенно меньше потока массы $\tilde{j}$ (обычные условия фазового перехода конечной интенсивности, когда отсутствуют значительные перегревы пара вдали от поверхности), соотношения (1.18) и (1.19) принимают вид (при $\tilde{q} << \tilde{j}$ ):

$$\theta(0) = -0{,}45\tilde{j}; \tag{1.18а}$$

$$\tilde{\Delta} p = -2\sqrt{\pi}\,\frac{1-0{,}4\beta}{\beta}\,\tilde{j}. \tag{1.19а}$$

Эти соотношения содержат интересные данные о термодинамическом состоянии пара у поверхности в процессах испарения и конденсации. Они касаются вопроса о том, какие знаки и значения отклонений $T''(0) - T_s$ и $T'(0) - T_s$ имеют место в реальных процессах. Для ответа на эти вопросы величина $p''_\infty - p_{sc}$ заменяется с помощью уравнения Клапейрона—Клаузиуса на соответствующую разность температур $T_s - T'(0)$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_s = \frac{h_{LG}\rho''\rho'}{T(\rho'-\rho'')} \approx \frac{h_{LG}\rho''}{T} = \frac{h_{LG}p''}{R_i T^2};$$

$$p''_\infty - p_{sc} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_s \{T_s - T'(0)\} = \frac{h_{LG}}{R_i T} \frac{T_s - T'(0)}{T} p''_\infty .$$

Тогда соотношение (1.19а) принимает вид

$$\frac{T_s - T'(0)}{T} = -2\sqrt{\pi} \frac{1 - 0{,}4\beta}{\beta} \frac{R_i T}{h_{LG}} \tilde{j} . \qquad (1.20)$$

Из соотношений (1.18а) и (1.20) имеем

$$\frac{T_s - T''(0)}{T} = \left(0{,}45 - 2\sqrt{\pi} \frac{1 - 0{,}4\beta}{\beta} \frac{R_i T}{h_{LG}}\right) \tilde{j} . \qquad (1.21)$$

Из соотношения (1.20) видно, что при испарении ($\tilde{j} > 0$) $T'(0) > T_s$, при конденсации ($\tilde{j} < 0$) $T'(0) < T_s$. Иначе говоря, процесс испарения имеет место, когда температура поверхности выше, а конденсация — когда температура поверхности ниже, чем температура насыщения при актуальном давлении в системе. Это заключение достаточно естественно и привычно.

Из соотношения (1.21) видно, что в тех же процессах знак разности $T_s - T''(0)$, а значит, и температура пара $T''(0)$ на поверхности зависит от знака выражения в скобках в (1.21). Для оценки этой величины можно привлечь известное физико-химическое эмпирическое правило Трутона: $\frac{h_{LG}}{R_i T} \approx 10$ (при нормальных условиях). Тогда оказывается, что в зависимости от значения коэффициента конденсации $\beta$ ответы могут быть разного знака. При $\beta = 1$ (что согласно существующим представлениям имеет место для ряда чистых веществ при невысоких давлениях) имеем

$$0{,}45 - 2\sqrt{\pi} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}24 > 0 .$$

Это значит, что при $\beta = 1$ в процессе *испарения* ($\tilde{j} > 0$) образуется *переохлажденный пар* $T''(0) < T_s$.

При конденсации и $\beta = 1$ *пар на поверхности оказывается перегретым* $T''(0) > T_s$.

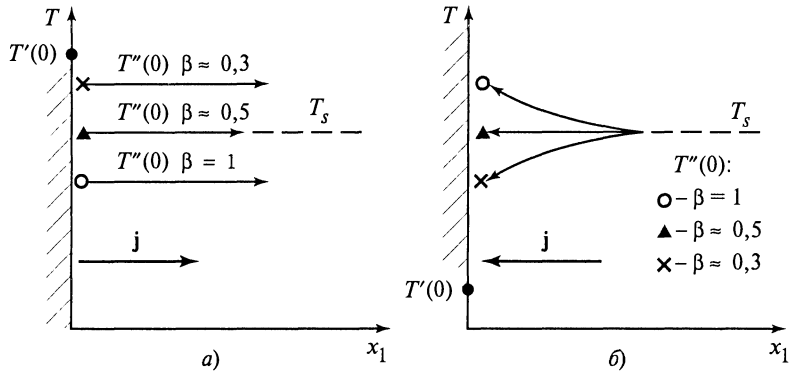



**Рис. 1.23. Значения температуры в паровой и конденсированной фазах при испарении (*а*) и конденсации (*б*) при различных коэффициентах испарения-конденсации**

По мере снижения β различие температур снижается, становится равным нулю при β ≈ 0,5 и далее меняет знак. Так, при β = 0,3 при испарении уже $T''(0) > T_s$, при конденсации $T''(0) < T_s$.

На рис 1.23 показано взаимное расположение температур $T'(0)$, $T''(0)$ и $T_s$ в процессах испарения и конденсации при разных β, отвечающее приведенному выше анализу.

Соотношения (1.18а) и (1.19а) показывают, что параметром неравновесности при фазовых переходах является величина:

$$\tilde{j} = \frac{j}{\rho'' C_{\text{тепл}}},$$

малость которой ($\mathbf{j} \to 0$) приводит к оправданности квазиравновесного приближения.

Пользуясь соотношениями (1.16)—(1.19а), легко оценить, насколько значимы неравновесные эффекты в каждом конкретном случае. При значениях параметров неравновесности $\tilde{q}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{j}$, меньших, чем $1 \cdot 10^{-3}$, квазиравновесная схема обеспечивает достаточную для инженерных расчетов точность. В свою очередь сама линейная теория, на основе которой получены указанные соотношения, справедлива при малых параметрах неравновесности, меньших примерно 0,02.

### 1.9.5. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

По мере увеличения интенсивности фазового перехода неравновесность в слое Кнудсена нарастает, причем изменения в характере взаимосвязи параметров процесса носят не только количественный, но и качественный характер. Так, при малой интенсивности испарение и конденсация обладают симметрией в том смысле, что описываются одними и теми же соотношениями (1.18)—(1.21), в которых направление процесса отражается знаком параметров неравновесности $\tilde{j}$ и $\tilde{q}$. В случае высокой интенсивности в протекании этих процессов выявлена значительная несимметрия. В частности, существует предельная интенсивность испарения

$$j_{\max} \approx 0{,}82\,\frac{\rho''_s\sqrt{2R_iT'}}{2\sqrt{\pi}}, \qquad (1.22)$$

где $T'$ — температура конденсированной фазы; $\rho''_s$ — равновесная плотность насыщенного пара, отвечающая этой температуре.

В этом режиме из всего числа эмитируемых поверхностью молекул около 18 % в результате столкновений возвращаются в конденсированную фазу (конденсируются), а примерно 82 % уносятся отходящим потоком, скорость которого равна скорости звука в паровой фазе. Что касается конденсации, то для нее подобный предел не существует; в 80-х годах были опубликованы результаты теоретических исследований сверхзвуковой конденсации, выполненные А.П. Крюковым, А.А. Абрамовым и М.Н. Коганом (см. [23]).

Результаты расчетов процесса интенсивного испарения [18, 64] представлены в табл. 1.3.

Данные таблицы хорошо согласуются с результатами, полученными в двух других научных группах (см. [18]) при использовании иных методов анализа. Как следует из этих данных, при высокой интенсивности испарения скачки температуры и плотности пара у межфазной границы становятся соизмеримыми с абсолютными значениями температуры и плотности. При $\beta = 1$ (данные табл. 1.3 приводятся для этого значения коэффициента испарения-конденсации) степень пересыщения пара столь высока, что вблизи межфазной поверхности еще прежде достижения предельной интенсивности испарения неизбежна объемная конденсация пара (так называемые скачки конденсации). Степень пересыщения пара очень сильно зависит

*Таблица 1.3.* **Параметры пара за пределами слоя Кнудсена при интенсивном испарении с плоской поверхности**

| $\frac{j2\sqrt{\pi}}{\rho''_s\sqrt{2R_iT'}}$ | $T''/T'$ | $\rho''/\rho''_s$ | $M_\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0,05 | 0,994 | 0,977 | 0,015 |
| 0,10 | 0,986 | 0,948 | 0,035 |
| 0,20 | 0,972 | 0,899 | 0,070 |
| 0,30 | 0,956 | 0,847 | 0,111 |
| 0,40 | 0,936 | 0,786 | 0,164 |
| 0,50 | 0,914 | 0,725 | 0,224 |
| 0,60 | 0,884 | 0,650 | 0,305 |
| 0,70 | 0,844 | 0,562 | 0,420 |
| 0,80 | 0,765 | 0,426 | 0,664 |
| 0,82 | 0,703 | 0,345 | 0,883 |

от коэффициента испарения-конденсации: при небольшом уменьшении $\beta$ ($\beta < 1$) пар становится насыщенным, а при некоторых, еще меньших $\beta$ — перегретым. Таким образом, качественные закономерности, выявленные в рамках линейной теории для малоинтенсивных процессов, подтверждаются и для высокоинтенсивного испарения, но в последнем случае все эффекты намного сильнее.

Для удобства практических расчетов авторы [64] провели аппроксимацию решения аналитическими функциями:

$$\frac{T' - T''}{T'} = 0{,}44\,\frac{u''_1}{\sqrt{2R_iT'}}; \tag{1.23}$$

$$\frac{T' - T''}{T'} = 0{,}265\,\frac{\rho''_s - \rho''}{\sqrt{\rho''_s\rho''}}; \tag{1.24}$$

$$j = 0{,}6\left(\frac{\rho''}{\rho''_s}\right)^{1/2}(\rho''_s - \rho'')\sqrt{2R_iT'}\,. \tag{1.25}$$

Соотношения (1.23)—(1.25) справедливы при $\beta = 1$. При $\beta < 1$ плотность пара $\rho''_s$ в этих соотношениях заменяется величиной $\rho''_*$, ко-

торая рассчитывается по уравнению, предложенному М. Н. Коганом и Н.К. Макашовым:

$$\rho''_* = \rho''_s\left(1 - 2\sqrt{\pi}\,\frac{j}{\rho''_s\sqrt{2R_iT'}}\,\frac{1-\beta}{\beta}\right). \qquad (1.26)$$

При известной температуре конденсированной фазы $T'$ уравнения (1.23) и (1.24) однозначно определяют температуру и плотность пара при одном заданном внешнем параметре $p''_\infty$ (при $\beta < 1$ к этим уравнениям добавляется (1.26)).

В правой части (1.23) выражение $u''_1/\sqrt{2R_iT'} = \tilde{j}$; следовательно, соотношение (1.18а) для скачка температур при малоинтенсивном испарении (линейная теория) практически совпадает с результатом аппроксимации численных расчетов (1.23) для высокоинтенсивного испарения (здесь надо иметь в виду, что $\tilde{j} > 0$, $T' = T'(0)$, а температура пара в газодинамической области не изменяется, т.е. $T''(0) \approx T''$).

При анализе интенсивной конденсации при том же условии — известной температуре $T'$ для замкнутого описания процесса необходимо задание двух внешних параметров, например $p''_\infty$ и $T''_\infty$. В этом отношении проявляется несимметрия интенсивных процессов испарения и конденсации. Результаты исследования интенсивной конденсации [64] аппроксимированы следующим уравнением:

$$j = 1{,}67\,\frac{(p_{sc} - p''_\infty)}{\sqrt{2\pi R_iT''}}\left[1 + 0{,}515\ln\left(\frac{p''_\infty}{p_{sc}}\sqrt{\frac{T'}{T''}}\right)\right], \qquad (1.27)$$

которое справедливо при $\beta = 1$. При $\beta < 1$ расчетное давление $p_{sc}$ определяется как $p_{sc} = \rho''_* R_iT'$, где $\rho''_*$ рассчитывается по формуле (1.26). Расчеты показывают, что даже при незначительном уменьшении $\beta$ в сравнении с $\beta = 1$ интенсивность конденсации резко снижается из-за «экранирующего» влияния потока отраженных молекул. Соотношение (1.27) переходит в формулу (1.19а) линейной теории, если $p''_\infty/p_{sc} \to 1$ и $T''/T'(0) \to 1$, т.е. при условиях, характерных для малоинтенсивной конденсации.

Важным результатом анализа интенсивной конденсации является вывод, что давление пара в газодинамической области (за пределами слоя Кнудсена) практически постоянно.

В заключение целесообразно отметить следующее:

1. Для бинарной системы при фазовых переходах выражения для уточненных граничных условий пока не получены. Кинетический анализ этого процесса более сложный. Можно думать, что в этом случае, кроме скачка температуры, на поверхности будут наблюдаться отклонения концентраций пара от равновесных значений.

2. Скачок температур и скорость скольжения на непроницаемой поверхности были обнаружены довольно давно (конец XIX — начало XX веков), и имеется множество экспериментальных работ в этой области. Приведенные выше соотношения для этих условий получены путем строгого теоретического анализа и имеют более поздний срок (1960—1970 гг.). До этого в литературе использовались упрощенные соотношения оценочного характера.

3. Существование скачка температур $T''(0) - T'(0)$ при фазовых переходах установлено экспериментально достаточно достоверно в ряде прямых и косвенных опытов. В частности, соотношение (1.27) нашло подтверждение в опытах по интенсивной конденсации паров ртути (см. [18]).

4. Анализ сверхзвуковой конденсации проведен лишь в 80-е годы (см. [23]). Выявлено чрезвычайно сильное влияние коэффициента конденсации $\beta$ на ход процесса. Этот вывод, как и отмеченные выше эффекты перегрева пара при конденсации и пересыщения его при испарении, особенно при интенсивном, еще ждет своего экспериментального подтверждения.

Глава вторая

# ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СИСТЕМ

В гидростатике газожидкостных систем рассматриваются задачи о равновесной форме свободной поверхности жидкости в сосудах и капиллярах, о форме и размерах неподвижных пузырьков и т.д. Таким образом, в анализе существенны следующие эффекты: поверхностная энергия на границах жидкость—твердое тело, газ—твердое тело, жидкость—газ и потенциальная энергия фаз в поле тяжести (силы тяжести).

В прикладном отношении эти задачи представляют значительный интерес для условий пониженных и близких к нулю напряженностей поля массовых сил, когда капиллярные эффекты существенны для больших систем (жидкость в контейнере и т.д.)

## 2.1. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

### 2.1.1. ПОВЕРХНОСТНАЯ ЭНЕРГИЯ И ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

Реальные границы раздела фаз представляют собой тонкие слои сложной структуры. В таких пограничных слоях молекулы вещества взаимодействуют одновременно с молекулами обеих фаз. Поэтому строение и свойства переходного слоя существенно отличаются от строения и свойств вещества во внутренних объемах фаз. Эффективная толщина переходного слоя очень невелика и имеет порядок радиуса молекулярного взаимодействия (примерно $10^{-9}$ м). Детальное рассмотрение строения переходного слоя представляет собой весьма трудную задачу. До настоящего времени, несмотря на значительные усилия и наличие серьезных проработок, молекулярная теория переходных слоев далека от завершения.

Весьма малая толщина переходного слоя является аргументом в пользу идеализации, при которой граница раздела фаз трактуется

просто как геометрическая поверхность. Такая модель поверхности часто именуется поверхностью разрыва; при переходе через поверхность свойства вещества (плотность, внутренняя энергия, скорость и т.п.) меняются скачкообразно. Переход к геометрической поверхности раздела фаз существенно упрощает анализ. Однако, очевидно, что при введении модели поверхности разрыва информация о свойствах переходного слоя не должна теряться. Поэтому межфазным границам следует поставить в соответствие определенные макроскопические (феноменологические) свойства, рассмотренные ниже.

Увеличение площади межфазной поверхности сопровождается затратой работы. Молекулярная интерпретация этого эффекта состоит в том, что при увеличении площади границы определенное число молекул из объемов фаз должно быть переведено в граничный слой, а это требует затраты работы. При изотермических условиях ($T$ = const) работа образования нового элемента межфазной поверхности $\mathrm{d}F$ составляет $\sigma\,\mathrm{d}F$ и может рассматриваться как приращение *свободной энергии поверхности* $\mathrm{d}U_F$:

$$\mathrm{d}U_F = \sigma\,\mathrm{d}F \quad (T = \text{const}). \tag{2.1}$$

При интерпретации границы раздела как геометрической поверхности объемы фаз при увеличении поверхности не изменяются, поэтому $\mathrm{d}U_F$ имеет смысл избыточной свободной энергии системы из-за наличия поверхности.

Коэффициент $\sigma$, Дж/м$^2$ (или, что то же самое, Н/м, или кг/с$^2$) в соотношении (2.1) имеет смысл удельной свободной энергии поверхности раздела фаз. Величина $\sigma$ зависит от природы фаз, образующих поверхность. От размера поверхности $\sigma$ не зависит. Поэтому (2.1) можно записать в виде

$$U_F = \sigma F. \tag{2.1а}$$

Далее для границы двух текучих сред (газ—жидкость или жидкость—жидкость) будем писать $\sigma$ (без индексов), для границы твердое тело—газ и твердое тело—жидкость соответственно $\sigma_{тг}$, и $\sigma_{тж}$. Для границы газ—жидкость (или жидкость—жидкость) $\sigma$ называется также *поверхностным натяжением.* В этом названии оттеняется силовой (динамический) аспект $\sigma$. Оба названия — поверхностная свободная энергия и поверхностное натяжение — здесь являются синонимами.

Определим теперь остальные характеристики поверхности: поверхностную энергию и энтропию. Свободная энергия (как известно из термодинамики) представляет собой внутреннюю энергию $E$ за вычетом величины $TS$, где $S$ — энтропия. Поэтому для поверхностной свободной энергии можно записать

$$U_F = E_F - TS_F, \qquad (*)$$

где $E_F$ и $S_F$ — *поверхностные энергия* и *энтропия* межфазной границы.

Полное приращение поверхностной свободной энергии для обратимых процессов согласно последнему соотношению и (2.1а) представляется в виде

$$\mathrm{d}U_F = \mathrm{d}E_F - T\,\mathrm{d}S_F - S_F\mathrm{d}T = \sigma\,\mathrm{d}F + F\,\mathrm{d}\sigma. \qquad (**)$$

Объединенное уравнение первого и второго законов термодинамики дает следующее соотношение для теплоты $Q_F$, поглощаемой в процессе увеличения поверхности раздела фаз:

$$\mathrm{d}Q_F = T\,\mathrm{d}S_F = \mathrm{d}E_F - \sigma\,\mathrm{d}F. \qquad (***)$$

Из уравнений (**) и (***) находим, что поверхностная энтропия межфазной границы определяется соотношением

$$S_F = -F\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}. \qquad (2.2)$$

С учетом определений энтропии (2.2), свободной поверхностной энергии (2.1а) и уравнения (*) получим выражение для поверхностной энергии $E_F$:

$$E_F = F\left(\sigma - T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}\right). \qquad (2.3)$$

Очевидно, что энтропия единицы площади поверхности раздела фаз равна $-\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$, а энергия единицы площади межфазной поверхности составляет $\sigma - T\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$. Поскольку энтропия поверхности — величина заведомо положительная, то температурная производная удельной свободной поверхностной энергии — отрицательна, т.е. $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T} < 0$.

Из соотношений (2.2) и (***) легко выразить количество теплоты, поглощаемой в процессе увеличения площади межфазной поверхности,

$$\mathrm{d}Q_F = -T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}F. \qquad (2.4)$$

Следовательно, $-T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T} = q_F$ представляет собой поглощение теплоты при образовании единицы поверхности.

Можно отметить, что поглощение теплоты при образовании поверхности, вообще говоря, незначительно и в практических расчетах обычно не учитывается (см. пример).

Итак, все термодинамические характеристики поверхности раздела фаз с помощью соотношений (2.1а)—(2.4) выражаются через удельную свободную поверхностную энергию $\sigma$ и ее температурную производную $-\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$.

**Пример.** Рассчитать поверхностную энергию и теплоту образования единицы поверхности раздела фаз для системы вода—насыщенный пар при температурах 20, 100, 200 °С.

Значения коэффициента поверхностного натяжения $\sigma$ и его температурной производной найдем из таблиц свойств воды. Теплота образования единицы поверхности раздела фаз равна $-T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$, а удельная поверхностная энергия есть $\sigma - T\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$, т.е. легко рассчитываются при известных значениях $\sigma$ и $-\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}$. Результаты расчетов сведены в табл. 2.1, где вторая и третья строки представляют собой справочные данные. Рисунок 2.1, воспроизводящий данные таблицы, дает наглядное представление об изменении удельных значений свободной поверхностной энергии, поверхностной энергии образования поверхности и теплоты образования поверхности при возрастании температуры. Итак, с ростом температуры удельная поверхностная энергия $E_F/F$ несколько увеличивается, тогда как удельная свободная поверхностная энергия $\sigma$ уменьшается. Теплота образования 1 м$^2$ поверхности составляет величины порядка $10^{-1}$ Дж (прмерно $10^{-5}$ ккал). Величина крайне мала, что оправдывает пренебрежение ею в практических расчетах.

В критической точке ($p_{кр}$, $T_{кр}$) пар и жидкость неразличимы, граница раздела исчезает, $\sigma = 0$. При $T < T_{кр}$ зависимость поверхностного натяжения жидкости от температуры близка к линейной,

*Таблица 2.1.* **Термодинамические характеристики поверхности раздела фаз: вода—водяной пар**

| Характеристика | $T$, К | | |
|---|---|---|---|
| | 293 | 373 | 473 |
| $\sigma \cdot 10^2$, Дж/м$^2$ | 7,42 | 6,87 | 3,77 |
| $-\frac{d\sigma}{dT} \cdot 10^4$, Дж/(м$^2 \cdot$ К) | 0,97 | 1,9 | 2,2 |
| $\left(-T\frac{d\sigma}{dT}\right) \cdot 10^2$, Дж/м$^2$ | 2,84 | 7,1 | 10,9 |
| $\left(\sigma - T\frac{d\sigma}{dT}\right) \cdot 10^2$, Дж/м$^2$ | 10,3 | 14,0 | 14,7 |

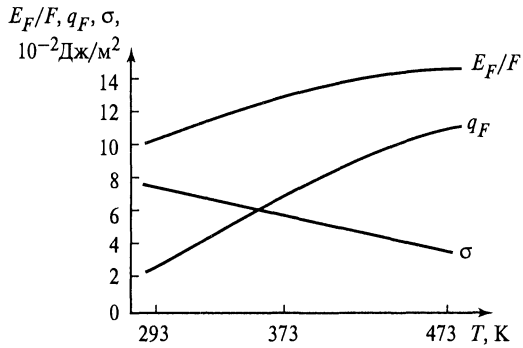



**Рис. 2.1. Удельные значения поверхностной энергии $E_F/F$, теплоты образования поверхности $q_F$ и свободной поверхностной энергии $\sigma$ для воды в зависимости от температуры**

что отражает и рис. 2.1. Для однокомпонентных чистых жидкостей достаточной для многих практических расчетов точностью обладает формула

$$\sigma(T) = \sigma_0 \left(1 - \frac{T}{T_{кр}}\right)^n, \qquad (2.5)$$

где $T_{кр}$, $\sigma_0$, $n$ — индивидуальные параметры для данного вещества (температура, естественно, отсчитывается по абсолютной шкале). Показатель степени $n$ слабо изменяется для различных

жидкостей, и в отсутствие более детальной информации можно принять $n = 11/9$. Если опытная информация о поверхностном натяжении однокомпонентной жидкости отсутствует, то его можно приближенно оценить по формуле

$$\sigma = BT_{кр}\left(1 - \frac{T}{T_{кр}}\right)\left(\frac{\rho}{M}\right)^{2/3}, \qquad (2.6)$$

где $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Дж/К; $\rho$ — плотность жидкости, кг/м$^3$; $M$ — молекулярная масса. Для большинства практически важных веществ значения $\sigma$ можно найти в справочниках (например, [4, 39]).

### 2.1.2. ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

Поверхностная свободная энергия (поверхностное натяжение) на границе двух текучих фаз: газ—жидкость, жидкость—жидкость вызывает поверхностный скачок давлений в фазах, пропорциональный кривизне границы:

$$p^{(1)} - p^{(2)} = 2\sigma H. \qquad (2.7)$$

Соотношение (2.7) представляет собой известную формулу Лапласа (1806 г.). Здесь $H = 0{,}5\,(1/R_1 + 1/R_2)$ — средняя кривизна поверхности в данной точке, которая (как это доказывается в дифференциальной геометрии) выражается через главные радиусы кривизны $R_1$ и $R_2$ в этой точке (рис. 2.2). В простейшем случае сферы $R_1 = R_2 = R$, и формула Лапласа принимает вид

$$p^{(1)} - p^{(2)} = \frac{2\sigma}{R}, \qquad (2.7а)$$

причем внутренняя фаза есть фаза 1.

Из формулы Лапласа виден динамический смысл поверхностного натяжения $\sigma$, которое наподобие упругой оболочки сжимает внутреннюю фазу. Таким образом, на границе двух текучих

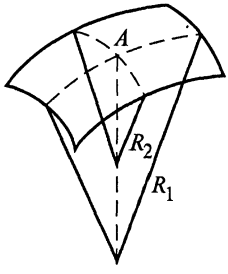



**Рис. 2.2. Главные радиусы кривизны поверхности в точке $A$**

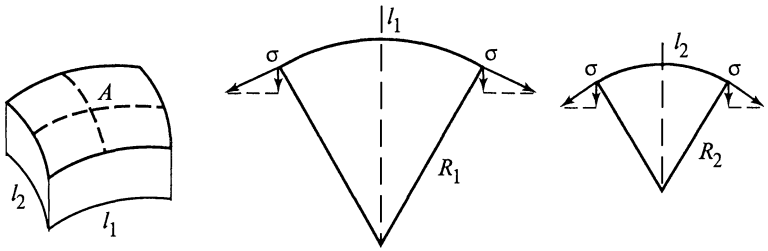



**Рис. 2.3. Силы, действующие на поверхности раздела фаз в окрестности точки *A***

сред величина σ с одинаковым правом может рассматриваться как поверхностная свободная энергия с размерностью Дж/м$^2$ и как сила, приложенная к единице длины линии на поверхности, направленная по касательной к поверхности, с размерностью Н/м. В соответствии с этим вывод (обоснование) формулы Лапласа может быть проведен двумя путями.

*Вывод, основанный на рассмотрении баланса сил.* Рассмотрим малый участок поверхности около данной точки *A* (как это показано на рис. 2.3).

В плоскостях главных нормальных сечений (показанных на рисунке) сила поверхностного натяжения σ направлена по касательной к границам. Разложим ее на составляющие. Проекции силы σ внутрь первой фазы равны соответственно $\sigma(l_1/2)/R_1$ и $\sigma(l_2/2)/R_2$, что следует из подобия соответствующих треугольников. Поэтому с обеих сторон каждого нормального сечения силы, действующие внутрь первой фазы, составляют $\sigma l_1/R_1$, $\sigma l_2/R_2$. Умножая $\sigma l_1/R_1$ на $l_2$ и $\sigma l_2/R_2$ на $l_1$ и складывая, получаем результирующую силу, действующую на поверхность раздела фаз в окрестности точки *A*:

$$\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)l_1 l_2 .$$

Она должна быть при равновесии равна силе избыточного давления первой фазы $(p^{(1)} - p^{(2)})$ на площади $l_1 l_2$:

$$(p^{(1)} - p^{(2)})\, l_1 l_2.$$

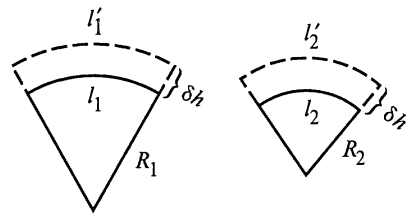



**Рис. 2.4. Виртуальное смещение поверхности раздела фаз**

Приравнивая эти соотношения, получаем искомую формулу (2.7). (Можно заметить еще, что «растягивающие» проекции силы натяжения взаимно компенсируются на противоположных сторонах элементов.)

*Вывод, основанный на рассмотрении* $\sigma$ *как поверхностной энергии.* Рассмотрим тот же малый участок межфазной поверхности площадью $l_1 l_2$. Пусть теперь поверхность подвергается малому виртуальному смещению на расстояние $\delta h$, так что в плоскостях нормальных сечений размеры $l_1$ и $l_2$ увеличиваются до $l_1'$ и $l_2'$ (рис. 2.4):

$$l_1' = l_1 \frac{R_1 + \delta h}{R_1}; \quad l_2' = l_2 \frac{R_2 + \delta h}{R_2}.$$

Работа сил давления при смещении границы составляет $(p^{(1)} - p^{(2)})\, l_1 l_2 \delta h$. Кроме того, из-за увеличения площади поверхности $l_1' l_2' - l_1 l_2 \approx l_1 l_2 \,(1/R_1 + 1/R_2)\, \delta h$ (с точностью до малой величины $\delta h^2 \,(l_1 l_2/(R_1 R_2))$ затрачивается работа на создание избыточной поверхностной энергии $(\delta U_F)$:

$$-\sigma l_1 l_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta h.$$

Суммарная работа в условиях термодинамического равновесия при рассматриваемом малом смещении границы должна быть равна нулю. Отсюда вновь следует искомая формула (2.7).

### 2.1.3. УСЛОВИЯ СМАЧИВАНИЯ ЖИДКОСТЬЮ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При анализе условий смачивания необходимо рассмотреть систему из трех фаз: жидкость, твердое тело, газ (рис. 2.5). В зависимости от значений поверхностных свободных энергий $\sigma$, $\sigma_{тг}$ и $\sigma_{тж}$ в месте контакта трех фаз устанавливается определенный угол $\theta$, так называемый *краевой угол смачивания* (по соглашению отсчитывается внутрь жидкой фазы).

Выведем зависимость $\theta$ от значений $\sigma$, $\sigma_{тг}$ и $\sigma_{тж}$ из рассмотрения вариации полной поверхностной энергии системы. Пусть пристенный участок жидкости подвергается бесконечно малому смещению (см. рис. 2.5, *б*). При этом поверхности контакта фаз изменяются. Здесь рассматривается плоский случай, но ввиду произвольности и малости «контрольной высоты» $h$ все результаты будут пригодны и для любых объемных форм.

На границе газ—жидкость энергия увеличивается на $\sigma(l' - l) = \sigma\,\mathrm{d}l$. На границе твердое тело—жидкость энергия увеличивается на $\sigma_{тж}\,\mathrm{d}x$. На границе твердое тело—газ энергия уменьшается на $\sigma_{тг}\,\mathrm{d}x$.

Суммарное изменение поверхностной энергии

$$\mathrm{d}U_F = \sigma\,\mathrm{d}l + (\sigma_{тж} - \sigma_{тг})\,\mathrm{d}x.$$

В условиях равновесия значение $\delta U_F$ минимально. Следовательно, $\dfrac{\partial U_F}{\partial \theta} = 0$, $\dfrac{\partial^2 U_F}{\partial \theta^2} > 0$ — условия, определяющие равновесное значение угла $\theta$.

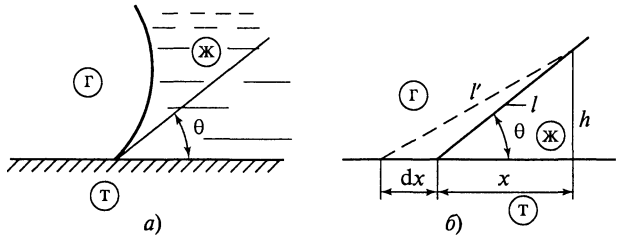



**Рис. 2.5. Границы трех фаз в равновесии (*а*) и схематическое изображение малого плоского участка этих границ в окрестности точки контакта трех фаз (*б*)**

Поскольку $x = h\,\mathrm{ctg}\theta$, $l = \dfrac{h}{\sin\theta}$, имеем:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{h}{\sin^2\theta}; \quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta} = -h\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Тогда условие $\dfrac{\partial U_F}{\partial\theta}$ принимает вид

$$[\sigma\cos\theta + (\sigma_{тж} - \sigma_{тг})]\frac{h}{\sin^2\theta} = 0.$$

Отсюда

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{тг} - \sigma_{тж}}{\sigma}. \qquad (2.8)$$

Это искомое соотношение часто называют уравнением Юнга (1805 г.).

Непосредственными вычислениями можно показать, что условие $\partial^2 U_F/\partial\theta^2 > 0$ выполняется всегда. (Эти простые выкладки здесь опущены.) Таким образом, соотношение (2.8) определяет равновесное значение краевого угла смачивания $\theta$ через значения поверхностных свободных энергий на границах трех фаз.

Можно отметить, что (2.8) обычно в литературе выводится из рассмотрения баланса сил. Этот вывод в физическом плане нам представляется спорным. Он таков: в точке контакта трех фаз приложены три «силы» поверхностного натяжения (рис. 2.6). (Две из них: $\sigma_{тг}$ и $\sigma_{тж}$ некорректно трактовать как «силы», и неясно, к чему, собственно, они приложены). Далее в выводе говорится, что при равновесии должна отсутствовать результирующая «сила» вдоль поверхности:

$$\sigma\cos\theta + \sigma_{тж} - \sigma_{тг} = 0.$$

Отсюда следует формула (2.8).

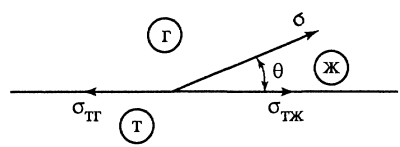



**Рис. 2.6. Схема для вывода формулы (2.8) из баланса «сил»**

Для запоминания этот простой «вывод» удобен. Однако физическая аргументация, как отмечено выше, выглядит дискуссионной. В [9] показано, что на границе твердого тела поверхностное натяжение и удельная свободная энергия поверхности не совпадают, и вывод уравнения (2.8) из баланса сил являет собой редкий случай, когда неверный метод приводит к правильному результату.

Уравнение (2.8) связывает $\theta$ с величинами $\sigma_{тг}$ и $\sigma_{тж}$, которые обычно неизвестны. Имеются лишь приближенные теоретические оценки для некоторых частных случаев. Поэтому обычно угол измеряется из опыта, и с помощью (2.8) тогда можно получить информацию о разности $\sigma_{тг} - \sigma_{тж}$.

При $\theta < \pi/2$ жидкость, как говорят, смачивает поверхность. Такая поверхность называется *гидрофильной.* При $\theta > \pi/2$ считается, что жидкость не смачивает поверхность, или что поверхность *гидрофобная.* Следует отметить, что граница газ—твердое тело обычно не является чистой. Она покрыта молекулярными адсорбированными слоями, слоями оксидов и т.д., поэтому на практике условия смачивания обычно нестабильны, чувствительны к различным примесям, неоднородностям поверхности и часто плохо воспроизводимы.

Малые значения $\theta \to 0$ имеют криогенные жидкости и расплавленные щелочные металлы (на стальных стенках). В частности, жидкий гелий обнаруживает абсолютную смачиваемость ($\theta = 0$) по отношению ко всем исследованным материалам. Стекло дает хорошо известный пример гидрофобной поверхности по отношению к ртути ($\theta = 130$—$150°$) и вместе с тем при тщательной очистке абсолютно смачивается водой. Вода смачивает обезжиренную поверхность обычных конструкционных материалов (сталь, никель, медь, латунь, алюминий); при этом краевой угол в зависимости от чистоты обработки поверхности и уровня температуры изменяется в пределах от 30 до 90°. Для образования гидрофобной поверхности в случае контакта с водой применяются различные поверхностно-активные добавки — гидрофобизаторы. В естественных условиях вода плохо смачивает ($\theta > \pi/2$) фторопласт (тефлон) и ряд близких материалов. В [39] приводятся справочные данные о краевых

углах смачивания для некоторых сочетаний поверхность—жидкость.

В заключение отметим, что краевой угол $\theta$ является локальной характеристикой поверхности в месте контакта с жидкостью и газом и теоретически не должен зависеть от условий в объеме жидкой фазы. При теоретическом анализе заданное значение угла $\theta$ выступает как граничное условие на поверхности твердой фазы.

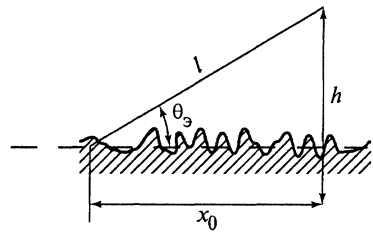



**Рис. 2.7. Границы раздела трех фаз на шероховатой твердой поверхности**

Реальные твердые поверхности всегда являются шероховатыми, в силу чего экспериментально определяемые значения краевого угла $\theta_э$ оказываются меньше, чем теоретические $\theta_т$, т.е. те, которые можно было бы рассчитать при известных значениях $\sigma_{тг}$ и $\sigma_{тж}$.

Действительно, если к схеме рис. 2.7 применить те же рассуждения, что использовались при выводе формулы (2.8), и учесть, что действительная поверхность соприкосновения жидкости и твердой стенки больше расчетной в отношении $x_д/x_0 = \psi > 1$, то получим:

$$\Delta U_F = \sigma \Delta l + (\sigma_{тж} - \sigma_{тг}) \Delta x_д$$

и далее, повторяя анализ, приводящий к (2.8), будем иметь в итоге

$$\cos\theta_э = \frac{\sigma_{тг} - \sigma_{тж}}{\sigma} \psi = \psi \cos\theta_т .$$

Краевой угол $\theta_т$ является действительной локальной характеристикой смачиваемости материала твердой стенки, а определяемый в опытах угол $\theta_э$ отражает некоторую эффективную характеристику поверхности.

Очевидно, что увеличение шероховатости при $\theta < \pi/2$ будет соответствовать улучшению эффективной смачиваемости. Так, при $\theta_т = 45°$, $\cos\theta_т \approx 0{,}7$ для шероховатой поверхности с характеристикой $\psi = x_д/x_0 \approx 1{,}4$ получим $\cos\theta_э \approx 1{,}0$, т.е. $\theta_э = 0°$ — абсолютная смачиваемость.

## 2.2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

### 2.2.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим область двухфазной системы (рис. 2.8).

Согласно уравнению Лапласа имеем

$$p''(z) - p'(z) = 2\sigma H(z). \qquad (*)$$

Индексы $''$ и $'$ означают «газ» и «жидкость». Величина $H(z)$ есть средняя кривизна границы в данной точке поверхности на уровне $z$.

При гидростатическом равновесии фазы неподвижны. Давление в них меняется линейно с высотой за счет поля тяжести. Уравнения баланса импульса (при нулевой скорости):

$$\frac{dp''}{dz} = -g\rho''; \quad \frac{dp'}{dz} = -g\rho'$$

после интегрирования дают:

$$p''(z) = p''(0) - g\rho'' z;$$

$$p'(z) = p'(0) - g\rho' z. \qquad (**)$$

Подставляя полученные соотношения (**) в исходное уравнение (*), получаем

$$2\sigma H(z) = g(\rho' - \rho'')z + \text{const}. \qquad (2.9)$$

Это и есть *общее уравнение гидростатического равновесия*, $\text{const} = p''(0) - p'(0)$ определяется из граничных условий конкретной задачи. Кривизна поверхности $H(z)$ — нелинейный дифференциальный оператор второго порядка. В частности, если поверхность в декартовой системе координат определяется как $z = f(x, y)$, то

$$H(z) = \text{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + (\nabla f)^2}}\right).$$

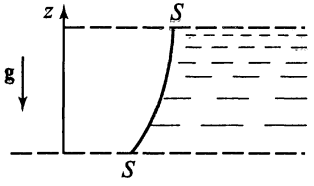



**Рис. 2.8. К выводу общего уравнения гидростатического равновесия**

Таким образом, (2.9) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка; его интеграл определяет форму равновесной поверхности в газожидкостной системе.

Отметим, что если на рис. 2.8 обратить ось $z$ (т.е. заменить $z$ на $-z$), то в (2.9) перед членом $g(\rho' - \rho'')z$ появится минус. То же самое произойдет, если поменять фазы местами на рис. 2.8.

### 2.2.2. УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Целесообразно представить (2.9) в безразмерном виде. Как уже указывалось, гидростатическое равновесие определяется соотношением сил тяжести $f_g$ и сил поверхностного натяжения $f_\sigma$. Если эти силы отнесены к единице площади межфазной поверхности, то выражения для них имеют следующую структуру (легко определяемую из (2.9)):

$$f_g \sim g(\rho' - \rho'')L;$$

$$f_\sigma \sim \sigma / L,$$

где $L$ — характерный линейный размер системы.

Отношение этих сил дает число (критерий) Бонда:

$$\mathrm{Bo} = \frac{f_g}{f_\sigma} = \frac{g(\rho' - \rho'')L^2}{\sigma}. \qquad (2.10)$$

При числах Бонда, существенно больших единицы (Bo >> 1), силы тяжести значительно превосходят силы поверхностного натяжения, а при Bo < 1, напротив, преобладающими являются силы поверхностного натяжения, или, как нередко говорят, капиллярные силы. Условие Bo = 1 определяет линейный масштаб области, в которой силы поверхностного натяжения и тяжести соизмеримы. Этот масштаб получил название капиллярной постоянной (постоянной Лапласа)

$$b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}. \qquad (2.11)$$

Капиллярная постоянная, как несложно убедиться, имеет размерность длины и в земных условиях ($g \approx 9{,}81$ м/с) для большинства жидкостей равна 1—3 мм. Однако при ослабленной гравитации масштаб проявления сил поверхностного натяжения резко возрастает, капиллярная постоянная становится весьма большой. В силу этого

задачи гидростатики стали привлекать внимание исследователей в связи с развитием космонавтики.

Использование капиллярной постоянной в качестве масштаба позволяет разделить различные сосуды, применяемые в технике, на капилляры и собственно сосуды. Отнесение сосуда к тому или иному классу определяется соотношением его поперечного линейного размера $L$ и капиллярной константы $b$: если $L >> b$, имеем «сосуд»; если $L \leq b$, имеем капилляр.

С помощью капиллярной константы (2.9) приводится к безразмерному виду. Для этого достаточно поделить все члены уравнения на $\sqrt{\sigma g(\rho' - \rho'')}$. Безразмерная форма имеет вид

$$2\tilde{H}(\tilde{z}) = \pm \tilde{z} + \text{const}, \tag{2.12}$$

где $\tilde{z} = z/b$, $2\tilde{H} = b\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, т.е. все линейные размеры измеряются в долях капиллярной постоянной; знак $\pm$ учитывает ориентацию $z$ и размещение фаз, как это указывалось выше; const — безразмерное число.

Интеграл уравнения (2.9) или (2.12) определяет равновесную форму границы раздела фаз. Поскольку эта граница оканчивается на твердых поверхностях (стенках и т.п.), то в качестве граничных условий (их должно быть два) обычно бывают заданы условия касания твердого тела с заданным краевым углом $\theta$ и, например, полный объем жидкости. (Возможны и иные условия, см. ниже.)

Отметим еще один *принципиальный* момент. Интеграл основного уравнения дает форму равновесной поверхности раздела фаз. Однако не все решения на самом деле можно наблюдать на практике. Межфазная поверхность должна не только удовлетворять условиям гидростатического равновесия, но еще и быть устойчивой, по крайней мере, к малым отклонениям формы от равновесного состояния. Это значит, что если произошло исчезающе малое отклонение формы от равновесной, система обязана вернуться в исходное состояние. Тогда такая форма устойчива (в малом). Если же, напротив, какое-либо незначительное отклонение вызывает дальнейшее прогрессирующее изменение формы, то система абсолютно неустойчива. На практике могут существовать лишь устойчивые равновесные состояния. Аналитическое исследование устойчивости равновесных форм поверхности раздела представляет собой достаточно трудную задачу.

## 2.3. РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЕМОЙ ОДНИМ РАДИУСОМ КРИВИЗНЫ (КАПИЛЛЯРЫ, ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ)

### 2.3.1. ФОРМА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В СОСУДАХ

В соответствии с введенной выше классификацией поперечный размер сосуда $L >> b$. В этом случае картина достаточно общеизвестна. Свободная поверхность (рис. 2.9) практически всюду плоская. Лишь вблизи стенок, на расстояниях, примерно равных $b$, наблюдается искривление границы. Высота поднятия (или опускания) жидкости зависит от значения краевого угла смачивания $\theta$ (при $\theta > \pi/2$ мениск опускается, например, ртуть в стеклянной посуде). Однако наибольшая высота подъема (опускания) жидкости при $\theta \to 0$ также составляет величину порядка $b$.

Ввиду условия $L >> b$ данная задача вполне корректно может рассматриваться как плоская.

Для плоской задачи кривизна

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1},$$

так как $R_2 = \infty$.

Выберем координатные оси так, как показано на рис. 2.10. Тогда кривизна плоской кривой выражается следующим дифференциальным оператором:

$$2H = \frac{1}{R_1} = \frac{\ddot{z}}{(1+\dot{z}^2)^{3/2}},$$

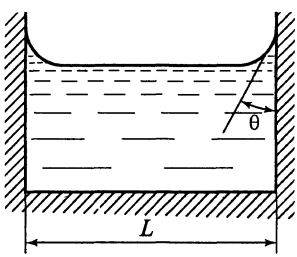



**Рис. 2.9. Форма свободной поверхности жидкости в сосуде**

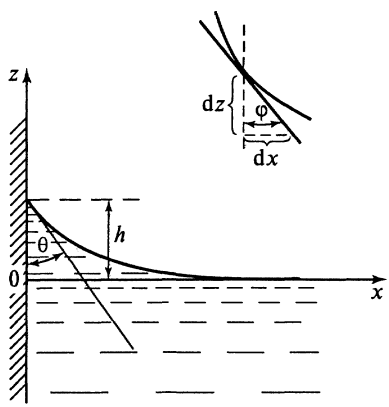



**Рис. 2.10. Форма поверхности жидкости вблизи стенок сосуда**

где $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$; $\ddot{z} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}$.

Будем считать, что $z$ и $x$ безразмерны (т.е. $\tilde{z} = \dfrac{z'}{b} = z$, $\tilde{x} = \dfrac{x'}{b} = x$, где $z'$, $x'$ — размерные величины), но для упрощения записей значок «тильда» использовать не будем.

Уравнение гидростатического равновесия имеет вид

$$\frac{\ddot{z}}{(1+\dot{z}^2)^{3/2}} = z + \text{const}. \tag{2.13}$$

При $z = 0$ $(x \to \infty)$ $1/R_1 = 0$, следовательно, const = 0.

Левую часть уравнения (2.13) можно записать как $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}}$, что проверяется прямым вычислением. Итак,

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = z.$$

Интегрируя, находим

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = -\frac{1}{2}z^2 + A. \tag{*}$$

Поскольку при $z = 0$ $(x \to \infty)$ $\dot{z} = 0$, то $A = 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = 1 - \frac{1}{2}z^2.$$

Из этого уравнения далее можно найти $h$.

Действительно, как следует из рис. 2.10, для любой точки искривленной поверхности жидкости справедливо соотношение

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \operatorname{ctg}\varphi,$$

где $\varphi$ — угол между плоскостью, касательной к поверхности жидкости, и вертикальной плоскостью, нормальной к плоскости чертежа. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = \sin\varphi.$$

На твердой стенке, очевидно, $\varphi = \theta$, так что при $x = 0$ имеем

$$\sin\theta = 1 - \frac{1}{2} h^2,$$

откуда находим

$$h = \pm\sqrt{2(1 - \sin\theta)}.$$

Это соотношение определяет высоту $h = \dfrac{h'}{b}$ поднятия $(\theta < \pi/2)$ жидкости и соответственно высоту опускания $(\theta > \pi/2)$ в случае гидрофобной поверхности. (Знак минус перед корнем.) Здесь $h$ — безразмерная высота, выраженная в долях капиллярной постоянной $b$; $h'$ имеет обычную размерность длины.

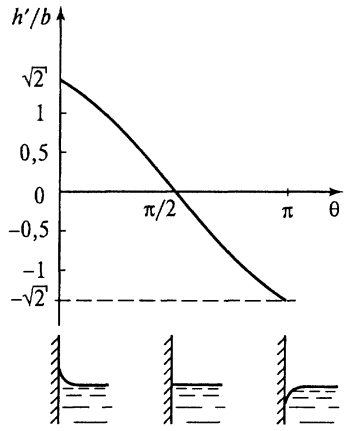



**Рис. 2.11. Высота поднятия (опускания) жидкости около стенок сосуда в зависимости от краевого угла θ**

Максимальная высота поднятия (опускания) мениска составляет (при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$):

$$h'_{\max} = \pm\sqrt{2}\, b,$$

т.е., как отмечалось выше, имеет порядок капиллярной постоянной $b$.

Зависимость высоты поднятия (опускания) жидкости от краевого угла $\theta$ представлена на рис. 2.11; там же показана примерная форма очертания свободной поверхности жидкости около твердой стенки при $\theta = 0$, $\pi/2$ и $\pi$. Заметим, что случай абсолютной несмачиваемости $\theta = \pi$ на практике не встречается, является чисто гипотетическим.

Повторным интегрированием из уравнения (*) можно найти уравнение поверхности жидкости. Оно имеет довольно сложный вид и здесь не приводится.

### 2.3.2. ВЫСОТА ПОДЪЕМА ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРАХ

Для капилляров справедливо условие $L \le b$, т.е. силы поверхностного натяжения больше или примерно равны силам тяжести, так что форма мениска близка к части поверхности кругового цилиндра

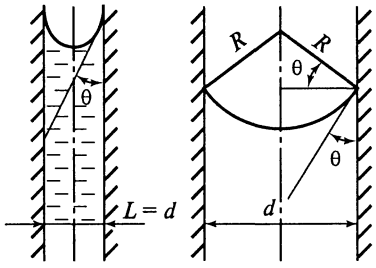



**Рис. 2.12. Форма мениска жидкости в капилляре (*а*) и связь радиуса кривизны с размером капилляра (*б*)**

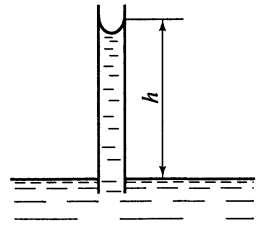



**Рис. 2.13. Высота подъема жидкости в капилляре**

в плоском капилляре или элементу сферы в цилиндрическом капилляре (рис. 2.12). В плоском капилляре

$$2H = 1/R = \text{const}.$$

В цилиндрическом капилляре

$$2H = \frac{2}{R} = \text{const}.$$

При этом связь между $R$ и $L = d$ определяется значением угла $\theta$ (рис. 2.12, *б*)

$$\frac{L}{2} = R\cos\theta. \qquad (**)$$

Если капилляр опущен в жидкость (рис. 2.13), то высота капиллярного поднятия определяется соотношением

$$2\sigma H = g(\rho' - \rho'')h. \qquad (***)$$

Подставляя (**) в (***), получаем

$$h = C_0 \frac{\sigma\cos\theta}{g(\rho' - \rho'')d}, \qquad (2.14)$$

где $C_0 = 2$ — для плоского капилляра; $C_0 = 4$ — для цилиндрического; если измерять $h$ и $d$ в долях $b$, то

$$\tilde{h} = C_0\left(\frac{\cos\theta}{\tilde{d}}\right).$$

**Пример.** Для воды при $\theta \to 0$ найти $h$ — высоту капиллярного поднятия при $d = 0{,}1$ мм и 0,01 мм.

Имеем: $\sigma \approx 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м; $g(\rho' - \rho'') = 9{,}81 \cdot 10^{3}$; $h = C_0 \dfrac{7 \cdot 10^{-5}}{9{,}81 \cdot 10^{-n}}$,

где $n = 4$ или 5.

Для цилиндрического капилляра $C_0 = 4$, тогда:

$$h = \frac{4 \cdot 7}{9{,}81} 10^{n-5} = 2{,}85 \cdot 10^{n-5}.$$

При $d = 0{,}1$ мм, $n = 4$ $h = 28{,}5$ см;
$d = 0{,}01$ мм, $n = 5$ $h = 2{,}85$ м.

Для плоского капилляра $C_0 = 2$, т.е. результаты расчета будут в 2 раза меньше.

### 2.3.3. ЖИДКОСТЬ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Жидкость заключена между двумя горизонтальными пластинами (из одинакового материала, т.е. $\theta$ = idem). По мере увеличения расстояния $h$ между пластинами (рис. 2.14) форма свободной поверхности изменяется.

При некотором критическом значении $h^*$ гидростатическое равновесие перестает выполняться и жидкость должна вытекать из зазора. Необходимо найти зависимость $h_* = f(\theta)$.

Очевидно, что рассматриваемая задача является плоской, так что кривизна поверхности выражается дифференциальным оператором

$$2H = \frac{1}{R_1} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}}\right),$$

который в свою очередь можно записать, используя тригонометрические функции угла $\psi$ между плоскостью, касательной к свободной поверхности жидкости, и горизонтальной плоскостью (рис. 2.15):

$$\frac{1}{\sqrt{1+\dot{z}^2}} = \cos\psi.$$

Таким образом, в безразмерной форме записи (все линейные размеры — в долях $b$) уравнение гидростатического равновесия принимает вид

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos\psi) = z + A_0. \qquad \text{(а)}$$

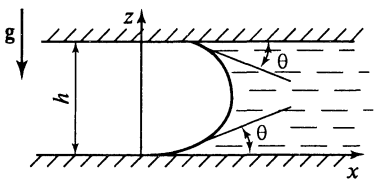



**Рис. 2.14. Жидкость в зазоре между горизонтальными пластинами**

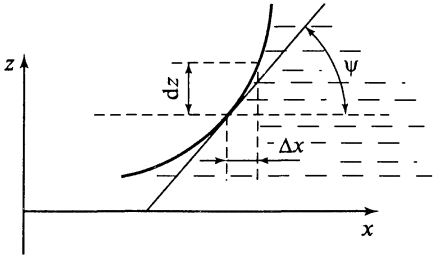



**Рис. 2.15. Схема для установления связи локальной кривизны и угла наклона касательной**

Константа $A_0$ имеет смысл кривизны в точке $z = 0$, т.е. в начале системы координат рис. 2.14.

Интегрируя (а) и учитывая, что $\psi|_{z=0} = \theta$, получаем

$$\cos\psi = \cos\theta - \frac{1}{2} z^2 - A_0 z . \qquad (б)$$

На верхней образующей, т.е. при $z = h$, $\cos\psi = -\cos\theta$. Следовательно, из (б) находим

$$2\cos\theta - \frac{1}{2} h^2 - A_0 h = 0 , \qquad (в)$$

откуда

$$A_0 = \frac{4\cos\theta - h^2}{2h} .$$

Подставляя это значение в уравнение (б), имеем

$$\cos\psi = \cos\theta - \frac{1}{2} z^2 + \frac{h^2 - 4\cos\theta}{2h} z . \qquad (г)$$

При достижении критической высоты $h_*$ на некотором уровне $z = z_*$ возникает плоский участок границы раздела фаз, т.е. на контуре границы появляется перегиб. Дальнейшее увеличение зазора между пластинами ($h > h_*$) оказывается несовместимым с гидростатическим равновесием. Эти физические соображения, определяющие

критическое значение высоты $h_*$, в аналитической форме выражаются соотношениями:

$$\frac{\mathrm{d}\cos\psi}{\mathrm{d}z} = 0; \quad \cos\psi = 1 \text{ при } z = z_*. \tag{д}$$

Первое из условий (д), будучи использованным в уравнении (г), дает (с учетом исходного уравнения (а)):

$$z_* = -A_0 = \frac{h_*^2 - 4\cos\theta}{2h_*}. \tag{е}$$

Используя полученный результат и второе из условий (д), из уравнения (г) получаем

$$1 - \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{h_*^2 - 4\cos\theta}{2h_*}\right)^2. \tag{ж}$$

После несложных преобразований, имея в виду что для рассматриваемой задачи физический смысл имеют лишь положительные корни уравнения (ж), находим

$$h_* = 2\sqrt{1 + \sin\theta}. \tag{2.15}$$

Или в размерном виде

$$h'_* = 2b\sqrt{1 + \sin\theta}. \tag{2.15а}$$

На рис. 2.16 представлен график зависимости $h_* = f(\theta)$. Как и следовало ожидать, критическая высота $h$ имеет порядок капиллярной константы. Максимальная высота ($h'_* = 2\sqrt{2b}$) достигается при $\theta = \pi/2$.

Сравнение расчетов по формуле (2.15а) с экспериментальными данными, полученными в 70-х годах в Физико-техническом институте низких температур АН УССР Ю. А. Кириченко (табл. 2.2), подтверждает справедливость теоретического анализа. Некоторое превышение опытных значений $h'_*$ над рассчитанными по формуле (2.15а) объясняется, очевидно, тем, что принятый в расчетах угол смачивания $\theta = 0$ едва ли достигался в экспериментах. Далее проведем качественный анализ очертания границы. Координата сечения

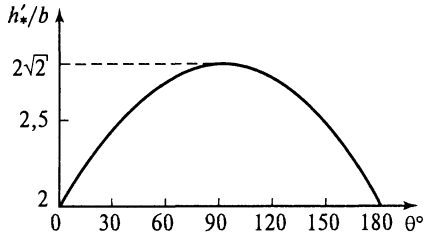



**Рис. 2.16. Зависимость высоты зазора между пластинами от краевого угла θ**

*Таблица 2.2.* **Сравнение опытных данных Ю.А. Кириченко с расчетами по формуле (2.15а)**

| Жидкость | $h'^{\text{эксп}}_*$, мм | $h'^{\text{расч}}_*$, мм (при θ = 0) |
|---|---|---|
| Этанол | 2,6 | 2,4 |
| Вода | 4,4 | 3,9 |
| Диэтиловый эфир | 2,5 | 2,2 |

$z_*$, в котором достигается горизонтальный участок, равна согласно соотношениям (е) и (2.15):

$$z_* h_* = 2(1 + \sin\theta - \cos\theta). \qquad (з)$$

Кривизна $A_0$ при $z = 0$ и $A_h$ при $z = h$ связаны согласно уравнению (а) соотношением (и)

$$A_h = h + A_0.$$

Тогда находим из (е) и последнего соотношения:

$$A_0^* h_* = -2(1 + \sin\theta - \cos\theta);$$

$$A_h^* h_* = 2(1 + \sin\theta + \cos\theta).$$

Полученные результаты позволяют качественно представить профиль поверхности в моменты, предшествующие началу вытекания жидкости.

Так, при θ = 0 имеем согласно соотношениям (з) и (и):

$$A_0^* = 0 \quad (R_0^* = \infty);$$

$$A_h^* = \frac{4}{h_*}; \quad R_h^* = \frac{h_*}{4};$$

$$z_* = 0.$$

Для $\theta = \frac{\pi}{2}$: $z_* = \frac{4}{h_*} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

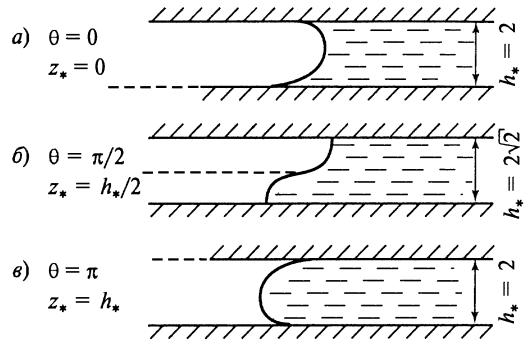



**Рис. 2.17. Примерная форма очертания границы жидкости в зазоре между горизонтальными пластинами при $h = h_*$ для значений $\theta = 0, \pi/2$ и $\pi$**

Так как $z_* = \frac{1}{2} h_*$, то $A_0^* = -\frac{4}{h_*}$; $A_h^* = \frac{4}{h_*}$.

При $\theta = \pi$ получаем:

$$A_0^* = -\frac{4}{h_*}; \quad A_h^* = 0; \quad z_* = h_*.$$

На рис. 2.17 показана примерная форма очертания границы жидкости для углов $\theta = 0, \pi/2$ и $\pi$. Аналогично можно построить качественные картинки для любых значений углов.

## 2.4. РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МЕЖФАЗНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

На практике во многих важных случаях межфазная граница является осесимметричной (жидкость в осесимметричных контейнерах, пузырьки и капли на твердых поверхностях т.д.). На поверхности земли ускорение свободного падения значительно ($g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$). Поэтому обычно равновесные размеры капель и пузырьков, а также размеры сосудов (контейнеров), для которых учет сил поверхностного натяжения необходим, невелики. Однако в ослабленных гравитационных полях ($g << g_0$) размеры (масштаб) проявления сил поверхностного натяжения растут. В связи с проблемами космонавтики, ракетной механики и так далее вопросы равновесной формы границы раздела жидкость—газ (жидкость—жидкость) имеют сейчас важное значение. К ним обращено внимание исследователей.

Нужно отметить, что гидростатические задачи относятся к разряду так называемых «чистых» задач. Для них можно составить точное аналитическое описание. Поэтому в области гидростатики двухфазных систем преобладают теоретические и расчетно-аналитические работы. Основные проблемы, качественный анализ характерных задач, итоги расчетно-аналитических работ и численных исследований рассмотрены ниже.

### 2.4.1. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТИПИЧНЫХ ЗАДАЧ

Примеры обсуждаемых задач приведены на рис. 2.18—2.21. На рис. 2.18 показаны равновесные формы пузырьков и капель на плоской поверхности. Характерным для этого случая является то, что сила тяжести как бы «прижимает» объем дискретной фазы к поверхности. На рис. 2.19 показаны очертания пузырьков и капель на плоской поверхности в условиях, когда сила тяжести стремится как бы «оторвать» объем от поверхности. Приведенные на рис. 2.18 и 2.19 картины охватывают случаи гидрофильной ($\theta < \pi/2$) и гидрофобной ($\theta > \pi/2$) поверхностей.

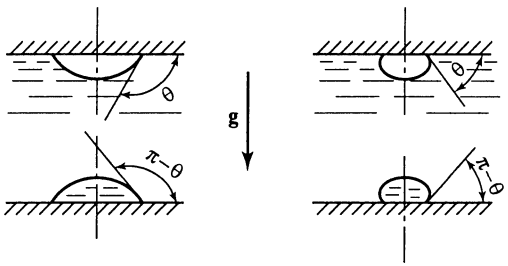



**Рис. 2.18. Капли и пузырьки на горизонтальной твердой поверхности (задачи типа I)**

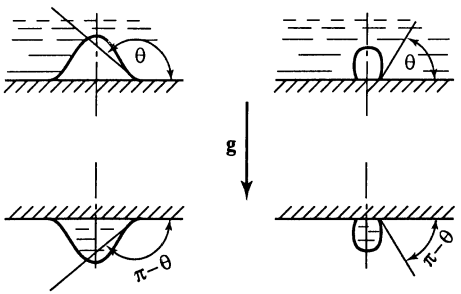



**Рис. 2.19. Капли и пузырьки на горизонтальной твердой поверхности (задачи типа II)**

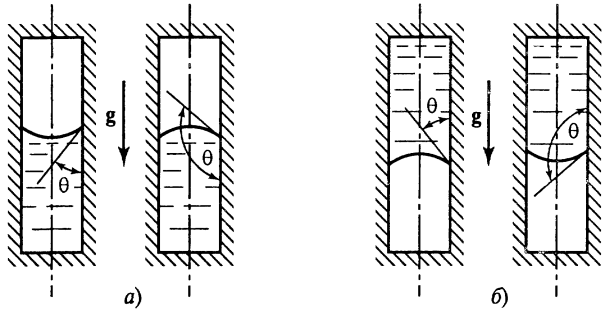



**Рис. 2.20. Жидкость в цилиндрических контейнерах:**

*а, б* — нормальное и перевернутое положения

На рис. 2.20 показаны характерные случаи расположения жидкости в цилиндрических контейнерах при нормальной *а* и перевернутой *б* ориентации в поле массовых сил. (Здесь также представлены картины для гидрофильных и гидрофобных поверхностей.)

На рис. 2.21 показаны формы пузырька и капли на срезе капилляра, а также капли и пузырька снаружи цилиндра. Для рассматриваемых случаев на рис. 2.21 сила тяжести стремится «оторвать» объем дискретной фазы.

Приведенные картины охватывают ряд типовых случаев осесимметричных гидростатических задач. Конечно, число примеров может быть продолжено (жидкость частично заполняет сферический контейнер, обращенные задачи по сравнению с рис. 2.21 и т.д.). Однако приведенных примеров достаточно, чтобы составить представление о характере задач и отметить их качественные особенности.

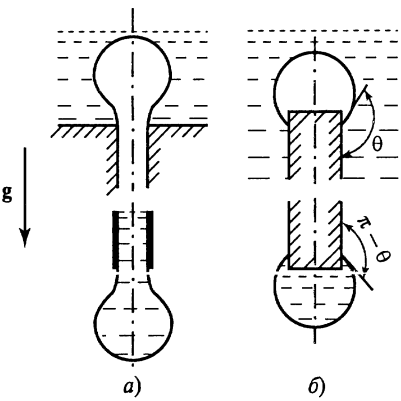



**Рис. 2.21. Капли и пузырьки на срезе капилляра (*а*), снаружи цилиндрического стержня (*б*)**

Прежде всего сразу ясно, что фактически имеются два типа задач: тип I — когда сила тяжести стабилизирует («прижимает») дискретную фазу, тип II — когда сила тяжести проявляет тенденцию к дестабилизации межфазной гра-

ницы (т.е. «стремится оторвать» объем дискретной фазы)*. Согласно [7, 27] задачи типа I будем называть случаем положительных перегрузок, а задачи типа II — случаем отрицательных перегрузок. Для задач типа II интуитивно ясно, что при определенных условиях гидростатическое равновесие окажется невозможным (или неустойчивым), и тогда будет происходить отрыв фазы (для задач рис. 2.20, *б* — перетекание жидкости вниз). Важной для практики является проблема определения критических условий потери устойчивости в задачах этого типа.

Второй качественный вывод состоит в том, что гидростатические задачи для капель и пузырьков (см. рис. 2.18, 2.19, 2.21) качественно одинаковы в отношении очертания межфазной границы для соответствующих задач типа I и II.

Единственное непринципиальное различие состоит в том, что углу $\theta$ в задаче для пузырька соответствует угол $\pi$—$\theta$ в задачах для капель. Это просто связано с условностью отсчитывать угол $\theta$ всегда внутрь жидкости. (Если договориться использовать понятие «контактного» угла $\theta_*$, отсчитываемого всегда внутрь сплошной фазы, то отмеченное различие устраняется).

### 2.4.2. УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ И ЕГО КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Несмотря на кажущееся многообразие задач, их аналитическое описание можно представить в единообразной форме. Составим уравнение гидростатического равновесия для осесимметричных задач. Для этого рассмотрим очертание межфазной границы вблизи оси симметрии, как это показано на рис. 2.22, *а*. Гидростатическое равновесие для этого случая описывается уравнением (2.9):

$$2\sigma H(z) = g\,\Delta\rho\, z + \text{const}, \tag{2.16}$$

где $\Delta\rho = \rho' - \rho''$; $H(z)$ — средняя кривизна тела вращения на высоте $z$. Постоянная const в уравнении имеет значение:

$$\text{const} = 2\sigma H(0) = \frac{2\sigma}{R_0},$$

* Указать, какие из приведенных картин на рис. 2.18—2.21, относятся к тому или иному типу задач.

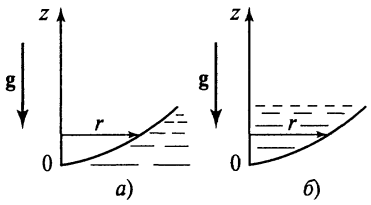



**Рис. 2.22. Очертания границы раздела фаз в окрестности точки симметрии для задач типа I (*а*) и типа II (*б*)**

где $R_0$ — радиус кривизны в точке $z = 0$. (Здесь оба радиуса кривизны, конечно, равны $R_0$.)

Очевидно, что уравнение (2.16) определяет гидростатическое равновесие для задач типа I. Если теперь поменять на рис. 2.22, *а* местами фазы, т.е. рассмотреть картину рис. 2.22, *б*, то в уравнении гидростатического равновесия нужно заменить $(+\Delta\rho)$ на $(-\Delta\rho)$, где $\Delta\rho = \rho' - \rho''$.

В итоге получим

$$2\sigma H(z) = -g\Delta\rho z + \text{const}. \qquad (2.16а)$$

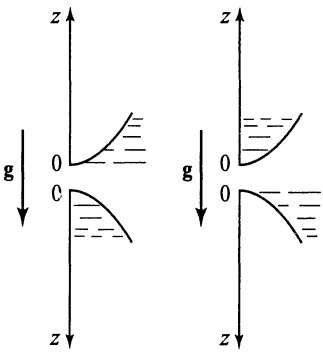
Картина на рис. 2.22, *б* и соответствующее ей уравнение (2.16а) относятся к случаю отрицательных перегрузок.

Сравнивая (2.16) и (2.16а), можно видеть, что различие заключается лишь в знаке перед членом $g\Delta\rho z$. Поэтому для обоих типов задач можно написать:

$$2\sigma H(z) = \pm g\Delta\rho z + \text{const}, \qquad (2.16б)$$

где «+» — задача типа I (положительные перегрузки); «–» — задача типа II, отрицательные перегрузки.

Уравнение (2.16б) имеет тождественный вид для пузырьков и капель, относящихся к одинаковому типу задач. Это значит, что при одинаковых размерах и значениях контактного угла очертания их тождественны. Поэтому анализ может проводиться далее либо только для капель, либо только для пузырьков. Количественный ответ будет общим. На рис. 2.23 показаны очертания границы для случаев положительных и отрицательных перегрузок в окрестности точки симметрии. Анализ рисунка делает очевидной попарную тождественность задач одного типа для капель и пузырьков. (Для каждого типа задач очертание границ допускает отражение относительно горизонтали, проходящей через точку $z = 0$.)




Тип I Тип II

**Рис. 2.23. Очертания границы капель и пузырьков в окрестности точки симметрии для задач двух типов**

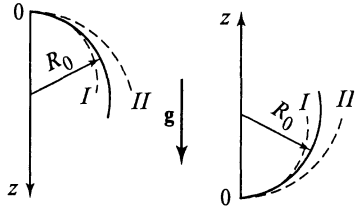



**Рис. 2.24. Изменение кривизны поверхности раздела в окрестности точки симметрии для задач типа I и типа II**

Качественный анализ уравнения (2.16б), записанного в форме

$$H(z) = H(0) \pm \frac{g\Delta\rho}{2\sigma} z, \qquad (2.16в)$$

показывает, что для задач типа I (знак «плюс» в уравнении) средняя кривизна минимальна в точке $z = 0$ и далее непрерывно увеличивается. Напротив, для задач типа II (знак «минус» в уравнении) средняя кривизна максимальна в точке $z = 0$ и далее непрерывно падает. Этим выводам может быть дана следующая графическая интерпретация. При невесомости ($g = 0$) кривизна постоянна и равна $H(z) = H(0)$, что соответствует сферической поверхности радиусом $R_0$. Из уравнения (2.16в) видно, что при положительных перегрузках ($g \neq 0$) очертание поверхности должно уходить внутрь окружности радиуса $R_0$; для задач типа II очертание поверхности располагается вне окружности радиуса $R_0$. Это отражено на рис. 2.24. Рис. 2.25 показывает приложение того же качественного вывода к конкретным задачам типов I и II: капля *а* и пузырек *б* на горизонтальной твердой поверхности.

Входящая в уравнения (2.16б) и (2.16в) кривизна $H(z)$ для осесимметричных поверхностей раздела фаз выражается дифференциальным оператором более сложного вида, чем в плоских зада-

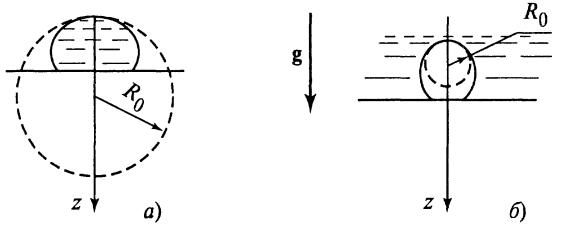



**Рис. 2.25. Очертания границы капли (*а*) и пузырька (*б*) на твердой поверхности в сравнении с очертаниями сферы радиуса $R_0$**

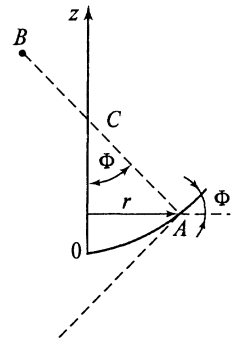



**Рис. 2.26. К определению радиусов кривизны осесимметричной поверхности**

чах. Общее выражение для средней кривизны, естественно, остается тем же:

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

но для осесимметричных задач в любой точке поверхности оба радиуса $R_1$ и $R_2$ конечны и (за исключением точки $r = 0$) не равны между собой. В соответствии с рис. 2.26 радиусы $R_1$ и $R_2$ в произвольной точке $A$ поверхности раздела можно выразить через тригонометрические функции угла Ф между осью $z$ и нормалью к очертанию границы раздела в точке $A$ (или, что то же, — между горизонтальной плоскостью и плоскостью, касательной к поверхности раздела фаз в точке $A$). Радиус кривизны $R_1$, численно равный отрезку $AB$, имеет такой же смысл и выражение, как и в плоских задачах, т.е.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = -\frac{\ddot{r}}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{(1+\dot{r}^2)^{1/2}}\right] = \frac{\mathrm{d}\sin\Phi}{\mathrm{d}r},$$

где $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2}$ — дифференциал дуги контура поверхности раздела; $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}$; $\ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2}$; $\sin\Phi = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}$.

Радиус кривизны $R_2$ выражает объемный эффект в осесимметричных задачах. Осесимметричное тело может быть представлено как результат вращения плоской кривой, изображенной на рис. 2.26, вокруг оси $0Z$. Следовательно, второй радиус кривизны в рассматриваемом случае — это отрезок $AC$ на рис. 2.26, так что вторая кривизна поверхности в точке $A$ может быть записана как

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin\Phi}{r}.$$

Именно наличие конечного радиуса кривизны $R_2$ составляет специфику осесимметричных задач гидростатики в сравнении с плоскими, где $R_2 \to \infty$. С учетом приведенных выражений радиусов кривизны $R_1$ и $R_2$, кривизна осесимметричной поверхности раздела фаз может быть записана в следующей компактной форме:

$$2H(z) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\sin\Phi). \tag{2.17}$$

(Существуют и другие варианты записи кривизны $2H(z)$, но выражение (2.17) — наиболее компактное.)

Таким образом, с учетом соотношения (2.17) уравнение гидростатического равновесия для осесимметричных задач (2.16б) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\sin\Phi) = \pm\frac{g\Delta\rho z}{\sigma} + \frac{2}{R_0}. \tag{2.18}$$

Выражая все линейные размеры ($r$, $z$, $R_0$) в долях капиллярной постоянной

$$b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}},$$

(умножив все члены уравнения (2.18) на $b$), получаем безразмерную форму записи уравнения гидростатики. При этом, чтобы не усложнять символику, будем далее считать, что $r$, $z$, $R_0$ — безразмерные величины, равные соответственно $r'/b$, $z'/b$, $R_0'/b$, где верхний индекс «штрих» обозначает размерную величину.

С учетом сказанного основное уравнение гидростатического равновесия в безразмерной форме записи имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\sin\Phi) = \pm z + C_0, \qquad (2.18а)$$

где $C_0 = \dfrac{2}{R_0}$ ($R_0$ — радиус кривизны в точке $z = 0$).

Знак «плюс» соответствует задачам типа I, знак «минус» — задачам типа II.

Итак, качественный анализ уравнения гидростатики для осесимметричных задач позволяет установить следующее:

средняя кривизна поверхности раздела фаз для указанных задач всегда выражается через оба главных радиуса кривизны;

отличие двух типов задач отражается в уравнениях гидростатики знаком («плюс» или «минус») перед членом, содержащим координату $z$ в явном виде;

средняя кривизна поверхности раздела фаз по мере удаления от точки симметрии возрастает при положительных перегрузках и уменьшается при отрицательных.

Однако если качественная интерпретация двух типов задач гидростатики для осесимметричных границ раздела фаз достаточно ясна, то количественное описание (получение уравнений) таких границ представляет весьма трудную проблему.

Действительно, основное уравнение гидростатики (2.18а) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, причем более сложное, чем для плоских задач. Равновесная поверхность есть интеграл этого дифференциального уравнения. В качестве граничных условий в зависимости от вида решаемых задач могут быть заданы: объем капли (пузырька) и значения контактного угла $\theta_*$ или радиуса капилляра; радиус контейнера и значение контактного угла и т.д.

Трудность проблемы нахождения реальных равновесных очертаний поверхностей раздела фаз для осесимметричных задач связана с двумя моментами:

во-первых, дифференциальное уравнение гидростатического равновесия (2.18а) относится к такому типу нелинейных уравнений, для которых решение не может быть представлено в элементарных функциях или табулированных специальных функциях, поэтому единственный путь его решения состоит в численном интегрировании;

во-вторых, оказывается, что не все интегралы уравнений, т.е. не все получающиеся в результате численного решения этого уравнения формы равновесных поверхностей, имеют физический смысл. Дело в том, что кроме удовлетворения уравнения гидростатического равновесия (2.18а) форма границы раздела фаз должна быть еще устойчивой (по крайней мере в малом, т.е. по отношению к исчезающе малым случайным ее возмущениям). Поэтому вторая трудность состоит в выделении физически реальных ветвей и участков решения, которые являются устойчивыми (в малом) и могут наблюдаться на практике. Для разных видов задач границы устойчивости разные. (Например, для «свисающей» капли и жидкости в «перевернутом» контейнере границы устойчивости, как будет показано ниже, различны).

Первая трудность носит технический характер. Сегодня численное интегрирование не представляет принципиальных затруднений. Анализ проблемы устойчивости представляет более трудную и тонкую задачу. За последние годы здесь достигнуты важные результаты и разработаны эффективные методы анализа [7, 27], которые позволили найти решения ряда важных для практики задач гидростатики.

### 2.4.3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГИДРОСТАТИКИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА ФАЗ

Уравнение (2.18а) привлекает внимание исследователей уже более века. В так называемый «домашинный» период преобладали попытки его приближенного решения. Уже в 1883 г. Башфортс (Bashforth) и Адамс (Adams) [50] опубликовали таблицы, полученные методом численного интегрирования этого уравнения, связывающие такие величины, как объем тела вращения, его высоту, радиус основания и контактный угол. Эта гигантская ручная расчетная работа (к сожалению, малодоступная) не дает, однако, подробной информации об очертании равновесных поверхностей раздела фаз, особенностях изменения формы при различных значениях $C_0 = \dfrac{R_0}{2}$ и границах устойчивости.

В 1935 г. В. Фритц [55] на основе этих таблиц с помощью графических построений определил значения максимальных по объему пузырьков (и капель), сидящих на плоской поверхности, для задачи типа II, в зависимости от контактного угла $\theta_*$ (для пузырьков —

краевого угла θ). В связи с ограниченностью таблиц Башфортса и Адамса полученные Фритцем результаты охватывают область $\theta_*$ от 60 до 178°. Результаты этой работы приведены в табл. 2.3, где в зависимости от $\theta_*$ (округленные значения) даны значения максимального (критического) объема $V_*$ (в единицах $b^3$), а также значения диаметра эквивалентной (по объему) сферы $D_*$ $\left(\frac{\pi}{6} D_*^3 = V_*\right)$.

Графический анализ результатов показал, что в области углов $\theta_* = 60—140°$ зависимость $D_*$ от $\theta_*$ имеет практически линейный характер:

$$D_* = K_0 \theta_*; \tag{2.19}$$

$$D_* = \frac{D_*}{b}; \quad b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}.$$

Константа $K_0 = 0{,}0207$, если измерять $\theta_*$ в градусах, и $K_0 = 1{,}19$, если измерять $\theta_*$ в радианах.

В те же годы (1933, 1936 гг.) на основе опытных данных (к сожалению, не очень надежных) было показано, что формулу (2.19) можно экстраполировать и в область малых значений контактных углов ($\theta_* < 60°$), вплоть до нуля. Эта формула получила большую известность и сейчас приводится во многих учебниках, научных статьях и монографиях как формула Фритца. Обычно она записывается при этом в размерном виде:

$$D'_* = 1{,}19\theta_* \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}, \tag{2.19а}$$

*Таблица 2.3.* **Данные В. Фритца [55] по зависимости предотрывных объемов капель и пузырьков от контактного угла $\theta_*$ (все размеры в долях $b = \sqrt{\sigma/[g(\rho' - \rho'')]}$ )**

| Величина | $\theta_*$, ° | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 |
| $V_*$ | 1,0 | 1,60 | 2,38 | 3,39 | 4,65 | 6,2 | 8,04 | 10,0 | 12,2 | 14,4 | 16,6 | 18,3 | 19,0 |
| $V_*^{1/3}$ | 1,0 | 1,17 | 1,34 | 1,50 | 1,67 | 1,84 | 2,0 | 2,16 | 2,30 | 2,43 | 2,55 | 2,64 | 2,67 |
| $D_*$ | 1,24 | 1,45 | 1,66 | 1,86 | 2,07 | 2,28 | 2,48 | 2,68 | 2,85 | 3,01 | 3,16 | 3,27 | 3,31 |

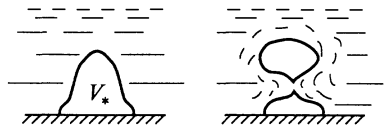



**Рис. 2.27. Схема отрыва парового пузырька от твердой поверхности при больших значениях краевых углов θ**

где угол $\theta_*$ выражается в радианах. Иногда (например, в литературе по кипению) эта зависимость некорректно именуется формулой для «отрывного диаметра парового пузырька по Фритцу». Первая неточность здесь состоит в том, что в действительности эта формула устанавливает эквивалентный (по объему) диаметр пузырька перед отрывом. В процессе отрыва (который, конечно, методами гидростатики описан быть не может) в области углов более 80° пузырек разделяется, как показывают опыты, на две части, и отрывается лишь часть объема (как это схематически показано на рис. 2.27). Кроме того, необходимо помнить, что эта зависимость построена для условий гидростатики, т.е. для условий отсутствия движения. При кипении пузырьки растут с конечной (часто большой) скоростью, и жидкость вблизи поверхности испытывает движение и интенсивные пульсации. Однако для условий гидростатики формула Фритца вполне корректна и представляет несомненный интерес и достижение.

В 70—80-е годы были выполнены широкие по охвату различных задач расчетно-теоретические исследования равновесных форм поверхности раздела [7, 27]. (Монография [27] является русским вариантом книги, изданной первоначально за рубежом на английском языке.) При численных расчетах уравнение гидростатического равновесия преобразовывалось следующим образом. Вводя очевидные определения:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = r' = \cos\Phi; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = z' = \sin\Phi; \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s} = \Phi';$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} = r'' = -z'\Phi', \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} = z'' = r'\Phi', \tag{2.20}$$

уравнение (2.18а) можно записать в виде

$$\frac{1}{rr'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(rz') = \pm z + C_0. \tag{2.18б}$$

Выражая кривизну поверхности

$$2H(z) = \Phi' + \frac{z'}{r}, \tag{2.17а}$$

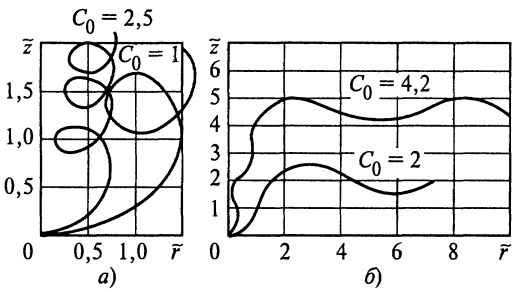



**Рис. 2.28. Типичные результаты численного решения уравнения гидростатики для задач типа I (*а*) и II (*б*)**

получаем еще один вариант уравнения гидростатического равновесия:

$$\Phi' + \frac{z'}{r} = \pm z + C_0 . \qquad (2.18в)$$

(Здесь и далее используются безразмерные величины.)

Из (2.18б) непосредственным дифференцированием, а из (2.18в) умножением всех членов уравнения на $z'$ получают с учетом обозначений (2.20) систему уравнений:

$$\begin{aligned} z'' &= r'\left(\pm z + C_0 - \frac{z'}{r}\right); \\ r'' &= -z'\left(\pm z + C_0 - \frac{z'}{r}\right). \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Эта система при граничных условиях

$$r(0) = z(0) = z'(0) = 0, \quad r'(0) = 1 \qquad (2.22)$$

определяет однопараметрическое (параметр — безразмерная кривизна $C_0$ в точке симметрии) *семейство равновесных поверхностей* раздела фаз.

Типичный вид интегральных кривых, отражающих численное решение задачи (2.21), (2.22), приводится на рис. 2.28. Форма расчетных равновесных поверхностей весьма сильно отличается для задач типа I (положительные перегрузки, см. рис. 2.28, *а*) и типа II (отрицательные перегрузки, см. рис. 2.28, *б*), в том числе при весьма близких значениях кривизны в точке симметрии ($C_0$ = 2,5 на рис. 2.28, *а* и $C_0$ = 2 на рис. 2.28, *б*). Для обоих типов задач обращает на себя внимание «причудливый» характер кривых. Ясно, что физически реальны лишь некоторые начальные области таких кривых (для простых по геометрии твердых поверхностей и контейнеров).

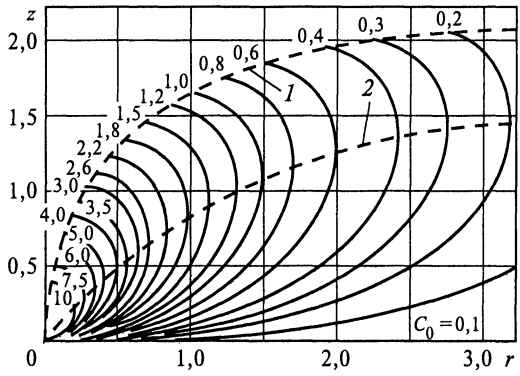



**Рис. 2.29. Равновесные формы осесимметричных поверхностей раздела фаз (максимальные участки устойчивости) для задач типа I**

Так, обращаясь к рис. 2.28, *а*, можно видеть, что начальные ветви кривых, вплоть до требуемого контактного угла $\theta_*$ на верхней части, определяют равновесные формы пузырьков и капель на рис. 2.18. Начальные ветви тех же кривых до заданного значения $r$ и контактного угла $\theta_*$ дают очертания свободной границы жидкости в цилиндрических контейнерах (см. рис. 2.20, *а*) при нормальной ориентации последних (жидкость внизу). Причем, как это следует из приведенного выше анализа, равновесные формы границы в цилиндрических контейнерах для случаев краевого угла $\theta \gtrless \pi/2$ по очертанию симметричны, что следует из приведенного выше качественного анализа (см. рис. 2.23).

Строгое количественное определение физически реальных участков поверхностей раздела, полученных в результате численного интегрирования уравнения гидростатического равновесия (задача (2.21), (2.22)), требует исследования устойчивости этих поверхностей к исчезающе малым возмущениям. Такое исследование намного более сложное, чем само численное интегрирование, было осуществлено в [7, 27]. В результате были выделены *максимальные участки устойчивости* интегральных кривых, которые приводятся на рис. 2.29 и 2.32 для случаев соответственно положительных и отрицательных перегрузок.

На рис. 2.29 приведена совокупность физически реализуемых равновесных форм межфазной поверхности для задач типа I. Параметром служит $C_0 = \dfrac{2}{R_0}$. Все размеры ($z$, $R_0$, $r$) измеряются в долях от $b = \sqrt{\sigma/[g(\rho' - \rho'')]}$. Очевидно, что все приведенные кривые

соответствуют устойчивым состояниям двухфазной системы (пузырьки и капли на поверхности, рис. 2.18, граница «мениска» в круглых контейнерах или капиллярах, рис. 2.20, *а*).

Линия *1* рис. 2.29 является границей максимальных участков устойчивости для поверхности пузырьков (под плоской поверхностью) или капель (на плоской поверхности). Она «отсекает» физически нереальные участки кривых, соответствующих решениям уравнения (2.18а) для задач типа I. Точки пересечения кривой *1* с кривыми, выражающими равновесные формы поверхности для различных значений $C_0$, соответствуют краевым углам $\theta = 0$ (для пузырьков) или $\pi$ (для капель).

Кривая *2* на рис. 2.29 проведена через те точки кривых, где касательные к ним вертикальны. Она определяет границу максимальных участков устойчивости свободной поверхности жидкости в круглых контейнерах (рис. 2.20, *а*). Точки равновесных линий, совпадающие с кривой *2*, соответствуют краевым углам $\theta = 0$ или $\pi$. Таким образом, видно, что максимальные участки устойчивости равновесных осесимметричных поверхностей раздела фаз различны для различных конкретных задач. В частности, участки кривых между штриховыми линиями *1* и *2* на рис. 2.29 соответствуют устойчивым (физически реальным) формам свободной поверхности для капель и пузырьков, но являются физически нереальными (неустойчивыми) ветвями кривых, выражающих форму свободной поверхности жидкости в контейнере.

С учетом определений (2.20) система (2.21) позволяет построить семейство кривых $\Phi = \Phi(r)$, а также $V = V(r)$ при различных значениях безразмерной кривизны $C_0$ в точке симметрии. Величина $V = (V')/b^3$ — безразмерное значение объема тела вращения, ограниченного участком равновесной линии от $z = 0$ до текущего значения $z = z(r)$ и плоскостью $z = \text{const}$. (В § 2.5 для $V$ выводится аналитическое выражение.) Указанные семейства кривых для задач типа I приводятся на рис. 2.30 и 2.31. Если, например, известны условия смачивания и объем $V_0$ капли на горизонтальной плоскости, то, полагая $\theta_* = \Phi$ на основе рис. 2.30, можно построить кривую $C_0 = C_0(r)$ при $\Phi = \theta_*$, а на основе рис. 2.31 — кривую $C_0 = C_0(r)$ при $V = V_0$. Точка пересечения этих двух кривых определяет единственные значения $r$ и $C_0$, соответствующие заданным $\theta_*$ и $V_0$, что позволяет найти на рис. 2.29 кривую, отражающую искомую форму капли

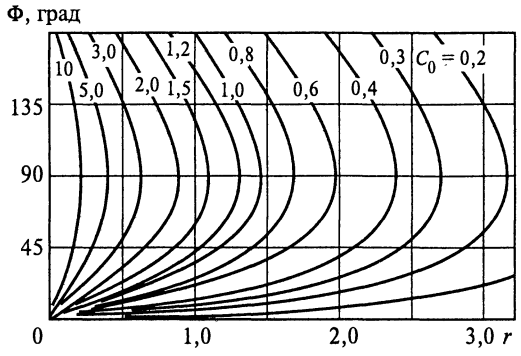



**Рис. 2.30. Зависимость $\Phi = \Phi(r)$ для задач типа I**

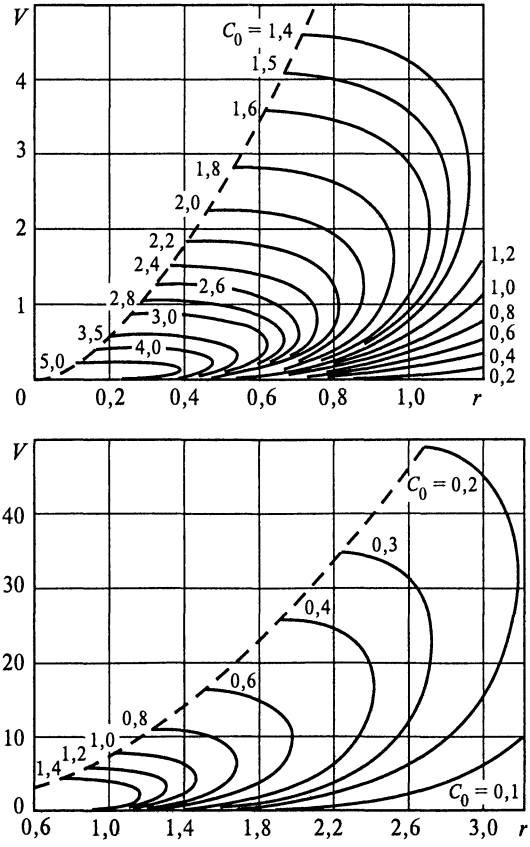



**Рис. 2.31. Зависимость $V = V(r)$ для задач типа I**

(пузырька). Аналогичную задачу можно решить с помощью номограмм рис. 2.29—2.31 и для жидкости в контейнере.

В случае отрицательных перегрузок рис. 2.32 совместно с рис. 2.33 и 2.34 позволяет найти равновесные формы поверхности раздела для многих конкретных задач. Однако здесь наибольший интерес представляют именно границы максимальных участков устойчивости интегральных линий, поскольку они определяют практически важные предельные состояния: объем (и форму) капель и пузырьков перед отрывом, максимальный диаметр цилиндрического «перевернутого» контейнера, при котором жидкость еще может устойчиво находиться в его верхней части, и т.п.

На рис. 2.32 сплошные кривые представляют собой гидростатически равновесные формы межфазной поверхности для задач типа II. Линии $0AB$, $0DB$, $BC$, $0JFH$ определяют границы максимальных участков устойчивости равновесных поверхностей раздела в гидростатических системах для разного типа задач. Линия $0DB$ соответствует предельным формам «свисающих» капель (или «сидящих» пузырьков) на плоской поверхности при разных значениях контактного угла $\theta_*$ (для капель — краевого угла $\theta$). Ниже этой линии, ограниченной справа границей $BC$, находится область устойчивых (в малом) двухфазных систем этого типа (на линии $BC$ контактный угол равен нулю). Линия $0ABC$ соответствует предельным формам капель и пузырьков на «срезе» капилляра (см. рис. 2.21, *а*). Линия $FH$ соответствует предельным формам границы раздела в «перевернутых» цилиндрических контейнерах для различных контактных углов (точка $F$ — угол 0 (или $\pi$), точка $H$ — угол $\pi/2$). Вдоль линии $0JF$ контактный угол $\theta_* = 0$. Таким образом, устойчивым осесимметричным состояниям жидкости, подвешенной в цилиндре («перевернутый контейнер», рис. 2.20, *б*), соответствуют интегральные линии, оканчивающиеся внутри области $0HFJ0$ (см. рис. 2.32). Равновесные линии, оканчивающиеся внутри области $0GFDK0$ (см. рис. 2.32), отвечают устойчивым состояниям жидкой капли, подвешенной на цилиндрическом стержне (или газового пузырька снаружи цилиндра, целиком погруженного в жидкость) — см. рис. 2.21, *б*.

Координаты характерных точек: точка $B$ $r = 3{,}24$, $z = 2{,}14$, кривизна в точке симметрии для линии, проходящей через точку $B$: $C_0 = 1{,}57$; точка $C$ $r = 3{,}83$ (первый нуль бесселевой функции пер-

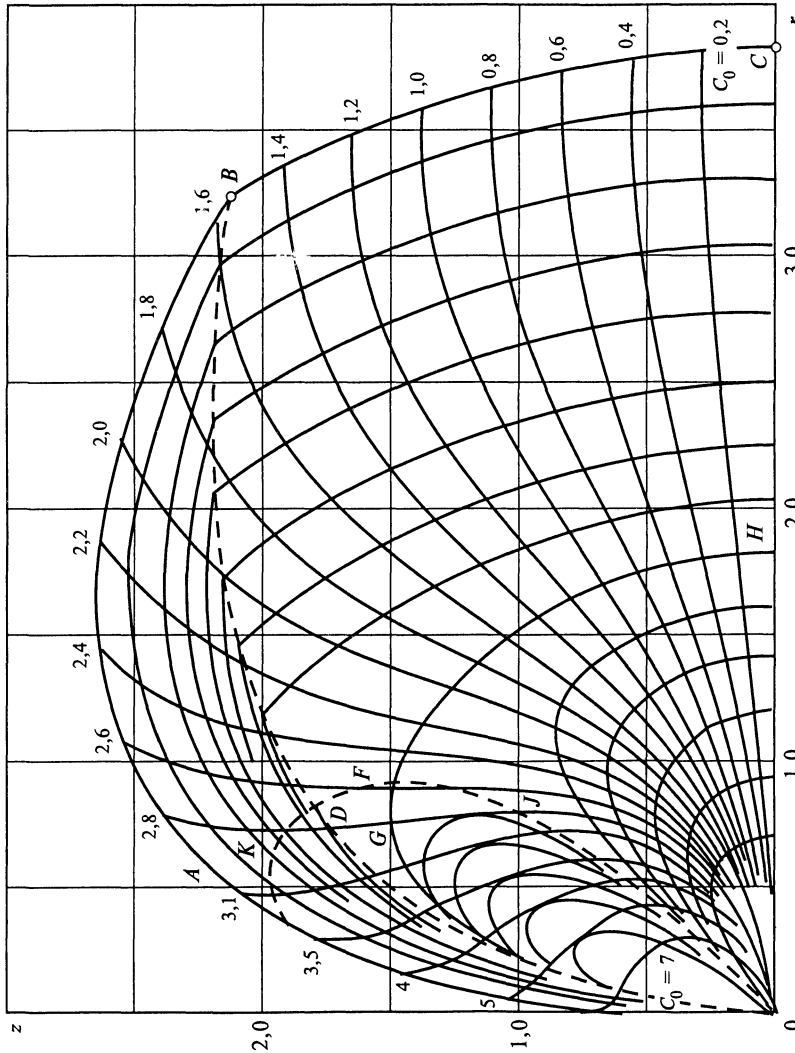



**Рис. 2.32. Максимальные участки устойчивости интегральных кривых для задач типа II (отрицательные перегрузки)**

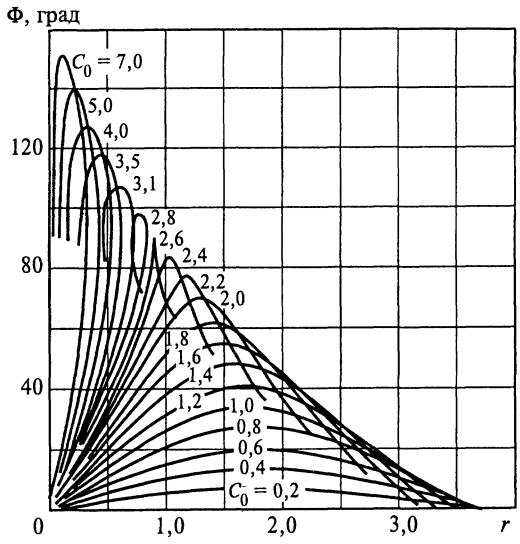



**Рис. 2.33. Зависимость $\Phi = \Phi(r)$ для задач типа II**

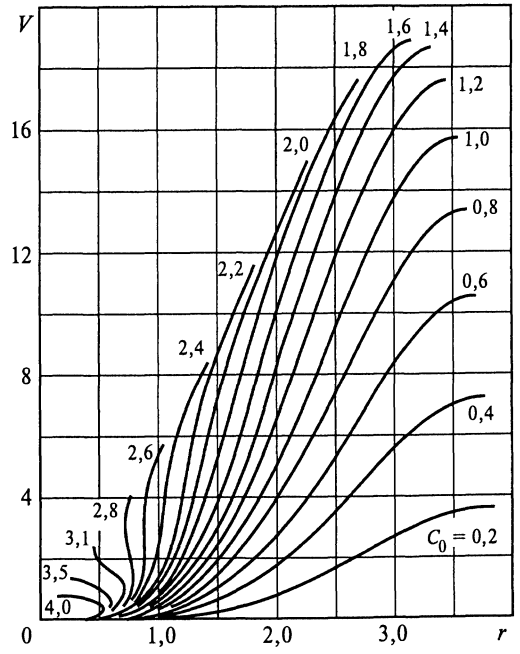



**Рис. 2.34. Зависимость $V = V(r)$ для задач типа II**

вого порядка), $z = 0$; точка $F$ $r = 0{,}916$, $z = 1{,}46$; точка $H$ $r = 1{,}84$, $z = 0$. Эти результаты позволяют сделать ряд практически важных заключений. Приведем основные из них.

*а.* Жидкость в «перевернутом» цилиндрическом контейнере (рис. 2.20, *б*) при любом значении контактного угла $\theta_*$ теряет устойчивость при $r \geq 1{,}84$. (Диаметр $3{,}68b$ предельный, когда жидкость еще не переливается вниз при $\theta_* = \pi/2$). Диаметр $2 \cdot 0{,}916b = 1{,}832b$ — предельный при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ (для воды $b = 2{,}6$ мм). Зависимость предельных значений радиуса «перевернутых» контейнеров, при которых жидкость еще сохраняет устойчивость, $r^* = f(\theta_*)$ приведена ниже [7]:

| $\theta_*$, рад. | 0 | $\pi/6$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|
| $r_*$ | 0,916 | 1,45 | 1,75 | 1,84 |

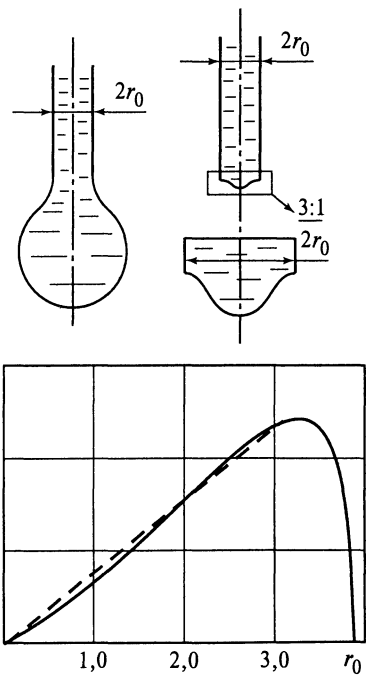



**Рис. 2.35. Зависимость предотрывного объема $V_*$ капли (пузырька) на срезе капилляра от радиуса капилляра $r_0$ (сверху показана форма капли на срезе «маленького» и «большого» капилляров)**

*б.* Зависимость максимального объема $V_*$ и эквивалентного диаметра $D_*$ для пузырьков и капель хорошо соответствует табл. 2.3 и формуле Фитца (во всяком случае до углов $\theta_* \geq 40°$).

*в.* Зависимость максимального объема $V_*$ от радиуса капилляра для «свисающих» капель и пузырьков приведена на рис. 2.35. Наибольшее значение $V_* = 19{,}1$ (в единицах $b^3$) достигается в точке $B$ (см. рис. 2.32), т.е. при $r_0 = 3{,}24$.

Сопоставляя результаты пунктов «а» и «в», можно еще отметить, что при $r_0 < 0{,}916$ потеря устойчивости (отрыв капли) при любом угле смачивания внутри капилляра не сопровождается проникновением газа внутрь капилляра. При $r_0 \geq 1{,}84$ отрыв может со-

провождаться «выливанием» жидкости из капилляра (проникновение в него газовых пузырей)*.

Кривые рис. 2.32 позволяют, таким образом, получать информацию для различных конкретных задач. Например, по известным значениям радиуса «перевернутого» контейнера и контактного угла $\theta_*$ можно найти форму свободной поверхности жидкости в контейнере; контактный угол и объем позволяют найти форму поверхности капли или пузырька на твердой поверхности и т. д. Конечно, практически наибольший интерес представляют именно предельные случаи, определяемые кривыми $0ABC$, $0DBC$, $0JFH0$, $0GFDK0$ и разобранные выше в пунктах «а», «б», «в».

## 2.5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАЛЫХ КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЕЙ

Наличие точных численных решений уравнения гидростатики позволяет для некоторых частных случаев получить приближенные аналитические соотношения и проверить их, сопоставляя с результатами машинного счета. Ниже приводятся два таких соотношения для пузырьков и капель на твердой поверхности и на срезе капилляра.

Прежде чем перейти непосредственно к выводу указанных соотношений, получим два полезных уравнения, проводя несложные преобразования над уравнением (2.18а). Интегрирование этого уравнения в пределах от 0 до $r$ дает

$$r\sin\Phi = \frac{C_0 r^2}{2} \pm \frac{1}{2}\int_0^r z\,\mathrm{d}(r^2).$$

Интеграл в правой части можно представить в виде

$$\int_0^r z\,\mathrm{d}(r^2) = zr^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^z \pi r^2\,\mathrm{d}z = zr^2 - \frac{V}{\pi},$$

где $V$ — объем тела вращения, ограниченного поверхностью, контур которой имеет протяженность от точки симметрии до точки с текущими координатами $(r, z)$.

* Для воды $b \approx 2{,}6$ мм. Таким образом, например, диаметр трубы водопроводного крана, который при слабой течи «капает полным сечением», лежит в области $D \leq 5$—$10$ мм.

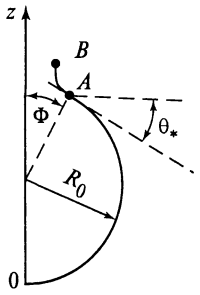



**Рис. 2.36. Очертание осесимметричной поверхности для весьма малых значений радиусов кривизны $R_0$ в точке симметрии**

Таким образом, имеем

$$\frac{\sin\Phi}{r} = \frac{C_0}{2} \pm \frac{1}{2}\left(z - \frac{V}{\pi r^2}\right). \qquad (2.23)$$

Вычитая (2.23) из (2.18а), получаем

$$\frac{\mathrm{d}\sin\Phi}{\mathrm{d}r} = \frac{C_0}{2} \pm \frac{1}{2}\left(z + \frac{V}{\pi r^2}\right). \qquad (2.24)$$

Эти соотношения полезны при анализе графиков численного решения. Они позволяют при известных $r$, $z$, $C_0$ найти $V$, если задан угол Ф (контактный угол $\theta_*$), или наоборот. В частности, линия $FH$ на рис. 2.32 соответствует точке перегиба кривых, т.е. $\frac{\mathrm{d}\sin\Phi}{\mathrm{d}r} = 0$. Отсюда можно найти объем $V$.

Применим теперь (2.23) и (2.24) и исходное уравнение гидростатического равновесия (2.18а) в предельных случаях: $\theta_* << \pi/2$ — для капель и пузырьков на плоской поверхности и $r_0 << R_0 << 1$ — для капель и пузырьков на срезе капилляра радиусом $r_0$. Как следует из анализа рис. 2.32, равновесная форма таких тел близка к сферической и отличается большими значениями кривизны ($C_0 >> 1$).

Рис. 2.36 воспроизводит примерное очертание капли (пузырька), соответствующее названным условиям. Точка $A$ является точкой перегиба на контуре (через эту точку на рис. 2.32 проходит кривая $0DBC$, и в ней $\frac{\mathrm{d}\sin\Phi}{\mathrm{d}r} = 0$.

Нетрудно показать, что эта точка соответствует основанию капли (пузырька), достигшей предельного, «критического» размера. Действительно, при больших значениях $R_0$, т.е. для капель несколько большего объема, ни одна из кривых рис. 2.32, соответствующих равновесным формам межфазной поверхности, не дает с горизонтальной плоскостью заданного угла $\theta_*$. Это означает, что при за-

данном значении $\theta_*$ капля несколько большего размера, чем $R_0$, не сможет устойчиво «свисать» с плоской поверхности («с потолка») и оторвется. (Очевидно, те же рассуждения справедливы и для пузырька, «сидящего» на твердой поверхности.)

Рассчитаем критический объем $V_*$ и соответствующий диаметр эквивалентной сферы $D_*$ для рассматриваемого случая $\theta_* << \pi/2$. Поскольку в задаче $R_0 << 1$ ($C_0 >> 1$), высота $z_A \approx 2R_0$, объем $V_* \approx \approx \frac{4}{3}\pi R_0^3$ (малое отличие от сферичности в верхней части для оценки величин $z_A$ и $V_*$ несущественно). Из уравнения (2.24), учитывая, что рассматриваемая задача относится к типу II, при условии $\frac{\mathrm{d}\sin\Phi}{\mathrm{d}r} = 0$ находим

$$\frac{1}{R_0} - R_0 - \frac{2}{3}\frac{R_0^3}{r_A^2} = 0.$$

Поскольку $R_0 << 1$, имеем

$$r_A^* = \sqrt{\frac{2}{3}}\,R_0^2. \qquad (2.25)$$

В уравнении (2.23) $\sin\Phi = \sin\theta_* \approx \theta_*$ (при условии $\theta_* << \pi/2$). Отсюда находим

$$\theta_* / r_A^* = 2/R_0.$$

Исключая из двух последних соотношений $r_A^*$, получаем в итоге

$$2R_0 = D_* = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\theta_*$$

или в размерном виде

$$D'_* = 1{,}23\theta_*\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}. \qquad (2.19б)$$

Формула (2.19б) получена при условии $\theta_* << \pi/2$. Ее сравнение с формулой Фритца (2.19а) показывает, что различие в числовом коэффициенте составляет около 3 %. (Есть основания считать соотно-

шение (2.19б) для области $\theta_* << \pi/2$ более точным, чем экстраполяция формулы Фритца для этой зоны.)

Точка $B$ на рис. 2.36, по-видимому, определяет радиус основания $r_0$ для критического пузырька (капли) на срезе капилляра. В этой точке $\sin\Phi = 1$. Тогда из (2.23) находим путем замены $z \approx 2R_0$:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{R_0} - R_0 + \frac{V_0}{2\pi r_0^2}.$$

Поскольку $r_0 << R_0 << 1$, имеем

$$V_* \approx 2\pi r_0$$

или

$$R_* = \left(\frac{3}{2} r_0\right)^{1/3}. \qquad (2.26)$$

Эта зависимость показана на рис. 2.35 пунктирной линией. Неожиданно оказывается, что формула (2.26), справедливая для $r_0 << 1$, оказывается приближенно верной вплоть до $r_0 \approx 3$, т.е. существенно в более широкой области, чем это предполагалось при выводе. То же можно заметить в отношении (2.19б), которая практически совпадает с формулой Фритца, справедливой до углов $\theta_* = 140°$, т.е. $0{,}8\pi$.

Заметим, что (2.26) обычно приводится в размерном виде

$$D'_* = \sqrt[3]{\frac{6d_0\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}. \qquad (2.26а)$$

В [63] экспериментально подтверждена справедливость этого соотношения для случая медленного вдува газа через капилляр диаметром $d_0$.

В заключение необходимо отметить, что приведенные в § 2.5 приближенные аналитические решения были получены Д.А. Лабунцовым для курса лекций по механике двухфазных систем, первую часть которого, включающую эти результаты, он прочитал в МЭИ в 1975 г. Они вошли в изданное в 1977 г. учебное пособие [20]. В том же году была опубликована статья Честерса [52], где также аналитически, но другим методом были получены соотношения (2.19б) и (2.26).

Глава третья

# ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ И УСТОЙЧИВОСТЬ

Множество технических проблем и ряд процессов в природе связаны с волновым движением границы раздела фаз. Исторически волновые движения первоначально изучались применительно к анализу морских волн, механизма распада жидких струй и т.д. В настоящее время теория волновых движений относится к числу наиболее полно разработанных проблем гидромеханики. Это справедливо в первую очередь для ставшей уже классической линейной теории колебаний и устойчивости, которая основана на двух основных допущениях: принимается, что соприкасающиеся фазы — невязкие (идеальные) жидкости и что амплитуда волновых колебаний намного меньше длины волны.

В последнее время в связи с общим ростом интереса к анализу двухфазных систем решено немало более сложных задач, касающихся волновых движений. При этом рассматриваются нелинейные волновые процессы (с конечной амплитудой), волновые движения в вязких средах и т.д. Теория таких движений весьма сложна и в настоящем курсе рассматриваться не будет. Мы ограничимся анализом линейной теории, основные выводы которой в целом хорошо согласуются с многочисленными опытными наблюдениями, так что ее изучение представляет не только академический интерес.

## 3.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ

### 3.1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В простейшем случае волнового движения горизонтальной поверхности раздела фаз (свободной поверхности жидкости неограниченной протяженности) механизм возникновения волн можно представить следующим образом. Любое возмущающее воздействие, вызвавшее искривление поверхности раздела, обусловливает возникновение сил, стремящихся вернуть поверхность к исходному состоянию. Во первых, это — силы поверхностного натяжения, пре-

пятствующие увеличению площади поверхности раздела фаз, во-вторых, гравитационные силы, которые стремятся придать поверхности ее первоначальное плоское состояние. Под влиянием этих сил частицы жидкости, выведенные из состояния равновесия, будут стремиться вернуться в него, но по инерции пройдут равновесное состояние, снова попадут под воздействие восстанавливающих сил и т.д. Если соприкасающиеся фазы невязкие, то возникают незатухающие волновые колебания свободной поверхности жидкости. В реальной системе силы вязкости приводят к затуханию волн.

Теоретический анализ волновых движений чаще всего проводится при оговоренных выше двух допущениях. Первое из них предполагает, что соприкасающиеся фазы — невязкие жидкости. Это предположение оправдано тем, что в наиболее часто используемых жидкостях с малой вязкостью (прежде всего вода) эффекты вязкости существенны вблизи твердых поверхностей, тогда как в анализе волновых движений основное внимание сосредоточено на малой окрестности границы текучих сред, как правило, далеко отстоящих от твердых стенок. Поле скоростей при безвихревом течении идеальной несжимаемой жидкости определяется уравнением сохранения массы, принимающим формулу уравнения Лапласа для потенциала скорости $\varphi$ (см. [3, 24, 26, 34]). Уравнение сохранения импульса упрощается до уравнения Эйлера. Условия однозначности, помимо обычного условия непроницаемости на твердых поверхностях, включают условия совместности для потоков массы и импульса на межфазной границе.

Поскольку форма границы раздела не известна заранее, а является одной из основных целей анализа волновых течений, то в общей постановке аналитическое решение задачи становится недоступным. Второе допущение, используемое в классической теории волновых движений — допущение о малости амплитуды колебаний поверхности раздела — позволяет преодолеть эту трудность. Как будет показано в дальнейшем, в рамках теории бесконечно малых волн условия совместности фактически относятся к невозмущенному состоянию границы раздела фаз.

Для плоских двумерных волновых движений решения уравнения Лапласа для потенциала скорости получаются в виде произведений гиперболических и тригонометрических функций, а соответствующая этим решениям форма границы раздела — в общем случае произведением синусоиды и косинусоиды [36]. Основные особенности волнового движения границы раздела фаз можно исследовать, рассматривая более простой случай, когда начальное возмущающее воздействие вызывает колебательное движение, описываемое одной

гармоникой. Другими словами, мы ограничиваемся рассмотрением одной элементарной волны, выделенной из совокупности волн, составляющих реальное периодическое движение поверхности. Различают два типа таких элементарных волн:

стоячие волны, описываемые уравнением:

$$h = A(t)\sin kx; \tag{3.1}$$

прогрессивные волны, уравнение которых имеет вид

$$h = a\sin(kx - \omega t). \tag{3.1а}$$

В соотношениях (3.1) и (3.1а): $h$ — отклонение точки поверхности от положения равновесия в некоторый момент времени $t$; $A(t)$, $a$ — амплитуда колебаний; $x$ —координата, отсчитываемая вдоль поверхности раздела фаз; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число — величина, обратная длине волны $\lambda$; $\omega = \dfrac{2\pi}{t_0}$ — круговая частота, связанная с периодом колебаний $t_0$.

Как видно из рис. 3.1, в фиксированный момент времени $t$ и стоячая, и прогрессивная волна имеют один и тот же вид обычной синусоиды с длиной волны $\lambda$. (Напомним, что мы рассматриваем только двумерные волны, которые представляют собой ряд параллельных гребней и впадин, имеющих бесконечную протяженность в направлении оси $y$.)

Различие между стоячими и прогрессивными волнами проявляется, если наблюдать процесс во времени. В случае стоячих волн происходит только колебание уровня между фиксированными узлами (рис. 3.2, *а*), обусловленное переменностью во времени амплитуды $A(t)$.

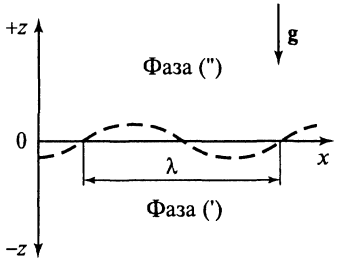



**Рис. 3.1. Поверхность раздела фаз в исходном и возмущенном (пунктирная линия) состояниях**

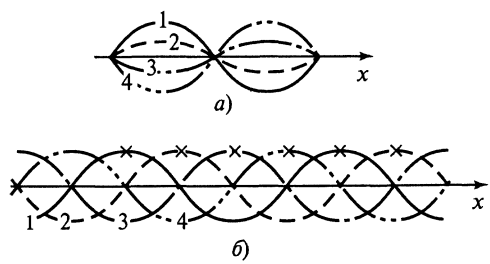



**Рис. 3.2. Стоячая (*а*) и прогрессивная (*б*) волны в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$**

Очертание прогрессивной волны перемещается в пространстве со скоростью, определяемой соотношением:

$$C = \frac{\omega}{k}.$$

Величина $C$ называется фазовой скоростью.

На рис. 3.2, *б* показаны очертания прогрессивной волны в некоторые моменты времени $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Крестиком обозначен выбранный для наблюдения гребень волны, скорость перемещения которого равна фазовой скорости $C$. (Заметим, что фазовая скорость отнюдь не является физической скоростью движения каких-либо частиц жидкости, которые, как будет показано ниже, не участвуют в макроскопическом перемещении вдоль оси $x$.)

Прогрессивная волна может распространяться как слева направо (соотношение (3.1а)), так и справа налево. В физическом отношении эти случаи совершенно эквивалентны (ибо процесс не должен зависеть от того, в какую сторону мы условимся считать направление оси $x$ положительным). Для прогрессивной волны, бегущей справа налево, уравнение имеет вид $h = a\sin(kx + \omega t)$. Теперь очевидно, что стоячую волну можно получить просто как суперпозицию (наложение) двух встречных прогрессивных волн*. Поэтому далее будем рассматривать лишь прогрессивные волны.

### 3.1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

При рассмотрении волновых движений главной задачей анализа является ответ на вопрос о развитии возмущений поверхности раздела во времени. Если первоначально наложенное на поверхность возмущение не будет нарастать во времени, то граница раздела фаз устойчива. Если же амплитуда волн, вызванных некоторым произвольным возмущающим воздействием, будет неограниченно нарастать во времени, то система неустойчива. Очевидно, что вопрос об устойчивости границы раздела фаз имеет очень много приложений к различным техническим задачам.

С точки зрения формального анализа для решения вопроса об устойчивости границы раздела фаз необходимо установить связь между круговой частотой $\omega$ и волновым числом $k$, физическими свойствами фаз, условиями протекания процесса. В случае, когда

* $a[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = 2a\cos\omega t \sin kx = A(t)\sin kx.$

рассматривается устойчивость плоской границы раздела двух идеальных жидкостей, имеющих скорость относительного движения $U_0$ в поле тяжести интенсивностью $g$ (см. рис. 3.1), математический анализ дает решение вида

$$\omega = \omega(k, U_0, \rho', \rho'', g, \sigma).$$

Оказывается, что здесь возможны два принципиально различных случая:

1) при любых $k > 0$ ($\lambda > 0$) величина $\omega$ вещественна. Это означает, что наложение на границу раздела фаз возмущений вида (3.1а) вызывает распространение по поверхности незатухающих прогрессивных волн. Такой случай называется нейтральной устойчивостью. (В действительности из-за влияния вязкости, которым мы пренебрегли, такие волны должны постепенно затухать, и их амплитуда $a$ медленно падать со временем. Энергия колебаний фаз постепенно *диссипирует*, превращаясь в теплоту. Система устойчива, так как возвращается с течением времени в исходное состояние.)

2) область $k > 0$ ($\lambda > 0$) подразделяется на две подобласти. В одной — по-прежнему величина $\omega$ вещественна, и здесь все сводится к предыдущему случаю. Но в другой подобласти чисел $k$ (длин волн $\lambda$) величина $\omega$ оказывается мнимой (в общем случае — комплексной): $\omega = i\omega_i$. Известно, что тригонометрические функции $\sin(i\omega_i t)$, $\cos(i\omega_i t)$ равны $i\,\mathrm{sh}(\omega_i t)$ и $\mathrm{ch}(\omega_i t)$. Последние с ростом времени неограниченно растут, и при больших $\omega_i t$ пропорциональны $e^{\omega_i t}$. Это значит, что амплитуды волн, выражаемые соотношением (3.1а) начинают неограниченно расти. Система удаляется от первоначального состояния, что означает ее неустойчивость. Если скорость относительного движения фаз при этом равна нулю, то такая неустойчивость называется *неустойчивостью Тейлора.* В случае конечной скорости относительного движения фаз неустойчивость границы раздела называется *неустойчивостью Гельмгольца.*

При анализе неустойчивости интерес представляет, во-первых, граница волновых чисел $k = k_*$ (длин волн $\lambda = \lambda_*$), соответствующих возникновению неустойчивости, а, во-вторых, значения $k = k_{**}$ ($\lambda = \lambda_{**}$), при которых значение $\omega_i$ максимально, т.е. максимальна скорость нарастания амплитуды волн (скорость развития неустойчивости). Соответствующая длина волны $\lambda_{**}$ называется «наиболее опасной».

## 3.2. АНАЛИЗ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА НЕПОДВИЖНЫХ ФАЗ

### 3.2.1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ

Количественный анализ мы начинаем с простейшего случая, соответствующего рис. 3.1, на котором изображена плоская поверхность раздела двух фаз (плоскость $z = 0$), неподвижная в исходном состоянии. Ускорение поля массовых сил (ускорение свободного падения) постоянно и нормально границе.

В исходном состоянии распределение давления в фазах определяется формулами гидростатики:

$$\begin{aligned} p^{0''}(z) &= p_s^0 - g\rho'' z \quad (z \geq 0); \\ p^{0'}(z) &= p_s^0 - g\rho' z \quad (z \leq 0), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $p_s^0$ — давление на границе раздела фаз, индекс «0» означает исходное (начальное) состояние.

Пусть далее к поверхности в некоторый момент прилагается малое возмущение. После этого граница и прилегающие слои обеих фаз придут в движение. Как уже говорилось, основные черты такого движения можно установить, анализируя поведение элементарной волны, определяемой соотношением (3.1а). Далее примем основные допущения линейной теории: $a << \lambda$, т.е. амплитуда мала в сравнении с длиной волны, обе фазы являются невязкими и несжимаемыми жидкостями. Эти допущения позволяют существенно упростить математическое описание задачи. В частности, условие $a << \lambda$ позволяет рассматривать $h$ и все ее производные как малые порядка $a/\lambda$, а квадратичные члены относительно этих величин опускать в уравнениях как малые более высокого порядка. Очевидно также, что скорости возмущенного* движения фаз по порядку величины равны производным $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, т.е. (так же, как и возмущенные давления) малые порядка $a/\lambda$. В рассматриваемой задаче математическое описание возмущенного движения фаз включает в себя:

* Под понятием возмущенного движения далее будем понимать движение, вызванное наличием поверхностных волн.

уравнение баланса массы

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; \tag{3.3}$$

уравнение баланса импульса (в проекциях на оси $x$ и $z$):

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \tag{3.4}$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{3.5}$$

а также условия совместности, которые будут рассмотрены ниже. Здесь $u$, $p$ — возмущенные значения скорости и давления, которые предполагаются малыми величинами. Уравнения (3.3)—(3.5) линейны (первой степени) по возмущениям, что составляет особенность линейной теории. (В уравнениях движения (3.4) и (3.5), как малые второго порядка, отброшены квадратичные члены вида $u_n \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n}$.)

Соотношения (3.3)—(3.5) справедливы во внутренних объемах фаз, и при их приложении к одной из фаз всем величинам ($\rho$, $u$, $p$) присваивается ее индекс.

Следует подчеркнуть, что полное уравнение баланса импульса (в проекции на ось $z$) для рассматриваемой задачи в пренебрежении малыми второго порядка имеет вид

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p^0}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho.$$

В этом уравнении члены, соответствующие возмущенному движению $\left(\rho \dfrac{\partial u_z}{\partial t}, \dfrac{\partial p}{\partial z}\right)$, намного меньше, чем члены, отражающие исходное состояние системы (их отношение имеет порядок $a/\lambda$), так что из него получаются фактически два уравнения, содержащие величины одного порядка: уравнение (3.5) для возмущенного движения и уравнение, описывающее исходное состояние системы и дающее при интегрировании соотношения (3.2) для каждой из фаз. Таким образом, допущения линейной теории позволяют рассматривать

фактически независимо друг от друга систему уравнений невозмущенного движения (в данном случае исходных уравнений гидростатики) и систему уравнений возмущенного движения, составленных из малых величин.

Дифференцируя уравнение (3.4) по $x$, а уравнение (3.5) по $z$ и складывая их, с учетом уравнения неразрывности (3.3) получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \tag{3.6}$$

Это уравнение может заменить одно из соотношений — (3.4) или (3.5).

В анализе будем предполагать, что протяженность обеих фаз вдоль оси $z$ значительна (теоретически бесконечна). Поэтому для возмущений должны выполняться условия $(\mathbf{u}, p) \to 0$ при $z \to \pm\infty$, (где знаки плюс и минус относятся соответственно к верхней и нижней фазам двухфазной системы). Это следует из того, что колебательное (возмущенное) движение обладает конечной энергией и может охватывать лишь конечные области фаз, примыкающие к границе раздела.

### 3.2.2. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ

Условия совместности на возмущенной границе фаз включают в себя соотношения для потоков массы и нормальной компоненты импульса. Так как граница предполагается непроницаемой, то условие совместности для потока массы, рассмотренное в § 1.7, имеет вид

$$u'_n - C_s = u''_n - C_s = 0 \quad (\text{при } z = h),$$

где $C_s$ — скорость границы раздела фаз.

В силу условия $a/\lambda << 1$ это соотношение в данном случае упрощается, так как нормальные к возмущенной границе скорости $u_n$ в линейном приближении равны:

$$u_n(h) = u_z(0) + \frac{\partial u_z}{\partial z} h + \ldots \approx u_z(0), \tag{*}$$

где $u_z(0)$ — вертикальная компонента скорости при $z = 0$.

Скорость движения межфазной границы $C_s$ в том же приближении равна:

$$C_s = \frac{\partial h}{\partial t}^{*}.$$

В итоге условие непроницаемости (*) принимает вид

$$u'_z = u''_z = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ при } z = 0. \tag{3.7}$$

Динамическое взаимодействие фаз на непроницаемой границе определяется соотношением

$$[P(h)] = 2\sigma H, \tag{**}$$

где $P = p + p^0$ — полное давление, складывающееся из невозмущенной и возмущенной части; $H$ — средняя кривизна поверхности.

Таким образом,

$$[P(h)] = P''(h) - P'(h) = p^{0''}(h) - p^{0'}(h) + p''(h) - p'(h).$$

С учетом соотношений (3.2) разность невозмущенных давлений на уровне $h$:

$$p^{0''}(h) - p^{0'}(h) = g(\rho' - \rho'')h = g\Delta\rho h,$$

где $\Delta\rho = \rho' - \rho''$.

Возмущенное давление на уровне $h$, $p(h)$, в линейном приближении равно $p(0)$ — возмущенному давлению на уровне $z = 0$. Действительно,

$$p(h) = p(0) + \frac{\partial p}{\partial z} h + \ldots \approx p(0).$$

Таким образом, как говорилось в п. 3.1.1, линейное приближение позволяет записать условия совместности для потоков массы и импульса через значения возмущенных скоростей и давлений на исходной (невозмущенной) поверхности. Для двумерных волн кривиз-

---

* Скорость границы раздела для прогрессивной волны рассмотрена в примере к п. 1.7.1.

В нашем случае $x_1 = x$; $x_2 = z$; $\mathbf{C}_S = \frac{\partial h}{\partial t} \Big/ \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right) \left(\mathbf{i}_z - \mathbf{i}_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial h}{\partial t} \mathbf{i}_z$.

на поверхности выражается через один радиус кривизны, т.е. (используя линейное приближение)

$$2H = \frac{1}{R} = \frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Таким образом, условие (**) запишется:

$$p''(0) - p'(0) + g\Delta\rho h = \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \tag{3.8}$$

Уравнения (3.7) и (3.8) представляют необходимые условия совместности на возмущенной границе в линейной теории. Эти условия должны выполняться в любой точке (любое $x$) и в любой момент времени (любое $t$).

### 3.2.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Из физических соображений представляется очевидным, что при возмущающем воздействии на границу раздела, определяемом соотношением (3.1а), давление и скорость возмущенного движения должны выражаться некоторыми периодическими функциями. Сопоставляя уравнения (3.1а) и (3.8), можно заключить, что возмущенное давление в каждой из фаз выражается уравнением вида

$$p = \hat{p}(z)\sin(kx - \omega t), \tag{а}$$

где $\hat{p}(z)$ — некоторая функция, зависящая только от $z$.

Подставляя это выражение в соотношение (3.6), находим

$$k^2 \hat{p}(z) = \frac{\mathrm{d}^2 \hat{p}(z)}{\mathrm{d}z^2}.$$

Следовательно, неизвестные функции $\hat{p}(z)$ имеют вид

$$\hat{p}(z) = Ae^{\pm kz}.$$

Выбор знаков перед показателем экспоненты определяется обращением $p$ для верхней и нижней фаз в нуль при $z \to \pm\infty$. В итоге имеем:

$$p'' = A'' e^{-kz} \sin(kx - \omega t);$$
$$p' = A' e^{kz} \sin(kx - \omega t). \qquad (б)$$

Далее, из анализа условия (3.7), уравнения (3.5) и решения (б) для возмущенного давления можно заключить, что структура выражений для $u_z$ имеет вид

$$u_z = B e^{\pm kz} \cos(kx - \omega t), \qquad (в)$$

причем из условия (3.7) видно, что для обеих фаз

$$B = -a\omega. \qquad (г)$$

Теперь из z-проекции уравнения движения (3.5) определяем $A'$ и $A''$ в (б). После подстановки $p$ и $u_z$ находим:

$$A'' = -\frac{\omega^2}{k} \rho'' a;$$

$$A' = \frac{\omega^2}{k} \rho' a.$$

Таким образом, имеем для возмущенного давления в каждой из фаз:

$$p'' = -\rho'' a \frac{\omega^2}{k} e^{-kz} \sin(kx - \omega t);$$
$$p' = \rho' a \frac{\omega^2}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t). \qquad (д)$$

Подставляя, наконец, в (3.8) значения давления в соответствии с соотношениями (д), а также по соотношению (3.1а) величины $h$ и $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, находим

$$\omega^2 = k \frac{g\Delta\rho + k^2\sigma}{\rho' + \rho''}. \qquad (3.9)$$

Целью всего анализа являлось получение этого соотношения, связывающего частоту $\omega$ (или период $t_0$) и волновое число $k$ (или длину

волны $\lambda$), а также физические свойства фаз ($\rho'$, $\rho''$, $\sigma$) и ускорение свободного падения, выступающее как внешнее условие протекания процесса. Отметим еще, что если обе части (3.9) разделить на $k^2$, то получим выражение для фазовой скорости волны

$$C^2 = \frac{g\Delta\rho + k^2\sigma}{k(\rho' + \rho'')}. \tag{3.10}$$

## 3.3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА. ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

### 3.3.1. ГРАВИТАЦИОННЫЕ И КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ

Полученное в § 3.2 соотношение (3.9) позволяет провести исследование на устойчивость системы, состоящей из двух неподвижных фаз, разделенных плоской поверхностью раздела. Как указывалось в § 3.1, система устойчива, если круговая частота $\omega$ вещественна. В нашем случае

$$\omega = \pm\sqrt{k\,\frac{k^2\sigma + g\Delta\rho}{\rho' + \rho''}}. \tag{3.11}$$

Таким образом ясно, что вопрос об устойчивости зависит от знака величины $g\Delta\rho = g(\rho' - \rho'')$, ибо все остальные величины под корнем существенно положительны. Далее проанализируем случай, когда $g\Delta\rho > 0$, т.е. $\rho'' < \rho'$ (легкая фаза находится над тяжелой). Очевидно, что при этом условии при любых положительных $k$ ($k > 0$, $\lambda > 0$) величина $\omega$ вещественна. Этот случай соответствует распространению на поверхности прогрессивных волн, система находится в нейтральном равновесии*. С ростом волновых чисел $k$ круговая частота $\omega$ увеличивается. Интересны предельные по $k$ соотношения, соответствующие случаям длинных (гравитационных) и коротких (капиллярных) волн. Линейным масштабом, придающим смысл такой классификации волн по их длине, служит капиллярная постоянная

$$b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}.$$

* Будучи выведена из состояния первоначального покоя, система испытывает не затухающие (но и нерастущие) во времени колебания. В действительности под влиянием вязкости, как отмечалось, такие колебания постепенно затухнут.

*Длинные (гравитационные) волны.* К длинным относятся волны, для которых справедливо неравенство $\lambda >> b$. Это условие эквивалентно соотношениям: $kb << 1$; $k^2\sigma << g\Delta\rho$. Тогда для длинных волн круговая частота

$$\omega = \sqrt{kg\,\frac{\rho' - \rho''}{\rho' + \rho''}}. \tag{3.12}$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{t_0}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, из (3.12) имеем связь периода с длиной волны $\lambda$:

$$t_0 = \sqrt{2\pi\lambda\,\frac{\rho' + \rho''}{g\Delta\rho}}. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) достаточно ясен смысл второго названия длинных волн — гравитационные, ибо все характеристики этих волн определяются плотностями фаз и ускорением свободного падения. Для системы воздух—вода область гравитационных волн при $g = 9{,}81$ м/с$^2$ определятся неравенством $\lambda \geq 10$ см. Это, в частности, морские волны. Их фазовая скорость $C = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{t_0}$ определяется выражением

$$C = \sqrt{\frac{\lambda g\Delta\rho}{2\pi(\rho' + \rho'')}}, \tag{3.14}$$

т.е. фазовая скорость для гравитационных волн растет с ростом длины волны. Порядок величины $C$ дает расчет при $\lambda = 1$ м ($g = 9{,}81$ м/с$^2$, $\rho' = 10^3$ кг/м$^3$; $\rho'' = 1{,}2$ кг/м$^3$): $C = 1{,}25$ м/с.

*Короткие (капиллярные) волны.* Для таких волн справедливо $\lambda << b$. Это условие эквивалентно соотношениям: $1 << kb$; $g\Delta\rho << k^2\sigma$. Таким образом, для коротких волн имеем

$$\omega = k\sqrt{\frac{k\sigma}{\rho' + \rho''}}. \tag{3.15}$$

Связь периода $t_0$ и длины волны $\lambda$ имеет вид

$$t_0 = \lambda\sqrt{\lambda\,\frac{\rho' + \rho''}{2\pi\sigma}}. \tag{3.16}$$

Короткие волны, определяемые соотношениями (3.15) и (3.16), называются *капиллярными*. Смысл названия очевиден: все характеристики таких волн определяются капиллярными силами. Иногда используют иное название капиллярных волн — «рябь». Для системы вода—воздух область капиллярных волн ограничена условием $\lambda \leq 1$ мм.

Фазовая скорость капиллярных волн

$$C = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda(\rho' + \rho'')}}, \tag{3.17}$$

т.е. растет при уменьшении длины волны. Порядок величины $C$ при $\lambda = 1$ мм ($\sigma \approx 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м) составляет примерно 0,7 м/с.

### 3.3.2. БЕЗРАЗМЕРНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ

В общем случае связь фазовой скорости $C$ с длиной волны представлена уравнением (3.10). Его можно записать в безразмерной форме, если ввести:

безразмерную длину волны

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{kb} = \frac{\lambda}{2\pi b};$$

безразмерную фазовую скорость

$$\tilde{C} = \frac{C}{U^+},$$

где $b = \sqrt{\dfrac{\sigma}{g\Delta\rho}}$ — капиллярная постоянная (масштаб длины); $U^+ = \sqrt[4]{\dfrac{\sigma g \Delta\rho}{(\rho' + \rho'')^2}}$ — масштабная скорость, зависящая лишь от физических свойств двухфазной системы и ускорения свободного падения $g$. (Для системы воздух—вода при комнатной температуре и атмосферном давлении $U^+ \approx 0{,}16$ м/с.)

Теперь соотношение (3.10) принимает простой вид

$$\tilde{C} = \sqrt{\tilde{\lambda} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}}. \tag{3.10а}$$

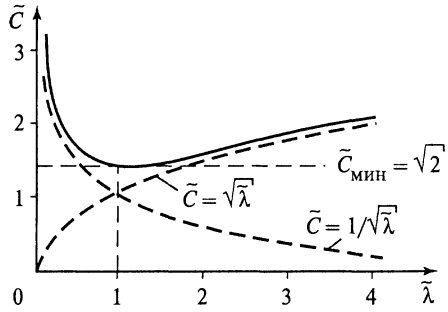



**Рис. 3.3. Зависимость безразмерной фазовой скорости от безразмерной длины волны**

График $\tilde{C} = f(\lambda)$, соответствующий формуле (3.10а), показан на рис. 3.3. Минимальное значение фазовая скорость $\tilde{C}$ принимает при $\tilde{\lambda} = 1$ (что легко проверяется из условия $\mathrm{d}\tilde{C}/\mathrm{d}\tilde{\lambda} = 0$) и равна:

$$\tilde{C}_{\text{мин}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ (при } \tilde{\lambda} = 1\text{)}.$$

Предельные случаи: гравитационные и капиллярные волны характеризуются соответственно соотношениями $\tilde{C} = \sqrt{\tilde{\lambda}}$ и $\tilde{C} = \sqrt{1/\tilde{\lambda}}$; графики этих зависимостей показаны на рис. 3.3. пунктиром. (Для системы воздух—вода $C_{\text{мин}} = \tilde{C}_{\text{мин}} U^{+} = \sqrt{2}\, U^{+} \approx 0{,}22$ м/с.)

### 3.3.3. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ ПРИ ВОЛНОВОМ ДВИЖЕНИИ

Для полноты картины найдем траектории индивидуальных частиц фаз. Из уравнения (в) и уравнения неразрывности (3.3) находим:

$$\begin{aligned} u_z &= Be^{\mp kz}\cos(kx - \omega t); \\ u_x &= \pm Be^{\mp kz}\sin(kx - \omega t) \end{aligned} \qquad (3.18)$$

(верхний знак — для верхней фазы, нижний — для нижней).

Вследствие условия $a << \lambda$ в (3.18) можно положить $x = x^0$, $z = z^0$ (т.е. координаты соответствуют положению частицы в со-

стоянии равновесия), а $u_z$ и $u_x$ рассматривать как $u_z = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z - z^0)$, $u_x = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - x^0)$, т.е. как скорости изменения индивидуальных координат частицы во времени. При этих условиях, интегрируя (3.18), получаем:

$$z - z^0 = -Be^{\mp kz^0}\frac{1}{\omega}\sin(kx^0 - \omega t);$$

$$x - x^0 = \pm Be^{\mp kz^0}\frac{1}{\omega}\cos(kx^0 - \omega t),$$

откуда, учитывая, что $B = -a\omega$, определяем траектории частиц в фазах:

$$(z - z^0)^2 + (x - x^0)^2 = a^2 e^{\mp 2kz^0}.$$

Таким образом, индивидуальные частицы фаз движутся по окружности с угловой скоростью $\omega$. Модуль скорости такого движения $|u| = \sqrt{u_z^2 + u_x^2} = Be^{\mp kz^0}$ постоянен, что также отвечает движению индивидуальных частиц по окружностям.

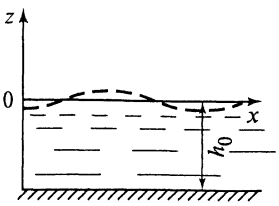
Итак, в прогрессивной волне каждая частица испытывает малые колебания около положения равновесия и движется по окружности вокруг своего положения равновесия $(x^0, z^0)$. Эти заключения важны в том отношении, что они доказывают высказанное ранее положение об отсутствии макроскопического смещения частиц. Поэтому фазовая скорость волны $C = \omega/k$ есть лишь скорость «движения» выделенного для наблюдения гребня (или впадины), но никак не скорость вещества.

### 3.3.4. ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Весь предшествующий анализ относится к волновым движениям на поверхности жидкости, глубина которой может быть принята бесконечно большой. В практических задачах представляет интерес анализ распространения волн на поверхности жидкости конечной глубины $h_0$ (рис. 3.4).

Примем, что над поверхностью жидкости находится воздух, плотность которого $\rho'' << \rho'$. Это дает основание не учитывать вовсе вторую фазу. Будем, кроме того, рассматривать лишь гравитацион-

**Рис. 3.4. Волны на поверхности жидкости глубины $h_0$**




ные волны, т.е. опускаем также поверхностное натяжение*. Тогда в решении для $u_z$ множитель $e^{kz}$ следует заменить множителем

$$\frac{\mathrm{sh}[k(z+h_0)]}{\mathrm{sh}(kh_0)},$$

чтобы при $z=-h_0$, т.е. на дне, величина $u_z$ обращалась в нуль. Соответственно в решении для $p$ множитель $e^{kz}$ следует заменить на множитель

$$\frac{\mathrm{ch}[k(z+h_0)]}{\mathrm{ch}(kh_0)},$$

чтобы при $z=0$ его величина равнялась 1. Тогда после простых вычислений можно найти

$$\omega = \sqrt{gk \cdot \mathrm{th}(kh_0)}. \qquad (3.19)$$

Из этого соотношения видно, что при $kh_0 >> 1$ $\omega = \sqrt{gk}$, так как $\mathrm{th}(kh_0) \to 1$. Это отвечает жидкости неограниченной глубины. В случае $kh_0 << 1$ величина $\mathrm{th}(kh_0) \to kh_0$ и из соотношения (3.19) следует, что $\omega = k\sqrt{gh_0}$. Это отвечает волнам на поверхности «мелкой жидкости». Видно, что понятие «мелкая жидкость» условно, так как для выполнения последнего соотношения нужно лишь $kh_0 << 1$ или $2\pi \dfrac{h_0}{\lambda} << 1$.

Фазовая скорость на поверхности «мелкой жидкости»

$$C_h = \sqrt{gh_0}. \qquad (3.20)$$

* Общий случай, когда учитываются $\rho''$ и $\sigma$, не представляет особых затруднений при анализе и может быть рассмотрен читателями самостоятельно.

Очевидно, что по сравнению с «глубокой жидкостью»

$$C_\lambda = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

с учетом того, что $\lambda >> h_0$, имеем

$$C_h < C_\lambda .$$

Скорость волны на поверхности «мелкой жидкости» меньше, чем на поверхности «глубокой жидкости». Этим объясняется известное явление разрушения морских волн на пологом по очертанию дна берегу.

Найдем значение $C_h$ при $h_0 = 2$ м. Из соотношения $C_h = \sqrt{gh_0} \approx$ $\approx \sqrt{20} \approx 4{,}5$ м/с $\approx$ 16 км/ч. Это фазовая скорость распространения длинных волн $\lambda >> 2\pi h_0$ на поверхности мелкого водоема.

### 3.3.5. ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

Хотя в описании волновых движений мы ориентируемся на результаты классической линейной теории, несколько практически важных сведений о волнах конечной амплитуды представляются вполне уместными.

Прежде всего подчеркнем, что нелинейная теория волновых течений энергично развивается в последние годы благодаря широкому использованию численных методов [29, 30, 43]. При использовании аналитических методов решения обычно представляются в виде бесконечных рядов, доказательство сходимости которых требует большой вычислительной работы [36]. Важные тенденции в поведении волн конечной амплитуды могут быть выявлены с помощью различных приближенных методов. В частности, если в описании гравитационных волн ограничиться третьими степенями амплитуды, то уравнение поверхности жидкости бесконечной глубины имеет вид

$$h = a\cos(kx) + \frac{1}{2}a^2k\cos(2kx) + \frac{3}{8}a^3k^2\cos(3kx).$$

Скорость распространения такой волны

$$C^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\left(1 + \frac{4\pi^2a^2}{\lambda^2}\right). \qquad (3.21)$$

В отличие от фазовой скорости бесконечно малых волн, выражаемой формулой (3.14), здесь она растет с амплитудой.

Гравитационные волны конечной амплитуды имеют несимметричные отклонения вверх и вниз от нулевого (исходного) уровня: возвышение имеет бóльшую высоту, чем понижение, но меньшую ширину (т.е. размер в направлении оси $x$).

В практическом плане очень важны *уединенные волны* [36], или *солитоны* — отдельные возвышения поверхности жидкости, которые распространяются с постоянной скоростью по поверхности канала конечной глубины. Уравнение уединенной волны на поверхности жидкости в канале с глубиной $h_0$ имеет вид [36]

$$h_c = h_0 + a\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{x\sqrt{3a}}{2(h_0 + a/3)^{3/2}}\right]. \tag{3.22}$$

Гребень уединенной волны возвышается над нормальным уровнем жидкости на значение $a$, которое можно принять за амплитуду волны. Скорость распространения уединенной волны

$$C_c = \sqrt{gh_0}\left(1 + \frac{a}{2h_0}\right) \tag{3.23}$$

больше, чем предельная скорость распространения волны малой амплитуды, определяемая согласно (3.20), причем она растет с ростом амплитуды.

### 3.4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЙЛОРА

Теперь проанализируем случай, когда в системе, изображенной на рис. 3.1, $g(\rho' - \rho'') < 0$, т. е. когда $\rho'' > \rho'$. Это означает, что тяжелая жидкость находится над легкой.

Общее решение (3.11) может быть представлено в виде

$$\omega = \pm\sqrt{k\,\frac{k^2\sigma - g\Delta\rho}{\rho' + \rho''}}, \tag{3.24}$$

где $\Delta\rho = \rho'' - \rho'$ — положительная величина.

Из анализа этого выражения нетрудно установить, что если $k^2\sigma > g\Delta\rho$, то круговая частота $\omega$ по-прежнему вещественна, и тогда справедливы заключения § 3.3, т.е. в области капиллярных

волн система устойчива и в том случае, когда тяжелая жидкость находится сверху.

Более интересен случай, когда $k^2\sigma < g\Delta\rho$. Тогда величина $\omega$ становится чисто мнимой. При этом амплитуда волн начинает неограниченно расти во времени, и тогда исходное состояние двухфазной системы оказывается гидродинамически неустойчивым. Как уже отмечалось, такого рода неустойчивость называется *неустойчивостью Тейлора* (или Рэлея—Тейлора [30]). Физическая интерпретация неустойчивости Тейлора следующая. В действительности на начальное невозмущенное состояние системы всегда накладываются малые случайные возмущения. Их можно представить как наложение прогрессивных волн разной длины. Те волны, для которых волновые числа попадают в диапазон значений, определяемых условием $k^2\sigma < g\Delta\rho$, начинают неограниченно расти по амплитуде и приводят к разрушению исходного состояния системы.

Для нахождения значений $\lambda_*$ и $\lambda_{**}$, т.е. длин волн (и соответствующих волновых чисел $k_*$ и $k_{**}$), отвечающих возникновению неустойчивости Тейлора и наиболее быстрому ее развитию во времени, удобно представить соотношение (3.24) в безразмерном виде. Воспользовавшись обозначениями § 3.3 и соотношением (3.10а), имеем

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega b}{U^+} = \frac{\omega b k}{k U^+} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{\lambda}^3} - \frac{1}{\tilde{\lambda}}}. \qquad (3.24а)$$

График зависимости $\tilde{\omega}^2(\tilde{\lambda})$ представлен на рис. 3.5. Значение $\tilde{\lambda}_*$, соответствующее возникновению неустойчивости Тейлора, определяется из условия $\tilde{\omega}^2 = 0$. Имеем

$$\tilde{\lambda}_* = 1; \quad \tilde{\lambda}_* = 2\pi b = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\Delta\rho}}. \qquad (3.25)$$

Наибольшее по абсолютной величине значение $\tilde{\omega}^2$ в отрицательной области определяет так называемую «наиболее опасную» длину волны $\tilde{\lambda}_{**}$, при которой относительная скорость нарастания амплитуды наибольшая, т.е. возмущения нарастают с наибольшей скоростью.

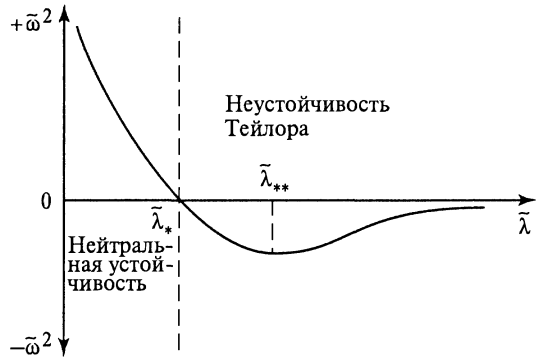



**Рис. 3.5. Зависимость круговой частоты от длины волны (безразмерные величины)**

Из условия экстремума

$$\frac{d(\tilde{\omega}^2)}{d\tilde{\lambda}} = 0$$

находим, что $\tilde{\lambda}_{**} = \sqrt{3}$, т.е. $\lambda_{**} = \lambda_* \sqrt{3}$. В размерном виде

$$\lambda_{**} = 2\pi\sqrt{3}\, b = 2\pi\sqrt{3}\sqrt{\frac{\sigma}{g\Delta\rho}}. \qquad (3.26)$$

В простейшем понимании неустойчивость Тейлора — это просто неустойчивость поверхности жидкости в перевернутых сосудах. Однако существует и ряд более тонких примеров. Так, пусть в слабом гравитационном поле сосуд с жидкостью (рис. 3.6, *а*) начинает двигаться с постоянным ускорением $a > g$ вниз. Тогда в системе координат, связанной с сосудом, происходит как бы «включение» отрицательного ускорения поля массовых сил ($a$—$g$). В итоге, на поверхности жидкости будет возникать неустойчивость Тейлора (во всех соотношениях, приведенных выше, теперь нужно использовать эффективное ускорение ($a$—$g$)), и жидкость будет вытекать из сосуда.

Линейная теория не дает ответа на вопрос о временно́м развитии неустойчивости Тейлора. Опытные наблюдения показывают, что начальная стадия развития тейлоровской неустойчивости хорошо предсказывается линейной теорией. На поверхности раздела фаз возникает синусоидальное очертание с длиной волны $\lambda_{**}$, т. е.

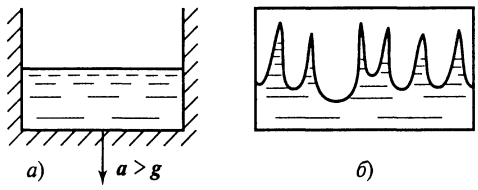



**Рис. 3.6. Жидкость в «падающем» сосуде:**
*а* — невозмущенное состояние; *б* — развитая неустойчивость

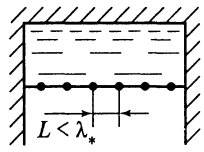



**Рис. 3.7. Жидкость в перевернутом сосуде, удерживаемая жесткой сеткой**

«наиболее опасная» длина волны быстрее всего нарастает по амплитуде. Наблюдения Льюиса [65] показывают, что экспоненциальный рост амплитуды волн $\lambda_{**}$ продолжается до амплитуд около $0{,}4\,\lambda_{**}$. Затем поверхность приобретает форму столбиков газа, проникающих в жидкость (рис. 3.6, *б*), после чего скорость проникновения столбиков становится постоянной, пропорциональной $\sqrt{a-g}$.

На рис. 3.7 показано еще одно интересное приложение анализа неустойчивости Тейлора. Если на поверхность жидкости в сосуде наложить жесткую сетку (гидрофобную или гидрофильную) с размерами ячейки менее $\lambda_* = 2\pi b$ (т.е. для воды менее 15 мм), то жидкость не будет вытекать из перевернутого сосуда. Это объясняется тем, что сетка ограничивает допустимые длины волн возмущений $\lambda < \lambda_*$, и при этом неустойчивость Тейлора устраняется.

## 3.5. ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ФАЗ

### 3.5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая задача: начальное состояние двухфазной системы характеризуется плоской поверхностью раздела двух невязких, несжимаемых фаз, которые имеют относительную скорость движения $U_0$. Ускорение свободного падения (поля массовых сил) направлено по нормали к границе.

Выберем систему отсчета, в которой нижняя фаза неподвижна, верхняя движется со скоростью $U_0$ в положительном направлении оси $x$ (рис. 3.8).

Распределение давлений в начальном (невозмущенном) состоянии определяется теми же формулами гидростатики (3.2), что и в § 3.2:

$$p^{0''}(z) = p_s^0 - g\rho'' z \quad (z \geq 0);$$

$$p^{0'}(z) = p_s^0 - g\rho' z \quad (z \leq 0),$$

где $p_s^0$ — давление на межфазной границе.

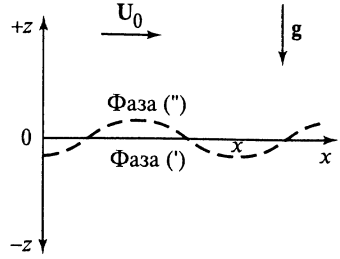



**Рис. 3.8. Поверхность раздела фаз при конечной скорости относительного движения фаз**

Пусть теперь к поверхности приложено малое возмущение. Возмущенное движение может рассматриваться как суперпозиция (наложение) совокупности элементарных прогрессивных волн вида (3.1а)

$$h = a\sin(kx - \omega t).$$

Задача исследования, которая в общей постановке обсуждалась в § 3.1, сводится к нахождению взаимосвязи $\omega$ и $k$. Функция $\omega = \omega(k)$ позволяет установить характер волнового движения и условия гидродинамической неустойчивости. Именно, если при любых волновых числах $k$ величина $\omega$ вещественна, то на границе существуют волновые движения, которые не растут (и не затухают) во времени. Если же в какой-то области чисел $k$ величина $\omega$ становится комплексной вида $\omega = \omega_R + i\omega_i$, где $\omega_R$ и $\omega_i$ — вещественная и мнимая части, то поверхность раздела будет прогрессивно во времени отклоняться от начального состояния. Гидродинамическая неустойчивость в системе, обладающей относительным движением фаз, называется *неустойчивостью Гельмгольца* (или, согласно [30], Кельвина—Гельмгольца).

### 3.5.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

При составлении уравнений возмущенного движения фаз будем использовать те же допущения, которые подробно обсуждались в § 3.1 и 3.2. В рамках линейной теории все возмущения (отклонения) предполагаются малыми, так что их квадратами в уравнениях и условиях совместности можно пренебречь. Нижняя фаза неподвижна, и для нее уравнения возмущенного движения совпадают с уравнениями § 3.2. Верхняя фаза, обладающая скоростью $U_0$, описывается следующими уравнениями:

уравнением неразрывности (3.3):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0;$$

уравнениями импульса

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \qquad (3.4a)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \qquad (3.5a)$$

После дифференцирования уравнений (3.4a) и (3.5a) соответственно по $x$ и $z$ можно получить, как и ранее, уравнение (3.6) для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Условия совместности на возмущенной границе, как и в § 3.2, включают в себя соотношения для потоков массы и нормальной компоненты импульса. Непроницаемость границы математически выражается условием

$$u_n' - C_s = u_n'' - C_s = 0,$$

где $u_n$ — скорость, нормальная к границе; $C_s$ — собственная скорость движения границы.

Используя соображения, обсуждавшиеся в § 3.2, в рамках линейной теории имеем

$$u_n'(h) = u_z'(0),$$

где $u_z'(0)$ — $z$-проекция скорости в сечении $z = 0$;

$$u_n''(h) = u_z''(0) - U_0 \frac{\partial h}{\partial x}; \; C_s = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

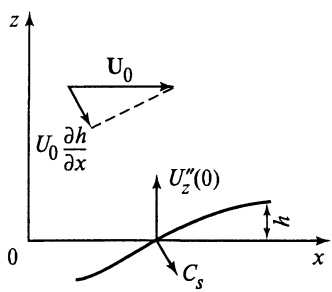



**Рис. 3.9. К определению нормальной к границе раздела проекции скорости верхней фазы**

Смысл вычитаемого $U_0 \frac{\partial h}{\partial x}$ иллюстрируется рис. 3.9. Для идеальной жидкости отсутствует условие «прилипания», так что скорость $U_0$ верхней фазы сохраняется всюду, включая границу раздела.

При обтекании возмущенной (волновой) поверхности появляется нормальная к ней составляющая макроскопической скорости.

Итак, условия непроницаемости для верхней фазы имеют вид

$$u_n''(h) = u_z''(0) - U_0 \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3.7а}$$

(при $z = 0$).

Из соотношения (3.7а) с учетом (3.1а) имеем:

$$\begin{aligned} u_z'(0) &= -a\omega \cos(kx - \omega t); \\ u_z''(0) &= -a(\omega - kU_0) \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \tag{3.7б}$$

Динамическое условие совместности определяется полученным в § 3.2 уравнением (3.8):

$$p''(0) - p'(0) + g\Delta\rho h = \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

или

$$p''(0) - p'(0) + (g\Delta\rho + k^2\sigma)h = 0. \tag{3.8а}$$

Далее получим решение поставленной задачи. (Отметим, при $U_0 = 0$ данная задача сводится к предыдущей, что можно использовать для контроля результатов.)

### 3.5.3. РЕШЕНИЕ

Граничные условия (3.7б) и (3.8а) указывают на структуру решений для $p$ и $u_z$.

Из соотношения (3.8а) ясно, что решение для $p$ должно иметь вид $p = \hat{p}(z) \sin(kx - \omega t)$, где неизвестные функции $\hat{p}(z)$ для верхней и нижней фаз есть решения уравнения (3.6), т.е.:

$$k^2 \hat{p}(z) = \frac{\mathrm{d}^2 \hat{p}(z)}{\mathrm{d}z^2}.$$

Имеем:

$$\hat{p}(z) = Ae^{\pm kz}.$$

Выбор знаков для верхней и нижней фаз в показателе экспоненты определяется условиями:

$$\widehat{p}''(z) \to 0 \text{ при } z \to +\infty, \text{ т.е. знак «–»;}$$

$$\widehat{p}'(z) \to 0 \text{ при } z \to -\infty, \text{ т.е. знак «+».} \qquad (\text{в}')$$

В результате получаем те же соотношения (б), что и в § 3.2:

$$p'' = A''e^{-kz}\sin(kx - \omega t);$$

$$p' = A'e^{kz}\sin(kx - \omega t).$$

Однако значение константы $A''$ теперь зависит от скорости $U_0$.

Из соотношений (3.7б) и уравнения (3.5а) можно установить, что решения для $u_z''$ и $u_z'$ должны иметь вид:

$$u_z' = -a\omega e^{kz}\cos(kx - \omega t);$$

$$u_z'' = -a(\omega - kU_0)e^{-kz}\cos(kx - \omega t).$$

Действительно, соотношения (в′) автоматически удовлетворяют (3.7б) и при подстановке (б) и (в′) в уравнения движения (3.5) и (3.5а) имеем

для нижней фазы:

$$-(\rho' a\omega^2 - A'k)e^{kz}\sin(kx - \omega t) = 0,$$

т.е.

$$A' = \rho' \frac{a\omega^2}{k};$$

для верхней фазы:

$$[-\rho'' a\omega(\omega - U_0 k) + \rho'' aU_0 k(\omega - U_0 k) - A''k]e^{-kz}\sin(kx - \omega t) = 0,$$

т.е.

$$A'' = -\rho'' \frac{a(\omega - U_0 k)^2}{k}.$$

Остается теперь найденные значения $p''(0)$ и $p'(0)$ при известных $A'$ и $A''$ подставить в уравнение (3.8а). Получим:

$$g\Delta\rho + k^2\sigma - \left[\rho' \frac{\omega^2}{k} + \rho'' \frac{(\omega - U_0 k)^2}{k}\right] = 0,$$

или после преобразований

$$\omega^2 - 2\,\frac{\rho''}{\rho' + \rho''}\,kU_0\omega + \left[\frac{\rho'' k^2 U_0^2}{\rho' + \rho''} - k\,\frac{g\Delta\rho + k^2\sigma}{\rho' + \rho''}\right] = 0\,. \qquad (*)$$

Таким образом, получено квадратное уравнение относительно искомой величины $\omega$. Можно здесь отметить, что если в нем положить $U_0 = 0$, то оно переходит, как этого и следовало ожидать, в (3.9) — итоговое уравнение § 3.2.

Решение (*) относительно $\omega$ имеет вид

$$\omega = \frac{\rho''}{\rho' + \rho''}\,kU_0 \pm \sqrt{k\,\frac{g\Delta\rho + k^2\sigma}{\rho' + \rho''} - \frac{\rho'\rho''}{(\rho' + \rho'')^2}\,k^2 U_0^2}\,. \qquad (3.27)$$

Это итоговое соотношение, определяющее зависимость $\omega = \omega(k)$.

### 3.6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Будем рассматривать вначале только случаи, когда $g\Delta\rho > 0$, т.е. легкая фаза находится над тяжелой ($\rho'' < \rho'$).

Для анализа соотношения (3.27) целесообразно, как и ранее, ввести безразмерные величины:

безразмерное волновое число (безразмерную длину волны) $\tilde{k} = kb = \dfrac{1}{\tilde{\lambda}} = 2\pi\,\dfrac{b}{\lambda}$, где $b = \sqrt{\dfrac{\sigma}{g\Delta\rho}}$ — капиллярная постоянная;

и безразмерную скорость $\tilde{U} = \dfrac{U_0}{U^+}$, где $U^+ = \sqrt[4]{\dfrac{\sigma g\Delta\rho}{(\rho' + \rho'')^2}}$ — масштаб скорости.

Тогда (3.27) принимает вид

$$\frac{\omega}{kU^+} = \frac{\rho''}{\rho' + \rho''}\,\tilde{U}_0 \pm \sqrt{\tilde{\lambda} + \frac{1}{\tilde{\lambda}} - \frac{\rho'\rho''}{(\rho' + \rho'')^2}\,\tilde{U}_0^2}\,. \qquad (3.27a)$$

Ранее (см. § 3.3) уже отмечалось, что значение $\tilde{\lambda} + 1/\tilde{\lambda}$ при любых $\tilde{\lambda}$ (любых $\tilde{k}$) положительно и имеет наименьшее значение при $\tilde{\lambda} = 1$, равное 2.

Отсюда следует, что при

$$\frac{\rho'\rho''}{(\rho'+\rho'')^2}\,\tilde{U}_0^2 \le 2 \tag{3.28}$$

величина $\omega$ вещественна при любых значениях $\tilde{\lambda}$ ($\tilde{k}$ или $k$). Следовательно, при условии (3.28) на поверхности раздела фаз существуют не растущие во времени волновые колебания, круговые частоты которых определяются уравнением (3.27).

Далее из (3.27а) следует, что при

$$\frac{\rho'\rho''}{(\rho'+\rho'')^2}\,\tilde{U}_0^2 > 2 \tag{3.29}$$

существуют такие $\tilde{\lambda}$ ($\tilde{k}$ или $k$), при которых $\omega$ становится комплексной вида

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_R \pm i\tilde{\omega}_i, \tag{3.30}$$

где $\tilde{\omega}_R$ и $\tilde{\omega}_i$ — модули первого слагаемого и подкоренного выражения в (3.27а).

В этом случае на границе возникают неограниченно растущие во времени возмущения и система оказывается неустойчивой.

Условие (3.29) определяет момент наступления гидродинамической неустойчивости Гельмгольца. Это важное условие перепишем в размерном виде:

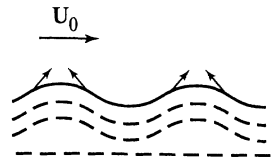
$$\text{при } U_0 > \sqrt{2\,\frac{\rho'+\rho''}{\rho'\rho''}}\,\sqrt[4]{\sigma g \Delta\rho} \tag{3.29а}$$

на поверхности раздела возникает неустойчивость Гельмгольца.

Итак, при превышении скоростью относительного движения фаз некоторого критического значения, определяемого правой частью (3.29а), в системе будет возникать гидродинамическая неустойчивость.

Таким образом, критическая скорость, при которой на поверхности жидкости возникают неограниченно растущие во времени волны, равна:

**Рис. 3.10. Обтекание газом волнистой поверхности жидкости**




$$U_{0\text{кр}} = \sqrt{2\,\frac{\rho' + \rho''}{\rho'\rho''}\,\sqrt[4]{\sigma g \Delta\rho}}\,. \qquad (3.31)$$

Эта скорость зависит лишь от $\rho'$, $\rho''$, $\sigma$ и $g$. Для системы вода—воздух при атмосферном давлении и земной гравитации $U_{0\text{кр}} \approx 6{,}5$ м/с.

Физическая интерпретация неустойчивости Гельмгольца достаточно проста. Над выступами жидкости скорость газа повышается (рис. 3.10), и, согласно уравнению Бернулли, давление падает. Возникает так называемый аэродинамический «подсос», стремящийся увеличить отклонение поверхности от первоначального плоского состояния.

При малых скоростях $U_0 < U_{0\text{кр}}$ относительного движения этому дестабилизирующему фактору препятствуют силы тяжести и поверхностного натяжения, так что система устойчива, и волны имеют нейтральный характер (амплитуда не изменяется во времени). При $U_0 > U_{0\text{кр}}$ для некоторых волн, характеризующихся значениями $\tilde{\lambda}$ около 1 (или $\lambda_* = 2\pi b$), аэродинамический эффект превышает силы тяжести и поверхностного натяжения.

Итак, неустойчивость Гельмгольца — чисто инерционное явление, присущее двухфазной системе при наличии относительного движения фаз.

В силу допущения о невязких средах вывод о возникновении неустойчивости при $U_0 \geq U_{0\text{кр}}$ не подтверждается количественно опытами. Можно было ожидать (так исторически и пытались интерпретировать результаты), что при $U_0 > U_{0\text{кр}}$ на поверхности воды в океане (озере) начинают возбуждаться растущие по амплитуде волны. Однако опыты показывают, что волны на поверхности водоема возникают при скорости ветра, существенно меньшей $U_{0\text{кр}}$. (Имеют-

ся данные, что начало возникновения волн происходит при скорости ветра около 1,5 м/с, что существенно меньше $U_{0\text{кр}} = 6{,}5$ м/с.)

Количественное расхождение объясняется в настоящее время тем, что в анализе не учитывались вязкость, турбулентные пульсации в газовой фазе и т.д. Есть основания считать, что $U_{0\text{кр}}$ по Гельмгольцу определяет ту скорость, при которой происходит образование значительных по амплитуде волн и даже срыв влаги с их гребней, т.е. развитую и неупорядоченную волнистость границы раздела фаз.

В заключение отметим, что в случае, когда более тяжелая жидкость находится вверху ($g\Delta\rho < 0$), при любой скорости и даже при $U_0 = 0$ имеет место гидродинамическая неустойчивость. Это сразу следует из анализа подкоренного выражения (3.27а), которое теперь имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} - \tilde{\lambda} - \frac{\rho'\rho''}{(\rho' + \rho'')^2}\,\tilde{U}_0^2 .$$

Ясно, что всегда можно указать такое $\tilde{\lambda}$, при котором это выражение будет отрицательным.

Глава четвертая

# ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКИХ ПЛЕНОК

## 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Течение жидкости в виде тонкой пленки — явление весьма распространенное в природе и технике. В промышленных масштабах оно реализуется, например, в конденсаторах на тепловых электростанциях и в химической промышленности, в различных сепараторах влаги, в массообменных аппаратах криогенной техники и химической технологии. Пленочные течения встречаются в целом ряде иных устройств новой техники, в которых имеют место двухфазные потоки с относительно большими объемными концентрациями газа или пара.

Движение жидкости в пленке может быть обусловлено массовыми силами: силой тяжести или (во вращающихся системах) центробежными силами. Кроме того, при движении внешнего по отношению к пленке газового потока со значительными скоростями наблюдается увлечение пленки в направлении движения потока. Специфический вид движения жидкости внутри пленки может происходить также под действием переменного по длине пленки поверхностного натяжения, например, из-за продольного градиента температур (термокапиллярное течение).

К настоящему времени наиболее полно исследованы закономерности свободного гравитационного стекания жидкости по наклонным и вертикальным поверхностям. Поэтому далее основное внимание уделяется этому типу течений. Экспериментально установлено, что существуют три характерных режима:

а) *ламинарный режим*, характеризующийся гладкой свободной поверхностью; наблюдается при малых расходах и соответственно числах Рейнольдса $Re_{пл} \leq 10—20$;

б) *ламинарно-волновой режим*, для которого характерно наличие волн на свободной поверхности. Во многих практических приложениях является основным режимом и наблюдается в ши-

роком диапазоне изменения расхода жидкости и числа Рейнольдса: $20 \le \mathrm{Re}_{\text{пл}} \le 1600$;

в) *турбулентный режим течения*. В пленке имест место развитое турбулентное перемешивание жидкости. Режим наблюдается при весьма значительных расходах жидкости и соответственно числах $\mathrm{Re}_{\text{пл}} \ge 1600$.

Применительно к пленке число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_{\text{пл}} = 4\frac{u_0\delta_0}{\nu}, \tag{4.1}$$

т.е. определено через среднюю скорость движения жидкости в пленке $u_0$ и эквивалентный гидравлический диаметр пленки $d_{\text{экв}} = 4\delta_0$, где $\delta_0$ — средняя толщина пленки*. На практике, однако, для расчета числа Рейнольдса не требуется непосредственного раздельного измерения средней скорости $u_0$ и средней толщины пленки $\delta_0$. Достаточно знать массовый $G_0$, кг/(м · с), или объемный $\Gamma_0$, м$^2$/с, расход жидкости в пленке, приходящийся на единицу ее ширины. По определению:

$$G_0 = \rho u_0 \delta_0; \tag{4.2}$$

$$\Gamma_0 = u_0 \delta_0, \tag{4.3}$$

поэтому число Рейнольдса равно:

$$\mathrm{Re}_{\text{пл}} = 4\frac{G_0}{\mu} = 4\frac{\Gamma_0}{\nu}. \tag{4.4}$$

## 4.2. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

### 4.2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания ламинарного режима течения пленки с гладкой поверхностью всегда правомерно использовать уравнения движения в приближении теории пограничного слоя. Это объясняется тем, что

* Иногда в литературе встречается также определение $\mathrm{Re}'_{\text{пл}} = u_0\delta_0/\nu$, т.е. без использования понятия эквивалентного диаметра.

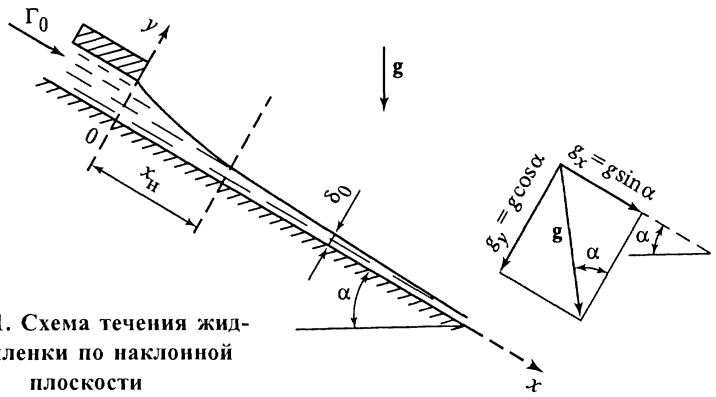



**Рис. 4.1. Схема течения жидкой пленки по наклонной плоскости**

на практике толщина пленки $\delta_0$ всегда существенно меньше протяженности $l$ в направлении течения жидкости, а условие

$$\frac{\delta_0}{l} << 1,$$

как известно, и является основным при обосновании теории пограничного слоя.

Для пленки, стекающей вдоль наклонной плоскости (рис. 4.1), уравнения движения и неразрывности имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_x; \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{4.6}$$

где $u$ и $v$ — проекции вектора скорости на направления соответственно осей $x$ и $y$; $g_x = g\sin\alpha$ — проекция вектора ускорения свободного падения на направление течения пленки, т.е. ось $x$. (В соответствии с приближениями пограничного слоя уравнение $y$-проекции импульса вырождается до $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$.)

В зависимости от конструкции входного устройства движение пленки на начальном гидродинамическом участке $x_н$ может быть либо ускоренным (см. рис. 4.1), либо замедленным. Теоретические оценки показывают, что для расчета длины начального гидродина-

мического участка правомерно соотношение $x_н = 0{,}2\mathrm{Re}_{пл}\delta_0$. Оно показывает, что в области ламинарного течения протяженность участка $x_н$ невелика.

Для гидродинамически стабилизированного стационарного течения жидкости в пленке уравнение движения допускает дальнейшие существенные упрощения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad v = 0; \quad \frac{dp}{dx} = 0.$$

Последнее условие отражает постоянство давления в газовой фазе, с которой соприкасается свободная поверхность пленки. В итоге уравнение движения принимает вид

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} + g_x = 0 \tag{4.7}$$

и означает, очевидно, что движение протекает в условиях, когда силы тяжести и вязкости в каждом сечении пленки взаимно сбалансированы. Граничные условия для профиля скорости:

при $y = 0$ $\quad u = 0;$

при $y = \delta_0$ $\quad \frac{du}{dy} = 0.$ (4.8)

Последнее условие означает отсутствие касательного напряжения $\left(\tau_\delta = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=\delta_0} = 0\right)$ на свободной границе пленки.

### 4.2.2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СВОБОДНО СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ

Первое интегрирование уравнения (4.7) дает:

$$\frac{du}{dy} = C_1 - \frac{g_x}{\nu} y.$$

Используя второе из граничных условий (4.8), находим

$$C_1 = \frac{g_x \delta_0}{\nu}.$$

После повторного интегрирования и использования граничного условия на стенке имеем следующее уравнение для профиля скорости в поперечном сечении пленки:

$$u = \frac{g}{\nu}\left(\delta_0 y - \frac{1}{2} y^2\right). \tag{4.9}$$

Таким образом, при свободно-гравитационном стекании жидкости профиль скорости параболический.

Средняя скорость жидкости в пленке

$$u_0 = \frac{1}{\delta_0}\int_0^{\delta_0} u \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\frac{g_x \delta_0^2}{\nu}. \tag{4.10}$$

Объемный расход (иногда называемый также «плотностью орошения»)

$$\Gamma_0 = u_0 \delta_0 = \frac{1}{3}\frac{g_x \delta_0^3}{\nu}. \tag{4.11}$$

Из последнего соотношения находим выражение для толщины пленки

$$\delta_0 = \left(\frac{3\Gamma_0 \nu}{g_x}\right)^{1/3}, \tag{4.12}$$

которое показывает, что толщина пропорциональна расходу жидкости в степени 1/3.

Наконец, отметим, что число Рейнольдса для пленки может быть выражено через толщину стабилизированной пленки $\delta_0$ в виде

$$\mathrm{Re}_{\text{пл}} = \frac{4}{3}\frac{g_x \delta_0^3}{\nu^2}. \tag{4.13}$$

**Пример**. Определить толщину пленки воды и ее среднюю скорость при свободно-гравитационном течении по вертикальной плоской стенке. Известны: $\mathrm{Re}_{\text{пл}} = 20$; $T = 20$ °C. По соотношению (4.13) находим

$$\delta_0 = \left(\frac{3}{4}\frac{\mathrm{Re}_{\text{пл}}\nu^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4}\frac{20 \cdot 10^{-12}}{9{,}8}\right)^{1/3} \approx 1{,}15 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}115 \text{ мм}.$$

Из соотношения (4.10) имеем

$$u_0 = \frac{1}{3}\frac{g\delta_0^2}{\nu} = \frac{1}{3}\frac{9{,}8\cdot(1{,}15)^2\cdot 10^{-8}}{10^{-6}} = 0{,}043 \text{ м/с} = 4{,}3 \text{ см/с}.$$

Тогда объемный расход

$$\Gamma_0 = u_0\delta_0 \approx 5\cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

### 4.2.3. ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В предельном случае отсутствия массовых сил (невесомость) изотермическая однородная по толщине жидкая пленка может двигаться только за счет трения на межфазной поверхности. Уравнение (4.7) принимает вид

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0. \qquad (4.7a)$$

Его интегрирование при граничных условиях:

при $y = 0$ $u = 0$;

при $y = \delta_0$ $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{\tau''}{\mu}$,

где $\tau''$ — заданное касательное напряжение на поверхности пленки за счет трения со стороны газового потока, дает:

$$u = \frac{\tau''}{\mu}y. \qquad (4.14)$$

Поскольку уравнение (4.7) линейное, то сумма (суперпозиция) решений (4.9) и (4.14) представляет собой решение этого уравнения при одновременном действии гравитационных сил и трения на свободной поверхности:

$$u = \frac{g}{\nu}\left(\delta_0 y - \frac{1}{2}y^2\right) + \frac{\tau''}{\mu}y. \qquad (4.15)$$

Объемный расход жидкости

$$\Gamma_0 = \int_0^{\delta_0} u\,dy = \left(\frac{g_x\delta_0}{3\nu} + \frac{\tau''}{2\mu}\right)\delta_0^2. \qquad (4.16)$$

Проанализируем, как влияет касательное напряжение $\tau''$ на течение пленки. Положительным значениям $\tau''$ отвечает увлечение пленки в направлении ее свободно-гравитационного стекания, отрицательным значениям $\tau''$ соответствует торможение пленки при движении газового потока вверх, навстречу стекающей жидкости. Примем, что при варьировании $\tau''$ толщина пленки остается неизменной ($\delta_0$ = = const) благодаря соответствующему изменению расхода $\Gamma_0$. Из (4.16) видно, что при $\tau'' > 0$ расход жидкости возрастает с ростом $\tau''$, что совершенно естественно: газ (пар) ускоряет жидкость и увеличивает ее расход. При тормозящем действии пара $\tau'' < 0$ расход жидкости снижается, так как теперь жидкость в области свободной поверхности замедляется и даже стремится начать двигаться вверх. При

$$\frac{2}{3}\frac{|\tau''|}{g_x \rho \delta_0} = 1 \qquad (4.17)$$

наступает режим, когда результирующий расход $\Gamma_0 = 0$.

Расчет по (4.15) показывает, что у стенки жидкость движется вниз, а около свободной поверхности вверх. На практике такие режимы оказываются гидродинамически неустойчивыми; действительное течение происходит при сильных пульсациях всех величин во времени. Часто ситуацию такого рода в двухфазных системах называют режимом «захлебывания». При $|\tau''|$ больших, чем по соотношению (4.17), поток газа увлекает пленку вверх, и течение оказывается уже обращенным. Расход $\Gamma_0 < 0$.

На рис. 4.2 показаны профили скорости в пленке, отвечающие разным соотношениям сил тяжести и трения на ее поверхности, рассмотренным выше. На рис. 4.2, *а* и *б* приведены случаи, отвечающие свободно-гравитационному и спутному течению газа и жидкости. При встречном течении (рис. 4.2, *в*) средняя скорость и расход жидкости в пленке (при $\delta_0$ = idem) уменьшаются, но направление течения по всей толщине пленки сохраняется постоянным (вниз). При высоких скоростях газа, движущегося вверх, возникает однонаправленное (спутное) течение газа и жидкости вверх (рис. 4.2, *г*). Между двумя последними режимами наблюдается упомянутый выше режим захлебывания (flooding). В условиях нормальной гравитации захле-

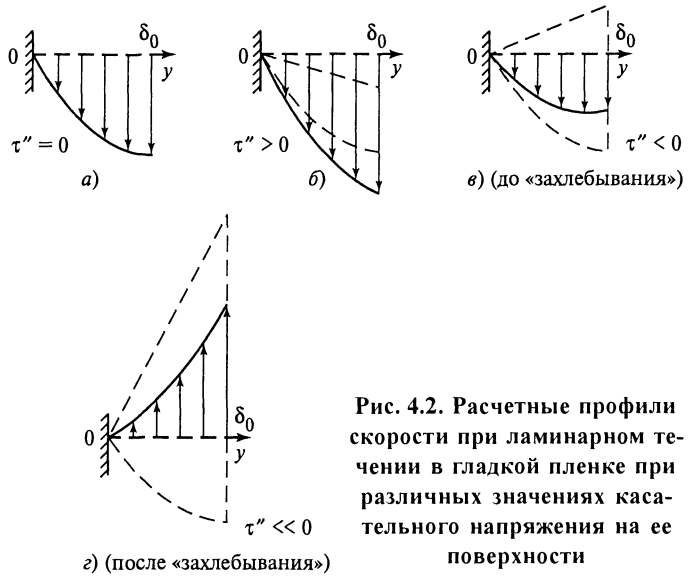



**Рис. 4.2. Расчетные профили скорости при ламинарном течении в гладкой пленке при различных значениях касательного напряжения на ее поверхности**

бывание и спутное движение вверх не могут происходить при сохранении ламинарного режима течения, так что картина, показанная на рис. 4.2, *г*, строго говоря, не может быть получена на основе (4.15).

## 4.3. ВОЛНОВОЙ РЕЖИМ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ

### 4.3.1. АНАЛИЗ ОПЫТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Исследователи уже давно замечали, что поверхность стекающих пленок часто имеет характер волнового, возмущенного движения, однако природа этого явления долгое время оставалась невыясненной.

В 1948—1949 гг. появились две статьи П.Л. Капицы [14, 15], которые оказались основополагающими в изучении проблемы волнового режима течения жидких пленок. В первой из них [14] была изложена приближенная теоретическая схема описания закономерностей развитого волнового течения. В частности, отмечалось, что волновой режим течения является основным гидродинамическим режимом для стекающих пленок. Во второй [15] были представлены экспериментальные результаты измерений характеристик волнового течения пленок по вертикальной поверхности. Эти работы стимулировали последующие исследования как теоретического,

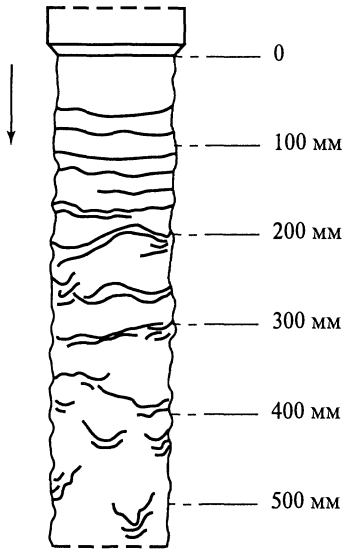



Рис. 4.3. Развитие волнового режима течения пленки

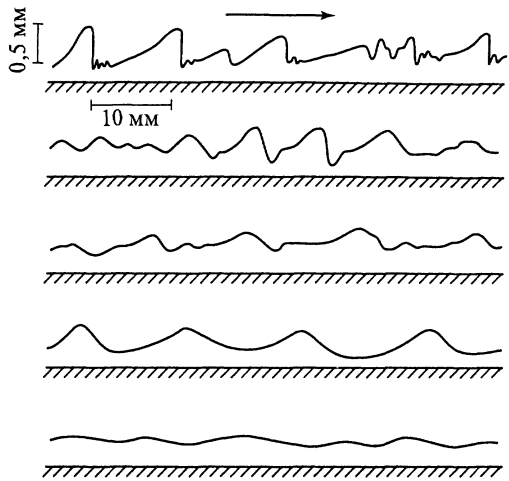



Рис. 4.4. Профили «естественных» волн

так и экспериментального характера. В процессе исследований выявились специфические трудности в изучении проблемы, не преодоленные полностью и к настоящему времени. Эксперименты показывают, что в природе, по-видимому, имеется целый набор разных типов волновых течений.

На рис. 4.3 представлена типичная картина развития волнового течения при стекании пленки по наружной поверхности вертикальной трубы [1]. Вблизи места подачи жидкости имеется режим с гладкой поверхностью. Затем на пленке возникают так называемые двумерные (кольцевые) волны. Далее они переходят в более беспорядочные трехмерные волны с весьма значительными амплитудами.

На рис. 4.4 представлены типовые профили пленок в режиме волнового течения, которые наблюдаются в экспериментах [1]. Такого рода профили можно назвать «естественными», ибо они образуются при течении с равномерным расходом без какого-либо искусственного стимулирования волнового режима. В ряде экспериментов [1, 15] двумерные волны специально возбуждались за счет небольших пульсаций расхода. Было установлено, что при заданном среднем объемном расходе $\Gamma_0 = \text{const}$ существует диапазон частот,

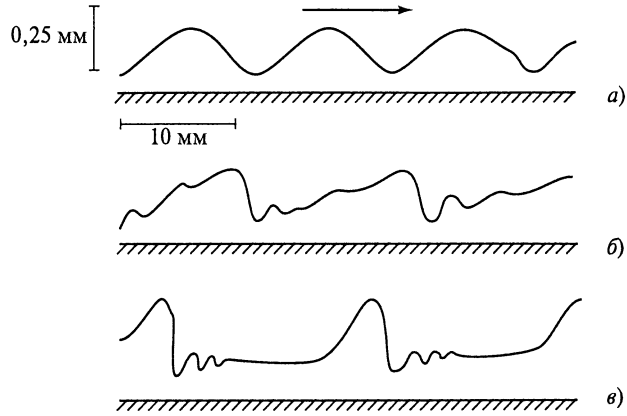



**Рис. 4.5. Профили «возбужденных» волн**

внутри которого генерируются достаточно устойчивые двумерные волны [1]. Максимально возможной частоте в этом диапазоне отвечают синусоидальные волны. По мере уменьшения частоты форма волн изменяется, как это показано схематически на рис. 4.5, *а*—*в*. Наименьшей частоте отвечают волны с крутым передним фронтом, перед которым имеются высокочастотные осцилляции (рис. 4.5, *в*). Интересно, что в целом «возбужденные» и «естественные» двумерные волны практически тождественны.

В экспериментах может быть измерена средняя (мгновенная) толщина жидкой пленки $<\delta>$ в режиме волнового течения. Опыты показывают, что величина $<\delta>$, несмотря на наличие часто весьма значительных амплитуд изменения толщины пленки с погрешностью около 10 %, совпадает с расчетной толщиной ламинарной пленки с гладкой поверхностью при том же расходе жидкости $\Gamma_0$. Иначе говоря, величина

$$<\delta> \approx \left(\frac{3\Gamma_0 \nu}{g}\right)^{1/3}. \qquad (4.18)$$

Далее в опытах измерялись значения фазовой скорости волн (т.е. скорость перемещения гребней по поверхности пленки). Оказалось, что фазовая скорость лежит в диапазоне $(1{,}7—3{,}0)u_0$, где $u_0 = \Gamma_0/<\delta>$ — средняя скорость жидкости в волновой пленке. Этот результат означает, что гребни волн «бегут» в направлении стека-

ния жидкости со скоростью, превышающей среднюю скорость жидкости в пленке.

Интерес представляет картина движения отдельных частиц жидкости, расположенных в данный момент в различных местах волновой пленки. Наибольшей скоростью обладают частицы жидкости, находящейся вблизи свободной поверхности гребней волн. В промежутках между гребнями, где толщина пленки минимальна, отдельные частицы жидкости останавливаются и даже приобретают на некоторое время обратное движение. Вместе с тем до чисел Рейнольдса, меньших 1600 сколь-нибудь заметного турбулентного перемешивания жидкости в пленке не наблюдается. Волновое течение представляет собой слоистое пульсирующее течение жидкости.

### 4.3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ

При теоретическом изучении волнового течения интерес представляют две проблемы:

1) устойчивость ламинарного течения с гладкой пленкой и возникновение волнового режима течения;

2) описание закономерностей развитого волнового течения.

Полученные к настоящему времени строгие результаты связаны в первую очередь с анализом устойчивости ламинарного течения пленки с гладкой поверхностью. Основные итоги этих исследований будут изложены ниже. Что касается второй проблемы, то здесь успехи значительно скромнее. Это можно понять, если обратить внимание на то, что согласно экспериментальным наблюдениям развитого волнового течения, амплитуды волн всегда значительны. Последнее означает, что теория развитого волнового течения должна быть нелинейной, а это чрезвычайно затрудняет исследования [43].

Напротив, проблема устойчивости ламинарного течения пленки с гладкой поверхностью в рамках классической линейной теории устойчивости решается достаточно строго. Результаты анализа представляют определенный интерес.

Существо приложения линейной теории устойчивости к рассматриваемой проблеме состоит в основных чертах в следующем. На основное (невозмущенное) ламинарное течение (уравнения (4.5) и (4.6)) накладывается малое возмущение. В результате течение приобретает возмущенный характер. Скорость, давление, толщина

пленки испытывают малые гармонические колебания около своих основных (невозмущенных) значений. Например, толщина пленки может быть представлена в виде

$$\delta = \delta_0 [1 + a \exp(ikx - i\omega t)], \tag{4.19}$$

где $a$ — безразмерная амплитуда, $|a| << 1$; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; $\omega = 2\pi/t_0$ — круговая частота; $\lambda$, $t_0$ — длина волны и период возмущения.

Возмущенные значения скорости и давления также пропорциональны множителю $\exp(ikx - i\omega t)$. Описание возмущенного движения осуществляется на основе полных уравнений Навье—Стокса при сохранении во всех соотношениях тех членов, в которые возмущенные величины входят лишь в первой степени (отсюда название «линейная теория»). С точностью до линейных по возмущениям величин записываются и граничные условия на стенке и свободной поверхности пленки. Последние учитывают действие силы поверхностного натяжения (из-за искривления поверхности). Предполагается также, что трение на свободной поверхности пленки равно нулю. Линейная теория описывает полностью (с точностью до абсолютного значения амплитуд возмущенных величин) возникающее движение и позволяет установить значение частот $\omega$ при известных волновых числах $k$ и остальных параметрах задачи. Исследование этой зависимости и составляет центральную задачу линейной теории устойчивости.

Рассмотрим относящиеся к ней результаты. При течении пленки по наклонной поверхности (угол наклона $\alpha$; $g_x = g\sin\alpha$; $g_y = g\cos\alpha$) в предположении, что $2\pi\delta_0/\lambda \equiv \delta_0 k << 1$ (длина волны много больше средней толщины пленки), и, ограничиваясь низшими степенями малого параметра ($\delta_0 k$), зависимость для $\omega$ получают в виде

$$\frac{\omega}{k u_0} = 3 + \frac{i}{12}\,\mathrm{Re}_{\text{пл}}\,(\delta_0 k)\left[\frac{18}{5} - \frac{g_y \delta_0}{u_0^2} - (\delta_0 k)^2\,\frac{\sigma}{\rho u_0^2 \delta_0}\right]. \tag{4.20}$$

Очевидно, течение устойчиво, если мнимая часть $\omega$ отрицательна. Тогда будет происходить экспоненциальное затухание во времени всего возмущенного движения. Если же мнимая часть $\omega$ положительна, то течение оказывается неустойчивым из-за неограниченного (в рамках линейной теории) экспоненциального нарастания воз-

мущений во времени. Учитывая эти соображения, проведем анализ соотношения (4.20).

Вначале для простоты положим дополнительно, что поверхностное натяжение равно нулю ($\sigma = 0$). Тогда из соотношения (4.20) получаем, что при стекании пленки по вертикальной поверхности ($\alpha = \pi/2$; $g_y = 0$) ламинарное течение *всегда* (при любом числе Рейнольдса) *неустойчиво.* Действительно, в этом случае в квадратных скобках соотношения (4.20) остается лишь $18/5 > 0$. На наклонной поверхности ($g_y \neq 0$) в предположении, что по-прежнему $\sigma = 0$, из соотношени (4.20) получаем, что неустойчивость возникает, когда

$$\frac{18}{5} > \frac{g_y \delta_0}{u_0^2}.$$

Подставляя сюда выражения для $u_0$ и используя определения числа Рейнольдса, находим условие потери устойчивости на наклонной поверхности в виде

$$(\mathrm{Re}_{\text{пл}})_{\text{кр}} > \frac{10}{3}\frac{g_y}{g_x}, \qquad (4.21)$$

где $\dfrac{g_y}{g_x} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Смысл соотношения (4.21) физически очевиден. Из-за стабилизации пленки на наклонной поверхности под действием $y$-проекции силы тяжести неустойчивость возникает при тем больших расходах, чем больше $g_y$. Так, при $g_y = g_x$ (угол $\alpha = 45°$) $(\mathrm{Re}_{\text{пл}})_{\text{кр}} = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$.

Далее рассмотрим, каким образом влияет на устойчивость поверхностное натяжение. Будем для простоты анализировать случай течения пленки по вертикальной поверхности ($g_y = 0$). Анализ выражения в квадратных скобках в соотношении (4.20) убеждает, что при учете сил поверхностного натяжения ламинарное течение вдоль вертикальной поверхности будет неустойчивым при любых числах Рейнольдса. Неустойчивость будет возникать при $k < k_*$ (т.е. в длин-

новолновой области спектра возмущений). Критическое значение волнового числа $k_*$ :

$$k_* = \sqrt{\frac{18}{5}\frac{\rho u_0^2}{\sigma \delta_0}}. \qquad (4.22)$$

Этот результат физически нетрудно понять, если учесть, что по мере увеличения длины волны $\lambda$ при заданном возмущении толщины пленки кривизна возмущенной поверхности падает. При $\lambda \to \infty$ возмущенная поверхность все меньше отличается от гладкой, и стабилизирующее действие поверхностного натяжения перестает действовать. Таким образом, учет поверхностного натяжения не устраняет неустойчивость, а лишь сдвигает ее в область больших длин волн.

Наибольшая скорость нарастания возмущений определяется экстремумом мнимой части $\omega$, т.е. условием

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial k} = 0,$$

что дает, на основе соотношения (4.20), следующее значение волнового числа, отвечающего «наиболее опасной» длине волны:

$$k_{**} = \frac{1}{\sqrt{2}} k_*.$$

Наибольший коэффициент усиления амплитуды

$$\omega_{i**} = \frac{27}{100} \mathrm{Re}_{\text{пл}} \frac{\rho u_0^3}{\sigma}.$$

Таким образом, линейная теория не подтверждает того экспериментального наблюдения, что при стекании пленки по вертикальной поверхности существует некоторое критическое значение $\mathrm{Re}_{\text{пл}}$, выше которого ламинарное течение оказывается неустойчивым. Теория говорит о том, что при любом (малом) числе $\mathrm{Re}_{\text{пл}}$ ламинарное течение пленки неустойчиво. По-видимому, при малых числах $\mathrm{Re}_{\text{пл}}$ перестройка к волновому режиму протекает достаточно медленно. Вследствие этого необходимы большие длины для обнаружения волнового течения. Косвенным подтверждением этого могут служить следующие экспериментальные результаты. Так, критические числа $\mathrm{Re}_{\text{пл}}$, найденные в опытах [15], составляли примерно 20—25. Позже

были описаны опыты, согласно которым на расстоянии 1 м от места подачи жидкости волновой режим течения с колебаниями толщины пленки наблюдался уже при числах Рейнольдса, примерно вдвое меньших, чем указанные выше данные П.Л. Капицы (см. [1]). Таким образом, сейчас можно говорить, видимо, лишь о практической границе наблюдаемых волновых течений на реальных поверхностях:

$$\mathrm{Re}_{\text{пл.гр}} \approx 10—20.$$

Согласно [1], этот диапазон чисел $\mathrm{Re}_{\text{пл.гр}}$ хорошо согласуется с предсказанным в [14] значением:

$$\mathrm{Re}_{\text{пл.гр}} = 0{,}61\,\mathrm{Ka}^{1/11}, \tag{4.23}$$

где число Капицы

$$\mathrm{Ka} = \frac{\sigma^3}{g\nu^4\rho^3}. \tag{4.24}$$

Волновое течение определяет интенсификацию процессов поперечного переноса энергии, массы и импульса (увеличение межфазного трения). Для иллюстрации эффекта интенсификации переноса тепла поперек пленки рассчитаем среднюю термическую проводимость пленки

$$\left\langle \frac{\lambda_т}{\delta} \right\rangle \equiv \frac{\lambda_т}{\langle\delta\rangle}\,\varepsilon, \tag{4.25}$$

где $\dfrac{\lambda_т}{\langle\delta\rangle}$ — термическая проводимость гладкой пленки толщиной $\langle\delta\rangle$; $\lambda_т$ — теплопроводность жидкости; $\varepsilon$ — поправочный коэффициент > 1, учитывающий увеличение проводимости вследствие волнистости.

Подчеркнем, что расчет по соотношению (4.25) предполагает отсутствие конвективного переноса тепла, и эффект интенсификации здесь определяется целиком очертаниями пленки.

На рис. 4.6 показаны схематизированные очертания волновой пленки: синусоидальный и пилообразный профили. Для них уравнение поверхности пленки соответственно имеет вид:

$$\delta = \langle\delta\rangle\left(1 + a\,\sin 2\pi\,\frac{x}{\lambda}\right);$$

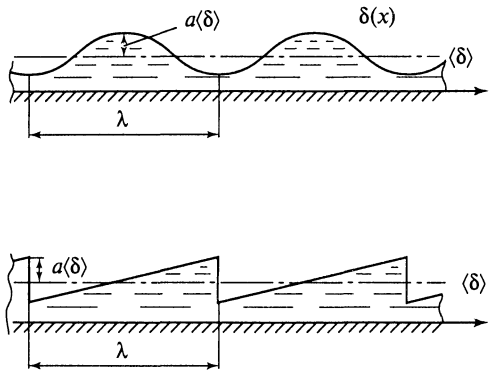



**Рис. 4.6. Схематичное изображение синусоидальной и пилообразной волн**

$$\delta = <\delta>\left[1 + a\left(2\frac{x}{\lambda} - 1\right)\right],$$

где $\lambda$ — длина волны; $a$ — безразмерная амплитуда.

Прямой расчет термической проводимости:

$$<\frac{\lambda_т}{\delta}> = \lambda_т \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{dx}{\delta(x)}$$

дает для коэффициента $\varepsilon$ следующие выражения:

синусоидальная волна

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}; \qquad (4.26)$$

пилообразная волна

$$\varepsilon = \frac{1}{2a}\ln\frac{1+a}{1-a}. \qquad (4.26а)$$

Приведем характерные значения коэффициента $\varepsilon$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| амплитуда $a$ | 0,5 | 0,6 | 0,75 |
| $\varepsilon$ по (4.26) | 1,16 | 1,25 | 1,52 |
| $\varepsilon$ по (4.26а) | 1,10 | 1,16 | 1,30 |

Данные значения показывают, что лишь из-за волнистости профиля пленки при неизменной ее средней толщине термическая проводимость возрастает на десятки процентов. Рассматриваемый эф-

фект проявляется в наиболее «чистом» виде в процессе пленочной конденсации пара на вертикальных поверхностях.

В течение последних 20 лет известные успехи были достигнуты в численном моделировании волн конечной амплитуды (нелинейная теория). Линейная теория способна ответить только на вопрос о границе устойчивого и неустойчивого состояний и не может предсказать реальную форму волн и их эволюцию во времени. Экспоненциальный рост амплитуды волн при возникновении неустойчивости, предсказываемый линейной теорией, сам по себе предполагает, что эта теория выходит за пределы своих возможностей, как только такой рост начинается. В реальном процессе восстанавливающие силы (поверхностного натяжения, инерции, массовые) быстро нарастают с увеличением амплитуды волн, которая всегда остается конечной в гравитационных пленках. На основании численных исследований в рамках нелинейной теории были получены некоторые практически полезные результаты [43], однако они, как правило, не могут быть представлены в виде простых аналитических соотношений; основные тенденции, следующие из численных решений, описываются обычно качественно. В частности, важный качественный вывод делается Холпановым и Шкадовым [43] в отношении влияния трения со стороны газового потока ($\tau''$) на форму волновой поверхности жидкой пленки. Оказывается, начиная с некоторого значения $\tau''$ (при заданном расходе жидкости $\Gamma_0$), увеличение касательного напряжения приводит к уменьшению амплитуды волн, чего никак нельзя было бы предположить на основе анализа в рамках линейной теории Кельвина—Гельмгольца.

В [1, 5] также приводятся результаты экспериментальных и теоретических (в нелинейной постановке) исследований характеристик развитого волнового течения пленки. Волны, качественный анализ которых был дан в п. 4.3.1, строго говоря, во многих случаях не могут анализироваться в рамках линейной теории, поскольку их амплитуда нередко превосходит среднюю толщину пленки $\delta_0$ (хотя условие $a << \lambda$ обычно выполняется). Возможности теоретического исследования волн конечной амплитуды, как упоминалось в п. 3.3.5, весьма ограничены. Стационарные уединенные волны, фазовая скорость которых определяется уравнением (3.23), возможны и наблюдаются в экспериментах с гравитационными пленками. Однако во многих экспериментальных установках и технических аппаратах длина поверхности в направлении течения, по-видимому, бывает

недостаточной для установления стационарных характеристик волн. В [5] приводятся сведения об экспериментах с пленками на наружной поверхности трубы высотой 19 м. Эти эксперименты показали, что, в отличие от средней толщины пленки, которая стабилизируется вблизи входного устройства, характеристики волнового движения, в частности амплитуда волн, устанавливаются лишь на больших расстояниях от входа. (При числах $\mathrm{Re}_{\text{пл}}$, близких к критическому (1600), амплитуда волн переставала расти при $x \approx 3$ м.)

Еще одна проблема устойчивости жидких пленок едва ли получит в обозримом будущем строгое теоретическое объяснение. Речь идет об определении минимального расхода, при котором пленка сохраняет сплошность. Практическая невозможность количественно описать адгезионные свойства твердой поверхности, по которой течет жидкость, заставляет ограничиваться эмпирическими оценками минимального расхода [5].

Теоретическая «непредсказуемость» этого параметра особенно наглядна из-за так называемого «гистерезиса смачивания», т.е. различия в определенных опытным путем краевых углах смачивания при натекании и оттекании жидкости. Из-за этого эффекта минимальный расход жидкости, обеспечивающий сплошность пленки, натекающей на «сухую» поверхность, всегда намного больше, чем тот минимальный расход, при котором начинается распад сплошной пленки на ручейки. Ясно, что традиционный анализ устойчивости, рассмотренный выше, не может предсказать потерю сплошности пленки. Уравнение (4.20) дает *верхнюю* границу расхода, при которой пленка сохраняет устойчивость, а при распаде пленок на ручейки необходимо определить *нижнюю* границу устойчивости (сплошности) пленки.

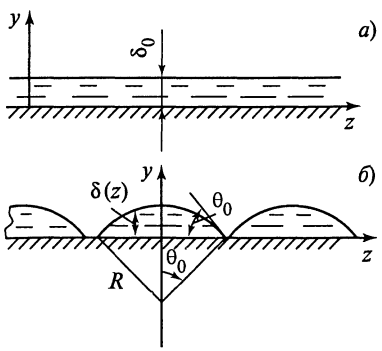



**Рис. 4.7. Расчетная схема [49] для определения минимального расхода жидкости в пленке, сохраняющей сплошность (показано сечение пленки горизонтальной плоскостью):**

*а* — сплошная пленка; *б* — система ручейков

В [49] для определения этой нижней границы принималось, что пленка распадается на ручейки, когда сумма кинетической и поверхностной энергии для двух геометрий, показанных на рис. 4.7, становится одинаковой. Это равенство суммарной энергии определяет значение $\Gamma_{мин}$, при котором пленка еще сохраняет сплошность, при $\Gamma < \Gamma_{мин}$ «энергетически выгодным» становится течение в виде ручейков. К сожалению, аналитическое выражение [49] для $\Gamma_{мин}$ — это функция краевого угла смачивания $\theta_0$, что делает сомнительной возможность его практического использования, несмотря на привлекательность лежащей в его основе физической модели.

### 4.4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛЕНКАХ

При значениях $Re_{пл} \geq 1600$ ламинарно-волновой режим течения пленки сменяется турбулентным. При этом так же, как и в обычных турбулентных потоках (например, в каналах), слой жидкости, непосредственно прилегающий к стенке, сохраняет черты ламинарного течения, а за пределами этого слоя пленки действует механизм турбулентного перемешивания. Это позволяет исключить из рассмотрения влияние волновых процессов, вязкости и поверхностного натяжения жидкости на касательные напряжения и связь между толщиной пленки и плотностью орошения. Анализ и результаты экспериментального изучения закономерностей течения тонких пленок показывают, что для свободно стекающей пленки можно записать равенство осредненных или локальных значений веса пленки и касательных напряжений $\tau_c$ на стенке в виде

$$\tau_c = g_x \rho \delta_0 . \qquad (4.27)$$

Этот результат легко получается из баланса сил, действующих в условиях стационарного течения пленки на ее элемент длиной $dx$ в направлении течения (рис. 4.8).

Очевидно, для единицы ширины пленки:

$$\tau_c dx = g_x \rho dx \delta_0 .$$

Формула (4.27), естественно, справедлива и для ламинарной пленки, в чем легко убедиться, рассчитав $\tau_c = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}$ по уравнению (4.9). Из (4.27):

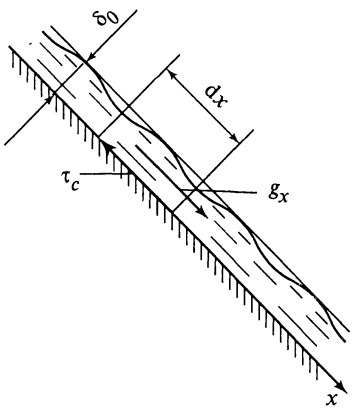



**Рис. 4.8. Баланс сил для элемента гравитационной пленки**

$$\delta_0 = \frac{\tau_c}{g_x \rho}. \qquad (4.28)$$

При известном законе трения из (4.28) легко получить искомую зависимость толщины пленки от расхода.

Допустим, что экспериментально найденный для потоков в трубах закон трения, например закон «одной пятой», справедлив и для течения в турбулентной пленке:

$$\tau_c = \frac{\xi}{8} \rho u_0^2,$$

где $\xi = \dfrac{0{,}184}{\mathrm{Re}^{1/5}}$ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Тогда для пленки при $\mathrm{Re}_{\text{пл}} = \dfrac{4u_0\delta}{\nu}$:

$$\tau_c = \frac{0{,}0174\rho u_0^{9/5}\nu^{1/5}}{\delta_0^{1/5}}$$

и из (4.28) получаем

$$\delta_0 = \frac{0{,}26\Gamma_0^{3/5}\nu^{1/15}}{g_x^{1/3}}. \qquad (4.29)$$

**Пример**. Оценим значение $\delta_0$ в переходной области от ламинарно-волнового течения к турбулентному. Пусть $\mathrm{Re}_{\text{пл}} = 1600$. Жидкость — вода при $T = 20$ °С. Объемная плотность орошения $\Gamma = \mathrm{Re}_{\text{пл}}\nu/4 = 4 \cdot 10^{-4}$. По (4.29):

$$\delta_0 = \frac{0{,}26\Gamma_0^{3/5}\nu^{1/15}}{g_x^{1/3}} = \frac{0{,}26(4 \cdot 10^{-4})^{3/5} 10^{-6/15}}{(9{,}81)^{1/3}} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м} = 0{,}45\ \text{мм}.$$

Более строгий подход к построению зависимости толщины пленки от расхода жидкости может быть основан на использовании закона распределения скорости по толщине пленки. Из опытов непосредственно с пленками, свободно стекающими в турбулентном режиме, было найдено [8], что в турбулентной части по толщине пленки скорость изменяется по логарифмическому закону:

$$u^+ = 1{,}75 \ln y^+ + 7{,}14^*, \tag{4.30}$$

где $u^+ = \dfrac{u}{v_*}$ — безразмерная скорость; $v_* = \sqrt{\dfrac{\tau_c}{\rho}}$ — динамическая скорость; $y^+ = yv_*/\nu$ — безразмерная координата.

Толщина вязкого подслоя турбулентного потока оценивается как $y_л^+ \approx 12$, и в пределах вязкого подслоя (при $y_л^+ \le 12$) $u^+ = y^+$.

Средняя безразмерная скорость пленки с учетом особенностей изменения скорости в пристенной зоне и зоне развитого турбулентного режима может быть определена как:

$$u_0^+ = \frac{1}{\delta_0^+}\left\{\int_0^{12} y^+ \, dy^+ + \int_{12}^{\delta_0^+} (1{,}75 \ln y^+ + 7{,}14)\, dy^+\right\}.$$

В результате получаем

$$u_0^+\delta_0^+ = [\delta_0^+(1{,}75 \ln\delta_0^+ + 5{,}4) - 45].$$

Или, учитывая, что $u_0^+\delta_0^+ = \dfrac{\mathrm{Re}_{пл}}{4}$:

$$\frac{\mathrm{Re}_{пл}}{4} = \mathrm{Ka}_0(1{,}75 \ln \mathrm{Ka}_0 + 5{,}4) - 45, \tag{4.31}$$

где $\mathrm{Ka}_0 = \delta_0^+ = \dfrac{v_*^3}{\nu g_x}$ — число Капицы (отличное от введенного в § 4.3).

---

* Для турбулентных потоков в трубах известен закон $u^+ = 2{,}5 \ln y^+ + 5{,}5$.

Формула (4.31) позволяет при известном расходе жидкости в пленке определить толщину пленки. Однако она неудобна в расчетной практике. Степенная аппроксимация формулы (4.31) имеет вид

$$\mathrm{Ka}_0 = 0{,}047\mathrm{Re}_{\text{пл}}^{0{,}9} \tag{4.32}$$

и может служить удобной расчетной формулой.

Таким образом, окончательно из (4.32) получаем

$$\delta_0 = 0{,}3\,\frac{\Gamma_0^{3/5}\nu^{1/15}}{g_x^{1/3}}. \tag{4.33}$$

Эта формула дает расчетные значения $\delta_0$, лишь на $\approx 12\,\%$ отличающиеся от значений по (4.29). Следует отметить, что другое, но очень близкое (4.33) было получено Ли и Бэнновым:

$$\delta_0 = 0{,}304\,\frac{\Gamma_0^{7/12}\nu^{1/12}}{g_x^{1/3}}.$$

Таким образом, связь средней толщины пленки и расхода моделируется с достаточной точностью.

## 4.5. ТЕПЛООБМЕН В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПЛЕНКАХ

### 4.5.1. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Эта задача была решена В. Нуссельтом в 1916 г. и относится к классическим задачам. Ее детальный анализ приводится в учебниках по теории тепло- и массообмена (см. например, [13, 40]). Здесь лишь кратко приводятся основные этапы решения и результаты.

Рассматривается ламинарная пленка с гладкой поверхностью. В предположении пренебрежимой малости конвективного переноса энергии для жидкости с постоянными свойствами плотность теплового потока, отводимого от твердой стенки, определяется только теплопроводностью пленки:

$$q = \frac{\lambda_{\text{т}}\Delta T}{\delta_0}, \tag{4.34}$$

где $\Delta T = T_s - T_c$ — разность температуры насыщенного пара $T_s$ и стенки $T_c$. Следовательно, коэффициент теплоотдачи — величина, обратная толщине пленки:

$$\alpha = \frac{\lambda_т}{\delta_0}. \tag{4.34а}$$

Связь толщины пленки и расхода дает (4.11) или (4.12). Особенность процесса конденсации состоит в том, что расход жидкости здесь неизвестен, он сам определяется интенсивностью конденсации. Используя универсальное условие совместности для потока энергии в случае умеренной интенсивности фазового перехода (п. 1.7.5)

$$\dot{m} h_{LG} = q$$

и уравнение материального баланса, связывающее прирост массового потока жидкости на единицу ширины пленки $G_0$ с плотностью потока массы конденсирующегося пара $\dot{m}$,

$$\mathrm{d}G_0 = \dot{m}\, \mathrm{d}x,$$

находим с учетом (4.34):

$$\mathrm{d}G_0 = \frac{q}{h_{LG}}\, \mathrm{d}x = \frac{\lambda_т \Delta T}{h_{LG}} \frac{\mathrm{d}x_0}{\delta_0}. \tag{4.35}$$

Согласно (4.11)

$$G_0 = \frac{1}{3} \frac{g_x \delta_0^3}{\nu} \rho.$$

Подстановка этого выражения в (4.35) дает дифференциальное уравнение относительно толщины пленки $\delta_0$. Его интегрирование при граничном условии $x = 0$, $\delta_0 = 0$ приводит к соотношению

$$\delta_0 = \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\lambda_т \Delta T \nu x}{h_{LG} \rho g_x}}. \tag{4.36}$$

Таким образом, при конденсации толщина пленки увеличивается по длине по закону $\delta_0 \sim x^{1/4}$. С учетом (4.34а) локальный коэффициент теплоотдачи при конденсации

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\lambda_т^3 h_{LG} \rho g_x}{\Delta T \nu x}}. \qquad (4.37)$$

Средний коэффициент теплоотдачи для поверхности высотой $H$:

$$\overline{\alpha} = 0{,}943 \sqrt[4]{\frac{\lambda_т^3 h_{LG} \rho g_x}{\Delta T \nu H}}. \qquad (4.37а)$$

Это соотношение известно как классическая формула Нуссельта.

Последующие теоретические и экспериментальные исследования позволили оценить корректность допущений, использованных в анализе. Как ясно из анализа § 4.3, действительный волновой режим течения ламинарной пленки приводит к повышению интенсивности теплоотдачи и требует введения соответствующей поправки к формулам (4.37) и (4.37а). Согласно [13] эта поправка, предложенная Д.А. Лабунцовым, имеет вид

$$\varepsilon_в = \left(\frac{\mathrm{Re}_{пл}}{4}\right)^{0{,}04}, \qquad (4.38)$$

где $\mathrm{Re}_{пл}$ определяется согласно (4.4). Коэффициент теплоотдачи с учетом поправки

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_{Nu} \varepsilon_в, \qquad (4.39)$$

где $\overline{\alpha}_{Nu}$ дается по формуле (4.37а). Так как при конденсации число $\mathrm{Re}_{пл}$ не является определяющим критерием подобия, а само зависит от $\overline{\alpha}$:

$$\mathrm{Re}_{пл} = \frac{4G_0}{\mu} = \frac{4}{h_{GL}\mu} \int_0^H q \, \mathrm{d}x = \frac{4\overline{\alpha}\Delta T H}{h_{LG}\mu},$$

то при использовании поправки (4.38) требуется несложная итерационная процедура. Сначала рассчитывается $\overline{\alpha}_{Nu}$ по (4.37а), по нему — $\mathrm{Re}_{пл}$, затем $\varepsilon_в$ по (4.38), после чего коэффициент теплоотдачи

первого приближения $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_{Nu}\varepsilon_в$. Далее $\bar{\alpha}_1$ используется для уточнения $Re_{пл}$ и $\varepsilon_в$. Второго приближения для $\varepsilon_в$, используемого в (4.38), обычно бывает достаточно.

Из других допущений, используемых в анализе Нуссельта, существенным оказалось предположение о неизменности вязкости и теплопроводности жидкости в поперечном сечении пленки. Соответствующая поправка приводится в [13]. Там же дается методика расчета теплоотдачи при конденсации в случае турбулентного течения пленки.

### 4.5.2. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ИСПАРЕНИИ С ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ

Во многих технологиях (см. [1, 5, 8]) гравитационные пленки используются для охлаждения твердой поверхности или как весьма эффективный способ выпаривания растворителя из жидкого раствора. В обоих случаях тепловой поток направлен от «горячей» стенки к «холодной» жидкости в пленке.

Задача о теплообмене изотермической плоской поверхности с неиспаряющейся жидкой пленкой при ее ламинарном течении была решена Нуссельтом еще в 1923 г. [5]. Принималось, что свободная поверхность пленки плоская, теплообмен с газом отсутствует. В этом случае расход (плотность орошения), а следовательно, и толщина пленки известны, среднемассовая температура жидкости в заданном сечении ($\bar{T}'$) может быть определена из уравнения энергетического баланса. Для участка стабилизированного теплообмена, когда коэффициент теплоотдачи не изменяется по длине, было получено:

$$Nu_\delta \equiv \frac{\alpha\delta_0}{\lambda_т} = 1{,}88, \qquad (4.40)$$

где $Nu_\delta$ — число Нуссельта (безразмерный коэффициент теплоотдачи); $\alpha \equiv \dfrac{q_c}{T_c - \bar{T}'}$; индекс «с» означает, что соответствующие величины берутся на стенке (при $y = 0$). При условии $T_c = \text{const}$, для которого получена формула (4.40), среднемассовая температура жидкости увеличивается по длине, так что при неизменном $\alpha$ плотность теплового потока $q_c$ уменьшается сверху вниз.

В [5] сообщается, что приближенное теоретическое решение той же задачи для практически более важного условия $q_c$ = const дает

$$Nu_\delta = 1{,}986, \qquad (4.40a)$$

что отличается от (4.40) всего на 5,6 %.

Эксперименты показывают, что в действительности коэффициент теплоотдачи к гравитационной неиспаряющейся пленке в ламинарно-волновом режиме изменяется по высоте обогреваемой поверхности в общем случае достаточно сложно [5]. В большинстве случаев естественное снижение коэффициента теплоотдачи на начальном участке гидродинамической и тепловой стабилизации сменяется его увеличением по мере развития волнового движения; при этом во многих случаях полной стабилизации теплоотдачи не происходит на длинах, превышающих 2 м. Теоретически обоснованных методов расчета коэффициента теплоотдачи, отражающих указанную его немонотонность в направлении течения, в настоящее время не создано. В инженерной практике при ламинарно-волновом режиме течения ($Re_{пл} < 1600$) можно приближенно принять для расчета среднего значения $\alpha$:

$$Nu_\delta \approx 2{,}0.$$

При испарении пленки на первый взгляд теплоотдача должна подчиняться тем же закономерностям, что и при конденсации. То обстоятельство, что начальный расход жидкости в пленке при испарении обычно является заданным, а убыль расхода за счет испарения, как правило, не очень значительна, делает анализ теплоотдачи при испарении (в рамках подхода Нуссельта) даже более простым, чем при конденсации. Полагая, что расход жидкости в любом сечении пленки легко определяется из теплового баланса при известном его значении на входе, число $Re_{пл}$ для испарения выступает как определяющий критерий подобия. Все соотношения, полученные выше для ламинарной пленки и определяющие изменения расхода в пленке с плотностью теплового потока на поверхности, остаются в силе. Локальная теплоотдача для гладкой ламинарной пленки при ее испарении с поверхности в среду собственного пара описывается формулой (4.37). Отличие лишь в направлении теплового потока, так как теперь $\Delta T = T_c - T_s$, $T_c > T_s$. Имея в виду, что при условии

$T_c = \text{const}$ $\alpha \sim x^{-1/4}$, $q \sim x^{-1/4}$, легко убедиться, что локальное значение плотности теплового потока связано с массовым расходом на единицу ширины пленки $G_l$ соотношением

$$q = \frac{3}{4} \frac{G_l h_{LG}}{x}. \qquad (4.41)$$

(Действительно, при $q = A x^{-1/4}$ уравнение энергетического баланса дает: $h_{LG} \dot{m}\, \mathrm{d}x = q\, \mathrm{d}x = A x^{-1/4}\, \mathrm{d}x = 4/3\, \mathrm{d}(qx)$, откуда, имея в виду: $\dot{m}\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}G_l$, получаем (4.41).)

Заменяя теперь в (4.37) $\Delta T \equiv \frac{q}{\alpha}$, вводя $\mathrm{Nu}_* = \frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{\nu^2}{g_x} \right)^{1/3}$, используя (4.41) и определение $\mathrm{Re}_{\text{пл}}$, находим

$$\mathrm{Nu}_* = 1{,}1\ \mathrm{Re}_{\text{пл}}^{-1/3}. \qquad (4.37б)$$

Экспериментальные значения коэффициента теплоотдачи при испарении с поверхности пленки, однако, значительно (до 100 %) превосходят расчетные по (4.37б). Очевидно, влияние волн в этом случае заметно сильнее, чем в случае конденсации. Качественное объяснение такой несимметрии достаточно простое. Действительно, при конденсации интенсификация процесса теплоотдачи на впадинах волн ведет к выравниванию поверхности пленки, т.е. к уменьшению глубины впадины, а при испарении, напротив, способствует уменьшению толщины пленки во впадине, что еще больше интенсифицирует теплоотдачу. Количественно этот эффект удалось описать лишь путем эмпирической поправки к уравнению (4.37б). Гимбутис [8] предложил следующее уравнение, описывающее опытные данные об испарении с поверхности пленки:

$$\mathrm{Nu}_* = 1{,}1\ \mathrm{Re}_{\text{пл}}^{-1/3} (1 + 0{,}02\ \mathrm{Re}_{\text{пл}}^{0{,}2} + 0{,}0009\ \mathrm{Re}_{\text{пл}}^{0{,}85} \mathrm{Pr}^{0{,}65}). \qquad (4.42)$$

Это уравнение пригодно не только для ламинарно-волнового, но и для турбулентного режимов течения.

Глава пятая

# УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ЧАСТИЦЫ В ЖИДКОСТИ

В большом числе случаев двухфазные системы удобно рассматривать как сплошную фазу* (жидкость или газ), в которой распределены частицы другой дискретной фазы (капли жидкости, пузырьки пара или газа, твердые частицы). Примеры такого рода систем могут быть взяты из самых различных областей человеческой деятельности — от многочисленных отраслей техники до биологии и медицины. Взаимодействие дискретной частицы с окружающим ее объемом несущей («сплошной») фазы играет фундаментальную роль в анализе двухфазных систем; изучение этого взаимодействия составляет содержание метода единичной контрольной ячейки. Такая ячейка содержит лишь одну дискретную частицу и прилегающую к ней область несущей фазы.

Анализ закономерностей движения дискретной частицы внутри единичной ячейки позволяет переходить к построению теории двухфазной системы в целом. Успешная реализация метода единичной ячейки возможна лишь на базе механики одиночной частицы в объеме сплошной среды. Именно механика твердой частицы в жидкости или газе, капли жидкости в газе или в другой жидкости (не смешивающейся с первой), пузырьков газа или пара в жидкости составляет основное содержание настоящей главы. При этом сначала будут рассмотрены наиболее простые, допускающие аналитическое решение случаи обтекания сферической частицы жидкостью.

---

* Здесь термин «сплошная фаза» употребляется не в традиционном смысле, поскольку и дискретная частица, и окружающая ее жидкость (или газ) суть области сплошной среды, действительное молекулярное строение которой не учитывается в анализе. В [30] предлагается дискретные частицы называть дискретной фазой, а несущую («сплошную») фазу — дисперсионной.

## 5.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТЕЧЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Поскольку многие жидкости и в первую очередь наиболее распространенные — вода и воздух — характеризуются весьма малой вязкостью, то в практически важных задачах силы вязкости достаточно часто играют ничтожную роль почти во всем поле течения. Мерой отношения инерционных и вязкостных сил является число (критерий) Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho w l/\mu$, где $w$ и $l$ — характерные для рассматриваемой задачи масштабы скорости и длины. При $\mathrm{Re} >> 1$ силы вязкости несущественны во всей области течения, кроме тонкого пограничного слоя (хотя влияние этого слоя на характеристики течения и, в частности, на сопротивление, испытываемое движущимся в жидкости телом, в общем случае весьма существенно). Если пограничный слой не отрывается от обтекаемой поверхности, то поле скоростей и давлений за пределами погранслоя может быть найдено методами классической механики идеальной жидкости. Важную область применения теории невязкой жидкости представляют собой течения со свободной поверхностью. Такой тип течений был рассмотрен в гл. 3 применительно к анализу устойчивости границы раздела жидкости и газа. В настоящей главе методы теории течений со свободной поверхностью будут использованы при рассмотрении движения паровых (газовых) пузырьков в жидкости.

### 5.1.1. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Изотермическое течение идеальной жидкости описывается уравнениями неразрывности (1.2а) и уравнениями Эйлера, которые следуют из (1.4д) при $\mu = 0$:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \tag{5.1}$$

Используя известное тождество

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \equiv \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{u},$$

уравнение (5.1) можно записать в форме Громека—Ламба:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} - \mathbf{g} = 0. \tag{5.1а}$$

Если движение идеальной жидкости, определяемое уравнением (5.1а), было в некоторый начальный момент времени безвихревым, то согласно теореме Лагранжа вихрь скорости $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ будет равен нулю в любой последующий момент времени. Условие $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$ означает, что существует такая скалярная функция $\varphi$, градиет которой в любой точке области течения равен вектору скорости $\mathbf{u}$, т.е. $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$. При этом в общем случае

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, t).$$

В декартовой системе координат проекция скорости на ось $x_k$ определяется соотношением

$$u_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

В общем случае ортогональной криволинейной системы координат $\{q_j\}$ имеем

$$u_j = \frac{1}{H_k} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \delta_{kj},$$

где $H_k$ — метрические коэффициенты, или коэффициенты Ляме (см. приложение).

Если движение баротропно (плотность $\rho = \rho(p)$ есть однозначная функция давления, в частном случае $\rho = \mathrm{const}$), то можно ввести функцию давления

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$

Отсюда следует

$$\mathrm{grad}\,P = \frac{\partial P}{\partial p}\,\mathrm{grad}\,p = \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Таким образом, уравнение потенциального баротропного движения можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi) + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\right) + \nabla P - \mathbf{g} = 0.$$

Имея в виду независимость переменных $t$ и $\mathbf{r}$, т.е. возможность изменения порядка дифференцирования по этим переменным, получим

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+P\right)=\mathbf{g}.$$

Отсюда следует, что массовые силы $\mathbf{g}$ должны иметь потенциал, т.е. $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\Pi$. В частности, если сила тяжести является единственной массовой силой, действующей в направлении, противоположном оси $z$ декартовой системы координат, то, очевидно, имеем

$$\Pi = \text{const} + gz,$$

так что

$$\mathbf{g} = -\nabla\Pi = -g\mathbf{i}_z.$$

Введение потенциала массовых сил позволяет записать уравнение движения в следующей форме:

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+P+\Pi\right)=0. \tag{5.2}$$

Интеграл этого уравнения, называемый интегралом Коши—Лагранжа, есть некоторая функция времени $f(t)$, одинаковая для всей области течения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{u^2}{2}+P+\Pi=f(t). \tag{5.3}$$

При известных потенциалах скоростей и массовых сил интеграл Коши—Лагранжа позволяет находить распределение давления в жидкости.

Если движение установившееся, то интеграл Коши—Лагранжа превращается в интеграл Бернулли:

$$\frac{u^2}{2}+P+\Pi=\text{const}. \tag{5.4}$$

Для принятого нами условия $\rho$ = const функция давления $P=\dfrac{p-p_0}{\rho}$, или, относя постоянную часть этого выражения $p_0/\rho$

к функции $f(t)$ в правой части уравнения (5.3) (к const в (5.4)), можно просто писать $P = \frac{p}{\rho}$.

### 5.1.2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Введение потенциала скоростей $\varphi$ для несжимаемой идеальной жидкости позволяет записать уравнение неразрывности в следующей форме:

$$\operatorname{div}(\operatorname{drad}\varphi) = \nabla^2\varphi = 0. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) называется уравнением Лапласа, а функция $\varphi$, удовлетворяющая этому уравнению, — гармонической функцией. Уравнение Лапласа — это линейное дифференциальное уравнение, в силу чего его частные решения можно дифференцировать, складывать и получать таким образом новые частные решения этого уравнения. Использование условий однозначности (обычно условий на границах области течения) позволяет получать единственные решения для гармонической функции, а следовательно, и для поля скоростей в различных конкретных задачах.

Наиболее простым и вместе с тем фундаментальным решением уравнения Лапласа является функция

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}. \tag{5.6}$$

В сферической системе координат вектор скорости:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{H_r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{i}_r = \frac{Q}{4\pi r^2}\mathbf{i}_r = u_r\mathbf{i}_r,$$

где $H_r$ — коэффициент Ляме, равный 1. (Две другие компоненты скорости, очевидно, равны нулю.)

Нетрудно убедиться, что решение (5.6) удовлетворяет уравнению (5.5).

Функция (5.6) в зависимости от знака $Q$ соответствует точечному источнику ($Q > 0$) или стоку ($Q < 0$), причем сама величина $Q$ называется мощностью источника (или стока) и физически представляет собой объемный расход жидкости через произвольную сферическую поверхность радиуса $r$. Действительно, объемный расход

жидкости через такую поверхность равен произведению площади поверхности на нормальную к ней проекцию вектора скорости, т.е.

$$Q = u_r 4\pi r^2.$$

Поскольку уравнение (5.5) — линейное, решение (5.6) можно использовать для получения других частных решений уравнения Лапласа. Очень важным для приложений является решение уравнения (5.5) для диполя, т.е. для течения, обусловленного действием источника и стока одинаковой мощности. Если мощность источника и стока устремить к бесконечности, а расстояние между ними — к нулю и потребовать, чтобы произведение мощности на расстояние оставалось конечной величиной $m$, называемой моментом, или интенсивностью точечного диполя [3, 26], то потенциал скорости такого течения получается дифференцированием функции (5.6) по направлению прямой, соединяющей источник и сток. В частности, для направления оси $x$ (рис. 5.1) потенциал течения, обусловленного диполем, определяется как

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{Ax}{r^3} = -\frac{A\cos\theta}{r^2}. \quad (5.7)$$

Важным отличием потенциала (5.7) от (5.6) является то, что полный поток жидкости через любую поверхность, охватывающую диполь, равен нулю, поскольку мощности источника и стока, составляющих диполь, одинаковы. Это свойство удобно, если требуется удовлетворить граничному условию на непроницаемой поверхности.

## 5.2. ДВИЖЕНИЕ СФЕРЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

### 5.2.1. ПОТЕНЦИАЛ И ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Будем рассматривать движение идеальной жидкости, покоящейся «на бесконечности», обусловленное поступательным перемещением жесткой сферы радиусом $a$ со скоростью $U_\infty$ в положительном направлении оси $x$. Очевидно, картина течения не изменится, если ее рассматривать в системе отсчета, связанной с центром сферы (рис. 5.1). В этом случае сфера рассматривается как неподвижная, а жидкость движется вдали от сферы со скоростью $U_\infty$. В сферической системе координат $(r, \theta, \varphi)$ течение осесиммет-

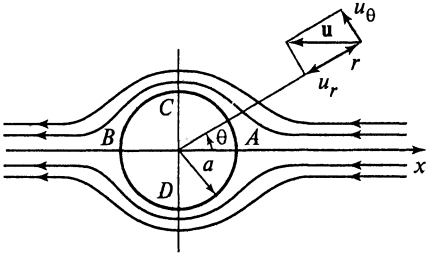



**Рис. 5.1. Обтекание неподвижной сферы потоком идеальной жидкости**

рично, т.е. в анализе можно ограничиться рассмотрением только двух компонент скорости $u_r$ и $u_\theta$.

В рассматриваемом случае несжимаемой невязкой жидкости задача сводится к отысканию потенциала скорости, удовлетворяющего уравнению (5.5) и граничным условиям на бесконечности

$$(\nabla\varphi)_{r\to\infty} = -U_\infty \tag{5.8а}$$

и на поверхности сферы

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0. \tag{5.8б}$$

Второе из граничных условий касается только нормальной к поверхности сферы компоненты вектора скорости, поскольку в идеальной жидкости не действует условие прилипания, что не дает оснований накладывать какие-либо предварительные условия на касательную компоненту скорости.

Граничное условие (5.8а) определяет одномерное поступательное движение, потенциал которого

$$\varphi_{\text{пост}} = -U_\infty x = -U_\infty r\cos\theta.$$

(В сферической системе координат соответствующие компоненты скорости на бесконечности: $U_{r,\infty} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = -U_\infty\cos\theta$, $U_{\theta,\infty} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = U_\infty\sin\theta$.)

Условию непроницаемости поверхности (5.8б) удовлетворяет потенциал течения от точечного диполя (5.7). Суммарный потенциал

$$\varphi_{\text{сф}} = \varphi_{\text{дип}} + \varphi_{\text{пост}} = -\cos\theta\left(\frac{A}{r^2} + U_\infty r\right)$$

удовлетворяет обоим граничным условиям и уравнению (5.5). Неизвестная константа $A$ находится из (5.8б):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \cos\theta\left(\frac{2A}{a^3} - U_\infty\right) = 0;$$

$$A = \frac{a^3}{2}U_\infty.$$

Таким образом, окончательно потенциал скорости:

$$\varphi_{сф} = -U_\infty\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right). \tag{5.9}$$

Компоненты скорости:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -U_\infty\cos\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right); \\ u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = U_\infty\sin\theta\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Воспользовавшись выражением для $\nabla^2\varphi$, в сферической системе координат (см. приложение), несложно убедиться, что потенциал (5.9), действительно обращает уравнение Лапласа (5.5) в тождество. Поле скорости, определяемое соотношениями (5.10), очевидно удовлетворяет граничным условиям (5.8а) и (5.8б). Второе из соотношений (5.10) определяет касательную скорость на границе обтекаемой сферы

$$(u_\theta)_{r=a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{сф}}{\partial\theta}\right)_{r=a} = \frac{3}{2}U_\infty\sin\theta. \tag{5.11}$$

В соответствии с этой формулой в лобовой и кормовой точках сферы (точки $A$ и $B$, рис. 5.1) касательная скорость равна нулю, а в точках миделевого сечения (точки $C$ и $D$, рис. 5.1) скорость обтекания в 1,5 раза превосходит скорость невозмущенного потока.

### 5.2.2. СОПРОТИВЛЕНИЕ СФЕРЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ. ПАРАДОКС ДАЛАМБЕРА

Сила сопротивления, которую испытывает сфера, движущаяся поступательно в жидкости, при потенциальном течении представляет собой равнодействующую сил давления, действующих на поверхность сферы. Согласно рис. 5.2 проекция силы сопротивления на ось $x$:

$$F_c = \int_S -p_a \cos\theta \, dS = \int_0^\pi -p_a \cos\theta 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta,$$

где $dS = 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta$ — элемент площади поверхности сферы, т.е. кольцо шириной $a\,d\theta$ с длиной окружности $2\pi a \sin\theta$; $S$ — полная поверхность сферы.

Давление на поверхность сферы $p_a$ можно определить, записав уравнение Бернулли для струйки тока, обтекающей поверхность:

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho (u_\theta^2)_{r=a}.$$

С учетом (5.11) имеем

$$p_a = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right). \qquad (5.12)$$

Уже из выражения (5.12) следует, что в точках поверхности сферы, симметричных относительно плоскости миделевого сечения, давление одинаково, т.е. равнодействующая сил давления в направлении оси $x$ должна быть равна нулю. Подстановка (5.12) в интеграл, определяющий силу сопротивления $F_c$ действительно дает

$$F_c = 0. \qquad (5.13)$$

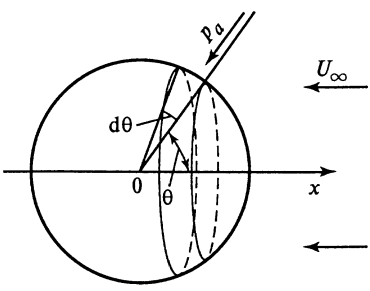



**Рис. 5.2. Сила давления на поверхности обтекаемой сферы**

Таким образом, при движении в идеальной жидкости сфера не испытывает сопротивления. Этот результат носит название «парадокс Даламбера». В классической гидромеханике доказывается, что парадокс Даламбера справедлив для тел любой формы, т.е. в идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, не испытывает сопротивления

тело произвольной формы конечных размеров, движущееся с постоянной скоростью.

В реальной (вязкой) жидкости потенциальное безотрывное обтекание сферы нереализуемо. С этой точки зрения результат, выражаемый равенством (5.13), казалось бы не должен представлять никакого практического интереса. Однако, как мы убедимся в дальнейшем, разумное использование закономерностей потенциального движения жидкости, в том числе и парадокса Даламбера, позволяет в ряде случаев успешно решать некоторые практические задачи, связанные с движением двухфазных сред.

## 5.3. ОБТЕКАНИЕ ТВЕРДОЙ СФЕРЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ Re << 1

### 5.3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Строгое аналитическое решение задачи о движении сферы в реальной (вязкой) жидкости было получено лишь применительно к условию Re << 1, т.е. для весьма медленного обтекания жидкостью сферы малых размеров. Впервые эта задача была решена еще в 1851 г. Стоксом, который ввел для анализа специальную функцию тока. Здесь будет представлен другой метод решения [26].

Условие Re << 1 означает, что силы инерции несущественны в сравнении с силами вязкости, т.е. нелинейные относительно скорости члены уравнения Навье—Стокса могут быть опущены. При малых характерных скоростях движения жидкость (газ) всегда может рассматриваться как несжимаемая, а время наступления стационарного состояния, как правило, мало в сравнении с другими характерными временами процесса (например, в сравнении со временем гравитационного всплытия или осаждения дисперсной частицы в слое жидкости). Поэтому при Re << 1 практический интерес представляет прежде всего стационарное течение. Таким образом, уравнение $l$-проекции импульса (1.4г) для рассматриваемого класса течений записывается как:

$$\frac{\partial p}{\partial x_l} = \mu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} + \rho g_l. \qquad (5.14)$$

(Такие течения называются ползущими.)

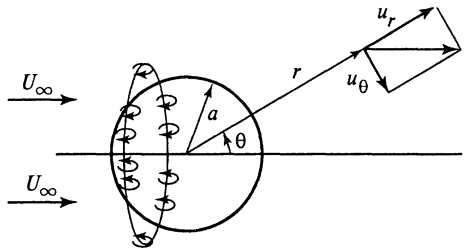



**Рис. 5.3. Схема обтекания неподвижной сферы вязкой жидкостью**

Будем рассматривать поступательное движение сферы радиусом $a$ со скоростью $-U_\infty$ в отрицательном направлении оси $x$. В «собственной» системе отсчета, связанной с центром сферы, поступательному перемещению сферы соответствует обтекание неподвижной сферы потоком безграничной жидкости со скоростью $U_\infty$ (рис. 5.3). Для сокращения математических выкладок не будем учитывать в анализе действие массовых сил (простой проверкой легко убедиться, что эти силы не влияют ни на поле скоростей, ни на силу сопротивления при обтекании сферы жидкостью с заданной скоростью).

Тогда рассматриваемое движение описывается системой уравнений сохранения в виде:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0; \\ \nabla p &= \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

В силу осесимметричности течения удобно использовать в анализе сферическую систему координат $(r, \theta, \varphi)$. Граничные условия в указанной системе координат имеют вид:

$$\text{при } r \to \infty \quad \left.\begin{aligned} u_r &= U_\infty \cos\theta; \\ u_\theta &= -U_\infty \sin\theta; \end{aligned}\right\} \qquad (а)$$

$$\text{при } r = a \quad u_r = u_\theta = 0. \qquad (б)$$

Условие (б) отражает непроницаемость поверхности сферы и отсутствие скольжения (прилипание) на границе раздела. В осесимметричном течении азимутальная составляющая скорости, очевидно, отсутствует, т.е. $u_\varphi = 0$.

Тормозящее действие поверхности сферы вызывает появление вращательного движения жидкости — вязких вихрей, как это схематически показано на рис. 5.3. Количественной характеристикой вихревого движения служит вектор $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$. Осесимметричность тече-

ния в рассматриваемом случае обусловливает равенство нулю проекций этого вектора на оси $r$ и $\theta$, т.е. $\mathrm{rot}_r \mathbf{u} = \mathrm{rot}_\theta \mathbf{u} = 0$. (В этом легко убедиться, формально записав выражения для указанных проекций вектора $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ и имея в виду, что $u_\varphi = 0$, $\dfrac{\partial u_r}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} = 0$.) На рис. 5.3 показана вихревая линия — касательная к вектору $\omega = \omega_\varphi$, который мы в дальнейшем будем обозначать просто $\omega$.

### 5.3.2. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ

Вихревое движение жидкости при обтекании сферы подсказывает путь решения уравнений сохранения. Используя векторное тождество

$$\nabla^2 \mathbf{u} \equiv \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$$

и уравнение неразрывности (первое уравнение системы (5.15)), уравнение движения можно записать в виде

$$\nabla p = -\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = -\mu\,\mathrm{rot}\,\omega. \qquad (5.16)$$

Поскольку операция rot от градиента скалярной функции дает нуль, т.е. $\mathrm{rot}(\nabla\varphi) \equiv 0$, то, применяя к последнему уравнению эту операцию, получаем

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\omega = 0. \qquad (5.16а)$$

Таким образом, для нахождения искомого поля скоростей необходимо решить уравнение (5.16а) при единственном пока граничном условии

$$(\omega)_{r \to \infty} = 0. \qquad (в)$$

Используя соотношения приложения, получаем в сферической системе координат:

$$\mathrm{rot}_r \omega = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial(\omega_\varphi r \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial(\omega_\theta r)}{\partial\varphi}\right] = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega\sin\theta);$$

$$\mathrm{rot}_\theta \omega = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\omega_r)}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\omega_\varphi r\sin\theta)}{\partial r}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial(\omega r)}{\partial r};$$

$$\mathrm{rot}_\varphi \omega = 0.$$

Повторно применяя операцию rot теперь уже к вектору rot ω, получаем

$$\mathrm{rot}_r(\mathrm{rot}\,\omega) = \mathrm{rot}_\theta(\mathrm{rot}\,\omega) = 0;$$

$$\mathrm{rot}_\varphi(\mathrm{rot}\,\omega) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2(\omega r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega\sin\omega)\right].$$

Таким образом, для нахождения величины $\omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ необходимо решить уравнение

$$r\frac{\partial^2(\omega r)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega\sin\omega)\right] = 0, \qquad (5.16б)$$

которое соответствует исходному уравнению движения (5.16). Уравнение (5.16б) решается методом разделения переменных, если представить искомую величину ω в виде произведения двух функций:

$$\omega(r, \theta) = Q(\theta)R(r).$$

При этом получаем

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}^2(rR)}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(Q\sin\theta)\right].$$

Поскольку левая часть равенства есть функция только $r$, а правая — только θ, это возможно лишь в том случае, когда обе эти функции независимых переменных равны порознь некоторой постоянной величине ε, т.е. уравнение (5.16б) удалось представить в виде двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно из них

$$-\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(Q\sin\theta)\right] = \varepsilon$$

имеет решение $Q(\theta) = \sin\theta$ при $\varepsilon = 2$. Тогда другое уравнение приобретает вид

$$\frac{\mathrm{d}^2(rR)}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2R}{r}.$$

Это уравнение имеет решение вида $R = Ar^n$. Из двух значений $n$ ($n_1 = 1$, $n_2 = -2$), обращающих уравнение в тождество, граничному условию $R = 0$ при $r \to \infty$ удовлетворяет второе.

Таким образом,

$$\omega = RQ = \frac{A \sin\theta}{r^2}. \tag{5.17}$$

(Заметим, что прямая подстановка этого результата в уравнение (5.16б) превращает его в тождество.)

Соотношение (5.17) можно рассматривать как уравнение для компонент скорости $u_r$ и $u_\theta$, поскольку $\omega = \mathrm{rot}_\varphi \mathbf{u}$. В качестве второго уравнения, замыкающего систему, используем уравнение неразрывности (первое уравнение системы (5.15)), записанное в сферической системе координат. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(u_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right] = \frac{A \sin\theta}{r^2}; \\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial(u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Вид граничных условий (а) и (б) подсказывает, что решение системы (5.18) логично искать в виде бесконечного ряда:

$$u_r = \left(U_\infty + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{r^k}\right)\cos\theta;$$

$$u_\theta = \left(-U_\infty + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda'_k}{r^k}\right)\sin\theta.$$

Подставляя эти значения компонент скорости в систему (5.18) и производя простые преобразования, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} [(1-k)\lambda'_k + \lambda_k] r^{1-k} = A; \\ &\sum_{k=1}^{n} [(2-k)\lambda_k + 2\lambda'_k] r^{1-k} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Очевидно, что при $k = 1$ ($r \neq 0$):

$$\lambda_1 = A; \quad \lambda_1 + 2\lambda_1' = 0;$$

$$\lambda_1' = -\frac{1}{2} A.$$

Первое уравнение системы (5.19) обращается в тождество при $k = 1$. Это означает, что сумма всех последующих членов ряда ($k > 1$) тождественно равна нулю, а это возможно лишь при равенстве нулю каждого члена ряда. Последнее относится и ко второму уравнению системы (5.19) при любом значении $k$. Таким образом, для $k > 1$ имеем однородную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)\lambda_k' + \lambda_k &= 0; \\ 2\lambda_k' + (2-k)\lambda_k &= 0, \end{aligned}\right\}$$

которая имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Отсюда следует

$$(1-k)(2-k) - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни 0 и 3, причем с учетом условия $k > 1$ оставляем лишь второй корень. Для $k = 3$ получаем

$$\lambda_3' = \frac{1}{2} \lambda_3.$$

Все остальные значения $\lambda_k$ и $\lambda_k'$ при $k > 1$ тождественно равны нулю.

Итак, теперь для компонент скорости можно записать:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \left( U_\infty + \frac{A}{r} + \frac{\lambda_3}{r^3} \right) \cos\theta; \\ u_\theta &= \left( -U_\infty - \frac{1}{2}\frac{A}{r} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_3}{r^3} \right) \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.20)$$

Используя граничное условие (б), находим:

$$A = -\frac{3}{2} aU_\infty; \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} a^3 U_\infty.$$

В итоге получаем решение для поля скоростей в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U_\infty \left(1 - \frac{3}{2}\frac{a}{r} + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta; \\ u_\theta &= -U_\infty \left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.20a)$$

### 5.3.3. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ

Теперь несложно найти распределение давления в потоке, касательное напряжение на границе сферы и полную силу сопротивления при обтекании сферы. Записывая уравнение (5.16) в проекции на одну из осей координат, например на ось $r$, и используя при этом выражение (5.17) и найденное выше значение $A$, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\mu \operatorname{rot}_r \omega = \frac{3\mu U_\infty a}{r^3}\cos\theta.$$

Отсюда для поля давлений имеем

$$p = -\frac{3}{2}\mu U_\infty a \frac{\cos\theta}{r^2} + \text{const}.$$

При $r \to \infty$ $p = p_\infty$, что определяет значение const и позволяет записать окончательно

$$p = p_\infty - \frac{3}{2}\mu U_\infty \frac{a}{r^2}\cos\theta. \qquad (5.21)$$

На поверхности сферы при $r = a$ давление распределяется по закону:

$$p_a = p_\infty - \frac{3}{2}\frac{\mu U_\infty}{a}\cos\theta. \qquad (5.21a)$$

Совершенно очевидно, что в отличие от случая обтекания сферы идеальной жидкостью (соотношение (5.12)) при вязком обтекании поле давлений несимметрично относительно плоскости миделевого сечения сферы. Это хорошо видно на рис. 5.4.

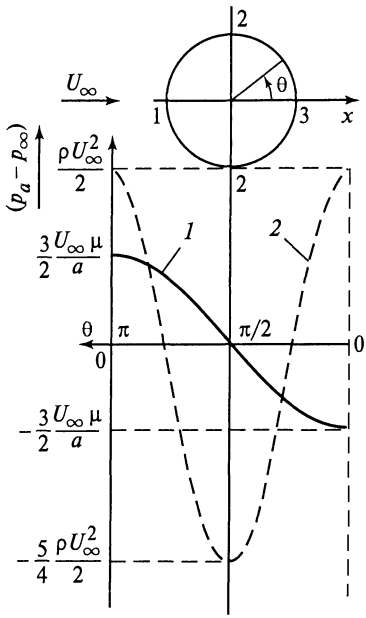



**Рис. 5.4. Распределение давления вдоль меридиана сферы при обтекании ее вязкой (кривая *1*) и идеальной (кривая *2*) жидкостями**

При обтекании сферы идеальной жидкостью давление максимально в лобовой точке (точка *1*), затем оно быстро падает, и в миделевом сечении *2-2* наблюдается максимальное разрежение. В кормовой же части поверхности сферы давление восстанавливается, в частности давление в точке *3* в точности равно давлению в точке *1*. В случае вязкой жидкости (при Re << 1) давление на поверхности сферы, достигнув максимального значения в точке *1*, непрерывно падает вдоль меридиана сферы, так что в миделевом сечении $p_a = p_\infty$, а в кормовой точке *3* имеет место максимальное разрежение.

Очевидно, что при обтекании сферы вязкой жидкостью равнодействующая сил давления не обращается в нуль, ее направление совпадает с вектором скорости жидкости. В рассматриваемом случае эта равнодействующая $F_p$ совпадает с равнодействующей нормальных напряжений $F_n$ на поверхности сферы. Действительно, для нормальных напряжений:

$$(\Pi_{rr})_{r=a} = \left(p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{r=a} = p_a,$$

что легко проверяется прямой подстановкой значения $u_r$ из (5.20а) в выражение для $\Pi_{rr}$. Таким образом, равнодействующая нормальных напряжений определяется соотношением

$$F_n = F_p = \int_n^\pi (-p_a \cos\theta) 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta = 2\pi a \mu U_\infty .$$

Касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ в сферических координатах в случае осесимметричного течения выражается соотношением

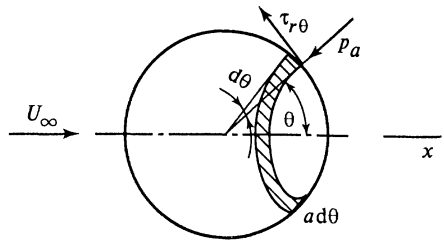



**Рис. 5.5. Нормальное и касательное напряжения на поверхности сферы в вязкой жидкости**

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right).$$

На поверхности сферы ($r = a$) $u_\theta = 0$, $\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0$, так что с учетом (5.20а):

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{r=a} = -\frac{3}{2}\frac{\mu U_\infty}{a}\sin\theta. \qquad (5.22)$$

Равнодействующая сил трения (касательных напряжений) находится интегрированием по поверхности сферы (рис. 5.5):

$$F_\tau = \int_0^\pi (-\tau_{r\theta}\sin\theta)2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = 4\pi a\mu U_\infty.$$

Положительное значение величины $F_\tau$ свидетельствует о том, что равнодействующая сил трения направлена (так же, как и равнодействующая сил давления) в положительном направлении оси $x$, т.е. в направлении потока жидкости.

Полная сила сопротивления, следовательно, равна:

$$F_c = 6\pi a\mu U_\infty. \qquad (5.23)$$

Формула (5.23) широко известна как формула Стокса для силы сопротивления шара в вязкой жидкости.

### 5.3.4. СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ ТВЕРДЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ПРИ Re << 1

Формула Стокса позволяет рассчитывать скорость свободного падения твердых шариков плотностью $\rho_т$ в жидкой или газообразной среде с плотностью $\rho_ж$. Действительно, при установившемся

движении сила сопротивления $F_c$ должна быть равна весу тела за вычетом архимедовой силы:

$$F_g = \frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho_т - \rho_ж).$$

Из этого условия следует

$$U_\infty = \frac{2}{9}\frac{a^2 g(\rho_т - \rho_ж)}{\mu}. \qquad (5.24)$$

Результаты опытов по определению силы сопротивления твердых частиц обычно представляют в виде зависимости коэффициента сопротивления $C_D$ от числа Re. Величина $C_D$ находится по определению как отношение силы сопротивления $F_c$ к произведению динамического напора $(0{,}5\ \rho_ж U_\infty^2)$ на площадь миделевого сечения частицы (в случае шара $f_{мид} = \pi a^2$). Введение коэффициента сопротивления $C_D$ позволяет представить формулу Стокса в виде

$$C_D = \frac{6\pi a \mu U_\infty}{\frac{1}{2}\rho_ж U_\infty^2 \pi a^2} = \frac{24}{\mathrm{Re}}, \qquad (5.24а)$$

где $\mathrm{Re} = 2a\rho_ж U_\infty/\mu$.

Сравнение этой формулы с результатами опытных измерений показывает, что высокая точность расчетов по ней имеет место лишь при $\mathrm{Re} = 10^{-2}$ и менее, т.е. при тех условиях, для которых справедлив переход от полного уравнения Навье—Стокса (1.4г) к упрощенной его форме (5.14). Однако практически вплоть до $\mathrm{Re} \le 1$ использование формулы Стокса допустимо (погрешность в расчете при этом не превосходит 10 %). Приняв за границу применимости решения Стокса значение $\mathrm{Re} = 1$, можно оценить предельный размер твердого шарика, который падает «по закону Стокса»:

$$a_{пр} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}\frac{\mu^2}{(\rho_т - \rho_ж)\rho_ж g}}. \qquad (5.25)$$

Воспользовавшись формулой (5.25), оценим к примеру, какой размер должна иметь пылинка, чтобы ее падение в воздухе подчинялось закону Стокса. Положив приближенно: $\mu = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с); $\rho_{ж} = 1{,}2$ кг/м$^3$; $\rho_{т} = 2 \cdot 10^3$ кг/м$^3$, найдем

$$a_{пр} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{(1{,}8 \cdot 10^{-5})^2}{1{,}2(2 \cdot 10^3 - 1{,}2)9{,}8}} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Таким образом, ясно, что в газах (и, как несложно убедиться, в маловязких жидкостях) соотношения (5.23) и (5.24) применимы лишь к движению очень малых частиц (диаметром менее 0,1 мм). Важно также представлять себе, что скорости движения таких частиц очень невысоки. Так, в рассмотренном примере пылинка радиусом 32 мкм будет падать в воздухе со скоростью $U_\infty \approx 0{,}24$ м/с, причем ясно, что более крупные частицы и, следовательно, большие скорости падения приведут к невыполнению условия $\mathrm{Re} < 1$.

Анализ Стокса впоследствии был уточнен К. Озееном (см. [26]), который частично учел влияние инерционных членов уравнения (1.4г). Озеен получил формулу для коэффициента сопротивления

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}} \left(1 + \frac{3}{16} \mathrm{Re}\right), \tag{5.26}$$

которая точнее формулы (5.24) при значениях числа Re, близких к 1, и может быть использована до $\mathrm{Re} \leq 5$.

## 5.4. КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЕЙ В ЖИДКОСТИ

### 5.4.1. АНАЛИЗ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Эксперименты показывают, что в зависимости от объема газовые пузыри могут иметь форму сферы, сплюснутого сфероида, сферического сегмента, а в некотором диапазоне размеров газовые пузыри претерпевают пульсационные изменения формы в процессе своего подъемного движения. Естественно, что форма пузыря и характер его обтекания жидкостью взаимно влияют друг на друга. По этой причине, в частности, невозможно предсказать форму газового

пузыря в жидкости, основываясь только на знании его объема $V$ или характерного линейного размера $l$.

Использование аппарата теории подобия позволяет провести общую классификацию характерных случаев поведения газовых пузырей в жидкости, а порой определить и структуру расчетного соотношения для скорости всплытия. Различные числа (критерии) подобия удобно представлять как меру отношения некоторых сил, действующих в объемах соприкасающихся фаз и на границах раздела. Условимся относить эти силы к единице площади. Тогда, используя, например, уравнение сохранения импульса (1.4г), можно получить следующие оценки:

силы инерции

$$f_i \sim \rho' w^2;$$

силы тяжести (архимедовы)

$$f_g \sim g(\rho' - \rho'')l;$$

силы вязкости

$$f_\mu \sim \mu' \frac{w}{l}.$$

Из условия совместности для нормальной компоненты импульса на границе раздела газ—жидкость (формулы Лапласа для скачка давлений) получается оценка для силы поверхностного натяжения:

$$f_\sigma \sim \frac{\sigma}{l}.$$

Во всех приведенных соотношениях $w$ — характерная скорость процесса, индексы $''$ и $'$ относятся соответственно к газовой и жидкой фазам.

Из приведенного набора сил только сила поверхностного натяжения стремится придать пузырю сферическую форму (условие минимума избыточной свободной энергии границы раздела фаз), а три остальные силы в общем случае обусловливают его деформацию. Относительная роль деформирующих и стабилизирующих сил выражается, следовательно, следующими числами подобия:

$$\frac{f_g}{f_\sigma} = \frac{g(\rho' - \rho'')l^2}{\sigma} = \text{Bo} \text{ — число Бонда;}$$

$$\frac{f_i}{f_\sigma} = \frac{\rho' w^2 l}{\sigma} = \mathrm{We}$$ — число Вебера;

$$\frac{f_\mu}{f_\sigma} = \frac{\mu w}{\sigma} = N_{\mu\sigma}$$ — вязкостно-капиллярный критерий.

Итак, в общем случае условия сферичности газового пузырька имеют вид:

$$\mathrm{Bo} << 1; \quad \mathrm{We} << 1; \quad N_{\mu\sigma} << 1. \tag{5.27}$$

Первое из неравенств (5.27) определяет статическое условие недеформируемости сферического газового пузырька и существенно для задач гидростатики. Два других неравенства определяют динамические условия сферичности. Поскольку число $\mathrm{Re} = \frac{f_i}{f_\mu}$, то в области $\mathrm{Re} > 1$ сферичность всплывающего газового пузырька, очевидно, определяется условием $\mathrm{We} << 1$. Строгий анализ чисто вязкостных течений [3, 59] приводит к неожиданному выводу: оказывается и при $\mathrm{Re} << 1$ возможная деформация всплывающего газового пузырька обусловливается только соотношением инерционных сил и сил поверхностного натяжения, т.е. числом Вебера. Дело в том, что при чисто вязкостном обтекании газового пузырька полное нормальное напряжение на его границе одинаково во всех точках поверхности раздела, т.е. оно не деформирует пузырь, а лишь компенсирует избыточное давление в пузырьке, обусловленное кривизной поверхности раздела. (Подробнее об этом будет идти речь в § 5.5.)

Таким образом, для всплывающего с установившейся скоростью газового пузырька условие сферичности однозначно определяется неравенством $\mathrm{We} << 1$. А общие закономерности движения пузырька в жидкости могут быть описаны уравнением подобия, составленным из трех любых чисел подобия, введенных нами выше, например уравнением вида

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}(\mathrm{Bo}, \mathrm{We}).$$

Вместе с тем в ряде случаев удобно использовать другие числа подобия, которые легко могут быть получены из имеющихся. Например, отношение сил инерции к силам тяжести дает число Фруда:

$$\mathrm{Fr} \equiv \frac{\mathrm{We}}{\mathrm{Bo}} = \frac{f_i}{f_g} = \frac{\rho' w^2}{g(\rho' - \rho'')l} \approx \frac{w^2}{gl}.$$

Нередко при анализе двухфазных систем используют число подобия, содержащее лишь физические свойства фаз и ускорение свободного падения:

$$\frac{\mathrm{Re}^4}{\mathrm{BoWe}^2} = \frac{\sigma^3(\rho')^2}{g(\rho' - \rho'')\mu^4} \approx \frac{\sigma^3\rho'}{g\mu^4} = \frac{\sigma^3}{g(\rho')^3\nu^4} = \mathrm{Ka}.$$

Видим, что фактически, это Ka — число, впервые введенное П.Л. Капицей при анализе гравитационных пленок. Используя это число, все имеющиеся опытные данные по скоростям всплытия газовых пузырьков можно представить в виде зависимости:

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}(\mathrm{Bo}, \mathrm{Ka}).$$

В качестве еще одного числа подобия иногда рассматривают введенный нами ранее коэффициент сопротивления $C_D$, который по физическому содержанию аналогичен числу Fr и для сферического пузырька равен:

$$C_D = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho' - \rho'')}{\frac{1}{2}\rho' w^2 \pi a^2} \approx \frac{4}{3}\frac{g2a}{w^2} = \frac{4}{3}\frac{1}{\mathrm{Fr}}.$$

Заметим, наконец, что при более общем рассмотрении двухфазных систем (не ограниченном случаем движения газовых пузырьков в жидкости) в число сил, действующих в объемах фаз, следует включать силы инерции и вязкости газовой фазы, т.е. $f_i'' \sim \rho'' w^2$ и $f_\mu'' \sim \mu''\,(w/l)$. Поскольку характерные (масштабные) значения $l$ и $w$ одни и те же для обеих взаимодействующих фаз, то для полного описания поведения двухфазной системы достаточно к уже введенным числам подобия ввести два безразмерных соотношения

(симплекса): $\frac{\mu''}{\mu'}$ и $\frac{\rho''}{\rho'}$. Тогда уравнение подобия может быть представлено, например, в виде

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{Bo}, \mathrm{We}, \frac{\mu''}{\mu'}, \frac{\rho''}{\rho'}\right).$$

Как будет показано далее, использование методов теории подобия особенно эффективно при анализе так называемых предельных задач механики двухфазных сред, т.е. таких случаев, когда для процесса не существенны некоторые из четырех выше названных сил.

### 5.4.2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

Наиболее полное опытное исследование закономерностей всплытия газовых пузырьков в различных жидкостях выполнили Хаберман и Мортон [57]. На рис. 5.6 представлены заимствованные из этой работы зависимости скорости всплытия ($U_\infty$) воздушных пузырьков в воде ($\mu \approx 1 \cdot 10^{-3}$ кг/(м · с)) и минеральном масле

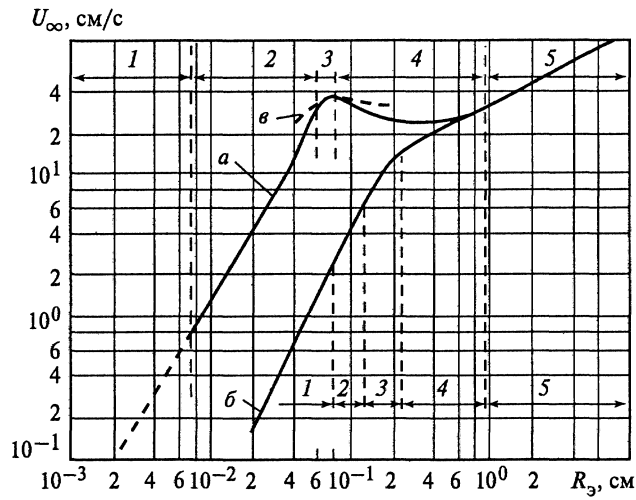



**Рис. 5.6. Опытные кривые зависимости скорости всплытия воздушных пузырьков в дистиллированной воде (кривая *а*) и в минеральном масле (кривая *б*) (кривая *в* — по формуле (5.33))**

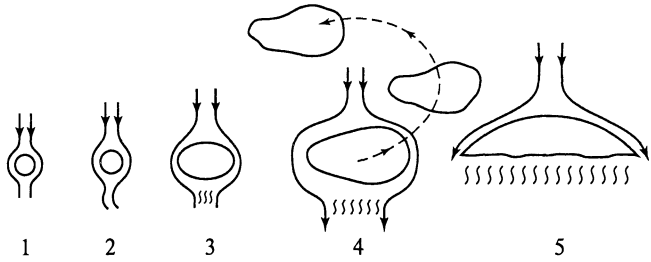



**Рис. 5.7. Примерные формы и характер обтекания газовых пузырьков в жидкости**

($\mu \approx 58 \cdot 10^{-3}$ кг/(м · с)) от эквивалентного радиуса пузырька $R_э = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V}$. Левая ветвь указанной зависимости для воды (при Re < $< 1 \cdot 10^{-2}$ см) в опытах работы [57] не была получена и проведена нами в соответствии с расчетом по (5.24), поскольку в этой области газовые пузырьки в воде всплывают так же, как твердые шарики.

Основываясь на виде кривых $U_\infty (R_э)$ и опытных наблюдениях, можно выделить пять характерных областей, отличающихся определенными формами пузырей и закономерностями их обтекания жидкостью. На рис. 5.6 эти области обозначены цифрами *1*—*5*. На рис. 5.7 показаны примерные формы пузырьков в каждой зоне и характер обтекания.

*Область 1* соответствует подъемному движению весьма малых сферических пузырьков при Re < 1. Как уже указывалось, для воды кривая в этой области построена по расчетному соотношению (5.24), поскольку в опытах столь малые пузырьки ($R_э$ < 0,07 мм) получить затруднительно. При движении в минеральном масле условию Re = 1 отвечают газовые пузырьки радиусом $R_э \approx 0{,}9$ мм, так что здесь область *1* вполне доступна опытному исследованию. Условие Re < 1 и сферичность пузырьков позволяют полагать, что на их движение не должны влиять силы инерции $f_i$ и силы поверхностного натяжения $f_\sigma$. При установившемся движении отношение двух оставшихся сил (архимедовых $f_g$ и вязкости $f_\mu$) должно быть постоянным:

$$\frac{f_g}{f_\mu} = \frac{g(\rho' - \rho'')l^2}{\mu w} = \text{const}.$$

Поскольку характерный линейный размер в рассматриваемом случае есть радиус сферы (т.е. $l = a$), а характерная скорость — скорость всплытия ($w = U_\infty$), то можно записать

$$U_\infty = \text{const}\,\frac{g(\rho' - \rho'')a^2}{\mu}.$$

Эта формула с точностью до постоянной совпадает с формулой Стокса (5.24) для движения твердой сферы. О значении const в случае движения газовых пузырей будет сказано далее.

*Область 2* соответствует движению сферических пузырей при $\mathrm{Re} > 1$. Сохранение сферической формы пузырька предполагает выполнение сильного неравенства $\mathrm{We} << 1$, однако практически можно считать пузырек приближенно сферическим до $\mathrm{We} \le 1$. При всплытии газовых пузырьков в воде область *2* простирается до $\mathrm{Re} \approx 300$—400, т.е. до $R_э \approx 0{,}6$ мм. При движении газовых пузырьков в минеральном масле условию $\mathrm{We} \approx 1$ отвечает радиус $R_э \approx 1{,}4$ мм, так что на кривой $U_\infty (R_э)$ для минерального масла область *2* охватывает весьма узкий диапазон размеров пузырьков.

Характер обтекания пузырька в рассматриваемой области мало отличается от такового в области *1*. Некоторые оценки показывают возможность появления очень узкой зоны отрыва в окрестности кильватерной линии (см. рис. 5.7).

*Область 3* характеризуется прямолинейным движением сплющенных в виде эллипсоида вращения пузырей. Наблюдения за воздушными пузырьками в воде показывают, что эта область охватывает значения Re от 300—400 до приблизительно 500 ($R_э \approx 0{,}6$—$0{,}8$ мм). По данным Харпера [59], верхняя граница рассматриваемой области для маловязких жидкостей соответствует $\mathrm{We} \approx 3{,}2$—$3{,}7$. При больших значениях We движение пузырей становится неустойчивым. В работе Хабермана и Мортона нет прямого указания о верхней границе области устойчивого прямолинейного всплывания эллипсоидальных пузырей в вязких жидкостях. На рис. 5.6 эта граница обозначена, исходя из условия $\mathrm{We} \approx 3{,}5$.

Поскольку плотность и вязкость газа в пузырьке намного меньше плотности и вязкости жидкости, обтекание эллипсоидальных пузырей сохраняется безотрывным даже за пределами экваториального (миделевого) сечения. Однако в окрестности задней критической точки зона отрыва, по-видимому, существует (см. рис. 5.7).

*Область 4* является переходной от эллипсоидальных пузырей к пузырям в форме сферических сегментов. Для этой области справедливы следующие диапазоны чисел подобия:

$\mathrm{Bo} = 0(1)$; $\mathrm{Bo} > 1$;

$\mathrm{We} > 1$; $\mathrm{We} > 1$;

$\mathrm{Re} >> 1$; $\mathrm{Re} > 1$.

Левый столбец относится к маловязким жидкостям, правый — к вязким. Характерными особенностями движения пузырей при этих условиях являются пульсации их формы под действием сил поверхностного натяжения из-за переменной кривизны межфазной поверхности, существование значительной зоны отрыва потока в кормовой части поверхности пузыря и винтовая (или зигзагообразная) траектория их всплытия (см. рис. 5.7). В области *4* скорость всплытия почти не изменяется с изменением линейного размера пузыря. Этот экспериментальный факт послужил обоснованием приближенной эмпирической формулы, структура которой легко может быть получена с помощью анализа размерностей. Условие $\mathrm{Re} > 1$ позволяет полагать, что скорость всплытия пузырей в области *4* определяется действием сил $f_i, f_g$ и $f_\sigma$, т.е. может быть описана некоторой функциональной зависимостью чисел Bo и We. Вид этой зависимости можно найти из условия $U_\infty \neq f(l)$. Записав, в частности, $\mathrm{Bo} \sim \mathrm{We}^2$, мы избавимся от линейного размера в соотношении для скорости всплытия и получим

$$U_\infty = \mathrm{const} \sqrt[4]{\frac{\sigma g(\rho' - \rho'')}{(\rho')^2}}. \qquad (5.28)$$

Формула (5.28) приближенно согласуется с опытными результатами при $\mathrm{const} \approx 1{,}4$—$1{,}8$. (При этом для скорости всплытия газовых пузырьков в воде получим диапазон 0,24—0,32 м/с.)

*Область 5* охватывает газовые пузыри объемом $V \geq 2\ \text{см}^3$, имеющие форму практически правильного сферического сегмента (см. рис. 5.7). Фотографии таких пузырьков получены в жидкостях с весьма различными свойствами: вода, водные растворы глицерина, масла, спирты, жидкие металлы и т.д. Анализ опытных наблюдений показывает, что головная часть таких пузырьков представляет собой гладкую сферическую поверхность радиуса $R$, а кормовая (донная)

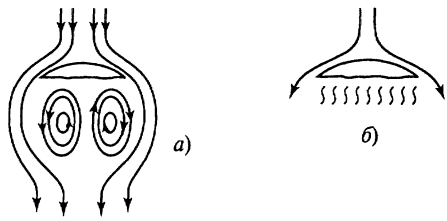



**Рис. 5.8. Форма крупных пузырей и особенности течения в следе при умеренных (*а*) и больших (*б*) числах Re**

часть — практически плоская или слегка вогнутая, хотя в общем случае на донной части могут иметь место нерегулярные зазубрины.

При движении крупных пузырей в вязких жидкостях, когда числа Re не очень велики (Re ≈ 50—250), в кормовой части пузыря образуется система парных вихрей (рис. 5.8, *а*). При больших числах Re в кормовой зоне отчетливо виден турбулентный след, характерный для отрывного обтекания жидкостью таких тел, как твердые диски, сферы (рис. 5.8, *б*).

Крупные пузыри довольно быстро приобретают в жидкости скорость своего стационарного подъемного движения $U_\infty$, движение их в большинстве случаев устойчиво. В некоторых режимах у краев пузырей, где весьма велика кривизна поверхности раздела, образуются маленькие пузыри — «спутники», а в очень вязких жидкостях иногда наблюдается по краям пузыря своеобразная газовая завеса — «юбка», образующая цилиндрическую поверхность. Соображения теории подобия позволяют и здесь получить структуру выражения для скорости всплытия крупных пузырей. Для пузырей большого объема наряду с условием Re >> 1 справедливы неравенства: Bo >> 1; We >> 1. Это означает, что движение таких пузырей определяется взаимодействием сил инерции и сил тяжести, причем в условиях стационарного движения отношение этих сил должно быть постоянным. Таким образом, имеем

$$\frac{f_i}{f_g} = \mathrm{Fr} = \frac{w^2}{gl} = \mathrm{const}.$$

Положив, что характерный линейный размер $l$ равен эквивалентному радиусу пузыря, получим для скорости всплытия:

$$U_\infty = \mathrm{const}\sqrt{gR_э}. \qquad (5.29)$$

Формула (5.29) нашла надежное подтверждение в опытах, причем значение константы с точностью ±5 % оказалось равным единице.

Строгое аналитическое решение для скорости всплытия газовых пузырьков было получено лишь для области *1*. Для пузырьков, соответствующих областям *2*, *3* и *5*, имеются достаточно надежные приближенные аналитические решения. Краткий анализ этих решений приводится ниже.

## 5.5. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ПУЗЫРЕЙ (КАПЕЛЬ) В ЖИДКОСТИ ПРИ Re << 1

### 5.5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В отличие от задачи Стокса об обтекании твердой сферы в анализе закономерностей обтекания жидкостью газового пузырька или капли (при $\mathrm{Re} \ll 1$) необходимо учитывать циркуляцию в дискретной фазе, возникающую под действием касательных напряжений на обтекаемой поверхности (рис. 5.9). Это приводит к определенным изменениям в математическом описании. Во-первых, уравнения сохранения массы и импульса теперь должны записываться и для сплошной, и для дискретной фаз. (Очевидно, что система (5.15) будет справедлива в нашем случае для обеих фаз.) Во-вторых, изменяется содержание условий совместности для касательной компоненты импульса. Если для твердой сферы допущение об отсутствии скольжения фаз на непроницаемой поверхности раздела означает равенство нулю касательной скорости жидкости, то для пузырька или капли условие:

$$[u_\tau] = 0$$

говорит лишь о равенстве между собой касательных скоростей соприкасающихся фаз по обе стороны поверхности раздела. Таким образом, в рассматриваемой задаче граничные условия имеют вид:

при $r \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U_\infty \cos\theta; \\ u_\theta &= -U_\infty \sin\theta; \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{a}')$$

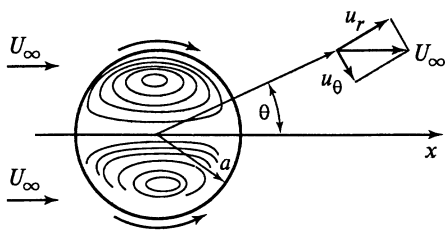



**Рис. 5.9. Обтекание сферического пузырька (капли) вязкой жидкостью (линии тока в верхней части — расчетные, в нижней — полученные в опытах при падении капель глицерина в касторовом масле [3])**

при $r = a$

$$\left.\begin{aligned} u_r &= u'_r = 0; \\ u_\theta &= u'_\theta \neq 0; \end{aligned}\right\} \qquad (б')$$

$$\tau_{r\theta} = \tau'_{r\theta}. \qquad (в')$$

(Здесь индекс «штрих» отнесен к внутренней — дискретной фазе.) К условиям (а′)—(в′) необходимо еще присоединить требование об отсутствии особенностей в центре сферического пузырька (капли), т.е. при $r = 0$ скорости $u'_r$, $u'_\theta$ должны быть конечны.

### 5.5.2. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ В СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ФАЗАХ

Очевидно, что использованный в задаче Стокса метод анализа для нахождения поля скоростей может быть применен и к рассматриваемому случаю. При этом уравнение (5.16) для величины $\omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ справедливо для обеих фаз. Для внешней фазы, как и прежде, будем иметь решение этого уравнения в виде

$$\omega = \frac{A \sin\theta}{r^2},$$

а для внутренней фазы, исходя из требования о конечности скоростей при $r = 0$, мы должны использовать второе из возможных решений уравнения (5.16б):

$$\omega' = A_1 r \sin\theta.$$

Поле скоростей для внешней фазы в общем виде по-прежнему описывается системой (5.20). Для внутренней фазы поле скоростей находится из решения системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(u'_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial u'_r}{\partial \theta}\right] = A_1 r \sin\theta; \\ &\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 u'_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(u'_\theta \sin\theta) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.18а)$$

По аналогии с полем скоростей для внешней области будем искать решение системы (5.18а) в виде бесконечных степенных рядов (при этом учитываем, что при $r = 0$ скорости должны быть конечны):

$$u'_r = \left( B + \sum_{k=1}^{n} b_k r^k \right) \cos\theta,$$

$$u'_\theta = \left( B' + \sum_{k=1}^{n} b'_k r^k \right) \sin\theta.$$

Подстановка этих выражений в первое из уравнений (5.18а) дает $B' = -B$; $k = 2$; $3b'_2 + b_2 = A_1$. Таким образом:

$$u'_r = [B + (A_1 - 3b'_2) r^2] \cos\theta;$$

$$u'_\theta = [-B + b'_2 r^2] \sin\theta.$$

Подставляя эти значения скоростей в уравнение неразрывности (второе из уравнений (5.18а)), получаем:

$$b'_2 = \frac{2}{5} A_1; \quad b_2 = -\frac{1}{5} A_1.$$

В итоге для внутренней области имеем:

$$\left.\begin{aligned} u'_r &= \left( B - \frac{A_1}{5} r^2 \right) \cos\theta; \\ u'_\theta &= \left( -B + \frac{2A_1}{5} r^2 \right) \sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.20б)$$

В соотношениях (5.20) и (5.20б) содержатся четыре неизвестные константы ($A$, $\lambda_3$, $B$, $A_1$), которые находятся из граничных условий (б′) и (в′). Условие непроницаемости границы — первое из условий (б′) — дает:

$$U_\infty + \frac{A}{a} + \frac{\lambda_3}{a^3} = 0; \quad B = \frac{1}{5} A_1 a^2.$$

Второе из условий (б′) — условие равенства касательных скоростей фаз на границе раздела — позволяет записать:

$$-U_\infty - \frac{1}{2}\frac{A}{a} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_3}{a^3} = \frac{1}{5} A_1 a^2.$$

И, наконец, из условия равенства касательных напряжений на границе раздела фаз (условия (в′)) находим

$$A_1 = -5\,\frac{\lambda_3}{a^5}\,\frac{\mu}{\mu'}.$$

Несложные алгебраические преобразования дают окончательно:

$$A = -\frac{1}{2}\,U_\infty a\,\frac{3\mu' + 2\mu}{\mu' + \mu};\quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\,U_\infty a^3\,\frac{\mu'}{\mu' + \mu};$$

$$A_1 = -\frac{5}{2}\,\frac{U_\infty}{a^2}\,\frac{\mu}{\mu' + \mu};\quad B = -\frac{1}{2}\,U_\infty\,\frac{\mu}{\mu' + \mu}.$$

Таким образом, уравнения (5.20) и (5.20б) при соответствующих значениях констант определяют поле скоростей внутри пузырька (капли) и во внешней области течения.

### 5.5.3. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПУЗЫРЬКА (КАПЛИ)

Поле давлений во внешней области находим так же, как и при обтекании твердой сферы, т.е. из уравнений (5.16) и (5.17), но при другом значении константы $A$. Имеем

$$p = p_\infty - \frac{a\mu U_\infty}{2r^2}\cos\theta\,\frac{3\mu' + 2\mu}{\mu' + \mu}.$$

Нормальная компонента тензора давлений на поверхности сферы определяется соотношением

$$(\Pi_{rr})_{r=a} = \left(p - 2\mu\,\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{r=a} = p_\infty - \frac{3}{2}\,\frac{U_\infty \mu}{a}\cos\theta\,\frac{\mu' + 2\mu}{\mu' + \mu}. \quad (5.30)$$

Равнодействующая нормальных напряжений в направлении оси $x$, которая здесь в отличие от задачи Стокса не равна равнодействующей сил давления, находится интегрированием по поверхности:

$$F_n = \int_n^\pi [-(\Pi_{rr})_{r=a}\cos\theta]\,2\pi a^2 \sin\theta\,d\theta = 2\pi a\mu U_\infty\,\frac{\mu' + 2\mu}{\mu' + \mu}.$$

Касательное напряжение на границе сферы

$$(\tau_{r\theta})_{r=a} = \mu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)_{r=a} = -\frac{3}{2}\,\frac{U_\infty \mu}{a}\sin\theta\,\frac{\mu'}{\mu' + \mu}.$$

Равнодействующая касательных напряжений в направлении оси $x$, получаемая интегрированием по поверхности, определяется соотношением

$$F_\tau = 4\pi a \mu U_\infty \frac{\mu'}{\mu' + \mu}.$$

Наконец, найдем полную силу сопротивления при вязком обтекании пузырька (капли):

$$F_c = F_\tau + F_n = 6\pi a \mu U_\infty \frac{3\mu' + 2\mu}{3\mu' + 3\mu}. \qquad (5.23а)$$

Эта сила отличается от силы сопротивления при обтекании твердой сферы, определяемой по формуле Стокса (5.23), множителем $\frac{3\mu' + 2\mu}{3\mu' + 3\mu}$, который, очевидно, меньше единицы*. Качественно уменьшение силы сопротивления при переходе от твердой частицы к сферической капле или пузырьку можно было предвидеть, так как при обтекании твердой фазы жидкость на ее поверхности тормозится до нуля, а при обтекании пузырька или капли — до некоторой конечной скорости циркуляции внутренней фазы. Заметим, что наличие внутренней циркуляции подтверждено опытными наблюдениями при падении капель глицерина в касторовом масле [3], причем полученные в опытах линии тока очень близки к расчетным (см. рис. 5.9).

Формула (5.23а) позволяет рассчитать скорость падения жидкой капли в газе или другой жидкости или скорость всплытия газового пузырька в жидкости. Для этого необходимо приравнять силу сопротивления силе $F_g$. В результате получим

$$U_\infty = \frac{2}{9} \frac{a^2 g(\rho - \rho')}{\mu} \frac{3\mu' + 3\mu}{3\mu' + 2\mu}. \qquad (5.24а)$$

Формула (5.24а) подобна формуле (5.24) для скорости падения твердой сферы в жидкости и переходит в нее при условии $\mu' >> \mu$ (твердая частица в газе или жидкости, жидкая капля в газе). При соизмеримых значениях вязкости внутренней и внешней фаз или при условии $\mu' < \mu$ расчет по формуле (5.24а) дает большее значение скорости, чем скорость падения твердой частицы в той же среде.

* При $\mu' >> \mu$ этот множитель равен единице, т.е. формула (5.23а) переходит в формулу Стокса (5.23).

Для газового пузырька, всплывающего в жидкости, всегда имеет место неравенство $\mu' << \mu$, так что скорость всплытия может быть рассчитана по формуле

$$U_\infty = \frac{1}{3}\frac{a^2 g(\rho - \rho')}{\mu}. \qquad (5.24б)$$

Следует, однако, заметить, что в большинстве опытных исследований скорость всплытия газовых пузырьков в воде подчиняется закону Стокса, т.е. формуле (5.24), а не (5.24б). Наиболее вероятное объяснение этого отклонения от теории состоит в том, что при движении газового пузырька в воде на поверхности раздела фаз накапливаются сложные молекулы поверхностно-активных веществ (ПАВ), которые лишают границу раздела подвижности — пузырек движется, как бы окруженный жесткой оболочкой. Таким образом, для практических расчетов скорости всплытия газовых пузырьков в воде при $Re < 1$ (зона *1* на рис. 5.6) можно рекомендовать формулу Стокса (5.24).

В отсутствие поверхностно-активных веществ на границе раздела фаз обтекание газового пузырька жидкостью можно рассматривать как движение жидкости со свободной поверхностью, ибо условие $\mu' << \mu$ означает отсутствие касательных напряжений на границе раздела фаз. Применительно к такому движению легко доказать справедливость высказанного в § 5.4 положения о том, что нормальные напряжения на границе раздела пузырька одинаковы во всех точках поверхности раздела. Если пузырек всплывает в поле тяжести, то нормальная компонента тензора напряжений, обусловленная силами тяжести на границе пузыря, выражается как $(p_0 + \rho g a \cos\theta)$. (Применительно к рис. 5.9 ускорение свободного падения $g$ для всплывающего пузырька совпадает с положительным направлением оси $x$, $p_0$ — давление при $x = 0$.)

С учетом действия сил тяжести полное нормальное напряжение на границе пузыря (см. соотношение (5.30)) запишется:

$$(\Pi_{rr})_{r=a} = p_0 - \frac{3}{2}\frac{U_\infty \mu}{a}\cos\theta\,\frac{\mu' + 2\mu}{\mu' + \mu} + \rho g a \cos\theta.$$

Принимая для газового пузырька $\mu' << \mu$ и $\rho' << \rho$ и используя (5.24а) для $U_\infty$, получаем $(\Pi_{rr})_{r=a} = p_0$. Таким образом, во всех точках сферического пузыря нормальные напряжения действитель-

но одинаковы, т.е. при вязкостном обтекании газового пузырька при $Re << 1$ не возникает динамических сил, деформирующих пузырь. Этот анализ позволяет, в частности, объяснить тот факт, что при движении в очень вязких жидкостях (типа патоки) воздушные пузыри сохраняют сферичность даже при числах Бонда, больших 1. Заметим, что для общего случая обтекания капли с конечной вязкостью $\mu'$ жидкостью при $Re << 1$ аналогичным образом можно доказать, что разность нормальных напряжений по обе стороны границы раздела одинакова во всех точках поверхности капли.

Укажем в заключение, что решение задачи о движении в жидкости малых капель и пузырьков впервые было выполнено независимо друг от друга Рыбчинским и Адамаром в 1911 г. [3]. Методика их решения отличается от изложенной нами.

## 5.6. ГАЗОВЫЕ ПУЗЫРЬКИ В ЖИДКОСТИ ПРИ Re > 1

### 5.6.1. СФЕРИЧЕСКИЕ ПУЗЫРЬКИ ПРИ Re > 1

Рассматриваемый тип движения газовых пузырьков в жидкости соответствует области *2* рис. 5.6. В этой области строгий анализ требует, вообще говоря, решения полного уравнения Навье—Стокса (1.4г) или (1.4д). Однако интерпретация границы сферического пузырька как свободной поверхности жидкости с нулевым касательным напряжением на ней позволяет использовать следующий приближенный подход. При обтекании газового пузырька чистой (без поверхностно-активных веществ) жидкостью, как уже отмечалось, практически отсутствует зона отрыва потока от поверхности раздела фаз (в отличие от обтекания твердой сферы, которое при $Re > 1$ сопровождается отрывом потока практически сразу за ее миделевым сечением). В силу этого вихревое движение локализуется в весьма тонком пограничном слое на поверхности обтекаемого пузырька и в следе за пузырьком. Во всей остальной области течение может рассматриваться как потенциальное. Толщина пограничного слоя $\delta$ на границе пузырька радиуса $a$ по порядку величины должна быть равна (как обычно при внешнем обтекании тела) $a\,Re^{-1/2}$, т.е. при $Re >> 1$ $\delta << a$. При этом условии можно с разумным приближением принять, что поле скоростей в жидкости описывается формулами (5.10) для обтекания сферы идеальной жидкостью. Сила сопротивления движению газового пузырька может быть найдена, ис-

ходя из того, что работа этой силы в единицу времени должна быть равна скорости вязкой диссипации кинетической энергии во всей области течения; указанная скорость диссипации рассчитывается по известному полю скоростей. В результате такого подхода для силы сопротивления было получено [25]:

$$F_c = 12\pi a \mu U_\infty ,$$

т.е. при обтекании сферического пузырька при Re >> 1 сила сопротивления вдвое больше, чем при чисто вязкостном (Re << 1) обтекании твердой сферы. Этому результату соответствует коэффициент сопротивления

$$C_D = \frac{48}{\mathrm{Re}}.$$

Более строгий анализ был выполнен в 1963 г. Д. Муром (см. [59]), который учел диссипацию энергии не только в объеме жидкости, но и в пограничном слое. Результирующее соотношение для коэффициента сопротивления, полученное Муром, имеет вид

$$C_D = \frac{48}{\mathrm{Re}}\left(1 - \frac{2{,}21}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right). \qquad (5.31)$$

На рис. 5.10 показано сопоставление формулы (5.31) с опытными данными по всплытию воздушных пузырьков в маловязких жидкостях (значения безразмерного параметра $1/\mathrm{Ka}$ лежат в пределах $8{,}9 \cdot 10^{-11}$—$2{,}41 \cdot 10^{-9}$). Как видно из рисунка, согласование расчетной зависимости с опытными результатами — достаточно хорошее

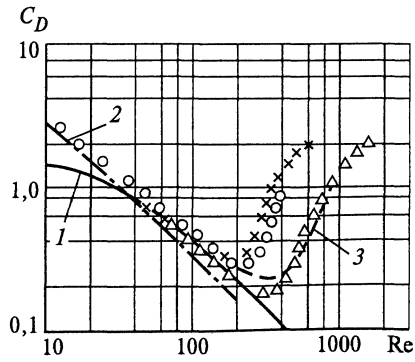



**Рис. 5.10. Коэффициент сопротивления газовых пузырьков, всплывающих в различных жидкостях:**

x — варсол (лигроин), $1/\mathrm{Ka} = 2{,}41 \cdot 10^{-9}$; ○ — водный раствор этанола, $1/\mathrm{Ka} = 1{,}17 \cdot 10^{-9}$; △ — метанол, $1/\mathrm{Ka} = 0{,}89 \cdot 10^{-10}$ (опытные данные [57]); *1—3* — расчетные кривые соответственно по (5.31), (5.32), (5.33) при $1/\mathrm{Ka} = 10^{-10}$

при числах $\mathrm{Re} \geq 40$. Верхняя граница применимости формулы (5.31) связана с деформацией пузырька при числах We, близких к единице. Из рис. 5.10 ясно также, что формула (5.31), как это и было предопределено условиями ее вывода, не годится для малых чисел Re (практически при $1 \leq \mathrm{Re} \leq 40$). Поэтому, в частности, она не может быть применена к пузырькам, соответствующим области *2* для вязких жидкостей. Для практических расчетов скорости всплытия сферических пузырей при $1 \leq \mathrm{Re} \leq 40$, по-видимому, может быть использована формула Чао [37]:

$$C_D = \frac{32}{\mathrm{Re}}\left(1 - \frac{0{,}314}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right), \tag{5.32}$$

которая отображена на рис. 5.10 кривой *2*.

### 5.6.2. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ПУЗЫРИ

При достижении определенных размеров и скоростей всплытия газовые пузырьки деформируются, сплющиваясь в направлении движения. Фактическая форма пузырьков может быть достаточно сложной, но изучение фотографий, полученных в опытах, убеждает, что хорошей аппроксимацией для деформированных пузырьков может служить сплющенный сфероид (эллипсоид вращения) с отношением горизонтальной и вертикальной осей $\chi = \frac{a}{b} > 1$.

Обтекание таких пузырей, очевидно, подчиняется более сложным закономерностям, чем найденные для сферических пузырьков при $\mathrm{Re} \geq 1$. Однако для случая движения пузырьков в маловязких жидкостях Д. Мур (1965 г.) с успехом применил тот же метод, которым он пользовался при получении соотношения (5.31). Как и для случая обтекания сферических пузырьков при $\mathrm{Re} >> 1$, Мур полагал течение жидкости потенциальным всюду, кроме очень тонкого пограничного слоя на поверхности пузыря. Сила сопротивления рассчитывалась по скорости диссипации энергии в области потенциального течения и в пограничном слое. Итоговое соотношение для коэффициента сопротивления эллипсоидальных пузырьков согласно [59] имеет вид

$$C_D = \frac{48}{\mathrm{Re}}\,G(\chi)\left(1 + \frac{H(\chi)}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right), \tag{5.33}$$

*Таблица 5.1.* **Функции $G(\chi)$, $H(\chi)$ и числа We для эллипсоидальных пузырьков [59]**

| $\chi$ | We($\chi$) | $G(\chi)$ | $H(\chi)$ |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 0,000 | 1,000 | −2,211 |
| 1,1 | 0,624 | 1,137 | −2,129 |
| 1,2 | 1,108 | 1,283 | −2,025 |
| 1,4 | 1,802 | 1,600 | −1,751 |
| 1,8 | 2,597 | 2,341 | −0,959 |
| 2,1 | 2,937 | 2,994 | −0,168 |
| 2,2 | 3,022 | 3,231 | +0,131 |
| 2,5 | 3,224 | 4,001 | +1,131 |
| 3,0 | 3,441 | 5,487 | +3,112 |
| 3,4 | 3,550 | 6,866 | +4,971 |
| 3,7 | 3,608 | 8,013 | +5,517 |
| 4,0 | 3,652 | 9,261 | +8,183 |

где $G(\chi)$ и $H(\chi)$ — некоторые функции эксцентриситета $\chi = \frac{a}{b}$, который в свою очередь связан однозначно со значением числа We. Значения указанных функций и соответствующие числа We($\chi$) были рассчитаны Муром и сведены в таблицу, фрагмент которой приводится в табл. 5.1.

Имея в виду, что коэффициент сопротивления $C_D$ можно представить как:

$$C_D = \frac{4}{3}\,\mathrm{Re}^4\mathrm{We}^{-3}/\mathrm{Ka},$$

где в качестве характерного линейного размера в числах $C_D$, Re, We используется эквивалентный диаметр пузырька $d_э = 2R_э$, с помощью соотношения (5.33) можно построить зависимости $C_D$(Re) для любых значений Ka (практически для любых конкретных жидкостей). Как видно из рис. 5.10, расчет по (5.33) (кривая *3*) неплохо согласуется с опытными данными для жидкости с близким значением параметра Ka. На рис. 5.6 расчетное соотношение (5.33) (пунктирная кривая *в*) сопоставляется с опытными данными по движению воздушных пузырьков в воде. Здесь также видно вполне удовлетво-

рительное согласование расчетной зависимости с опытными результатами для области *3* и прилегающих участков областей *2* и *4*.

Для вязких жидкостей (практически при $1/\mathrm{Ka} > 10^{-5}$) соотношение (5.33), по-видимому, применено быть не может, ибо для таких жидкостей в области существования эллипсоидальных пузырьков (область *3*) не выполняется условие $\mathrm{Re} \gg 1$. Интересно, что для газовых пузырьков, всплывающих в маловязких жидкостях, обнаруживаются явные минимумы на кривых $C_D(\mathrm{Re})$ (им соответствуют максимумы на первичных зависимостях $U_\infty(\mathrm{Re})$). По мере увеличения вязкости эти минимумы становятся все менее выраженными и при $1/\mathrm{Ka} \approx 10^{-2}$ исчезают вовсе.

Формула (5.33) рекомендована Муром до $\mathrm{We} < 3{,}745$, ибо при больших значениях We, как упоминалось выше, подъемное движение пузырей перестает быть устойчивым. Для области *4* (см. рис. 5.6), характеризуемой неустойчивым (с пульсациями) всплыванием пузырей, получение каких-либо теоретических решений не представляется возможным. Для оценки скорости всплытия в этой области можно использовать эмпирическую формулу (5.28).

### 5.6.3. ГАЗОВЫЕ ПУЗЫРИ В ФОРМЕ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

Пузыри объемом более 2 $\mathrm{см}^3$ ($R_э > 0{,}8$ см) можно представить в виде правильного сферического сегмента радиусом $R$ и телесным углом $2\theta_0$ (рис. 5.11). Высота этого сегмента $h$ и диаметр донной части $2a$ легко выражаются через $R$ и $\theta_0$. Лобовая поверхность газовых пузырей, имеющих форму сферического сегмента, обтекается безотрывно и может рассматриваться как свободная поверхность жидкости. Опытные наблюдения показывают, что зона отрыва потока за пузырем размещена обычно внутри приблизительно сферического объема того же радиуса $R$ (см. рис. 5.8). Таким образом, обтекание пузырька, имеющего форму сферического сегмента, на передней части его поверхности можно рассматривать как обтекание сферы идеальной жидкостью, т.е. использовать в анализе результаты § 5.2.

Будем рассматривать потенциальное течение жидкости в системе координат, связанной с движущимся пузырем (начало координат поместим в центр кривизны сферической части поверхности пузыря). Скорость жидкости вдали от пузыря в выбранной системе координат

равна $U_\infty$, т.е. численно совпадает со скоростью подъемного движения пузыря. На лобовой поверхности пузыря скорость определяется соотношением (5.11).

Поскольку плотность газа намного меньше плотности жидкости, давление во всех точках внутри пузыря можно считать одинаковым, равным $p''$. Используя универсальные условия совместности для нормальной компоненты импульса, получаем, что такое же давление будет и в жидкости на границе с пузырем, т.е. для характерных точек пузыря (рис. 5.11) можно записать

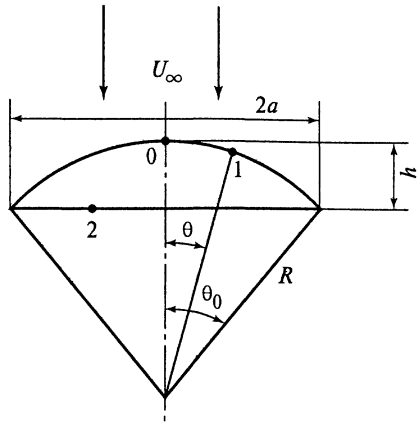



**Рис. 5.11. Идеализированная форма крупного пузыря, обтекаемого жидкостью**

$$p_0 = p_1 = p_2 = p''. \tag{5.34}$$

С другой стороны, для точек *0* и *1* лобовой поверхности пузыря справедлив закон Бернулли:

$$p_0 = p_1 + \frac{9}{8}\rho' U_\infty^2 \sin^2\theta - \rho' g R(1 - \cos\theta).$$

Последний член правой части учитывает разницу уровней в точках *0* и *1*.

Если угол $\theta$ достаточно мал, то, разлагая функцию $(1 - \cos\theta)$ в ряд Маклорена, получаем

$$1 - \cos\theta = 1 - (1 - \sin^2\theta)^{1/2} =$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{8}\sin^4\theta + \ldots \approx \frac{1}{2}\sin^2\theta.$$

Используя этот результат, а также соотношение (5.34) в уравнении закона Бернулли, получаем

$$R = \frac{9}{4}\frac{U_\infty^2}{g}. \tag{5.35}$$

Таким образом, приняв первоначально, что лобовая поверхность пузыря есть участок сферы радиуса $R$, получили соотношение, определяющее значение этого радиуса. При этом формула (5.35) в свою очередь подтверждает сферичность этой части поверхности пузыря: потенциальному обтеканию верхней части пузыря отвечает сферическая поверхность радиуса $R$.

Результат, выражаемый формулой (5.35), был впервые получен еще в 1950 г. [3]. Однако при неизвестном значении угла $\theta_0$ формула (5.35) не дает возможности связать скорость всплытия $U_\infty$ с объемом пузыря (или с эквивалентным радиусом $R_э$). Для получения указанной связи в работе [18] используется концепция «донного разрежения».

Опытами установлено, что при обтекании различных препятствий с достаточно большими скоростями поток жидкости отрывается от препятствия, образуя в большинстве практически важных случаев турбулентный след. Давление в следе значительно меньше, чем в свободном потоке, причем вдоль поверхности отрыва давление неизменно. Степень разрежения в следе принято характеризовать коэффициентом донного разрежения:

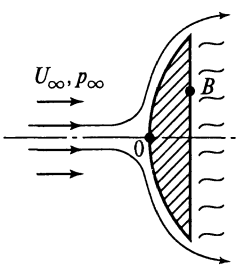
$$Q = \frac{p_\infty - p_B}{\frac{1}{2}\rho' U_\infty^2},$$

где $p_B$ — донное давление, одинаковое для всей поверхности отрыва (рис. 5.12). Поскольку

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho' U_\infty^2,$$

то справедливо соотношение

$$\frac{p_0 - p_B}{\frac{1}{2}\rho' U_\infty^2} = Q + 1. \quad (5.36)$$




Коэффициент донного разрежения для дисков $Q \approx 0{,}4$.

**Рис. 5.12. Обтекание твердого круглого диска с отрывом потока**

Если обтекание диска потоком жидкости происходит не так, как показано на рис. 5.12, а «сверху вниз» в соответствии со схемой рис. 5.11, то очевидно в этом случае давление в точках отрыва (например, в точке *2*, рис. 5.11) отличается от давления $p_B$ на величину $\rho' g h$, т.е.

$$p_2 = p_B + \rho' g h.$$

Поскольку при обтекании парового пузыря справедливо соотношение (5.34), то последнее равенство вместе с (5.36) дает

$$h = \frac{Q+1}{2}\,\frac{U_\infty^2}{g}. \tag{5.37}$$

Из формул (5.35) и (5.37) и очевидных геометрических соотношений следует:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{R} &= \frac{2(Q+1)}{9}; \\ \frac{a}{R} &= \sqrt{\frac{2h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}; \\ \theta_0 &= \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.38}$$

Поскольку $Q$ = const, это означает, что все крупные пузыри геометрически подобны. С учетом конкретного числового значения $Q = 0{,}4$ можно записать:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{h}{R} \approx 0{,}311; \quad \frac{a}{R} \approx 0{,}725; \\ &\frac{h}{a} \approx 0{,}43; \quad \theta_0 \approx 46{,}5°. \end{aligned}\right\} \tag{5.38а}$$

Анализ полученных в опытах фотографий показывает, что последние соотношения весьма точно описывают реальные очертания крупных газовых пузырей объемом более 2 см$^3$.

Так как объем сферического сегмента

$$V = \frac{\pi}{3} h^2(3R - h) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{Q+1}{2}\right)^3 \left(\frac{U_\infty^2}{g}\right)^3 \left[\frac{27}{2(Q+1)} - 1\right],$$

то с учетом числового значения $Q$ имеем

$$U_\infty \approx 0{,}826\sqrt{gV^{1/3}},$$

или, используя эквивалентный радиус,

$$U_\infty \approx 1{,}05\sqrt{gR_э}, \qquad (5.39)$$

что совпадает по структуре с формулой (5.29), полученной путем анализа размерностей, и дает значение константы, хорошо согласующееся с опытными данными.

### 5.6.4. ДРОБЛЕНИЕ ПУЗЫРЕЙ

Экспериментальные наблюдения показывают, что при движении в маловязких жидкостях газовые пузыри, объем которых превышает 50 см$^3$, дробятся, распадаясь на более мелкие устойчивые пузырьки. Теории дробления газовых пузырьков не существует. Имеющиеся в этой области теоретические исследования показывают, что при безотрывном обтекании поверхность газовых пузырей сохраняет устойчивость. Этот вывод находится в хорошем соответствии с опытами, ибо сферические и эллипсоидальные пузыри, большая часть поверхности которых обтекается без отрыва потока, действительно не подвержены дроблению. В той области размеров пузырей, где происходит перестройка их формы от эллипсоидальной к сферическому сегменту (область *4*, рис. 5.6), всплывание пузырей, как уже отмечалось, сопровождается пульсациями формы и траектории движения. Но пузыри в этой области размеров, как правило, не дробятся из-за стабилизирующего действия сил поверхностного натяжения, ибо кривизна поверхности таких пузырьков еще не слишком мала.

Дроблению подвержены крупные пузыри, имеющие форму сферического сегмента. Эквивалентный радиус таких пузырей

$R_э \approx 2$—3 см, что согласно соотношениям (5.38а) соответствует горизонтальному размеру $2a \approx 7$—11 см. Скорость всплытия при этом составляет приблизительно 0,5 м/с, а число Рейнольдса, посчитанное по эквивалентному диаметру, равно $(2—3) \cdot 10^4$. (Следует помнить, что речь идет о движении пузырей в маловязких жидкостях; о опытном изучении дробления пузырей в вязких жидкостях нам не известно.) Наиболее вероятной причиной дробления являются турбулентные пульсации в следе за пузырем. Опыты показывают, что маленькие пузырьки — «спутники» нередко образуются на донной части всплывающего пузыря, особенно у заостренных краев его поверхности даже при условии сохранения устойчивости пузыря в целом. При увеличении размеров пузыря растет масштаб турбулентных пульсаций в следе и наступает, по-видимому, потеря устойчивости нижней поверхности пузыря. При этом в центре пузыря образуется тонкая пленка, которая затем разрывается, и пузырь распадается на несколько более мелких. В практическом плане наибольший интерес представляют условия дробления пузырей при их коллективном движении в турбулентном потоке жидкости, когда на межфазную поверхность воздействуют пульсации несущей фазы. Сколь-нибудь строгой теории таких процессов не существует.

## 5.7. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ КАПЕЛЬ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ

### 5.7.1. СФЕРИЧЕСКИЕ КАПЛИ

Движение малых капель при $\mathrm{Re} \ll 1$ анализировалось в § 5.5. Скорость движения капель в жидкой или газообразной среде практически до $\mathrm{Re} \le 1$ определяется соотношением (5.24а). Для случая падения капель в газе вязкость внешней среды намного меньше вязкости жидкости в капле, что позволяет использовать для расчета скорости падения капель формулу Стокса (5.24):

$$U_\infty = \frac{2}{9} \frac{a^2 g(\rho' - \rho'')}{\mu''},$$

где «′» — относится к жидкости внутри капли; «″» — к газу.

Предельный размер капель, движущихся в газе по закону Стокса, может быть определен по (5.25), если положить в ней $\mu = \mu''$; $\rho_т = \rho'$; $\rho_ж = \rho''$. Для капелек воды в воздухе получим при этом

$a_{\text{пр}} \approx 0{,}04$ мм. Как и для твердых сфер, расчет скорости падения капель при $0{,}5 \leq \mathrm{Re} \leq 5$ можно вести с помощью формулы Озеена (5.26). Очевидно, что и в таком диапазоне чисел Re капли должны быть очень малы (менее 0,2 мм в диаметре).

Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к появлению значительной по площади зоны отрыва в кормовой части поверхности капли. При числах $\mathrm{Re} \approx 100$, как и при обтекании твердой сферы, отрыв потока происходит непосредственно в районе миделевого сечения капли. (В этом состоит принципиальное отличие в характере обтекания капель и газовых пузырьков.) Скорость падения жидких капель в газе при $\mathrm{Re} >> 1$ с хорошим приближением может быть рассчитана, исходя из предположения о постоянстве коэффициента сопротивления $C_D$. Приравнивая силу тяжести и силу сопротивления:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 g(\rho' - \rho'') = C_D \pi a^2 \frac{1}{2}\rho'' U_\infty^2,$$

получаем для скорости падения:

$$U_\infty = \sqrt{\frac{8}{3C_D}\frac{ag\Delta\rho}{\rho''}},$$

где $\Delta\rho = \rho' - \rho''$.

На основе опытных данных коэффициент сопротивления $C_D$ для сферических капель равен примерно 0,4—0,5. С учетом этого:

$$U_\infty \approx 2{,}5\sqrt{\frac{ag\Delta\rho}{\rho''}}. \qquad (5.40)$$

Нетрудно видеть, что полученное соотношение аналогично по структуре формуле (5.29) для скорости всплытия крупных газовых пузырьков, при обтекании которых также происходит отрыв потока. Однако абсолютные скорости падения капель обычно более чем на порядок величины превосходят скорости всплытия газовых пузырьков. Это обусловлено тем, что силы инерции, определяющие сопротивление движению тела при отрывном его обтекании, пропорциональны плотности той среды, в которой движется тело ($f_i \sim \rho U_\infty^2$). При выводе формулы (5.29) вполне обоснованно приняли $\Delta\rho / \rho' \approx 1$, в то время как $\Delta\rho / \rho'' >> 1$.

Падающая капля сохраняет сферическую форму при условии We << 1. Положив приближенно, что верхняя граница существования сферических капель определяется условием We = 1, с помощью (5.40) получим

$$\mathrm{We} = \frac{\rho'' U_\infty^2 2a}{\sigma} = \frac{\rho'' 2a}{\sigma} \frac{g\Delta\rho a}{\rho''} 6{,}25 = 1,$$

откуда $a_{\text{пр}} \approx 0{,}28\, b$, где $b$ — капиллярная постоянная. Для воды $b \approx$ $\approx 2{,}68$ мм (при 20 °С), так что при падении в воздухе водяная капля согласно приведенной оценке сохраняет свою сферичность до $a \approx 0{,}75$ мм. Этому размеру соответствует скорость падения $U_\infty \approx$ $\approx$ 6 м/с. Значение $a = 0{,}28b$ следует считать верхней границей применимости формулы (5.40), нижний предел применимости этой формулы согласно опытным данным определяется числом Re ≈ 20—30.

### 5.7.2. ДЕФОРМАЦИЯ КАПЛИ

Деформация капли наступает, когда силы инерции со стороны газового потока становятся соизмеримыми с силами поверхностного натяжения, т.е. при числах We ≈ 1. Отрывной характер обтекания и малые размеры капель обусловливают иной характер их деформации в сравнении с тем, что наблюдается у газовых пузырьков. Как видно из рис. 5.13, передняя поверхность капли под действием большого динамического давления в районе критической точки $A$ «вдавливается» внутрь объема капли, т.е. становится почти плоской; в зоне отрыва потока (кормовая часть поверхности капли) силы поверхностного натяжения сохраняют поверхность капли, близкой к сферической. (Следует заметить, что форма капли и характер обтекания, изображенные на рис. 5.13, наблюдались в опытах при падении капель таких жидкостей, как четыреххлористый углерод, хлорбензол, бромбензол и т.д., в воде. Можно, однако, полагать, что и при падении капель в газе форма капли и характер обтекания будут аналогичны.)

Опытные наблюдения (к сожалению, не очень надежные) показывают, что в некотором диапазоне размеров капель (для капель воды в

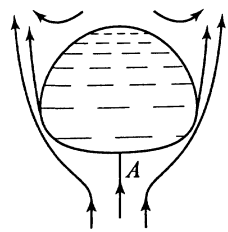



**Рис. 5.13. Типичный характер обтекания деформированной капли [59]**

воздухе $R_э > 2$—3 мм) скорость падения перестает зависеть от объема капли. Это означает, что увеличение силы тяжести, пропорциональной объему капли, полностью компенсируется ростом силы сопротивления, пропорциональной площади миделевого сечения капли. Если положить, что капля представляет собой эллипсоид вращения с горизонтальной осью $2a$ и вертикальной $2b$, то равенство силы тяжести и силы сопротивления выражается соотношением

$$\frac{1}{6}\pi a^2 bg(\rho' - \rho'') = C_D \pi a^2 \frac{1}{2}\rho'' U_\infty^2 .$$

При $C_D$ = const скорость падения капли может оставаться неизменной при увеличении ее объема только при условии $b$ = const. Другими словами, начиная с некоторого размера, капли большего объема становятся все более и более расплющенными, приращение объема приводит к росту только горизонтального размера капли.

Структура формулы для скорости падения таких капель может быть получена, исходя из тех же соображений, которые использовались при получении формулы (5.28). Действительно, полагая, что скорость падения определяется силами тяжести, инерции и поверхностного натяжения и не зависит от характерного линейного размера капли $R_э$, получаем

$$U_\infty = \text{const} \sqrt[4]{\frac{\sigma g(\rho' - \rho'')}{(\rho'')^2}} . \qquad (5.41)$$

Единственное отличие этой формулы от соотношения (5.28) состоит в том, что в знаменателе подкоренного выражения здесь стоит квадрат плотности газовой фазы. При значении const = 1,6—1,8 формула (5.41) дает для капель воды в воздухе $U_\infty$ = 7,6—8,6 м/с, что подтверждается опытными наблюдениями.

Расчет скорости падения деформированных капель, еще не достигших того размера, при котором справедливо соотношение (5.41), можно приближенно вести по (5.40), используя вместо радиуса эквивалентный радиус $R_э$. При этом, конечно, следует проверить, не дает ли этот расчет значение $U_\infty$, большее, чем предельная скорость падения, определяемая (5.41).

В технических приложениях чаще всего имеют дело с движением капель в «активных» газовых потоках, т.е. с такими устройствами, в которых газовый поток сам движется относительно стенок аппарата. В этом случае величина $U_\infty$ характеризует скорость движения капель относительно газа. Если, например, газ движется вниз со скоростью $W''$, то фактическая скорость капель определяется суммой $U_\infty + W''$. При восходящем движении газа скорость капель относительно стенок канала равна $W'' - U_\infty$. При равенстве абсолютных значений скорости подъемного движения газа $W''$ и скорости свободного падения капли $U_\infty$ капля «зависает» в газовом потоке, поэтому $U_\infty$ для данного размера капель в приложениях называется скоростью витания. Если скорость восходящего движения газа превосходит скорость витания, то капля уносится газовым потоком.

### 5.7.3. ДРОБЛЕНИЕ КАПЕЛЬ

Силы инерции со стороны газового потока, приводящие к деформации капли, при некотором ее размере вызывают в конце концов дробление капли. Строгой теории дробления капель не существует. Качественно ясно, что деформация капли и последующее дробление вызывается касательным напряжением со стороны газового потока, действующим на поверхность капли:

$$\tau_i = c_i \rho'' u_\infty^2 / 2,$$

где $c_i$ — коэффициент трения на межфазной границе.

Препятствуют деформации (и дроблению) силы поверхностного натяжения (на единицу площади поверхности):

$$f_\sigma = \sigma / d.$$

Из этих рассуждений следует, что дробление капель определяется некоторым значением числа Вебера. На основе опытных наблюдений принимают за условие дробления $We_{кр} = 7—10$. Капля, теряющая устойчивость, сначала превращается в тор, а затем распадается на более мелкие. Очевидно, что скорость падения капли перед дроблением определяется (5.41). Это позволяет выразить пре-

дельный размер капли (эквивалентный диаметр $d_{пр}$) в долях капиллярной константы, положив

$$\mathrm{We}_{кр} = \frac{\rho'' U_\infty^2 d_{пр}}{\sigma} = \frac{\rho'' d_{пр} (\mathrm{const})^2}{\sigma\rho''} \sqrt{\sigma g \Delta\rho} = 7—10.$$

При const = 1,6—1,8 получим

$$d_{пр} = (2—3)\, b,$$

где $b = \sqrt{\dfrac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}$.

Этот результат находится в хорошем соответствии с опытными наблюдениями за движением капель воды в воздухе, которые дробятся при $d_{пр} \approx 6—7$ мм.

Глава шестая

# НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В ЖИДКОСТИ

В парожидкостных системах под влиянием изменения внешнего давления и (или) процессов теплообмена объемы пара и жидкости могут значительно изменяться во времени. Для многих приложений модельной задачей здесь служит расширение (схлопывание) сферической газовой полости в жидкости (подводный взрыв, кавитация). Эти нестационарные задачи успешно решаются с использованием приближения невязкой несжимаемой жидкости. То же приближение оказывается вполне оправданным при анализе динамики паровых пузырьков при кипении. Настоящая глава посвящена нестационарным течениям *эффективно невязкой* жидкости.

## 6.1. ДИНАМИКА РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ

### 6.1.1. ПОЛЯ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ

Пусть внутри массива неподвижной, невязкой и несжимаемой жидкости находится газовая полость, ограниченная непроницаемой сферической оболочкой, радиус которой $R$ изменяется во времени (рис. 6.1). Найдем поля скорости и давления в жидкости при известном законе $R(t)$. Ввиду непроницаемости оболочки скорость изменения ее радиуса $\dot{R} = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ равна радиальной скорости движения частиц жидкости на поверхности $u_R$ $\dot{R} = u_R$.

Уравнение неразрывности в сферической системе координат при наличии центральной симметрии имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 u) = 0,$$

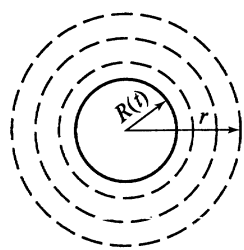



**Рис. 6.1. Схема роста газовой полости в объеме жидкости**

а его интеграл

$$r^2 u = C(t) = R^2 u_R = R^2 \dot{R}.$$

Здесь постоянная интегрирования $C(t)$ определена через радиус и скорость изменения радиуса оболочки. Таким образом, распределение радиальной скорости в жидкости

$$u(r, t) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2}. \tag{6.1}$$

При этом на бесконечности ($r \to \infty$) жидкость остается неподвижной. Уравнение сохранения импульса для исследуемого типа движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{6.2}$$

(Действие массовых сил не учитываем.)

Подставляя в (6.2) величину $u$ из соотношения (6.1), находим

$$\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (R^2 \dot{R}) - \frac{2}{r^5} R^4 \dot{R}^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \tag{6.3}$$

Интегрируя обе части последнего уравнения по радиусу в пределах от текущего значения $r$ до $\infty$, находим

$$\frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (R^2 \dot{R}) - \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} R^4 \dot{R}^2 = \frac{p(r) - p(\infty)}{\rho}, \tag{6.4}$$

где $p(\infty)$ — давление жидкости при $r \to \infty$.

Уравнение (6.4) определяет поле давлений в жидкости. В зависимости от закона изменения радиуса оболочки во времени это давление может быть как монотонным, так и немонотонным. В последнем случае при некотором $r = r_*$ ($R < r_* < \infty$) имеется экстремум, определяемый условием $(\partial p / \partial r)_{r = r_*} = 0$. Из соотношения (6.3) следует:

$$r_* = R \left( \frac{2\dot{R}^2}{2\dot{R}^2 + R\ddot{R}} \right)^{1/3}. \tag{6.5}$$

Из выражения (6.5) видно, что для того чтобы $r_*$ было больше $R$ (тогда сечение экстремального давления находится в жидкости), вели-

чина $\ddot{R}$ должна быть отрицательной, однако знаменатель дроби в (6.5) должен оставаться положительным.

Таким образом, условия существования экстремума в распределении давления в массе жидкости имеют вид:

$$\ddot{R} < 0;$$

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} > 0.$$

Экстремальный перепад давлений $p_* - p_\infty$ (где $p_* = p(r_*)$ — давление при $r = r_*$) определяется после подстановки (6.5) в соотношение (6.4). После простых преобразований можно записать

$$\frac{p_* - p_\infty}{\rho} = \frac{3}{4}\frac{R}{r_*}(2\dot{R}^2 + R\ddot{R}). \qquad (6.6)$$

**Пример.** Радиус оболочки изменяется по степенному закону $R = at^n$. Найти значения показателя $n$, при которых поле давлений в жидкости немонотонно.

Подставляя $R = at^n$ в (6.5), находим

$$r_* = R\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^{1/3}.$$

Отсюда следует, что экстремум давления имеет место в жидкости при $R < r_* < \infty$, если

$$\frac{1}{3} < n < 1.$$

### 6.1.2. УРАВНЕНИЕ РЭЛЕЯ

Уравнение (6.4) легко преобразуется к форме, которая определяет связь избыточного давления в газовой полости с законом ее расширения (сжатия). Внутри газового пузыря давление можно считать однородным (по крайне мере в практически важных случаях, когда $\dot{R} << C_{зв}$, где $C_{зв}$ — скорость звука в газе). Это давление с точностью до лапласовского скачка (который для рассматриваемых задач всегда составляет ничтожную долю от динамического перепада дав-

лений) равно давлению в жидкости на границе полости, т.е. при $r = R$ $p = p_R$. Полагая в (6.4) $r = R$, находим

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_R - p_\infty}{\rho}, \tag{6.7}$$

где $\ddot{R} = \dfrac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}t}$.

Это важное соотношение (6.7), обычно называемое уравнением Рэлея [66] (O.M. Rayleigh), или Рэлея—Ламба [30], позволяет по известному закону изменения радиуса $R(t)$ найти закон изменения $p_R - p_\infty$ во времени. Возможна и обратная постановка, когда по известному значению $p_R - p_\infty$ можно найти закон эволюции оболочки $R(t)$. Некоторые приложения этого уравнения для анализа ряда проблем двухфазной гидромеханики рассматриваются ниже.

Уравнение Рэлея в форме соотношения (6.7) представляет собой уравнение динамики: перепад давлений в жидкости определяется инерционными силами при сферически симметричном движении. Существует также эквивалентная соотношению (6.7) энергетическая интерпретация этой закономерности. Для ее получения подсчитаем сначала кинетическую энергию движения жидкости во всем объеме:

$$E = \rho \int_R^\infty \frac{u^2}{2} 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r.$$

Подставляя в это соотношение выражение скорости $u$ из формулы (6.1) и выполняя интегрирование, находим

$$E = 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2. \tag{6.8}$$

Приращение кинетической энергии $\mathrm{d}E$ при увеличении объема полости на $\mathrm{d}V$ равно работе сил избыточного давления $p_R - p_\infty$, т.е. имеем

$$\mathrm{d}E = (p_R - p_\infty)\,\mathrm{d}V, \tag{6.9}$$

где $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Соотношение (6.9) представляет собой искомую энергетическую интерпретацию уравнения Рэлея (6.7). Нетрудно убедиться, что оба соотношения тождественны.

Действительно, из (6.9) и (6.8):

$$2\pi\rho\, \mathrm{d}(R^3\dot{R}^2) = 4\pi R^2(p_R - p_\infty)\, \mathrm{d}R,$$

откуда

$$\frac{1}{2R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(R^3\dot{R}^2) = \frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\dot{R}\frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R} = \frac{p_R - p_\infty}{\rho}.$$

Поскольку $\dot{R}\dfrac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}R} = \dot{R}\dfrac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}R} = \ddot{R}$, последнее уравнение тождественно (6.7).

В приложениях можно использовать оба варианта записи уравнения Рэлея, причем часто соотношение в форме (6.9) оказывается более удобным и быстрее приводит к решению.

## 6.2. КАВИТАЦИЯ. СХЛОПЫВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

### 6.2.1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ КАВИТАЦИОННЫХ КАВЕРН

Явление разрыва сплошности жидкости с образованием парогазовых пузырьков называют кавитацией. Кавитация, в частности, возникает в потоках жидкости при обтекании различного рода препятствий в местах значительного понижения давления (рис. 6.2).

Для струйки тока, проходящей около поверхности тела, уравнение Бернулли имеет вид:

$$p_x + \frac{1}{2}\rho u_x^2 =$$

$$= p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = \mathrm{const},$$

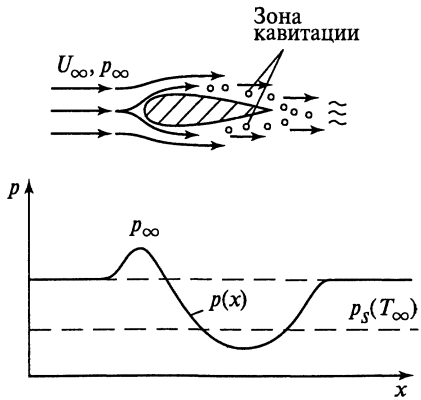



**Рис. 6.2. Характер изменения давления в потоке жидкости при обтекании твердого тела**

или

$$p_x = p_\infty - \frac{1}{2}\rho(u_x^2 - U_\infty^2). \qquad (*)$$

Из соотношения (*) следует, что по мере увеличения скорости $u_x$ давление $p_x$ падает. Оно может стать ниже давления насыщения $p_s(T_\infty)$ или даже отрицательным (растягивающие усилия). Если жидкость не подвергалась специальной обработке (например, выдерживанию при высоком, в несколько мегапаскалей, давлении с целью удаления нерастворенных микропузырьков газа), то она не выдерживает растяжения. В итоге в рассматриваемой области жидкость «разрывается», в ней возникают пузырьки, содержащие смесь пара и газа (например, воздуха), растворенного в жидкости. Далее эти пузырьки (кавитационные каверны) сносятся потоком в зону повышенных давлений и там схлопываются. Опыты показывают, что при возникновении кавитации характеристики работы насосов, гребных винтов резко ухудшаются. Еще неприятней то обстоятельство, что в зоне кавитации часто наблюдается эрозионное разрушение материала поверхности металла, которое при длительной работе приводит к поломкам и авариям. Кавитация наблюдается также при прохождении через жидкость звуковых и ультразвуковых колебаний значительной интенсивности.

В связи с проблемой кавитации Рэлей [66] теоретически исследовал задачу о схлопывании сферической полости внутри массы жидкости. Именно в этом исследовании им было получено рассмотренное выше соотношение (6.7), впоследствии названное уравнением Рэлея.

### 6.2.2. СХЛОПЫВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

Рассмотрим проблему схлопывания сферической полости. В неподвижную жидкость с давлением $p_\infty$ внесена сферическая полость с начальным радиусом $R_0$. Давление внутри полости $p_0 < p_\infty$ и остается постоянным во времени. В частности, $p_0$ может быть равно нулю. Под влиянием внешнего перепада давлений $p_\infty - p_0$ жидкость приходит в движение и полость начинает ускоренно смыкаться (схлопываться). Исследуем динамику этого процесса. Поверхностное

натяжение на границе раздела фаз не будем учитывать ввиду его несущественности в данной задаче.

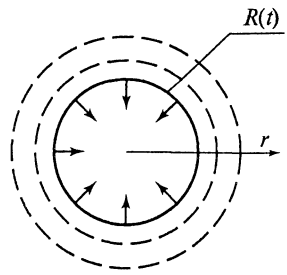



**Рис. 6.3. Схема схлопывания сферической полости**

Схема процесса показана на рис. 6.3. Примем, что граница непроницаема для вещества. Это оправдано ввиду обычно встречающихся на практике низких давлений в кавитационном парогазовом объеме. Полость содержит весьма малую массу пара, и его конденсация по мере схлопывания не приводит к заметным потокам массы через границу раздела фаз. Для непроницаемой поверхности без учета сил поверхностного натяжения давление в жидкости на поверхности сферы равно внутреннему давлению $p_0$.

Уравнение Рэлея в его энергетической интерпретации (6.9) для данной задачи имеет вид

$$\mathrm{d}E = -\Delta p\,\mathrm{d}V, \tag{6.9a}$$

где $\Delta p = p_\infty - p_0$ — постоянный во времени перепад давлений.

В начальный момент жидкость неподвижна и ее кинетическая энергия равна нулю. Поэтому интеграл уравнения (6.9а) определяется как:

$$E = \Delta p(V_0 - V), \tag{6.10}$$

где $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ — начальный объем сферы.

Соотношение (6.10) показывает, что кинетическая энергия жидкости по мере уменьшения объема $V$ полости растет и на последних стадиях схлопывания, когда $V << V_0$, достигает наибольшего значения:

$$E_{\max} \equiv E_{V\to 0} = \Delta p V_0. \tag{6.10a}$$

Подставляя развернутые выражения для кинетической энергии жидкости $E$ и объема $V$ в соотношение (6.10), находим

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\rho}\frac{R_0^3}{R^3}\left(1 - \frac{R^3}{R_0^3}\right). \tag{6.11}$$

Выражение для скорости границы записываем с учетом того, что $\dot{R} < 0$, т.е. выбираем отрицательное значение корня из (6.11):

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\rho}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3/2}\left(1-\frac{R^3}{R_0^3}\right)^{1/2}. \qquad (6.12)$$

Анализ этого выражения показывает, что скорость движения границы нарастает по мере уменьшения радиуса полости. При $R << R_0$ скорость:

$$|\dot{R}| \sim R^{-3/2}.$$

Зависимость между $R$ и временем $t$ определяется после интегрирования дифференциального уравнения (6.12), которое приводит к соотношению

$$\int_z^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{(1-z^3)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\rho}}\,\frac{t}{R_0}, \qquad (6.13)$$

где $z = R/R_0$ — относительный радиус полости.

Выражение (6.13) при подстановке в качестве нижнего предела интегрирования $z = 0$ определяет полное время схлопывания сферической полости.

Интеграл:

$$\int_0^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{(1-z^3)^{1/2}} = \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \approx 0{,}747,$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция.

Таким образом, полное время процесса схлопывания составляет:

$$t_* = 0{,}915 R_0\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}. \qquad (6.14)$$

(Числовой коэффициент $\sqrt{\frac{3}{2}}\,0{,}747 \approx 0{,}915$.)

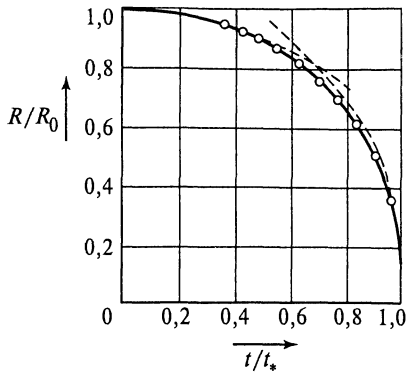



**Рис. 6.4. Изменение во времени относительного радиуса сферической полости под действием постоянного перепада давлений (опытные точки нанесены для схлопывания каверны с начальным радиусом $R_0$ = 7,2 мм [3])**

С учетом (6.14) соотношение (6.13) может быть представлено в следующем безразмерном виде:

$$\int_z^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{\sqrt{(1-z^3)}} = 0{,}747\,\frac{t}{t_*}. \qquad (6.15)$$

Оно определяет универсальную зависимость между $\frac{R}{R_0}$ и $\frac{t}{t_*}$, которая показана на рис. 6.4. Интеграл в соотношении (6.15) вычисляется численными методами.

При построении кривой (см. рис. 6.4) могут быть использованы асимптотические зависимости, вытекающие из (6.15)*:

для начальной стадии процесса $\left(\frac{R}{R_0} \approx 1, \quad \frac{t}{t_*} << 1\right)$:

$$\frac{R}{R_0} = 1 - 0{,}418\left(\frac{t}{t_*}\right)^2;$$

---

* Для нахождения первой асимптоты удобно положить $z = 1 - \Delta z$, где $\Delta z << 1$. Вторая асимптота находится непосредственно из условия $z << 1$, но при этом нужно иметь в виду что нужный нам интеграл

$$\int_z^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{\sqrt{(1-z^3)}} = \int_0^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{\sqrt{(1-z^3)}} - \int_0^z \frac{z^{3/2}\,dz}{\sqrt{(1-z^3)}}.$$

для конечной стадии $\left(\frac{t}{t_*} \approx 1, \quad \frac{R}{R_0} << 1\right)$

$$\frac{R}{R_0} = 1{,}284\left(1 - \frac{t}{t_*}\right)^{2/5}.$$

Эти зависимости изображены на рис. 6.4 пунктиром. Зависимость (6.15), как видно из рис. 6.4, находится в хорошем согласии с опытными данными, приведенными в [3], для схлопывания сферической каверны, имеющей начальный радиус $R_0 = 7{,}2$ мм.

Представление о порядке времени $t_*$ дает следующий расчет. Для воды ($\rho = 10^3$ кг/м$^3$) при начальном радиусе $R_0 = 1$ мм и при значениях $\Delta p = 10^4$ и $10^5$ Н/м$^2$ (0,1 и 1,0 бар) значения $t_*$ по формуле (6.14) соответственно равны примерно $3 \cdot 10^{-4}$ и $1 \cdot 10^{-4}$ с (что отвечает звуковому интервалу частот).

### 6.2.3. ПОЛЕ ДАВЛЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ СХЛОПЫВАЮЩЕЙСЯ КАВЕРНЫ

При сферически симметричном движении оболочки сферы поле давлений в жидкости, как показано в § 6.1, не является монотонным. Соотношение (6.5), определяющее радиус, соответствующий максимуму давлений, для случая схлопывания кавитационной каверны может быть преобразовано следующим образом. Из (6.11) определяется $2\dot{R}^2$. Уравнение Рэлея (6.7), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} = -\frac{\Delta p}{\rho},$$

совместно с (6.11) позволяет найти

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} = \frac{\Delta p}{\rho}\,\frac{1 - 4z^3}{3z^3}.$$

В итоге имеем

$$\frac{r_*}{R} = \left(4\,\frac{1 - z^3}{1 - 4z^3}\right)^{1/3} \tag{6.16}$$

В свою очередь уравнение (6.6) для экстремального перепада давлений $p_* - p_\infty$ с помощью двух последних соотношений приводится к виду

$$\frac{p_* - p_\infty}{p_\infty - p_0} = \frac{1}{4^{4/3}} \frac{1}{z^3} \frac{(1 - 4z^3)^{4/3}}{(1 - z^3)^{1/3}}. \qquad (6.17)$$

(Здесь по-прежнему $z = R/R_0$.)

Из формулы (6.16) следует, что на начальной стадии процесса, пока $R/R_0 > 4^{-1/3} \approx 0{,}63$, давление в жидкости изменяется монотонно (отрицательные значения $r_*$ физического смысла не имеют). Слабый максимум давления возникает на бесконечном удалении от сферы при прохождении ее границей значения $z = R/R_0 = 4^{-1/3}$. При дальнейшем смыкании сферы максимум давления, как видно из табл. 6.1, очень быстро нарастает, а его относительное расстояние от центра смыкающейся полости стремится к постоянному значению

$$r_* = 4^{1/3} R \approx 1{,}587R.$$

Формула (6.17) показывает, что на последней стадии процесса (практически при $z < 0{,}3$) максимальный перепад давления растет обратно пропорционально кубу радиуса сферы:

$$\frac{p_* - p_\infty}{p_\infty - p_0} \approx \frac{1}{4^{4/3}} \frac{1}{z^3}.$$

*Таблица 6.1.* **Положение и значение максимума давления в жидкости в зависимости от относительного радиуса сферической полости**

| $\frac{R}{R_0}$ | 0,63 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,05 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{r_*}{R}$ | $\infty$ | 2,85 | 1,191 | 1,73 | 1,63 | 1,60 | 1,587 | 1,587 | 1,587 |
| $\frac{p_* - p_\infty}{p_\infty - p_0}$ | 0 | 0,055 | 0,535 | 1,72 | 5,1 | 19 | 157 | 1260 | 157 000 |

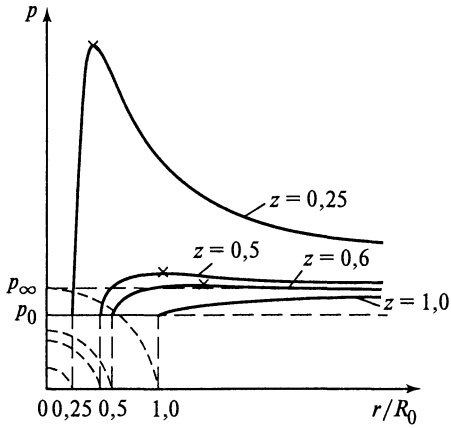



**Рис. 6.5. Распределение давления в окрестности схлопывающейся сферической полости на разных стадиях процесса ($z = R/R_0$, × — максимумы давления)**

Рисунок 6.5 наглядно отражает отмеченные выше особенности в распределении давления при схлопывании сферической полости. Кривые рис. 6.5 построены в соответствии с уравнением (6.4); значения $R\ddot{R}$ и $\dot{R}^2$ определялись с помощью (6.7) и (6.11).

Представляет интерес значение ускорения границы схлопывающейся сферы. Для заключительной стадии процесса из (6.12) находим

$$\ddot{R} = \frac{\mathrm{d}\dot{R}}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\rho}}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{R_0^{3/2}\dot{R}}{R^{5/2}} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{R}^2}{R}.$$

Знак минус указывает на то, что ускорение направлено из жидкости внутрь полости.

Проведем количественные оценки величин по полученным соотношениям для исходных условий: $R_0 = 1$ мм, $\Delta p = 10^4$ Н/м$^2$ (0,1 бар), $\rho = 10^3$ кг/м$^3$. При $z = \frac{1}{20}$, $R = 0{,}05$ мм скорость $\dot{R} \approx -230$ м/с, ускорение $\ddot{R} \approx -1{,}5 \cdot 10^9$ м/с$^2$ (!), $p_* - p_\infty =$ $= 126$ бар. Видно, что экстремальное значение давления $p_*$ весьма значительно и быстро нарастает по мере завершения процесса схлопывания полости. Необычно большими оказываются ускорения движения границы.

Когда схлопывание кавитационной каверны происходит в условиях неоднородного внешнего давления, то под влиянием градиента

давления полость деформируется, перестает быть сферической. (Градиент внешнего давления может быть обусловлен влиянием силы тяжести, основным движением жидкости, а также тем искажением сферически симметричного поля давлений вокруг смыкающейся полости, которое вызывается соседними твердыми стенками.) В итоге смыкание сопровождается образованием направленных струек жидкости, обладающих огромной кинетической энергией, но малыми размерами. Последние, по-видимому, и «ответственны» за эрозию поверхностей при кавитации.

### 6.2.4. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ВНУТРИ ПОЛОСТИ И СЖИМАЕМОСТИ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим обобщение предыдущего анализа, полагая, что давление внутри полости $p_0$ не остается постоянным, а изменяется, например, вследствие конденсации или сжатия остаточного газа.

Будем предполагать, что

$$\Delta p = \Delta p_0 \varphi\left(\frac{R}{R_0}\right),$$

где $\varphi\left(\frac{R}{R_0}\right)$ — произвольная функция, определяемая таким образом, что при $R = R_0$ $\varphi = 1$. (Здесь $\Delta p_0 = p_\infty - p_0$ — начальный перепад давления; $\Delta p = p_\infty - p$ — текущий перепад давления.)

Решение, аналогичное изложенному выше, дает следующее уравнение связи между $R$ и $t$:

$$\frac{t}{R_0}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p_0}{\rho}} = \int_z^1 \sqrt{\frac{\frac{1}{3}z^3}{\int_z^1 \varphi(z) z^2 \, dz}}\, dz, \qquad (6.18)$$

где $z = \frac{R}{R_0}$ — относительный радиус сферы.

Положим далее, что функция $\varphi(z)$ может быть представлена степенной зависимостью

$$\varphi(z) = z^n. \qquad (6.19)$$

При $n = 0$ вновь возвращаемся к задаче Рэлея. Положительным значениям $n$ физически соответствуют случаи, когда в процессе схлопывания полости перепад давления уменьшается (давление внутри полости растет). Отрицательным значениям $n$ соответствуют условия, когда перепад давлений растет по мере схлопывания (давление внутри полости падает). При условии (6.19) соотношение (6.18) дает:

$$\frac{t}{R_0}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p_0}{\rho}} = \left(\frac{n+3}{3}\right)^{1/2} \int_z^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{\sqrt{(1-z^{n+3})}}. \tag{6.20}$$

Полное время завершения процесса $t_*(n)$ определяется после подстановки в качестве нижнего предела интегрирования величины $z = 0$. Получающийся при этом интеграл

$$\int_0^1 \frac{z^{3/2}\,dz}{\sqrt{(1-z^{n+3})}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2n+6}\right)}{(n+3)\,\Gamma\left(\frac{n+8}{2n+6}\right)}. \tag{6.21}$$

Следовательно, время схлопывания $t_*(n)$ при некотором значении $n$ в долях от времени $t_*(0)$ в задаче Рэлея (6.14) является функцией лишь показателя степени $n$. В табл. 6.2 приведены результаты расчетов.

Можно видеть, что время завершения процесса весьма слабо зависит от показателя степени $n$ в функции (6.19). Этот результат представляет значительный интерес. Он означает, что основным или определяющим является начальный перепад давлений $\Delta p_0$, тогда как детали изменения давления в процессе схлопывания малосущественны. Таким образом, различные «сопутствующие» процессы (конденсация, теплообмен на границе, растворение остаточного газа и т.п.) относительно слабо влияют на общие закономерности схлопывания полости в процессах кавитации.

*Таблица 6.2.* **Зависимость относительного времени схлопывания каверны от закона изменения давления**

| $n$ | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 | −2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{t_*(n)}{t_*(0)}$ | 1,13 | 1,085 | 1,05 | 1 | 0,95 | 0,91 |

Численные исследования процесса схлопывания сферической полости показали также оправданность допущения о пренебрежимом влиянии вязкости. Согласно [58] только для таких высоковязких жидкостей, как смазочные масла, влияние вязкости становится ощутимым на заключительных этапах схлопывания (при $R/R_0 < 1 \cdot 10^{-3}$). Совершенно ничтожным оказывается влияние поверхностного натяжения, хотя при $R \to 0$ лапласовский скачок давлений стремится к бесконечности. Дело в том, что экстремум давления при схлопывании растет пропорционально $R^{-3}$, т.е. динамические эффекты при схлопывании намного сильнее статических.

Более сильным оказывается допущение о несжимаемости жидкости. Согласно (6.11) при $R \to 0$ скорость границы пузыря стремится к бесконечности. Когда эта скорость становится соизмеримой со скоростью звука в жидкости (для воды это примерно 1500 м/с), уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, использованное при выводе формулы (6.1), становится неточным. Анализ процесса схлопывания с учетом сжимаемости жидкости показывает, что при изменении $z$ от 1,0 до ~ 0,01 сохраняются закономерности, следующие из решения Рэлея, т.е. справедливы уравнения (6.12), (6.16), (6.17). При дальнейшем схлопывании сжимаемость жидкости несколько сглаживает пики экстремального давления. Однако, как следует из табл. 6.1, при $z = 0{,}01$ экстремальные перепады давления уже достигают гигантских значений.

## 6.3. ЗАКОНОМЕРНОСТИ РОСТА ПАРОВОГО ПУЗЫРЯ В ОБЪЕМЕ ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

### 6.3.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Если в перегретой (относительно температуры насыщения $T_s$) жидкости возникает паровой пузырек, радиус которого $R$ превосходит так называемый критический радиус $R_*$, то такой пузырек начинает расти в объеме за счет испарения жидкости внутрь пузырька. Критический (равновесный) радиус парового пузырька отвечает состоянию (неустойчивового) равновесия пузырька с окружающей перегретой жидкостью: температура пара $T''$ равна температуре жид-

кости $T_\infty$, давление в паре $p'' = p_s(T_\infty)$ и отличается от давления в жидкости на величину лапласовского скачка:

$$\Delta p = p'' - p_\infty = 2\sigma / R_*,$$

где $\sigma$ — поверхностное натяжение.

При малых перегревах жидкости $\vartheta_\infty = T_\infty - T_s(p_\infty)$ перепад давлений вдоль кривой насыщения выражается через перепад температур $\vartheta_\infty$ с помощью формулы Клапейрона—Клаузиуса, так что критический радиус пузырька

$$R_* = \frac{2\sigma T_s}{h_{LG}\rho''\vartheta_\infty}, \tag{6.22}$$

где $h_{LG}$ — теплота испарения.

Скорость увеличения объема пузырька при $R >> R_*$ в общем случае лимитируется сопротивлением расталкиваемой жидкости (динамические эффекты) и интенсивностью испарения жидкости на межфазной поверхности (энергетические эффекты). В свою очередь динамические эффекты обусловлены инерцией жидкости и ее вязкостью, а энергетические — условиями подвода тепла к межфазной поверхности и кинетикой процесса испарения. Все перечисленные эффекты действуют при росте парового пузыря одновременно, однако в практически важных задачах лишь некоторые или даже один из них могут стать преобладающими. Поэтому удобно рассмотреть четыре предельные схемы роста парового пузырька, каждая из которых соответствует лишь одному из упомянутых физических эффектов:

1) динамическая инерционная схема;

2) динамическая вязкая схема;

3) энергетическая тепловая схема;

4) энергетическая молекулярно-кинетическая схема.

Эта классификация впервые была предложена Д.А. Лабунцовым [18, с. 43]. Реальная скорость роста парового пузырька всегда будет меньше (или в пределе равна) наименьшей из величин, определяемых предельными схемами, что делает введенную классификацию практически весьма полезной.

Динамическая вязкая схема отвечает случаю, когда перепад давлений пара в пузырьке $p'' = p_s(T_\infty)$ и жидкости $p_\infty$ в любой момент

времени уравновешивается нормальной компонентой тензора вязких напряжений в жидкости на границе пузырька:

$$p'' - p_\infty = -2\mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=R} = 4\mu \dot{R}/R,$$

что следует из формулы (6.1). Эта предельная схема могла бы определять скорость роста парового пузырька в очень вязкой жидкости и при малых значениях радиуса пузырька. Оценки показывают, что в практических задачах эффекты вязкости играют пренебрежимо малую роль в процессе роста пузыря. Об этом косвенно свидетельствуют и упомянутые в § 6.2 результаты численного исследования схлопывания кавитационной полости.

Молекулярно-кинетическая схема роста может стать определяющей только при крайне низких коэффициентах испарения — конденсации $\beta$ (см. п. 1.9.4), тогда как при типичных для чистых жидкостей значениях $\beta \approx 1$ роль кинетических эффектов в процессе роста пузырька незначительна.

Практически важными являются динамическая инерционная и энергетическая тепловая предельные схемы роста парового пузырька, которые и рассматриваются ниже.

### 6.3.2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ИНЕРЦИОННАЯ СХЕМА РОСТА

Эта схема предполагает, что подвод тепла к границе раздела фаз ничем не ограничен и внутри пузырька поддерживается постоянное давление $p'' = p_s(T_\infty)$, где $p_s(T_\infty)$ — давление насыщения при температуре жидкости $T_\infty$ вдали от пузырька (рис. 6.6, *а*). При этом температура $T_\infty$ поддерживается всюду постоянной — как в жидкости, так и в паровом пузырьке. Таким образом, в соответствии с динамической инерционной схемой рост пузырька обусловлен постоянным перепадом давлений $\Delta p = p'' - p_\infty$, а закон роста может быть найден с помощью уравнения Рэлея. Однако в отличие от анализа, содержащегося в предыдущих параграфах, здесь необходимо учитывать проницаемость границы.

В соответствии с универсальным условием совместности для потока массы (см. п. 1.7.6):

$$-\rho'' \dot{R} = \rho'(u_R - \dot{R}) = j_R, \qquad (6.23)$$

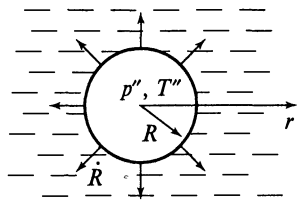
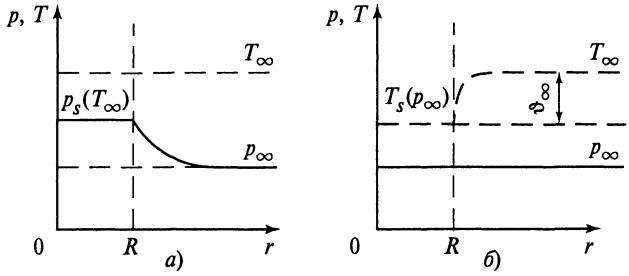



**Рис. 6.6. Предельные схемы роста паровых пузырей в перегретой жидкости:**

*а* — динамическая инерционная; *б* — тепловая энергетическая




где $\dot{R} = \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ — скорость границы пузыря; $\rho'$, $\rho''$ — плотности жидкости и пара; $u_R$ — скорость жидкости на границе пузыря (в силу постоянства давления внутри пузыря скорость пара $u_R'' = 0$).

Отсюда следует, что скорость жидкости на границе пузыря следующим образом связана со скоростью границы:

$$u_R = \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \dot{R}.$$

Скорость радиального движения жидкости на любом расстоянии от центра сферы определяется из уравнения неразрывности (см. § 6.1):

$$u(r) = u_R \frac{R^2}{r^2} = \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \dot{R} \frac{R^2}{r^2}, \qquad (6.1а)$$

что отличается от соотношения (6.1) для непроницаемой поверхности множителем

$$\frac{\rho' - \rho''}{\rho'}.$$

В практически важных случаях:

$$\rho' >> \rho'' \quad \text{и} \quad \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \approx 1.$$

Тогда для инерционной схемы роста будут справедливы все соотношения, приводящие к уравнению Рэлея в форме (6.9), причем перепад давлений

$$p_R - p_\infty = p'' - p_\infty = \Delta p = \text{const}.$$

Поскольку критический радиус пузыря $R_*$ очень мал (в типичных условиях порядка $10^{-6}$ м), то можно принять, что пузырь растет из точки, т.е. начальный объем его равен нулю. Тогда, интегрируя выражение (6.9) от нуля до текущего значения объема пузыря, имеем

$$E = \Delta p V,$$

откуда с учетом (6.6)

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\rho'}}. \tag{6.24}$$

Если не пренебрегать различием скорости границы пузыря и скорости жидкости у границы, то скорость роста пузыря согласно инерционной динамической схеме выражается формулой

$$\dot{R} = \frac{\rho'}{\rho' - \rho''}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\Delta p}{\rho'}}. \tag{6.24а}$$

Таким образом, при поддержании постоянного перепада давлений обеспечивается постоянная скорость роста пузыря, радиус его растет пропорционально времени: $R = \dot{R}t$.

Используемое в инерционной динамической схеме условие однородности температуры во всей рассматриваемой области, включая паровой пузырек, означает фактически, что жидкость характеризуется бесконечно большой теплопроводностью. Ясно, что в реальных условиях это условие не выполняется. Численные эксперименты показывают, однако, что очень короткий (менее $10^{-3}$ с) период роста пузырька приближенно описывается законом (6.24). Для жидких металлов этот отрезок времени, очевидно, должен быть больше.

### 6.3.3. ТЕПЛОВАЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СХЕМА РОСТА

Тепловая энергетическая схема роста (рис. 6.6, *б*) основана на предположении, что скорость роста пузырька полностью определяется интенсивностью подвода тепла из перегретой жидкости к гра-

нице пузыря. Теоретический анализ строится на следующих упрощающих предпосылках:

1) давление пара в пузырьке и во всех точках объема жидкости одинаково и равно $p_\infty$;

2) отсутствует движение центра пузырька относительно массива жидкости.

Первое предположение означает, что не учитывается поверхностное натяжение и силы инерции в жидкости. Оно оправдано, если радиус пузырька $R$ существенно больше критического радиуса зародыша $R_*$, а скорость и ускорение радиального движения слоев жидкости на поверхности умеренные. Температура пара в пузырьке равна температуре насыщения $T_s(p_\infty)$ при давлении системы. Ту же температуру имеет жидкость на границе пузырька. Поток тепловой энергии к границе пузырька, обусловленный температурным напором $\vartheta_\infty = T_\infty - T_s$, определяет интенсивность испарения жидкости внутрь пузырька. Ввиду постоянной плотности пара в пузырьке движение пара в нем отсутствует, а интенсивность испарения $j_R$, как и в динамической схеме роста, оказывается в соответствии с формулой (6.23) пропорциональной скорости роста $\dot{R}$.

Точное решение рассматриваемой задачи было впервые получено Скривеном [67]. Однако, к сожалению, в этой работе были допущены погрешности при формулировке условия энергетического баланса на границе раздела фаз*.

В связи с тем что рассматриваемая задача имеет фундаментальный характер и позволяет вскрыть основные закономерности процессов объемного вскипания жидкости, теория вопроса излагается ниже в достаточно полном объеме.

Схема процесса и обозначения величин показаны на рис. 6.6, *б*, где также представлена качественная картина поля температур в жидкости около поверхности растущего пузырька. Содержание проблемы сводится к теоретическому расчету этого поля температур. При известном поле температур можно найти плотность теплового потока на границе раздела фаз и, следовательно, скорость роста пузырька.

---

* Вследствие этого решение работы [67] содержит лишний параметр $(c' - c'')/c'$ ($c'$ и $c''$ — теплоемкости жидкости и пара), который, в действительности, не должен был входить в решение.

Поле температур определяется уравнением энергии (1.5е), которое для условий сферически симметричной задачи при допущении о постоянстве физических свойств жидкости и отсутствии вязкой диссипации принимает вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{a}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right), \tag{6.25}$$

где $a$ — коэффициент температуропроводности жидкости; $\vartheta = T - T_s$; $u$ — радиальная скорость жидкости.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &\text{при } r = R(t) \quad \vartheta = 0, \\ &\text{при } r \to \infty \quad \vartheta \to \vartheta_\infty. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Скорость радиального движения жидкости, как и при рассмотрении инерционной схемы, определяется уравнением (6.1а).

Ввиду того что в рассматриваемой задаче отсутствуют масштабы для $R(t)$, можно предполагать, что поле температур будет функцией следующей автомодельной переменной:

$$\xi = \frac{r}{R(t)}. \tag{*}$$

Иначе говоря, безразмерная температура $\Theta = \vartheta/\vartheta_\infty$ будет зависеть лишь от $\xi$:

$$\Theta = \Theta(\xi), \tag{**}$$

т.е. поле температур $\Theta$ на протяжении всего процесса роста пузырька, представленное в зависимости от $\xi = r/R(t)$, будет описываться универсальной функцией (**), вид которой можно найти после решения уравнения (6.25).

При выполнении предположений (**) и (*):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{d\Theta}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial R}\frac{dR}{dt} = -\frac{d\Theta}{d\xi}\frac{\xi}{R}\dot{R};$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{d\Theta}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{d\Theta}{d\xi}\frac{1}{R}.$$

Поэтому дифференциальное уравнение (6.25) с учетом выражения для радиальной скорости принимает вид

$$\frac{R\dot{R}}{a}\left(\frac{\rho'-\rho''}{\rho'}\frac{1}{\xi^2}-\xi\right)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right). \tag{6.27}$$

В силу предположения (**) величина $\frac{R\dot{R}}{a}$, входящая в это уравнение, должна рассматриваться как постоянная. Обозначим ее для сокращения дальнейших выкладок через

$$\frac{R\dot{R}}{a}=\frac{1}{2}m^2.$$

Смысл такого обозначения определяется следующим:

$$\frac{R\dot{R}}{a}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(R^2)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{a}=\frac{1}{2}m^2.$$

Интегрируя последнее равенство, находим (после извлечения корня)

$$\frac{R}{\sqrt{at}}=m,$$

где $m$ — так называемый «модуль» роста пузырька (величина безразмерная). Дальнейший анализ связан в конечном итоге с нахождением этой величины.

Для сокращения записей обозначим также $\frac{\rho'-\rho''}{\rho'}=\gamma$, тогда уравнение (6.27) принимает вид

$$\frac{m^2}{2}\left(\frac{\gamma}{\xi^2}-\xi\right)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right). \tag{6.27а}$$

Граничные условия

$$\begin{aligned}&\text{при } \xi=1 \quad \Theta=0,\\ &\text{при } \xi\to\infty \quad \Theta\to 1.\end{aligned} \tag{6.26а}$$

Уравнение энергетического баланса на границе раздела фаз (см. п. 1.7.5) имеет вид

$$h_{LG} j_R = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{r=R} = q'_R, \tag{6.28}$$

где $\lambda$ — теплопроводность жидкости; $h_{LG}$ — теплота испарения.

С учетом зависимости (6.23) получаем

$$h_{LG} \rho'' \dot{R} = \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{r=R},$$

или, вводя безразмерные величины $\Theta$, $\xi$:

$$\frac{m^2}{2} = \mathrm{Ja} \left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=1}, \tag{6.29}$$

где $\mathrm{Ja} = \dfrac{c_p \rho' \vartheta_\infty}{h_{LG} \rho''}$ — безразмерный параметр, именуемый числом Якоба, представляет собой отношение избыточной энтальпии перегрева единицы объема жидкости к теплоте фазового перехода, приходящейся на единицу объема пара. По условиям задачи это — известная величина. Соотношение (6.29) определяет градиент температуры на поверхности пузырька.

Приступаем теперь к интегрированию уравнения (6.27а). Можно рассматривать $\xi^2 \mathrm{d}\Theta / \mathrm{d}\xi$ как новую переменную. Тогда первое интегрирование указанного уравнения дает

$$\xi^2 \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} = A \exp\left[-\frac{m^2}{2}\left(\frac{\gamma}{\xi} + \frac{1}{2}\xi^2\right)\right].$$

Для определения постоянной интегрирования $A$ используем условие (6.29). В результате получаем

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{m^2}{2\mathrm{Ja}} \frac{1}{\xi^2} \exp\left\{-\frac{m^2}{2}\left[\gamma \frac{1-\xi}{\xi} + \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)\right]\right\}.$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от $\xi = 1$ до $\xi$ текущего, находим выражение для поля температур

$$\Theta = \frac{m^2}{2\mathrm{Ja}} \int_1^\xi \frac{1}{\xi^2} \exp\left\{-\frac{m^2}{2}\left[\gamma \frac{1-\xi}{\xi} + \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)\right]\right\} \mathrm{d}\xi. \tag{6.30}$$

Соотношение (6.30) удовлетворяет условию $\Theta = 0$ при $\xi = 1$. Второе из граничных условий (6.26а) приводит к уравнению

$$\mathrm{Ja} = \frac{m^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{\xi^2} \exp\left\{ -\frac{m^2}{2} \left[ \gamma \frac{1-\xi}{\xi} + \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \right] \right\} \mathrm{d}\xi, \qquad (6.31)$$

которое представляет итоговое соотношение анализа. Зависимость (6.31) определяет в неявной форме «модуль» роста пузырька:

$$m = f(\mathrm{Ja}, \gamma). \qquad (6.32)$$

Определенный интеграл, входящий в уравнение (6.31), не выражается в общем случае через элементарные функции и может быть найден лишь численно. Такое интегрирование было проведено Скривеном, и искомая зависимость (6.32) была представлена в [67] в табличной форме (табл. 6.3). Фактически эта таблица отражает зависимость модуля роста $m$ только от числа Якоба, так как параметр $\gamma$ в [67] принимался равным единице. При давлениях, далеких от критического, это допущение вполне оправдано (обычно уже при $p < 0{,}5 p_{\text{кр}}$ $\rho''/\rho' < 0{,}1$). В [21] показано, что при условии: $c_p \vartheta_\infty / h_{LG} < 0{,}1$ (или, что то же, $\mathrm{Ja} < 0{,}1 \rho'/\rho''$) расхождение значений $m$ при Ja = idem для различных $\gamma$ не превышает 2—3 %.

На основе уравнения (6.31) можно также показать [21], что при

$$c_p \vartheta_\infty / h_{LG} = 1, \qquad (6.33)$$

*Таблица 6.3.* **Зависимость $m = f(\mathrm{Ja})$ по [67]**

| $m/2$ | Ja | $m/2$ | Ja | $m/2$ | Ja |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}965 \cdot 10^{-4}$ | $8 \cdot 10^{-1}$ | $5{,}152 \cdot 10^{-1}$ | 60 | 60,96 |
| $2 \cdot 10^{-2}$ | $7{,}726 \cdot 10^{-4}$ | 1 | $6{,}977 \cdot 10^{-1}$ | 80 | 81,42 |
| $4 \cdot 10^{-2}$ | $2{,}987 \cdot 10^{-3}$ | 2 | 1,668 | 100 | 101,9 |
| $6 \cdot 10^{-2}$ | $6{,}504 \cdot 10^{-3}$ | 4 | 3,683 | 200 | 204,2 |
| $8 \cdot 10^{-2}$ | $1{,}120 \cdot 10^{-2}$ | 6 | 5,719 | 300 | 306,6 |
| $1 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}697 \cdot 10^{-2}$ | 8 | 7,760 | 400 | 408,9 |
| $2 \cdot 10^{-1}$ | $5{,}881 \cdot 10^{-2}$ | 10 | 9,803 | 600 | 613,6 |
| $4 \cdot 10^{-1}$ | $1{,}850 \cdot 10^{-1}$ | 20 | 20,03 | 800 | 818,2 |
| $6 \cdot 10^{-1}$ | $3{,}42 \cdot 10^{-1}$ | 40 | 40,49 | — | — |

т.е. при $\mathrm{Ja} = \rho'/\rho''$ и при сохранении исходных допущений анализа достигается бесконечно высокая скорость роста, $\dot{R} \to \infty$ (т.е. $m^2/2 \to \infty$). Действительно, когда избыточная энтальпия перегрева жидкости $c_p \vartheta_\infty$ становится равной теплоте испарения, каждый элементарный объем жидкости у границы раздела беспрепятственно превращается в пар, причем для этого не требуется подвода тепла извне, так что какие-либо ограничения для скорости фазового превращения исчезают.

В действительности, конечно, скорость роста пузырька при условии (6.33) не может стать равной бесконечности; она лимитируется другими, не учтенными в анализе факторами. Прежде всего при больших скоростях роста существенны инерционные силы, возникающие в жидкости и приводящие к нарушению исходного условия анализа о постоянстве давления в жидкости и в пузырьке. Следует также заметить, что сам процесс испарения в соответствии с присущими ему молекулярно-кинетическими закономерностями не может иметь бесконечно большую интенсивность. Наконец, надо иметь в виду, что условие (6.33) соответствует таким перегревам жидкости $\vartheta^*_\infty$, которые, как правило, превышают те предельные перегревы жидкости, которые совместимы с ее термодинамической устойчивостью, так что жидкость еще до достижения этих перегревов будет самопроизвольно распадаться, превращаясь в пар. На практике обычно процессы объемного вскипания происходят при существенно более низких перегревах, так что в действительности $c_p \vartheta_\infty / h_{LG} << 1$. Решение Скривена [67], представленное в табл. 6.3 и удовлетворяющее этому сильному неравенству, как будет показано ниже, даже перекрывает диапазон применимости энергетической тепловой схемы роста пузырька.

Анализ табличных данных и решения (6.31) показывает, что это решение имеет две асимптоты:

при $\mathrm{Ja} << 1$

$$m = \sqrt{2\mathrm{Ja}}; \tag{6.34}$$

при $\mathrm{Ja} >> 1$

$$m = 2\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\mathrm{Ja}. \tag{6.35}$$

Эти предельные зависимости вытекают из общего решения (6.31) при $\gamma = 1$.

Асимптота (6.34) получается просто из энергетического баланса (6.28), если в нем тепловой поток к границе пузыря ($q'_R$) выразить в соответствии с формулой стационарной теплопроводности к поверхности сферы с температурой $T_s$, помещенной в неограниченную среду с температурой $T_\infty$. Следовательно, при Ja << 1 скорость перемещения границы пузыря столь мала, что в каждый момент времени температурное поле в окружающей жидкости успевает стать таким же, каким оно устанавливается в стационарных условиях.

Соотношение (6.35) обычно записывается в форме

$$R = 2\sqrt{3/\pi}\,\mathrm{Ja}\sqrt{at}, \qquad (6.35а)$$

известной как формула Плессета—Цвика. Она была получена этими авторами в 1954 г., т.е. раньше, чем решение Скривена, однако без точного указания области правомерности по числам Ja. Условие Ja >> 1 означает, что скорость роста достаточно высока и температурные возмущения в окружающей жидкости сосредоточены в весьма тонком сферическом слое на поверхности растущего пузырька. На этом допущении основаны также известные приближенные решения задачи о скорости роста парового пузырька в перегретой жидкости, дающие соотношения той же структуры, что (6.35а), но с несколько отличающимися числовыми коэффициентами.

Табличные данные [67] при $\gamma = 1$ с погрешностью менее 2 % во всей области изменения чисел Ja (от 0 до $\infty$) описываются следующей интерполяционной формулой:

$$R = 2\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}\mathrm{Ja}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6\mathrm{Ja}}\right)^{2/3}+\frac{\pi}{6\mathrm{Ja}}\right]^{1/2}\sqrt{at}. \qquad (6.36)$$

Это соотношение может рассматриваться как итоговое решение задачи, правомерное при условии $c_p\vartheta_\infty / h_{LG} < 0{,}1$ и выполнении исходных допущений анализа. Оно дает асимптоты (6.34) и (6.35) и предсказывает увеличение радиуса пузырька пропорционально $\sqrt{t}$.

Существующие экспериментальные данные по скоростям роста пузырьков в объеме перегретой жидкости (при условии выполнения предположений, принятых в анализе Скривена) хорошо согласуются с теоретическим решением. На рис. 6.7 представлены опытные дан-

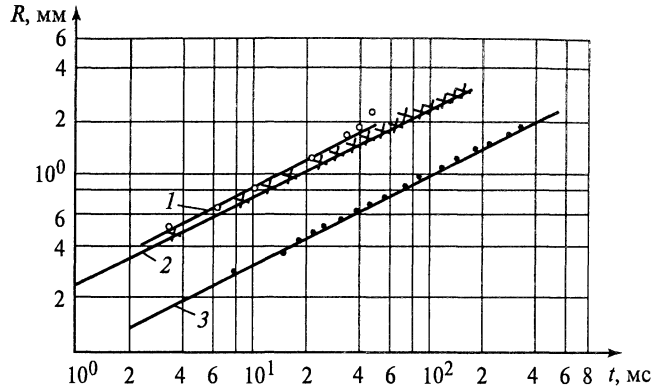



**Рис. 6.7. Кривые роста паровых пузырьков в объеме перегретой жидкости:**

*1—3* — расчет по формуле (6.36) соответственно для воды (Ja = 10,95), воды (Ja = 8,78) и этанола (Ja = 5,4); ○, ×, ● — опытные данные [54]

ные работы [54], где изучался рост паровых пузырьков в воде, этаноле и изопропаноле. Перегрев жидкости создавался резким сбросом давления. Как следует из рис. 6.7, превосходное согласие опытных результатов с расчетной зависимостью Скривена наблюдалось в тех экспериментах, где пузырьки росли в условиях невесомости (падающая система), т.е. в отсутствие их перемещения в массиве жидкости. Опытные данные о росте пузырьков в условиях нормальной гравитации хорошо согласуются с зависимостью (6.36) до времен роста 30—40 мс, после чего их всплытие в перегретой жидкости обусловливает, во-первых, заметное отклонение от сферической формы, а, во-вторых, увеличение скорости роста. Наблюдения за ростом пузырьков в невесомости [54] позволили получить уникальные результаты в том отношении, что удалось зафиксировать времена роста до 0,4—0,5 с, тогда, как обычно, и при объемном вскипании, и при кипении на поверхности время роста пузырьков, доступное наблюдению, не превышает 0,1—0,15 с.

### 6.3.4. РОСТ ПУЗЫРЬКА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ЯКОБА

При больших перегревах жидкости, т.е. при больших числах Ja, скорость роста пузырька возрастает настолько, что давление жидкости у его границы (и практически равное ему давление пара в пу-

зырьке) становится более высоким, чем $p_\infty$. Это означает, что температура пара $T'' > T_s(p_\infty)$, а действительный перепад температур $\Delta T_1 = T_\infty - T''$ оказывается меньше величины $\vartheta_\infty$, используемой в расчетах согласно энергетической схеме роста. Уже при Ja > 100 расчет по уравнению (6.36) несколько завышает скорость роста пузырька в сравнении с более строгими решениями и опытными наблюдениями, а при Ja ≥ 200 учет инерционных эффектов в анализе роста паровых пузырьков становится необходимым. Например, в воде при $p_\infty$ = 20 кПа и перегреве $\vartheta_\infty$ = 15 K (Ja = 200) расчет по (6.36) дает $R$ = 4,9 мм при $t$ = 1 мс, что почти в полтора раза превышает результат расчета по соотношению (6.24) инерционной схемы ($R$ = 3,5 мм при $t$ = 1 мс). Очевидно, погрешность расчета по энергетической схеме в этом случае недопустимо велика, так как реальная скорость роста пузырька никогда не может превосходить минимальную из рассчитанных по каждой из предельных схем роста.

На рис. 6.8 показаны значения температур и давлений в перегретой жидкости и паре в некоторый произвольный момент роста пузырька в условиях одновременного влияния энергетических и инерционных эффектов. Вдали от пузырька («на бесконечности») жидкость существенно перегрета по отношению к температуре насыщения при актуальном давлении жидкости $p_\infty$. Однако в условиях больших чисел Якоба этот перегрев $\vartheta_\infty = \Delta T_s = T_\infty - T_s(p_\infty)$, используемый как параметр в энергетической схеме роста, выступает лишь как предельная расчетная величина, не достигаемая при экспериментальном исследовании процесса. Действительный перегрев $\Delta T_1 = T_\infty - T''$, который следует теперь использовать в граничных условиях для уравнения энергии (6.25), всегда меньше $\Delta T_s$. Температура $T''$ и давление $p''$ в пузырьке связаны как параметры на линии насыщения (кривая *1* на рис. 6.8). Эти параметры, в отличие от тех, что принимаются в предельных схемах роста, непрерывно изменяются (уменьшаются) по мере увеличения объема пузырька. Давление пара $p''$ всегда меньше, чем его предельное расчетное значение $p_s(T_\infty)$, но на начальной стадии роста пузырька (практически при $t$ < 1 мс для условий Ja > 500) это различие еще не слишком велико, тогда как на этой стадии $\Delta T_1 << \Delta T_s$. Это означает, что ранняя стадия роста пузырька управляется главным образом динамически-

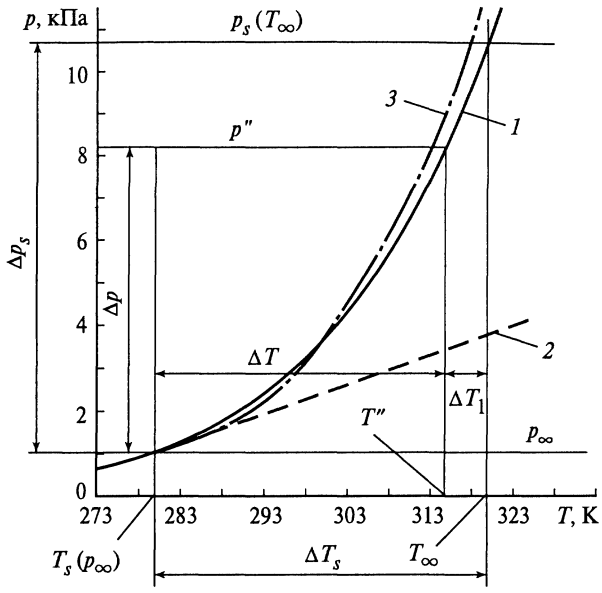



**Рис. 6.8. Параметры перегретой жидкости и пара в растущем пузырьке:**

*1* — участок кривой насыщения для воды; *2*, *3* — ее аппроксимация соответственно линейной и квадратичной зависимостями

ми эффектами. При этом действительная скорость роста, конечно, ниже, чем рассчитанная по (6.24), но отличие еще не приобретает качественного характера (см. рис. 6.9). В то же время расчет по соотношению энергетической схемы (6.36) может завышать скорость роста в десятки раз.

Теоретический анализ задачи о росте парового пузыря, учитывающий инерционные динамические эффекты (при сохранении вполне допустимых для технических задач допущений о пренебрежимо малой роли вязкости жидкости и эффектов молекулярной кинетики испарения), должен включать в себя уравнение (6.1а) для поля скорости в жидкости, уравнение Рэлея (6.7), определяющее давление пара в пузырьке $p''$ в процессе его роста, и уравнение энергии в окружающей пузырек жидкости (6.25). При этом в последнем из перечисленных уравнений температура $\vartheta = T' - T''$, т.е. отсчитывается от температуры пара, изменяющейся в процессе роста пузырька.

Сама эта температура определяется как температура насыщения при текущем давлении в пузырьке, т.е. $T'' = T_s(p'')$. Поскольку в ус-

ловие совместности (энергетического баланса) на границе пузырька (6.28) фактически входит плотность пара, то математическое описание должно включать уравнение состояния пара. При численном решении рассматриваемой задачи зависимость температуры и плотности насыщенного пара от давления задается соответствующими таблицами. Каждое такое решение представляет собой единичный численный эксперимент, в котором для заданных значений $T_\infty$, $p_\infty$ для данной жидкости получается зависимость $R(t)$ — кривая роста пузырька. Закономерности роста паровых пузырьков обычно не являются непосредственной целью анализа в прикладных задачах, поэтому вполне оправдано построение приближенных аналитических уравнений, описывающих рост пузырька в рассматриваемых условиях. При этом зависимости температуры и плотности пара от давления должны естественно задаваться аналитически.

Если для плотности пара при больших Ja, т.е. при низких давлениях, вполне уместно использовать уравнение состояния идеального газа, то обычно используемая линейная зависимость перепада давлений вдоль кривой насыщения от разности температур при больших $\Delta T$ дает недопустимо большую погрешность. На рис. 6.8 изображен участок кривой насыщения воды при низких давлениях ($p_s < 14$ кПа). Касательная *2* к кривой насыщения в точке, отвечающей $p_s = 1$ кПа, построена в соответствии с формулой Клапейрона—Клаузиуса. Ясно, что при больших $\Delta T$ перепады давления, рассчитанные по этой линейной зависимости, значительно отличаются от действительных. Например, при $\Delta T = 40$ К расчетное значение $p''$ почти втрое ниже действительного давления насыщенного пара. В [44] кривая насыщения для области низких давлений аппроксимировалась квадратичной зависимостью

$$\Delta p = 1{,}4 \frac{h_{LG}^2 \rho'' \Delta T^2}{R_i T_s^3},$$

где $R_i$ — газовая постоянная.

Эта зависимость вполне удовлетворительно воспроизводит ход реальных кривых насыщения различных жидкостей. Как видно из рис. 6.8, кривая *3* для воды, построенная в соответствии с этой формулой, согласуется с действительной кривой насыщения с погрешностью менее 10 % (по $\Delta p$).

С использованием ряда упрощений в математическом описании задачи в [44] для предельного случая очень больших чисел Якоба (Ja > 500) было получено приближенное аналитическое решение:

$$R = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} G \left(\frac{\lambda c_p}{\rho''}\right)^{1/4} \frac{R_i^{3/4} T_s^{5/4}}{h_{LG}} t^{3/4}, \qquad (6.37)$$

где $G = \left(\frac{\Delta T_1 (1/\Delta T + 1/T_s)}{(1 + p_\infty/\Delta p)\sqrt{1{,}4}}\right)^{1/2}$;

$$\Delta T = \Delta T_s - \Delta T_1.$$

Прямые расчеты для многих режимов роста паровых пузырей в различных жидкостях при Ja > 500 показывают, что безразмерный параметр $G$ слабо изменяется за время роста. Это означает, что формула (6.37) предсказывает промежуточный закон изменения радиуса пузыря во времени $R \sim t^{3/4}$ в сравнении с $R \sim t$ для инерционной схемы роста и $R \sim t^{1/2}$ для энергетической. «Предельный» характер соотношения (6.37) проявляется в этом случае в отсутствии влияния перегрева жидкости $\Delta T_s$ на скорость роста, что достигается лишь при весьма больших числах Якоба.

Сопоставление расчетов по (6.37) при $G = 1$ с опытными исследованиями [72] роста паровых пузырьков в объеме перегретого хладона R113 (перегрев создавался путем сброса давления) показало, что хорошее соответствие опытных и расчетных кривых роста пузырьков наблюдается уже при Ja > 300. На рис. 6.9 точки *1* относятся к росту паровых пузырьков при рекордно высоком перегреве жидкости в объеме: $\vartheta_\infty$ = 59,4 К; Ja = 3195. Энергетическая схема роста для этих условий предсказывает фантастически высокую скорость роста: уже при $t$ = 1 мс согласно (6.36) $R$ = 44 мм. Формула (6.24) инерционной схемы намного лучше соответствует результатам этих измерений (кривая *5* на рис. 6.9), хотя во времени расхождение быстро нарастает, поскольку теплопроводность жидкости отнюдь не бесконечна. Точки *2* на рис. 6.9 отвечают существенно более высокому давлению ($p_\infty$ = 8,5 кПа) и почти на порядок меньшему числу Якоба (Ja = 430), чем точки *1*. Согласно энергетической схеме в этом случае при $t$ = 1 мс $R$ = 5,9 мм, т.е. по-прежнему расчетная скорость роста намного меньше опытной. Уравнение (6.37)

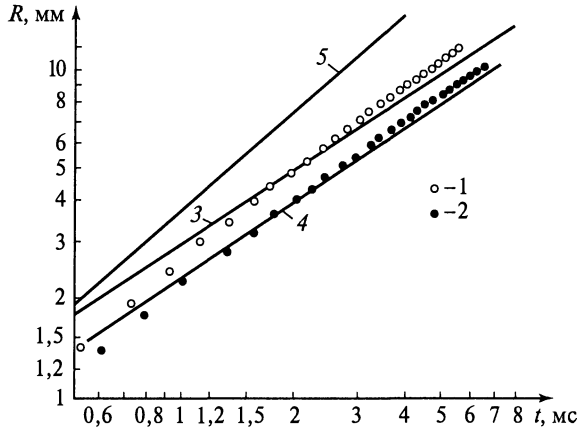



**Рис. 6.9. Рост паровых пузырьков в объеме перегретого хладона R113:**

*1*, *2* — экспериментальные точки [72] соответственно $p_\infty$ = 1,9 кПа, $\vartheta_\infty$ = 59,4 К (Ja = 3195) и $p_\infty$ = 8,5 кПа, $\vartheta_\infty$ = 34,1 К (Ja = 430); *3*, *4* — расчетные кривые по (6.37) соответственно для 1,9 и 8,5 кПа; *5* — расчетная кривая по (6.24) для $p_\infty$ = 1,9 кПа, $\vartheta_\infty$ = 59,4 К

при $G$ = 1 достаточно хорошо согласуется с опытными данными (кривые *3* и *4* на рис. 6.9) и верно отражает относительно слабую зависимость скорости роста пузырька от числа Якоба при Ja > 300.

## 6.4. РОСТ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАГРЕВА

### 6.4.1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПЫТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

При кипении жидкостей на твердой поверхности нагрева рост паровых пузырей происходит в условиях существенно неоднородного температурного поля, причем паровой объем имеет границу не только с жидкой фазой, но и с твердой стенкой. Поэтому теоретический анализ закономерностей роста паровых пузырьков при кипении связан с большими трудностями, которые на сегодняшний день не преодолены. Вместе с тем понимание механизма роста пузырьков и последующего их отрыва от твердой поверхности очень важно для создания теории кипения в целом. Это обусловливает значительный интерес к теоретическому и экспериментальному (с помощью скоростной киносъемки) исследованию динамики паровых пузырьков при кипении. Имеющиеся в настоящее время в распоряже-

нии исследователей опытные данные охватывают широкую область давлений (от 0,01 до 100 бар, т.е. от 1 кПа до 10 МПа) и весьма разнообразные жидкости (вода, спирты, углеводороды, хладоны, криогенные жидкости).

Анализ экспериментальных наблюдений позволяет сделать достаточно надежные качественные выводы и служит обоснованием теоретических моделей. При этом необходимо подчеркнуть, что все закономерности роста и отрыва паровых пузырьков проявляются лишь статистически. Кинематографические исследования показывают, что даже в одном эксперименте при фиксированных давлении над уровнем жидкости и средней температуре стенки $T_c$ скорости роста пузырьков могут отличаться вдвое от среднего значения. Это означает, что применительно к росту паровых пузырьков при кипении имеет смысл говорить лишь о приближенных моделях, отражающих влияние основных механизмов процесса и описывающих количественные взаимосвязи для некоторых «средних» условий.

Кинематографические исследования показывают, что существуют весьма сильные различия в поведении пузырьков при высоких и низких давлениях. В области высоких давлений пузырьки на поверхности растут относительно медленно, при этом их форма практически в течение всего периода роста близка к сферической (точнее, пузырек имеет вид усеченной сферы). Перед отрывом диаметр пузырька составляет несколько десятых долей миллиметра. Так, по данным [18], при давлениях 30—100 бар паровой пузырек за время порядка 0,2—0,3 с вырастает до своего предотрывного размера, равного 0,2—0,3 мм. Последовательные стадии роста парового пузырька при высоких давлениях схематически показаны на рис. 6.10, *а*.

При низких давлениях и больших перегревах стенки паровой пузырь растет очень быстро. Это обусловливает возникновение в окружающей жидкости неоднородного поля давлений, которое в свою очередь деформирует, сплющивает паровой пузырь, как бы «прижимая» его к поверхности нагрева. На рис. 6.10, *б* представлены последовательные стадии роста парового пузыря при кипении воды при давлении 0,02 бар (2 кПа) и числе Ja = 3450*. Этот рисунок воспроизводит очертание границы пузыря, как оно выглядело на кадрах кинопленки, полученной с помощью скоростной кино-

* В случае роста парового пузыря на твердой поверхности входящая в число Ja величина $\vartheta_\infty = \Delta T = T_c - T_s$, где $T_c$ — температура поверхности нагрева.

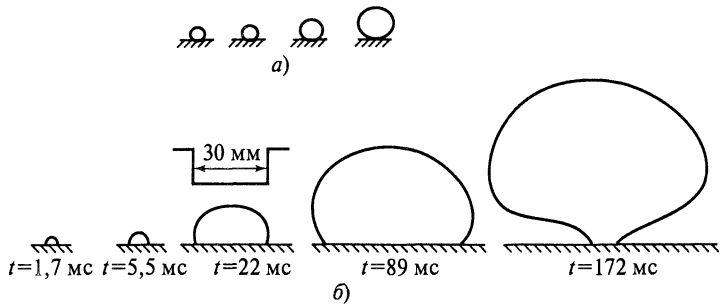



**Рис. 6.10. Рост парового пузырька при кипении на твердой поверхности:**

*а* — схема для высоких давлений; *б* — фрагменты кинограммы роста пузыря (кипение воды, $p$ = 2 кПа, Ja = 3450), на третьем кадре показана масштабная рамка

съемки. Из рисунка видно, что в начальный период роста форма пузыря почти в точности соответствует полусфере; в последующие моменты времени пузырь напоминает усеченную сферу, причем по мере приближения к моменту отрыва от сферы «отрезается» все меньшая и меньшая часть. При низких давлениях пузыри достигают перед отрывом прямо-таки огромных размеров (до 100—150 мм в диаметре).

Для механизма роста парового пузыря весьма важно то, что в центральной части его основания всегда существует область прямого контакта пара с твердой поверхностью («сухое пятно»). Это обусловлено тем, что центрами преобразования служат обычно впадины на обогреваемой поверхности, заполненные паром. Характерный размер таких впадин по порядку величины близок к равновесному радиусу парового зародыша $R_*$, определенному в соответствии с (6.22). В типичных условиях $R_*$ составляет единицы или (при высоких приведенных давлениях) десятые доли микрометра. Следовательно, за исключением очень короткого начального периода роста пузырька сухое пятно составляет лишь доли процента площади проекции пузырька на обогреваемую поверхность. Пространство между поверхностью пузырька и твердой стенкой заполнено тонким слоем жидкости — *микрослоем*. При феноменологическом подходе принимают, что толщина микрослоя растет от нулевого значения на линии контакта трех фаз (твердой, жидкой и парообразной) до некоторого конечного значения у внешней границы основания пузыря. Такое представление отражено на схеме рис. 6.11, *а*).

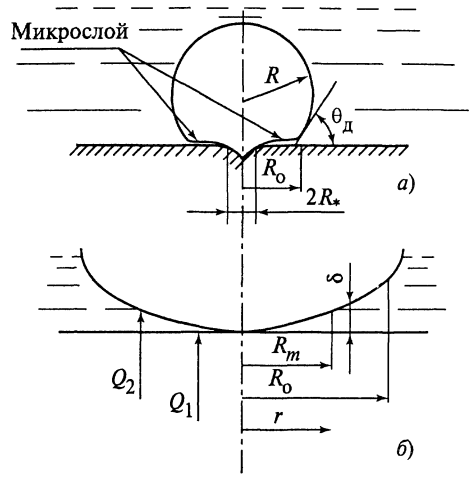



**Рис. 6.11. Схема растущего на твердой стенке парового пузырька (*а*) и расчетная модель подвода тепла к поверхности пузырька через микрослой от стенки и от перегретой жидкости (*б*)**

$R$ — радиус сферической части поверхности пузырька; $R_*$ — радиус «сухого пятна»; $R_m$ — условная внешняя граница теплопроводной части микрослоя; $R_0$ — радиус основания пузырька; $\delta$ — толщина жидкого микрослоя; $\theta_д$ — динамический краевой угол; $Q_1$ и $Q_2$ — теплопритоки к межфазной поверхности от твердой стенки и от перегретой жидкости соответственно

В действительности в окрестности линии контакта трех фаз («граничной линии») существует слой адсорбированных молекул — неиспаряемая часть мениска жидкой пленки толщиной порядка межмолекулярных расстояний в жидкости ($10^{-9}$ м). По мере утолщения слоя жидкости с удалением от граничной линии силы адсорбции, препятствующие испарению, ослабевают, начинается испарение с поверхности пленки. Так как радиус сухого пятна $R_*$ и протяженность в радиальном направлении адсорбированной пленки ничтожно мала в сравнении с радиусом основания пузырька $R_0$, при создании приближенной модели можно принять, что микрослой жидкости в основании пузыря образует коническую поверхность. Сечение микрослоя произвольной плоскостью, проходящей через ось симметрии пузырька, изображено на рис. 6.11, *б*. Пока микрослой тонок, тепло для испарения жидкости с его поверхности отбирается непосредственно от твердой стенки, так как запасы тепла

в перегретой жидкости, содержащейся в тонком микрослое, слишком малы. Этот вывод подтверждается опытными измерениями быстрого падения температуры обогреваемой поверхности в начальный момент роста пузырька (обычно в течение 1—3 мс). Такие измерения, проводившиеся при использовании в качестве поверхности нагрева тонких пластин с относительно низкой теплопроводностью, послужили основанием для гипотезы о существовании под растущим пузырьком испаряющегося микрослоя жидкости. В дальнейшем существование микрослоя под пузырьком, растущим на прозрачной поверхности нагрева, было подтверждено прямыми оптическими исследованиями (лазерная интерферометрия).

Измерения температуры в объеме жидкости показали, что перегретая жидкость покрывает ближайшую к обогреваемой твердой стенке часть сферической поверхности (купола) растущего пузыря. Эта перегретая жидкость, по-видимому, вытесняется пузырьком из температурного пограничного слоя на стенке, и ее избыточная энтальпия также влияет на рост парового пузырька при кипении.

### 6.4.2. ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ РОСТА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА НА ОБОГРЕВАЕМОЙ СТЕНКЕ

Изложенные опытные наблюдения позволяют использовать модель пузырька, представленную на рис. 6.11. Будем считать, что пузырек в процессе роста сохраняет форму усеченной сферы, причем очертания пузырька в любой момент времени геометрически подобны. Это означает, что все геометрические характеристики пузырька могут быть представлены как величины, пропорциональные радиусу эквивалентной по объему сферы:

$$R_э = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V},$$

где $V$ — объем пузырька.

Толщина жидкого микрослоя в основании пузырька предполагается пропорциональной расстоянию от оси симметрии, т.е.

$$\delta = k_1 r,$$

где $k_1$ — числовой множитель ($k_1 << 1$).

Обогреваемую твердую стенку будем считать изотермической, что вполне реалистично в случае высокой теплопроводности материала. Локальная плотность теплового потока от стенки выражается как

$$q_c = \frac{\lambda \Delta T}{\delta} = \frac{\lambda \Delta T}{k_1 r}.$$

Будем считать, что на участке $0 < r < R_m$ (см. рис. 6.11, *б*) избыточная энтальпия жидкости не влияет на интенсивность испарения с поверхности микрослоя; тогда поток тепла от обогреваемой стенки к межфазной поверхности

$$Q_1 = \int_0^{R_m} \frac{\lambda \Delta T}{k_1 r} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{k_1} \lambda \Delta T R_m. \qquad (6.38)$$

Имея в виду допущение о сохранении формы пузырька в процессе роста, можно записать $R_m = k_2 R_э$, а выражение (6.38) представить в виде

$$Q_1 = \beta_1 \lambda \Delta T R_э, \qquad (6.38а)$$

где $\beta_1$ — коэффициент, отражающий по существу «степень незнания» действительной формы микрослоя и растущего пузырька.

Когда микрослой становится «толстым», избыточная энтальпия перегретой жидкости также служит источником тепла для испарения жидкости на межфазной поверхности. В качестве условной границы «тонкого» и «толстого» участков микрослоя можно принять толщину пленки $\delta_m = \sqrt{at}$, где $t$ — время от начала роста пузыря; $a$ — температуропроводность. Для неметаллических жидкостей $\delta_m \approx 10^{-5}$ м. В реальном процессе, конечно, никакой фиксированной границы между «теплопроводной» (тонкой) и «теплоемкой» (толстой) частями микрослоя не существует, перераспределение источников тепла на испарение жидкости происходит постепенно. В используемой нами приближенной модели такая граница устанавливается соотношением $\delta_m = k_1 R_m$.

Выражение для теплового потока от перегретой жидкости к межфазной поверхности должно быть аналогично (по структуре) уравнению, следующему из асимптоты решения Скривена при Ja >> 1, т.е.

из формулы Плессета—Цвика (6.35а). Несложно убедиться, используя (6.28), что формуле (6.35а) отвечает плотность теплового потока

$$q'_R = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\lambda \Delta T}{\sqrt{at}}.$$

Тепловой поток от перегретой жидкости для пузырька, растущего на стенке, может быть представлен в виде

$$Q_2 = \frac{\gamma_1 \lambda \Delta T R_э^2}{\sqrt{at}}. \qquad (6.39)$$

Неизвестный заранее числовой множитель $\gamma_1$ отражает, во-первых, то, что перегретая жидкость покрывает лишь часть поверхности пузырька (точнее, поверхности $4\pi R_э^2$, эквивалентной по объему сферы), а, во-вторых, то, что перегрев жидкости в среднем меньше, чем перегрев стенки $\Delta T$, используемый в (6.39). Для пузырька в виде усеченной сферы (рис. 6.11, *а*) представляется обоснованным допущение о том, что перегретая жидкость покрывает часть поверхности пузырька, примерно равную его основанию $\pi R_0^2$. В этом случае коэффициент $\gamma_1$ выражается как функция наблюдаемого («динамического») краевого угла $\theta_д$.

В произвольный момент времени для пузырька справедливо уравнение энергетического баланса

$$\rho'' h_{LG} \frac{dV}{dt} = Q_1 + Q_2,$$

которое с учетом (6.38а) и (6.39) записывается как

$$R_э^2 \frac{dR_э}{dt} = \frac{\beta \lambda \Delta T R_э}{\rho'' h_{LG}} + \frac{\gamma \lambda \Delta T R_э^2}{\rho'' h_{LG} \sqrt{at}}, \qquad (6.40)$$

где $\beta = \frac{\beta_1}{4\pi}$; $\gamma = \frac{\gamma_1}{4\pi}$.

Вводя число Ja, имеем

$$R_э \frac{dR_э}{dt} = \beta \, \mathrm{Ja} a + \gamma \, \mathrm{Ja} R_э \sqrt{\frac{a}{t}}. \qquad (6.40а)$$

Дифференциальное уравнение (6.40а) при начальном условии $t = 0$, $R_э = 0$ решается с помощью подстановки $R_э = Y\sqrt{t}$. Имея в виду, что физический смысл имеет только положительный корень получающегося квадратного уравнения относительно $Y$, находим

$$R_э = (\gamma\,\mathrm{Ja} + \sqrt{\gamma^2\mathrm{Ja}^2 + 2\beta\,\mathrm{Ja}})\sqrt{at}. \qquad (6.41)$$

При постоянных $\gamma$ и $\beta$ полученное уравнение имеет две асимптоты. Первая из них при $\mathrm{Ja} << 1$

$$R_э = \sqrt{2\beta\mathrm{Ja}at} = \sqrt{\frac{2\beta\lambda\Delta T t}{h_{LG}\rho''}} \qquad (6.42)$$

отвечает случаю, когда подвод тепла от перегретой жидкости пренебрежимо мал (теплоемкость жидкости не влияет на закон роста). Эта формула была получена Д.А. Лабунцовым в 1963 г. [18]; она справедлива для области высоких приведенных давлений при $\beta = 6$.

Вторая асимптота относится к низким приведенным давлениям, когда $\mathrm{Ja} >> 1$:

$$R_э = 2\gamma\,\mathrm{Ja}\sqrt{at}. \qquad (6.43)$$

В этом случае подвод тепла от перегретой жидкости становится преобладающим. Формула (6.43) отличается от формулы Плессета—Цвика лишь коэффициентом $\gamma$, который по смыслу анализа должен быть меньше единицы (меньше множителя $\sqrt{3/\pi}$ в формуле (6.35а)). Согласие с опытными данными обеспечивается при $\gamma = 0{,}3$.

Таким образом, формула (6.41) при $\beta = 6$, $\gamma = 0{,}3$ позволяет удовлетворительно описать опытные кривые роста паровых пузырьков при кипении различных жидкостей в широком диапазоне изменения давлений (при числах $\mathrm{Ja} = 0{,}1$—500).

Результаты сравнения представлены на рис. 6.12, где отражены практически все известные опытные данные о росте паровых пузырьков при кипении 11 различных жидкостей (вода, метанол, этанол, толуол, бензол, четыреххлористый углерод, н-пентан, азот, кислород, водород, гелий) в диапазоне давлений 0,005—10 МПа. Зависимости (6.35а) и (6.36) для роста пузырьков в объеме перегретой жидкости (кривые *1* и *2* на рис. 6.12), конечно, не должны описывать опытные данные о росте пузырьков на стенке. Эти кривые пе-

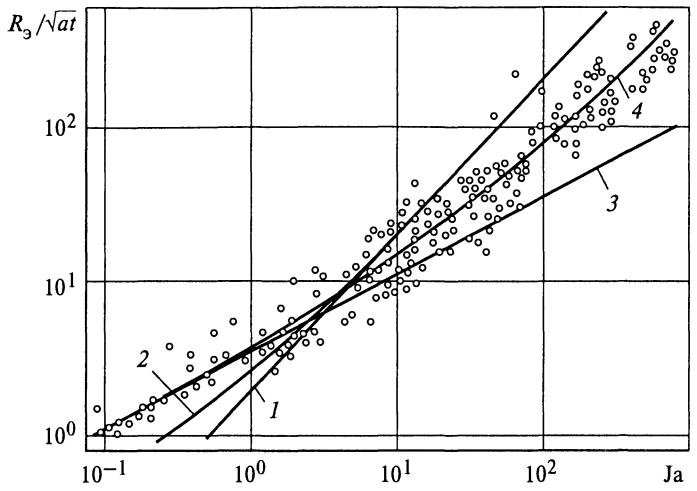



**Рис. 6.12. Сопоставление опытных данных о скорости роста паровых пузырьков при кипении с расчетными зависимостями:**

*1* — (6.35а); *2* — (6.36); *3* — (6.42); *4* — (6.41); каждая точка на рисунке отражает либо кривую роста индивидуального пузырька, либо результат статистической обработки нескольких кривых роста при Ja = idem

ресекают массив опытных точек в том диапазоне чисел Якоба, который соответствует для большинства исследованных жидкостей атмосферному давлению. Это случайное совпадение послужило некоторым авторам основанием рекомендовать формулу Плессета—Цвика для описания роста паровых пузырьков при кипении. Кривая *4* на рис. 6.12, построенная по уравнению (6.41), хорошо отражает характер изменения безразмерного модуля роста пузыря $R_э/\sqrt{at}$ в зависимости от числа Якоба. При Ja < 1 эта кривая практически совпадает с кривой *3*, отвечающей формуле (6.42).

Следует отметить, что отклонение опытных точек на рис. 6.12 связано не только со статистическим разбросом, характерным для кипения, но и с использованным в анализе допущением об изотермичности обогреваемой стенки. В действительности, как говорилось выше, интенсивное испарение микрослоя в его тонкой части вызывает падение температуры стенки тем более заметное, чем меньше коэффициент тепловой активности стенки $\sqrt{(\rho c\lambda)_c}$ и меньше ее тол-

щина. Анализ роста пузырьков с учетом этих эффектов существенно сложнее, чем изложенная приближенная модель; он приводится в [2].

При наиболее низких давлениях энергетическая схема роста, приводящая к (6.41), дает сильно завышенную в сравнении с экспериментами расчетную скорость роста пузырька. В этих условиях учет инерционных эффектов может быть осуществлен по методике, описанной в п. 6.3.4. Уже при Ja > 300 преобладает подвод тепла к межфазной поверхности от перегретой жидкости (в соответствии с соотношением (6.39)). Следовательно, уравнение для расчета скорости роста паровых пузырьков на стенке в рассматриваемых условиях должно отличаться от формулы (6.37) лишь числовым коэффициентом, меньшим единицы. Действительно, соотношение

$$R_э = 0{,}5\left(\frac{\lambda c_p}{\rho''}\right)^{1/4} \frac{R_i^{3/4} T_s^{5/4}}{h_{LG}} t^{3/4} \qquad (6.44)$$

хорошо согласуется с имеющимися опытными данными о росте паровых пузырьков при Ja ≥ 600.

## 6.5. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОТРЫВА ПАРОВЫХ ПУЗЫРЕЙ ОТ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

### 6.5.1. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОБ ОТРЫВЕ ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА

Размер пузырька в момент отрыва от твердой поверхности — важный параметр для понимания механизма кипения. На сегодня накоплена обширная опытная информация о предотрывных диаметрах паровых пузырьков при кипении различных жидкостей. (Часть этой информации получена в тех экспериментальных исследованиях динамики паровых пузырьков, результаты которых отражены на рис. 6.12.) Но, несмотря на это, а также на кажущуюся простоту объекта исследования (индивидуальный паровой пузырек, растущий на твердой обогреваемой стенке), в теоретическом плане проблема отрыва пузырька весьма сложна и, к сожалению, изрядно запутана.

Поскольку даже при высоких приведенных давлениях остается справедливым сильное неравенство $\rho'' << \rho'$, то паровой пузырек в известном смысле — это «пустота» в жидкости. (Недаром в английском языке истинное объемное паросодержание газожидкостных потоков обозначается термином «void fraction» — «доля пустоты».)

Кроме того, в реальных условиях скорость расширения объема $\dot{R}$ намного меньше скорости звука в паре; это означает, что давление пара в пузырьке в любой момент роста можно считать однородным. Следовательно, давление на границе пузырька со стороны жидкости связано с давлением пара $p''$ уравнением Лапласа (2.7) в форме:

$$p'_R = p'' - 2\sigma H(z), \tag{6.45}$$

где $H(z)$ — кривизна поверхности пузырька в предположении ее осесимметричности. Форма поверхности пузырька изменяется во времени и могла бы быть рассчитана только как результат решения задачи о динамике жидкости, удовлетворяющего условию (6.45) на границе области, заранее не определенной. Обычно в задачах о движении жидкости со свободной поверхностью форма межфазной поверхности известна или задается на основе опытных наблюдений; успешное использование такого подхода было продемонстрировано в п. 5.6.3 на примере задачи о стационарном всплытии в жидкости крупных газовых пузырьков. В рассматриваемом случае такое решение многократно усложняется и достижимо лишь численными методами.

Первые результаты численного исследования динамики парового пузырька в такой строгой постановке были опубликованы в самое последнее время (Труды 11-й Международной конференции по теплообмену, Кенгджу, Корея, 1998; Труды Международной конференции «Boiling – 2000», Анкоридж, США, 2000). Эти результаты включают, в частности, очертания границы пузырька в некоторые фиксированные моменты времени. Так как никаких резких изменений эти очертания не претерпевают, вопрос о том, какое из них следует относить к моменту отрыва, является в известной мере предметом соглашения. Наиболее естественно принимать за момент отрыва потерю прямого контакта пара с твердой стенкой, т.е. образование замкнутой поверхности пузырька *в жидкости*. (На схеме рис. 6.10, *а* этому требованию отвечает правая картинка, а последний из кинокадров, приведенных на рис. 6.10, *б*, относится к моменту, близкому к отрыву, но здесь малая часть поверхности пузырька еще сохраняет прямой контакт со стенкой.)

Следует отметить, что даже при использовании ряда сильных допущений, заметно ограничивающих общность полученных численных решений, затраты машинного времени в таких исследованиях весьма велики. Поскольку информация об условиях отрыва паровых пузырьков в инженерных приложениях непосредственно

не используется, а служит для построения моделей пузырькового кипения, то строгое численное моделирование эволюции пузырька останется, вероятно, в обозримой перспективе областью фундаментальных исследований, направленных на более глубокое понимание механизма кипения. В практическом плане интерес представляют аналитические соотношения, связывающие размер пузырька («эквивалентный» радиус или диаметр) в момент отрыва с режимными параметрами процесса и свойствами жидкости. С учетом сказанного ясно, что такие соотношения принципиально могут быть лишь приближенными.

При построении приближенных моделей необходимо учитывать несколько важных особенностей анализируемой задачи. Прежде всего паровой пузырек на стенке, несмотря на внешнее сходство, вовсе не аналогичен воздушному шару, привязанному за нитку ко дну сосуда с водой (хотя такая аналогия и кажется естественной). По существу у пузырька нет каких-либо механических связей с твердой стенкой, кроме поверхностного натяжения на линии контакта трех фаз. Ясно, что роль поверхностного натяжения совершенно ничтожна в случае крупных пузырьков, характерных для низких приведенных давлений (больше числа Якоба). Кроме того, поверхность пузырька легко изменяет свою форму; локальный импульс давления (например, за счет турбулентных пульсаций), воздействующий на участок поверхности пузырька, не передается центру масс пузырька, но может изменить его форму. В экспериментах наблюдали как расположенный в жидкости вблизи стенки термометрический проволочный зонд свободно «входит» в паровой пузырек, не влияя на его эволюцию (фактически пузырек растет, «не замечая» малого в сравнении с его размером твердого препятствия). Ясно, что в случае с воздушным шариком ситуация совершенно иная.

Уже из этих качественных соображений можно заключить, что применительно к пузырьку в жидкости едва ли корректно использовать заимствованное из механики твердого (недеформируемого) тела понятие силы, приложенной к центру масс. К тому же баланс сил согласно классическому принципу Даламбера справедлив в любой момент эволюции пузырька и не может служить условием отрыва. Другими словами, баланс сил — это уравнение сохранения импульса в проекции на одно из направлений; в системе отсчета с началом в центре масс пузырька оно выполняется, пока пузырек существует. Несмотря на непрекращающиеся попытки уточнять (и усложнять) со-

отношения, выражающие существенные для динамики пузырька силы, такой подход в лучшем случае может рассматриваться лишь как один из приближенных методов, аналогичный анализу размерностей.

Действительная эволюция пузырька определяется полем скоростей и давлений в окружающей жидкости, причем распределение давления на межфазной поверхности определяется уравнением (6.45). При высоких давлениях, когда скорость изменения пузырька ничтожна (Ja < 1), определяющую роль в распределении давлений в окружающей пузырек жидкости играют массовые силы. Здесь естественно обратиться к рассмотренным в гл. 2 задачам гидростатики газожидкостных систем, в которых анализируется возникновение неустойчивости осесимметричных равновесных поверхностей раздела при достижении определенного (критического) объема парового пузырька. При Ja >> 1 распределение давления в окрестности растущего пузырька обусловлено не только гидростатикой, но и движением «расталкиваемой» пузырьком жидкости. В этих условиях модель, позволяющая рассчитывать размер пузырька в момент отрыва, должна объяснять, почему, начиная с некоторого этапа эволюции пузырька, уравнение (6.45) продолжает выполняться лишь при условии отделения парового объема от стенки. Таким образом, естественно в первую очередь рассмотреть указанные два предельных случая: отрыв пузырьков при Ja < 1 (гидростатическое приближение) и Ja >> 1 («инерционная схема отрыва»).

### 6.5.2. ОТРЫВ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ ОТ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ МАЛЫХ СКОРОСТЯХ РОСТА

При очень медленном увеличении объема парового пузырька (Ja < 1) форма его поверхности в любой стадии роста определяется уравнением гидростатического равновесия (2.9). По классификации, введенной нами в гл. 2, задача о паровом пузырьке на твердой поверхности относится к задачам типа II (отрицательные перегрузки). Это означает, что существует некоторый предельный объем парового пузырька, при котором граница раздела теряет устойчивость, пузырь «отрывается» от стенки.

Отрыв от твердой поверхности медленно растущего парового пузырька в принципе может моделироваться двумя конкретными задачами гидростатики. Первая из них — задача о пузырьке на гладкой горизонтальной поверхности — дает для предотрывного разме-

ра пузыря соотношение, широко известное как формула Фритца (2.19а), или, выражая краевой угол θ в градусах,

$$D_0 = 2R_0 = 0{,}0207\theta\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}. \qquad (6.46)$$

Вторая из упомянутых выше задач определяет предотрывный объем газового пузыря в жидкости на срезе капилляра. Есть веские основания считать, что именно эта задача гидростатики наилучшим образом может моделировать условия отрыва медленно растущих паровых пузырьков при кипении.

Действительно, анализ кинограмм процесса кипения при высоких давлениях показывает, что шероховатость поверхности нагрева не позволяет основанию пузырька «расползаться» по мере его роста. При этом получается, что пузырек как бы «выдувается» из впадины на поверхности нагрева. Поэтому для оценки предотрывного диаметра парового пузырька при кипении в области высоких давлений (медленно растущие пузырьки) можно рекомендовать выведенную в гл. 2 формулу (2.26а):

$$D_0 = \sqrt[3]{\frac{6d_к\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}. \qquad (6.47)$$

Аналогом капилляра в данном случае служит устье поверхностной впадины, т.е. $d_к$ в формуле (6.47) соответствует характерному размеру шероховатости твердой стенки. При $d_к$ = 1—10 мкм соотношение (6.47) дает для воды при высоких давлениях $D_0 \approx$ 0,3—0,6 мм, что удовлетворительно согласуется с опытными данными, полученными на поверхностях нагрева, имеющих характерные размеры микронеровностей порядка единиц микрометров.

Такое использование формулы (6.47) было обосновано в конце 60-х годов (см. [18]). Позднее были выполнены эксперименты, в которых изучался отрыв паровых пузырьков при кипении воды и этанола на искусственных впадинах с точно измеренным размером $d_к$ [68]. Оказалось, что при давлении 0,2—3,7 МПа формула (6.47) с очень высокой точностью согласуется с опытными данными для этанола и вполне удовлетворительно — для воды.

Что касается формулы Фритца, то, будучи безукоризненно точной в рамках гидростатической задачи, она совершенно неприменима к расчету предотрывных размеров паровых пузырьков при кипе-

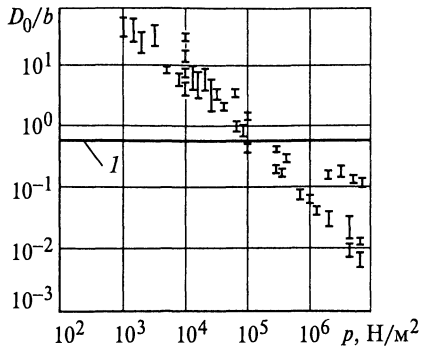



**Рис. 6.13. Отрывные диаметры паровых пузырей при кипении при различных давлениях:**

I — диапазон опытных данных; *1* — по формуле (6.46) при $\theta = 30°$,

$$b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}$$

нии. В области низких давлений это совершенно естественно, ибо подход с позиций гидростатики в принципе не пригоден к анализу условий отрыва быстро растущих паровых пузырей. Об этом можно было и не говорить, если бы не появлялись публикации, в которых формула (6.46) по-прежнему именуется «формулой Фритца для отрывного диаметра парового пузырька при кипении», и при этом даже не оговаривается диапазон применимости этой формулы.

Рисунок 6.13 убедительно показывает, что в весьма широком диапазоне давлений и для весьма различных жидкостей формула (6.45) не обнаруживает даже качественного соответствия результатам опытов. Из рис. 6.13 видно, что расчет по формуле Фритца (кривая *1*) дает значения $D_0$, которые в области самых низких давлений (около 0,01 бар) почти на два порядка меньше, чем полученные в опытах, а при наиболее высоких давлениях (10—100 бар) на порядок и более превосходят те, что наблюдались в экспериментах. Несоответствие формулы (6.46) опытным данным в условиях медленного (квазистатического) роста паровых пузырьков обусловлено, по-видимому, отмеченным выше влиянием шероховатости любой реальной поверхности нагрева. С ростом давления уменьшается капиллярная постоянная

$$b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}},$$

определяющая линейный масштаб любой равновесной двухфазной системы в задачах гидростатики. В силу этого при наиболее высоких давлениях характерный размер шероховатости поверхности нагрева становится соизмеримым с размером паровых пузырьков,

в результате чего здесь уже не проходит приближение гладкой стенки, на основании которого можно было бы использовать в анализе формулу Фритца.

### 6.5.3. ОТРЫВ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ ПРИ КИПЕНИИ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ПРИВЕДЕННЫХ ДАВЛЕНИЙ

Как показано ранее (см. § 6.1, 6.3), при быстром расширении сферической паровой полости давление в ней, а значит, и давление на границе пузыря со стороны жидкости заметно превосходит давление $p_\infty$ вдали от межфазной границы. При кипении на горизонтальной твердой стенке расширение парового пузырька не обладает сферической симметрией, пузырек, особенно в начальный период роста, отталкивает жидкость от стенки. В результате жидкость как бы «прижимает» пузырь к обогреваемой поверхности. В целом прослеживается тенденция: чем больше скорость роста пузырька, тем дольше он удерживается у стенки и тем больших размеров достигает перед отрывом.

Естественно все сказанное выше о равенстве давления пара в пузырьке и давления жидкости во всех точках его поверхности остается в силе (с точностью до ничтожного для рассматриваемых крупных пузырей лапласовского скачка давлений). Однако само это давление превышает гидростатическое давление жидкости на той же глубине, но вдали от растущего пузырька. Так как скорость роста парового пузырька на стенке, определяемая для различных диапазонов числа Якоба формулами (6.41) или (6.44), уменьшается во времени, то уменьшается и избыточное давление в жидкости, вызываемое расширением пузырька; можно ожидать, что пузырек начнет отходить от стенки, когда скорость его роста сравняется с установившейся скоростью всплытия пузыря в спокойной жидкости, $U_\infty$. Действительно, при стационарном всплытии крупных пузырей давление жидкости на поверхности пузыря одинаково (см. п. 5.6.3), причем в лобовой точке оно выше, чем на той же глубине далеко в стороне от всплывающего пузыря. Если скорость роста парового пузыря на стенке снижается до $U_\infty$, то достигаются те же условия, какие существуют при стационарном всплытии пузыря, когда его форма и скорость всплытия не зависят от глубины (если, конечно, давление столба жидкости много меньше давления над уровнем жидкости).

Таким образом, при

$$\dot{R} = U_\infty \tag{6.48}$$

для поддержания равенства давлений на свободной поверхности жидкости, которая в рассматриваемом случае есть замкнутая поверхность парового объема, пузырь должен отрываться от стенки.

Приведенные рассуждения справедливы только для крупных пузырьков (зона *5* на рис. 5.6), так как только здесь ничтожны эффекты поверхностного натяжения. В достаточно широкой по диапазону размеров пузырей зоне *4* поверхностное натяжение сильно влияет на форму и характер всплытия пузыря, причем, как говорилось в п. 5.4.2, процесс всплытия в строгом смысле слова здесь не является стационарным, так как форма пузыря и скорость подъемного движения претерпевают пульсации. Следовательно, условие (6.48) относится к случаю, когда величина $U_\infty$ определяется формулой (5.39), а закон роста — формулой (6.44).

Записывая (6.44) в виде

$$R = A\,t^{3/4}, \tag{6.44а}$$

находим для момента отрыва с учетом (6.48) и (5.39)

$$\dot{R}_0 = \frac{3}{4} A\,t_0^{-1/4} = 1{,}05\sqrt{gR_0}\,.$$

Выразив из последнего уравнения время роста до отрыва $t_0$ и используя его в (6.44а), находим

$$R_0 = \frac{A^{8/5}}{(1{,}4)^{6/5} g^{3/5}},$$

или, раскрывая значение $A$ согласно (6.44),

$$R_0 = 0{,}22\left(\frac{\lambda c_p}{\rho''}\right)^{2/5} \frac{R_i^{6/5} T_s^2}{h_{LG}^{8/5} g^{3/5}}. \tag{6.49}$$

В [22, 76] приводится сравнение расчета по (6.49) с опытными значениями $R_0$ при кипении различных жидкостей (вода, спирты, четыреххлористый углерод, кислород) при давлениях $p \le 20$ кПа. Хотя при выводе этого соотношения используется формула (6.44),

справедливая при Ja > 600, разумное согласие опытных и рассчитанных по (6.49) значений эквивалентного радиуса парового пузырька в момент отрыва обнаруживается до Ja ≈ 175, а для кислорода — даже до Ja ≈ 34. Важно отметить, что при выводе (6.49) не потребовалось как-либо корректировать числовую константу.

### 6.5.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ УСЛОВИЙ ОТРЫВА

Следует отметить, что инерционные силы в жидкости, приводимой в движение растущим пузырем, оказываются существенными для условий отрыва парового пузырька даже при относительно небольших числах Якоба (Ja = 3—30). Благодаря их влиянию можно объяснить, в частности, почему паровой пузырек отрывается от поверхности нагрева в условиях микрогравитации, когда актуальное ускорение массовых сил составляет $(10^{-4}—10^{-5})\ g$ (практически в невесомости) или в земных условиях в направлении, противоположном силе тяжести, вниз от поверхности цилиндрического нагревания. Для такого объяснения используем модель сферического пузырька. С учетом сказанного в п. 6.5.1 априорное задание формы газовой полости делает анализ приближенным. Однако постулирование не изменяемой во времени формы пузыря позволяет использовать достаточно простые методы механики твердого тела, в частности понятие силы, приложенной к центру масс. Степень приближенности такого подхода зависит от того, насколько принимаемая в модели форма близка к наблюдаемой в опытах. Это отступление от требований строгого анализа никоим образом не распространяется на принцип Даламбера: баланс сил, приложенных к пузырьку заданной формы, остается справедливым в любой момент времени и не может использоваться как условие отрыва.

Известно (см. § 5.1), что при стационарном движении в невязкой жидкости сфера не испытывает сопротивления (парадокс Даламбера). Однако в случае ускоренного движения сила сопротивления возникает. Качественно это объясняется тем, что ускоренно движущееся тело вовлекает в движение (тоже ускоренное) определенную массу жидкости. В результате ускоренно движущееся тело

как бы увеличивает свою массу, так что второй закон Ньютона записывается для него в виде

$$F = (m + m_*)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \tag{6.50}$$

где $m$ — собственная масса тела; $m_*$ — так называемая присоединенная масса жидкости, вовлекаемой в движение; $F$ — сила, вызывающая ускоренное движение.

В классической гидромеханике (см., например, [24, 26, 34]) значения $m_*$ рассчитаны для тел различной формы. Для сферы

$$m_* = \frac{2\pi}{3}\rho' R^3, \tag{6.51}$$

т.е. присоединенная масса составляет половину массы жидкости, вытесняемой сферой. (Детальное обоснование соотношений (6.50) и (6.51) см. в [21]). Если движущееся тело — это газовая полость со сферической оболочкой, то его собственная масса $m << m_*$, так как $\rho'' << \rho'$. В этом случае динамику ускоренного движения определяет в основном присоединенная масса. Ясно, что качественно такая ситуация складывается при росте парового пузырька: инерционное сопротивление расталкиваемой жидкости может быть объяснено с использованием понятия присоединенной массы.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть в невязкой жидкости на некотором уровне $h = 0$ в момент времени $t = 0$ возник сферический газовый пузырек, окруженный непроницаемой невесомой оболочкой. Пусть далее эта оболочка, сохраняя сферичность в любой момент времени, расширяется в жидкости в условиях действия массовых сил по закону

$$R = A_1 t^n, \tag{6.52}$$

где $A_1$ и $n$ — некоторые константы.

Естественно, с течением времени газовый пузырек будет всплывать за счет гравитационных сил, так что высота его центра будет изменяться по некоторому закону $h = h(t)$, а скорость всплытия пузыря $u = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$. Схема подъема расширяющегося пузырька показана на рис. 6.14, *а*.

Принцип Даламбера для такого пузырька

$$F_c + F_g = 0, \qquad (6.53)$$

где сила $F_g = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho' - \rho'')$ и по направлению совпадает с осью $h$.

Сила сопротивления $F_c$ связана с ускоренным движением пузырька, но при этом нужно иметь в виду, что радиус пузырька изменяется во времени и, следовательно, присоединенная масса пузырька $m_* = m_*(t)$. Собственной массой газового пузырька пренебрегаем.

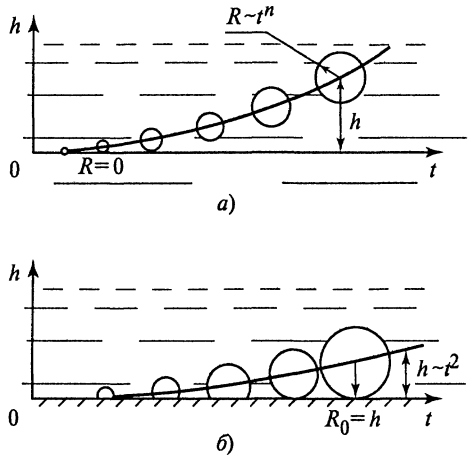



**Рис. 6.14. Схема подъема растущего пузырька в объеме жидкости (*а*) и на твердой поверхности (*б*)**

Тогда для растущего пузырька

$$F_c = -\frac{d(m_* u)}{dt} = -\frac{2}{3}\pi\rho' \frac{d(R^3 u)}{dt}. \qquad (6.54)$$

Теперь, подставляя в соотношение (6.53) значения сил $F_c$ и $F_g$ и имея в виду закон (6.52), получаем

$$\frac{d}{dt}(t^{3n} u) = 2g\frac{\rho' - \rho''}{\rho'} t^{3n}.$$

При низких давлениях $\rho' >> \rho''$, так что $\frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \approx 1$. Интегрируя последнее уравнение при начальном условии $t = 0$, $R = 0$, $h = 0$, имеем

$$u = \frac{dh}{dt} = \frac{2}{3n+1} gt.$$

Повторное интегрирование при том же начальном условии дает окончательно

$$h = \frac{1}{3n+1} gt^2. \qquad (6.55)$$

Заметим, что этот результат может быть получен и более строго, путем нахождения поля потенциала скорости в жидкости, окружающей расширяющуюся по закону (6.52) сферическую полость, на поверхности которой выполняется условие $p'_R = \text{idem}$.

Таким образом, высота центра растущего в объеме жидкости парового пузырька (окруженного оболочкой, обеспечивающей его сферичность) увеличивается во времени по квадратичному закону, что отражено на рис. 6.14, *а*.

Анализ кинограмм роста паровых пузырей при вакуумном кипении (типа изображенной на рис. 6.10, *б*) позволяет приближенно заменить реальную картину схемой рис. 6.14, *б*, согласно которой пузырек растет, меняя свою форму от полусферической на начальной стадии до идеальной сферической в момент отрыва. Тогда анализ, проведенный для всплытия в объеме жидкости расширяющейся сферической полости, можно использовать для нахождения условия отрыва парового пузырька от твердой поверхности. При этом условие отрыва принимает простой вид $h = R_0$, т.е. радиус пузырька в момент отрыва выражается соотношением

$$R_0 = \frac{1}{3n+1} g t_0^2, \tag{6.56}$$

где $t_0$ — время роста пузырька от зарождения до отрыва.

Если для сопоставления формулы (6.56) с результатами экспериментов использовать значения $n$, определяемые по опытным кривым роста пузырьков, то, как следует из рис. 6.15, указанная формула хорошо согласуется с опытными данными. На рис. 6.15 приведены результаты большого числа экспериментальных работ, в которых исследовалось кипение различных жидкостей (вода, этанол, метанол, толуол, ацетон, четыреххлористый углерод, калий) при давлениях, не выше атмосферного. Как видно из рисунка, подавляющее большинство опытных точек лежит в полосе ±40 % от расчетной кривой, хотя следует отметить, что над кривой оказалось заметно больше точек, чем под кривой. Однако с учетом фактического отличия формы пузырька от модельной (согласно рис. 6.14, *б*) согласование расчетной кривой и опытных данных следует считать удивительно хорошим.

Использование схемы рис. 6.14, *б* и кинематического условия отрыва $h = R_0$ означает, что скорость подъема центра пузырька непосредственно в момент отрыва совпадает со скоростью роста пузырька. Следовательно, это кинематическое условие, приводящее

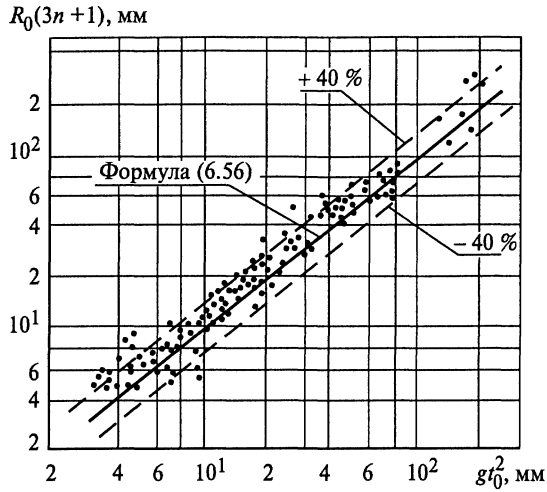



**Рис. 6.15. Сравнение формулы (6.56) с опытными данными об отрывных размерах пузырьков**

к формуле (6.56), равносильно ранее использованному другому (тоже кинематическому) условию отрыва (6.48). Правда в последнем случае скорость всплытия принималась постоянной, отвечающей объему пузырька в момент отрыва.

В действительности обе схемы отрыва идеализируют реальный процесс, поскольку всплытие пузырька начинается фактически сразу после его зарождения, как это следует из анализа рис. 6.14, *а*. По мере отхода пузырька от обогреваемой стенки уменьшается площадь его поверхности, соприкасающейся с тепловым пограничным слоем на стенке. В результате с увеличением объема пузырька уменьшаются энергетические ресурсы для его роста: показатель степени $n$ в зависимости вида (6.52) уменьшается в сравнении со значениями $n = 1/2$ или $n = 3/4$, определяемыми соответственно (6.41) и (6.44). Это особенно заметно для крупных пузырьков, время пребывания которых у обогреваемой стенки составляет 100—200 мс, что на порядок превышает типичное время роста паровых пузырьков при кипении воды и ряда других жидкостей при давлениях, близких к атмосферному. Такие крупные пузырьки перед отрывом практически перестают увеличивать свой объем ($n \approx 0$). Последний из кинокадров на рис. 6.10, *б* наглядно объясняет причину этого: здесь поверхность пузырька практически не имеет контакта с перегретой жидкостью на обогреваемой стенке. Поскольку такое изме-

нение закона роста пузырька характерно для наиболее низких давлений (Ja > 200), то использование при выводе формулы (6.49) кинематического условия (6.48) в этом диапазоне параметров находит разумное обоснование. При меньших числах Якоба описанный эффект, с одной стороны, может объяснить отмеченное выше систематическое отклонение опытных точек от расчетной зависимости (6.56) на рис. 6.15, с другой стороны, влияние изменения закона роста пузырька во времени здесь не столь значительно, что дает аргументы в пользу другого кинематического условия отрыва.

Для качественного объяснения вероятной причины отрыва пузырька в условиях невесомости или в направлении против силы тяжести воспользуемся формулой (6.54), приняв в ней (с учетом (6.52))

$$u = \dot{R} = A_1 n t^{n-1},$$

что оправдано для малого промежутка времени перед отрывом.

В этом случае

$$F_c = -\frac{2}{3}\pi\rho' \frac{d}{dt}(A_1^4 n t^{4n-1}) = -\frac{2\pi}{3} n(4n-1) A_1^4 t^{4n-2}\rho'.$$

Отсюда ясно, что при $n > 0{,}25$ $F_c < 0$, т.е. инерционная сила со стороны жидкости направлена к поверхности нагрева и препятствует отрыву, а при $n < 0{,}25$ $F_c > 0$, так что эта сила направлена от поверхности и стремится оторвать пузырек от стенки. Качественно это объясняется просто: при сильном падении скорости роста (при $n = 1/4$ величина $\dot{R} \sim t^{-3/4}$) первоначально приведенная в движение растущим пузырьком жидкость увлекает его за собой. Этот эффект будет, очевидно, более сильным, если показатель степени $n$ в (6.52) уменьшается во времени по мере истощения энергетических ресурсов роста пузырька.

Видимо, это и наблюдали в экспериментах на космической станции в условиях практической невесомости [53], когда отсутствуют привычные в земных условиях массовые силы, обеспечивающие всплытие пузырька в жидкости. Интересно, что оторвавшиеся пузырьки в этих экспериментах в случае насыщенной жидкости останавливались на некотором расстоянии от обогреваемой стенки, где образовывались большие скопления пара.

Еще более удивительное на первый взгляд явление наблюдалось в земных условиях при кипении на поверхности нагрева в виде го-

ризонтально расположенной тонкой проволоки. Киносъемка фиксировала, что пузырьки, растущие на нижней образующей, сначала «отскакивали» от нагревателя вниз и лишь затем естественным образом всплывали. Очевидно, когда размер пузырька существенно превышал диаметр нагревателя, доля поверхности, покрытой перегретой жидкостью, уменьшалась, скорость роста пузырька резко снижалась, и его увлекала от обогреваемой стенки вниз предварительно приведенная в движение жидкость.

Необходимо подчеркнуть, что описанные явления имеют пока лишь качественное объяснение, поскольку надежно описать трехмерную картину течения и теплообмена в окрестности тонкопроволочного нагревателя в настоящее время вряд ли возможно и численными методами.

Укажем, наконец, что формула (6.56) позволяет получить реалистичное уравнение, связывающее размер пузырька в момент отрыва с режимными параметрами и свойствами жидкости и пара. Записав (6.41) для момента отрыва в виде

$$R_0 = A_2\sqrt{at_0}, \tag{6.41а}$$

где $A_2 = 0{,}3\,\mathrm{Ja} + \sqrt{0{,}09\,\mathrm{Ja}^2 + 12\,\mathrm{Ja}}$, и исключив время $t_0$ из уравнений (6.41а) и (6.56), находим

$$R_0 \approx 1{,}36A_2^{4/3}(a^2/g)^{1/3}. \tag{6.57}$$

Эта формула дает разумные значения $R_0$ при «умеренных» числах Якоба: Ja = 3—100. В табл. 6.4 приведено сопоставление расчета по (6.57) с опытными данными [2], которые представляют соой результат статистической обработки от 400 до 600 индивидуальных пузырьков. Поскольку формула (6.41), лежащая в основе уравнения (6.57), не учитывает влияния теплофизических свойств стенки на скорость роста пузырька, для сравнения взяты лишь данные, полученные на образцах с высокой теплопроводностью.

На образцах из нержавеющей стали скорость роста оказалась ниже, а отрывной диаметр — меньше.

Хотя согласие расчета по (6.57) с результатами измерений, представленных в табл. 6.4, достаточно хорошее, формулу (6.57) следует воспринимать как инструмент для приближенной оценки в указанном выше диапазоне чисел Якоба. Более обоснованными и надежными следует считать соотношения (6.47) и (6.49) для предельных

*Таблица 6.4.* **Опытные [2] и расчетные по (6.57) значения отрывного диаметра при кипении азота, этанола и воды при атмосферном давлении**

| Жидкость | Материал стенки | $\Delta T$, К | Ja | $D_0$, мм | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Эксперимент | Расчет |
| Азот | Никель | 6,1 | 10,7 | 0,89 | 0,91 |
| Этанол | Медь | 8,1 | 13,4 | 1,18 | 0,94 |
| Вода | Медь | 8,9 | 26,7 | 2,78 | 3,22 |

случаев соответственно Ja < 1 и Ja >> 1. В промежуточной области чисел Якоба получить физически обоснованное аналитическое уравнение для расчета $D_0$ (или $R_0$) намного сложнее, так как на распределение давления на межфазной границе и на эволюцию паровой полости влияют одновременно силы инерции, массовая сила (гравитация) и поверхностное натяжение. В [2] дается приближенное интерполяционное соотношение для $R_0$, пригодное в широком диапазоне чисел Якоба.

Глава седьмая

# АДИАБАТНЫЕ ДВУХФАЗНЫЕ ПОТОКИ В КАНАЛАХ

Перечень промышленных объектов, использующих двухфазные потоки, чрезвычайно широк. Достаточно назвать паровые котлы и парогенераторы АЭС, рефрижераторы и ожижители в технике низких температур, выпарные аппараты, испарители, конденсаторы, дистилляционные установки в различных технологиях, газо- и нефтепроводы, чтобы понять, насколько широка сфера применения двухфазных систем. При этом в большинстве названных (и неназванных) примеров имеют дело с организованным движением двухфазных сред в каналах.

Поскольку строгое математическое описание, дающее, в частности, положение и форму межфазных границ, для реальных двухфазных систем в каналах, как правило, невозможно, в инженерной практике используют обычно эмпирические, в лучшем случае полуэмпирические расчетные соотношения. В настоящем издании предпочтение отдается тем из них, которые опираются на определенные физические модели. Естественно, больше внимания уделяется здесь качественному анализу явлений.

В гл. 7 рассматриваются адиабатные потоки. Хотя двухфазные течения без теплообмена со стенками канала встречаются в технике реже (в первую очередь это трубопроводный транспорт), чем потоки в условиях испарения или конденсации, в экспериментальных исследованиях, напротив, адиабатным потокам уделяется, видимо, больше внимания. Это естественно, так как, уменьшая число факторов, влияющих на систему, исследователь получит возможность лучше понять механизмы, определяющие характеристики двухфазного потока.

Вводный параграф гл.7 дает возможность яснее представить многообразие изученных объектов. Он по существу относится и к гл. 8, так как здесь рассматриваются потоки и в условиях теплообмена.

## 7.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

Чрезвычайно широкое распространение двухфазных потоков в технике требует их некоторой предварительной оценки, классификации. При этом классификация может быть проведена по весьма различным признакам, так что приводимая в настоящем пункте не является единственно возможной или исчерпывающей.

По *составу смеси* различают однокомпонентные — *парожидкостные* потоки и двух- или многокомпонентные — *газожидкостные* потоки. (Строго говоря, однокомпонентным двухфазным потоком является, например, смесь жидкой и твердой фазы одного вещества — «шуга», а двухкомпонентным — поток газа или жидкости с твердыми частицами другой химической природы. В настоящем пособии анализ ограничен лишь двухфазными паро- или газожидкостными системами.) В парожидкостных потоках в общем случае межфазная поверхность проницаема, из-за фазовых превращений объемные и массовые расходы фаз изменяются по длине. В газожидкостных (двухкомпонентных) потоках массовые расходы фаз постоянны по длине.

По *тепловому взаимодействию с окружающей средой* будем различать *адиабатные* двухфазные потоки (тепловой поток на стенке $Q_c = 0$*) и *неадиабатные* двухфазные потоки — потоки с теплообменом ($Q_c \neq 0$). При $Q_c > 0$ (подвод тепла к потоку) происходит испарение жидкости (или кипение), при $Q_c < 0$ — конденсация пара.

Для парожидкостных потоков весьма существенно их термодинамическое состояние: если соприкасающиеся фазы находятся в состоянии насыщения, такой поток называют *равновесным*; если температура одной или обеих фаз отличается от температуры насыщения при давлении в данной точке, то поток — неравновесный. Так, в парокапельных потоках, возникающих при захолаживании криотрубопроводов, или в парогенерирующих каналах ниже сечения кризиса кипения пар обычно перегрет, а жидкость имеет температуру насыщения — типичный и весьма распространенный случай неравновесных двухфазных потоков. Адиабатные равновесные парожидкостные потоки принципиально не отличаются от газожидкостных.

---

* Речь идет об адиабатной системе лишь в смысле взаимодействия с внешней средой; внутренняя необратимость имеет место всегда, так что удельная энтропия потока возрастает по длине.

Важный признак классификации двухфазных потоков — *физическая природа источника движения*. Здесь различают:

а) *вынужденное движение* смеси (имеется нагнетательное устройство);

б) *свободное движение* (естественная циркуляция) — движение под действием силы тяжести; такого рода движение реализуется в процессах барботажа, в парогенераторах, выпарных и дистилляционных аппаратах с естественной циркуляцией, эрлифтных устройствах. На рис. 7.1 представлены примеры устройств, реализующих свободное движение двухфазной среды. Барботаж (рис. 7.1, *а*) — это движение пузырьков пара (или газа) через жидкость; процесс используется в деаэраторах ТЭС и АЭС, аппаратах химической технологии. Схема двухтрубного котла (рис. 7.1, *б*), реализованная впервые более 100 лет назад, принципиально сохранилась и в современных котельных установках с естественной циркуляцией. Эрлифтные устройства (рис. 7.1, *в*) служат для подъема и перекачки жидкостей, особенно агрессивных к конструкционным материалам;

в) движение, *обусловленное* самим *фазовым переходом*. Теплота фазового перехода $h_{LG}$ представляет собой сумму изменения внутренней энергии и работы расширения:

$$h_{LG} = u'' - u' + p_s(v'' - v'),$$

где $u''$, $u'$ — удельная внутренняя энергия пара и жидкости на линии насыщения; $v''$, $v'$ — удельные объемы фаз; $p_s$ — давление. Движение, возникающее за счет работы расширения при фазовом переходе, иллюстрирует рис. 7.2;

г) *движение под действием сил поверхностного натяжения*. Простейшие схемы, иллюстрирующие такое движение, представлены на рис. 7.3. Рисунок 7.3, *а*, отражающий непрерывный подвод жидкости в цилиндрическом капилляре к поверхности мениска, с которой происходит испарение, в комментариях не нуждается. Рисунок 7.3, *б* показывает, что в коническом капилляре защемленный объем жидкости перемещается в сторону узкого сечения.

Действительно, при абсолютной смачиваемости стенок капилляра давления жидкости в сечениях *1* и *2* равны соответственно:

$$p_1 = p'' - 2\sigma/R_1; \quad p_2 = p'' - 2\sigma/R_2,$$

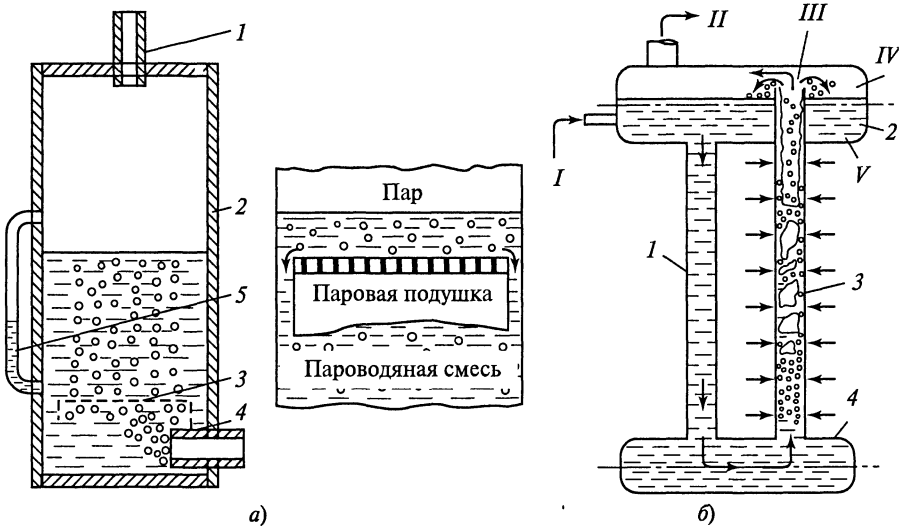



**Рис. 7.1. Примеры двухфазных потоков со свободным движением:**

*а* — барботажное устройство; *1*, *4* — соответственно отвод и подвод пара; *2* — корпус; *3* — распределительный лист; *5* — водомерное стекло; *б* — двухтрубный котел с естественной циркуляцией; *1*, *3* — ненагреваемый и нагреваемый стояки; *2*, *4* — паровой и водяной барабаны; *I* — подача воды; *II* — отбор пара; *III* — разделение фаз; *IV* — пар; *V* — вода; *в* — эрлифтное устройство; *1* — подача воздуха; *2* — труба для подъема газожидкостной эмульсии; *3* — отвод жидкости; *4* — выход воздуха; *5* — сепаратор; $H_l$, $H_{tp}$ — высоты уровней жидкости и двухфазной смеси

где $p''$ — давление в паре; σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $R_1$ и $R_2$ — радиусы капилляра в сечениях *1* и *2*; поскольку $p''$ = idem, $R_1 < R_2$, то $p_1 < p_2$, что и обусловливает движение жидкости.

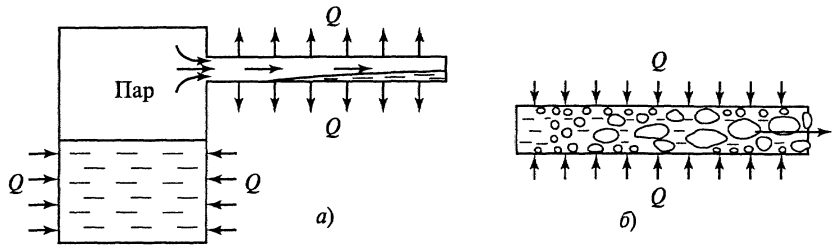



**Рис. 7.2. Движение двухфазной среды, обусловленное процессами конденсации (*а*) и испарения (*б*)**

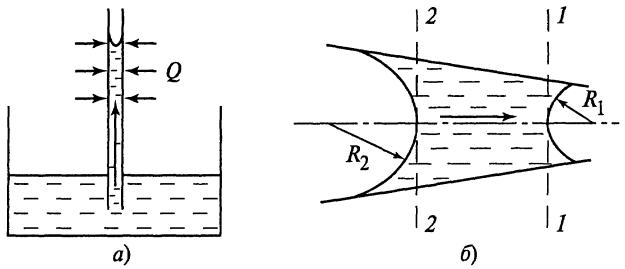



**Рис. 7.3. Движение, обусловленное действием капиллярных сил:**

*а* — испарение жидкости с поверхности капилляра; *б* — «защемленная» жидкость в коническом капилляре

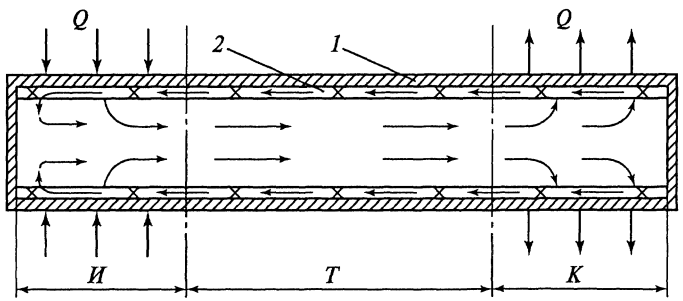



**Рис. 7.4. Схема тепловой трубы**

Циркуляция жидкости и пара, вызванная работой расширения при фазовом переходе и силами поверхностного натяжения, реализуется в так называемой тепловой трубе*, принципиальная схема которой дана на рис. 7.4. Тепловые трубы предназначены для передачи тепла на значительное расстояние при относительно неболь-

* Исходя из назначения и принципа действия, правильно бы было говорить о *теплопередающей* трубе, однако в технике «прижился» не очень строгий термин «тепловая труба».

ших разностях температур между отдающим и воспринимающим тепло объектами; они достаточно широко используются в технике. В зоне испарения тепловой трубы *И* тепло подводится к ее наружной поверхности, в зоне конденсации *К* — отводится. Движение пара обусловлено процессом фазового перехода — используется работа расширения. Движение жидкости из зоны конденсации в зону испарения через адиабатическую транспортную зону *Т* вызывают силы поверхностного натяжения. В зоне испарения межфазная поверхность углубляется в капиллярно-пористую структуру фитиля (в простейшем случае фитиль — это несколько слоев металлической сетки), так что радиус кривизны этой поверхности примерно равен характерному размеру капилляров, пронизывающих фитиль (обычно — десятки микрометров). В зоне конденсации жидкость полностью покрывает поверхность фитиля, так что радиус кривизны межфазной поверхности здесь примерно равен радиусу трубы, что обычно на 2—3 порядка больше радиуса капилляра. Таким образом, движение жидкости в фитиле тепловой трубы качественно аналогично схеме рис. 7.3, *а* и *б*.

Паро- или газожидкостные потоки могут иметь весьма разную *структуру*, которая характеризуется формой границы раздела фаз и степенью дискретности объемов одной фазы внутри другой. Структура или режим течения двухфазной смеси зависит от соотношения объемных расходов фаз в канале, скорости смеси, а также ориентации канала (горизонтальные, вертикальные или наклонные трубы). Классификация двухфазных потоков по структуре подробнее будет рассмотрена в § 7.3.

## 7.2. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

### 7.2.1. ПАРОСОДЕРЖАНИЕ

Пусть в некотором канале движется газожидкостная смесь с общим массовым расходом $G$, кг/с, причем $G = G' + G''$, где $G''$, $G'$ — массовые расходы газовой и жидкой фазы. (Здесь и далее будем, как обычно, использовать для величин, относящихся к жидкой фазе, индекс $'$, к паровой — $''$.)

Отношение $G''/G = x$ — массовое расходное газосодержание (паросодержание), $G'/G = 1 - x$ — массовое расходное влагосодержание.

Объемные расходы фаз $\dot{V}'' = G''/\rho''$ и $\dot{V}' = G'/\rho'$ в сумме дают объемный расход смеси $\dot{V} = \dot{V}'' + \dot{V}'$, м$^3$/с. (Здесь $\rho'$ и $\rho''$ — плотности жидкости и пара.) Поделив эту сумму почленно на $\dot{V}$, получим

$$1 = \beta + (1 - \beta),$$

где $\dot{V}''/\dot{V} = \beta$ — объемное расходное газо- (паро-) содержание.

Очевидны соотношения:

$$\frac{G''}{G'} = \frac{x}{1-x}; \quad \frac{\dot{V}''}{\dot{V}'} = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{\rho''}{\rho'}. \tag{7.1}$$

Диапазон изменения $x$ и $\beta$ очевидно одинаков: $0 \le x \le 1$, $0 \le \beta \le 1$.

На границах этого интервала объемные и массовые расходные паросодержания совпадают, но из-за условия $\rho' >> \rho''$ внутри интервала они отличаются весьма сильно. Рисунок 7.5 дает связь $\beta(x)$ для пароводяных потоков. Очевидно, что при $p = p_{кр}$ фазы неразличимы, поток становится однофазным, формально при этом $x \equiv \beta$ во всем интервале. По мере снижения давления одним и тем же значениям $x$ соответствуют все большие значения $\beta$. Для примера водовоздушная смесь при $p = 0{,}1$ МПа и комнатной температуре при $x = 0{,}1$ имеет $\beta = 0{,}988$, в чем легко убедиться подставив в формулу (7.1) значения $x = 0{,}1$, $\rho' = 1000$ кг/м$^3$, $\rho'' \approx 1{,}2$ кг/м$^3$. Даже при $x = 0{,}01$ в этом случае объемная доля газа в расходе смеси весьма велика: $\beta \approx 0{,}89$.

В равновесных парожидкостных потоках массовое паросодержание определяет энтальпию смеси

$$h_{см} = h_s'' x + h_s'(1 - x),$$

где $h_s''$ и $h_s'$ — энтальпия пара и жидкости на линии насыщения.

Поскольку $h_s'' - h_s' = h_{LG}$, то

$$x_б = (h_{см} - h_s')/h_{LG}. \tag{7.2}$$

Такое определение массового расходного паросодержания удобно использовать для потоков в условиях теплообмена с окружающей

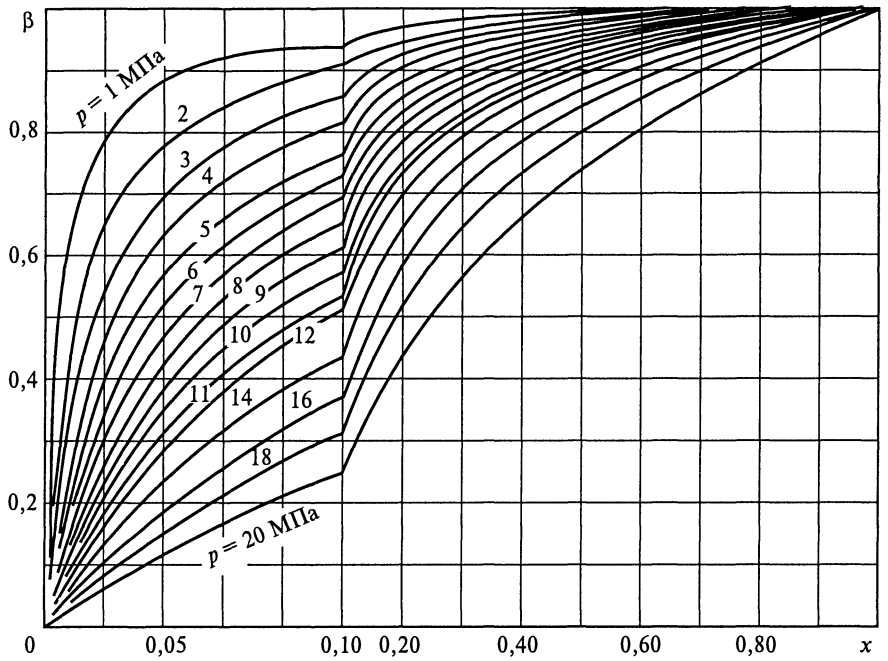



**Рис. 7.5. Связь объемного β и массового $x$ расходных паросодержаний для воды при различных давлениях $p$**

средой, так как $h_{см}$ легко определяется из энергетического баланса. Определение (7.2) применяют и в случае неравновесных потоков. Тогда величина $x = x_б$, определяемая этой формулой, не выражает массовую долю пара в расходе смеси, а представляет собой *относительную энтальпию потока*. В этом случае (для неравновесных потоков) мы будем использовать нижний индекс «б» (балансовое паросодержание). В отличие от массового расходного паросодержания $x$, относительная энтальпия потока $x_б$ может быть как меньше нуля, что отвечает условиям кипения в канале не догретой до температуры насыщения жидкости ($h_{см} < h'_s$), так и больше единицы, что характерно для перегретого пара с капельками жидкости.

Если каким-либо способом обнаружено, что в полном сечении канала $s$ часть $s''$ приходится на газовую фазу, а часть $s'$ — на жидкую (рис. 7.6), то очевидно, $s'' + s' = s$. При этом в реальном процессе в фиксированном сечении канала относительные доли $s''$ и $s'$ могут меняться, так что здесь имеются в виду их осредненные за неко-

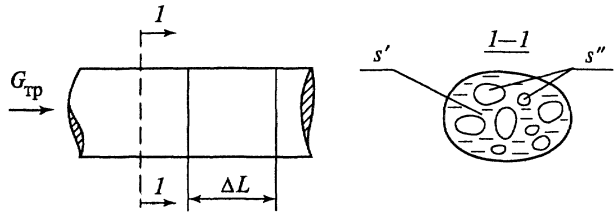



**Рис. 7.6. К определению истинного объемного паросодержания**

торое время наблюдения значения. Отношение $s''/s = \varphi$ — истинное объемное паро- (газо-) содержание. Так же, как и расходные характеристики, $\varphi$ изменяется от 0 до 1. Но в отличае от расходных характеристик, которые могут быть либо заданы заранее, либо определены из граничных условий, истинное объемное паросодержание является функцией самого процесса и заранее задано быть не может. Расчет $\varphi$ является одной из важнейших задач анализа двухфазных потоков. Хотя $\varphi$ определено как отношение площадей, легко показать, что оно характеризует долю мгновенного объема газа в некотором выделенном объеме канала. Очевидно, что объем смеси, соответствующий длине канала $\Delta L$ (см. рис. 7.6), равен $V = s\Delta L$*. Если длина $L$ достаточно мала, то можно полагать, что $s''$ = const и $s'$ = const внутри рассмотренного участка. Тогда объемы газа и жидкости будут соответственно: $V'' = s''\Delta L$, $V' = s'\Delta L$.

Истинное объемное паросодержание

$$\varphi = s''/s = V''/V,$$

т.е. равно отношению мгновенных объемов пара и смеси.

### 7.2.2. СКОРОСТИ

Определим скорости фаз и смеси. Истинная скорость фазы есть отношение объемного расхода фазы к площади сечения, занимаемой этой фазой:

$$\left.\begin{aligned} w'' &= \dot{V}''/s'' = \dot{V}''/(s\varphi); \\ w' &= \dot{V}'/s' = \dot{V}'/[s(1-\varphi)]. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

* Обозначения объемов отличаются от обозначений объемных расходов отсутствием точки над $V$.

Отношение $w''/w' = \phi$ называется *фактором* или *коэффициентом скольжения.*

Используя (7.3) и определения $\beta$ и $\varphi$, получаем

$$\phi = w''/w' = [\beta/(1-\beta)]/[\varphi/(1-\varphi)]. \tag{7.4}$$

Из (7.4) ясно, что при $\beta > \varphi \quad \phi > 1$ (т.е. газ движется быстрее), а при $\beta < \varphi \quad \phi < 1$ (быстрее движется жидкость).

Величины $w''$ и $w'$ — это физически реальные характеристики процесса, аналогичные среднемассовой скорости в однофазном потоке. В анализе двухфазных потоков используют, кроме того, некоторые служебные по своей сути величины, лишенные, в строгом смысле слова, физического содержания. Это — так называемые приведенные величины. Приведенная скорость фазы определяется как отношение объемного расхода фазы к полному сечению канала:

$$\left.\begin{aligned} w_0'' &= \dot{V}''/s = w''\varphi; \\ w_0' &= \dot{V}'/s = w'(1-\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Ясно, что приведенная скорость пара особенно сильно отличается от соответствующей истинной при $\varphi \to 0$, а приведенная скорость жидкости — при $\varphi \to 1$. Сумма приведенных скоростей фаз — это *скорость смеси* (т.е. отношение объемного расхода смеси к площади сечения канала):

$$w_{\text{см}} = w_0'' + w_0' = \dot{V}/s. \tag{7.6}$$

Приведенная скорость смеси, или *скорость циркуляции* — это отношение массового расхода смеси к произведению плотности жидкости на площадь сечения канала:

$$w_0 = G/(\rho' s). \tag{7.7}$$

В парогенерирующем канале скорость циркуляции — это та реальная скорость, с которой на вход подается однофазная жидкость. В технической и научной литературе широко используется понятие *массовой скорости смеси*, кг/(м$^2$ · с),

$$w_0 \rho' = G/s,$$

представляющей собой плотность потока массы смеси. Для каналов постоянного сечения с непроницаемыми стенками значения $\rho' w_0$ и

$w_0$ по длине канала не изменяются независимо от наличия или отсутствия теплообмена с окружающей средой. Совершенно по-другому ведет себя скорость смеси. Из определения $w_{см}$ и $w_0$ следует:

$$w_{см} = (G''/\rho'' + G'/\rho')/s = w_0[1 + x(\rho' - \rho'')/\rho''], \qquad (7.8)$$

или

$$w_{см} \equiv G/(\rho' s)[\dot{V}\rho'/(\dot{V}''\rho'' + \dot{V}'\rho')] = \frac{w_0}{1 - \beta(\rho' - \rho'')/\rho'}. \qquad (7.8а)$$

В парогенерирующем канале за счет подвода тепла расходное паросодержание непрерывно растет по длине и, следовательно, растет скорость смеси. При полном испарении жидкости $x = \beta = 1$, тогда из (7.8) и (7.8а) следует, что

$$w_{см} = w_0 \rho'/\rho''.$$

Для воды при атмосферном давлении скорость смеси при полном ее испарении возрастает примерно в 1600 раз, для азота при том же давлении — примерно в 160 раз в сравнении со скоростью однофазной жидкости на входе в канал. Ясно, что при некоторых значениях скорости циркуляции формальная оценка скорости смеси в парогенерирующем канале по формулам (7.8) или (7.8а) может дать значение, превышающее скорость звука в паре. Практически это означает, что в таком канале произойдет «запирание» потока, поскольку в прямом канале невозможен переход потока через скорость звука. В случае конденсации пара в трубе скорость смеси, естественно, уменьшается в соответствии с теми же соотношениями (7.8) и (7.8а).

В отсутствие скольжения фаз, т.е. при $\phi = 1$, расходное и истинное объемные паросодержания одинаковы. При этом согласно (7.5) и (7.6)

$$w_{см} = w'' = w'.$$

Отсюда ясно, что скорость смеси в известной мере отражает реальный уровень скоростей фаз в канале.

Введем понятие «плотность смеси». Мгновенная плотность смеси может рассматриваться как «истинная» среднеобъемная величина

$$\rho_\varphi = (V''\rho'' + V'\rho')/V = \varphi\rho'' + (1 - \varphi)\rho' \qquad (7.9)$$

(здесь $V$ без точки, т.е. объемы, а не объемные расходы).

Расходная плотность смеси

$$\rho_\beta = \frac{\dot{V}''\rho'' + \dot{V}'\rho'}{\dot{V}} = \beta\rho'' + (1 - \beta)\rho'. \qquad (7.9а)$$

Очевидно, что в отсутствие скольжения фаз, когда $\beta = \varphi$, эти формулы совпадают. Поскольку отсутствие скольжения — главный признак так называемой *гомогенной смеси*, расходную плотность называют также гомогенной. Эта величина может сильно отличаться от истинной плотности смеси при значительном скольжении фаз и в этом отношении является такой же условной величиной, как приведенные скорости фаз.

Из введенных выше количественных характеристик расходные паросодержания $x$, $\beta$, приведенные скорости фаз $w_0''$, $w_0'$, скорости смеси и циркуляции $w_{см}$, $w_0$, расходная плотность смеси $\rho_\beta$ обычно могут рассматриваться как известные, заданные. Они определяются по известным значениям расходов, свойств фаз, теплового потока на стенке, геометрии канала. «Истинные» параметры двухфазного потока ($\varphi$, $w''$, $w'$, $\phi$, $\rho_\varphi$) являются функциями процесса и выступают обычно как цель анализа. Несложно убедиться, что знание любой одной из пяти величин достаточно для расчета остальных четырех. Например, используя (7.1) и (7.4), можно получить часто используемую связь истинного объемного паросодержания с массовым расходным и фактором скольжения

$$\varphi = \frac{x\rho'}{x\rho' + \phi\rho''(1-x)} \equiv \frac{xv''}{xv'' + \phi v'(1-x)}. \qquad (7.10)$$

Наконец, необходимо иметь в виду, что введенные величины основаны на *одномерном приближении*, когда рассматривается изменение параметров только вдоль потока.

### 7.3. СТРУКТУРА (РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ) ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

В зависимости от соотношения объемных долей фаз, скорости смеси, ориентации и геометрии канала, направления течения (опускное, подъемное, горизонтальное), а также свойств жидкости и пара (в первую очередь поверхностного натяжения, плотности, вязкости) в канале устанавливаются различные структуры двухфазного потока. Знание структуры (режима течения) для двухфазных систем сопоставимо по важности с установлением границы ламинарного и турбулентного режимов течения однофазной жидкости. Но, к сожалению, классификация режимов течения двухфазной смеси не опирается ни на столь же убедительные эксперименты, как знаменитый опыт Рейнольдса, ни на внушительные теоретические ре-

зультаты теории гидродинамической устойчивости, на которых зиждется определение условий перехода к турбулентному течению однофазной жидкости. Классификация структуры двухфазных течений основана главным образом на визуальных (или оптических) наблюдениях и во многом отражает субъективные представления исследователя. Даже в терминологии, используемой различными авторами, существуют различия.

В настоящей книге выделяется относительно небольшое число структур двухфазных потоков, отличающихся друг от друга существенными признаками. Такая классификация сложилась в отечественной литературе [16, 17, 30, 32, 39] и в главном совпадает с тем, что предлагают зарубежные специалисты [10, 37, 42, 74].

### 7.3.1. СТРУКТУРЫ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Фотографии основных режимов восходящего двухфазного потока в вертикальном канале [10] приведены на рис. 7.7. Два первых слева фотокадра относятся к *пузырьковому режиму* течения — случаи отдельных (изолированных) *а* и плотно упакованных пузырьков *б*. Модель поведения отдельных пузырьков, размещенных в узлах кубической решетки, приводит к выводу о том, что пузырьковый режим существует до истинных объемных паросодержаний $\varphi \leq 0{,}3$. При

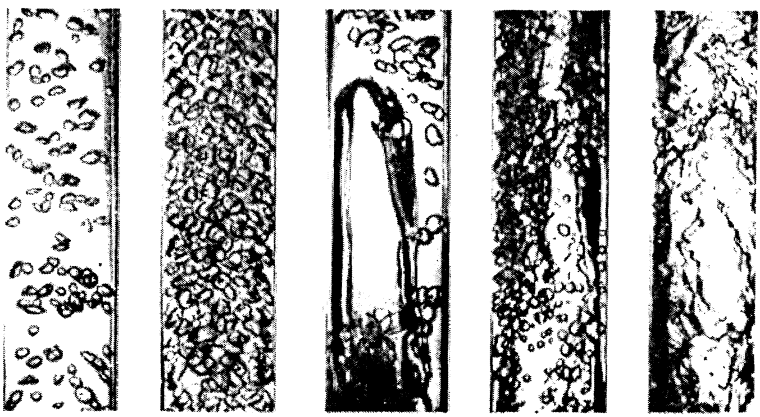



**Рис. 7.7. Режимы двухфазного (воздушно-водяного) подъемного течения в вертикальной трубе диаметром 32 мм [10]:**

*а, б* — пузырьковый режим; *в—д* — снарядный, эмульсионный и дисперсно-кольцевой режимы

большей концентрации пузырьков они сливаются. Помимо ограничения по $\varphi$, основным признаком пузырькового режима следует считать неравенство $D_п << d$, где $D_п$ и $d$ — характерный диаметр пузыря и диаметр канала. Анализ гл. 2, 5 и 6, а также опытные наблюдения говорят о том, что наиболее вероятный размер пузырька в рассматриваемом режиме — это капиллярная постоянная. Ясно, что в трубках малого диаметра (капиллярах) пузырьковый режим течения не реализуется. При $D_п < b$ форма пузырьков близка к сферической. При подъемном течении в земных условиях пузырьки, двигаясь вместе с несущей жидкостью, всплывают относительно нее за счет архимедовых сил, так что $\phi > 1$, $\beta > \varphi$.

При истинных объемных паросодержаниях $\varphi = 0{,}3$—$0{,}7$ и относительно низких скоростях смеси наблюдается *снарядный режим* течения (рис. 7.7, *в*) характеризующийся тем, что поперечный размер парового объема соизмерим с диаметром канала ($D_п = 0{,}7$—$0{,}9d$). Во многих экспериментах наблюдали через прозрачную стенку трубы весьма красивую картину следования паровых «снарядов» одного за другим (рис. 7.8, *а*). Головная часть снарядов имеет правильную, почти сферическую форму, что послужило основанием для названия режима и позволяет строить теорию их всплытия в трубе [3].

В кормовой части снарядов всегда имеются мелкие пузырьки, хотя их доля в объемном расходе пара (газа) весьма мала. Паровые снаряды, как и пузырьки, имеют конечную скорость скольжения относительно жидкости; при подъемном движении $\phi > 1$.

При высоких скоростях смеси наблюдается как слияние, так и дробление пузырьков, в результате возникает достаточно однородная (гомогенная) структура с хорошо перемешанными фазами. На фотографиях весьма сложно бывает различить очертания объемов, занятых жидкой фазой (рис. 7.7, *г*). Такой режим называют *эмульсионным* (в зарубежной литературе чаще используется термин «вспененный»). Из-за высокой скорости смеси взаимное скольжение фаз относительно невелико, величина $\phi$ близка к единице. Область истинных объемных паросодержаний, соответствующих эмульсионному режиму, при различных сочетаниях скоростей смеси и давления может быть весьма широкой ($\phi = 0{,}3$—$0{,}8$). Согласно [16] эмульсионный режим течения является основным для парожидкостных потоков при высоких давлениях, характерных для котельных установок ТЭС и парогенераторов АЭС.

При высоких объемных паросодержаниях (обычно $\varphi \geq 0{,}8$) устанавливается *дисперсно-кольцевой* режим течения смеси

(рис. 7.7, *д*), в котором жидкость движется в основном в тонкой пленке на внутренней поверхности трубы (образуя жидкое кольцо), а пар — в центральной части канала. С поверхности жидкой пленки срываются капли, уносимые потоком пара. Фотографии (см. рис. 7.7) демонстрируют, насколько непросто идентифицировать по ним режим течения двухфазной смеси, что и объясняет известный субъективизм в отнесении конкретного режима к тому или иному классу. На рис. 7.8, *б* показана схема дисперсно-кольцевого режима, на которой его отличительные признаки яснее, чем на фотографии рис. 7.7, *д*.

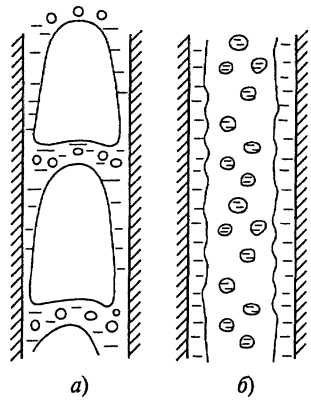



**Рис. 7.8. Схематическое представление снарядного (*а*) и дисперсно-кольцевого (*б*) режимов течения**

Дисперсно-кольцевой режим в восходящем потоке возможен только в том случае, когда жидкая пленка увлекается вверх за счет трения со стороны пара. Это означает, во-первых, что скорости смеси, при которых реализуется дисперсно-кольцевой режим течения, достаточно высоки, а во-вторых, что в этом режиме скольжение весьма велико ($\phi >> 1$).

Опускные течения газожидкостных смесей в вертикальных каналах имеют некоторую специфику. Пузырьковый режим отличается здесь тем, что пузырьки концентрируются у оси канала. Снарядный режим при опускном течении может быть даже более ярко выражен (как на схеме рис. 7.8, *а*), чем при подъемном течении. Ясно, что при высоких скоростях смеси, характерных для эмульсионного и дисперсно-кольцевого режимов течения, отличия в структуре подъемных и опускных течений практически незаметны. Однако при опускном течении дисперсно-кольцевая структура реализуется и при низких скоростях смеси: в этом случае фактически наблюдается гравитационная пленка со спутным потоком пара (см. гл. 4).

### 7.3.2. РЕЖИМЫ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ И НАКЛОННЫХ КАНАЛАХ

Главное отличие горизонтальных и слабо наклоненных к горизонту каналов от вертикальных — в несимметрии гравитационных сил относительно оси канала. Это вызывает смещение паровой фазы к верхней образующей, а жидкой — к нижней (рис. 7.9) в пузырьковом, снарядном, эмульсионном и дисперсно-кольцевом ре-

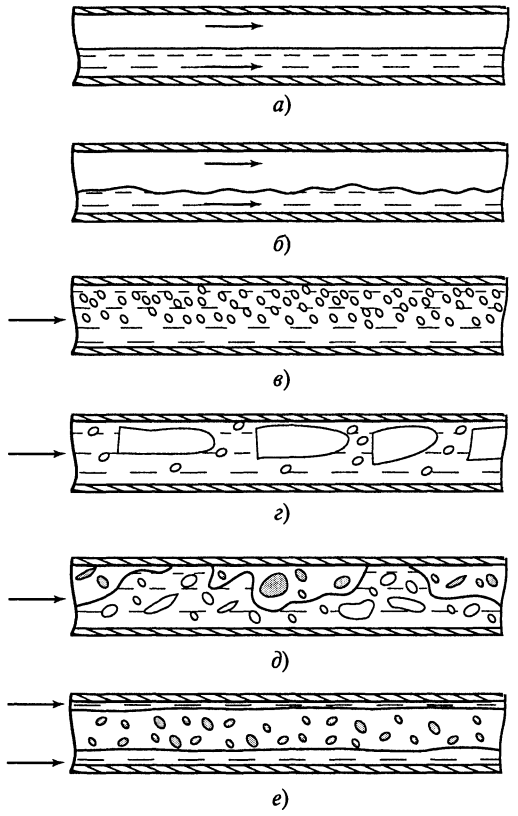



**Рис. 7.9. Режимы течения двухфазной смеси в горизонтальных каналах:**

*а* — расслоенный; *б* — волновой; *в* — пузырьковый; *г* — снарядный; *д* — эмульсионный; *е* — дисперсно-кольцевой

жимах, а также к появлению двух специфичных для горизонтальных труб структур: расслоенного и расслоенного волнового. Расслоенный режим с плоской поверхностью является, видимо, теоретическим пределом, возможным при очень малых скоростях в слабо наклоненных в сторону течения каналах. *Волновой* (или *расслоенный волновой*) наблюдается весьма часто, особенно в каналах большого сечения, что актуально для систем трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, солнечных энергетических установок, конденсатопроводов в заводских тепловых сетях и т.п. *Пузырьковый* и *снарядный* режимы в горизонтальных каналах наблюдаются при меньших объемных паросодержаниях, чем в вертикальных. *Эмульсионный* режим в горизонтальных каналах сохраня-

ет известные черты волнового движения, когда амплитуда волн соизмерима с диаметром канала. При этом жидкие перемычки (гребни волн) насыщены паровыми (газовыми) пузырьками, а паровые снаряды (впадины волн) содержат множество жидких капель, т.е. в целом структура потока достаточно однородная. *Дисперсно-кольцевой* режим течения в горизонтальных каналах даже при очень высоких скоростях газа отличается существенным различием толщин жидкой пленки на верхней и нижней образующих. Например, в опытах [75] в горизонтальной трубе диаметром 95,3 мм при скорости воздуха 68 м/с толщина водяной пленки в верхней точке сечения трубы была 0,1 мм, а в нижней — в четыре раза толще (0,4 мм). В тех же опытах (давление в них лишь немного превышало атмосферное) при скорости воздуха 26 м/с течение оставалось расслоенным (верхняя образующая трубы оставалась сухой).

### 7.3.3. ГРАНИЦЫ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ

Из качественного описания характерных структур двухфазных потоков ясно, насколько важно правильно идентифицировать эти структуры при расчете гидравлического сопротивления и теплообмена. Представляется очевидным, например, что при расчетах пузырькового и дисперсно-кольцевого режимов невозможно исходить из одинаковой модели. В настоящее время разработано множество методов определения границ режимов двухфазных течений (что само по себе свидетельствует об отсутствии общепринятой методики расчета). Обычно используется двумерная система координат, позволяющая на плоскости изобразить области, относящиеся к различным структурам. Координаты у разных авторов различны. Во многих случаях они размерны, что предопределяет их использование лишь для конкретных систем (чаще всего вода—воздух или вода—пар). В качестве типичного примера на рис. 7.10 приведена популярная и достаточно удачная карта режимов для воздушно-водяных и пароводя-

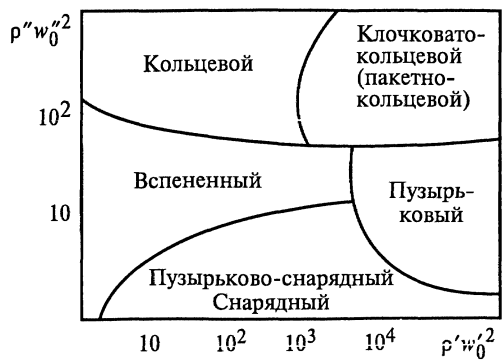



**Рис. 7.10. Карта режимов Хьюитта и Робертса [74] для восходящего двухфазного потока**

ных потоков в вертикальных каналах [10, 74]. Однако сравнение ее с другими опытными данными показывает не только количественные различия, но и несколько иные тенденции в поведении некоторых кривых, разделяющих области с различными структурами. Вместе с тем и в случае использования безразмерных координат едва ли можно надеяться, что с помощью всего двух параметров удастся описать условия всех переходов от одной структуры к другой. Анализ с помощью теории размерностей приводит к выводу о том, что для такого описания требуется в общем случае не менее шести чисел подобия [69]. Следует также иметь в виду, что границы режимов течения зависят не только от режимных параметров и свойств фаз, но и от условий на входе в канал. При этом установление определенной структуры двухфазного течения происходит на больших длинах, нередко превышающих 100 диаметров канала. Этот факт не должен вызывать удивления, если вспомнить, как долго устанавливается определенная волновая структура в гравитационных пленках (см. гл. 4).

Таким образом, карты режимов двухфазных потоков следует рассматривать как достаточно грубый инструмент для приближенной оценки. Более перспективными представляются расчетные рекомендации по определению границ режимов течения, построенные на приближенных физических моделях [69—71]. Авторы этих работ отдельно моделируют каждый переход, например, от пузырькового режима к снарядному или эмульсионному, от снарядного к дисперсно-кольцевому или к эмульсионному и т.д. Естественно поэтому, что границы между различными областями описываются не двумя универсальными параметрами, как на традиционных картах режимов, а большим их числом.

Для вертикальных восходящих потоков принципиально важен переход от тех режимов, где поток в грубом приближении еще можно считать гомогенным (пузырьковый, снарядный, эмульсионный режимы) к дисперсно-кольцевому режиму течения смеси. Для практически наиболее вероятного сочетания расходов фаз такой переход согласно [70] происходит, когда скорость газовой фазы превосходит скорость витания капли, определяемую формулой (5.41). Для образования фактически раздельного течения газа (пара) и жидкости, характерного для дисперсно-кольцевого режима важно, чтобы именно крупные капли (с диаметром, близким к капиллярной постоянной $b = \sqrt{\sigma/g\Delta\rho}$ и более) не загромождали

центральную часть сечения канала. Практически капли такого размера при большой скорости газа срываются с поверхности жидкой пленки и затем осаждаются на нее. В стационарном дисперсно-кольцевом потоке процессы осаждения и уноса капель находятся в динамическом равновесии. Мелкие капли легко уносятся потоком газа при оговоренном выше условии. Поскольку для дисперсно-кольцевого режима характерны высокие значения истинного объемного паросодержания ($\varphi \geq 0{,}8$), истинная и приведенная скорости газа здесь различаются незначительно. Критерий перехода к дисперсно-кольцевому режиму записывается в следующем виде:

$$\mathrm{Ku} = \frac{\rho''^{1/2} w_0''}{[\sigma g(\rho' - \rho'')]^{1/4}} \geq 3{,}1 . \qquad (7.11)$$

Безразмерный комплекс (7.11) называют (причем чаще в работах зарубежных авторов [10, 69—71], чем отечественных) числом Кутателадзе Ku*. Сравнение с формулой (5.41) показывает, что для установления кольцевой структуры скорость газа должна превосходить предельную скорость падения крупных капель почти вдвое (константа 3,1 в (7.11) определена на основе опытных исследований). Качественно это может быть объяснено тем, что капли должны уноситься газом вблизи поверхности пленки, где локальная скорость меньше, чем средняя. Для системы вода—воздух при атмосферном давлении и температуре 20 °С формула (7.11) дает граничное значение приведенной скорости газа $w_0'' \approx 14{,}6$ м/с, хорошо согласующееся с опытными данными. На диаграмме режимов Хьюитта и Робертса (см. рис. 7.10) такой скорости газа соответствует граница кольцевого режима при малых приведенных скоростях жидкости ($\rho' w_0'^2 \approx 5$).

Следует иметь в виду, что при высоких приведенных давлениях предельная скорость падения жидких капель становится малой (из-за большой плотности пара и малого значения поверхностного натяжения). Например, для воды при 10 МПа $\sqrt[4]{\sigma g \Delta\rho/(\rho'')^2} \approx 0{,}39$ м/с, так что условие (7.11) выполняется уже при $w_0'' \approx 1{,}2$ м/с. Такая скорость достигается при весьма низких объемных паросодержаниях, при которых образование кольцевой структуры принципи-

* Самсон Семенович Кутателадзе (1914—1986) — выдающийся советский ученый-теплофизик, академик АН СССР, известный своими работами, прежде всего, в области теплообмена при кипении и конденсации, а также при турбулентном течении в пограничном слое.

ально невозможно. Поэтому критерий перехода к дисперсно-кольцевому режиму (7.11) должен быть дополнен установлением некоторой нижней границы истинного объемного паросодержания, гарантирующей превращение пара (газа) в несущую (диспергирующую) фазу. Упомянутая выше верхняя граница существования индивидуальных пузырьков в жидкости ($\varphi \le 0{,}3$), очевидно, может быть отнесена и к каплям, т.е. изолированные капли существуют при $(1 - \varphi) < 0{,}3$. В кольцевом потоке, однако, большая часть расхода жидкости приходится на жидкую пленку. Из опытных наблюдений можно заключить, что в дисперсно-кольцевых потоках относительная толщина жидкой пленки $\delta / d \le 0{,}1$. Два эти качественных аргумента позволяют указать как нижнюю границу кольцевой структуры истинное объемное паросодержание $\varphi_{мин} = 0{,}64—0{,}7$; эта граница дополняет условие (7.11).

Для течения в горизонтальных и слабонаклонных трубах приближенная методика расчета условий взаимных переходов между различными структурами, предложенная в [71], рассматривает в качестве базового расслоенный режим течения. Для этой структуры одномерные уравнения сохранения импульса записываются отдельно для потоков жидкости и газа. При известном (или постулируемом) законе трения на межфазной границе такой подход позволяет рассчитать доли сечения, приходящиеся на каждую из фаз в рассмотренном режиме течения, и градиент давления в трубе. (В § 7.7 подобный подход будет рассмотрен нами достаточно детально.) Если бы жидкость и газ двигались в трубе со своим массовым расходом в отсутствие другой фазы, то соответствующие градиенты давления за счет трения выражались бы известным законом Дарси—Вейсбаха [26]:

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{dp}{dz}\right)' &= \frac{\xi'}{2}\,\frac{\rho' w_0'^2}{d}; \\ -\left(\frac{dp}{dz}\right)'' &= \frac{\xi''}{2}\,\frac{\rho'' w_0''^2}{d}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

Коэффициенты гидравлического сопротивления $\xi'$ и $\xi''$ рассчитываются по хорошо известным из механики однофазной жидкости соотношениям как функция числа Рейнольдса [26, 39]. Отношение градиентов давления, определяемых формулами (7.12), в двухфазном потоке с раздельным течением фаз показывает, в какой степени

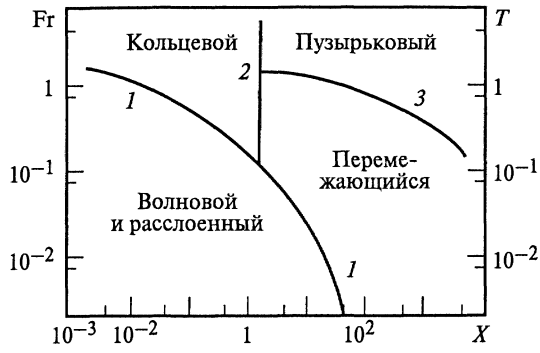



**Рис. 7.11. Карта режимов Тейтела и Даклера [71] для горизонтальных каналов**

поведение двухфазной смеси ближе к жидкости, чем к газу [42]. Это отношение называют параметром Мартинелли*

$$X = \sqrt{\frac{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)'}{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)''}}. \qquad (7.13)$$

В зарубежной литературе этот параметр используется очень широко, в том числе и в тех случаях, когда потоки жидкости и газа нельзя рассматривать как раздельные. В [71] параметр Мартинелли $X$ использован в качестве одного из безразмерных комплексов, используемых при расчете границ режимов течения двухфазных смесей.

Результаты этих расчетов представлены в виде карты режимов, которая показана на рис. 7.11 с небольшим изменением: не показана граница расслоенного и расслоенного волнового режимов как не имеющая серьезного значения для инженерной практики.

Авторы [71] объединили снарядный и эмульсионный режимы в перемежающийся режим течения, что достаточно обосновано с точки зрения приложений. В горизонтальных каналах особенно в условиях теплообмена чрезвычайно важно определить границу расслоенного режима течения, так как в этом режиме верхняя часть поверхности трубы не имеет контакта с жидкостью. В [71] принято, что волновой режим переходит в дисперсно-кольцевой или перемежающийся, когда амплитуда волн становится соизмеримой с диаметром канала и жидкость смачивает верхнюю образующую цилин-

* Р.С. Мартинелли ввел этот параметр для обработки опытных данных о градиентах давления и истинном паросодержании в двухфазных потоках. Эти исследования отражены в публикациях 1944—1948 гг. [42].

дрической поверхности. Предполагается, что рост амплитуды обусловлен снижением давления в газовой фазе над гребнями волн, которое в свою очередь обусловлено увеличением скорости газа в узком сечении между поверхностью трубы и гребнем волны. Хотя такое явление «аэродинамического подсоса» напоминает механизм развития неустойчивости Гельмгольца (см. рис. 3.10), прямая ссылка на этот механизм (как это делается в [71]), конечно, некорректна. Неустойчивость Гельмгольца относится к возникновению волн при относительном движении идеальных жидкостей, неограниченно простирающихся в направлении нормали к границе раздела, а вовсе не к течению в канале. Однако снижение давления газа в местах сужения проходного сечения действительно происходит и может быть причиной нарастания амплитуды волн. Таким образом, возмущающей поверхность раздела является сила инерции со стороны потока газа, которая может быть записана через приведенную скорость: $\rho'' w_0''^2$. Если вслед за авторами [71] не учитывать действие сил поверхностного натяжения, то силой, восстанавливающей состояние поверхности раздела, является сила гравитации. Это означает, что критерием, определяющим границу существования расслоенного волнового режима течения, является число Фруда ($\mathrm{Fr}''$) газовой фазы. В [71] используется фактически корень из числа $\mathrm{Fr}''$:

$$F = \sqrt{\mathrm{Fr}''} = \left(\frac{\rho''}{\rho' - \rho''}\right)^{1/2} \frac{w_0''}{(gd)^{1/2}}. \qquad (7.14)$$

Как уже говорилось, волновой режим может перейти либо в кольцевой, либо в перемежающийся режимы течения. Можно ожидать, что реализация того или иного перехода зависит от истинного объемного паросодержания в предшествующем (волновом) режиме. В [71] принято, что при $\varphi \geq 0{,}5$ устанавливается перемежающийся, а при $\varphi < 0{,}5$ — дисперсно-кольцевой режим. Значению $\varphi = 0{,}5$ отвечает при раздельном течении фаз значение параметра Мартинелли $X = 1{,}6$. Таким образом, на рис. 7.11 кривая *1* — это расчетная зависимость $F(X)$, определяющая границу волнового режима, а кривая *2*, отвечающая условию $X = 1{,}6$, показывает, в какой из двух возможных режимов превращается волновой режим течения.

В горизонтальном канале пузырьковый режим отличается от перемежающегося лишь характерным размером паровых пузырьков. В [71] принято, что паровые снаряды дробятся за счет турбулентных пульсаций в жидкой фазе, интенсивность которых пропорцио-

нальна силам инерции в жидкости: $\rho' w_0'^2$. Гравитационные силы, напротив, стремятся разделить фазы и способствуют скоплению крупных паровых объемов в верхней части канала. Таким образом обосновывается, что положение границы между пузырьковыми и перемежающимися режимами (кривая *3* на рис. 7.11) определяется числом Фруда жидкой фазы

$$\mathrm{Fr}' = \frac{\rho' w_0'^2}{g(\rho' - \rho'')d}.$$

В [71] используется безразмерный комплекс $T$, который фактически можно представить как

$$T = \sqrt{\mathrm{Fr}'} = \left(\frac{\rho'}{\rho' - \rho''}\right)^{1/2} \frac{w_0'}{(gd)^{1/2}}. \qquad (7.15)$$

Таким образом, карта режимов Тейтела и Даклера в отличие от традиционных отражает взаимозависимость не двух, а трех безразмерных комплексов (с учетом границы между расслоенным и волновым режимами — четырех). При этом границы режимов рассчитаны на основе простых физических моделей с привлечением некоторой опытной информации, а не являются прямым обобщением опытных данных. Согласие расчетных карт режимов с результатами экспериментов можно считать вполне удовлетворительным, если принять во внимание сказанное ранее о практической невозможности учесть влияние на режим течения специфики входных условий.

### 7.4. РАСЧЕТ ИСТИННОГО ОБЪЕМНОГО ПАРОСОДЕРЖАНИЯ В ПОТОКАХ КВАЗИГОМОГЕННОЙ СТРУКТУРЫ

С точки зрения технических приложений целью расчета двухфазных течений являются гидравлическое сопротивление (канала или контура) и истинное объемное паросодержание $\varphi$. При этом структура потока и истинное объемное паросодержание взаимосвязаны, а надежный расчет градиента давления в двухфазном потоке в общем случае невозможен без информации о структуре и истинном объемном паросодержании. Отсюда следует и чрезвычайная важность, и огромная сложность расчетного определения $\varphi$. Отражением этого является и весьма развитая техника опытного измерения этого параметра (см., например, [10]).

Есть принципиальное различие двухфазных потоков с фактически раздельным течением фаз (хотя и интенсивно взаимодействующих) и потоков, в которых фазы перемешаны и можно говорить о некоторой квазигомогенной структуре.

К первому типу относится волновое расслоенное течение в горизонтальных трубах и дисперсно-кольцевые течения при любой ориентации канала. Ко второму типу можно отнести пузырьковый, снарядный и эмульсионный режимы течения. В § 7.4 и 7.5 рассмотрены структуры второго типа.

### 7.4.1. ВЛИЯНИЕ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТИ И ПАРОСОДЕРЖАНИЯ НА ЭФФЕКТИВНОЕ СКОЛЬЖЕНИЕ ФАЗ

В § 7.2 говорилось о том, что в отсутствие скольжения фаз $w'' = w'$, $\Phi = 1$, $\beta = \varphi$, т.е. проблема расчета истинного объемного паросодержания отсутствует. Локальное скольжение фаз возникает в полях массовых сил. В прямых каналах это — гравитационные силы. В горизонтальных потоках проекция массовых сил на направление движения равна нулю, так что локальное скольжение фаз отсутствует. Однако это не означает, что осредненные по сечению канала истинные скорости фаз в этом случае совпадают.

Действительно, пусть в канале с поперечным сечением $s$ локальные скорости фаз равны $w''_{\text{лок}} = w'_{\text{лок}} = w$. Если локальное значение истинного объемного паросодержания равно $\varphi_{\text{лок}}$, то объемный расход газа (пара)

$$\dot{V}'' = w''\varphi s = \int_s w\varphi_{\text{лок}}\, \mathrm{d}s,$$

где $w''$ — истинная скорость пара, осредненная по сечению $s''$; $\varphi = s''/s$.

Объемный расход смеси

$$\dot{V}_{\text{см}} \equiv w_{\text{см}} s = \int_s w\, \mathrm{d}s.$$

Объемное расходное паросодержание

$$\beta \equiv \frac{\dot{V}''}{\dot{V}_{\text{см}}} = \frac{\int_s w\varphi_{\text{лок}}\, \mathrm{d}s}{\int_s w\, \mathrm{d}s} = \frac{\langle w\varphi_{\text{лок}}\rangle s}{\langle w\rangle s},$$

где угловые скобки $\langle\ \rangle$ означают осреднение по сечению.

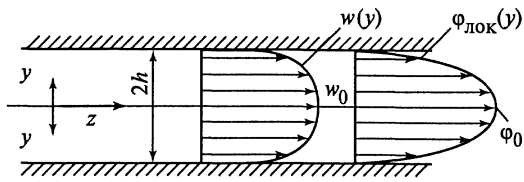



**Рис. 7.12. Предполагаемые профили скорости $w$ и истинного объемного паросодержания $\varphi$ в плоском канале**

Очевидно,

$$\langle w\varphi_{\text{лок}}\rangle = C_0 \langle w\rangle \cdot \langle \varphi_{\text{лок}}\rangle = C_0 \varphi \langle w\rangle,$$

причем в общем случае $C_0 \neq 1$.

Таким образом,

$$\beta = C_0 \varphi, \tag{7.16}$$

где $C_0$ — параметр распределения, введенный впервые в [48].

В рассматриваемых потоках квазигомогенной структуры на стенке канала располагается однофазная жидкость, т.е. локальное паросодержание равно нулю. Поскольку локальная скорость на стенке также равна нулю, то при любом монотонном законе изменения скорости $w$ и паросодержания $\varphi$ от стенки до центра канала получается, что области с повышенным локальным паросодержанием имеют более высокую скорость движения. В этом случае параметр распределения $C_0 > 1$, т.е. $\beta > \varphi$. Рассмотрим в качестве простейшей иллюстрации течение двухфазной смеси в плоском канале высотой $2h$ (рис. 7.12). В отсутствие локального скольжения $w''(y) = w'(y) = w(y)$. Предположим, что профили локальных истинного объемного паросодержания $\varphi_{\text{лок}}(y)$ и скорости $w(y)$ аппроксимируются степенными законами:

$$\frac{\varphi_{\text{лок}}}{\varphi_0} = \left(\frac{h-y}{h}\right)^m; \quad \frac{w}{w_0} = \left(\frac{h-y}{h}\right)^n.$$

Их средние значения определяются как:

$$\langle\varphi\rangle \equiv \varphi = \frac{1}{h}\int_0^h \varphi_{\text{лок}}\, \mathrm{d}y = \frac{\varphi_0}{m+1};$$

$$\langle w\rangle = w_{\text{см}} = \frac{1}{h}\int_0^h w\, \mathrm{d}y = \frac{w_0}{n+1}.$$

Среднее значение произведения $\langle w\varphi_{лок}\rangle$:

$$\langle w\varphi_{лок}\rangle = \frac{\varphi_0 w_0}{h}\int_0^h \left(1-\frac{y}{h}\right)^m\left(1-\frac{y}{h}\right)^n \mathrm{d}y = \frac{\varphi_0 w_0}{m+n+1}.$$

Параметр распределения

$$C_0 = \frac{\langle w\varphi_{лок}\rangle}{\langle w\rangle\varphi} = \frac{(m+1)(n+1)}{m+n+1} = 1+\frac{mn}{m+n+1}.$$

При $m > 0$, $n > 0$ $C_0 > 1$. Если, например, $m = 1/2$, $n = 1/7$ (последнее равенство отвечает турбулентному профилю скорости при течении однофазной жидкости в круглой трубе), то $C_0 = 24/23 \approx 1{,}04$.

Фактически соотношение (7.16) в форме:

$$\varphi = k\beta \qquad (7.16а)$$

было получено еще в 1946 г. А.А. Армандом, который обобщил с его помощью опытные данные, полученные им в ВТИ (Всесоюзный, ныне Всероссийский теплотехнический институт). Параметр Арманда для восходящих потоков в вертикальных каналах в широком диапазоне скоростей смеси, давлений и объемного расходного паросодержания $\beta$ может быть найден по номограммам, приведенным, например, в [39]. Для горизонтальных труб, где действительно отсутствует локальное скольжение, можно приближенно принимать $C_0 \approx 1{,}2$, т.е. $k \approx 0{,}83$.

### 7.4.2. ИСТИННОЕ ОБЪЕМНОЕ ПАРОСОДЕРЖАНИЕ В ПОТОКАХ С ЛОКАЛЬНЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ ФАЗ

Анализ гл. 5 позволяет утверждать, что значительное скольжение фаз должно наблюдаться у достаточно крупных пузырьков, поскольку абсолютные значения скорости гравитационного всплытия мелких сферических пузырьков малы в сравнении с характерными скоростями течения жидкости в технических устройствах. Исходя из этой посылки, в [18] рассмотрена кинематическая схема скольжения фаз, упрощенный вариант которой представлен на рис. 7.13. В двухфазном потоке выбирается контрольная ячейка, содержащая один крупный паровой пузырек или паровой снаряд (рис. 7.13, *а*); мелкие пузырьки, на долю которых приходится малая доля объемного паросодержания, не учитываются. В такой контрольной ячейке с площадью поперечного сечения $s$ скорости жидкости и парового

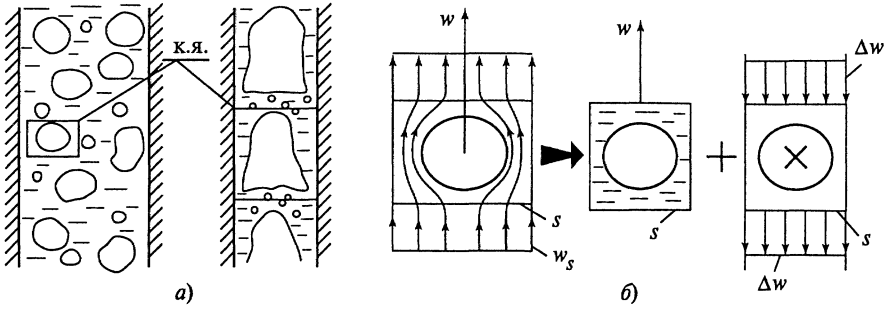



**Рис. 7.13. Расчетная схема относительного движения фаз в контрольной ячейке:**

*а* — типичные контрольные ячейки (к.я); *б* — расчетная схема

пузырька различны, локальное скольжение обусловлено гравитационными силами. В системе отсчета наблюдателя («лабораторной») скорость пузырька — $w$, скорость жидкости на границе ячейки — $w_s$ (левая картинка на рис. 7.13, *б*). Очевидно, такое движение может быть представлено в виде суммы движения всей контрольной ячейки (без скольжения) со скоростью парового пузыря $w$ и обтекания неподвижного парового пузырька жидкостью, набегающей на границу ячейки со скоростью $\Delta w$, численно равной $w_s$, но направленной сверху вниз (две правых картинки на рис. 7.13, *б*). Объемные расходы фаз в ячейке при таком представлении могут быть выражены следующим образом:

$$\dot{V}'' = ws\varphi;$$

$$\dot{V}' = ws(1-\varphi) - s\Delta w.$$

При этом очевидно, что истинная скорость пара в ячейке

$$w'' = \frac{\dot{V}''}{s\varphi} = w.$$

Объемный расход смеси в ячейке

$$\dot{V}_{\text{см}} \equiv \dot{V}'' + \dot{V}' = s(w - \Delta w),$$

а скорость смеси в ячейке

$$w_{\text{см}} = \frac{\dot{V}_{\text{см}}}{s} = w - \Delta w. \qquad (7.17)$$

Поскольку из определения скоростей $w''$ и $w_{см}$:

$$\frac{w''}{w_{см}} \equiv \frac{\beta}{\varphi},$$

то (7.17) можно представить как:

$$\frac{\beta}{\varphi} = 1 + \frac{\Delta w}{w_{см}}. \qquad (7.17а)$$

По физическому смыслу величина $\Delta w$ связана со скоростью всплытия газовых пузырьков в спокойной жидкости. Действительно, если в канале с неподвижной жидкостью всплывает одиночный пузырек, то $V_{см} \approx 0$, а $w'' = \Delta w = u_{\infty}$. В двухфазном потоке при наличии множества пузырей проявляется «коллективный эффект» взаимного увлечения пузырей. (Этот эффект количественно изучался на последовательно всплывающих одиночных пузырьках в [57] — см. гл. 5.) Таким образом, можно принять, что

$$\Delta w = \varepsilon u_{\infty}, \qquad (7.18)$$

где $\varepsilon$ — поправочный множитель, учитывающий взаимодействие паровых пузырей в потоке.

Соотношения (7.17) и (7.17а) получены для контрольной ячейки. При переносе этих соотношений на канал в целом необходимо учесть, что характерные значения скоростей и объемного паросодержания в контрольных ячейках, расположенных в центре канала и у стенки, различны.

Более строгий и сложный анализ работы [18, с. 204, 235] приводит к необходимости учета в этих соотношениях параметра распределения $C$. Качественно здесь можно рассуждать просто: если нет локального скольжения $\Delta w = 0$, тогда справедливо уравнение (7.16), а в общем случае (7.17а) должно быть записано в форме:

$$\frac{\beta}{\varphi} = C + \frac{\Delta w}{w_{см}}. \qquad (7.19)$$

Выражение такой структуры без обращения к конкретной кинематической схеме было впервые получено в [79]. Авторы этой работы (Зубер и Финдлей) использовали обычные определения истинных и приведенных скоростей для локальных величин:

$$w''_{0\,лок} = \varphi_{лок} w''_{лок};$$

$$w'_{0\,\text{лок}} = (1 - \varphi_{\text{лок}})\, w'_{\text{лок}};$$

$$w_{\text{см.лок}} = w''_{0\text{лок}} + w'_{0\,\text{лок}}.$$

Разность локальных скоростей пара и смеси была названа скоростью дрейфа. Смысл термина можно понимать так, что в системе отсчета, движущейся со скоростью смеси, паровая фаза «дрейфует», опережая (или, в общем случае, отставая) смесь в целом. Очевидно, что скорость $\Delta w$ в контрольной ячейке на рис. 7.13 и в (7.17) и локальная скорость дрейфа $w_{\text{гс}}$, близкие по смыслу величины (индекс «гс» означает газ—смесь). Их отличие состоит в том, что в [79] анализ локального поля скоростей приводится в общей форме, без обращения к физической природе скольжения фаз, а в [18] рассматривается контрольная ячейка конечных размеров с явным обращением к механизму относительного движения жидкости и пара.

Итак, локальная скорость дрейфа

$$w_{\text{гс}} = w''_{\text{лок}} - w_{\text{см.лок}}.$$

Умножая это уравнение на $\varphi_{\text{лок}}$, имеем

$$w_{\text{гс}}\varphi_{\text{лок}} = w''_{0\text{лок}} - w_{\text{см.лок}}\varphi_{\text{лок}}.$$

Осредняя последнее соотношение по сечению (значок осреднения < >), находим:

$$\langle w_{\text{гс}}\varphi_{\text{лок}}\rangle = \langle w''_{0\text{лок}}\rangle - \langle w_{\text{см.лок}}\varphi_{\text{лок}}\rangle.$$

Очевидно, что $\langle w''_{0\,\text{лок}}\rangle = w''_0$ — приведенная скорость пара;

$$\langle\varphi_{\text{лок}}\rangle = \varphi;\ \langle w_{\text{см.лок}}\varphi_{\text{лок}}\rangle = C w_{\text{см}}\varphi,$$

где параметр распределения Зубера—Финдлея $C$ совпадает с введенным в п. 7.4.1 для течения без скольжения. Наконец, $\langle w_{\text{гс}}\varphi_{\text{лок}}\rangle = = \bar{w}_{\text{гс}}\varphi$, где $\bar{w}_{\text{гс}}$ — скорость дрейфа (осредненная по сечению) Зубера—Финдлея. Очевидно, что другой параметр распределения, который должен был появиться в последнем равенстве, отнесен к величине $\bar{w}_{\text{гс}}$. Итоговое соотношение очень популярной на Западе «модели потока дрейфа Зубера—Финдлея» имеет вид

$$\varphi = \frac{w''_0}{C w_{\text{см}} + \bar{w}_{\text{гс}}}. \qquad (7.20)$$

Поскольку $w_0''/w_{см} \equiv \beta$, то очевидно, что (7.20) и (7.19) совпадают, если в (7.19) положить $\Delta w = \overline{w}_{гс}$.

Ясно, что при обоих подходах сами по себе итоговые соотношения (7.19) и (7.20) не содержат какой-либо эмпирической информации, но величины $C$ и $\overline{w}_{гс}$ с неизбежностью требуют ее введения. В [10] приводятся рекомендации по значениям этих величин для различных режимов течения, включая кольцевой. Это делает подход [79] уж слишком формальным: для кольцевого режима течения трудно говорить о локальной скорости жидкости в ядре потока или локальной скорости пара в жидкой пленке.

С этой точки зрения подход, использованный в [18], представляется физически более обоснованным. Скорость всплытия крупных пузырьков в условиях отсутствия влияния стенок канала (которое определяется неравенством $\mathrm{Bo} \equiv \dfrac{g\Delta\rho D_к^2}{\sigma} \geq 100$) рассчитывается по формуле (5.28):

$$U_\infty \approx 1{,}5 \sqrt[4]{\frac{\sigma g \Delta\rho}{\rho'^2}}.$$

(Заметим, что в [79] эта же формула рекомендована для $\overline{w}_{гс}$ при пузырьковом режиме течения безотносительно к диаметру канала.)

При $\mathrm{Bo} < 100$ в [18] предлагается рассчитывать $u_\infty$ по формуле для движения паровых снарядов:

$$u_\infty = 0{,}35\sqrt{gD_к\Delta\rho/\rho'}. \qquad (7.21)$$

Легко видеть, что эта формула по структуре аналогична (5.29) для скорости всплытия крупных паровых пузырьков в спокойной жидкости. Размер парового снаряда соизмерим с размером канала, что объясняет использование этого линейного размера в (7.21), а физические закономерности и методы анализа задач о всплытии паровых снарядов в каналах и паровых пузырьков в форме сферического сегмента в безграничной жидкости во многом совпадают.

Параметр $\varepsilon$ в (7.18), учитывающий эффект взаимного увлечения пузырьков, зависит от соотношения плотностей фаз и согласно [18] может быть рассчитан по эмпирической формуле

$$\varepsilon = 1{,}4\,(\rho'/\rho'')^{1/5}\,(1 - \rho''/\rho')^5. \qquad (7.22)$$

При напорном течении в каналах малого диаметра (Bo < 100) параметр распределения $C$ = 1,1 согласно [18]. Тогда из (7.17) и (7.18) следует

$$\varphi = \frac{\beta}{1{,}1 \pm \dfrac{\varepsilon u_\infty}{w_{см}}}. \qquad (7.23)$$

Знак плюс относится к подъемному течению, которое негласно предполагалось во всех предшествующих рассуждениях, а знак минус — к опускному, когда паровой пузырь (снаряд) «отстает» от жидкости.

Формула (7.23) вместе с (7.22) проверена на большом массиве опытных данных для пароводяных и воздуховодяных потоков при давлениях ≤ 10 МПа. Она пригодна и для кольцевых каналов, если в (7.21) в качестве $D_к$ используется ширина кольцевой щели $(D_{нар} - D_{вн})/2$, а не гидравлический диаметр, равный в этом случае удвоенной ширине щели.

Из (7.23) (а также и из исходного уравнения (7.19)) ясно, что роль локального скольжения фаз уменьшается с ростом скорости смеси. В каждом конкретном случае, начиная с некоторого значения $w_{см}$, отличие $\varphi$ и $\beta$ определяется фактически лишь формами профилей скорости и паросодержания, т.е. фактором распределения. Эта закономерность хорошо подтверждена опытными данными.

В условиях барботажа (см. рис. 7.1), во-первых, отсутствует влияние стенок канала, т.е. для расчета $u_\infty$ используется формула (5.28); а, во-вторых, расход жидкости равен нулю. Таким образом, в этом случае $\dot{V}_{см} = \dot{V}''$, $\beta = 1$, $w_{см} = w_0''$. Согласно [18] для барботажа, когда скорость и паросодержание в преобладающей части сечения аппарата (за исключением несущественной в данном случае узкой пристенной области) остаются практически неизменными, параметр распределения $C \approx 1$, тогда

$$\varphi = \frac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon u_\infty}{w_0''}}, \qquad (7.24)$$

где $\varepsilon$ по-прежнему рассчитывается по (7.22).

Формула (7.24) обнаруживает хорошее согласие с опытными данными.

С ростом расхода газа (приведенной скорости) здесь, как и в напорном течении, роль скольжения уменьшается. Формально при достаточно больших $w_0''$ $\varphi \to 1{,}0$. Фактически технологически эффективный процесс барботажа, обеспечивающий максимальную площадь межфазной поверхности и интенсивный энерго- и массообмен на ней, сохраняется при $\varphi \le 0{,}7$. При больших объемных паросодержаниях газ движется не в виде дискретных пузырей, а струями, эффективность процесса снижается.

## 7.5. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ КВАЗИГОМОГЕННОЙ СТРУКТУРЫ

### 7.5.1. ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

В инженерных расчетах перепада давлений при течении жидкостей в каналах используется обычно так называемое гидравлическое приближение, когда рассматриваются осредненные по сечению параметры потока, а уравнения сохранения упрощаются до одномерных.

В стационарных течениях одномерное уравнение сохранения массы (см. § 1.3) сводится к условию постоянства массового расхода:

$$G = \text{const}. \tag{7.25}$$

Тензор плотности потока импульса в общем случае выражается соотношением

$$\Pi_{kl} = \rho u_k u_l + p\delta_{kl} - \tau_{kl}$$

(см. § 1.4). В одномерном приближении (рис. 7.14) $z$-проекция импульса складывается из осредненных по сечению конвективного потока $\rho u^2$ и давления $p$; вязкие напряжения учитываются касательным напряжением по стенке $\tau_c$. (Для подавляющего большинства практически важных задач нормальные вязкие напряжения $\tau_{zz} = 2\mu \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$ ничтожно малы в сравнении с $\tau_c = \mu \left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right)_{y=0}$, где $y$ — координата, нормальная к стенке канала). Для контрольного объема $dV = s\,dz$, где $s$ — площадь поперечного сечения канала

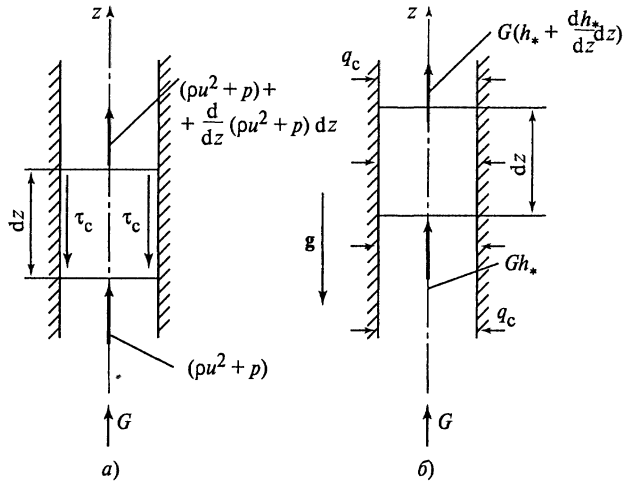



**Рис. 7.14. К выводу одномерных уравнений сохранения импульса (*а*) и энергии (*б*)**

(рис. 7.14, *а*), баланс импульса в случае вертикального подъемного движения при нормальной гравитации запишется в виде

$$-s(p+\rho u^2)+s\left[p+\rho u^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,(p+\rho u^2)\,\mathrm{d}z\right]+\tau_{\mathrm{c}}\Pi\,\mathrm{d}z=-\rho g s\,\mathrm{d}z,$$

где $\Pi$ — периметр канала; $g_z = -g$; за положительное направление принята внешняя к поверхности контрольного объема нормаль.

Поскольку $G = \rho us$, то с учетом (7.25) в канале постоянного сечения:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\frac{G}{s}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}+\frac{\tau_{\mathrm{c}}\Pi}{s}+\rho g. \qquad (7.26)$$

Уравнение (7.26) широко используется в инженерных расчетах течения однофазных сред; при этом слагаемые в правой части выражают соответственно составляющие градиента давления за счет ускорения потока, трения на стенке и массовых сил (нивелирная составляющая). При использовании определения гидравлического диаметра $D_{\mathrm{г}} = 4s/\Pi$ (в круглой трубе $D_{\mathrm{г}} = D$) составляющая градиента давления за счет трения:

$$-\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)_{\mathrm{тр}}=\frac{4\tau_{\mathrm{c}}}{D_{\mathrm{г}}}. \qquad (7.27)$$

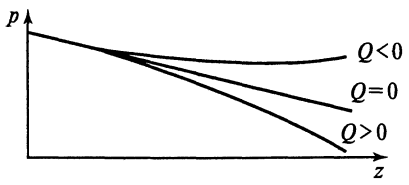



**Рис. 7.15. Характер изменения давления по длине канала в адиабатном потоке и потоках с теплообменом**

В случае двухфазного потока конвективному потоку импульса через сечение канала, т.е. величине $\rho u^2 s = Gu$, соответствует сумма конвективных потоков импульса фаз:

$$G''w'' + G'w' = G[xw'' + (1-x)w'];$$

плотности $\rho$ — истинная плотность смеси $\rho_\varphi$, определяемая формулой (7.9); касательное напряжение на стенке будем обозначать как $\tau_{см}$. Тогда одномерное уравнение импульса двухфазного потока принимает вид

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{G}{s}\frac{d}{dz}[xw'' + (1-x)w'] + \frac{4\tau_{см}}{D_г} + \rho_\varphi g. \qquad (7.28)$$

Естественно, три слагаемых правой части (7.28) отражают те же составляющие градиента давления в двухфазном потоке, что и соответствующие члены уравнения (7.26) для однофазного потока.

В канале постоянного сечения при адиабатном течении паросодержание $x$ и истинные скорости фаз $w''$, $w'$ по длине не изменяются, так что в этом случае первый член правой части (7.28) равен нулю. В потоке с подводом тепла (испарение) значения $x$, $w''$, $w'$ растут по длине, а при отводе тепла (конденсация) эти величины по длине уменьшаются. Таким образом, суммарное падение давления увеличивается в потоках с подводом тепла и уменьшается в потоках с отводом тепла в сравнении с адиабатными потоками (рис. 7.15). В потоках с отводом тепла при определенной плотности теплового потока принципиально возможно такое положение, что на некотором расстоянии $z_0$ от входа в канал давление полностью восстановится, т.е. станет равным давлению на входе.

Количественные закономерности изменения паросодержания и скоростей фаз по длине канала определяет уравнение энергии. Согласно схеме рис. 7.14, *б*, стационарное одномерное уравнение со-

хранения энергии в среде без внутренних источников тепла без учета работы массовых сил и вязкой диссипации (см. § 1.5) может быть представлено в виде

$$G\frac{\mathrm{d}h_*}{\mathrm{d}z} = q_c\Pi, \tag{7.29}$$

где $q_c$ — плотность теплового потока на стенке; $h_* = h + \frac{u^2}{2}$ — полная энтальпия единицы массы жидкости.

В двухфазном потоке в соответствии с соотношением (7.2) энтальпия смеси определяется как:

$$h_{см} = h'_s + xh_{LG}.$$

Если за характерную скорость принять скорость смеси, то (7.29) может быть переписано в виде

$$G\left(h_{LG}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \frac{w_{см}}{2}\frac{\mathrm{d}w_{см}}{\mathrm{d}z}\right) = q_c\Pi,$$

а с учетом формулы (7.8):

$$G\left[h_{LG} + \frac{w_0^2}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho''}\left(1 + x\frac{\Delta\rho}{\rho''}\right)\right]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = q_c\Pi, \tag{7.29а}$$

где $\Delta\rho = \rho' - \rho''$.

Величина $w_0\left(1 + \frac{x\Delta\rho}{\rho''}\right) = w_{см}$ в канале постоянного сечения не может превзойти скорость звука в паре $c_{зв} = \sqrt{kR_iT_s}$, где $R_i$ — газовая постоянная; $k = c_p/c_v$.

Можно показать, что в реальных для технических устройств ситуациях максимально возможное значение второго слагаемого в квадратных скобках (7.29а) близко к $c_{зв}^2 = kR_iT_s$. Таким образом, максимальная доля прироста кинетической энергии потока в общем приросте полной энтальпии по порядку величины равна: $\frac{kR_iT_s}{h_{LG}} \approx 0{,}1$ (эмпирическое правило Трутона).

С учетом этих оценок одномерное уравнение энергии упрощается:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{q_c \Pi}{G h_{LG}}. \tag{7.30}$$

В отсутствие скольжения фаз $w'' = w' = w_{см}$. Тогда с учетом (7.30) градиент давления в двухфазном потоке, связанный с ускорением потока (первое слагаемое в правой части (7.28)), выражается как:

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_{уск} = \frac{w_0 \Delta \rho}{\rho''} \frac{\Pi}{s} \frac{q_c}{h_{LG}}. \tag{7.31}$$

Это соотношение позволяет оценить роль ускорения потока в сравнении с другими членами уравнения (7.28). Речь идет в общем случае именно об оценке, поскольку при получении (7.31) смесь предполагалась гомогенной.

### 7.5.2. РАСЧЕТ ТРЕНИЯ В ГОМОГЕННЫХ АДИАБАТНЫХ ПОТОКАХ

В адиабатных двухфазных потоках в канале постоянного сечения градиент давления определяется трением на стенке и массовыми силами. Если при этом скорость смеси мала, то роль трения на стенке не существенна и уравнение (7.28) вырождается в уравнение гидростатики:

$$-\frac{dp}{dz} = \rho_\varphi g,$$

которое, в частности, применимо к процессам барботажа. Измеряя перепад давления на некотором участке $\Delta z_0$ и используя определение $\rho_\varphi$, можно с помощью последнего уравнения рассчитать истинное паросодержание при барботаже. При естественной циркуляции двухфазной смеси в трубах скорость движения определяется в основном соотношением сопротивления трения и движущего напора, обусловленного массовыми силами, конкретнее, разностью значений плотности смеси $\rho_\varphi$ в подъемном и опускном участках контура циркуляции. Следовательно, в этом случае и тем более в случае вынужденного движения смеси ключевую роль играет расчет $\tau_{см}$. К настоящему времени разработано несколько методик расчета этой величины. Простейшая из них (и в то же время физически ясная) основана на гомогенной модели двухфазного потока. Эта модель предполагает, что реальный двухфазный поток можно представить

как некоторую однородную жидкость с плотностью $\rho_\beta$, которая движется в канале со средней скоростью $w_{см}$. Тогда, очевидно:

$$\tau_{см} = \frac{\xi_{см}}{8} \rho_\beta w_{см}^2. \qquad (7.32)$$

Коэффициент сопротивления $\xi_{см}$ обычно рассчитывают по формулам, разработанным для однофазных течений, основываясь на числе Рейнольдса смеси:

$$\mathrm{Re}_{см} = \frac{\rho_\beta w_{см} d_г}{\mu_{см}}.$$

Существуют различные эмпирические формулы для расчета вязкости смеси $\mu_{см}$ [10, 42, 74]. Поскольку какого-либо теоретического или надежного экспериментального обоснования эти формулы не имеют, для рассматриваемых в § 7.5 квазигомогенных потоков логично принять, что вязкость смеси равна вязкости жидкости ($\mu_{см} = \mu'$). В пользу такого допущения говорит то, что на стенке, где градиент скорости максимальный, в пузырьковом, снарядном и эмульсионном режимах всегда сохраняется жидкость.

Так как $\rho_\beta w_{см} = \rho' w_0$ (что легко проверяется на основе (7.8а) и (7.9а)), то

$$\mathrm{Re}_{см} = \frac{\rho' w_0 d_г}{\mu'} = \mathrm{Re}',$$

и, следовательно, коэффициент гидравлического сопротивления смеси $\xi_{см}$ совпадает с $\xi_0$, отвечающим течению однофазной жидкости с массовым расходом смеси $G^*$. Обозначая касательное напряжение в однофазной жидкости

$$\tau_0 = \frac{\xi_0}{8} \rho' w_0^2,$$

получаем из (7.32) с учетом (7.8) или (7.8а):

$$\frac{\tau_{см}}{\tau_0} = \frac{w_{см}}{w_0} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho''} x = \frac{1}{1 - \Delta\rho\beta/\rho'}. \qquad (7.33)$$

* Имея в виду приближенность всей методики расчета, можно просто положить $\xi_{см} \approx 0{,}02$, что отвечает развитому турбулентному течению однофазной жидкости [42].

Область применимости соотношений (7.33) ограничена значениями паросодержаний, соответствующими верхней границе эмульсионного режима течения, т.е. $\varphi \le 0{,}8$. (Соответствующие значения $x$ зависят от соотношения плотностей фаз.) При высоких давлениях, как это обсуждалось в § 7.3, переход к кольцевому режиму происходит при меньших $\varphi$ ($\varphi \approx 0{,}64$—$0{,}7$).

Опыты показывают, что расчет по гомогенной модели дает удовлетворительное согласование с измеренными значениями перепадов давлений при высоких скоростях смеси, что является естественным, так как при этом двухфазная смесь действительно представляет собой достаточно однородную структуру. Это следует и из анализа § 7.4, где было показано, что с ростом скорости смеси скольжение фаз становится менее существенным. Точность расчета по гомогенной модели еще более возрастает, если двухфазная смесь находится под высоким приведенным давлением ($p_{пр} = p/p_{кр}$); такие условия характерны для теплообменного оборудования ТЭС и АЭС. В [10] сообщается о сопоставлении опытных данных о потере давления в трубах с кипящей водой при давлениях $p \ge 11$ МПа и массовых скоростях $\rho' w_0 = 400$—$3500$ кг/(м$^2$с) с расчетом по гомогенной модели: из 486 опытных точек 95 % отклонялись от расчетных значений не более чем на 9 %. В целом расчет по формулам (7.33) дает несколько заниженные в сравнении с опытами значения $\tau_{см}$. Результат может быть улучшен, если в формуле (7.32) использовать истинную плотность смеси:

$$\tau'_{см} = \frac{\xi_{см}}{8} \rho_\varphi w_{см}^2 . \qquad (7.32а)$$

Для расчета $\rho_\varphi$ необходимо значение $\varphi$, которое в свою очередь можно рассчитать по формуле (7.23).

При использовании соотношения (7.32а) значение $\tau'_{см}$ для случая вертикального подъемного течения оказывается больше, чем согласно (7.32), что качественно согласуется с опытными данными. Действительно, при $\rho' >> \rho''$:

$$\frac{\tau'_{см}}{\tau_{см}} = \frac{\rho_\varphi}{\rho_\beta} = \frac{\rho''\varphi + \rho'(1-\varphi)}{\rho''\beta + \rho'(1-\beta)} \approx \frac{1-\varphi}{1-\beta};$$

так как при восходящем движении $\beta > \varphi$, то $\tau'_{см} > \tau_{см}$.

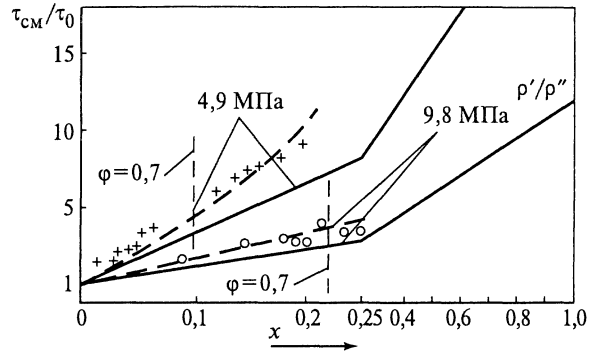



**Рис. 7.16. Зависимость сопротивления трения пароводяного потока от расходного паросодержания при давлениях 4,9 и 9,8 МПа, $\rho' w_0 = 2000$ кг/(м$^2$с):**

сплошные линии — расчет по (7.32); пунктирные линии — расчет по (7.32а); опытные точки работы [38]

На рис. 7.16 приводятся расчетные кривые, отвечающие формулам (7.32) и (7.32а), для подъемных адиабатных пароводяных потоков в вертикальной трубе диаметром $d = 8$ мм при давлениях 4,9 и 9,8 МПа, массовой скорости $\rho' w_0 = 2000$ кг/(м$^2$с). Опытные данные [38] хорошо согласуются с расчетом по скорректированной (уравнение (7.32а)) гомогенной модели. При этом, если для давления 9,8 МПа отклонение опытных точек от расчетной зависимости наблюдается при $\varphi > 0{,}7$ ($x > 0{,}22$), то при меньшем давлении хорошее согласие с расчетом сохраняется вплоть до $\varphi \approx 0{,}78$ ($x \approx 0{,}18$), т.е. в области дисперсно-кольцевого течения.

Следует сказать, что в «классической» гомогенной модели (уравнения (7.32), (7.33)) происходит взаимная компенсация ошибок, позволяющая применять эти уравнения и при таких паросодержаниях, при которых действительная структура потока далеко не гомогенная. Так, в дисперсно-кольцевом потоке из-за большого скольжения фаз $\beta > \varphi$, $\rho_\beta < \rho_\varphi$, причем различия этих параметров достаточно велики и нарастают с ростом паросодержания. С другой стороны, скорость жидкости в пленке заметно ниже, чем используемая в гомогенной модели скорость смеси. По этой причине во многих экспериментальных работах, прежде всего для области высоких приведенных давлений, используют гомогенную модель для сопоставления с опытными данными во всем диапазоне изменения массового расходного паросодержания ($0 \le x \le 1$). При этом, чтобы обес-

печить плавный переход от течения однофазной жидкости ($x = 0$) к однофазному потоку пара ($x = 1$), для вязкости смеси $\mu_{см}$ используется одна из формул, построенных фактически на аддитивном вкладе вязкости каждой фазы в соответствии с ее массовой или объемной долей [10].

На рис. 7.16, однако, не приведены опытные данные, относящиеся к высоким паросодержаниям, хотя их отклонение от рассчитанных по классической гомогенной модели кривых не выглядит чрезмерно большим (менее 40 %). На наш взгляд, гомогенная модель должна использоваться по возможности лишь для тех двухфазных структур, для которых это оправдано физически. В случае рис. 7.16 эта область ограничена значением $x \approx 0{,}22$; для нее на рисунке использован более крупный масштаб.

В инженерных расчетах часто используют систему эмпирических поправок к гомогенной модели. Например, нормативный метод гидравлического расчета котельных агрегатов [6] рекомендует для вычисления сопротивления трения пароводяных потоков формулу:

$$\Delta p_{тр} = \xi_0 \frac{\rho' w_0^2}{2} \frac{l}{d}\left(1 + \frac{\psi x \Delta\rho}{\rho''}\right), \qquad (7.34)$$

которая очевидно получается путем интегрирования (7.27) по длине $l$ при постоянном значении $\tau_{см}$, определяемом по (7.32). Эмпирический коэффициент $\psi$ учитывает изменение структуры двухфазного потока в зависимости от паросодержания, скорости циркуляции и давления. Этот коэффициент находится по номограммам (см. также [17, 39]); диапазон его изменения при актуальных для теплоэнергетики параметрах: $0{,}4 < \psi < 1{,}5$.

### 7.6. КОЛЬЦЕВЫЕ ДВУХФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Для идеализированного кольцевого потока, в котором не учитывается расход жидкости в форме капель, диспергированных в газовом ядре, легко построить замкнутое одномерное математическое описание. В случае вертикального подъемного течения не возникает и проблема неоднородности в распределении толщины пленки по периметру, практически исключающая возможность строгого моделирования горизонтальных кольцевых течений.

Схема кольцевого подъемного течения в вертикальной трубе дана на рис. 7.17. Такое течение можно рассматривать как раздельное движение потоков жидкости и газа (пара), для каждого из которых справедливо уравнение сохранения импульса (7.26). В адиабатных условиях в канале постоянного сечения отсутствуют потери давления, связанные с ускорением потока. На межфазной границе действует касательное напряжение, направленное противоположно в газовой и жидкой фазах. Форма межфазной поверхности — цилиндр диаметром $d_i = d - 2\delta$, где $\delta$ — средняя толщина жидкой пленки.

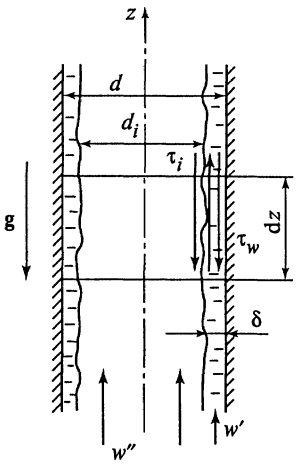



**Рис. 7.17. Схема подъемного кольцевого течения в вертикальной круглой трубе**

Уравнения сохранения импульса для обеих фаз имеют вид:

$$-\frac{dp''}{dz} = \frac{4\tau_i}{d_i}; \qquad (7.35)$$

$$-\frac{dp'}{dz} = \frac{4d\tau_c}{(d^2 - d_i^2)} - \frac{4d_i\tau_i}{(d^2 - d_i^2)} + \rho' g. \qquad (7.36)$$

Поскольку для обычных труб всегда выполняется условие $l/d >> 1$, то поперечный градиент давления в трубе отсутствует (приближение «длинной трубы»), т.е. $\frac{dp''}{dz} = \frac{dp'}{dz} = \frac{dp}{dz}$. Используя это условие и производя несложные алгебраические преобразования, получаем:

$$\tau_i = \frac{\tau_c d_i}{d} + \frac{\Delta\rho g d_i \delta(1 - \delta/d)}{d}, \qquad (7.37)$$

где $\Delta\rho = \rho' - \rho''$. Это уравнение удобно использовать вместо (7.36). В кольцевом потоке всегда $\delta/d << 1$; для очень тонких пленок (практически при $\delta/d \le 0{,}025$) (7.37) можно привести к виду:

$$\tau_i = \tau_c + \Delta\rho g\delta, \qquad (7.37а)$$

справедливому для течения пленки по вертикальной плоскости под действием трения со стороны потока газа (см. § 4.2).

Истинное объемное паросодержание в кольцевом потоке однозначно определяется толщиной пленки:

$$\varphi = \left(\frac{d_i}{d}\right)^2 = \left(\frac{d-2\delta}{d}\right)^2. \tag{7.38}$$

Истинное объемное содержание жидкости

$$1-\varphi = 4\,\frac{\delta}{d}\left(1-\frac{\delta}{d}\right). \tag{7.39}$$

Для очень тонких пленок приближенно:

$$\varphi \approx 1 - 4\,\delta/d; \tag{7.38а}$$

$$1-\varphi \approx 4\delta/d. \tag{7.39а}$$

Касательное напряжение на стенке

$$\tau_c = \frac{\xi_c}{8}\,\rho' w'^2 = \frac{\xi_c}{8}\,\frac{\rho' w_0'^2}{(1-\varphi)^2}. \tag{7.40а}$$

Коэффициент трения на стенке $\xi_c$, как это было показано в § 4.4, с достаточной для инженерных расчетов точностью может быть определен по зависимостям для однофазного течения в трубе: $\xi_c = f(\mathrm{Re}')$. Число Рейнольдса пленки:

$$\mathrm{Re}'_{см} = \frac{4\rho' w'\delta}{\mu'} = \frac{4\rho' w_0'\delta}{4(\delta/d)(1-\delta/d)\mu'} \approx \frac{\rho' w_0' d}{\mu'} = \mathrm{Re}'_0,$$

где $\mathrm{Re}'_0$ — число Рейнольдса для случая течения однофазной жидкости (с ее собственным расходом) в трубе.

Тогда при ламинарном течении жидкости ($\mathrm{Re}'_0 \le 2000$):

$$\xi_c = \frac{64}{\mathrm{Re}'_0},$$

а при турбулентном можно воспользоваться степенными законами, например формулой Блазиуса:

$$\xi_c = 0{,}3164(\mathrm{Re}'_0)^{-0{,}25}$$

либо более универсальным уравнением Филоненко [31]:

$$\xi_c = (1{,}821g\,\mathrm{Re}'_0 - 1{,}64)^{-2}.$$

Касательное напряжение на межфазной поверхности определяется по скорости газа $w''$, отсчитанной от скорости жидкости на поверхности пленки, т.е.

$$\tau_i = \frac{\xi_i}{8} \rho''(w'' - w'_\delta)^2 . \qquad (7.41)$$

При относительно низких приведенных давлениях $w'' >> w'_\delta$ и (7.41) можно упростить:

$$\tau_i = \frac{\xi_i}{8} \frac{\rho''(w''_0)^2}{\varphi^2} . \qquad (7.41а)$$

Уравнения (7.37)—(7.41) образуют замкнутую систему, если известен способ рассчитать коэффициент трения на межфазной поверхности $\xi_i$.

Простейший способ такого расчета — принять, что поверхность жидкой пленки гладкая и воспользоваться приведенными выше формулами для течения однофазного газа в трубе внутренним диаметром $d_i$. К сожалению, такое допущение плохо согласуется с реальностью: восходящие кольцевые потоки с гладкой пленкой практически вряд ли реализуемы.

Для воздуховодяных потоков при давлениях, близких к атмосферному, экспериментально выявлена [42] линейная зависимость коэффициента трения от безразмерной толщины пленки:

$$\xi_i = \xi_0 \left(1 + \frac{k_i \delta}{d}\right), \qquad (7.42)$$

где $\xi_0$ — коэффициент трения, рассчитанный для течения газа в гидравлически гладкой трубе диаметром $d_i = d - 2\delta$*; коэффициент $k_i = 300$ согласно данным [42]; в [30] предлагается принять $k_i = 240$.

Опытные данные Никурадзе о гидравлическом сопротивлении газа в канале с песочной шероховатостью аппроксимируются зависимостью

$$\xi_{см} = \xi_0 \left(1 + \frac{75 k_s}{d}\right),$$

где $k_s$ — высота песочной шероховатости [42].

* В [42] принимается $\xi_0 = 0{,}02$, что соответствует развитому турбулентному течению газа.

Таким образом, жидкая пленка с волновой поверхностью действует как песочная шероховатость с размером зерен, равным учетверенной толщине пленки.

Зависимость (7.42) решает проблему замкнутого математического описания кольцевых двухфазных течений. Использование соотношений для $\tau_c$, $\tau_i$, истинного объемного паросодержания и коэффициентов трения преобразует уравнение (7.37) в алгебраическое уравнение (10-й степени) относительно безразмерной толщины пленки $\delta/d$. При заданных расходах фаз, т.е. при известных приведенных скоростях, решение такого уравнения выполняется достаточно простыми стандартными методами на персональном компьютере. (Возможно и существенное упрощение этого уравнения, путем отбрасывания членов со старшими степенями малой величины $\delta/d$.) При найденном значении толщины пленки из (7.35) несложно находится градиент давления. В [42] и [30] приводятся примеры успешного применения такой методики.

К сожалению, имеются и такие опытные исследования, в которых обнаруживаются очень большие (в 2—2,5 раза) расхождения с зависимостью (7.42) для межфазного трения. Это объясняется тем, что амплитуда и форма волн на поверхности пленки, сильно влияющие на коэффициент трения, не определяются однозначно относительной толщиной пленки, а зависят от расходов фаз и свойств жидкости. В недавно опубликованной работе [56] предложены эмпирические корреляции, позволяющие описывать характеристики кольцевых потоков в достаточно широком диапазоне изменения этих параметров.

Для относительной толщины пленки:

$$\frac{\delta}{d} = 0{,}0594 \exp(-0{,}34 \mathrm{Fr}_0''^{0{,}25} \mathrm{Re}_0'^{0{,}19} x^{0{,}6}), \qquad (7.43)$$

где $\mathrm{Fr}_0'' = \dfrac{w_0''}{\sqrt{gd}}$; $\mathrm{Re}_0' = \dfrac{\rho' w_0' d}{\mu'}$; $x$ — массовое расходное паросодержание.

Для коэффициента межфазного трения:

$$\xi_i = 1{,}7 \left(12 + \frac{\nu_L}{\nu_W}\right)^{-4/3} \left(1 + \frac{12\delta}{d}\right)^8, \qquad (7.44)$$

где $\nu_L/\nu_W$ — отношение кинематической вязкости рассматриваемой жидкости к вязкости воды при $T = 20$ °С.

Как следует из [7.44], межфазное трение обнаруживает сильно нелинейную зависимость от относительной толщины пленки $\delta/d$, которая в свою очередь рассчитывается по (7.43). Авторы [56] получили хорошее согласие расчетов с опытными данными для потоков вода—воздух и водный раствор глицерина—воздух в вертикальных каналах при давлениях 0,1—0,6 МПа в широком диапазоне изменения приведенных скоростей фаз, диаметров труб и вязкости жидкости. Сопоставление с опытными данными проводилось как для средней толщины пленки, так и для градиента давления, который рассчитывается по (7.35).

Труднейшей и очень далекой от решения проблемой остается описание уноса и осаждения капель при дисперсно-кольцевом течении двухфазной смеси. При определенном сочетании параметров до половины общего расхода жидкости может двигаться в виде капель в газовом ядре.

Ясно, что в этом случае рассмотренные выше методики расчета чисто кольцевой структуры будут давать значительную погрешность. На сегодняшний день не только отсутствует количественная теория процессов уноса и осаждения капель, но и явно ощущается недостаток опытных измерений в этой области. Уникальные экспериментальные результаты, полученные Б.И. Нигматулиным с сотрудниками на пароводяных (при давлениях $p$ = 1—12 МПа) и воздуховодяных ($p$ = 0,1—0,45 МПа) смесях, описаны эмпирическими соотношениями, которые едва ли возможно переносить на другие условия [30].

## 7.7. ЭМПИРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ

Фактически, при расчетах истинного объемного паросодержания и гидравлического сопротивления двухфазных потоков всегда используется та или иная эмпирическая информация, что легко прослеживается в § 7.3—7.6. Тем не менее большинство рассмотренных выше методов расчета с известным основанием можно отнести к полуэмпирическим, когда строится простая (грубая) физическая модель процесса, дополняемая опытной информацией. Далее рассматривается популярная в зарубежной литературе методика Мартинелли, точнее, Локкарта—Мартинелли и Мартинелли—Нельсона, кото-

рая не опирается на какие-либо физические модели, а представляет собой один из способов описания экспериментальных данных.

В § 7.3 дано определение параметра Мартинелли $X$ (соотношение (7.13)).

Локкарт и Мартинелли ввели еще два параметра [10, 42, 74]:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_G^2 &= \frac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}z}{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)''}; \\ \Phi_L^2 &= \frac{\mathrm{d}p/\mathrm{d}z}{(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)'}, \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

представляющих собой отношение градиента давления в двухфазном потоке $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}z)$ к градиентам давления при течении газа или жидкости со своим расходом. Эти градиенты давления определяются соотношениями (7.12). Очевидно, что параметр Мартинелли (7.13) определяется как $X^2 = \Phi_G^2/\Phi_L^2$.

Если $\beta = x = 1$ (нет расхода жидкости), то, очевидно $1/\Phi_L^2 = 0$, $1/\Phi_G^2 = 1$; при $\beta = x = 0$ (нет расхода газа), то $1/\Phi_L^2 = 1$, $1/\Phi_G^2 = 0$.

В промежуточной области параметров предложено интерполяционное соотношение:

$$\left(\frac{1}{\Phi_G^2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{\Phi_L^2}\right)^{1/n} = 1, \tag{7.46}$$

которое обеспечивает предельный переход и позволяет представлять опытные данные по гидравлическим сопротивлениям трения в двухфазных потоках.

Как указывалось в § 7.3, в случае расслоенного течения в горизонтальном канале и, видимо, только в этом случае такой подход имеет определенное физическое содержание, хотя и в этом случае очень непростые проблемы возникают с расчетом трения на меж-

фазной поверхности (см. § 7.6). Для общего случая Локкарт и Мартинелли предложили три эмпирических уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_L^2 &= 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2}; \\ \Phi_G^2 &= 1 + CX + X^2; \\ 1 - \varphi &= \frac{X}{\sqrt{1 + 20X + X^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.47)$$

позволяющих рассчитывать градиенты давления и истинное объемное паросодержание в двухфазных потоках. Коэффициент $C$ различен для разных сочетаний режимов течения соответствующих однофазных потоков. Для наиболее практически важного случая, когда движение и жидкости, и газа турбулентно, $C = 20$. Параметр Мартинелли для этого случая на основе соотношений (7.12) и формулы Блазиуса для коэффициентов гидравлического сопротивления $\xi'$ и $\xi''$ выражается как:

$$X_{TT} = \left(\frac{\mu'}{\mu''}\right)^{0,25}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{1,75}\frac{\rho''}{\rho'}.$$

Уравнения (7.47) получены на основе опытных данных о течении смеси воздуха с различными жидкостями при давлениях, близких к атмосферному. Естественно, при применении этих уравнений в широком диапазоне изменения параметров точность их низка, что породило множество способов их корректировки путем введения различных эмпирических функций. В целом все методы расчета с использованием параметра Мартинелли $X$ не имеют, на наш взгляд, преимуществ перед другими эмпирическими методиками расчета, например перед упоминавшимся нормативным методом расчета пароводяных потоков [6].

# Глава восьмая. ДВУХФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА

## 8.1. ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПОТОКА ПО ДЛИНЕ ОБОГРЕВАЕМОГО КАНАЛА

В обогреваемых трубах среднемассовая энтальпия непрерывно растет по длине канала. В равновесном потоке энтальпия двухфазной смеси определяется уравнением (7.2), причем в этом случае величина $x$ в (7.2) совпадает с массовым расходным паросодержанием потока. В общем случае поток может быть неравновесным, тогда величина, определяемая уравнением (7.2), не равна действительному расходному массовому паросодержанию. Параметр, определяемый соотношением

$$x_{\text{б}} = \frac{(h - h'_s)}{h_{LG}},$$

как указывалось в § 7.2, называют *относительной энтальпией потока*, или *балансовым* расходным паросодержанием.

Если на вход в обогреваемый канал поступает не догретая до температуры насыщения жидкость ($x_{\text{б}} < 0$), то по длине канала могут в общем случае наблюдаться следующие характерные области (рис. 8.1)*.

*Область I* соответствует однофазному конвективному теплообмену. В этой области при постоянной плотности теплового потока среднемассовая энтальпия растет линейно, что следует из (7.29) (именно этот случай представлен на рис. 8.1). Если теплоемкость жидкости $c_p$ можно считать постоянной, что неплохо выполняется при $p << p_{\text{кр}}$, то также линейно растет в этой области среднемассовая температура жидкости $\overline{T}$. Температурный режим стенки канала

* В действительности при обычных для парогенерирующих труб параметрах для получения всех областей, представленных на рис. 8.1, требуется огромная длина, при этом протяженность различных зон отличается очень сильно. На рисунке дана качественная схема без соблюдения реальных соотношений длин характерных участков.

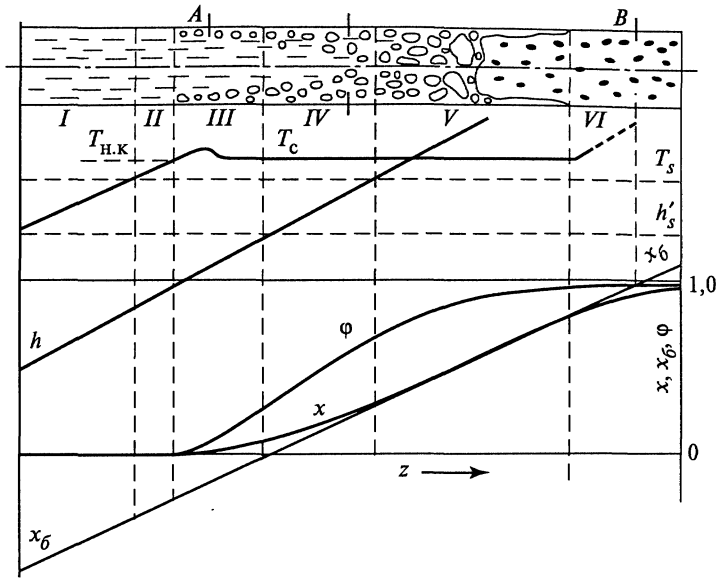



**Рис. 8.1. Режимы течения и изменение параметров потока по длине обогреваемого канала (масштаб при изображении разных зон различен)**

определяется в этой зоне закономерностями однофазного конвективного теплообмена согласно соотношению:

$$T_c = \overline{T} + \frac{q_c}{\alpha}, \tag{8.1}$$

где $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи, рассчитывается в зависимости от режима течения (числа Re′) по формулам, представленным, например, в [13, 31, 39, 40].

Если изменением теплофизических свойств жидкости, связанным с изменением температуры, можно пренебречь и не учитывать влияние входного участка трубы, то коэффициент теплоотдачи $\alpha$ по длине остается постоянным, так что температура стенки $T_c$ по длине области *I* изменяется линейно (как и $\overline{T}$).

Обычно принимают за нижнюю (в направлении движения) границу этой области сечение, в котором температура стенки достигает температуры насыщения $T_s$ при локальном давлении жидкости. От этого сечения начинается *область II*, которая заканчивается в сечении, где действительное паросодержание $x_д$ становится отличным

от нуля. (В англоязычных источниках его называют сечением, в котором начинается явная генерация пара — «net vapour generation».) В пределах этой области находится сечение, в котором $T_c = T_{н.к}$ — температура начала кипения. Иногда принимается, что сечение с $T_c = T_{н.к}$ и сечение с действительным $x_д > 0$ совпадают. В любом случае в пределах области *II*, во-первых, не происходит никаких видимых изменений с жидкостью (она до конца области остается однофазной), а, во-вторых, среднемассовая температура жидкости $\overline{T}$ остается ниже, чем температура насыщения $T_s$, т.е. $x_б < 0$. Очевидно, что температурный режим стенки и в области *II* можно рассчитывать по (8.1). Фактически, области *I* и *II* представляют собой единую область течения однофазной жидкости.

С началом *области III* начинается собственно двухфазное течение. Нижней границей области *III* является сечение, в котором среднемассовая энтальпия достигает значения энтальпии насыщенной жидкости, т.е. $x_б = 0$. Следовательно, в пределах области *III* двухфазный поток существенно неравновесный: вблизи стенки всегда существует пар, причем действительное массовое расходное $x_д$ и истинное объемное $\varphi$ паросодержание растет по длине, а в ядре сохраняется недогретая жидкость с локальной температурой $T < T_s$.

Режим теплообмена в области *III* — это пузырьковое кипение недогретой жидкости; обычно в этом режиме коэффициент теплоотдачи определяется только плотностью теплового потока (см. § 8.2) и практически не зависит от скорости течения смеси. По этой причине температура стенки, начиная с некоторого сечения *A*, остается неизменной. Само сечение *A*, расположенное вблизи верхней по течению границы области, характеризуется как раз установлением режима теплообмена, определяемого механизмом пузырькового кипения, при этом иногда наблюдается даже некоторое снижение температуры стенки (см. рис. 8.1).

Начало интенсивного парообразования в сечении *A* обычно сопровождается увеличением гидравлического сопротивления потока, что естественно следует из анализа § 7.5.

Граница областей *III* и *IV* определяется расчетом на основе энергетического баланса и не отражает каких-либо физических изменений в двухфазном потоке. *Область IV* заканчивается сечением, в котором температура жидкости во всех точках достигает температуры насыщения $T_s$, после чего поток становится термически равновесным. Это сечение приближенно может быть определено прямы-

ми измерениями, расчетом найти его весьма сложно, так как для этого необходимо знать распределение истинного объемного паросодержания по сечению. Во всей области *IV*, таким образом, поток остается неравновесным, в каждом сечении имеется пар и недогретая жидкость; при этом относительная энтальпия потока $x_б > 0$.

*Область V* — это область равновесного течения смеси. В реальных установках протяженность области весьма велика. В ее пределах в принципе возможна последовательная смена всех структур — пузырьковой, снарядной, эмульсионной и дисперсно-кольцевой, хотя на самом деле многое зависит от скорости смеси, плотности теплового потока и давления. При высоких давлениях и больших скоростях снарядный режим, как правило, не возникает. При высокой скорости смеси и большом тепловом потоке весьма коротким может оказаться и пузырьковый режим, так как равновесное состояние в центре канала в этом случае достигается при значительных средних по сечению истинных объемных паросодержаниях. Область *V* — единственная, в которой совпадают значения $x = x_д = x_б$; коэффициент теплоотдачи здесь практически постоянен, и $T_с$ также почти не изменяется. Заканчивается область *V* наступлением новой неравновесности, связанной с возникновением *кризиса кипения*. Этим термином обозначают резкое, при некотором сочетании параметров — катастрофическое, снижение интенсивности теплоотдачи и возрастание температуры стенки, обусловленное потерей непосредственного контакта жидкости и обогреваемой твердой поверхности. Во всех рассмотренных пяти областях такой контакт сохраняется, причем и непосредственно перед кризисом жидкость покрывает преобладающую часть (как правило, не менее 90 %) внутренней поверхности трубы.

После сечения кризиса начинается *область VI*, в которой двухфазная смесь обычно состоит из перегретого относительно $T_s$ пара и капель насыщенной жидкости. Неравновесность в некоторых случаях может быть весьма сильной, т.е. перегрев пара относительно температуры насыщения большой (для пароводяных потоков — несколько сотен градусов). Внутри области *VI* можно рассчитать сечение *B*, в котором $x_б = 1$; хотя $x_д < 0$, каких-либо физических изменений переход двухфазного потока через это сечение, естественно, не вызывает.

Как уже говорилось, протяженность различных структур двухфазных потоков в обогреваемом канале зависит от соотношения массовой скорости, плотности теплового потока и давления. Заим-

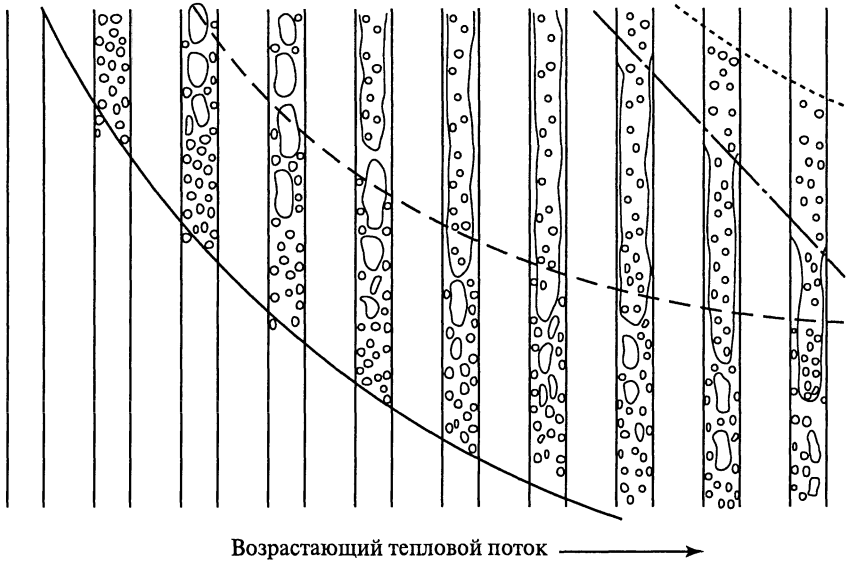



**Рис. 8.2. Изменение структуры потока в обогреваемом канале при постоянном расходе жидкости:**

——— — начало пузырькового кипения; – — — — конец пузырькового режима; — - — — высыхание жидкой пленки (кризис); - - - - - — граница области перегретого пара

ствованный из [10] рис. 8.2 наглядно демонстрирует, как изменяется набор различных режимов течения по длине канала, если изменяется лишь один из перечисленных параметров — плотность теплового потока. На этом рисунке отражена несколько отличная от изложенной выше классификация характерных областей течения. Нижняя сплошная линия соответствует границе областей *II* и *III* по нашей классификации; пунктирная линия, отвечающая границе пузырькового режима, прошла бы через начало области *V* на рис. 8.1; штрихпунктирная линия соответствует кризису кипения, т.е. границе областей *V* и *VI*; наконец, верхняя граница отвечает сечению *B* в области *VI* на рис. 8.1. При этом в общем случае в перегретом паре при $x_б > 1$ жидкие капли могут сохраняться достаточно долго. Увеличение массовой скорости привело бы к смещению всех границ на рис. 8.2 влево и вниз. Одновременный рост давления и массовой скорости привел бы к исчезновению снарядного режима течения.

При высоких плотностях теплового потока кризис теплообмена при кипении может возникнуть еще в области *III*, т.е. при $x_б < 0$. Если это не приводит к разрушению стенки канала, то за сечением кризиса возникает двойная неравновесность: в перегретом паре движутся капли недогретой жидкости.

Наконец, необходимо упомянуть, что при температуре стенки трубы, превышающей температуру предельного перегрева жидкости (температура спинодали), режимы течения со сплошной пленкой пара на стенке могут существовать при наличии сплошного жидкого стержня в ядре потока. Это наблюдается, например, при подаче криожидкости (азота, кислорода, водорода, гелия, сжиженного природного газа) в «теплую» трубу, находящуюся при комнатной температуре; сходная картина возникает в экспериментах, моделирующих послеаварийное охлаждение твэлов ядерного реактора, когда в трубу с температурой около 1000 °С подается вода комнатной температуры (так называемое «повторное смачивание» — rewetting). При малых объемных паросодержаниях в этих случаях возникает стержневой, или обращенный кольцевой режим течения двухфазного потока: жидкий стержень, отделенный от стенки паровой пленкой.

По мере роста паросодержания жидкий стержень теряет сплошность, возникают обращенные пузырьковый, снарядный или эмульсионный режимы. При больших паросодержаниях наблюдается дисперсный режим течения: поток пара с каплями жидкости, но без прямого контакта жидкости со стенкой. Такой режим аналогичен закризисному течению (область *VI* на рис. 8.1).

Расчетное определение границ областей и особенно режимов течения в обогреваемых каналах представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Рассмотренные в § 7.3 границы изменения структуры двухфазных адиабатных потоков не могут непосредственно использоваться для течения в условиях теплообмена. Действительно, установление определенного режима двухфазного течения при фиксированных расходах фаз происходит в общем случае на значительной длине, тогда как в условиях теплообмена соотношение расходов фаз непрерывно изменяется. Рекомендации § 7.3 могут рассматриваться лишь как «предельные» для течений в обогреваемых каналах, т.е. позволяющие идентифицировать структуру двухфазной смеси в случаях, когда соответствующая локальным расходам фаз точка оказывается в глубине той или иной области на карте режимов, вдали от границ перехода от одних режимов к другим.

Практически не менее важная задача расчета истинного объемного паросодержания двухфазных потоков в условиях теплообмена решается сегодня только с помощью эмпирических соотношений. Особенно сложным оказывается расчет действительного паросодержания в неравновесных потоках (области *III* и *IV* на рис. 8.1). Для пароводяных потоков используются эмпирические методики, основанные на обобщении опытных данных; некоторые из них приводятся в [17, 32, 39].

Укажем, наконец, что двухфазное течение в охлаждаемых трубах (конденсация движущегося в трубе пара) характеризуется уменьшением скорости смеси по длине канала; по этой причине его структура очень сильно зависит от ориентации канала. В вертикальных охлаждаемых каналах устойчивое течение практически возможно лишь для опускного парожидкостного потока, так как при встречном движении пленки конденсата и пара велика вероятность захлебывания (см. гл. 4). При опускном движении конденсирующегося пара в вертикальной трубе самым естественным и основным является кольцевой режим течения. В горизонтальных трубах при малых скоростях смеси всегда возникают расслоенные структуры. Однако при конденсации жидкая пленка непрерывно образуется по всему периметру канала и затем стекает вниз. Поэтому здесь также наблюдается кольцевая структура с большой и увеличивающейся по длине несимметрией в распределении толщины жидкой пленки по периметру трубы. Большая часть расхода жидкости в направлении течения приходится на нижнюю часть сечения канала — ручейковая структура, тогда как наиболее интенсивная конденсация происходит по верхней части периметра, где пленка конденсата тонкая.

## 8.2. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ

### 8.2.1. УСЛОВИЯ НАЧАЛА ПАРООБРАЗОВАНИЯ В ОБЪЕМЕ ЖИДКОСТИ И НА ОБОГРЕВАЕМОЙ СТЕНКЕ

Кипением называют процесс фазового перехода жидкость—пар, происходящий под уровнем жидкости. Этим он отличается от испарения со свободной поверхности жидкости. Возникновение парового объема (пузырька) в объеме жидкости сопряжено с образованием новой поверхности раздела фаз и, следовательно, требует преодоления своеобразного «энергетического барьера». Практически это означает, что жидкость должна быть перегрета относительно температуры насыщения.

В условиях термодинамического равновесия сферический паровой пузырек при заданных давлениях в жидкости $p'$ и температуре $T'$ имеет строго определенный размер $R_*$. Действительно, разность давлений пара в пузырьке $p''$ и в жидкости определяется формулой Лапласа (2.7):

$$p'' - p' = \frac{2\sigma}{R_*}.$$

Условия термодинамического равновесия требуют, чтобы температура пара в пузырьке $T''$, во-первых, была равна температуре окружающей жидкости $T'$, а во-вторых, соответствовала температуре насыщения при давлении пара. Очевидно, что из-за лапласовского скачка давлений:

$$T'' = T_s(p'') > T_s(p').$$

Обозначая в дальнейшем температуру насыщения при давлении окружающей пузырек жидкости как $T_s = T_s(p')$, запишем:

$$T'' = T_s + \Delta T.$$

Величина $\Delta T$ связана с $\Delta p = p'' - p'$ в соответствии с формой кривой насыщения $p_s(T_s)$. Для малых перепадов температур и давлений, используя уравнение Клапейрона—Клаузиуса, находим:

$$\Delta p \approx \Delta T \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_s = \Delta T \frac{s'' - s'}{v'' - v'},$$

где $s$ и $v$ с соответствующими надстрочными индексами — удельные значения энтропии и объемов фаз на пограничной кривой (линии насыщения).

Поскольку $s'' - s' = h_{LG}/T$, $v'' >> v'$ при $p << p_{\text{кр}}$, то можно записать

$$\Delta p \approx \frac{h_{LG}\Delta T \rho''}{T_s}, \tag{8.2}$$

где $\rho'' = 1/v''$ — плотность пара.

Используя этот результат в формуле Лапласа, находим:

$$R_* = \frac{2\sigma T_s}{\rho'' h_{LG} \Delta T}. \tag{8.3}$$

(В § 6.3 мы приводим эту формулу как (6.22) без вывода.) Состояние термодинамического равновесия, которому отвечает формула (8.3), является абсолютно неустойчивым, так как при сколь угодно малом уменьшении размера пузырька ($R < R_*$) давление пара из-за увеличения кривизны межфазной поверхности превзойдет давление насыщения, пар сконденсируется, пузырек «схлопнется». При $R > R_*$, напротив, давление пара в пузырьке ниже, чем давление насыщения, перегретая жидкость на поверхности пузырька будет испаряться, пузырек — расти. Таким образом, размер пузырька, определяемый формулой (8.3), является чисто расчетной величиной; наблюдать в опытах равновесные пузырьки невозможно. Величина $R_*$ называется равновесным, или критическим, радиусом парового зародыша. В эксперименте наблюдаются только пузырьки при $R > R_*$.

Анализ, ведущий к формуле (8.3), подтверждает необходимость перегрева жидкости относительно температуры насыщения для появления в ней парового пузырька. Возникновение паровой фазы в объеме жидкости, лишенной каких-либо посторонних примесей, называют гомогенным зародышеобразованием (гомогенной нуклеацией). Теория этого процесса, которая выходит за пределы содержания настоящей книги, предсказывает, что жидкость должна быть перегрета очень сильно — практически до температуры спинодали, чтобы в ней началось гомогенное зародышеобразование [35]. В физических экспериментах возникает противоположная проблема: как исключить появление зародышей за счет различных гетерогенных включений и действительно довести жидкость до состояния, соответствующего условиям гомогенной нуклеации.

При кипении в технических условиях паровые пузырьки образуются на обогреваемой твердой стенке. Центрами парообразования служат элементы микрошероховатости стенки (впадины, царапины), обладающие пониженной локальной смачивостью [2, 10, 13, 41]. Перегрев твердой поверхности, необходимый для парообразования, в большинстве практических ситуаций невелик: для воды при атмосферном давлении составляет 5—7 К, а при высоких давлениях — доли градуса. Использование этого значения перегрева в (8.3) дает представление о масштабе элементов поверхностной шероховатости, служащих центрами парообразования. При атмосферном давлении для воды это единицы микрометров; с ростом приведенного давления $R_*$ уменьшается: например, для жидкого гелия при атмосферном

давлении, которое отвечает приведенному давлению $p/p_{кр} \approx 0{,}45$, и практически наблюдаемых перегревах стенки $\Delta T \approx 0{,}04$ К (см., например, [2]) $R_* \approx 7 \cdot 10^{-8}$ м.

### 8.2.2. РЕЖИМЫ КИПЕНИЯ («КРИВАЯ КИПЕНИЯ»)

Увеличение перегрева стенки ведет к росту числа одновременно действующих центров парообразования, что сопровождается ростом интенсивности теплообмена. Для кипения характерна очень сильная зависимость плотности теплового потока $q$ от перегрева стенки относительно температуры насыщения; это кардинально отличает теплообмен при кипении от однофазной конвекции и от конденсации. Зависимость $q(\Delta T)$ называют кривой кипения, или кривой Нукияма, по имени японского исследователя, впервые описавшего эту зависимость в 1935 г. Типичная кривая кипения со схематическим изображением механизма теплообмена при различных сочетаниях плотности теплового потока и перегрева стенки $\Delta T = T_c - T_s$ представлена на рис. 8.3. Пусть жидкость в обогреваемом сосуде находится при температуре насыщения $T_s$, отвечающей давлению $p_s$ над ее уровнем. Обогреваемая поверхность, например, в виде обращенной вверх пластины с адиабатной нижней поверхностью размещена под уровнем жидкости. Дополнительное гидростатическое давление столба жидкости над нагревателем обычно составляет ничтожную долю от $p_s$. По обеим координатным осям используется логарифмический масштаб.

Пока перегрев стенки относительно $T_s$ не достигнет величины $\Delta T_{н.к}$ (начало кипения), достаточной для образования паровых пузырьков, тепло от обогреваемой поверхности отводится свободной конвекцией (рис. 8.3, *а*), а от жидкости — за счет испарения с ее свободной поверхности. В случае турбулентного свободноконвективного движения зависимость $q(\Delta T)$ имеет вид: $q \sim \Delta T^{4/3}$ (участок $AB$ на рис. 8.3).

После начала кипения зависимость $q(\Delta T)$ резко увеличивает крутизну: для технических поверхностей нагрева на участке $BC$ $q \sim \Delta T^3$. Структура двухфазной смеси по мере увеличения плотности теплового потока изменяется очень значительно. При относительно малых $q$ наблюдаются вертикальные цепочки паровых пузырьков, последо-

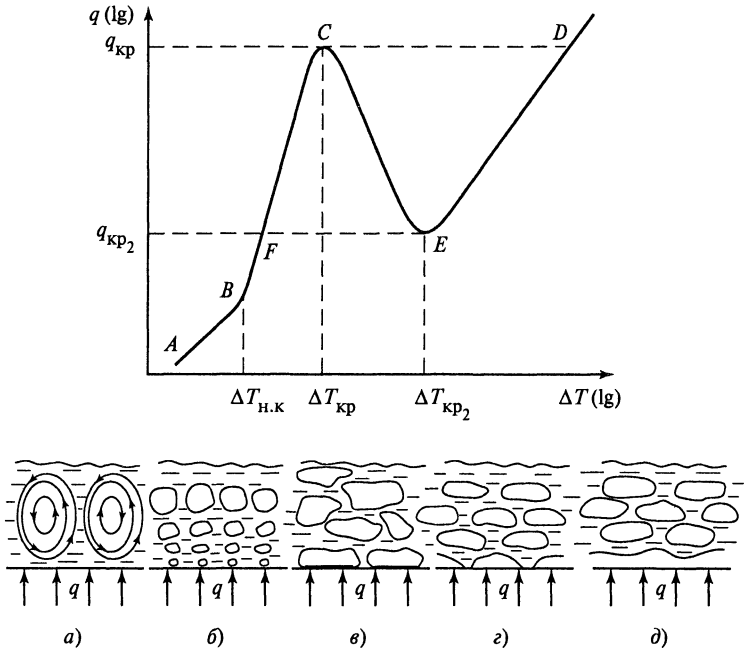



**Рис. 8.3. Типичная кривая кипения и схема различных механизмов теплообмена**

вательно отрывающихся от достаточно стабильных центров парообразования на стенке (рис. 8.3, *б*). Именно в таком режиме индивидуальных пузырьков обычно проводят кинематографическое исследование кипения и получают опытную информацию о динамике роста и отрыва паровых пузырьков (см. гл. 6). При увеличении плотности теплового потока начинается слияние соседних паровых пузырьков как в вертикальном, так и в боковом направлениях. В результате формируется режим сросшихся пузырьков, или паровых конгломератов, возникающих и отрывающихся от стенки (рис. 8.3, *в*). При визуальном наблюдении и при киносъемке в таком режиме достаточно трудно идентифицировать области, занятые паром и жидкостью, так как картина меняется очень быстро, межфазная поверхность отличается нерегулярностью формы и подвержена пульсациям. Однако наличие на обогреваемой твердой поверхности под паровыми конгломератами жидкой пленки фиксируется в экспериментах весьма убедительно как прямыми, так и косвенными методами. (На рис. 8.3, *в* эта пленка изображена в виде зачерненной полоски.) Толщина плен-

ки по имеющимся прямым измерениям в случае кипения воды, этанола и метанола при атмосферном давлении лежит в пределах $2 \cdot 10^{-5}$—$3 \cdot 10^{-4}$ м. Пленка имеет множество разрывов («паровых ножек»), т.е. очень малых по площади сухих пятен, которые, очевидно, представляют собой центры парообразования, сохранившиеся после слияния выросших на них паровых пузырьков.

Несмотря на внешнюю непохожесть картины процесса в режимах индивидуальных и сросшихся пузырей, взаимозависимость плотности теплового потока и перегрева стенки остается практически неизменной вдоль всего участка $BC$ кривой кипения, что позволяет объединять эти режимы общим названием — *пузырьковое кипение*. Принципиальной особенностью этого вида кипения является то, что на всем его протяжении абсолютно преобладающая часть твердой поверхности нагрева покрыта жидкостью. Суммарная доля площади сухих пятен (центров парообразования) даже при самых больших тепловых потоках не превосходит 10 %.

Если кривая кипения в эксперименте исследуется при электрическом обогреве твердой поверхности, т.е. в условиях непосредственного управления плотностью теплового потока, то при достижении некоторого предельного значения $q = q_{кр}$ (точка $C$ на рис. 8.3) пузырьковый режим кипения обрывается катастрофически резко. Фактически непрерывная кривая $q(\Delta T)$ есть результат аппроксимации дискретных опытных точек, каждая из которых получается при достижении стационарного состояния после ступенчатого изменения тепловой нагрузки. Малое увеличение $q$ в окрестности $q_{кр}$ (обычно 2—3 % предыдущего значения) приводит к лавинообразному росту площади сухих пятен и образованию сплошной паровой пленки на обогреваемой поверхности.

Новое стационарное состояние (точка $D$ на рис. 8.3) устанавливается в режиме пленочного кипения, а сам процесс перехода от пузырькового кипения к пленочному называют кризисом кипения. В пленочном режиме температура стенки превышает температуру спинодали, что исключает возможность прямого контакта его с жидкостью; тепло передается к межфазной поверхности через паровую пленку путем теплопроводности и однофазной конвекции в паре, а также излучением. Паровая пленка гидродинамически неустойчива (по Тейлору), на ее поверхности периодически формируются и затем всплывают к свободному уровню жидкости паровые пузырьки (рис. 8.3, д). Коэффициенты теплоотдачи при пленочном

кипении в 10—50 раз меньше, чем при тех же тепловых потоках при пузырьковом. Если для жидкостей с низкой температурой нормального кипения (криожидкости, легкие углеводороды, многие хладоны) при переходе к пленочному кипению температура стенки не достигает уровня, опасного с точки зрения потери механической прочности, то для воды и многих других высококипящих жидкостей такой переход обычно приводит к термическому разрушению обогреваемой поверхности. В англоязычной литературе для обозначения понятия «кризис пузырькового кипения» иногда используется термин «burnout» («пережог»).

Пленочное кипение наблюдается в стационарном режиме при тепловых нагрузках, как превышающих, так и существенно более низких, чем тепловой поток в точке $D$. При снижении $q$ этот режим сохраняется до тех пор, пока температура обогреваемой поверхности, в общем случае подверженная колебаниям при колебаниях толщины паровой пленки, не снизится до температуры предельного перегрева жидкости. Если такое снижение происходит, то паровая пленка быстро разрушается и наступает возврат к режиму пузырькового кипения (переход $EF$). Этот переход также происходит достаточно быстро (скорость его зависит главным образом от теплоемкости опытного образца, служащего поверхностью кипения), так что переход от пленочного кипения к пузырьковому тоже называют *кризисом*, но уже пленочного кипения. Соответствующий этому кризису тепловой поток называют «вторым критическим», или минимальным тепловым потоком пленочного кипения $q_{кр2}$.

В случаях, когда в эксперименте управляют температурой стенки (обогрев циркулирующей жидкостью через стенку трубы или конденсирующимся паром, а также электрообогрев в сочетании с конвективным охлаждением при использовании достаточно сложной системы автоматического регулирования), удается в стационарном режиме исследовать процесс *переходного кипения*. Этому процессу отвечает «неестественная» отрицательная зависимость $q(\Delta T)$, когда с ростом перегрева стенки тепловой поток снижается (участок $CE$ на рис. 8.3). В переходном кипении температура стенки не превышает температуру спинодали, так что термодинамически контакт жидкости со стенкой возможен. Но из-за чрезвычайно высокого перегрева жидкость при таких контактах мгновенно вскипает, и образующийся пар снова «отталкивает» ее от стенки. Схема на рис. 8.3, *г* отражает наличие точек контакта жидкости с «горячей» твердой по-

верхностью. (При переходном кипении криожидкостей поверхность нагрева, с обыденной точки зрения, весьма холодная — ее температура не выше 130 К при переходном кипении азота.)

Вдоль участка *CE* по мере роста $\Delta T$ уменьшается характерное время периодических контактов жидкости со стенкой; при достижении стенкой температуры предельного перегрева жидкости это время снижается до нуля и наступает режим пленочного кипения.

При закалке металлических изделий (или заготовок), в экспериментах, имитирующих послеаварийное охлаждение твэлов ядерного реактора, или в экспериментах, специально поставленных для исследования теплообмена при кипении в условиях нестационарного охлаждения, кривая кипения «проходится» справа налево. При этом качественно воспроизводятся все характерные зоны: *DE*, *EC*, *CB*, *BA*; количественные отличия от результатов стационарных исследований заметны прежде всего в окрестности точки кризиса пузырькового кипения *C*: в условиях нестационарного охлаждения $q_{кр}$ обычно меньше, чем в стационарных.

### 8.2.3. РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ПУЗЫРЬКОВОМ КИПЕНИИ

Из всех рассмотренных выше режимов теплообмена практически наиболее важным является пузырьковое кипение. Будучи во многих случаях неотъемлемой частью различных технологий, пузырьковое кипение вместе с тем часто оказывается вне конкуренции как способ охлаждения твердых поверхностей, подверженных высокоинтенсивным тепловым воздействиям (элементы конструкций установок термоядерного синтеза, мощные лазеры, физические мишени и т.д.). Очень сильная зависимость плотности теплового потока от перегрева стенки позволяет отводить потоки энергии огромной плотности при относительно небольших температурных напорах ($\Delta T = T_c - T_s$). Ограничением здесь выступает кризис пузырькового кипения, который в свою очередь может быть отодвинут в область весьма высоких плотностей тепловых потоков путем повышения скорости вынужденного движения и недогрева жидкости до температуры насыщения (см. § 8.4).

Для понимания механизма теплообмена при пузырьковом кипении очень важно, что зависимость $q \sim \Delta T^3$, показанная качественно на рис. 8.3 для случая кипения в условиях свободного движения (или, как говорят, «в большом объеме»), сохраняется и в условиях

вынужденного движения. Кроме того, обнаружено, что на теплообмен при пузырьковом кипении в широких пределах изменения параметров не влияют массовые силы различной природы, в том числе гравитационные, а также электрические и магнитные поля. Можно утверждать, что существует широкая область с таким соотношением режимных параметров, при котором пузырьковое кипение управляется главным образом своими собственными, внутренними механизмами. Будем в дальнейшем называть эту область режимом развитого пузырькового кипения. Спецификой пузырькового кипения является вместе с тем очень сильная зависимость теплообмена от таких факторов, которые мало существенны для других видов теплообмена: смачиваемость поверхности, ее микрорельеф, наличие примесей в жидкости и на поверхности, материал стенки. Эти «слабые» факторы могут при одном и том же значении $q$ приводить к двукратным и даже большим различиям в $\Delta T$ и порождают у некоторых исследователей пессимизм в отношении возможности теоретического описания процесса.

Д.А. Лабунцов был первым, кто предложил приближенную теорию теплообмена при пузырьковом кипении. При чрезвычайной сложности и «многофакторности» процесса назначение такой теории — выявить наиболее существенные его черты. Полученные в итоге расчетные уравнения способны описывать теплоотдачу при кипении в некоторых «средних», типичных для технических приложений условиях. В [46] кратко изложено существо подхода Д.А. Лабунцова к анализу пузырькового кипения и представлен современный вариант приближенной теории теплообмена при развитом пузырьковом кипении.

Действующие при пузырьковом кипении центры парообразования — это очень малые «сухие пятна» на обогреваемой твердой поверхности. Характерный размер этих пятен примерно равен радиусу жизнеспособного парового зародыша $R_*$, определяемого при малых $\Delta T$ формулой (8.3). Плотность центров парообразования ($n_F$), т.е. число сухих пятен на единицу площади поверхности нагрева, — это важнейший параметр для теплообмена при кипении. В отсутствие строгой теории зарождения паровых пузырьков на стенке, исходя из соображений размерности и общих физических представлений, можно принять:

$$n_F = C_0 R_*^{-2}. \tag{8.4}$$

Действительно, если микровпадины твердой поверхности не имеют каких-либо предпочтительных размеров, т.е. в актуальном для кипения жидкостей диапазоне значений $R_*$ число впадин любого размера примерно одинаково, то уменьшение $R_*$ означает увеличение числа поверхностных впадин, которые могут стать центрами парообразования. Эту закономерность и отражает формула (8.4), предложенная Д.А. Лабунцовым (1963 г.) прежде всего для технических поверхностей нагрева.

Числовой множитель $C_0$ в (8.4) оценивается путем сопоставления с опытными данными, эти оценки дают: $C_0 = O(10^{-8}—10^{-7})$.

При равномерном распределении центров парообразования на поверхности среднее расстояние между ними:

$$l_* = 1/\sqrt{n_F} = C_0^{-1/2} R_* . \tag{8.5}$$

Так как $C_0^{-1/2} \sim 10^4—10^3$, а $R_*$ весьма мало, то суммарная площадь сухих пятен на поверхности вдали от критической тепловой нагрузки ничтожна, что полностью согласуется с опытными наблюдениями.

Следовательно, можно с уверенностью утверждать, что на преобладающей части площади обогреваемой поверхности (между центрами парообразования) тепло к жидкости передается путем конвекции, обусловленной, очевидно, образованием и ростом паровых пузырьков на стенке. С другой стороны, как обсуждалось в § 6.4, в зоне контакта трех фаз по периферии сухого пятна существуют мощные стоки тепла. Несмотря на малую площадь сухих пятен, их роль в общем тепловом балансе стенки может быть очень значительной. Обозначая «конвективную» часть потока тепла через $q_1$, а тепловой поток за счет испарения по границе сухих пятен через $q_2$, можно записать для полного теплового потока при кипении:

$$q = q_1 + q_2 . \tag{8.6}$$

Составляющая $q_1$ может быть представлена в традиционном для однофазной конвекции виде:

$$q_1 = \frac{\lambda \Delta T}{\Delta}, \tag{8.7}$$

где $\Delta$ — эффективная толщина теплопроводного слоя жидкости на твердой стенке.

В режиме сросшихся пузырьков этот слой жидкости принимает вполне осязаемый вид жидкой пленки толщиной $\delta_0$ под паровыми конгломератами. (Ее часто называют «макропленкой» в отличие от «микропленки» или «микрослоя» в основании одиночного пузырька.) В режиме одиночных пузырьков теплопроводный слой составляет (для неметаллических жидкостей) некоторую часть толщины динамического пограничного слоя на стенке. Последняя величина обусловлена пристеночным движением жидкости при парообразовании.

Принимая за характерную скорость процесса среднюю скорость парообразования $u'' = \dfrac{q}{h_{LG}\rho''}$, за характерный линейный масштаб расстояние $l_*$ между центрами парообразования, можно оценить толщину $\Delta$ по аналогии с толщиной динамического погранслоя как:

$$\Delta = C_1\sqrt{\frac{l_*\nu}{u''}} = C_1'\sqrt{\frac{R_*\nu h_{LG}\rho''}{q}}, \tag{8.8}$$

где $C_1' = O(10^1—10^2)$. Используя этот результат в (8.7), находим для $q_1$:

$$q_1 = C_2\lambda\Delta T\sqrt{\frac{q}{\rho''\nu R_* h_{LG}}}, \tag{8.9}$$

где $C_2 = 1/C_1'$*.

Тепловой поток $q_2$, очевидно, может быть записан как:

$$q_2 = Q_{\text{с.п}} n_F, \tag{8.10}$$

где $Q_{\text{с.п}}$ — мощность теплового стока, приходящегося на одно сухое пятно.

Расчетная схема течения жидкости в окрестности сухого пятна представлена на рис. 8.4. В отличие от рис. 6.10, где рассматривался жидкий микрослой с конической поверхностью и исчезающе малой площадью сухого пятна, здесь представлена схема, характерная для

---

* Если $q_1 = q$, а $R_*$ определяется согласно (8.3), то из (8.9) получается: $q = C_2'\dfrac{(\lambda^2)\Delta T^3}{\nu\sigma T_s}$, где $C_2'$ — константа порядка $10^{-3}$. Такое соотношение было впервые получено Д.А. Лабунцовым в 1963 г. [18]. При этом толщина $\Delta$ находилась из анализа движения жидкости, обусловленного образованием и ростом отдельных пузырьков.

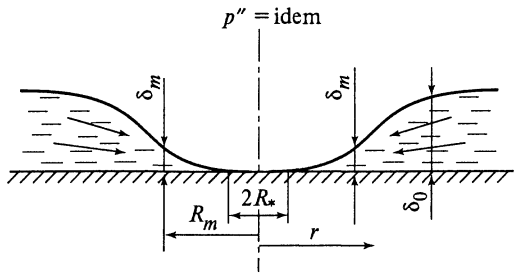



**Рис. 8.4. Расчетная схема течения жидкости у границы сухого пятна**

режима сросшихся пузырьков. На некотором расстоянии $R_m$ от центра сухого пятна располагается зона наиболее интенсивного испарения, где толщина пленки $\delta_m << \delta_0$ — средней толщины «макропленки», так что ее термическое сопротивление $\delta_m / \lambda$ за счет теплопроводности здесь мало. При этом толщина $\delta_m$ намного превосходит межмолекулярные расстояния в жидкости и, следовательно, силы адсорбции здесь уже не препятствуют испарению. Предполагается стационарный процесс, в котором вся подходящая в зону интенсивного испарения жидкость испаряется за счет теплового потока от стенки. Сама область испарения имеет, безусловно, конечную ширину в окрестности радиуса $r = R_m$.

Течение жидкости в тонкой пленке в данном случае обусловлено градиентом кривизны ее поверхности (градиентом кривизны мениска). Прямыми измерениями в модельных экспериментах установлено, что при испарении с поверхности мениска жидкой пленки кривизна поверхности в зоне наиболее интенсивного испарения возрастает. Для схемы рис. 8.4 это означает, что $\mathrm{d}H/\mathrm{d}r < 0$, т.е. кривизна поверхности пленки уменьшается по мере удаления от оси симметрии. Поскольку давление в паре $p''$ однородно, из формулы Лапласа

$$p'' - p'(r) = 2\sigma H(r)$$

следует, что

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}r} = -2\sigma \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}. \qquad (8.11)$$

Следовательно, в жидкости существует градиент давления, вызывающий ее течение к центру.

Задача о течении плоской пленки в радиальном направлении идентична рассмотренной в § 4.2 для гравитационной пленки. Един-

ственное отличие состоит в замене градиента давления, равного для гравитационной пленки $g_x \Delta\rho$, величиной, определяемой формулой (8.11). Массовый расход жидкости на единицу длины периметра в зоне интенсивного испарения ($2\pi R_m$) выражается как:

$$G_R = -\frac{2\sigma\delta_m^3}{\nu}\frac{dH}{dr}. \qquad (8.12)$$

В 90-е годы были получены численные решения (фактически выполнен численный эксперимент для конкретных условий) задачи об испарении жидкости в окрестности центра парообразования. Эти решения несомненно интересны, поскольку позволяют выяснить некоторые закономерности процесса, однако их прикладное значение весьма ограничено из-за сильной его идеализации. Толщина пленки в окрестности зоны интенсивного испарения настолько мала ($10^{-8}$—$10^{-7}$ м), что любая техническая поверхность не может рассматриваться как гладкая по отношению к тонкой пленке; весьма неоднозначен здесь и выбор краевого угла смачивания, использовавшегося в численных экспериментах. В этих условиях представляется оправданным использование приближенного метода физических оценок для определения градиента кривизны мениска в (8.12). Полагая, что $\delta_m >> R_*$, что максимальная кривизна мениска имеет порядок $1/R_*$, а минимальная — $1/\delta_m$, что такое изменение кривизны происходит на отрезке $R_m \approx \delta_m$, получаем для градиента кривизны оценку:

$$\frac{dH}{dr} \approx \frac{C_3}{R_* \delta_m}.$$

(Числовые константы в оригинальной работе [45] оценивались на каждом шаге анализа, что позволило получить такую оценку и для числовых множителей в итоговой формуле. Здесь эти оценки не приводятся.) Таким образом, выражение (8.12) принимает вид

$$G_R = C_3' \frac{\sigma\delta_m^2}{\nu R_*}. \qquad (8.12а)$$

Если вся жидкость испаряется в окрестности зоны радиуса $R_m$, то линейная плотность теплового потока у границы этой зоны

должна быть: $q_R = G_R h_{LG}$, а мощность теплового стока на одном сухом пятне

$$Q_{\text{с.п}} = 2\pi R_m q_R = 2\pi C_3' \frac{\sigma \delta_m^2 R_m h_{LG}}{\nu R_*}. \tag{8.13}$$

С другой стороны, для оценки $Q_{\text{с.п}}$ можно использовать соотношение (6.38), если принять линейную аппроксимацию профиля мениска на участке интенсивного испарения. Приравнивая (8.13) и (6.38), получаем с точностью до числовой константы выражение для толщины пленки в интересующей нас области:

$$\delta_m = C_4 \sqrt{\frac{\lambda \Delta T \nu R_*}{\sigma h_{LG}}}. \tag{8.14}$$

Теперь, имея в виду уже использовавшееся допущение $\delta_m \approx R_m$, из (8.13) и (8.10) с учетом (8.4) находим:

$$q_2 = C_5 \left(\frac{\lambda \Delta T}{R_*}\right)^{3/2} \left(\frac{\nu}{\sigma h_{LG}}\right)^{1/2}. \tag{8.15}$$

Подстановка этого соотношения и (8.9) превращает (8.6) в квадратное уравнение относительно плотности теплового потока $q$. При его решении удобно обозначить:

$$q_* = \frac{\lambda^2 \Delta T^2}{\rho'' h_{LG} \nu R_*}; \quad B_0 = \frac{q_2}{q_*} = C_5 \frac{\rho'' h_{LG}^{1/2} \nu^{3/2}}{(\sigma \lambda \Delta T R_*)^{1/2}}.$$

В итоге получим для имеющего физический смысл положительного корня:

$$q = \frac{C_2^2}{2} q_* \left(1 + \frac{2B_0}{C_2^2} + \sqrt{1 + \frac{4B_0}{C_2^2}}\right).$$

Параметр $B_0$, как можно убедиться, быстро растет с ростом давления. Более детальный анализ с учетом порядка величины констант $C_5$ и $C_2$ показывает, что слагаемое $2B_0/C_2^2$ соизмеримо с единицей при высоких приведенных давлениях. В этом случае обычно

перегревы стенки $\Delta T$ невелики и для расчета $R_*$ можно воспользоваться формулой (8.3). Тогда

$$B_0 = C_5' \frac{h_{LG}(\rho''\nu)^{3/2}}{\sigma(\lambda T_s)^{1/2}}. \qquad (8.16)$$

При низких приведенных давлениях и больших $\Delta T$ линейная аппроксимация кривой насыщения дает существенную погрешность. Использование в разложении зависимости $\Delta p(\Delta T)$ вдоль кривой насыщения квадратичного члена после несложных упрощений дает:

$$\Delta p = \frac{\rho'' h_{LG}\Delta T}{T_s}\left(1 + \frac{h_{LG}\Delta T}{2R_i T_s^2}\right), \qquad (8.17)$$

где $R_i$ — газовая постоянная.

При низких давлениях и больших $\Delta T$ (например, для воды и этанола при $p_s$ = 10 кПа, $\Delta T$ = 25 К) расчет по линейному соотношению дает $\Delta p$, почти вдвое меньшие, чем действительные, соответствующие кривым насыщения. Погрешность расчета по формуле (8.17) в этих случаях не превышает 6 %.

Используемый в качестве масштабной величины тепловой поток $q_*$ с учетом (8.17) выразится как

$$q_* = \frac{\lambda^2\Delta T^3}{2\nu\sigma T_s}\left(1 + \frac{h_{LG}\Delta T}{2R_i T_s^2}\right),$$

а итоговое соотношение примет вид

$$q = 3{,}43\cdot 10^{-4}\frac{\lambda^2\Delta T^3}{\nu\sigma T_s}\left(1+\frac{h_{LG}\Delta T}{2R_i T_s^2}\right)(1+\sqrt{1+800B}+400B), \qquad (8.18)$$

где безразмерный параметр

$$B = \frac{h_{LG}(\rho''\nu)^{3/2}}{\sigma(\lambda T_s)^{1/2}}. \qquad (8.16а)$$

В уравнении (8.18) использованы два числовых коэффициента, которые подобраны на основе сопоставления с большим числом данных о кипении 20 различных жидкостей в широком диапазоне

приведенных давлений. Порядок величины этих числовых коэффициентов соответствует оценкам на основе модели.

Как отмечалось выше, приближенная теория позволяет предсказать значения коэффициентов теплоотдачи при кипении в типичных для технических устройств условиях. Она не учитывает, например, специфику кипения на поверхностях с высокой степенью чистоты обработки, когда наблюдается очень крутая зависимость $q(\Delta T)$. При некотором сочетании теплофизических свойств жидкости и материала поверхности нагрева на измеряемый в опытах коэффициент теплоотдачи заметно влияет отношение коэффициентов тепловой активности ($\chi = \sqrt{\rho c \lambda}$) этих веществ. Такой эффект особенно заметен при кипении гелия и (в меньшей степени) других криожидкостей. В [2] приводятся расчетные уравнения для этих случаев.

## 8.3. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

### 8.3.1. ПУЗЫРЬКОВОЕ КИПЕНИЕ В КОНВЕКТИВНОМ ПОТОКЕ

Как указывалось выше (п. 8.2.3), теплообмен при развитом пузырьковом кипении полностью управляется своими внутренними механизмами и не зависит от скорости вынужденного движения. Однако это не означает, что вынужденное движение вообще не влияет на закономерности кипения. Прежде всего с ростом скорости течения жидкости $w_0$ возрастает коэффициент теплоотдачи однофазной конвекции $\alpha_w$ и, следовательно, при неизменной плотности потока $q$ уменьшается перегрев стенки относительно $T_s$. Это приводит к тому, что начало кипения в потоке жидкости происходит при тем больших $q$, чем выше скорость жидкости. Эта закономерность хорошо видна из рис. 8.5, на котором представлены сглаженные опытные зависимости $q(\Delta T)$, полученные одним из авторов [17]. Теплообмен происходил на омываемой потоком воды плоской пластине при давлении 3,92 бар. Кривая *1* соответствует кипению при свободном движении (в большом объеме). В условиях обтекания пластины потоком воды до начала закипания коэффициент теплоотдачи $\alpha_w$ не зависит от плотности теплового потока и целиком определяется скоростью жидкости (кривые *2*, *3*, *4*). С ростом теплового потока при постоянном $\alpha_w$ растет температура стенки, и при некотором значении

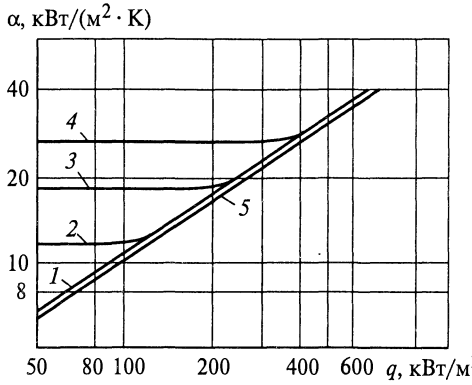



**Рис. 8.5. Теплообмен при кипении воды в условиях вынужденного движения на горизонтальной пластине при $p_s$ = 0,392 МПа [17]:**

*1* — $w_0 = 0$; *2* — $w_0$ = 1,05 м/с; *3* — $w_0$ = 2 м/с; *4* — $w_0$ = 3,1 м/с; *5* — расчет по (8.18)

$q$ начинается кипение. Однако до тех пор, пока интенсивность кипения низка, оно не сказывается на величине $\alpha = \alpha_w$. Отклонение кривых *2*, *3*, *4* от горизонтали показывает, что влияние кипения стало существенным. Дальнейшее увеличение $q$ приводит к тому, что коэффициент теплоотдачи $\alpha$ сравнивается со значением $\alpha_q$, отвечающим условиям кипения в большом объеме. Чем выше скорость вынужденного движения, тем при больших $q$ это происходит.

Практически можно пользоваться простым правилом: если $\alpha_w \geq 2\alpha_q$, то $\alpha = \alpha_w$; при $\alpha_q \geq 2\alpha_w$ $\alpha = \alpha_q$, где $\alpha$ — действительный коэффициент теплоотдачи при кипении в вынужденном потоке жидкости; $\alpha_w$ — коэффициент теплоотдачи при однофазной конвекции, определяемой скоростью потока $w_0$; $\alpha_q$ — коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении в большом объеме, который может быть рассчитан по (8.18). На рис. 8.5 расчету по (8.18) отвечает кривая *5*, которая дает $\alpha_q$, отличающиеся от опытной кривой *1* менее чем на 8 %, что существенно меньше, чем обычный разброс опытных данных.

В области соизмеримых значений $\alpha_q$ и $\alpha_w$ рекомендуется интерполяционная формула:

$$\alpha = (\alpha_q^3 + \alpha_w^3)^{1/3}, \qquad (8.19)$$

которая учитывает перенос тепла, обусловленный одновременным действием механизмов вынужденной конвекции и кипения. Из (8.19) следует, что при двукратном превышении одного из коэффи-

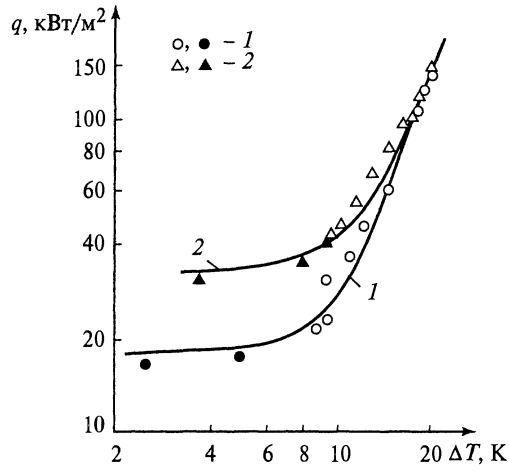



**Рис. 8.6. Сравнение опытных данных [60] о кипении хладона R113 в вертикальном кольцевом канале при давлении $p_s$ = 2,19 бар с расчетом по (8.20) и (8.18):**

*1* — $\rho' w_0$ = 579 кг/(м$^2$ · с); *2* — $\rho' w_0$ = 1102 кг/(м$^2$ · с); ●, ▲ — режимы без кипения

циентов теплоотдачи в сравнении с другими вклад меньшего в общий коэффициент теплоотдачи составляет всего 4 %.

Описанная методика может быть использована как при внешнем обтекании поверхности (пограничный слой), так и при течении в трубах. Рис. 8.5 относится к течению в пограничном слое, а на рис. 8.6 приводятся опытные данные работы [60] для случая кипения хладона R113 ($C_2F_3CL_3$) в кольцевом канале. Из этого рисунка видно, что при развитом пузырьковом кипении на теплообмен не влияет и недогрев жидкости до температуры насыщения. Коэффициенты теплоотдачи $\alpha$ и $\alpha_q$ здесь отнесены к температуре насыщения $T_s$. В области заметного влияния однофазной конвекции при расчетах необходимо учитывать, что $\alpha_w$ относится к среднемассовой температуре жидкости $\overline{T}$. Этот учет достигается введением очевидной коррекции в формулу (8.19):

$$\alpha = \left[\alpha_q^3 + \alpha_w^3 \left(1 + \frac{\Delta T_{\text{нед}}}{\Delta T}\right)^3\right]^{1/3}, \qquad (8.20)$$

где $\Delta T = T_c - T_s$; $\Delta T_{\text{нед}} = T_s - \overline{T}$ — недогрев жидкости до состояния насыщения. Использование (8.20), строго говоря, следует ограничить условием $\Delta T > \Delta T_{\text{н.к}}$, так как до закипания теплообмен полностью определяется однофазной конвекцией, и плотность теплового потока

$$q = \alpha_w (T_c - \overline{T}).$$

На рис. 8.6 тем не менее приводятся опытные точки (зачерненные символы), относящиеся к режимам без кипения. Ясно, что для таких режимов при малых $\Delta T$ доля теплового потока, переданного за счет кипения $q_{кип} = \alpha_q \Delta T$, становится ничтожно малой в сравнении с передачей тепла вынужденной конвекцией, поскольку в [60] недогрев жидкости до $T_s$ был весьма значителен ($\Delta T_{нед}$ = 30 К на входе в канал). Так как при неизменном $\rho' w_0$ величина $\alpha_w$ не изменяется, то при $\Delta T_{нед} >> \Delta T$ получается очень слабая зависимость $q(\Delta T)$ (рис. 8.6). В режимах без кипения опытные данные сравниваются фактически с уравнением для теплообмена при однофазной турбулентной конвекции [31]:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\mathrm{RePr}\xi/8}{1 + 900/\mathrm{Re} + 12{,}7\sqrt{\xi/8}\,(\mathrm{Pr}^{2/3} - 1)}, \qquad (8.21)$$

где $\mathrm{Nu} = \alpha_w d_г/\lambda$; $\mathrm{Re} = w_0 d_г/\nu$; $\mathrm{Pr} = \nu/a$; $d_г$ — гидравлический диаметр канала; $a = \lambda/(\rho' c_p)$ — температуропроводность жидкости.

Коэффициент гидравлического сопротивления рассчитывается по формуле Филоненко:

$$\xi = (1{,}82\,\lg\mathrm{Re} - 1{,}64)^{-2}. \qquad (8.22)$$

Рисунок 8.6 подтверждает, что при развитом пузырьковом кипении (в данном случае при $q > 70$ кВт/м$^2$) скорость жидкости и ее недогрев перестают влиять на теплоотдачу, температурный режим стенки полностью определяется уравнением (8.18). В области соизмеримого влияния однофазной конвекции и кипения интерполяционная формула (8.20) хорошо согласуется с опытными данными, если соответствующие коэффициенты теплоотдачи рассчитываются соответственно по формулам (8.21) и (8.18).

Изложенная выше методика расчета теплообмена при кипении в условиях вынужденного движения жидкости может применяться в тех режимах течения двухфазной смеси, где возможно пузырьковое кипение. Применительно к схеме рис. 8.1 это области *II*—*IV* и часть *V*-й. Для недогретой жидкости ($x_б < 0$) пузырьковое кипение ограничено снизу минимально необходимым перегревом стенки $(T_с - T_s)_{н.к} = \Delta T_{н.к}$, а сверху — критической тепловой нагрузкой $q_{кр}$. В отсутствие надежной теоретической модели закипания на твердой

стенке для определения $\Delta T_{\text{н.к}}$ можно воспользоваться следующей предельной оценкой:

$$\alpha_{и}(T_{\text{с.нк}} - \bar{T}) = q_{\text{кип}}. \qquad (8.23)$$

Если $q_{\text{кип}}$ выразить по (8.18), то (8.23) дает алгебраическое уравнение, позволяющее рассчитать $T_{\text{с.нк}}$, т.е. температуру стенки, при которой происходит переход от однофазной конвекции к кипению (см. рис. 8.5 и 8.6). При высоких приведенных давлениях в расчетах иногда приближенно принимают, что пузырьковое кипение начинается с того сечения канала, где температура стенки сравнялась с температурой насыщения, т.е. с начала области *II* рис. 8.1. Поскольку при высоких приведенных давлениях ($p/p_{\text{кр}} > 0{,}3$) $\Delta T_{\text{н.к}}$ обычно не превосходят 1—2 К, погрешность такого приближения невелика. Кризису пузырькового кипения недогретой жидкости посвящен § 8.4.

### 8.3.2. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫСОКИХ ПАРОСОДЕРЖАНИЯХ ПОТОКА

Кипение в потоке насыщенной жидкости сопровождается ростом паросодержания, тем более быстрым, чем меньше массовый расход смеси и выше плотность теплового потока (см. уравнение (7.30)). В дисперсно-кольцевом режиме течения двухфазной смеси жидкая пленка на стенке может стать столь тонкой, что в ней невозможно достичь перегрева жидкости на стенке, необходимого для образования паровых пузырьков. В этом случае кипение сменяется режимом испарения с поверхности пленки. К сожалению, непреодоленные сложности моделирования дисперсно-кольцевых течений при наличии уноса и осаждения жидких капель не позволяют сегодня с достаточной уверенностью предсказать границу перехода от пузырькового кипения к режиму испарения пленки. В качестве приближенной оценки этой границы и, следовательно, применимости формул (8.18) и (8.19) можно принять условие $\varphi \le 0{,}75$. При этом истинное объемное паросодержание $\varphi$ рассчитывается по рекомендациям гл. 7 для адиабатных двухфазных потоков.

Следует иметь в виду, что на положение границы режимов пузырькового кипения и испарения пленки влияет плотность теплового потока на стенке. При высоких $q$ даже в тонкой пленке жидкости градиент температуры может оказаться столь велик, что на стенке достигаются условия, необходимые для образования паровых пу-

зырьков. Эти качественные соображения подкрепляются экспериментальными данными (см., например, [17]).

Переход к режиму испарения тонкой пленки в дисперсно-кольцевом двухфазном потоке обычно сопровождается увеличением коэффициента теплоотдачи. Для его расчета (как и для определения границы этого режима теплообмена) предложены различные эмпирические уравнения (см., например, [16, 17, 30, 39, 40, 74]), основанные обычно на качественных соображениях. В [41] как предпочтительное по простоте и физическому смыслу рекомендуется для расчета коэффициента теплоотдачи в потоках с большим паросодержанием соотношение ЦКТИ:

$$\alpha_{эф} = \alpha [1 + 7 \cdot 10^{-9} (\alpha_q / \alpha)^2 (w_{см} \rho' h_{LG} / q)^{3/2}]^{1/2}, \qquad (8.24)$$

где $\alpha$ рассчитывается по (8.19), $\alpha_q$ — по (8.18), скорость смеси $w_{см}$ — по (7.8).

Эта формула обобщает большой материал ее авторов (А.А. Андреевский, В.М. Боришанский, В.Н. Фромзель, Б.С. Фокин), полученный в опытах с водой в широком диапазоне давлений, тепловых потоков и расходов в трубах и кольцевых каналах.

Следует сказать, что для приложений высокая точность расчета коэффициента теплоотдачи к двухфазному потоку в области достаточно высоких скоростей смеси и паросодержаний не очень критична. При обычных в этих условиях значениях $\alpha_{эф}$ и $q$ (соответственно десятки кВт/(м$^2$·К) и сотни кВт/м$^2$) даже двукратная погрешность в расчете коэффициента теплоотдачи означает погрешность в определении $T_c$ не более 10—20 К, что во многих практических задачах оказывается допустимым. Критичным здесь является надежное предсказание кризиса кипения, связанного в рассматриваемом случае с высыханием жидкой пленки. Иная ситуация складывается в случае течения двухфазной смеси в горизонтальных каналах. При относительно низких скоростях смеси здесь устанавливается расслоенная структура потока, при которой даже в области малых тепловых нагрузок азимутальные градиенты температуры стенки могут оказаться недопустимо большими. Попытки построить физические модели для определения границ между различными структурами горизонтальных двухфазных потоков в условиях теплообмена и на этой основе разработать методы расчета коэффициентов теплоотдачи относятся к самому последнему времени [73]. Сегодня можно го-

ворить о первых успехах на этом пути, но обсуждать эти результаты в учебном пособии, видимо, еще рано.

## 8.4. КРИЗИС ТЕПЛООБМЕНА ПРИ КИПЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛАХ

### 8.4.1. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ

Выявление условий возникновения кризиса кипения является практически наиболее важной задачей, стоящей перед исследователями теплообмена при кипении. Действительно, значение $q_{кр}$ во многих случаях определяет границу безаварийной эксплуатации оборудования по тепловой нагрузке. Несмотря на огромное количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных кризису кипения в каналах, сегодня не только отсутствует законченная теория процесса, но (по некоторым аспектам) даже единство в качественных представлениях о механизме процесса. Пожалуй, сегодня можно лишь констатировать намечающееся согласие различных исследователей в том, что невозможно создать некую универсальную модель кризиса кипения в каналах, способную описывать развитие процесса при любом сочетании параметров [12, 51, 78]. При этом в упоминаемых работах речь шла о кризисах кипения недогретой жидкости, т.е. о режимах, при которых относительная энтальпия потока в месте кризиса $x_{кр} < 0$. Достаточно взглянуть на общий вид зависимости $q_{кр}(x)$ в широком диапазоне $x$ [11], чтобы понять очевидную невозможность построения общей теории кризиса кипения в каналах. Представленная на рис. 8.7 зависимость содержит, как минимум, три различные по доминирующему процессу области. Участок $AB$ соответствует кризису пузырькового кипения (кризис первого рода), имеющему общие черты с кризисом кипения в условиях свободного движения (большой объем). Участок $BC$ согласно [11] отвечает постоянно-

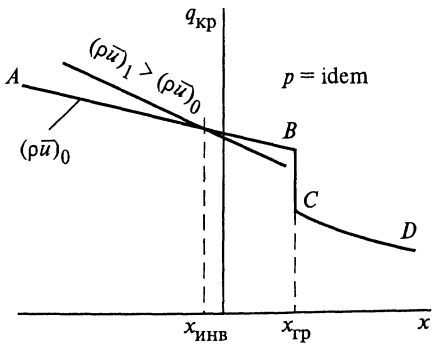



**Рис. 8.7. Общий вид зависимости критического теплового потока от относительной энтальпии потока [11]**

му значению критического паросодержания ($x_{гр0}$) и обусловлен высыханием тонкой жидкой пленки в дисперсно-кольцевом режиме двухфазного течения. Это — кризис второго рода, для которого согласно [11] плотность теплового потока не может служить определяющим параметром. Наконец, участок *CD* соответствует «кризису орошения», который управляется, вероятно, плотностью массового потока жидких капель из ядра на стенку.

В отличие от кипения в объеме, где кризис однозначно определяется свойствами жидкости и пара, при кипении в каналах кризис сложным образом зависит от локального паросодержания (относительной энтальпии) потока. Однако $x$ — не единственный параметр, влияющий на кризис. Из самых общих соображений ясно, что на условия эвакуации пара от стенки, а следовательно, на $q_{кр}$ должна влиять скорость потока. Причем влияние это, как показывают эксперименты, неоднозначное: при $x < x_{инв}$ с ростом массовой скорости $q_{кр}$ возрастает (что представляется естественным), а при $x > x_{инв}$ происходит «инверсия» влияния массовой скорости на $q_{кр}$: с ростом $\rho' w_0$ значение $q_{кр}$ снижается (что не имеет сегодня достаточно убедительного объяснения). Поскольку механизм отрицательного влияния массовой скорости на критическую тепловую нагрузку не ясен, отсутствует и сколь-нибудь стройная методика расчета положения «точки инверсии», т.е. величины $x_{инв}$. Не имеет сегодня объяснения и такой (достаточно удивительный) экспериментальный результат, как отрицательное влияние на $q_{кр}$ недогрева жидкости до $T_s$ в узкой области малых отрицательных $x$ [12, 78].

Все сказанное выше объясняет то, что в настоящее время в проектных расчетах чаще используют не расчетные соотношения, а рекомендуемые табличные значения $q_{кр}$ в зависимости от давления, массовой скорости и относительной энтальпии потока в точке кризиса. Таблицы рекомендуемых значений $q_{кр}$ при кипении воды в круглых равномерно обогреваемых трубах впервые были составлены в СССР [33]. Позднее аналогичные таблицы были подготовлены в Канаде; недавно опубликован новый, совместный вариант таких таблиц [61]. Предпринимаются попытки разработать методы пересчета $q_{кр}$ с воды на другие жидкости [62].

### 8.4.2. МОДЕЛЬ КРИЗИСА В ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ПОТОКАХ НЕДОГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

Анализ какого-либо физического явления, как это не раз демонстрировалось в настоящей книге, сильно упрощается в предельных случаях, когда удается свести к минимуму число параметров, реально влияющих на процесс. Применительно к анализу кризиса кипения в каналах такая возможность возникает для высокоскоростных потоков жидкости, сильно не догретой до температуры насыщения.

Эксперименты (см. [12]) показывают, что при высоких скоростях течения и больших недогревах ($x_б < -0{,}1$) плотность теплового потока не влияет на гидравлическое сопротивление вплоть до $q_{кр}$. Это дает основания полагать, что в рассматриваемых условиях паровые пузырьки не выходят за пределы вязкого подслоя, а остаются на стенке, действуя как тепловые трубы микронных размеров. В основании таких пузырьков жидкость испаряется, а на верхней (купольной) части пар конденсируется (рис. 8.8). Если предположить, что на контрольной поверхности $AA$, совпадающей с границей вязкого подслоя, температура равна $T_s$ (принимается, следовательно, что эта граница проходит в среднем через вершины паровых пузырьков, «сидящих» на стенке), то предельная плотность теплового потока определяется возможностями однофазной турбулентной конвекции.

Если отсутствует поток пара через поверхность $AA$, то невозможно отвести от стенки тепловой поток, превосходящий тот, что отводится от поверхности $AA$ к холодному ядру. Превышение такого потока приведет к выпариванию жидкости в двухфазном пристенном слое и, следовательно, к кризису. При развитой турбу-

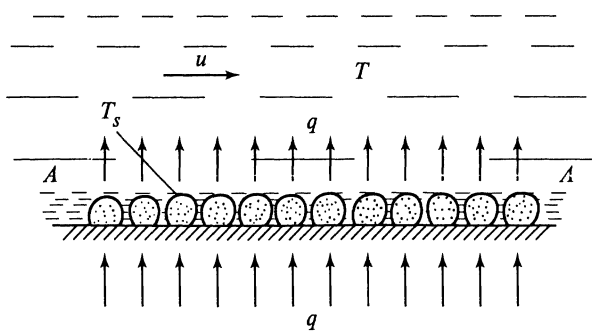



**Рис. 8.8. Схема переноса тепла от стенки к холодному ядру жидкости при высоких $(\rho\bar{u})$ и $\Delta T_{нед}$**

лентности в пристенной области справедлива аналогия Рейнольдса (см., например, [13, 31, 40]). Если эффективная толщина вязкого подслоя оценивается как $11\nu/\upsilon_*$, где $\upsilon_* = \sqrt{\tau_c/\rho} = \bar{u}\sqrt{\xi/8}$ — динамическая скорость, то рейнольдсов поперечный поток может быть оценен как:

$$\dot{m}_R = \rho\bar{u}\,\frac{\xi/8}{1-11\sqrt{\xi/8}}, \tag{8.25}$$

где $\bar{u}$ — среднемассовая скорость жидкости в канале; $\xi_0$ — коэффициент гидравлического сопротивления, рассчитывается по формуле (8.22).

Число Рейнольдса при этом рассчитывается по свойствам жидкости на линии насыщения. При сделанных предположениях критическая плотность теплового потока рассчитывается как:

$$q_{кр} = \rho' w_0 c_p \Delta T_{нед}\,\frac{\xi/8}{1-11\sqrt{\xi/8}}. \tag{8.26}$$

Как показано в [77], эта формула хорошо согласуется с опытными данными в области весьма высоких скоростей ($\rho' w_0 > 2000$ кг/(м$^2\cdot$с)) и недогревов $\Delta T_{нед} = T_s - \bar{T}$ ($\Delta T_{нед} > 50$ К для воды). При меньших недогревах часть пара, генерируемого на стенке, попадает в ядро, т.е. пересекает контрольную поверхность $AA$. В этих условиях при строгом подходе, во-первых, необходимо учитывать изменение величины $\xi_0$ в сравнении с расчетом по формуле (8.22), относящейся к течению в гладкой трубе, а во-вторых, требуется учет той части теплового потока, который отводится к холодному ядру потоком пара. В отсутствие строгой модели, учитывающей эти эффекты, в [77] предлагается интерполяционная формула, дающая при больших недогревах и скоростях жидкости соотношение (8.26), а при нулевом недогреве ($x_{кр} = 0$) — формулу для кризиса кипения насыщенной жидкости.

В п. 8.3.1 обсуждалось, что с ростом недогрева и скорости жидкости начало кипения сдвигается в область высоких перегревов стенки $\Delta T = T_c - T_s$ и, следовательно, больших тепловых потоков. При высоких приведенных давлениях (практически, при $p/p_{кр} \geq 0{,}8$) это может привести к тому, что температура стенки, необходимая для начала закипания, превысит температуру предельного перегрева

жидкости $T_{\text{п.п}}$. В этом случае кризис кипения будет иметь термодинамическую природу. Согласно [47] расчет $q_{\text{кр}}$ в этих условиях следует вести по формуле

$$q_{\text{кр}} = \alpha \Delta T_{\text{п.п}}, \tag{8.27}$$

где $\Delta T_{\text{п.п}} = T_{\text{п.п}} - T_s$; $\alpha$ — коэффициент теплоотдачи, который рассчитывается по формуле Б.С. Петухова с сотрудниками (8.21).

Температура предельного перегрева определяется по соотношению

$$T_{\text{п.п}} = [b_1 + (1 - b_1)p/p_{\text{кр}}]T_{\text{кр}}, \tag{8.28}$$

$b_1 = 0{,}916 - 0{,}015A + 0{,}00038A^2$, где критерий Филиппова $A = 100\, p_*/p_{\text{кр}}$ при $T_{\text{кр}}/T_s(p_*) = 1{,}6$.

Условием применимости формулы (8.27) является неравенство $\Delta T_{\text{н.к}} \geq \Delta T_{\text{п.п}}$, где $\Delta T_{\text{н.к}}$ — температурный напор начала закипания.

Приложение

# ЗАПИСЬ ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Если положение некоторой точки $M$ пространства определено радиусом-вектором $r$ или тройкой чисел $(x_1, x_2, x_3)$ в декартовой и $(q_1, q_2, q_3)$ в криволинейной системе координат (рис. П.1) должна существовать связь: $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$, где $i = 1, 2, 3$, или $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$.

В декартовых координатах дифференциалы $\mathrm{d}x_i$ можно рассматривать как расстояния, измеряемые вдоль каждой из координатных кривых. Что касается криволинейных координат, то в общем случае дифференциалу $\mathrm{d}q_1$ соответствует расстояние $\mathrm{d}l_1$, измеряемое вдоль координатной кривой $q_1$ от точки $M$ с координатами $(q_1, q_2, q_3)$ до точки $M'$ с координатами $(q_1 + \mathrm{d}q_1, q_2, q_3)$. Такая же связь существует между дифференциалами $\mathrm{d}q_2$ и $\mathrm{d}q_3$ и расстояниями $\mathrm{d}l_2$ и $\mathrm{d}l_3$, отсчитанными вдоль соответствующих координатных кривых $q_2$ и $q_3$.

Отношения

$$H_1 = \left|\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}q_1}\right|; \quad H_2 = \left|\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}q_2}\right|; \quad H_3 = \left|\frac{\mathrm{d}l_3}{\mathrm{d}q_3}\right| \qquad (\text{П.1})$$

называются метрическими коэффициентами (коэффициентами Ляме).

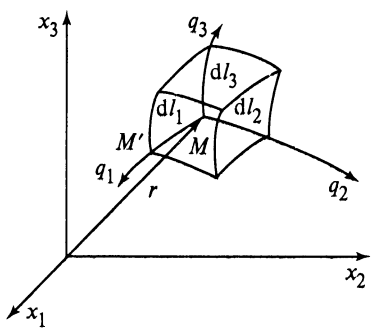



**Рис. П.1. Координатные кривые и элементарный объем в криволинейных координатах**

Единичный орт в криволинейной системе координат определяется соотношением:

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m}\delta_{km}, \qquad (\text{П.2})$$

где дельта Кронекера

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m; \end{cases}$$

суммирование по $k$ не проводится.

В частности: $\mathbf{i} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}q_1}$ и т.д. Отсюда ясно, что в ортогональной криволинейной системе координат:

$$H_k = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_k}\right)^2}. \qquad (\text{П.3})$$

С помощью коэффициентов Ляме в ортогональных криволинейных координатах достаточно просто выражаются элементарные площадки $\mathrm{d}F_k$, нормальные к координатным кривым $q_k$: $\mathrm{d}F_1 = H_2 H_3 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3$; $\mathrm{d}F_2 = H_1 H_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_3$; $\mathrm{d}F_3 = H_1 H_2 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$ и элемент объема (см. рис. П.1) $\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3$.

Основные дифференциальные операторы поля также выражаются с помощью коэффициентов Ляме.

Если $\nabla\psi$ — градиент скалярной функции $\psi$, то приращение функции вдоль направления $\mathbf{r}$:

$$\mathrm{d}\psi = \nabla\psi \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Из соотношений (П.1) и (П.2) имеем:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} \equiv \mathrm{d}l_j \mathbf{i}_j = H_1 \mathrm{d}q_1 \mathbf{i}_1 + H_2 \mathrm{d}q_2 \mathbf{i}_2 + H_3 \mathrm{d}q_3 \mathbf{i}_3.$$

Тогда, раскрывая значение полного дифференциала $\mathrm{d}\psi$, получаем

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k = \nabla\psi H_j \mathrm{d}q_k \mathbf{i}_k \delta_{jk}.$$

Отсюда следует, что:

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{i}_k = \nabla\psi_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} \qquad (\text{П.4})$$

(суммирования по $k$ нет) или в развернутом виде

$$\mathrm{grad}\,\psi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\mathbf{i}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}\mathbf{i}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3}\mathbf{i}_3. \qquad (\text{П.4}')$$

Дивергенция вектора $\mathbf{A}$ в ортогональной криволинейной системе координат может быть вычислена, исходя из теоремы Остроградского—Гаусса. Поскольку:

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A} = \int_F \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\mathrm{d}V}\int_F \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{F}.$$

Применяя это определение дивергенции к элементарному объему $\mathrm{d}V$ (см. рис. П.1), получаем:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3A_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right]. \qquad (\text{П.5})$$

Используя теорему Стокса, устанавливающую связь между интенсивностью вихря вектора и циркуляцией вектора по элементарному контуру $\mathrm{d}C_i$:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_{q_i}\,\mathrm{d}F_i = \int_{\mathrm{d}C_i}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r},$$

можно получить выражение для любой проекции вектора $\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Приведем эти выражения:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_{q_1} = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(A_{q_3}H_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(A_{q_2}H_2)}{\partial q_3}\right];$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_{q_2} = \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial(A_{q_1}H_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(A_{q_3}H_3)}{\partial q_1}\right]; \qquad (\text{П.6})$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{A})_{q_3} = \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(A_{q_2}H_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(A_{q_1}H_1)}{\partial q_2}\right].$$

Наконец, используя соотношения (П.4) и (П.5), дадим выражение оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат:

$$\nabla^2\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]. \qquad (\text{П.7})$$

Для сферических координат (рис. П.2) имеем следующие соотношения их связи с декартовыми:

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi;$$

$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi;$$

$$x_3 = r\cos\theta.$$

Коэффициенты Ляме: $H_r = 1$; $H_\theta = r$; $H_\varphi = r\sin\theta$.

И в соответствии с соотношениями (П.4)—(П.7) легко могут быть определены выражения для градиента, дивергенции, ротора вектора и оператора Лапласа в сферической системе координат.

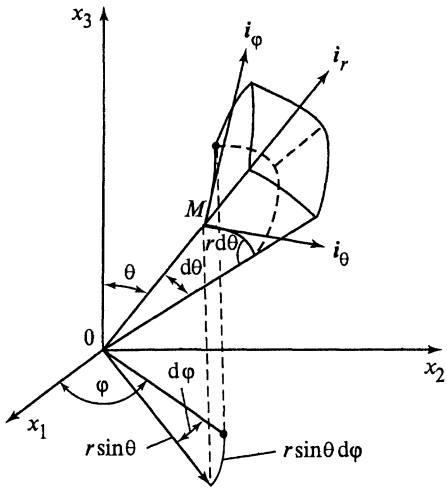



**Рис. П.2. Сферические координаты**

В цилиндрических координатах ($r$, $z$, $\varphi$), если воспользоваться рис. П.2, радиальная координата $r$ располагается в плоскости $x_1 0 x_2$.

Тогда: $x_1 = r\cos\varphi$; $x_2 = r\sin\varphi$; $x_3 = z$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{x_2}{x_1}$. Коэффициенты Ляме: $H_r = 1$; $H_z = 1$; $H_\varphi = r$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.** Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: ВО «Наука», 1992.
2. **Аметистов Е.В., Клименко В.В., Павлов Ю.М.** Кипение криогенных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1995.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
4. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
5. **Ганчев Б.Г.** Охлаждение элементов ядерных реакторов стекающими пленками. М.: Энергоатомиздат, 1987.
6. **Гидравлический** расчет котельных агрегатов (нормативный метод) / Под ред. В.А. Локшина, Д.Ф. Петерсона, А.Л. Шварца. М.: Энергия, 1978.
7. **Гидромеханика** невесомости / В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис и др. М.: Наука, 1976.
8. **Гимбутис Г.** Теплообмен при гравитационном течении пленки жидкости. Вильнюс: Мокслас, 1988.
9. **Гохштейн А.Я.** Поверхностное натяжение твердых тел и адсорбция. М.: Наука, 1976.
10. **Делайе Дж, Гио М., Ритмюллер М.** Теплообмен и гидродинамика в атомной и тепловой энергетике. М.: Энергоатомиздат, 1984.
11. **Дорощук В.Е.** Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах. М.: Энергоатомиздат, 1983.
12. **Зейгарник Ю.А.** Об универсальной модели кризиса кипения недогретой жидкости в каналах // ТВТ. 1996. Т. 34. № 1. С. 52—56.
13. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** Теплопередача. М.: Энергоатомиздат, 1981.
14. **Капица П.Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 1—28.
15. **Капица П.Л., Капица С.П.** Опытное изучение волнового режима течения // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. № 2. С. 105—120.
16. **Кутателадзе С.С., Стырикович М.А.** Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976.
17. **Кутепов А.М., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г.** Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. — 3-е изд. М.: Высшая школа, 1986.
18. **Лабунцов Д.А.** Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике. М.: Изд-во МЭИ, 2000.
19. **Лабунцов Д.А., Ягов В.В.** Основы механики двухфазных систем. М.: МЭИ, 1977.
20. **Лабунцов Д.А., Ягов В.В.** Гидростатическое равновесие и волновые движения газожидкостных систем. М.: МЭИ, 1977.
21. **Лабунцов Д.А., Ягов В.В.** Механика простых газожидкостных структур. М.: МЭИ, 1978.

22. **Лабунцов Д.А., Ягов В.В.** Об условиях отрыва парового пузыря при кипении при низких приведенных давлениях // Теплофизика высоких температур. 1988. Т. 26. № 6.
23. **Лабунцов Д.А., Ягов В.В., Крюков А.П.** Основы механики двухфазных систем. М.: МЭИ, 1988.
24. **Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
25. **Левич В.Г.** Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
26. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
27. **Методы** решения задач гидромеханики для условий невесомости / А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков и др. Киев : Наукова думка, 1992.
28. **Муратова Т.М., Лабунцов Д.А.** Кинетический анализ процессов испарения и конденсации // Теплофизика высоких температур. 1969. Т. 7. С. 959—967.
29. **Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТ СО АН СССР. 1983.
30. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987.
31. **Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А.** Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Энергоатомиздат, 1986.
32. **Рассохин Н.Г.** Парогенераторные установки атомных электростанций. — 3-е изд. М.: Энергоатомиздат, 1987.
33. **Рекомендации** по расчету кризиса теплоотдачи при кипении воды в круглых трубах: Препринт № 1—57. М.: ИВТ АН СССР. 1980.
34. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973.
35. **Скрипов В.П.** Метастабильная жидкость. М.: Наука, 1972.
36. **Сретенский Л.И.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
37. **Соу С.** Гидродинамика многофазных систем. М.: Наука, 1971.
38. **Тарасова Н.В.** Гидравлическое сопротивление при кипении воды и пароводяной смеси в обогреваемых трубах и кольцевых каналах // Труды ЦКТИ «Котлотурбостроение». Л., 1965. Вып. 59. С. 47—58.
39. **Теоретические** основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под ред. А.В. Клименко, В.М. Зорина. 3-е изд. М.: Издательство МЭИ, 2001.
40. **Теория** тепломассообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1997.
41. **Толубинский В.И.** Теплообмен при кипении. Киев: Наукова думка, 1980.
42. **Уоллис Г.** Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972.
43. **Холпанов Л.П., Шкадов В.Я.** Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990.
44. **Ягов В.В.** О предельном законе роста паровых пузырей в области весьма низких давлений (большие числа Якоба) // ТВТ. 1988. Т. 26. № 2. С. 335—341.
45. **Ягов В.В.** Теплообмен при развитом пузырьковом кипении жидкостей // Теплоэнергетика. 1988. № 2. С. 4—9.
46. **Ягов В.В.** Научное наследие Д. А. Лабунцова и современные представления о пузырьковом кипении // Теплоэнергетика. 1995. № 3. С. 2—10.
47. **Ягов В.В., Пузин В.А.** Кризис кипения в условиях вынужденного течения недогреторй жидкости // Теплоэнергетика. 1985. № 10. С. 52—55.
48. **Bankoff S.G.** A variable density single-fluid model for two-phase flow with particular reference to steam-water flow // J. Heat Transfer. 1960. Vol. 82. P. 265—272.

49. **Bankoff S.G.** Minimum thickness of a draining liquid film // Int. J. Heat Mass Transfer. 1971. Vol. 14. № 12. P. 2143—2146.
50. **Bashforth Fr., Adams J.** Capillary Action. Cambridge. 1883.
51. **Celata G.P.** Modelling of critical heat flux of subcooled flow boiling. The Physics of Heat Transfer in Boiling and Condensation // Proc. of the Int. Symp., May 21—24. 1997. Moscow. Russia. P. 583—590.
52. **Chesters A.K.** An analytical solution for the profile and volume of a small drop or bubble symmetrical about a vertical axis // J. Fluid Mech. 1977. Vol. 81, part 4. P. 609—624.
53. **P. Di Marco.** Pool boiling in reduced gravity // Keynote lecture at the Int. Conf. «Boiling 2000». Anchorage. USA. 2000.
54. **Florschuetz L.W., Henry C.L., Rashid Khan A.** Growth rates of free vapor bubbles in liquids at uniform superheats under normal and zero gravity conditions // Int. J. Heat Mass Transfer. 1969. Vol. 12. № 11. P. 1465—1489.
55. **Fritz W.** Berechnung des Maximalvolmens viol Dampfblase, «Phys Z». 1935. Bd. 36. № 11.
56. **Fukano T., Furukawa T.** Prediction of the effects of liquid viscosity on interfacial shear stress and frictional pressure drop in vertical upward gas–liquid annular flow // Exp. Heat Transfer, Fluid Mech. and Thermodynamics (Editors: M. Giot, F. Mayinger, G.P. Celata). Brussels. 1997. Vol. 2. P. 1161—1168.
57. **Haberman W.L., Morton R.K.** An experimental study of bubbles moving in liquids // Trans. of Amer. Soc. of Civil Engineers. 1956. Vol. 121. P. 227—252.
58. **Hammit F.G.** Cavitation and Multiphase Flow Phenomena. N.-Y.: McGrow—Hill. 1980.
59. **Harper J.F.** Motion of bubbles and drops through liquids // Adv. Appl. Mech. 1972. Vol. 12. P. 59—129.
60. **Hasan A., Roy R.P., Karla S.P.** Experiments on subcooled flow boiling heat transfer in a vertical annular channel // Int. J. Heat Mass Transfer. 1990. Vol. 33. P. 2285—2293.
61. **The 1996** look-up table for critical heat flux in tubes / D.C. Groeneveld, L.K.H. Leung, P.L. Kirillov et al. // Nuclear Eng. and Design. 1996. Vol. 163. P. 1—23.
62. **Fluid-to** fluid modelling of the critical heat flux and post-dryout heat transfer / D.C. Groeneveld et al. // Exp. Heat Transfer, Fluid Mech. and Thermodynamics Edited by M. Giot, F. Mayinger, G.P. Celata. 1997. Vol. 2. P. 859—866.
63. **Krevelen D.W., Hoftijzer P.I.** Studies of gas bubble formation. Calculation of interfacia area in bubble contactor // Chem. Engng. Progr. 1950. Vol. 46. P. 29.
64. **Labunstsov D.A., Kryukov A.P.** Analysis of intensive evaporative and condensation // Int. J. Heat Mass Transfer. 1979. Vol. 22. P. 989—1002.
65. **Lewis D.J.** The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their plans // Proc. Roy. Soc. Series A. London, 1950. Vol. 202. P. 81—96.
66. **Rayleigh O.M.** On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // Phyl. Mag. 1917. Vol. 34. № 200. P. 94—98.
67. **Scriven L.E.** On the dynamics of phase growth. Chem. Eng. Sci. 1959. Vol. 1. P. 1—14.
68. **The departure** size of pool-boiling bubbles from artificial cavities at moderate and high pressures / W.M. Slyeter, P.C. Slooten, C.A. Copraij, A.K. Chesters // Int. J. Multiphase Flow. 1991. Vol. 17. P. 153—158.

69. **Taitel Y.** Flow pattern transition in two-phase flow // Proc. of 9-th Int. Heat Transfer Conf. Jerusalem. 1990. Vol. 1. P. 237—254.
70. **Taitel Y., Bornea D., Dukler A.K.** Modelling flow pattern transitions for steady gas-liquid flow in vertical tubes // AIChE Journal. 1980. Vol. 26. №. 3. P. 345—354.
71. **Taitel Y., Dukler A.K.** A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas — liquid flow // AIChE Journal. 1976. Vol. 22. № 1. P. 47—55.
72. **Experiments** and universal growth relations for vapour bubbles with microlayers / T.G. Theofanous, T.G. Bohrer, M.C. Chang et al. // J. Heat Transfer. 1978. Vol. 100. № 1. (Русский перевод: Теплопередача. 1978. Т. 100. № 1. С. 43—51).
73. **Thome J.R.** Flow regime based modelling of two-phase heat transfer // Keynote lecture at the Int. Conf. «Boiling 2000». Anchorage. USA. 2000.
74. **Two-Phase** Flow and Heat Transfer / Edited by D. Butterworth and G.F. Hewitt // Oxford University Press, 1977.
75. **Williams L.R., Dukhno L.A., Hanratty T.J.** Droplet flux distributions and entrainment in horizontal gas–liquid flows // Int. J. Multiphase Flow. 1996. Vol. 22. № 1. P. 1—18.
76. **Yagov V.V.** Vapour bubble departure conditions at pool boiling // Eurotherm Seminar № 48/ Pool Boiling 2. Paderborn. Germany. Edizioni ETS. Pisa. 1996. P. 95—104.
77. **Yagov V.V., Puzin V.A., Sukomel L.A.** The approximate model for critical heat flux under subcooled flow boiling conditions // Proc. of the 2-nd European Thermal Sciences and 14-th UIT Nat. Heat Transfer Conf. Rome, Italy. 19—31 May, 1996. Vol. 1. P. 483—490.
78. **Zeigarnik Yu.A.** Boiling in intensive technologies. The Physics of Heat Transfer in Boiling and Condensation // Proc. of the Int. Symp. May 21—24. 1997. Moscow. Russia. P. 251—255.
79. **Zuber N., Findlay J.A.** Average volumetric concentration in two-phase flow systems // J. Heat Transfer. 1965. Vol. 87. P. 453–468.

*Учебное издание*

ЛАБУНЦОВ Дмитрий Александрович
ЯГОВ Виктор Владимирович

**МЕХАНИКА ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ**

**Учебное пособие для вузов**

Редактор *Т.И. Мушинска*
Технический редактор *З.Н. Ратникова*
Корректор *В.В. Сомова*
Набор и верстка выполнены на компьютерах Издательства МЭИ
Оператор *О.А. Беспалова*

ЛР № 020528 от 05.06.97

Подписано в печать с оригинала-макета 20.12 00 Формат 60×90 1/16
Бумага офсетная Гарнитура Таймс Печать офсетная.
Усл печ ч 23,5 Уч -изд л 20,0 Усл кр -отт. 23,5
Тираж 1000 экз Заказ № 350. С-015
Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14
Отпечатано в типографии ООО «ГЕО-ТЭК»
141292, Московская обл., г Красноармейск, пр. Испытателей, д 14