М. А. КАГАНОВ, М. Р. ПРИВИН

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ НАСОСЫ

(ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА)



„ЭНЕРГИЯ"
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1970

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3
Условные обозначения 6

Глава первая. **Термоэлектрические тепловые насосы при постоянных температурах вдоль спаев термобатареи** 8

1. Основные энергетические соотношения для ТТН в стационарном режиме . . . . . —
2. Влияние теплообмена на энергетические характеристики ТТН 27
3. Влияние контактных электрических сопротивлений на характеристики ТТН 45
4. Влияние изоляционных прослоек между термоэлементами на характеристики ТТН 48
5. Некоторые методы расчета оптимальных параметров ТТН 60
6. Нестационарные режимы термоэлектрических охладителей и нагревателей 78

Глава вторая. **Термоэлектрические тепловые насосы при переменных температурах вдоль спаев термобатареи** 108

7. Постановка задачи . . . . . —
8. Распределение температуры в теплоносителях и на спаях ТТН вдоль направления потоков . . . 114
9. Нагрузочные характеристики термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкости или газа 127
10. Расчет оптимальных параметров термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкости или газа 144
11. Нестационарный режим и условия устойчивости 157
12. Повышение эффективности термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкости или газа 163

Литература 172

УДК 621.577.001.1.001.24
6П2.2
К12

Каганов Михаил Абрамович,
Привин Марк Рувимович

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ НАСОСЫ

Редактор *К. И. Черкасов.* Художественный редактор *Г. А. Гудков.*
Технический редактор *Е. М. Соболева.* Корректор *М. Э. Орешенкова*
Сдано в производство 24/IX 1969 г. Подписано к печати 17/XII 1969 г. М-51011
Печ. л. прив. 9,24. Уч.-изд. л. 8,8. Бум. л. 2,75. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 2. Тираж 6500. Заказ 2047. Цена 44 коп.
Ленинградское отделение издательства «Энергия». Марсово поле, 1.
Ленинградская типография № 4 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, Социалистическая, 14.

ВВЕДЕНИЕ

Теория энергетического применения термоэлектрических явлений, созданная в результате известных работ академика А. Ф. Иоффе и его сотрудников [8—10], открыла широкие возможности для использования полупроводниковых термоэлектрических охлаждающих и нагревательных устройств. За последнее десятилетие эта новая отрасль энергетики получила достаточно широкое развитие, поскольку появилась реальная возможность создавать малогабаритные устройства для понижения и стабилизации температуры, а также обеспечивать получение локальных очагов холода.

Перспективы дальнейшего внедрения термоэлектрических охладителей и нагревателей определяются целым рядом преимуществ, особенно эксплуатационных, которыми они обладают по сравнению с компрессионными и абсорбционными холодильными машинами и тепловыми насосами [58].

Однако следует отметить, что при сравнении компрессионных холодильников и нагревателей с термоэлектрическими последние в настоящее время еще довольно существенно проигрывают с точки зрения их энергетической эффективности. Это обстоятельство часто является основным тормозом для создания термоэлектрических охладителей и нагревателей большой производительности.

Повышение энергетических показателей термоэлектрических устройств прежде всего связано с отысканием новых материалов, обладающих высокой термоэлектрической эффективностью, и разработкой методов их синтеза.

Однако наличие качественных материалов является только необходимым, но не достаточным условием для создания термоэлектрических охладителей и нагревателей с высокими энергетическими показателями.

На эффективность термоэлектрических устройств существенное влияние оказывают не только параметры полупроводникового вещества, но также условия теплообмена на спаях, качество коммутации, размещение элементов в батарее и другие факторы. Недостаточный учет их в расчетной модели может привести к таким изменениям энергетических характеристик охладителей и нагревателей, которые существенно уменьшат потенциальные возможности любого высококачественного полупроводникового материала. Поэтому важным фактором, необходимым для развития полупроводниковой энергетики, является построение методики расчета термоэлектрических охлаждающих и нагревательных устройств с максимально достижимой для имеющегося материала энергетической эффективностью.

Решению этой задачи и связанными с ней проблемами посвящена настоящая книга.

Авторы не рассматривают вопросы, связанные с особенностями конструкций и применением термоэлектрических охладителей и нагревателей, поскольку этот материал широко представлен в монографиях Е. А. Коленко [22] и Ю. Г. Манасяна [26].

Задача расчета параметров полупроводниковых охладителей и нагревателей в предлагаемой книге решается для двух различных систем: а) с постоянной температурой вдоль холодной и горячей поверхностей батареи; б) с температурой, меняющейся вдоль поверхности батареи при обтекании ее потоками теплоносителей.

Предлагаемая методика расчета основана на количественном описании известных физических законов, которые применяются к различным частям конструкции термоэлектрических тепловых насосов. Конечные результаты расчетов, представленные в виде аналитических выражений, либо в виде программ, реализованных на ЭВЦМ, получены на основе достаточно строгого математического анализа. Расчеты, представленные в настоящей книге, определяются кругом вопросов, возникающих перед инженером при разработке и исследовании новых конструкций термоэлектрических охладителей и нагревателей. При этом здесь рассматриваются однокаскадные устройства, получившие в настоящее время наибольшее распространение.

Термоэлектрические охладители и нагреватели объединены общим термином «Термоэлектрические тепловые насосы». Понятие «тепловой насос» употребляется авторами в более широком смысле, чем это принято в теплои хладотехнике. Обычно (это относится к компрессионным и абсорбционным тепловым насосам) под указанным термином понимают тепловую машину, которая реализует обратный круговой термодинамический цикл с целью передачи тепла от окружающей среды к объекту, находящемуся на более высоком температурном уровне. Поскольку каждое термоэлектрическое устройство в зависимости от направления тока может работать как с целью охлаждения, так и с целью нагревания объекта, к этому устройству разумно применить термин «термоэлектрический тепловой насос» (ТТН). Такая терминология, принятая и в зарубежной литературе по термоэлектричеству, отражает физические процессы, происходящие в устройстве, а не цель, для которой это устройство в настоящий момент применяется. В случае необходимости в дальнейшем изложении будут отмечены особенности работы ТТН в качестве охладителя либо нагревателя.

Авторы благодарят А. С. Ривкина за участие в написании § 6 и 11.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

T — температура среды (объекта);
T' — температура спаев термоэлемента;
$T^{н}$ — температура теплоиосителя на входе в термоэлектрический тепловой насос;
$T^{к}$ — температура теплоносителя на выходе из термоэлектрического теплового насоса;
I — сила тока;
j — плотность тока;
e, λ, a, ρ — коэффициенты термо-э. д. с., теплопроводности, температуропроводности и удельное электрическое сопротивление термоэлектрического вещества;
Z — параметр термоэлектрической добротности;
c — объемная теплоемкость термоэлектрического вещества;
α — коэффициент теплоотдачи на спаях, отнесенный к единице площади термобатареи;
d — высота термоэлемента (длина полупроводникового стержня);
S — площадь термобатарей;
V — объем термоэлементов в термобатарее;
n — число термоэлементов в термобатарее;
$\bar{s}$ — средняя площадь сечения одного термоэлемента;
Q — тепловая нагрузка на спаях в единицу времени;
ε — холодильный коэффициент;
μ — коэффициент преобразования;
λ' — коэффициент теплопроводности изоляционного компаунда;
$\rho_{к}$ — удельное электрическое сопротивление единицы площади контакта;
t — время;
p — периметр;
$S_{р}$ — поверхность радиатора;
G — теплоемкость коммутационной пластины и присоединенной к ней массы;
W — водяной эквивалент теплоносителей;
l — длина термобатарей вдоль потока теплоносителей;
Θ — безразмерная температура;
ν — безразмерная плотность тока;
Bi — критерий Био;
K_S — безразмерный тепловой поток на единицу площади термобатареи;
K_V — безразмерный тепловой поток на единицу объема термоэлемента;
Fo — критерий Фурье;
χ — безразмерная координата вдоль высоты термоэлемента;
X — безразмерная координата вдоль потоков теплоносителей;
N — безразмерная площадь термоэлектрического охладителя (нагревателя) потоков жидкости;
P — безразмерный объем термоэлементов в охладителе (нагревателе) потоков жидкости;
m — отношение коэффициентов теплоотдачи на спаях;
η — отношение теплоемкостей охлаждаемого и нагреваемого объектов.

1 — холодные спаи; *2* — горячие спаи.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ НАСОСЫ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ ВДОЛЬ СПАЕВ ТЕРМОБАТАРЕИ

1. ОСНОВНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТТН В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Термоэлектрические явления

Под термоэлектрическими явлениями обычно подразумевают три термоэлектрических эффекта: Зеебека, Пельтье и Томсона, которые характеризуют взаимные превращения тепловой энергии в энергию электрического тока. Эти эффекты обычно сопутствуют друг другу и могут быть связаны количественными соотношениями.

Эффект Зеебека, открытый в 1821 г., заключается в появлении разности потенциалов в разомкнутой электрической цепи, состоящей из двух разнородных проводников, при поддержании между их концами разности температур. Эта разность потенциалов, называемая термоэлектродвижущей силой (термо-э. д. с.),

$$E = 2\int_{T_1'}^{T_2'} e(T)\,dT, \qquad (1\text{-}1)$$

где $e(T)$ — коэффициент термо-э. д. с. термопары, который определяется как половина разности абсолютных (по отношению к свинцу) коэффициентов термо-э. д. с. каждого проводника: $e = \frac{e_1 - e_2}{2}$.

Эффект Пельтье, открытый в 1834 г., заключается в следующем: при протекании электрического тока I через контакт двух разнородных проводников в месте контакта в зависимости от направления тока в единицу времени выделяется или поглощается некоторое количество тепла $Q_п$, пропорциональное силе тока:

$$Q_п = \Pi I,$$

где Π — коэффициент Пельтье.

В 1856 г. Томсон, применив к термоэлектрическим явлениям первое и второе начала термодинамики, вывел соотношение между коэффициентами термо-э. д. с. и Пельтье:

$$\Pi = 2eT. \qquad (1\text{-}2)$$

При этом Томсон предсказал существование третьего эффекта, названного в его честь, который состоит в следующем: при наличии на участке проводника с током перепада температур $\Delta T' = T_2' - T_1'$ в его объеме в единицу времени поглощается или выделяется некоторое количество тепла

$$Q_T = I\int_{T_1'}^{T_2'} \tau(T)\,dT, \qquad (1\text{-}3)$$

где τ — носит название коэффициента Томсона. Согласно теории Томсона коэффициенты e, Π и τ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\tau_n - \tau_p = -2T\frac{de(T)}{dT}; \qquad (1\text{-}4)$$

$$\tau_n - \tau_p = 2e(T) - \frac{d\Pi(T)}{dT}, \qquad (1\text{-}5)$$

где индексы p и n относятся к положительной и отрицательной ветви термопары.

Теория, которую развил Томсон при выводе указанных соотношений, не является достаточно строгой, так как, исследуя три описанных выше явления, он абстрагировался от сопутствующих необратимых явлений, таких, как выделение джоулева тепла и наличие кондуктивного теплового потока вдоль ветвей. В настоящее время доказано теоретически на основе термодинамики необратимых процессов, а также экспериментально, что соотношения Томсона полностью выполняются для металлов и полупроводников.

В 1911 г. Альтенкирх впервые поставил задачу о возможности практического применения термоэлектрического охлаждения и нагрева. Он сумел приближенно вычислить коэффициент энергетической эффективности термоэлектрического холодильника и нагревателя, под которым подразумевается отношение количества тепла, поглощаемого (для холодильника) или выделяемого (для нагревателя) в единицу времени к затрачиваемой электрической мощности. Так как единственно известными проводниками в то время были металлы, Альтенкирх пришел к выводу о нецелесообразности использования их для создания термоэлектрических холодильников.

Лишь в начале 50-х годов вопрос о применении термоэлектрического охлаждения и подогрева снова был поставлен А. Ф. Иоффе в связи с прогрессом техники полупроводников [8—10].

Тепловой баланс на спаях термопары в стационарных условиях

Для того чтобы составить тепловой баланс на спаях термопары, прежде всего необходимо рассмотреть распределение температуры в ее ветвях. Каждая ветвь термопары представляет собой однородный стержень с постоянным сечением s, по которому проходит электрический ток I. Если считать, что физические свойства материала стержня не зависят от температуры, то температурное поле стержня в стационарном состоянии описывается уравнением

$$\lambda \nabla^2 T + \frac{I^2 \rho}{s^2} = 0. \qquad (1\text{-}6)$$

Будем рассматривать случай, когда торцы стержня поддерживаются при постоянных температурах T_1' и T_2' ($T_2' > T_1'$), а боковые поверхности адиабатно теплоизолированы. Тогда тепловой поток будет распространяться только по оси x, направленной вдоль длины стержня d. Уравнение (1-6) запишется в виде

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{I^2\rho}{s^2\lambda} = 0; \qquad (1\text{-}7)$$

с граничными условиями

$$x = 0;\ T(x) = T_1';$$
$$x = d;\ T(x) = T_2'.$$

Уравнение (1-7) с граничными условиями имеет следующее решение:

$$T(x) = \frac{I^2\rho}{2s^2\lambda} x(d-x) + \frac{\Delta T'}{d} x + T_1'. \qquad (1\text{-}8)$$

Распределение температуры в ветвях термопары выражается квадратичным трехчленом. Изменение температуры вдоль термоэлемента имеет максимум, если выполняются условия:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=x_0} = 0;\ 0 < x_0 < d.$$

При $T_2' > T_1'$ максимум достигается в точке $x = x_0$, расположенной ближе к горячему торцу ветви, координата которой

$$x_0 = \frac{d}{2} + \frac{\Delta T' s^2 \lambda}{I^2 \rho d}.$$

Для того чтобы в термоэлементе наблюдался максимум температуры, сила тока должна удовлетворять неравенству, которое следует из условия $x_0 < d$:

$$I > \frac{s}{d}\sqrt{2\Delta T' \frac{\lambda}{\rho}}. \qquad (1\text{-}9)$$

Максимальная температура в точке $x = x_0$

$$T_{\text{макс}} = T_2' + \frac{\lambda s^2}{8 I^2 \rho d^2}\left(\frac{I^2\rho d^2}{\lambda s^2} - 2\Delta T'\right)^2. \qquad (1\text{-}10)$$

Тепловой поток, притекающий к холодному и горячему торцам стержня, определяется следующими соотношениями:

$$\lambda s \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = \frac{I^2\rho d}{2s} + \lambda\frac{s}{d}\Delta T'; \qquad (1\text{-}11а)$$

$$-\lambda s \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=d} = \frac{I^2\rho d}{2s} - \lambda\frac{s}{d}\Delta T'. \qquad (1\text{-}11б)$$

Первое слагаемое в выражении (1-11а) характеризует ту часть джоулева тепла, которое вытекает через холодный торец; второе слагаемое является кондуктивным потоком, возникающим вследствие наличия перепада температур между торцами. Из уравнения (1-11а) следует, что тепловой поток к холодному концу при определенной длине стержня $d = d_0$ имеет минимум

$$d_0 = \frac{s}{I}\sqrt{2\Delta T'\frac{\lambda}{\rho}}. \qquad (1\text{-}12)$$

Отметим, что при этой же длине тепловой поток на горячем конце равен нулю.

Если рассматриваемый стержень включен в термоэлектрическую цепь так, что для положительной ветви направление тока выбрано от менее нагретого конца к более нагретому, то тепловой баланс на торцах может быть записан следующими уравнениями:

$$Q_1 = \Pi(T_1')I - \lambda s\frac{dT}{dx}\Big|_{x=0};$$

$$Q_2 = \Pi(T_2')I - \lambda s\frac{dT}{dx}\Big|_{x=d}.$$

Записав аналогичные уравнения для другой ветви термоэлемента, после преобразований получим тепловой баланс на спаях термоэлектрической пары в следующем виде:

$$Q_1 = \Pi(T_1')I - \frac{1}{2}I^2R - K(T_2' - T_1'); \qquad (1\text{-}13)$$

$$Q_2 = \Pi(T_2')I + \frac{1}{2}I^2R - K(T_2' - T_2'), \qquad (1\text{-}14)$$

где Q_1, Q_2 — количество тепла, поглощаемого на холодном * и выделяемого на горячем спае в единицу времени; T_1', T_2' — температуры холодного и горячего спаев; R — полное электрическое сопротивление термопары; K — полная теплопроводность.

* Термином «холодный» и «горячий» спаи термопары мы будем обозначать спаи, на которых соответственно происходит поглощение и выделение тепла Пельтье. Таким образом, эти термины указывают не на соотношение между температурами спаев, а на направление электрического тока в термопаре (термобатарее).

Таким образом, тепловой баланс на спаях термопары, включенной в цепь источника постоянного тока, в стационарных условиях определяется тремя составляющими: а) теплом Пельтье, поглощаемым на холодном спае и выделяемым на горячем; б) джоулевым теплом, выделяющимся в ветвях термопары, которое приблизительно равными потоками вытекает через оба спая; в) кондуктивным потоком тепла, возникающим вследствие наличия градиента температур вдоль ветвей термопары.

Выражения (1-13), (1-14), полученные впервые Альтенкирхом, справедливы, если пренебречь зависимостью физических свойств материала термопары от температуры. Эти простейшие выражения явились основными исходными соотношениями, позволившими дать приближенную оценку энергетической эффективности термоэлектрического охлаждения и подогрева.

Рассматривая процессы переноса тепла в ветвях термопары при произвольной зависимости свойств материала от температуры, А. И. Бурштейн [3] показал, что тепловой баланс на спаях может быть выражен следующими соотношениями:

$$Q_1 = 2\bar{e}IT_1' - \frac{1}{2}I^2d\left(\frac{\bar{\rho}_p}{s_p} + \frac{\bar{\rho}_n}{s_n}\right) - \frac{\Delta T'}{d}(\bar{\lambda}_p s_p + \bar{\lambda}_n s_n); \qquad (1\text{-}15)$$

$$Q_2 = 2\bar{e}IT_2' + \frac{1}{2}I^2d\left(\frac{\bar{\rho}_p}{s_p} + \frac{\bar{\rho}_n}{s_n}\right) - \frac{\Delta T'}{d}(\bar{\lambda}_p s_p + \bar{\lambda}_n s_n), \qquad (1\text{-}16)$$

где $\bar{e} = \frac{1}{\Delta T'}\int_{T_1'}^{T_2'} e(T)\,dT$; $\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta T'}\int_{T_1'}^{T_2'} \rho(T)\,dT$;

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\Delta T'}\int_{T_1'}^{T_2'} \lambda(T)\,dT.$$

Введем обозначения:

$$\bar{f} = \frac{s_p}{s_n}; \quad \rho = \frac{1}{4}\left(\frac{\bar{\rho}_p}{\bar{f}} + \bar{\rho}_n\right)(1+\bar{f}); \quad \lambda = \frac{\bar{f}\bar{\lambda}_p + \bar{\lambda}_n}{1+\bar{f}}.$$

Тогда для термобатареи, составленной из $n/2$ последовательно соединенных идентичных термопар (n ветвей),

потоки тепла на спаях могут быть записаны следующим образом:

$$Q_1 = \bar{e} I T'_1 n - \frac{1}{2} I^2 \rho \frac{d}{S} n^2 - \lambda \frac{S}{d} (T'_2 - T'_1); \quad (1\text{-}13а)$$

$$Q_2 = \bar{e} I T'_2 n + \frac{1}{2} I^2 \rho \frac{d}{S} n^2 - \lambda \frac{S}{d} (T'_2 - T'_1), \quad (1\text{-}14а)$$

где $S = \frac{s_p + s_n}{2} n$ — общая площадь термобатареи.

Выражения (1-13а), (1-14а) являются основными исходными соотношениями для исследования энергетических характеристик ТТН в стационарных условиях при постоянстве температуры вдоль спаев термобатареи.

Эти соотношения могут быть представлены как функции некоторых безразмерных параметров, характеризующих как конструктивные особенности ТТН, так и режим его работы:

$$K_{S_1} = \nu\theta'_1 - \frac{1}{2}\nu^2 - \Delta\theta'; \quad (1\text{-}17)$$

$$K_{S_2} = \nu\theta'_2 + \frac{1}{2}\nu^2 - \Delta\theta', \quad (1\text{-}18)$$

где $K_{S_1} = \frac{Zd}{\lambda} \cdot \frac{Q_1}{S}$ — безразмерная удельная холодопроизводительность на единицу площади термобатареи; $K_{S_2} = \frac{Zd}{\lambda} \cdot \frac{Q_2}{S}$ — безразмерная удельная теплопроизводительность на единицу площади термобатареи; $\nu = \frac{\bar{e}d}{\lambda} j$ — безразмерная плотность тока питания; $\theta'_{1,2} = ZT'_{1,2}$ — безразмерные температуры холодных и горячих спаев термобатареи; $Z = \frac{\bar{e}^2}{\rho\lambda}$ — параметр термоэлектрической добротности вещества; $\Delta\theta' = \theta'_2 - \theta'_1$ — безразмерный перепад температуры между спаями.

Переход к безразмерным параметрам существенно упрощает расчет и анализ термоэлектрических устройств. При использовании безразмерных комплексов, согласно известной π-теореме Бакингема [6], уменьшается число независимых переменных в каждом из исследуемых функциональных соотношений. Так и в нашем случае

из выражений (1-17), (1-18) следует, что тепловые потоки на спаях термобатареи могут быть представлены как функции трех переменных, в то время как многие авторы, используя аналогичные соотношения (1-13а), (1-14а) в размерном виде, вынуждены оперировать десятью независимыми переменными. Кроме того, безразмерные параметры сохраняют неизменное численное значение в любой системе единиц, поэтому количественные результаты исследователей, пользующихся различными системами, легко могут быть сравнимы без каких-либо пересчетов.

Энергетическая эффективность ТТН оценивается теми же величинами, что и эффективность любой тепловой машины. При использовании ТТН в качестве охладителя этой величиной является холодильный коэффициент ε, а при использоваии в качестве нагревателя — коэффициент преобразования μ:

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{\nu\theta'_1 - \frac{1}{2}\nu^2 - \Delta\theta'}{\nu\Delta\theta' + \nu^2}; \quad (1\text{-}19)$$

$$\mu = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{\nu\theta'_1 + \frac{1}{2}\nu^2 - \Delta\theta'}{\nu\Delta\theta' + \nu^2}. \quad (1\text{-}20)$$

Между коэффициентами энергетической эффективности ε и μ существует зависимость:

$$\mu = \varepsilon + 1. \quad (1\text{-}21)$$

Рассмотрим основные соотношения, связывающие энергетические характеристики и параметры ТТН при работе его в некоторых экстремальных режимах.

а) Режим минимальной температуры холодных спаев. Поскольку в настоящем параграфе рассматривается идеализированная модель ТТН, в которой отсутствуют термические сопротивления между спаями термобатареи и окружающими их средами, будем считать, что тепловая нагрузка на холодной стороне термобатареи не зависит от температуры холодных спаев. Это условие реализуется в случае, когда на холодной стороне термобатареи расположен постоянный тепловой источник, температура которого равна температуре холодных спаев. В установившемся режиме величина безразмерной

тепловой мощности такого источника K_{S_1} связана с параметрами термобатареи соотношением (1-17).

При фиксированной температуре горячих спаев термобатареи зависимость температуры холодных спаев от плотности тока питания может быть получена из уравнения (1-17):

$$\theta_1' = \frac{K_{S_1} + \frac{1}{2}\nu^2 + \theta_2'}{\nu + 1}. \qquad (1\text{-}22)$$

Исследование функции $\theta_1'(\nu)$ на экстремум позволяет получить следующее соотношение для оптимальной плотности тока ν_T°, обеспечивающей минимальную температуру холодных спаев термобатареи:

$$\nu_T^\circ = \left[1 + 2\left(K_{S_1} + \theta_2'\right)\right]^{\frac{1}{2}} - 1. \qquad (1\text{-}23)$$

Подставив выражение (1-23) в (1-22), получим формулу для минимальной температуры холодных спаев:

$$\left(\theta_1'\right)_{\text{мин}} = \left[1 + 2\left(K_{S_1} + \theta_2'\right)\right]^{\frac{1}{2}} - 1. \qquad (1\text{-}24)$$

При этом отметим, что $\nu_T^\circ = \left(\theta_1'\right)_{\text{мин}}$.

Из выражения (1-24) видно, что минимальное значение температуры холодных спаев уменьшается с уменьшением тепловой нагрузки на холодной стороне термобатареи. Наименьшее значение этой температуры может быть получено в случае, когда $K_{S_1} = 0$, т. е. при условии адиабатной изоляции холодных спаев. При этом обеспечивается максимальный перепад температуры между горячими и холодными спаями термобатареи:

$$\Delta\theta'_{\text{макс}} = \theta_2' + 1 - \sqrt{2\theta_2' + 1} = 0{,}5\left(\theta_1'\right)^2. \qquad (1\text{-}25)$$

Из выражения (1-25) следует, что величина максимальной разности температур между спаями термобатареи при фиксированной температуре горячего спая зависит только от параметра термоэлектрической добротности Z. Поэтому величина $\Delta\theta'_{\text{макс}}$ может служить количественной характеристикой полупроводникового вещества, применяемого для изготовления термобатарей. Метод измерения термоэлектрической добротности, основанный

на получении максимального перепада температур на спаях, удобен для ряда случаев практического конструирования ТТН, так как он дает возможность получить среднее значение величины Z во всем рабочем интервале температур. Однако этот метод обладает существенным недостатком, так как он не позволяет исследовать зависимость параметра термоэлектрической добротности от температуры. Для получения этой зависимости могут быть использованы другие методы измерений, например, метод Хармана [54, 55].

б) Режим максимальной холодопроизводительности. Зависимость холодопроизводительности от плотности тока питания (1-17) является квадратичной параболой (рис. 1). Термобатарея имеет положительную холодопроизводительность, т. е. обладает способностью поглощать тепло на холодных спаях только тогда, когда плотность тока изменяется в пределах $\nu_1 < \nu < \nu_2$, где $\nu_{1,2}$ — корни квадратного трехчлена (1-17):

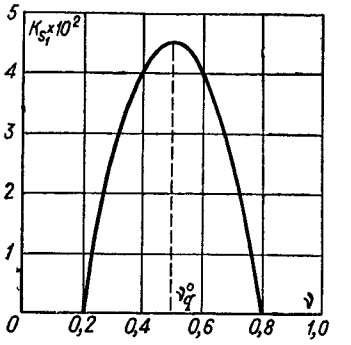


Рис. 1. Зависимость холодопроизводительности от плотности тока $\left(\theta_1' = 0{,}5;\ \Delta\theta' = 0{,}08\right)$

$$\nu_{1,2} = \theta_1' \pm \sqrt{\left(\theta_1'\right)^2 - 2\Delta\theta'}. \qquad (1\text{-}26)$$

Исследуя функцию $K_{S_1}(\nu)$ на экстремум, получим, что холодопроизводительность достигает максимального значения при плотности тока

$$\nu_q^\circ = \theta_1' = \theta_2' - \Delta\theta'. \qquad (1\text{-}27)$$

Подставляя соотношение (1-27) для оптимальной плотности тока в (1-17), получим в безразмерной форме выражение для максимальной удельной холодопроизводительности на единицу площади термобатареи:

$$K_{S_1}^{\text{макс}} = \frac{\left(\theta_1'\right)^2}{2} - \Delta\theta'. \qquad (1\text{-}28)$$

[illegible]

Для полной характеристики рассматриваемого режима определим тепловой поток на горячих спаях термобатареи $K^q_{S_2}$ (удельную теплопроизводительность) и коэффициенты энергетической эффективности ε и μ:

$$K^q_{S_2} = \frac{3}{2}(\theta'_1)^2 - \Delta\theta'_1(1 - \theta'_1); \qquad (1\text{-}29)$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\theta'_1)^2 - 2\Delta\theta'}{(\theta'_1)^2 + \theta'_1\Delta\theta}. \qquad (1\text{-}30)$$

Анализ приведенных выше соотношений показывает, что в режиме максимальной холодопроизводительности оптимальная плотность тока не зависит от перепада температур между спаями, если фиксирована температура на холодной стороне термобатареи. Если же фиксирована температура на горячей стороне, то оптимальная плотность тока линейно падает с увеличением перепада температур между спаями.

Холодопроизводительность, теплопроизводительность и коэффициенты энергетической эффективности ТТН при уменьшении перепада температур между спаями возрастают, причем в пределе при $\Delta\theta' \to 0$ $\varepsilon \to \frac{1}{2}$. Следует отметить, что зависимости энергетических характеристик ТТН от перепада температур на спаях в режиме максимальной холодопроизводительности являются линейными или близкими к линейным при фиксированной температуре на холодных, либо на горячих спаях термобатареи. Это обстоятельство наглядно иллюстрируется кривыми на рис. 2, где указанные зависимости построены при постоянной температуре на горячих спаях термобатареи.

в) Режим максимальной холодопроизводительности при ограниченном числе элементов и заданном токе питания. Выше были найдены условия, обеспечивающие наибольшую холодопроизводительность при заданных размерах термобатареи (площади S, высоты термоэлементов d). Найденная при этом оптимальная безразмерная плотность тока ν_q^o обеспечивает не только максимальную холодопроизводительность всей термобатареи, но и максимальную холодопроизводительность на единицу площади. В тех случаях, когда число элементов n, а следовательно, и площадь сечения одного элемента $\bar{s} = S/n$ заданы, оптимальная плотность тока ν_q^o может быть достигнута за счет изменения силы тока питания I.

В некоторых случаях техническое задание на расчет и конструирование ТТН предусматривает ограничения на величину тока питания. Эти ограничения могут быть,

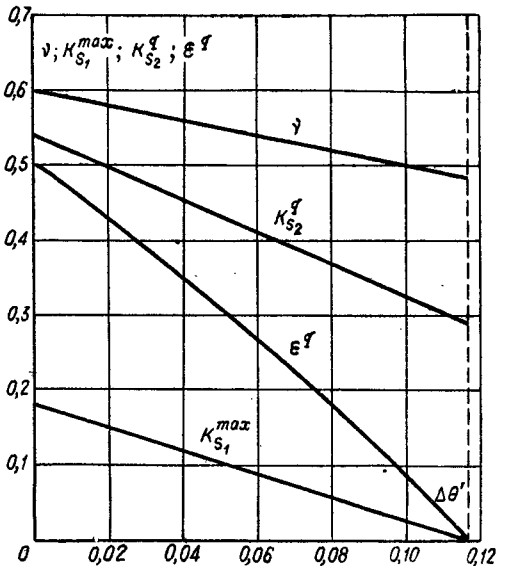


Рис. 2. Характеристики ТТН в режиме максимальной холодопроизводительности $(\theta'_2 = 0{,}6)$

например, вызваны конструкцией источника питания, затруднениями, связанными с регулированием сильноточных термобатарей, и т. п. Величина силы тока при этом является одним из заданных, исходных для расчета параметров. Конструкция термобатареи, работающей с максимальной холодопроизводительностью, достигается за счет выбора числа термоэлементов n таким образом, чтобы сечение одного элемента $\bar{s}$ обеспечивало в цепи термобатареи оптимальную плотность тока ν_q^o. Оптимальное число термоэлементов при заданной

площади термобатареи, высоте термоэлементов и силе тока питания определяется по формуле (1-27).

При расчете ТТН может встретиться случай, когда общее число термоэлементов в термобатарее задано и является одним из исходных расчетных параметров. Число термоэлементов может быть задано исходя из технологических или технико-экономических соображений. Например, иногда удобно в качестве микрохолодильника использовать одну полупроводниковую термопару. В рассматриваемом случае расчет ТТН сводится к задаче получения максимальной холодопроизводительности с одного элемента. Если при этом не ограничивать силу тока питания, то ясно, что холодопроизводительность будет монотонно расти вместе с током при соответствующем росте сечения элементов. Практически, как уже было указано выше, сила тока обычно бывает ограничена, т. е. ее предельное значение, так же как и число термоэлементов, является заданным исходным параметром. Величина холодопроизводительности одного термоэлемента зависит только от его размеров, т. е. от отношения высоты d к площади сечения s. Поскольку число термоэлементов в термобатарее задано, то холодопроизводительность всей термобатареи, так же как и каждого элемента, изменяется в зависимости от отношения высоты элементов к площади термобатареи. Максимальная холодопроизводительность каждого элемента и всей термобатареи в целом достигается при оптимальном соотношении величины d/s для заданного тока питания I и числа термоэлементов n.

Выражение для удельной холодопроизводительности с одного термоэлемента при заданной силе тока может быть представлено в следующем безразмерном виде:

$$K_n = \Theta_1' - \frac{1}{2}\nu - \frac{\Delta\Theta'}{\nu}, \qquad (1\text{-}31)$$

где $K_n = \frac{Q_1}{n} \cdot \frac{Z}{eI}$.

Очевидно следующее соотношение:

$$K_n = \frac{K_{S_1}}{\nu}.$$

Оптимальное соотношение размеров термобатареи в рассматриваемом случае можно получить, исследуя на максимум функцию $K_n(\nu)$, которая определяется соотношением (1-31). Безразмерный параметр ν в данном случае с точностью до постоянного множителя соответствует искомой величине d/S. Оптимальное значение $\nu = \nu_n^0$ получим из уравнения

$$\frac{dK_n}{d\nu} = 0;$$

$$\nu_n^0 = \sqrt{2\Delta\Theta'}. \qquad (1\text{-}32)$$

Отметим, что формула (1-32) совпадает с полученным выше в размерном виде выражением (1-12), характеризующим соотношение между размерами термоэлемента, при котором приток тепла к холодным спаям за счет эффектов Джоуля и теплопроводности минимален.

Очевидно, что то же самое соотношение между размерами требуется для достижения максимальной холодопроизводительности с одного элемента при заданном токе питания, так как тепло Пельтье не зависит от размеров термоэлемента. Этим и объясняется тождественность соотношений (1-32) и (1-12).

Подставив выражение (1-32) в уравнение (1-31), найдем в безразмерном виде величину максимальной холодопроизводительности с одного термоэлемента, которая может быть достигнута при заданной силе тока:

$$K_n^{\text{макс}} = \Theta_1' - \sqrt{2\Delta\Theta'}. \qquad (1\text{-}33)$$

Если при заданных значениях тока и числа термоэлементов соотношение между размерами термобатареи d/S определять из выражения (1-27), то мы не получим максимальной холодопроизводительности с одного элемента, а следовательно, и со всей термобатареи. В этом случае холодопроизводительность

$$K_n = \frac{\Theta_1'}{2} - \frac{\Delta\Theta'}{\Theta_1'}.$$

Соотношение между этими величинами будет следующее:

$$\frac{K_n}{K_n^{\text{макс}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2\Delta\Theta'}{(\Theta_1')^2}}\right).$$

Поскольку $0 \leqslant \Delta\Theta' \leqslant \frac{(\Theta_1')^2}{2}$, то

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{K_n}{K_n^{\text{макс}}} \leqslant 1.$$

Таким образом, если число элементов в термобатарее задано, а величина тока питания ограничена, то оптимальное соотношение между размерами термобатареи необходимо определять из выражения (1-32). Если при этих условиях величину d/S определять из соотношения (1-27), то отступление от оптимальных условий может быть довольно существенным, причем оно растет с уменьшением перепада температур на спаях.

Соотношение для холодильного коэффициента в рассматриваемом режиме может быть получено, если подставить выражение (1-32) в уравнение (1-19):

$$\varepsilon_n = \frac{\Theta_1' - \sqrt{2\Delta\Theta'}}{\Delta\Theta' + \sqrt{2\Delta\Theta'}}. \qquad (1\text{-}34)$$

Выражение (1-33) характеризует в безразмерном виде величину максимальной холодопроизводительности при заданном числе элементов и силе тока. Очевидно, что это же самое выражение можно рассматривать как соотношение для минимального тока, при котором возможно получить заданную холодопроизводительность при определенном числе термоэлементов. В размерном виде выражение для минимального тока следующее [48]:

$$I_{\text{мин}} = \frac{Q_1}{en\left(T_1' - \sqrt{2\Delta T'}\right)}. \qquad (1\text{-}35)$$

Из приведенного соотношения видно, что минимальная величина тока питания, обеспечивающая заданную холодопроизводительность, обратно пропорциональна числу термоэлементов.

г) Режим максимальной энергетической эффективности. Режим максимальной энергетической эффективности ТТН обеспечивается такой величиной плотности тока питания ν_ε^0, при которой коэффициенты энергетической эффективности ε и μ достигают своего наибольшего значения. Для нахождения оптимальной плотности тока ν_ε^0 необходимо исследовать на экстремум функции $\varepsilon(\nu)$ и $\mu(\nu)$, которые определяются уравнениями (1-19) и (1-20) (достаточно исследовать только одну из этих функций, так как при любом значении ν функции отличаются на постоянное число — единицу). Следует отметить, что функция $\varepsilon(\nu)$ имеет различный характер, в зависимости от знака разности температур на спаях термобатареи $\Delta\Theta' = \Theta_2' - \Theta_1'$. Если $\Delta\Theta' \leqslant 0$, то зависимость $\varepsilon(\nu)$ носит гиперболический характер и является монотонно убывающей, причем $\varepsilon \to \infty$ при $\nu \to |\Delta\Theta'|$ (рис. 3). Если же $\Delta\Theta' > 0$, то ε достигает положительного значения в интервале $\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2$, где $\nu_{1,2}$ определяются выражением (1-26). В этом интервале функция $\varepsilon(\nu)$ имеет один максимум при ν, имеющем значение

$$\nu_\varepsilon^0 = \frac{\Delta\Theta'}{M-1}, \qquad (1\text{-}36)$$

где

$$M = \left(1 + \Theta_1' + \frac{\Delta\Theta'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\Theta_1' + \Theta_2'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

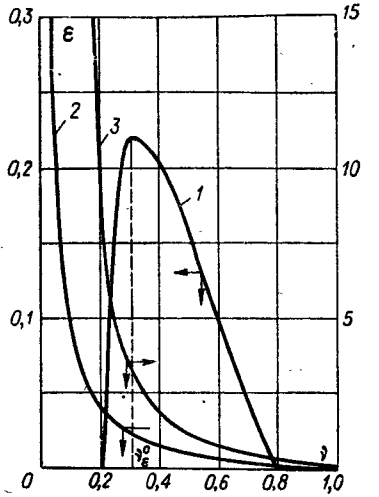


Рис. 3. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от плотности тока $(\Theta_1' = 0{,}5)$

1 — $\Delta\Theta' = 0{,}08$; *2* — $\Delta\Theta' = 0$; *3* — $\Delta\Theta' = -0{,}1$

Подставляя ν_ε^0 в уравнение (1-14), получим выражение для максимального холодильного коэффициента:

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \frac{\Theta_1'}{\Delta\Theta'}\left[1 - \frac{2}{\Theta_1'}(M-1)\right]. \qquad (1\text{-}37)$$

Первый множитель в выражении (1-37) представляет собой холодильный коэффициент обратного кругового цикла Карно и является теоретическим пределом, к которому может стремиться холодильный коэффициент

ТТН. Второй множитель характеризует необратимые потери, связанные с выделением джоулева тепла и наличием кондуктивного теплового потока вдоль ветвей термопары. Величина этих потерь может быть уменьшена за счет увеличения параметра термоэлектрической добротности вещества Z. В пределе при $Z \to \infty$ величина $\varepsilon_{макс}$ стремится к значению холодильного коэффициента обратного цикла Карно, осуществляемого между температурами Θ_1' и Θ_2'.

Холодо- и теплопроизводительность ТТН в рассматриваемом режиме могут быть получены подстановкой ν_ε° в уравнения (1-17) и (1-18):

$$K_{S_1}^{\varepsilon} = \frac{M\Delta\Theta'\left(\Theta_1' M - \Theta_2'\right)}{(M-1)^2(M+1)}; \qquad (1\text{-}38)$$

$$K_{S_2}^{\varepsilon} = \frac{M\Delta\Theta'\left(\Theta_2' M - \Theta_1'\right)}{(M-1)^2(M+1)}. \qquad (1\text{-}39)$$

В режиме максимальной энергетической эффективности с хорошим приближением можно считать, что при фиксированной температуре на одной стороне термобатареи оптимальный ток изменяется пропорционально величине перепада температур между спаями. При этом зависимость максимального холодильного коэффициента от перепада температур носит гиперболический характер, а зависимость холодопроизводительности от перепада температур имеет вид квадратичной параболы, расположенной в области $0 \leqslant \Delta\Theta' \leqslant \Delta\Theta'_{макс}$. На рис. 4 представлены характеристики ТТН в режиме $\varepsilon_{макс}$ в зависимости от перепада температур на спаях термобатареи.

Сравнительная оценка режима максимальной холодопроизводительности и максимальной энергетической эффективности показывает, что в первом из них величина холодопроизводительности для одной и той же термобатареи всегда выше, чем во втором (рис. 5). Для того чтобы добиться равной холодопроизводительности батарей, работающих в режимах максимума Q_1 и ε, необходимо в последнем случае использовать термобатарею с большим количеством термопар. В то же время холодильный коэффициент в режиме $\varepsilon_{макс}$ всегда превышает величину ε_q (рис. 5), причем эта разница

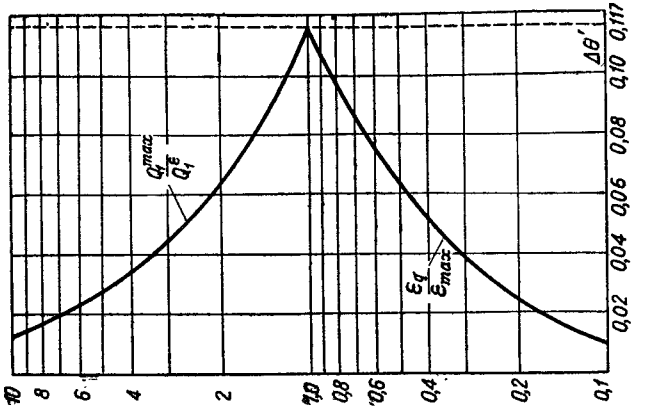


Рис. 5. Сравнительная оценка режимов максимальной холодопроизводительности и максимальной энергетической эффективности ($\Theta_2' = 0{,}6$)

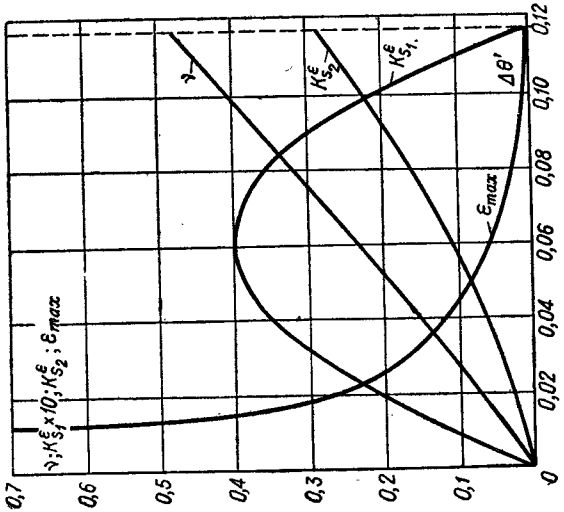


Рис. 4. Характеристики ТТН в режиме максимальной энергетической эффективности ($\Theta_2' = 0{,}6$)

определяется температурным режимом термобатареи и не может быть скомпенсирована изменением ее конструкции.

Рассмотрение характерных режимов работы ТТН показывает, что во всех режимах его производительность и энергетическая эффективность возрастают с одновременным пропорциональным увеличением безразмерных температур Θ_1' и Θ_2'. При заданных температурах спаев параметры Θ_1' и Θ_2' пропорциональны термоэлектрической добротности термопар Z. Следовательно, с увеличением термоэлектрической добротности улучшаются энергетические характеристики ТТН.

Величина Z определяется физическими характеристиками материалов, из которых изготовлены ветви термопары, а также соотношением между сечениями ветвей $\bar{f}$. Если свойства p- и n-ветвей неодинаковы, то максимальное значение параметра термоэлектрической добротности Z достигается при определенном оптимальном соотношении между сечениями ветвей [10].

Выражение для параметра термоэлектрической добротности термопары можно представить следующим образом:

$$Z = \frac{e^2}{\rho\lambda} = \frac{(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)^2}{(\bar{f}\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)\left(\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{f}} + \bar{\rho}_2\right)},$$

т. е. при постоянных значениях средних величин $\bar{e}_{1,2}$, $\bar{\lambda}_{1,2}$, $\bar{\rho}_{1,2}$ можно считать, что $Z = Z(\bar{f})$. Исследуя эту функцию на экстремум, определим оптимальное соотношение между сечениями ветвей, обеспечивающее максимальную величину Z:

$$\bar{f}_0 = \left(\frac{\bar{\lambda}_2\bar{\rho}_1}{\bar{\lambda}_1\bar{\rho}_2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

при этом

$$Z_{\text{макс}} = \left[\frac{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}{(\bar{\lambda}_1\bar{\rho}_2)^{\frac{1}{2}} + (\bar{\lambda}_2\bar{\rho}_1)^{\frac{1}{2}}}\right]^2. \qquad (1\text{-}40)$$

Следует, однако, отметить, что отступление от оптимального соотношения сечений ветвей незначительно сказывается на величине параметра термоэлектрической добротности [10]. Так, например, оценки показывают, что отличие $\bar{f}$ от $\bar{f}_0$ на 20% вызывает снижение Z всего на 1%.

2. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООБМЕНА НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТТН

Теплообмен на спаях термобатареи

Рассмотренные в предыдущем параграфе основные уравнения теплового баланса на спаях термобатареи и зависимости для экстремальных режимов работы ТТН относятся к простейшему случаю, когда фиксированы температуры холодных и горячих спаев, причем они не изменяются при изменении плотности тока питания.

В реальных условиях работы ТТН гораздо чаще фиксированными являются температуры среды или объектов, окружающих холодные и горячие спаи термобатареи. Термические сопротивления между спаями термобатареи и окружающими их средами обычно слабо зависят от температуры, а определяются лишь конструкцией ТТН, поэтому для каждого конкретного устройства их можно считать постоянными. Если термобатарея находится в непосредственном контакте с охлаждаемым (нагреваемым) объектом, то величина термического сопротивления зависит от толщины и коэффициента теплопроводности слоя электрической изоляции между спаями и примыкающим к ним объектом. Если же подвод и отвод тепла с поверхностей термобатареи осуществляется путем конвективного теплообмена, то величина термического сопротивления будет определяться значениями коэффициентов теплоотдачи.

При фиксированных температурах окружающих сред температуры спаев термобатареи выражаются следующими соотношениями:

$$T_1' = T_1 - \frac{q_1}{\alpha_1}; \qquad (2\text{-}1)$$

$$T_2' = T_2 + \frac{q_2}{\alpha_2}, \qquad (2\text{-}2)$$

или в безразмерной форме

$$\Theta_1' = \Theta_1 - \frac{K_{S_1}}{\mathrm{Bi}_1}; \qquad (2\text{-}1a)$$

$$\Theta_2' = \Theta_2 + \frac{K_{S_2}}{\mathrm{Bi}_2}, \qquad (2\text{-}2a)$$

где $\Theta_{1,2} = ZT_{1,2}$ — безразмерные температуры сред, окружающих холодные и горячие спаи термобатареи; $\mathrm{Bi}_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2} d}{\lambda}$ — критерий Био; $\alpha = \frac{1}{\Sigma R_T}$ — приведенный коэффициент теплоотдачи — величина, обратная сумме термических сопротивлений между спаями и окружающими их средами, отнесенная к единице площади сечения термоэлементов.

Совместное решение уравнений (1-17), (1-18) с уравнениями (2-1a), (2-2a) позволяет выразить энергетические характеристики ТТН как функции температур окружающих сред, термических сопротивлений и плотности тока питания [5, 64, 65]:

$$K_{S_1} = \frac{K^*_{S_1} - \nu^2\beta m\,(1 + \Theta_1 - 0{,}5\nu)}{1 + \beta\,[1 + m + \nu\,(1 - m) - \nu^2\beta m]}; \qquad (2\text{-}3)$$

$$K_{S_2} = \frac{K^*_{S_2} + \nu^2\beta\,(1 + \Theta_2 - 0{,}5\nu)}{1 + \beta\,[1 + m + \nu\,(1 - m) - \nu^2\beta m]}; \qquad (2\text{-}4)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon^* - \beta m\,(\varepsilon^*\nu + 1)}{(\varepsilon^*\nu + 1)(m + 1) + \nu\beta + 1}; \qquad (2\text{-}5)$$

$$\mu = \frac{\mu^* + \beta\,(\mu^*\nu + 1)}{(\mu^*\nu + 1)(m + 1)\beta - \nu\beta m + 1}; \qquad (2\text{-}6)$$

где $K^*_{S_1} = \nu\Theta_1 - 0{,}5\nu^2 - \Delta\Theta;$

$K^*_{S_2} = \nu\Theta_2 + 0{,}5\nu^2 - \Delta\Theta;$

$$\varepsilon^* = \frac{K^*_{S_1}}{K^*_{S_2} - K^*_{S_1}}; \quad \mu^* = \frac{K^*_{S_2}}{K^*_{S_2} - K^*_{S_1}}.$$

Здесь обозначено: $\beta = \mathrm{Bi}_1^{-1}$; $m = \frac{\mathrm{Bi}_1}{\mathrm{Bi}_2}$. Выражения (2-3) — (2-6) в пределе переходят в соответствующие соотношения (1-12) — (1-15), если величина термических сопротивлений между спаями и окружающими их средами стремится к нулю. При этом $K_{S_{1,2}} = K^*_{S_{1,2}}$, $\varepsilon = \varepsilon^*$, $\mu = \mu^*$.

Из уравнений (2-1) — (2-4) может быть также получено выражение для перепада температуры между спаями термобатареи:

$$\Delta\Theta' = \frac{\Delta\Theta + \nu\beta\,[\nu^2\beta m - 0{,}5\nu\,(1 - m) + \Theta_2 + m\Theta_1]}{1 + \beta\,[1 + m + \nu\,(1 - m) - \nu^2\beta m]}.$$

При заданных температурах окружающих сред теплообмен на спаях является основным фактором, определяющим максимальные значения энергетических показателей ТТН. Это связано с тем, что при фиксированных значениях температур окружающих сред величина термических сопротивлений между спаями и окружающими средами будет определять температурный режим работы термобатареи. Очевидно, что при уменьшении термических сопротивлений или, что одно и то же, при интенсификации теплообмена между спаями и окружающими их средами энергетические показатели ТТН монотонно возрастают. На рис. 6 показано влияние теплоотдачи на спаях на характеристики ТТН в режиме максимальной холодопроизводительности, а на рис. 7 в режиме максимальной энергетической эффективности [64]. Графики построены для условий: $\Theta_1 = 0{,}82$, $\Theta_2 = 0{,}9$. Представленные на рис. 6 и 7 результаты показывают, что увеличение коэффициентов теплоотдачи оказывает значительное влияние на рост производительности и коэффициента энергетической эффективности ТТН практически лишь до определенного предела, который приблизительно соответствует $\mathrm{Bi}_{1,2} = 15 \div 20$. При таких значениях Bi перепады температур между спаями и окружающими средами настолько малы, что их изменение практически не сказывается на величине энергетических характеристик ТТН. Предельные значения параметра Bi могут быть оценены для любых величин Θ_1 и Θ_2. Расчеты показывают, что при характерных для практики значениях Θ_1 и Θ_2 предельные величины $\mathrm{Bi}_{1,2}$ близки к указанным выше. Современные ТТН изготовляются из термоэлементов с высотой порядка $5 \cdot 10^{-3}$ *м*, теплопроводность наиболее распространенных термоэлектрических материалов составляет величину

порядка 1,5 *вт/м²·град*. Следовательно, предельное значение коэффициентов теплоотдачи, превышение которого практически не улучшает энергетических характеристик ТТН, оценивается величиной порядка $5 \cdot 10^3$ *вт/м²·град*. Такие значения коэффициентов теплоотдачи могут быть достигнуты лишь при кипении и

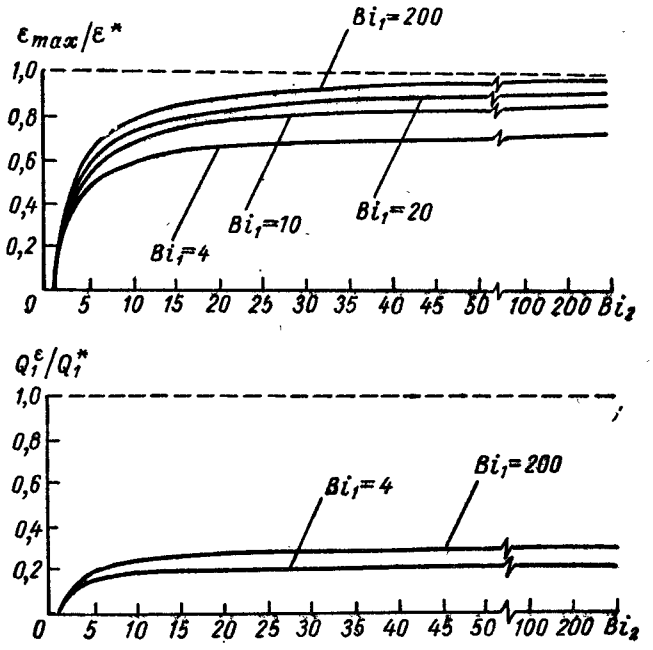


Рис. 6. Влияние теплоотдачи на характеристики ТТН, работающего в режиме максимальной холодопроизводительности $(\theta_1' = 0{,}82;\ \theta_2' = 0{,}90)$

конденсации, следовательно, при всех остальных способах организации теплообмена на спаях ТТН необходимо стремиться к максимально возможной его интенсификации. При этом в первую очередь необходимо интенсифицировать теплообмен на горячих спаях термобатареи, так как там имеет место большая плотность теплового потока, чем на холодных спаях.

Существует некоторое минимальное значение коэффициента теплоотдачи на горячей стороне термобатареи, при котором ТТН еще имеет положительную холодопроизводительность, т. е. обладает способностью поглощать тепло на холодных спаях. Это минимальное значение параметра Bi_2 можно получить, если приравнять нулю холодопроизводительность при оптимальном токе, т. е. решить следующую систему уравнений:

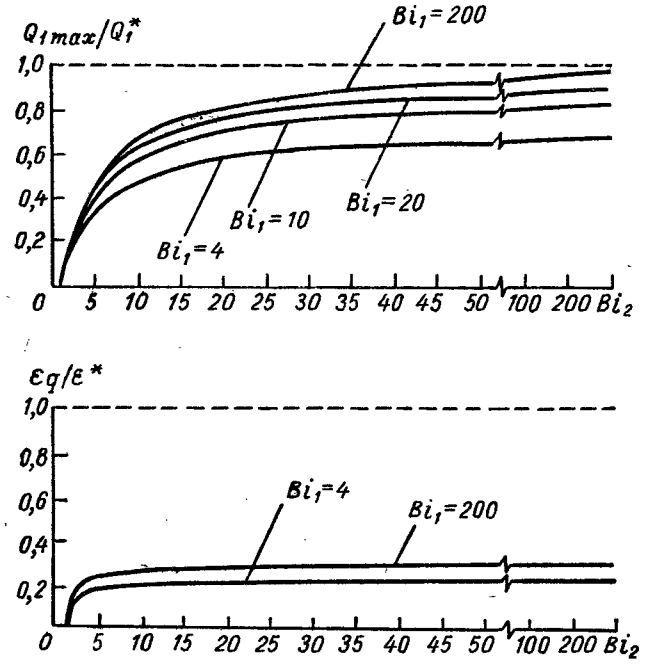


Рис. 7. Влияние теплоотдачи на характеристики ТТН, работающего в режиме максимальной энергетической эффективности $(\theta_1' = 0{,}82;\ \theta_2' = 0{,}90)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_{S_1}(\nu,\ Bi_2)}{d\nu} &= 0; \\ K_{S_1}(\nu,\ Bi_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}7)$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае величина параметра Bi_1 не сказывается на характеристиках ТТН,

так как тепловой поток на холодных спаях равен нулю. Система (2-7) может быть преобразована к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} 3\nu^2\beta m - 2\nu[2\beta m(\Theta_1+1)+1] + 2\Theta_1 = 0; \\ \nu^3\beta m - \nu^2[2\beta m(\Theta_1+1)+1] + 2\nu\Theta_1 - 2\Delta\Theta = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}8)$$

Запишем первые два приближения для оптимального тока ν_o, полученные при решении системы (2-8) с учетом малости величины $\frac{\Delta\Theta}{\Theta_1}$:

$$\nu_o = \frac{2\Delta\Theta}{\Theta_1} + \frac{\left(1-\frac{2\Delta\Theta}{\Theta_1^2}\right)\cdot\left(\frac{\Delta\Theta}{\Theta_1}\right)^2}{\Theta_1+1-\frac{3\Delta\Theta}{2\Theta_1}}. \quad (2\text{-}9)$$

Для любой термобатареи справедливо следующее соотношение:

$$\Delta\Theta < \Delta\Theta_{\text{макс}} = \frac{\Theta_1^2}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\Theta}{\Theta_1} < \frac{\Theta_1}{2}.$$

Используя эту оценку, можно показать, что для широкого интервала значений Θ_1 и $\Delta\Theta$ второе слагаемое в выражении (2-9) не превышает 3% от первого, поэтому для ν_o можно ограничиться лишь первым приближением, т. е.

$$\nu_o = \frac{2\Delta\Theta}{\Theta_1}. \quad (2\text{-}10)$$

Подставив (2-10) в систему уравнений (2-7), получим приближенное соотношение для $(Bi_2)_{\text{мин}}$:

$$(Bi_2)_{\text{мин}} = \frac{4(\Theta_1+1)}{\frac{\Theta_1^2}{\Delta\Theta}-2}. \quad (2\text{-}11)$$

Теплообмен на боковой поверхности термоэлементов

На энергетические характеристики ТТН оказывает влияние теплообмен не только на спаях термобатареи, но и на боковых поверхностях каждого термоэлемента.

Обычно, проводя аналитические исследования характеристик ТТН, не учитывают этого обстоятельства, так как рассматривают термобатарею, составленную из идентичных термоэлементов, боковые поверхности которых адиабатно теплоизолированы по всей длине. В работе [61] показано, что если часть боковой поверхности термоэлемента, примыкающей к горячему спаю, обменивается теплом с окружающей средой, то энергетические характеристики ТТН могут быть улучшены по сравнению с термобатареей, составленной из элементов с адиабатными боковыми поверхностями.

Рассмотрим распределение температуры вдоль термоэлемента высотой d, боковая поверхность которого на некотором участке d_1 (считая от холодного спая) адиабатно теплоизолирована, а торцы поддерживаются при постоянных температурах Θ_1' и Θ_2'. На остальном участке боковой поверхности $d_2 = d - d_1$ осуществляется теплообмен с окружающей средой, температура которой Θ (рис. 8). Будем считать, что поперечные размеры элемента малы по сравнению с его высотой

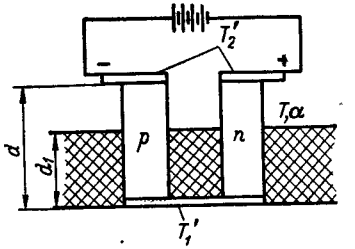


Рис. 8. Термоэлемент с частично изолированной боковой поверхностью

и что $\delta \ll \frac{\lambda}{\alpha}$ (δ — меньший из поперечных размеров), поэтому температура в каждом сечении принята постоянной, а тепловой поток одномерным вдоль высоты термоэлемента. При пропускании через термоэлемент электрического тока I температурное поле вдоль высоты описывается в безразмерном виде следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d^2\Theta_1(\chi)}{d\chi^2} + \nu^2 = 0; \quad (0 \leqslant \chi \leqslant \bar{d}_1); \quad (2\text{-}12)$$

$$\frac{d^2\Theta_2(\chi)}{d\chi^2} - [\Theta_2(\chi) - \Theta]\omega^2 + \nu^2 = 0; \quad (\bar{d}_1 \leqslant \chi \leqslant 1); \quad (2\text{-}13)$$

с граничными условиями:

$$\Theta_1(\chi)|_{\chi=0} = \Theta_1'; \quad (2\text{-}14)$$

$$\Theta_2(\chi)|_{\chi=1} = \Theta_2'; \qquad (2\text{-}15)$$

$$\Theta_1(\chi)|_{\chi=\bar{d}_1} = \Theta_2(\chi)|_{\chi=\bar{d}_1}; \qquad (2\text{-}16)$$

$$\left.\frac{d\Theta_1(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\bar{d}_1} = \left.\frac{d\Theta_2(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=\bar{d}_1}, \qquad (2\text{-}17)$$

где $\chi = \frac{x}{d}$; $\bar{d}_1 = \frac{d_1}{d}$; $\omega = d\left(\frac{\alpha p}{\lambda S}\right)^{\frac{1}{2}}$;

p — периметр сечения термоэлемента; α — коэффициент теплоотдачи на участке поверхности высотой d_1.

Решая уравнения (2-12), (2-13) с граничными условиями (2-14) — (2-17), можно получить следующие выражения для распределения температуры вдоль термоэлемента:

$$\Theta_1(\chi) = \left\{\nu\left(0{,}5\omega_1^2 \operatorname{cth}\omega_2 + \operatorname{th}\frac{\omega_2}{2} + \omega_1\right) + \right.$$

$$\left. + \omega^2\left[\Delta\Theta' \operatorname{cth}\omega_2 - (\Theta_2' - \Theta)\operatorname{th}\frac{\omega_2}{2}\right]\right\}\chi \times$$

$$\times\left[\omega\left(1 + \omega_1 \operatorname{cth}\omega_2\right)\right]^{-1} - \frac{\nu^2}{2}\chi^2 + \Theta_1'; \qquad (2\text{-}18)$$

$$\Theta_2(\chi) = C_1 \operatorname{sh}\omega(1-\chi) + C_2 \operatorname{sh}\omega(\chi - \bar{d}_1) + \frac{\nu^2}{\omega^2} + \Theta, \qquad (2\text{-}19)$$

где $C_1 = \left\{\left[\nu^2(0{,}5\omega_1^2 - 1) - \omega^2(\Theta - \Theta_1')\right]\operatorname{sh}\omega_2 + \right.$

$$\left. + \omega_1\left[\omega^2(\Theta_2' - \Theta) - \nu^2\right]\right\}\left[\omega^2 \operatorname{sh}\omega_2(\operatorname{sh}\omega_2 + \omega_1 \operatorname{ch}\omega_2)\right]^{-1};$$

$$C_2 = \frac{(\Theta_2' - \Theta)\omega^2 - \nu^2}{\omega^2 \operatorname{sh}\omega_2};$$

$$\omega_1 = \bar{d}_1\omega; \quad \omega_2 = \omega - \omega_1; \quad \Delta\Theta' = \Theta_2' - \Theta_1'.$$

Функция $\Theta_1(\chi)$ характеризует распределение температуры в изолированной части термоэлемента ($0 \leqslant \chi \leqslant \bar{d}_1$), а функция $\Theta_2(\chi)$ — в той части, где происходит теплообмен с боковой поверхности ($\bar{d}_1 \leqslant \chi \leqslant 1$).

Холодопроизводительность термобатареи, составленной из рассматриваемых термоэлементов, можно определить, записав в безразмерном виде уравнение теплового баланса на холодных спаях:

$$K_{S_1} = -\left.\frac{d\Theta_1(\chi)}{d\chi}\right|_{\chi=0} + \nu\Theta_1'. \qquad (2\text{-}20)$$

Выражение для безразмерной холодопроизводительности K_{S_1} с учетом соотношений (2-18), (2-20) может быть преобразовано к виду

$$K_{S_1} = \nu\Theta_1' - \frac{\nu^2 F_1 + \Delta\Theta' + (\Theta - \Theta_1')F_2}{F_3}, \qquad (2\text{-}21)$$

где

$$F_1 = \frac{1}{\omega^2}\left[\left(\frac{\omega_1^2}{2} + 1\right)\operatorname{ch}\omega_2 + \omega_1 \operatorname{sh}\omega_2 - 1\right];$$

$$F_2 = \operatorname{ch}\omega_2 - 1;$$

$$F_3 = \frac{1}{\omega}(\omega_1 \operatorname{ch}\omega_2 + \operatorname{sh}\omega_2).$$

Определим перепад температуры между спаями термобатареи при отсутствии тепловой нагрузки на холодной стороне:

$$\Delta\Theta' = \nu\Theta_1' F_3 - \nu^2 F_1 + (\Theta - \Theta_1')F_2. \qquad (2\text{-}22)$$

Оптимальная плотность тока ν_T^0, при которой достигается максимальный перепад температур, может быть найдена из уравнения:

$$\frac{d(\Delta\Theta')}{d\nu} = 0;$$

$$\nu_T^0 = \Theta_1' \cdot \frac{F_3}{2F_1}. \qquad (2\text{-}23)$$

При этом величина максимального перепада температур

$$\Delta\Theta'_{\text{макс}} = \frac{(\Theta_1' F_3)^2}{4F_1} + (\Theta - \Theta_1')F_2. \qquad (2\text{-}24)$$

Исследуя на экстремум функцию $K_{S_1}(\nu)$, которая определяется выражением (2-21), найдем величину максимальной холодопроизводительности:

$$K_{S_1}^{\text{макс}} = (\Theta_1')^2 \cdot \frac{F_3}{4F_1} - \frac{\Delta\Theta' + (\Theta - \Theta_1')F_2}{F_3}. \qquad (2\text{-}25)$$

Мощность, потребляемая термобатареей от источника электрического питания, расходуется на преодолеиие термо-э. д. с., направленной навстречу подаваемому напряжению, и на выделение джоулевого тепла в ветвях термопар.

В безразмерном виде может быть записано следующее выражение для потребляемой мощности P:

$$\bar{P} = \nu\Delta\Theta' + \nu^2, \tag{2-26}$$

где $\bar{P} = \frac{PZd}{\lambda S}$.

Поделив (2-21) на (2-26), получим выражение для холодильного коэффициента:

$$\varepsilon = \frac{K_{S_1}}{\bar{P}} = \frac{\nu\theta_1' F_3 - \nu^2 F_1 - \Delta\Theta' - (\theta - \theta_1') F_2}{F_3 (\nu\Delta\Theta' + \nu^2)}. \tag{2-27}$$

Оптимальный ток определим из уравнения $\frac{d\varepsilon}{d\nu} = 0$:

$$\nu_\varepsilon^0 = F_4 \left[1 + \left(1 + \frac{\Delta\Theta'}{F_4} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \tag{2-28}$$

где $F_4 = \frac{\Delta\Theta' + (\theta - \theta_1') F_2}{\Delta\Theta' F_1 + \theta_1' F_3}$.

Соотношение для максимального холодильного коэффициента можно получить, если подставить выражение (2-28) в (2-27).

Если в выражениях для экстремальных характеристик термобатареи с частично изолированными термоэлементами (2-23) — (2-28) положить $d_1 = d$, то они переходят в соответствующие соотношения для термобатареи с полностью изолированными термоэлементами, приведенные в предыдущем параграфе.

Анализ полученных соотношений для холодопроизводительности, холодильного коэффициента и перепада температур на спаях показывает, что эти основные энергетические характеристики термоэлемента достигают своего максимального значения при некоторой оптимальной высоте участка, свободного от изоляции, т. е. при $\bar{d}_2 = \bar{d}_2^0$, где $0 < \bar{d}_2^0 < 1$. Выражение для оптимального значения $\bar{d}_2^0$ можно получить, исследуя на экстремум каждую из функций $\Delta\Theta'(\bar{d}_2)$, $K_{S_1}(\bar{d}_2)$ или $\varepsilon(\bar{d}_2)$. При небольших значениях коэффициента теплоотдачи, когда $\omega \ll 1$, выражение для холодопроизводительности (2-20) с точностью до малых второго порядка может быть представлено в следующем виде:

$$K_{S_1} \approx \nu\theta_1' - \frac{\nu^2}{2} - \Delta\Theta' + \gamma(\bar{d}_2), \tag{2-29}$$

где $\gamma(\bar{d}_2) = \frac{\omega^2 \bar{d}_2^2}{12} \left[\theta_2' - \theta - \frac{2}{3} \bar{d}_2 \Delta\Theta' + \frac{\bar{d}_2 \nu^2}{12} (4 - 3\bar{d}_2) \right]$. (2-30)

Сравнивая (2-29) с (1-17), мы видим, что $\gamma(\bar{d}_2)$ является дополнительным слагаемым в уравнении теплового баланса на холодных спаях, возникающим вследствие наличия боковой теплоотдачи. Из уравнения $\frac{d(K_{S_1})}{d(\bar{d}_2)} = 0$ найдем оптимальное соотношение между свободной и изолированной частью термоэлемента, при котором холодопроизводительность достигает максимального значения:

$$\bar{d}_2^0 = \frac{\nu^2 - 2\Delta\Theta' + \left[(\nu^2 - 2\Delta\Theta')^2 + 8\nu^2 (\theta_2' - \theta) \right]^{\frac{1}{2}}}{2\nu^2}. \tag{2-31}$$

В рассматриваемом приближении оптимальное соотношение между свободной и изолированной частью термоэлемента не зависит от ω, а величина дополнительного члена γ пропорциональна ω^2. Выражение (2-31) позволяет получить условия, при которых существует оптимальное значение $\bar{d}_2^0$, т. е. условия, когда целесообразно часть боковой поверхности термоэлемента оставлять свободной от изоляции. Эти условия могут быть записаны в следующем виде:

а) $\nu^2 > 2\Delta\Theta'$; (2-32)

$$\theta < \theta_2' + \frac{(\nu^2 - 2\Delta\Theta')^2}{8\nu^2}; \tag{2-33}$$

б) $\nu^2 < 2\Delta\Theta'$; (2-34)

$$\theta < \theta_2'. \tag{2-35}$$

Неравенство (2-32) совпадает с условием (1-9), при котором существует максимум температуры вдоль высоты термоэлемента, а правая часть соотношения (2-33) совпадает с величиной этого максимума — выражение (1-10). В случае, если распределение температуры вдоль термоэлемента носит монотонный характер, то для существования оптимума $\bar{d}_2^{\circ}$ достаточно, чтобы температура потока, омывающего боковую поверхность, была ниже температуры горячих спаев. Условия а) и б) означают, что улучшить характеристики термоэлемента за счет теплообмена части его боковой поверхности с окружающей средой можно только в том случае, когда температура окружающей среды ниже максимальной температуры в термоэлементе.

Целесообразно изолировать лишь ту часть боковой поверхности термоэлемента, где температура его ниже температуры окружающей среды. При этом тепловой поток, притекающий к холодному спаю по ветвям за счет теплопроводности материала, должен уменьшиться по сравнению с потоком в полностью изолированном элементе, так как часть тепла рассеивается за счет теплообмена неизолированной боковой поверхности с окружающей средой. Кроме того, джоулево тепло, выделяющееся в термоэлементе, в этом случае делится на два неравных потока, причем больший из них направлен в сторону горячих спаев. Оба эти обстоятельства и приводят к улучшению всех характеристик ТТН.

На рис. 9 представлены некоторые результаты расчетов, выполненных в работе [61], которые наглядно иллюстрируют улучшение экстремальных характеристик термобатареи, составленной из частично изолированных элементов (звездочкой отмечены характеристики термобатареи, составленной из элементов с полностью изолированной боковой поверхностью, т. е. при $d_1 = d$).

Следует отметить, что предположение об одномерности теплового потока в частично изолированном элементе дает несколько завышенные значения его энергетических характеристик, поскольку при этом не учитывается дополнительный приток тепла к холодному спаю через слой изоляции, окружающей термоэлемент на участке d_1. При уменьшении высоты изоляции этот приток тепла возрастает, а следовательно, уменьшаются

холодопроизводительность и коэффициент энергетической эффективности. Однако некоторое улучшение энергетических показателей термобатареи, которого можно добиться за счет обдува части боковой поверхности термоэлементов, наглядно демонстрирует потенциальные

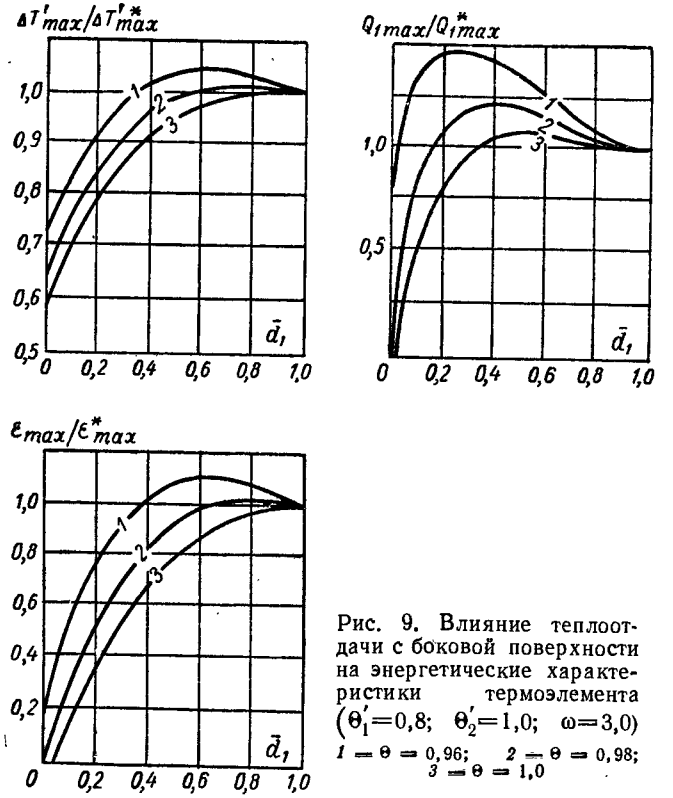


Рис. 9. Влияние теплоотдачи с боковой поверхности на энергетические характеристики термоэлемента ($\theta'_1=0{,}8$; $\theta'_2=1{,}0$; $\omega=3{,}0$)
1 — $\theta = 0{,}96$; *2* — $\theta = 0{,}98$; *3* — $\theta = 1{,}0$

возможности, раскрывающиеся при рациональном конструировании ТТН.

При наличии теплообмена на некотором участке боковой поверхности термоэлемента возможно улучшить характеристики последнего за счет его профилирования. Известно [46, 63], что геометрическая форма термоэлемента не влияет на его характеристики, когда вся боковая поверхность его адиабатно теплоизолирована.

Однако, как показал Роллингер [60], этот вывод нельзя распространить на термоэлемент, боковая поверхность которого изолирована не полностью.

Подвешенный термоэлемент

Подвешенным термоэлементом будем называть стержень из полупроводникового материала, который включен в цепь источника тока с помощью проводов, закрепленных на торцах и образующих в местах крепления холодные и горячие спаи. При этом будем считать, что условия теплообмена холодных и горячих спаев с окружающей средой полностью идентичны. Разность температуры между спаями определяется выделением и поглощением тепла за счет эффекта Пельтье. Джоулево тепло распределяется равномерно по стержню и не создает градиента температуры. В стационарных условиях выделяемое и поглощаемое на спаях тепло Пельтье компенсируется кондуктивным потоком тепла вдоль стержня, обусловленным его теплопроводностью. Потери тепла с поверхности образца, возникающие благодаря конвекции, излучению и теплоотводу по проводам, можно уменьшить, создавая вокруг образца тепловую изоляцию и используя длинные и достаточно тонкие провода.

Равновесие потоков тепла в рассматриваемом стержне (без учета тепловых потерь в окружающую среду) достигается при условии

$$eI\bar{T}' = \frac{\lambda s}{d}\left(T_2' - T_1'\right), \qquad (2\text{-}36)$$

где $\bar{T}'$ — средняя температура спаев; d, s — длина и площадь сечения образца.

В безразмерной форме

$$\nu\bar{\Theta}' = \Delta\Theta'. \qquad (2\text{-}36а)$$

Перепад температуры на спаях «подвешенного термоэлемента» растет вместе с плотностью тока. При малых значениях ν перепад $\Delta\Theta'$ увеличивается линейно с током, а затем темп роста возрастает из-за увеличения средней температуры, которая повышается благодаря выделению джоулева тепла.

Харманом [54] было предложено использовать формулу (2-36) для определения теплопроводности полупроводников λ путем измерения разности температур $T_2' - T_1'$ (при известном значении e).

Из (2-36) также следует соотношение

$$Z\bar{T} = \frac{U_E}{U_\rho}. \qquad (2\text{-}37)$$

Здесь U_E — полная термо-э. д. с. образца в стационарных условиях; U_ρ — омическое падение напряжения на образце.

Выражение (2-37) может быть представлено также в виде

$$Z\bar{T} = \frac{R_э}{R} - 1,$$

где $R_э$ — эквивалентное сопротивление образца, равное отношению полного падения напряжения на нем к силе тока, протекающего в его цепи; R — омическое сопротивление образца.

Величины U_E и U_ρ, либо $R_э$ и R легко могут быть измерены с высокой точностью, что дает возможность непосредственно определять параметр термоэлектрической добротности вещества Z. Для повышения точности определения термоэлектрических свойств полупроводниковых материалов указанным методом необходимо учесть потери тепла с поверхности образца. Такие расчеты были выполнены в работе [15].

Распределение температуры в образце удовлетворяет уравнению:

$$\lambda\nabla^2 T' + j^2\rho = 0. \qquad (2\text{-}38)$$

Перепадом температуры по сечению стержня можно пренебречь, когда $\frac{\alpha\delta}{\lambda} \ll 1$ (δ — толщина стержня); тогда уравнение (2-38) становится одномерным и в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{d^2\Theta'}{d\chi^2} - \omega^2(\Theta' - \Theta) + \nu^2 = 0 \quad (0 \leqslant \chi \leqslant 1). \qquad (2\text{-}39)$$

Граничные условия

$$\Theta'(\chi)|_{\chi=0} = \Theta_1';$$

$$\Theta'(\chi)|_{\chi=1} = \Theta_2',$$

где $\chi = x/d$ — безразмерная координата.

Решение уравнения (2-39) с граничными условиями есть

$$\Theta'(\chi) = \frac{\left(\Theta_1' - \theta - \frac{\nu^2}{\omega^2}\right)\operatorname{sh}\omega(1-\chi) + \left(\Theta_2' - \theta - \frac{\nu^2}{\omega^2}\right)\operatorname{sh}\omega\chi}{\operatorname{sh}\omega} + \frac{\nu^2}{\omega^2} + \Theta. \quad (2\text{-}40)$$

Распределение температуры $\Theta_п(\chi)$ вдоль проводов с током определяется уравнением

$$\frac{d^2\Theta_п}{d\chi^2} - \omega_п^2(\Theta_п - \Theta) + C_п\nu^2 = 0 \quad (\chi \leqslant 0,\ \chi \geqslant 1). \quad (2\text{-}41)$$

Здесь при $\chi \geqslant 1$, граничное условие $\Theta_п(\chi)|_{\chi=1} = \Theta_2'$; при $\chi \leqslant 0$, граничное условие $\Theta_п(\chi)|_{\chi=0} = \Theta_1'$.

Дополнительным условием для $\Theta_п$ является равенство нулю теплового потока на бесконечности.

В уравнении (2-41) обозначено:

$$\omega_п = \left(\frac{2\alpha_п d^2}{\lambda_п r_п}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad C_п = \frac{\lambda s^2}{\lambda_п S_п^2} \cdot \frac{\rho_п}{\rho};$$

$\alpha_п$ — коэффициент теплоотдачи от проводов в окружающую среду; $r_п$, $S_п$ — радиус и площадь сечения проводов; $\lambda_п$, $\rho_п$ — коэффициент теплопроводности и удельное электрическое сопротивление проводов.

Если длину проводов $d_п$ считать бесконечной $\left(d_п \gg \sqrt{\frac{r_п\lambda_п}{\alpha_п}}\right)$, то решение уравнения (2-41) можно представить в следующем виде:

при $\chi \geqslant 1$

$$\Theta_п(\chi) = \left(\Theta_2' - \theta - C_п\frac{\nu^2}{\omega_п^2}\right)\exp[-\omega(\chi-1)] + C_п\frac{\nu^2}{\omega_п^2} + \Theta; \quad (2\text{-}42)$$

при $\chi \leqslant 0$

$$\Theta_п(\chi) = \left(\Theta_2' - \theta - C_п\frac{\nu^2}{\omega_п^2}\right)\exp\omega_п\chi + C_п\frac{\nu^2}{\omega_п^2} + \Theta. \quad (2\text{-}43)$$

Составим на обоих торцах стержня уравнения теплового баланса:

$\chi = 0$ (холодный спай)

$$\nu\Theta_1' - \frac{d\Theta'(0)}{d\chi} + \frac{\lambda_п S_п}{\lambda s}\cdot\frac{d\Theta_п(0)}{d\chi} - \mathrm{Bi}(\Theta - \Theta_1') = 0, \quad (2\text{-}44)$$

$\chi = 1$ (горячий спай)

$$\nu\Theta_2' - \frac{d\Theta'(1)}{d\chi} + \frac{\lambda_п S_п}{\lambda s}\cdot\frac{d\Theta_п(1)}{d\chi} - \mathrm{Bi}(\Theta_2' - \Theta) = 0, \quad (2\text{-}45)$$

где Bi — критерий Био, характеризующий теплоотдачу с торцов.

Складывая уравнения (2-44) и (2-45) и вычисляя входящие в них производные, после преобразований получим:

$$\Delta\Theta' = \frac{2\nu\overline{\Theta}'}{\omega\operatorname{cth}\frac{\omega}{2} + \mathrm{Bi} + \frac{\lambda_п S_п}{\lambda s}\omega_п}. \quad (2\text{-}46)$$

Так как величина ω в условиях проведения опытов по исследованию термоэлектрических свойств мала ($\omega \ll 1$), то

$$\omega\operatorname{cth}\frac{\omega}{2} \approx 2\left(1 + \frac{\omega^2}{12} - \frac{1}{720}\omega^4\right).$$

Тогда

$$\Delta\Theta' = \frac{\nu\overline{\Theta}'}{1 + \frac{\mathrm{Bi}}{2} + \frac{\omega^2}{12} - \frac{1}{720}\omega^4 + \frac{\lambda_п S_п}{\lambda s}\cdot\frac{\omega_п}{2}}. \quad (2\text{-}47)$$

Формула (2-46) является уточнением формулы (2-36а), ее можно представить в следующем виде:

$$\Delta\Theta' = \frac{\nu\overline{\Theta}'}{1+\gamma}, \quad (2\text{-}48)$$

где γ — поправочный член, учитывающий теплоотдачу с поверхности и торцов образца и отвод тепла по проводам.

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\omega \operatorname{cth}\frac{\omega}{2} + \mathrm{Bi} + \frac{\lambda_п S_п}{\lambda s}\right) - 1, \qquad (2\text{-}49)$$

или приближенно

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Bi} + \frac{\omega^2}{6} - \frac{1}{360}\omega^4 + \frac{\lambda_п S_п}{\lambda s}\omega_п\right).$$

Соответственно формула (2-37) преобразуется к виду

$$Z\overline{T} = \frac{U_E}{U_\rho}(1+\gamma).$$

Величина γ не зависит от тока питания, если на обоих торцах стержня идентичны сопротивления контактов и подводящих проводов, а также условия теплообмена.

Если к концам стержня наряду с токовыми подведены дополнительные провода (термопарные для измерения температуры, потенциальные для измерения напряжения), то в выражении для γ следует учесть отвод тепла по каждому из i проводов, для чего в формулу (2-49) необходимо добавить слагаемое вида

$$\frac{1}{2\lambda s}\sum_{(i)}(\lambda_п S_п \omega_п)_i. \qquad (2\text{-}50)$$

Если подвешенный термоэлемент имеет квадратное сечение со стороной δ, а коэффициенты теплоотдачи с боковой поверхности и с торцов одинаковы, то с точностью до малых первого порядка

$$\gamma = \frac{\alpha d}{2\lambda}\left[1 + \frac{2d}{3\delta} + \frac{\pi\sqrt{2}}{\alpha\delta^2}\sum_{(i)}(\alpha_п\lambda_п r^3)_i^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (2\text{-}51)$$

Для цилиндрического стержня радиуса R

$$\gamma = \frac{\alpha d}{2\lambda}\left[1 + \frac{d}{3R} + \frac{\sqrt{2}}{\alpha R^2}\sum_{(i)}(\alpha_п\lambda_п r^3)_i^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (2\text{-}52)$$

В работе [55] был проведен приближенный расчет γ для цилиндрического стержня с учетом распределения температуры по сечению. В дальнейшем в этот расчет были внесены уточнения [47]. Однако дополнительные члены, которые при этом возникают в выражении (2-52), практического значения не имеют.

Методика определения физических свойств термоэлектрических материалов на основе использования соотношений (2-36) и (2-37) описана в целом ряде работ. В настоящее время разработаны установки, позволяющие проводить комплексные измерения Z, e, λ и ρ.

3. ВЛИЯНИЕ КОНТАКТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТТН

При расчете реальных конструкций ТТН необходимо учитывать добавочное электрическое сопротивление, возникающее в месте контакта коммутационной пластины и ветви термопары. Обычно значение контактного сопротивления одного спая является величиной порядка 10^{-5} *ом*. Для современных ТТН, термобатареи которых изготовлены из элементов высотой 1—3 *мм*, пренебрежение в расчете величиной контактных сопротивлений может привести к значительным погрешностям. Если контактные электрические сопротивления на холодном и горячем спае равны, все расчеты термоэлектрических охладителей и нагревателей можно выполнять по приведенным выше формулам, введя поправку в электросопротивление термобатареи, или в параметр термоэлектрической добротности Z:

$$R_{эф} = \rho\frac{d\cdot n^2}{S}\cdot\xi_\rho;$$

$$Z_{эф} = \frac{Z}{\xi_\rho},$$

где $\xi_\rho = 1 + \frac{2\rho_к}{\rho d}$; $\rho_к$ — удельное электрическое сопротивление единицы площади контакта. В случае, когда контактные сопротивления холодного и горячего спая не равны между собой, для режима максимальной

энергетической эффективности могут быть получены следующие формулы:

$$\nu_{\varepsilon}^{o} = (\nu_{\varepsilon}^{o})^{*} - \frac{(\Delta\theta')^{2}}{8M(M-1)^{2}} \cdot \frac{(\xi_{\rho_1} - \xi_{\rho_2})}{\bar{\xi}_{\rho}}; \qquad (3\text{-}1)$$

$$\varepsilon_{\text{макс}} = \varepsilon^{*}_{\text{макс}} - \frac{\xi_{\rho_1} - \xi_{\rho_2}}{4M \cdot \bar{\xi}_{\rho}}, \qquad (3\text{-}2)$$

где $M = \left(1 + \theta_1' + \frac{\Delta\theta'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\bar{\xi}_{\rho} = \frac{1}{2}(\xi_{\rho_1} + \xi_{\rho_2})$, а величины $(\nu_{\varepsilon}^{o})^{*}$ и $\varepsilon^{*}_{\text{макс}}$ вычисляются соответственно по формулам (1-36) и (1-37) с учетом поправки на среднюю величину удельных контактных сопротивлений, которую необходимо ввести в Z. Второе слагаемое в выражениях (3-1) и (3-2) значительно меньше первого, поэтому для приближенных инженерных расчетов им можно пренебречь. Таким образом, в общем случае, когда удельные контактные сопротивления на холодных и горячих спаях не равны между собой, для расчета ТТН можно использовать формулы, полученные без учета контактных сопротивлений, если ввести в параметр Z поправку:

$$Z_{\text{эф}} = \frac{Z}{\bar{\xi}_{\rho}}, \qquad (3\text{-}3)$$

где $\bar{\xi}_{\rho} = 1 + \frac{\rho_{к_1} + \rho_{к_2}}{\rho d}$ — безразмерный коэффициент, характеризующий среднюю величину удельных контактных сопротивлений на холодных и горячих спаях.

Выражение (3-2) показывает, что в том случае, когда удельные контактные сопротивления холодных и горячих спаев не равны между собой, на энергетическую эффективность ТТН бóльшее влияние оказывает контактное сопротивление на холодном спае ξ_{ρ_1}, чем на горячем ξ_{ρ_2}. Из формулы (3-2) видно, что при $\xi_{\rho_1} > \xi_{\rho_2}$ значение $\varepsilon_{\text{макс}}$ уменьшается по сравнению с ε_{max}, вычисленным при среднем значении контактных сопротивлений, а при $\xi_{\rho_1} < \xi_{\rho_2}$ увеличивается. Это объясняется тем, что тепло Джоуля, выделяющееся на контактном

сопротивлении холодного спая, оказывает двойное влияние на величину ε, увеличивает потребляемую электроэнергию и уменьшает полезную холодопроизводительность.

Следует отметить, что величина $\bar{\xi}_{\rho}$, характеризующая влияние контактных сопротивлений на характеристики ТТН, обратно пропорциональна высоте термоэлементов d и удельному сопротивлению полупроводникового вещества ρ. Известно, что довольно значительное увеличение удельного сопротивления полупроводникового термоэлектрического вещества, полученное за счет уменьшения концентрации носителей тока по сравнению с оптимальной величиной, изменяет Z в небольших пределах, так как при этом растет коэффициент термо-э. д. с. [8, 9]. В то же время увеличение ρ позволяет изготовить термобатарею из элементов меньшей высоты, не увеличивая при этом отрицательного влияния контактных сопротивлений. Это обстоятельство используют для получения материалов, хотя и обладающих несколько пониженным значением параметра добротности, однако допускающих уменьшения толщины термобатареи и значительного сокращения расхода полупроводникового материала [29].

Уточненные расчеты конструкций ТТН должны учитывать также электрическое сопротивление коммутационных пластин. Потеря мощности на одной пластине определяется выражением [11, 33]:

$$P_{\text{пл}} = I^2 \rho_{\text{пл}} \frac{1}{S_{\text{пл}}} \left(\delta_2 + \frac{2}{3}\delta_1\right), \qquad (3\text{-}4)$$

где $\rho_{\text{пл}}$ — удельное электрическое сопротивление материала коммутационной пластины; $S_{\text{пл}}$ — площадь сечения пластины; δ_1 — длина участка контакта пластины и термоэлемента (по направлению тока); δ_2 — длина участка пластины между соседними термоэлементами.

Выражение (3-4) показывает, что электрическое сопротивление коммутационной пластины:

$$R_{\text{пл}} = \frac{\rho_{\text{пл}}}{S_{\text{пл}}} \left(\delta_2 + \frac{2}{3}\delta_1\right). \qquad (3\text{-}5)$$

Общее сопротивление термоэлемента с учетом сопротивления контактов и коммутационных пластин может

быть выражено так:

$$R_{эф} = \rho \frac{d}{S} \bar{\xi}_R;$$

$$\bar{\xi}_R = 1 + \frac{1}{\rho d}\left[\rho_{к_1} + \rho_{к_2} + \frac{2\rho_{пл}\delta_1}{\delta_{пл}}\left(\delta_2 + \frac{2}{3}\delta_1\right)\right], \quad (3\text{-}6)$$

где $\delta_{пл}$ — толщина коммутационной пластины.

4. ВЛИЯНИЕ ИЗОЛЯЦИОННЫХ ПРОСЛОЕК МЕЖДУ ТЕРМОЭЛЕМЕНТАМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТТН

При анализе температурного поля ТТН было принято допущение об одномерности теплового потока в ветвях термопары. Это условие справедливо для термобатарей, когда термоэлементы плотно упакованы и окружены идентичными стержнями; при этом тепловой поток, перпендикулярный боковой поверхности, можно считать пренебрежимо малым. Тепловой поток можно считать одномерным и в том случае, когда каждая ветвь термопары окружена слоем теплоизоляции, у которой коэффициент теплопроводности на несколько порядков меньше коэффициента теплопроводности термоэлектрического материала.

Однако допущение об одномерности теплового потока в термоэлементах недостаточно хорошо соответствует некоторым реальным конструкциям термобатарей. Обычно при сборке последних зазоры между отдельными ветвями для придания прочности заливают связующим компаундом (эпоксидной смолой, стеклопластиком и т. п.), коэффициент теплопроводности которого λ' одного порядка с теплопроводностью полупроводников. Образующиеся при этом изоляционные прослойки могут быть достаточно больших размеров, поскольку в ряде случаев плотная упаковка термоэлементов в батарее нецелесообразна, так как при этом уменьшаются ее теплообменные поверхности.

Влияние прослоек на температурное поле и тепловой баланс термобатареи можно оценить, рассмотрев двумерную задачу о распределении температуры в системе «термоэлемент — изоляционная прослойка». При постановке и решении этой задачи будем считать, что температура холодных и горячих спаев постоянна и соответственно равна T_1' и T_2'; физические свойства термоэлектрического и изоляционного материала не зависят от температуры и одинаковы для положительной и отрицательной ветвей термопары.

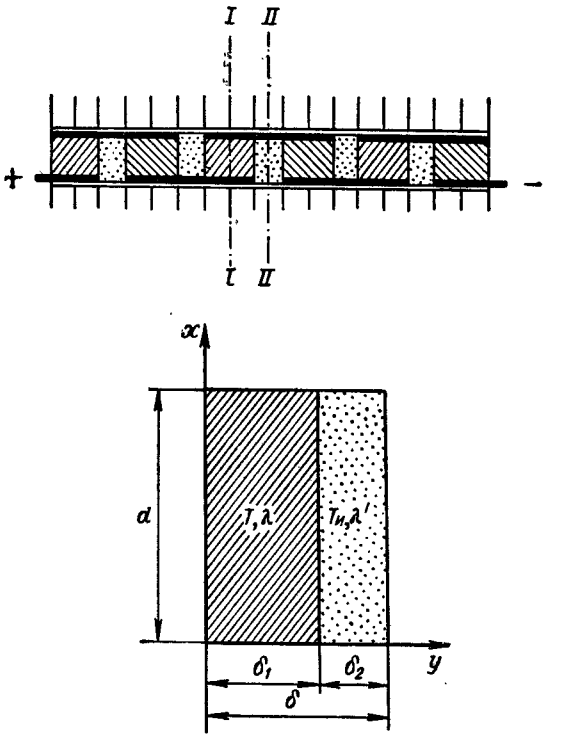


Рис. 10. Схема расчета двумерного температурного поля термобатареи

Выделим в термобатарее элемент, ограниченный двумя параллельными плоскостями, проходящими через середину ветви термопары и середину изолирующего слоя (рис. 10). Вследствие симметрии конструкции термобатареи достаточно рассмотреть температурное поле такого элемента. Очевидно, что плоскости, ограничивающие выделенный элемент, можно считать адиабатными,

так как они являются плоскостями симметрии. Уравнения, которым удовлетворяет стационарное распределение температуры в выделенном элементе, в безразмерном виде могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial^2\Theta'(\chi,\zeta)}{\partial\chi^2}+\frac{\partial^2\Theta'(\chi,\zeta)}{\partial\zeta^2}+\nu^2=0;\quad \begin{matrix}0\leqslant\chi\leqslant 1,\\ 0\leqslant\zeta\leqslant\sigma_1;\end{matrix} \tag{4-1}$$

$$\frac{\partial^2\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)}{\partial\chi^2}+\frac{\partial^2\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)}{\partial\zeta^2}=0;\quad \begin{matrix}0\leqslant\chi\leqslant 1,\\ \sigma_1\leqslant\zeta\leqslant\sigma,\end{matrix} \tag{4-2}$$

где $\Theta'(\chi,\zeta)=ZT'(\chi,\zeta)$ — безразмерная температура в термоэлементе; $\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)=ZT'_{\text{и}}(\chi,\zeta)$ — безразмерная температура в изоляционной прослойке; $\chi=x/d$; $\zeta=y/d$; $\sigma=\delta/d$; $\sigma_{1,2}=\delta_{1,2}/d$; δ_1 — половина ширины термоэлемента; δ_2 — половина ширины изоляционной прослойки.

Граничные условия предусматривают задание температур на торцах выделенного элемента, отсутствие теплового потока на боковых сторонах и отсутствие скачка температуры и теплового потока при переходе через границу между термоэлементом и изоляционной прослойкой:

$$\chi=0,\ 0\leqslant\zeta\leqslant\sigma;\quad \Theta'(\chi,\zeta)=\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)=\Theta'_1; \tag{4-3}$$

$$\chi=1,\ 0\leqslant\zeta\leqslant\sigma;\quad \Theta'(\chi,\zeta)=\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)=\Theta'_2; \tag{4-4}$$

$$0\leqslant\chi\leqslant 1,\qquad \zeta=0;\quad \frac{\partial\Theta'(\chi,\zeta)}{\partial\zeta}=0; \tag{4-5}$$

$$0\leqslant\chi\leqslant 1,\qquad \zeta=\sigma;\quad \frac{\partial\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)}{\partial\zeta}=0; \tag{4-6}$$

$$0\leqslant\chi\leqslant 1,\qquad \zeta=\sigma_1;\quad \Theta'(\chi,\zeta)=\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta);\quad \frac{\partial\Theta'(\chi,\zeta)}{\partial\zeta}=\xi_\lambda\frac{\partial\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)}{\partial\zeta}, \tag{4-7}$$

где $\xi_\lambda=\lambda'/\lambda$, λ' — теплопроводность изоляционного материала.

Решение уравнений (4-1), (4-2) с граничными условиями (4-3) — (4-7) может быть представлено в следующем виде [37]:

$$\Theta'(\chi,\zeta)=\Theta'_1(1-\chi)+\Theta'_2\chi+\frac{\nu^2}{2}\chi(1-\chi)-\nu^2F(\chi,\zeta); \tag{4-8}$$

$$\Theta'_{\text{и}}(\chi,\zeta)=\Theta'_1(1-\chi)+\Theta'_2\chi+\nu^2F_{\text{и}}(\chi,\zeta), \tag{4-9}$$

где $$F(\chi,\zeta)=\frac{2\xi_\lambda}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^k]\operatorname{ch}k\pi\zeta\sin k\pi\chi}{k^3(\operatorname{sh}k\pi\sigma_1\operatorname{cth}k\pi\sigma_2+\xi_\lambda\operatorname{ch}k\pi\sigma_1)}; \tag{4-10}$$

$$F_{\text{и}}(\chi,\zeta)=\frac{2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^k]\operatorname{ch}k\pi(\sigma-\zeta)\sin k\pi\chi}{k^3(\xi_\lambda\operatorname{sh}k\pi\sigma_2\operatorname{cth}k\pi\sigma_1+\operatorname{ch}k\pi\sigma_2)}. \tag{4-11}$$

Функция $F(\chi,\zeta)$ характеризует снижение температуры в каждой точке термоэлемента за счет перетекания части джоулева тепла через боковую поверхность в изоляционную прослойку. Если теплопроводность наполнителя мала так, что $\xi_\lambda\to 0$, то $F(\chi,\zeta)\to 0$ и выражение (4-8) совпадает с соотношением (1-8), полученным в § 1 для адиабатно изолированного термоэлемента.

Ряды в формулах (4-10) и (4-11) быстро сходятся, поэтому для практических расчетов достаточно ограничиться лишь первым членом этих рядов.

Следует отметить, что анализ двумерного температурного поля в системе «термоэлемент — изоляционная прослойка» может быть выполнен методом электротепловой аналогии. Для этого заменим функцию $\Theta'(\chi,\zeta)$ новой функцией $U(\chi,\zeta)$ так, чтобы исключить в уравнении (4-1) член, характеризующий джоулево тепло, а граничные условия остались удобными для моделирования.

Указанным условиям удовлетворяет функция

$$U(\chi,\zeta)=\Theta'(\chi,\zeta)+\frac{\nu^2}{2}(\zeta-\sigma_1)^2. \tag{4-12}$$

Преобразованные уравнения и граничные условия могут быть достаточно просто реализованы при моделировании на электропроводной бумаге [21, 42].

Тепловые потоки на торцах термоэлемента и изоляционной прослойки в безразмерном виде могут быть представлены как:

а) холодный спай

$$K_1 = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial\theta'}{\partial\chi}\bigg|_{\chi=0} d\zeta = \theta_2' - \theta_1' + \frac{\nu^2}{2} - \frac{2\xi_\lambda \nu^2}{\pi^3\sigma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k^3\left(\operatorname{cth} k\pi\sigma_2 + \xi_\lambda \operatorname{cth} k\pi\sigma_1\right)}; \quad (4\text{-}13)$$

$$K_1^{\text{и}} = \xi_\lambda \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{\partial\theta_{\text{и}}'}{\partial\chi}\bigg|_{\chi=0} d\zeta = \overline{S}\cdot\xi_\lambda\left(\theta_2' - \theta_1'\right) + \frac{2\xi_\lambda \nu^2}{\pi^3\sigma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k^3\left(\operatorname{cth} k\pi\sigma_2 + \xi_\lambda \operatorname{cth} k\pi\sigma_1\right)}; \quad (4\text{-}14)$$

б) горячий спай

$$K_2 = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial\theta'}{\partial\chi}\bigg|_{\chi=1} d\zeta = \theta_2' - \theta_1' - \frac{\nu^2}{2} + \frac{2\xi_\lambda \nu^2}{\pi^3\sigma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k^3\left(\operatorname{cth} k\pi\sigma_2 + \xi_\lambda \operatorname{cth} k\pi\sigma_1\right)}; \quad (4\text{-}15)$$

$$K_2^{\text{и}} = \xi_\lambda \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{\partial\theta_{\text{и}}'}{\partial\chi}\bigg|_{\chi=1} d\zeta = \overline{S}\cdot\xi_\lambda\left(\theta_2' - \theta_1'\right) - \frac{2\xi_\lambda \nu^2}{\pi^3\sigma_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k^3\left(\operatorname{cth} k\pi\sigma_2 + \xi_\lambda \operatorname{cth} k\pi\sigma_1\right)}, \quad (4\text{-}16)$$

где $K_{1,2}$ — безразмерные тепловые потоки на торцах термоэлемента; $K_{1,2}^{\text{и}}$ — безразмерные тепловые потоки на торцах изоляционной прослойки; $\overline{S} = \delta_1/\delta_2$ — отношение площади сечения изоляционной прослойки к площади сечения термоэлемента.

Анализ выражений (4-13) — (4-16) показывает, что в термоэлементе, окруженном изоляцией с конечной теплопроводностью, часть выделяемого джоулева тепла перетекает через боковую поверхность в изоляционную прослойку; эта часть тепла делится на два равных потока — к холодным и к горячим спаям. Оставшаяся часть джоулева тепла в термоэлементе также делится на два равных потока, направленных к холодным и к горячим спаям. Количество тепла, перетекающее через боковую поверхность термоэлемента, характеризуется удвоенной величиной последнего слагаемого в уравнениях (4-13) — (4-16).

Запишем в безразмерном виде уравнения теплового баланса на спаях термобатареи, составленной из n термоэлементов, окруженных изоляционными прослойками:

а) на холодных спаях

$$K_{S_1} = \nu\theta_1' - K_1 - K_1^{\text{и}}; \quad (4\text{-}17)$$

б) на горячих спаях

$$K_{S_2} = \nu\theta_2' - K_2 - K_2^{\text{и}}. \quad (4\text{-}18)$$

Уравнения теплового баланса (4-17), (4-18) с учетом соотношений (4-13) — (4-16) могут быть представлены в следующем виде:

$$K_{S_1} = \nu\theta_1' - \frac{\nu^2}{2} - \left(1 + \overline{S}\xi_\lambda\right)\Delta\theta'; \quad (4\text{-}19)$$

$$K_{S_2} = \nu\theta_2' + \frac{\nu^2}{2} - \left(1 + \overline{S}\xi_\lambda\right)\Delta\theta'. \quad (4\text{-}20)$$

Выражения (4-19), (4-20) показывают, что наличие между ветвями термопары изоляционной прослойки не изменяет характера процессов переноса тепла к спаям ТТН. В этом случае, так же как и в случае термопары с адиабатно изолированной боковой поверхностью, джоулево тепло, выделяющееся в ее ветвях, делится на два равных потока, направленных к холодным и горячим спаям. Влияние изоляционной прослойки заключается в том, что она является «тепловым мостиком», по

которому происходит дополнительный переход тепла от более нагретых спаев к менее нагретым. Учет изоляционной прослойки с формальной точки зрения вызывает появление в уравнениях теплового баланса ТТН (4-19), (4-20) перед последним слагаемым, характеризующим кондуктивный поток тепла вдоль термоэлементов, дополнительного множителя, величина которого больше единицы. Иначе говоря, наличие изоляционной прослойки как бы увеличивает собственную теплопроводность термопары и тем самым уменьшает эффективную величину параметра термоэлектрической добротности. Это наглядно видно, если ввести эффективное значение теплопроводности и параметра термоэлектрической добротности полупроводникового материала, которое учитывает наличие изоляционных прослоек между термоэлементами:

$$\lambda_{эф} = \lambda(1 + \bar{S}\xi_{\lambda}); \qquad (4\text{-}21)$$

$$Z_{эф} = \frac{Z}{1 + \bar{S}\xi_{\lambda}}. \qquad (4\text{-}22)$$

Тогда уравнения (4-19), (4-20) полностью совпадают с уравнениями (1-12), (1-13), полученными для термобатареи, элементы которой находятся в плотной упаковке. Следовательно, все расчеты ТТН с учетом изоляционных прослоек могут быть выполнены на основании соотношений, приведенных в § 1, если в качестве параметра термоэлектрической добротности использовать величину $Z_{эф}$, которая определяется по формуле (4-31).

Полученный в настоящем параграфе вывод о распределении тепловых потоков, движущихся к холодным и горячим спаям термобатареи, остается справедливым лишь в случае, когда высота изоляционной прослойки совпадает с высотой термоэлемента. Если некоторый участок термоэлемента, примыкающий к горячему спаю, остается свободным от изоляции, то, как показано в § 2, тепловые потоки к спаям будут неодинаковы. То же самое можно сказать и о конструкции ТТН, где со стороны горячего спая к термоэлементу примыкает медный столбик (рис. 11). За счет медного столбика удается увеличить высоту изоляционной прослойки между термоэлементами и таким образом уменьшить перетечки тепла с горячей стороны термобатареи на холодную через прослойки. Следует отметить, что высоту медного столбика можно увеличивать лишь до некоторого предела, так как при этом увеличиваются необратимые потери, связанные с ростом термического и электрического сопротивлений столбика, которые пропорциональны

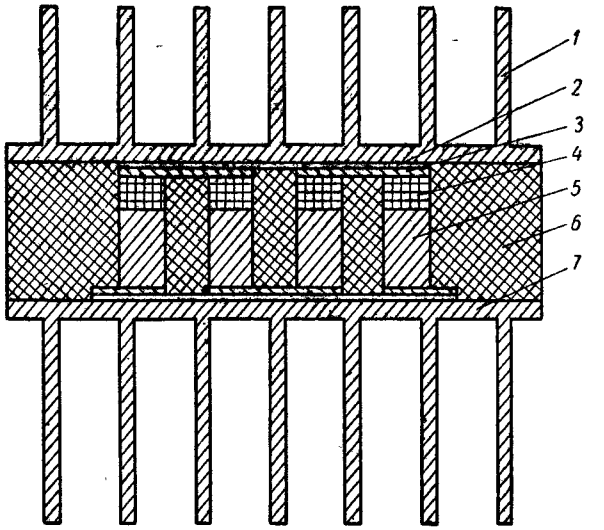


Рис. 11. Термобатарея с коммутационнымн столбиками

1 — радиатор на холодных спаях; *2* — электроизоляционный слой; *3* — коммутационная пластина; *4* — ветвь полупроводниковой термопары; *5* — медный столбик; *6* — теплоизоляция; *7* — радиатор на горячих спаях

его высоте. Двумерное температурное поле изоляционной прослойки в указанной конструкции рассмотрено в работе [62].

Представляет интерес вопрос о выборе ширины изоляционных прослоек, т. е. вопрос, насколько компактно должны быть расположены термоэлементы в термобатарее. Для характеристики компактности термоэлементов обычно служит величина, называемая коэффициентом упаковки ξ_y, которая численно равна отношению

площади сечения термоэлементов ко всей площади термобатареи:

$$\xi_y = \frac{1}{1+\bar{S}}.$$

Выражения (4-21), (4-22) показывают, что увеличение относительной площади сечения изоляционных прослоек $\bar{S}$ уменьшает величину $Z_{эф}$, что в свою очередь приводит к снижению тепло- и холодопроизводительности и коэффициентов энергетической эффективности ТТН. Однако отсюда не следует делать поспешного заключения о том, что при конструировании термобатареи всегда надо стремиться к максимальной плотности расположения термоэлементов. Ведь кроме указанного выше фактора, увеличение площади сечения прослоек увеличивает общую теплоотдающую поверхность термобатареи, что приводит к уменьшению «паразитных» перепадов температуры между спаями и окружающими их средами. При этом, если фиксированы температуры окружающих сред, то уменьшается общий рабочий перепад температур между холодными и горячими спаями, а следовательно, улучшаются все энергетические показатели ТТН.

Таким образом, увеличение площади сечения изоляционной прослойки (или, что то же самое, уменьшение коэффициента упаковки ξ_y) оказывает два взаимно противоположных влияния на производительность и коэффициенты энергетической эффективности ТТН, с одной стороны, уменьшая их, с другой — увеличивая. Это позволяет сделать вывод о том, что может существовать оптимальная плотность расположения термоэлементов, при которой достигаются максимальные энергетические характеристики ТТН [36, 37].

К такому же выводу можно прийти, если проанализировать соотношения для производительности и коэффициентов энергетической эффективности ТТН, записанные при заданных температурах окружающих сред с учетом изоляционных прослоек между термоэлементами. Эти соотношения совпадают с уравнениями (2-3) — (2-6), если ввести эффективные значения коэффициентов теплопроводности и теплоотдачи, учитывающие наличие изоляционных прослоек $\lambda_{эф}$ и $\alpha_{эф} = \alpha_1 (1 + \bar{S})$, где α_1 — приведенный коэффициент теплоотдачи, отнесенный к единице площади сечения термоэлементов. Тогда, как это следует из уравнений (2-3), (2-6), при заданных температурах окружающих сред энергетические показатели ТТН будут монотонно расти с увеличением параметров $Z_{эф}$ и $Bi_{эф}$:

$$Bi_{эф} = \frac{\alpha_{эф} d}{\lambda_{эф}} = Bi \frac{1+\bar{S}}{1+\xi_\lambda \bar{S}}. \qquad (4\text{-}23)$$

В том случае, когда теплопроводность изоляционной прослойки меньше теплопроводности термоэлектрического вещества, т. е. $\xi_\lambda < 1$, из соотношений (4-22) и (4-23) следует, что увеличение $\bar{S}$ вызывает рост $Bi_{эф}$ и уменьшение $Z_{эф}$.

Таким образом, при $\xi_\lambda < 1$ может существовать оптимальное значение $\bar{S} = \bar{S}_o$, при котором достигаются максимальные значения энергетических показателей ТТН. Если же $\xi_\lambda > 1$, то оба параметра $Z_{эф}$ и $Bi_{эф}$ монотонно падают с увеличением $\bar{S}$. Иначе говоря, если коэффициент теплопроводности материала-наполнителя выше, чем коэффициент теплопроводности полупроводникового материала, то увеличение прослойки приводит лишь к уменьшению энергетических характеристик ТТН. При этом надо стремиться к максимальной плотности упаковки термоэлементов.

В качестве иллюстрации высказанных соображений на рис. 12 приведены зависимости максимального (по току) холодильного коэффициента от относительной площади изоляционной прослойки. Представленные графики наглядно показывают, что при заполнении прослойки материалом с низким коэффициентом теплопроводности и небольших коэффициентах теплоотдачи на спаях увеличение расстояния между элементами позволяет повысить значение $\varepsilon_{макс}$ в 2—3 раза (рис. 12, *а*). Величина оптимальной площади изоляционной прослойки растет с увеличением коэффициентов теплоотдачи на спаях и перепада температур между средами (рис. 12, *б*). При достаточно большой теплопроводности материала-наполнителя ($\xi_\lambda > 1$) величина $\varepsilon_{макс}$ резко падает с увеличением расстояния между термоэлементами (рис. 12, *в*).

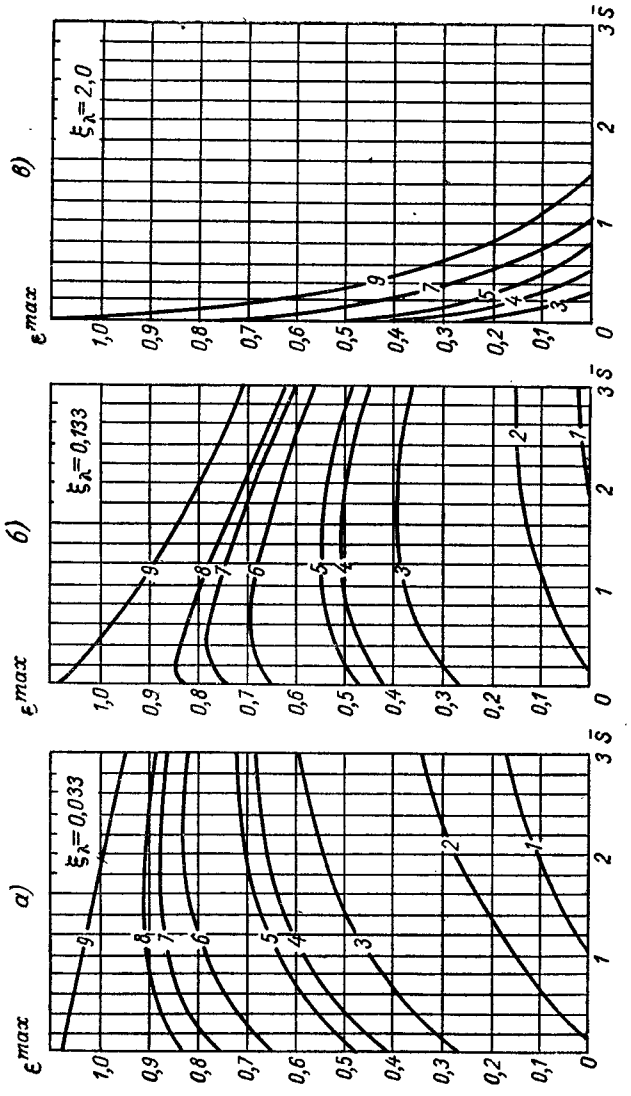


Рис. 12. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от относительной площади изоляционных прослоек ($\Delta\Theta = 0{,}04$)

Bi_1: 1 — 0,4; 2 — 0,67; 3 — 3,0; 4 — 1,33; 5 — 6,66; 7 — 6,66; 8 — 13,3; 9 — ∞
Bi_2: 1 — 0,6; 2 — 1,0; 3 — 3,33; 4 — 6,66; 5 — 6,66; 6 — 13,3; 8 — 13,3; 9 — ∞

На рис. 13 представлены кривые, характеризующие изменение оптимального сечения изоляционной прослойки в зависимости от теплоотдачи на горячих и холодных спаях. Графики построены для часто встречающейся на практике величины $\xi_\lambda = 0{,}3$ (термобатарея залита эпоксидной смолой).

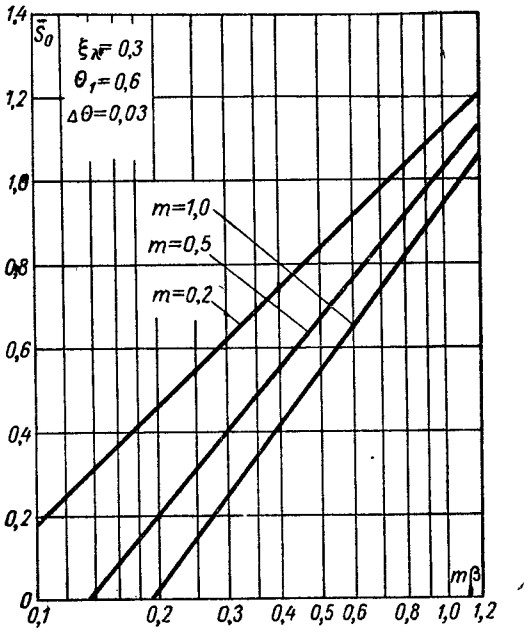


Рис. 13. Зависимость оптимальной площади сечения изоляционной прослойки от теплоотдачи на спаях термобатареи

Следует отметить, что с увеличением площади сечения прослойки увеличивается длина коммутационных пластин, а следовательно, и их электрическое сопротивление. Влияние сопротивления коммутационных пластин на энергетический баланс термопары обычно пренебрежимо мало, однако в точных расчетах оно без труда может быть учтено по формулам, приведенным в § 3.

Таким образом, изоляционные прослойки, являющиеся неизбежным элементом конструкции ТТН, служат

не только тепловыми мостиками между холодными и горячими спаями, но и позволяют увеличить теплообменные поверхности термобатареи. Выбор оптимальных размеров изоляционных прослоек дает возможность в некоторых случаях существенно повысить энергетические характеристики ТТН.

5. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТТН

В предыдущих параграфах были рассмотрены основные соотношения для энергетических характеристик ТТН. Используя эти соотношения, можно для каждой конструкции построить нагрузочные характеристики, т. е. получить зависимость холодо- и теплопроизводительности и коэффициентов энергетической эффективности от тока питания. При этом может быть учтен целый ряд факторов, таких, как термические сопротивления между спаями термобатареи и окружающими их средами, контактные электрические сопротивления, пульсации напряжения питания, изоляционные прослойки между ветвями термопар, неизбежно имеющих место в реальных конструкциях ТТН и вызывающих необратимое снижение его энергетических показателей.

Обычно при проектировании полупроводникового ТТН бывает задана тепловая нагрузка на термобатарею, т. е. ее холодо- или теплопроизводительность, которые определяются исходя из калорического расчета охлаждаемого или нагреваемого объекта. Также обычно заданы температуры охлаждаемой и нагреваемой сред, термические сопротивления между спаями термобатареи и окружающими средами, физические свойства используемого термоэлектрического материала.

Поэтому расчет ТТН чаще всего сводится не к построению нагрузочных характеристик, а к определению оптимальных значений параметров, которые обеспечивают работу ТТН с заданной производительностью при минимальных его размерах и весе либо при минимальном потреблении электроэнергии.

Рассмотрим расчет параметров при указанных исходных данных для двух основных типов ТТН, которые отличаются друг от друга различными требованиями, предъявляемыми к ним.

Расчет параметров, обеспечивающих максимальную холодопроизводительность

К первому типу в основном относятся ТТН, применяемые в качестве охладителей или нагревателей в микрохолодильниках и микротермостатах. В этих устройствах расход электроэнергии настолько мал, что вопрос об экономичности процесса охлаждения или нагрева отодвигается на второй план. Здесь прежде всего приходится заботиться об уменьшении веса и габаритов термобатарей, т. е. стремиться получить максимальные значения холодо- или теплопроизводительности на единицу площади или на единицу объема термобатареи.

В тех случаях, когда различные термобатареи собирают из стандартных термоэлектрических модулей, кроме указанных выше данных ($T_{1,2}$, Q_1, e, ρ, λ, $\alpha_{1,2}$), конструктору бывает задана еще и высота термоэлементов. При этом зависимость удельной холодопроизводительности с единицы площади от плотности тока питания определяется функцией $K_{S_1}(\nu)$ — выражение (2-3). Величина оптимальной плотности тока ν_q^0, соответствующая максимальному значению K_{S_1}, может быть получена из уравнения

$$\frac{dK_{S_1}}{d\nu} = 0, \qquad (5\text{-}1)$$

которое представляет собой уравнение четвертой степени относительно ν.

Первое приближение для ν_q^0, полученное при решении этого уравнения с учетом малости интересующего нас первого корня, запишется так:

$$\nu_q^0 = \frac{\theta_1}{1 + 2\beta m(\theta_1 + 1)}. \qquad (5\text{-}2)$$

Следующее приближение, найденное методом итераций, может быть представлено в виде:

$$\nu_q^0 = \frac{\theta_1}{1 + 2\beta m(\theta_1 + 1)} \cdot (1 + \gamma);$$

где $\gamma = \dfrac{\theta_1\beta[\beta m^2(5 + 2\theta_1) + m(4 + \beta) - 1]}{2[1 + \beta(1 + m)][1 + 2\beta m(\theta_1 + 1)]^2}$.

Величина поправочного коэффициента γ может быть как положительной, так и отрицательной, причем оценка показывает, что $|\gamma| < 0{,}1$. Отсюда следует, что величину оптимального тока с достаточной для практики точностью можно определять из соотношения (5-2). Величина оптимального тока в первом приближении не зависит от перепада температур между средами и термических сопротивлений на холодных спаях, а определяется лишь температурой охлаждаемой среды и терми-

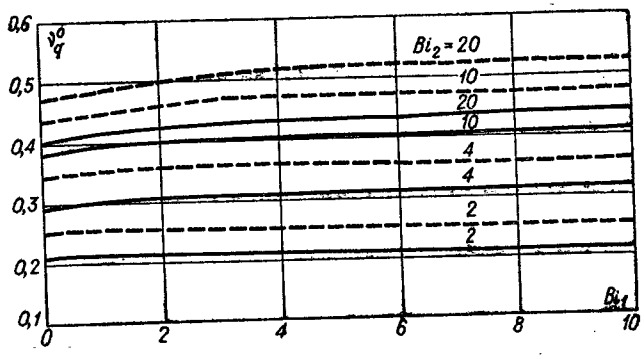


Рис. 14. Влияние параметров ТТН на величину оптимального тока, обеспечивающего максимальную холодопроизводительность
—— $\Theta_1 = 0{,}5$; — — — — $\Theta_1 = 0{,}6$

ческими сопротивлениями на горячей стороне термобатареи. Точное решение уравнения (5-1), выполненное на ЭВМ и представленное на рис. 14, подтверждает эту закономерность.

В том случае, когда велнчина термических сопротивлений на горячей стороне термобатареи равна нулю ($m = 0$), можно получить точное решение уравнения (5-1):

$$\nu_q^0 = \frac{2\left(\Theta_1 + \Delta\Theta\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)}{1+\left[1+2\Theta_1\dfrac{\beta}{\beta+1}+2\Delta\Theta\dfrac{\beta^2}{(\beta+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}. \qquad (5\text{-}3)$$

Это решение показывает, что при отсутствии термических сопротивлений на горячей стороне термобатареи

на величину оптимального тока начинают сказываться такие факторы, как перепад температуры и термические сопротивления на холодной стороне. Поэтому при $m \to 0$ целесообразно для расчета ν_q^0 пользоваться точным выражением (5-3). Однако уже при $\beta_2 = \beta m > 0{,}05$ формула (5-2) дает более точный результат, чем (5-3), поэтому она может быть использована для расчета большинства реальных конструкций.

Подставив выраженне (5-2) в (2-3), получим соотношение для максимальной холодопроизводительности с единицы площади термобатареи:

$$K_{S_1}^{\text{макс}} \approx \frac{\Theta_1^2 - 2\Delta\Theta\,[1+2\beta m\,(\Theta_1+1)]}{2\,[1+\beta\,(1+m)]\,[1+2\beta m\,(\Theta_1+1)]}. \qquad (5\text{-}4)$$

Формула (5-4) имеет ту же точность, что и выраженне (5-2); эта точность достаточна для практических расчетов. При $m = 0$ для $K_{S_1}^{\text{макс}}$ можно получнть точное выражение, если подставить соотношение (5-3) в (2-3). Из выражения (5-4) может быть получено соотношение для минимальной величины $(\text{Bi}_2)_{\text{мии}} = \dfrac{1}{\beta m}$, при которой $K_{S_1}^{\text{макс}} \geqslant 0$. Это соотношение совпадает с полученным ранее выражением (2-11). В тех случаях, когда высота термоэлементов заранее не задана, максимальная (по току) холодопроизводительность будет зависеть от высоты термоэлементов, или, что то же самое, от безразмерного параметра β.

При этом для характеристики удельной холодопроизводительности удобно ввести новый безразмерный параметр, в который не входит высота термоэлементов:

$$K_{S_{1,2}}^{*} = \frac{Q_{1,2}Z}{\alpha_{1,2}S}.$$

Легко видеть, что $K_{S_1}^{*} = K_{S_1} \cdot \beta$, следовательно, для максимальной по току холодопронзводительности может быть получено следующее соотношение:

$$K_{S_1}^{*}\Big|_{\nu=\nu_q^0} = \beta\,\frac{\Theta_1^2 - 2\Delta\Theta\,[1+2\beta m\,(\Theta_1+1)]}{2\,[1+\beta\,(1+m)]\,[1+2\beta m\,(\Theta_1+1)]}. \qquad (5\text{-}5)$$

При этом справедливым остается выражение (2-11) для $(Bi_2)_{мин}$, характеризующее ту минимальную высоту термоэлементов, которая еще обеспечивает поглощение тепла на холодных спаях термобатареи при заданных температурах окружающих сред и условиях теплообмена. Выражение (5-5) показывает, что для выполнения условия $K^*_{S_1} \geqslant 0$ высота термоэлементов должна находиться в интервале, который характеризуется следующими значениями параметра $\beta : 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_{макс}$. На концах этого интервала холодопроизводительность с единицы площади обращается в нуль (рис. 15). Здесь $\beta_{макс} = \frac{1}{m(Bi_2)_{мин}}$, где $(Bi_2)_{мин}$ определяется по формуле (2-11). Очевидно, что внутри указанного интервала имеется оптимальная высота термоэлементов, т. е. оптимальное значение параметра $\beta = \beta^\circ_q$, которому соответствует максимум холодопроизводительности. Значение β°_q получим, продифференцировав выражение (5-5) по β и приравняв нулю:

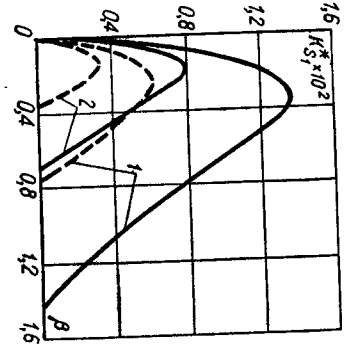


Рис. 15. Зависимость максимальной (по току) холодопроизводительности ТТН от высоты термоэлементов ($\Delta\Theta = 0{,}06$)
——— $\Theta_1 = 0{,}6$; — — — — $\Theta_1 = 0{,}5$; *1* — $m = 0{,}5$; *2* — $m = 1$

$$\beta^\circ_q = \frac{\beta_{макс}}{\Theta_1 \left[\frac{1 + \beta_{макс}(1+m)}{2\Delta\Theta}\right]^{\frac{1}{2}} + 1}, \qquad (5\text{-}6)$$

где $\beta_{макс} = \frac{\Theta_1^2 - 2\Delta\Theta}{4\Delta\Theta(\Theta_1 + 1)m}$.

Из соотношения (5-6) видно, что оптимальное значение высоты термоэлементов d°_q, которое обратно пропорционально параметру $\beta^\circ_q = \frac{\lambda}{\alpha_1 d^\circ_q}$, уменьшается с увеличением коэффициентов теплоотдачи на спаях. В пределе при $\alpha_2 \to \infty$ $(m \to 0)$ оптимальная высота термоэлементов стремится к нулю $(\beta^\circ_q \to \infty)$. Практически и в этом случае существует некоторая оптимальная высота термоэлементов, так как при стремлении термических сопротивлений на спаях к нулю уменьшение высоты термоэлементов ограничено благодаря наличию контактных электрических сопротивлений.

Однако для подавляющего большинства конструкций ТТН, даже при достаточно интенсивной теплоотдаче, оптимальная высота термоэлементов определяется исходя из условий теплообмена на спаях и рабочего интервала температур, т. е. с помощью соотношения (5-6). Это соотношение вместе с выражением (5-2) для ν°_q позволяет определить размеры термобатареи и режим питания, обеспечивающие максимальную холодопроизводительность с единицы площади при заданных температурах окружающих сред и условиях теплообмена на спаях.

Представляет также интерес расчет параметров ТТН, обеспечивающих достижение максимальной холодопроизводительности с единицы объема полупроводникового вещества. Эта холодопроизводительность характеризуется безразмерным параметром

$$K_{V_1} = \frac{Q_1 Z \lambda}{V \alpha_1^2},$$

где V — объем полупроводникового вещества.

Очевидно, что параметры $K_{S_{1,2}}$ и $K_{V_{1,2}}$ связаны следующим соотношением:

$$K_{V_{1,2}} = \beta^2 K_{S_{1,2}}. \qquad (5\text{-}7)$$

В том случае, когда высота термоэлементов задана, условия максимума холодопроизводительности на единицу объема вещества и на единицу площади термобатареи совпадают и характеризуются соотношением (5-2).

Если же высота термоэлементов не задана, то расчет оптимальных параметров ТТН сводится к нахождению максимума функции двух переменных $K_{V_1}(\nu, \beta)$, т. е. к решению системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial K_{V_1}}{\partial \nu} &= 0; \\ \frac{\partial K_{V_1}}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Первое уравнение этой системы тождественно уравнению (5-1), поэтому решение его относительно ν в первом приближении определяется выражением (5-2). Подставив это выражение во второе уравнение системы, получим

$$A\beta^3 + 2[A + \beta_{\text{макс}}(1+m)]\beta^2 - \\ - [A - 3 + \beta_{\text{макс}}(1+m)]\beta_{\text{макс}}\beta - \beta^2_{\text{макс}} = 0, \quad (5\text{-}8)$$

где $A = \dfrac{\theta_1^2}{2\Delta\theta} - 1$.

Выражение (5-8) является уравнением третьей степени относительно β. Первый положительный корень этого уравнения β_q° определяет оптимальную высоту термоэлементов. Если найденное значенид β_q° подставить в выражение (5-2), то получим величину оптимальной безразмерной плотности тока ν_q°. Следует отметить, что максимум холодопроизводительности с единицы объема полупроводникового вещества достигается при меньшей высоте термоэлементов, чем максимум холодопроизводительности с единицы площади термобатареи.

В тех случаях, когда требуется определить минимальную площадь термобатареи либо минимальный объем полупроводникового материала, обеспечивающие заданную холодопроизводительность Q_1, легко видеть, что расчет ТТН также сводится к нахождению максимума функций $K_{S_1}(\nu, \beta)$ или $K_{V_1}(\nu, \beta)$. Расчет следует производить в указанной выше последовательности по формулам (5-2) — (5-8).

Как уже было указано в § 1, в некоторых случаях задание на проектирование ТТН предусматривает ограничение величины тока питания в цепи термобатареи. При этом нужно считать, что величина тока является заданным параметром наряду с температурами окружающих сред, термическими сопротивлениями на спаях и высотой термоэлементов, следовательно, холодопроизводительность ТТН будет зависеть только от сечения термоэлементов и от их числа. Холодопроизводительность одного термоэлемента при заданном токе характеризуется безразмерным параметром $K_n = \dfrac{Q_1 Z}{eIn}$, а площадь сечения — с точностью до множителя параметром ν.

Если учесть, что $K_{S_1} = K_n \cdot \nu$, а также приближенное соотношение $K_{S_1}(\nu)$, то можно получить зависимость $K_n(\nu)$, характеризующую в безразмерном виде изменение холодопроизводительности ТТН от площади сечения термоэлементов при заданном токе и числе термоэлементов:

$$K_n = \frac{2\nu\theta_1 - \nu^2[1 + 2\beta m(\theta_1 + 1)] - 2\Delta\theta}{2\nu[1 + \beta(1+m)]}. \quad (5\text{-}9)$$

Эта зависимость имеет максимум, которому соответствует оптимальное сечение термоэлементов, т. е. оптимальная величина параметра $\nu = \nu_n^\circ$:

$$\nu_n^\circ = \sqrt{\frac{2\Delta\theta}{1 + 2\beta m(\theta_1 + 1)}}. \quad (5\text{-}10)$$

Подставив ν_n° в уравнение (5-9), получим максимальную холодопроизводительность с одного термоэлемента при заданном токе:

$$K_n^{\text{макс}} = \frac{\theta_1 - \sqrt{2\Delta\theta[1 + 2\beta m(\theta_1 + 1)]}}{1 + \beta(1+m)}. \quad (5\text{-}11)$$

Очевидно, что по формуле (5-11) может быть также рассчитан минимальный ток, при котором обеспечивается заданная холодопроизводительность Q_1. При $m = 0$ расчет оптимальных параметров ТТН выполняется в той же последовательности, однако для ν_q° должно быть использовано точное выражение (5-3).

Расчет параметров, обеспечивающих минимальный вес радиатора

В целом ряде термоэлектрических устройств, в частности применяющихся для охлаждения и термостатирования радиоэлектронной аппаратуры, теплообмен на горячих спаях осуществляется за счет естественной конвекции. Для того чтобы при этом обеспечить необходимый отвод тепла от горячих спаев термобатареи, используется радиатор, вес и габариты которого часто значительно превышают вес и габариты самой термобатареи. Очевидно, что стремление к уменьшению веса и размеров ТТН в этом случае прежде всего связано с

уменьшением размеров радиатора. При заданных величинах холодопроизводительности, температуры холодных спаев термобатареи и температуры окружающей среды размеры радиатора будут зависеть от температуры горячих спаев T_2':

$$S_р = \frac{Q_2}{\alpha_2 (T_2')(T_2' - T_2)}, \qquad (5\text{-}12)$$

где $S_р$ — полная поверхность радиатора.

Выражение (5-12) является наиболее общим для определения поверхности радиатора $S_р$, когда коэффициент теплоотдачи произвольно зависит от температуры. При естественной конвекции в радиаторах различного типа зависимость коэффициента теплоотдачи от температуры хорошо аппроксимируется степенной функцией вида [5]:

$$\alpha_2 = A (T_2' - T_2)^k. \qquad (5\text{-}13)$$

Преобразуем выражение (5-12), выразив Q_2 через Q_1 и ε и подставив в знаменатель соотношение (5-13) для α_2:

$$S_р = \frac{Q_1 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)}{A (T_2' - T_2)^{k+1}}. \qquad (5\text{-}14)$$

Анализ выражения (5-14) показывает, что при расчете радиатора для ТТН можно столкнуться с задачей выбора оптимальной температуры горячих спаев. Если температура горячих спаев будет мала и близка к температуре окружающего воздуха, то для отвода тепла потребуется большая поверхность оребрения. Если же температура горячих спаев будет достаточно высокой, то при этом может заметно понизиться коэффициент энергетической эффективности, т. е. увеличиться тепловой поток на горячих спаях, что снова потребует увеличения поверхности радиатора.

Исходя из высказанных соображений, можно предположить, что существует некоторая оптимальная температура горячих спаев, при которой заданную холодопроизводительность можно обеспечить с минимальной поверхностью радиатора [49]. Очевидно, что эта температура должна быть такой, чтобы обеспечивался минимальный поток тепла на горячих спаях, т. е. ТТН должен работать в режиме максимального коэффициента энергетической эффективности. Тогда в уравнении (5-14) можно положить $\varepsilon = \varepsilon_{max}$, который выражается соотношением (1-37). Сделав соответствующую подстановку и приведя уравнение (5-14) к безразмерному виду, получим

$$\xi_р = \bar{q}_1 \frac{\Theta_2' M - \Theta_1'}{(\Theta_2' - \Theta_2)^{k+1} (\Theta_1' M - \Theta_2')}, \qquad (5\text{-}15)$$

где $\xi_р$ — коэффициент оребрения, численно равный отношению поверхности радиатора к площади термобата-

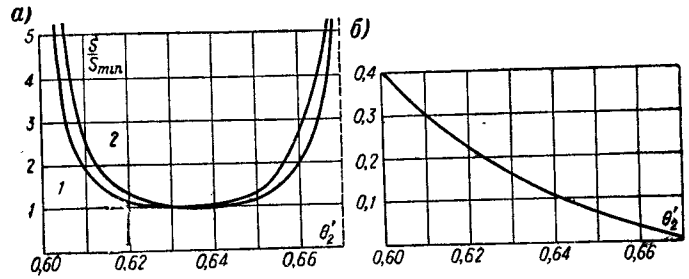


Рис. 16. Влияние перепада температуры между горячими спаями и окружающей средой на характеристики ТТН ($\Theta_2 = 0{,}6$; $\Theta_1' = 0{,}53$): *а* — на величину поверхности радиатора; *б* — на величину коэффициента энергетической эффективности *1* — $k = 0$; *2* — $k = 0{,}25$

реи; $\bar{q}_1 = \frac{Q_1 Z^{k+1}}{SA}$ — безразмерный параметр. Оптимальный перепад температуры на радиаторе ϑ_o, соответствующий минимальному коэффициенту оребрения, может быть получен из уравнения $\frac{\partial \xi_р}{\partial \vartheta} = 0$, где $\vartheta = \Theta_2' - \Theta_2$. Если при дифференцировании считать, что $M = \text{const}$, то для приближенного нахождения ϑ_o получим следующее квадратное уравнение:

$$\vartheta_o^2 + \vartheta_o \left[\frac{k+2}{k+1}\left(\Theta_2 - \frac{\Theta_1'}{M}\right) - \frac{k}{k+1}(M\Theta_1' - \Theta_2)\right] - \left(\Theta_2 - \frac{\Theta_1'}{M}\right)(M\Theta_1' - \Theta_2) = 0.$$

На рис. 16 показана зависимость поверхности радиатора от перепада температур между горячим спаем и окружающей средой. Кривые построены для двух видов теплоотдачи радиатора — вынужденной конвекции ($k = 0$) и ламинарной естественной конвекции ($k = 0{,}25$). Из рисунка видно, что обе кривые имеют минимум, причем отступление от оптимальной температуры горячего спая может привести к необходимости увеличения размеров радиатора в несколько раз. На этом же рисунке дана зависимость ε (υ), которая показывает, что, стремясь уменьшить размеры радиатора, мы можем существенно проиграть в коэффициенте энергетической эффективности ТТН. То же самое можно сказать о всех рассмотренных выше случаях определения оптимальных параметров ТТН. Добиваясь минимальных размеров и веса устройства, при которых обеспечивается заданная холодопроизводительность, мы допускаем большой перерасход электроэнергии, поскольку уменьшить последний можно только в ущерб габаритам и весу установки.

Расчет параметров, обеспечивающих максимальную энергетическую эффективность

Разработка целого ряда конструкций ТТН, которые мы отнесли ко второму типу, должна быть подчинена другой задаче, а именно: созданию устройства, имеющего при заданной холодо- или теплопроизводительности максимальный коэффициент энергетической эффективности. Это прежде всего относится к достаточно крупным энергетическим установкам с большим потреблением электроэнергии.

Задача расчета оптимальных параметров ТТН, обеспечивающих его работу с максимальной энергетической эффективностью, может быть поставлена в различных вариантах. Рассмотрим три из них, наиболее часто встречающихся в практике конструирования [16, 19].

1. Заданы тепловая нагрузка на термобатарею, т. е. холодо- или теплопроизводительность, температуры охлаждаемой и нагреваемой сред (объектов), термические сопротивления между спаями и окружающими средами и высота термоэлементов. Кроме того, известны физические свойства полупроводникового материала. Необходимо определить площадь термобатареи и ток питания, которые при всех заданных условиях обеспечивают работу ТТН с минимальным потреблением электроэнергии. Решение этой и последующих двух задач будут рассмотрены на примере термоэлектрического охлаждения, так как для нагревателя порядок расчета будет полностью аналогичен.

Коэффициент энергетической эффективности охладителя ε в общем виде, согласно выражению (2-5), является функцией пяти безразмерных переменных: ν, β, m, Θ_1 и $\Delta\Theta$. Условия рассматриваемой задачи означают, что величины β, m, Θ_1 и $\Delta\Theta$ являются заданными параметрами, следовательно, ε — функция только одного переменного — ν. В этом случае решение задачи, т. е. нахождение оптимального $\nu = \nu_\varepsilon^0$, при котором $\varepsilon = \varepsilon_{макс}$, может быть получено из условия $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu} = 0$. Это условие приводит к уравнению четвертой степени относительно ν, решение которого связано с определенными трудностями. Можно, однако, показать, что интересующий нас первый вещественный корень этого уравнения слабо зависит от параметра β. При этом следует учесть, что с ростом β величина $\varepsilon_{макс}$ монотонно падает, поэтому предельное значение $\beta = \beta_{макс}$ определяется условием $\varepsilon_{max} = 0$. Поскольку $\nu_0 = f(\beta)$ является монотонной функцией, максимальное изменение ее равно разности ν_0 в начале и конце интервала возможных изменений β, т. е. в точках $\beta = 0$ и $\beta = \beta_{макс}$ ($\varepsilon_{макс} = 0$). При $\beta = 0$ решение уравнения $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu} = 0$ приведено в § 1; оно выражается формулой (1-36). При $\beta = \beta_{макс}$ для нахождения оптимального значения ν_ε^0 необходимо решить систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nu} &= 0; \\ \varepsilon &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}16)$$

Очевидно, что системы уравнений (5-16) и (2-7) тождественны, поэтому выражения (2-9), (2-11) являются решениями для обеих систем. Таким образом, при $\beta = \beta_{макс}$ оптимальное значение ν_ε^0 может быть получено

по формуле (2-10). Оценим предельное относительное изменение ν_ε^0 при изменении β во всем интервале:

$$\frac{\nu_\varepsilon^0(0)-\nu_\varepsilon^0(\beta_{max})}{\nu_\varepsilon^0(0)}=1-\frac{2}{\Theta_1}\left[\left(1+\Theta_1+\frac{\Delta\Theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]. \quad (5\text{-}17)$$

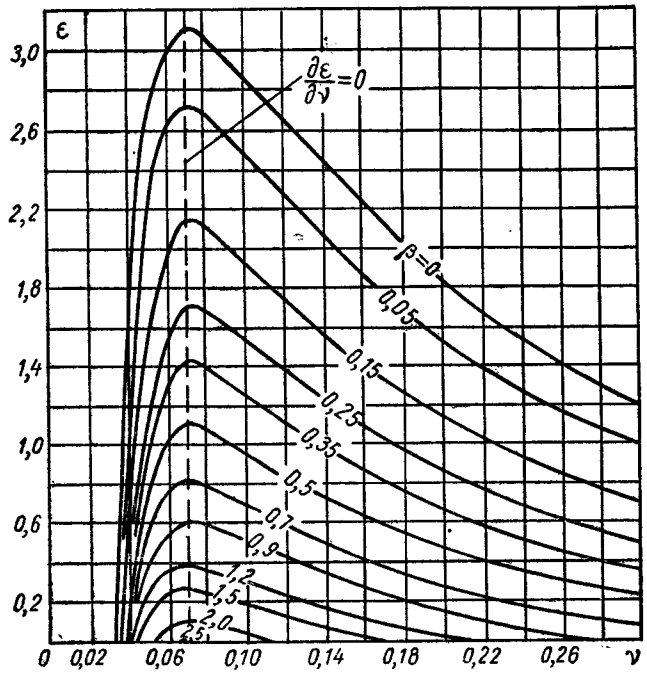


Рис. 17. Изменение коэффициента энергетической эффективности ТТН от плотности тока при различной теплоотдаче ($\Theta_1 = 0{,}6$; $\Delta\Theta = 0{,}02$; $m = 1$)

Численная оценка выражения (5-17) показывает, что величина его для реальных значений Θ_1 и $\Delta\Theta$ не превышает 10%, поэтому в практических расчетах можно считать, что ν_ε^0 не зависит от β и определяется по формуле (2-10). На рис. 17 показано изменение ε в зависимости от ν при различных β. Кривые, построенные на основании расчетов по точной формуле (2-5), наглядно иллюстрируют приведенные выше соображения, так

как значения ν_ε^0, соответствующие $\varepsilon_{макс}$, при различных β практически лежат на вертикальной прямой.

Таким образом, расчет ТТН может быть выполнен в соответствии с условием рассматриваемой задачи по следующей схеме [16, 19]:

а) Определяем значения безразмерных параметров β, m, Θ_1 и $\Delta\Theta$, которые составлены из заданных величин;

б) Определяем по формуле (2-10) оптимальную безразмерную плотность тока ν_ε^0.

в) При найденном значении ν_ε^0 из уравнения (1-37) определяем величину параметра K_{S_1}.

г) По известной величине K_{S_1}, подставив входящие в этот комплекс величины, находим оптимальную площадь термобатареи S.

д) Если задана средняя площадь сечения одного термоэлемента $\bar{s}$, то определяем число элементов $n = S/\bar{s}$ и, зная величину параметра ν_ε^0,— силу тока питания I; если величина тока ограничена и задана по условиям расчета, то из параметра ν_ε^0 находим число термоэлементов и далее — среднюю площадь сечения одной ветви $\bar{s} = S/n$.

е) По уравнению (2-5) рассчитываем величину максимального холодильного коэффициента.

На рис. 18 показано изменение холодильного коэффициента в зависимости от параметра K_{S_1}, который в данной задаче с точностью до постоянного множителя можно трактовать как величину, обратную площади термобатареи. Из рисунка видно, что функция $\varepsilon = \varphi(1/S)$ имеет четко выраженный максимум, особенно при малых значениях параметра β. Для каждого β величине $\varepsilon_{макс}$ соответствует оптимальное значение параметра K_{S_1}, или, что то же самое, оптимальное значение площади термобатареи, которое определяется согласно приведенной выше расчетной схеме.

2. В некоторых случаях задание на проектирование термоэлектрических охлаждающих и нагревающих устройств бывает построено следующим образом. Заданы тепловая нагрузка на батарею, температуры окружающих сред, коэффициенты теплоотдачи от спаев к окружающим средам и площадь термобатареи. Необходимо определить высоту термоэлементов и ток пита-

ния, которые при заданных условиях обеспечивают максимальный коэффициент энергетической эффективности. Решение этой задачи является полезным для ин-

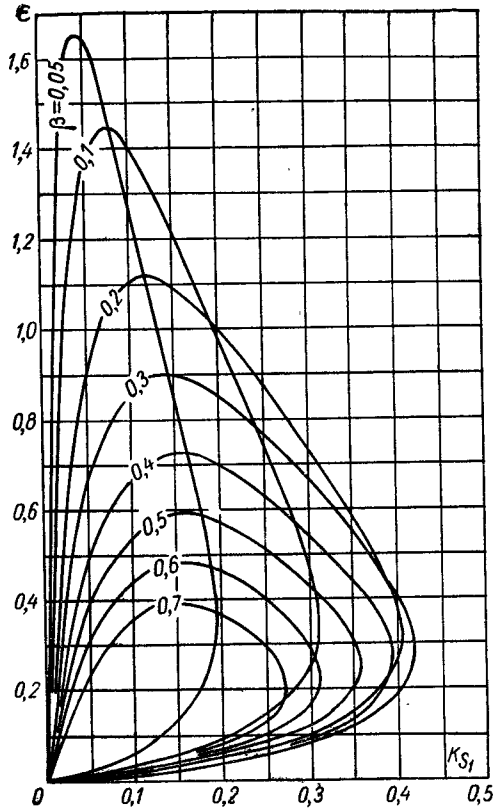


Рис. 18. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от площади термобатареи при постоянной холодопроизводительности ($\Theta_1 = 0{,}6$; $\Delta\Theta = 0{,}03$; $m = 1$)

женерной практики, так как позволяет производить расчет устройства ограниченной площади, которое при заданной производительности обеспечивает максимальную энергетическую эффективность.

Указанная постановка задачи возникает в том слу-

чае, когда необходимо произвести расчет термобатареи, находящейся в непосредственном контакте с охлаждаемым (нагреваемым) объектом, поверхность которого ограничена (охладители блоков радиоэлектронных устройств, микротермостаты и т. д.). Очевидно, что площадь термобатареи при этом будет также ограничена и значение ее будет являться одним из исходных данных для расчета.

Перечисленные исходные данные означают, что заданными являются безразмерные параметры m, Θ_1, $\Delta\Theta$ и $K^*_{S_1}$, следовательно, ε представляет собой функцию двух переменных ν и β, связанных дополнительным условием $K^*_{S_1} = \beta \cdot K_{S_1}(\nu, \beta)$. Таким образом, для решения задачи необходимо найти значения переменных $\nu = \nu^0_\varepsilon$ и $\beta = \beta^0_\varepsilon$, соответствующие условному максимуму функции $\varepsilon(\nu, \beta)$. Однако такой путь, хотя и дает точное решение, является чрезвычайно громоздким, так как приводит к уравнениям четвертой степени. Поэтому мы предложим приближенное решение, пригодное для инженерной практики.

Поскольку в условиях нашей задачи известны холодопроизводительность, площадь батареи и термические сопротивления на спаях, легко можно рассчитать температуру холодного спая Θ_1', используя уравнение (2-1). Если бы нам теперь удалось определить также и температуру горячего спая Θ_2', то для дальнейших расчетов можно было бы использовать формулы, приведенные в § 1.

В режиме максимальной энергетической эффективности безразмерные параметры, характеризующие холодо- и теплопроизводительность, определяются выражениями (1-38) и (1-39).

Подставляя в эти выражения значения K_{S_1} и K_{S_2} из уравнений (2-1), (2-2), после преобразований получим следующее уравнение:

$$(\Theta_2')^2 - [\Theta_2 + \Theta_1' M - m(\Theta_1 - \Theta_1')M]\Theta_2' + [\Theta_2 M - m(\Theta_1 - \Theta_1')]\Theta_1' = 0. \qquad (5\text{-}18)$$

С точностью, достаточной для практики, можно считать, что величина M не зависит от плотности тока. Тогда (5-18) является квадратным уравнением относи-

тельно Θ_2'. В случае необходимости величины M и Θ_2' могут быть найдены как угодно точно методом последовательных приближений. После нахождения температур спаев Θ_1' и Θ_2' расчет ТТН производят в режиме максимальной энергетической эффективности в соответствии со схемой, приведенной в § 1.

3. В ряде случаев при заданных величинах производительности, температур окружающих сред и коэффициентов теплоотдачи на спаях необходимо определить зависимость между количеством полупроводникового материала и максимальным коэффициентом энергетической эффективности, достигаемым при заданных условиях. Расчет такой зависимости необходим для экоиомически обоснованного выбора конструкции термобатареи с оптимальным расходом полупроводникового материала [4]. С увеличением количества полупроводникового материала увеличиваются и капитальные затраты на конструкцию. Однако при этом повышается коэффициент энергетической эффективности ТТН, т. е. снижается количество потребляемой электроэнергии и, следовательно, уменьшаются эксплуатационные расходы. Если не существует ограничений на размеры термобатареи, расход полупроводникового материала должен быть выбран исходя из минимума суммарных затрат на ТТН, для чего и возникает необходимость сопоставления объема термоэлементов соответствующей ему величине максимального коэффициента энергетической эффективности.

Таким образом, задача сводится к отысканию значений тока питания и геометрических размеров термобатареи, которые при заданных величинах производительности, температур сред, коэффициентов теплоотдачи на спаях и объема (веса) термоэлектрического материала обеспечат достижение максимального коэффициента энергетической эффективности [19].

Данные, которые входят в условие задачи, позволяют считать, что составленные из них безразмерные комплексы m, Θ_1, $\Delta\Theta$ и K_{V_1} являются заданными параметрами. В этом случае холодильный коэффициент представляет собой функцию двух переменных ν и β, которые связаны дополнительным условием:

$$K_{S_1}(\nu, \beta)\cdot\beta^2 - K_{V_1} = 0, \qquad (5\text{-}19)$$

где K_{V_1} — заданная величина, а $K_{S_1}(\nu, \beta)$ определяется уравнением (2-3).

Решение задачи, т. е. нахождение оптимальных значений переменных $\nu = \nu_\varepsilon^0$ и $\beta = \beta_\varepsilon^0$, при которых $\varepsilon = \varepsilon_{max}$ и выполняется условие (5-19), может быть получено методом Лагранжа для определения условного экстремума функции нескольких переменных. Отметим, что заданной величине холодопроизводительности максимуму коэффициента энергетической эффективности соответствует минимум теплопроизводительности. Поэтому для решения удобнее искать минимум $K_{V_2}(\nu,\beta) = \beta^2 K_{S_2}(\nu, \beta)$ при дополнительном условии (5-19). Метод Лагранжа приводит к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial K_{V_2}(\nu, \beta)}{\partial \nu} + \Lambda \frac{\partial K_{V_1}(\nu, \beta)}{\partial \nu} = 0;\\ &\frac{\partial K_{V_2}(\nu, \beta)}{\partial \beta} + \Lambda \frac{\partial K_{V_1}(\nu, \beta)}{\partial \beta} = 0;\\ &K_{V_1}(\nu, \beta) - K_{V_1} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}20)$$

где Λ — неопределенный множитель Лагранжа. Функции $K_{V_{1,2}}(\nu, \beta)$ определяются соотношениями (2-3), (2-4) и (5-7). Первые положительные корни системы (5-20) — ν_ε^0 и β_ε^0 и будут искомыми значениями оптимальных параметров.

Следует отметить, что аналогичная система уравнений может быть записана и для решения предыдущей задачи; при этом необходимо в системе (5-20) заменить функцию $K_V(\nu, \beta)$ на $K_S(\nu, \beta)$. Однако решение системы (5-20) связано с определенными трудностями, так она включает в себя уравнение четвертой степени относительно ν. Поэтому решение задачи о нахождении оптимальной высоты термоэлементов при заданной площади термобатареи целесообразно выполнять описанным выше приближенным методом, т. е. с использованием уравнения (5-18).

Условия всех трех рассмотренных выше задач предусматривают ограничение одного из геометрических параметров — высоты термоэлементов, площади термобатареи или объема полупроводникового материала.

При увеличении каждого из этих параметров величины коэффициентов энергетической эффективности ε и μ монотонно возрастают и в пределе стремятся к своему максимальному теоретическому значению, которое определяется только температурами окружающих сред и параметром термоэлектрической добротности термоэлементов. Эти предельные значения для ε^* и μ^* выражаются следующим образом:

$$\varepsilon^*_{\text{макс}} = \frac{\theta_1}{\Delta\theta}\left[1 - \frac{2}{\theta_1}(M-1)\right]; \qquad (5\text{-}21)$$

$$\mu^*_{\text{макс}} = \frac{\theta_2}{\Delta\theta}\left[1 - \frac{2}{\theta_2}(M-1)\right]. \qquad (5\text{-}22)$$

6. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ И НАГРЕВАТЕЛЕЙ

При проектировании и эксплуатации различных термоэлектрических устройств необходимо учитывать ход нестационарных тепловых процессов, протекающих в период после включения питания и под действием различных возмущающих факторов (изменения внешней температуры, тепловой нагрузки, тока питания и т. д.). Нестационарные тепловые процессы в термобатареях имеют особенно существенное значение для работы термостатирующих устройств, так как они определяют время выхода в режим, точность поддержания заданной температуры.

Можно указать ряд конкретных задач по расчету нестационарного температурного поля в термобатарее. Наиболее важным из этих задач являются: 1) определение хода температуры в термобатарее при ступенчатой форме тока; 2) определение зависимости тока от времени, обеспечивающей наилучшим образом заданный ход температуры в охлаждаемом или нагреваемом объекте; 3) определение изменений температуры после установления стационарного режима под влиянием различных возмущающих воздействий.

Решение первой из указанных задач дает возможность определить изменение температуры термобатареи во времени после включения тока вплоть до установления стационарного состояния при $I = \text{const}$. Ряд вариантов решения этой задачи был опубликован в технической литературе. Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами решалось либо операционным методом [41, 44, 52, 53], либо на основе метода Фурье [45, 57, 59]. Следует сказать, что в упомянутых работах рассматривалась упрощенная модель, которая или вообще не учитывала тепловую нагрузку на спаях термобатареи [45, 59] или учитывала только теплоемкость коммутационной пластины и присоединенной к ней массы [41, 44, 57]. При анализе полученных решений в указанных работах в некоторых случаях даются неточные выводы. Ниже приводится расчет хода температуры на спаях термоэлемента при смешанной тепловой нагрузке с учетом теплоемкости, теплоотдачи в окружающую среду и действия постоянных источников тепла.

Вторая из отмеченных выше задач (по существу комплекс задач) направлена на определение режима питания термоэлементов, который бы обеспечил заданный или некоторый экстремальный временной ход температуры на спаях. Одним из вариантов этой задачи является определение такой зависимости тока питания $I(t)$ от времени, которая дает возможность получить наибольшее снижение температуры охлаждаемого тела. Рассматриваемая вариационная задача почти не исследована, имеются лишь некоторые предварительные результаты, о которых будет сказано ниже.

Третья из указанных задач возникла в связи с конструированием устройств для стабилизации температуры с применением термобатарей. В монографии [52] дан подробный анализ варианта задачи, допускающего линеаризацию уравнений. В указанной книге рассмотрено воздействие малых возмущений (изменений тока питания, температуры и тепловой нагрузки) на величину установившегося значения температуры.

Перейдем к изложению наиболее часто встречающегося на практике случая нестационарного процесса, возникающего после включения тока питания. Распределение температуры вдоль высоты элемента x в зависимости от времени t описывается уравнением теплопроводности:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\frac{\partial T}{\partial t} - j^2\rho. \qquad (6\text{-}1)$$

Так же как и при рассмотрении одномерного стационарного температурного поля, предполагаем, что боковые поверхности элемента адиабатно изолированы, теплофизические и электрические параметры обеих ветвей идентичны и не зависят от температуры. Считаем, что температура в начальный момент постоянна по всему объему термоэлемента, при этом температура горячего спая благодаря интенсивному теплообмену с окружающей средой постоянной температуры не изменяется со временем. Тогда начальные и граничные условия можно записать в виде

$$T|_{t=0} = T_0; \tag{6-2}$$

при $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = ejT + \frac{G}{S} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_1 (T - T_0) - q_н; \tag{6-3}$$

при $x = d$

$$T = T_0.$$

Здесь G — теплоемкость коммутационной пластины и присоединенной к ней массы; α_1 — приведенный коэффициент теплоотдачи; $q_н$ — тепловая нагрузка, приходящаяся на единицу площади холодных спаев. В общем случае мощность $q_н$ состоит из двух членов: мощности источников тепла, действующих в охлаждаемом материале $q_н$, и джоулева тепла, рассеиваемого на холодном спае — $j^2\rho_к$ ($\rho_к$ — контактное сопротивление на единицу площади).

Граничные условия (6-3) несколько схематизированы, так как предполагается, что тело, находящееся в контакте с холодными спаями, обладает достаточно большой теплопроводностью, такой, что перепадом температуры по нему можно пренебречь.

Далее перейдем к следующим безразмерным параметрам:

$$\Theta = ZT;\ \chi = \frac{x}{d};\ \mathrm{Fo} = \frac{at}{d^2};\ \mathrm{Bi}_1 = \frac{\alpha_1 d}{\lambda};\ \eta_1 = \frac{G_1}{cV};$$

$$K_н = q_н \frac{Zd}{\lambda};\ \xi_\rho = \frac{\rho_к}{\rho d};\ \left(K_н = K_н + \nu^2 \xi_\rho\right),$$

где a — коэффициент температуропроводности термоэлектрического материала; V — объем термоэлемента.

В безразмерных параметрах уравнение (6-1) с начальным и граничным условиями записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \chi^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial (\mathrm{Fo})} - \nu^2; \tag{6-1a}$$

$$\Theta|_{\mathrm{Fo}=0} = \Theta_0; \tag{6-2a}$$

при $\chi = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} = \nu\Theta + \eta_1 \frac{\partial \Theta}{\partial (\mathrm{Fo})} + \mathrm{Bi}_1 (\Theta - \Theta_0) + K_н; \tag{6-3a}$$

при $\chi = 1$

$$\Theta = \Theta_0.$$

Для решения уравнения (6-1а) применим операционный метод. При этом система (6-1а) — (6-3а) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\overline{\Theta}}{d\chi^2} = p\overline{\Theta} - \Theta_0 - \frac{\nu^2}{p}; \tag{6-1б}$$

при $\chi = 0$

$$\frac{d\overline{\Theta}}{d\chi} = (\nu + \mathrm{Bi}_1 + \eta_1 p)\,\overline{\Theta} - \eta_1 \Theta_0 - \frac{\mathrm{Bi}_1 \Theta_0 + K_н}{p}; \tag{6-3б}$$

при $\chi = 1$

$$\overline{\Theta} = \frac{\Theta_0}{p}.$$

Здесь $\overline{\Theta} = \int_0^\infty \Theta e^{-p\,\mathrm{Fo}}\, d\,(\mathrm{Fo})$.

Выражение для преобразованной по Лапласу температуры холодного спая получается следующим:

$$\overline{\Theta}(p)|_{\chi=0} = \frac{\Theta_0}{p} + \frac{\nu^2 \sqrt{p}\,(\mathrm{ch}\sqrt{p} - 1) - p\,(\Theta_0 \nu - K_н)\,\mathrm{sh}\sqrt{p}}{p^2 \left[\sqrt{p}\,\mathrm{ch}\sqrt{p} + (\nu + \mathrm{Bi}_1 + \eta_1 p)\,\mathrm{sh}\sqrt{p}\right]}. \tag{6-4}$$

Переход во временную область осуществляется по формуле Римана—Меллина и теореме о вычетах:

$$\Theta(\mathrm{Fo}) = \Theta_0 - \frac{\Theta_0 \nu - 0{,}5\nu^2 - K_н}{1 + \nu + \mathrm{Bi}_1} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[\delta_k (\Theta_0 \nu - K_н) \sin \delta_k - \nu^2 (1 - \cos \delta_k)\right] \exp\left(-\delta_k^2\, \mathrm{Fo}\right)}{\delta_k^2 \left[\delta_k (2\eta_1 + 1) \sin \delta_k + \left(\eta_1 \delta_k^2 - 1 - \nu - \mathrm{Bi}_1\right) \cos \delta_k\right]}. \tag{6-5}$$

Здесь δ_k — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\delta}{\eta_1\delta^2 - \nu - \mathrm{Bi}_1}. \qquad (6\text{-}6)$$

Из формулы (6-5) следует, что перепад температуры между спаями термоэлемента можно представить в виде

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_{\text{стац}} - f(\mathrm{Fo}), \qquad (6\text{-}5а)$$

где

$$f(\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp\left(-\delta_k^2\,\mathrm{Fo}\right). \qquad (6\text{-}7)$$

Ряд, стоящий в правой части (6-7), определяет скорость приближения температуры холодного спая к стационарному значению, причем

$$\Delta\Theta_{\text{стац}} = \frac{\Theta_0\nu - (0{,}5 + \xi_\rho)\,\nu^2 - K_{\text{н}}}{1 + \nu + \mathrm{Bi}_1}. \qquad (6\text{-}8)$$

В стационарном режиме при наличии теплоотдачи и тепловыделений на холодном спае максимальный перепад температуры на термоэлементе достигается при плотности тока ν_T°, величина которой

$$\nu_T^{\circ} = \frac{\left[B^2 + 2\Theta_0 B + 2K_{\text{н}}(1 + 2\xi_\rho)\right]^{\frac{1}{2}} - B}{1 + 2\xi_\rho}. \qquad (6\text{-}9)$$

При этом величина перепада температур

$$\Delta\Theta_{\text{стац}}^{\text{макс}} = \Theta_0 + B - \left[B^2 + 2\Theta_0 B + 2K_{\text{и}}(1 + 2\xi_\rho)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (6\text{-}10)$$

Здесь $B = (1 + \mathrm{Bi}_1)(1 + 2\xi_\rho)$.

Вычисления по формуле (6-5) предполагают знание корней уравнения (6-6). В табл. 1 помещены значения двух первых корней этого уравнения для широкого интервала изменений параметров $\nu + \mathrm{Bi}_1$ и η_1. Случай $\nu + \mathrm{Bi}_1 = 0$ и $\eta_1 = 0$ приводится как предельный. Так как имеет место последовательность $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \ldots$, причем $0 < \delta_1 < \pi$ и $\pi < \delta_2 < 2\pi$ и т. д., то при достаточно большом Fo ряд (6-7) быстро сходится.

Таблица 1

Корни характеристического уравнения $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{\delta}{\eta\delta^2 - \nu - \mathrm{Bi}_1}$

		$\nu + \mathrm{Bi}_1$						
		0	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
$\eta = 0$	δ_1	1,571	1,715	1,837	2,029	2,175	2,288	2,456
	δ_2	4,712	4,765	4,816	4,913	5,004	5,087	5,233
$\eta = 0{,}1$	δ_1	1,429	1,568	1,695	1,896	2,054	2,181	2,370
	δ_2	4,306	4,351	4,397	4,489	4,582	4,672	4,846
$\eta = 0{,}25$	δ_1	1,265	1,401	1,520	1,721	1,885	2,022	2,235
	δ_2	3,935	3,965	3,994	4,057	4,124	4,193	4,338
$\eta = 0{,}5$	δ_1	1,077	1,199	1,307	1,494	1,652	1,790	2,017
	δ_2	3,644	3,659	3,673	3,705	3,739	3,776	3,857
$\eta = 1{,}0$	δ_1	0,860	0,960	1,049	1,208	1,345	1,467	1,678
	δ_2	3,426	3,431	3,437	3,448	3,461	3,474	3,503

Продолжение

		$\nu + \mathrm{Bi}_1$					
		4,0	5,0	7,5	10	15	20
$\eta = 0$	δ_1	2,570	2,654	2,786	2,863	2,948	2,993
	δ_2	5,354	5,454	5,639	5,761	5,908	5,992
$\eta = 0{,}1$	δ_1	2,503	2,600	2,754	2,842	2,937	2,987
	δ_2	5,003	5,142	5,413	5,599	5,819	5,937
$\eta = 0{,}25$	δ_1	2,392	2,509	2,698	2,806	2,919	2,976
	δ_2	4,487	4,633	4,972	5,248	5,615	5,816
$\eta = 0{,}5$	δ_1	2,197	2,339	2,585	2,730	2,882	2,954
	δ_2	3,947	4,046	4,315	4,598	5,092	5,462
$\eta = 1{,}0$	δ_1	1,858	2,012	2,316	2,529	2,777	2,897
	δ_2	3,536	3,573	3,686	3,829	4,179	4,553

Из анализа уравнения (6-6) и табл. 1 следует, что рост теплоемкости тепловой нагрузки, т. е. рост η_1 приводит к уменьшению значений δ_k, т. е. к увеличению инерционности термоэлементов; рост плотности тока,

а также теплоотдачи Bi_1 оказывают противоположные влияние.

Предэкспоненциальные множители A_k также зависят от параметров η_1, ν и Bi_1, кроме того, на их значения влияют параметры Θ_0 и $K_н$. Зависимость A_1 от тока ν характеризуется наличием максимума, после чего A_1, монотонно уменьшаясь, переходит через нуль и становится отрицательным. Коэффициент A_2 монотонно растет с ν.

Таблица 2

Значения постоянных множителей $B'_к$ и $B''_к$

		$\nu + Bi_1$						
		0	0,25	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
$\eta = 0$	B'_1	0,8104	0,6144	0,4848	0,3270	0,2358	0,1782	0,1108
	B''_1	0,5160	0,4144	0,3454	0,2590	0,2064	0,1712	0,1264
	B'_2	0,0900	0,0868	0,0834	0,0766	0,0694	0,0608	0,0508
	B''_2	0,0190	0,0173	0,0156	0,0128	0,0102	0,0084	0,0056
$\eta = 0,1$	B'_1	0,8706	0,6788	0,5382	0,3730	0,2740	0,2092	0,1322
	B''_1	0,5304	0,4316	0,3600	0,9740	0,2206	0,1842	0,1374
	B'_2	0,0838	0,0840	0,0840	0,0816	0,0802	0,0768	0,0684
	B''_2	0,0296	0,0280	0,0262	0,0230	0,0200	0,0170	0,0124
$\eta = 0,25$	B'_1	0,9262	0,7240	0,5638	0,2960	0,3166	0,2480	0,1626
	B''_1	0,5364	0,4358	0,3524	0,2830	0,2310	0,1956	0,1494
	B'_2	0,0582	0,0598	0,0610	0,0632	0,0660	0,0672	0,0642
	B''_2	0,0354	0,0346	0,0338	0,0316	0,0298	0,0276	0,0218
$\eta = 0,5$	B'_1	0,9618	0,7608	0,6276	0,4608	0,3770	0,2872	0,2152
	B''_1	0,5348	0,4340	0,3678	0,2856	0,2104	0,2000	0,1694
	B'_2	0,0318	0,0324	0,0332	0,0358	0,0380	0,0402	0,0444
	B''_2	0,0334	0,0334	0,0334	0,0334	0,0330	0,0324	0,0308
$\eta = 1,0$	B'_1	0,9864	0,7748	0,6534	0,4920	0,3836	0,3162	0,2656
	B''_1	0,5264	0,4208	0,3608	0,2810	0,2270	0,1940	0,1764
	B'_2	0,0128	0,0128	0,0132	0,0140	0,0148	0,0156	0,0176
	B''_2	0,0260	0,0256	0,0258	0,0262	0,0266	0,0170	0,0276

Продолжение

		$\nu + Bi_1$					
		4,0	5,0	7,5	10	15	20
$\eta = 0$	B'_1	0,0752	0,0540	0,0280	0,0168	0,0068	0,0046
	B''_1	0,0996	0,0818	0,0558	0,0422	0,0280	0,0200
	B'_2	0,0410	0,0334	0,0208	0,0140	0,0072	0,0044
	B''_2	0,0038	0,0026	0,0012	0,0006	0,0002	0,0001
$\eta = 0,1$	B'_1	0,0898	0,0642	0,0326	0,0194	0,0088	0,0050
	B''_1	0,1086	0,0890	0,0604	0,0450	0,0296	0,0218
	B'_2	0,0592	0,0504	0,0330	0,0294	0,0106	0,0060
	B''_2	0,0088	0,0062	0,0028	0,0014	0,0004	0,0002
$\eta = 0,25$	B'_1	0,1134	0,0814	0,0410	0,0264	0,0104	0,0052
	B''_1	0,1198	0,0990	0,0672	0,0556	0,0318	0,0206
	B'_2	0,0654	0,0624	0,0498	0,0370	0,0190	0,0102
	B''_2	0,0184	0,0146	0,0076	0,0040	0,0012	0,0004
$\eta = 0,5$	B'_1	0,1338	0,1092	0,0574	0,0332	0,0138	0,0072
	B''_1	0,1192	0,1100	0,0778	0,0580	0,0366	0,0260
	B'_2	0,0502	0,0514	0,0516	0,0474	0,0412	0,0696
	B''_2	0,0300	0,0256	0,0180	0,0116	0,0120	0,0292
$\eta = 1,0$	B'_1	0,1788	0,1492	0,0088	0,0560	0,0240	0,0116
	B''_1	0,1288	0,1124	0,0864	0,0700	0,0468	0,0328
	B'_2	0,0198	0,0220	0,0294	0,0328	0,0356	0,0322
	B''_2	0,0280	0,0282	0,0286	0,0240	0,0150	0,0084

Для удобства практических расчетов предэкспоненциальных множителей A_1 и A_2 служит табл. 2, которая составлена для тех же значений параметров $\nu + Bi_1$ и η_1 что и табл. 1.

Коэффициенты A_k могут быть определены по формуле

$$A_k = (\Theta_0 \nu - K_н) B'_k - \nu^2 B''_k.$$

с помощью вспомогательных величин B'_k и B''_k, представленных в табл. 2 для первых двух членов ряда (6-5).

На графиках (рис. 19—22) представлен ход изменения значений коэффициентов A_1 и A_2, а также δ_1^2 и δ_2^2 в зависимости от отношения плотности тока ν к ее значению, обеспечивающему максимум $\Delta\Theta_{\text{стац}}$, т. е. к $\nu_т^0 \left(\bar{\nu} = \frac{\nu}{\nu_т^0}\right)$. Кривые представлены для некоторых характерных комбинаций параметров Bi_1 и η_1.

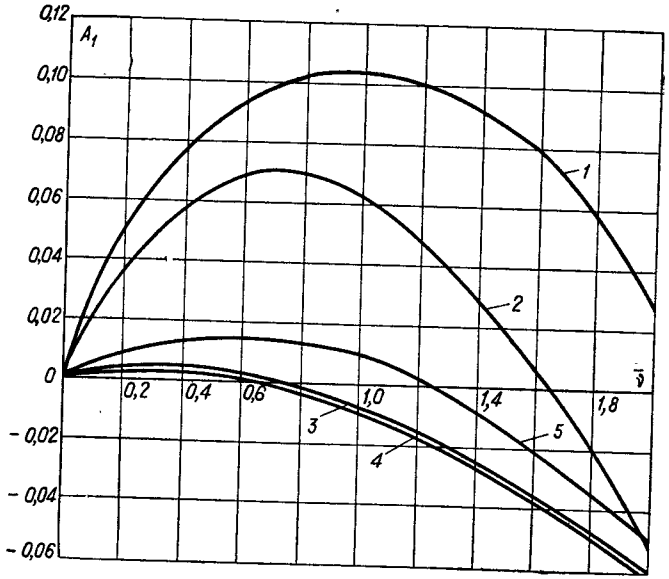


Рис. 19. Зависимость коэффициента A_1 от плотиостн тока $(\Theta_0 = 0{,}6)$

1 — $\mathrm{Bi}_1 = 0$; $\eta_1 = 1$; *2* — $\mathrm{Bi}_1 = 0$, $\eta_1 = 0$; *3* — $\mathrm{Bi}_1 = 5$, $\eta_1 = 0{,}1$; *4* — $\mathrm{Bi}_1 = 5$, $\eta_1 = 0$; *5* — $\mathrm{Bi} = 5$, $\eta_1 = 1$

В тех случаях, когда параметры Bi_1 и η_1 принимают предельные значения (близкие к нулю либо достаточно большие), легко определить аналитически соответствующие значения δ_k, а также A_k.

Так, при $\eta_1 \to 0$, $\nu + \mathrm{Bi}_1 \to 0$, $K_н = 0$:

$$\delta_k = \frac{\pi}{2}(2k-1); \quad A_k = 8\frac{\pi(2k-1)\Theta_0\nu + 2(-1)^k\nu^2}{(2k-1)^3\pi^3};$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \delta_2 = \frac{3}{2}\pi; \quad A_1 = 8\frac{\nu(\pi\Theta_0 - 2\nu)}{\pi^3},$$

При $\nu + \mathrm{Bi}_1 \gg 1$, $K_н = 0$:

$$\delta_k = k\pi; \quad A_k = \frac{2\nu^2[(-1)^k - 1]}{\pi^2 k^2(\nu + \mathrm{Bi}_1)};$$

$$\delta_1 = \pi, \quad \delta_2 = 2\pi; \quad A_1 = -\frac{4\nu^2}{\pi^2(\nu + \mathrm{Bi}_1)}, \quad A_2 = 0.$$

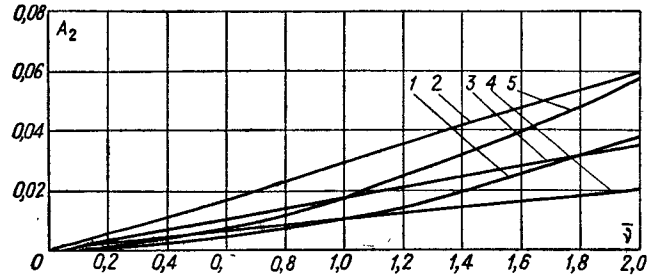


Рис. 20. Зависимость коэффициента A_2 от плотности тока $(\Theta_0 = 0{,}6)$

1 — $\mathrm{Bi}_1 = 0$, $\eta_1 = 1$; *2* — $\mathrm{Bi}_1 = 0$, $\eta_1 = 0$; *3* — $\mathrm{Bi}_1 = 5$; $\eta_1 = 0{,}1$; *4* — $\mathrm{Bi}_1 = 5$, $\eta_1 = 0$; *5* — $\mathrm{Bi}_1 = 5$, $\eta_1 = 1$

При $\eta_1 \gg 1$, $K_н = 0$:

$$\delta_1 = \left[\frac{1 + \nu + \mathrm{Bi}_1}{\eta_1}\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \delta_k|_{k\geqslant 2} = (k-1)\pi;$$

$$A_1 = \frac{\Theta_0\nu - 0{,}5\nu^2}{1 + \nu + \mathrm{Bi}_1}; \quad A_k|_{k\geqslant 2} = \frac{2\nu^2[1 + (-1)^k]}{\pi^4(k-1)^4\eta_1}.$$

Соответственно изменение температуры при достаточно больших значениях Fo определяется следующими соотношениями:

при $\eta_1 \to 0$, $\nu \to 0$, $\mathrm{Bi}_1 \to 0$, $K_н = 0$:

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_{\text{стац}} - 8\frac{\pi\Theta_0\nu - 2\nu^2}{\pi^3}\exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right); \quad (6\text{-}11)$$

при $\nu + \mathrm{Bi}_1 \gg 1$, $K_н = 0$:

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_{\text{стац}} + \frac{4\nu^2}{\pi^2(\nu + \mathrm{Bi}_1)}\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}); \quad (6\text{-}12)$$

при $\eta_1 \gg 1$:

$$\Delta\Theta = \Delta\Theta_{\text{стац}}\left[1 - \exp\left(-\frac{1 + \nu + \mathrm{Bi}_1}{\eta_1}\mathrm{Fo}\right)\right]. \quad (6\text{-}13)$$

Последнее выражение может быть получено и непосредственно из рассмотрения дифференциального уравнения, определяющего тепловой баланс на холодных спаях, если для теплового потока использовать соотношение (1-17), справедливое в общем случае лишь в стационарных условиях. Выражение, аналогичное (6-13), было получено указанным путем в работах [31, 43]; фактически соотношение (6-13) представ-

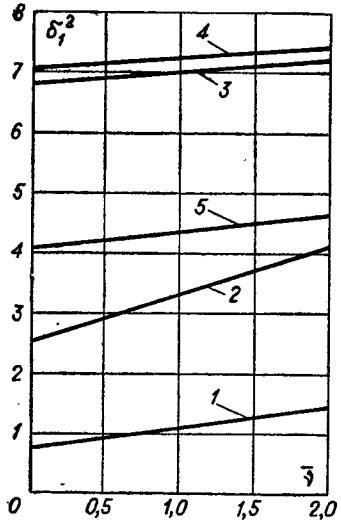


Рис. 21. Зависимость δ_1^2 от плотности тока ($\theta_0 = 0{,}6$)

1 — $Bi_1 = 0$, $\eta_1 = 1$; *2* — $Bi_1 = 0$; $\eta_1 = 0$; *3* — $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 0{,}1$; *4* — $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 0$; *5* — $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 1$

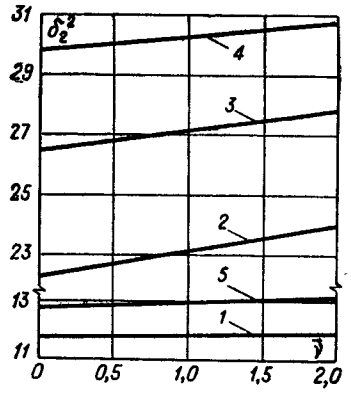


Рис. 22. Зависимость δ_2^2 от плотности тока ($\theta_0 = 0{,}6$)

1 — $Bi_1 = 0$, $\eta_1 = 1$; *2* — $Bi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$; *3* — $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 0{,}1$; *4* — $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 0$; *5* — $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 1$

ляет собой первое приближение, справедливое для больших значений критерия Фурье в условиях, когда теплоемкость охлаждаемого тела много больше теплоемкости термоэлементов.

Температура холодного спая в зависимости от силы тока приближается к стационарному состоянию сверху или снизу, т. е. монотонно или проходя через минимум. Условием, разграничивающим эти два случая, является равенство нулю коэффициента A_1:

$$\delta_1\left(\theta_0 - \frac{K_н}{\nu}\right)\sin\delta_1 - \nu(1-\cos\delta_1) = 0. \qquad (6\text{-}14)$$

Определение тока ν_0, удовлетворяющего условию (6-14), следует производить численно совместно с уравнением (6-6). Полученные при этом значения ν_0 интересно сравнить с оптимальными в стационарном режиме. Данные расчетов для ряда значений параметров η_1 и Bi_1 (при $\theta_0 = 0{,}6$ и $K_н = 0$) приведены в табл. 3. В частном случае, когда $\eta_1 \to 0$, $Bi_1 \to 0$ и $K_н \to 0$, значение ν_0 можно найти аналитически, при этом

$$\nu_0 = \frac{\theta_0 \arccos\left(-\dfrac{\theta_0}{1+\theta_0}\right)}{\sqrt{1+2\theta_0}}. \qquad (6\text{-}15)$$

Так как $\nu_т^0 = \sqrt{1+2\theta_0} - 1$, то

$$\frac{\nu_0}{\nu_т^0} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+2\theta_0}}\right)\arccos\left(-\frac{\theta_0}{1+\theta_0}\right).$$

Таблица 3

Соотношение между током ν_0 и $\nu_т^0$ при различной тепловой нагрузке на холодных спаях

η_1	Bi_1	$\nu_т^0$	ν_0	$\nu^* = \dfrac{\nu_0}{\nu_т^0}$
0	0	0,483	0,79	1,64
0,1	0	0,483	0,83	1,74
0,5	0	0,483	0,97	2,00
1	0	0,483	1,05	2,17
∞	0	0,483	1,20	2,48
0	0	0,483	0,79	1,64
0	1	0,530	0,66	1,25
0	5	0,573	0,37	0,65
0	10	0,584	0,24	0,41
0	∞	0,600	0	0
0	5	0,573	0,37	0,65
0,1	5	0,573	0,41	0,71
0,5	5	0,573	0,55	0,97
1	5	0,573	0,72	1,25
∞	5	0,573	1,20	2,09

Для рассматриваемого случая при любом Θ_0 отношение $\nu_0/\nu_т^0$ превышает $\pi/2$, т. е. заведомо больше единицы. Из данных табл. 3 следует, что увеличение теплоемкости нагрузки способствует увеличению ν_0, а теплоотдача уменьшает ν_0. Величина ν_0 может отличаться от $\nu_т^0$ как в сторону меньших, так и больших значений. Тем самым экстремум на кривой зависимости $T(t)$, возникающий, когда ток принимает значение $\nu = \nu_0$, может появиться как при токах, меньших оптимального (при достаточно больших значениях Bi_1), так и при значениях тока, превышающих оптимальное в стационарном режиме.

При достаточно больших значениях Fo для оценки разности $\Delta\Theta_{стац} - \Delta\Theta$ (Fo) можно ограничиться первым членом ряда (6-7). Как и в любом процессе, где стационарный режим достигается асимптотически по экспоненциальному закону, в рассматриваемом случае удобно использовать понятие постоянной времени τ_0, которая определяется как $\tau_0 = \frac{d^2}{a\delta_1^2}$. Так как постоянная времени обратно пропорциональна δ_1^2, то зависимость τ_0 от ν, Bi_1 и η_1 определяется зависимостью δ_1 от указанных параметров, т. е. τ_0 растет с η_1 и падает вместе с ν и Bi_1. Постоянная времени растет вместе с высотой элементов d. При $\eta_1 \gg 1$ и $\nu + Bi_1 \ll 1$ τ_0 растет пропорционально d (так как $\eta \sim d^{-1}$). При $\nu + Bi_1 \gg 1$ величина τ_0 пропорциональна d^2. В других случаях с учетом зависимости ν и Bi_1 от d связь между τ_0 и d имеет промежуточный характер.

Если плотность тока питания термоэлементов приближается к ν_0, то $A_1 \to 0$ и темп установления стационарного режима будет зависеть от второго члена ряда (6-7) и, соответственно, постоянная времени процесса определяется соотношением $\tau_0 = \frac{d^2}{a\delta_2^2}$. Так как $\delta_2 > \delta_1$, то режим, который можно назвать переходным от монотонного падения температуры со временем к изменению температуры с экстремумом, является наиболее «быстрым». В тех случаях, когда важно предельно уменьшить время установления температурного режима в охлаждаемом теле после включения тока питания, оптимальной плотностью тока является $\nu = \nu_0$. Естественно, эта рекомендация применима тогда, когда ток ν_0 обеспечивает достаточное снижение температуры.

Решение уравнения теплопроводности в форме (6-5) быстро сходится для достаточно больших значений критерия Fo. Для малых значений критерия Fo целесообразно использовать решение уравнения (6-1) в виде ряда по степеням Fo. Из формулы (6-4) можно получить разложение $\Theta(p)$ по степеням $p^{-\frac{1}{2}}$:

$$\overline{\Theta}(p) = \frac{\Theta_0}{p} - \frac{\Theta_0\nu - K_н}{\eta_1}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{\eta_1\nu^2 + \Theta_0\nu - K_н}{\eta_1^2 p^{\frac{5}{2}}} -$$

$$- \frac{(\nu\Theta_0 - K_н)[1 - \eta_1(\nu + Bi_1)] + \eta_1\nu^2}{\eta_1^3 p^3} +$$

$$+ \frac{(\nu\Theta_0 - K_н)[1 - 2\eta_1(\nu + Bi_1)] + \eta_1\nu^2[1 - \eta_1(\nu + Bi_1)]}{\eta_1^4 p^{\frac{7}{2}}} - \ldots,$$

что во временной области соответствует ряду

$$\Theta(Fo) = \Theta_0 - \frac{\Theta_0\nu - K_н}{\eta_1}Fo + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\nu\Theta_0 - K_н + \eta_1\nu^2}{\eta_1^2}Fo^{\frac{3}{2}} -$$

$$- \frac{(\nu\Theta_0 - K_н)[1 - \eta_1(\nu + Bi_1)] + \eta_1\nu^2}{2\eta_1^3}Fo^2 + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \frac{(\nu\Theta_0 - K_н)[1 - 2\eta_1(\nu + Bi_1)] + \eta_1\nu^2[1 - \eta_1(\nu + Bi_1)]}{\eta_1^4}Fo^{\frac{5}{2}} - \ldots \quad (6\text{-}16)$$

Аналогично можно найти разложение Θ (Fo) по степеням Fo для случая пренебрежимо малой теплоемкости η_1:

$$\Theta(Fo) = \Theta_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\Theta_0\nu - K_н)\sqrt{Fo} +$$

$$+ [(\nu\Theta_0 - K_н)(\nu + Bi_1) + \nu^2]Fo -$$

$$- \frac{4}{3\sqrt{\pi}}[(\Theta_0\nu - K_н)(\nu + Bi_1) + \nu^2](\nu + Bi_1)^2 Fo^{\frac{3}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}[(\nu\Theta_0 - K_н)(\nu + Bi_1) + \nu^2](\nu + Bi_1)^2 Fo^2 - \ldots \quad (6\text{-}17)$$

Сравнение формул (6-16) и (6-17) показывает, что наличие тепловой нагрузки в виде теплоемкости приводит к замедленному темпу охлаждения в начальный период. Первые два члена разложения (6-17) совпадают с соответствующими членами разложения для случая охлаждения пластин от источника постоянной производительности, равной $\nu\Theta_0 - K_н$ [24].

Для оценки точности расчетов температуры по аналитическим формулам с использованием первых членов соответствующих рядов можно воспользоваться данными численного решения уравнения (6-1). Приведенные ниже графики построены по результатам расчета на ЭВМ, дискретизация проводилась по обоим аргументам — Fo и χ на основе построения неявной разностной схемы. На рис. 23 представлен ход изменения температуры на холодной стороне батареи со временем для различных значений тока питания $\left(\bar{\nu} = \frac{\nu}{\nu_т^0}\right)$ и для различных сочетаний исходных параметров η_1 и Bi_1 ($\Theta_0 = 0{,}6$; $K_н = 0$). Рис. 23, *а* соответствует случаю $\eta_1 = 0$ и $\mathrm{Bi}_1 = 0$.

Из графиков можно сделать те же выводы, что из анализа соответствующих формул. Большим значениям тока соответствуют кривые с большим углом подъема в начале координат. Кривые для токов, меньших ν_0, имеют монотонный характер (для рассматриваемого случая $\nu_0 = 1{,}64\ \nu_т^0$, причем, если $\nu < \nu_т^0$, то кривые не пересекаются; при $\nu > \nu_т^0$ кривые начинают пересекать предшествующие. Когда ток превышает ν_0, температура, изменяясь со временем, проходит через экстремум. Наибольшую скорость установления стационарного перепада для представленного семейства зависимостей имеет кривая 5 — $\nu = 1{,}5\ \nu_т^0$ (близко к значению ν_0).

Из рис. 23, *б* следует, что при большой теплоемкости нагрузки ($\eta_1 = 1$, $\mathrm{Bi}_1 = 0$) даже при $\bar{\nu} = 2$ не наблюдается экстремума на кривой $\Delta\Theta = f(\mathrm{Fo})$ (для этого случая $\nu_0 = 2{,}17\ \nu_т^0$). Наибольший темп установления стационарного режима среди представленных кривых наблюдается при $\bar{\nu} = 2$ (что близко к ν_0).

Для больших значений коэффициента теплоотдачи

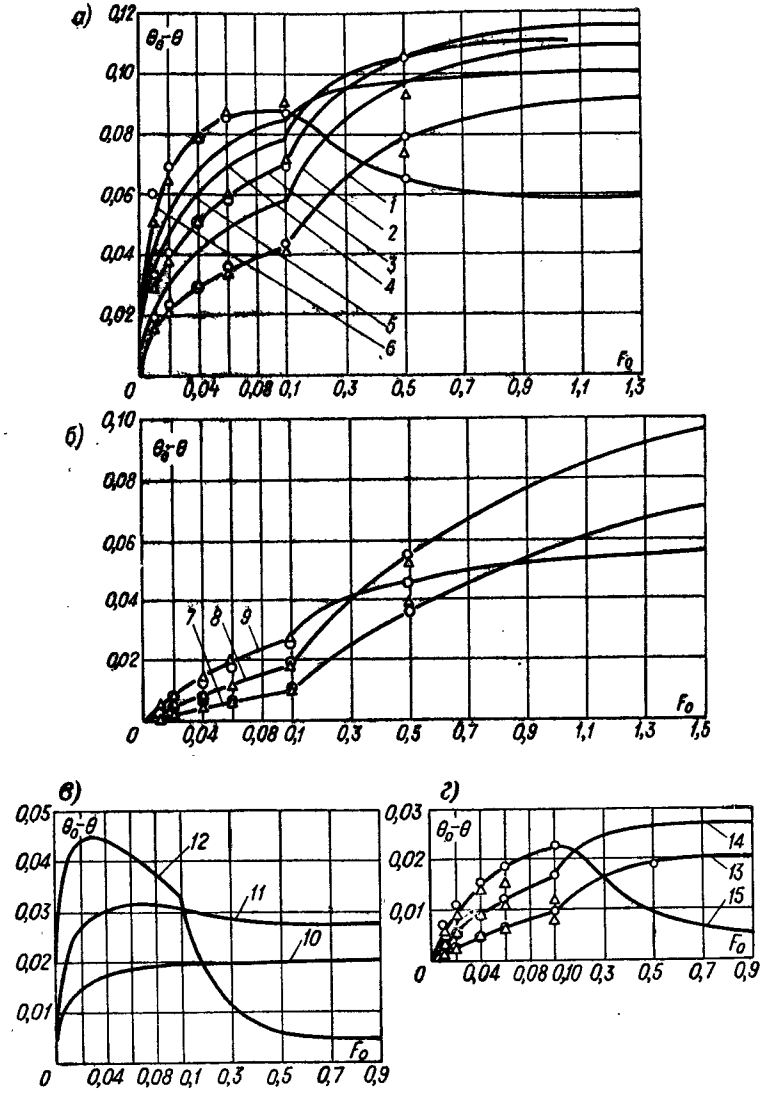


Рис. 23. Изменение перепада температур на термоэлементе со временем при различных плотностях тока ($\Theta_0 = 0{,}6$): *а* — $\eta_1 = 0$; $\mathrm{Bi}_1 = 0$; *б* — $\eta_1 = 1$; $\mathrm{Bi}_1 = 0$; *в* — $\eta_1 = 0$; $\mathrm{Bi}_1 = 5$; *г* — $\eta_1 = 1$; $\mathrm{Bi}_1 = 5$

1 — $\bar{\nu} = 0{,}5$; *2* — $\bar{\nu} = 0{,}75$; *3* — $\bar{\nu} = 1{,}0$; *4* — $\bar{\nu} = 1{,}25$; *5* — $\bar{\nu} = 1{,}5$; *6* — $\bar{\nu} = 2{,}0$; *7* — $\bar{\nu} = 0{,}5$; *8* — $\bar{\nu} = 1{,}0$; *9* — $\bar{\nu} = 1{,}5$; *10* — $\bar{\nu} = 0{,}5$; *11* — $\bar{\nu} = 1{,}0$; *12* — $\bar{\nu} = 1{,}5$; *13* — $\bar{\nu} = 0{,}5$; *14* — $\bar{\nu} = 1{,}0$; *15* — $\bar{\nu} = 2{,}0$

(рис. 23, *в*; $Bi_1 = 5$, $\eta_1 = 0$) значение $\nu^* < 1$ и, соответственно, кривые $\Delta\theta$ (Fo) для $\nu = \nu_\tau^0$ имеют экстремум. Снижение температуры в точках экстремума превосходит наибольший перепад в стационарных условиях.

Случай $Bi_1 = 5$ и $\eta_1 = 1$ (рис. 23, *г*) характерен взаимной компенсацией влияния теплоотдачи и теплоемкости нагрузки, в результате чего экстремум на кривых возникает при $\nu = 1{,}25$.

Для случаев, представленных на рис. 23, были проведены наряду с расчетом на ЭВМ, исходя из уравнения (6-1), также вычисления изменений $\Delta\theta$ со временем Fo на основе использования формул (6-5) и (6-17) ($\eta_1 = 0$) или (6-16) ($\eta_1 \neq 0$). На рисунках кружками отмечены данные расчета по формуле (6-5), а треугольниками — по формулам (6-16) или (6-17). Результаты сопоставлений показывают, что для интервала изменений критерия $Fo = 0 \div 0{,}05$ хорошее совпадение обеспечивают три члена ряда (6-16) или (6-17), а при $Fo > 0{,}04$ достаточную точность аппроксимации дают стационарный и два члена временного ряда (6-5).

Все вышеизложенное относилось к работе термоэлементов в режиме охлаждения. Очевидно, что полученные результаты можно использовать также для расчета процесса нагрева, если температура холодных спаев поддерживается на постоянном уровне. При этом достаточно в соответствующих формулах заменить знак перед членами, содержащими ν в нечетной степени. Параметры δ_k будут, соответственно, корнями уравнения:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\delta}{\eta_1\delta^2 + \nu - Bi_1}.$$

Значения δ при нагреве будут ниже, чем при охлаждении при тех же значениях ν, η_1 и Bi_1, а величина постоянной времени τ_0 больше. Для определения параметров δ_1 и δ_2 можно пользоваться данными табл. 1, при этом в качестве входного параметра следует брать $Bi_1 - \nu$. Предэкспоненциальные множители A_1 и A_2 можно рассчитывать на основе табл. 2 с учетом изменения знака ν.

Рассмотрим далее нестационарные тепловые процессы в термоэлементе, когда на горячей стороне коэффициент теплоотдачи имеет конечное значение и учитывается теплоемкость радиатора горячих спаев G_2. В этом случае граничные условия к уравнению теплопроводности (6-1а) в безразмерной форме имеют вид:
при $\chi = 0$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\chi} = \nu\theta + \eta_1\frac{\partial\theta}{\partial\,Fo} + Bi_1(\theta - \theta_0); \qquad (6\text{-}18)$$

при $\chi = 1$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\chi} = \nu\theta - \eta_2\frac{\partial\theta}{\partial\,Fo} - Bi_2(\theta - \theta_0).$$

Здесь $\eta_2 = \frac{G_2}{cV}$; $Bi_2 = \frac{\alpha_2 d}{\lambda}$.

При решении задачи операционным методом получаем значение преобразованной по Лапласу температуры холодных спаев:

$$\begin{aligned}\overline{\theta}(p) = {} & \{\sqrt{p}\,[p(\theta_0\nu - \eta_2\nu^2) + (\nu - Bi_2)\nu^2](\operatorname{ch}\sqrt{p} - 1) - \\ & - p\nu^2\operatorname{sh}\sqrt{p} - p\theta_0\nu(\nu - Bi_2 - \eta_2 p)\operatorname{sh}\sqrt{p}\} \times \\ & xp^{-2}\{(\nu + Bi_1 + \eta_1 p)(\nu - Bi_2 - \eta_2 p)\operatorname{sh}\sqrt{p} - \\ & - p\operatorname{sh}\sqrt{p} - \sqrt{p}[Bi_1 + Bi_2 + \\ & + (\eta_1 + \eta_2)p]\operatorname{ch}\sqrt{p}\}^{-1} + \frac{\theta_0}{p}. \qquad (6\text{-}19)\end{aligned}$$

Выражение (6-19) содержит полюс в точке $p = 0$ и полюса, соответствующие корням уравнения:

$$\begin{aligned}& (\nu + Bi_1 + \eta_1 p)(\nu - Bi_2 - \eta_2 p)\operatorname{sh}\sqrt{p} - p\operatorname{sh}\sqrt{p} - \\ & - \sqrt{p}\,[Bi_1 + Bi_2 + (\eta_1 + \eta_2)p]\operatorname{ch}\sqrt{p} = 0. \qquad (6\text{-}20)\end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение, определяющее поведение термоэлектрического устройства, является устойчивым, если вещественная часть всех корней уравнения (6-20) отрицательна. В противном случае температура после включения тока не достигает стационарного состояния и беспредельно растет со временем. Из уравнения (6-20) получаем следующее необходимое условие устойчивости

$$\nu^2 + \nu(Bi_1 - Bi_2) - Bi_1 - Bi_2 - Bi_1Bi_2 < 0. \qquad (6\text{-}21)$$

Если параметры термоэлемента обеспечивают устойчивость, то можно, перейдя к временной области, получить зависимость

$$\Theta(\mathrm{Fo}) = \Theta_0 - \frac{(\mathrm{Bi}_2 - \nu)(\Theta_0\nu - 0{,}5\nu^2) - \nu^2}{(\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2) + (\mathrm{Bi}_2 + \nu)(\mathrm{Bi}_2 - \nu)] +}$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\delta_k [C_{k_1}(1 - \cos\delta_k) - C_{k_2}\delta_k \sin\delta_k]}{\delta_k^2 [C_{k_3}\delta_k \sin^2\delta_k - C_{k_4}\delta_k \cos^2\delta_k + C_{k_5}\sin 2\delta_k]} \times$$

$$\times \exp(-\delta_k^2 \mathrm{Fo}), \qquad (6\text{-}22)$$

где

$$C_{k_1} = (\nu - \mathrm{Bi}_2)\nu^2 - \delta_k^2(\Theta_0\nu - \eta_2\nu^2);$$

$$C_{k_2} = \nu^2 + \Theta_0\nu(\nu - \mathrm{Bi}_2) + \delta_k^2\eta_2\Theta_0\nu;$$

$$C_{k_3} = 2 + (\nu + \mathrm{Bi}_1 - \eta_1\delta_k^2)(2\eta_2 + 1) -$$

$$- (\nu - \mathrm{Bi}_2 + \eta_2\delta_k^2)(2\eta_1 + 1);$$

$$C_{k_4} = \mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 - \delta_k^2(\eta_1 + \eta_2);$$

$$C_{k_5} = \delta_k^2 + \frac{3}{2}\delta_k^2(\eta_1 + \eta_2) - \frac{1}{2}(\mathrm{Bi}_1 - \mathrm{Bi}_2) +$$

$$+ (\nu + \mathrm{Bi}_1 - \eta_1\delta_k^2)(\nu - \mathrm{Bi}_2 + \eta_2\delta_k^2);$$

δ_k — корни уравнения:

$$\mathrm{tg}\,\delta = \delta \frac{\mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 - \delta^2(\eta_1 + \eta_2)}{\delta^2 + (\eta_1\delta^2 - \nu - \mathrm{Bi}_1)(\mathrm{Bi}_2 - \eta_2\delta^2 - \nu)}. \qquad (6\text{-}23)$$

Уравнение (6-23) дает возможность проследить влияние параметров Bi_2 и η_2 на величину δ_1, определяющую в основном темп охлаждения. Представляет интерес случай, когда значение Bi_2 либо η_2 велико, тогда температура горячего спая мало меняется со временем. Оказывается, что при большой теплоемкости η_2 рост теплоотдачи Bi_2 приводит к увеличению δ_1 и, следовательно, темпа охлаждения. Влияние изменения теплоемкости η_2 на корни уравнения (6-23) при большой теплоотдаче Bi_2 имеет менее тривиальный характер. Можно

показать, что при соблюдении неравенства $\sqrt{\frac{\nu + \mathrm{Bi}_1}{\eta_1}} < \frac{\pi}{2}$ рост теплоемкости η_2 сопровождается ростом корня δ_1, а при $\sqrt{\frac{\nu + \mathrm{Bi}_1}{\eta_1}} > \frac{\pi}{2}$ увеличение теплоемкости η_2 приводит к уменьшению δ_1.

Выражение для нестационарного хода температуры при ступенчатой форме тока в общем случае может быть представлено лишь в виде ряда; это обстоятельство сильно затрудняет его анализ. В частности, остается невыясненным вопрос о зависимости экстремального значения перепада температуры в ходе нестационарного процесса охлаждения от силы тока питания и соотношения между этой величиной и максимальным перепадом температуры в стационарном режиме.

Для получения выражения $\Delta\Theta$ в функции времени удобно использовать модель термоэлемента с бесконечной длиной ветвей. При этом следует учесть, что при достаточно малой длительности процесса охлаждения после включения тока температурное поле у горячего спая еще не начинает сказываться на величину температуры холодного спая. Пока критерий Фурье $\mathrm{Fo} = \frac{at}{d^2}$ много меньше единицы, ход температуры на холодном спае не зависит от длины ветвей термоэлемента, поэтому ее можно считать бесконечной. Граничными условиями уравнения теплопроводности (6-1) в этом случае являются:

при $x = 0$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = ejT - \alpha_1(T_0 - T) + \frac{G_1\partial T}{S\partial t} - j^2\rho_k - q_н; \qquad (6\text{-}24)$$

при $x \to \infty$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \qquad (6\text{-}25)$$

Граничное условие на холодном спае учитывает тепло Пельтье, теплоотдачу в окружающую среду, теплоемкость охлаждаемого тела, джоулево тепло, выделяемое на контактах, и мощность постоянных источников тепла.

Рассмотрим прежде всего случай, когда холодный спай изолирован от окружающей среды [1], тогда при $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = ejT.$$

Приведем уравнение (6-1) к безразмерному виду, причем в качестве эквивалентной длины используем соотношение $d_э = \frac{\lambda}{ej}$, тогда

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \chi^2} + 1 = \frac{\partial \Theta}{\partial (\mathrm{Fo}_э)}; \qquad (6\text{-}26)$$

$$\Theta \big|_{\mathrm{Fo}_э = 0} = \Theta_0; \qquad (6\text{-}27)$$

при $\chi = 0$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} = \Theta;$$

при $\chi \to \infty$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \chi} = 0. \qquad (6\text{-}28)$$

Здесь $\chi = \frac{x}{d_э} = \frac{ejx}{\lambda}$; $\mathrm{Fo}_э = \frac{at}{d_э^2} = \frac{e^2 j^2 at}{\lambda^2}$.

Решая уравнение (6-26) операционным методом получим изменение температуры холодного спая со временем:

$$\Delta\Theta(\mathrm{Fo}) = (1 + \Theta_0)\left(1 - \exp \mathrm{Fo}_э \operatorname{erfc} \sqrt{\mathrm{Fo}_э}\right) - 2\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}_э}{\pi}}. \qquad (6\text{-}29)$$

Таким образом, изменение температуры холодного спая зависит только от параметра $\mathrm{Fo}_э$, т. е. от произведения $j^2 t$. Выражение (6-29) имеет максимум при определенном значении аргумента $\mathrm{Fo}_э = \mathrm{Fo}_э^*$, определяемом уравнением

$$\sqrt{\pi \mathrm{Fo}_э^*} \exp \mathrm{Fo}_э^* \operatorname{erfc} \sqrt{\mathrm{Fo}_э^*} = \frac{\Theta_0}{1 + \Theta_0}. \qquad (6\text{-}30)$$

Так при $\Theta_0 = 0{,}6$ значение $\mathrm{Fo}_э^* = 0{,}081$, а величина $\Delta\Theta_{макс} = 0{,}0895$, увеличение тока j вызывает соответствующее уменьшение времени наступления максимума и наоборот. Величина максимума $\Delta\Theta$ не зависит от тока. Наибольший перепад температуры на элементе в стационарном режиме

$$\Delta\Theta'_{макс} = 1 + \Theta_0 - \sqrt{1 + 2\Theta_0};$$

при

$$\Theta_0 = 0{,}6 \quad \Delta\Theta'_{макс} = 0{,}117.$$

Наибольший перепад температуры в нестационарном режиме меньше максимального перепада температуры в стационарных условиях. Так, при $\Theta_0 = 0{,}6$ соотношение между этими величинами равно 0,766. Указанные результаты верны и для термоэлемента с конечной длиной ветвей d, если критерий Фурье $\frac{at}{d^2} \ll 1$. Максимальное падение температуры на холодных спаях для полубесконечного элемента наступает при $\mathrm{Fo}_э = \mathrm{Fo}_э^* = \frac{e^2 j^2 at^*}{\lambda^2}$, т. е. при $\frac{at^*}{d^2} = \left(\frac{\lambda}{ejd}\right)^2 \mathrm{Fo}_э^*$.

Таким образом, условие $\frac{at}{d^2} \ll 1$ сводится к неравенству $\nu \gg \sqrt{\mathrm{Fo}_э^*}$. Как было показано выше [табл. 3, формула (6-15)], минимальное значение тока ν_0, при котором появляется экстремум, составляет 0,791, а $\sqrt{\mathrm{Fo}_э^*} = 0{,}28$. Начиная со значения $\nu = \nu_0$, величины перепада температуры в точке экстремума, рассчитанные для моделей с ветвями конечной и полубесконечной длины, практически совпадают. На рис. 24 представлен ход изменения температуры $\Delta\Theta_{стац}$ в зависимости от ν (кривая *1*) и значения $\Delta\Theta$ в точке экстремума функции $\Delta\Theta(t)$ (кривая *2*) для термоэлемента с конечной длиной ветвей. При $\nu = \nu_0$ максимум появляется при $t \to \infty$; с увеличением ν значение t^* уменьшается и при $\nu \to \infty$, $t^* \to 0$.

В общем случае, когда граничное условие на холодном спае определяется соотношением (6-24), также нетрудно получить аналитическое выражение, дающее зависимость $\Delta\Theta$ от времени. Однако при этом $\Delta\Theta$ яв-

ляется уже функцией не только безразмерных параметров Θ_0, и Fo, но и безразмерных комплексов:

$$\mathrm{Bi}_э = \frac{\alpha d_э}{\lambda} = \frac{\alpha}{ej}; \quad \eta = \frac{G}{cSd_э} = \frac{Gej}{c\lambda S};$$

$$\xi_\rho = \frac{\rho_k}{\rho d_э} = \frac{\rho_k e j}{\rho\lambda}; \quad K_н = \frac{q_н Z d_э}{\lambda} = \frac{q_н Z}{ej}.$$

Влияние термических сопротивлений на спае с ростом тока падает, влияние теплоемкости и электрического сопротивления растет.

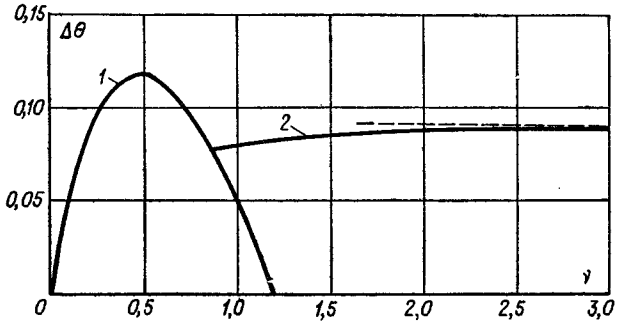


Рис. 24. Перепад температуры иа термоэлементе с теплоизолированным холодным спаем в зависимости от плотности тока ($\Theta_0 = 0{,}6$)

1 — в стацнонарном режнме; *2* — максимальный во времени

Рис. 25 характеризует для случая $\mathrm{Bi}_1 = 5$ зависимость $\Delta\Theta_{стац}$ (кривая *1*) и $\Delta\Theta$ в точке максимума (кривая *2*) от тока ν. Минимальное значение тока ν_0, при котором появляется максимум, составляет 0,37, при этом $\nu_0 < \nu_т^0$. В рассматриваемом случае перепад температуры в точке максимума несколько превышает стационарный. При $\nu \to \infty$ величина $\Delta\Theta$ совпадает с перепадом температур при $\mathrm{Bi} = 0$. Кривая *2* построена по данным вычислений на ЭВМ; результаты расчета по формуле для термоэлемента с полубесконечными ветвями дают практически тождественные результаты, начиная с $\nu \approx 1$.

Наличие теплоемкости и контактного сопротивления, как уже указывалось, приводит к тому, что значение $\Delta\Theta$ в точке максимума падает с ростом тока. В случае наличия контактного сопротивления экстремум имеет место только при достаточно малых токах при $\xi_\rho < \Theta_0$ или $j < \frac{\rho\lambda\Theta_0}{\rho_k e}$, когда величина тепла Пельтье превышает в начальный момент времени джоулево тепло на контактах холодного спая.

В условиях нестационарного режима, если плотность питающего тока определенным образом меняется со

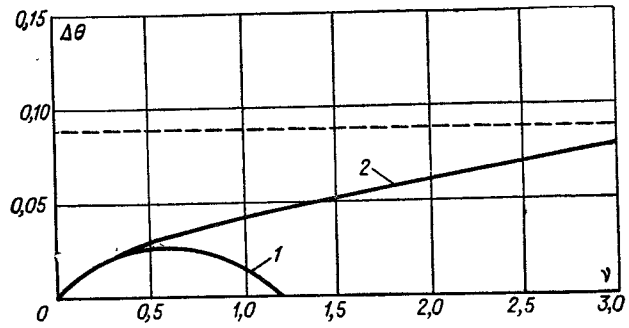


Рис. 25. Перепад температуры иа термоэлементе в зависимости от плотности тока с учетом теплоотдачи на холодном спае ($\Theta_0 = 0{,}6$; $\mathrm{Bi}_1 = 5$; $\eta_1 = 0$; $\xi_\rho = 0$; $K_н = 0$). *1* — в стационарном режиме; *2* — максимальный во времени

временем $j = f(t)$, можно достичь в течение некоторого периода более глубокого охлаждения, чем в стационарном режиме. На это обстоятельство впервые было обращено внимание в работе Л. С. Стильбанса и Н. А. Федорович [41], причем были получены экспериментальные данные, показывающие возможность снижения температуры на холодном спае ниже того предельного значения, которое достигается при $j = \mathrm{const}$. В работе [56] выполнен расчет оптимального изменения тока от времени, обеспечивающего наибольшее снижение температуры. Однако в этом расчете принят ряд необоснованных предположений, например, тепло Пельтье считается независимым от температуры.

Для определения оптимальной зависимости тока от времени можно воспользоваться в качестве первого при-

ближения одномерной моделью термоэлемента с ветвями полубесконечной длины, обладающими постоянными и одинаковыми термофизическими характеристиками. В этом случае изменение температуры по-прежнему определяется уравнением (6-1) и граничными условиями (6-24), (6-25), причем $j = j(t)$ есть функция времени. Будем нормировать плотность тока и обозначим безразмерный ток:

$$\nu(\mathrm{Fo}) = \frac{ed_э}{\lambda} j(\mathrm{Fo}) = \frac{j(\mathrm{Fo})}{j_0} \quad (j_0 = \mathrm{const}).$$

Тогда уравнение теплопроводности приобретет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\chi^2} = \frac{\partial\Theta}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \nu^2. \tag{6-31}$$

Граничные условия:

при $\chi = 0$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\chi} = \nu\Theta - \mathrm{Bi}_1(\Theta_0 - \Theta) + \eta\frac{\partial\Theta}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \xi_\rho\nu^2 - K_и;$$

при $\chi \to \infty$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\chi} = 0, \tag{6-32}$$

где χ, Fo, Bi, η, ξ_ρ, $K_и$—те же безразмерные комплексы, которые использовались ранее, причем $d_э = \frac{\lambda}{ej_0}$. Применяя преобразование Лапласа, получаем для (6-31), (6-32):

$$\frac{d^2\overline{\Theta}}{d\chi^2} = p\overline{\Theta} - \Theta_0 - \overline{\nu^2}; \tag{6-33}$$

при $\chi = 0$

$$\frac{d\overline{\Theta}}{d\chi} = \overline{\nu\Theta} - \mathrm{Bi}_1\left(\frac{\Theta_0}{p} - \overline{\Theta}\right) + \eta\left(p\overline{\Theta} - \Theta_0\right) - \xi_\rho\overline{\nu^2} - \frac{K_и}{p}. \tag{6-34}$$

Отсюда

$$\overline{\Theta}(0) = \frac{\Theta_0}{p} - \frac{\overline{\nu\Theta} - \left(\xi_\rho + p^{-\frac{1}{2}}\right)\overline{\nu^2} - K_и p^{-1}}{\eta p + \sqrt{p} + \mathrm{Bi}}. \tag{6-35}$$

Используем теорему, устанавливающую соответствие между сверткой оригиналов и произведением изображений:

$$f_1(p)\cdot f_2(p) = L\left[\int_0^t F_1(\tau)\cdot F_2(t-\tau)\,d\tau\right],$$

причем $f_i(p) = L[F_i(t)]$; L — символ преобразования Лапласа.

Тогда

$$\Delta\Theta = \Theta_0 - \Theta(0) = (1 - 4\eta\,\mathrm{Bi})^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_0^{\mathrm{Fo}}\left[\nu(\tau)\left(\Theta - \xi_\rho\nu(\tau)\right)\right]\times\right.$$

$$\times\left[A_1\varphi\left(A_1\sqrt{\mathrm{Fo}-\tau}\right) - A_2\varphi\left(A_2\sqrt{\mathrm{Fo}-\tau}\right)\right]d\tau -$$

$$-\int_0^{\mathrm{Fo}}\nu^2(\tau)\left[\varphi\left(A_2\sqrt{\mathrm{Fo}-\tau}\right) - \varphi\left(A_1\sqrt{\mathrm{Fo}-\tau}\right)\right]d\tau -$$

$$\left. - K_н\left[\frac{1}{A_1}\varphi\left(A_1\sqrt{\mathrm{Fo}}\right) - \frac{1}{A_2}\varphi\left(A_2\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)\right]\right\}. \tag{6-36}$$

Здесь

$$A_{1,2} = 1 \pm (1 - 4\eta\,\mathrm{Bi})^{\frac{1}{2}};$$

$$\varphi(U) = \exp(U^2)[1 - \Phi(U)]$$

$\Phi(U)$ — интеграл вероятности.

Интегральное уравнение (6-36) дает в общем виде связь между изменением температуры холодного спая Θ (0, Fo) и током питания ν. На основе этого уравнения или исходного дифференциального уравнения (6-31) должна быть решена вариационная задача об оптимальной зависимости тока от времени. Указанная задача может иметь различную постановку. Можно разыскивать оптимальное управление — зависимость $j(t)$, которая создает либо наибольшее снижение температуры за заданное время, либо обеспечивает определенный ход изменения температуры спаев со временем, либо позволяет достичь заданной температуры за наименьшее время или с наименьшей затратой энергии и т. д.

Для приведения уравнения теплопроводности с граничными условиями к безразмерному виду в качестве эквивалентного размера можно использовать не только соотношение $d_э = \frac{\lambda}{ej_0}$, но также и выражения

$d'_э = \frac{\rho_к}{\rho}$ или $d''_э = \frac{\lambda}{\alpha}$, соответственно, при $\rho_к \neq 0$ и $\alpha \neq 0$. Введение эквивалентной длины $d'_э$ или $d''_э$ при соблюдении указанных условий более целесообразно, чем использование $d_э$, так как это позволяет сократить на единицу число безразмерных параметров в граничном условии (6-32).

В статье Г. А. Гринберга [7] рассмотрен частный вид уравнения (6-36) для случая идеально теплоизолированного спая термоэлемента и отсутствия тепловой нагрузки ($\eta = 0$, $\mathrm{Bi} = 0$, $\xi_\rho = 0$, $K = 0$). Тогда выражение (6-36) приобретает вид

$$\Theta_0 - \Theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{\nu(\tau)\,\Theta(\tau)}{\sqrt{\mathrm{Fo} - \tau}}\, d\tau - \int_0^{\mathrm{Fo}} \nu^2(\tau)\, d\tau. \qquad (6\text{-}37)$$

При заданном характере изменения плотности тока ν со временем выражение (6-37) является интегральным уравнением типа Вольтерра, причем зависимость Θ от времени может быть определена аналитическим или численным методами. Из уравнения (6-37) следует, что ход температуры на холодном спае зависит лишь от характера изменения тока со временем. Абсолютная величина тока (масштаб тока j_0) влияет только на масштаб времени. В работе [7] не ставилась задача определения оптимальной зависимости тока от времени, а рассматривалось на некоторых примерах влияние изменения тока со временем на ход температуры на спаях термоэлемента. Это позволило, в частности, оценить потенциальные возможности, которые дает варьирование плотности тока со временем для увеличения перепада температуры на спаях.

Используя обозначение $\Delta\Theta = \Theta_0 - \Theta(0)$, можем свести уравнение (6-37) к виду

$$\Delta\Theta = \frac{\Theta_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{\nu(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\mathrm{Fo} - \tau}} - \int_0^{\mathrm{Fo}} \nu^2(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{\nu(\tau)\,\Delta\Theta}{\sqrt{\mathrm{Fo} - \tau}}\, d\tau. \qquad (6\text{-}38)$$

Для расчета $\Delta\Theta$ при заданной зависимости ν (Fo), учитывая, что $\Delta\Theta \ll 1$, можно вначале пренебречь в (6-38) последним слагаемым и далее использовать метод последовательных приближений. Для расчета более глубоких охлаждений целесообразно считать заданным не ток ν (Fo), а функцию

$$\Pi(\mathrm{Fo}) = \nu(\mathrm{Fo})\,\Theta(\mathrm{Fo}), \qquad (6\text{-}39)$$

т. е. тепловыделение Пельтье (в безразмерной форме). Полагаем

$$\Psi(\mathrm{Fo}) = \int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{\Pi(\tau)}{\sqrt{\mathrm{Fo} - \tau}}\, d\tau. \qquad (6\text{-}40)$$

Подставляем (6-39) и (6-40) в (6-37) и дифференцируем по Fo:

$$\frac{d\Theta}{d\,\mathrm{Fo}} = \frac{\Pi^2(\mathrm{Fo})}{\Theta^2(\mathrm{Fo})} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d\Psi(\mathrm{Fo})}{d(\mathrm{Fo})}. \qquad (6\text{-}41)$$

Последнее выражение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка для Θ. При заданной функции Π (Fo) нужно найти значение $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_m$, при котором $\frac{d\Theta}{d\,\mathrm{Fo}} = 0$, что соответствует предельно достижимому охлаждению. В этой точке будет иметь место соотношение

$$\Theta_{\min} = \pi^{\frac{1}{4}}\, \Pi(\mathrm{Fo}_m) \left[\frac{d\Psi(\mathrm{Fo}_m)}{d(\mathrm{Fo}_m)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (6\text{-}42)$$

Пусть, например, теплопоглощение Пельтье — степенная функция времени: $\Pi(\mathrm{Fo}) = k\,\mathrm{Fo}^n$ (k и n — постоянные). Тогда

$$\Psi(\mathrm{Fo}) = \frac{k\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)}\, \mathrm{Fo}^{n+\frac{1}{2}}, \qquad (6\text{-}43)$$

где $\Gamma(U)$ — гамма-функция. При этом уравнение (6-41) приводится к виду:

$$\frac{d\Theta}{d\,\mathrm{Fo}} = \frac{k^2\,\mathrm{Fo}^{2n}}{\Theta^2} - k\,\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}\, \mathrm{Fo}^{n-\frac{1}{2}} \qquad (6\text{-}44)$$

с начальным условием $\Theta(0) = \Theta_0$. Численное интегрирование уравнения (6-44) при $\Theta_0 = 0{,}616$ и $n = 0{,}1;\ 1;\ \infty$ дало для $\Delta\Theta_{макс}$ соответственно значения 0,092; 0,114 и 0,129. В стационарных условиях для термоэлемента с ветвями конечной длины $\Delta\Theta_{макс} = \Theta_0 + 1 - (1 + 2\Theta_0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}122$. Создается впечатление, что даже значительное изменение формы тока (ток, слабо изменяющийся со временем при $n = 0$, ток, растущий по закону, близкому к линейному при $n = 1$, и круто возрастающий при $n \gg 1$) не позволяет добиться заметного изменения глубины охлаждения. В работе [7] показано, что тем не менее принципиально возможно получить сколь угодно близкие к абсолютному нулю значения $\Theta_{мин}$. Если, например, теплопоглощение Пельтье подчиняется закону

$$\Pi(\mathrm{Fo}) = k\,[\mathrm{Fo}_0 - \mathrm{Fo}]^{-\frac{1}{2}} \qquad (6\text{-}45)$$

$$0 \leqslant \mathrm{Fo} < \mathrm{Fo}_0$$

(k и Fo_0 — постоянные), то

$$\Psi(\mathrm{Fo}) = k \ln \frac{\sqrt{\mathrm{Fo}_0} + \sqrt{\mathrm{Fo}}}{\sqrt{\mathrm{Fo}_0} - \sqrt{\mathrm{Fo}}}. \qquad (6\text{-}46)$$

Уравнение (6-41) принимает вид

$$\frac{d\Theta}{d\,\mathrm{Fo}} = \frac{k}{\mathrm{Fo}_0 - \mathrm{Fo}}\left(\frac{k}{\Theta^2} - \sqrt{\frac{\mathrm{Fo}_0}{\pi\,\mathrm{Fo}}}\right). \qquad (6\text{-}47)$$

Необходимо проинтегрировать это уравнение до такого значения $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_m$, при котором $\frac{d\Theta}{d\,\mathrm{Fo}} = 0$.

При этом

$$\Theta_{\min} = \sqrt{k}\left(\frac{\pi\,\mathrm{Fo}_m}{\mathrm{Fo}_0}\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (6\text{-}48)$$

Так как $\frac{\mathrm{Fo}_m}{\mathrm{Fo}_0} < 1$, то

$$0 < \Theta_{min} < \sqrt{k\sqrt{\pi}}.$$

Из рассмотренного примера следует, что температура Θ_m может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения k. Однако при малых k убывание Θ при возрастании Fo от нуля вначале идет очень медленно и лишь при $\mathrm{Fo} \to \mathrm{Fo}_0$ начинается крутой спад Θ. Так, при $\Theta_0 = 0{,}616$ и $k = 0{,}35$ даже $\Theta = 0{,}7\ \Theta_0$ достигается при $\mathrm{Fo} = 0{,}9995\ \mathrm{Fo}_0$. Использование режима, определяемого соотношением (6-45), для получения глубокого охлаждения практически невозможно. Однако полученный результат имеет существенный теоретический интерес, так как показывает возможность получения с помощью «идеального» термоэлемента (адиабатные условия, отсутствие источников тепла на холодном спае, независимость физических характеристик от температуры) сколь угодно низких значений температуры. Аналогичные выводы были получены в работе [56].

В реальных конструкциях термоэлементов всегда существует некоторое, хотя и относительно небольшое, контактное сопротивление. Контактный слой, а также охлаждаемый объект имеют определенную теплоемкость. В этих условиях оптимальный ток уже не может достигать больших значений с тем, чтобы джоулево тепло на спаях не превышало теплопоглощения Пельтье. Для решения задачи о выборе оптимального управления — плотности тока $j(t)$ в общем случае, когда справедливы граничные условия вида (6-32) на холодном спае, следует применять методы, которые разрабатываются в настоящее время для нахождения оптимальных управляющих воздействий для систем, содержащих объекты с распределенными параметрами. Однако решения подобных задач для рассматриваемой системы до сих пор не опубликованы.

В стационарных условиях при отсутствии теплоотдачи с боковой поверхности геометрическая форма ветвей элементов не влияет на их характеристики. В условиях нестационарного режима форма элемента, определяющая распределение плотности тока по высоте, будет существенно сказываться на эффективности. Поэтому в общем случае задача о нахождении оптимального управления сводится к нахождению зависимости $j(t, x) = j_1(t) \cdot j_2(x)$; при этом распределение температуры внутри термоэлемента определяется уравнением теплопроводности для обобщенного конуса.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ НАСОСЫ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ ВДОЛЬ СПАЕВ ТЕРМОБАТАРЕИ

7. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В предыдущей главе были рассмотрены основные соотношения для расчета энергетических характеристик ТТН при условии постоянства температуры на спаях термобатареи. Однако это условие справедливо лишь для некоторых случаев практического применения полупроводникового охлаждения и нагрева. К ним в первую очередь могут быть отнесены термоэлектрические выпарные установки, так как изменение агрегатного состояния теплоносителя на спаях термобатареи происходит при постоянной температуре. Кроме того, сюда относятся полупроводниковые охладители и нагреватели, находящиеся в непосредственном контакте с охлаждаемым и нагреваемым неподвижным объектом, а также ТТН, охлаждающие и нагревающие объем жидкости или газа, при условии, что циркуляция последних происходит в направлении, перпендикулярном поверхности термобатареи.

В то же время существует обширный класс полупроводниковых ТТН, в которых имеет место изменение температуры теплоносителей вдоль поверхностей термобатареи, поглощающих и выделяющих тепло. Сюда относятся охладители и нагреватели потоков жидкости, полупроводниковые кондиционеры, воздухоохладители и т. п., словом, все термоэлектрические устройства, в которых циркуляция теплоносителей происходит вдоль спаев термобатареи.

Особенность расчета указанных устройств заключается в том, что в данном случае термоэлементы в термобатарее работают в индивидуальном температурном режиме. Если все термоэлементы соединены последовательно, т. е. через них проходит одинаковый ток, то энергетические характеристики их будут отличны друг от друга. Вследствие этого результаты расчета одной термопары нельзя распространить на всю термобатарею в целом.

Схематически рассматриваемый тип ТТН можно представить как плоскую перегородку, составленную из идентичных по размерам и физическим свойствам термоэлементов, одна поверхность которой обтекается охлаждаемой жидкостью, а другая — жидкостью, отбирающей тепло от горячих спаев. По существу в этом случае ТТН является своеобразным теплообменником-рекуператором, в котором на поверхности стенки, разделяющей потоки теплоносителей, происходит дополнительное выделение и поглощение тепла Пельтье, а в объеме стенки выделение джоулева тепла.

По аналогии с обычными рекуператорами в термоэлектрических теплообменниках могут иметь место различные виды взаимного движения теплоносителей. Прежде всего рассмотрим случай, когда обе жидкости, омывающие поверхность стенки, текут параллельно в одном и том же направлении. Такая схема движения называется прямотоком. На рис. 26 показана принципиальная схема изменения температур обоих теплоносителей по мере их движения вдоль омываемой поверхности в направлении оси x. Выделим элемент поверхности длиной dx и шириной, равной ширине термобатареи, и составим для него уравнение теплового баланса в стационарных условиях.

Количество тепла, передаваемое от охлаждаемой жидкости к холодной поверхности стенки,

$$dQ_1 = \alpha_1 (T_1 - T_1') \, L dx, \qquad (7\text{-}1)$$

где L — ширина термобатареи.

При этом жидкость на участке длиной dx охлаждается на величину dT_1:

$$dQ_1 = -W_1 dT_1. \qquad (7\text{-}2)$$

Значение W_1 представляет собой полную теплоемкость жидкости, протекающей вдоль холодной стороны

стенки в единицу времени, и иазывается водяным эквивалентом жидкости. Тогда справедливо уравнение:

$$W_1 \frac{dT_1}{dx} = \alpha_1 L (T_1' - T_1). \qquad (7\text{-}3)$$

Аналогично для нагреваемой жидкости можно написать:

$$W_2 \frac{dT_2}{dx} = \alpha_2 L (T_2' - T_2). \qquad (7\text{-}4)$$

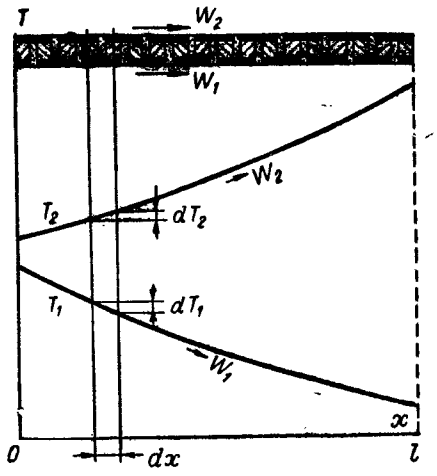


Рис. 26. Принципиальная схема изменения температуры теплоносителей в ТТН при прямотоке

Поскольку температуры поверхностей выделениого элементарного участка dx можно считать постоянными, уравнения теплового баланса на этих поверхностях (спаях термобатареи) в стационарных условиях запишутся аналогично случаю, рассмотренному в гл. 1:

$$\alpha_1 (T_1 - T_1') = ejT_1' - \frac{1}{2} j^2 \rho d - \frac{\lambda}{d} (T_2' - T_1'); \qquad (7\text{-}5)$$

$$\alpha_2 (T_2' - T_2) = ejT_2' + \frac{1}{2} j^2 \rho d - \frac{\lambda}{d} (T_2' - T_1'). \qquad (7\text{-}6)$$

Уравнения (7-3) — (7-6), характеризующие режим работы ТТН при охлаждении и нагревании потоков

жидкости, справедливы при некоторых допущениях. Относительно характеристик термоэлементов, как обычно, предполагаем, что они не зависят от температуры. Кроме того, принимаем, что размеры термоэлементов малы по сравнению с общей длиной термобатареи, вследствие чего изменение температуры теплоносителей и спаев термобатареи можно считать непрерывным вдоль оси x. Принимаем также, что перемешивание в потоке жидкости достаточно интенсивно и можно учитывать лишь среднюю температуру в каждом сечении потока. Тепловые потоки в осевом направлении, обусловленные теплопроводностью, предполагаются как в жидкости, так и в термобатарее пренебрежимо малыми. Возможность пренебрежения осевыми потоками тепла в теплообменниках подтверждается как экспериментами, так и оценками аналитического характера [25, 38].

Коэффициенты теплоотдачи принимаем постоянными по всей площади термобатареи, жидкость считаем несжимаемой и ее теплоемкость не зависящей от температуры. Наконец, пренебрегаем потерями тепла в окружающую среду, так как для компактных теплообменников с большими удельными тепловыми потоками эти потери обычно составляют 1—2% от общей тепловой нагрузки. Все эти ограничения общеприняты при анализе тепловых режимов теплообменных аппаратов и достаточно хорошо согласуются с реальными условиями работы рассматриваемых ТТН.

Уравнения (7-3) — (7-6) могут быть представлены в следующей безразмерной форме [12, 13]:

$$\frac{d\Theta_1}{dX} = N (\Theta_1' - \Theta_1); \qquad (7\text{-}7)$$

$$\frac{d\Theta_2}{dX} = \frac{\eta}{m} N (\Theta_2' - \Theta_2); \qquad (7\text{-}8)$$

$$\Theta_1 - \Theta_1' = \beta \left(\nu \Theta_1' - \frac{\nu^2}{2} - \Delta\Theta' \right); \qquad (7\text{-}9)$$

$$\Theta_2' - \Theta_2 = m\beta \left(\nu \Theta_2' + \frac{\nu^2}{2} - \Delta\Theta' \right), \qquad (7\text{-}10)$$

где $X = \frac{x}{l}$; $N = \frac{\alpha_1}{W_1} S$; $\eta = \frac{W_1}{W_2}$;

l — длина термобатареи вдоль потока теплоносителей.

Обозначим также:

$$b = \frac{k}{W_1} S;$$

$$k = \left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d}{\lambda} + \nu\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \frac{\nu\lambda}{\alpha_1\alpha_2 d}\right)\right]^{-1},$$

k может быть определен как обобщенный коэффициент теплопередачи. При отсутствии электрического тока в цепи термобатареи ($\nu = 0$) $k = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)^{-1}$ — известное выражение для коэффициента теплопередачи через плоскую стенку.

Исключая в (7-7) и (7-8) значения температур спаев Θ_1' и Θ_2', получим систему дифференциальных уравнений, определяющих изменение температуры теплоносителей вдоль координаты X:

$$\frac{d\Theta_1}{dX} = b\left\{[\nu^2 m\beta - (1+\nu)]\,\Theta_1 + \Theta_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu^2}{2}[1 + (2-\nu)\,m\beta]\right\}; \qquad (7\text{-}11)$$

$$\frac{d\Theta_2}{dX} = \eta b\left\{[\nu^2\beta - (1-\nu)]\,\Theta_2 + \Theta_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu^2}{2}[1 + (2+\nu)\,\beta]\right\}. \qquad (7\text{-}12)$$

Поскольку температуры теплоносителей на входе в ТТН $\Theta_1^{\text{н}}$ и $\Theta_2^{\text{н}}$ заданы граничные условия могут быть записаны в следующем виде:

$$X = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_1^{\text{н}};$$

$$X = 0, \quad \Theta_2 = \Theta_2^{\text{н}}. \qquad (7\text{-}13)$$

Аналогичные уравнения для распределения температуры вдоль потоков могут быть получены в случае, когда нагреваемая и охлаждаемая жидкости движутся параллельно навстречу друг другу; такую схему принято называть противотоком (рис. 27).

Уравнения, характеризующие распределение температуры вдоль термобатареи в случае противотока, аналогичны выражениями для прямотока. Необходимо лишь в левой части уравнений (7-4), (7-8) и (7-12) изменить знак на противоположный. Это обусловлено тем, что при противотоке направление движения нагреваемой жидкости противоположно принятому направлению оси X. Граничные условия в случае противотока

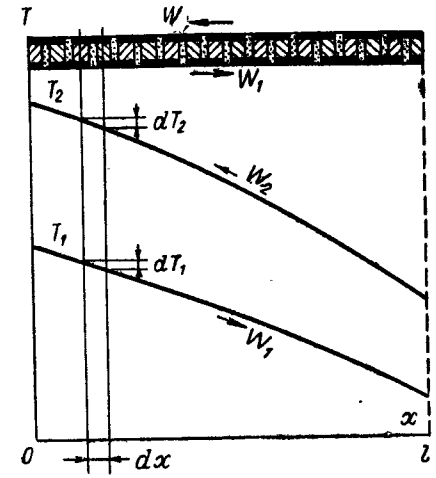


Рис. 27. Принципиальная схема изменения температуры теплоносителей в ТТН при противотоке

также определяются заданием температур потоков на входе в ТТН:

$$X = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_1^{\text{н}};$$

$$X = 1, \quad \Theta_2 = \Theta_2^{\text{н}}. \qquad (7\text{-}14)$$

Если в уравнениях (7-11) и (7-12) положить $\nu = 0$ (ток отсутствует), то их можно привести к известному выражению для изменения перепада температур вдоль поверхности обычного теплообменника-рекуператора:

$$\frac{d(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1} = -\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) k dS. \qquad (7\text{-}15)$$

Таким образом, рассмотренные уравнения характеризуют распределение температур в теплоносителях вдоль поверхности теплообменного аппарата с учетом конкретных закономерностей действия источников и стоков тепла на поверхности и в объеме стенки, разделяющей потоки.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕПЛОНОСИТЕЛЯХ И НА СПАЯХ ТТН ВДОЛЬ НАПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОВ

Изменение температуры охлаждаемой и нагреваемой жидкостей вдоль направления их движения может быть получено из решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами (7-11) — (7-12) и граничными условиями (7-13) или (7-14).

Прямоток

В общем виде решение системы уравнений (7-11) — — (7-12) для прямотока запишется следующим образом [12, 13]:

$$\Theta_1(X) = \frac{1}{\psi}\left[\Theta_1^*(\psi \operatorname{ch}\psi X - v \operatorname{sh}\psi X) + \right.$$

$$\left. + \Theta_2^* b \operatorname{sh}\psi X\right] \exp(-uX) - 1 + \frac{\nu}{2}; \qquad (8\text{-}1)$$

$$\Theta_2(X) = \frac{1}{\psi}\left[\Theta_2^*(\psi \operatorname{ch}\psi X + v \operatorname{sh}\psi X) + \right.$$

$$\left. + \Theta_1^* b\eta \operatorname{sh}\psi X\right] \exp(-uX) - 1 - \frac{\nu}{2}, \qquad (8\text{-}2)$$

где $\Theta_1^* = \Theta_1^н + 1 - \frac{\nu}{2}$; $\Theta_2^* = \Theta_2^н + 1 + \frac{\nu}{2}$;

$$1 + \nu - \nu^2 m\beta = H_1; \qquad (8\text{-}3)$$

$$1 - \nu - \nu^2\beta = H_2; \qquad (8\text{-}4)$$

$$u = \frac{b}{2}(H_1 + \eta H_2); \qquad (8\text{-}5)$$

$$v = \frac{b}{2}(H_1 - \eta H_2); \qquad (8\text{-}6)$$

$$\psi = (v^2 + \eta b^2)^{\frac{1}{2}}; \qquad (8\text{-}7)$$

Полное изменение температуры охлаждаемой жидкости при прохождении через ТТН равно разности температур на входе и на выходе:

$$\Delta\Theta_1 = \Theta_1|_{X=0} - \Theta_1|_{X=1} =$$

$$= \Theta_1^*\left[1 - \left(\operatorname{ch}\psi - \frac{v}{\psi}\operatorname{sh}\psi\right)\exp(-u)\right] -$$

$$- \Theta_2^* \frac{b}{\psi} \operatorname{sh}\psi \exp(-u). \qquad (8\text{-}8)$$

Повышение температуры в потоке нагреваемой жидкости

$$\Delta\Theta_2 = \Theta_2|_{X=1} - \Theta_2|_{X=0} =$$

$$= \Theta_2^*\left[\left(\frac{v}{\psi}\operatorname{sh}\psi + \operatorname{ch}\psi\right)\exp(-u) - 1\right] +$$

$$+ \Theta_1^* \frac{b\eta}{\psi} \operatorname{sh}\psi \exp(-u). \qquad (8\text{-}9)$$

Можно показать, что в некоторых случаях температура теплоносителей, протекающих через ТТН, изменяется немонотонно. Такой характер изменения температуры может возникнуть в связи с наличием противоположно действующих факторов — тепла Пельтье и кондуктивного теплового потока по ветвям термопары, соотношение между которыми меняется вдоль термобатареи. Поэтому о протекании процессов охлаждения и нагрева в ТТН в отличие от обычных теплообменников-рекуператоров нельзя судить только по величине общего перепада температур в потоках теплоносителей. Для того чтобы получить полную картину охлаждения и нагрева, необходимо проанализировать влияние параметров ТТН и режима его питания на изменение температуры вдоль поверхности термобатареи.

Результаты такого анализа, основанного на исследовании поведения функций $\Theta_1(X)$ и $\Theta_2(X)$ в интервале $0 \leqslant X \leqslant 1$, показывают, что могут существовать пять различных характерных вариантов изменения температуры теплоносителей вдоль поверхностей термобатареи. Рассмотрим эти варианты.

$$1)\ \frac{\Theta_1^*}{\Theta_2^*} \leqslant \frac{\psi(u - v)\operatorname{ch}\psi - (\psi^2 - uv)\operatorname{sh}\psi}{b\eta(\psi \operatorname{ch}\psi - u \operatorname{sh}\psi)}. \qquad (8\text{-}10)$$

При этом условии температура жидкости на горячих спаях монотонно понижается, а на холодных растет (рис. 28, *а*). Условие (8-10) означает, что разность между температурами охлаждаемого и нагреваемого теп-

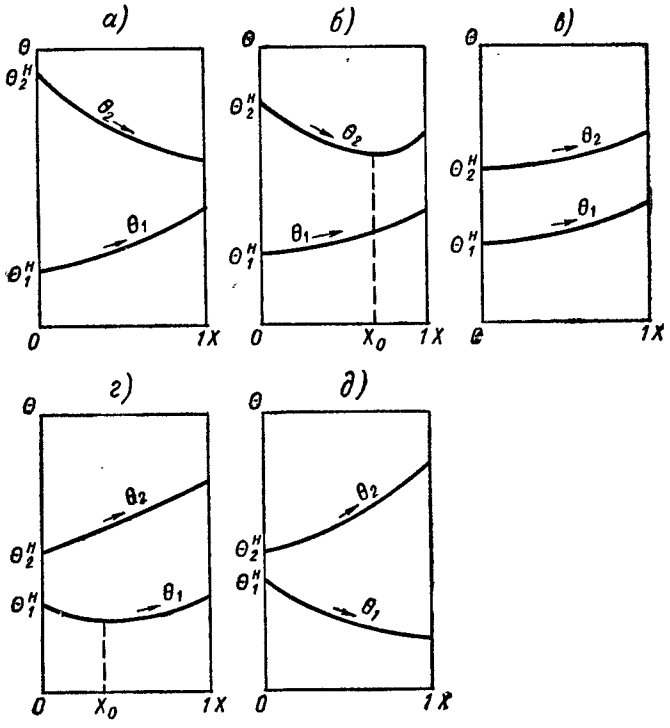


Рис. 28. Характерные варианты распределения температуры теплоносителей вдоль поверхности термобатарен при прямотоке

лоносителей на входе термобатареи достаточно велика, поэтому поток тепла за счет теплопроводности термобатареи превышает потоки тепла, обусловленные эффектами Пельтье и Джоуля.

В этом случае ТТН является аналогом прямоточного теплообменника-рекуператора, а роль термоэлектрических эффектов мала.

$$2)\ \frac{\psi(u-v)\operatorname{ch}\psi-(\psi^2-uv)\operatorname{sh}\psi}{b\eta(\psi\operatorname{ch}\psi-u\operatorname{sh}\psi)}<\frac{\theta_1^*}{\theta_2^*}<\frac{u-v}{b\eta}. \quad (8\text{-}11)$$

В этом случае температура жидкости на холодных спаях по-прежнему монотонно возрастает вдоль термобатареи, а температура жидкости на горячих спаях вначале снижается, достигает минимума, а затем начинает повышаться (рис. 28, *б*). Значение координаты, соответствующее минимуму температуры потока жидкости со стороны горячих спаев, определяется выражением

$$X_0=\frac{1}{\psi}\operatorname{Arth}\frac{\theta_2^*\psi(u-v)-\theta_1^*\psi b\eta}{\theta_2^*(\psi^2-uv)-\theta_1^*ub\eta}. \quad (8\text{-}12)$$

Условие (8-12) означает, что соотношения между параметрами ТТН таковы, что, начиная с некоторого значения $X=X_0$, положительный поток тепла к теплоносителю на горячих спаях за счет эффектов Пельтье и Джоуля превышает отрицательный поток за счет теплопроводности, поэтому температура на горячих спаях начинает повышаться.

$$3)\ \frac{u-v}{b\eta}\leqslant\frac{\theta_1^*}{\theta_2^*}\leqslant\frac{b}{u+v}. \quad (8\text{-}13)$$

В этом случае по всей длине термобатареи температуры обоих теплоносителей монотонно возрастают, (рис. 28, *в*). Характер изменения температур объясняется тем, что на горячих спаях выделение джоулева тепла и тепла Пельтье превышает его отвод за счет теплопроводности термобатареи, а на холодных спаях приток за счет теплопроводности и выделение джоулева тепла превышают поглощение тепла за счет эффекта Пельтье.

$$4)\ \frac{b}{u+v}<\frac{\theta_1^*}{\theta_2^*}<\frac{b(\psi\operatorname{ch}\psi-u\operatorname{sh}\psi)}{\psi(u+v)\operatorname{ch}\psi-(\psi^2+uv)\operatorname{sh}\psi}. \quad (8\text{-}14)$$

При выполнении этого условия температура жидкости на горячих спаях монотонно возрастает вдоль термобатареи, а температура жидкости на холодных спаях вначале снижается, проходит через минимум, затем на-

чинает возрастать (рис. 28, *г*). Значение $X = X_0$, соответствующее минимальной температуре потока жидкости на холодных спаях, определяется следующим выражением:

$$X_0 = \frac{1}{\psi} \operatorname{Arth} \frac{\Theta_1^* \psi (u + v) - \Theta_2^* \psi b}{\Theta_1^* (\psi^2 + uv) - \Theta_2^* ub}. \qquad (8\text{-}15)$$

При $X < X_0$ поглощение тепла на холодных спаях превышает приток его, что и обеспечивает охлаждение жидкости. При $X > X_0$ наблюдается обратная картина, так как по ходу жидкости все время возрастает кондуктивный тепловой поток через термобатарею, поскольку увеличивается перепад температур между холодными и горячими спаями.

$$\text{б)} \quad \frac{\Theta_1^*}{\Theta_2^*} \geqslant \frac{b (\psi \operatorname{ch} \psi - u \operatorname{sh} \psi)}{\psi (u + v) \operatorname{ch} \psi - (\psi^2 + uv) \operatorname{sh} \psi}. \qquad (8\text{-}16)$$

Температура жидкости на горячих спаях при этом монотонно возрастает вдоль направления движения, а на холодных монотонно снижается (рис. 28, *д*). Указанный характер изменения температуры теплоносителей означает, что при выполнении условия (8-16) количество тепла, выделяемое и поглощаемое за счет эффекта Пельтье, является наибольшей составляющей в уравнениях теплового баланса на спаях, превышающей сумму всех остальных тепловых потоков.

Очевидно, что нормальная работа ТТН, при которой он полностью оправдывает свое назначение — отбор тепла от одной среды и передача его другой, обеспечивается только в последнем из пяти рассмотренных случаев, т. е. при выполнении условия (8-16).

Переход от одного случая к другому для каждой конкретной термобатареи связан с последовательным уменьшением перепада между начальными температурами теплоносителей. Плотность тока при этом, естественно, выбирается такой, чтобы обеспечить наилучшие условия охлаждения.

При достаточно больших площадях ТТН монотонного охлаждения потока на холодных спаях вообще получить нельзя. Предельное значение площади, при котором функция $\Theta_1(X)$ еще может быть монотонно убывающей, определяется следующим безразмерным соотношением:

$$\psi_0 = \operatorname{Arth} \frac{\psi (u + v)}{\psi^2 + uv}. \qquad (8\text{-}17)$$

Если $\psi > \psi_0$, то $\Theta_1(X)$ будет иметь минимум при выполнении условия:

$$\frac{\Theta_1^*}{\Theta_2^*} > \frac{b}{u + v}. \qquad (8\text{-}18)$$

Если же неравенство (8-18) не выполняется, то $\Theta_1(X)$ монотонно возрастает.

Противоток

Для противотока, как уже было отмечено, знак левой части одного из основных уравнений (7-12) изменяется на противоположный. С учетом этого решение системы (7-11) — (7-12) в общем виде запишется:

$$\Theta_1(X) = \frac{\Theta_1^* [u \operatorname{sh} \varphi (1 - X) + \varphi \operatorname{ch} \varphi (1 - X)] + \Theta_2^* b \exp v \operatorname{sh} \varphi X}{(u \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \varphi) \exp vX} - \left(1 - \frac{\nu}{2}\right); \qquad (8\text{-}19)$$

$$\Theta_2(X) = \frac{\Theta_2^* (u \operatorname{sh} \varphi X + \varphi \operatorname{ch} \varphi X) \exp v + \Theta_1^* b\eta \operatorname{sh} \varphi (1 - X)}{(u \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \varphi) \exp vX} - \left(1 + \frac{\nu}{2}\right), \qquad (8\text{-}20)$$

где $\varphi = (u^2 - \eta b^2)^{\frac{1}{2}}$; $\varphi^2 > 0$.

Полный перепад температуры в потоках охлаждаемой и нагреваемой жидкости соответственно определяется выражениями:

$$\Delta\Theta_1 = \Theta_1|_{X=0} - \Theta_1|_{X=1} = \Theta_1^* \left[1 - \frac{\varphi \exp(-v)}{u \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \varphi}\right] - \Theta_2^* \frac{b \operatorname{sh} \varphi}{u \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \varphi}; \qquad (8\text{-}21)$$

$$\Delta\Theta_2 = \Theta_2|_{X=0} - \Theta_2|_{X=1} = \Theta_2^* \left[\frac{\varphi \exp v}{u \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \varphi} - 1\right] + \Theta_1^* \frac{b\eta \operatorname{sh} \varphi}{u \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \varphi}. \qquad (8\text{-}22)$$

Рассмотрим, как изменяются температуры теплоносителей вдоль направления их движения. Анализ выражений (8-19) и (8-20) показывает, что, так же как и при прямотоке, при противотоке могут встретиться пять различных вариантов распределения температуры в потоке теплоносителей. Каждый из этих вариантов возникает при определенных соотношениях между начальными температурами потоков и параметрами ТТН.

$$1)\ \frac{\theta_1^*}{\theta_2^*} \leqslant \frac{[\varphi(u-v)\operatorname{ch}\varphi - (uv-\varphi^2)\operatorname{sh}\varphi]\exp v}{b\eta\varphi}. \quad (8\text{-}23)$$

При выполнении этого условия температура жидкости на холодных спаях монотонно повышается вдоль направления своего движения, а на горячих монотонно снижается (рис. 29, *а*). Этот случай характеризуется большим значением разности начальных температур потоков или малой величиной тока питания. При этом изменение температуры теплоносителей носит такой же характер, как и в обычном противоточном теплообменнике-рекуператоре.

$$2)\ \frac{[\varphi(u-v)\operatorname{ch}\varphi - (uv-\varphi^2)\operatorname{sh}\varphi]\exp v}{b\eta\varphi} < \frac{\theta_1^*}{\theta_2^*} < \frac{\varphi(u-v)\exp v}{(\varphi\operatorname{ch}\varphi + v\operatorname{sh}\varphi)b\eta}. \quad (8\text{-}24)$$

В этом случае температура жидкости на холодных спаях по-прежнему растет вдоль потока. Температура жидкости на горячих спаях вначале повышается, достигает максимума, а затем начинает снижаться (рис. 29, *б*). Координата максимума определяется выражением

$$X_0 = \frac{1}{\varphi}\operatorname{Arth}\frac{\theta_2^*\varphi(u-v)\exp v - \theta_1^* b\eta(\varphi\operatorname{ch}\varphi + v\operatorname{sh}\varphi)}{\theta_2^*(uv-\varphi^2)\exp v - \theta_1^* b\eta(\varphi\operatorname{sh}\varphi + v\operatorname{ch}\varphi)}. \quad (8\text{-}25)$$

При выполнении условия (8-24) на холодных спаях поглощение тепла меньше, чем приток его за счет теплопроводности и выделения джоулева тепла. Это вызывает нагрев жидкости по всей длине термобатареи. На горячих спаях при $X_0 < X < 1$ кондуктивный тепловой поток через термобатарею достаточно мал, так как на этом участке мал перепад температуры между

обоими теплоносителями. Здесь выделение джоулева тепла превосходит отвод, и жидкость нагревается. При $0 < X < X_0$ наблюдается обратное явление, поскольку возрастает отвод тепла от горячих спаев к хо-

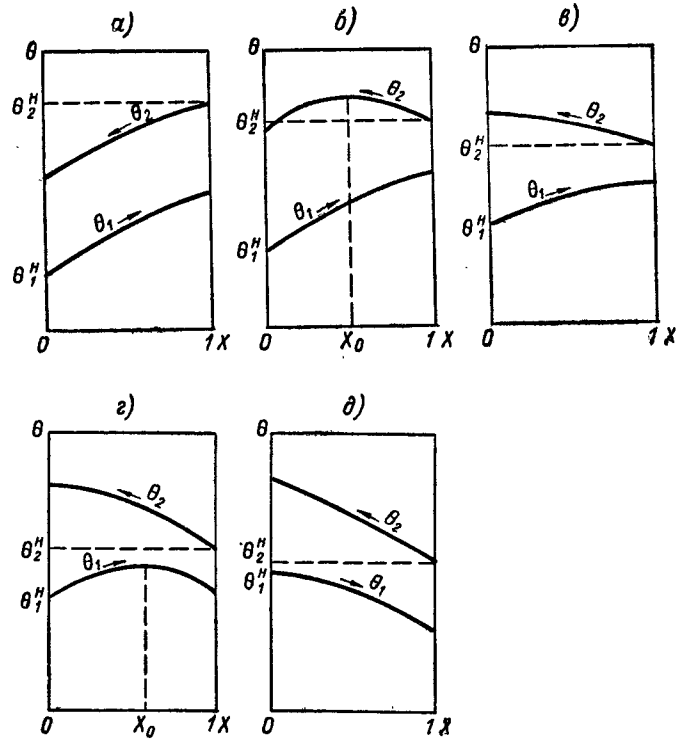


Рис. 29. Характерные варианты распределения температуры теплоносителей вдоль поверхности термобатареи при противотоке

лодным, следовательно, жидкость начинает охлаждаться.

$$3)\ \frac{\varphi(u-v)\exp v}{(\varphi\operatorname{ch}\varphi + v\operatorname{sh}\varphi)b\eta} \leqslant \frac{\theta_1^*}{\theta_2^*} \leqslant \frac{b(\varphi\operatorname{ch}\varphi - v\operatorname{sh}\varphi)\exp v}{\varphi(u+v)}. \quad (8\text{-}26)$$

При выполнении этого условия температура обеих жидкостей повышается вдоль направления потоков (рис. 29, *в*), т. е. соотношение между потоками тепла на холодных спаях остается таким же, как и в предыдущих случаях, а на горячих выделение тепла по всей термобатарее больше, чем отвод за счет теплопроводности термоэлементов.

$$4)\ \frac{b(\varphi \operatorname{sh}\varphi - v\operatorname{sh}\varphi)\exp v}{\varphi(u+v)} < \frac{\theta_1^*}{\theta_2^*} < \frac{b\varphi\exp v}{\varphi(u+v)\operatorname{ch}\varphi + (uv+\varphi^2)\operatorname{sh}\varphi}. \quad (8\text{-}27)$$

В этом варианте температура жидкости на горячих спаях монотонно возрастает, а на холодных вначале повышается, достигает максимума, затем начинает снижаться (рис. 29, *г*).

Максимум достигается при

$$X_0 = \frac{1}{\varphi}\operatorname{Arth}\frac{\theta_2^* b\varphi\exp v - \theta_1^*[\varphi(u+v)\operatorname{ch}\varphi + (uv+\varphi^2)\operatorname{sh}\varphi]}{\theta_2^* bv\exp v - \theta_1^*[\varphi(u+v)\operatorname{sh}\varphi + (uv+\varphi^2)\operatorname{ch}\varphi]}. \quad (8\text{-}28)$$

При выполнении условия (8-27) на холодных спаях, когда $X_0 < X < 1$, поглощение тепла Пельтье превышает приток его за счет теплопроводности и выделения джоулева тепла, т. е. общий баланс тепла отрицательный.

$$5)\ \frac{\theta_1^*}{\theta_2^*} \geqslant \frac{b\varphi\exp v}{\varphi(u+v)\operatorname{ch}\varphi + (uv+\varphi^2)\operatorname{sh}\varphi}. \quad (8\text{-}29)$$

При выполнении этого условия температура жидкости на горячих спаях монотонно повышается, на холодных спаях монотонно снижается (рис. 29, *д*). Указанный характер изменения температуры теплоносителей объясняется тем, что в рассматриваемом варианте поглощение и выделение тепла за счет эффекта Пельтье по всей площади батареи превышает сумму остальных составляющих теплового баланса. Так же как и для прямотока, последний из пяти рассмотренных вариантов обеспечивает нормальный режим работы ТТН.

Рассмотренное выше решение системы дифференциальных уравнений (7-11) — (7-12) и его анализ выполнены для случая, когда $\varphi^2 = u^2 - \eta b^2 > 0$. При этом соответствующая система характеристических уравнений имеет два различных вещественных корня. Однако при противотоке соотношения между параметрами ТТН могут оказаться такими, что $\varphi^2 = u - \eta b^2 = 0$. В этом случае система характеристических уравнений имеет два равных вещественных корня, поэтому решения системы дифференциальных уравнений (7-11) — (7-12) с граничными условиями (7-14) будут иметь другой вид, а именно:

$$\Theta_1(X) = \frac{\theta_1^*[1+u(1-X)] + \theta_2^* bX\exp v}{(1+u)\exp vX} - \left(1 - \frac{\nu}{2}\right); \quad (8\text{-}30)$$

$$\Theta_2(X) = \frac{\theta_2^*(1+uX) + \theta_1^* b\eta(1-X)\exp(-v)}{(1+u)\exp[-v(1-X)]} - \left(1 + \frac{\nu}{2}\right). \quad (8\text{-}31)$$

Полное охлаждение жидкости на холодной стороне и нагрев жидкости на горячей стороне определяются следующими соотношениями:

$$\Delta\Theta_1 = \Theta_1|_{X=0} - \Theta_1|_{X=1} = \frac{\theta_1^*[(1+u) - \exp(-v)] + \theta_2^* b}{1+u}; \quad (8\text{-}32)$$

$$\Delta\Theta_2 = \Theta_2|_{X=0} - \Theta_2|_{X=1} = \frac{\theta_2^*[\exp v - (1+u)] + \theta_1^* b\eta}{1+u}. \quad (8\text{-}33)$$

Для рассматриваемого частного случая решения системы (7-11) — (7-12) характер изменения температуры теплоносителей вдоль направления их движения также определяется соотношением между начальными температурами потоков и параметрами ТТН. При этом по аналогии с предыдущими можно выделить пять вариантов.

При противотоке соотношение между параметрами ТТН может оказаться таковым, что $u^2 < \eta b^2$, т. е. величина φ будет мнимым числом. Указанное соотношение имеет место, когда значение безразмерной плотности тока находится в пределах $\nu_1 < \nu < \nu_2$, где

$$\nu_{1,2} = \frac{1 - \eta + [(1-\eta)^2 + 4\beta_1(\eta + m)(1 \pm \sqrt{\eta})]^{\frac{1}{2}}}{2\beta_1(\eta + m)}. \quad (8\text{-}34)$$

Если в этом случае для расчета использовать уравнения (8-19), (8-20), то окажется, что температура теплоносителей будет изменяться вдоль батареи по периодическому закону с экспоненциально меняющейся амплитудой.

Однако в § 11 будет показано, что при выполнении (8-34) температура теплоносителей в каждом сечении, перпендикулярном направлению их движения, будет совершать незатухающие колебания. Поскольку стационарного режима при этом наступить не может, использовать уравнения (8-19), (8-20), полученные для стационарных условий, нельзя.

Как уже было отмечено, нормальный режим работы ТТН характеризуется монотонным охлаждением одного из теплоносителей и монотонным подогревом другого. Однако в отдельных случаях могут найти применение и некоторые из других рассмотренных режимов работы ТТН. Режимы, характеризующиеся наличием экстремума температуры, могут быть использованы в некоторых технологических процессах, где требуется осуществить последовательный подвод и отвод тепла.

Другим примером использования режима ТТН, при котором тепловой поток на холодных спаях изменяет свое направление, является один из методов измерения параметра термоэлектрической добротности термобатареи $Z_б$.

Способ измерения $Z_б$, предложенный в работе [23], основан на том, что, регулируя начальную температуру теплоносителя на горячих спаях и ток питания термобатареи, можно добиться отсутствия перепада температуры вдоль потока на холодных спаях. Автор [23] считает, что если $\Delta\Theta_1 = \Theta_1(0) - \Theta_1(1) = 0$, то холодопроизводительность каждого термоэлемента в термобатарее равна нулю. Тогда легко показать, что величина $Z_б$

при достаточно большой теплоотдаче на горячих спаях определяется следующим соотношением:

$$Z_б = \left[U^*\left(T_1^н - U^*\frac{\Delta T^н}{2}\right)\right]^{-1}, \quad (8\text{-}35)$$

где $U^* = U_ρ/U_e$ — отношение омического падения напряжения на термобатарее к ее термо-э. д. с. Измерение величин, входящих в выражение (8-35), не представляет затруднений, поэтому предложенный способ определения $Z_б$ является удобным и надежным, если справедливо предположение о равенстве нулю теплового потока на холодных спаях термобатареи.

Однако отсутствие перепада температур в потоке охлаждаемого теплоносителя свидетельствует лишь о том, что общая холодопроизводительность термобатареи равна нулю; при этом холодопроизводительности отдельных элементов могут быть отличными от нуля, так как выполненный в настоящей главе анализ показывает, что функция $\Theta_1(X)$ может быть не монотонной.

Для того чтобы отсутствовал тепловой поток на холодных спаях, необходимо выполнение условия:

$$\frac{d\Theta_1(X)}{dX} = 0; \quad 0 \leqslant X \leqslant 1. \quad (8\text{-}36)$$

Рассматривая аналитические выражения для функции $\Theta_1(X)$ (8-1), (8-2), легко показать, что последнее условие как для прямотока, так и для противотока выполняется лишь при $\eta \to 0$, т. е. когда водяной эквивалент потока со стороны горячих спаев намного превышает водяной эквивалент охлаждаемого потока. При этом для обоих видов взаимного направления потоков температура теплоносителя со стороны холодных спаев определяется следующим соотношением:

$$\underset{\eta \to 0}{\Theta_1(X)} = \left(\Theta_1^* - \frac{\Theta_2^*}{H_1}\right)\exp(-bH_1X) + \frac{\Theta_2^*}{H_1} - 1 + \frac{\nu}{2}. \quad (8\text{-}37)$$

Дифференцируя (8-37) по X, получим

$$\frac{d\Theta_1}{dX} = bH_1\left(\frac{\Theta_2^*}{H_1} - \Theta_1^*\right)\exp(-bH_1X). \quad (8\text{-}38)$$

Из выражения (8-38) следует, что условие (8-36) выполняется только тогда, когда

$$\frac{\Theta_2^*}{H_1} = \Theta_1^*. \qquad (8\text{-}39)$$

При этом $\Theta_1(X) = \text{const}$ для всех $0 \leqslant X \leqslant 1$. Раскрывая значения безразмерных комплексов, входящих в соотношение (8-39), и решая его относительно $Z_б$, получим выражение (8-35). Таким образом, метод измерения $Z_б$, предложенный в работе [23], является достаточно точным лишь при $\eta \to 0$; этот метод обычно хорошо реализуется в термобатареях типа воздух—вода. Если же величина η не очень мала, то значение $Z_б$, определяемое по формуле (8-35), является лишь нулевым приближением. Следующее приближение может быть получено, если в разложении выражения $\Theta_1(X)$ по η ограничиться членами нулевого и первого порядков:

$$\Theta_1(X) = \left(\Theta_1^* - \frac{\Theta_2^*}{H_1}\right)\exp(-bH_1X) + \frac{\Theta_2^*}{H_1} - 1 + \frac{\nu}{2} +$$
$$+ \eta\left\{\Theta_1^*\left[\frac{1}{H_1^2} - \left(\frac{1}{H_1^2} + \frac{bX}{H_1}\right)\exp(-bH_1X)\right] + \frac{\Theta_2^*}{H_1}\left[\frac{bX + H_2}{H_1} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - bXH_2 - \frac{2}{H_1^2} + \left(\frac{bX}{H_1} + \frac{2}{H_1^2} - \frac{H_2}{H_1}\right)\exp(-bH_1X)\right]\right\} \qquad (8\text{-}40)$$

При равенстве температур на входе и выходе охлаждаемого теплоносителя параметры ТТН удовлетворяют следующему соотношению, полученному из (8-40) при $\Theta_1(0) = \Theta_1(1)$:

$$\Theta_1^* = \frac{\Theta_2^*}{H_1}\left\{1 + \eta\left(H_2 - \frac{1}{H_1}\right)\left[\frac{b}{\exp(-bH_1) - 1} + \frac{1}{H_1}\right]\right\}. \qquad (8\text{-}41)$$

Последнее выражение может быть преобразовано к виду:

$$\Theta_1^* \approx \frac{\Theta_2^*}{H_1}\left[1 + \frac{\eta b}{2}\left(\frac{1}{H_1} - H_2\right)\right] \approx \frac{\Theta_2^*}{H_1}\left(1 + \frac{\eta b}{2}\cdot\frac{\nu^2}{1+\nu}\right). \qquad (8\text{-}42)$$

Решая уравнение (8-42) относительно $Z_б$ методом итераций, получим для $Z_б$ следующее приближенное соотношение:

$$Z_б = \left[U^*\left(T_1^н - U^*\frac{\Delta T^н}{2}\right)\right]^{-1}\left[1 + \frac{\eta b(1 + U^*)\Delta T^н}{2T_2^н - U^*\Delta T^н}\right]. \qquad (8\text{-}43)$$

Второй сомножитель в выражении (8-43) является поправкой, учитывающей реальное соотношение между водяными эквивалентами теплоносителей. При измерении $Z_б$ термобатарей типа воздух — воздух, где η достигает значений порядка 0,4—0,5, величина поправки может составить 20% от нулевого приближения $Z_б$.

9. НАГРУЗОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ И НАГРЕВАТЕЛЕЙ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

Нагрузочными характеристиками термоэлектрического охладителя и нагревателя принято называть зависимость его производительности и коэффициента энергетической эффективности от плотности тока питания.

При различном назначении ТТН его производительность и коэффициент энергетической эффективности оцениваются по-разному. Если ТТН используется для охлаждения потока жидкости, то производительность, которая называется в этом случае холодопроизводительностью, характеризуется количеством тепла, поглощаемым на холодных спаях термобатареи в единицу времени:

$$Q_1 = W_1\Delta T_1, \qquad (9\text{-}1)$$

где ΔT_1 — полное изменение температуры охлаждаемого теплоносителя при прохождении его через ТТН.

Если же ТТН используется для нагревания потока, то полезный тепловой эффект его, называемый теплопроизводительностью, определяется количеством тепла, которое выделяется в единицу времени на горячих спаях термобатареи:

$$Q_2 = W_1\Delta T_2/\eta, \qquad (9\text{-}2)$$

где ΔT_2 — полное изменение температуры нагреваемого теплоносителя.

Энергетическая эффективность ТТН при использовании его в качестве охладителя характеризуется величиной холодильного коэффициента

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{\Delta\Theta_1}{\frac{\Delta\Theta_2}{\eta} - \Delta\Theta_1}, \qquad (9\text{-}3)$$

а при использовании в качестве нагревателя — величиной коэффициента преобразования

$$\mu = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta_2 - \Delta\Theta_1\eta}. \qquad (9\text{-}4)$$

По определению холодильный коэффициент может изменяться в пределах $0 \leqslant \varepsilon < \infty$, а коэффициент преобразования — в пределах $1 \leqslant \mu < \infty$.

Если водяные эквиваленты теплоносителей не меняются вдоль поверхности термоэлектрической батареи, то изменение холодо- и теплопроизводительности ТТН в зависимости от тока питания с точностью до постоянного множителя характеризуется функциями $\Delta\Theta_1(\nu)$ и $\Delta\Theta_2(\nu)$, которые определяются соотношениями (8-8), (8-9) для прямотока и (8-21), (8-22) для противотока.

Характер изменения холодопроизводительности ТТН от плотности тока питания меняется в зависимости от знака начального перепада между температурами теплоносителей.

Если начальная температура охлаждаемого теплоносителя выше, чем нагреваемого, т. е. $\Theta_1^н > \Theta_2^н$, то при отсутствии тока ($\nu = 0$) существует начальное значение холодопроизводительности, численно равное тепловому потоку, который передается от охлаждаемой жидкости к нагреваемой благодаря конечному значению теплопроводности термобатареи. С увеличением плотности тока холодопроизводительность монотонно возрастает, достигает своего максимального значения, затем монотонно снижается до нуля (кривая *1* на рис. 30).

Если начальные температуры теплоносителей равны между собой, т. е. $\Theta_1^н = \Theta_2^н$, то при отсутствии тока холодопроизводительность равна нулю (кривая *2* на рис. 30). Если же $\Theta_1^н < \Theta_2^н$, то положительное значение холодопроизводительности может быть получено только, начиная с некоторого значения плотности тока $\nu_1 > 0$ (кривая *3* на рис. 30).

Во всех трех рассмотренных случаях одно и то же значение холодопроизводительности можно получить при двух различных значениях плотности тока, меньшее из которых соответствует восходящей ветви кривой $\Delta\Theta_1(\nu)$, а большее нисходящей (рис. 30). Очевидно, что при эксплуатации ТТН должен использоваться режим,

соответствующий той части нагрузочной характеристики, где холодопроизводительность возрастает с увеличением плотности тока.

Изменение холодильного коэффициента от плотности тока, как это следует из выражения (9-3), определяется функциями $\Delta\Theta_1(\nu)$ и $\Delta\Theta_2(\nu)$. Характер зависимости

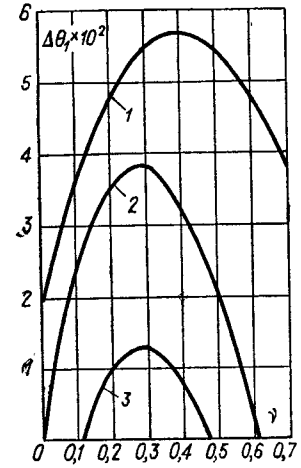


Рис. 30. Зависимость холодопроизводительности ТТН от плотности тока питания

1 — $\Theta_1^н = 0{,}6$ и $\Theta_2^н = 0{,}55$; *2* — $\Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6$; *3* — $\Theta_1^н = 0{,}55$ и $\Theta_2^н = 0{,}6$

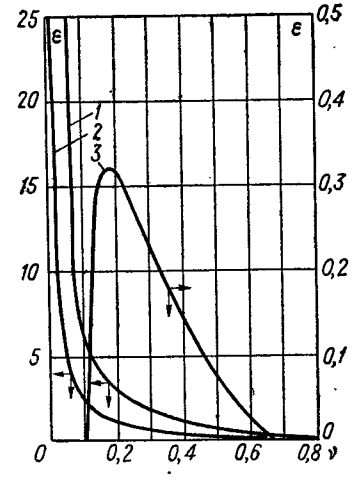


Рис. 31. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от плотности тока питания

1 — $\Theta_1^н = 0{,}6$ и $\Theta_2^н = 0{,}55$; *2* — $\Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6$; *3* — $\Theta_1^н = 0{,}55$ и $\Theta_2^н = 0{,}6$

$\varepsilon = f(\nu)$ может меняться при различных соотношениях между начальными температурами теплоносителей. Если $\Theta_1^н > \Theta_2^н$, т. е. начальная температура на холодной стороне выше, чем на горячей, то функция $\varepsilon(\nu)$ определена * на интервале $\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2$, где ν_1 соответствует значению плотности тока при коротком замыкании термобатареи. При $\nu \to \nu_1$ $\varepsilon \to \infty$; при дальнейшем увеличении плот-

* Считается, как это было указано, что функция $\varepsilon(\nu)$ определена только в той области, где $\varepsilon \geqslant 0$, $\Delta\Theta_1 \geqslant 0$.

ности тока функция $\varepsilon(\nu)$ монотонно убывает и при $\nu \to \nu_2\ \varepsilon \to 0$ (кривая *1* на рис. 31). При $\Theta_1^н = \Theta_2^н$ функция $\varepsilon(\nu)$ монотонна и определена на интервале изменений аргумента $0 \leqslant \nu \leqslant \nu_1$; при $\nu \to 0\ \varepsilon \to \infty$; при $\nu \to \nu_1$ $\varepsilon \to 0$ (кривая *2* на рис. 31). Если же $\Theta_1^н < \Theta_2^н$, то область задания функции $\varepsilon = f(\nu)$ определяется интервалом изменений тока $\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2$. С увеличением плотности тока холодильный коэффициент вначале быстро возрастает от нуля до максимального значения, после чего плавно убывает к нулю (кривая *3* на рис. 31). Таким образом, зависимость холодильного коэффициента от плотности тока имеет максимум только при $\Theta_1^н < \Theta_2^н$. Если ТТН используется как нагреватель потока жидкости или газа, то с увеличением плотности тока его теплопроизводительность будет монотонно возрастать. Коэффициент преобразования будет изменяться в зависимости от плотности тока так же, как холодильный коэффициент.

Следует отметить, что вид нагрузочных характеристик не зависит от взаимного направления движения потоков теплоносителей. Однако при одной и той же плотности тока питания при противотоке обычно достигаются большие значения производительности и коэффициента энергетической эффективности ТТН, чем при прямотоке, причем различие между прямотоком и противотоком растет с увеличением площади термобатареи и плотности тока. Для иллюстрации этого факта на рис. 32 приведены нагрузочные характеристики ТТН для прямотока и противотока при различных геометрических размерах термобатареи, рассчитанные на ЭВМ по формулам (8-8), (8-9), (8-21), (8-22).

При анализе работы ТТН представляет интерес исследование его энергетической характеристики, которой будем называть зависимость коэффициента энергетической эффективности от производительности. При использовании ТТН в качестве охладителя энергетическая характеристика его описывается функцией $\varepsilon = f(\Delta\Theta_1)$, а при использовании в качестве нагревателя функцией $\mu = \varphi(\Delta\Theta_2)$.

Если $\Theta_1^н < \Theta_2^н$, то холодильный коэффициент с увеличением холодопроизводительности вначале быстро возрастает от нуля до максимального значения, затем начинает убывать (рис. 33). Область задания исследуемой

функции определяется интервалом $0 \leqslant \Delta\Theta_1 \leqslant (\Delta\Theta_1)_{max}$, где каждому значению холодопроизводительности могут соответствовать два значения холодильного коэффициента. Большее из этих значений находится на восходящей ветви кривой $\Delta\Theta_1 = f(\nu)$, а меньшее на нисходящей. Таким образом, в общем случае зависимость ε от $\Delta\Theta_1$ представляет собой замкнутую кривую.

Как было указано выше, практическое значение имеет только та область изменения холодопроизводи-

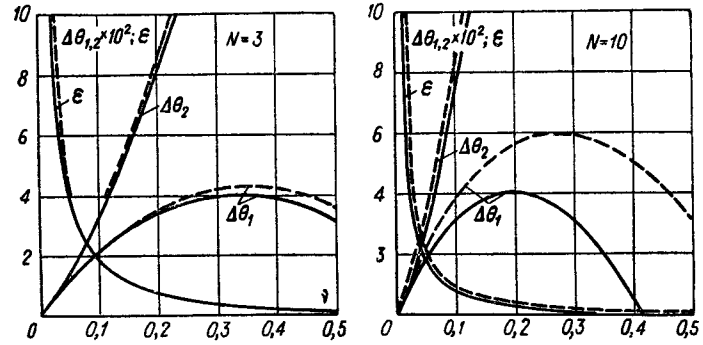


Рис. 32. Нагрузочные характеристики ТТН при различных схемах движения теплоносителей ($\Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6$; $\beta = 0{,}3$; $m = 0{,}5$; $\eta = 0{,}25$)

——— прямоток; — — — — протнвоток

тельности, где она возрастает с увеличением тока. Очевидно, что и у энергетических характеристик только верхняя часть кривой имеет практический смысл. На рис. 33 представлены энергетические характеристики для ТТН с различной высотой термоэлементов. Кривые, построенные на основании расчетов, выполненных на ЭВМ, хорошо согласуются с результатами испытаний ТТН (штриховая линия соответствует области, где $\Delta\Theta_1$ уменьшается с увеличением ν).

Если начальные температуры потоков равны между собой, то при $\Delta\Theta_1 \to 0\ \varepsilon \to \infty$. Следовательно, при увеличении холодопроизводительности от нуля до максимального значения холодильный коэффициент монотонно снижается от бесконечности до значения $\varepsilon = \varepsilon_q$. При дальнейшем изменении холодопроизводительности, обус-

ловленном увеличением плотности тока, холодильный коэффициент монотонно убывает от $\varepsilon = \varepsilon_q$ до нуля. Очевидно, что нижняя часть кривой (на рис. 34 обозначена штриховой линией) не имеет практического смысла. Таким образом, при $\Theta_1^н = \Theta_2^н$ зависимость холодильного коэффициента от холодопроизводительности максимума

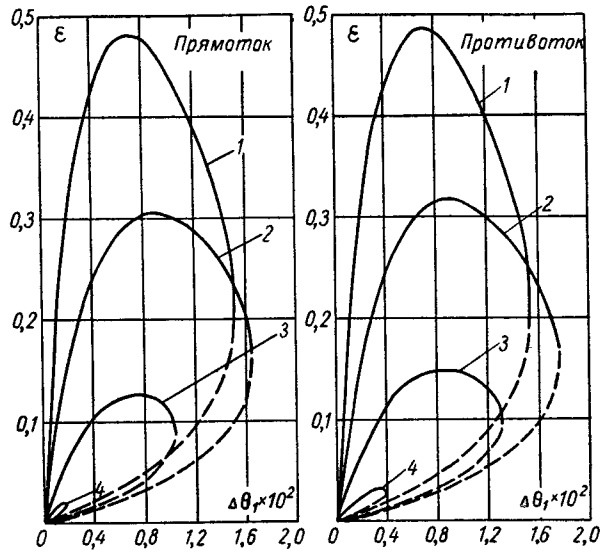


Рис. 33. Энергетические характеристики ТТН ($\Theta_1^н = 0{,}55$; $\Theta_2^н = 0{,}6$; $N = 3$; $m = 0{,}5$; $\eta = 0{,}25$)
1 — $\beta = 0{,}1$; *2* — $\beta = 0{,}2$; *3* — $\beta = 0{,}4$; *4* — $\beta = 0{,}7$

не имеет. Своего наибольшего значения ε достигает тогда, когда холодопроизводительность стремится к нулю.

Если $\Theta_1^н > \Theta_2^н$, то функция $\varepsilon = f(\Delta\Theta_1)$ не является непрерывной. Это объясняется тем, что при отсутствии тока питания в термобатарее ТТН будет работать как теплообменник-рекуператор, т. е. при указанном соотношении между начальными температурами потоков будет поглощаться тепло на холодных спаях и передаваться через стенку термобатареи на горячие спаи.

Таким образом, при $\nu = 0$ ТТН, строго говоря, обладает холодопроизводительностью $\Delta\Theta_1^*$, которая равна

количеству тепла, передаваемому от более нагретого потока на холодных спаях к менее нагретому на горячих. Очевидно, что при этом никакой внешней работы не затрачивается, т. е. при $\Delta\Theta_1 \to \Delta\Theta_1^*$ $\varepsilon \to \infty$.

Так как на спаях термобатареи поддерживается разность температур, то на ее клеммах, благодаря эффекту Зеебека, возникает разность потенциалов. Если же к термобатарее приложить постоянное напряжение, противоположное по знаку возникшей разности потенциалов, то начальная холодопроизводительность $\Delta\Theta_1^*$ может быть уменьшена до нуля. При этом термобатарея является для охлаждаемой жидкости идеальным теплоизолятором. Указанное свойство термобатарей с успехом используется в установках, в которых требуется поддерживать адиабатные условия [28].

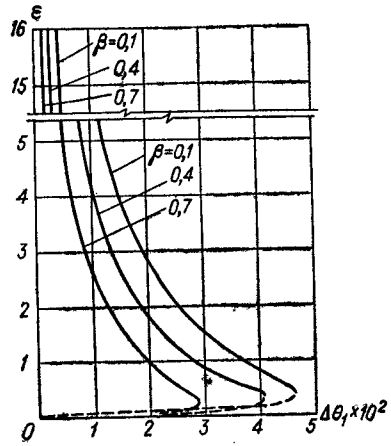


Рис. 34. Энергетические характеристики ТТН ($\Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6$; $N = 6$; $m = 0{,}5$; $\eta = 0{,}25$)

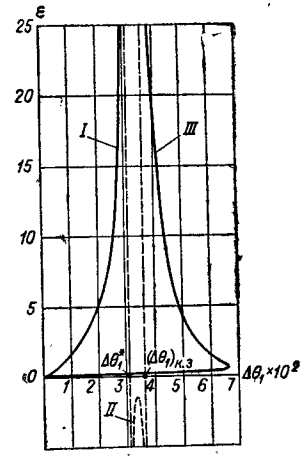


Рис. 35. Энергетические характеристики ТТН ($\Theta_1^н = 0{,}6$; $\Theta_2^н = 0{,}55$; $N = 3$; $m = 0{,}5$; $\eta = 0{,}5$; $\beta = 0{,}2$)

Таким образом, при изменении холодопроизводительности в интервале $0 \leqslant \Delta\Theta_1 \leqslant \Delta\Theta_1^*$ ε изменяется от нуля до бесконечности (рис. 35, кривая *I*).

Некоторое увеличение холодопроизводительности ТТН по сравнению с начальной может быть получено,

если при $\Theta_1^н > \Theta_2^н$ термобатарею замкнуть на внешнее нагрузочное сопротивление $R_н$. В этом случае ТТН начинает работать в режиме генератора постоянного тока. Увеличение холодопроизводительности происходит вследствие того, что на тех спаях, где протекает охлаждаемая жидкость, поглощается дополнительное количество тепла за счет эффекта Пельтье, вызванного электрическим током, вырабатываемым термобатареей. При изменении сопротивления внешней электрической нагрузки $R_н$ от бесконечности (термобатарея разомкнута) до нуля (термобатарея замкнута накоротко) холодопроизводительность будет монотонно возрастать в интервале $\Delta\Theta_1^* \leqslant \Delta\Theta_1 \leqslant (\Delta\Theta_1)_{к.з}$. Холодильный коэффициент ТТН, работающего в режиме генератора, может быть определен условно, так как термобатарея не только не потребляет никакой внешней энергии, а, наоборот, сама эту энергию производит за счет разности температур потоков жидкости, поступающих на холодные и горячие спаи. Поскольку при определении холодильного коэффициента положительной считается затраченная энергия, в рассматриваемом режиме можно условно считать, что холодильный коэффициент отрицателен. В этом случае изменению функции $\varepsilon = f(\Delta\Theta_1)$ соответствует кривая *II* рис. 35. При расчете ТТН, работающего в режиме генератора, плотность тока ν, возникающего в нем, может быть определена из следующего трансцендентного уравнения:

$$\nu = \frac{\int_0^1 (\Theta_1' - \Theta_2')\, dX}{1 + \bar{R}}, \qquad (9\text{-}5)$$

где $R = R_н/R_б$ — отношение сопротивления нагрузки к сопротивлению термобатареи.

Наибольшее значение холодопроизводительности в режиме генератора может быть получено при $\bar{R} = 0$, т. е. при коротком замыкании ТТН. Дальнейшее увеличение холодопроизводительности может быть достигнуто, если к ТТН подать внешнее напряжение, совпадающее по знаку с разностью потенциалов, возникающей в термобатарее за счет эффекта Зеебека. При этом изменение функции $\varepsilon = f(\Delta\Theta_1)$ будет носить такой же

характер, что и в случае, когда $\Theta_1^н = \Theta_2^н$ (кривая *III* на рис. 35). Таким образом, при $\Theta_1^н > \Theta_2^н$ энергетическая характеристика ТТН, построенная во всем интервале изменения холодопроизводительности $0 \leqslant \Delta\Theta_1 \leqslant (\Delta\Theta_1)_{макс}$, имеет два разрыва в точках, которые соответствуют разомкнутой термобатарее и термобатарее, замкнутой накоротко.

Все три типа энергетических характеристик относились к случаю, когда ТТН используется в качестве охладителя потока жидкости или газа. Если же ТТН применяется в качестве нагревателя, его энергетические характеристики имеют другой вид. При $\Theta_1^н < \Theta_2^н$ зависимость μ от $\Delta\Theta_2$ носит параболический характер, а при $\Theta_1^н > \Theta_2^н$ — гиперболический. Следует отметить, что при нагревании потока в случае, когда $\Theta_1^н > \Theta_2^н$ энергетическая характеристика ТТН будет иметь два разрыва в тех же точках, что и при охлаждении.

При предварительной оценке определяемых параметров ТТН удобно в некоторых случаях использовать приближенные соотношения, пригодные для конкретных условий применения термоэлектрических устройств. Для получения указанных соотношений рассмотрим некоторые предельные случаи [12, 13].

1. Термобатарея работает при малой производительности, т. е. при малых значениях тока питания ($\nu \ll 1$). Тогда можно использовать для расчетов разложение в ряд по ν выражений (8-8), (8-9), (8-21), (8-22). При равенстве начальных температур потоков $\Theta_1^н = \Theta_2^н = \Theta^н$; первые два члена разложения имеют вид:

Для прямотока

а) перепад температуры в потоке охлаждаемого теплоносителя:

$$\Delta\Theta_1 = \nu\Theta^н \frac{1 - \exp(-g_1)}{1 + \eta} -$$
$$- \nu^2 \frac{1}{1 + \eta} \left\{ \frac{\Theta^н [1 - 2\eta + (m - \eta)\beta][1 - \exp(-g_1)]}{1 + \eta} - \right.$$
$$- \frac{\Theta^н N\beta [(1 - \eta) + 2\beta(m - \eta)]\exp(-g_1)}{[1 + \beta(1 + m)]^2} + (\Theta^н + 1) N\beta\eta +$$
$$\left. + \frac{[(1 - \eta) + 2\beta(m - \eta)][1 - \exp(-g_1)]}{2(1 + \eta)} \right\}; \qquad (9\text{-}6)$$

б) перепад температуры в потоке нагреваемого теплоносителя:

$$\Delta\Theta_2 = \nu\Theta^{\text{н}}\frac{\eta[1-\exp(-g_1)]}{1+\eta} + \nu^2\frac{\eta}{1+\eta}\left\{\frac{\Theta^{\text{н}}[\eta-2-(m-\eta)\beta][1-\exp(-g_1)]}{1+\eta} + \frac{\Theta^{\text{н}}N\beta[(1-\eta)+2\beta(m-\eta)]\exp(-g_1)}{[1+\beta(1+m)]^2} + (\Theta^{\text{н}}+1)N\beta - \frac{[(1-\eta)+2\beta(m-\eta)][1-\exp(-g_1)]}{2(1+\eta)}\right\}. \quad (9\text{-}7)$$

Для противотока ($\varphi^2>0$)

а) перепад температуры в потоке охлаждаемого теплоносителя:

$$\Delta\Theta_1 = \nu\Theta^{\text{н}}\frac{\exp g_2 - 1}{\exp g_2 - \eta} + \nu^2\frac{1}{\exp g_2-\eta}\left\{\left[\frac{\Theta^{\text{н}}(\eta+m\beta+\eta\beta)}{1-\eta} + \frac{2\Theta^{\text{н}}\eta}{\exp g_2-\eta} + \frac{1+\eta+2\beta(m+\eta)}{2(1-\eta)}\right](\exp g_2 - 1) - (\Theta^{\text{н}}+1)N\beta\eta - \frac{\Theta^{\text{н}}N\beta(1-\eta)[(1+\eta)+2\beta(m+\eta)]\exp g_2}{[1+\beta(m+1)]^2(\exp g_2-\eta)}\right\}; \quad (9\text{-}8)$$

б) перепад температуры в потоке нагреваемого теплоносителя:

$$\Delta\Theta_2 = \nu\Theta^{\text{н}}\frac{\eta(\exp g_2-1)}{\exp g_2-\eta} + \nu^2\frac{\eta}{\exp g_2-\eta}\left\{\left[\frac{\Theta^{\text{н}}(\eta+m\beta+\eta\beta)}{1-\eta} + \frac{2\Theta^{\text{н}}\exp g_2}{\exp g_2-\eta} + \frac{(1+\eta)+2\beta(m+\eta)}{2(1-\eta)}\right](1-\exp g_2) + (\Theta^{\text{н}}+1)N\beta\exp g_2 + \frac{\Theta^{\text{н}}N\beta(1-\eta)[(1+\eta)+2\beta(m+\eta)]}{[1+\beta(m+1)]^2(\exp g_2-\eta)}\right\}. \quad (9\text{-}9)$$

Здесь

$$g_{1,2} = \frac{N\beta(1\pm\eta)}{1+\beta(1+m)}. \quad (9\text{-}10)$$

Полученные приближенные выражения показывают, что при малых значениях тока питания ($\nu \ll 1$) зависимость холодопроизводительности ТТН от тока имеет вид квадратичной параболы, расположенной выпуклостью вверх, а зависимость теплопроизводительности от тока соответствует восходящей ветви квадратичного трехчлена с положительными коэффициентами, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [27]. При этом значения $\Delta\Theta_1$ и $\Delta\Theta_2$ для одной и той же плотности тока при противотоке всегда выше, чем при прямотоке. Сравнительные расчеты показывают, что при $\nu \leqslant 0{,}2$ расхождение между значениями $\Delta\Theta_1$ и $\Delta\Theta_2$, вычисленными по точным и приближенным формулам, не превышает 5%. При малых значениях тока можно также получить приближенные выражения $\varepsilon = f(\nu)$, ограничившись лишь первым членом в разложении ε по степеням ν. Эти выражения при $\Theta_1^{\text{н}} = \Theta_2^{\text{н}} = \Theta^{\text{н}}$ имеют вид: для прямотока

$$\frac{1}{\varepsilon} = \nu\left[\left(1+\frac{1}{\Theta^{\text{н}}}\right)\frac{N\beta(1+\eta)}{1-\exp(-g_1)} - 1\right]; \quad (9\text{-}11)$$

для противотока

$$\frac{1}{\varepsilon} = \nu\left\{\left(1+\frac{1}{\Theta^{\text{н}}}\right)\frac{N\beta[1-\eta\exp(-g_2)}{1-\exp(-g_2)} - 1\right\}. \quad (9\text{-}12)$$

Нетрудно видеть, что при равенстве начальных температур потоков и небольших значениях ν зависимости $\varepsilon(\nu)$ и $\mu(\nu)$ имеют гиперболический характер. Холодильный коэффициент и коэффициент преобразования монотонно возрастают с уменьшением плотности тока и при $\nu \to 0$ функции ε, $\mu \to \infty$. При одних и тех же значениях тока коэффициенты энергетической эффективности ε и μ у противоточного ТТН всегда выше, чем у прямоточного.

2. На практике часто приходится рассчитывать ТТН, у которых водяной эквивалент потока на одной стороне термобатареи значительно превышает водяной эквивалент на другой (кондиционеры воздух—вода и т. п.). В этих случаях при $\eta = \frac{W_1}{W_2} \ll 1$ и любом взаимном направлении потоков выражения для $\Delta\Theta_{1,2}$ преобразуются

к виду:

$$\Delta\Theta_1 = \left\{\Theta_1^{\text{н}} - \frac{\Theta_2^{\text{н}} + \frac{1}{2}\nu^2[1 + (2-\nu)m\beta]}{H_1}\right\}[1 - \exp(-bH_1)]; \tag{9-13}$$

$$\Delta\Theta_2 = \frac{(\Delta\Theta_1 + \Theta_2^* N\beta\nu^2)\eta}{H_1}. \tag{9-14}$$

Из (9-13) вытекает, что при достаточно большой величине водяного эквивалента потока на горячей стороне, т. е. в условиях постоянства температуры нагреваемого теплоносителя холодопроизводительность и перепад температур в охлаждаемом потоке монотонно растут с увеличением площади термобатареи. Предельная температура охлаждаемого потока, определяемая лишь физическими свойствами термоэлементов (параметром Z), достигается при постоянной температуре на горячей стороне термобатареи (W_2, $\alpha_2 \to \infty$) и при условии $S \to \infty$. Этот предел может быть определен из (9-13)

$$\Theta_1^{\text{пред}} = \frac{\Theta_2^{\text{н}} + 0{,}5\nu^2}{1+\nu}. \tag{9-15}$$

Сравнение выражения (9-15) с уравнением (1-22) при $K_{S_1} = 0$ показывает, что соотношение (9-15) представляет собой температуру на холодном спае термоэлемента при отсутствии тепловой нагрузки.

3. Если отношение площади термобатареи к водяным эквивалентам мало, т. е. $b \ll 1$, приближенные соотношения для холодо- и теплопроизводительности можно получить, раскладывая в ряд выражения (8-8), (8-9), (8-21) и (8-22). Для прямотока указанное разложение с точностью до малых третьего порядка запишется:

$$\Delta\Theta_1 = \Theta_1^*\left\{v + u - \frac{1}{2}[(v+u)^2 + \eta b^2] + \right.$$
$$\left. + \frac{(u+v)^3 + \eta b^2(3u+v)}{6}\right\} - \Theta_2^* b\left[1 - u + \frac{3u^2 + v^2 + \eta b^2}{6}\right]; \tag{9-16}$$

$$\Delta\Theta_2 = \Theta_2^*\left\{v - u + \frac{1}{2}[(u-v)^2 + \eta b^2] - \right.$$
$$\left. - \frac{(u-v)^3 + \eta b^2(3u-v)}{6}\right\} - \Theta_1^*\eta b\left[1 - u + \frac{3u + v^2 + \eta b}{6}\right]. \tag{9-17}$$

При противотоке соответствующие выражения для $\Delta\Theta_1$ и $\Delta\Theta_2$ отличаются от (9-16) и (9-17), начиная с третьего члена разложения. При этом в правой части приведенных формул следует добавить величины $\delta(\Delta\Theta_1)$ и $\delta(\Delta\Theta_2)$:

$$\delta(\Delta\Theta_1) = \frac{b}{3}\left[\Theta_1^*\eta b(u+v) - \Theta_2^*\frac{u^2 - v^2 + \eta b^2}{2}\right]; \tag{9-18}$$

$$\delta(\Delta\Theta_2) = \frac{\eta b}{3}\left[\Theta_1^*\frac{u^2 - v^2 + \eta b^2}{2} - \Theta_2^* b(u-v)\right]. \tag{9-19}$$

Следует отметить, что первый член разложения по b в формулах (9-16) и (9-17) совпадает с соответствующими выражениями (2-3), (2-4) для тепловых потоков на спаях единичного термоэлемента.

Выражения (9-16) и (9-17) позволяют оценить погрешность, которая возникает, если при расчете термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкостей использовать соотношения, полученные для ТТН, у которых все термоэлементы работают в одинаковом температурном режиме. Величина этой погрешности, как следует из (9-16) и (9-17), возрастает с увеличением площади термобатареи и плотности тока питания и с уменьшением водяных эквивалентов теплоносителей. На рис. 36 приведены значения удельных тепловых потоков на холодных спаях термобатареи в зависимости от плотности тока питания и отношения площади термобатареи к водяному эквиваленту теплоносителя. На этом же рисунке штриховыми линиями приведены значения удельных тепловых потоков, вычисленные по формулам (2-3), (2-4), не учитывающим изменения температуры теплоносителей вдоль направления движения. Сравнение результатов показывает, что широко принятая в настоящее время методика расчета ТТН без учета изменения температуры теплоносителей вдоль поверхности термобатареи при достаточно больших величинах N дает значение удельной холодопроизводительности,

завышенное более чем в 3 раза. Очевидно, что при расчете таких устройств, как кондиционеры типа воздух—воздух, где величина N достигает 7-10, выражения (2-3), (2-4) не могут быть использованы даже для грубой оценки энергетических характеристик.

Рассмотрим, как изменяются нагрузочные характеристики ТТН при изменении площади термобатареи.

Отметим, что согласно выражениям (8-8), (8-9), (8-21), (8-22) длина и ширина термобатареи порознь не влияют на производительность ТТН; последняя зависит лишь от площади термобатареи.

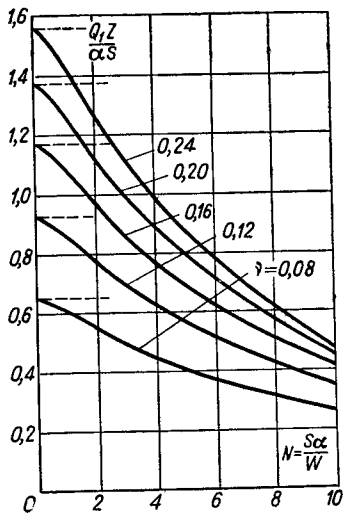


Рис. 36. Влияние величины водяных эквивалентов теплоносителей на производительность ТТН

При прямотоке зависимость холодо- и теплопроизводительности от площади находится в полном соответствии с изменением температуры охлаждаемого и нагреваемого потоков вдоль направления движения. Это связано с тем, что при прямотоке процессы переноса тепловой и электрической энергии, протекающие в каждой последующей по ходу теплоносителей термопаре, не влияют на характер аналогичных процессов на всех предыдущих термопарах. Следовательно, мы можем любую часть ТТН, начиная от входа теплоносителей, рассматривать, как самостоятельный ТТН меньшей площади. Математически указанное обстоятельство выражается в том, что, как это следует из выражений (8-1) и (8-2), значения функций $\Theta_1(X)$ и $\Theta_2(X)$ определяются произведением $(X \cdot S)$, поэтому функции $\Theta_1(X)$ и $\Theta_2(X)$ при $S = \text{const}$ полностью аналогичны функциям $\Theta_1(S)$ и $\Theta_2(S)$ при $X = \text{const}$ $(X = 1)$.

Из сказанного видно, что при исследовании зависимостей $\Delta\Theta_1(S) = \Theta_1^н - \Theta_1|_{X=1}$ и $\Delta\Theta_2(S) = \Theta_2|_{X=1} - \Theta_2^н$

можно воспользоваться результатами анализа функций $\Theta_1(X)$ и $\Theta_2(X)$, выполненного в предыдущем параграфе, с той только разницей, что изменение величины $\Delta\Theta_1(S)$ будет зеркальным по сравнению с $\Theta_1(S)|_{X=1}$, т. е. первая из них возрастает там, где убывает вторая, и наоборот. Рассматривая влияние площади на производительность ТТН, мы должны считать, что в самом общем виде площадь термобатареи может изменяться в интервале $0 < S < \infty$. При этом можно выделить два случая: а) случай нормальной работы ТТН, при которой начальные параметры его обеспечивают выполнение условия (8-18); б) случай, когда это условие не выполняется. Указанное условие получает четкое физическое толкование, если его записать несколько в ином виде, раскрыв значения входящих в него комплексов:

$$\Theta_1^н > \frac{\Theta_2^н + \frac{\nu^2}{2}[1 + (2 - \nu)\, m\beta]}{H_1}. \qquad (9\text{-}20)$$

Правая часть выражения (9-20) представляет собой, как это следует из формулы (9-13), предельную температуру, которая может быть достигнута при охлаждении потока в ТТН с конечными значениями коэффициентов теплоотдачи на спаях. Таким образом, если начальная температура потока выше указанного предела, холодопроизводительность с увеличением площади вначале возрастает, достигает своего максимального значения, затем начинает неограниченно убывать. Площадь батареи, при которой холодопроизводительность достигает максимума, может быть получена из выражения (8-15), если положить в нем $X = 1$ и решить его относительно b:

$$b_0 = \frac{KS_0}{W_1} = \frac{4}{\sqrt{M_2^2 + 4\eta}} \operatorname{Arth} \frac{(H_1\Theta_1^* - \Theta_2^*)\sqrt{M_2^2 + 4\eta}}{\Theta_1^*(H_1 M_2 + 2\eta) - \Theta_2^* M_1}, \qquad (9\text{-}21)$$

где $M_{1,2} = H_1 \pm \eta H_2$.

Теплопроизводительность при этом с увеличением площади термобатареи монотонно возрастает.

Если же условие (8-18), или (9-20), что то же самое, не выполняется, холодопроизводительность с увеличе-

нием площади монотонно убывает. В этом случае зависимость теплопроизводительности от площади термобатареи может иметь минимум. Площадь термобатареи, соответствующая минимальному значению $\Delta\Theta_2$, может быть определена из выражения (8-12) при $X = 1$:

$$b_0 = \frac{KS_0}{W_1} = \frac{4}{\sqrt{M_2^2 + 4\eta}} \operatorname{Arth} \frac{(\Theta_2^* H_2 - \Theta_1^*)\sqrt{M_2^2 + 4\eta}}{\Theta_2^*(2 - H_2 M_2) - \Theta_1^* M_1}. \quad (9\text{-}22)$$

При достаточно больших значениях площади, т. е. при $b \gg 1$, асимптотическое поведение выражений для холодо- и теплопроизводительности характеризуются следующими соотношениями (при прямотоке $\psi > u > v$):

$$\Delta\Theta_1 = -\frac{1}{2}\left[\Theta_1^*\left(1 - \frac{v}{\psi}\right) + \Theta_2^* \frac{b}{\psi}\right] \exp(\psi - u); \quad (9\text{-}23)$$

$$\Delta\Theta_2 = \frac{1}{2}\left[\Theta_2^*\left(1 - \frac{v}{\psi}\right) + \Theta_1^* \frac{\eta b}{\psi}\right] \exp(\psi + u). \quad (9\text{-}24)$$

В случае противотока изменение холодо- и теплопроизводительности в зависимости от площади термоэлектрической батареи не будет следовать за изменением температур потоков вдоль направления их движения. Это объясняется тем, что при противотоке процессы переноса тепловой и электрической энергии, происходящие на разных концах термобатареи, взаимно влияют друг на друга. Температура потоков в каждой точке зависит не только от координаты этой точки, но и от всего пути, который должен пройти теплоноситель. Следовательно, часть термобатареи, взятая от входа потока до какой-либо точки, не может быть рассмотрена отдельно без связи со всей площадью ТТН. Для установления характера зависимости $\Delta\Theta_1$ и $\Delta\Theta_2$ от S проанализируем выражения (8-19) и (8-20). Рассмотрим случай, когда начальные условия обеспечивают нормальную работу ТТН, т. е. когда выполняется условие (9-20). При этом, если $v > 0$, холодопроизводительность с увеличением площади термобатареи вначале возрастает, достигает своего максимального значения, затем уменьшается асимптотически, стремясь к своему пределу (рис. 37), который определяется выражением:

$$\lim_{S \to \infty} \Delta\Theta_1 = \Theta_1^* - \frac{2\Theta_2^*}{M_1 + \sqrt{M_1^2 - 4\eta}}. \quad (9\text{-}25)$$

Если же $v < 0$, холодопроизводительность вначале также возрастает, достигает максимума, затем начинает беспредельно убывать, т. е. при $S \to \infty$ $\Delta\Theta_1 \to -\infty$.

Значение площади термобатареи, при котором достигается максимальная холодопроизводительность, может быть получено, если продифференцировать выражение (8-21) по b и приравнять к нулю, что приводит к следующему трансцендентному уравнению относительно

$$b_0 = \frac{KS_0}{W_1}:$$

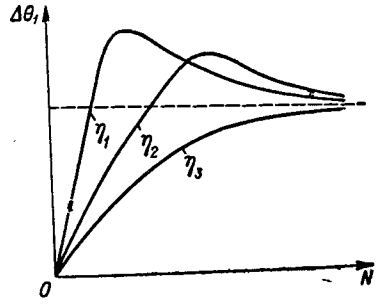


Рис. 37. Влияние площади термобатареи на производительность ТТН при противотоке ($\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$)

$$\Theta_1^*\left[\frac{M_1 - 2\eta}{\sqrt{M_1^2 - 4\eta}} \operatorname{sh} \frac{b_0}{2}\sqrt{M_1^2 - 4\eta} + H_1 \operatorname{ch} \frac{b_0}{2}\sqrt{M_1^2 - 4\eta}\right] - \Theta_2^* \exp \frac{b_0}{2} M_2 = 0. \quad (9\text{-}26)$$

При этом, если водяной эквивалент нагреваемой жидкости значительно превышает водяной эквивалент охлаждаемой, т. е. если $\eta = \frac{W_1}{W_2} \to 0$, зависимость холодопроизводительности от площади не имеет максимума. Она монотонно возрастает с увеличением площади, асимптотически приближаясь к своему наибольшему значению, которое может быть получено из (9-13) при $b \to \infty$ (рис. 37).

Для рассматриваемого случая нормальной работы ТТН теплопроизводительность с увеличением площади монотонно возрастает от нуля до бесконечности, если

$v > 0$; если же $v < 0$, то теплопроизводительность с увеличением площади также монотонно возрастает, асимптотически приближаясь к своему пределу, который для указанного случая определяется

$$\lim_{S\to\infty} \Delta\Theta_2 = \frac{2\Theta_1^*\eta}{M_1 + \sqrt{M_1^2 - 4\eta}} - \Theta_2^* \quad (v < 0,\ M_2 < 0). \quad (9\text{-}27)$$

При больших значениях площади, когда $b \gg 1$, значения холодо- и теплопроизводительности можно рассчитать, используя следующие соотношения ($v > 0$):

$$\Delta\Theta_1 = \Theta_1^* - \Theta_2^* \frac{b}{u + \varphi}; \quad (9\text{-}28)$$

$$\Delta\Theta_2 = \frac{2\Theta_2^* \exp(v - \varphi)}{\varphi + u}. \quad (9\text{-}29)$$

Анализируя влияние площади термобатареи на производительность ТТН, мы исследовали функции $\Delta\Theta_1 = f(b)$ и $\Delta\Theta_2 = \varphi(b)$, причем величина b по определению прямо пропорциональна водяному эквиваленту охлаждаемого теплоносителя. Однако по результатам выполненного в настоящем параграфе анализа функций $\Delta\Theta_1(b)$ и $\Delta\Theta_2(b)$ нельзя судить о влиянии величины водяного эквивалента W_1 на производительность ТТН, так как согласно определению [выражения (9-1) и (9-2)] величина производительности соответствует значениям $\Delta\Theta_1$, $\Delta\Theta_2$ с точностью до множителя, которым является $W_{1,2}$.

Очевидно, что при увеличении водяных эквивалентов теплоносителей холодо- и теплопроизводительность ТТН при постоянном значении тока питания монотонно возрастают, поскольку при этом уменьшаются перепады температуры на спаях каждого термоэлемента.

10. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ И НАГРЕВАТЕЛЕЙ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

При разработке полупроводниковых ТТН, используемых для охлаждения и нагрева потоков жидкости или газа, чаще всего в качестве исходных данных задают требуемое снижение температуры в охлаждаемом потоке

теплоносителя или повышение ее в нагреваемом, количество жидкости или газа, поступающих в единицу времени на холодные и горячие спаи термобатареи, теплофизические свойства теплоносителей и их начальные температуры. Обычно заданы также физические свойства термоэлектрического материала и значения коэффициентов теплоотдачи от спаев термобатареи к теплоносителям.

Исходя из этих данных конструктору приходится решать вопрос о выборе оптимальных геометрических размеров термобатареи и плотности тока, обеспечивающих достижение максимальной энергетической эффективности ТТН при всех заданных условиях.

Кроме указанных выше исходных данных, необходимо также задать один из размеров термобатареи, так как в противном случае оптимальных геометрических параметров не существует.

Величина максимального коэффициента энергетической эффективности ТТН при одновременном росте высоты термоэлементов ($\beta \to 0$) и площади термобатареи ($b,\ N \to 0$) монотонно повышается, стремясь к своему теоретическому пределу. Этот предел определяется соотношениями (5-21), (5-22) и зависит только от начальных температур потоков и термоэлектрической добротности материала термопар.

Основные характерные случаи задания ограничений на размеры термобатареи были изложены в § 5 для ТТН, работающих в условиях, когда температура теплоносителей не изменяется вдоль спаев. Эти же случаи характерны и для термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкостей или газов, т. е. для ТТН, в которых температура теплоносителей изменяется вдоль направления их движения. Рассмотрим расчет оптимальных параметров ТТН в каждом из этих случаев [18].

1. Задана высота термоэлементов, из которых собирается термобатарея. При этом, если известны все остальные указанные выше исходные данные, то как следует из выражений (8-8), (8-9), (8-21), (8-22), (9-3) коэффициент энергетической эффективности будет зависеть только от двух переменных — безразмерной плотности тока ν и безразмерной площади термобатареи N.

Перед конструктором возникает задача — выбрать эти переменные таким образом, чтобы обеспечить работу ТТН с наименьшим потреблением электроэнергии, т. е.

в режиме максимального коэффициента энергетической эффективности. При этом только одна из указанных переменных может быть выбрана независимо, вторая же выбирается исходя из заданного перепада температур в охлаждаемом или нагреваемом потоке жидкости или газа.

Как уже было отмечено, подобная задача возникает тогда, когда при массовом производстве ТТН, предназначенных для различных целей, термобатареи для них изготовляют из стандартных, унифицированных по размерам термоэлементов.

В общем случае, при произвольных начальных температурах потоков поставленная задача с математической точки зрения является задачей на нахождение условного максимума функции двух переменных $\varepsilon(\nu, N)$ при дополнительном условии $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta_1(\nu, N)$, либо функции $\mu(\nu, N)$ при дополнительном условии $\Delta\Theta_2 = \Delta\Theta_2(\nu, N)$. Решение этой задачи методом Лагранжа приходит к системе двух трансцендентных уравнений с двумя неизвестными, поэтому оно не может быть в общем виде выполнено аналитически. Достаточно просто задача решается численным методом с помощью ЭВМ, причем для этого требуется незначительная затрата машинного времени.

В дальнейшем все задачи об оптимизации параметров ТТН мы будем рассматривать только для случая работы его в качестве охладителя потока жидкости или газа, так как очевидно, что все сказанное в равной мере справедливо и для термоэлектрического нагревателя. Разумеется, что при этом имеются в виду только те случаи, когда применение термоэлектрического нагрева оправдано, т. е. когда $\mu > 1$ ($\varepsilon > 0$).

Прежде чем приступить к численному решению поставленной задачи, необходимо ограничить интервал значений одной из переменных, в котором ищется максимум функции $\varepsilon(\nu, N)$. Этот интервал будет полностью определять область задания функции $\varepsilon(\nu, N)$, так как вторая переменная не является независимой, а определяется уравнением связи $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta_1(\nu, N)$. В качестве независимой переменной удобно выбрать безразмерную плотность тока ν_0. Очевидно, что нижнее значение оптимальной плотности тока всегда больше нуля, а верхнее, во всяком случае, не превосходит величины $\Theta_1^н$, так как

$\nu = \Theta_1^н$ соответствует значению тока, при котором достигается максимальный перепад температур на спаях одной (первой) термопары. Таким образом, будем искать максимум функции $\varepsilon(\nu, N)$ лишь в интервале $0 < \nu < \Theta_1^н$. Увеличение плотности тока за верхнюю границу указанного интервала может вызвать только монотонное убывание холодильного коэффициента, так как при этом всегда уменьшается холодопроизводительность и одновременно растет количество потребляемой энергии. Такая оценка, хотя и является грубой, справедлива при любых параметрах термобатареи. Отметим, что при заданной величине $\Delta\Theta_1$ в точке, где достигается максимум функции $\varepsilon(\nu, N)$, будет существовать минимум $\Delta\Theta_2(\nu, N)$, поэтому при расчете будем определять координаты минимума функции $\Delta\Theta_2(\nu, N)$.

Дальнейшее решение может быть выполнено в такой последовательности. Весь интервал, в котором может изменяться переменная ν $(0 < \nu < \Theta_1^н)$, делится на k промежутков. Значение ν_i на конце каждого промежутка подставляется в уравнение $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta_1(\nu, N)$, которое решается относительно N_i, и затем вычисляется значение $\Theta_2(\nu_i, N_i)$, соответствующее концу данного промежутка. При этом величина $\Delta\Theta_2(\nu_i, N_i)$ из каждого последующего промежутка сравнивается с предыдущим — $\Delta\Theta_2(\nu_{i-1}, N_{i-1})$, и расчет производится до тех пор, пока не будет выполняться условие $\Delta\Theta_2(\nu_i, N_i) > \Delta\Theta_2(\nu_{i-1}, N_{i-1})$, т. е. пока функция $\Delta\Theta_2(\nu, N)$ не начинает возрастать. Очевидно, что значение оптимальной плотности тока ν_0, соответствующее минимуму функции $\Delta\Theta_2(\nu, N)$, будет находиться в интервале $\nu_{i-2} < \nu_0 < \nu_i$. Этот интервал снова делится на k промежутков, и все вычислительные операции производятся в той же последовательности. Повторяя процесс несколько раз, можно определить минимум функции $\Delta\Theta_2(\nu, N)$ и значения переменных ν_0 и N_0, соответствующие этому минимуму, с любой, наперед заданной точностью.

При выборе числа промежутков k, на которые делятся интервалы изменения ν, необходимо исходить из того, чтобы количество вычислений, а следовательно, и затрата машинного времени были бы минимальными. Этому условию удовлетворяет $k = 2$.

Блок-схема программы, необходимой для расчета данной задачи на ЭВМ, представлена в работе [18].

2. Иногда при расчете и проектировании ТТН одним из исходных данных является площадь термобатареи. В этом случае задачей расчета является определение оптимальной высоты термоэлементов и оптимальной плотности тока питания, которые обеспечивают максимальный коэффициент энергетической эффективности при всех остальных заданных параметрах ТТН [18, 19]. Площадь термобатареи обычно заранее задается в тех случаях, когда по условиям работы ТТН габариты его непосредственно связаны с габаритами охлаждаемого или нагреваемого объекта, поверхность которого ограничена.

Как это следует из выражений (8-8), (8-9), (8-21), (8-22), (9-3) и (9-4), поставленная задача сводится к нахождению условного максимума функции $\varepsilon(\nu, \beta)$ при дополнительном условии $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta_1(\nu, \beta)$. Очевидно, что нахождение оптимальных значений ν_0 и β_0, соответствующих $\varepsilon = \varepsilon_{макс}$, может быть выполнено в полной аналогии с рассмотренным выше случаем. При этом сохраняется и программа для решения задачи на ЭВМ [18].

3. При технико-экономическом анализе различных вариантов конструкции термоэлектрического охладителя возникает необходимость определить зависимость между величиной максимального коэффициента энергетической эффективности и расходом полупроводникового материала. Одновременно при этом нужно рассчитать высоту термоэлементов и ток питания, которые при всех указанных выше исходных данных обеспечивают для каждого значения объема термоэлементов максимальную величину ε. Так как с увеличением объема полупроводникового материала в термобатарее растет величина коэффициента энергетической эффективности, полученные в данном расчете результаты позволяют производить экономически обоснованный выбор конструкции термобатареи с оптимальным объемом полупроводниковых материалов. Если задаться последовательно несколькими значениями объема V термоэлектрического материала в термобатарее, то для каждого из них нахождение оптимальных величин плотности тока и одного из геометрических размеров, скажем, высоты термоэлементов, также представляет собой задачу на нахождение

координат условного максимума функции двух переменных $\varepsilon(\nu, \beta)$ при дополнительном условии $\Delta\Theta_1 = \Delta\Theta_1(\nu, \beta)$. Однако отличие от условий предыдущей задачи заключается в том, что здесь в качестве одного из исходных параметров вместо площади термобатареи S задан объем

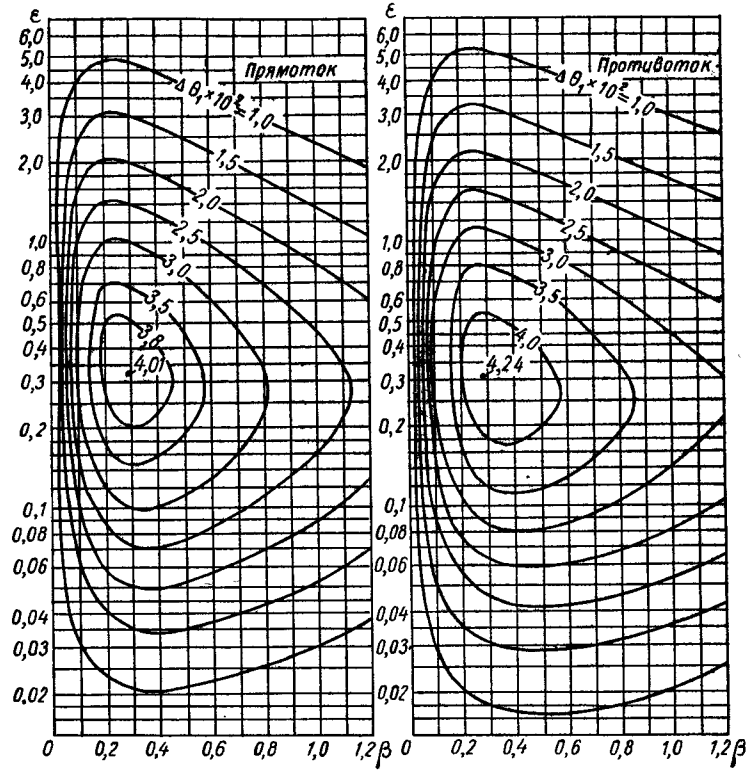


Рис. 38. Влияние высоты термоэлементов на энергетическую эффективность ТТН с заданной площадью термобатареи $\left(\theta_1^н = \theta_2^н = 0{,}6;\ m = 0{,}5;\ \eta = 0{,}25;\ N = 3\right)$

термоэлементов V, или безразмерный параметр $P = V\alpha_1/W_1\lambda$. Легко видеть, что $N = P\beta$, поэтому такая замена в исходных уравнениях (8-8), (8-9), (8-21), (8-22) может быть выполнена без затруднений. Очевидно, что алгоритм решения третьей задачи полностью аналогичен рассмотренному выше.

На рис. 38, 39 показано влияние высоты термоэлементов на величину холодильного коэффициента для различных значений перепадов температуры в охлаждаемом потоке при условии постоянства площади термобатареи (рис. 38) или ее объема (рис. 39). Зависимость

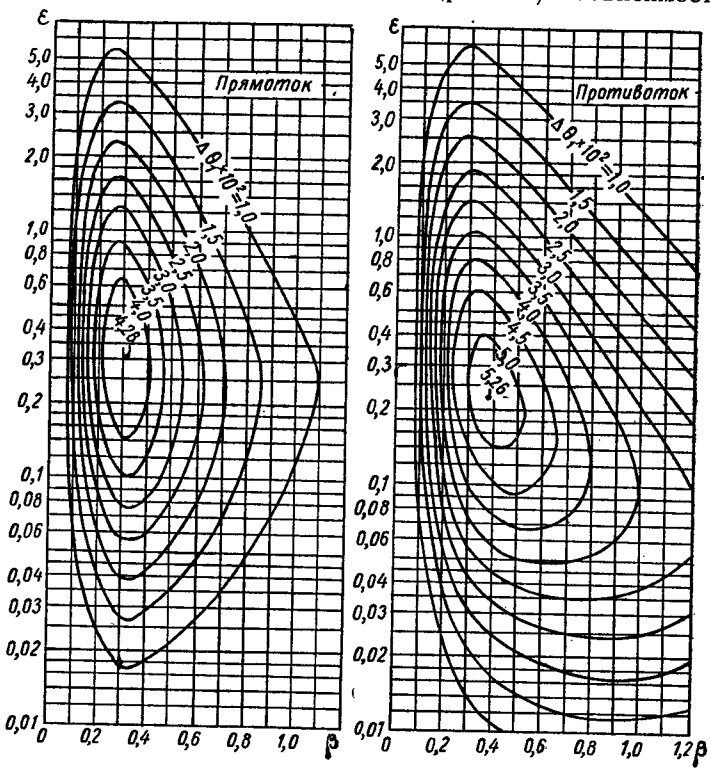


Рис. 39. Влияние высоты термоэлементов на энергетическую эффективность ТТН с заданным объемом полупроводникового материала $\left(\Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6;\ m = 0{,}5;\ \eta = 0{,}25;\ P = 5\right)$

$\varepsilon = f(\beta)$ при $\Delta\Theta_1 = \text{const}$ представляет собой замкнутую кривую. Это объясняется тем, что перепад температуры в охлаждаемом потоке при определенной высоте термоэлементов (т. е. при определенной величине критерия β) может быть достигнут в двух режимах охлаждения с разными значениями ε. Верхняя ветвь кривой $\varepsilon = f(\beta)$

(с бо́льшим значением ε) соответствует восходящей части зависимости $\Delta\Theta_1$ от тока, а нижняя часть — нисходящей. Как уже было указано, практическое значение имеют только верхние ветви рассматриваемых зависимостей. Все кривые имеют четко выраженный максимум, которому соответствует оптимальное значение критерия β или, что то же самое, оптимальное значение высоты термоэлементов.

Для часто встречающегося практического случая, когда начальные температуры потоков теплоносителей равны между собой $\left(\Theta_1^н = \Theta_2^н\right)$, может быть получено приближенное аналитическое решение рассмотренных задач [17].

При равенстве начальных температур теплоносителей и относительно малых значениях полного перепада температуры в охлаждаемом потоке для холодильного коэффициента справедливы следующие приближенные соотношения, которые можно получить, если в разложении ε по степеням $\Delta\Theta_1$ ограничиться лишь членами первого порядка малости:
прямоток

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta\Theta_1(1+\eta)}{\Theta_1^н[1-\exp(-g_1)]}\left[\frac{\Theta_1^н+1}{\Theta_1^н}\cdot\frac{N\beta(1+\eta)}{1-\exp(-g_1)} - 1\right]; \tag{10-1}$$

противоток

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta\Theta_1(\exp g_2 - \eta)}{\Theta_1^н(\exp g_2 - 1)}\left[\frac{\Theta^н+1}{\Theta^н}\cdot\frac{N\beta(\exp g_2-\eta)}{\exp g_2 - 1} - 1\right]; \quad \eta \neq 1. \tag{10-2}$$

Комплексы $g_{1,2}$ определяются соотношением (9-10).

Выражения (10-1) и (10-2) показывают, что если выполняются условия, общие для всех трех поставленных в настоящем параграфе задач, то холодильный коэффициент в рассматриваемом приближении зависит только от геометрических размеров термобатареи. Если задана высота термоэлементов, то величина холодильного коэффициента может изменяться лишь в зависимости от площади термобатареи, т. е. $\varepsilon = f(N)$. Все остальные величины, входящие в левую часть выражений (10-1), (10-2) являются заданными параметрами. Оптимальное

значение площади $N = N_0$, при котором холодильный коэффициент достигает максимума, может быть получено при решении уравнения $\partial\varepsilon/\partial N = 0$. Дифференцируя (10-1) и (10-2) по N и приравнивая нулю, получим для N_0 следующие трансцендентные уравнения:
прямоток

$$\frac{2g_1}{1-\exp(-g_1)} - \exp g_1 = \frac{\Theta_1^{\text{н}}}{\left(\Theta^{\text{н}}+1\right)[1+\beta(1+m)]}; \quad (10\text{-}3)$$

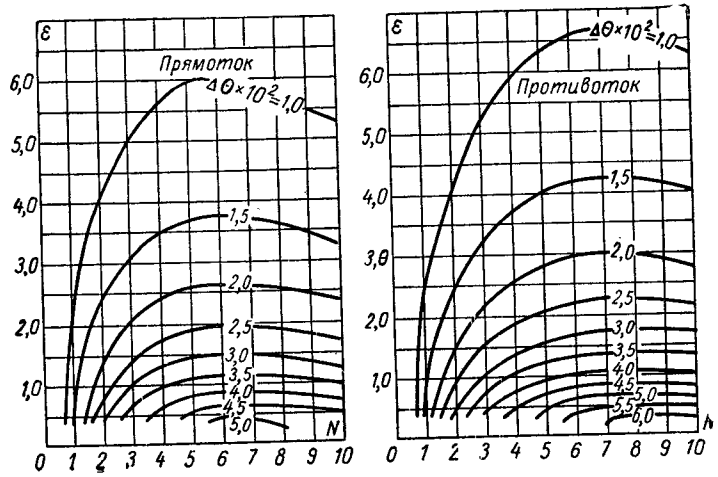


Рис. 40. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от площади термобатареи при постоянной высоте термоэлементов $\left(\beta = 0{,}2;\ \Theta_1^{\text{н}} = \Theta_2^{\text{н}} = 0{,}6;\ m = 0{,}5;\ \eta = 0{,}25\right)$

противоток

$$\frac{2g_2}{\exp g_2 - 1} \cdot \frac{\exp g_2 - \eta}{1-\eta} - \exp(-g_2)\left(\frac{\exp g_2 - \eta}{1-\eta}\right)^2 = \frac{\Theta^{\text{н}}}{(\Theta^{\text{н}}+1)[1+\beta(1+m)]}; \quad (\eta \neq 1). \quad (10\text{-}4)$$

В уравнения (10-3) и (10-4) величина $\Delta\Theta_1$ не входит в качестве параметра, следовательно, в рассматриваемом приближении оптимальная площадь термобатареи N_0 не зависит от холодопроизводительности $\Delta\Theta_1$, а является функцией β, m, η и $\Theta_1^{\text{н}}$. На рис. 40 в качестве примера

приведено семейство кривых $\varepsilon = f(N)$ при различных значениях $\Delta\Theta_1$, построенных на основании расчетов по точным формулам (на рисунках приведены только имеющие практическое значение верхние ветви кривых). При малых значениях $\Delta\Theta_1$, а практически при всех $0 \leqslant \Delta\Theta_1 \leqslant (\Delta\Theta_1)_{\text{макс}}$ значения N_0 на рис. 40 хорошо совпадают со значениями, вычисленными по уравнениям (10-3), (10-4).

Значение оптимальной площади термобатареи растет с увеличением высоты термоэлементов. При этом N_0 для противотока всегда несколько больше, чем для прямотока, т. е. при противотоке для достижения максимальной величины холодильного коэффициента при заданных значениях производительности и высоты термоэлементов требуется несколько большая площадь термобатареи, чем при прямотоке. Однако следует отметить, что при одинаковой площади величина холодильного коэффициента для противотока выше, чем для прямотока.

Если в задании на проектирование ТТН ограничена площадь термобатареи, то в рассматриваемом частном случае $\left(\Theta_1^{\text{н}} = \Theta_2^{\text{н}}\right)$ можно считать, что холодильный коэффициент будет зависеть только от высоты термоэлементов (толщины термобатареи), т. е. можно записать, что $\varepsilon = \varphi(\beta)$. Указанная зависимость всегда имеет максимум, которому соответствует оптимальная величина критерия $\beta = \beta_0$, т. е. оптимальная высота термоэлементов. Дифференцируя (10-1) и (10-2) по β и приравнивая нулю, получим следующие трансцендентные уравнения для нахождения β_0:
для прямотока

$$\frac{2g_1}{1-\exp(-g_1)} - [1+\beta_0(1+m)]\exp g_1 = \frac{\Theta^{\text{н}}}{(\Theta^{\text{н}}+1)[1+\beta_0(1+m)]}; \quad (10\text{-}5)$$

для противотока

$$\frac{2g_2}{\exp g_2 - 1} \cdot \frac{\exp g_2 - \eta}{1-\eta} - \exp(-g_2)[1+\beta_0(1+m)]\left(\frac{\exp g_2 - \eta}{1-\eta}\right)^2 = \frac{\Theta^{\text{н}}}{(\Theta^{\text{н}}+1)[1+\beta_0(1+m)]}; \quad \eta \neq 1. \quad (10\text{-}6)$$

Оптимальная величина β_0, которая может быть получена при решении уравнений (10-5) и (10-6), не зависит от $\Delta\Theta_1$, а является функцией величин N, m, η и $\Theta^н$. Разумеется, что это положение строго справедливо лишь при малых значениях $\Delta\Theta_1$, однако с точностью, достаточной для инженерных расчетов, можно считать его справедливым для всех $0 \leqslant \Delta\Theta_1 \leqslant (\Delta\Theta_1)_{макс}$. На рис. 41

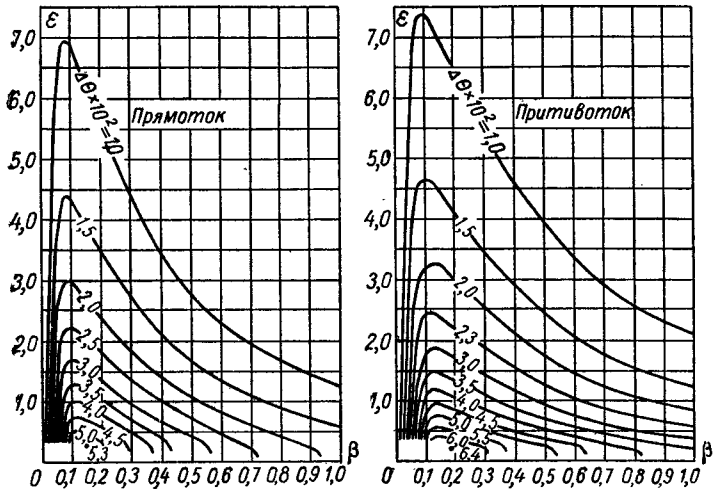


Рис. 41. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от высоты термоэлементов при постоянной площади термобатареи $\left(N = 8;\ \Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6;\ m = 0{,}5;\ \eta = 0{,}25\right)$

показаны семейства кривых $\varepsilon = \varphi(\beta)$ при различных значениях $\Delta\Theta_1$, построенные на основании расчетов, выполненных по точным формулам. Положение максимума на всех кривых мало изменяется с изменением $\Delta\Theta_1$. Величины β_0, полученные из точных расчетов, хорошо совпадают со значениями β_0, вычисленными по приближенным формулам (10-5) и (10-6).

Следует отметить, что с увеличением N уменьшается величина β_0, т. е. большей площади термобатареи соответствует большая оптимальная высота термоэлементов. При этом значение β_0 для противотока всегда несколько больше, чем для прямотока, следовательно, при противотоке для достижения $\varepsilon = \varepsilon_{макс}$ при заданных величинах холодопроизводительности и площади термобатареи требуется меньшая высота термоэлементов. Кроме того, сама величина $\varepsilon_{макс}$ при противотоке всегда больше, чем при прямотоке, т. е. встречное движение теплоносителей выгоднее, чем движение их в одном направлении, так как оно обеспечивает при всех прочих равных условиях меньший расход электроэнергии и термоэлектрического материала.

Аналогичные приближенные выражения для нахождения оптимальной высоты термоэлементов могут быть получены в том случае, когда мы определяем $\varepsilon_{макс}$ в зависимости от расхода термоэлектрического материала. Оптимальное значение величины β_0 может быть получено из уравнения $\partial\varepsilon/\partial\beta = 0$ при условии $P = \text{const}$.

После преобразования получим следующие трансцендентные уравнения для β_0:

для прямотока

$$\frac{g_1}{1-\exp(-g_1)} - \frac{1+\beta_0(1+m)}{2+\beta_0(1+m)}\exp g_1 = \frac{\Theta^н}{2(\Theta^н+1)[1+\beta_0(1+m)]}, \qquad (10\text{-}7)$$

для противотока

$$\frac{g_2}{\exp g_2 - 1}\cdot\frac{\exp g_2 - \eta}{1-\eta} - \exp(-g_2)\frac{1+\beta_0(1+m)}{2+\beta_0(1+m)}\left(\frac{\exp g_2-\eta}{1-\eta}\right)^2 = \frac{\Theta^н}{2(\Theta^н+1)[1+\beta_0(1+m)]}, \qquad (10\text{-}8)$$

где

$$g_1 = \frac{P\beta^2(1+\eta)}{1+\beta(1+m)};\quad g_2 = \frac{P\beta^2(1-\eta)}{1+\beta(1+m)};\quad \eta \neq 1.$$

При этом величина β_0, полученная из выражений (10-7) и (10-8), не зависит от $\Delta\Theta_1$, а определяется только значениями параметров P, m, η и $\Theta^н$. Этот вывод, полученный из анализа приближенных выражений, хорошо подтверждается расчетами, выполненными на ЭВМ по точным формулам. На рис. 42 представлены семейства

кривых $\varepsilon = \psi(\beta)$ при $P = \text{const}$, построенные по результатам этих расчетов.

Таким образом, при равенстве начальных температур теплоносителей и небольших перепадах температур в охлаждаемом потоке для определения оптимальных параметров ТТН с успехом могут быть использованы приближенные соотношения (10-3) — (10-8). Решение этих

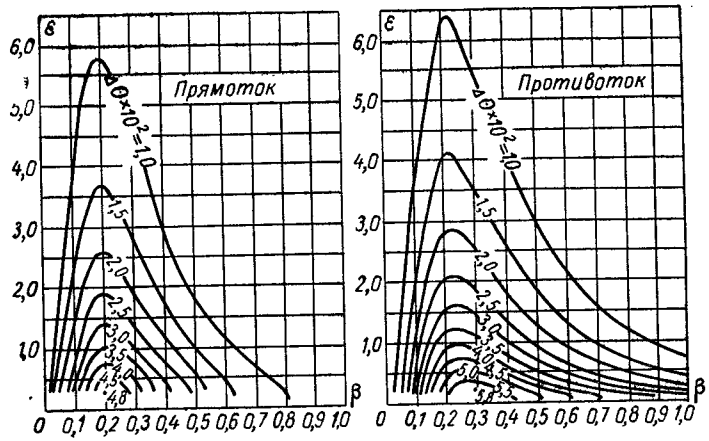


Рис. 42. Зависимость коэффициента энергетической эффективности ТТН от высоты термоэлементов при постоянном объеме термоэлементов $\left(P = 25;\ \Theta_1^н = \Theta_2^н = 0{,}6;\ m = 0{,}5;\ \eta = 0{,}25\right)$

уравнений достаточно просто может быть выполнено любым из известных методов (графоаналитическим, методом итераций и т. д.).

Можно указать еще на целый ряд дополнительных задач, которые возникают при расчете ТТН. К ним, например, относятся задачи о нахождении оптимальных параметров ТТН, обеспечивающих либо максимальное охлаждение (нагрев) одного из теплоносителей, либо минимальные размеры и вес термобатареи при заданной производительности и т. д. Все эти задачи с точки зрения их формальной постановки и решения будут аналогичны задачам, рассмотренным в настоящем параграфе, поэтому нет необходимости останавливаться на них подробно.

11. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ И УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Полученные выше формулы для определения температуры потоков жидкостей, обтекающих термобатарею, справедливы только в том случае, когда стационарное состояние системы существует. Однако в некоторой области параметров рассматриваемых ТТН уравнения, описывающие тепловые процессы, имеют неограниченно растущие со временем решения [20]. Это связано с наличием источников тепла переменной мощности (тепло Пельтье). Системы уравнений, имеющие решения указанного типа, можно называть неустойчивыми.

Определим область параметров, в которых уравнения термоэлектрического теплообменника устойчивы, и, следовательно, такой теплообменник может функционировать как охладитель жидкости. При анализе устойчивости примем те же допущения относительно рассматриваемой системы, что и при расчете стационарного состояния. Кроме того, предполагаем, что термобатарея достаточно тонка и ее теплоемкость вместе с теплоемкостью радиаторов и коммутационных пластин мала по сравнению с теплоемкостью прилегающего слоя жидкости. В этих условиях аналогично случаю, рассмотренному выше в § 6, можно использовать уравнения теплового баланса на спаях батареи, справедливые для стационарных условий:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Bi}_1\left(\Theta_1 - \Theta_1'\right) &= \nu\Theta_1' - 0{,}5\nu^2 - \left(\Theta_2' - \Theta_1'\right); \\ \mathrm{Bi}_2\left(\Theta_2' - \Theta_2\right) &= \nu\Theta_2' + 0{,}5\nu^2 - \left(\Theta_2' - \Theta_1'\right). \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}1)$$

Для параллельного встречного движения (противоток) процесс теплоотдачи от термоэлементов к потоку жидкости в нестационарных условиях характеризуется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Theta_1}{\partial\tau} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial X} &= N_1\left(\Theta_1' - \Theta_1\right); \\ \gamma\frac{\partial\Theta_2}{\partial\tau} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial X} &= N_2\left(\Theta_2' - \Theta_2\right). \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}2)$$

Кроме использовавшихся ранее безразмерных комплексов, здесь вводятся новые: безразмерное время $\tau = \frac{tw_1}{d}$ и соотношение скоростей $\gamma = w_1/w_2$ потоков

охлаждаемой w_1 и нагреваемой жидкости w_2. Принимаем, что $\gamma \leqslant 1$ (т. е. $w_2 \geqslant w_1$). В противном случае необходимо в первое уравнение системы (11-2) ввести обратное отношение скоростей $\gamma' = w_2/w_1$; на результат анализа устойчивости такая замена не влияет. Соотношение между w_1 и w_2 необходимо учитывать с тем, чтобы безразмерное время рассчитывать по наибольшей скорости потока; это дает возможность использовать операционный метод решения.

Будем считать, что температура обеих жидкостей в начальный момент постоянна по длине термобатареи и равна температуре жидкости на входе, в ТТН, где она поддерживается постоянной:

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1(X)\big|_{\tau=0} &= \Theta_1(\tau)\big|_{X=0} = \Theta_{1,0}; \\ \Theta_2(X)\big|_{\tau=0} &= \Theta_2(\tau)\big|_{X=1} = \Theta_{2,0}. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}3)$$

Исключив из системы (11-1) — (11-2) Θ_1' и Θ_2', имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Theta_1}{\partial\tau} + \frac{\partial\Theta_1}{\partial X} &= \frac{N_1}{F}\{\mathrm{Bi}_2\Theta_2 - [\mathrm{Bi}_2(1+\nu) - \nu^2]\Theta_1 + \\ &\quad + 0{,}5\nu^2(\mathrm{Bi}_2 - \nu + 2)\}; \\ \gamma\frac{\partial\Theta_2}{\partial\tau} - \frac{\partial\Theta_2}{\partial X} &= \frac{N_2}{F}\{\mathrm{Bi}_1\Theta_1 - [\mathrm{Bi}_1(1-\nu) - \nu^2]\Theta_2 + \\ &\quad + 0{,}5\nu^2(\mathrm{Bi}_1 + \nu + 2)\}. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}4)$$

Для анализа нестационарного температурного режима термоэлектрического теплообменника воспользуемся операционным методом. С учетом начальных условий преобразованная по Лапласу система (11-4) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \left[p - N_1\frac{\mathrm{Bi}_2(1+\nu) - \nu^2}{F}\right]\overline{\Theta}_1 + \frac{\partial\overline{\Theta}_1}{\partial X} &= \\ = \Theta_{1,0} + N_1\frac{\mathrm{Bi}_2\overline{\Theta}_2 + 0{,}5\nu^2 p^{-1}(\mathrm{Bi}_2 - \nu + 2)}{F}; \\ \left[\gamma p + N_2\frac{\mathrm{Bi}_1(1-\nu) - \nu^2}{F}\right]\overline{\Theta}_2 - \frac{\partial\overline{\Theta}_2}{\partial X} &= \\ = \gamma\Theta_{2,0} + N_2\frac{\mathrm{Bi}_1\overline{\Theta}_1 + 0{,}5\nu^2 p^{-1}(\mathrm{Bi}_1 + \nu + 2)}{F}. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}5)$$

В уравнениях (11-4) и (11-5) обозначено:

$$F = \mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_1 + \mathrm{Bi}_2 + \nu(\mathrm{Bi}_2 - \mathrm{Bi}_1 - \nu). \qquad (11\text{-}6)$$

Граничными условиями для системы (11-5) служат равенства

$$\Theta_1\big|_{X=0} = \frac{\Theta_{1,0}}{p}; \quad \Theta_2\big|_{X=1} = \frac{\Theta_{2,0}}{p}. \qquad (11\text{-}7)$$

Решение системы (11-5) для $\overline{\Theta}_1(X, p)$ можно записать в виде

$$\overline{\Theta}_1(X, p) = \{A(p)\,\mathrm{sh}\,Y_3(p)\,X + B(p)\,\mathrm{sh}\,Y_3(p)\,(1-X)\}\exp[Y_1(p)\,X] + C(p). \qquad (11\text{-}8)$$

Здесь приняты обозначения:

$$Y_1(p) = -\frac{1}{2}\left\{p(1-\gamma) + \frac{1}{F}[N_1\mathrm{Bi}_2 - N_2\mathrm{Bi}_1 + (N_1\mathrm{Bi}_2 + N_2\mathrm{Bi}_1)\nu + \nu^2(N_2 - N_1)]\right\}; \qquad (11\text{-}9)$$

$$Y_2(p) = \frac{1}{2}\left\{p(1+\gamma) + \frac{1}{F}[N_1\mathrm{Bi}_2 + N_2\mathrm{Bi}_1 + \nu(N_1\mathrm{Bi}_2 - N_2\mathrm{Bi}_1) - \nu^2(N_1 + N_2)]\right\}; \qquad (11\text{-}10)$$

$$Y_3(p) = \frac{1}{F}\left[Y_2^2(p)\,F - N_1N_2\,\mathrm{Bi}_1\mathrm{Bi}_2\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad (11\text{-}11)$$

$$A(p) = \left(\frac{\Theta_{1,0}}{p} - C\right)Y_3(p) + \exp[-Y_1(p)]\times \left\{\frac{N_1\,\mathrm{Bi}_2\Theta_{2,0}}{Fp} + \Theta_{1,0} + \frac{0{,}5\nu^2N_1(\mathrm{Bi}_2 - \nu + 2)}{Fp} - C\left[p + N_1\frac{\mathrm{Bi}_2(1+\nu) - \nu^2}{F}\right]\right\}\times \times\{\mathrm{sh}\,Y_3(p)\,[Y_2(p)\,\mathrm{sh}\,Y_3(p) + Y_3(p)\,\mathrm{ch}\,Y_3(p)]\}^{-1}; \qquad (11\text{-}12)$$

$$B(p) = \frac{\frac{\Theta_{1,0}}{p} - C(p)}{\mathrm{sh}\,Y_3(p)};$$

$$C(p) = \left\{\gamma N_1\,\mathrm{Bi}_2\Theta_{2,0} + \nu^2\frac{N_1N_2\,\mathrm{Bi}_2}{pF}(\mathrm{Bi}_1 + \nu + 2) + \left[\gamma p + \frac{N_2}{F}(\mathrm{Bi}_1 - \nu\,\mathrm{Bi}_1 - \nu^2)\right]\times \left[p\Theta_{1,0} + 0{,}5\nu^2\frac{N_1}{F}(\mathrm{Bi}_2 - \nu + 2)\right]\right\}\times \times p^{-1}\{p^2\gamma F + p[N_2(\mathrm{Bi}_1 - \nu\,\mathrm{Bi}_1 - \nu^2) + \gamma N_1(\mathrm{Bi}_2 + \mathrm{Bi}_2\nu - \nu^2)] - \nu^2N_1N_2\}^{-1}. \qquad (11\text{-}13)$$

Отметим некоторые особенности перехода от преобразованной по Лапласу функции $\bar{\Theta}_1(p)$ к временной области. Правая часть формулы (11-8) есть сложная трансцендентная функция p и получить полную формулу для $\Theta_1(\tau)$ не удается. Впрочем, для определения области устойчивости $\Theta_1(\tau)$ достаточно указать только область параметров, при которых $\Theta_1(\tau)$ ограничена. Множитель вида $\exp[Y_1(p)X]$ при переходе во временную область определяет изменение $\bar{\Theta}_1(X, \tau)$ вдоль координаты X, а также запаздывание во времени, зависящее от координаты X, и поэтому на устойчивость не влияет. Слагаемые, стоящие в фигурных скобках выражения (11-8), являются однозначными функциями p и при значениях p, лежащих на окружности бесконечного радиуса в плоскости комплексного переменного p, остаются ограниченными. Это позволяет при переходе к временной области пользоваться замкнутым путем интегрирования в плоскости p и применять теорему о вычетах.

Нас интересует, как ведет себя функция $\Theta_1(\tau)$ при больших τ, при каких условиях температура Θ_1 остается ограниченной, когда $\tau \to \infty$, т. е. имеет место устойчивость. Для определения условий устойчивости необходимо найти область параметров, при которых полюса выражения (11-8) имеют отрицательную вещественную часть [20]. Полюсами выражения (11-8) являются точка $p = 0$ и корни уравнения:

$$Y_2(p)\,\mathrm{sh}\,Y_3(p) + Y_3(p)\,\mathrm{ch}\,Y_3(p) = 0. \qquad (11\text{-}14)$$

Заметим, что корни знаменателя для $C(p)$ не являются полюсами $\bar{\Theta}_1(p)$, так как совпадают с нулями числителя и имеют ту же кратность.

Поскольку полюс $p = 0$ определяет стационарное распределение $\Theta_1(X)$, то для исследования устойчивости системы необходимо рассмотреть только корни уравнения (11-14). Уравнение типа (11-14) является основным не только в решении вопроса устойчивости работы теплообменника, имеющего в качестве нестационарного источника тепло Пельтье, но и теплообменников с внутренними источниками энергии другой природы, например, за счет выделения тепла в результате химических реакций на границе стенка — жидкость [50].

Очевидно, что уравнение (11-14) имеет корень в точках $Y_3(p) = 0$.

Раскрыв обозначение $Y_3(p)$, получим значения p, при которых удовлетворяется последнее равенство:

$$p_{1,2} = \left[-(N_1\,\mathrm{Bi}_2 + N_2\,\mathrm{Bi}_1) - \nu(N_1\,\mathrm{Bi}_2 - N_2\,\mathrm{Bi}_1) + \nu^2(N_1 + N_2) \pm 2\sqrt{N_1 N_2\,\mathrm{Bi}_1\,\mathrm{Bi}_2}\right][(1+\gamma)F]^{-1}. \qquad (11\text{-}15)$$

Практически всегда для термоохлаждающих устройств выполнено условие $F > 0$, ограничивающее величину допустимой плотности тока. Тогда из (11-15) следует необходимое условие устойчивости:

$$\nu^2(N_1 + N_2) - \nu(N_1\,\mathrm{Bi}_2 - N_2\,\mathrm{Bi}_1) - \left(\sqrt{N_1\,\mathrm{Bi}_2} - \sqrt{N_2\,\mathrm{Bi}_1}\right)^2 < 0. \qquad (11\text{-}16)$$

Покажем, что остальные корни уравнения (11-14) лежат на плоскости p левее корня p_1, так что условие (11-16) является и достаточным условием устойчивости. Введем обозначения:

$$Y_3(p) = a + bi; \quad Y_2(p) = c + di,$$

где a, b, c, d — произвольные действительные числа. Тогда уравнение (11-14) сводится к системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(c\mu_1 + a\mu_2)\cos b - (b\mu_1 + d\mu_2)\sin b = 0;\\ (d\mu_1 + b\mu_2)\cos b + (a\mu_1 + c\mu_2)\sin b = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}17)$$

где $\mu_1 = 2\,\mathrm{sh}\,a$; $\mu_2 = 2\,\mathrm{ch}\,a$.

Одновременно функции $\sin b$ и $\cos b$ в нуль не обращаются, следовательно, определитель однородной системы (11-17) должен быть равен нулю:

$$(c\mu_1 + a\mu_2)(a\mu_1 + c\mu_2) + (b\mu_1 + d\mu_2)(d\mu_1 + b\mu_2) = 0. \qquad (11\text{-}18)$$

Простые преобразования переводят (11-18) в условие:

$$e^{4a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bd}. \qquad (11\text{-}19)$$

Кроме того, по определению между величинами a, b, c и d существуют следующие связи:

$$c^2 - d^2 - \frac{N_1 N_2 \mathrm{Bi}_1 \mathrm{Bi}_2}{F^2} = a^2 - b^2; \qquad (11\text{-}20)$$

$$cd = ab. \qquad (11\text{-}21)$$

Рассмотрим совместно условия (11-19), (11-20) и (11-21). Для a, b, c и d, отличных от нуля, из соотношений (11-19) и (11-21) вытекают правила знаков $\mathrm{sign}\,(ac) = \mathrm{sign}\,(ac + bd)$ и $-\mathrm{sign}\,a = \mathrm{sign}\,(ac + bd)$, откуда всегда $c < 0$. Очевидно, что при $c = \mathrm{Re}\,Y_2(p) < 0$ соответствующие корни уравнения (11-14) лежат левее p_1.

Равенствам (11-19) — (11-21), когда часть величин a b, c, d обращается в нуль, удовлетворяют два возможных случая:

1) $a = 0$, $b = 0$, $d = 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$, $d = 0$.

Первый из них дает для уравнения (11-14) известную пару корней $p_{1,2}$, а второй — корни, лежащие левее корня p_1. Приведенные рассуждения доказывают достаточность условия (11-16).

Процесс изменения температуры жидкости от времени с момента включения тока питания в устойчивом режиме определяется зависимостью, представляющей собой сумму экспонент, на которую накладываются затухающие колебания.

Неравенство (11-16) выполняется в интервале значений тока $0 < \nu < \nu_0$:

$$\nu_0 = \frac{1 - \eta + [(1-\eta)^2 + 4\beta_1(\eta + m)(1 - \sqrt{\eta})]^{\frac{1}{2}}}{2\beta_1(\eta + m)}. \qquad (11\text{-}22)$$

Наибольшая допустимая для устойчивой системы плотность тока совпадает с граничным значением тока (8-34), который при анализе стационарного поля соответствовал возникновению периодичности в распределении температуры. Фактически значение ν_0 [формула (11-22)] определяет при принятых допущениях о соотношении между теплоемкостью батареи и жидкостью границу устойчивости. Естественно, что при этом должно соблюдаться также неравенство $F > 0$.

При $W_1 = W_2$ $\nu_0 = 0$, поэтому при симметричном обтекании стенки теплообменника режим работы всегда неустойчив. Примером неустойчивой системы с симметричными обтекающими потоками служит система регенеративного термоэлектрического теплообменника, рассматриваемого в работе [3], которая как следует из приведенных рассуждений не может работать в качестве охлаждающего устройства.

В частном случае $\mathrm{Bi}_1 \to \infty$ и $\mathrm{Bi}_2 \to \infty$ система всегда устойчива, если $W_2 > W_1$. При $W_1 \geqslant W_2$ область устойчивости определяется неравенством:

$$0 < \nu < \frac{\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2}}{\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2}}.$$

Решение задачи о границах устойчивости с учетом тепловой инерции самой термобатареи пока не получено. Однако оценки показывают, что в этом случае критическое значение тока несколько возрастает.

Анализ области устойчивости при параллельном движении жидкостей в одном направлении (прямоток) проводится аналогично рассмотренному. При этом оказывается, что прямоточный теплообменник представляет собой устойчивую систему при таких значениях своих параметров, когда соблюдается условие $F > 0$.

В реальных условиях в тех случаях, когда параметры термобатареи таковы, что система оказывается неустойчивой, потоки жидкости будут разогреваться до некоторой определенной температуры. Безграничному повышению температуры, естественно, будут препятствовать конечная мощность источника тока и потери тепла в окружающую среду.

12. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОХЛАДИТЕЛЕЙ И НАГРЕВАТЕЛЕЙ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

Полупроводниковые термоэлектрические охладители и нагреватели потоков жидкости работают в условиях, когда термоэлементы, расположенные вдоль потока, находятся в различных температурных условиях. Выше

были предложены методы расчета батарей, обеспечивающие максимальную эффективность с учетом ограничений на их размеры; при этом принималось, что батарея состоит из отдельных элементов с одинаковым током питания. Эффективность термобатареи может быть повышена за счет использования различной плотности тока питания термоэлементов, расположенных вдоль потока жидкости; это достигается проще всего компоновкой термобатареи из элементов с различными размерами. В работе [3], а также последующих публикациях [32, 34, 51], посвященных расчету охлаждающих и нагревательных устройств с максимальной энергетической эффективностью, принимается, что сила тока, проходящего через каждый термоэлемент, должна соответствовать условию максимума коэффициента энергетической эффективности. Все элементы термобатареи обычно включены в электрическую цепь последовательно, что вынуждает изменять размеры элементов в соответствии с распределением температуры вдоль термобатареи. Величина тока, обеспечивающая максимальное значение коэффициента энергетической эффективности, согласно выражению (1-36)

$$I_\varepsilon^0 = \frac{\alpha S \Delta T'}{\rho d (M-1)}. \qquad (12\text{-}1)$$

Когда ток в каждом элементе подчиняется соотношению (12-1), вся термобатарея функционирует с максимальной эффективностью. Однако, если через элементы термобатареи проходит ток $I = I_\varepsilon^0$, то холодопроизводительность элементов оказывается меньше предельной; поэтому для достижения заданной производительности приходится идти на увеличение общего числа термоэлементов или площади термобатареи. Это проявляется особенно сильно, если разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$ не очень велика. На практике в ряде случаев разность ΔT на начальном участке термобатареи может оказаться равной или меньше нуля. При этом соотношение (12-1) теряет смысл, и предложенная в работах [32, 34, 51] методика вообще не может быть использована.

Рассмотрим задачу нахождения оптимального распределения размеров элементов термобатареи вдоль потока жидкости (или, что эквивалентно, распределения

плотности тока), обеспечивающего определенную холодопроизводительность термобатареи при максимальной энергетической эффективности с учетом заданного предельного значения площади [14]. Известными считаем также водяные эквиваленты потоков и их начальные температуры.

Для упрощения расчетов будем несколько схематизировать реальные условия. Коэффициенты теплоотдачи между спаями и потоками жидкости считаем достаточно большими и пренебрегаем перепадами температур между поверхностью термобатареи и потоками жидкости. Практически, как это указано в § 2, такие условия наступают когда критерий $\mathrm{Bi} > 10$. Кроме того, принимаем, что водяной эквивалент потока, обтекающего ТТН со стороны горячих спаев, настолько велик, что перепадом температур на входе и выходе можно пренебречь [$T_2(x) = \mathrm{const}$]. Подобные условия характерны для устройства с интенсивным охлаждением горячих спаев; они имеют обычно место, например, для кондиционеров типа воздух — вода.

В рассматриваемом случае система дифференциальных уравнений, характеризующих в установившихся условиях изменение температуры параллельных потоков жидкости, обтекающих спаи термобатареи, может быть получена как частный случай системы (7-11), (7-12) при $\alpha_{1,2} \to \infty$:

$$-\frac{1}{b_1}\cdot\frac{d\Theta_1}{dX} = \frac{dK_{S_1}}{dX} = (1+\nu)\,\Theta_1 - \frac{\nu^2}{2} - \Theta_2; \qquad (12\text{-}2)$$

$$\frac{1}{b_2}\cdot\frac{d\Theta_2}{dX} = \frac{dK_{S_2}}{dX} = -(1-\nu)\,\Theta_2 + \frac{\nu^2}{2} + \Theta_1. \qquad (12\text{-}3)$$

Здесь $b_{1,2} = \frac{\lambda S}{W_{1,2} d}$; $X = \frac{x}{l}$ $(0 \leqslant X \leqslant 1)$; граничные условия (7-13) при этом останутся в силе, т. е. $\Theta_1(0) = \Theta_1^{\text{н}}$, $\Theta_2(0) = \Theta_2^{\text{н}}$, $K_{S_{1,2}}(0) = 0$.

Так как полная холодопроизводительность задана, то соответственно задана и температура охлаждаемого потока на выходе: $\Theta_1|_{X=1} = \Theta_1^{\text{к}}$. Поскольку в рассматривае-

мом случае $b_2 \to 0$ ($W_2 \to \infty$), то $\frac{d\Theta_2}{dX} \to 0$ и $\Theta_2(X) = \Theta_2^{н}$; тогда можно записать:

$$-\frac{1}{b_1} \cdot \frac{d\Theta_1}{dX} = \frac{dK_{S_1}}{dX} = (1+\nu)\,\Theta_1 - \frac{\nu^2}{2} - \Theta_2^{н}; \quad (12\text{-}4)$$

$$\frac{1}{b_2} \cdot \frac{d\Theta_2}{dX} = \frac{dK_{S_2}}{dX} = -(1-\nu)\,\Theta_2^{н} + \frac{\nu^2}{2} + \Theta_1. \quad (12\text{-}5)$$

Указанные уравнения относятся к прямотоку, однако в рассматриваемом случае постоянства $\Theta_2(X)$ результаты расчета не зависят от взаимного направления движения жидкости.

Задачу о расчете параметров батареи с максимальной энергетической эффективностью можно теперь сформулировать следующим образом. Требуется определить такую функцию $\nu(X) = \nu_{опт}(X)$ (оптимальное управление), при которой решение системы (12-2), (12-3), удовлетворяя соответствующим граничным условиям, даст наименьшее значение $K_{S_2}(1)$ (ясно, что наименьшее значение функционала $K_{S_2}(1)$ соответствует максимуму холодильного коэффициента ε).

Поставленная вариационная задача с условным экстремумом является задачей Майера [2], ее можно решить классическими методами. Более общим является метод, основанный на принципе максимума [35], позволяющий вводить ограничения на ν, например вида $\nu \leqslant A$.

Используем для решения принцип максимума в той его трактовке, которая относится к задачам с закрепленным временем [35] (в нашем случае вместо интервала времени закреплена длина отрезка вдоль безразмерной координаты X).

Введем вспомогательные сопряженные переменные $\zeta_1(X)$ и $\zeta_2(X)$ и промежуточную функцию вида

$$K = \zeta_1[-(1+\nu)\,\Theta_1 + \Theta_2 + 0{,}5\nu^2] + \\ + \zeta_2[-(1+\nu)\,\Theta_2 + \Theta_1 + 0{,}5\nu^2]. \quad (12\text{-}6)$$

С помощью этой функции основная система уравнений (12-4) — (12-5) и уравнения, необходимые для определения сопряженных переменных $\zeta_{1,2}(X)$, записываются в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial\Theta_i}{\partial X} = b_i \frac{\partial K}{\partial\zeta_i}; \quad (12\text{-}7)$$

$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial X} = -\frac{\partial K}{\partial\Theta_1}. \quad (12\text{-}8)$$

Для того чтобы управление $\nu(X)$ было оптимальным, т. е. $\nu(X) = \nu_{опт}(X)$, необходимо, чтобы оно доставляло максимум функции K:

$$\frac{\partial K}{\partial\nu} = 0. \quad (12\text{-}9)$$

При этом функция K переменного X должна быть постоянной:

$$K = 2C = \text{const} \geqslant 0. \quad (12\text{-}10)$$

Так как $\Theta_2(X) = \Theta_2^{н} = \text{const}$, то $\zeta_2 = \text{const} = -1$. Исключая из системы (12-9), (12-10) ζ_1, находим

$$\nu = [\Delta\Theta + 2C\Theta_1(\Delta\Theta)^{-1}]\{\{[1 - C(\Delta\Theta)^{-1}]^2 + \\ + 0{,}5[1 + 2C\Theta_1(\Delta\Theta)^{-2}](\Theta_1 + \Theta_2)\}^{\frac{1}{2}} + \\ + C(\Delta\Theta)^{-1} - 1\}^{-1}. \quad (12\text{-}11)$$

Постоянная C в зависимости от исходных данных задачи может принимать значения от нуля до бесконечности. Для того чтобы в конкретном случае определить C, нужно проинтегрировать уравнение (12-4), подставив при этом вместо ν его выражение (12-11). Ввиду того, что соответствующий интеграл можно оценить только численно, не удается получить в общем виде аналитическую зависимость C от $\Theta_1^{н}$, $\Theta_2^{н}$, $\Theta_1^{к}$ и b_1.

Предельные значения C, как легко видеть, соответствуют условиям максимального холодильного коэффициента и максимальной холодопроизводительности всех элементов термобатареи. Действительно, при $C=0$

$$\nu = \nu_1 = \frac{\Delta\Theta}{M-1},$$

и при $C_2 \to \infty$ получим $\nu = \nu_2 = \Theta_1$. Указанные соотношения совпадают с соответствующими формулами, приведенными в § 1. При всех промежуточных значениях и соблюдается соотношение $\nu_1 < \nu < \nu_2$. Если необходимо удовлетворить ограничению $\nu(X) \leqslant A$, то оптимальное управление определяется по формуле (12-11), если она дает значение, меньшее A, и принимает граничное значение $\nu(X) = A$, если формула (12-11) дает величину, большую A.

Независимо от величины C правая часть уравнения (12-4) всегда обращается в нуль, когда перепад температуры на батарее $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$ становится равным $0{,}5\,\Theta_1^2$. Естественно, что предельный перепад температуры на термобатарее, обтекаемой потоками теплоносителей, не может превышать максимального перепада на термоэлементе в отсутствии тепловой нагрузки, который равен $0{,}5\,\Theta_1^2$.

С помощью ЭВМ были рассчитаны основные параметры термобатареи с переменной плотностью тока. Для различных значений постоянной C были найдены зависимости $\nu(\Theta_1)$ и $\nu(X)$, критерий b_1 и холодильный коэффициент ε. Расчеты проведены для ряда значений начальной температуры $\Delta\Theta_1^{\text{н}}$ и перепадов температуры в потоке $\Delta\Theta_1 = \Theta_1^{\text{н}} - \Theta_1^{\text{к}}$. Значения b_1 и ε определялись путем численного интегрирования уравнений (12-4) и (12-5) с учетом (12-11), причем

$$b_1 = \int_{\Theta_1^{\text{к}}}^{\Theta_1^{\text{н}}} \frac{d\Theta_1}{(1+\nu)\,\Theta_1 - \Theta_2 - 0{,}5\nu^2}; \qquad (12\text{-}12)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{K_{S_2}(1) - K_{S_1}(1)}{K_{S_1}(1)} = \frac{1}{\Delta\theta_1} \int_{\Theta_1^{\text{к}}}^{\Theta_1^{\text{н}}} \frac{\nu(\nu + \Theta_2 - \Theta_1)\,d\Theta_1}{(1+\nu)\,\Theta_1 - \Theta_2 - 0{,}5\nu^2}. \qquad (12\text{-}13)$$

Ход температуры вдоль термобатареи можно найти, проинтегрировав (12-4) с учетом (12-11), (12-12). Данные об изменении плотности тока по длине термобатареи $\nu(X)$ получаются после подстановки $\Theta_1(X)$ в (12-11).

На рис. 43 представлены графики изменения плотности тока вдоль термобатареи в зависимости от температуры спаев для различных значений параметра C. В случае $\Theta_2 = 0{,}6$ предельный перепад на термобатарее $\Delta\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = 0{,}117$; значение ν в этой точке не зависит от C и равно Θ_1, т. е. 0,483. Графики рис. 44 характеризуют зависимость $\nu(X)$ для одного из вариантов температурных условий.

Сравнительные данные об эффективности термобатарей, работающих в условиях $\nu(X) = \nu^* = \text{const}$, были получены на основе соотношений, приведенных

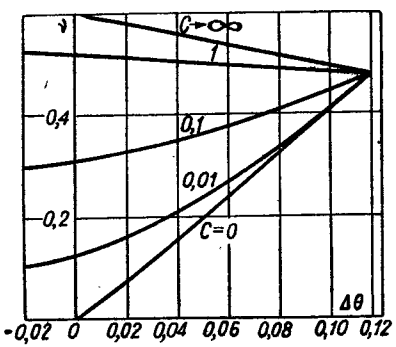


Рис. 43. Распределение плотности тока вдоль термобатареи в зависимости от изменения температуры холодных спаев ($\Theta_2 = 0{,}6$)

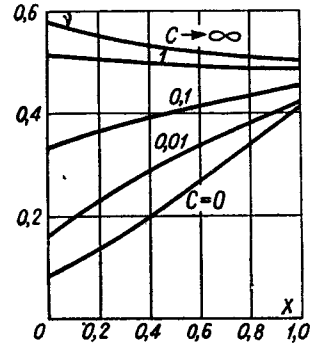


Рис. 44. Распределение плотности тока вдоль длины термобатареи ($\Theta_2 = 0{,}6$; $\Theta_1^{\text{н}} = 0{,}58$; $\Theta_1^{\text{к}} = 0{,}50$)

выше. Для определения ν^* при заданных $\Delta\Theta_1$, $\Theta_1^{\text{н}}$, $\Theta_2^{\text{н}}$ и b_1 необходимо решить трансцендентное уравнение

$$\Delta\Theta_1 = \left(\Theta_1^{\text{н}} - \frac{\Theta_2 + 0{,}5\nu^{*2}}{1+\nu^*}\right)\{1 - \exp[-b_1(1+\nu^*)]\}. \qquad (12\text{-}14)$$

При этом холодильный коэффициент

$$\varepsilon^* = \frac{(1+\nu^*)\,\Delta\Theta_1}{\nu^*[(\Theta_2 + 1 + 0{,}5\nu^*)\,\nu^* b_1 - \Delta\Theta_1]}. \qquad (12\text{-}15)$$

На рис. 45 приведены в качестве примера две пары кривых, определяющих зависимость холодильного коэффициента от параметра b_1 при заданном перепаде темпе-

ратур $\Delta\Theta_1$. Полученные данные показывают, что термобатареи с оптимальным распределением $\nu(X)$ имеют большую энергетическую эффективность.

Различие максимальных величин холодильного коэффициента, которые достигаются при оптимальных соотношениях площади и водяного эквивалента охлаждаемой жидкости, для сравниваемых случаев составляет 20—30%. Данные $\varepsilon = f(b)$ получены для интервала C от

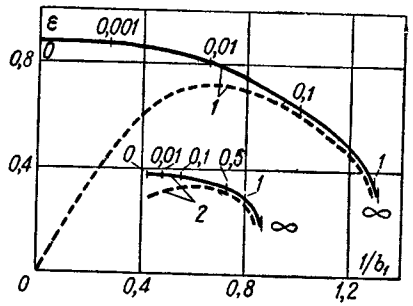


Рис. 45. Зависимость холодильного коэффициента от параметра b_1 ($\Theta_2 = 0{,}6$)

1 — $\Theta_1^н = 0{,}6$ и $\Theta_1^к = 0{,}52$; *2* — $\Theta_1^н = 0{,}58$ и $\Theta_1^к = 0{,}50$; ——— оптимальное распределение плотности тока по площади; — — — — постоянная плотность тока; (цифры на кривых — значения параметра C)

0 до ∞. В соответствующем диапазоне b_1 функция $\varepsilon(b_1)$ монотонно растет, а ε^* имеет максимум.

В случае $C \to \infty$ $\nu = \Theta_1$, т. е. термобатарея функционирует в условиях максимальной холодопроизводительности. Такой режим при заданных значениях $\Theta_1^н$, $\Theta_1^к$ и Θ_2 обеспечивает минимальное значение b_1. В соответствии с (12-12) и (12-13)

$$b_1 = \frac{1}{D} \ln \frac{\left(1 + D + \Theta_1^к\right)\left(1 - D + \Theta_1^н\right)}{\left(1 - D + \Theta_1^к\right)\left(1 + D + \Theta_1^н\right)}. \quad (12\text{-}16)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Theta_2}{D\Delta\Theta_1}\left[(D-1)\ln\frac{1-D+\Theta_1^н}{1-D+\Theta_1^к} + (D+1)\ln\frac{1+D+\Theta_1^н}{1+D+\Theta_1^к}\right], \quad (12\text{-}17)$$

где $D = (2\Theta_2 + 1)^{\frac{1}{2}}$,

Распределение температуры вдоль термобатареи, определяющее оптимальное изменение плотности тока:

$$\Theta_1(X) = D - 1 + 2D\left[\frac{1+D+\Theta_1^н}{1-D+\Theta^н}\exp(Db_1X) - 1\right]^{-1}. \quad (12\text{-}18)$$

Термобатарея с плотностью тока $\nu(X) = \text{const}$ уже не может обеспечить той же производительности, что и термобатарея с переменным значением ν при $\nu = \Theta_1$ и равных значениях b_1. Однако эти максимальные величины холодопроизводительности различаются незначительно, в пределах десятых процентов. Таким образом, использование элементов с переменными размерами практически нецелесообразно в случае термобатарей с относительно малым параметром b_1 (малым отношением площади к водяному эквиваленту потока), работающих в режиме, близком к режиму максимальной холодопроизводительности. Наибольший рост коэффициента энергетической эффективности достигается в случае использования батарей с относительно большим b_1, когда можно обеспечить для каждого элемента условия, близкие к режиму максимального холодильного коэффициента.

Зная функцию изменения плотности тока $\nu(X)$ вдоль термобатареи, можно определить число элементов n на единицу площади при заданной силе тока I:

$$n = \frac{j}{I} = \frac{\nu\lambda}{edI}.$$

Для практических целей вместо непрерывного можно использовать ступенчатое изменение размеров элементов ограничиваясь двумя-тремя ступенями.

Методика, аналогичная описанной выше, позволяет повысить и эффективность ТТН, работающих в качестве нагревателей потоков теплоносителей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабин В. П., Иорданишвили Е. К. О повышении эффекта термоэлектрического охлаждения ЖТФ, 1969, №2.

2. Блисс Г. Лекции по вариационному исчислению. Изд-во иностр. лит., 1950.

3. Бурштейн А. И. Физические основы расчета полупроводниковых термоэлектрических устройств. Физматгиз, 1962.

4. Вихорев Г. А. Выбор оптимальной плотности тока для термоэлектрических охлаждающих устройств на основе технико-экономического анализа. Сб. «Холодильная техника и технология», вып. 1, «Техніка», Киев, 1965.

5. Вихорев Г. А., Наер В. А. Влияние теплоотдачи на характеристики полупроводниковых термобатарей для холодильников и тепловых насосов, «Физика твердого тела», 1959, т. 1, № 6.

6. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Изд-во иностр. лит., 1958.

7. Гринберг Г. А. О нестационарном режиме работы охлаждающих термоэлементов. ЖТФ, 1968, т. 38, № 3.

8. Иоффе А. Ф. Полупроводниковые термоэлементы. Изд-во АН СССР, 1956.

9. Иоффе А. Ф. Физика полупроводников. Изд-во АН СССР, 1957.

10. Иоффе А. Ф., Стильбанс Л. С., Иорданишвили Е. К., Ставицкая Т. С. Термоэлектрическое охлаждение. Изд-во АН СССР, 1956.

11. Иоффе И. А. Влияние электрического сопротивления коммутационных пластин на эффективность термоэлектрического охлаждения. Сборник трудов по агрономической физике, вып. 13, «Колос», 1966.

12. Каганов М. А. Методика расчетов параметров полупроводниковых термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкостей или газов. Сборник трудов по агрономической физике, вып. 13, 1966.

13. Каганов М. А. Эффективность полупроводниковых термоэлектрических охладителей и нагревателей потоков жидкости и газа. «Инженерно-физический журнал», 1967, т. 12, № 2.

14. Каганов М. А. Об оптимальной конструкции полупроводниковых охладителей потоков жидкости. «Инженерно-физический журнал», 1968, т. 15, № 2.

15. Каганов М. А., Лискер И. С., Мушкин И. Г. К вопросу об измерении термоэлектрических свойств полупроводников. «Физика твердого тела», 1959, т. 1, № 6.

16. Каганов М. А., Привин М. Р. Расчет оптимальных параметров термоэлектрических охлаждающих устройств. Сборник трудов по агрономической физике, вып. 13, Изд-во «Колос», 1966.

17. Каганов М. А., Привин М. Р. Об определении оптимальных параметров термоэлектрических устройств для охлаждения потоков жидкости. Сборник трудов по агрономической физике, вып. 16, Гидрометеоиздат, 1967.

18. Каганов М. А., Привин М. Р. К методике расчета параметров термоэлектрических охлаждающих устройств с помощью ЭЦВМ. Сборник трудов по агрономической физике, вып. 16, Гидрометеоиздат, 1967.

19. Каганов М. А., Привин М. Р. Оптимизация параметров термоэлектрических охлаждающих устройств с учетом теплоотдачи на спаях. Изв. вузов, Энергетика, 1968, № 3.

20. Каганов М. А., Ривкин А. С. О нестационарном режиме теплообменников с внутренними источниками тепла. «Инженерно-физический журнал», 1968, т. 15, № 3.

21. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. Изд-во иностр. лит., 1962.

22. Колеико Е. А. Термоэлектрические охлаждающие приборы. «Наука», 1967.

23. Коротаев А. М. К методике измерения теплофизических характеристик термоэлектрических батарей. Изв. вузов, Энергетика, 1965, № 11.

24. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», 1967.

25. Любошиц И. Л. Исследование кинетики сушки в пневмогазовой зерносушилке с осциллирующим режимом. «Инженерно-физический журнал», 1960, № 8.

26. Манасян Ю. Г. Судовые термоэлектрические устройства и установки. «Судостроение», 1968.

27. Мартыновский В. С., Наер В. А. Опытное исследование полупроводникового водоохладителя. «Холодильная техника», 1960, № 4.

28. Мартыновский В. С., Наер В. А. Исследование полупроводниковых вариаторов тепловых потоков. «Теплоэнергетика», 1962, № 6.

29. Мартыновский В. С., Наер В. А., Хирич И. Я. Рациональный выбор полупроводниковых материалов для термоэлектрических холодильных установок. «Холодильная техника», 1966, № 10.

30. Наер В. А. Экспериментальное исследование термоэлектрической выпарной установки. «Физика твердого тела», 1959, т. 1, № 8.

31. Наер В. А. Расчет нестационарных режимов полупроводниковых холодильников и нагревателей. «Холодильная техника», 1962, № 1.

32. Наер В. А. Методы расчета термоэлектрических охладителей жидкости. Труды Одесского технологического ин-та пищевой и холодильной промышленности, 1962, т. 12.

33. Наер В. А. Влияние контактных электрических и тепловых сопротивлений на характеристики полупроводнико-

вых батарей. Сб. «Холодильная техника и технология», вып. 1, Киев, «Техніка», 1965.

34. Наер В. А., Роженцева С. А. О проектировании полупроводниковых охладителей и нагревателей потоков жидкости. «Инженерно-физический журнал», 1962, № 11.

35. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

36. Привин М. Р. Влияние изоляционных прослоек на эффективность полупроводниковых охладителей и нагревателей. Сборник трудов по агрономической физике, вып. 13. Изд-во «Колос», 1966.

37. Привин М. Р., Чудновский А. Ф. Двумерное температурное поле полупроводниковой термоэлектрической батареи. «Инженерно-физический журнал», 1966, т. 10, № 2.

38. Рабинович Г. Д. Теория теплового расчета рекуперативных теплообменных аппаратов. Изд-во АН БССР, 1963.

39. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. лит., 1955.

40. Стильбанс Л. С., Коленко Е. А. Термоэлектрическое охлаждение. Сб. «Полупроводники в науке и технике», т. 2, Изд-во АН СССР, 1956.

41. Стильбанс Л. С., Федорович Н. А. О работе охлаждающих термоэлементов в нестационарном режиме. ЖТФ, 1958, т. 28, № 3.

42. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Изд-во АН УССР, 1961.

43. Щербина А. Г. Расчет термобатарей в нестационарном режиме. Сб. трудов I и II совещаний по термоэлектричеству. Изд-во АН СССР, 1963.

44. Alfonso N,. Milnes A. G. Transient response and ripple effects in thermoelectric cooling cells. Electrical Engineering, 1960, v. 79, № 6.

45. Arai T. T., Madigan I. R. Response of a thermocouple circuit to nonsteady currents. Journal of Applied Physics, 1961, v. 32, № 4.

46. Boerdijk A. H. Contributions to a general theory of thermocouples. Journal of Applied Physics, 1959, v. 30, № 7.

47. Campbell M. R., Hogarth C. A. A corrections to the theory of Harman's method of determining the thermoelectric Figure of merit. International Journal Electronics, 1965, v. 19, № 6.

48. Crosby C. R., Norwood M. H., West B. K. The effect of heat transfer on optimum Peltier heat-pumping. Paper ASME, 1962, № HT-11.

49. Feldman C. L. Selection of hot junction temperatures for minimum fin area thermoelectric refrigerators. ASHRAE Journal, 1962, v. 4, № 2.

50. F.oraboshi F. P. Su un problema di scambio termico tra fluidi in contrcorrente. Calore, 1964, v. 35, № 4; 1966, v. 37, № 2.

51. Fredersdorf C. G. Efficiency and design equations for thermoermoelectric flow system. Advanced Energy Conversion, v. 2, Pergamon Press, 1962.

52. Gray P. E. The dynamic behaviour of thermoelectric devices. New York, J. Willey and Sons, 1960.

53. Gray P. E. Apporoximate dynamic response calculations for thermoelectric Peltier-effect devices. Solid—State Electronics, 1963, v. 6, № 4.

54. Harman T. C. Special techniques for measurement of thermoelectric properties. Journal of Applied Physics, 1958, v. 29, № 9.

55. Harman T. C., Cahn J. H., Logan M. J. Measurement of thermal conductivity by utilization of the Peltier effect. Journal of Applied Physics, 1959, v. 30, № 8.

56. Landecker K., Findley A. Study of transient behavior of Peltier junctions. Solid-State Electronics, 1961, v. 3, p. 239.

57. MacDonald D. K. and oth. On the possibility of thermoelectric refrigeration at very low temperatures. Philosophical Magazine, 1959, v. 4, № 40.

58. Neild A. B., Sheider W. E., Hennеke E. G. Application study of Submarine thermoelectric refrigeration sys tems Modern Refrigeration, 1965, v. 68, № 810.

59. Reich A. D., Madigan I. R. Transient response of a thermocouple circuit under steady currents. Jounal of Applied Physics, 1961, v. 32, № 2.

60. Rollinger C. N. Convectively cooled thermoelements with variable cross-sectional area. Transactions of the ASME, 1965, C 87, № 2.

61. Rollinger C. N., Sunderland J. E. Performance of thermoelectric heat pump with surface heat transfer. Solid-State Electronics, 1963, v. 6, № 1.

62. Swanson B. W., Sommers E. V. Refrigerator heat leak for sandwiched thermoelectric element. Transactions of the ASME, 1961, C 83, № 1.

63. Uchiyama S. Theory of thermoelectrie refrigeration, Memoirs of the Faculty of Engineering Nagoya University, 1957, v. 9, № 2.

64. Ybarrondo L. J. The effect of finite hot and finite cold junction fins on the performance of a thermoelectric heat pump. Solid-State Electronics, 1963, v. 6, № 4.

65. Ybarrondo L. J., Sunderland J. E. Optimized performance of thermoelectric heat pump with surface heat transfer and finite fins. Advanced Energy Conversion, 1964, v. 4, № 2.