В. М. ШЕСТАКОВ

ДИНАМИКА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Издание второе,
переработанное и дополненное

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования
СССР в качестве учебника для
студентов вузов, обучающихся
по специальности «гидрогеология
и инженерная геология»

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
1979

УДК 551.491.5

Рецензент:
кафедра гидрогеологии
Московского геологоразведочного института
им. Серго Орджоникидзе

Шестаков В. М.

Динамика подземных вод. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979 г. с. 368.

В учебнике изложены начала гидравлики жидкостей, физические и математические основы фильтрации и миграции подземных вод, методы гидродинамических расчетов при стационарной и нестационарной фильтрации, включая гидродинамическое обоснование опытно-фильтрационных работ, дренажей и водозаборов подземных вод. По сравнению с предыдущим изданием в работе усилена теоретическая часть, рассматриваются методы моделирования для решения гидрогеологических задач, на современном уровне дается теория скважин, введен раздел миграции подземных вод применительно к проблеме загрязнения подземных вод и решению ряда других вопросов.

Рассчитан на студентов гидрогеологических и инженерно-геологических специальностей университетов и вузов. Он может быть полезен также специалистам, занимающимся вопросами динамики подземных вод.

Ш $\frac{20806-116}{077(02)-79}$ 120—79 **2604040300**

© Издательство Московского университета, 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Динамика подземных вод изучает количественные закономерности движения подземных вод, разрабатывая теоретические основы и методы гидрогеологических расчетов, направленных на обоснование условий формирования подземных вод под влиянием естественных и искусственных факторов. Динамика подземных вод находится на стыке ряда наук — по своим задачам и естественным основам она является отраслью гидрогеологии, а ее теоретические представления опираются на точные науки. Поскольку движение подземных вод происходит главным образом путем фильтрации, т. е. гравитационного течения жидкости (воды) в дисперсной (пористой или трещинной) среде, то из точных наук наиболее обширно проникает в динамику подземных вод гидромеханика (гидравлика), рассматривающая закономерности фильтрации как механического процесса. Вместе с тем следует подчеркнуть, что фильтрация подземных вод (геофильтрация) имеет ряд существенных особенностей, связанных с постановкой гидрогеологических задач, а также обусловленных спецификой горных пород как фильтрующей среды.

Для понимания путей развития динамики подземных вод важно иметь в виду, что ее основные гидромеханические положения были заложены исследованиями, проведенными рядом известных специалистов, работавших в области гидравлики и теоретической механики (А. Дарси, Ж. Дюпюи, Ж. Буссинеск, Н. Е. Жуковский, Ф. Форхгеймер). Для решения задач динамики подземных вод в этих исследованиях использовались дифференциальные уравнения водного потока. Такая постановка исследования имеет исключительно важное значение, поскольку «лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение» (К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. Т. 20, с. 587).

Следует вместе с тем отметить, что этим исследованиям при высоком их гидромеханическом уровне было свойственно сравнительно слабое гидрогеологическое обоснование принятых расчет-

ных схем и исходных предпосылок, в значительной степени связанное с почти полным отсутствием специальных натурных наблюдений. Это обстоятельство имеет существенное значение, поскольку и до сих пор недостаточность натурных данных и неполнота их анализа нередко определяет слабые места в развитии динамики подземных вод.

Большой вклад в развитие теории фильтрации, особенно в ее приложение к задачам гидротехнического строительства, внес Н. Н. Павловский, который впервые дал *инженерную* постановку гидромеханических построений фильтрации и заложил основы современных методов решения фильтрационных задач. В развитии *гидрогеологических* положений динамики подземных вод исключительная роль принадлежит Г. Н. Каменскому, которого по праву можно считать основоположником создания динамики подземных вод как научной и учебной дисциплины. Ценность его работ определяется прежде всего стремлением к сочетанию глубокого анализа гидрогеологической обстановки с поисками наиболее простых и эффективных методов расчетов. Уместно вспомнить соображения Г. Н. Каменского о необходимости тесной связи динамики подземных вод с геологией водосодержащих пластов земной коры. «Отмеченная связь, — писал Г. Н. Каменский («Основы динамики подземных вод», 1939), — в настоящее время мало еще отражена в учении о движении подземных вод: это учение в значительной степени представляет собой «гидравлику грунтовых вод», мало учитывающую природу геологических и гидрогеологических особенностей водоносных пластов. Тесное взаимное проникновение факторов геологических, гидрогеологических и гидродинамических в изучение явлений динамики подземных вод является еще задачей ближайшего будущего». Сейчас можно сказать, что такой подход стал насущной задачей настоящего времени, причем прогресс в развитии современной динамики подземных вод можно, по-видимому, в значительной степени связывать с раскрытием физико-химической природы гидрогеологических процессов. Соответственно динамика подземных вод будет все более тесно проникать в другие разделы теоретической гидрогеологии, включающей в себя подземную гидрогеофизику и гидрогеохимию.

Особое значение имеет развитие физико-химических представлений динамики подземных вод при решении задач формирования качественного состава подземных вод, когда возникает необходимость изучения процессов *миграции* подземных вод, включающих в себя тепломассоперенос компонентов подземных вод с учетом взаимодействия воды и породы. Потребность в исследованиях миграции подземных вод особенно важна при изучении и прогнозе условий их загрязнения; все чаще такие исследования проникают в решение вопросов формирования состава подземных вод на региональном уровне.

Из-за резко возросших масштабов использования подземных вод и воздействия человека на природу возмущения подземных

вод, возникающие в результате деятельности человека, получают региональный характер. Это обстоятельство приводит, во-первых, к необходимости более подробного учета строения водоносных горизонтов и сложного комплекса природных факторов, предопределяющих условия формирования подземных вод, а во-вторых, к требованию повышения точности расчетов. Поэтому непременным условием развития современной динамики подземных вод является широкое использование численных методов расчета, и прежде всего методов математического моделирования, позволяющих вести геофильтрационные расчеты с наиболее полным учетом природной обстановки и всех действующих факторов.

В постановке исследований динамики подземных вод важно представлять себе не только ее прямую связь с природными условиями, но и обратную связь с решаемой теоретической или прикладной задачей. Это обстоятельство побуждает широко демонстрировать приложения получаемых расчетных зависимостей и способов расчета к методике гидрогеологических исследований. Особое внимание следует уделять вопросам схематизации гидрогеологической обстановки, решаемых с учетом отмеченных прямых и обратных связей.

Настоящий учебник составлен на основе лекционного курса, читаемого автором с 1960 г. на геологическом факультете Московского университета для студентов специальности «гидрогеология и инженерная геология». За это время курс претерпевал существенные изменения, связанные и с развитием самого предмета, и с поисками наилучших форм его преподавания. Такое развитие курса, несомненно, должно происходить и в дальнейшем.

Изложение материала в учебнике дается сжато, поскольку предполагается, что подробный его разбор должен осуществляться на лекциях и практических занятиях, которые учебником заменять нецелесообразно, хотя при вдумчивом подходе к его изучению возможно и самостоятельное овладение предметом. Вместе с тем состав учебника дает возможность более глубокого и обстоятельного ознакомления с излагаемыми в нем вопросами, для чего, в частности, служат довольно подробные ссылки на научную литературу, а также некоторые дополнительные материалы, выделяемые в тексте петитом.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании сохранена структура первого издания. Дополнено и развито главным образом изложение вопросов гидрогеологической и геофильтрационной схематизации, гидрогеомеханических положений динамики подземных вод. Для лучшей связи задач динамики подземных вод с исходными гидрогеологическими условиями вначале рассматриваются представления о потоках подземных вод (в этой части автору оказали содействие Р. М. Никитин и И. Ф. Фиделли). Введены также некоторые новые задачи, затрагивающие более широкий круг гидрогеологических процессов (например, палеогидродинамические построения, миграция загрязнения и естественных индикаторов в грунтовых водах). Для более полного представления современного математического аппарата динамики подземных вод приведено изложение основ использования метода интегральных преобразований, получившего широкое применение в специальной литературе. Кроме того, в ряде разделов введены упражнения, проработка которых дает возможность некоторой самостоятельной проверки понимания используемого расчетного аппарата.

Раздел I

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ

Глава 1

ИСХОДНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

В исходных представлениях динамики подземных вод необходимо сочетать теоретические построения механики водоносных пород (гидрогеомеханики), объединяющей механику воды (гидромеханику) и горных пород (геомеханику), с геологическим пониманием закономерностей формирования потоков подземных вод.

§ 1. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГИДРОГЕОМЕХАНИКИ

Гидрогеомеханика изучает механические основы динамики подземных вод; основной объект ее изучения — толща водоносных горных пород, рассматриваемая как единая механическая система (горные породы вместе с движущейся в них водой). Гидромеханические процессы рассматриваются обычно с позиций механики сплошной среды, т. е. раздельно — зернистые или трещинные породы представляются как сплошное тело, в каждой точке которого динамические и кинематические характеристики считаются статистически осредненными. Эта позиция имеет капитальный характер в механике дисперсных сред, и в реальных условиях она может оказаться несправедливой лишь применительно к крупноблочным скальным породам, где ее использование требует специального обоснования.

1.1. Передача силовых воздействий в воде и породе

Гидромеханическое состояние водоносных толщ формируется главным образом под действием гравитационных сил, которые в воде создают два типа силовых воздействий на горные породы: всестороннее гидростатическое обжатие и взвешивающее воздействие. Всестороннее гидростатическое обжатие действует на каждую частицу или агрегат породы равномерно со всех сторон и вызывает сравнительно малые деформации породы, обусловлива-

емые незначительной сжимаемостью минеральных частиц. Поэтому напряжения всестороннего обжатия, соответствующие давлению в воде p, получили название нейтральных.

Влияние взвешивающего воздействия, определяемое архимедовой силой взвешивания, приводит к уменьшению реального объемного веса породы, который в этом случае будет иметь выражение [14, 37]

$$\gamma_в = (\delta_п - \gamma)(1 - n), \qquad (I.1.1)$$

где $\delta_п$ — удельный вес материала скелета породы.

Рассмотрим условия силового равновесия в водонасыщенном элементе породы (рис. 1), связывая вертикальное напряжение

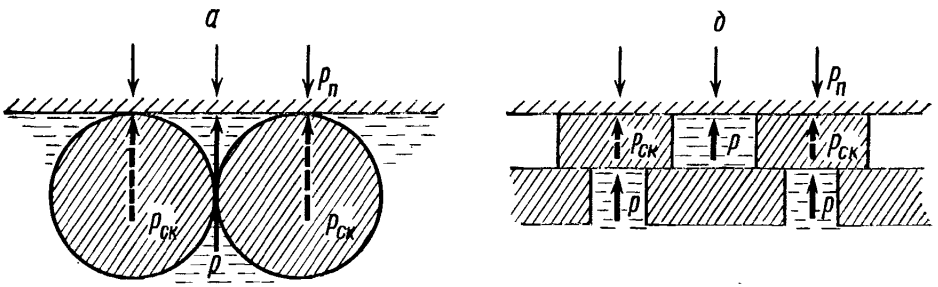


Рис. 1. Схема передачи давления в пласте на воду и на скелет породы: *а* — при точечных контактах; *б* — при плоских контактах

(давление) $p_п$, передаваемое на горизонтальную площадку от действия веса вышележащей толщи породы, с напряжением (давлением) $p_{ск}$ в скелете породы и нейтральным давлением воды p. Для упрощения задачи, не изменяющего ее смысловой постановки, будем считать, что в плане (в каждой горизонтальной плоскости) распределение напряжений одинаково, и, следовательно, эта система напряжений должна находиться в равновесии. Тогда можно записать:

$$p_п = p + p_{ск}. \qquad (I.1.2)$$

Строго говоря, такое равенство справедливо при точечных контактах между частицами породы (рис 1, *а*), поскольку при плоских контактах (рис. 1, *б*) вода непосредственно действует только на часть рассматриваемой площадки. Однако это компенсируется передачей давления воды на зерна породы, в результате чего давление воды на любую площадку передается полностью [14].

Изменения в напряженном состоянии пласта вызывают деформацию воды и скелета породы, приводящую к изменению количества воды в пласте за счет изменения плотности воды и объема порово-трещинного пространства. Учет таких деформаций при изучении фильтрационного потока приводит к представлениям об упругом режиме фильтрации; если же деформации пласта не учитываются, то режим фульрации называется жестким. Следует

отметить исключительно важное значение теории упругого режима фильтрации для изучения нестационарной геофильтрации в напорных пластах.

Напряженное состояние пласта формируется под влиянием *гидродинамических факторов,* когда исходными являются изменения давления в воде (p), или *геодинамических факторов,* когда исходными являются изменения общего давления в породе ($p_п$). Характерные гидродинамические факторы — изменения уровней водотоков и водоемов, взаимодействующих с подземными водами, инфильтрация атмосферных осадков, искусственный водоотбор или закачка в скважинах и т. п. Характерные геодинамические факторы — изменения атмосферного давления на поверхности земли, землетрясения, изменения внешнего давления за счет инженерной деятельности человека (возведение сооружений, выемка котлованов и карьеров, прохождение поездов).

Интересные проявления влияния геодинамических факторов на режим подземных вод возникают под реками, водохранилищами и морями при колебании их уровней, оказывающие помимо гидродинамического еще и геодинамическое воздействие, поскольку при этом происходят изменения внешнего давления, вызываемые изменениями веса столба воды в водоеме. Подобный процесс может привести к возникновению режима «псевдосвязи» напорных горизонтов с поверхностными водоемами, так как колебания уровней воды в водоеме будут вызывать соответствующие колебания давления в напорных пластах даже при полном отсутствии гидравлической связи между подземными и поверхностными водами.

Более подробно такие процессы рассмотрены в § 1 главы 4 раздела III.

1.2. Гравитационный потенциал и напор фильтрационного потока

Поскольку фильтрационный поток формируется главным образом под действием гравитационных сил, рассмотрим обоснование величины гравитационного потенциала, определяющего собой удельную энергию гравитационных сил в водном потоке. Исходя из постулированного ранее представления фильтрации с позиций механики сплошной среды составим условия равновесия элементарного столбика жидкости длиной l и площадью ω (рис. 2). На торцах этого столбика действуют силы давления $P_1=p_1\omega$ и $P_2=p_2\omega$ (p_1 и p_2 — давления в сечениях 1 и 2), направленные вдоль столбика; в объеме столбика действует его сила тя-

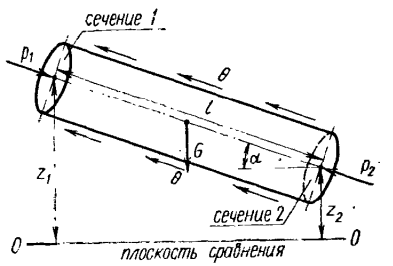


Рис. 2. Элемент водного потока

жести $G=\gamma\omega l$ (γ — объемный вес воды), направленная по вертикали; этим силам противодействуют силы сопротивления Θ, возникающие по поверхности столбика.

Исходя из равенства проекций действующих сил на направление этого столбика запишем уравнение равновесия

$$P_1 - P_2 + G\sin\alpha = \Theta \qquad \text{(I.1.3)}$$

или, имея в виду, что $l\sin\alpha = z_1 - z_2$, получим

$$(p_1 - p_2)\,\omega + \gamma(z_1 - z_2)\,\omega = \Theta. \qquad \text{(I.1.3а)}$$

Сгруппируем в левой части этого уравнения величины p и γz для каждого сечения, а в правой части уравнения заменим ω на V/l:

$$(p_1 + \gamma z_1) - (p_2 + \gamma z_2) = \frac{\Theta l}{V}. \qquad \text{(I.1.3б)}$$

Обозначив далее

$$\varphi = p + \gamma z, \qquad \text{(I.1.4)}$$

приведем уравнение (I.1.3б) к виду

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\Theta l}{V}. \qquad \text{(I.1.5)}$$

Величина Θl представляет собой работу, затрачиваемую на преодоление сил сопротивления в элементарном столбике объемом V, а величина $\frac{\Theta l}{V}$ — энергию, затрачиваемую на перемещение единичного объема потока между сечениями l и , которая по определению должна равняться разнице значений гравитационного потенциала в этих сечениях. Из уравнения (I.1.5) следует, что величина φ как раз и представляет собой гравитационный потенциал, поскольку разница его значений определяет собой удельные потери энергии водного потока.

Разделив выражение (I.1.5) на l, получим

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = I_\varphi = \frac{\Theta}{V}, \qquad \text{(I.1.5а)}$$

т. е. удельные силы сопротивления, действующие в водном потоке, определяются величиной градиента гравитационного потенциала I_φ.

Величина объемного веса воды меняется в зависимости от ее состава, температуры и давления.

Максимальную величину $\gamma_{макс}$ удельный вес имеет при температуре $\theta=4°$. Ниже приведены данные изменения относительного удельного веса $\bar{\gamma}=\gamma/\gamma_{макс}$ от температуры θ°C для чистой воды при атмосферном давлении:

θ	5	10	20	30	50	70	100
$\bar{\gamma}$	0,99999	0,99975	0,99826	0,99576	0,9882	0,97794	0,95865

В гидравлике водных потоков изменения γ обычно не учитываются и тогда вместо потенциала φ удобнее использовать *гидростатический напор*

$$H = \frac{\varphi}{\gamma} = h_p + z, \quad h_p = \frac{p}{\gamma}, \tag{I.1.6}$$

имеющий размерность длины. Гидростатический напор характеризует уровень потенциальной энергии в данной точке потока; в соответствии с выражением (I.1.6) его величина складывается из высоты давления (пьезометрической высоты) $h_p = \frac{p}{\gamma}$, характеризующей энергию давления в данной точке, и ординаты точки относительно плоскости сравнения z, характеризующей энергию положения в данной точке.

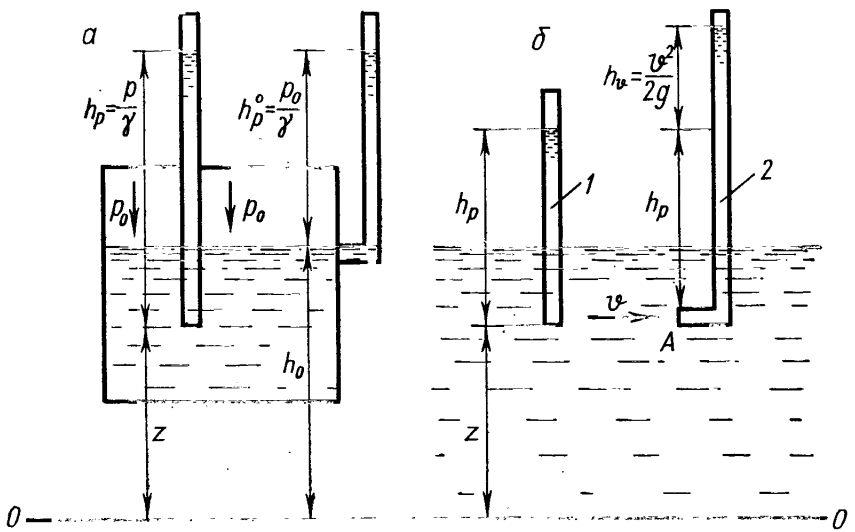


Рис. 3. Геометрическая интерпретация составляющих напора при измерении пьезометрическими трубками: *а* — в закрытом сосуде; *б* — в открытом потоке (*1* — пьезометр, *2* — трубка Пито)

В сосуде с покоящейся жидкостью (рис. 3, *а*) давление распространяется по гидростатическому закону, поэтому здесь в каждой точке имеем $p = p_0 + \gamma(h_0 - z)$ и согласно (I.1.6) $H = \frac{p_0}{\gamma} + h_0$, т. е. в каждой точке покоящейся жидкости гидростатический напор есть величина постоянная, равная уровню поверхности воды относительно плоскости сравнения. Поэтому если в открытом сосуде поток ввести в открытую трубку, отверстие которой совпало бы с направлением потока (рис. 3, *б*), то уровень в этой трубке, измеренный относительно данной точки, покажет высоту давления, а измеренный относительно плоскости сравнения — величину гид-

ростатического напора. Такие трубки, используемые для измерения давления или напора, называются пьезометрическими; в натурных условиях функции пьезометрических трубок выполняют наблюдательные скважины. При этом напор определяется как свободный уровень воды в наблюдательной скважине, измеренный относительно заданной плоскости сравнения.

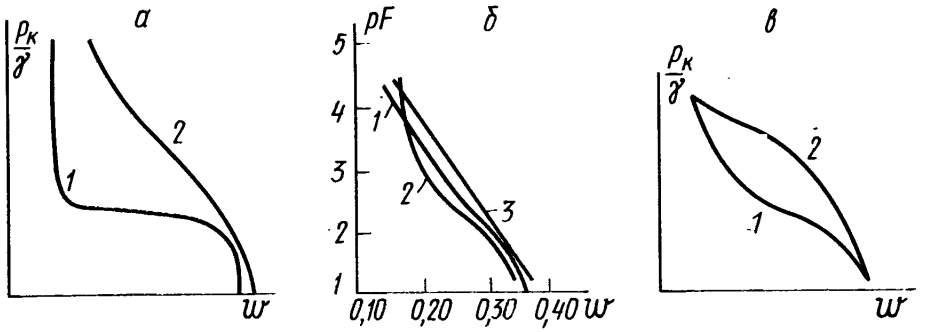


Рис. 4. Типичные графики зависимости капиллярного давления от влажности:
а — вид кривых для однородных песчаных (*1*) и глинистых (*2*) пород; *б* — зависимость величины pF (при $p_к$ в миллибарах) от объемной влажности для супесчано-суглинистых пород (*1*, *2* и *3* — на глубинах 0,2; 0,6 и 1,4 м от поверхности земли); *в* — гистерезис кривых при насыщении (*1*) и осушении (*2*)

При неполном водонасыщении пород в зоне аэрации гидростатическое давление становится отрицательным (меньшим атмосферного). Величина такого капиллярного давления зависит от влажности породы, причем эта зависимость выражается кривой водозадерживающей способности, являющейся важнейшей водно-физической характеристикой породы. Форма это кривой определяется строением порового пространства (рис. 4, *а*); обычно она представляется в виде зависимости величины $pF=\lg(-p_к/\gamma)$ от влажности w (рис. 4, *б*). Эта зависимость обладает гистерезисом, поскольку она меняется при различной направленности протекания процесса (рис. 4, *в*).

§ 2. ПОТОКИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Представления о потоках подземных вод рассматриваются для выявления и систематизации гидродинамических условий формирования подземных вод, которые обусловливаются формами их питания, распространения (транзита) и разгрузки. Такие представления были обстоятельно разработаны Г. Н. Каменским, выделившим и описавшим типы потоков подземных вод по условиям залегания водоносных толщ [24, 25]. В дальнейшем Н. Н. Ходжибаев, рассматривая региональные условия формирования подземных вод Узбекистана [51], предложил использовать понятие

потока подземных вод в качестве таксономической единицы гидрогеологического районирования грунтовых вод. Развивая эти представления, определим поток подземных вод как пространственное выражение региональной структуры движения и баланса подземных вод. Основная цель построения потока подземных вод — возможно более наглядное представление о региональной динамике подземных вод, включая питание, разгрузку и направление движения подземных вод, в определенной степени завершенном гидрогеологическом цикле. Потоки подземных вод приурочиваются к определенной территории со свойственными ей физико-географическими и геолого-структурными особенностями, причем потоки могут полностью занимать определенную гидрогеологическую структуру, а могут иметь и вложенный характер, когда в пределах гидрогеологической структуры внутри одного потока располагается другой поток (см., например, потоки в речных долинах).

Рассмотрим основные представления о природных условиях формирования потоков подземных вод, имеющие принципиальный характер для понимания постановки задачи динамики подземных вод.

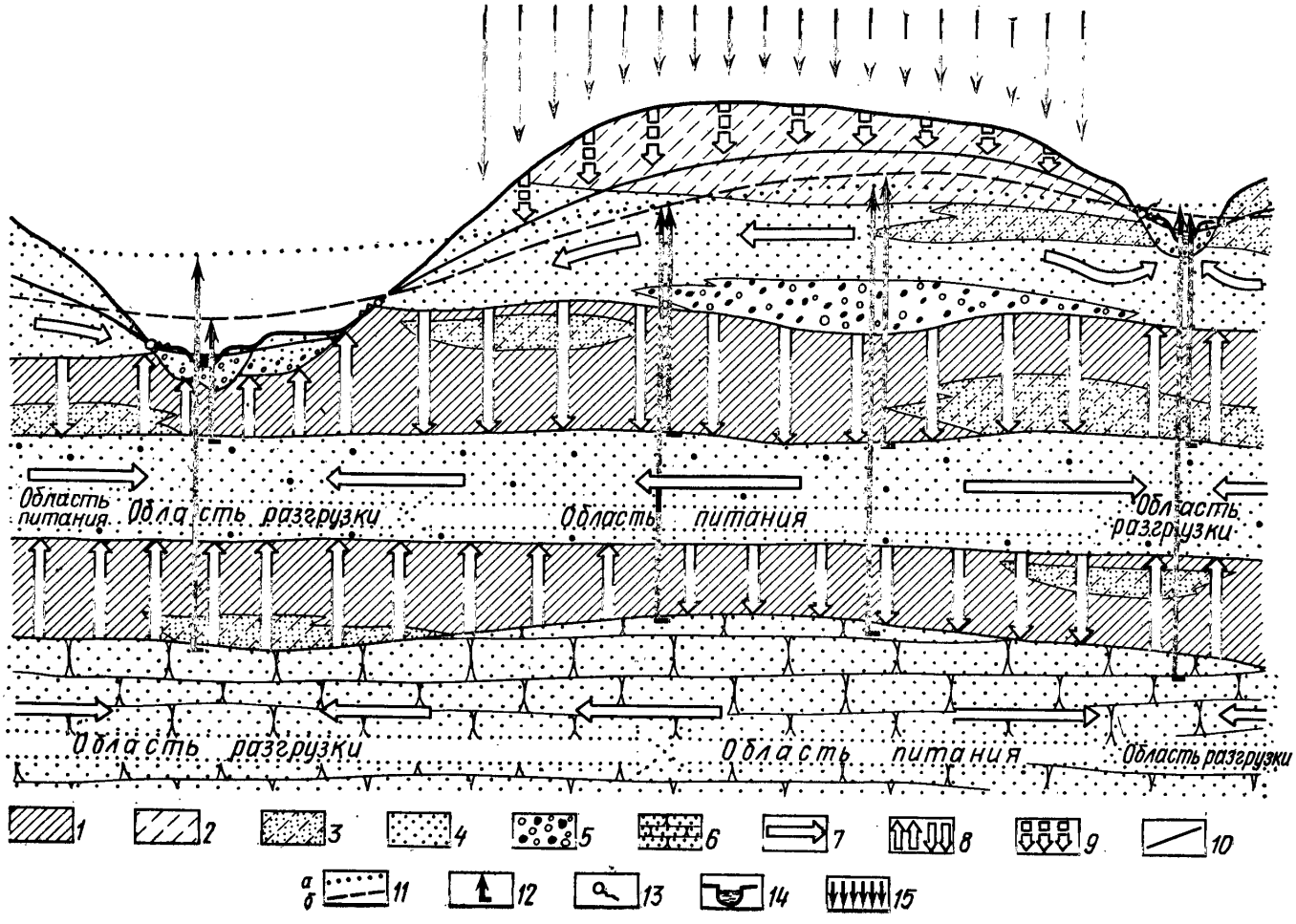
Питание подземных вод целесообразно подразделить [25] на площадное (рассеянное) и местное (локальное). Площадное питание происходит путем инфильтрации (атмосферных осадков, оросительной воды) через зону аэрации и путем перетекания через слабопроницаемые разделяющие слои. Местное питание осуществляется путем фильтрации из поверхностных водотоков (рек, каналов) или водоемов (водохранилищ, бассейнов, озер, морей), а также перетеканием из соседних пластов по зонам тектонических нарушений.

Разгрузка подземных вод чаще имеет локальный характер и осуществляется главным образом субаквальным путем в водотоках, водоемах, открытых родниках, а также за счет испарения и транспирации воды растениями, путем площадного и локального перетекания в соседние горизонты и на поверхность земли (в заболоченные участки и солончаки). В формировании подземных вод значительную роль играет искусственный водоотбор, создающий специфические области разгрузки в карьерах месторождений полезных ископаемых, водозаборах и дренажах.

Следует отметить, что представления об областях питания и разгрузки имеют относительный характер: при изменении гидродинамической обстановки они могут изменять и размеры, и характер, так что области питания могут переходить в области разгрузки и наоборот.

Приведем характеристику основных типов потоков подземных вод, представляющих наибольший интерес с точки зрения закономерностей их динамики.

Водораздельные потоки, формируемые на междуречных пространствах, являются одним из наиболее распространенных типов


Область питания
Область разгрузки
Область питания
Область разгрузки
Область разгрузки
Область питания
Область разгрузки
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
а
б
11
12
13
14
15

потоков. Их питание осуществляется главным образом путем инфильтрации атмосферных осадков, а разгрузка происходит в речных долинах (субаквальным путем, родниками и в зонах выклинивания), а также в эрозионных врезах (родниками и скрытым выклиниванием в делювиальном шлейфе). Такие потоки состоят обычно из одного или нескольких водоносных горизонтов (пластов), разделенных между собой относительно водоупорными пластами (рис. 5).

Питание нижележащих напорных водоносных пластов осуществляется путем перетекания через разделяющие пласты, что было впервые показано А. Н. Мятиевым [40] на основании анализа соотношений уровней (напоров) подземных вод в различных водоносных пластах. Такой анализ показывает, что в центральной части водораздельного потока имеет место падение напоров сверху вниз с образованием куполов напорной поверхности в пределах каждого водоносного пласта, а в зонах эрозионных врезов происходит «инверсия» изменения напоров с возрастанием их по глубине. Это положение свидетельствует о площадном питании потока на водоразделах и дренировании его в речных долинах и эрозионных врезах, причем накопленный к настоящему времени фактический материал показывает, что большинство эрозионных врезов дренирует не только грунтовые воды, но и достаточно глубокие напорные горизонты зоны интенсивного водообмена.

Следует отметить, что на условия перетекания существенное влияние оказывает неоднородность водоносных отложений. Многими материалами показано значительное увеличение проницаемости водоносных и разделяющих пластов в речных долинах [58, 60], хотя представления о природе этого влияния пока остаются дискуссионными. На интенсивность перетекания влияет площадная литологическая неоднородность разделяющих пластов, особенно наличие в них так называемых гидрогеологических окон, обусловленных резкой фациальной сменой отложений разделяющих пластов.

Потоки в речных долинах образуют грунтовые воды, режим которых обусловливается главным образом взаимодействием с поверхностными водами (рекой, ее рукавами и старицами, водохранилищами).

Для долин равнинных рек (рис. 6, *а*) характерны питание за счет инфильтрации и разгрузка в реки, хотя при высоких уровнях воды (в паводок или при создании водохранилища) поток временно

Рис. 5. Схема междуречного потока, по А. Н. Мятиеву: *1* — суглинок; *2* — супесь; *3* — песок глинистый; *4* — песок; *5* — гравий и галька; *6* — песчаник; *7* — направление подземного потока; *8* — перетекание через слабопроницаемые породы; *9* — инфильтрация; *10* — уровень грунтовых вод; *11* — пьезометрические уровни второго и третьего от поверхности водоносного горизонта; *12* — высота напора подземных вод; *13* — родник; *14* — река; *15* — атмосферные осадки

может быть направлен из реки в сторону берега, так что при этом река теряет свою дренирующую роль и становится областью питания. Водоносный горизонт речных долин слагается сравнительно однородными песчаными, песчано-гравийными аллювиальными отложениями, образующими обычно единый водоносный пласт;

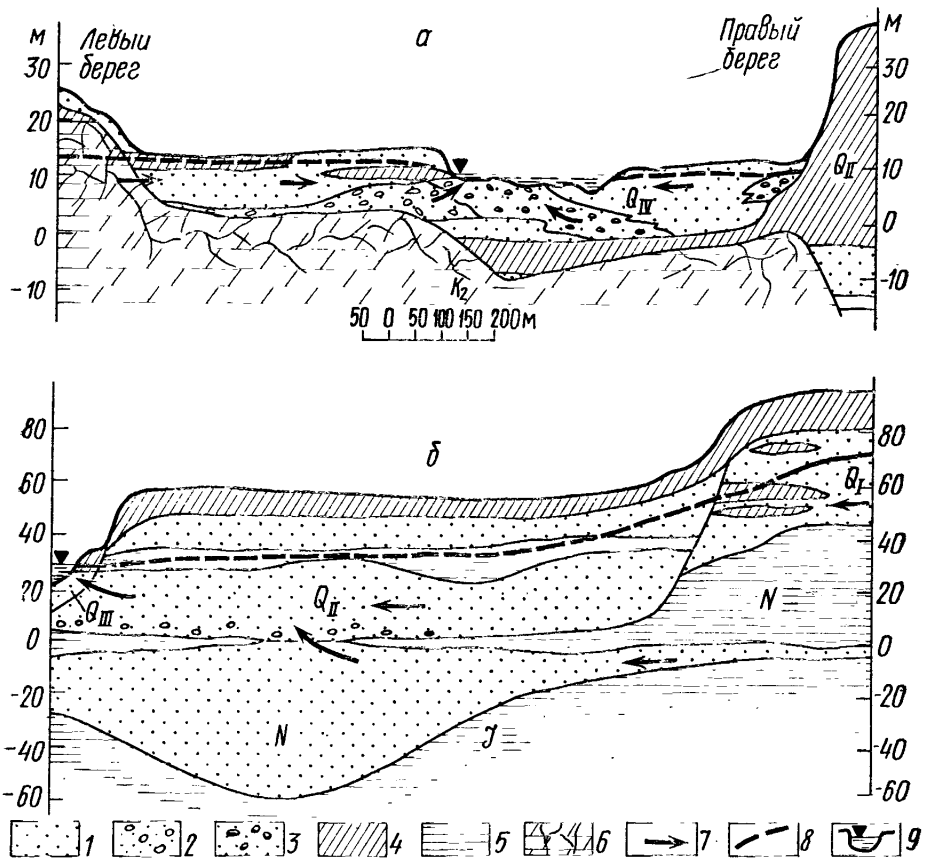


Рис. 6. Примеры гидрогеологических разрезов по речным долинам:
а — р. Нямунас [19], *б* — р. Волга; *1* — песок; *2* — гравий, галька; *3* — галька, валуны; *4* — суглинок; *5* — глина; *6* — мергель в кровле, трещиноватый; *7* — направление подземного потока; *8* — уровень подземных вод; *9* — река

вместе с тем иногда в таких отложениях формируются сравнительно выдержанные глинистые слои, разделяющие поток на два, а иногда и три пласта (рис. 6, *б*).

Для речных долин межгорных и предгорных впадин характерны значительные уклоны потока по направлению долины и большие мощности аллювиальных песчано-гравийных отложений (100—300 м и более) при сравнительно одно-

родном разрезе (рис. 7). Вместе с тем таким долинам свойственны существенные изменения проницаемости водовмещающих отложений и живого сечения потока вдоль долины (в связи с изменениями его ширины и мощности), обусловленные фациальной изменчивостью аллювия, наличием структурных перемычек и сопутствующих им фациальных замещений и др. В связи с этим

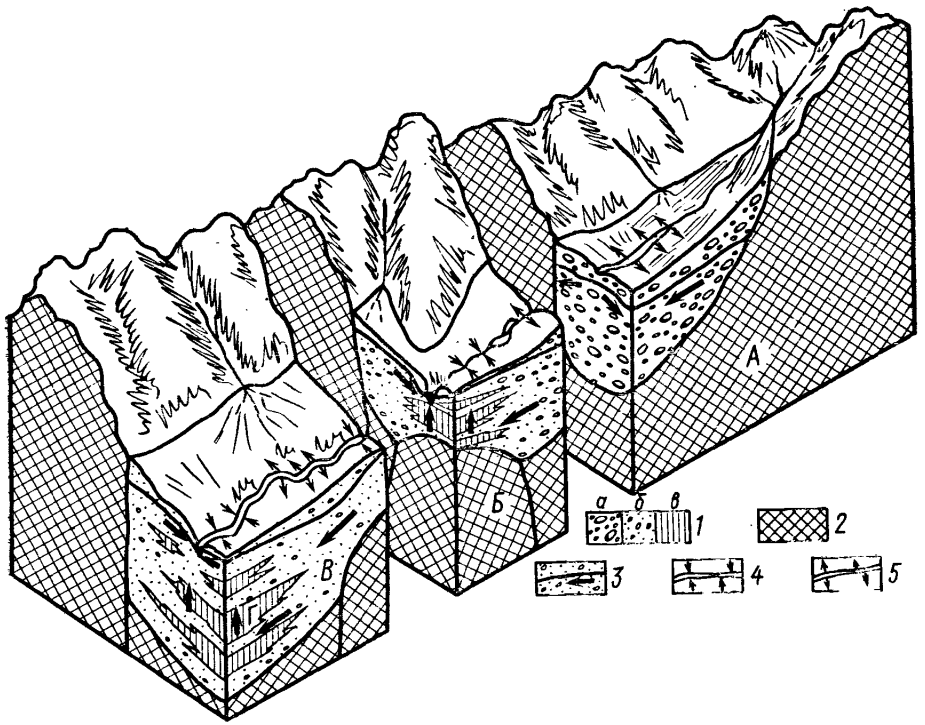


Рис. 7. Блок-схема потока в речной долине горной реки: *1* — четвертичные аллювиальные отложения (*а* — валунно-галечные, *б* — песчано-гравийные, *в* — супесчано-суглинистые); *2* — дочетвертичные отложения с тектоническими разрывами в них; *3* — уровень и направление движения подземных вод; *4* и *5* — участки реки, дренирующие и питающие подземные воды

взаимодействие подземного потока с рекой вдоль долины меняет свой характер. В верхней части долины реку питают подземные воды; такое явление может наблюдаться и в средних ее частях ниже поперечных поднятий, играющих роль перемычек. Во фронтальных частях последних и в нижней части долины, где проницаемость аллювия уменьшается, подземные воды дренируются врезом реки, хотя в отдельных частях в связи с изменением строения долины и извилистостью русла реки возникают локальные области фильтрации из реки. Значительное увеличение питания подземных вод происходит во время летних паводков.

Потоки предгорного типа формируются в конусах выноса и сухих дельтах пограничной полосы между горным сооружением и центральной частью межгорной или предгорной впадины. Для водовмещающей толщи — рыхлых аллювиально-пролювиальных отложений четвертичного возраста мощностью до нескольких сотен

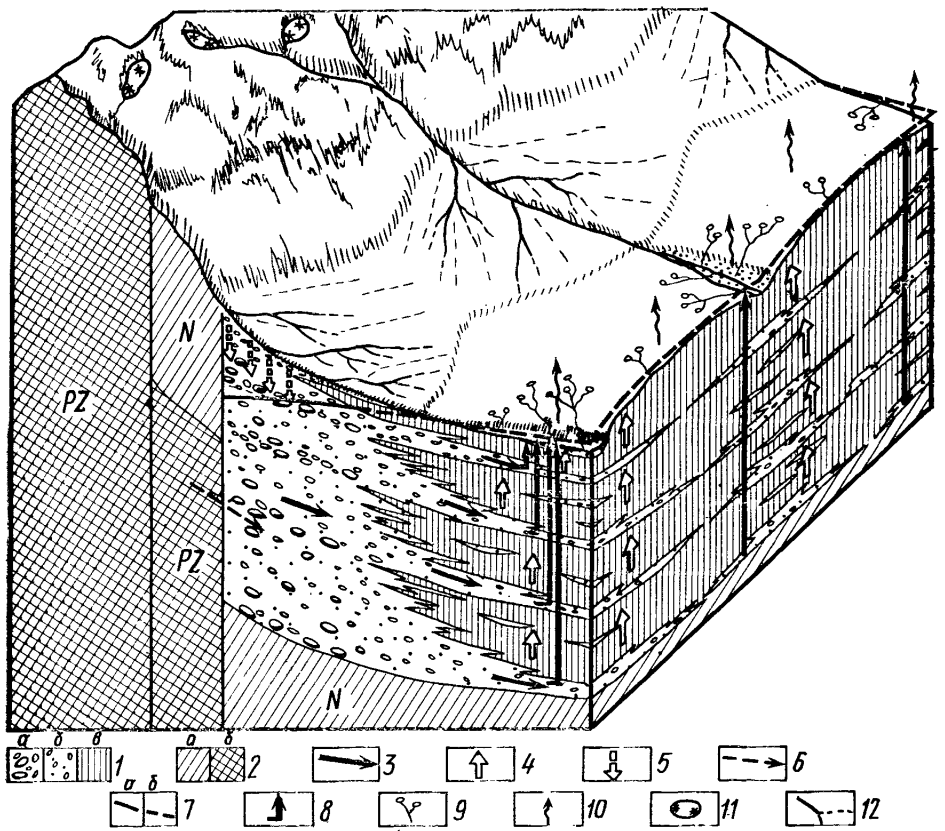


Рис. 8. Блок-схема предгорного потока:
1 — четвертичные аллювиально-пролювиальные отложения (*а* — валунно-галечные, *б* — песчано-гравийные, *в* — супесчано-суглинистые); *2* — дочетвертичные породы (*а* — неогенового, *б* — палеозойского возраста); *3* — основное направление потока; *4* — вертикальный переток через слабопроницаемые пласты; *5* — зона инфильтрации; *6* — поток трещинных вод; *7* — линия пересечения поверхности подземных вод с плоскостями разрезов (*а* — безнапорный, *б* — напорный нижнего водоносного горизонта); *8* — уровень воды; *9* — родники; *10* — зона испарения с поверхности грунтовых вод; *11* — ледники, фирновые поля; *12* — водотоки

метров — характерна закономерная изменчивость проницаемости, связанная с литологической зональностью и ритмичностью строения. Ритмичность обусловлена резкими изменениями климата четвертичного периода и проявляется в виде чередования в раз-

резе грубо- и тонкообломочных отложений. Литологическая зональность выражается в закономерном огрублении отложений в направлении от центра к периферии впадины.

Верхние части конусов выноса, граничащие с предгорьями, являются областью питания потока. Здесь в основном за счет инфильтрации поверхностных вод формируется единый безнапорный водоносный горизонт в гравийно-галечниковой толще с уклоном в сторону центра впадины и глубиной от поверхности земли 50—100 м и более (рис. 8). В направлении к центру впадины гравийно-галечниковая толща замещается многократно чередующимися в разрезе супесчано-суглинистыми и песчаными (песчано-гравийными) слоями; соответственно дифференцируется и в целом уменьшается проницаемость толщи. Сравнительно выдержанным обычно оказывается первый от поверхности водоносный пласт (горизонт), представленный песчано-гравийными отложениями и перекрытый с поверхности слоистой толщей супесчано-суглинистых отложений. В пластах повышенной проницаемости формируются напорные воды, пьезометрическая поверхность которых в направлении движения потока сначала приближается к поверхности земли, а затем располагается выше нее. К зонам избыточных напоров приурочены области разгрузки потока, где наблюдаются восходящие вертикальные перетоки через слабопроницаемые слои, выклинивание подземных вод в эрозионную сеть и интенсивное испарение с поверхности грунтовых вод.

В глубоких горизонтах артезианских бассейнов платформенного типа образуются самые крупные формы потоков напорных подземных вод, которые могут быть названы **мегапотоками**. Мегапотоки характеризуются значительными размерами и довольно четким выделением областей питания, транзита и стока. Основные области питания таких потоков приурочены к краевым зонам артезианских бассейнов, где образуется сложная структура потока, обусловленная одновременным влиянием инфильтрации и активного перетекания потока в вышележащие горизонты (рис. 9). Мегапотокам свойственны большие размеры области транзита, в пределах которой могут располагаться локальные внутренние зоны частичной разгрузки (рис. 10), приуроченные обычно к местным понижениям рельефа поверхности (например, к солончаковым впадинам, озерам, руслам водотоков и т. п.) как к зонам тектонических разрывов, а также к таликовым зонам на площадях развития многолетней мерзлоты. Кроме того, здесь возникают локальные зоны перетоков в соседние горизонты, приуроченные обычно к локальным сводовым поднятиям, флексурам, а также литологическим «окнам» в кровле и подошве водоносных пластов. В глубоких частях мегапотоков может заметно проявляться влияние геодинамических факторов, обусловливающих, например, геостатическое отжатие воды при уплотнении пород, переформирование потока под действием неотектонических движений и т. п. Полная разгрузка мегапотоков происходит обычно скрытым путем

в морях (субмаринный тип), озерах и крупных реках (субфлювиальный тип).

Специфической формой напорных потоков, характерных в особенности для горно-складчатых областей, являются **мезопотоки локальных структур**, которые могут быть приурочены к различным типам структур: 1 — небольшим по размерам и изометрическим по очертаниям наложенным структурам типа мульд

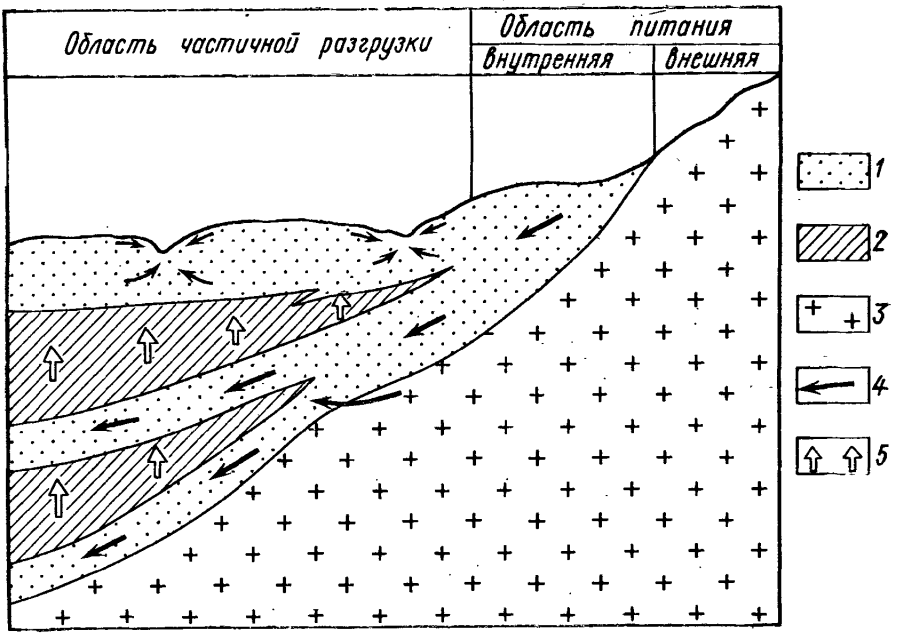


Рис. 9. Схема формирования потока подземных вод в краевой зоне артезианского бассейна, по В. А. Всеволожскому [12]:
1 — водоносные горизонты; *2* — водоупорные разделяющие пласты; *3* — породы горного обрамления и фундамента; *4* — направления потока в водоносных горизонтах; *5* — вертикальные перетоки в разделяющих пластах

(рис. 11, *а*), широко представленным на территории древних складчатых областей, а также древних щитов; 2 — некоторым типам горных бассейнов, имеющим небольшие размеры и, как правило, асимметричное строение при относительно слабой дислоцированности водовмещающих пород (рис. 11, *б*); 3 — интенсивным разрывным тектоническим нарушениям (сбросам и т. д.), обусловившим формирование линейно-вытянутых зон повышенной проницаемости и проводимости. Для мезопотоков локальных структур характерна относительная гидродинамическая обособленность и четкая выраженность областей питания, стока и разгрузки. Область питания локальных потоков приурочена к выхо-

дам пород на поверхность в краевых наиболее приподнятых частях структуры, а область разгрузки — к пониженным участкам рельефа или зонам тектонических нарушений.

Кроме того, особые типы потоков подземных вод возникают **в линзах пресных вод,** контактирующих с солеными или солоноватыми водами [31]. Наиболее характерными по условиям питания и разгрузки являются подтакырные (или подлиманные) и

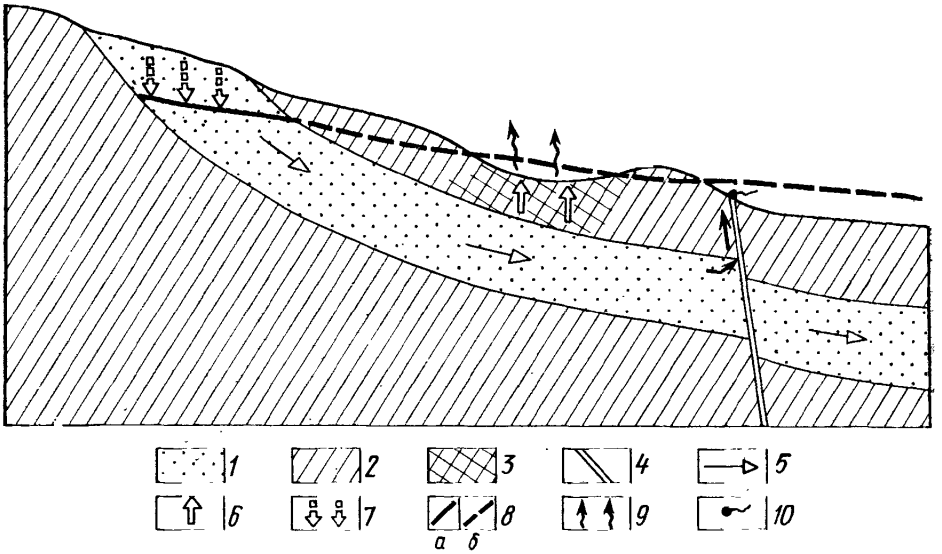


Рис. 10. Местные внутренние зоны разгрузки мегапотоков:
1 — водоносные горизонты; *2* — водоупоры; *3* — нарушенные или ослабленные зоны водоупорных пород; *4* — тектонические разрывы; *5* — основное направление потока; *6* — зона перетока под солончаком; *7* — зона инфильтрации; *8* — свободная (*а*) и напорная (*б*) поверхности уровней подземных вод; *9* — зона испарения в солончаке; *10* — родники

приканальные (или приречные) линзы (рис. 12). Питание подтакырных или подлиманных линз осуществляется за счет повышенной инфильтрации атмосферных осадков в бессточных такырах или лиманах, а разгрузка происходит путем последующего испарения и смешения с окружающими солеными водами, следовательно, режим такой линзы имеет резко нестационарный характер. Питание приканальных или приречных линз осуществляется за счет фильтрационных потерь из русел, а разгрузка происходит путем испарения в пониженных участках земной поверхности и смешения с солеными водами. Чаще всего такие линзы подстилаются относительно водоупорными глинистыми слоями, однако они могут быть «плавающими» на соленых водах. Размеры этих линз сравнительно невелики (порядка десятков и сотен метров), но их значимость может быть существенна, поскольку нередко они оказываются единственным источником для водоснабжения.

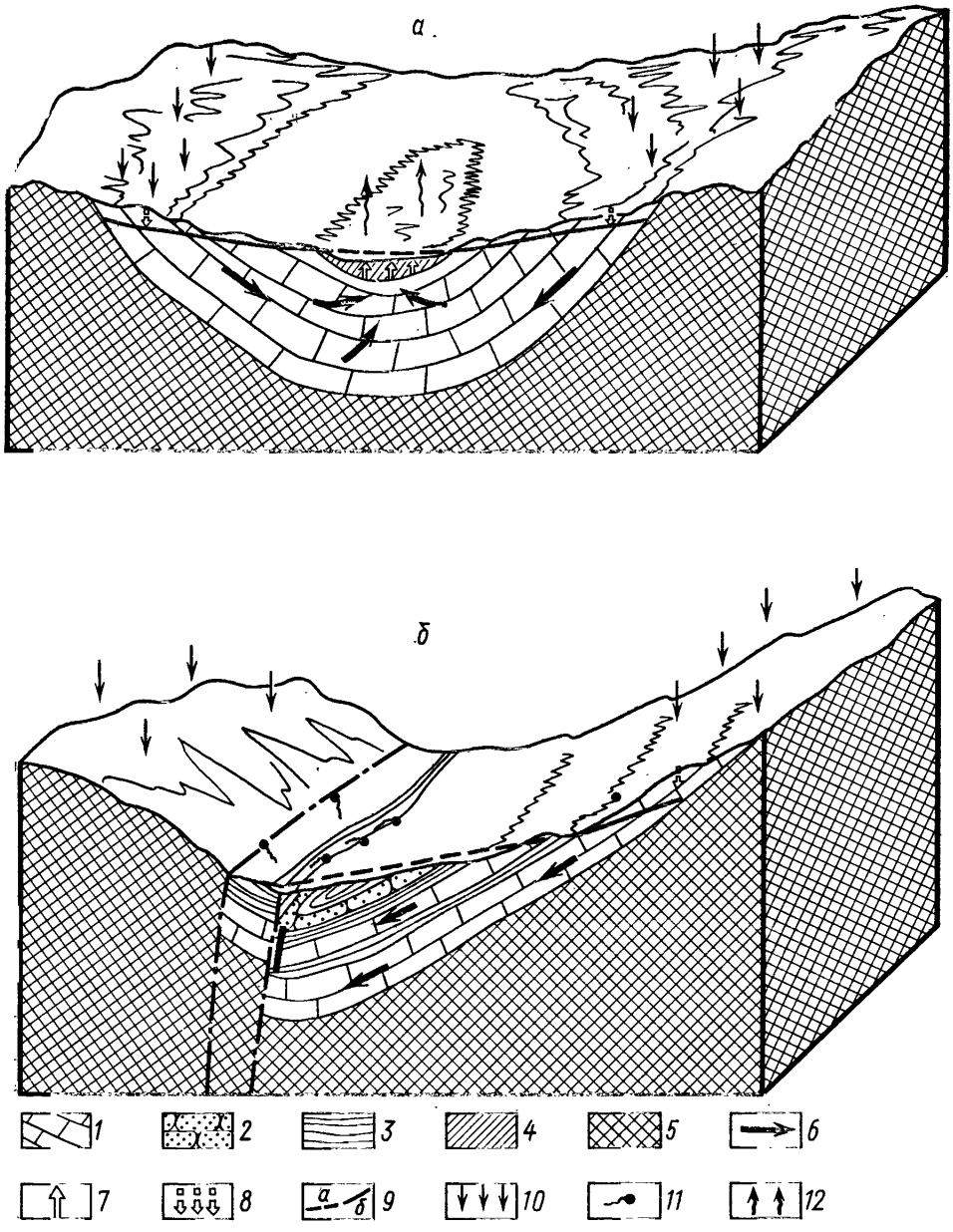


Рис. 11. Схема мезопотоков локальных структур: *а* — в мульдах, *б* — в горном бассейне асимметричного строения (*1* — известняки; *2* — песчаники; *3* — глины; *4* — суглинки; *5* — относительно водоупорные породы фундамента; *6* — направление подземного потока; *7* — зона перетекания через слабопроницаемые пласты; *8* — зона инфильтрации; *9* — уровень подземных вод: *а* — напорных, *б* — безнапорных; *10* — зона инфильтрации атмосферных осадков; *11* — родники; *12* — зона испарения)

В предгорных районах пустынь значительные линзы пресных вод могут также образовываться путем подтока подземных вод, с горного обрамления, известны крупные линзы такого типа, сформировавшиеся ранее и имеющие сейчас реликтовый характер [31].

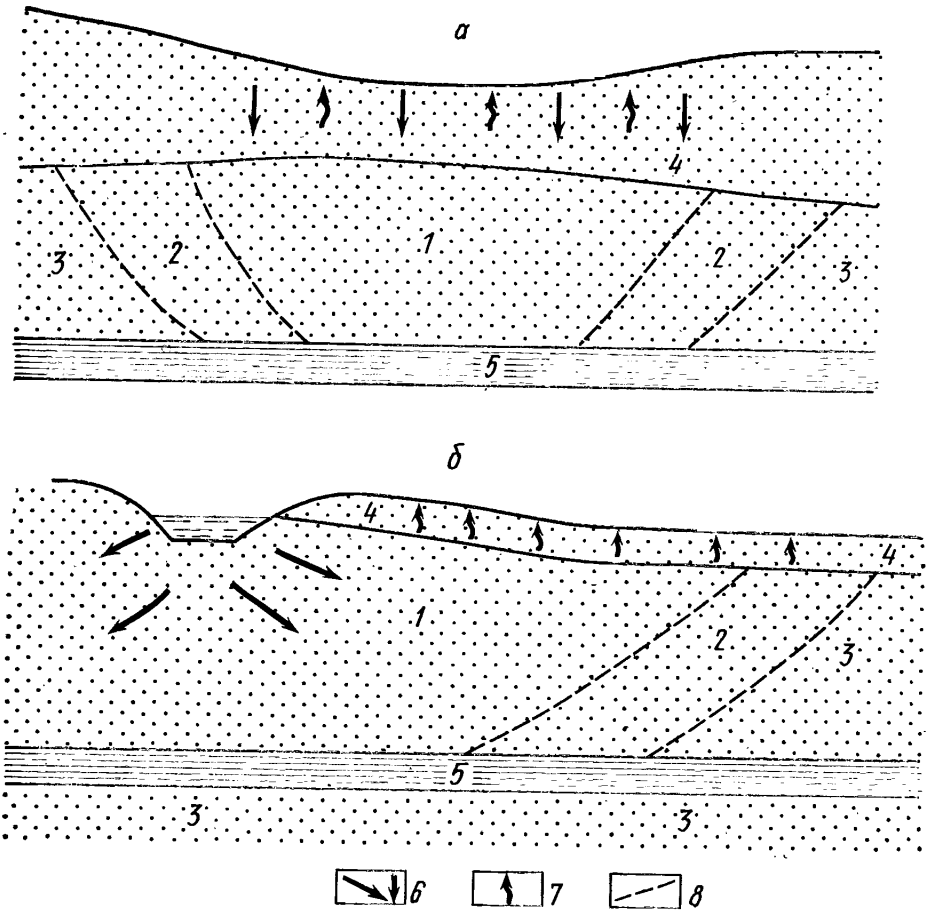


Рис. 12. Формирование потоков в линзах пресных вод:
а — подтакырная или подлиманная линза, *б* — приканальная или приречная линза (*1*, *2* и *3* — зоны пресных, солоноватых и соленых вод; *4* — свободная поверхность; *5* — относительно водоупорные слои; *6* — направления питания линзы; *7* — зоны испарения; *8* — границы между зонами с различной минерализацией воды)

К линзам относят подземные воды, образующиеся на морских островах, где пресные подземные воды, имеющие атмосферное питание, окружаются солеными морскими водами [20].

Естественные условия формирования потоков подземных вод сейчас уже зачастую нарушаются искусственными факторами, вызванными хозяйственной деятельностью человека, из которых

наибольшую значимость имеют водоотбор для водоснабжения, дренаж и водоотлив при горных работах, орошение и осушение земель, подпор грунтовых вод при сооружениях плотин и каналов.

Глава 2
ОСНОВЫ ГИДРАВЛИКИ

Рассматривая основы гидравлики применительно к задачам динамики подземных вод, ограничимся представлениями о законах сопротивления в водных потоках, связывающих кинематические и энергетические характеристики потока, и элементах трубной гидравлики.

§ 1. ЗАКОНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ В ВОДНЫХ ПОТОКАХ

При анализе физической природы сил сопротивления, возникающих в водном потоке, следует различать два режима течения — ламинарный и турбулентный, существование и основные закономерности которых были впервые экспериментально изучены О. Рейнольдсом в 1883 г. [46, 53].

Ламинарный (струйный) режим наблюдается при малых скоростях течения; для него характерно движение потока отдельными струйками, между которыми отсутствует гидравлическое перемешивание; если в ламинарный поток ввести окрашенную струйку, то она при перемещении будет хорошо видимой и четко очерченной (изменение окраски этой струйки будет связано только с влиянием поперечной диффузии). В фильтрационных потоках, характеризующихся очень низкими значениями скоростей течения, ламинарный режим течения имеет преимущественное распространение, в связи с чем на него в дальнейшем будет обращаться особое внимание.

Турбулентный (беспорядочный) режим наблюдается при сравнительно больших скоростях течения; для него характерно активное проявление внутренней пульсации частиц потока, обусловливающей активное гидравлическое перемешивание между отдельными струйками; если в турбулентный поток ввести окрашенную струйку, то она почти сразу же потеряет свою форму и будет интенсивно распределяться по сечению потока.

Перейдем к обоснованию формы законов сопротивления при различных режимах водного потока, имея в виду, что этими законами связываются силы сопротивления со скоростями потока. Поскольку силы сопротивления являются поверхностными, то они характеризуются касательным напряжением τ, представляющим собой силу сопротивления, прилагаемую к единичной поверхности потока.

При ламинарном режиме сопротивление текущего потока полностью определяется проявлениями сил вязкого трения между отдельными струйками потока. Основные закономерности вязкого трения были высказаны Ньютоном еще в 1686 г. в форме следующих положений: силы внутреннего трения, проявляющиеся при перемещении слоев (струек) жидкости между собой, пропорциональны относительной скорости этого перемещения и поверхности соприкосновения слоев [53]. Поскольку относительная скорость перемещения отдельных слоев характеризуется градиентом скорости $\frac{dv}{dn}$ по нормали к направлению потока (рис. 13), то согласно закону Ньютона касательное напряжение вязкого трения будет пропорционально градиенту скорости $\frac{dv}{dn}$.

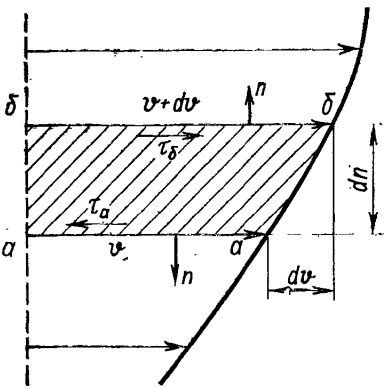


Рис. 13. Схема взаимного перемещения слоев потока жидкости (к обоснованию закона вязкого трения)

Направление силы трения будем считать положительным, если оно противоположно направлению течения. Условимся далее относить силу трения к тому слою, из которого направлена нормаль n, т. е. градиент скорости $\frac{dv}{dn}$ будем определять по направлению внешней нормали к рассматриваемой поверхности. При этом условии закон Ньютона может быть представлен выражением

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dn}, \qquad (I.2.1)$$

причем знак «минус» поставлен здесь потому, что если по внешней нормали к поверхности скорости возрастают и $\frac{dv}{dn} > 0$, то сила трения направлена по течению (т. е. в этом случае $\tau < 0$) и наоборот. Например, для заштрихованного слоя на эпюре скоростей (см. рис. 13) по нижней поверхности (aa) имеем $\frac{dv}{dn} < 0$, а напряжение τ_a будет направлено против течения, поскольку нижний слой, имеющий меньшую скорость, будет тормозить движение рассматриваемого слоя, а по верхней поверхности ($бб$) те же рассуждения приводят к тому, что здесь $\frac{dv}{dn} > 0$ и $\tau_б < 0$.

Коэффициент пропорциональности η называется коэффициентом вязкости; физически он представляет собой удельную силу трения при единичном градиенте скорости по нормали к направ-

лению потока. Размерность коэффициента вязкости получим из выражения (I.2.1), принимая во внимание, что

$$[\tau] = ML \cdot T^{-2}L^{-2} = MT^{-2}L^{-1}, \quad \left[\frac{dv}{dn}\right] = \frac{L}{TL} = T^{-1},$$

где M, L и T — размерности массы, длины и времени, откуда

$$[\eta] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{dv}{dn}\right]} = \frac{MT^{-2}L^{-1}}{T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}. \qquad \text{(I.2.2)}$$

В качестве единицы измерения величины η обычно принимается пуаз, причем 1 пуаз $= 1$ г/см·с $= 1 \frac{\text{дин}\cdot\text{с}}{\text{см}^2}$; для воды при температуре 20° можно считать $\eta = 1$ сантипуаз $= 0{,}01$ пуаза.

Поскольку гидродинамические свойства жидкости выражаются коэффициентом вязкости η и плотностью ρ, то критическую скорость $v_{кр}$, определяющую границу ламинарного режима, для труб диаметром D целесообразно попытаться представить зависимостью вида

$$v_{кр} = C\rho^{\xi_1}\eta^{\xi_2}D^{\xi_3}, \qquad \text{(I.2.3)}$$

где C — постоянный коэффициент, а ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — некоторые показатели степени, для определения которых воспользуемся методом размерностей, исходя из того, чтобы правая и левая части уравнения (I.2.3) имели одинаковую размерность. Подставляя в (I.2.3) размерности всех величин и считая C безразмерным, получим

$$LT^{-1} = (ML^{-3})^{\xi_1} \cdot (ML^{-1}T^{-1})^{\xi_2} \cdot L^{\xi_3}. \qquad \text{(I.2.3а)}$$

Чтобы зависимость (I.2.3) имела смысл, необходимо добиться равенства показателей при величинах M, L и T в правой и левой частях уравнения (I.2.3а), т. е. иметь $\xi_1 + \xi_2 = 0$, $-3\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 1$, $-\xi_2 = 1$, откуда находим $\xi_2 = -1$, $\xi_1 = 1$ и $\xi_3 = -1$, т. е. зависимость (I.2.3) должна иметь вид

$$v_{кр} = C\frac{\eta}{\rho D}. \qquad \text{(I.2.4)}$$

Выражение (I.2.4) несколько упростится, если использовать понятие коэффициента кинематической вязкости $\nu = \eta/\rho$, который имеет размерность $[\nu] = [\eta] : [\rho] = ML^{-1}T^{-1} : ML^{-3} = L^2T^{-1}$, т. е. в системе СГС $[\nu] = \text{см}^2/\text{с}$. Значения ν для воды в зависимости от температуры следующие:

θ°C	0	5	10	15	20	30	40	50	100
$100\nu \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$	1,79	1,52	1,31	1,14	1,01	0,805	0,659	0,566	0,3

Называя далее безразмерную величину $\frac{vD}{\nu}$ числом Рейнольдса Re, получим условие для границы ламинарного режима, выраженное через критическое число Рейнольдса $Re_{кр} = \frac{v_{кр}D}{\nu}$, причем для гладких труб $Re_{кр} \cong 2300$. Для открытых русел $Re = \frac{vR}{\nu}$, где R — гидравлический радиус, представляющий собой отношение площади поперечного сечения ω к смоченному периметру потока P; поскольку ωv равно расходу потока Q, то в этом случае $Re = \frac{Q}{\nu P}$; согласно опытным данным [46, 53] можно считать для русел $Re_{кр} = 300 \div 1000$.

Заметим, что существует переходная область течения, где возможно существование обоих видов режима течения — ламинарного и турбулентного; для труб верхняя граница переходной области характеризуется верхним критическим значением числа Рейнольдса порядка 10^4. Турбулентный режим течения наиболее характерен для потоков в открытых руслах и крупных трубах.

Своеобразные свойства проявляются у воды при ее течении в тонких пленках. Так, экспериментально показано [8, 41], что при движении воды в капиллярных трубах возникает вязкопластический режим течения, когда внутреннее сопротивление в потоке определяется не только вязким трением, но и сцеплением отдельных частиц воды между собой. В этом случае вместо закона Ньютона (I.2.1) рекомендуется пользоваться законом Шведова:

$$\tau = \tau_0 - \eta \frac{dv}{dn}, \qquad (I.2.5)$$

согласно которому сдвиговое напряжение τ между отдельными слоями жидкости определяется двумя членами: начальным напряжением сдвига τ_0 при пластической деформации и вязкостным напряжением $-\eta \frac{dv}{dn}$. Уравнение (I.2.5) действует лишь при условии, что сдвиговое напряжение оказывается бо́льшим начального напряжения сдвига, т. е. при $|\tau| > \tau_0$, в противном случае, т. е. при $|\tau| < \tau_0$, движение отсутствует.

Ниже приведены опытные данные зависимости начального напряжения сдвига τ_0 от температуры θ, полученные Н. Ф. Бондаренко [8] при изучении течения в капиллярах:

θ°C	15	20	30	40	50
$100\tau_0 \frac{дин}{см^2}$	11,5	8,5	5	4	1,5

Сопротивление турбулентного потока обусловливается пульсацией давления и турбулентным перемешиванием; по Л. Прандт-

лю [46, 53], турбулентные касательные напряжения в потоке $\tau_т$ определяются зависимостью

$$\tau_т = -\eta_т \frac{dv}{dn}, \quad \eta_т = -\rho l^2 \left| \frac{dv}{dn} \right|, \tag{I.2.6}$$

где $\eta_т$ — динамический коэффициент турбулентной вязкости или турбулентного обмена; l — длина пути смешения, которая оказывается пропорциональной расстоянию от данной точки до стенки потока.

В соответствии с выражением (I.2.6) в турбулентном потоке зависимость сил сопротивления и потерь энергии (напора) от скорости течения имеет квадратичный характер.

В общем случае, когда учитываются проявления как вязкости, так и турбулентного перемешивания, выражение для суммарного касательного напряжения записывают в виде

$$\tau = -(\eta + \eta_т) \frac{dv}{dn}, \tag{I.2.7}$$

т. е. считая действие каждого из этих процессов независимым. При характерных для турбулентного течения больших скоростях течения существенными могут быть изменения кинетической энергии потока, уровень которой определяется величиной скоростного напора $h_v = v^2/2g$. Таким образом, в общем случае суммарная энергия водного потока должна характеризоваться величиной гидродинамического напора H_d, причем

$$H_d = H + h_v = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}. \tag{I.2.8}$$

Постоянство величины H_d вдоль струйки тока идеальной жидкости носит название уравнения Бернулли [46, 53].

Наглядное представление о скоростном напоре можно получить, введя в поток открытую с обоих концов изогнутую трубку (см. рис. 3, *б*) так, чтобы конец этой трубки в точке A совпадал с направлением скорости в этой точке. Поскольку движущиеся частицы, набегая на открытый конец трубки, будут производить дополнительное давление, соответствующее величине скоростного напора, то уровень в такой трубке превысит высоту давления на величину скоростного напора. Такие трубки носят название трубок Пито, по имени предложившего их французского гидравлика [46]. Заметим, что в действительности трубка Пито измеряет величину скоростного напора с некоторой погрешностью, которая должна оцениваться путем тарировки трубки.

§ 2. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕЧЕНИЯ ВОДЫ В ТРУБАХ

Основные закономерности гидравлики открытых потоков, устанавливающие связь между количеством движения (расходом) потока и потерями энергии, выражаемой гидродинамическим напором,

рассмотрим на примере стационарного равномерного течения воды в трубе постоянного сечения (радиусом $r_т$).

Ламинарный режим течения. Составим уравнение равновесия сил для расположенного внутри трубы столбика радиусом r и длиной l, считая течение вязким (ньютоновским), в котором реактивные касательные силы τ определяются законом Ньютона (I.2.1) и прикладываются по боковым поверхностям, а движущие силы определяются перепадом гравитационного потенциала $\Delta\varphi=\gamma\Delta H$, прикладываемого по торцам этого столбика, причем в соответствии с (I.1.5а) при $\Theta=2\pi rl\tau$ и $\omega=\pi r^2$ можно записать

$$\gamma\Delta H=\frac{2\pi rl\tau}{\pi r^2}=\frac{2l\tau}{r} \qquad (I.2.9)$$

или, заменяя τ согласно (I.2.1) и имея в виду, что $\frac{\Delta H}{l}=I$, получим

$$\tau=-\eta\frac{dv_r}{dr}=0{,}5\gamma Ir, \qquad (I.2.10)$$

где v_r — скорость течения на расстоянии r от центра трубы.

Интегрируем уравнение (I.2.10):

$$v_r=-\frac{\gamma I}{4\eta}r^2+C. \qquad (I.2.10а)$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия, что на стенке трубы должно быть $v_r=0$ (в противном случае здесь оказался бы бесконечно большой градиент скорости), откуда $C=\frac{\gamma I}{4\eta}r_т^2$ и

$$v_r=\frac{\gamma I}{4\eta}(r_т^2-r^2), \qquad (I.2.11)$$

а общий расход потока в трубе

$$Q_т=\int_0^{r_т}2\pi rv_r dr=\frac{\pi\gamma I}{8\eta}r_т^4. \qquad (I.2.12)$$

Согласно уравнению (I.2.11) распределение скоростей ламинарного потока в трубе имеет параболический характер (рис. 14, *а*), причем максимальная скорость $v_{макс}$ будет в середине трубы (при $r=0$)

$$v_{макс}=\frac{\gamma Ir_т^2}{4\eta}, \qquad (I.2.13)$$

а средняя скорость по сечению трубы

$$v=\frac{Q_т}{\pi r_т^2}=\frac{\gamma Ir_т^2}{8\eta}. \qquad (I.2.13а)$$

Сопоставляя выражения (I.2.13) и (I.2.13а), можно видеть, что в данном случае $v_{макс}=2v$.

Обратим внимание на то, что при ламинарном режиме течения зависимость расхода и скоростей потока от градиента напора оказывается линейной.

Вязкопластический режим течения. В этом случае касательные напряжения внутри трубы устанавливаются в соответствии с законом (I.2.5), и если начальное напряжение сдвига τ_0 меньше предельного значения касательного напряжения $\tau_т=0{,}5\gamma I r_т$ на стенке трубы, то в трубе образуется пластическое тело, внутри которого движение не происходит, так что эпюра скоростей в сечении трубы приобретает усеченный характер (рис. 14, *б*). Если же $\tau_0>\tau_т$, то пластическое тело заполняет всю трубу целиком и вязкое движение жидкости в нем прекращается. Границу возникновения вязкого течения можно характеризовать величиной начального градиента фильтрации I_0, определяемого из выражения (I.2.10) при $\tau=\tau_0$:

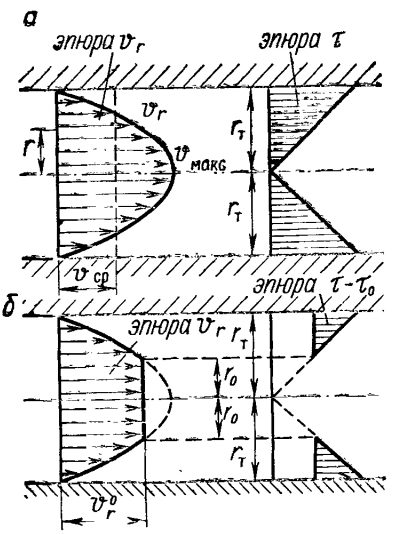


Рис. 14. Эпюры скоростей (*а*) и касательных напряжений (*б*) водного потока в трубе

$$I_0=\frac{2\tau_0}{\gamma r_т}. \qquad (I.2.14)$$

Распределение скоростей вязкопластического потока в трубе при $I>I_0$ получим интегрированием уравнения (I.2.5), задавая согласно (I.2.10) $\tau=0{,}5\gamma I r$, так что

$$\eta\frac{dv_r}{dr}=-0{,}5\gamma I r+\tau_0 \qquad (I.2.15)$$

$$v_r=-\frac{\gamma I}{4\eta}r^2+\frac{\tau_0}{\eta}r+C, \qquad (I.2.15а)$$

причем из условия $v_r=0$ при $r=r_т$ находим постоянную интегрирования $C=\frac{\gamma I}{4\eta}r_т^2-\frac{\tau_0}{\eta}r_т$, так что окончательно

$$v_r=\frac{\gamma I}{4\eta}(r_т^2-r^2)-\frac{\tau_0}{\eta}(r_т-r). \qquad (I.2.16)$$

Расход в зоне вязкого течения потока получим интегрированием скоростей v_r в пределах от стенки трубы до поверхности радиусом r_0 границы между вязкой и пластической зонами, а расход в пластической зоне найдем исходя из того, что эта зона двигается со скоростью v_r^0, определяемой по уравнению (I.2.16) при $r=r_0$, где r_0 находится из (I.2.10) при $\tau=\tau_0$. Таким образом, суммарный расход вязкопластического потока будет $Q=\int_{r_0}^{r_т}2\pi r v_r dr+\pi r_0^2 v_r^0$, а после подстановки выражений v_r и v_r^0 из (I.2.16) и последующего интегрирования получим

$$Q_т=\frac{\pi}{\eta}\left[\frac{\gamma I}{8}(r_т^4-r_0^4)-\frac{\tau_0}{3}(r_т^3-r_0^3)\right];\ r_0=\frac{2\tau_0}{\gamma I}. \qquad (I.2.17)$$

Важно иметь в виду, что пластическое сцепление носит релаксационный характер, так что в пластической зоне должен возникать поток ползучести, однако порядок его скоростей будет заметно ниже, чем при вязком течении.

Турбулентный режим течения. Теоретический анализ турбулентного потока в трубах основывается на использовании общей зависимости (I.2.6) для эффективных касательных напряжений, однако обоснование расчетных зависимостей здесь оказывается значительно более сложным, чем для ламинарного течения, поскольку на силы сопротивления турбулентного потока существенно влияет пристенная область течения, имеющая очень сложный характер. Поэтому существующие расчетные зависимости для турбулентного потока имеют структуру, следующую из теоретических представлений, однако обязательно включают в себя эмпирические коэффициенты, получаемые экспериментально.

Исходя из того, что уравнение (I.2.6) обусловливает квадратичный характер зависимости касательных напряжений от скорости потока, можно выражение для градиента напора I (турбулентного потока в трубах диаметром $d_т$) представить формулой Дарси — Вейсбаха [46, 53]:

$$I = \frac{\lambda}{d_т} \cdot \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{(I.2.18)}$$

где v — средняя скорость потока по сечению трубы; λ — коэффициент гидравлического трения, зависящий в общем случае от шероховатости стенок русла и от числа Рейнольдса. Результаты экспериментальных исследований показывают [46, 53], что на графике зависимости коэффициента сопротивления λ от числа Рейнольдса $Re = \frac{vd_т}{\nu}$ явно выделяются три зоны: зона ламинарного режима, где точки ложатся на прямую, которая является графиком зависимости $\lambda = \frac{64}{Re}$, следующей из выражения (I.2.13а) для средней скорости ламинарного потока в трубе; зона переходного режима, где кривые имеют довольно сложный немонотонный характер; зона турбулентного режима, где закон сопротивления имеет квадратичный характер, соответствующий формуле Дарси — Вейсбаха, и коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса.

Для практического определения величины λ существует ряд эмпирических формул, причем для стальных и чугунных водопроводных труб рекомендуется пользоваться формулами Ф. А. Шевелева [54]. Численный анализ этих формул показывает, что величины λ для стальных труб можно оценивать по следующим данным, в которых первая цифра дана для новых труб, а вторая для старых:

$d_т$, см	10	15	20	25
$\lambda \cdot 10^{-2}$	3÷4,1	2,6÷3,7	2,5÷3,4	2,4÷3,2

При турбулентном режиме существенную роль могут играть разного рода местные сопротивления, которые создают потери напора ΔH, определяемые по формуле Вейсбаха [46, 53]:

$$\Delta H = \xi \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{(I.2.19)}$$

где ξ — коэффициент местного сопротивления, определяемый экспериментально. Например, для резкого поворота трубы на 90° получается $\xi = 1{,}1$, а для водопроводного крана при полном открытии $\xi = 4$.

Для труб, состоящих из участков различного диаметра и включающих в себя несколько местных сопротивлений, общие потери напора получатся суммированием потерь на отдельных участках и местных сопротивлениях. В соответствии с этим общий коэффициент сопротивления трубы постоянного сечения получится суммированием всех коэффициентов местного сопротивления с коэффициентом сопротивления ξ_l линейного участка трубы, который для трубы длиной $l_т$ согласно (I.2.18) имеет выражение $\xi_l = \lambda \frac{l_т}{d_т}$, так что в этом случае

$$\Delta H = \xi_{сум} \frac{v^2}{2g}, \quad \xi_{сум} = \lambda \frac{l_т}{d_т} + \Sigma \xi_i, \qquad \text{(I.2.20)}$$

где ξ_i — коэффициенты местных сопротивлений.

Глава 3

ПРОНИЦАЕМОСТЬ И ЕМКОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

§ 1. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОНИЦАЕМОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД

1.1. Линейный закон фильтрации (закон Дарси)

Основной закон фильтрации связывает расход фильтрационного потока с потерями напора, характеризующими затраты энергии потока. Для обоснования этого закона прежде всего заметим, что в фильтрационном потоке скорости довольно малы, так что можно пренебречь величиной скоростного напора $h_v = \frac{v^2}{2g}$ и считать основным ламинарный режим течения. Это обстоятельство позволяет предположить в основной области фильтрации существование линейной связи между расходом потока и падением (градиентом) напора.

Такая связь впервые была обнаружена Дарси [68] в опытах по фильтрации в песчаной колонке постоянного сечения и выражается следующей формулой закона Дарси:

$$Q = k\omega I, \tag{I.3.1}$$

где Q — расход фильтрационного потока с поперечным сечением ω при градиенте напора I, представляющем собой отношение потери напора ΔH к длине пути фильтрации l; k — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом фильтрации*. Таким образом, согласно закону Дарси расход фильтрационного потока пропорционален площади поперечного сечения потока и градиенту напора по направлению движения.

Удобной кинематической характеристикой фильтрационного потока является введенное Дюпюи [69] понятие *скорости фильтрации* v, представляющее собой отношение расхода потока к площади его поперечного сечения:

$$v = \frac{Q}{\omega}. \tag{I.3.2}$$

Величина v имеет размерность скорости, однако по существу является мерой расхода фильтрационного потока и не соответствует действительной скорости фильтрации, поскольку при ее определении в расчет принимается вся площадь поперечного сечения, а не площадь порового пространства, через которую только и осуществляется движение воды. Такое отвлечение от реальной структуры потока в поровой среде является основой для применения к фильтрации представлений механики сплошной среды, позволяющей, отталкиваясь от статистически неупорядоченного потока в поровом пространстве, перейти к осредненному рассмотрению потока во всем непрерывном пространстве.

Введя скорость фильтрации, закон Дарси можно представить в следующем виде:

$$v = kI, \tag{I.3.3}$$

т. е. согласно закону Дарси скорость фильтрации пропорциональна градиенту напора.

Из выражения (I.3.3) следует, что коэффициент фильтрации имеет размерность скорости (при гидрогеологических расчетах обычно $[k]$ = м/сут) и может определяться как скорость фильтрации при единичном градиенте напора. Коэффициент фильтрации зависит от геометрии порового пространства и от гидродинамических свойств фильтрующейся жидкости (плотности и вязкости).

При изучении фильтрации жидкостей переменного состава (в частности, при учете изменения плотности и вязкости воды в связи с изменениями минерализации или температуры) более удобна другая форма закона Дарси, непосредственно учитывающая влияние гидродинамических свойств жидкости. Для учета плотности жидкости следует градиент напора I заменить гради-

ентом гравитационного потенциала I_φ, определяемого согласно (I.1.5), а учет вязкости можно произвести, исходя из обратно пропорциональной зависимости расхода ламинарного потока от коэффициента динамической вязкости η, следующей из закона вязкого трения (I.2.1) и из выражения (I.2.12) для расхода ламинарного потока в трубе. Таким образом, выражение закона Дарси, учитывающее гидродинамические свойства жидкости, должно иметь вид

$$v = \frac{\bar{k}}{\eta} I_\varphi, \; I_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\gamma \Delta H}{l} = \gamma I, \tag{I.3.4}$$

где $\bar{k}$ — *коэффициент проницаемости*, являющийся более точной фильтрационной характеристикой поровой среды, чем коэффициент фильтрации, поскольку величина $\bar{k}$ не должна зависеть от гидродинамических свойств фильтрующей жидкости. Следует иметь в виду, что это утверждение справедливо только в тех случаях, когда геометрия поровой среды не изменяется при физико-химическом взаимодействии жидкости и горной породы.

Найдем связь между коэффициентом фильтрации и коэффициентом проницаемости, сопоставив выражения (I.3.3) и (I.3.4), откуда следует, что

$$k = \bar{k} \frac{\gamma}{\eta} = \bar{k} \frac{\rho g}{\eta} = \bar{k} \frac{g}{\nu}, \; \bar{k} = k \frac{\nu}{g}. \tag{I.3.5}$$

Найдем размерность коэффициента проницаемости:

$$[\bar{k}] = [k] \frac{[\nu]}{[g]} = \frac{L}{T} \cdot \frac{L^2 T^{-1}}{L T^{-2}} = L^2,$$

т. е. он имеет размерность площади и в физической системе единиц $[\bar{k}] = \text{см}^2$.

Более употребительна смешанная система единиц, когда принимается v в см/с, I_φ в атм/см, η в сантипуазах и коэффициент проницаемости выражается в особых единицах, называемых дарси; единица такой проницаемости (1 дарси) представляет собой проницаемость такой среды, в которой при перепаде гравитационного потенциала 1 атм на длине 1 см и коэффициенте вязкости, равном 1 сантипуазу, получается скорость фильтрации 1 см/с. Сопоставляя коэффициент проницаемости в смешанной и физической системах, можно показать, что 1 дарси $= 10^{-8}$ см^2. Для воды, имеющей $\nu = 0{,}01$ см^2/с при $\theta = 20°$, из выражения (I.3.5) получим значение коэффициента фильтрации, соответствующее проницаемости 1 дарси $= 10^{-8}$ см^2:

$$k = 10^{-8} \cdot \frac{980}{0{,}01} = 9{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ см/с} = 0{,}85 \text{ м/сут},$$

т. е. для воды коэффициент проницаемости, выражаемый в дарси, примерно равен коэффициенту фильтрации, выражаемому в м/сут.

Тонкослоистые и трещиноватые породы могут быть анизотропными по проницаемости, — тогда коэффициент фильтрации (проницаемости) должен рассматриваться зависящим от направления движения.

1.2. Геометрические и физико-химические факторы проницаемости

Для выявления связи проницаемости с *геометрией пористой среды* рассмотрим простейшую ее модель в виде пучка капиллярных трубок одинакового радиуса $r_т$ и площадью поперечного сечения $\omega_т = \pi r_т^2$. При поперечном сечении потока ω, расходе Q и пористости породы n количество таких капиллярных трубок будет $\frac{n\omega}{\omega_т}$, а расход каждой капиллярной трубки

$$Q_т = \frac{Q\omega_т}{n\omega} = \frac{\pi r_т^2}{n} v. \qquad (I.3.6)$$

Сопоставляя выражения (I.3.6) и (I.2.12), находим

$$v = \frac{\gamma r_т^2 n}{8\eta} I, \qquad (I.3.7)$$

а связывая выражение (I.3.7) с законом Дарси (I.3.3), найдем формулу для коэффициента фильтрации применительно к принятой схеме строения пористой среды

$$k = \frac{\gamma n r_т^2}{8\eta}. \qquad (I.3.8)$$

Для приближения к действительному характеру порового пространства введем в эту формулу коэффициент извилистости χ, т. е. будем считать

$$k = \frac{\chi\gamma n r_т^2}{8\eta}, \qquad (I.3.9)$$

откуда следует выражение для расчетного радиуса капилляра

$$r_т = \sqrt{\frac{8\eta k}{\chi\gamma n}} = \sqrt{\frac{8\nu k}{\chi g n}} \qquad (I.3.10)$$

или, заменяя коэффициент фильтрации на коэффициент проницаемости, согласно (I.3.5) получим

$$r_т = \sqrt{\frac{8\bar{k}}{\chi n}}. \qquad (I.3.11)$$

Для реальных пород И. Козени [52, 55] предложил заменить в выражении (I.3.11) радиус поровой трубки $r_т$ на удельную поверхность S скелета породы (в единичном объеме). Поскольку для принятой модели $S=2n/r_т$, то формула (I.3.11) примет вид

$$k = \frac{g\chi n^3}{2\nu S^2}. \qquad \text{(I.3.12)}$$

Для песчаных пород величину S можно найти по данным гранулометрического состава, полагая, что все зерна песка имеют шаровую форму. Тогда поверхность частиц i-той фракции $S_i = \pi d_i^2 \varepsilon_i$, где ε_i — число частиц i-той фракции со средним диаметром зерен d_i; определяя ε_i как отношение содержания частиц i-той фракции в единице объема породы к объему частицы, получим

$$S = \frac{6(1-n)}{d_э}, \quad \frac{1}{d_э} = \sum^{r} \frac{\Delta g_i}{d_i}, \qquad \text{(I.3.13)}$$

где Δg_i — удельное содержание i-той фракции (в долях единицы от общего содержания); r — количество фракций; $d_э$ — эффективный диаметр зерен песка.

Существует еще ряд предложений по определению коэффициента фильтрации песков по их гранулометрическому составу, либо основанных на развитии модели Козени, либо сугубо эмпирического характера. Наиболее широко представлены зависимости, имеющие форму

$$\kappa = Nd_э^2, \qquad \text{(I.3.14)}$$

где N — фактор пористости. Впервые такую формулу предложил А. Хазен [55], считавший $d_э=d_{10}$, а И. И. Зауербрей [23] на базе лабораторных данных пришел к выводу, что правильнее принимать $d_э=d_{17}$. На основании большого экспериментального материала, включая и данные опытных откачек, В. Байер и К. Швайгер [64] предлагают при $d_э=d_{10}$ определять пористость n и фактор пористости N в зависимости от коэффициента неоднородности d_{60}/d_{10} для флювиогляциальных песков. Эти данные аппроксимируются выражением

$$N = N_0 + N_1 \lg \frac{d_{60}}{d_{10}}, \qquad \text{(I.3.14а)}$$

параметры которого следующие:

n	0,32	0,34	0,36	0,38	0,4
N_0, $\frac{1}{см \cdot с}$	78	85	90	98	110
N_1, $\frac{1}{см \cdot с}$	14	27	47	69	91

Практическое применение таких зависимостей ограничено, поскольку на проницаемость горных пород сильно влияют трудно учитываемые особенности их природного строения и состава.

Характеристики связи проницаемости скальных пород с геометрией трещиноватости могут быть получены исходя из гидравлики течения в отдельной трещине, лишь при весьма упрощенных представлениях о структуре трещиноватости. Для ламинарного течения в трещине исходной является формула Буссинеска, согласно которой средняя скорость течения $v_т$ в плоской щели толщиной $\delta_т$ при градиенте напора I будет

$$v_т = \frac{g\,\delta_т^2}{12\,\nu} I. \qquad \text{(I.3.15)}$$

Рассматривая ламинарное течение в равномерной системе одинаковых трещин, Е. С. Ромм [49] получил следующее выражение для коэффициента проницаемости трещиноватой среды:

$$\bar{k} = A n_т \delta_т^2, \qquad \text{(I.3.16)}$$

где $n_т$ — трещиноватость; A — числовой коэффициент, зависящий от взаимной ориентации трещин, причем $A=1$ и $A=0{,}5$ соответственно для одинаково и хаотично ориентированных систем трещин. Для системы трещин различных размеров, фиксируемых по шлифам, Е. С. Ромм предлагает выражение

$$\bar{k} = B \frac{\sum_{i=1}^{N} b_i^3 l_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i}, \qquad \text{(I.3.17)}$$

где S_i — площадь шлифа; l_i — длина следов на шлифе; N — количество опробуемых шлифов; B — коэффициент, зависящий от системы трещиноватости, причем для системы горизонтальных трещин $B=3{,}42\cdot 10^6$, а для хаотической трещиноватости $B=1{,}71\times\times 10^6$; при этом величина $\bar{k}$ получается в дарси. Приведенные Е. С. Роммом определения $\bar{k}$ по формуле (I.3.17) и лабораторным опробованиям кернов дали сопоставимые результаты, однако есть данные, свидетельствующие о значительных погрешностях таких расчетов. По-видимому, подобные определения могут быть реальными только для сравнительно однородных микротрещиноватых пород, в которых расстояния между трещинами значительно меньше размеров образца. Для макротрещиноватых пластов такие построения имеют смысл только при каком-то ином подходе к схематизации трещинной среды.

Как следует из приведенного выше вывода, коэффициент проницаемости не зависит от гидродинамических свойств фильтрующей жидкости и, следовательно, должен быть одинаковым

для разных жидкостей, если только в процессе фильтрации не происходит переформирования порового пространства или не возникают дополнительные силовые поля. Это положение было доказано рядом экспериментов по фильтрации через кварцевый песок и стеклянные фильтры [2, 29, 35]. Вместе с тем для пород, включающих глинистые минералы, которые вступают с водой в физико-химическое взаимодействие, проницаемость может уже существенно зависеть от состава фильтрующей жидкости. Так, по экспериментальным данным М. Маскета [35], проницаемость песчаников для пресной воды оказывается ниже, чем для соленой, причем в чистых песчаниках это расхождение сравнительно невелико, а в глинистых песчаниках оно достигает двух порядков. Опыты по фильтрации растворов NaCl и $CaCl_2$ через средне- и мелкозернистые пески, содержащие монтмориллонитовую или гидрослюдистую глину, показали [30], что проницаемость зависит не только от содержания, но и от состава глинистых частиц, причем эффект влияния монтмориллонитовой глины оказывается заметно большим, что обосновывается большей обменной емкостью таких глин, активно развивающих свои гидратно-ионные диффузные соли. Во всех случаях наименьшей получается проницаемость для дистиллированной воды: с увеличением концентрации раствора проницаемость меняется сначала довольно резко, а затем практически стабилизируется. Экспериментами установлено также, что проницаемость для кислых растворов больше, чем для основных.

Таким образом, физико-химические процессы формирования проницаемости оказываются весьма существенными, и их исследования заслуживают значительного развития.

1.3. Нарушения закона Дарси

Закон Дарси имеет очень широкую область применения и по праву считается основным законом фильтрации [9, 47]. Вместе с тем существуют условия, при которых закон Дарси нарушается, причем имеют место верхняя и нижняя границы его применения.

Верхняя граница применения закона Дарси возникает в породах высокой проницаемости при больших скоростях фильтрации. Природа ее связана с существенным проявлением инерционных и пульсационных сил, которые в соответствии с зависимостью (I.2.6) оказываются пропорциональными квадрату скорости фильтрации. Таким образом, за верхней границей применимости закона Дарси в потоке наряду с действием сил вязкого трения, которые в соответствии с законом Ньютона должны быть пропорциональны скорости течения, заметно влияют инерционно-пульсационные силы, имеющие квадратичную зависимость от скорости течения. Исходя из принципа независимости действия различных по природе сил можно предполагать, что при больших скоростях течения достоверна двучленная зависимость вида

$$I = av + bv^2, \qquad \text{(I.3.18)}$$

впервые предложенная для этой цели Ж. Дюпюи [10], а в дальнейшем досконально обоснованная рядом теоретических и экспериментальных исследований [9, 36, 55]. Полагая в этой зависимости $a=1/k$, где параметр k можно рассматривать как истинный коэффициент фильтрации, строго соответствующий линейному режиму течения, удобнее представить ее в форме

$$I = \frac{v}{k}(1 + \alpha v), \qquad \text{(I.3.19)}$$

где α — параметр нелинейности, для оценки которого в сравнительно однородных зернистых породах можно пользоваться выражением [38]

$$\alpha = \frac{0{,}09}{n^2\sqrt{1-n}}\sqrt{\frac{k}{\nu g}}. \qquad \text{(I.3.19а)}$$

Двучленная зависимость универсальна, поскольку она охватывает предельные условия; наступление ламинарного режима при малых скоростях фильтрации, когда член bv^2 становится пренебрежимо малым по сравнению с av, и турбулентного режима при весьма больших скоростях фильтрации, когда можно пренебречь линейным членом по сравнению с квадратичным (рис. 15). В этом смысле двучленная зависимость гораздо лучше используемой иногда степенной зависимости вида

$$I = av^n, \quad 1 \leqslant n \leqslant 2, \qquad \text{(I.3.20)}$$

которая может применяться лишь в ограниченных пределах. Поскольку также не имеется фактических доказательств преимуществ степенной зависимости по отношению к двучленной, то ее использование нельзя считать оправданным.

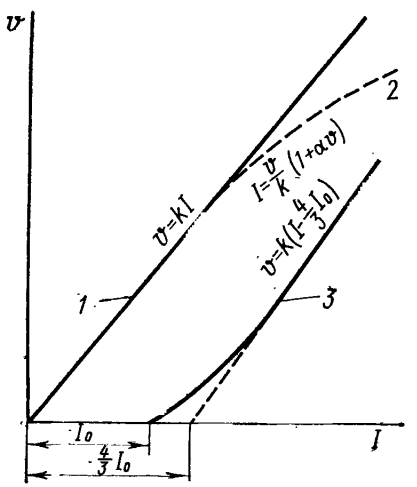


Рис. 15. Графики основного закона фильтрации:
1 — линейный закон Дарси; *2* — двучленный закон; *3* — вязкопластическое течение

Очевидно, что влияние нелинейности основного закона фильтрации следует учитывать, если величина αv соизмерима с единицей. Следовательно, при допустимой погрешности в расчетах ε критическая скорость фильтрации $v_{кр}$, определяющая верхнюю границу применимости закона Дарси, получится из условия

$$\alpha v_{кр} = \varepsilon, \quad v_{кр} = \frac{\varepsilon}{\alpha}. \qquad \text{(I.3.21)}$$

Соответственно, при $\alpha v \gg 1$ основной закон фильтрации приобретает квадратичный характер, постулированный для высокопроницаемых пород [28] и соответствующий турбулентному режиму течения. Практически его можно считать справедливым при скорости $v_т$, определяемой из условия

$$\frac{1}{\alpha v_т} = \varepsilon, \quad \text{или} \quad v_т = \frac{1}{\alpha \varepsilon}. \tag{I.3.22}$$

Ниже приведены данные расчетов величин $v_{кр}$ и $v_т$, а также соответствующих им значений градиентов напора $I_{кр}$ и $I_т$ для типовых проницаемостей пород при $n=0{,}35$, $\alpha_0=0{,}3$ и допустимой погрешности $\varepsilon=0{,}1$.

Порода	Среднезернистый песок	Крупнозернистый песок	Гравий
k, см/с	0,03—0,04	0,1	0,2—0,5
α, с/см	0,15—0,2	0,3	0,5—0,7
$v_{кр}$, см/с	0,5—0,6	0,3	0,15—0,2
$I_{кр}$	10—20	3,0	0,3—1,0
$V_т$, см/с	50—70	30	15—20
$I_т$	750—2000	300	30—100

Эти данные свидетельствуют о том, что нарушения линейного закона фильтрации могут иметь место лишь в высокопроницаемых породах в зоне резкой интенсификации фильтрационного потока, т. е. в условиях, встречающихся в гидрогеологической практике довольно редко; наступление же турбулентного режима для натурных условий вообще нереально. Поэтому необходимость использования двучленного закона фильтрации возникает сравнительно редко и в каждом случае требует специального обоснования.

Гораздо больший принципиальный и практический интерес представляет анализ аномалий основного закона фильтрации, возникающих при малых скоростях фильтрации, характерных для слабопроницаемых пород. Природу этих аномалий связывают с влиянием сил молекулярного взаимодействия частиц воды и породы, причем последнее время их объяснение основывается на представлениях о вязкопластическом характере течения воды в ультратонких поровых каналах [1, 8, 41].

Для анализа закономерностей вязкопластического режима фильтрации снова рассмотрим простейшую модель пористой среды, составляя ее из одинаковых капиллярных трубок радиуса $r_т$. Используя для расхода капиллярной трубки $Q_т$ формулу (I.2.17) и связывая величину $Q_т$ со скоростью фильтрации v выражением (I.3.6), можно показать, что в этом случае при $I>I_0$ основной закон фильтрации описывается уравнением

$$v = k\left[I - \frac{4}{3} I_0 + \frac{I_0}{3}\left(\frac{I_0}{I}\right)^3\right], \tag{I.3.23}$$

график которого представлен на рис. 15, причем величина начального градиента I_0 связывается с расчетным радиусом капиллярной трубки формулой (I.2.14). При больших градиентах, когда $I \gg I_0$, этот график имеет линейную асимптоту

$$v = k\left(I - \frac{4}{3} I_0\right). \qquad \text{(I.3.24)}$$

Расчетные значения начального напряжения сдвига при опытах по фильтрации в образцах грунтов, по данным Н. Ф. Бондаренко [8], имеют порядок $\tau_0 \cong 10^{-3}$ дин/см^2, что значительно меньше величин, полученных по опытам в стеклянных капиллярах. Возможно, что такое несоответствие связано с влиянием неравномерности размеров пор, значимость которого показал В. А. Барон [5].

Ниже приведены значения начального градиента для типовых характеристик, подсчитанных согласно (I.2.14) при значении $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ дин$\cdot$см$^{-2} = 2 \cdot 10^{-3}$ г$\cdot$см$^{-1}\cdot$с$^{-2}$, принимая в системе СГС $\gamma = pg = 1$ г/см$^3 \cdot 980$ см/с$^2 = 980$ г$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-2}$ и определяя расчетный радиус капиллярной трубки $r_т$ по формуле (I.3.11) при коэффициенте извилистости $\varkappa = 0{,}5$ и характерном для воды значении $\nu = 0{,}013$ см^2/с.

Порода	Средне- и крупнозернистый песок	Мелкозернистый песок	Глинистый песок	Суглинок	Глина
k, см/с	0,05—0,1	0,01	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}—10^{-9}
n	0,35	0,25	0,2	0,1	0,1
$r_т$, см	0,007	0,003	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$
I_0	$3 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	0,04	0,4—1,2

Приведенные расчетные данные свидетельствуют о реально значимых величинах начальных градиентов, получающихся из анализа вязкопластического течения, так что в природных условиях его проявления, по-видимому, нередки и требуют тщательного анализа. Важно иметь в виду, что вязкопластическое течение имеет релаксационный характер, так что в пластической области (при $I < I_0$) фильтрация должна иметь место, однако эффективная проницаемость породы будет уже значительно меньшей, что доказывается некоторыми экспериментальными данными. Заметим, что природа фильтрационных аномалий при ультрамалых скоростях фильтрации еще встречает различные толкования, причем имеются и негативные данные о реальном проявлении начального градиента фильтрации [45].

Анализируя области нарушения закона Дарси, можно сделать вывод о том, что они имеют относительно локальный характер по сравнению с областью применимости этого закона. Поэтому

при дальнейших обоснованиях закономерностей динамики подземных вод за основу будет приниматься, как правило, закон Дарси, а случаи его нарушения будут специально оговариваться.

§ 2. ЕМКОСТНЫЕ СВОЙСТВА ГОРНЫХ ПОРОД

Емкостные свойства горных пород отражают их способность к водоотдаче или водонасыщению в процессе нестационарной фильтрации — либо при изменении степени заполнения пор и трещин водой, либо в результате изменения порового объема водоносных горных пород и плотности воды при упругих или упругопластических деформациях сжатия-растяжения; соответственно в первом случае имеется в виду свободная (гравитационная) емкость, а во втором — упругая емкость горных пород. Рассмотрим емкостные свойства отдельно для безнапорных пластов, где емкость имеет преимущественно гравитационный характер, и для напорных пластов, где она имеет исключительно упругий характер.

2.1. Гравитационная емкость горных пород

В безнапорных пластах при нестационарном режиме происходят колебания свободной поверхности потока, приводящие к осушению или насыщению пласта (соответственно при снижении и при повышении уровней). Для характеристики этого процесса используется величина *коэффициента гравитационной емкости пласта* μ, представляющего собой изменение количества воды в породе при гравитационном осушении или насыщении, отнесенное к объему породы. При опускании свободной поверхности μ соответствует коэффициенту водоотдачи $\mu_в$, а при повышении свободной поверхности — коэффициенту недостатка насыщения $\mu_н$. Балансовая структура $\mu_в$ и $\mu_н$ представляется следующими формулами:

$$\mu_в = n_0 - w_{зв} - w_{ст}, \quad \mu_н = n_0 - w_{зв} - w_0, \qquad (I.3.25)$$

где n_0 — активная пористость породы; $w_{ст}$ — влажность стыковой воды (в узлах пор); w_0 — влажность грунта в исходном состоянии (до насыщения); $w_{зв}$ — относительное объемное содержание защемленного воздуха и иммобилизованной воды. Следует отметить существенную роль стыковой воды и защемленных объемов (воды и воздуха) в формировании гравитационной емкости геофильтрационного потока, из-за которых величина μ обычно оказывается значительно меньшей активной пористости породы.

Величина $\mu_в$ существенным образом зависит от физико-механического состава и литологического строения горных пород. Исследование такой зависимости проводилось только для песчаных пород. Так, Н. Н. Биндеман [7] по данным лабораторных опытов получил для различных песков следующие средние значения $\mu_в$; тонкозернистые — 0,19, мелкозернистые — 0,22, разнозернистые — 0,24.

П. А. Бецинский [6] предлагает эмпирическую формулу

$$\mu_в = 0{,}117\sqrt[7]{k}, \qquad (I.3.26)$$

где k принимается в м/сут; согласно опытным данным [6, 17], этой формулой можно пользоваться при $\mu_в > 0{,}15$. Вместе с тем, по Б. Кожерскому [72], зависимость $\mu_в$ от k не всегда выражается достаточно четко. Опытные данные значений $\mu_в$ в различных разностях песчанистых пород приведены в работе [67].

Значительно скуднее представлены материалы для оценки значений μ в глинистых породах; на основании отдельных данных натурных определений можно рекомендовать ориентировочно принимать для пылеватых и глинистых песков $\mu = 0{,}05—0{,}15$, а для супесчано-суглинистых пород $\mu = 0{,}01—0{,}1$.

Формирование гравитационной емкости — довольно сложный динамический процесс, поскольку при нестационарной фильтрации происходит переформирование капиллярной зоны, связанное с необходимостью передачи воды из верхней ее части на свободную поверхность гравитационной зоны. При понижении уровня капиллярная зона в начальный период постепенно растягивается и только при достаточно длительном равномерном снижении уровня в капиллярной зоне наступает динамическое равновесие, когда эпюра влажности по высоте не меняется, а лишь опускается параллельно самой себе со скоростью опускания свободной поверхности. Этот процесс приводит к тому, что в начальный период нестационарного режима водоотдача имеет замедленный характер, так что коэффициент водоотдачи в этот период постепенно увеличивается, достигая предельного значения при стабилизации формы эпюры влажности в капиллярной зоне (рис. 16, *а*).

Поскольку величина μ должна характеризовать изменение объема гравитационной зоны потока, то в связи с отмеченным влиянием капиллярной зоны правильнее определять величину μ как изменение емкости гравитационной зоны ΔV_0 в единичном элементе безнапорного пласта (т е. в элементе единичной площади в плане), отнесенное к изменению уровня свободной поверхности потока ΔH:

$$\mu = \frac{\Delta V_0}{\Delta H}. \qquad (I.3.27)$$

Количественные закономерности динамики водоотдачи экспериментально изучены пока довольно слабо и главным образом для песчаных грунтов [39, 43]. Н. Боултон [66] предложил гипотетическую схему динамики водоотдачи, идентичную схеме, в которой реальная капиллярная зона заменяется эффективной «капиллярной каймой» высотой $h_к$, в пределах которой принимается полное водонасыщение, а проницаемость соответствует некоторому коэффициенту фильтрации $k_к$. Экспериментальное изучение дренирования высоких песчаных колонн показало [39], что модель

капиллярной каймы удовлетворительно описывает динамику водоотдачи, причем величина $k_к$ оказывается значительно меньшей коэффициента фильтрации водонасыщенной породы и существенно меняющейся в зависимости от скорости опускания уровня свободной поверхности.

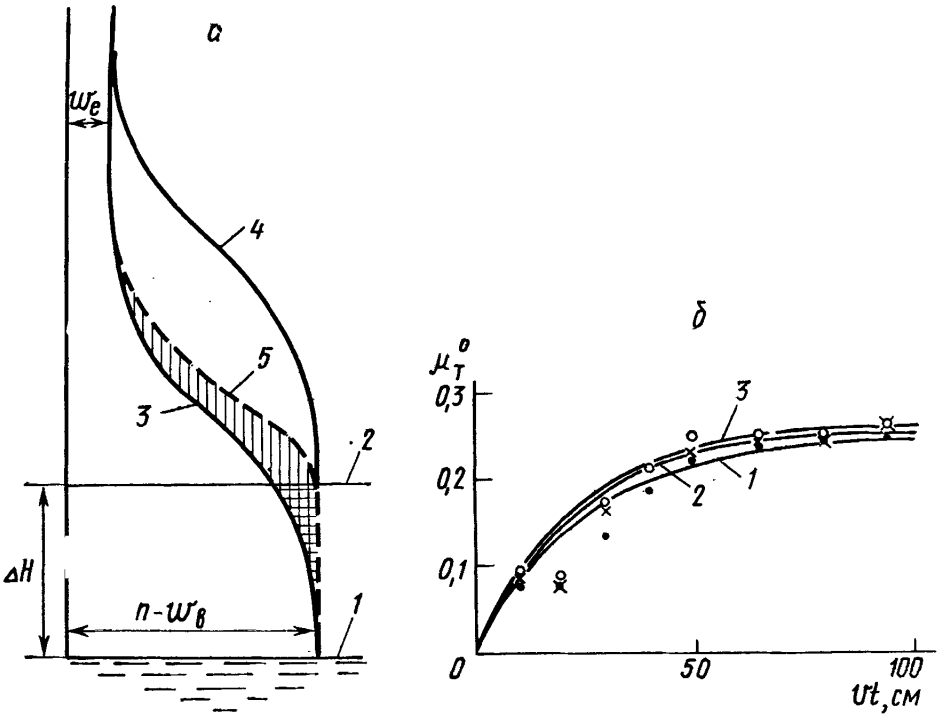


Рис. 16. Графики для представления динамики гравитационной емкости: *а* — динамика влажности в капиллярной зоне при водоотдаче (*1* и *2* — исходное и текущее положения уровня свободной поверхности; *3* и *4* — начальная и текущая эпюры распределения влажности; *5* — стационарная эпюра влажности при положении уровня *2*); *б* — экспериментальные данные по динамике водоотдачи в мелкозернистом песке при различных скоростях снижения свободной поверхности (*1* — $v_{сп}$=0,2 см/мин, *2* — $v_{сп}$=0,33 см/мин, *3* — $v_{сп}$=0,67 см/мин)

2.2. Упругая емкость горных пород

Как отмечалось выше, изменения емкости напорных пластов обусловливаются их деформациями, возникающими при изменениях напряженного состояния пласта. При изучении баланса подземных вод особую значимость представляет упругая емкость пластов, вызываемая гидродинамическими факторами. Для обоснования параметров упругой емкости рассмотрим деформации элемента водоносного пласта объемом V под действием изменений давления в воде p и давления в скелете породы $p_{ск}$. Весовое количество воды в этом элементе будет $W = \gamma n V$, а его изменения

$\Delta W = \Delta(\gamma n V)$. Вводя в это выражение вместо пористости коэффициент пористости ε и учитывая соотношение $n = \varepsilon/(1+\varepsilon)$, обратим внимание на то, что величина $V/(1+\varepsilon)$ представляет собой объем скелета породы в рассматриваемом элементе пласта. Поскольку скелет породы значительно прочнее самой породы, то при деформациях пласта объем скелета породы можно считать неизменным. Тогда можно записать

$$\Delta W = \Delta(\gamma n V) = \Delta\left(\gamma\varepsilon \frac{V}{1+\varepsilon}\right) = \frac{V}{1+\varepsilon}$$

$$\Delta(\gamma\varepsilon) = \frac{V}{1+\varepsilon}(\varepsilon\,\Delta\gamma + \gamma\,\Delta\varepsilon). \qquad \text{(I.3.28)}$$

Изменение плотности воды описывается законом Гука вида

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \beta_в\,\Delta p, \qquad \text{(I.3.29)}$$

где $\beta_в$ — коэффициент объемного сжатия воды, который представляет собой относительное изменение объема воды при изменении давления на 1 атм, причем для пресной воды $\beta_в \cong 4{,}75 \cdot 10^{-5}$ 1/атм, а для минерализованной воды с минерализацией M г/л принимается [34]

$$\beta_в' = (4{,}75 \cdot 10^{-5} - 7{,}15 \cdot 10^{-8})\frac{M}{\gamma}\frac{1}{\text{атм}}. \qquad \text{(I.3.29а)}$$

В сравнительно небольших пределах изменения давлений можно считать, что коэффициент пористости породы, слагающей пласт, изменяется пропорционально изменению давления $\Delta p_{ск}$, в скелете породы [14, 37]:

$$\Delta\varepsilon = -a_v\,\Delta p_{ск}, \qquad \text{(I.3.30)}$$

где a_v — коэффициент уплотнения породы, величина которого изменяется в широких пределах в зависимости от вида породы и глубины ее залегания; его характерные значения имеют порядок $a_v = 10^{-3} - 10^{-2}$ кг/см^2 [37]. Для осадочных пород, залегающих на большой глубине, можно принимать [21] $a_v = (1 \div 5) \cdot 10^{-4}$ см^2/кГс.

Подставляя в формулу (I.3.28) выражения для $\Delta\gamma$ из (I.3.29), для $\Delta\varepsilon$ — из (I.3.30) и связывая $p_{ск}$ с p согласно (I.1.2), получим

$$\Delta W = \frac{\gamma V}{1+\varepsilon}(\varepsilon\beta_в\,\Delta p + a_v\,\Delta p - a_v\,\Delta p_п), \qquad \text{(I.3.31)}$$

где $\Delta p_п$ — изменение внешней нагрузки на пласт. Рассматривая далее условия, когда упругий режим фильтрации определяется

только гидродинамическими факторами и, следовательно, $\Delta p_{\text{п}} = 0$, получим

$$\Delta W = \frac{\gamma V}{1+\varepsilon}(\varepsilon\beta_{\text{в}} + a_v)\,\Delta p. \qquad \text{(I.3.32)}$$

В качестве удельной характеристики упругой емкости породы, проявляющейся при действии гидродинамических факторов, следуя В. Н. Щелкачеву [62], введем *коэффициент упругой емкости породы* η^*, представляющий собой отношение изменения объема воды к объему породы при единичном изменении напора, т. е. в принятых ранее обозначениях

$$\eta^* = \frac{\Delta W}{\gamma \Delta H V}. \qquad \text{(I.3.33)}$$

При малой изменчивости плотности воды можно принять[1] $\gamma\Delta H \cong \Delta p$ и тогда, выражая ΔW согласно (I.3.33), получим

$$\eta^* = \frac{\gamma}{1+\varepsilon}(\varepsilon\beta_{\text{в}} + a_v). \qquad \text{(I.3.34)}$$

Обобщение данных компрессионных и опытно-фильтрационных опробований показывает [37], что при небольших глубинах (порядка 10—50 м) для песчаных пород можно ориентировочно принимать $\eta^* = 0{,}007/z$, где z — средняя глубина пласта от поверхности земли, а для глинистых пород $\eta^* = (4 \div 7) \cdot 10^{-4}$ 1/м. На глубинах порядка 50—200 м ориентировочные значения η^* составляют [4, 27, 37, 74]: $(0{,}5 \div 2) \cdot 10^{-4}$ 1/м — для песков, $(1 \div 4) \cdot 10^{-4}$ 1/м — для глинистых и алевритовых пород, $(0{,}3 \div 1{,}0) \cdot 10^{-4}$ 1/м — для песчаников и алевролитов, $(3 \div 5) \times 10^{-4}$ 1/м — для мела, $(1 \div 4) \cdot 10^{-4}$ 1/м — для известняков и мергелей.

Упругая емкость, так же как и гравитационная, обладает динамичностью, обусловленной неоднородностью пород и пласта. В качестве простейшей модели, описывающей влияние этого фактора, используется схема среды с двойной емкостью или трещинно-порового строения. В этой схеме (рис. 17, *а*) порода представляется состоящей из слабопроницаемых (пористых) блоков, которые равномерно прорезаются системой проницаемых каналов (трещин); при этом блоки сосредоточивают в себе основную емкость породы, а каналы обусловливают ее проницаемость [32, 38]. В схеме с двойной емкостью строение породы считается квазиоднородным, поскольку емкость блоков, а также проницаемость и емкость каналов принимаются в пределах пласта одинаковыми.

[1] Доказательство этого положения представляется сделать в качестве упражнения.

Такая же схема формирования емкости может использоваться и для учета слоистого строения пласта (рис. 17, *б*).

В качестве удельной характеристики упругой емкости всего пласта целесообразно использовать *коэффициент упругой емкости пласта* μ^*, который представляет собой отношение изменения

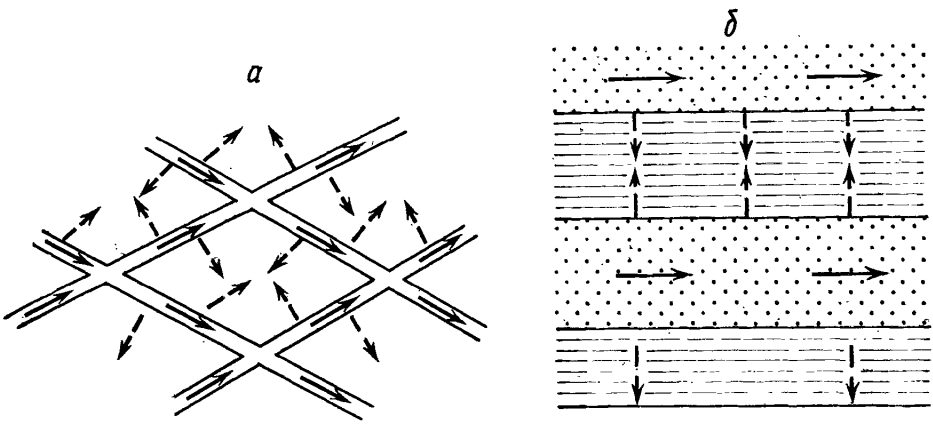


Рис. 17. Типы среды с двойной емкостью:
а — трещинно-поровая среда; *б* — слоистый пласт (сплошными и пунктирными стрелками показаны направления потока в каналах и блоках)

объема воды в единичном элементе пласта к изменению напора (при действии гидродинамических факторов):

$$\mu^* = \frac{\Delta V_0}{\Delta H}, \qquad \text{(I.3.35)}$$

причем для водоносного пласта мощностью m имеем

$$\mu^* = m\eta^* = \frac{\gamma m}{1+\varepsilon}(\varepsilon\beta_в + a_v), \qquad \text{(I.3.36)}$$

а для многослойного пласта, состоящего из n слоев с коэффициентами упругоемкости η_i^* в пределах слоя мощностью m_i, соответственно

$$\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^* m_i. \qquad \text{(I.3.36а)}$$

Из сопоставления выражений (I.3.35) и (I.3.27) следует, что по балансовому смыслу величина μ^* аналогична коэффициенту гравитационной емкости пласта μ для безнапорного пласта.

Глава 4

ИСХОДНАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Исходная гидродинамическая модель геофильтрационного потока представляет собой его описание с позиций математической физики и включает уравнение движения (основной закон фильтрации), уравнение неразрывности (баланса) потока, уравнения состояния, связывающие напряжения и деформации пласта, а также условия однозначности, состоящие из начальных и граничных условий процесса. Приведем общий вид таких уравнений в дифференциальной форме применительно к декартовой системе координат.

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ

Уравнение движения для фильтрационного потока представляет собой математическую запись основного закона фильтрации. Для потока постоянной плотности[1] примем уравнение движения в обобщенной форме закона Дарси (I.3.3), выражая градиенты напора через его производные по соответствующим направлениям. В потоке постоянной плотности компоненты скоростей фильтрации v_x, v_y и v_z — по направлениям координат x, y и z — в анизотропном пласте имеют выражение

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x},\quad v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y},\quad v_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z}, \qquad (I.4.1)$$

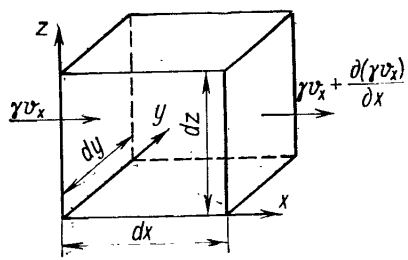


Рис. 18. Бесконечно малый элемент пространственного потока

где k_x, k_y и k_z — коэффициенты фильтрации по направлениям соответствующих координат[2]. Знак «минус» в этих выражениях поставлен потому, что скорости фильтрации считаются положительными, если они направлены в положительном направлении осей координат, при этом скорости фильтрации и градиенты напора всегда имеют разный знак. Заметим, что дифференциальная форма основного закона фильтрации впервые была представлена Ж. Дюпюи [70].

Для вывода **уравнения неразрывности**, описывающего материальный баланс потока, рассматриваются составляющие такого баланса в бесконечно малом элементе пространства (рис. 18) за

[1] Особенности построения гидродинамической модели потока переменной плотности будут рассматриваться далее (см. § 3 главы 1 раздела II).

[2] Строго говоря, выражения (I.4.1) справедливы лишь при условии совпадения главных осей анизотропии с осями координат; в противном случае проницаемость должна рассматриваться в форме тензора [9, 55].

бесконечно малое время dt. Материальный расход потока, поступающего в рассматриваемый элемент по направлению x, будет равен $\gamma v_x d_y d_z$; при выходе из элемента материальная скорость γv_x получает приращение $\frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x)dx$, так что материальный расход потока, выходящего из элемента по оси x, будет $\left[\gamma v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\gamma v_x)dx\right] dy\,dz$. Таким образом, разница между расходами входящего в элемент и выходящего из него потока по оси x будет $-\frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial x}dx\,dy\,dz$; аналогичные изменения материальных расходов по осям y и z будут

$$-\frac{\partial(\gamma v_y)}{\partial y}dx\,dy\,dz \text{ и } -\frac{\partial(\gamma v_z)}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Изменения материального количества воды W, содержащегося в бесконечно малом элементе, по аналогии с (1.3.32) можно представить выражением

$$dW = \frac{dx\,dy\,dz}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}dt. \qquad (I.4.2)$$

Исходя из того, что суммарное изменение материального количества воды при прохождении потока через рассматриваемый элемент по различным направлениям должно компенсироваться изменением количества воды, содержащейся в этом элементе, после сокращения бесконечно малых придем к уравнению неразрывности фильтрационного потока:

$$-\frac{\partial(\gamma v_x)}{\partial x}-\frac{\partial(\gamma v_y)}{\partial y}-\frac{\partial(\gamma v_z)}{\partial z}=\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}. \qquad (I.4.3)$$

При рассмотрении упругого режима фильтрации должны быть также записаны **уравнения состояния**, связывающие деформации пласта с изменениями его напряженного состояния (давлений в породе и воде). Характерными формами уравнений состояния для воды и породы являются выражения (I.3.33) и (I.3.34), используя которые запишем выражение для члена уравнения неразрывности, учитывающего деформации пласта:

$$\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\varepsilon\gamma\beta_в\frac{\partial p}{\partial t}-\gamma a_v\frac{\partial p_{ск}}{\partial t}. \qquad (I.4.4)$$

При формировании упругого режима фильтрации под действием гидродинамических факторов $dp_{ск} = -dp$ и

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\partial(\gamma\varepsilon)}{\partial t}=\eta^*\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (I.4.5)$$

где η^* — коэффициент упругоемкости, выражаемый согласно уравнению (I.3.38).

Дифференциальные уравнения фильтрации описывают распределение напора (давления) в фильтрационном потоке. Для их вывода в уравнении неразрывности компоненты скоростей фильтрационного потока выражаются из закона фильтрации, а деформации пласта (воды и породы) связываются с давлениями через уравнения состояния.

Рассмотрим наиболее распространенные условия формирования геофильтрационного потока под действием гидродинамических факторов, считая справедливыми закон Дарси и уравнения состояния в форме (I.3.33) и (I.3.34), а также пренебрегая пространственной изменчивостью плотности воды. В такой постановке для компонентов скоростей фильтрации принимаются выражения (I.4.1) и для описания деформации пласта справедливо выражение (I.4.5), в котором можно считать $\partial p/\partial t \cong \gamma\, \partial H/\partial t$. Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности (I.4.3), получим дифференциальное уравнение, описывающее распределение напоров в фильтрационном потоке:

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial H}{\partial z}\right). \tag{I.4.6}$$

Приведем характерные частные случаи этого уравнения: для однородного анизотропного пласта

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \tag{I.4.7}$$

для однородного изотропного пласта

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla H, \quad a = \frac{k}{\gamma(\varepsilon\beta_в + a_v)}, \tag{I.4.8}$$

где a — коэффициент пьезопроводности (по В. Н. Щелкачеву); а ∇^2 представляет собой оператор Лапласа, который в данном случае имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{I.4.9}$$

Уравнение (I.4.8) относится к классу параболических уравнений типа уравнения Фурье или теплопроводности [50].

Уравнение (I.4.7) переходит в уравнение (I.4.8) путем линейного преобразования координат $x_0 = \alpha_x x$, $y_0 = \alpha_y y$ и $z_0 = \alpha_z z$.

Тогда

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \alpha_x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \alpha_y^2 \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \alpha_z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial z_0^2}, \tag{I.4.10}$$

и уравнение (I.4.7) принимает вид

$$\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} = k_x \alpha_x^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x_0^2} + k_y \alpha_y^2 \frac{\partial^2 H}{\partial y_0^2} + k_z \alpha_z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial z_0^2}. \qquad \text{(I.4.10a)}$$

Нетрудно видеть, что, задавая

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{k}{k_x}}, \quad \alpha_y = \sqrt{\frac{k}{k_y}}, \quad \alpha_z = \sqrt{\frac{k}{k_z}}, \qquad \text{(I.4.11)}$$

где k — любое выбранное значение коэффициента фильтрации, приводим уравнение (I.4.7) к виду (I.4.8), где вместо действительных координат x, y, z будут преобразованные координаты x_0, y_0, z_0. Таким образом, однородно-анизотропный пласт преобразуется в изотропный путем изменения масштаба координат согласно выражению (I.4.11).

При жестком режиме фильтрации уравнение однородного изотропного потока принимает вид уравнения Лапласа

$$\nabla^2 H = 0, \qquad \text{(I.4.12)}$$

т. е. в этом случае напор оказывается гармонической функцией.

Таким образом, аналитические решения задач геофильтрации в общем случае сводятся к решению дифференциальных уравнений типа теплопроводности (при упругом режиме фильтрации) или Лапласа (при жестком режиме фильтрации).

Для наглядного графического представления элементов потока на плоскости используется *гидродинамическая сетка*, состоящая из системы линий равного напора и линий тока, причем линии тока показывают направление потока в каждой точке. Для характеристики линий тока вводится функция тока ψ, которая имеет постоянное значение вдоль каждой линии тока, а ее разница на двух линиях тока n и $n-1$ равна расходу потока $Q_{n,\,n-1}$, протекающего между этими линиями, т. е. $\Delta\psi_n = \psi_n - \psi_{n-1} = Q_{n,\,n-1}$.

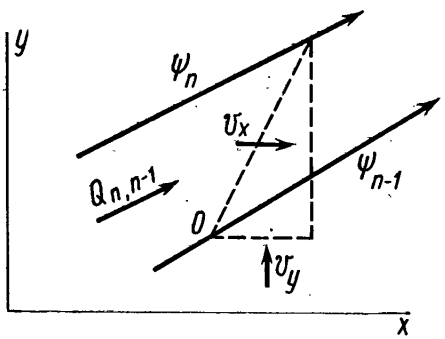


Рис. 19. Участок ленты тока

Выразим расход $Q_{n,\,n-1}$ плоского потока единичной мощности в пределах такой ленты тока (рис. 19) через компоненты скорости фильтрации v_x и v_y:

$$Q_{n,n-1} = v_x \Delta y - v_y \Delta x. \qquad \text{(I.4.13)}$$

Поскольку

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta y, \qquad \text{(I.4.14)}$$

то, сопоставляя (I.4.13) и (I.4.14), получим выражения компонентов скоростей через функцию тока:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{I.4.15}$$

Из сопоставления с выражениями v_x и v_y в дифференциальной форме закона Дарси (I.4.1) следует, что в однородном изотропном плоском потоке должно выполняться соотношение

$$k\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{I.4.16}$$

Соотношения (I.4.16) представляют собой условия Даламбера — Зейлера (Коши — Римана), и их выполнение свидетельствует об ортогональности линий тока и линий равного напора в изотропной среде [9, 50]. Дифференцируя первое из этих соотношений по y, а второе по x и вычитая их затем друг из друга, можно видеть, что функция ψ (так же, как и напор) является гармонической.

§ 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

При решении уравнений математической физики граничными условиями задаются на границах потока значения искомой функции или ее производной, а также их комбинации. Поскольку в геофильтрационных расчетах искомой функцией обычно является напор, то граничные условия при этом представляются в форме задания напора (условие первого рода), градиента напора или расхода потока (условие второго рода) или их линейной комбинации (условие третьего рода).

Основные внешние границы фильтрационных потоков — контуры водоемов (водохранилищ, рек, каналов и т. п.) и непроницаемые границы, проходящие по контурам водоупорных слоев; в безнапорных потоках верхней границей является их свободная поверхность. Внутренние границы возникают при наличии зон с различной проницаемостью (проводимостью) или внутренних источников — стоков (скважин, дрен и т. п.).

Контур водоема или водотока. При задании граничного условия на контуре водоема (водотока) обычно можно считать, что давление воды в водоеме распределяется по гидростатическому закону, как в неподвижном бассейне. Тогда по контуру водоема (рис. 20) напор будет иметь постоянную величину H^0, складывающуюся согласно (I.1.6) из глубины водоема h^0 и ординаты его контура z^0:

$$H^0 = h^0 + z^0 = \text{const}. \tag{I.4.17}$$

Следовательно, контур водоема представляет собой линию равного напора (граница первого рода), причем согласно принципу ортогональности гидродинамической сетки линии токов будут направлены по нормали к контуру водоема.

Нередко русло водоема или водотока экранируется тонким слоем слабопроницаемых отложений. В этом случае граница водоема переносится на контур экранирующего слоя, где при фильтрации из водоема могут возникнуть два принципиально различных условия в зависимости от давления $p_г$ на этом граничном контуре:

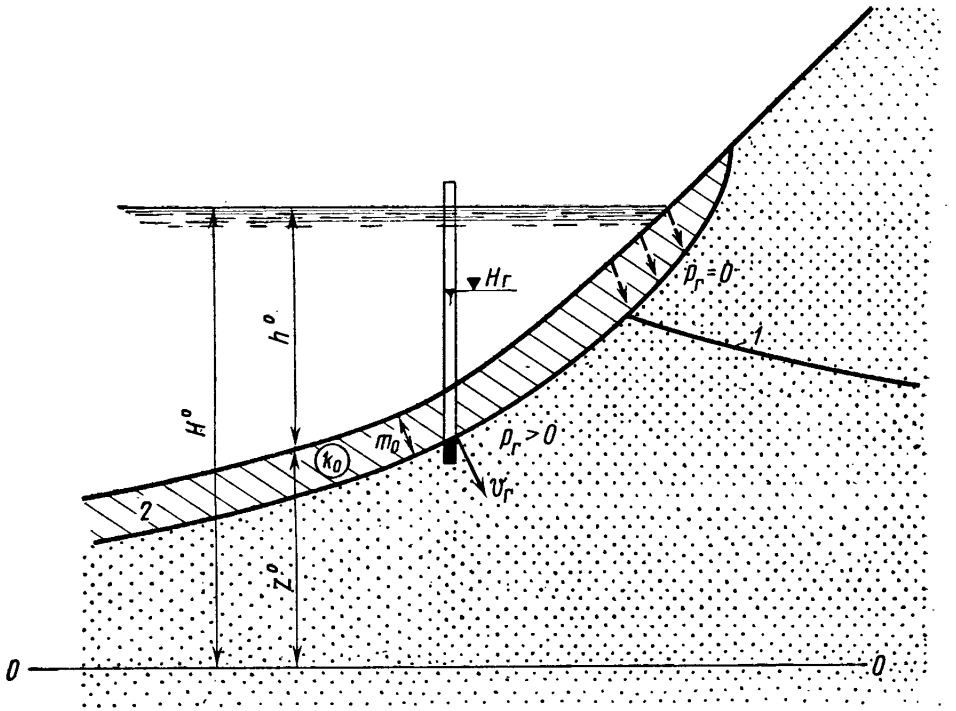


Рис. 20. Контуры водной границы фильтрационного потока:
1 — свободная поверхность; *2* — экранирующий слой

при $p_г>0$ фильтрационный поток сохраняет сплошность, а при отрыве уровня фильтрационного потока от экранирующего слоя, когда фильтрационный поток теряет сплошность и под экранирующим слоем образуется зона инфильтрации с неполным насыщением, $p_г=0$. Заметим, что здесь может возникнуть необходимость учета влияния капиллярных сил, когда окажется $p_г<0$. Из-за малой толщины экранирующего слоя можно считать, что фильтрационный поток в нем направлен по нормали к его контуру, так что скорость фильтрации по граничному контуру $v_г$ будет

$$v_г = k_0 \frac{H^0 - H_г}{m_0}, \qquad (I.4.18)$$

где $H_г$ — напор по граничному контуру; k_0 — коэффициент фильтрации экранирующего слоя. При $p_г=0$ имеем $H_г=z_г$ и на граничном контуре задается скорость фильтрации

$$v_г = k_0 \frac{H^0 - z_г}{m_0}, \qquad \text{(I.4.18а)}$$

т. е. водоем становится источником питания, формирующим граничное условие второго рода, когда скорость (расход) фильтрации из водоема не зависит от напоров фильтрационного потока; такой режим фильтрационного потока называется свободным.

При $p_г > 0$ имеем $H_г > z_г$ и скорость фильтрации по граничному контуру $v_г$ согласно (I.4.18) оказывается линейно-зависящей от граничного напора $H_г$, что соответствует граничному условию третьего рода; такой режим фильтрационного потока называется подпертым. Разумеется, что режим фильтрационного потока, направленного в водоем, всегда является подпертым.

Непроницаемые границы. Непроницаемые границы задаются по контурам практически водоупорных пород. Вдоль такой границы проходит линия тока, а градиент напора по нормали к ней равен нулю; таким образом, на непроницаемой границе задается частный случай граничного условия второго рода. Следует отметить, что при наличии слабой проницаемости водоупорных пород задание непроницаемой границы имеет условный характер.

Свободная поверхность потока. Верхней границей гравитационной зоны безнапорного потока является его свободная поверхность, на которой давление равно атмосферному, обычно принимаемому за нулевое.

Соответственно на свободной поверхности напор равен ее ординате относительно плоскости сравнения, т. е. здесь выполняется условие

$$H = z. \qquad \text{(I.4.19)}$$

Над свободной поверхностью находится капиллярная зона с переменной влажностью, причем между капиллярной и гравитационной зонами осуществляется свободный водообмен, так что свободная поверхность является условной границей потока.

Инфильтрационное питание, поступающее на свободную поверхность, характеризуется величиной *интенсивности инфильтрации* w, которая представляет собой расход инфильтрационного (площадного) питания, поступающий на единицу площади горизонтального сечения потока.

При близком расположении грунтовых вод к поверхности земли величина w существенно зависит от глубины до грунтовых вод $z_{гв}$, что особенно свойственно испарению [26, 33]. Характер зависимости $w(z_{гв})$ исследован еще недостаточно полно, однако можно утверждать, что в общем виде эта зависимость существенно нелинейна (рис. 21), а в зоне интенсивного изменения w ее можно приближенно аппроксимировать линейной функцией, которая для условий испарения имеет вид

$$w = -w_0(1 - \bar{z}), \quad \bar{z} = \frac{z_{гв}}{z_{кр}}, \qquad \text{(I.4.20)}$$

где $z_{кр}$ — условная критическая глубина грунтовых вод, а w_0 — интенсивность испарения на поверхности земли. Поскольку $z_{гв}=z^0-H$, где z^0 — отметка поверхности земли относительно

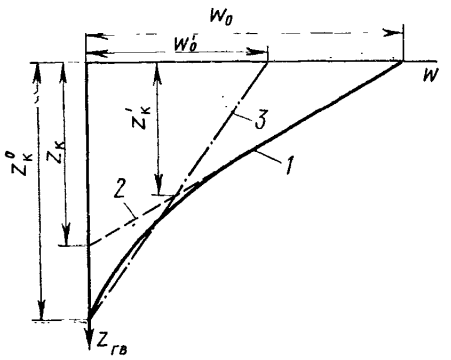


Рис. 21. Типовой график зависимости интенсивности испарения w от глубины $z_{гв}$:
1 — график натурных данных; *2* и *3* — аппроксимирующие прямые в верхней и нижней частях графика

плоскости сравнения, то зависимость (I.4.20) можно записать в виде

$$w = w_0 \frac{H - z^0 - z_{кр}}{z_{кр}}. \qquad (I.4.20а)$$

В более общем случае зависимость $w(z_{гв})$ можно аппроксимировать ломаной линией, состоящей из нескольких прямолинейных участков, как это показано на рис. 21, причем для каждого из таких участков будет использоваться зависимость вида (I.4.20) с заменой входящих в нее параметров w_0 и $z_{кр}$. Существуют также предложения по аппроксимации зависимости $w(z)$ нелинейными функциями; в частности, С. Ф. Аверьяновым [27] предложена степенная зависимость

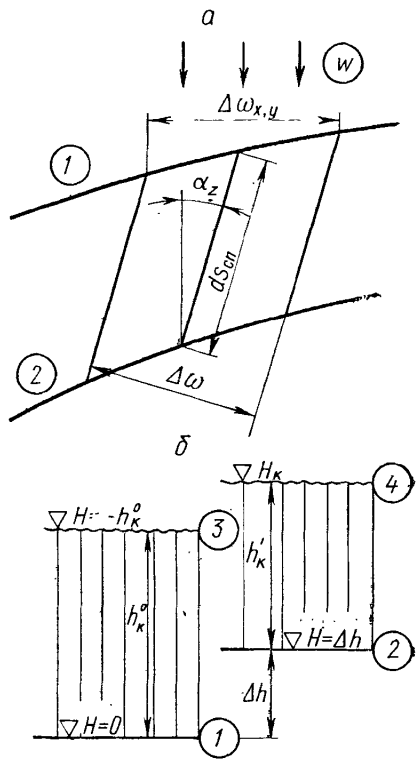


Рис. 22. Перемещение свободной поверхности при нестационарной фильтрации:
а — схема к выводу кинематического условия на свободной поверхности (*1* и *2* — положения на два момента времени с бесконечно малым интервалом времени); *б* — деформации капиллярной зоны (*1* и *2* — положения границы между гравитационной и капиллярными зонами; *3* и *4* — положения поверхности капиллярной зоны на два момента времени с интервалом Δt)

$$w = w_0 (1 - \bar{z})^n \qquad (I.4.21)$$

при характерных значениях $n = 1{,}5 \div 3$.

Рассмотрим **кинематические условия на свободной поверхности** без учета влияния капиллярной зоны. Для этого составим уравнение баланса воды на свободной поверхности в пределах элемента трубки тока площадью $\Delta\omega$

и длиной $dS_{сп}$ (рис. 22), на которую перемещается свободная поверхность за бесконечно малое время dt. Объем воды в этом элементе должен балансироваться с поступлением воды в него из потока и за счет инфильтрационного питания, т. е. балансовое уравнение здесь будет $\mu\Delta\omega\, dS_{сп}=v^0\Delta\omega dt+w\Delta\omega_{xy}dt$, где $v^0=kI^0$ и I^0 — скорость фильтрации и градиент напора вдоль линии тока на свободной поверхности, а $\Delta\omega_{xy}$ — горизонтальное сечение площадки $\Delta\omega$. Зная, что $\Delta\omega=\Delta\omega_{xy}\cos\alpha_z$, где α_z — угол между направлением скорости v^0 и вертикалью, представим это уравнение в виде

$$\mu\frac{dS_{сп}}{dt}=kI^0+\frac{w}{\cos\alpha_z}. \qquad (I.4.22)$$

При небольшой кривизне свободной поверхности

$$dS_{сп}\cos\alpha_z=\frac{\partial H^0}{\partial t}dt, \quad I^0\cos\alpha_z=I_z^0,$$

где I_z^0 — градиент напора на свободной поверхности в вертикальном направлении; в этом случае условие (I.4.22) принимает более простую форму:

$$\frac{\partial H^0}{\partial t}=\frac{k}{\mu}I_z^0+\frac{w}{\mu}. \qquad (I.4.23)$$

Влияние капиллярной зоны приближенно может учитываться заданием водонасыщенной «капиллярной каймы» мощностью $h_к$ с расчетным значением коэффициента фильтрации $k_к$.

Для полного учета влияния капиллярной зоны требуется совместное рассмотрение потоков в гравитационной и капиллярной зонах (см. § 2 главы 4 раздела III).

При решении задач стационарной фильтрации такой прием требует переноса верхней границы безнапорного потока на поверхность капиллярной каймы, где задается граничное условие

$$\frac{p}{\gamma}=-h_к,\ H=z-h_к, \qquad (I.4.24)$$

причем при отсутствии инфильтрации эта поверхность является также линией тока. Примеры такого рода решений приведены в работах [3, 10, 48].

Для полного учета влияния капиллярной зоны требуется совместное рассмотрение потоков в гравитационной и капиллярной зонах (см. § 2 главы 4 раздела III).

Участок высачивания. Участок высачивания образуется на выходе безнапорного фильтрационного потока на поверхность (рис. 23). Его существование можно доказать от противного, предположив возможность подхода свободной поверхности непосредственно в точку уреза поверхностных вод; тогда свободная поверхность, являющаяся линией тока, должна подойти по нормали к поверхности откоса, что невозможно, поскольку она при этом получила бы обратный уклон от направления потока.

Вдоль участка высачивания давление равно атмосферному (нулевому), так что здесь сохраняется условие (I.4.17), где величина z^0 представляет собой ординату поверхности откоса.

Рассмотрим условия выхода потока на откос без учета влияния капиллярной зоны. Определим градиент напора в точке высачивания (точка B на рис. 23, *б*), где он определяется уклоном свободной поверхности при подходе потока к этой точке. Если на

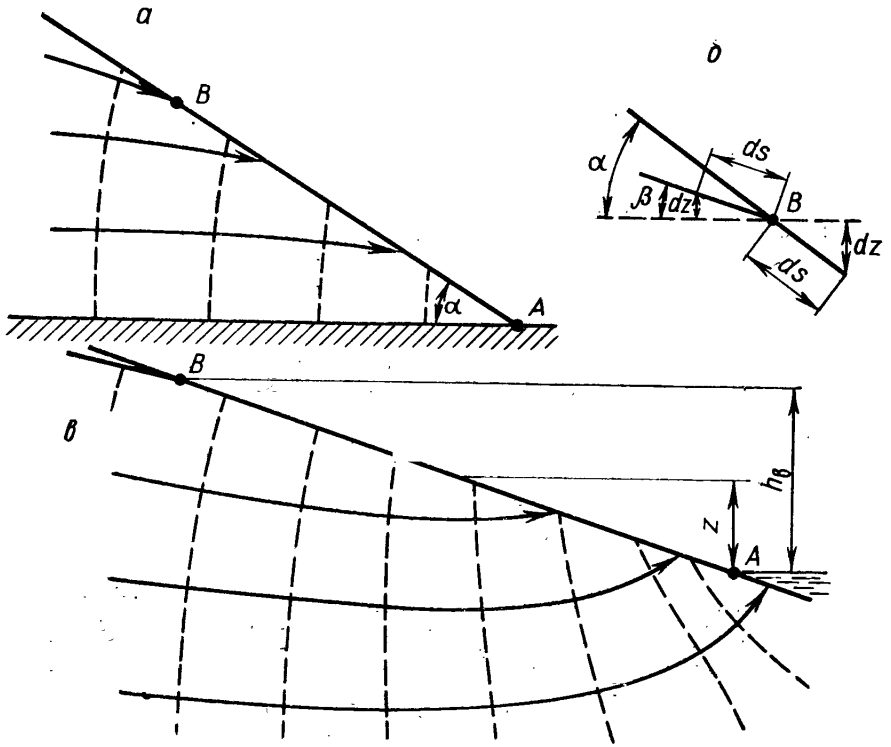


Рис. 23. Сетка движения вблизи участка высачивания:
а — сухой откос на непроницаемом основании; *б* — свободная поверхность вблизи точки высачивания; *в* — подтопленный откос

свободной поверхности выполняется условие (I.4.19), то градиент напора вдоль свободной поверхности (по направлению S) будет

$$I_в = \frac{dz}{dS} = \sin\beta, \qquad \text{(I.4.25)}$$

где β — угол наклона свободной поверхности в точке высачивания (рис. 23, *б*). В то же время и на участке высачивания давление $p = p_a = 0$, т. е. градиент напора здесь будет

$$I_в = \frac{dz}{dS} = \sin\alpha, \qquad \text{(I.4.25а)}$$

где α — угол наклона откоса к горизонту. Из того, что градиенты в точке высачивания, определяемые выражениями (I.4.25) и (I.4.25а), должны быть одинаковы, следует условие $\alpha = \beta$, т. е. свободная поверхность к точке высачивания подходит по касатель-

ной к откосу. Нетрудно также показать, что в подошве сухого откоса (при отсутствии уровня воды перед ним), располагаемого на горизонтальном непроницаемом основании (точка A на рис. 23, $а$), градиент напора $I_A = \operatorname{tg}\alpha$.

Для подтопленного откоса (рис. 23, $в$) распределение выходных градиентов вдоль участка высачивания выражается зависимостью

$$I = \left(\frac{h_в}{z}\right)^n \sin\alpha, \quad n = 0{,}25\,\frac{h_0}{h_0 + h_в}, \tag{I.4.26}$$

где z — ордината расчетной точки; h_0 — глубина воды перед откосом. Заметим, что в этом случае точка A имеет гидродинамическую особенность, поскольку при $z=0$ градиенты напора стремятся к бесконечности. Однако из формулы (I.4.26) следует, что зона повышенных градиентов сравнительно локальна; например, уже при $z=0{,}05h_в$ получается $I \cong 2\sin\alpha$. Более подробно условия формирования выходных градиентов вдоль откоса и по его основанию рассмотрены в работе [57].

Учет капиллярных сил несколько осложняет картину высачивания потока. В этом случае в пределах капиллярной зоны поверхность откоса будет непроницаемой границей. Кроме того, как указывал Н. М. Герсеванов [14], за счет сил поверхностного натяжения может быть непроницаемой и зона участка высачивания в пределах высоты $h_в$; однако это условие, по-видимому, неустойчиво, поскольку при замачивании этой зоны мениски будут порваны и вода сможет выходить на откос.

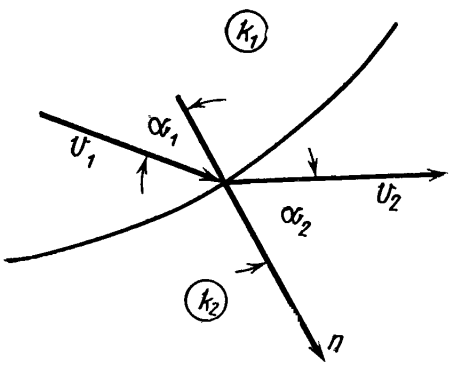


Рис. 24. Граница раздела сред с разной проницаемостью

На границах двух сред с различными коэффициентами фильтрации k_1 и k_2 (рис. 24) происходит перелом линии тока и возникает специфическое граничное условие. Для его обоснования найдем соотношение углов α_1 и α_2 между направлением скоростей v_1 и v_2 (линий тока) и нормалью к границе сред n. Из условия равенства проекций скорости фильтрации на нормаль имеем

$$v_1 \cos\alpha_1 = v_2 \cos\alpha_2 \quad \text{или} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}. \tag{I.4.27}$$

Запишем выражения для проекций скоростей фильтрации на касательную l к границе сред по закону Дарси, учитывая равенство градиентов напора dH/dl в каждой среде

$$v_1 \sin\alpha_1 = -k_1 \frac{dH}{dl}, \quad v_2 \sin\alpha_2 = -k_2 \frac{dH}{dl}, \tag{I.4.28}$$

откуда следует соотношение

$$\frac{dH}{dl} = \frac{v_1 \sin \alpha_1}{k_1} = \frac{v_2 \sin \alpha_2}{k_2}. \qquad \text{(I.4.29)}$$

Имея в виду соотношение скоростей v_1/v_2, определяемое выражением (I.4.26), получим из (I.4.28) следующее условие перелома тока на границе сред:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_1}{k_2}, \qquad \text{(I.4.30)}$$

которое обычно называется «правилом тангенсов».

Глава 5
ГЕОФИЛЬТРАЦИОННАЯ СХЕМАТИЗАЦИЯ И ПОСТАНОВКА ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ

Геофильтрационная схематизация предусматривает представление закономерностей формирования подземных вод в гидродинамической (фильтрационной) постановке с полной математической формулировкой рассматриваемой задачи. При геофильтрационной схематизации принимается характер протекания процесса во времени, включая деформируемость компонентов потока (упругий или жесткий режим течения), устанавливаются пространственная структура, граничные условия и внутреннее строение потока, определяемое распределением геофильтрационных параметров. Следует подчеркнуть исключительную значимость обоснованного решения вопросов фильтрационной схематизации, нередко предопределяющего правильность фильтрационных расчетов.

§ 1. СТРУКТУРА И РЕЖИМ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Структура потока отражает характер его деформации в пространстве; для выражения структуры потока используется гидродинамическая сетка, состоящая из системы линий равного напора и линий тока (см. § 1 главы 4).

Самой общей является пространственная форма потока, в котором гидродинамическая сетка деформируется по всем трем пространственным координатам. Анализ пространственных потоков чрезвычайно сложен, однако условия, требующие пространственного представления структуры потока, встречаются в гидрогеологической практике сравнительно редко (например, область III на рис. 25, *а*, зона обходной фильтрации высоких плотин, располагаемых в узких долинах).

Основными структурными типами потоков, широко используемыми в гидрогеологических расчетах, являются плоские потоки в вертикальном сечении (профильные) и в плане (плановые), для которых характерна деформация гидродинамической сетки в какой-либо одной плоскости.

В профильных потоках деформации линий тока происходят преимущественно в вертикальной плоскости, а в плане поток имеет плоскопараллельный характер, т. е. линии тока в плане практически параллельны друг другу. Типичным примером профильных потоков могут служить условия фильтрации в основании плотин среднего напора, располагаемых на широких реках, в зонах разгрузки потока в берегах рек, водохранилищ и каналов (область II на рис. 25, *а*).

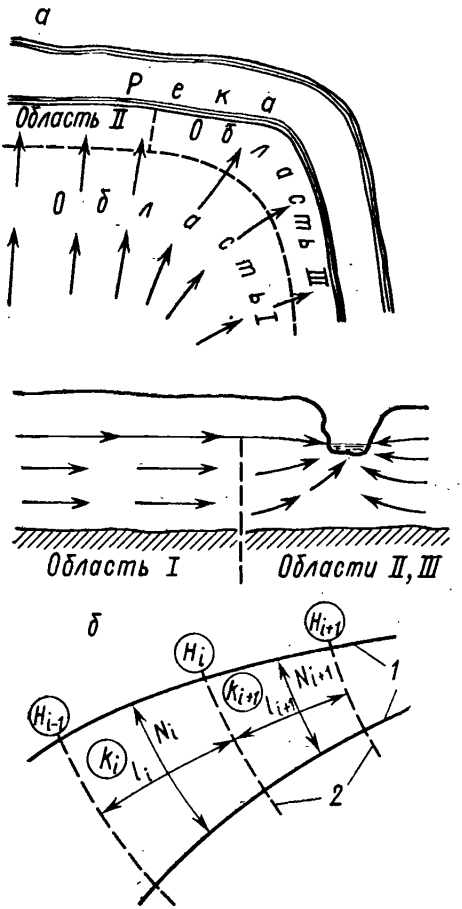


Рис. 25. Пространственная структура потока:
а — направления потока вблизи водотока в плане и разрезе; *б* — элементы гидродинамической сетки (*1* — линии тока, *2* — линии равного напора)

В плановых потоках деформации линий тока происходят в основном в плане, а в вертикальном сечении поток принимается плоскопараллельным. Такие условия характерны для потоков большой протяженности, длина которых значительно превышает их мощность, что позволяет пренебрегать изменением напоров по глубине потока (область I на рис. 25, *а*). Предпосылка о постоянстве напоров по вертикали была впервые предложена Ж. Дюпюи [69] и обычно носит его имя; из определения планового потока следует, что в каждом его вертикальном сечении выполняется предпосылка Дюпюи.

Полоса плоского потока, заключенная между двумя соседними линиями тока, носит название ленты тока, а участки ленты тока, заключенные между соседними линиями равного напора, будем называть отсеками ленты тока. Обычно линии равного напора строятся с постоянным шагом изменения напора (такую сетку назовем равномерной); в этом случае расходы в отсеках ленты тока обычно можно определить по формуле Дарси, прини-

мая в качестве площади поперечного сечения и длины потока их средние значения в пределах каждого отсека.

В профильном потоке его ширина принимается обычно равной 1 м, тогда площадь поперечного сечения ленты тока будет численно равна ее ширине; при равномерной сетке, построенной с интервалом напора $\Delta H = H_i - H_{i-1} = H_{i+1} - H_i$ (рис. 25, *б*), выражения для расходов Q_i и Q_{i+1} в отсеках ленты тока номеров i и $i+1$ при $\omega_i = N_i$ и $\omega_{i+1} = N_{i+1}$ будут

$$Q_i = k_i N_i \frac{\Delta H}{l_i}, \quad Q_{i+1} = k_{i+1} N_{i+1} \frac{\Delta H}{l_{i+1}}, \tag{I.5.1}$$

а при неизменном расходе ленты тока ($Q_i = Q_{i+1}$) имеем

$$\frac{k_i N_i}{l_i} = \frac{k_{i-1} N_{i+1}}{l_{i+1}} \text{ или } \frac{l_{i+1}}{l_i} = \frac{k_{i+1}}{k_i} \cdot \frac{N_{i+1}}{N_i}, \tag{I.5.2}$$

причем в однородном потоке, где $k_{i+1} = k_i$, из выражения (I.5.2) следует условие конформности отсеков ленты тока при равномерной сетке

$$\frac{l_i}{N_i} = \frac{l_{i+1}}{N_{i+1}}, \tag{I.5.3}$$

т. е. отношение длины отсека ленты тока к его ширине в этом случае оказывается постоянным.

В плановом потоке удобно вместо скорости фильтрации использовать понятие удельного расхода потока q, который представляет собой расход планового потока шириной 1 м, таким образом, площадь поперечного сечения для удельного расхода численно равна мощности пласта. При однородном строении пласта по вертикали для записи выражения удельного расхода можно непосредственно воспользоваться формулой Дарси, полагая в ней $Q = q$ и $\omega = m$, т. е.

$$q = kmI = TI, \tag{I.5.4}$$

где T — *проводимость потока*, представляющая собой удельный расход потока при единичном градиенте; в однородном по вертикали потоке $T = km$. Для планового потока, состоящего из слоев различной проницаемости (рис. 26, *а*), по формуле (I.5.4) можно определить удельные расходы $q_1, q_2, \ldots$ в слоях с коэффициентами фильтрации $k_1, k_2, \ldots$ и мощностями $m_1, m_2, \ldots$, а общий расход в пласте получится суммированием значений расходов отдельных слоев, причем, поскольку в плановом потоке градиенты напора во всех слоях будут одинаковыми, то $q = q_1 + q_2 + \ldots = (k_1 m_1 + k_2 m_2 + \ldots) I$, откуда видно, что в этом случае

$$T = k_1 m_1 + k_2 m_2 + \ldots, \tag{I.5.5}$$

т. е. проводимость слоистого пласта складывается из проводимостей отдельных его слоев.

Если теперь ввести понятие о среднем (средневзвешенном по мощности) значении коэффициента фильтрации $k_{ср}$ таком, что $T=k_{ср}m$, то его величина определится по формуле

$$k_{ср}=\frac{T}{m}=\frac{k_1m_1+k_2m_2+\ldots+k_nm_n}{m}. \qquad \text{(I.5.5а)}$$

Рассмотрим условие конформности отсеков ленты тока в плановом потоке, где расходы в пределах отсеков i и $i+1$ согласно

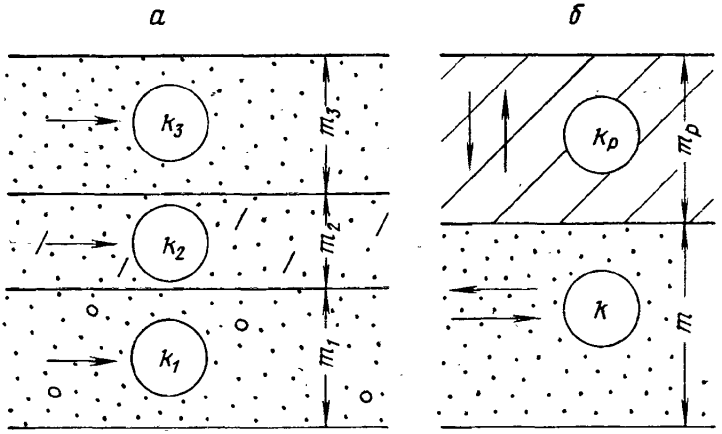


Рис. 26. Схема потока в слоистых пластах:
а — горизонтально-слоистый поток; *б* — перетекание в слоистых системах

(I.5.4) будут $Q_i=q_iN_i$ и $Q_{i+1}=q_{i+1}N_{i+1}$ (N_i и N_{i+1} — по-прежнему средние значения ширины отсеков), причем удельные расходы определяются согласно (I.5.4), так что

$$Q_i=T_iN_i\frac{\Delta H}{l_i},\quad Q_{i+1}=T_{i+1}N_{i+1}\frac{\Delta H}{l_{i+1}}.$$

Если же расход потока по его длине не изменяется (площадное питание отсутствует), т. е. $Q_i=Q_{i+1}$, то при $\Delta H=\text{const}$ получим условие

$$\frac{T_iN_i}{l_i}=\frac{T_{i+1}N_{i+1}}{l_{i+1}}, \qquad \text{(I.5.6)}$$

а при постоянной проводимости условие (I.5.6) совпадает с условием (I.5.3).

Наиболее простой структурной формой потока является линейный (одномерный) поток, в котором все линии тока параллельны друг другу; обычно направление потока совмещается с направлением оси x.

На структуру потока подземных вод существенно влияет *геофильтрационная среда*, описание которой дается в форме прост-

ранственного распределения параметров геофильтрационных свойств, из которых основную роль играет проницаемость водоносных пород, тесно связанная с литологическими и структурными особенностями водоносной толщи. Плановая неоднородность геофильтрационной среды может иметь непрерывный характер, что встречается, например, при изменении проницаемости в связи с изменением механического состава по направлению сноса аллювиальных отложений. Вместе с тем характерно кусочно-однородное (кусочно-неоднородное) плановое распределение проницаемости или проводимости, при котором вся область потока составляется из отдельных зон; каждая из зон считается однородной, а изменение параметров происходит скачкообразно на границах этих зон, обусловленных резким различием условий их образования или переформирования [25].

Для осадочных отложений характерна вертикальная слоистость, причем для схематизации строения слоистой геофильтрационной среды по вертикали особую значимость имеет выделение хорошо проницаемых водоносных слоев, определяющих водообильность водоносной толщи, и слабопроницаемых (обычно глинистых или мергелистых) слоев, обусловливающих гидравлическое разделение потока по вертикали на отдельные водоносные пласты. В таких слоистых системах проявляется специфическая структура потока, которую можно эффективно представлять, используя *предпосылки перетекания*, введенные в методику гидрогеологических исследований Г. Н. Каменским [24], Н. К. Гиринским [16], Ч. Джейкобом [71] и А. Н. Мятиевым [40]. Согласно предпосылкам перетекания при существенной разнице в проницаемости водоносных и разделяющих слоев ($k \gg k_р$) движение в разделяющих слоях рассматривается только в вертикальном направлении, а в водоносных слоях считается справедливой предпосылка Дюпюи о горизонтальном характере фильтрации (рис. 26, *б*).

В обосновании первой из предпосылок перетекания (о вертикальном характере фильтрации в разделяющих слоях) можно исходить из того, что при $k_р \ll k$ проводимость слоистой системы практически полностью определяется водоносными слоями, так что в пределах разделяющих слоев движением в горизонтальном направлении можно пренебрегать. Поскольку погрешность первой предпосылки оценивается соотношением проводимостей $k_р m_р$ и T разделяющего и водоносного слоев, то при допустимой погрешности 5% эту предпосылку можно принимать при $k_р m_р < 0{,}05\ T$ (при одинаковых мощностях слоев это соответствует условию $k_р < 0{,}05\ k$, приведенному Н. К. Гиринским [16]).

Если пренебречь упругим режимом в разделяющих слоях, то скорость перетекания $v_р$ в пределах слоя мощностью $m_р$ с коэффициентом фильтрации $k_р$ в соответствии с законом Дарси будет

$$v_р = k_р \frac{\Delta H_z}{m_р}. \qquad (I.5.7)$$

Заметим, что разделяющие слои нередко имеют слоистый характер. Потери напора в каждом слое мощностью m_z^i с коэффициентом фильтрации K_z^i будут $\Delta H_z^i = \frac{v_p}{k_z^i} m_z^i$, а суммарные потери напора

$$\Delta H_z = \Sigma \Delta H_z^i = \Sigma \frac{v_p}{h_z^i} m_z^i = v_p \Sigma \frac{m_z^i}{k_z^i}. \qquad \text{(I.5.7а)}$$

Сопоставляя это выражение с выражением (I.5.7), получим формулу для расчетного значения коэффициента фильтрации по вертикали

$$k_p = \frac{m_p}{\sum \frac{m_z^i}{k_z^i}} = \frac{m_p}{\frac{m_z'}{k_z'} + \frac{m_z''}{k_z''} + \dots}, \qquad \text{(I.5.8)}$$

впервые приведенную Г. Н. Каменским [24].

Для обоснования условий возможного использования предпосылки Дюпюи в водоносных слоях следует исходить из того, что в слоистых системах можно пренебрегать учетом влияния вертикальной фильтрации в каждом водоносном слое, если потери напора по вертикали ΔH_z^0 в этом слое будут значительно меньше потерь напора ΔH_z на перетекание через примыкающий к нему разделяющий слой. Рассматривая наиболее тяжелый в этом смысле случай вертикального направления потока, имеем для скорости вертикальной фильтрации в водоносном слое выражение $v_z = k \frac{\Delta H_z^0}{m}$, сопоставляя которое с уравнением (I.5.7) и считая, что погрешность предпосылки Дюпюи в водоносном слое можно оценить соотношением напоров $\Delta H_z^0 / \Delta H_z$, при допустимой погрешности ε получим условие

$$\varepsilon = \frac{\Delta H_z^0}{\Delta H_z} = \frac{k_p}{k} \cdot \frac{m}{m_p}. \qquad \text{(I.5.8а)}$$

Более обстоятельные критерии применимости предпосылок перетекания могут быть получены из сопоставительного анализа типовых задач, решаемых в точной постановке и на основе предпосылок перетекания [18, 65].

Поскольку в постановке теории перетекания поток деформируется по вертикали лишь в разделяющих слоях, а в водоносных слоях он имеет плановый характер, то по структуре фильтрационный поток в слоистых системах может квалифицироваться как планово-пространственный.

Режим потока характеризуется изменениями элементов потока во времени; в общем случае режим потока является нестационар-

ным (неустановившимся), поскольку элементы потока так или иначе меняются во времени, однако нередко эти изменения бывают несущественными, и тогда режим потока может считаться стационарным (установившимся). Выделяется также квазистационарный режим потока, при котором изменения уровней потока во всех точках происходят с одинаковой интенсивностью, так что расходы потока остаются неизменными.

При типизации гидрогеологических условий по характеру верхней границы потоки делятся на *безнапорные* (со свободной

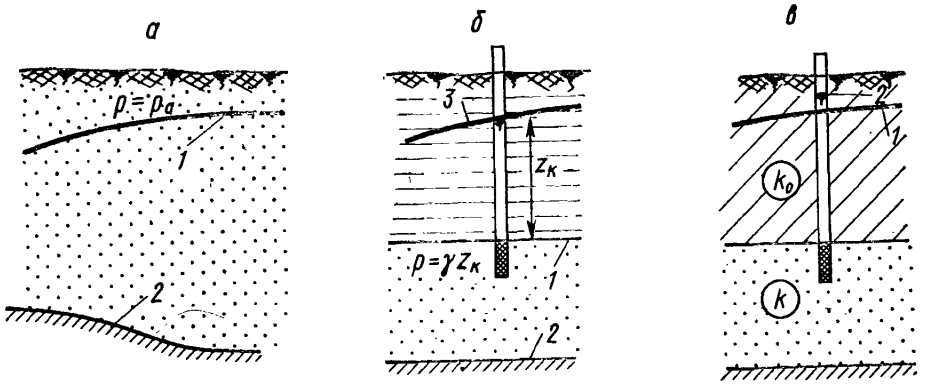


Рис. 27. Типы потоков по напорности:
а — напорный; *б* — безнапорный; *в* — субнапорный

поверхностью) и *напорные* (с напорной поверхностью), причем на свободной поверхности безнапорного потока давление равно атмосферному, а на кровле напорного потока давление превышает атмосферное (рис. 27).

Более четко и достоверно деление на напорные и безнапорные пласты обосновывается по физической сущности емкостных свойств пласта, которые в напорных пластах отражают влияние упругой емкости пород и характеризуются коэффициентом упругой емкости пласта μ^*, тогда как в безнапорных пластах определяющей является гравитационная емкость, характеризующаяся величиной коэффициента гравитационной емкости μ. Соответственно различие между напорным и безнапорным потоком довольно четко выражается в порядке величин коэффициента емкости пласта, поскольку в безнапорном потоке коэффициент гравитационной емкости имеет величину порядка 0,01—0,1, а в напорном потоке коэффициент упругой емкости имеет величину порядка 10^{-3}—10^{-5}.

С этой точки зрения представляет интерес, например, обоснование напорности распространенной схемы водоносного пласта двухслойного строения (рис. 27, *в*), когда проницаемость покровных отложений существенно меньше проницаемости основного водоносного пласта. Хотя по качественным признакам такой

поток может быть признан напорным, однако гидродинамический анализ позволяет утверждать [58], что в этом случае поток в основном водоносном пласте достаточно хорошо связан со свободной поверхностью в покровном слое и при длительных нестационарных процессах его емкость имеет гравитационный характер, т. е. при изучении региональной фильтрации такой поток обычно должен рассматриваться как безнапорный. Имея в виду эти особенности, такой поток можно выделить в отдельный тип, называя его *субнапорным*. Особый интерес субнапорные потоки представляют при решении задач мелиоративной гидрогеологии [25, 51], когда взаимосвязь подземных вод с земной поверхностью становится задачей первостепенной важности.

§ 2. ПОСТАНОВКА ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим вопросы постановки основных типов геофильтрационных расчетов, различающихся по целенаправленности решаемых задач.

Наиболее широко распространены прогнозные расчеты — решение прямых задач фильтрации, — в задачу которых входит прогноз режима и баланса подземных вод, главным образом при воздействии инженерных мероприятий.

При прогнозных расчетах выделяют региональные и локальные задачи. В региональных задачах рассматривается вся область возмущения потока подземных вод с отражением факторов, определяющих условия его формирования; такой поток обычно имеет довольно сложное строение, так что региональные задачи, как правило, решаются методами математического моделирования. В локальных задачах обособленно рассматриваются отдельные участки потока — для подробного анализа влияния инженерных мероприятий; при этом общие условия формирования потока могут приниматься по данным регионального моделирования. При прогнозных расчетах обоснование геофильтрационной схематизации целесообразно проводить по следующим этапам:

а) устанавливается *тип режима* потока во времени (нестационарный, стационарный, квазистационарный);

б) обосновывается *пространственная структура* потока, причем очень важен поиск возможного уменьшения «мерности» структуры, поскольку она в значительной степени определяет сложность и трудоемкость расчетов (в частности, решение наиболее общих пространственных задач нередко встречает непреодолимые сложности);

в) устанавливаются *внешние и внутренние границы* потока (водоемы и водотоки, локальные зоны разгрузки, дрены, непроницаемые границы и т. п.), их геометрические контуры, род граничного условия и его параметры, а также изменение уровней и расходов на границах;

г) задается *распределение геофильтрационных параметров*, строения и питания потока; распределение параметров строения характеризует фильтрационную неоднородность водоносных пластов в разрезе и плане, — при ее обосновании производится качественное выделение кусочно-однородных слоев и зон потока (на основе геолого-литологического анализа) и задание геофильтрационных параметров (на основе данных опытно-фильтрационных работ); в распределение параметров питания включаются участки задания интенсивности инфильтраций (испарения), данные водоотбора из скважин, родникового стока и т. п.

При нестационарном режиме, кроме того, необходимо задать исходное (начальное) распределение уровней подземных вод.

В обосновании геофильтрационной схемы важная роль отводится эпигнозным расчетам, направленным на идентификацию природных условий и геофильтрационной (расчетной) схемы. Выделяют задачи идентификации математической модели, параметров процесса и граничных условий, которые в общей теории моделирования называют соответственно индуктивными, инверсными и обратными [11]. Однако применительно к решению геофильтрационных задач такое разделение обычно оказывается довольно условным и потому в дальнейшем все задачи идентификации будут называться *обратными.*

По своему характеру все методы идентификации являются кибернетическими методами «черного ящика», в которых по техническим и экономическим причинам можно охватить только ограниченное количество входных или выходных данных. Поэтому для получения достоверных результатов эпигнозных расчетов требуется специально обосновать задание сети наблюдательных скважин и выбор режима наблюдений [38]. Особый тип обратных задач — получение геофильтрационных параметров обработкой данных опытных опробований (см. главу 5 раздела IV). Чаще всего обратные задачи решаются путем перебора различных вариантов решения прямых задач (при различном задании искомых параметров), так что основные положения геофильтрационной схематизации здесь остаются такими же, как и при прогнозных расчетах. Следует подчеркнуть, что при сколько-нибудь значительном числе искомых значений параметров их поиск путем «проб и ошибок» становится чрезвычайно трудным, в связи с чем особое значение приобретает здесь стратегия поиска [32, 38].

В процессе гидрогеологических изысканий весьма эффективно проведение *разведочных* расчетов, осуществляемое обычно с использованием моделирования. Цель таких расчетов — выявление значимости различных гидрогеологических факторов и параметров для обоснования рациональной целенаправленности изысканий. При этом на модели проводится факторно-диапазонная оценка (по терминологии И. К. Гавич [13]), включающая в себя анализ влияния на процессы геофильтрации различных факторов (главным образом границ потока) и геофильтрационных

параметров (проницаемости и емкости пластов). Для этого на основании имеющейся информации о возможной изменчивости параметров задается реальный диапазон значений параметров и выявляется их влияние на прогнозируемый режим и баланс подземных вод, а в зависимости от уровня влияния отдельных факторов и параметров устанавливаются направленность и объемы полевых работ. Заметим, что разведочные расчеты целесообразно проводить на всех этапах изысканий, начиная с обоснования первоначальной программы, когда возможный диапазон параметров задается по литературным и архивным материалам.

Глава 6
ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Гносеологическое понятие «моделирование» в современной философии трактуется весьма широко, как любая образная форма мышления [61]. Однако, по крайней мере для практических целей, удобнее ограничить это понятие, используя его только применительно к материальным моделям, которые обладают физическим или математическим подобием.

Моделирование играет очень большую роль в фильтрационных исследованиях и расчетах, поскольку оно позволяет наиболее полно учесть сложность природной обстановки. Если начало моделирования связано в основном с исследованиями природы фильтрационных процессов и разработкой методики фильтрационных расчетов, то за последнее время резко повысился удельный вес моделирования в гидрогеологических расчетах для реальных объектов.

Существующие методы моделирования фильтрации, как правило, основаны на математическом подобии (аналогии) между фильтрацией и другими физическими процессами. Математическое подобие аналогичных процессов достигается при условии, что описывающие их математические зависимости тождественно переходят друг в друга простым умножением входящих в них величин на постоянные (масштабные) коэффициенты. Следует отметить, что значение математических аналогий выходит далеко за рамки их практического использования. Так, цитируя слова Л. Больцмана: «... теми же самыми уравнениями можно решать вопросы гидродинамики и выражать теорию потенциала», В. И. Ленин развивает это положение в более общий философский вывод: «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений» (В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Изд. 5-е. Т. 18, с. 306).

Для решения фильтрационных задач в основном используются гидравлическая и электрическая аналогии, реализуемые на сплошных или сеточных моделях. Известно использование и дру-

гих аналогий — тепловой, мембранной, магнитной, — однако они не получили распространения из-за технических сложностей и в дальнейшем рассматриваться не будут. Обзоры применения методов моделирования фильтрации приведены в работах [22, 32].

Рассмотрим основы моделирования фильтрации на сплошных гидравлических и электрических моделях, затронув только методику построения сеточных моделей применительно к электрическим моделям. Более подробно вопросы методики моделирования будут развиваться далее применительно к различным типам потоков.

§ 1. СПЛОШНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Наиболее простая модель для изучения фильтрации — фильтрационный (грунтовый) лоток, представляющий собой емкость, заполненную пористым материалом (песком) и снабженную устройством для задания граничных условий и измерения напоров (давлений) в отдельных точках. На фильтрационном лотке, впервые использованном Ф. Форхгеймером [44], осуществляется физическое моделирование (фильтрационный поток моделируется фильтрационным лотком), что дает возможность непосредственно изучать физику процессов фильтрации. Это особенно важно в тех случаях, когда неясна математическая теория процесса, например при фильтрации многофазных систем (газированной жидкости, при неполном насыщении пор водой в зоне аэрации, капиллярной зоне и т. п.), при фильтрации взаимодействующих (смешивающихся и несмешивающихся) жидкостей, при проявлении суффозионных процессов и т. п. В условиях гравитационной фильтрации в зоне полного насыщения перспективно использование фильтрационных лотков для моделирования безнапорных плоских и пространственных потоков.

Обоснуем условия подобия для фильтрационных моделей нестационарных безнапорных потоков кусочно-однородного изотропного строения при жестком режиме фильтрации.

В математически подобных процессах все уравнения и условия однозначности, входящие в их математические модели, должны тождественно переходить друг в друга после введения масштабных коэффициентов, связывающих аналогичные величины. Для доказательства подобия натурного и модельного фильтрационных потоков прежде всего запишем дифференциальное уравнение распределения напоров $H_м$ внутри модельного потока, которое при жестком режиме фильтрации представится уравнением Лапласа вида (I.4.12)

$$\frac{\partial^2 H_м}{\partial x_м^2} + \frac{\partial^2 H_м}{\partial y_м^2} + \frac{\partial^2 H_м}{\partial z_м^2} = 0, \qquad (I.6.1)$$

где $x_м$, $y_м$, $z_м$ — координаты модельного потока. Введем линейный масштаб α_l, представляющий собой отношение размеров потока в натуре и на модели, т. е. $H=\alpha_l H_м$, $x=\alpha_l x_м$, $y=\alpha_l y_м$ и $z=\alpha_l z_м$. Нетрудно видеть, что подстановка в уравнение (I.4.12) натурных величин, выраженных с помощью масштаба α_l через модельные величины, тождественно переводит его в уравнение (I.6.1). Таким образом, осуществление модели, геометрически подобной натурному по-

току, автоматически определяет тождественность дифференциальных уравнений натурного и модельного потоков.

Для нестационарного потока необходимо рассмотреть подобие кинематических условий на свободной поверхности, определяемых для натурного потока уравнением (I.3.26). Для модельного потока, придавая его параметрам индекс «м», получим это уравнение в виде

$$\mu_м \frac{\partial S_м}{dt_м} = k_м I^0 + \frac{\omega_м}{\cos \alpha_z}, \qquad (I.6.2)$$

причем в связи с геометрическим подобием натурного и модельного потоков безразмерные величины I^0 и $\cos\alpha_z$ на модели должны быть такими же, как и в натуре. Вводя масштабы времени $\alpha_t = t/t_м$, коэффициентов фильтрации $\alpha_k = k/k_м$, коэффициентов гравитационной емкости пласта $\alpha\mu = \mu/\mu_м$ и интенсивности инфильтрации $\alpha_\omega = \omega/\omega_м$, подставим в уравнение (I.6.2) модельные величины, выраженные через масштабные коэффициенты, что дает

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu \alpha_l} \mu \frac{dS}{dt} = \frac{k}{\alpha_k} I^0 + \frac{\omega}{\alpha_\omega \cos \alpha_z} \qquad (I.6.3)$$

или

$$\frac{\alpha_k \alpha_t}{\alpha_l \alpha_\mu} \mu \frac{dS}{dt} = kI^0 + \frac{\alpha_k}{\alpha_\omega} \cdot \frac{\omega}{\cos \alpha_z}. \qquad (I.6.3а)$$

Сопоставляя уравнения (I.6.3а) и (I.3.26), можно видеть, что они тождественно переходят друг в друга, если положить

$$\frac{\alpha_k \alpha_t}{\alpha_l \alpha_\mu} = 1, \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_\omega} = 1. \qquad (I.6.4)$$

Соотношения (I.6.4) являются критериями подобия.

Для неоднородных потоков должно удовлетворяться условие (I.4.29) перелома линий тока на границах сред различной проницаемости, причем поскольку сетки движения в натуре и на модели должны быть подобными, то соотношение тангенсов углов наклона линий тока должно быть одинаковым, откуда следует, что соотношение коэффициентов фильтрации на модели должно сохраняться таким же, как и в натуре.

При использовании фильтрационных лотков следует обращать внимание на влияние капиллярной зоны. При масштабном моделировании высоты капиллярной зоны можно исходить из того, что высота обратно пропорциональна диаметру зерен грунта. Соответственно масштаб зерен грунта $d/d_м$ должен быть обратно пропорционален линейному масштабу α_l. Более обстоятельно подобие микроструктур пористых сред рассмотрено В. Н. Николаевским [42].

При таком условии диаметр зерен и скорости фильтрации на модели должны быть значительно больше натурных и потому здесь обязательно требует проверки выполнение линейного закона фильтрации во всей области движения на лотке, для чего надо показать, что максимальная скорость фильтрации на модели не превышает критического значения $v_{кр}$, подсчитанного для материала модели по формуле (I.3.21). Совместное удовлетворение всем сформированным выше условиям нередко оказывается затрудненным [56]. Некоторого расширения возможностей задания

масштабных соотношений на фильтрационном лотке можно, по-видимому, достигнуть, если применить жидкости со специально подобранными гидродинамическими свойствами [44].

Кроме того, моделирование на фильтрационных лотках имеет ряд технических недостатков: громоздкость, трудоемкость изготовления моделей, нерегулируемая фильтрационная неоднородность модели, которая может усиливаться влиянием защемленного воздуха, практическая невозможность осуществления моделей

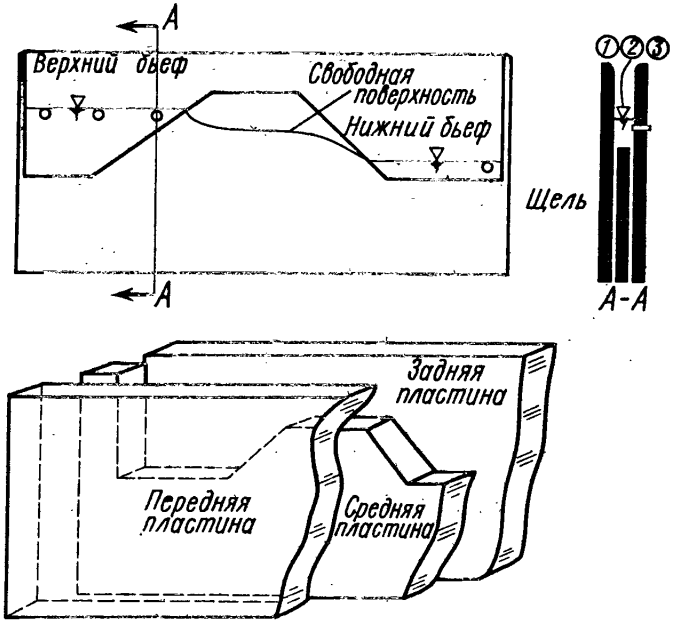


Рис. 28. Щелевая модель

с заданной фильтрационной неоднородностью. В связи с этим фильтрационный лоток следует применять в основном при решении задач физического и методического характера, реже — при изучении пространственных безнапорных фильтрационных потоков, если размеры потока в разных направлениях не слишком резко различаются между собой.

Принципиально близкой к фильтрационному лотку моделью является щелевой лоток. Простейшая конструкция его состоит из двух стенок (по крайней мере одна из них прозрачна), между которыми образуется тонкая щель, заполняемая модельной жидкостью (рис. 28). Впервые щелевой лоток был предложен Г. Хеле — Шоу, в связи с чем в зарубежных работах он обычно носит название «вязкожидкостной модели Хеле — Шоу». Для решения фильтрационных задач щелевой лоток впервые был применен Е. А. Замариным в 1928 г., а затем широко использовался в научных исследованиях [9, 20, 32]. Однако технические трудности

точного задания ширины щели, имеющей размер порядка 1—2 мм, и возникновение ряда методических осложнений [56] значительно ограничивают область использования щелевого лотка.

§ 2. МЕТОД ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ (ЭГДА)

Электрические модели основаны на электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) между фильтрационным потоком и электрическим полем.

Моделирование фильтрационных задач на сплошных моделях ЭГДА впервые было предложено Н. Н. Павловским [46] применительно к изучению фильтрации под гидротехническими сооружениями. Простота изготовления моделей ЭГДА, доступность и достаточная точность расчетов на моделях ЭГДА обусловили большое распространение этого метода для решения широкого круга фильтрационных задач [22, 32, 73].

В общем случае для доказательства математического подобия двух различных полей необходимо показать тождественность их математических моделей, причем прежде всего сопоставляются основные законы движения, затем уравнения неразрывности и условия однозначности; в деформируемых потоках, кроме того, согласуются уравнения состояния или дифференциальные уравнения потока. Для выявления основных аналогов фильтрационного потока и электрического поля сопоставим основные законы движения фильтрационного и электрического потоков, используя для расхода фильтрационного потока Q выражение закона Дарси, а для соответствующей силы тока I — выражение закона Ома:

$$Q = k\omega\frac{\Delta H}{l}\ \text{(а)};\quad I = c\omega_{м}\frac{\Delta U}{l_{м}}\ \text{(б)}, \qquad \text{(I.6.5)}$$

где c — удельная проводимость материала модели (величина, обратная удельному сопротивлению ρ); $\omega_{м}$ — площадь модели, соответствующая площади фильтрационного потока ω; $l_{м}$ — длина элемента модели, соответствующего длине элемента потока l. Идентичная запись этих законов очевидна; в них соответствуют размеры потока и модели, физические характеристики — коэффициент фильтрации k и удельная проводимость c, силовые характеристики ΔH и ΔU, характеристики интенсивности потоков Q и I.

Для доказательства подобия процессов необходимо обосновать возможность перехода от характеристик одного процесса к аналогичным характеристикам другого введением постоянных масштабных соотношений между аналогичными величинами: масштаб расходов $\alpha_{Q}=Q/I$ — отношение расходов потока к силе тока на модели (условие кинематического подобия); масштаб проницаемости $\alpha_{k}=k/c$ — отношение коэффициентов фильтрации к удельным проводимостям модели (условие подобия физических параметров); линейный масштаб модели α_{l} — отношение размеров

потока в натуре и на модели (условие геометрического подобия); $\alpha_H = \Delta H / \Delta U$ — масштаб напоров (условие динамического подобия).

Для доказательства условий подобия заменим теперь в выражении (I.6.5) характеристики фильтрационного потока на аналогичные характеристики электрического поля через масштабные коэффициенты. Поскольку

$$Q = \alpha_Q I, \quad k = \alpha_k c, \quad l = \alpha_l l_м, \quad \omega = \alpha_l^2 \omega_м, \quad \Delta H = \alpha_H \Delta U, \qquad (I.6.6)$$

то получим

$$\alpha_Q I = \alpha_k c \cdot \alpha_l^2 \omega_м \frac{\alpha_H}{\alpha_l} \cdot \frac{\Delta U}{l_м}, \text{ или } I = \frac{\alpha_k \alpha_l \alpha_H}{\alpha_Q} c \omega_м \frac{\Delta U}{l_м}. \qquad (I.6.7)$$

Если теперь выбрать масштаб α_Q так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\frac{\alpha_k \alpha_l \alpha_H}{\alpha_Q} = 1, \text{ или } \alpha_Q = \alpha_k \alpha_l \alpha_H, \qquad (I.6.8)$$

то выражение (I.6.7) тождественно перейдет в закон Ома (I.6.5б), что и доказывает подобие процессов, причем соотношение (I.6.8) представляет собой критерий подобия.

Таким образом, при составлении модели ЭГДА необходимо построить ее геометрически подобной моделируемому фильтрационному потоку и задать удельные проводимости модели пропорциональными коэффициентам фильтрации (или удельные сопротивления — обратно пропорциональными коэффициентам фильтрации).

При моделировании жесткого режима фильтрации, описываемого дифференциальным уравнением эллиптического типа (I.4.12), установленных таким образом условий подобия достаточно, поскольку уравнения неразрывности фильтрационного потока и электрического поля, которые совместно с основными уравнениями движения дают уравнения потока, выполняются автоматически.

Для обоснования масштаба напоров α_H выберем максимальный и минимальный напоры $H_{макс}$ и $H_{мин}$, причем максимальной разнице напоров $\Delta H_{макс} = H_{макс} - H_{мин}$ будет соответствовать максимальная разница потенциалов (напряжение) на модели $\Delta U_м$. Тогда

$$\alpha_H = \frac{\Delta H_{макс}}{\Delta U_м} \text{ и } \Delta H = \Delta H_{макс} \frac{\Delta U}{\Delta U_м}. \qquad (I.6.9)$$

Удобно ввести понятие относительного (приведенного) потенциала

$$\bar{U} = \frac{\Delta U}{\Delta U_м} = \frac{U - U_{мин}}{U_{макс} - U_{мин}}, \qquad (I.6.10)$$

где $U_{мин}$ и $U_{макс}$ — минимальное и максимальное значения потенциалов на модели; очевидно, что $\bar{U}$ меняется в пределах от 0

(при $U=U_{мин}$) до 1 (при $U=U_{макс}$). Тогда из выражения (I.6.9) для ΔH получим зависимость для перехода от относительных потенциалов к напорам

$$\Delta H = H - H_{мин} = \Delta H_{макс}\overline{U},\ H = H_{мин} + (H_{макс} - H_{мин})\overline{U} \quad (I.6.11)$$

и зависимость для перехода от напоров к относительным потенциалам

$$\overline{U} = \frac{H - H_{мин}}{H_{макс} - H_{мин}}. \quad (I.6.12)$$

На контурах электрической модели, соответствующих границам с заданными напорами, устанавливаются потенциалы, пересчитываемые согласно (I.6.12). Моделирование расходов потока осуществляется подачей силы тока, значения которой рассчитываются по масштабу расхода α_Q, определяемому по формуле (I.6.8). После этого замеряются потенциалы на модели внутри области движения и по формуле (I.6.11) определяются соответствующие им значения напоров потока.

Широкое распространение в геофильтрационных расчетах получили сеточные электроинтеграторы, в которых сплошное поле заменяется сеткой электрических сопротивлений, соединяемых между собой в узловых точках. Теоретической базой сеточных интеграторов является метод сеток (конечных разностей), согласно которому сплошной поток заменяется сеточной схемой, состоящей из отдельных блоков, емкость которых как бы сосредоточивается в узловых точках сеточной схемы. Такая дискретизация потока производится заданием (разбивкой) сетки узловых точек по определенной геометрической (топологической) системе. При построении сеточных сил и моделей используются ортогональные и треугольные сетки (рис. 29), причем в геофильтрационных расчетах наиболее распространены прямоугольные ортогональные сетки, построенные в декартовых координатах; применительно к такому типу сеток и будут в дальнейшем рассматриваться вопросы методики построения сеточных схем и моделей. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работах [32, 73].

Построение сеточной схемы начинается с разбивки сети узловых точек, после чего проводятся границы блоков, задаваемые, как правило, посередине между узловыми точками. Связь узловых точек на сеточной схеме осуществляется через *фильтрационные сопротивления* Ф, представляющие собой отношение потерь напора ΔH к расходу потока Q между блоками:

$$\Phi = \frac{\Delta H}{Q}. \quad (I.6.13)$$

Для участка потока длиной L и средней площадью поперечного сечения ω, связывая Q и ΔH согласно закону Дарси (I.3.1), получим следующее расчетное выражение:

$$\Phi = \frac{L}{k\omega}. \qquad \text{(I.6.14)}$$

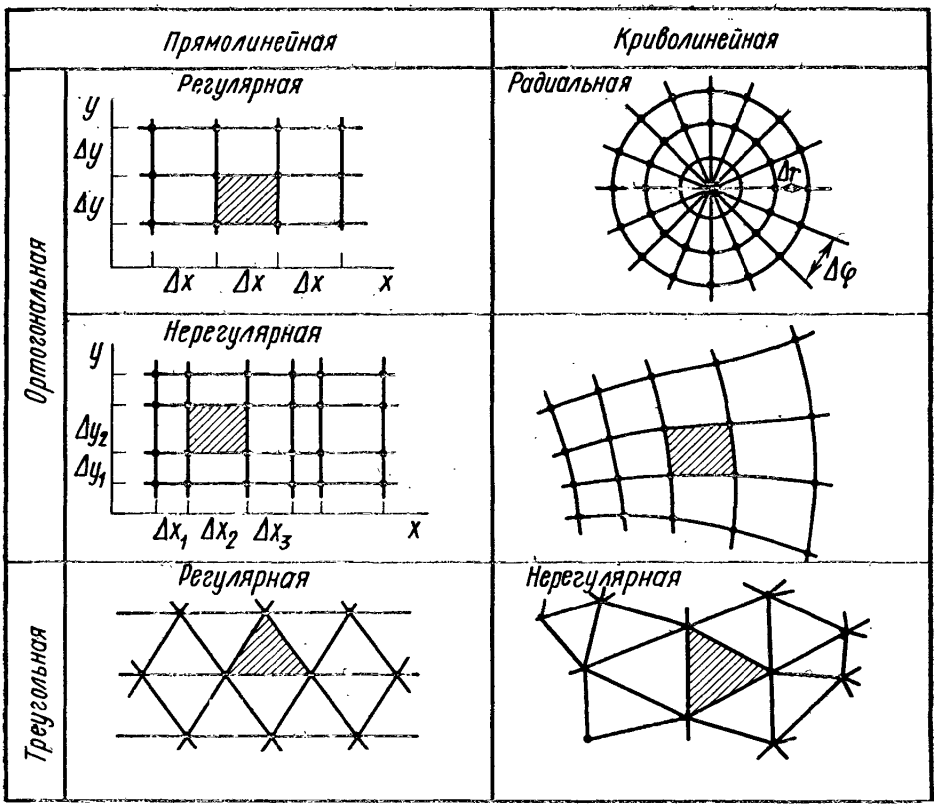


Рис. 29. Типы сеток для дискретизации поля потока

В плановом потоке шириной N в соответствии с выражением (I.5.24) расход $Q = qN = TN\frac{\Delta H}{L}$, так что фильтрационное сопротивление планового потока определяется формулой

$$\Phi = \frac{L}{TN}. \qquad \text{(I.6.15)}$$

Таким образом, метод сеток позволяет заменить сплошное поле фильтрационного потока сеткой фильтрационных сопротивлений, соединяемых в узловых точках. Аналогичная сеточная электрическая модель составляется из сетки электрических сопротивлений,

соединяемых между собой так же, как и фильтрационные сопротивления, а величина электрических сопротивлений R задается пропорциональной соответствующим фильтрационным сопротивлениям:

$$R = \alpha_R \Phi. \qquad \text{(I.6.16)}$$

Масштаб электрических сопротивлений α_R выбирается так, чтобы получаемые из выражения (I.6.16) значения R хорошо укладывались в номиналы электрических сопротивлений, имеющихся в электроинтеграторе. Собрав рассчитанную сетку сопротивлений на интеграторе, следует далее вести моделирование таким же путем, как и на сплошной модели. В частности, когда на основных границах потока задаются условия первого или третьего рода, то предварительно надо выбрать минимальный и максимальный напоры $H_{\text{мин}}$ и $H_{\text{макс}}$, определить значения относительных потенциалов $\bar{U}$ на границах потока с заданными напорами H по формуле (I.6.12). После набора и подключения модели на интеграторе замеряются значения относительных потенциалов $\bar{U}$ в узловых точках, от которых переходят к соответствующим напорам в блоках по формуле (I.6.11).

Глава 1
ОСНОВЫ МЕТОДИКИ РАСЧЕТОВ ПЛАНОВОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. ПРИНЦИПЫ СОСТАВЛЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ ПЛАНОВЫХ ПОТОКОВ

В плановых потоках градиенты напора по глубине считаются неизменными, а в качестве геофильтрационного параметра, характеризующего проницаемость (водообильность) пласта, выступает проводимость T (см. § 1 главы 3 раздела I). При построении расчетных зависимостей для плановых потоков существен характер зависимости проводимости от напора. В напорных пластах изменения проводимости в зависимости от напора связаны только с изменениями проницаемости при деформациях пласта. Однако обычно такие изменения не существенны, и потому в напорных пластах проводимость практически не зависит от напора. В безнапорных потоках проводимость более тесно связана с изменениями уровней воды, которые влекут за собой изменение глубины потока, а следовательно, и мощности водоносного пласта. Таким образом, в безнапорных пластах изменения проводимости оказываются зависимыми от условий формирования фильтрационного потока, причем характер этой зависимости определяется строением потока по вертикали.

Для практического решения плановых фильтрационных задач выделяются три основные схемы строения потока по вертикали: 1) постоянной проводимости (рис. 30, *а*), когда проводимость в любом сечении считается неизменной (независящей от изменений напора потока); эта схема по существу соответствует условиям напорных пластов, в связи с чем с некоторой условностью будем называть ее схемой «напорного пласта» (в общем случае слоистого строения пласта его проводимость определяется формулой I.5.5); 2) однородного по вертикали безнапорного потока (рис. 30, *б*), проводимость которого линейно зависит от его глубины ($T=kh$); эта схема была введена в динамику подземных вод Ж. Дюпюи [39], который в своих построениях считал, кроме того, водоупор горизонтальным; такую схему будем называть в дальнейшем схемой Дюпюи; 3) горизонтально-слоистого безнапорного

потока на горизонтальном водоупоре (рис. 30, *в*), в котором закон изменения проводимости с глубиной зависит от характера слоистости пласта; назовем эту схему схемой Гиринского, поскольку Н. К. Гиринским [6] были сформированы основные закономерности гидродинамики таких потоков.

Естественно, что для обоснования принципов методики фильтрационных расчетов безнапорных потоков важно установление рациональной области применения каждой из приведенных выше схем строения потока по вертикали и выбора основной расчетной схемы, для которой прежде всего следует обосновать расчетные зависимости. В отечественной литературе по динамике подземных вод для безнапорного потока в качестве основной обычно применяется схема Дюпюи (поток однородного строения на горизонтальном водоупоре) [1, 21, 25].

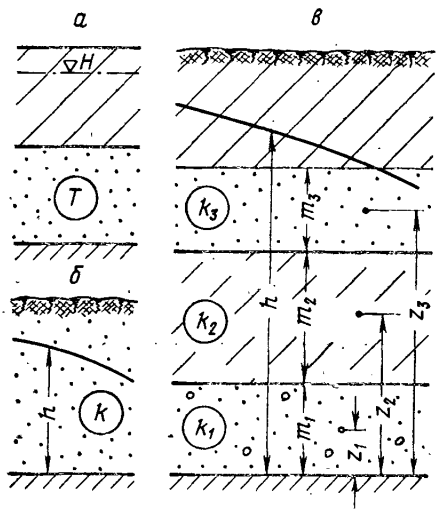


Рис. 30. Схемы вертикального строения безнапорных потоков: *а* — двухслойный; *б* — однородный по вертикали; *в* — горизонтально-слоистый

Вместе с тем еще Г. Н. Каменским [11, 12] была показана значимость влияния и необходимость учета неоднородности строения водоносных пластов по вертикали. Развивая это положение, на основании анализа реальных гидрогеологических условий можно достаточно уверенно утверждать, что условия, когда водоносный пласт может считаться однородным, а водоупор горизонтальным, встречаются очень редко, а при составлении методики расчетов они могут рассматриваться как исключительные. Гораздо более реальной следует считать предпосылку о постоянстве проводимости водоносного пласта. Такая предпосылка почти безупречно выполняется при двухслойном строении пласта, когда основной водоносный пласт покрывается слабопроницаемыми отложениями, поскольку в этом случае колебания уровней грунтовых вод в пределах слабопроницаемого покровного слоя практически не влияют на величину проводимости пласта. Для аллювиальных отложений это положение усиливается еще и тем, что их проницаемость обычно увеличивается с глубиной, особенно если в основании водоносного пласта залегает песчано-гравелистый слой с заметно большей проницаемостью. Предпосылку о постоянной проводимости пласта целесообразно применять и для потока значительной мощности при пестром строении и криволинейном очертании водоупора, поскольку при этом достоверность

любой из расчетных схем оказывается неопределенной и решающее значение приобретает простота схемы напорного пласта (с постоянной проводимостью).

Схема Дюпюи имеет весьма ограниченную область применения — главным образом в однородных песчаных пластах при резком изменении мощности потока. Схему Гиринского эффективно применять при четковыраженной слоистости пласта, например для локальных потоков в аллювиальных отложениях и особенно для потоков в скальных массивах, проницаемость которых значительно изменяется по глубине.

Запишем выражения для удельного расхода планового потока в дифференциальной форме для любого направления l применительно к различным схемам строения пластов. Для схемы напорного пласта $I = -\frac{dH}{dl}$ и в соответствии с общим выражением (I.5.4)

$$q = -T\frac{dH}{dl}. \qquad \text{(II.1.1)}$$

Для схемы Дюпюи $T=kh$, а задавая плоскость сравнения на уровне водоупора, имеем $H=h$ и

$$q = -kh\frac{dh}{dl} = -k\frac{d\left(\frac{h^2}{2}\right)}{dl} \qquad \text{(II.1.2)}$$

Для схемы Гиринского общее выражение для удельного потока в направлении l имеет вид [6, 20]

$$q = -\frac{dG}{dl}. \qquad \text{(II.1.3)}$$

Здесь G — функция Гиринского, которая для потока глубиной h, состоящего в данном сечении из n слоев, определяется выражением

$$G = \sum_{i=1}^{n} k_i m_i (h - z_i) = k_1 m_1 (h - z_1) +$$

$$+ k_2 m_2 (h - z_2) + \ldots + k_n m_n (h - z_n), \qquad \text{(II.1.4)}$$

где k_i, m_i и z_i — соответственно коэффициент фильтрации, мощность и расстояние от середины слоя до водоупора для i-того слоя.

Сопоставляя выражения (II.1.1), (II.1.2) и (II.1.3) для различных схем потока, можно видеть, что они однотипны. Если взять за основу схему потока с постоянной (заданной) проводимостью, описываемую в общей форме уравнением (II.1.1), то для перехода к схеме Дюпюи следует произвести следующие замены:

$$T \to k,\ H \to \frac{h^2}{2}, \qquad \text{(II.1.5)}$$

а для перехода к схеме Гиринского следует заменить

$$T \to 1,\ H \to G. \qquad \text{(II.1.5а)}$$

Пользуясь этими заменами, всегда можно перейти от любых зависимостей, построенных для планового потока с постоянной (заданной) проводимостью, к зависимостям для схем Дюпюи и Гиринского, что позволяет существенно унифицировать расчетные зависимости. Поскольку схема напорного пласта (потока) наиболее проста и имеет к тому же наиболее значительную область применения, то в дальнейшем она будет рассматриваться как основная. При необходимости применения для безнапорного потока схем Дюпюи или Гиринского соответствующие расчетные зависимости получаются на основе приведенных выше общих правил перехода.

§ 2. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ПЛАНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Одномерные задачи плановой фильтрации рассматриваются в тех случаях, когда поток слабо деформируется в плане, так что изменение ширины ленты тока по направлению течения оказывается несущественным (например, если оно не превосходит возможных погрешностей в определении проводимости пласта). Такие условия возникают, например, на водоразделах между двумя параллельными долинами, вблизи рек, водохранилищ и каналов при прямолинейном очертании их берегов и т. п.

2.1. Прямые задачи

Простейший случай одномерного потока — поток с неизменным по длине расходом q и постоянной проводимостью (рис. 31, *а*), в котором $I = \frac{H_0 - H_L}{L}$, и согласно (I.5.4) погонный расход q определяется по формуле

$$q = T\frac{H_0 - H_L}{L}, \qquad \text{(II.1.6)}$$

а уравнение для напора H в любом сечении x является уравнением прямой линии

$$H = H_0 - \frac{H_0 - H_L}{L}x. \qquad \text{(II.1.7)}$$

Для аналогичного однородного безнапорного потока (схема Дюпюи) решение можно получить из выражения (II.1.6) с помощью

преобразования (II.1.5), заменяя T на k, а напоры H_0, H_L и H — соответственно на величины $0{,}5h_0^2$, $0{,}5h_L^2$ и $0{,}5h^2$ (рис. 31, *б*). Тогда получим формулы и уравнения Дюпюи для линейного потока

$$q = k\frac{h_0^2 - h_L^2}{2L}, \qquad \text{(II.1.8)}$$

$$h^2 = h_0^2 - \frac{h_0^2 - h_L^2}{L}x, \quad h = \sqrt{h_0^2 + \frac{h_0^2 - h_L^2}{L}x}. \qquad \text{(II.1.9)}$$

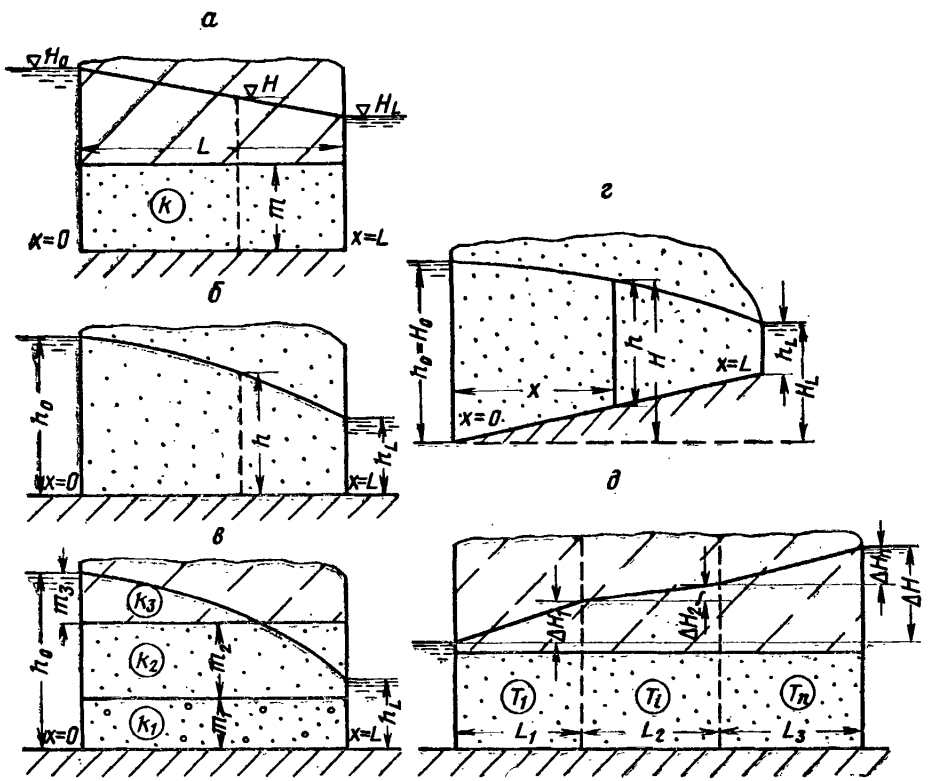


Рис. 31. Одномерные установившиеся потоки:
а — напорный (с постоянной проводимостью); *б* — однородный на горизонтальном водоупоре (схема Дюпюи); *в* — горизонтально-слоистый (схема Гиринского); *г* — однородный на наклонном водоупоре; *д* — с кусочно-переменной проводимостью

При отсутствии влияния капиллярной зоны формула (II.1.8) оказывается совершенно строгой, что гидромеханическим решением этой задачи показал И. А. Чарный [27].

Для аналогичного горизонтально-слоистого потока (схема Гиринского) такие же зависимости получаются с помощью преобразования (II.1.5а) в виде

$$q = \frac{G_0 - G_L}{L}, \tag{II.1.10}$$

$$G = G_0 - \frac{G_0 - G_L}{L} x, \tag{II.1.11}$$

причем G_0, G_L и G — значения функции Гиринского на границах $x=0$, $x=L$ и в любом сечении потока x. Имея связь между G и h, можно по полученному значению G найти соответствующую ему глубину потока и наоборот. Например, для трехслойного пласта (рис. 31, *в*)

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= k_1 m_1 (h_0 - 0{,}5m_1) + k_2 m_2 (h_0 - m_1 - 0{,}5m_2) + \\ &+ k_3 m_3 (h_0 - m_1 - m_2 - 0{,}5m_3), \\ G_L &= k_1 m_1 (h_L - 0{,}5m_1) + k_2 \frac{(h_L - m_1)^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{II.1.12}$$

Упражнение 1. Найти выражения для функции Гиринского на границах одномерного напорно-безнапорного потока (схема на рис. 31, *в* при $k_1=k_2=k$, $k_3=0$ и $m_1+m_2=m$).

$$G_0 = km(h_0 - 0{,}5m), \quad G_L = 0{,}5kh_L^2. \tag{II.1.13}$$

Упражнение 2. Для тех же условий найти расстояние L_p от границы $x=L$ до сечения, разделяющего области напорного и безнапорного потоков.

Ответ:

$$L_p = \frac{m^2 - h_L^2}{m(2h_0 - m) - h_L^2}, \tag{II.1.14}$$

причем решение получается из уравнения (II.1.11) при значении $G=G_p=0{,}5km^2$ и $x=L-L_p$.

Формулу (II.1.8) можно записать в виде

$$q = k \frac{h_0 + h_L}{2} \cdot \frac{h_0 - h_L}{2}, \tag{II.1.15}$$

из которой следует, что расход горизонтально-однородного безнапорного потока определяется как произведение коэффициента фильтрации на среднюю мощность потока и на средний градиент напора. По этому же принципу Г. Н. Каменским [12] составлено выражение для расхода однородного безнапорного потока на наклонном водоупоре (рис. 31, *г*)

$$q = k \frac{h_0 + h_L}{2} \cdot \frac{H_0 - H_L}{L}. \tag{II.1.16}$$

Для построения кривой депрессии запишем аналогичное выражение для расхода потока между сечениями $x=0$ и $x=L$

$$q = k\frac{h_0+h}{2}\cdot\frac{H_0-H}{x}. \qquad \text{(II.1.16а)}$$

Поскольку $h=H-ix$, то, проводя плоскость сравнения через водоупор в сечении $x=0$, запишем

$$q = k\frac{h_0-h}{2}\cdot\frac{h_0-h-ix}{L}, \qquad \text{(II.1.16б)}$$

откуда следует уравнение для построения кривой депрессии

$$h = \sqrt{h_0^2 - ix(h_0 - 0{,}25ix) + 2\frac{q}{k}x} - 0{,}5ix. \qquad \text{(II.1.17)}$$

Сопоставление уравнения (II.1.17) со строгим решением Н. Н. Павловского (см., например, [29]) показывает его хорошую точность практически во всех реальных гидрогеологических условиях.

В тех случаях, когда параметры водоносных пластов меняются по длине потока, обычно эффективным оказывается применение метода фрагментов, когда весь поток разделяется на ряд участков (фрагментов), в пределах которых параметры пласта неизменны, а затем решения для каждого фрагмента «сшиваются» на их границах из условия неразрывности напоров и расходов потока. Например, для потока с кусочно-переменной проводимостью, состоящего из n участков различной проводимости (рис. 31, *д*), можно составить выражения для удельного расхода q, используя в пределах каждого участка формулу (II.1.6):

$$q = T_1\frac{\Delta H_1}{L_1},\ q = T_2\frac{\Delta H_2}{L_2},\ \ldots,\ q = T_n\frac{\Delta H_n}{L_n}, \qquad \text{(II.1.18)}$$

где ΔH_1, ΔH_2, ..., ΔH_n — потери напора в пределах соответствующих участков длиной L_1, L_2, ..., L_n и проводимостью T_1, T_2, ..., T_n или

$$\Delta H_1 = q\frac{L_1}{T_1},\ \Delta H_2 = q\frac{L_2}{T_2},\ \ldots,\ \Delta H_n = q\frac{L_n}{T_n}. \qquad \text{(II.1.18а)}$$

Суммарная потеря напора ΔH сложится из потерь напора на отдельных участках, т. е.

$$\Delta H = q\left(\frac{L_1}{T_1} + \frac{L_2}{T_2} + \ldots + \frac{L_n}{T_n}\right). \qquad \text{(II.1.18б)}$$

Отсюда расход потока с кусочно-переменной проводимостью

$$q = \frac{\Delta H}{\frac{L_1}{T_1} + \frac{L_2}{T_2} + \ldots + \frac{L_n}{T_n}}. \qquad \text{(II.1.19)}$$

После определения расхода можно согласно выражению (II.1.18а) определить потери напора на каждом участке и построить кривую депрессии, которая будет ломаной линией.

Из выражения (II.1.19) следует, в частности, что поток с кусочно-переменной проводимостью может быть приведен к эквивалентному однородному потоку, расчетная проводимость которого T определится из соотношения

$$\frac{L}{T} = \frac{L_1}{T_1} + \frac{L_2}{T_2} + \ldots + \frac{L_n}{T_n}. \qquad \text{(II.1.19а)}$$

2.2. Прямые задачи для инфильтрационных потоков

Построение и использование расчетных зависимостей для линейных в плане инфильтрационных потоков обстоятельно рассмотрены Г. Н. Каменским [11] применительно к строению безнапорного потока по схеме Дюпюи. Приведем такие построения для линейных инфильтрационных потоков постоянной проводимости (схема «напорного пласта»). Выведем общее решение для такого потока, по длине которого задается инфильтрационное питание интенсивностью w, считая его направление совпадающим с осью x. Для этого выделим бесконечно малый элемент потока длиной dx и составим его баланс, имея в виду, что в него приходит расход q, выходит расход $q+dq$, а сверху поступает расход ωdx, т. е. по балансу расходов имеем $q+\omega dx=q+dq$, и уравнение неразрывности потока будет

$$\frac{dq}{dx} = \mathrm{w}, \qquad \text{(II.1.20)}$$

а выражая в нем q согласно (II.1.1) при $\frac{dH}{dl} = \frac{dH}{dx}$, получим уравнение для распределения напоров в одномерном инфильтрационном потоке

$$\frac{d}{dx}\left(T\frac{dH}{dx}\right) + \mathrm{w} = 0. \qquad \text{(II.1.21)}$$

В частности, для потока с постоянной проводимостью $T=\mathrm{const}$ и уравнение (II.1.21) принимает вид

$$\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{\mathrm{w}}{T}. \qquad \text{(II.1.21а)}$$

При постоянной интенсивности инфильтрации уравнение (II.1.21а) допускает почленное интегрирование. После первого интегрирования получаем

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{\mathrm{w}}{T}x + C_1, \qquad \text{(II.1.22)}$$

а после второго интегрирования получаем выражение для напора

$$H = -\frac{wx^2}{2T} + C_1 x + C_2, \qquad \text{(II.1.23)}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями задачи. Так, для задачи с заданными напорами $H=H_0$ при $x=0$ и $H=H_L$ при $x=L$ (рис. 32, *а*) получаем

$$C_2 = H_0,\ C_1 = \frac{H_L - H_0}{L} + \frac{wL}{2T}, \qquad \text{(II.1.24)}$$

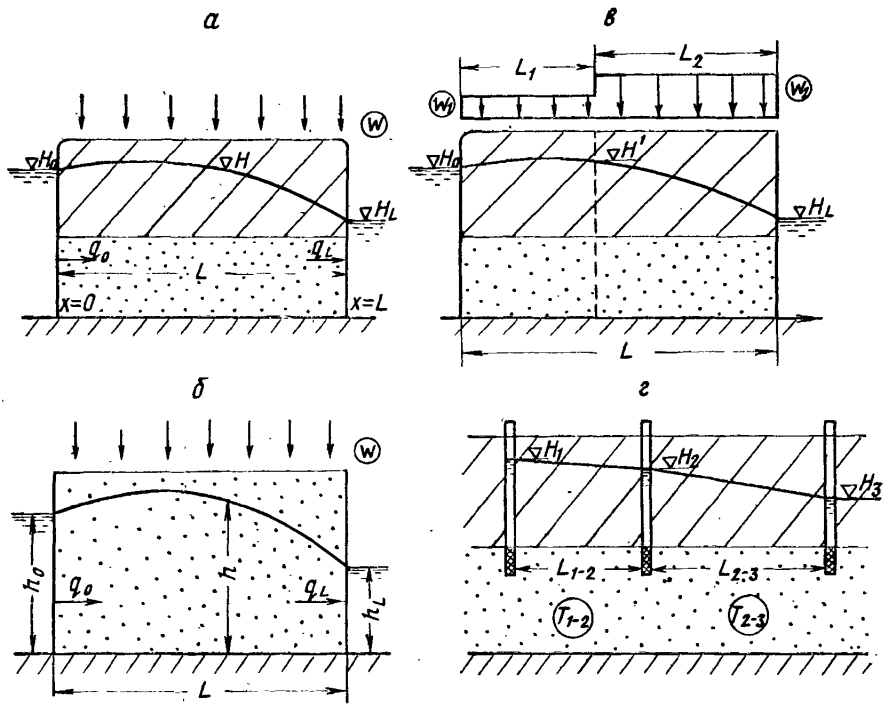


Рис. 32. Одномерные инфильтрационные потоки:
а — с постоянной проводимостью; *б* — строение по схеме Дюпюи; *в* — кусочно-переменная инфильтрация; *г* — створ наблюдательных скважин для определения интенсивности инфильтрации

и уравнение (II.1.23) принимает вид

$$H = H_0 + \frac{H_L - H_0}{L} x + \frac{wx}{2T}(L - x). \qquad \text{(II.1.25)}$$

Расход потока q_x в любом сечении x будет

$$q_x = -T\frac{dH}{dx} = T\frac{H_0 - H_L}{L} - w(0{,}5L - x). \qquad \text{(II.1.26)}$$

В частности, для расходов на границах q_0 при $x=0$ и q_L при $x=L$ получим

$$q_0 = T\frac{H_0 - H_L}{L} - \frac{wL}{2}, \quad q_L = T\frac{H_0 - H_L}{L} + \frac{wL}{2}. \qquad (II.1.27)$$

Упражнение 1. Получить решение аналогичной задачи для безнапорного потока, построенного по схеме Дюпюи (рис. 32, *б*).

По правилу перехода (II.1.5) получаем

$$q_x = k\frac{h_0^2 - h_L^2}{2L} - w\left(\frac{L}{2} - x\right), \qquad (II.1.28)$$

$$h^2 = h_0^2 + \frac{h_L^2 - h_0^2}{L}x + \frac{wx}{k}(L - x). \qquad (II.1.29)$$

Упражнение 2. Получить решение аналогичной задачи при постоянной проводимости пласта, но при измененных граничных условиях: $H=H_0$ при $x=0$ и $dH/dx=0$ при $x=L$.

Ответ: в уравнениях (II.1.22) и (II.1.23) $C_1 = \frac{wL}{T}$ и $C_2=H_0$, откуда

$$H = H_0 + \frac{wx}{T}\left(L - \frac{x}{2}\right). \qquad (II.1.30)$$

При наличии кусочно-переменной инфильтрации по длине потока расчетные зависимости составляются с использованием метода фрагментов. В качестве примера такой задачи рассмотрим поток постоянной проводимости с двумя участками различной интенсивности инфильтрации (рис. 32, *в*).

Прежде всего разделим весь поток на два фрагмента с одинаковой интенсивностью инфильтрации ω_1 и ω_2 и, используя уравнения (II.1.27) для расходов на границах инфильтрационного потока, запишем выражения расхода q' в раздельном сечении для каждого из фрагментов, для левого фрагмента q' запишется как расход q_L, на правой границе при $H_L=H'$, а для правого фрагмента q' запишется как расход q_0 на левой границе при $H_0=H'$:

$$q' = T_1\frac{H_0 - H'}{L_1} + \frac{w_1L_1}{2}, \quad q' = T_2\frac{H' - H_L}{L_2} - \frac{w_2L_2}{2}, \qquad (II.1.31)$$

где T_1 и T_2 — проводимости потока в соответствующих фрагментах. Считая поток по длине однородным ($T_1=T_2=T$) и приравнивая выражения для q', составленные для разных фрагментов, после алгебраических преобразований получим формулу для определения глубины потока H' в раздельном сечении:

$$H' = \frac{L_1L_2}{L}\left(\frac{H_0}{L_1} + \frac{H_L}{L_2} + 2\frac{w_1L_1 + w_2L_2}{T}\right), \qquad (II.1.32)$$

после чего расходы потока и кривые депрессии могут быть найдены для каждого фрагмента в отдельности.

2.3. Обратные задачи

Приведенные выше расчетные зависимости могут быть использованы и для определения гидрогеологических параметров по данным решения обратных задач.

При установившемся режиме фильтрации таким путем может быть дана оценка фильтрационной неоднородности водоносных пластов, сопротивления ложа водоемов и получены характеристики величины инфильтрационного питания, если имеются данные об уровнях в скважинах наблюдательных створов.

Наиболее просто и удобно такого рода анализ можно провести, если наблюдательный створ выстроен по направлению течения потока подземных вод (рис. 32, *г*). В этом случае при наличии линейного в плане фильтрационного потока и отсутствии инфильтрации удельный расход фильтрационного потока между двумя наблюдательными скважинами 1—2, находящимися на расстоянии L_{1-2} друг от друга, определится формулой

$$q = T_{1-2} I_{1-2}, \quad I_{1-2} = \frac{\Delta H_{1-2}}{L_{1-2}}, \tag{II.1.33}$$

где T_{1-2} и I_{1-2} — средние значения проводимости и градиента потока в створе, а ΔH_{1-2} — разница уровней воды между этими скважинами. Аналогичным образом между скважинами 2—3

$$q = T_{2-3} I_{2-3}, \quad I_{2-3} = \frac{\Delta H_{2-3}}{L_{2-3}}, \tag{II.1.33а}$$

где T_{2-3}, I_{2-3} и ΔH_{2-3} — значения проводимости, градиента и разницы уровней между скважинами 2—3. Сопоставляя выражения (II.1.33) и (II.1.33а), найдем формулу для определения соотношения проводимостей в зонах между скважинами 1—2 и 2—3

$$\frac{T_{1-2}}{T_{2-3}} = \frac{I_{2-3}}{I_{1-2}}, \tag{II.1.34}$$

т. е. значения проводимости водоносного пласта в данном случае оказываются обратно пропорциональными градиентам фильтрационного потока.

При наличии инфильтрационного питания расход фильтрационного потока изменяется по его длине, причем на линии скважины 2 расход потока q_2, приходящего со стороны скважин 1 и 3, определится выражениями (II.1.31) как расход q' на границах фрагментов:

$$q_2 = T_{1-2} I_{1-2} - \frac{w L_{1-2}}{2}, \quad q_2 = T_{2-3} I_{2-3} + \frac{w L_{2-3}}{2}. \tag{II.1.35}$$

Приравнивая расходы q_2 слева и справа в сечении скважины 2, найдем формулу для определения относительной величины интенсивности инфильтрации

$$\frac{w}{T_{2-3}} = \frac{\frac{T_{1-2}}{T_{2-3}} I_{1-2} - I_{2-3}}{L_{ср}}, \quad L_{ср} = \frac{L_{1-2} + L_{2-3}}{2}. \qquad (II.1.36)$$

Для расчетов по формуле (II.1.36) следует предварительно определить соотношение проводимостей T_{1-2}/T_{2-3}, например по формуле (II.1.34), если имеются данные на период отсутствия инфильтрации. В более общем случае плоского в плане потока аналогичные расчеты можно провести по выделяемой вдоль наблюдательного створа ленте тока [34].

Определив соотношение проводимостей пласта, можно найти соотношение средних коэффициентов фильтрации в зонах k_{1-2} и k_{2-3}, поскольку

$$\frac{k_{1-2}}{k_{2-3}} = \frac{T_{1-2}}{T_{2-3}} \cdot \frac{m_{2-3}}{m_{1-2}}, \qquad (II.1.37)$$

где $m_{1-2}=0{,}5\ (h_1+h_2)$ и $m_{2-3}=0{,}5\ (h_2+h_3)$ — средние мощности потока между соответствующими скважинами.

§ 3. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПЛАНОВЫХ ПОТОКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

При наличии подземных вод повышенной минерализации возникает необходимость учета переменной плотности потока подземных вод. Подход к гидродинамическим построениям для таких потоков существенно различается для случаев кусочного и непрерывного изменения плотности. При кусочном (позонном) изменении плотности поток состоит из зон с различной плотностью, внутри которых она не меняется, такие условия характерны для линз пресных вод и при интрузии соленых морских вод в пресные подземные воды [4, 9]. Более общий случай непрерывного изменения плотности характерен для глубоких высокоминерализованных подземных вод и наибольший интерес представляет для нефтяной гидрогеологии [8], хотя иногда (например, в приморских районах) такие условия встречаются в потоках грунтовых вод [4, 9, 40].

3.1. Кусочное изменение плотности

При построении потока переменной плотности уже нельзя непосредственно пользоваться понятием напора как показателя уровня гравитационной энергии, а следует обращаться к величине гравитационного потенциала φ, определяемого для каждой зоны согласс-

но (I.1.4), причем в зоне с водой, обладающей объемным весом γ_i, потенциал φ_i будет

$$\varphi_i = p + \gamma_i z. \tag{II.1.38}$$

Для упрощения размерности гравитационного потенциала удобно ввести величину приведенного напора H_i^0, причем

$$H_i^0 = \frac{\varphi_i}{\gamma^0} = \frac{p}{\gamma^0} + \frac{\gamma_i}{\gamma^0} z, \tag{II.1.39}$$

где γ^0 — произвольно выбираемая расчетная величина объемного веса воды.

Внутри каждой зоны приведенные напоры H_i^0 описываются теми же дифференциальными уравнениями, как и в потоке постоянной плотности. На границе зон i и $i+1$ напоры H_i^0 и H_{i+1}^0 будут

$$H_i^0 = \frac{p}{\gamma^0} + \frac{\gamma_i}{\gamma^0} z_{\text{гр}}, \quad H_{i+1}^0 = \frac{p}{\gamma^0} + \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma^0} z_{\text{гр}}, \tag{II.1.40}$$

где $z_{\text{гр}}$ — ординаты границы раздела зон. Поскольку давление на границе раздела в каждой зоне должно быть одинаковым, то, вычитая напоры H_i^0 и H_{i+1}^0 друг из друга, получим условие

$$H_i^0 - H_{i+1}^0 = \frac{\gamma_i - \gamma_{i+1}}{\gamma^0} z_{\text{гр}}, \tag{II.1.41}$$

согласно которому приведенные напоры на границах раздела зон с различной плотностью терпят разрыв, различаясь между собой на величину, пропорциональную ординате границы раздела зон.

Рассмотрим теперь в качестве примера решение стационарной задачи формирования инфильтрационной линзы пресных вод на длинном острове, окруженном морской водой, причем в плане поток может считаться линейным (рис. 33). Такой поток состоит из двух зон: пресной воды с объемным весом $\gamma_{\text{пр}}$ и соленой (морской) воды с объемным весом $\gamma_{\text{с}}$. Задавая $\gamma_{\text{пр}} = \gamma^0$, получим, что на границе раздела линзы условие (II.1.41) для напоров H^0 и $H_{\text{с}}^0$ пресных и соленых вод примет вид

$$H^0 - H_{\text{с}}^0 = \frac{\gamma^0 - \gamma_{\text{с}}}{\gamma^0} z_{\text{гр}}. \tag{II.1.42}$$

Считая соленые (морские) воды неподвижными, зададим плоскость сравнения на поверхности моря и, следовательно, $H_{\text{с}}^0 = 0$. Имея в виду, что размеры такой линзы в плане бывают значительно больше ее мощности, можно считать внутри линзы справедливой предпосылку Дюпюи о постоянстве напоров по вертикали и, следовательно, напор на границе раздела H^0 в каждом сечении будет равен уровню свободной поверхности h относительно плоскости сравнения (уровня моря). Поскольку $z_{\text{гр}} = h - h^0$, где h^0 —

глубины линзы в данном сечении, то условие (II.1.42) представится в виде $h = \frac{\gamma_c - \gamma^0}{\gamma^0}(h^0 - h)$, откуда получим формулу для глубины линзы

$$h^0 = \frac{\gamma_c}{\gamma_c - \gamma^0} h = \frac{h}{\Delta\bar{\gamma}}; \quad \Delta\bar{\gamma} = \frac{\gamma_c - \gamma^0}{\gamma_c}. \qquad \text{(II.1.43)}$$

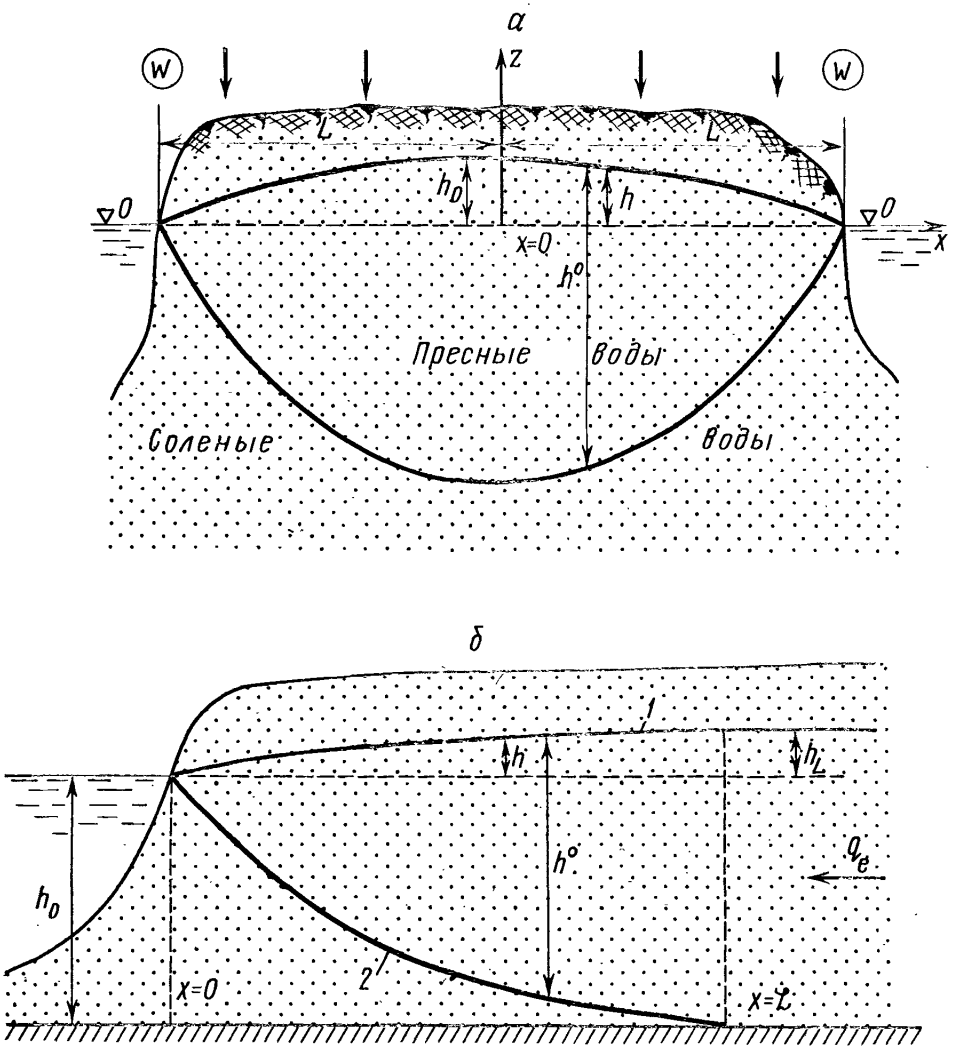


Рис. 33. Контакты соленых и пресных вод:
а — линза пресных вод на острове; *б* — разгрузка пресных вод в море (*1* — свободная поверхность, *2* — граница соленых и пресных вод)

Поскольку обычно различие в объемных весах соленых и пресных вод сравнительно невелико, то величина h^0, определяемая согласно (II.1.43), оказывается значительно больше ординаты свободной

поверхности h. Например, для морской воды характерно значение $\gamma_c = 1{,}02$ г/см^3 и при $\gamma^0 = 1$ г/см^3 получим $h^0 = 50h$.

Запишем теперь выражение для удельного расхода потока q в любом сечении

$$q = -kh^0 \frac{dh}{dx}. \qquad \text{(II.1.44)}$$

Заменяя здесь h^0 на h согласно (II.1.43) и учитывая, что $q = \mathrm{w}x$, получим далее уравнение

$$\mathrm{w}x = -k\frac{h}{\Delta\bar{\gamma}} \cdot \frac{dh}{dx} = -\frac{k}{2\Delta\bar{\gamma}} \cdot \frac{dh^2}{dx}, \qquad \text{(II.1.44а)}$$

которое допускает интегрирование после разделения переменных

$$h^2 = -\frac{\Delta\bar{\gamma}\mathrm{w}}{k}x^2 + C, \qquad \text{(II.1.44б)}$$

где C — произвольная постоянная, которая может быть определена из условия, задаваемого на выходе потока в море. Пренебрегая сопротивлением ложа моря, получим $h = 0$ при $x = L$, откуда $C = \frac{\Delta\bar{\gamma}\mathrm{w}L^2}{k}$, и уравнение (II.1.44б) примет окончательный вид

$$h^2 = \frac{\Delta\bar{\gamma}\mathrm{w}}{k}(L^2 - x^2); \quad h = \sqrt{\frac{\Delta\bar{\gamma}\mathrm{w}}{k}(L^2 - x^2)}. \qquad \text{(II.1.45)}$$

В частности, максимальная ордината h_0 при $x = 0$ будет

$$h_0 = L\sqrt{\frac{\Delta\bar{\gamma}\mathrm{w}}{k}}. \qquad \text{(II.1.46)}$$

Глубина линзы в любом сечении определяется далее согласно (II.1.43).

Упражнение. Найти решение задачи интрузии морских (соленых) вод в одномерном стационарном потоке конечной мощности и однородного строения (рис. 33, *б*), пренебрегая инфильтрационным питанием в пределах зоны интрузии ($0 \leqslant x \leqslant L$).

В уравнении (II.1.44) следует положить $q = -q_e = \mathrm{const}$, после чего вместо (II.1.46) получим

$$h^2 = 2\frac{q_e}{k}\Delta\bar{\gamma}x. \qquad \text{(II.1.47)}$$

Поскольку в точке $x = L$ глубина потока равна $h_L + h_0$, то $h_L = \frac{\gamma_c - \gamma^0}{\gamma^0} h_0$ и из (II.1.41) получим

$$L = \frac{2kh_0^2}{q_e} \cdot \Delta\bar{\gamma} \cdot \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right)^2. \qquad \text{(II.1.48)}$$

Например, при $q_e R = 0{,}1$ м, $n_0 = 50$ м, $\Delta\gamma = 0{,}02$ получим

$$L = \frac{2 \cdot 50^2}{0{,}1} \cdot 0{,}02 \cdot 1{,}02^2 = 1{,}04 \text{ км}.$$

Более подробное изложение методов фильтрационных расчетов взаимодействующих потоков соленых и пресных вод приведено, например, в работах [4, 40].

3.2. Непрерывное изменение плотности

При рассмотрении основ динамики потока переменной плотности следует иметь в виду, что действие компонентов потенциальной энергии принципиально различно: если давление действует равномерно во все стороны, то гравитационная составляющая направлена вертикально вниз. Поэтому градиенты энергии потока будут иметь различное выражение для горизонтальных составляющих $I_{\varphi x}$, $I_{\varphi y}$ и вертикальной составляющей $I_{\varphi z}$, причем

$$I_{\varphi x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad I_{\varphi y} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad I_{\varphi z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma, \qquad \text{(II.1.49)}$$

и выражения для компонентов массовой скорости фильтрации будут

$$\gamma v_x = -k\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \gamma v_y = -k\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \gamma v_z = -k\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma\right). \qquad \text{(II.1.50)}$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, можно получить дифференциальное уравнение потока переменной плотности [13].

Выражения (II.1.50) обобщаются для массовой скорости γv_l в любом направлении l, составляющем угол α с горизонтальной плоскостью:

$$\gamma v_l = -k\left(\frac{\partial p}{\partial l} + \gamma \sin\alpha\right). \qquad \text{(II.1.51)}$$

Такое выражение и рекомендуется в нефтяной подземной гидравлике [27] для определения скоростей фильтрации в наклонных пластах.

Дифференциальная форма приведенных зависимостей практически исключает возможность наглядного представления плана течений фильтрационного потока путем построения гидродинамической сетки. В связи с этим представляет интерес обоснование способа определения потенциала φ^0 фильтрационного потока переменной плотности, изолинии которого давали бы возможность построения линий тока и вычисления скоростей фильтрации по градиенту потенциала, т. е. для массовой скорости фильтрации в направлении l должно быть справедливо выражение

$$\gamma v_l = -k\frac{\partial \varphi^0}{\partial l}. \qquad \text{(II.1.52)}$$

Сопоставляя выражения (II.1.51) и (II.1.52), находим

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial l} = \frac{\partial p}{\partial l} + \gamma \sin \alpha, \qquad \text{(II.1.52а)}$$

а после интегрирования, имея в виду, что $dl \cdot \sin \alpha = dz$, получим выражение для потенциала

$$\varphi^0 = p + \int_0^z \gamma dz \qquad \text{(II.1.53)}$$

или, приведя потенциал φ^0 к расчетному объемному весу воды γ^0, получим выражение для приведенного напора H^0 (выражаемого в метрах)

$$H^0 = \frac{\varphi^0}{\gamma^0} = \frac{1}{\gamma^0}(p + \bar{\gamma} z), \qquad \text{(II.1.54)}$$

где $\bar{\gamma}$ — осредненное значение объемного веса воды:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{z} \int_0^z \gamma dz. \qquad \text{(II.1.55)}$$

Такого вида выражение для приведенного напора иным путем было обосновано А. И. Силиным-Бекчуриным [22].

Принципиальная сложность использования выражения (II.1.53) для потенциала (приведенного напора) потока переменной плотности заключается в его неопределенности, связанной с неоднозначной зависимостью $\gamma(z)$, поскольку в общем случае γ зависит еще от координат x и y. В частности, как указывает А. И. Силин-Бекчурин, для однозначного определения H^0 необходимо проводить плоскость сравнения так, чтобы она проходила по изолинии объемного веса подземных вод. Кроме того, вычисление интеграла сил гравитации в выражении (II.1.55) в общем случае $\gamma = \gamma(x, y, z)$ зависит от пути интегрирования. Таким образом, следует признать, что фильтрационный поток переменной плотности, вообще говоря, не имеет потенциала как величина, градиент которой определяет скорость фильтрации по любому направлению [4, 31], такой потенциал, выраженный в форме (II.1.53), имеется только при наличии однозначной зависимости $\gamma(z)$.

Анализируя фильтрационный поток в трубке тока переменного сечения, которая частично занята пресной водой, а частично соленой, можно показать [35], что для определения расхода потока понятие приведенного давления используется строго, если только при его расчетах проводить интегрирование сил гравитации по направлениям линий тока.

Для вычисления интеграла сил гравитации предлагается разбивать весь интервал интегрирования z на ряд интервалов Δz_i, расположенных между отдельными скважинами; тогда

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2} \cdot \Delta\bar{z}_1 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cdot \Delta\bar{z}_2 \ldots + \frac{\gamma_{n-1} + \gamma_n}{2} \cdot \Delta\bar{z}_n, \quad \Delta\bar{z}_n = \frac{\Delta z_n}{z}. \tag{II.1.56}$$

При отсутствии достаточных данных об изменении γ с глубиной А. И. Силин-Бекчурин [22] рекомендует считать

$$\bar{\gamma} = 0{,}5\,(\gamma + \gamma^0), \tag{II.1.57}$$

где γ^0 — объемный вес воды на плоскости сравнения; γ — объемный вес воды в данной точке с ординатой z относительно плоскости сравнения. Имеются рекомендации вычислять $\bar{\gamma}$, представляя γ в форме степенной зависимости от z [8].

Поскольку направления линий тока заранее неизвестны, то строгое определение приведенных напоров (с учетом необходимости вычисления интеграла сил гравитации вдоль линий тока) приходится вести подбором. При этом предварительно целесообразно построить поле (изолинии) напоров потока осредненной плотности

$$H_0 = \frac{p}{\gamma^0} + z, \tag{II.1.58}$$

где γ^0 — осредненный в пределах рассматриваемого потока объемный вес воды, который лучше всего задавать равным среднему значению в зонах, представляющих наибольший интерес для анализа динамики подземного потока. Зная разницу напоров ΔH между двумя точками и имея значения объемного веса в потоке, можно определить разницу приведенных напоров между этими точками по формуле

$$\Delta H^0 = \Delta H_0 + \frac{\bar{\gamma} - \gamma_0}{\gamma^0} \Delta z, \tag{II.1.59}$$

где Δz — разница ординат точек, между которыми определяется разница напоров; $\bar{\gamma}$ — среднее значение объемного веса между этими точками, определяемое по направлению соединяющей их прямой; при этом предполагается, что точки располагаются достаточно близко друг к другу, чтобы считать линии тока между ними близкими к прямым. Рассчитывая по формуле (II.1.59) значения ΔH^0 от каждой точки в различных направлениях, можно найти такое направление линии тока, которое будет совпадать с направлением максимального градиента приведенного напора. Идя таким образом от точки к точке, можно последовательно построить линии тока во всей исследуемой области. Порядок такого расчета подробно показан в [37].

Обстоятельный критический разбор различных способов расчетов приведенных напоров дал А. Е. Гуревич [8], отметивший

также возможность значительных погрешностей расчетов пластовых давлений в глубоких водоносных горизонтах, связанных с неточностью определения плотности воды в скважине.

Глава 2
ФИЛЬТРАЦИЯ ВБЛИЗИ ВОДОЕМОВ И ГИДРОСООРУЖЕНИЙ

§ 1. ФИЛЬТРАЦИЯ ВБЛИЗИ ВОДОЕМОВ И ВОДОТОКОВ

Под водоемом (водотоком) и в прилегающих к нему областях потока возникают резкие деформации фильтрационного потока, обусловленные гидродинамическим несовершенством водоема (водотока).

Когда фильтрационныи поток направлен из водоема, то под ним могут возникать условия свободной фильтрации, при которых фильтрационный расход не зависит от положения уровня грунтовых вод под водоемом. Наиболее четко выражена свободная фильтрация, когда водоем экранирован слабопроницаемым слоем, а уровень грунтовых вод располагается ниже подошвы экранирующего слоя (рис. 34, *а*). В этом случае под экранирующим слоем образуется зона свободной инфильтрации с разрывом сплошности фильтрующегося потока из водоема. Можно считать фильтрацию свободной при однородном строении ложа водоема, но глубоком залегании уровня грунтовых вод под водотоком, когда положение уровня грунтовых вод практически не влияет на фильтрацию из водотока. Свободная фильтрация имеет место также в начальной фазе просачивания при наполнении водоема (водотока), до смыкания инфильтрующего потока с уровнем грунтовых вод.

Если считать фильтрацию в слабопроницаемом прослое вертикальной, то при напоре в водоеме H_0, а на подошве слабопроницаемого слоя — $z_п$ (поскольку при доступе воздуха к подошве давление здесь равно атмосферному) градиент потока будет

$$\frac{H_0 - z_п}{m_0} = \frac{h_0 + m_0}{m_0} = \frac{h_0}{m_0} + 1,$$

а скорость фильтрации

$$v_0 = k_0 \left(1 + \frac{h_0}{m_0}\right). \qquad (II.2.1)$$

Таким образом, при свободной фильтрации под водоемом образуется зона инфильтрации с интенсивностью $w = v_0$, определяемой согласно выражению (II.2.1). Суммарный расход потока Q_0, фильтрующегося из водоема, при постоянной глубине воды в во-

доеме h_0 и площади водоема F_0 будет $Q_0 = v_0 F_0$, а при переменной величине h_0 водоем разбивается на участки с относительно постоянной глубиной, расходы подсчитываются для каждого из участков, а затем суммируются.

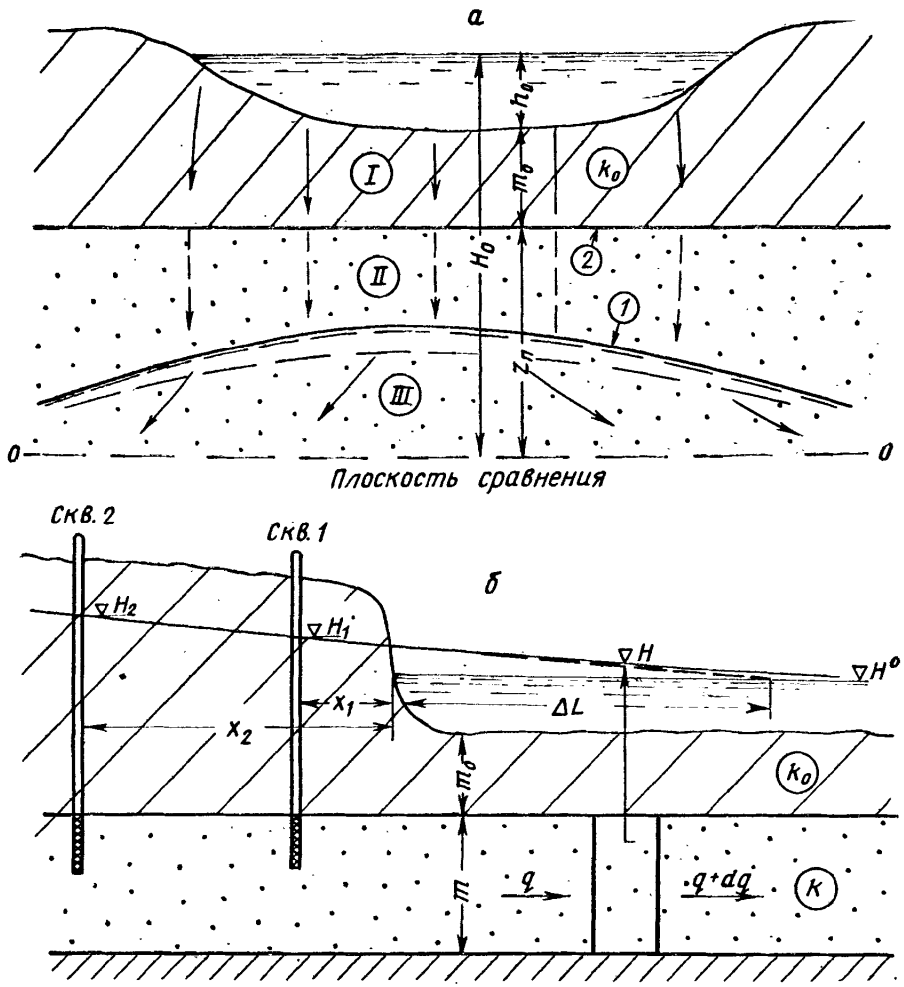


Рис. 34. Формирование фильтрационного потока вблизи водоема: *а* — свободный режим фильтрации (*1* — поверхность грунтовых вод, *2* — подошва экранирующего слоя); *б* — подпертый режим фильтрации

Заметим, что такая структура потока в слабопроницаемом слое может быть значительно нарушена при неоднородном строении этого слоя, причем наиболее существенное влияние на деформации потока оказывает наличие относительно водоупорных прослоев [36].

Рассмотрим решение этого уравнения прежде всего для водоема неограниченной ширины, когда на границе $x=0$ задается условие $H=H_0$ и $\Delta H=\Delta H_0=H_0-H^0$, а на бесконечности $H=H^0$ и $\Delta H=0$.

Как известно [23], решение уравнения (II.2.3а) при этих условиях имеет вид

$$\Delta H = \Delta H_0 e^{-bx}, \tag{II.2.4}$$

откуда имеем выражение для напора

$$H = H^0 + \Delta H = H^0 + (H_0 - H^0)\, e^{-bx}. \tag{II.2.4а}$$

Найдем удельный расход q_0 потока во входном (выходном) сечении (при $x=$, подставляя выражение для напора (II.2.4а) в формулу (II.2.2б) и учитывая, что $e^{-bx}=1$ при $x=0$:

$$q_0 = -T\frac{dH}{dx}\bigg|_{x=0} = bT(H_0 - H^0). \tag{II.2.5}$$

Аналогичную зависимость расхода потока на контуре водоема от потери напора в пределах ложа водоема можно получить, условно отодвигая контур водоема от берега на расстояние ΔL, т. е. заменяя сопротивление ложа водоема эквивалентным сопротивлением участка планового потока длиной ΔL. Действительно, удельный расход потока в пределах участка длиной ΔL будет

$$q_0 = T\frac{H_0 - H^0}{\Delta L}. \tag{II.2.6}$$

Сопоставляя выражения (II.2.6) и (II.2.5), можно видеть их принципиальную идентичность, причем они тождественно переходят друг в друга, если положить

$$\Delta L = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{m_0 T}{k_0}}. \tag{II.2.7}$$

Поскольку величина ΔL зависит только от строения ложа водоема (его геометрии и фильтрационной неоднородности), то она может рассматриваться как обобщенный гидрогеологический параметр ложа водоема, характеризующий его фильтрационное сопротивление.

При двухслойном строении ложа водоема величина ΔL может быть существенной, например при $m_0=50$ м, $k_0=0{,}01$ м/сут, $m=20$ м и $k=20$ м/сут получим $\Delta L = \sqrt{\frac{50\cdot 20\cdot 20}{0{,}01}} = 450$ м.

Анализируя поток в однородном ложе водоема мощностью m, можно показать, что в этом случае [2]

$$\Delta L = 0{,}44m. \tag{II.2.8}$$

Поскольку мощность водоносного пласта под водоемом измеряется обычно десятками метров, то такой же порядок будет

иметь в этом случае и величина ΔL, т. е. при однородном строении ложа водоема сопротивление ложа водоема оказывается практически несущественным. Из приведенных данных следует, что величина ΔL в значительной степени зависит от строения (неоднородности) ложа водоема, которое чаще всего изучено довольно слабо. Поэтому наиболее достоверные значения ΔL можно получить только на основе анализа данных режимных наблюдений вблизи водоема.

Наиболее удобно и достоверно определение величины ΔL по данным режимных наблюдений за стационарным режимом по створу из двух скважин, заложенных в основной водоносный горизонт вблизи водоема перпендикулярно его урезу при условии, что поток направлен нормально к урезу водоема (рис. 34, *б*).

Пренебрегая влиянием инфильтрационного питания в пределах створа, получим расход q на участке между скважинами 1—2

$$q = T\frac{H_1 - H_2}{x_2 - x_1}. \qquad \text{(II.2.9)}$$

Этот же расход между скважиной 1 и водоемом с учетом перемещения уреза на величину ΔL будет

$$q = T\frac{H_1 - H^0}{x_1 + \Delta L}. \qquad \text{(II.2.10)}$$

Исключая из выражений (II.2.9) и (II.2.10) величину q, найдем формулу для определения величины ΔL:

$$\Delta L = \frac{H_1 - H^0}{H_2 - H_1}(x_2 - x_1) - x_1. \qquad \text{(II.2.11)}$$

В реальных условиях определенные таким образом значения ΔL для рек и каналов обычно имеют порядок десятков и сотен метров, однако могут достигать и первых километров [16, 19, 33].

Упражнение. Получить аналогичную формулу при наличии инфильтрационного питания потока с одинаковой интенсивностью w по его длине.

Выражения для расхода потока в сечении уреза водотока ($x=0$) получим, рассматривая поток между скважинами, с одной стороны, и урезом водотока — с другой. Эти выражения приводятся к аналогичным выражениям для потока без инфильтрации заменой напоров в скважинах H_1 и H_2 на расчетные значения H_0^1 и H_2^0, причем

$$H_1^0 = H_1 + \frac{w x_1^2}{2T}, \quad H_2^0 = H_2 + \frac{w x_2^2}{2T}. \qquad \text{(II.2.12)}$$

Таким образом, в данном случае для определения ΔL остается в силе формула (II.2.11), в которой только величины H_1 и H_2 заменяются расчетными значениями H_1^0 и H_2^0, определяемыми согласно (II.2.12).

Можно доказать [30, 34], что для водотока ограниченной ширины (рис. 35, *а*), когда существенным оказывается взаимодействие потоков на противоположных берегах, фильтрационное со-

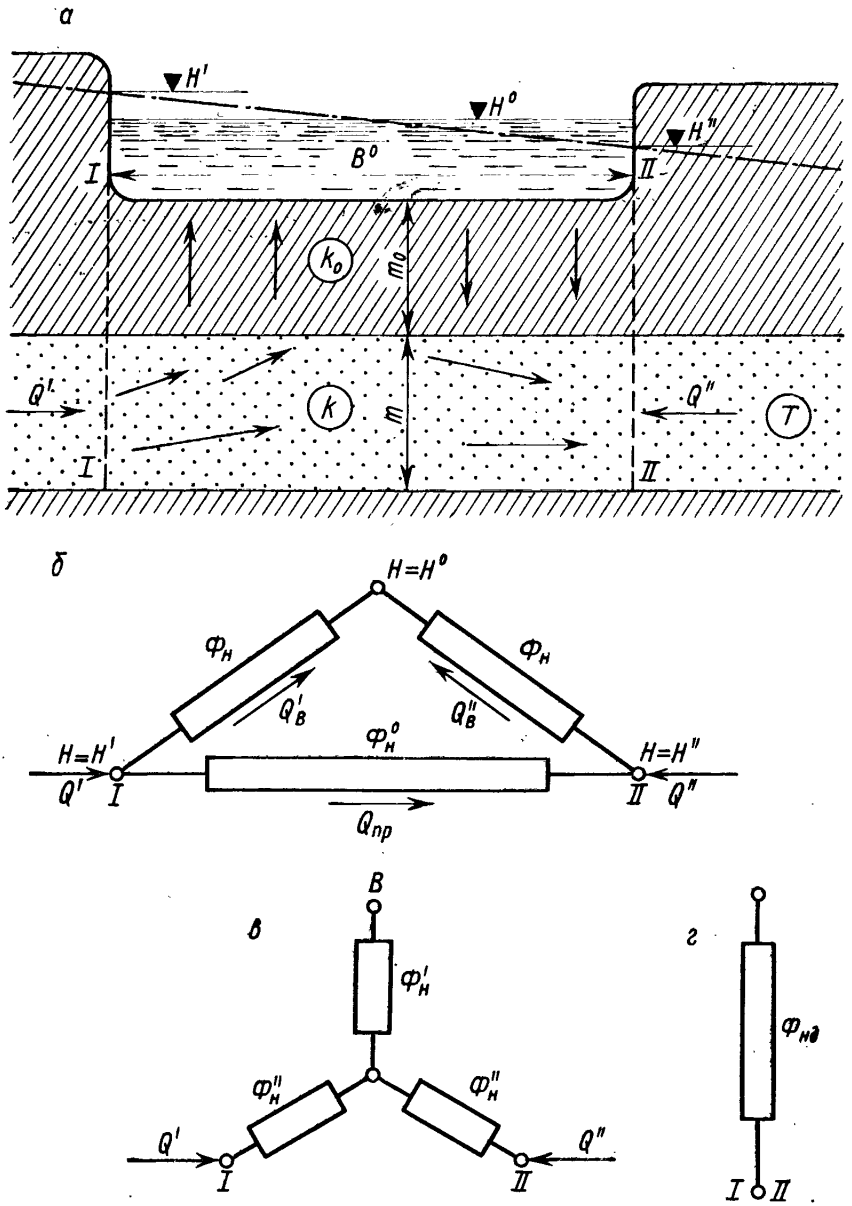


Рис. 35. Схема соединений сопротивлений, учитывающих гидродинамическое несовершенство водотока:
а — строение ложа водотока; *б* — схема «треугольника»; *в* — схема «звезды»; *г* — упрощенная схема

противление потока под водотоком выражается системой береговых сопротивлений $\Phi_н$ и сопротивления $\Phi^0_н$, обусловливающего проскок потока под водотоком, причем эта система соединяется по схеме «треугольник» (рис. 35, *б*). Для расходов потока, проходящего через эти сопротивления, справедливы выражения

$$Q'_в = \frac{H' - H^0}{\Phi_н}, \quad Q''_в = \frac{H'' - H^0}{\Phi_н}, \quad Q_{пр} = \frac{H' - H''}{\Phi^0_н} \qquad (II.2.13)$$

Подставляя эти выражения в уравнения баланса потока в сечениях уреза водотока, получим уравнения, связывающие расходы (Q' и Q'') и средние напоры (H' и H'') в сечениях урезов водотока

$$Q' = \frac{H' - H^0}{\Phi_н} + \frac{H' - H''}{\Phi^0_н}, \quad Q'' = \frac{H'' - H^0}{\Phi_н} + \frac{H'' - H'}{\Phi^0_н}, \qquad (II.2.14)$$

которые можно назвать внутренними граничными условиями третьего рода. Удобно выразить сопротивления $\Phi_н$ и $\Phi^0_н$ через эквивалентные длины планового потока $L_н$ и $L^0_н$, причем из общего выражения (I.6.15) для фильтрационного сопротивления планового потока следует, что для участка потока шириной N

$$\Phi_н = \frac{L_н}{TN}, \quad \Phi^0_н = \frac{L^0_н}{TN}. \qquad (II.2.15)$$

Тогда уравнения (II.2.14) можно записать в виде

$$\frac{q'}{T} = H'\left(\frac{1}{L_н} + \frac{1}{L^0_н}\right) - \frac{H^0}{L_н} - \frac{H''}{L^0_н},$$

$$\frac{q''}{T} = H''\left(\frac{1}{L_н} + \frac{1}{L^0_н}\right) - \frac{H_0}{L_н} - \frac{H'}{L^0_н}, \qquad (II.2.16)$$

где q' и q'' — удельные расходы в сечениях урезов водотока.

Отметим интересные частные случаи проявления сопротивлений ложа водотока.

Для водоема бесконечной длины или при симметричном характере потока вблизи водотока горизонтальные сопротивления $\Phi^0_н$ не влияют на формирование потока, и в этих случаях сопротивление ложа водоема учитывается удлинением потока на величину $\Delta L = L_н$.

Для дрен, имеющих обычно небольшие размеры по сравнению с мощностью пластов, горизонтальные сопротивления $\Phi^0_н$ становятся пренебрежимо малыми, так что учет несовершенства дрены осуществляется по упрощенной схеме с введением сопротивления $\Phi_{нд} = 0{,}5\Phi_н$ (рис. 35, *г*). Выражения для определения этих сопротивлений приведены в § 2 главы 1 раздела V.

Строго говоря, сопротивление ложа водотока зависит от положения свободной поверхности фильтрационного потока, однако такая зависимость обычно не имеет практического значения, поскольку гидродинамическое несовершенство водотока определяется в основном фильтрационной неоднородностью его ложа, и, как показывает гидродинамический анализ [34], на него слабо влияет положение кривой депрессии.

Оценка сопротивлений существующих водоемов или водотоков должна производиться по данным анализа режима уровней грунтовых вод в прибрежной зоне. В общем случае, когда имеет место взаимодействие потоков на противоположных его берегах, определяются сопротивления $\Phi_н$ и $\Phi^0_н$ (или их эквивалентные длины $L_н$ и $L^0_н$), что можно осуществить при наличии вблизи водотока существенно несимметричного потока.

Наиболее просто эта задача решается при направлении потока нормали к берегам водотока, когда режимные створы составляются из двух наблюдательных скважин на каждом берегу (рис. 36, *а*).

Обработку таких данных удобнее всего проводить при стационарном режиме, исходя из уравнений (II.2.16) и имея в виду, что непосредственно по данным режимных наблюдений находятся значения градиентов потока в берегах водотока $I'=q'/T$ и $I''=q''/T$ (между каждой парой наблюдательных скважин), а также расчетные напоры на урезах водотока H' и H'', получаемые прямолинейной экстраполяцией уровней потока до сечения соответствующего уреза, т. е.

$$H' = H_1 + (H_1 - H')\frac{x_1}{\Delta x_1},\quad H'' = H_2 + (H_2 - H_2')\frac{x_2}{\Delta x_2}. \qquad (II.2.17)$$

Подставляя эти величины в систему уравнений (II.2.16) и решая эту систему относительно $L_н$ и $L^0_н$, после алгебраических преобразований получим расчетные формулы

$$L_н = \frac{2H^0 - H' - H''}{I' + I''},\quad L^0_н = \frac{H'' - H'}{I'' + \dfrac{H^0 - H'}{L_н}}. \qquad (II.2.18)$$

При постановке исследований взаимодействия подземных вод с водотоками необходимо учитывать: а) тесную (почти синхронную) связь режима грунтовых вод в прибрежной зоне с режимом водотока, причем в меженный период обычно имеет место стационарное (или квазистационарное) положение уровней грунтовых вод; б) возможность существенных деформаций геофильтрационного потока вблизи водотока в разрезе (из-за гидродинамического несовершенства ложа водотока) и в плане (из-за извилистости русла водотока); в) четко выраженную балансовую связь подземных и поверхностных вод.

Учитывая эти особенности, основной комплекс режимно-балансовых наблюдений вблизи водотоков следует осуществлять в период стационарного режима, соответствующего более или

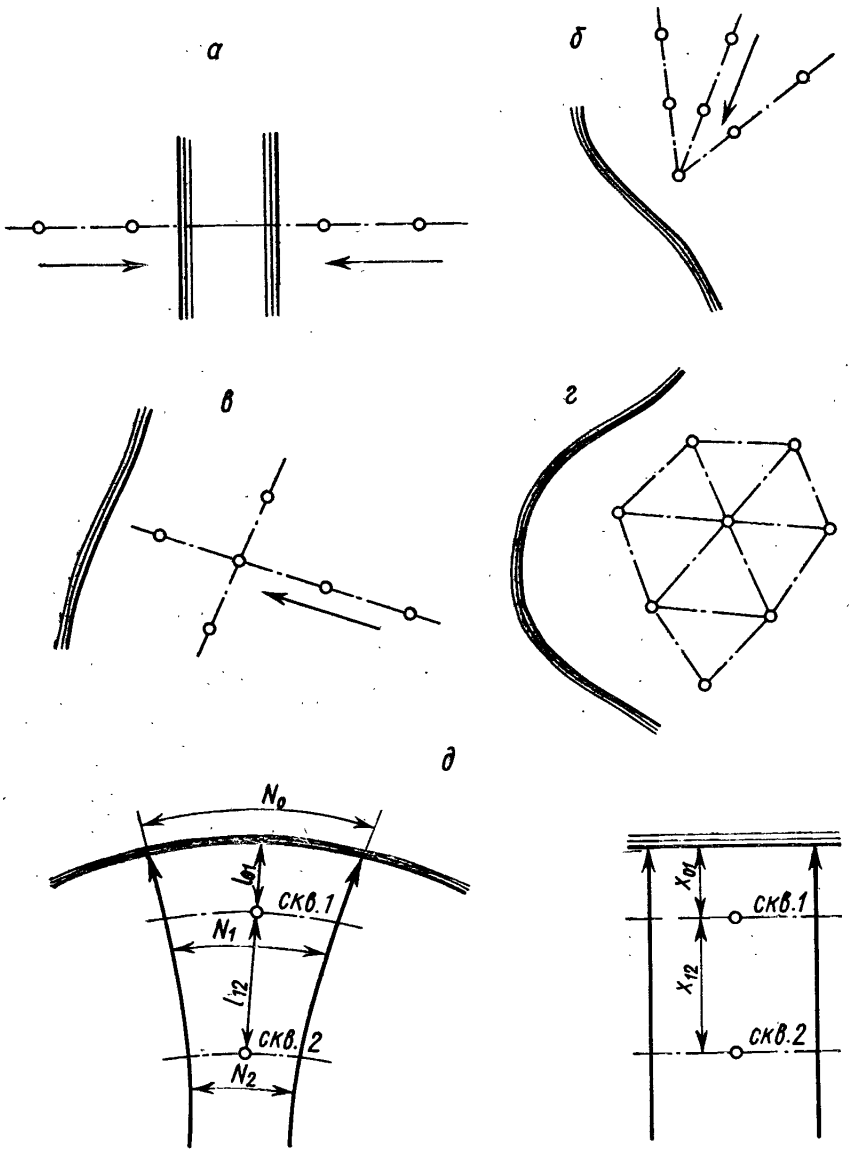


Рис. 36. Плановое расположение наблюдательных скважин для определения сопротивления ложа водоемов:
а — линейные створы при наличии взаимодействия грунтовых вод между берегами водотока; *б* — по схеме «веера»; *в* — по схеме «креста»; *г* — по треугольной сетке; *д* — криволинейная и спрямленная ленты тока вблизи водотока

менее длительному стабильному положению уровней водотока. Для наиболее полного представления о структуре потока целесообразно проводить гидродинамическую съемку, включающую бурение системы пьезометрических скважин с единовременным замером уровней грунтовых вод и гидрометрические работы для определения расходов дренирования и питания подземных вод водотоком. Наиболее эффективна съемка уровней потока за пределами зоны вертикальной деформации, где общие градиенты напора соответствуют уклонам свободной поверхности и, следовательно, съемочные скважины могут буриться только до поверхности грунтовых вод. Рациональные схемы расстановки пьезометров при гидродинамической съемке еще требуют обоснования. Предварительно можно рекомендовать схемы «креста», «веера» и треугольную сетку, приведенные на рис. 36, *б*, *в*, *г*, применяя «крест» и «веер», если ориентировочно известно направление потока (соответственно лучи пьезометров ориентируются именно в этом направлении), а треугольную сетку, — если направление потока заранее предугадать нельзя. Чтобы пьезометры не попадали в зону вертикальной деформации потока, их не следует располагать в непосредственной близости к водотоку. Необходимое удаление пьезометров от водотока зависит от строения потока по вертикали, причем в относительно однородном пласте оно примерно равно его мощности (рис. 37, *а*, *б*), а при наличии слабопроницаемых (глинистых) слоев зона резкой деформации может быть значительно большей (рис. 37, *в*), и в этом случае постановка гидродинамической съемки требует специального обоснования.

После проведения гидродинамической съемки, данные которой должны проходить первичный анализ уже в процессе их получения, строится гидродинамическая сетка потока в плане (гидроизогипсы и линии тока) и выбирается лента тока с тремя расчетными сечениями (см. рис. 36, *д*). Для расчетов удобно привести криволинейную ленту тока к эквивалентному линейному потоку, в котором расчетные расстояния x_{01} и x_{12} определяются из соотношений

$$x_{01} = \frac{2N_0}{N_1 + N_0} l_{01}, \quad x_{12} = \frac{2N_0}{N_1 + N_2} l_{12}. \qquad \text{(II.2.19)}$$

После перехода к линейному потоку расчеты расходов потока и параметров сопротивления ложа водотока ведутся по приведенным выше зависимостям.

При проведении на участке гидродинамической съемки гидрометрических работ появляется принципиальная возможность непосредственно определить расход грунтовых вод по разнице расходов водотока ΔQ в двух замыкающих створах. Оценить проводимость пласта можно, считая

$$T = \frac{\Delta Q}{\Delta N (I'_{ср} + I''_{ср})}, \qquad \text{(II.2.20)}$$

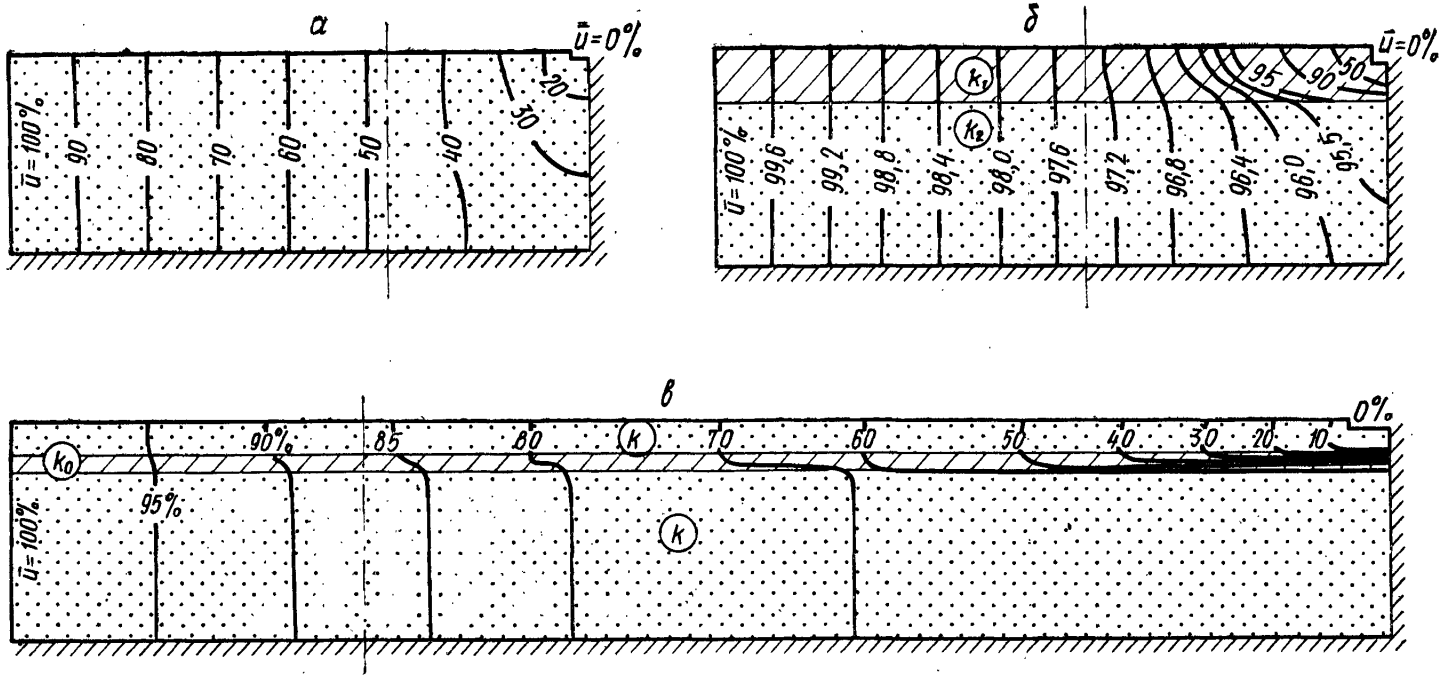


Рис. 37. Гидродинамические сетки фильтрации вблизи водотока (дрены) при различном строении потока: *а* — однородное; *б* — двухслойное при $k_2/k_1=100$; *в* — со слабопроницаемым прослоем при $k_0/k=3\times10^{-3}$ (сплошными линиями показаны эквипотенциали, штрихпунктиром обозначена граница зоны резкой деформации потока).

где ΔN — длина участка водотока между створами, а $I'_{ср}$ и $I''_{ср}$ — средние уклоны грунтовых вод в берегах водотока по нормали к его урезу. При сложных формах потока грунтовых вод вблизи водотока величину $\Delta N(I'_{ср} + I''_{ср})$ следует определять, разбивая водоток на несколько участков и суммируя значения этих величин, найденные для каждого участка водотока. Такого рода расчеты могут применяться, разумеется, лишь при значительных локальных притоках или оттоках подземных вод в пределах участка гидродинамической съемки, поскольку величина ΔQ должна существенно превышать возможные погрешности гидрометрических определений расходов водотока.

§ 2. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ГИДРОСООРУЖЕНИЯМИ

Фильтрационный поток в основании гидросооружения обычно имеет генеральное направление из водохранилища (верхнего бьефа) в нижний бьеф сооружения (плотины, здания ГЭС и т. п.), так что чаще всего этот поток имеет профильный характер. Исключение составляют условия фильтрации в узких горных долинах, где потоки в основании и бортовых примыканиях существенно взаимодействуют друг с другом, образуя сложное пространственное течение.

Изучение фильтрации под сооружениями проводится для определения фильтрационных потерь (расхода потока) из водохранилища, противодавления, передаваемого на тело плотины фильтрационным потоком и фильтрационной устойчивости основания сооружения. Кроме того, при наличии в основании среднерастворимых солей (в частности, гипса) специального анализа требует оценка процессов растворения солей и следующих за этим процессом изменения пород основания.

Для управления фильтрационным потоком под сооружением проектируется его подземный контур (рис. 38), который помимо тела сооружения (флютбета) может включать в себя верховой экран, верховую и низовую противофильтрационные завесы, горизонтальный и вертикальный дренаж под флютбетом или в нижнем бьефе сооружения.

Верховой экран делается чаще всего из суглинка, и его проницаемость задается исходя из фильтрационных свойств этого грунта при заданном способе его укладки.

Противофильтрационные завесы делаются в виде шпунтовой стенки, забиваемой с поверхности земли, или в виде цементационной завесы, устраиваемой путем инъекции цементирующего материала через скважины, причем в качестве таких материалов обычно используются цементы, цементно-глиняные смеси, битумы, силикаты. Противофильтрационные завесы, как правило, не бывают полностью водонепроницаемыми. Проницаемость шпунтовых стенок обусловливается раскрытием их замков и может оцениваться

условным коэффициентом фильтрации $k_{шп}$ фрагмента шпунтовой стенки толщиной 1 м, значения которого практически оказываются в 100—200 раз меньшими коэффициента фильтрации породы. Проницаемость цементационных завес, по данным ВНИИГа [24], оценивается коэффициентом фильтрации $k_з$=0,01—0,1 м/сут. Противофильтрационные завесы могут быть совершенными, если они доводятся до водоупора, и несовершенными, если они не доходят до водоупора.

Дренажи — очень сильное средство управления фильтрационным потоком под сооружением, причем тип и местоположение

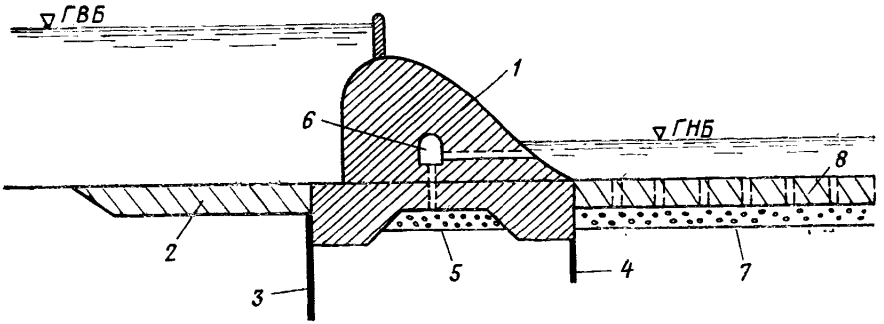


Рис. 38. Подземный контур гидросооружения (плотины):
1 — тело плотины; *2* — экран; *3* — верховая завеса; *4* — низовая завеса; *5* — дренаж в основании плотины; *6* — дренажная галерея; *7* — дренаж в нижнем бьефе; *8* — водобойная плита

дренажа зависят от геологического строения, основания и задач, решаемых при дренировании потока. В частности, горизонтальный дренаж делается при сравнительно однородном строении основания или при наличии непосредственно под сооружением хорошо проницаемого слоя, а при расположении сооружения на сравнительно слабопроницаемом слое, экранирующем расположенные глубже более проницаемые слои, рационален вариант вертикального дренажа.

Аналитические методы расчетов фильтрации под сооружениями реально применяются при сравнительно простом строении основания, когда оно может быть сведено к однородной или двухслойной схеме. Строгое гидромеханическое решение таких фильтрационных задач основывается обычно на применении метода конформных отображений, впервые примененном для этих целей Н. Н. Павловским [18], а затем развитым другими исследователями [21]. Однако непосредственное применение метода конформных отображений ограничивается сравнительно простыми случаями строения подземного контура, и потому для практических расчетов обычно используются различные приближенные методы, наиболее совершенный из которых — метод фильтрационных сопротивлений, предложенный С. Н. Нумеровым [2] и развитый

для практических целей Р. Р. Чугаевым [28, 29]. Этот метод исходит из того, что поток, двигаясь в основании плотины от верхнего бьефа к нижнему, встречает ряд местных сопротивлений (на вход и выход потока, на преодоление шпунтовой завесы и т. п.), причем участки этих сопротивлений располагаются на достаточно большом расстоянии друг от друга (не менее, чем на половину мощности основания). Тогда можно считать, что местные сопротивления не влияют друг на друга и для каждой зоны местного сопротивления их величины определяются независимо от строения всего подземного контура. Очевидно, что ограничение применимости этого метода относительно большими расстояниями между отдельными элементами подземного контура предопределяет возможность применения метода сопротивлений для сооружений, длина которых по направлению потока, по крайней мере, превосходит мощность водоносных слоев основания сооружения.

Фильтрационный поток под сооружением будем считать профильным (постоянной шириной 1 м в плане). В соответствии с общим определением (I.6.13) фильтрационного сопротивления для каждого участка профильного потока номера i

$$\Phi_i = \frac{\Delta H_i}{q}, \qquad \text{(II.2.21)}$$

где ΔH_i — потери напора на участке сопротивления Φ_i, пропускающем удельный расход q.

При однородном строении основания с коэффициентом фильтрации k удобно пользоваться понятием безразмерного сопротивления

$$\bar{\Phi}_i = k\Phi_i = \frac{k\Delta H_i}{q}. \qquad \text{(II.2.21а)}$$

Для подземных контуров без внутреннего дренажа суммарная разница напоров в верхнем и нижнем бьефах ΔH составляется из потерь на отдельных участках контура, т. е. выражение для удельного расхода потока под сооружением

$$q = \frac{\Delta H}{\Phi_{\text{сум}}} = \frac{k\Delta H}{\bar{\Phi}_{\text{сум}}}, \qquad \text{(II.2.22)}$$

причем суммарные сопротивления подземного контура $\Phi_{\text{сум}}$ или $\bar{\Phi}_{\text{сум}}$ складываются из сопротивлений Φ_i или $\bar{\Phi}_i$ отдельных зон локальных сопротивлений основания, а потери напора ΔH_i в каждой зоне будут пропорциональны соответствующим сопротивлениям:

$$\Delta H_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_{\text{сум}}}\,\Delta H. \qquad \text{(II.2.23)}$$

Выражения для безразмерных фильтрационных сопротивлений различных локальных зон потока, полученных путем гидрав-

лического и гидромеханического анализов соответствующих фрагментов потока, приведены в работах С. Н. Нумерова [2] и Р. Р. Чугаева [28].

Нередко встречается случай двухслойного строения основания сооружения, когда сверху залегает слабопроницаемый слой, экранирующий расположенный под ним более проницаемый слой (рис. 39). В этом случае, впервые рассмот-

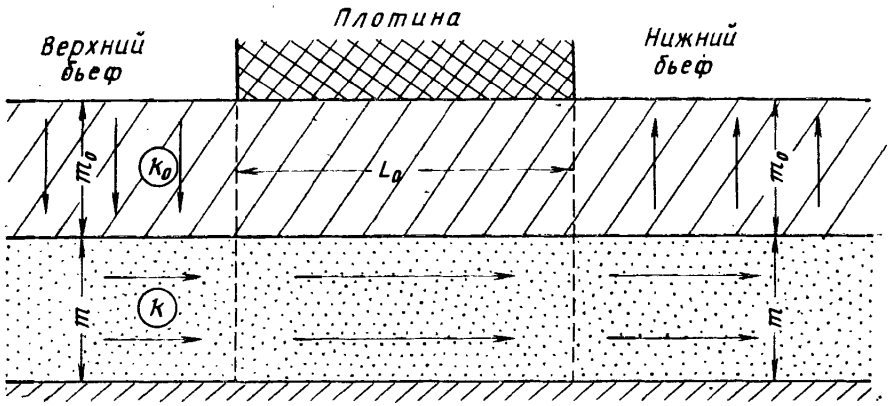


Рис. 39. Поток под плотиной при двухслойном строении основания

ренном Г. Н. Каменским [11], сопротивления входного и выходного участков получаются из решения для экранированного водоема бесконечной ширины, причем согласно (II.2.6) при $T=km$ имеем

$$\Phi_{вх}=\frac{H_0-H^0}{q_0}=\frac{\Delta L}{km};\ \bar{\Phi}_{вх}=\frac{\Delta L}{m}, \qquad (II.2.24)$$

где величина ΔL определяется из (II.2.7). Расчетное значение T в формуле (II.2.22) берется равным km, поскольку проводимостью верхнего слоя здесь можно пренебречь.

При оценке фильтрационной прочности основания сооружения прежде всего производится проверка возможности появления фильтрационных деформаций на выходе потока в нижний бьеф. Для исключения таких фильтрационных деформаций необходимо, чтобы максимальный выходной градиент потока в нижнем бьефе не превышал допустимого градиента, величина которого устанавливается для различных пород в зависимости от характерного для них вида фильтрационных деформаций [24, 28, 32].

Кроме расчетов общей и местной устойчивости основания Р. Р. Чугаев [28] предлагает проверять его общую фильтрационную прочность по величине среднего (контролирующего) градиента напора $I^k=q/T$, где T — суммарная проводимость пластов в основании. Учитывая неоднородность строения основания, неполноту его изученности, а также возможные нарушения технологии строительства, Р. Р. Чугаев устанавливает допустимое значение контролирующего градиента $I^k_{доп}$ путем анализа состояния по-

строенных сооружений (в том числе потерпевших аварию), причем для подземного контура с низовой завесой рекомендуются значения $I^k_{доп}$, приведенные ниже, а при отсутствии низовой завесы эти значения уменьшаются на 20%:

Класс сооружения	Глина	Суглинок	Среднезернистый песок	Мелкозернистый песок
I и II	0,5	0,25	0,2	0,15
III	0,6	0,3	0,24	0,18

Дальнейшее развитие такого подхода, несомненно, должно идти по пути более глубокого выявления возможных связей фильтрационных деформаций основания с особенностями его геологического строения.

При наличии в основании сооружения растворимых пород (гипсы, ангидриты, кальциты) фильтрационными расчетами должно быть получено распределение скоростей фильтрации, характеризующих интенсивность конвективного переноса при выщелачивании этих пород [17].

Глава 3

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При создании сплошной электрической модели в первую очередь обосновывается выбор ее материала. Модель области фильтрационного потока может быть изготовлена из различных токопроводящих материалов, к которым предъявляются следующие требования: а) однородность; б) стабильность электрических свойств; в) отсутствие побочных процессов, искажающих электрическое поле; г) оптимальное удельное сопротивление (не слишком малое, чтобы можно было достаточно точно проводить измерение электрического поля, и не слишком большое, чтобы не создавать ощутимых потерь в подводящей сети). В настоящее время наиболее распространены модели из электропроводной бумаги и электролитов, причем бумажные модели, как правило, применяются только для моделирования плоских потоков, а электролитические модели чаще используются при создании пространственных моделей. Кроме бумаги и электролитов в качестве материала модели используются и другие материалы, например агар-агар, электропроводные краски, клей, смесь порошка графита с порошком мрамора или песком, электропроводный картон, гипс. Вопросы технологии изготовления сплошных электрических моделей изложены, например, в работах [10, 14, 26].

Определение приведенного потенциала на моделях ЭГДА, как правило, производится с помощью мостовой измерительной схемы, принцип построения которой показан на рис. 40. Для осуществления этой схемы параллельно с моделью присоединяется образцовый делитель (агометр), состоящий из магазинов сопротивлений или реостатов.

Агометр имеет подвижной контакт, который через индикатор нуля и измерительную иглу подсоединяется к модели. Если игла устанавливается в такой точке модели, что индикатор показывает нулевое положение, то потенциалы — замеряемый на модели и имеющий место на подвижном контакте — будут равны между собой. Зная сопротивления R и полное сопротивление делителя R_0, найдем значение замеряемого приведенного потенциала $\bar{U} = \frac{R}{R_0}$.

Простейшими индикаторами нуля в цепях постоянного тока являются различные системы гальванометров, а в цепях переменного тока добавляется выпрямительная система или используется осциллограф [10, 14].

Линии тока чаще всего строятся графически после получения эквипотенциалей, причем в первом приближении построение линий тока производится «на глаз», исходя из условия ортогональности линий тока и эквипотенциалей, а затем их положение уточняется проверкой условия конформности участков каждой ленты тока — (I.5.5) или (I.5.6). Линии тока на модели ЭГДА могут быть построены и непосредственно путем решения так называемой обращенной задачи, когда в качестве функции выбирается функция тока [10, 14]. Однако практически этим приемом пользуются редко, поскольку более простой графический способ обычно обеспечивает достаточную точность построения линий тока.

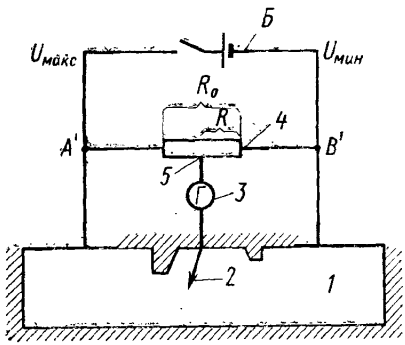


Рис. 40. Измерительная схема модели ЭГДА на постоянном токе: *1* — модель; *2* — измерительная игла; *3* — гальванометр; *4* — реостат-агометр; *5* — подвижной контакт агометра

В качестве сеточных электроинтегралов для решения гидрогеологических задач чаще всего применяются электроинтеграторы ЭИ-12 и МСМ-1 [14, 37], основную часть которых составляет двухкоординатная сетка сопротивлений. Питание этих интеграторов осуществляется переменным током, а измерения потенциалов производятся по компенсационной схеме, принцип устройства которой описан выше применительно к сплошным моделям ЭГДА.

Простота конструкции электроинтегратора резисторного типа (составленного из активных сопротивлений — резисторов) позволяет сравнительно несложно изготавливать самодельные электроинтеграторы, особенно на базе электрических схем серийно вы-

пускаемых приборов ЭГДА (например, ЭГДА 9/60). Кроме того, известны примеры изготовления крупных резисторных интеграторов, рассчитанных на несколько тысяч узловых точек [14].

§ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

2.1. Сплошные модели

Для обоснования условий построения сплошных электрических моделей профильных потоков сопоставим выражение для расхода Q профильного потока шириной B и толщиной 1 м с выражением для силы тока I на аналогичном участке модели шириной $B_м$ с удельным сопротивлением модели $\rho_м$ [1]:

$$Q = kB\frac{\Delta H}{\Delta l}\ \text{(а)}, \quad I = \frac{1}{\rho_м} B_м \frac{\Delta U_м}{\Delta l_м}\ \text{(б)}, \qquad \text{(II.3.1)}$$

причем ΔH — потери напора на участке потока длиной Δl, соответствующие разнице потенциала ΔU на участке модели длиной $\Delta l_м$.

Очевидно, что в этом случае аналогом коэффициента фильтрации k является обратная величина удельного сопротивления модели $\frac{1}{\rho_м}$, т. е.

$$k = \alpha_k \frac{1}{\rho_м}, \quad \rho_м = \alpha_k \frac{1}{k}, \qquad \text{(II.3.2)}$$

где α_k — масштаб коэффициента фильтрации.

Вводя далее масштаб напоров

$$\alpha_н = \frac{\Delta H}{\Delta U},$$

линейный масштаб модели $\alpha_l = l/l_м = N/N_м$ и масштаб расхода потока $\alpha_Q = Q/I$, представим (II.3.1а) в виде

$$\alpha_Q I = \alpha_k \cdot \frac{1}{\rho_м} \cdot \alpha_l N_м \frac{\alpha_н \Delta U}{\alpha_l \Delta l_м}. \qquad \text{(II.3.3)}$$

Сопоставляя выражения (II.3.3) и (II.3.1б), установим, что для тождественного перехода одного в другое масштаб расхода профильного потока должен определяться формулой

$$\alpha_Q = \alpha_k \alpha_н. \qquad \text{(II.3.4)}$$

При моделировании непроницаемых противофильтрационных (шпунтовых или цементационных) завес на бумажных моделях

[1] Заметим, что для бумажных моделей $\rho_м$ представляет собой сопротивление квадрата листа модели, а для электролитических моделей $\rho_м = \rho/\delta_м$, где ρ — удельное сопротивление электролита, а $\delta_м$ — толщина слоя электролита на модели.

профильного потока делаются прорези, а на электролитических моделях устанавливаются непроницаемые перегородки (обычно из целлулоида).

Более сложно моделируются завесы при необходимости учета их проницаемости, которая обычно характеризуется расчетным коэффициентом фильтрации завесы $k_з$ (см. § 2 главы 2). В этом

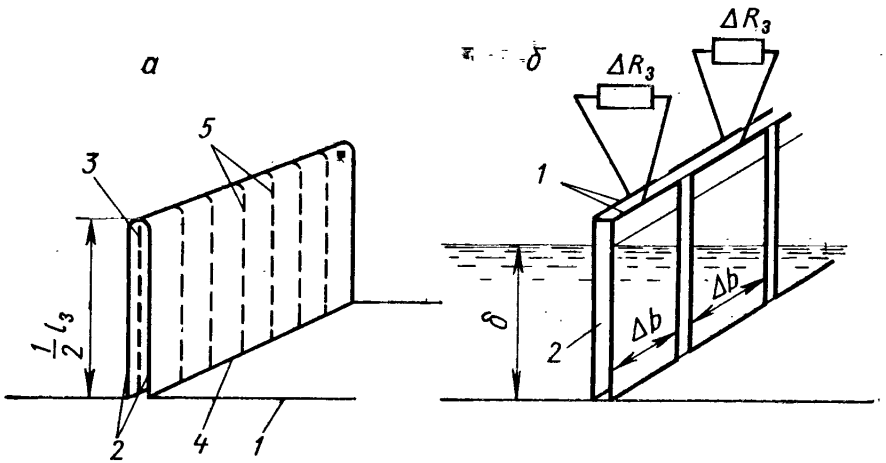


Рис. 41. Задание проницаемых завес:
а — на бумажной модели (*1* — лист модели; *2* — лист длиной $\delta_з$, моделирующий завесу; *3* — изолирующая прокладка; *4* — клеевые швы; *5* — прорези); *б* — на электролитической модели (*1* — шины; *2* — непроницаемая стенка)

случае на бумажной модели по линии завесы делается прорезь, края которой соединяются между собой листом бумаги удельного сопротивления $\rho_з$ (рис. 41, *а*), длина которого $l_з$ определяется приведенной толщиной завесы $\delta_з^0$, причем

$$l_з = \frac{\rho}{\rho_з}\delta_з^0, \quad \delta_з^0 = \frac{k}{k_з}\delta_з, \tag{II.3.5}$$

где $k_з$ принимается согласно рекомендациям, приведенным в § 2 главы 2.

На электролитической модели проницаемые завесы можно моделировать непроницаемой стенкой, на которую наклеиваются пластины, соединяемые через сопротивления $\Delta R_з$ (рис. 41, *б*), определяемые по формуле

$$\Delta R_з = \frac{\rho_э}{\delta_э} \cdot \frac{l_з^0}{\Delta N_з}, \tag{II.3.6}$$

где $\Delta N_з$ — длина завесы (по ее фронту), приходящаяся на данное сопротивление; $\rho_э$ — удельное сопротивление и $\delta_э$ — толщина слоя электролита в данном месте.

Для моделирования слоев с разной проницаемостью в соответствующие участки модели заливаются электролиты различной

концентрации, подбираемой из условия обратной пропорциональности удельного сопротивления коэффициентам фильтрации соответствующих слоев.

2.2. Сеточные модели

При составлении сеточной фильтрационной схемы профильные потоки обычно разбиваются на отдельные блоки вертикальными и горизонтальными сечениями, образуя прямоугольную сетку с размерами блоков $\Delta x'$ и $\Delta y'$ по осям x и y (рис. 42, *а*).

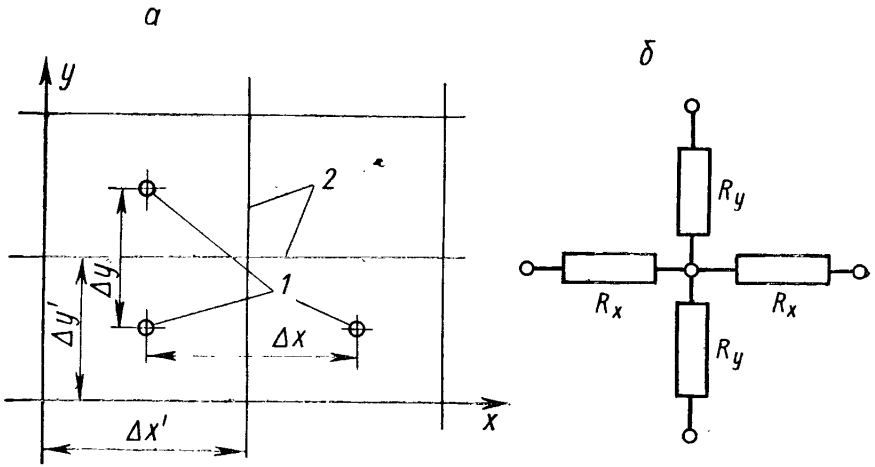


Рис. 42. Построение плоских прямоугольных сеток:
а — сеточная разбивка плоского потока на прямоугольные блоки (*1* и *2* — узловые точки и границы блоков); *б* — узел электрической сетки

Фильтрационные сопротивления Φ_x и Φ_y, связывающие блоки по осям x и y, в соответствии с общим выражением (I.6.13) определятся здесь выражениями

$$\Phi_x = \frac{\Delta x}{k_x \Delta y'}, \quad \Phi_y = \frac{\Delta y}{k_y \Delta x'}, \tag{II.3.7}$$

где Δx и Δy — расстояния между узловыми точками; k_x и k_y — коэффициенты фильтрации соответственно в направлениях x и y; естественно, что при равномерной разбивке $\Delta x = \Delta x'$ и $\Delta y = \Delta y'$.

Сеточная электрическая модель такой системы будет состоять из ортогональных сопротивлений R_x и R_y (рис. 42, *б*), определяемых из условия

$$R_x = \alpha_R \Phi_x, \quad R_y = \alpha_R \Phi_y, \tag{II.3.8}$$

где α_R — масштаб электрических сопротивлений, выбираемый таким образом, чтобы рассчитанные согласно (II.3.8) значения R_x и R_y хорошо укладывались в диапазон сопротивлений, устанавливаемых на интеграторе.

Особенно рационально использование сеточных интеграторов для моделирования четко выраженных слоистых систем, допускающих применение предпосылки перетекания. Для этого слоистый поток (рис. 43, *а*) разбивается на блоки вертикальными сечениями, проводимыми на расстоянии $\Delta x'$ друг от друга (величины $\Delta x'$ обычно выбираются так, чтобы между границами потока распо-

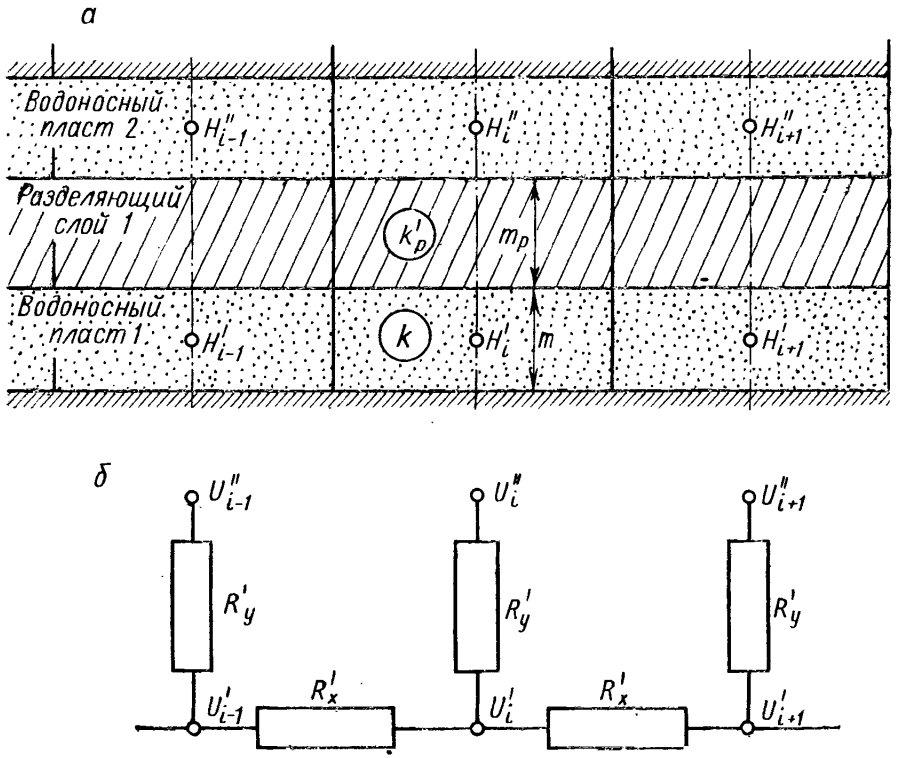


Рис. 43. Построение сеточной модели взаимодействующих водоносных пластов для решения обратной задачи:
а — строение водоносного комплекса; *б* — схема электрической модели

лагалось не менее 5—10 блоков). Горизонтальные границы блоков проводятся по подошве и кровле разделяющих слоев, поскольку принимается, что изменения напоров по вертикали происходят только в пределах разделяющих слоев.

Системы фильтрационных сопротивлений для такого потока будут состоять из горизонтальных сопротивлений Φ_x в водоносных слоях и вертикальных сопротивлений Φ_y в разделяющих слоях, при определении которых в формуле (II.3.7) следует положить $\Delta y' = m$, $k_x = k$, $\Delta y = m_p$, $k_y = k_p$, т. е. считать

$$\Phi_x = \frac{\Delta x}{km} = \frac{\Delta x}{T}, \quad \Phi_y = \frac{m_p}{k_p \Delta x'}, \qquad \text{(II.3.9)}$$

где T — проводимость водоносного слоя. Сеточная электрическая модель такой системы будет состоять из ортогональных сопротивлений R_x и R_y (рис. 43, *б*), определяемых формулой (II.3.8). Таким образом, в основе электроинтегратора также заложен метод электрогидродинамической аналогии, однако в качестве природного аналога электрической сетки используется блочная (сеточная) схема фильтрационного потока.

Весьма эффективно применение сеточных моделей для решения обратных задач в слоистых системах, когда по данным стационарного режима напора в различных водоносных слоях (горизонтах) определяются соответствующие им значения коэффициентов фильтрации разделяющих слоев. С этой целью поток также разбивается на блоки вертикальными сечениями; разбивку рекомендуется производить относительно равномерно, но так, чтобы наблюдательные скважины по возможности приурочивались к центрам блоков (узловым точкам).

Порядок решения такой задачи рассмотрим сначала для наиболее простой схемы водоносного пласта, подстилаемого водоупором и перекрываемого разделяющим слоем (слой 1 на рис. 43, *а*), над которым располагается водоносный пласт 2, причем по данным наблюдательных скважин достаточно подробно известны напоры в обоих водоносных пластах.

Решением обратной задачи могут быть получены только соотношения между коэффициентами фильтрации водоносных и разделяющих слоев, поэтому значения проводимости T водоносного пласта должны быть предварительно заданы по опытным опробованиям пласта или, в крайнем случае, по литературным данным. Значения же коэффициентов фильтрации разделяющих слоев k_p в первом приближении задаются на основании простейших балансовых расчетов или из общих соображений. При заданных таким образом значениях параметров и определенной разбивке потока на блоки определяются фильтрационные сопротивления по формулам (II.3.9), после чего составляется схема электрических сопротивлений, рассчитываемых при выбранном масштабе сопротивлений согласно (II.3.8).

Зная диапазон изменения напоров в моделируемой системе, задают значения минимального и максимального напоров ($H_{мин}$ и $H_{макс}$), после чего по общей формуле (I.6.12) определяют потенциалы $\bar{U}''$, задаваемые в узловых точках на концах вертикальных сопротивлений в соответствии с напорами H'' в центральных соответствующих блоках верхнего водоносного пласта 2 верхний слой выступает, таким образом, в роли верхней границы потока. По той же формуле подсчитывают значения относительных потенциалов $\bar{U}'$, соответствующие наблюдаемым значениям напоров H' в центрах блоков исследуемого водоносного пласта. Так же находят значения потенциалов на левой и правой границах исследуемого водоносного пласта, соответствующие напорам на этих границах. Задавая далее в электрической модели на концах сопротивлений R'_y потенциалы $\bar{U}''$, а на боковых границах — граничные потенциалы, постепенно подбирают затем величины вертикальных сопротивлений R'_y таким образом, чтобы значения относительных потенциалов $\bar{U}'$, полученные в узловых точках модели исследуемого пласта, достаточно близко совпадали с их значениями, подсчитанными по наблюдаемым напорам H'.

Для системы, состоящей из нескольких водоносных пластов, решение такой задачи рекомендуется проводить последовательно (снизу вверх) для каждого водоносного пласта. Первым рассмат-

ривается нижний водоносный пласт по изложенной выше схеме, а затем моделируется следующий по высоте водоносный пласт, для которого уже вертикальные сопротивления задаются не только сверху, но и снизу, причем нижние сопротивления устанавливаются по значениям $k_р$, подобранным в предыдущем опыте, а верхние подбираются; на концах нижних и верхних сопротивлений задаются значения потенциалов, подсчитанные по напорам, замеренным в соответствующих блоках верхнего и нижнего граничных пластов.

При решении таких задач для систем взаимодействующих пластов на водораздельных массивах следует учитывать закономерное увеличение проницаемости водоносных и разделяющих пластов от водораздела к речным долинам [5, 34].

2.3. Особенности моделирования безнапорных профильных потоков

Специфика решения профильных задач безнапорной фильтрации сказывается прежде всего в необходимости задания свободной поверхности фильтрационного потока. Если пренебречь влиянием капиллярных сил, то свободная поверхность совпадает с кривой депрессии, на которой выполняется условие (I.4.19), причем плоскость сравнения напоров ($z=0$) обычно задается на отметке минимального напора и тогда $H_{мин}=0$. Поскольку в стационарной фильтрации кривая депрессии является, кроме того, линией тока, то бумажная модель вдоль кривой депрессии обрезается; на электролитической модели по кривой депрессии устанавливается либо гибкий изолятор (целлулоид), либо стенка из воска и парафина.

Построение кривой депрессии осуществляется на электрических моделях подбором. В первом приближении кривая депрессии задается произвольно; на бумажной модели рекомендуется задавать ее положение с завышением, а на жидкостной модели с парафиновой (восковой) границей — с занижением. Сняв с модели ЭГДА потенциалы вдоль свободной поверхности и определив по формуле (I.6.11) значения напоров H, следует сравнить их с соответствующими величинами ординат свободной поверхности. Если оказывается, что $z<H$, то кривую депрессии в этом месте нужно несколько поднять, а при $z>H$, наоборот, отпустить. Поправив таким образом кривую депрессии, проводят моделирование во втором приближении и снова сопоставляют напоры на свободной поверхности H с ее ординатами z. Обычно достаточно двух-трех приближений для того, чтобы достигнуть хорошего их совпадения.

При наличии капиллярной каймы эффективной высоты $h_к$ на свободной поверхности выполняется условие (I.4.24), а в остальном порядок ее подбора остается тем же. При этом кривая депрессии, на которой давление равно атмосферному, находится как линия с $H=z$ (рис. 44, *а*).

При моделировании инфильтрации заданной интенсивности w необходимо осуществить подачу соответствующей силы тока на линию свободной поверхности. На бумажных моделях ЭГДА это можно сделать подклеиванием к линии свободной поверхности полос электропроводной бумаги длиной l_w

(рис. 44, *б*) и удельным сопротивлением ρ_w, к свободному концу которых подводится потенциал U_w.

Сила тока I_w, проходящая через такую полоску шириной $b_м$, будет

$$I_w = \frac{U_w - U_{сп}}{\rho_w l_w} b_м, \qquad (II.3.10)$$

где $U_{сп}$ — потенциал на свободной поверхности. Соответствующий ей инфильтрационный расход Q_w на аналогичном участке шириной в натуре b будет $Q_w = \omega b$. Поскольку $Q_w = \alpha_Q I_w$, то выражение (II.3.10) представится в виде

$$\frac{wb}{\alpha_Q} = \frac{U_w - U_{сп}}{\rho_w l_w} b_м \qquad (II.3.10а)$$

или с учетом (II.3.4), имея в виду, что $\alpha_h = \rho k$ и $\alpha_H = \frac{\Delta H_{макс}}{\Delta U_м}$, составим выражение для l_w:

$$l_w = \frac{k}{w} \cdot \frac{\rho}{\rho_w} \cdot \frac{\Delta H_{макс}}{\alpha_l} (\bar{U}_w - \bar{U}_{сп}). \qquad (II.3.11)$$

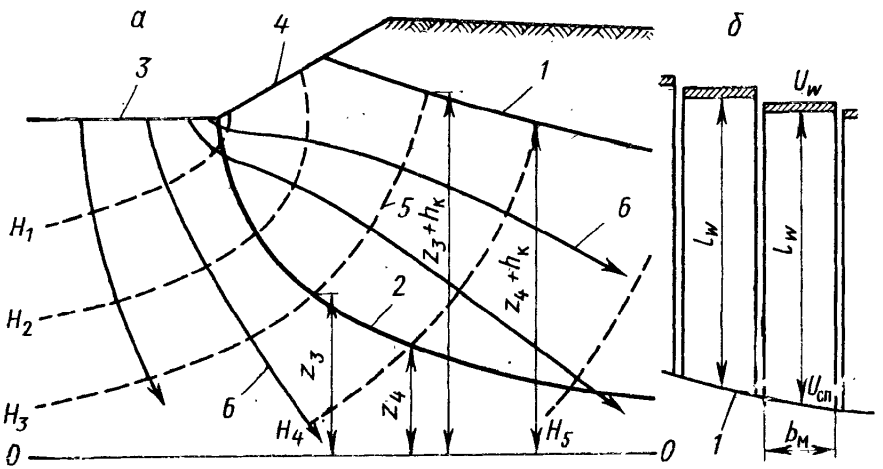


Рис. 44. Моделирование профильного безнапорного потока:
а — гидродинамическая сетка потока с капиллярной каймой вблизи канала с нулевой глубиной воды (*1* — поверхность капиллярной зоны, *2* — свободная поверхность, *3* и *4* — дно и откосы водоема, *5* — линии равного напора, *6* — линия тока); *б* — дополнительные листы для задания инфильтрации

Бумажное сопротивление длиной l_w можно заменить любым сопротивлением R_w, величина которого согласно (II.3.11) должна быть

$$R_w = \frac{k}{w} \cdot \rho \cdot \frac{\Delta H_{макс}}{b} (\bar{U}_w - \bar{U}_{сп}). \qquad (II.3.11а)$$

При моделировании испарения с использованием электрической схемы, имеющейся непосредственно на приборе ЭГДА, на шкале прибора должны быть размещены разность потенциалов $\Delta U^0_м$, действующая на модели, и разность потенциалов ΔU_w, обеспечивающая подачу необходимой силы тока, так что величины $\Delta U^0_м$ и ΔU_w будут одного порядка. Поэтому изменение потен-

циала на депрессионной кривой в процессе решения задачи ведет к заметному изменению ΔU_w в каждой точке свободной поверхности, что, в свою очередь, влечет за собой искажение заданного природного испарения, так что по ходу решения задачи возникает необходимость корректировки разности потенциалов на конце полос. Этого недостатка в технике моделирования можно избежать, если к прибору ЭГДА последовательно подключить дополнительный источник тока с напряжением, в несколько раз превышающим напряжение на приборе ЭГДА [14, 26].

Аналогичным образом можно моделировать инфильтрацию на сеточных моделях, задавая на свободной поверхности инфильтрационные сопротивления R_w, определяемые по формуле (II.3.11а) при $b=\Delta x$ (Δx — размер блока по горизонтали).

Для потока кусочно-переменной плотности характерно, кроме того, моделирование границы раздела между зонами с различной плотностью воды, где в общем случае должно выполняться условие разрыва напоров (II.1.41). Соответственно на электрической модели по линиям таких границ раздела должен устанавливаться аналогичный перепад потенциала, причем поиск положения таких границ приходится производить постепенным подбором [14].

§ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

3.1. Критерии подобия

Для обоснования основных положений методики моделирования стационарной плановой фильтрации сопоставим прежде всего выражение для расхода Q в элементе планового потока шириной N и длиной Δl, исходя из формулы (II.1.1) для удельного расхода, с выражением для силы тока I в аналогичном элементе модели шириной $N_м$ и длиной $\Delta l_м$:

$$Q = TN\frac{\Delta H}{\Delta l}\ \text{(а)},\quad I = \frac{1}{\rho_м}N_м\frac{\Delta U}{\Delta l_м}\ \text{(б)}. \qquad \text{(II.3.12)}$$

Из сопоставления этих выражений видно, что при моделировании планового потока удельная проводимость модели $c_м = \frac{1}{\rho_м}$ является аналогом проводимости пласта T (а не коэффициента фильтрации, как это было в случае пространственного или профильного потоков). Кроме того, остается в силе соответствие изменений напоров ΔH изменению электрических потенциалов ΔU и необходимость геометрического подобия модели и фильтрационного потока в плане. Исходя из этого введем масштабные коэффициенты, позволяющие перейти от характеристик фильтрационного потока к характеристикам электрического поля:

$$T = \alpha_T\frac{1}{\rho_м};\quad \frac{N}{N_м} = \frac{\Delta l}{\Delta l_м} = \alpha_l;\quad \Delta H = \alpha_H\,\Delta U, \qquad \text{(II.3.13)}$$

где α_T — масштаб проводимостей; α_l — линейный масштаб модели; α_H — масштаб напоров, определяемый согласно (I.6.9).

Подставим фильтрационные характеристики, выраженные через масштабы согласно (II.3.13), в выражение (II.3.12а), обозначая через α_Q — масштаб расходов:

$$\alpha_Q I = \alpha_T \frac{1}{\rho_м} \alpha_l N_м \frac{\alpha_H \Delta U}{\alpha_l \Delta l_м}. \qquad (II.3.14)$$

Сопоставляя выражения (II.3.14) и (II.3.12б), можно видеть, что они тождественно переходят друг в друга при условии

$$\alpha_Q = \alpha_T \alpha_H, \qquad (II.3.15)$$

которое является критерием подобия для планового потока.

Таким образом, модель планового потока должна составляться так, чтобы удельное сопротивление модели было обратно пропорциональным суммарной проводимости пласта в данном сечении.

Технически изменение проводимости пласта на моделях из электропроводной бумаги осуществляется параллельным склеиванием листов бумаги одинаковой или различной проводимости. Суммарная проводимость системы из нескольких листов определится при этом как сумма проводимостей отдельных листов (с учетом клея). На электролитических моделях при сравнительно небольшом изменении проводимости этот фактор можно учесть, изменяя мощность слоя электролита, для чего дно модели делается из пластилина, воска или других пластичных материалов.

При моделировании планового потока на сеточном электроинтеграторе разбивка блоков в плане производится, как правило, прямоугольной сеткой с шагами Δx и Δy (см. рис. 42, *а*), а значения сопротивлений Φ_x и Φ_y в направлениях x и y определяются по формулам

$$\Phi_x = \frac{\Delta x}{T \Delta y'}, \quad \Phi_y = \frac{\Delta y}{T \Delta x'}, \qquad (II.3.16)$$

которые несложно получаются из общего выражения (I.6.13).

Электрические сопротивления задаются далее подобными подсчитанным фильтрационным сопротивлениям.

Задание проводимостей безнапорного планового потока несколько осложняется тем, что их величины зависят от положения уровней грунтовых вод. Поэтому в общем случае моделирование безнапорного планового потока должно осуществляться подбором, причем в первом приближении значения проводимости пласта задаются при ориентировочных значениях уровней грунтовых вод; затем уровни грунтовых вод уточняются по данным моделирования в первом приближении, после чего устанавливаются значения проводимости пласта во втором приближении и так далее до тех пор, пока модельные значения потенциалов не будут соответствовать расчетным уровням грунтовых вод.

3.2. Моделирование площадного питания

Одной из важных особенностей решения плановых задач фильтрации является потребность учета площадного питания — инфильтрации или испарения заданной интенсивности w.

На сеточном электроинтеграторе задание инфильтрации сводится к подаче в каждую узловую точку силы тока I_w, соответ-

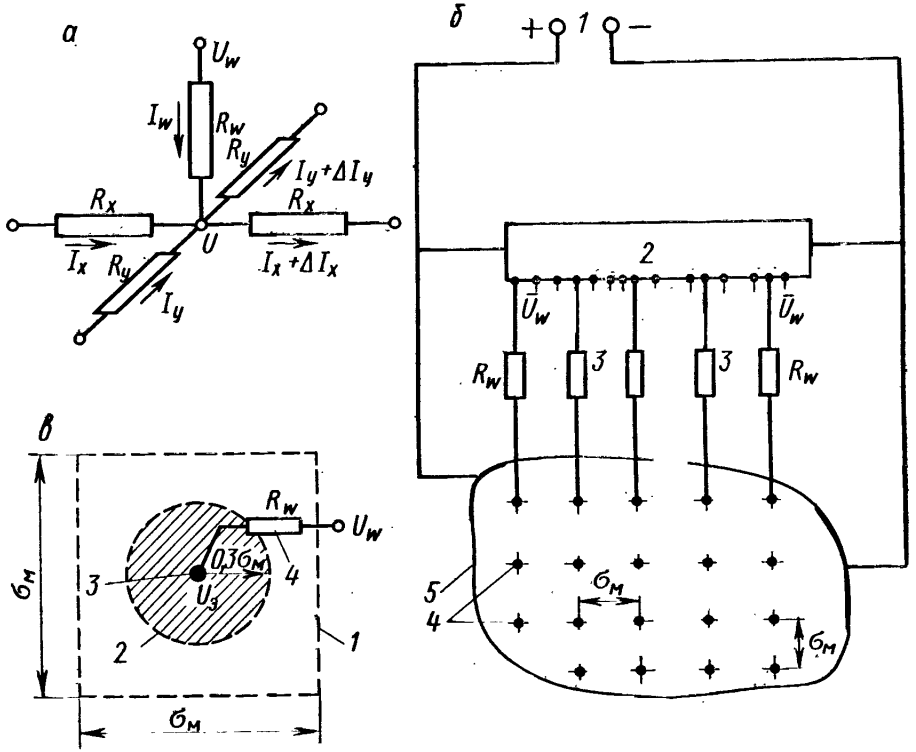


Рис. 45. Задание инфильтрационного питания на электрических моделях:
а — сеточная модель; *б* — сплошная модель из электропроводной бумаги (*1* — источник питания, *2* — делитель напряжения, *3* — инфильтрационные сопротивления, *4* — электроды, *5* — модель); *в* — элемент сплошной модели, относящийся к одному электроду (*1* — границы элемента, *2* — границы внутренней зоны элемента, *3* — электрод, *4* — инфильтрационное сопротивление)

ствующей инфильтрационному расходу $Q_w = wF$, где F — площадь блока фильтрационного потока, относящегося к данной узловой точке. Такую подачу тока можно осуществлять подключением в узловую точку инфильтрационного сопротивления R_w (рис. 45, *а*), по которому проходит ток I_w, подбираемый из условия, что разница потенциалов ΔU_w на этом сопротивлении получается равной

$$\Delta U_w = U_w - U = I_w R_w = \frac{wF}{\alpha_Q} R_w. \qquad (II.3.17)$$

Имея в виду выражение (II.3.15) для масштаба силы тока, представим (II.3.17) в более удобной форме:

$$\Delta\bar{U}_{\text{w}} = \frac{\text{w}FR_{\text{w}}}{\alpha_T \Delta H_{\text{макс}}} = \frac{\text{w}F}{T\,\Delta H_{\text{макс}}} \cdot \frac{R_{\text{w}}}{\rho_{\text{м}}}, \qquad \text{(II.3.18)}$$

где $\rho_{\text{м}}$ — удельное сопротивление модели, соответствующее проводимости потока T.

Для решения прямых задач такое моделирование осуществляется подбором, поскольку разница инфильтрационных потенциалов зависит от неизвестного заранее потенциала в узловой точке модели.

Непосредственное задание инфильтрации на сплошной модели ЭГДА сводится к подаче на модель тока площадной интенсивностью i_{w}, пропорциональной интенсивности инфильтрации w. Поскольку сплошную площадную подачу тока на модель технически осуществить трудно, то обычно эта задача решается приближенно — по схеме, изображенной на рис. 45, *б*, когда ток подается только в отдельные узловые точки, разбиваемые по квадратной сетке; при этом в каждый узел подается сила тока $I_{\text{w}} = i_{\text{w}} F_{\text{м}}$, где $F_{\text{м}}$ — площадь участка модели, относящаяся к этому узлу.

Имея в виду, что $I_{\text{w}} = \text{w}F/\alpha_Q$, где $F = \alpha_l^2 F_{\text{м}}$, и выражая величину α_Q согласно (II.3.15), получим формулу

$$I_{\text{w}} = \frac{\text{w}F}{\alpha_T \alpha_H}. \qquad \text{(II.3.19)}$$

Для регулировки силы тока источника можно использовать реостат с подключенным к нему миллиамперметром [10]. Некоторый недостаток этой схемы заключается в необходимости введения большого количества миллиамперметров. Более удобно регулировку силы тока I_{w} проводить замерами падения потенциала ΔU_{w} на сопротивлении R_{w}, а величину разницы относительных потенциалов $\Delta\bar{U}_{\text{w}} = \frac{\Delta U_{\text{w}}}{\Delta U_{\text{м}}}$ определять по формуле (II.3.18).

Оба изложенных приема требуют производить регулировку силы тока подбором, поскольку ее величина существенно зависит от неизвестного ранее потенциала на модели в данной точке. Для исключения подбора в данном случае также можно применить схему отдельного питания источников с большим напряжением источника питания [10, 14].

Теоретический анализ показывает [14], что для учета погрешности, вносимой дискретным заданием питания в значения потенциала $\bar{U}_{\text{м}}$, замеренного на модели, следует ввести поправку $\Delta\bar{U}$, так что расчетное значение потенциала будет

$$\bar{U} = \bar{U}_{\text{м}} - \Delta\bar{U}, \qquad \text{(II.3.20)}$$

причем во внутренней зоне каждого элемента (при $r_{\text{м}} < 0{,}3\sigma_{\text{м}}$) величина этой поправки определяется по формуле

$$\Delta\bar{U} = \frac{\rho_м}{R_w}\,\Delta\bar{U}_w f(\bar{r}), \quad \bar{r} = \frac{r_м}{r^0_ч}, \qquad \text{(II.3.20а)}$$

где $r_м$ — расстояние от электрода до расчетной точки; $r^0_м = 0{,}56\sigma_м$ — приведенный радиус участка модели, относящегося к электроду (рис. 45, *в*). Определение значения $f(\bar{r})$ можно производить, пользуясь следующими данными:

$\bar{r}$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,55
$f(\bar{r})$	0,37	0,25	0,14	0,08	0,04	0

Во внешней зоне (при $r_м > 0{,}3\sigma_м$) максимальная погрешность за счет дискретности будет оцениваться величиной относительного потенциала

$$\Delta\bar{U}_{макс} = 0{,}05\,\frac{\rho_м}{R_w}\cdot\Delta\bar{U}_w. \qquad \text{(II.3.20б)}$$

При трех-четырех электродах в ряду эта погрешность по отношению к максимальному потенциалу на модели оказывается порядка 2%, т. е. в пределах возможных погрешностей задания тока на модели, поэтому поправку на дискретность задания питания во внешних зонах можно не вводить.

При моделировании линейно-переменного испарения на сплошной модели ЭГДА сопротивления R_w должны определяться с учетом дополнительного сопротивления, возникающего из-за дискретного характера питания [14].

В тех случаях, когда моделируется наложение влияния искусственных факторов (водохранилищ, каналов, дренажей и т. п.) на существующий естественный поток, а интенсивность инфильтрации w остается такой же, как и в естественных условиях, эффективным приемом учета инфильтрации является использование принципа сложения течений (суперпозиции), который обосновывается ниже, в § 1 главы 3, применительно к более общим условиям нестационарной фильтрации. На основании принципа суперпозиции решение инфильтрационной задачи можно представить в виде

$$H = H_w + \Delta H, \qquad \text{(II.3.21)}$$

где H_w — решение инфильтрационной задачи (для заданного распределения w) при любых граничных условиях, а ΔH — решение плановой задачи без инфильтрации, но при граничных условиях, определяемых их разностью для H и H_w. Такой прием [1], естественно, применим только в тех случаях, когда дифференциальные уравнения можно считать линейными, т. е. для потоков постоянной проводимости, однородного на горизонтальном водоупоре и горизонтально-слоистого.

При прогнозе изменения уровней грунтовых вод в случае неизменного инфильтрационного питания в качестве H_w целесообразно принять напоры естественного потока H_e. В такой постановке результирующий поток получается наложением на естест-

[1] Идея такого приема для решения фильтрационных задач была высказана Н. К. Гиринским [7], а практически впервые он применен в работе [3].

венный поток дополнительного, возникающего за счет влияния искусственных факторов; при этом дополнительный поток моделируется без учета инфильтрационного питания, которое автоматически учитывается уровнями естественного потока. В частности, для потока постоянной проводимости в каждой точке напора результирующего потока H находят как сумму напоров естественного потока H_e и дополнительного ΔH, а напоры на границах дополнительного потока соответственно как разность напоров H и H_e на этих границах, причем формы границ принимаются такими, какими они оказываются в условиях результирующего потока. Следует иметь в виду, что применение метода сложения течений не исключает необходимости учета фильтрационной неоднородности потока в плане [34].

Можно рекомендовать следующий порядок расчетов методом сложения течений: 1) строится фильтрационная схема результирующего потока: определяются внешние и внутренние границы потока, задается фильтрационная неоднородность потока в разрезе и плане; 2) по контурам водоемов задаются напоры результирующего и естественного потоков; 3) определяются граничные условия для дополнительного потока, причем форма границ дополнительного потока задается такой же, как для результирующего потока, а напоры на границах с заданным напором определяются как разность напоров результирующего и естественного потоков; 4) с заданными таким образом граничными условиями производится моделирование дополнительного потока, позволяющее определять величины ΔH внутри области фильтрации; 5) суммируя величины H_e и ΔH, получают напоры результирующего потока в любой точке.

Весьма эффективно можно применять моделирование для определения интенсивности инфильтрации по данным режимных наблюдений путем решения обратных задач на плановых моделях. Следует иметь в виду, что на решение обратной инфильтрационной задачи существенно влияет распределение проводимости пласта T в плане, которое должно задаваться по материалам опытно-фильтрационных работ с корректировкой по данным о литологии и механическом составе пород водоносного пласта.

При построении такой модели целесообразно исключать границы, проходящие по рекам, каналам, озерам и прочим водоемам, поскольку на этих границах поток может быть существенно искажен за счет влияния сопротивления ложа таких водоемов. Поэтому вдоль таких границ модель рекомендуется обрезать по линии, на которой по данным наблюдательных скважин может быть задано распределение уровня грунтовых вод.

При решении обратной инфильтрационной задачи на сеточном интеграторе надо стремиться к тому, чтобы центры блоков совпадали (или были близки) с наблюдательными скважинами. При их несовпадении расчетные значения потенциалов в наблюдательных точках (скважинах) приходится находить интерполяцией между их значениями в соседних блоках.

После построения модели следует задаться максимальным и минимальным значениями напора $H_{макс}$ и $H_{мин}$ так, чтобы все напоры потока располагались между этими значениями, и подсчи-

тать значения относительных потенциалов $\bar{U}$ в контрольных точках, соответствующих месту расположения наблюдательных скважин с напором H, по формуле (I.6.12). Далее задача сводится к тому, чтобы, варьируя значения потенциалов U_w, подаваемых на концы питающих сопротивлений, подобрать такую их комбинацию, при которой расчетные значения потенциалов в контрольных точках совпадали с замеренными на модели.

На сплошных моделях для точек, расположенных на расстояниях, меньших 0,3 $\sigma_м$ от электрода, в модельные значения потенциалов должна быть согласно (II.3.20) введена поправка $\Delta\bar{U}$, учитывающая дискретность задания питания на модели, поэтому расчетные значения потенциалов $\bar{U}_м$ на модели, соответствующие истинным значениям потенциалов $\bar{U}$, будут $\bar{U}_м = \bar{U} + \Delta\bar{U}$. Поскольку поправка $\Delta\bar{U}$ зависит от неизвестной заранее величины $\Delta\bar{U}_w$, то решение такой задачи ведется последовательным приближением.

После завершения подбора на модели снимаются значения $\Delta\bar{U}_w$ и величины интенсивности площадного питания w для каждого блока площадью F в соответствии с (II.3.19) подсчитываются по формуле

$$w = \frac{\alpha_T \Delta H_{макс} \Delta\bar{U}_w}{R_w F}. \qquad (II.3.22)$$

При задании питания через сопротивления R_w на сеточной модели величина интенсивности инфильтрации после завершения моделирования подсчитывается по формуле (II.3.22) с заменой α_T на α_Φ.

Для упорядочивания такого подбора можно исходить из представления общего вида решения инфильтрационной задачи в следующей форме:

$$H = H_0 + \Delta H_w, \quad \Delta H_w = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i f_i, \quad \bar{w}_i = \frac{w_i F}{T}, \qquad (II.3.23)$$

где H_0 — распределение напоров при заданных граничных условиях и отсутствии инфильтрации; ΔH_w — изменения напоров за счет инфильтрации при нулевых граничных условиях; f_i — безразмерная функция влияния от действия инфильтрации в каждом i-том блоке; T — любая расчетная величина проводимости пласта. При использовании этого выражения предварительно находят функции влияния в точках расположения наблюдательных скважин от каждого блока в отдельности. Для этого в каждый блок по очереди подается любая сила тока, величина которой регламентируется только тем, чтобы изменения потенциалов ΔU в расчетных точках были удобны для измерения. Поскольку $\Delta U_м = \rho_м I_{w,i} f_i$, где $\rho_м$ — удельное сопротивление модели, соответст-

вующее расчетной проводимости T, то, выражая $I_{w,i}$ через напряжение ΔU_w^0 на сопротивлении $R_{w,i}$ в блоке, получим формулу

$$f_i = \frac{\Delta \bar{U}}{\Delta \bar{U}_w} \cdot \frac{R_w}{\rho_м}. \qquad \text{(II.3.24)}$$

Если задать число искомых значений w_i равным числу точек наблюдений, то, записывая в каждой точке наблюдений выражения для ΔH_w, получим систему линейных уравнений, из которой находятся значения w_i. Если же число точек не соответствует числу блоков, то система либо недо-, либо переопределена и требуется привлечение методов оптимизации решения, использующих представление о функции качества, которая в оптимальном случае должна иметь минимальное значение. Наиболее распространена функция качества, представляющая собой сумму квадратов расхождений натурных и модельных напоров во всех точках наблюдений [14, 15]. Использование методов оптимального поиска требует обычно применения ЭЦВМ.

3.3. Учет гидродинамического несовершенства водоемов и водотоков

При свободной фильтрации, как показано в § 1 главы 2, по площади водоема (водотока) задается инфильтрационное питание, моделирование которого не имеет заметной специфики. Поэтому в дальнейшем будут особо рассмотрены условия подпертой фильтрации у несовершенных границ. Теоретической основой решения таких задач является метод фильтрационных сопротивлений, также разобранный в § 1 главы 2.

Сопротивление ложа крупного водоема учитывается сдвигом уреза водоема и соответственным удлинением потока на величину ΔL. На сплошных бумажных моделях это удлинение реализуется подклеиванием вдоль уреза водоема дополнительного листа бумаги размером $\Delta L/a_l$ и удельным сопротивлением, соответствующим проводимости пласта у уреза водоема. Поскольку поток в этом листе должен идти только по нормали к урезу водоема, то по этому направлению в нем делаются прорези. Если размеры такого листа оказываются слишком большими, то можно поставить бумагу большего сопротивления, пропорционально уменьшив размер модели. В некоторых случаях (особенно при решении обратных задач) целесообразно вместо сплошного дополнительного листа дискретно присоединить вдоль уреза водоема сопротивления ΔR (рис. 46, *а*), причем в общем случае, когда сопротивления ΔR комбинируются с листами бумаги длиной $\Delta L_м$ и удельным сопротивлением $\rho_м^0$,

$$\Delta R = \rho_м \frac{\Delta L}{\Delta N} - \rho_м^0 \frac{\Delta L_м}{\Delta N_м}, \qquad \text{(II.3.25)}$$

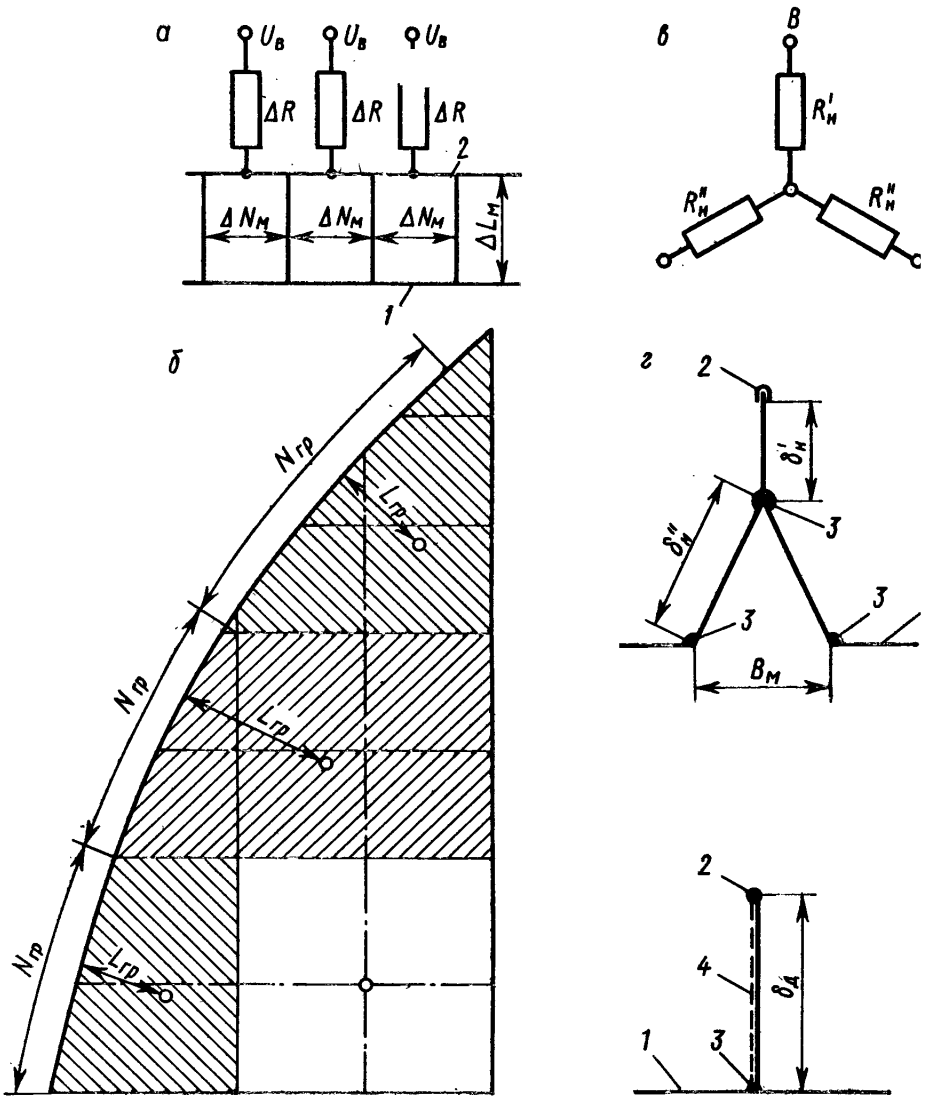


Рис. 46. Построение электрических моделей вблизи контура водоема или водотока:

а — подключение дополнительных сопротивлений на сплошной модели (*1* — контур модели, *2* — край дополнительного листа); *б* — разбивка сеточной модели вблизи контура водоема (заштрихованы граничные блоки с узловыми точками в их центре тяжести); *в* — задание сопротивлений ложа водотока по схеме «звезды» на сеточной модели; реализация схемы «звезды» (*г*) и упрощенной схемы сопротивлений (*д*) водотока или дрены на бумажной модели (*1* — лист модели, *2* — шина с потенциалом водотока, *3* — места склеивания листов бумаги, *4* — крепежный лист бумаги)

где $\Delta N_м$ — расстояние между сопротивлениями ΔR, $\Delta N = \alpha_l \Delta N_м$; $\rho_м$ — удельное сопротивление модели у границы водоема. В случае отсутствия дополнительных листов ($\Delta L_м = 0$) граничные сопротивления подсоединяются через дискретные шины, при задании которых должны выполняться определенные правила [14].

На сеточных моделях, построенных на основе прямоугольной сетки, граничные блоки в общем случае имеют неправильную форму (рис. 46, *б*). Узловые точки таких блоков задаются в их центре тяжести, а граничные сопротивления $R_{гр}$ определяют, считая поток направленным по нормали к граничному контуру, т. е.

$$R_{гр} = \alpha_R \cdot \frac{L_{гр} + \Delta L}{N_{гр}}, \qquad \text{(II.3.26)}$$

где $L_{гр}$ — кратчайшее расстояние от центра граничного блока до контура границы; $N_{гр}$ — ширина граничного контура в пределах блока. Результаты решения тестовых задач показывают, что обычно в граничных блоках имеют место повышенные погрешности моделирования, в связи с чем граничные блоки в модели надо считать «штрафными», т. е. замеры в них не должны использоваться в расчетах.

Учет гидродинамического несовершенства внутренних водотоков осуществляется на сеточных моделях по методу локальных сопротивлений (см. § 1 главы 2), согласно которому под водотоком задаются дополнительные сопротивления по схеме «треугольник». На электрической модели обычно удобнее использовать схему «звезда» (рис. 46, *в*), которая состоит из сопротивлений $R'_н = \alpha_R \Phi'_н$ и $R''_н = \alpha_R \Phi''_н$, причем $\Phi'_н$ и $\Phi''_н$ характеризуются эквивалентными длинами планового потока $L'_н$ и $L''_н$, связанными с эквивалентными длинами $L_н$ и $L^0_н$ соотношениями

$$L'_н = \frac{L^2_н}{2L_н + L^0_н}, \quad L''_н = \frac{L_н L^0_н}{2L_н + L^0_н} \qquad \text{(II.3.27)}$$

На сплошных бумажных моделях эта схема реализуется подклеиванием дополнительных листов (рис. 46, *г*), размеры которых $\delta'_н$, $\delta''_н$ должны быть заданы пропорциональными эквивалентным длинам $L'_н$, $L''_н$, т. е. при удельном сопротивлении листов, равном удельному сопротивлению модели

$$\delta'_н = \frac{L'_н}{\alpha_l}, \quad \delta''_н = \frac{L''_н}{\alpha_l}. \qquad \text{(II.3.28)}$$

При малом размере канала или реки величина горизонтального сопротивления оказывается незначительной, в этом случае может быть использована упрощенная схема с введением одного дополнительного сопротивления $\Phi_{нд} = 0{,}5\,\Phi_н$ (см. рис. 35, *в*), что на бумажной модели ЭГДА реализуется подклеиванием к модели вдоль

линии дрены листа бумаги той же проводимости, что и бумага модели (рис. 46, *в*), размером

$$\delta_{нд} = \frac{L_{нд}}{\alpha_l}; \quad L_{нд} = 0{,}5L_н. \qquad \text{(II.3.29)}$$

Если изменить удельные сопротивления листов, то размеры листов изменятся в обратной пропорции. Подклеивание листов производится обычным электропроводным клеем, для устойчивости

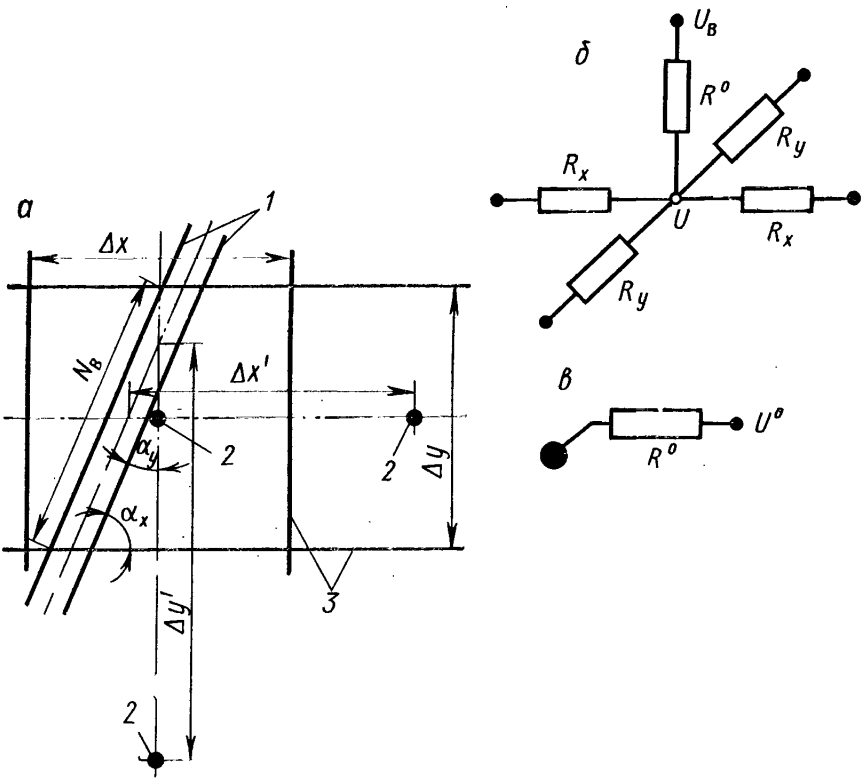


Рис. 47. Задание сопротивления ложа водотока на сеточной модели: *а* — разбивка модели и сетка у водотока на границе потока (*1* — контур водоема, *2* — узловые точки, *3* — границы блоков); *б* и *в* — подключение дополнительных сопротивлений ложа внутреннего водотока

их можно клеить на плотной (неэлектропроводной) бумаге, а для исключения продольных токов следует делать поперечные прорези.

В сеточных моделях сопротивления ложа водотока реализуются по схеме «звезда» подключением в узловую точку дополнительного сопротивления R^0, соответствующего фильтрационному сопротивлению Φ^0, причем

$$\Phi^0 = \frac{L'_н}{TN_в}, \qquad \text{(II.3.30)}$$

а также введением проекций фильтрационных сопротивлений $\Phi''_н$ в сопротивления поля Φ_x и Φ_y, соединяющие блок водотока с соседними блоками, так что здесь горизонтальные сопротивления Φ_x и Φ_y, соединяющие данный блок с соседними, должны определяться по формулам

$$\Phi_x = \frac{1}{T}\left(\frac{\Delta x'}{\Delta y} + \frac{L''_н}{N_в}\sin\alpha_x\right); \quad \Phi_y = \frac{1}{T}\left(\frac{\Delta y'}{\Delta x} + \frac{L''_н}{N_в}\sin\alpha_y\right), \tag{II.3.31}$$

где $\Delta x'$, $\Delta y'$ — расстояния от середины участка до центра соседнего блока; Δx, Δy — ширина блока в соответствующем направле-

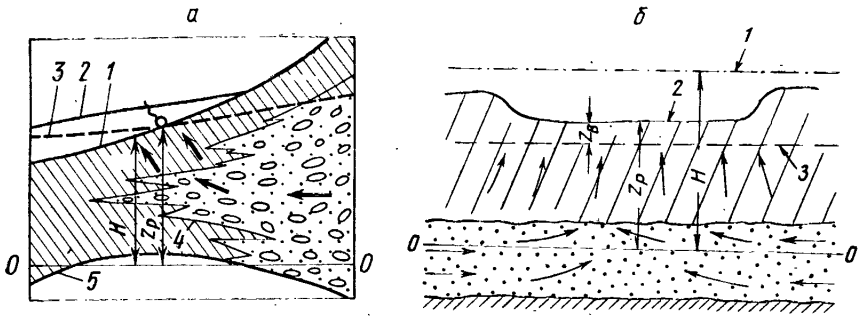


Рис. 48. Зоны внутренней разгрузки:
а — родниковая разгрузка в эрозионной ложбине на поверхности конуса насоса (*1* и *2* — дно и борта эрозионного вреза, *3* — пьезометрический уровень подземных вод, *4* — фациальная граница в водовмещающих отложениях, *4* — кровля водоупора); *б* — разгрузка в солончаковую впадину (*1* — пьезометрическая поверхность, *2* — поверхность земли, *3* — уровни грунтовых вод)

нии; α_x, α_y — углы, составляемые каналом с линией, по которой задается сопротивление; $N_в$ — длина участка водоема в пределах данного блока (рис. 47).

При расчетах сеток сопротивлений на интеграторах учет гидродинамического несовершенства по упрощенной схеме в условиях плановой задачи производится путем добавления в узел блока, включающего дрену, дополнительного электрического сопротивления $R^0 = \alpha_R \Phi_{нд}$ (рис. 47, *в*), причем величина $\Phi_{нд}$ определяется по формуле

$$\Phi_{нд} = \frac{L_{нд}}{TN_д}, \tag{II.3.32}$$

где $N_д$ — длина участка реки или канала в пределах данного блока (для линейных в плане потоков $N_д = 1$ м).

Рассмотрим теперь условия, задаваемые в зонах локальной разгрузки подземных вод, осуществляемой, например, в виде род-

ников (рис. 48, *а*) или путем испарения в солончаковых впадинах (рис. 48, *б*). В таких случаях, считая неизменным сопротивление рассматриваемой зоны разгрузки, получим, что расход разгружающегося потока $Q_р$ будет линейно связан с напором H под этой зоной внутренним условием третьего рода:

$$Q_р = \frac{H - H_р}{\Phi_р}, \qquad \text{(II.3.33)}$$

где $\Phi_р$ — фильтрационное сопротивление зоны внутренней разгрузки потока; $H_р$ — расчетный напор зоны разгрузки, который для родников принимается соответствующим отметке их выхода на поверхность земли ($H_р = z_р$), а для озер — отметке поверхности озера. Близкое условие задается при разгрузке потока в солончаковой впадине, где только условия разгрузки несколько осложняются, поскольку выход потока на поверхность земли происходит в два этапа: перетеканием до поверхности грунтовых вод с последующим испарением до поверхности земли.

При расчетах изменений уровней ΔH исчезновению области разгрузки соответствует ее полная «инверсия», осуществляемая путем задания в месте разгрузки питающего расхода $Q_р^0$, равного полному естественному расходу потока области внутренней разгрузки. Более подробно вопросы моделирования таких зон разгрузки рассмотрены в работе [14].

Раздел III
МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ И МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

При гидрогеологических расчетах процессы нестационарной фильтрации представляют интерес, как правило, при изучении потоков больших размеров в плане. Поэтому рассмотрение основных положений методики расчетов нестационарной фильтрации будем производить прежде всего применительно к плановым потокам, особо выделяя только процессы влагопереноса в зоне аэраций, где движение потока идет в основном по вертикали.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАНОВОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАНОВОГО БЕЗНАПОРНОГО ПОТОКА

Для вывода уравнения планово-плоского потока рассмотрим баланс бесконечно малого элемента потока основанием $dxdy$ и высотой, равной мощности пласта (рис. 49). В этот элемент за время dt попадают расход $q_x dy$ по оси x и расход $q_y dx$ по оси y, которые, выходя из элемента, получают приращения соответственно $\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdy$ и $\frac{\partial q_y}{\partial y} dydx$. Кроме того, в элемент поступает инфильтрационный расход $w dxdy$ (w — интенсивность инфильтрации; см. § 1 главы 5 раздела I); разница поступающих и выходящих расходов идет на приращение объема воды в блоке, интенсивность которого определяется величиной $\mu \frac{\partial H}{\partial t} dxdy$. Следова-

тельно, балансовое уравнение для рассматриваемого элемента будет

$$q_x dy + q_y dx + w dx dy = q_x dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy +$$

$$+ q_y dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy + \mu \frac{\partial H}{\partial t} dx dy. \qquad \text{(III.1.1)}$$

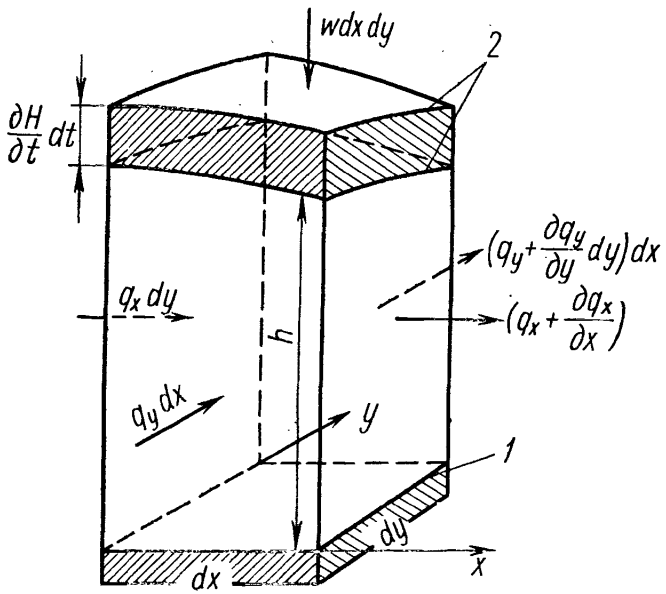


Рис. 49. Бесконечно малый элемент безнапорного планового потока:
1 — водоупор; *2* — положения свободной поверхности

После сокращений получим уравнение неразрывности планового потока в форме

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + w. \qquad \text{(III.1.2)}$$

Для планово-плоского потока справедлива предпосылка Дюпюи о постоянстве горизонтальных градиентов напора I_x и I_y в каждом вертикальном сечении, причем можно считать, что

$$I_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad I_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \text{(III.1.3)}$$

где H — напоры на свободной поверхности, равные согласно (I.4.19) ее ординатам относительно плоскости сравнения напоров.

Следовательно, согласно (I.5.4) можно записать выражения для компонентов удельных расходов q_x и q_y:

$$q_x = TI_x = -T\frac{\partial H}{\partial x},\quad q_y = TI_y = -T\frac{\partial H}{\partial y}. \qquad \text{(III.1.4)}$$

Подставляя (III.1.4) в (III.1.2), получим общее уравнение планового потока [1]

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right) + w. \qquad \text{(III.1.5)}$$

Уравнение (III.1.5) является нелинейным, поскольку в общем случае проводимость T меняется не только в пространстве (в плоскости xy), но и в зависимости от изменений напора H. Наиболее эффективным практическим путем решения задач плановой неустановившейся фильтрации оказывается линеаризация уравнения (III.1.5), методика которого зависит от расчетной схемы строения пласта по вертикали.

Для условий постоянной проводимости $T=T(x, y)$ и сравнительно однородного в плане потока допустимо осреднение значений проводимости пласта T как в пространстве, так и во времени. Тогда величина T выносится за знак производных, и уравнение (III.1.5) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{w}{T},\quad a = \frac{T}{\mu}, \qquad \text{(III.1.6)}$$

причем величина a, определяющая скорость изменения уровня потока во времени, может быть названа коэффициентом уровнепроводности.

Для схемы Дюпюи (однородный по вертикали поток на горизонтальном водоупоре) $T=kh$, а, задавая плоскость сравнения на уровне поверхности водоупора, получим $H=h$, так что уравнение (III.1.5) в этом случае принимает вид

$$\mu\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(kh\frac{\partial h}{\partial y}\right) + w. \qquad \text{(III.1.7)}$$

Поскольку $hdh = d\left(\frac{h^2}{2}\right)$, то уравнение (III.1.7) можно также записать в виде

$$\mu\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\frac{h^2}{2}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\frac{h^2}{2}}{\partial y}\right) + w. \qquad \text{(III.1.7а)}$$

Уравнение (III.1.7), по предложению Ж. Буссинеска [52], можно линеаризировать, осреднив глубину потока h под знаком пространственной производ-

[1] Для однородного по вертикали потока такое уравнение впервые было получено Ж. Буссинеском [52].

ной. Для однородного в плане потока (k=const) линеаризированное таким приемом уравнение (III.1.7) примет вид

$$\frac{1}{a}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{w}{kh_{ср}},\quad a=\frac{kh_{ср}}{\mu},\qquad (III.1.8)$$

где $h_{ср}$ — осредненная глубина потока.

Несколько более эффективна линеаризация уравнения (III.1.7) по способу Багрова — Веригина [38, 49], когда используется форма уравнения (III.1.7а), в котором делается преобразование $\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{1}{2h}\cdot\frac{\partial h^2}{\partial t}$. Введя далее функцию $\varphi=0{,}5h^2$, приведем уравнение (III.1.7а) к виду

$$\frac{\mu}{kh}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{w}{k};\qquad (III.1.9)$$

Для линеаризации уравнения (III.1.9) осредняем величину h в левой части этого уравнения:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{w}{k},\quad a=\frac{kh_{ср}}{\mu},\qquad (III.1.10)$$

где $h_{ср}$ — осредненная глубина потока, рекомендации по определению которой приведены в работах [34, 46, 49].

Можно также показать, что для горизонтально-слоистого пласта (схема Гиринского) дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{a}\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}+w,\ a=\frac{T}{\mu}.\qquad (III.1.11)$$

Если в этом уравнении осреднить параметры T и μ, то оно тоже примет линеаризованную форму.

Сопоставляя линеаризованные дифференциальные уравнения (III.1.6), (III.1.10) и (III.1.11), можно видеть их формальную однотипность, причем они переходят друг в друга по правилам замены (II.1.5), обоснованным ранее для условий стационарного режима. Поэтому для условий нестационарной фильтрации снова целесообразно рассматривать методику построения расчетных зависимостей применительно к схеме пласта с постоянной проводимостью. Использование же схем Дюпюи и Гиринского можно рекомендовать лишь для таких условий, когда изменения мощности пласта вызывают существенные изменения его проводимости, причем оказывается допустимым задание горизонтального водоупора. При этом расчетные зависимости могут быть получены непосредственно исходя из зависимостей, составляемых для основной расчетной схемы с использованием общих правил перехода.

Заметные изменения в характере развития нестационарного режима фильтрации может вызвать слоистое строение безнапорных пластов и особенно наличие слабопроницаемых покровных отложений, в которых располагается свободная поверхность потока. В этом случае распространение потока в плане происходит в

основном по нижнему хорошо проницаемому слою, а верхний слой играет экранирующую роль, обусловливая заметное проявление перетекания между основным слоем и уровнем свободной поверхности (рис. 50). В таких условиях структуру потока можно принимать, используя предпосылки перетекания, т. е. считая в

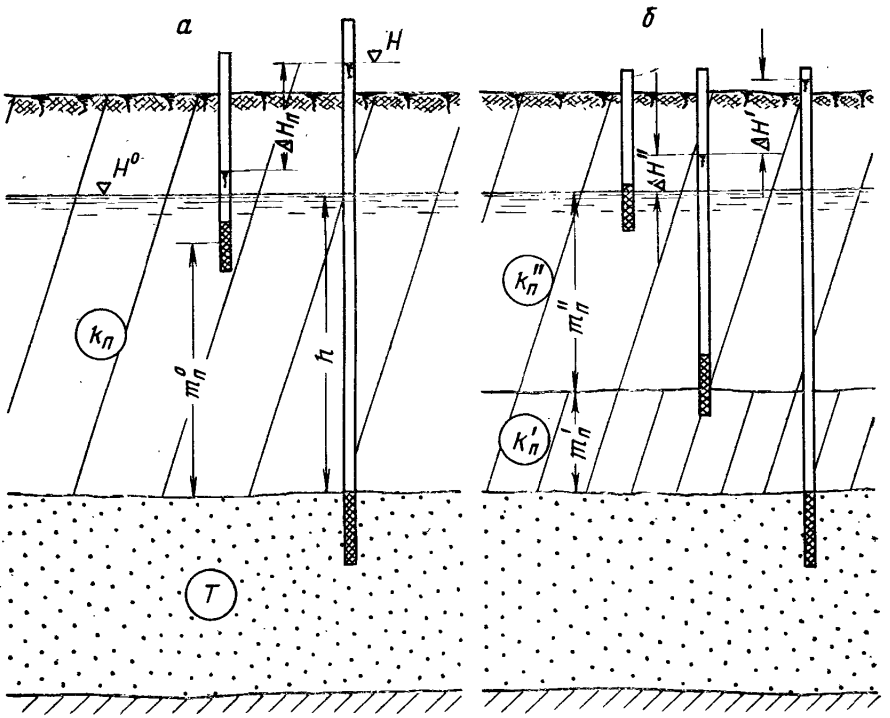


Рис. 50. Элементы потока в двухслойном пласте:
а и *б* — однородное и слоистое строение покровных отложений

нижнем слое справедливой предпосылку Дюпюи, а в верхнем слое принимая вертикальное направление течения. Дадим в такой постановке вывод дифференциального уравнения для напоров H и уровней свободной поверхности H^0. Уравнение неразрывности потока в нижнем слое получим аналогично выводу уравнения (III.1.2), положив только $\mu=0$ (т. е. пренебрегая упругими запасами пласта в нижнем слое) и заменяя w на скорость перетекания $v_п$:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}=v_п. \qquad \text{(III.1.12)}$$

Выражение для скорости вертикального перетекания получим из (I.5.7) при $\Delta H_z=H^0-H$, $m_z=m_п$ и $k_z=k_п$:

$$v_п=k_п\frac{H^0-H}{m_п}, \qquad \text{(III.1.13)}$$

где $k_п$ — расчетный коэффициент фильтрации покровного слоя, определяемый с учетом неоднородности строения согласно общему выражению (I.5.8). Выражая далее q_x и q_y согласно (III.1.4), получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=k_п\frac{H-H^0}{m_п}. \qquad \text{(III.1.14)}$$

Кроме того, следует составить уравнение баланса вертикального элемента потока в покровном слое. Исходя из того, что за время dt к свободной поверхности подходит поток $(w-v_п)dt$, приводящий к приращению объема воды в единичном элементе покровного слоя на величину $\mu\frac{\partial H^0}{\partial t}\cdot dt$, получим уравнение

$$\mu\frac{\partial H^0}{\partial t}=w-v_п=w+k_п\frac{H-H^0}{m_п}. \qquad \text{(III.1.15)}$$

Уравнения (III.1.14) и (III.1.15), строго говоря, являются нелинейными, поскольку величины $m_п$ и $k_п$ (при слоистом строении покровного слоя) зависят от положения уровня свободной поверхности. Однако обычно эти величины можно осреднять и тем самым линеаризировать уравнения (III.1.14) и (III.1.15).

Упражнение. Определить расчетное значение коэффициента фильтрации $k_п$ покровных отложений, состоящих из двух слоев (см. рис. 50).

Ответ: используя метод фрагментов, получаем

$$k_п=\frac{m_п}{\frac{m'_п}{k'_п}+\frac{m''_п}{k''_п}}. \qquad \text{(III.1.16)}$$

Для характерного случая, когда нижний слой покровных отложений значительно менее проницаем, т. е. при $k'_п \ll k''_п$ в выражении (III.1.16) можно пренебрегать членом $m''_п/k''_п$ и считать $k_п/m_п = k'_п/m'_п$ вне зависимости от положения уровня грунтовых вод.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛАНОВОГО НАПОРНОГО ПОТОКА (УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ)

Нестационарная фильтрация в напорных пластах связана в основном с проявлением их упругих свойств, общие закономерности которых рассмотрены в § 2 главы 3 и § 1 главы 4 раздела I. Приведем вывод дифференциального уравнения упругого режима фильтрации для планового потока с учетом изменения внешнего давления на кровлю пласта ($p_к$), возникающего под влиянием гидродинамических факторов.

Выделим бесконечно малый элемент пласта площадью $dx\,dy$ и высотой на полную мощность пласта (рис. 51). Количество воды в этом элементе потока $dW = W_0\,dx\,dy$, где $W_0 = \gamma\, nm$ — количество воды, содержащееся в элементе потока единичной площади в плане. Поскольку в единичном элементе пласта величина $\frac{m}{1+\varepsilon}$ представляет собой объем скелета грунта, который считается неизменным, то эту величину можно вынести за знак дифференцирования и тогда

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{m}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\gamma\varepsilon) = \frac{m}{1+\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right). \quad \text{(III.1.17)}$$

Свяжем далее изменение объемного веса жидкости γ и коэффициента пористости ε с изменениями давления в жидкости p и в скелете породы $p_{ск}$. Используя для воды закон Гука (I.3.29), а для породы закон компрессии (I.3.30) и подставляя эти выражения в (III.1.17), получим

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{m}{1+\varepsilon}\left(\varepsilon\gamma\beta_в\frac{\partial p}{\partial t} - \gamma a_v\frac{\partial p_{ск}}{\partial t}\right). \quad \text{(III.1.18)}$$

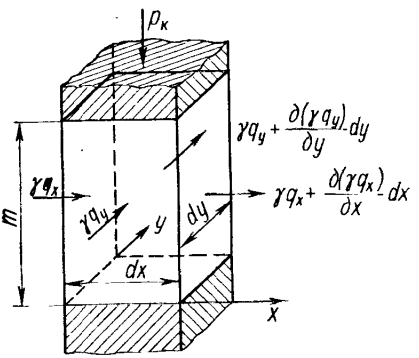


Рис. 51. Бесконечно малый элемент планового напорного потока

Согласно (I.1.2) имеем

$$\frac{\partial p_{ск}}{\partial t} = \frac{\partial p_п}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \text{(III.1.19)}$$

а выражая изменения давления dp через изменения напора $\gamma\,dH$, получим

$$\frac{\partial p_{ск}}{\partial t} = \frac{\partial p_п}{\partial t} - \gamma\frac{\partial H}{\partial t}. \quad \text{(III.1.20)}$$

Подставляя эти выражения в (III.1.18), получим

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{m}{1+\varepsilon}\cdot\gamma\left(\varepsilon\gamma\beta_в\frac{\partial H}{\partial t} + \gamma a_v\frac{\partial H}{\partial t} - a_0\frac{\partial p_п}{\partial t}\right) =$$

$$= \gamma\mu^*\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\gamma m a_v}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\partial p_п}{\partial t}, \quad \text{(III.1.21)}$$

где μ^* — коэффициент упругой емкости пласта, выражаемый формулой (I.3.36).

Записывая уравнение материального баланса воды в бесконечно малом элементе пласта, после сокращений получим уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial W_0}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad \text{(III.1.22)}$$

где q_x и q_y — компоненты расхода фильтрационного потока, определяемые по формулам Дюпюи (III.1.4). Подставляя их выражения (III.1.4) в это уравнение и учитывая (III.1.21), получим

$$\mu^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{a_v m}{1+\varepsilon} \gamma v_{\text{п}}, \quad \text{(III.1.23)}$$

где $v_{\text{п}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_{\text{п}}}{\partial t}$ — скорость изменения внешнего давления на кровлю пласта, выраженного в единицах водного столба.

Дифференциальное уравнение (III.1.23) в общем случае является нелинейным, поскольку входящие в него параметры зависят от давлений в породе [3, 16, 38], причем эта зависимость может быть даже неоднозначной [2, 3, 38]. Однако для практических расчетов оно обычно линеаризуется путем осреднения параметров и для однородного пласта представляется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) + \alpha_p v_{\text{п}}, \quad \text{(III.1.24)}$$

аналогичном линеаризованному уравнению (III.1.6) для планового безнапорного потока. Параметр a, названный В. Н. Щелкачевым коэффициентом пьезопроводности [50], и параметр передачи давления α_p имеют выражение

$$a = \frac{T}{\mu^*} = \frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma(a_v + \varepsilon\beta_{\text{в}})}, \quad \alpha_p = \frac{a_v}{a_v + \varepsilon\beta_{\text{в}}}. \quad \text{(III.1.25)}$$

Сопоставляя уравнения (III.1.23) и (III.1.5), нетрудно увидеть их аналогичность, причем уравнение упругого режима (III.1.23) переходит в уравнение для безнапорного потока (III.1.5), если заменить μ^* на μ и $\alpha_p \mu^* v_{\text{п}}$ на w. Это обстоятельство дает возможность унифицировать решения для безнапорного и напорного плановых потоков.

В заключение отметим, что деформации породы в процессе упругого режима фильтрации при снижении напора в пласте приводят к уменьшению мощности пласта, которое должно повлечь за собой такую же по величине осадку поверхности земли. Величину этой осадки можно оценить из условия постоянства объема скелета породы, представляемого в виде

$$m = m_0 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon_0}, \quad \text{(III.1.26)}$$

где m_0 и ε_0 — исходные значения мощности пласта и коэффициента пористости. Тогда изменение мощности пласта будет

$$\Delta m = \frac{m_0}{1+\varepsilon_0} \Delta\varepsilon. \quad \text{(III.1.26а)}$$

Из закона компрессии (I.3.30) $\Delta\varepsilon = -a_v \Delta p_{\text{ск}}$, а при отсутствии изменения давления на кровлю пласта $\Delta p_{\text{ск}} = -\Delta p = -\gamma \Delta H$, так

что выражение (III.1.26а) можно представить в виде

$$\Delta m = \frac{\gamma a_0 m_0}{1+\varepsilon_0} \cdot \Delta H, \qquad \text{(III.1.27)}$$

т. е. осадка поверхности земли, равная изменению мощности пласта Δm, оказывается пропорциональной изменению напора ΔH, мощности пласта и коэффициенту сжимаемости породы. При слоистом строении водоносных отложений величина осадки определяется суммированием значений Δm, определяемых по формуле (III.1.27) для каждого слоя в отдельности.

В настоящее время имеется довольно много данных наблюдений за осадкой поверхности земли, зафиксированной в связи с водоотбором подземных вод. Большие осадки поверхности земли в связи с водоотбором подземных вод наблюдались, например, в г. Токио (3,3 м за 50 лет и 1,5—2 м за последние 30 лет), в долине Сан-Хоакин, штат Калифорния, США (до 2—3 м за 50 лет), в г. Мехико (до 5—7 м с 1880 г.), а также в ряде других зон активного водоотбора подземных вод [10, 55].

§ 3. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПЛАНОВЫХ ПОТОКОВ

Для плановых потоков краевые (начальные и граничные) условия, обусловливающие однозначность решения, имеют ряд особенностей, требующих специального рассмотрения.

Начальное распределение напоров обозначим через $H_0(x, y)$; при неизменной во времени или слабо изменяющейся величине инфильтрации учет начального распределения напоров удобно производить по принципу суперпозиции (сложения течений), представляя решение уравнения нестационарной фильтрации в виде

$$H = H_0 + \Delta H, \qquad \text{(III.1.28)}$$

где $\Delta H = \Delta H(x, y, t)$ — изменения напора относительно начального.

Начальное распределение напоров, образовавшихся в результате всей предыдущей истории формирования подземных вод, описывается теми же дифференциальными уравнениями. В частности, для потока грунтовых вод используем для распределения напоров уравнение (III.1.5). Тогда для исходных напоров будем иметь

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2}\right) + \frac{w_0}{\mu}, \qquad \text{(III.1.29)}$$

где w_0 — интенсивность инфильтрации, соответствующая начальному распределению напоров. Вычитая из уравнения (III.1.5) уравнение (III.1.29), получим

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial y^2}\right) + \frac{\Delta w}{\mu}, \quad \Delta w = w - w_0, \qquad \text{(III.1.30)}$$

т. е. изменение напора ΔH описывается уравнением теплопроводности при интенсивности инфильтрации, равной разности значений на текущий и начальный моменты времени. При неизменном инфильтрационном питании ($w = w_0$) уравнение (III.1.30) примет вид

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial y^2}\right), \qquad \text{(III.1.31)}$$

т. е. в этом случае изменения напоров относительно начальных не зависят от инфильтрационного питания, причем начальное условие для величины ΔH будет нулевым, т. е. $\Delta H(x, y, 0) = 0$.

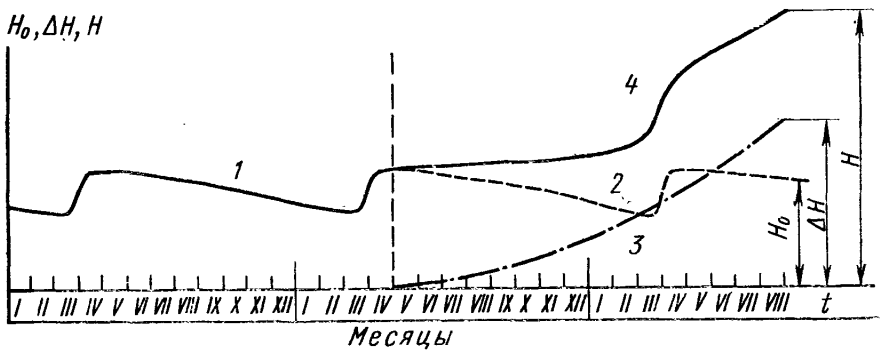


Рис. 52. Графики изменения уровней во времени:
1 — периодические колебания естественного режима; *2* — продолжение графика естественного режима — график начальных уровней H_0; *3* — график подпора ΔH; *4* — результирующий напор $H = H_0 + \Delta H$

В общем случае величины H_0, от которых отсчитываются расчетные изменения уровней ΔH, могут быть переменными во времени, однако они, разумеется, должны быть известны в течение всего расчетного периода времени. С этой точки зрения наилучшими являются такие условия, когда исходные уровни H_0 задаются при стационарном режиме. Достаточно определенными представляются исходные условия, когда уровни H_0 периодически изменяются в течение каждого года, причем такие периодические изменения могут быть продолжены на расчетный период времени (рис. 52). Если же в начале расчетного периода времени имеет место существенно нестационарный режим, обусловливаемый влиянием внешних факторов, то величина H_0 должна быть предварительно спрогнозирована путем решения дифференциального уравнения (III.1.29) для условий, предшествующих расчетному периоду времени.

Рассмотрим теперь форму основных граничных условий для плановых потоков. По контуру водоемов, у которых практически отсутствует сопротивление ложа (такие случаи характерны, например, для рек, протекающих в чистых песчано-гравелистых от-

ложениях; рис. 53, *а*), и по контуру границ между отдельными фрагментами потока задается граничное условие первого рода (заданные величины расчетной функции — напора):

$$H_{\text{г}} = H^0(t), \qquad \text{(III.1.32)}$$

где индексом «г» обозначена принадлежность точек задания напора к граничному контуру.

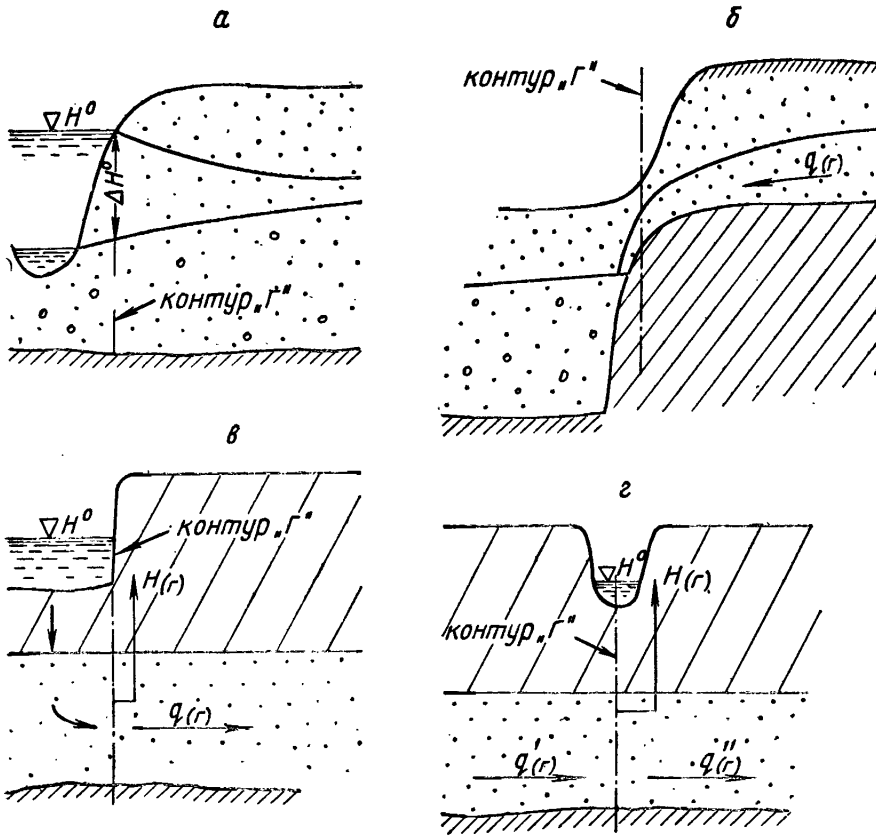


Рис. 53. Граничные условия на контурах планового потока:
а — контур водоема с заданным напором (граница первого рода); *б* — контур с заданным расходом (граница второго рода); *в* — контур несовершенного водоема (граница третьего рода); *г* — внутренний контур несовершенного водоема (внутреннее условие третьего рода)

Для функции изменения напора ΔH условие (III.1.32) принципиально сохранит свой вид:

$$\Delta H_{\text{г}} = \Delta H^0(t) = H^0 - H^0_0, \qquad \text{(III.1.32а)}$$

т. е. величина изменения уровня воды на границе ΔH^0 отсчитывается от естественных (начальных) уровней H^0_0 на этой границе.

По контурам, где нарушается сплошность потока (например, по контуру причленения террас; рис. 53, *б*), неизменным во времени может считаться расход потока, т. е. задается условие второго рода — заданные величины производной от расчетной функции по нормали n к контуру:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = -\frac{q_{(\text{г})}}{T}. \qquad \text{(III.1.33)}$$

Для часто встречающегося случая непроницаемого контура $q_{(\text{г})}=0$ и условие (III.1.33) принимает вид

$$\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = 0. \qquad \text{(III.1.33а)}$$

При задании в качестве расчетной величины ΔH общее граничное условие (III.1.33) по своему виду превращается в частное условие (III.1.33а), поскольку при неизменном во времени расходе $q_{\text{г}}$ имеем $\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial n}\right)_{\text{г}}$ и

$$\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = \left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{\text{г}} - \left(\frac{\partial H_0}{\partial n}\right)_{\text{г}} = 0, \qquad \text{(III.1.33б)}$$

т. е. контур с граничным условием второго рода при этом как бы превращается в непроницаемую границу.

В более общем случае на контуре водоемов, ограничивающих поток, задается условие третьего рода (линейная зависимость между напором и производной от напора по нормали к контуру), которое в соответствии с зависимостью (II.2.6) может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{q_{\text{г}}}{T} = -\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = \frac{H_{\text{г}} - H^0}{\Delta L}. \qquad \text{(III.1.34)}$$

При расчетах изменения напора ΔH граничное условие (III.1.34) соответственно принимает вид

$$-\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = \frac{\Delta H_{\text{г}} - \Delta H^0}{\Delta L}, \qquad \text{(III.1.34а)}$$

а при неизменном уровне в водоеме ($\Delta H^0=0$) получим условие

$$-\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial n}\right)_{\text{г}} = \frac{\Delta H_{\text{г}}}{\Delta L}. \qquad \text{(III.1.34б)}$$

Кроме внешних границ могут существовать внутренние контуры питания и стока.

При наличии внутренних водоемов (небольших рек, каналов, озер и т. п.) задаваемые на их контурах условия прежде всего определяются установлением под ними свободного или подпертого режима фильтрации.

При свободной фильтрации из водоема по площади его распространения задается зона инфильтрации (площадного питания), интенсивность которого определяется скоростью фильтрации из водоема согласно (II.2.1). Для рек небольшой ширины площадное задание инфильтрации из реки сводится к заданию удельного расхода потока, инфильтрующегося на единицу длины реки.

При подпертой фильтрации вблизи протяженных внутренних водоемов (например, рек, каналов) на контурах их урезов устанавливаются внутренние условия третьего рода, реализующие линейную связь расходов и напоров на контурах водоема, определяемую согласно (II.2.14) или (II.2.16). В частном случае для реки или канала небольшой ширины, когда сопротивлением $\Phi_н^0$ можно пренебречь и система сопротивлений ложа водоема сводится к сопротивлению $\Phi_{нд}$ (см. рис. 36, *в*), получим упрощенное внутреннее граничное условие третьего рода, в котором разрыв расходов $q_г'$ и $q_г''$ по нормали к контуру реки линейно связан с напором в реке H^0, т. е.

$$q_г' - q_г'' = T\frac{H_г - H^0}{L_{нд}}, \qquad \text{(III.1.35)}$$

где $H_г$ — напор, который устанавливается в водоносном пласте под рекой.

В процессе изменения уровня под водоемом может произойти смена режимов: при опускании уровней подпертый режим может смениться на свободный и наоборот, что приведет к смене рода граничных условий, поскольку внутреннее условие второго рода (заданный расход инфильтрации из водоема) сменится на внутреннее условие третьего рода (III.1.35). Это обстоятельство должно учитываться и при модификации граничных условий для функции изменения уровня ΔH.

Так, если в начальный момент существовал подпертый режим, то при переходе его на свободный под водоемом должен задаваться расчетный инфильтрационный расход $\Delta Q_г$, определяемый как разность инфильтрационного расхода $Q_г$ и начального расхода из водоема $Q_г^0$ (положительного при фильтрации из водоема и отрицательного при направлении начальной фильтрации в водоем). Таким же путем должно учитываться исключение внутренних зон разгрузки (родники, солончаковые впадины и озера), как это показано в § 3 главы 3 раздела II.

Глава 2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Аналитические методы расчетов нестационарных плановых потоков, как правило, основываются на решениях линеаризованного дифференциального уравнения (III.1.29), относящегося к уравне-

ниям математической физики параболического типа (уравнение Фурье или теплопроводности). Рассмотрим методику составления и использования аналитических решений нестационарных задач плановой фильтрации для одномерных (линейных в плане) потоков, с направлением которых будем совмещать координатную ось x. Тогда дифференциальное уравнение (III.1.30) примет вид

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} + \frac{\Delta w}{\mu}, \qquad \text{(III.2.1)}$$

а при неизменной инфильтрации

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2}. \qquad \text{(III.2.1а)}$$

Графичные условия для линейных в плане потоков устанавливаются применительно к двум основным схемам: открытого и полуоткрытого потоков (рис. 54, *а*, *б*), причем в открытых потоках на границах задаются изменения напоров, но в полуоткрытых по-

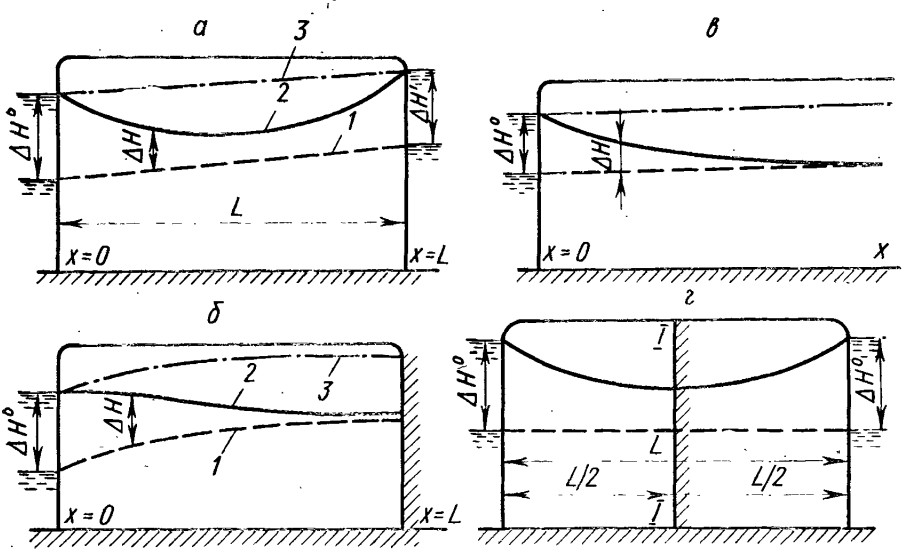


Рис. 54. Схема границ линейных в плане нестационарных потоков: *а* — открытый; *б* — полуоткрытый; *в* — полуограниченный; *г* — симметричный (*1, 2, 3* — начальная, текущая и предельная кривые депрессии)

токах на одной границе задается изменение напора, а другая считается непроницаемой. Кроме того, существенна схема полуограниченного потока (рис. 54, *в*), когда изменения напора задаются на одной границе, а другая считается отнесенной в бесконечность. Такая схема может рассматриваться при условии, что влияние изменения уровня на одной из границ практически не распространяется до другой (противоположной) границы.

Аналитические методы решения дифференциальных уравнений вида (III.2.1) и (III.2.1а) широко представлены в трудах по математической физике, особенно для задач теплового поля [28]; использование и развитие этих методов применительно к задачам нестационарной фильтрации прежде всего связаны с работами С. Ф. Аверьянова, Н. Н. Веригина, П. Я. Полубариновой-Кочиной, И. А. Чарного [3, 7, 21, 34, 36, 38], Ч. Джекоба, М. Хантуша [14, 56]. В настоящее время разработан широкий арсенал таких решений, из которых ниже приводятся наиболее употребительные для геофильтрационных расчетов. Они могут быть использованы для однородных потоков при любых граничных условиях (при неизменности их рода).

В качестве фундаментальных рассмотрим решения уравнения (III.2.1а) при нулевых начальных условиях и изменении напора на одной границе ($x=0$) либо мгновенном — на величину ΔH^0, либо по линейному закону — с постоянной скоростью v [7, 28, 34].

При мгновенном изменении уровня на границе $x=0$ краевые условия для $\Delta H(x, t)$ формируются следующим образом:

$$\Delta H(x, 0) = 0, \quad \Delta H(0, t) = \Delta H^0. \tag{III.2.2}$$

Общий вид решения этой задачи будет

$$\Delta H = \Delta H^0 F(x, t), \tag{III.2.3}$$

где функция $F(x, t)$ зависит от типа потока, условий на противоположной границе и неоднородности потока по его длине.

Для однородного полуограниченного потока

$$F(x, t) = \operatorname{erfc} \lambda = 1 - \Phi(\lambda), \quad \lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}. \tag{III.2.4}$$

Значения функции $\operatorname{erfc} \lambda$ и интеграла вероятности $\Phi(\lambda) = 1 - \operatorname{erfc} \lambda$ определяются по таблице, приведенной в приложении.

Для ограниченного открытого потока (при неизменном уровне на границе $x=L$) получим

$$F(x, t) = F_1(\bar{x}, \tau); \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{at}{L^2}, \tag{III.2.5}$$

где

$$F_1(\bar{x}, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\pi^2 n^2 \tau} \sin(n\pi \bar{x}), \tag{III.2.6}$$

причем значения функции $F_1(\bar{x}, \tau)$ определяются по таблице, приведенной в приложении.

Для открытого потока при изменении уровня воды на обеих границах величина ΔH определится как сумма изменений уровня, подсчитанных от действия изменения уровней на каждой границе в отдельности. Например, если на

границах $x=0$ и $x=L$ происходят мгновенные изменения уровня на величину ΔH^0 и $\Delta H'$ в моменты $t=0$ и $t=t'$ соответственно, то, взяв за основу решения (III.2.5), получим уравнение для определения суммарного изменения уровня ΔH:

$$\Delta H = \Delta H^0 \cdot F_1(\bar{x}, \tau) + \Delta H' \cdot F_1(1-\bar{x}, \tau-\tau'), \quad \tau' = \frac{at'}{L^2}. \qquad \text{(III.2.7)}$$

Если положить $H_0=\text{const}$ и $\Delta H^0=\Delta H'$, то в силу симметрии $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ при $x = 0{,}5L$, поэтому полученное таким образом решение соответствует схеме полуоткрытого потока длиной $0{,}5L$. Например, при мгновенном изменении уровней на границе $x=0$ решение для этой схемы примет вид

$$\Delta H = \Delta H^0 F_2(\bar{x}, \tau), \qquad \text{(III.2.8)}$$

причем

$$F_2(\bar{x}, \tau) = F_1\left(\frac{\bar{x}}{2}, \frac{\tau}{4}\right) + F_1\left(1-\frac{\bar{x}}{2}, \frac{\tau}{4}\right). \qquad \text{(III.2.9)}$$

При линейном изменении уровня на границе $x=0$ граничные условия для ΔH будут

$$\Delta H(\bar{x}, 0) = 0, \quad \Delta H(0, t) = vt. \qquad \text{(III.2.10)}$$

Общий вид решения для этого случая

$$\Delta H = vtF_v(x, t), \qquad \text{(III.2.11)}$$

где безразмерная функция $F_v(x, t)$ также определяется в зависимости от типа потока.

Для полуограниченного потока $F_v(x, t)=R(\lambda)$; для ограниченного открытого потока (при неизменном уровне на границе $x=L$) $F_v(x, t)=R_1(\bar{x}, \tau)$, причем значения функций $R(\lambda)$ и $R_1(\bar{x}, \tau)$ определяются по таблицам, приведенным в приложении; для ограниченного полуоткрытого потока (граница $x=L$ непроницаема) решение при линейном изменении уровня на границе $x=0$ может быть получено по такой же методике, что и для разобранного выше случая мгновенного изменения уровня на границе, т. е. в таких условиях

$$F_v(x, t) = R_2(\bar{x}, \tau) = R_1\left(\frac{\bar{x}}{2}, \frac{\tau}{4}\right) + R_1\left(1-\frac{\bar{x}}{2}, \frac{\tau}{4}\right). \qquad \text{(III.2.11a)}$$

Для учета гидродинамического несовершенства водоема значительной ширины на границе его уреза должно задаваться граничное условие третьего рода (III.1.34). Решение такой задачи в случае мгновенного изменения уровня на границе $x=0$ на величину ΔH^0 и при нулевом начальном условии [28] имеет вид (III.2.4) при

$$F(x, t) = F(\lambda, \theta) = \operatorname{erfc}\lambda - \exp(\theta^2 + 2\lambda\theta)\operatorname{erfc}(\lambda+\theta)) \qquad \text{(III.2.12)}$$

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad \theta = \frac{\sqrt{at}}{\Delta L}.$$

В частности, в сечении уреза водоема (на границе $x=0$) изменение уровня ΔH_0 будет

$$\Delta H_0 = \Delta H^0 F_0(\theta),\ F_0(\theta) = F(0, \theta) = 1 - e^{\theta^2} \cdot \operatorname{erfc} \theta. \quad \text{(III.2.13)}$$

График функции $F(\lambda, \theta)$ приведен в работах [28, 34].

Приближенно сопротивление ложа водоема можно учитывать, удлиняя поток на величину ΔL_t, зависящую при нестационарном режиме от времени; такое решение рассматриваемой задачи в соответствии с (III.2.2) будет иметь вид

$$\Delta H = \Delta H^0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \Delta L_t}{2\sqrt{at}}\right), \quad \text{(III.2.14)}$$

причем величину ΔL_t рационально подбирать из условия совпадения значений ΔH_0 (при $x=0$), определяемых согласно (III.2.13) и (III.2.14). Полученная таким образом зависимость представлена следующими данными:

θ	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\Delta\overline{L}_t = \frac{\Delta L_t}{\Delta L}$	0,23	0,37	0,48	0,62	0,71	0,8	0,88	0,92	0,95	0,985

Как видно, при $\theta > 2{,}5$, т. е. при $\Delta L < 0{,}4\ at$, практически (с точностью до 5%) можно считать $\Delta L_t = \Delta L$.

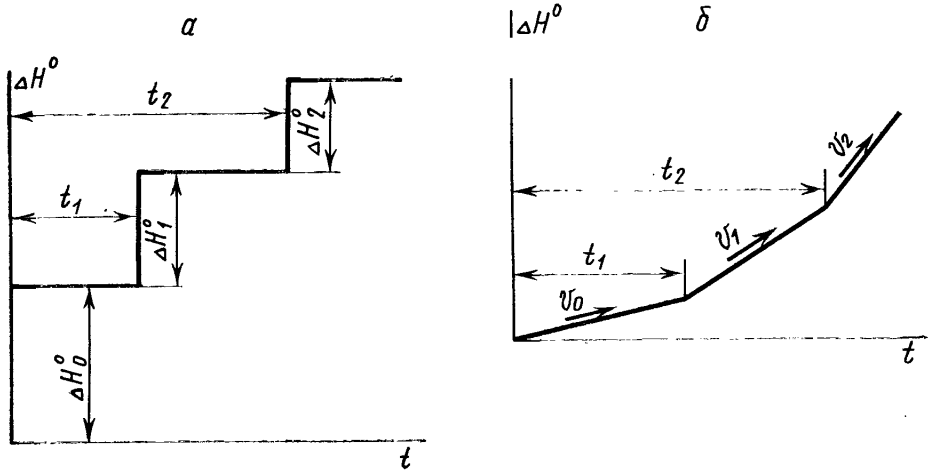


Рис. 55. Ступенчатый (*а*) и ломаный (*б*) графики изменения граничных уровней

Применение метода сложения течений позволяет распространить приведенные выше фундаментальные решения на более общие случаи ступенчатого или ломаного закона изменения уровня[1] на границе $x=0$ (рис. 55).

При ступенчатом графике решение для начальной ступени (при $t < t_1$) имеет вид (III.2.3) при $\Delta H^0 = \Delta H_0^0$. Для первой до-

[1] Впервые аналогичная методика (при другой форме линеаризации уравнения нестационарной фильтрации) применена Н. Н. Веригиным [6].

полнительной ступени (при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) решение получается сложением решений от двух ступеней изменения уровня на границе — начальной ΔH_0^0, действующей с момента времени $t=0$, и дополнительной ΔH_1^0, действующей со сдвигом во времени на величину t_1, т. е. в этом случае

$$\Delta H = \Delta H_0^0 F(x, t) + \Delta H_1^0 F(x, t - t_1).$$

Соответственно для любой n-й ступени (при $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$)

$$\Delta H = \sum_{i=0}^{n} \Delta H_i^0 F(x, t - t_i). \qquad \text{(III.2.15)}$$

а *б*

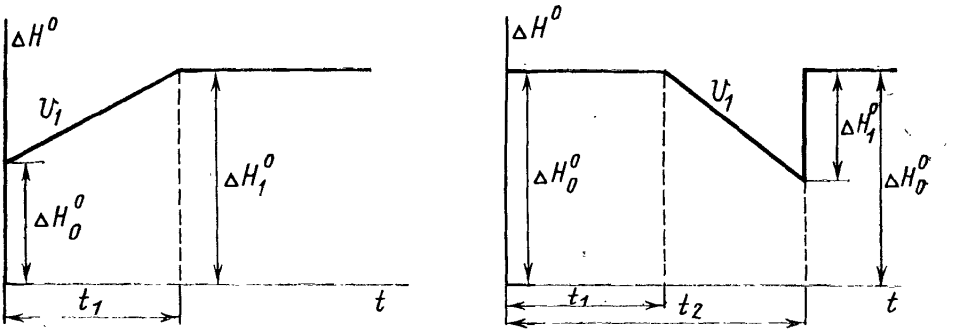


Рис. 56. Примеры графиков изменения уровней на границах потока

При ломаном законе изменения уровня решение для начальной ветви имеет вид (III.2.11) при $v=v_0$. Для ветви после первого излома (при $t_1 < t \leqslant t_2$) решение получается сложением решений от двух ветвей — начальной, со скоростью изменения уровня v_0 и первой дополнительной, со скоростью изменения уровня $v_1=v_0$ с момента времени $t=t_1$. Суммарное изменение уровня для этой ветки будет $\Delta H = vtF_v(x, t) + (v_1 - v_0)(t - t_1)F_v(x, t - t_1)$. Соответственно для ветки, следующей после n-го излома (при $t_n < t < t_{n+1}$), решение представится в виде

$$\Delta H = v_0 t F_v(x, t) + \sum_{i=1}^{n} (v_i - v_{i-1})(t - t_i) F_v(x, t - t_i). \qquad \text{(III.2.16)}$$

Упражнение. Составить решение уравнения нестационарной фильтрации (III.2.1) для полуограниченного потока, у которого на границе $x=0$ задаются изменения уровня по графикам, представленным на рис. 56.

График на рис. 56, *а* при $t > t_1$:

$$\Delta H = \Delta H_0^0 \operatorname{erfc} \lambda + v_1 iR(\lambda) - v_1 (t - t_1) R(\lambda_1);$$

$$v_1 = \frac{\Delta H_1^0 - \Delta H_0^0}{t_1}, \quad \lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad \lambda_1 = \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_1)}}.$$

График на рис. 56, *б* при $t_1 < t < t_2$:

$$\Delta H = \Delta H_0^0 \operatorname{erfc} \lambda - v_1 (t - t_1) R(\lambda_1);$$

$$v_1 = \frac{\Delta H_1^0}{t_2 - t_1}, \quad \lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad \lambda_1 = \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_1)}}.$$

То же при $t > t_2$:

$$\Delta H = \Delta H_0^0 \operatorname{erfc} \lambda - v_1 (t - t_1) R(\lambda_1) + v_1 (t - t_2) R(\lambda_2) + \Delta H_1^0 \operatorname{erfc} \lambda_2,$$

$$\lambda_2 = \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_2)}}$$

При расчетах многолетнего режима с учетом внутрисезонных циклических колебаний уровня на границе (при сезонных колебаниях уровня воды в водохранилище, периодической работе каналов и т. п.) существенного упрощения можно достигнуть исходя из того, что внутрисезонные колебания уровня относительно среднего имеют практическое значение только в последний расчетный год. В связи с этим циклический график изменения уровня на границе разделяется на две части (рис. 57) — первая представляется постоянным уровнем, соответствующим среднегодовому изменению уровня $\Delta H_{ср}^0$, а вторая представляет собой дополнительный график разницы между действительным графиком уровня и его средним значением. Расчет по среднему уровню производится на весь расчетный период времени, а расчет по дополнительному графику может производиться только в течение последнего года перед расчетным моментом времени.

В качестве примера такого расчета рассмотрим решение для подпора грунтовых вод массива, на границе которого ($x=0$) задан периодический закон изменения уровня воды по графику рис. 57, *а*. Соответствующий дополнительный график изменений уровней ΔH_t^0, полученный из графика рис. 57, *а* при времени t_1+t_2, равном одному году, приведен на рис. 57, *б*. В этом случае подпор грунтовых вод, определяемый среднемноголетним изменением уровня на границе $\Delta H_{ср}^0$, рассчитывается по формуле (III.2.3) при $\Delta H^0 = \Delta H_{ср}^0$, а дополнительные изменения уровня ΔH_t, определяемые сезонными колебаниями уровня ΔH^0 за последний расчетный год, рассчитываются по уравнению (III.2.15) для ступенчатого изменения уровня на границе при двух ступенях ΔH_1^0 и ΔH_2^0, действующих соответственно в течение времени t_1+t_2 и t_2, так что в уравнении (III.2.15) надо заменить ΔH_0^0 и ΔH на $-\Delta H_1^0$ и $\Delta H_1^0 + \Delta H_2^0$, а t на $t_1 + t_2$, после чего получим выражение $\Delta H_t = -\Delta H_0^0 F(x, t_1 + t_2) + (\Delta H_1^0 + \Delta H_2^0) F(x, t_2)$.

Покажем теперь методику построения аналитических зависимостей для расходов фильтрационного потока на его границах, величину которых необходимо, например, знать для определения

фильтрационных потерь в бортах водохранилищ и каналов. Для этого воспользуемся общими выражениями (II.1.4) для удельного расхода планового потока, причем, используя принцип сложения течений для учета начального потока, т. е. исходя из выражения (III.1.28) для результирующего напора запишем выражение для

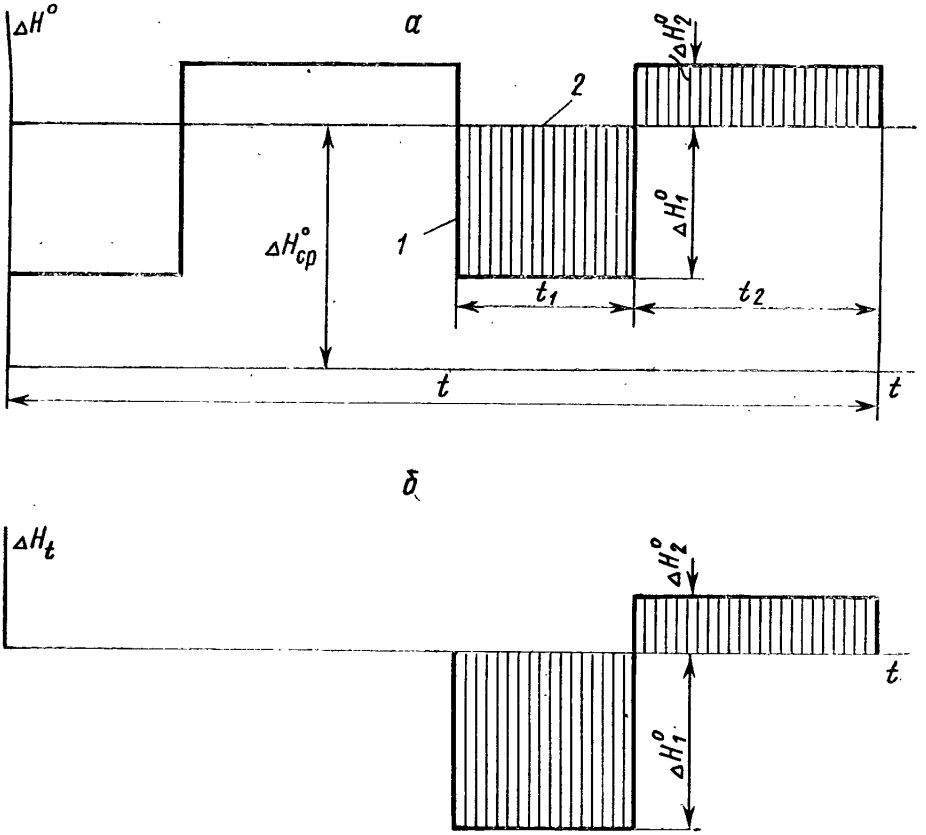


Рис. 57. Периодическое изменение граничного условия:
а — исходный график; *б* — дополнительные изменения уровня за последний цикл

удельного расхода линейного в плане потока, направленного по оси x, в виде

$$q = q_x = -T\frac{\partial H}{\partial x} = -T\frac{\partial H_0}{\partial x} - T\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = q_0 - \Delta q;$$

$$q_0 = -T\frac{\partial H_0}{\partial x},\quad \Delta q = -T\frac{\partial \Delta H}{\partial x}, \qquad \text{(III.2.17)}$$

q_0 — удельный расход начального потока, а Δq — изменение удельного расхода в процессе нестационарной фильтрации. Величину Δq можно найти в различных условиях, подставляя в (III.2.17)

соответствующие выражения для ΔH. Например, при задании мгновенного изменения уровня на границе $x=0$ (условие первого рода), когда величина ΔH определяется уравнением (III.2.3), получим

$$\Delta q = -T\frac{\partial[\Delta H^0 F(x,t)]}{\partial x} = -T\Delta H^0\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}, \qquad \text{(III.2.17а)}$$

причем для полуограниченного потока, где функция $F(x, t)$ выражается согласно (III.2.4)

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{erfc}\lambda}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{erfc}\lambda}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{at}} = -\frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi at}}, \qquad \text{(III.2.17б)}$$

а, положив в (III.2.17б) $x=0$ (при этом $e^{-\lambda^2}=1$) и подставив полученное выражение производной в (III.2.17а), получим формулу для удельного расхода Δq^0 дополнительного потока на границе

$$\Delta q^0(t) = \frac{T\Delta H^0}{\sqrt{\pi at}}. \qquad \text{(III.2.18)}$$

Аналогичным путем можно получить выражение для расхода Δq^0 на границе $x=0$ ограниченного потока, где при $\tau<0{,}2$ влияние противоположной границы не проявляется и величина Δq^0 определяется выражением (III.2.18), а при $\tau>0{,}2$ можно с точностью до 1—2% пренебрегать всеми членами рядов, входящих в функции $F_0(x, \tau)$ и $F_1(x, \tau)$, кроме первого, так что в этом случае для открытого потока при неизменном уровне на границе $x=L$

$$\Delta q^0(t) = \frac{T\Delta H^0}{L}(1+2e^{-\pi^2\tau}), \qquad \text{(III.2.18а)}$$

а для полуоткрытого потока

$$\Delta q^0(t) = 2\frac{T\Delta H^0}{L}e^{-\frac{\pi^2\tau}{4}}. \qquad \text{(III.2.18б)}$$

При мгновенном изменении уровня в экранированном водоеме (граница третьего рода) расход потока на границе $x=0$ будет

$$q = T\frac{H^0 - H_0}{\Delta L}, \qquad \text{(III.2.19)}$$

где H_0 — уровень потока на границе $x=0$ (за экраном), изменения которого определяются согласно (III.2.13).

При ступенчатом изменении уровня на границе $x=0$ выражения для расхода потока на границе можно непосредственно получить, используя принцип сложения течений, согласно которому для n-й ступени изменения уровня

$$\Delta q^0(t) = \sum_{i=0}^{n} \Delta q_i^0 (t - t_i), \qquad \text{(III.2.20)}$$

где величины $\Delta q_i^0 (t - t_i)$ находятся по приведенным выше выражениям с заменой ΔH^0 на величину соответствующей ступени ΔH_i^0 при t_i, равном времени начала i-той ступени. Например, при задании ступенчатого изменения уровня на границе полуограниченного потока, когда величины $\Delta q_i^0 (t - t_i)$ должны определяться из (III.2.18), получим

$$\Delta q^0 = T \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta H_i^0}{\sqrt{\pi a (t - t_i)}}. \qquad \text{(III.2.21)}$$

При двухслойном строении безнапорного водоносного пласта (см. рис. 50) может существенно нарушаться плановый характер потока за счет влияния перетекания в покровном слое. В этом случае выражения для изменений уровней свободной поверхности Δh в верхнем слое и напоров ΔH в нижнем слое могут быть получены из решения системы дифференциальных уравнений (III.1.14—III.1.15) при заданных начальных и граничных условиях для изменения напоров. В частности, фундаментальная задача по определению изменений напоров ΔH в полуограниченном пласте при мгновенном изменении напора в граничном сечении $x=0$ на величину ΔH^0, т. е. при краевых условиях $\Delta H(x, 0) = 0$ и $\Delta H(0, t) = \Delta H^0 = \text{const}$ и неизменной инфильтрации имеет решение (III.2.3), в котором

$$F(x, t) = F_{\text{н}}(\lambda, \theta) \quad \lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad a = \frac{T}{\mu}, \quad \theta = \frac{k_{\text{п}} t}{\mu m_{\text{п}}}, \qquad \text{(III.2.22)}$$

причем значения фундаментальной функции $F_{\text{н}}(\lambda, \theta)$ для двухслойного пласта приведены в приложении. При больших θ величина $F_{\text{н}}(\lambda, \theta)$ приближается к значениям $\operatorname{erfc}\lambda$, т. е. влияние перетекания в покровном слое здесь уже перестает сказываться. Максимальное расхождение δ_θ между функциями $F_{\text{н}}(\lambda, \theta)$ и $\operatorname{erfc}\lambda$ при больших θ можно считать равным

$$\delta_\theta = \frac{0{,}3}{\theta} = \frac{0{,}3 \mu m_{\text{п}}}{k_{\text{п}} t} \qquad \text{(III.2.23)}$$

Если задаться допустимой погрешностью расчета $\delta_\theta = \delta_{\text{доп}}$, то из выражения (III.2.23) получим формулу для времени t_0, начиная с которого можно вести расчет без учета сопротивления покровного слоя, т. е. как для планового потока:

$$t_0 = \frac{0{,}3 \mu m_{\text{п}}}{k_{\text{п}} \delta_{\text{доп}}}. \qquad \text{(III.2.24)}$$

В частности, при задании допустимой погрешности $\delta_{\text{доп}} = 0{,}05$ условие (III.2.24) примет вид

$$t_0 = 6 \frac{\mu m_{\text{п}}}{k_{\text{п}}}. \qquad \text{(III.2.24а)}$$

Аналогичный анализ других типовых задач для фильтрации в двухслойном пласте показывает, что условие (III.2.24) остается справедливым практически при любых монотонных изменениях уровней на границах. Таким образом, если время монотонного изменения уровней оказывается бо́льшим величины t_0, определяемой согласно (III.2.24), то сопротивлением покровного слоя при расчетах нестационарного режима грунтовых вод можно пренебрегать и считать поток плановым.

§ 2. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для решения линеаризованных уравнений нестационарной фильтрации при сложных граничных условиях эффективно использование интегрального преобразования исходной функции (напора или его изменения) по Лапласу — Карсону, когда в качестве операторного изображения оригинала, описываемого функцией $f(t)$, вводится функция

$$F(p) = p\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt, \qquad \text{(III.2.25)}$$

где p — некоторый параметр преобразования; иногда вместо p используется параметр $t_p=1/p$, имеющий размерность времени.

Согласно правилам преобразований по Лапласу — Карсону, в дифференциальных уравнениях пространственные производные для такого изображения сохраняют то же выражение, как и для оригинала, а временная производная $\partial f/\partial t$ заменяется на величину $p(F-f_0)$, где $f_0=f(0)$ — начальное значение оригинала. Аналогичным образом должны преобразовываться и граничные условия.

При численных решениях необходимо осуществлять переход от функции оригинала $f(t)$ к изображениям $F(p)$ и обратно. Для неразрывных функций, описываемых кривыми сравнительно простой формы (особенно монотонно меняющихся), вычисление изображения по Лапласу — Карсону может быть найдено с помощью механической квадратуры по формуле [13, 22]

$$F(p) = \sum_{k=0}^{n} A_k f_k, \qquad \text{(III.2.26)}$$

где $f_k=f(t_k)$ — значения функции оригинала в моменты времени t_k, задаваемого при определенных значениях безразмерного времени $\bar{t}_k=t_k/t_p$ по следующим данным:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{t}_k=t_k/t_p$	0	0,335	1,13	2,4	4,17	6,49	9,43
A_k	0,091	0,403	0,332	0,138	0,0316	0,004	$2{,}6\cdot10^{-4}$

При расчетах по формуле (III.2.26) прежде всего выбирается величина $t_p=1/p$ и с помощью табличных значений $\bar{t}_k$ находятся значения $t_k=\bar{t}_k \cdot t_p$, по которым получают значения исходной функции $f_k=f(t_k)$. Затем из вышеприведенных данных берутся коэффициенты A_k и производится расчет значения изображения F согласно (III.2.26).

При сложном характере изменения функции оригинала можно использовать зависимости, основанные на аппроксимации функции оригинала ступенчатым или ломаным графиком. При аппроксимации функции $f(t)$ ступенчатым графиком (см. рис. 55, *а*) интеграл (III.2.25) рассчитывается по формуле

$$F(p) = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i e^{-pt_i}, \qquad \text{(III.2.27)}$$

где n — число дополнительных ступеней после начальной. При аппроксимации функции $f(t)$ ломаной линией (см. рис. 55, *б*) интеграл (III.2.25) рассчитывается по формуле

$$F(p) = \frac{1}{p}\left[v_0 + \sum_{i=1}^{n} (v_i - v_{i-1}) e^{-pt_i}\right], \qquad \text{(III.2.27а)}$$

где n — число дополнительных ветвей ломаной линии. В этих выражениях число членов n ограничивается значением, при котором последующие члены ряда становятся пренебрежимо малыми.

Погрешности расчетов изображений ΔF_p зависят от времени $t_{макс}$, в пределах которого задаются значения $f(t)$. Для оптимального выбора параметра преобразования следует, исходя из условия ограничения погрешностей вычислений в пределах 2—3%, задавать значения t_p, соблюдая условие

$$t_p < \frac{1}{6} t_{макс}. \qquad \text{(III.2.28)}$$

Если первые наблюдения — до момента $t_{мин}$ — по каким-либо причинам недостоверны, то следует принимать, кроме того, $t_p > 2t_{мин}$. Во многих случаях верхний предел t_p удается увеличить на основе асимптотических оценок функции $f(t)$ при $t > t_{макс}$ и последующего вычисления ΔF_p. В частности, если при проведении опыта достигнут стационарный режим фильтрации, ограничение на t_p по $t_{макс}$ может не накладываться, поскольку поведение функции $f(t)$ определено до $t \to \infty$ и значение интеграла (III.2.27) может быть вычислено для любого t_p.

Отыскание функций оригинала $f(t)$ на основании численных значений ее операторных изображений $F_p(p)$ по Лапласу — Карсону, заданных при нескольких значениях p, можно произвести на основе численных методов обращения интегральных преобразований. При относительно постоянных во времени граничных условиях рекомендуется [13] находить значения оригинала из выражения

$$f(t_k) = \sum_{k=1}^{n} B_k F_p(\bar{p}_k), \qquad \text{(III.2.29)}$$

Таблица III.1

$\bar{p}_k$	Значения B_k при $\bar{t}_k$, равном															
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	
1	—1,48	—2,22	—2,23	—2,08	—1,8	—1,45	—1,07	—0,688	—0,304	0,069	0,425	0,761	1,08	1,37	1,63	
1/2	4,79	5,29	4,84	4,0	2,98	1,91	0,828	—0,218	—1,21	—2,14	—3,0	—3,79	—4,51	—5,15	—5,71	
1/4	—2,83	—2,59	—1,87	—1,0	—0,09	0,792	1,63	2,39	3,09	3,71	4,25	4,72	5,12	5,45	5,71	
1/8	0,525	0,424	0,253	0,072	—0,1	—0,254	—0,385	—0,493	—0,578	—0,639	—0,679	—0,697	—0,695	—0,673	—0,633	

для которого значения B_k берутся из табл. III. 1 при $\bar{t}_k = t_k/t_p$ и $\bar{p}_k = p_{k/p\ \text{макс}}$.

При расчетах по выражению (III.2.29) предварительно выбирается значение $p_{\text{макс}} = 1/t_p$ и находятся значения F_p $(\bar{p}_k)$, при $\bar{p}_k = 1$, $1/2$, $1/4$, $1/8$, после чего по табл. III.1 определяются величины B_k и рассчитывается $f(t_k)$; во избежание погрешностей интерполяции лучше задавать t_k, так, чтобы получились значения t_k, приведенные в табл. III.1. Используя принцип суперпозиции, можно решение, полученное для постоянных условий на границах, распространить и для любого закона их изменения на основе ступенчатой аппроксимации граничного условия.

Кроме того, для перехода от изображения к оригиналу для монотонных, неускоряющихся процессов рекомендуется [30] формула

$$f(t) = 0{,}9\left[-F(p_1) + \frac{16}{3} \times \right.$$

$$\left. \times F(p_2) - \frac{16}{5} F(p_3) \right], \qquad \text{(III.2.30)}$$

где $p_1 = 0{,}346\,\frac{1}{t}$, $p_2 = 3p_1$, $p_3 = 5\,p_1$; в этом случае для нахождения оригинала на какой-то один момент времени t необходимо иметь значения изображений при трех фиксированных параметрах преобразования F_p.

В качестве примера использования интегрального преобразования Лапласа — Карсона рассмотрим решение одномерной задачи нестационарной фильтрации, описываемой дифференциальным уравнением (III.2.1а), в полуограниченном потоке, на границе

которого задается условие третьего рода (III.1.34), а начальное распределение напоров стационарно. Обозначая через H_p изображение изменения уровня ΔH, преобразуем дифференциальное уравнение (III.2.1а) к виду

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial x^2} = \frac{H_p}{at_p}. \qquad \text{(III.2.31)}$$

Общее решение этого уравнения

$$H_p = C_1 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{at_p}}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{\sqrt{at_p}}\right). \qquad \text{(III.2.32)}$$

В полуограниченном потоке $C_2=0$, а C_1 находится из граничного условия (III.1.34) при $x=0$, которое для изображений принимает вид

$$\frac{\partial H_p}{\partial x} = \frac{H_p^0 - H_p}{\Delta L}, \qquad \text{(III.2.33)}$$

где H_p^0 — изображение изменений уровня в граничном водоеме. Подставляя в условие (III.2.33) H_p и $\partial H_p/\partial x$ при $x=0$ из (III.2.32), найдем C_1 и представим выражение (III.2.33) в виде

$$H_p = \frac{H_p^0}{1 + \frac{\Delta L}{\sqrt{at_p}}} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{at_p}}\right). \qquad \text{(III.2.34)}$$

Упражнение. Найти решение в изображениях по Лапласу — Карсону задачи изменения напора в одномерном однородном ограниченном потоке с заданием на границах $x=0$ и $x=L$ изменений уровней $H^0(t)$ и $H'(t)$ при исходном стационарном режиме. Для ограниченного потока уравнение (III.2.33) целесообразно сначала преобразовать к виду

$$H_p = C_1^0 \operatorname{sh} \lambda_x + C_2^0 \operatorname{ch} \lambda_x, \quad \lambda_x = \frac{x}{\sqrt{at_p}}, \qquad \text{(III.2.35)}$$

где новые произвольные постоянные $C_1^0 = C_2 - C_1$, $C_2^0 = C_2 + C_2$. Задавая далее условия $H_p = H_p^0$ при $x=0$ и $H_p = H_p'$ при $x=L$ (где H_p^0 и H_p' — изображения уровней ΔH^0 и $\Delta H'$), найдем C_1^0 и C_2^0:

$$C_1 = \frac{H_p' - H_p^0 \operatorname{ch} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda}, \quad C_2 = H_p^0, \quad \lambda = \frac{L}{\sqrt{at_p}}. \qquad \text{(III.2.35а)}$$

Для неоднородных областей решение в изображениях получается путем разделения потока на однородные фрагменты.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПО ДАННЫМ РЕЖИМНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Данные нестационарного режима несут важную информацию о фильтрационном строении водоносных пластов и происходящих в них процессах, поэтому большой интерес представляет оценка

возможности их применения для определения геофильтрационных параметров путем решения обратных задач геофильтрации.

Использование аналитических решений для определения гидрогеологических параметров, как правило, производится путем анализа реакции уровней в наблюдательных скважинах на какие-либо внешние изменения, осуществляемые на одной из границ водоносного пласта, причем обратные задачи решаются обычно подбором — путем перебора решений прямых задач. Чаще всего для этой цели используются аналитические решения дифференциальных уравнений для изменений напора. При наличии большого объема информации, особенно при завершении нестационарных процессов (при стабилизации подпора под влиянием водохранилищ или каналов, полном цикле колебаний уровня при прохождении паводка и т. п.), хорошие результаты дает применение решений в интегральных преобразованиях по Лапласу — Карсону.

3.1. Определение коэффициента уровнепроводности

Основной параметр нестационарной фильтрации — коэффициент уровнепроводности a, для определения которого целесообразно прежде всего воспользоваться данными режимных наблюдений в периоды проявления нестационарного режима (например, при паводке, наполнении или опорожнении водохранилищ и каналов и т. п.) при обязательном условии, чтобы в расчетный период времени инфильтрационное питание существенно не изменялось.

Удобнее для расчетов использовать такие участки потока в зоне влияния водоема (в котором происходят изменения уровня во времени), где поток может считаться линейным в плане. В этом случае наблюдательный створ располагается вдоль потока и должен включать в себя по крайней мере две наблюдательные скважины, устанавливаемые в основной водоносный пласт (рис. 58, *а*).

Для определения коэффициента уровнепроводности скважина, расположенная ближе к водоему, рассматривается как граничная, а дальняя скважина — как наблюдательная (индикаторная), причем противоположная граница потока обычно значительно удалена от наблюдательного створа, так что поток может считаться полуограниченным. Тогда, аппроксимируя график изменения уровня ΔH^0 в граничной скважине ломаной линией (рис. 58, *б*), изменения уровня в наблюдательной скважине можно описывать уравнением (III.2.18) при $F_v(x, t) = R(\lambda)$, т. е.

$$\Delta H = v_0 t R(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} (v_i - v_{i-1})(t - t_i) R(\lambda_i) \quad \lambda_i = \frac{x}{2\sqrt{a(t - t_i)}}, \tag{III.2.36}$$

где x — расстояние между скважинами.

Выбирая далее такой период времени, когда четко фиксируются изменения уровня в наблюдательной скважине, можно подобрать такое значение a, при котором значения ΔH, вычисленные по уравнению (III.2.36), и замеренные в наблюдательной

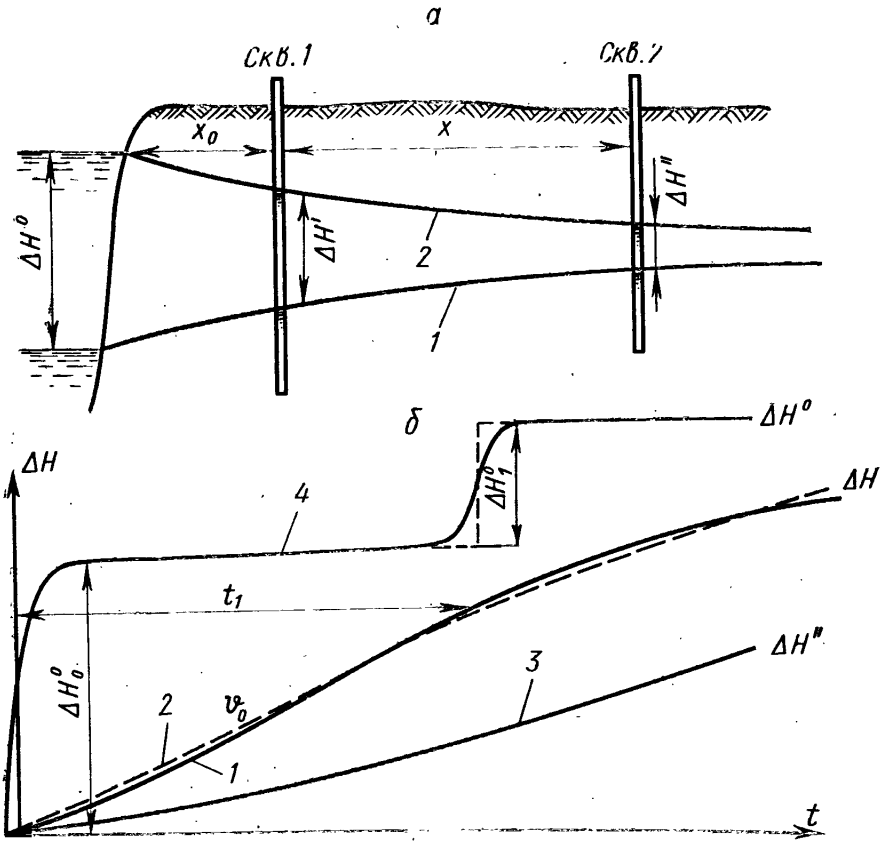


Рис. 58. Определение коэффициента уровнепроводности по данным режимных наблюдений:
а — наблюдательный створ (*1—2* — кривые депрессии при стационарном режиме и на расчетный момент времени); *б* — графики изменения уровней в наблюдательных скважинах (*1* и *2* — действительная кривая и аппроксимирующая ломаная линия уровней в скв. 1; *3* — график изменения уровня в скв. 2; *4* — график изменения уровня в водоеме)

скважине величины $\Delta H''$ достаточно хорошо согласуются между собой. Расчет заметно упрощается, если в расчетный период времени скорость изменения уровня в граничном пьезометре можно считать постоянной. Тогда можно воспользоваться уравнением (III.2.11), представив его в виде

$$\frac{\Delta H}{\Delta H^0} = R(\lambda), \qquad \text{(III.2.37)}$$

где ΔH и ΔH^0 — изменения уровня в наблюдательном и граничном пьезометрах за период времени t. По известным значениям $\Delta H = \Delta H'$ и $\Delta H^0 = \Delta H''$ определим из уравнения (III.2.37) величину $R(\lambda)$, далее по таблице приложения найдем значение λ и рассчитаем величину a по формуле:

$$a = \frac{x^2}{4\lambda^2 t}. \qquad \text{(III.2.37а)}$$

Если проводить расчеты в интегральных изображениях изменений уровней в скважинах, то согласно уравнению (III.2.34), записанному при $\Delta L = 0$, соотношение изображений уровней в граничной и наблюдательной скважинах (H_p^0 и H_p') будет

$$\frac{H_p^0}{H_p'} = \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{at_p}}\right). \qquad \text{(III.2.38)}$$

Логарифмируем это уравнение:

$$2{,}3 \lg \frac{H_p^0}{H_p'} = -\frac{x}{\sqrt{at_p}}. \qquad \text{(III.2.39)}$$

Обработку данных по этому уравнению удобно проводить, строя график зависимости $\lg(H_p^0/H_p')$ от $x/\sqrt{t_p}$ при разных t_p, на котором данные должны ложиться на прямую линию, приходящую в начало координат и имеющую уклон $0{,}435/\sqrt{a}$. Особенно эффективен такой способ расчета при наличии нескольких наблюдательных скважин, поскольку при этом данные по всем наблюдательным скважинам должны совпадать, причем это условие является важным диагностическим признаком правильности выбранной расчетной схемы процесса.

3.2. Оценка сопротивления ложа водоема

По данным нестационарного режима можно также определять величину ΔL, характеризующую сопротивление ложа водоема, используя данные об изменении уровня воды $\Delta H'$ в ближайшей к водоему наблюдательной скважине при изменениях уровня в водоеме ΔH^0. В этом случае теоретическое значение $\Delta H = \Delta H'$ можно определить по уравнению, описывающему изменение уровня вблизи несовершенной границы (границы третьего рода) в полуограниченном потоке, заменяя действительный график изменения уровня в водоеме ступенчатым, причем скважина, располагаемая вблизи водоема, рассматривается как наблюдательная, а теоретические изменения уровней $\Delta H'$ в ней определятся общим выражением (III.2.15) при $F(x, t)$, выражаемом согласно (III.2.12), т. е.

$$\Delta H' = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta H_i^0 F(\lambda, \theta_i), \quad \lambda_i = \frac{x_0}{2\sqrt{a(t-t_i)}}, \quad \theta_i = \frac{\sqrt{a(t-t_i)}}{\Delta L}, \tag{III.2.40}$$

причем в этом случае величина x_0 представляет собой расстояние от водоема до ближайшей скважины; значения функции $F(\lambda, \theta)$ находят по выражению (III.2.12). Определив предварительно изложенным выше путем величину a, можно найти из уравнения (III.2.40) подбором величину ΔL.

При одноступенчатом (мгновенном) изменении уровня на границе из уравнения (III.2.40) остается только один член, поэтому значения функции $F(\lambda, \theta)$ могут быть определены по формуле

$$\frac{\Delta H}{\Delta H^0} = F(\lambda, \theta), \tag{III.2.41}$$

после чего по предварительно построенному графику функции $F(\lambda, \theta)$ при известном λ находится значение θ, а затем рассчитывается ΔL, поскольку

$$\Delta L = \frac{\sqrt{at}}{\theta}. \tag{III.2.42}$$

При обработке таких данных по интегральным преобразованиям изменений уровней H_p^0 и H_p (в водоеме и ближайшей скважине) исходным является уравнение (III.2.34), из которого следует формула для определения величины ΔL:

$$\Delta L = \sqrt{at_p}\left[\frac{H_p^0}{H_p}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{at_p}}\right) - 1\right], \tag{III.2.43}$$

причем для проверки стабильности величины ΔL расчет по этой формуле может производиться при различных значениях t_p.

3.3. Определение параметров в покровных отложениях

Эффективным путем определения параметров в покровных отложениях при двухслойном строении водоносного пласта (см. рис. 50) является использование данных нестационарного режима уровней в ярусных скважинах-дублерах, располагаемых в нижнем и верхнем слоях, с расчетами по уравнению (III.1.15).

Прежде всего, выбирая такой расчетный период времени, когда происходят заметные изменения напора, а инфильтрация практически отсутствует (например, при колебаниях уровней в водохранилище или канале), т. е. при $w=0$, можно представить уравнение (III.1.15) в следующей форме:

$$\frac{k_п}{\mu} = \frac{v_h}{i_п}, \quad v_h = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad i_п = \frac{H - H^0}{m_п}, \tag{III.2.44}$$

где v_h — скорость изменения уровня свободной поверхности; $i_п$ — средний градиент напора в пределах покровного слоя.

Располагая скважину в верхнем слое невдалеке от свободной поверхности и выбирая для расчетов период сравнительно стабильной интенсивности изменения уровней, величину v_h можно считать равной скорости изменения уровня в верхней наблюдательной скважине, а градиент напора $i_п$ определять по разнице уровней $\Delta H_п$ между наблюдательными скважинами, т. е. принимая $i_п = \frac{\Delta H_п}{m_п^0}$. В дальнейшем, зная величину $k_п/\mu$, можно определять величину w/μ, преобразуя уравнение (III.1.15) к виду

$$\frac{w}{\mu} = v_h - \frac{k_п}{\mu} i_п \qquad \text{(III.2.45)}$$

При неоднородном строении покровных отложений можно, кроме того, по данным наблюдений за уровнями в этажных скважинах, располагаемых на границах слоев, найти соотношение коэффициентов фильтрации отдельных слоев, исходя из того, что эти соотношения должны быть обратно пропорциональны градиентам напора в отдельных слоях. Например, при двухслойном строении покровного слоя (см. рис. 50, *б*) будем иметь соотношение

$$\frac{k_п'}{k_п''} = \frac{i_п''}{i_п'}, \quad i_п' = \frac{\Delta H_п'}{m_п'}, \quad i_п = \frac{\Delta H_п''}{m_п''} \qquad \text{(III.2.46)}$$

Разумеется, что такие расчеты будут правомерными только при условии, что различия в уровнях между этажными пьезометрами существенно превышают возможные погрешности измерения уровней.

Расчеты коэффициента уровнепроводности и характеристики сопротивления ложа водоема при двухслойном строении пласта могут проводиться по изложенной выше методике, если время периодов монотонного изменения уровней превышает величину t_0, определяемую согласно (III.2.24); в противном случае эти расчеты следует вести с использованием зависимостей, учитывающих двухслойный характер строения водоносного пласта [20, 49]. Для расчетов коэффициента уровнепроводности при двухслойном строении пласта целесообразно использовать решения в интегральных изображениях по Лапласу — Карсону. Для изменения уровней ΔH, отсчитываемых от начального стационарного положения, система дифференциальных уравнений (III.1.14) и (III.1.15) в одномерном потоке с постоянной проводимостью принимает вид

$$T \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial x^2} = \frac{k_п}{m_п}(\Delta H - \Delta H^0), \quad \mu \frac{\partial \Delta H^0}{\partial t} = \frac{k_п}{m_п}(\Delta H - \Delta H_0). \qquad \text{(III.2.47)}$$

Преобразуем эту систему уравнений, вводя вместо величин H и H^0 их интегральные изображения H_p и H_p^0, что при нулевых начальных условиях для ΔH и ΔH^0 дает

$$T\frac{\partial^2 H_p}{\partial x^2}=\frac{k_{\text{п}}}{m_{\text{п}}}(H_p-H_p^0),\quad \frac{\mu H_p^0}{t_p}=\frac{k_{\text{п}}}{m_{\text{п}}}(H_p-H_p^0). \qquad \text{(III.2.48)}$$

Выражая из второго уравнения (III.2.48) H_p^0, имеем

$$H_p^0=\frac{H_p}{1+\dfrac{\mu m_{\text{п}}}{k_{\text{п}}t_{\text{р}}}}, \qquad \text{(III.2.49)}$$

а подставляя это выражение в первое из уравнений (III.2.48), получим уравнение для изображения изменения напора в нижнем пласте:

$$\frac{\partial^2 H_p}{\partial x^2}=\frac{H_p}{B^2+at_p},\quad B^2=T\cdot\frac{m_{\text{п}}}{k_{\text{п}}},\quad a=\frac{T}{\mu}. \qquad \text{(III.2.50)}$$

Решение этого уравнения для полуограниченного потока, у которого на границе $x=0$ задано значение $H_p=H_p^0$, имеет вид

$$H_p=H_p^0\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{B^2+at_p}}\right) \qquad \text{(III.2.51)}$$

Применим это уравнение для обработки данных нестационарного режима уровней в наблюдательном створе, расположенном по направлению одномерного в плане потока, когда граница $x=0$ задается в крайнем (граничном) пьезометре, со стороны которого распространяется возмущение потока. Тогда величина H_0 представляет собой изображение изменений напора в граничном пьезометре, а величины H_p соответствуют изображениям изменений напоров в наблюдательных скважинах, отстоящих на расстояниях x от граничной. Обобщенную обработку таких данных целесообразно проводить, нанося опытные данные, подсчитанные для различных значений t_p, на единый график в координатах $X=x/\ln\dfrac{H_p^0}{H_p}$ и t_p. На таком графике все опытные точки должны лечь на одну прямую, отсекающую на оси X (при $t_p=0$) отрезок B^2 и имеющую уклон к оси t_p, численно равный a. Прямолинейность такого графика является диагностическим признаком правильности рассматриваемой расчетной схемы.

Глава 3
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Численные решения задач нестационарной фильтрации в своей теоретической основе имеют обычно метод конечных разностей (метод сеток), который может реализоваться и в ручном счете,

однако в значительно большей мере он используется как теоретическая основа методов вычислительной техники, и прежде всего для обоснования сеточных интеграторов.

§ 1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАНОВОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО БЕЗНАПОРНОГО ПОТОКА

Конечно-разностные уравнения планового нестационарного безнапорного потока выведем применительно к наиболее распространенной прямоугольной сетке, ориентированной по осям x и y, причем границы блоков проводятся посередине между узловыми точками (рис. 59, *а*). Рассмотрим баланс потока в блоке номера i, j, учитывая кроме расхода потоков, проходящих через границы блока, еще расход площадного питания (инфильтрации и испарения) $Q_w = w\,\Delta x_i \cdot \Delta y_j$, а также расход внутренних источников питания или стока (скважин, дрен, каналов и т. п.) $Q_{ис}$. Балансовое уравнение составим, считая, что суммарное поступление воды в блок за время Δt компенсируется изменением объема воды в блоке $\Delta V_б$:

$$(Q_{i-1} + Q_{i+1} + Q_{j-1} + Q_{j+1} + Q_w + Q_{ис})\,\Delta t = \Delta V_б, \qquad \text{(III.3.1)}$$

где Q_{i-1}, Q_{i+1}, Q_{j-1}, Q_{j+1} — расходы потоков, поступающих в расчетный блок из соседних блоков соответствующего номера.

Свяжем далее балансовые элементы с напорами потока. Для этого прежде всего введем понятие емкости блока C, представляющей собой изменение объема воды в блоке, отнесенное к изменению уровня воды в узловой точке блока $\Delta H_б$, т. е.

$$C = \frac{\Delta V_б}{\Delta H_б}, \qquad \text{(III.3.2)}$$

причем для прямоугольной сетки

$$C = \mu \Delta x_i \Delta y_j,$$

$$\Delta x_i = 0{,}5\,(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1}),\quad \Delta y_j = 0{,}5\,(\Delta y_{j-1} + \Delta y_{j+1}). \qquad \text{(III.3.3)}$$

Далее, согласно (I.6.13) запишем выражения для расходов на границах блока

$$\left.\begin{aligned} Q_{i-1} &= \frac{H_{i-1} - H_{i,j}}{\Phi_{i-1}},\quad Q_{i+1} = \frac{H_{i+1} - H_{i,j}}{\Phi_{i+1}}, \\ Q_{j-1} &= \frac{H_{j-1} - H_{i,j}}{\Phi_{j-1}},\quad Q_{j+1} = \frac{H_{j+1} - H_{i,j}}{\Phi_{j+1}}, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.3.4)}$$

где Φ_{i-1}, Φ_{i+1}, Φ_{j-1}, Φ_{j+1} — фильтрационные сопротивления между блоками соответствующего номера и расчетным блоком, причем из общих выражений (II.3.16) имеем

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{i-1}&=\frac{\Delta x_{i-1}}{T_{i-1}\Delta y_j},\quad \Phi_{i+1}=\frac{\Delta x_{i+1}}{T_{i+1}\Delta y_j}\\ \Phi_{j-1}&=\frac{\Delta y_{j-1}}{T_{j-1}\Delta x_i},\quad \Phi_{j+1}=\frac{\Delta y_{j+1}}{T_{j+1}\Delta x_i}\end{aligned}\right\}\qquad \text{(III.3.5)}$$

где T_{i-1}, T_{i+1}, T_{j-1}, T_{j+1} — средние значения проводимости пласта между расчетной узловой точкой и соседними узлами соответствующего номера.

Аналогичный вид будут иметь конечно-разностные уравнения планового напорного потока, для получения которых в выражении емкости блока (III.3.3) заменяется μ на μ^* и расход площадного питания на расход площадного перетекания. В выражениях (III.3.4) значения напоров могут приниматься на начало или конец расчетного интервала Δt; такие разностные схемы называются соответственно *явной* и *неявной*; кроме того, используются различные варианты явно-неявных разностных схем, из которых наиболее употребительна *симметричная схема*, когда напоры принимаются средними между значениями на начало и конец интервала [26, 40].

Рассмотрим некоторые преобразования этой системы для случая одномерного (линейного) в плане потока, совпадающего с направлением оси x (рис. 59, *б*).

Выражения для удельных расходов q_{i-1} и q_{i+1} между расчетными блоками номера i и соседними блоками $i-1$ и $i+1$ здесь будут

$$q_{i-1}=\frac{H_{i-1}-H_i}{\Phi_{i-1}},\quad q_{i+1}=\frac{H_i-H_{i+1}}{\Phi_{i+1}},\qquad \text{(III.3.6)}$$

причем выражения для фильтрационных сопротивлений получатся из общей формулы (III.3.2) при l_i, равном расстоянию между центрами соответствующих блоков и ширине $B_i=1$ м, т. е.

$$\Phi_{i-1}=\frac{\Delta x_{i-1}}{T_{i-1}},\quad \Phi_{i+1}=\frac{\Delta x_{i+1}}{T_{i+1}},\qquad \text{(III.3.7)}$$

где T_{i-1} и T_{i+1} — средние значения проводимости потока между блоками $i-1$ и i, $i+1$. Соответственно балансовое уравнение (III.3.3) примет вид

$$(q_{i-1}-q_{i+1}+q_{\text{w}}^{(i)}+q_{\text{ис}}^{(i)})\,\Delta t=C_i\Delta H_i,\quad \Delta H_i=H_i-H_i^0,\qquad \text{(III.3.8)}$$

причем емкость блока C_i и удельный инфильтрационный расход $q_{\text{w}}^{(i)}$ будут

$$C_i=\mu\Delta x_i,\quad q_{\text{w}}^{(i)}=\text{w}\Delta x_i.\qquad \text{(III.3.9)}$$

Непосредственные расчеты по конечно-разностным уравнениям с использованием ручного счета применяются для балансовых расчетов [20, 25, 34] и решения обратных задач, т. е. для

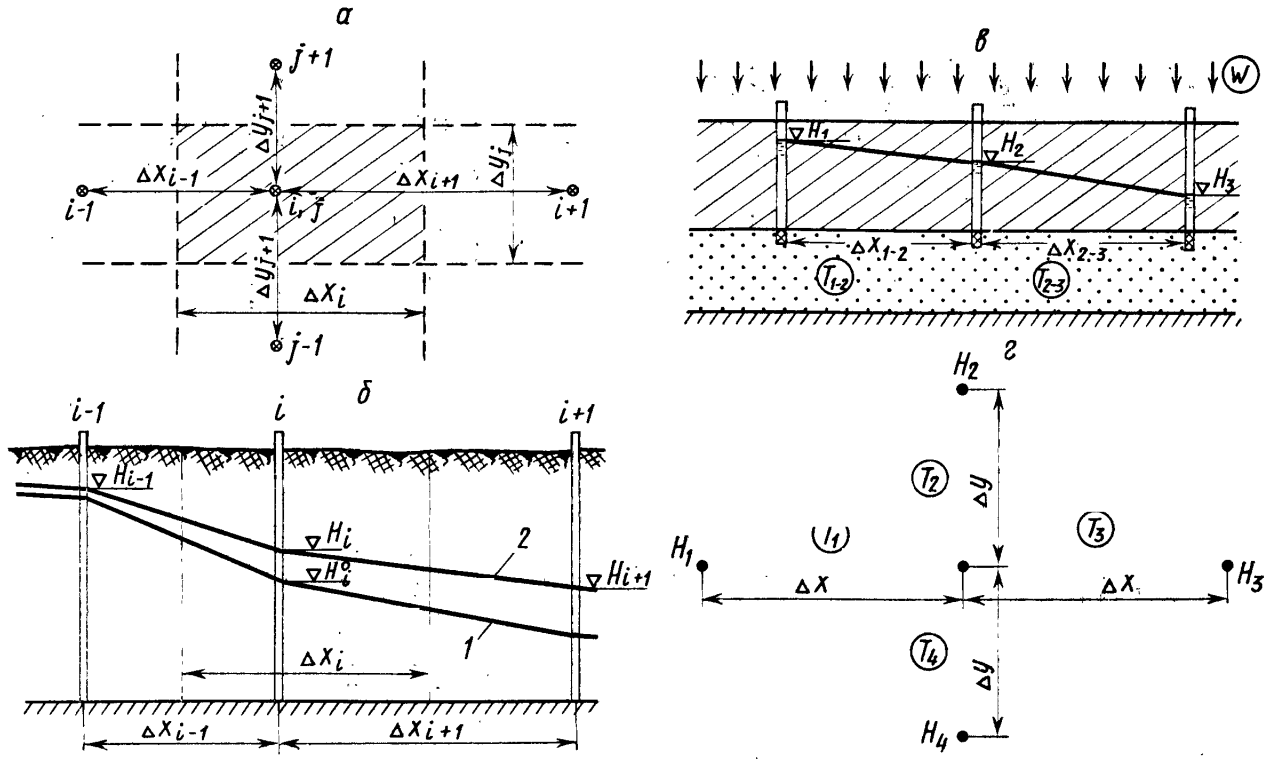


Рис. 59. Схемы к обоснованию конечно-разностных уравнений нестационарного планового потока: *а* — прямоугольная сетка плоского потока в декартовых координатах (заштрихован блок, относящийся к расчетной узловой точке *i, j*); *б* — сеточная разбивка одномерного потока (1 и 2 — уровни на начало и конец расчетного интервала времени Δt); *в* — наблюдательный створ для определения w в одномерном потоке; *г* — расположение наблюдательных скважин в плане по «кресту» при постоянном шаге по координатам

определения гидродинамических параметров по данным режимных наблюдений, как это впервые было предложено Г. Н. Каменским [17]. Рассмотрим методику такого расчета на примере линейного в плане потока, вдоль которого располагается створ на трех наблюдательных скважинах (рис. 59, *б*), так что в этом случае можно использовать балансовое уравнение (III.3.8). Совмещая узловые точки с наблюдательными скважинами, считаем, что уровень в средней скважине соответствует расчетному уровню в блоке шириной $\Delta x_i = 0{,}5\,(\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i+1})$, и величины ΔH_i определяются по изменениям уровня в средней скважине. Заметим, что для лучшего выполнения этого условия среднюю наблюдательную скважину целесообразно располагать посередине между крайними.

Выражения для расходов потока q_{i-1} и q_{i+1} запишем в виде

$$q_{i-1} = T_{i-1} I_{i-1}, \quad q_{i+1} = T_{i+1} I_{i+1}, \qquad \text{(III.3.10)}$$

где T_{i-1} и T_{i+1} — средние значения проводимостей, а I_{i-1} и I_{i+1} — расчетные значения градиентов напора между скважинами номера i—1, i и i, i+1. При решении обратной задачи целесообразно использовать симметричную разностную схему, задавая градиенты напора I_{i-1} и I_{i+1} средними между их значениями на начало и конец расчетного интервала Δt (они положительны, если направлены в сторону средней скважины, и отрицательны в противном случае). Для уменьшения случайных ошибок Н. Н. Биндеман [7] предложил задавать достаточно большой интервал Δt, но для нахождения среднего значения разбивать этот интервал на несколько более мелких и определять расчетную величину по средневзвешенному по времени.

Подставляя в балансовое уравнение (III.3.8) выражения (III.3.9) и (III.3.10) для входящих в него компонентов, получим

$$(T_{i-1} I_{i-1} + T_{i+1} I_{i+1} + w \Delta x_i + q_{\text{ис}}^{(i)})\, \Delta t = \mu \Delta x_i \Delta H_i. \qquad \text{(III.3.11)}$$

Из уравнения (III.3.11) при $w = 0$ и $q_{\text{ис}}^{(i)} = 0$ можно определить коэффициент уровнепроводности

$$a_{i-1} = \frac{T_{i-1}}{\mu} = \frac{\Delta x_i \Delta H_i}{\Delta t \left(I_{i-1} - \dfrac{T_{i+1}}{T_{i-1}} I_{i+1} \right)}, \qquad \text{(III.3.12)}$$

причем соотношение проводимости T_{i+1}/T_{i-1} находится из анализа данных стационарного режима (см. § 2 главы 1 раздела II).

При известных параметрах T и μ из (III.3.11) находится интенсивность инфильтрации

$$w = \frac{\mu \Delta H_i}{\Delta t} - \frac{T_{i-1} I_{i-1} - T_{i+1} I_{i+1}}{\Delta x_i}. \qquad \text{(III.3.13)}$$

Трудности использования этого выражения обусловливаются наличием в его правой части коэффициента емкости и проводимос-

тей в различных участках потока. Особенно неприятно влияние проводимости, поскольку ее изменения могут не только заметно изменять величину w, но и приводить к изменению ее знака. Поэтому расчет величины w по данным стационарного режима можно проводить только при изменении расхода потока в пределах наблюдательного участка, значительно превышающем возможные изменения проводимости пласта (например, по данным наблюдений на орошаемой территории). Предварительно следует попытаться определить соотношение проводимостей на отдельных участках потока по данным о соотношении градиентов напора в такие периоды стационарного режима, когда инфильтрация практически отсутствует. Более ясно проходит интерпретация по уравнению (III.3.13) данных нестационарного режима уровней, если определяющим является член $\mu \frac{\Delta H}{\Delta t}$. При этом только могут возникать погрешности в связи с изменением величины μ, обусловленным влиянием капиллярной зоны и неоднородностью строения зоны аэрации.

Во многих работах [20, 25, 34] такие конечно-разностные уравнения представляются для условий неизменной по длине потока проводимости, т. е. при $T_{i-1}=T_{i+1}$ (или при неизменном коэффициенте фильтрации для схемы Дюпюи). Однако в реальных условиях изменения проводимости бывают существенными, и пренебрежение ими может привести к резким ошибкам и даже к абсурдным результатам в определении параметров (например, может получиться отрицательный коэффициент уровнепроводности [49]).

Упражнение. Получить выражения для определения параметров μ и w в плановом потоке при наличии «креста» наблюдательных скважин (см. рис. 59, *г*), исходя из уравнения (III.3.5):

а) при отсутствии инфильтрации

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta H}\left[\frac{T_1(H_1-H)+T_3(H_3-H)}{\Delta x^2}+\frac{T_2(H_2-H)+T_4(H_4-H)}{\Delta y^2}\right]; \qquad \text{(III.3.14)}$$

б) при наличии инфильтрации и известном значении μ

$$w = \mu\frac{\Delta H}{\Delta t}+\frac{T_1(H-H_1)+T_3(H-H_3)}{\Delta x^2}+\frac{T_2(H-H_2)+T_4(H-H_4)}{\Delta y^2}, \qquad \text{(III.3.14а)}$$

где H — уровень воды (напор) в центральной скважине; H_i — уровни воды (напоры) в периферийных скважинах; ΔH — изменение уровня в центральной скважине за расчетный интервал времени Δt; T_i — среднее значение проводимости пласта между i-той периферийной и центральной скважинами ($i=1, 2, 3, 4$).

Наиболее широко конечно-разностные уравнения используются в качестве теоретической основы для моделирования на вычис-

лительных машинах (сеточных интеграторах и электронных цифровых машинах). Построение рациональных конечно-разностных схем (обоснование пространственной разбивки потока и представление процесса во времени) применительно к особенностям вычислительных машин выделяется в этап *вычислительной схематизации*, правильное решение которого в значительной степени определяет эффективность моделирования.

Специфические проблемы вычислительной схематизации возникают при решении обратных задач геофильтрации, когда на период режимных наблюдений осуществляется решение ряда прямых задач по эпигнозу режима подземных вод с различными параметрами и в качестве расчетных принимаются такие их значения, которые позволяют получить наилучшее приближение натурных и модельных данных. Методика такого моделирования требует внимательного сочетания формально-математических построений с геологическими закономерностями [26, 31].

§ 2. ТЕОРИЯ И УСТРОЙСТВО ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРАТОРА

Наиболее наглядно моделирование нестационарной фильтрации выполняется на гидравлическом интеграторе, современная конструкция которого разработана В. С. Лукьяновым [27]. Гидроинтеграторы марки ИГЛ состоят из сетки гидравлических сопротивлений, к которым в узловых точках подсоединяются гидравлические емкости (сосуды).

Гидравлические сопротивления, понимаемые как отношение потерь напора Δh на трубке к протекающему через нее расходу $q^м$, образуются трубками сопротивлени устройство которых показано на рис. 60, *а*. Регулировка сопротивлений трубки достигается изменением длины кольцевого канала между корпусом и плунжером трубки (толщина этого канала 0,18 мм). Малый размер канала трубки предопределяет в нем установление ламинарного режима течения, при котором потери напора Δh пропорциональны расходу $q^м$, так что сопротивление трубки не зависит от расхода и является параметром трубки. Обычные трубки сопротивлений изготавливаются с номиналом сопротивления $R_г$ до 1 мин/см^2, а трубки повышенных сопротивлений — с $R_г$ до 10 мин/см^2, причем нижним пределом сопротивления можно считать величину порядка 5—10% от номинала.

Сопротивления соединяются в узловых точках, где помещаются сосуды емкостей из нержавеющей стали с площадью горизонтального сечения ω=5, 10 и 20 см^2 (рис. 60, *б*). Для изменения площади сечения сосудов используются также металлические или плексигласовые вкладыши поперечным сечением 0,5 и 2 см^2. Кроме того, в состав емкостей входят пьезометры — стеклянные трубки сечением 0,5 см^2, расположенные на передней и задней стенках

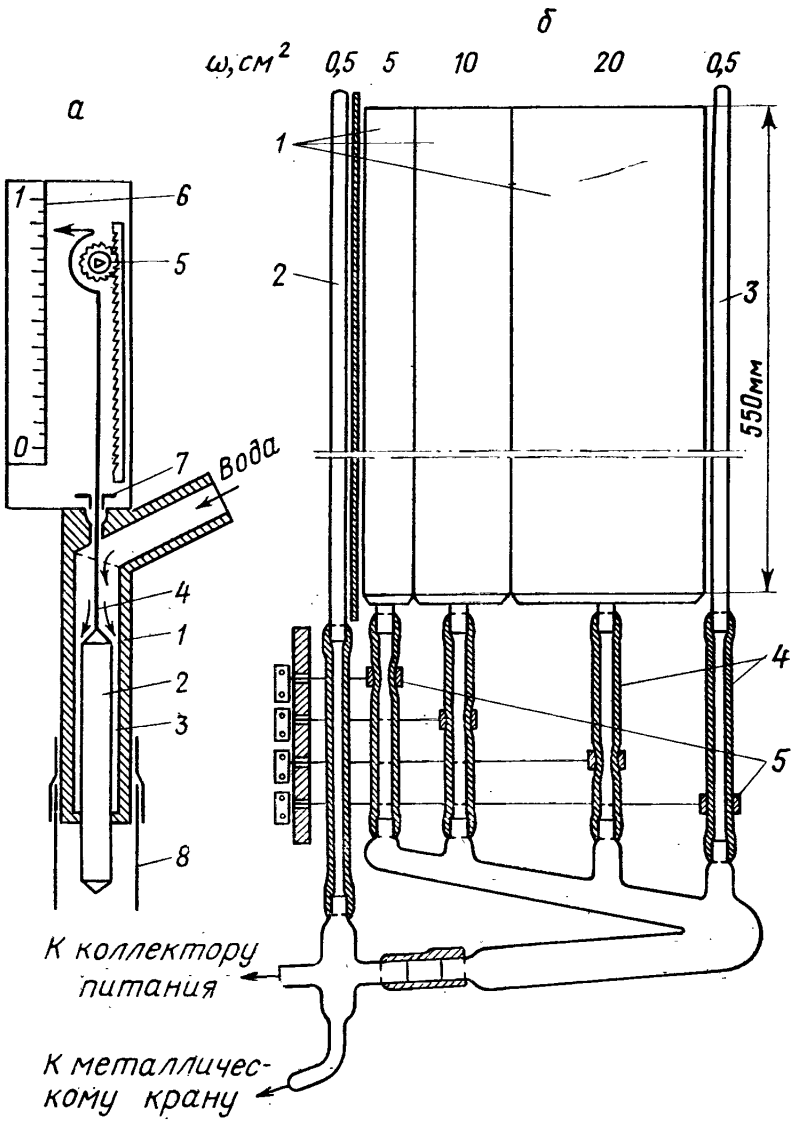


Рис. 60. Основные элементы гидроинтегратора:
а — трубка сопротивлений (*1* — корпус, *2* — плунжер, *3* — кольцевой канал, *4* — шток, *5* — установочный механизм, *6* — шкала трубки, *7* — сальник, *8* — колпак); *б* — сосуды емкостей (*1* — металлические сосуды, *2* и *3* — передний и задний пьезометры, *4* — резиновые трубки, *5* — зажимы)

секции. Таким образом, наибольшая площадь сосудов может быть задана 36 см², наименьшая — 0,5 см² (один передний пьезометр) [1].

Цепочки сопротивлений и емкостей объединяются в секции по 10 узловых точек в каждой. На задней секции размещаются трубки сопротивлений для задания внутреннего питания с расходом $q_w^м$. При заданной величине $q_w^м$ величина сопротивления R_w трубок внутреннего питания устанавливается при разности напоров Δh_w по формуле

$$R_w = \frac{\Delta h_w}{q_w^м}. \qquad \text{(III.3.15)}$$

Для задания граничных условий служит специальная установка с подвижными водосливами, которая дает возможность представить на модели любой закон изменения уровней в трех различных вариантах. Таким образом, в общем случае одна установка граничных условий позволяет задать их в трех точках модели.

Для вывода основных закономерностей моделирования на гидроинтеграторе рассмотрим уравнение баланса в узловой точке i (рис. 61), причем для упрощения техники вывода рассмотрим одномерную цепочку сопротивлений и емкостей. Если $q_{i-1}^м$ и $q_{i+1}^м$ — расходы на гидроинтеграторе между расчетным блоком i и соседними узловыми точками $i-1$ и $i+1$, а Δh_i — подъем уровня в сосуде емкости номера i и площадью ω_i за время $\Delta t_м$, то

$$(q_{i-1}^м + q_{i+1}^м + q_w^м)\,\Delta t_м = \omega_i \Delta h_i, \qquad \text{(III.3.16)}$$

причем

$$q_{i-1}^м = \frac{h_{i-1} - h_i}{R_{i-1}},\quad q_{i+1}^м = \frac{h_i - h_{i+1}}{R_{i+1}}, \qquad \text{(III.3.17)}$$

где R_{i-1} и R_{i+1} — гидравлические сопротивления между соответствующими узлами.

Сопоставим уравнения (III.3.16) и (III.3.17) с аналогичными конечно-разностными уравнениями одномерного нестационарного потока (III.3.8) и (III.3.6), и для их связи введем следующие масштабные соотношения:

$$\Delta H = \alpha_H \Delta h,\ q = \alpha_q q^м,\ q_w = \alpha_q q_w^м,\ t = \alpha_t t_м,\ C = \alpha_C \omega,\ \Phi = \alpha_\Phi R_г, \qquad \text{(III.3.18)}$$

где α_H — масштаб напоров — отношение разницы напоров в блоках фильтрационного потока к разнице уровней в соответствую-

---

[1] Границы емкостей могут быть сравнительно несложным образом расширены: снижение нижней границы достигается уменьшением поперечного сечения пьезометра; повышение же верхней границы достигается подключением специальной приставки к секции интегратора с сосудами большого поперечного сечения.

щих узловых точках на гидроинтеграторе; α_q — масштаб расходов — отношение расходов фильтрационного потока к расходам на интеграторе; α_C — масштаб емкостей — отношение емкостей блока C к площади сечения соответствующего сосуда ω; α_t — масштаб времени — отношение времени в натуре и на интеграторе; α_Φ — масштаб фильтрационных сопротивлений — отношение фильтрационных Φ и гидравлических R_Γ сопротивлений. Поскольку

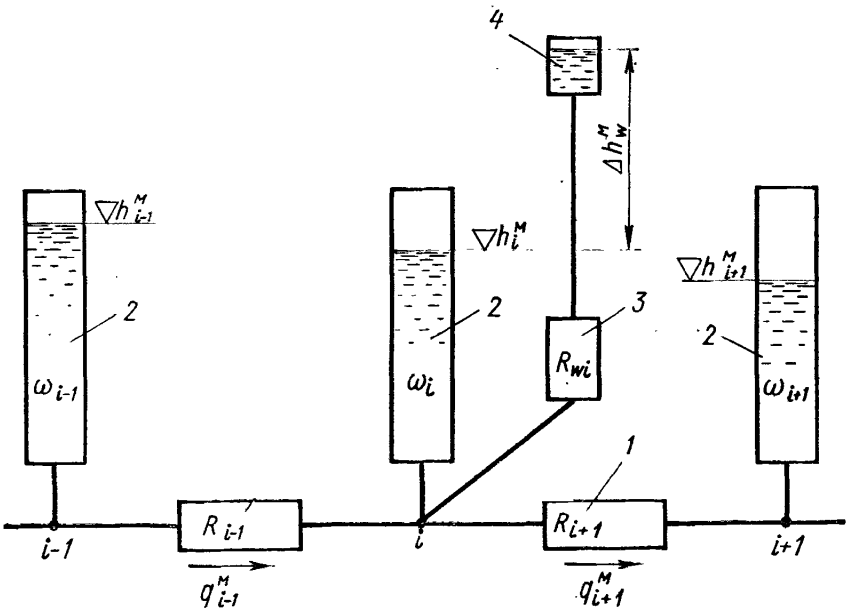


Рис. 61. Схема узла гидроинтегратора типа ИГЛ:
1 — основные трубки сопротивлений; *2* — сосуды емкостей; *3* — инфильтрационные трубки; *4* — питающий водослив

характеристики фильтрационного потока измеряются обычно в метрах и сутках, а на гидроинтеграторе принято все замерять в сантиметрах и минутах, то приведенные масштабы имеют следующие размерности:

$$[\alpha_H] = \frac{\text{м}}{\text{см}},\quad [\alpha_q] = \frac{\text{м}^3}{\text{сут}} \cdot \frac{\text{мин}}{\text{см}^3},\quad [\alpha_C] = \frac{\text{м}^2}{\text{см}^2},$$

$$[\alpha_t] = \frac{\text{сут}}{\text{мин}},\quad [\alpha_\Phi] = \frac{\text{сут}}{\text{м}^2} \cdot \frac{\text{см}^2}{\text{мин}}. \qquad \text{(III.3.19)}$$

Выражая в формуле (III.3.6) расходы, напоры и фильтрационные сопротивления через масштабные соотношения, согласно (III.3.18) получим

$$\alpha_q q_{i-1}^M \frac{\alpha_H (h_{i-1} - h_i)}{\alpha_\Phi R_{i-1}},\quad \alpha_q q_{i+1}^M = \frac{\alpha_H (h_i - h_{i+1})}{\alpha_\Phi R_{i+1}}. \qquad \text{(III.3.20)}$$

Ставя условие тождественности выражений (III.3.17) и (III.3.20), найдем первое масштабное соотношение

$$\alpha_q = \frac{\alpha_H}{\alpha_\Phi}. \qquad \text{(III.3.21)}$$

Аналогичным образом введем масштабные соотношения в балансовое уравнение (III.3.8):

$$\alpha_q (q^{\text{м}}_{i-1} - q^{\text{м}}_{i+1} + q^{\text{м}}_{\text{w}}) \alpha_t \Delta t_{\text{м}} = \alpha_C \omega_i \alpha_H \Delta h_i, \qquad \text{(III.3.22)}$$

причем из условия тождественности уравнений (III.3.16) и (III.3.22) найдем второе масштабное соотношение

$$\alpha_q \alpha_t = \alpha_C \alpha_H. \qquad \text{(III.3.23)}$$

Подставляя сюда α_q из (III.3.21), получим формулу для определения масштаба времени

$$\alpha_t = \alpha_C \alpha_\Phi \frac{\text{сут}}{\text{мин}}. \qquad \text{(III.3.24)}$$

Для расчетов гидромодели после разбивки потока на блоки, определения фильтрационных сопротивлений между центрами блоков и емкостей блоков выбираются масштабы емкостей α_C и сопротивлений α_Φ из условия, чтобы максимальное и минимальное значения ω и R_Γ хорошо укладывались в диапазон возможного их задания на интеграторе. После этого по формуле (III.3.24) определяется масштаб времени, и если его значение оказывается удовлетворительным (обычно целесообразно добиваться, чтобы расчет на модели продолжался несколько десятков минут), то расчет гидромодели можно считать законченным, в противном случае масштабы сопротивлений и емкости вновь подбираются таким образом, чтобы добиться приемлемого значения масштаба времени.

§ 3. ТЕОРИЯ И УСТРОЙСТВО ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАТОРОВ

Основную часть сеточных электроинтеграторов составляет двухкоординатная сетка электрических сопротивлений, соединяемых в узловых точках; кроме того, в узловые точки могут подсоединяться дополнительные активные сопротивления и электрические емкости — конденсаторы.

Для решения задач нестационарной фильтрации используются два принципиально различных типа моделирующих электрических сеток: сетка *RC*, состоящая из активных сопротивлений и емкостей, и сетка *RR*, состоящая только из активных сопротивлений.

3.1. Электроинтегратор на основе RC-сетки

Электроинтегратор такого типа можно рассматривать как электрический вариант описанного выше гидроинтегратора. Он состоит из сетки электрических сопротивлений, соединенных в узловых точках, куда также подсоединяются электрические емкости (рис. 62, *а*). Кроме того, в состав такого электроинтегратора входят блок питания, представляющий собой генератор сигналов

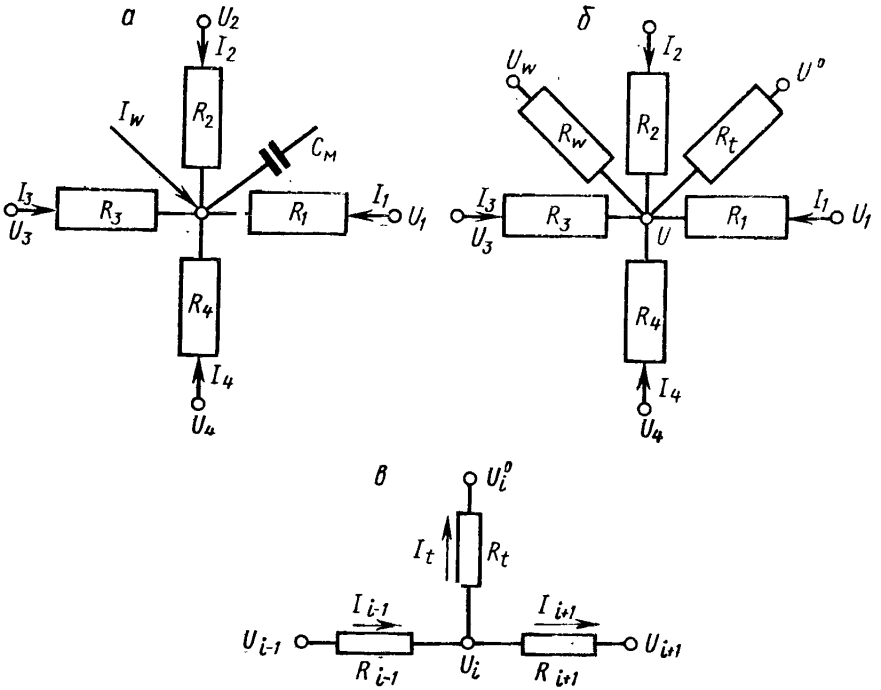


Рис. 62. Схема узла электроинтеграторов:
а и *б* — двухмерные сетки RC и RR; *в* — одномерная сетка Либманна

заданной формы, и измерительное устройство с электронно-лучевой трубкой, фиксирующей изменение электрического потенциала в любой узловой точке модели [18, 26].

Баланс тока в узловой точке такого интегратора будет

$$\sum_{i=1}^{4} I_i + I_c = 0, \qquad \text{(III.3.25)}$$

причем сила тока I_c, образующаяся при разрядке конденсатора, пропорциональна скорости изменения потенциала на выходе из конденсатора:

$$I_c = -C_м \frac{\partial U}{\partial t}, \qquad \text{(III.3.26)}$$

где $C_м$ — емкость конденсатора на модели, а сила тока в активных сопротивлениях R_i определится по закону Ома:

$$I_i = \frac{U_i - U}{R_i}. \qquad \text{(III.3.27)}$$

Тогда уравнение (III.3.25) примет вид

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{U_i - U}{R_i} = C_м \frac{\partial U}{\partial t} \qquad \text{(III.3.28)}$$

Сопоставим уравнение (III.3.28) с уравнением (III.3.5), в котором для непрерывно протекающего процесса заменяется $\Delta H/\Delta t$ на $\partial H/\partial t$, считая отсутствующими внутренние источники питания-стока (при w=0 и $Q_{ис}$=0). Вводя масштабные коэффициенты

$$\alpha_H = \frac{\Delta H}{\Delta U}, \quad \alpha_\Phi = \frac{\Phi}{R}, \quad \alpha_C = \frac{C}{C_м}, \quad \alpha_t = \frac{t}{t_м} \qquad \text{(III.3.29)}$$

в одно из этих уравнений, можно видеть, что они тождественно переходят друг в друга, если масштаб времени определить формулой

$$\alpha_t = \alpha_\Phi \alpha_C. \qquad \text{(III.3.30)}$$

Если, кроме того, задаются независимо действующие источники питания, расход которых определяется суммой величин Q_w и $Q_{ис}$, то в узловые точки интегратора должна подаваться сила тока I_w (рис. 62, *в*), пропорциональная суммарному расходу инфильтрации и внутренних источников-стоков:

$$I_w = \frac{Q_w + Q_{ис}}{\alpha_Q}, \qquad \text{(III.3.31)}$$

где α_Q — масштаб расходов, определяемый сопоставлением выражения (III.3.4) для расхода фильтрационного потока с выражением (II.3.27) для силы тока; нетрудно видеть, что из условия их тождественности следует соотношение

$$\alpha_Q = \frac{\alpha_H}{\alpha_\Phi}. \qquad \text{(III.3.32)}$$

Порядок составления моделирующей сетки *RC* в своей основе аналогичен рассмотренному выше порядку составления гидромодели: после разбивки потока на блоки, определения фильтрационных сопротивлений между блоками и емкостей блоков выбираются масштабы сопротивлений α_Φ и емкостей α_C из условия, чтобы полученные при этом значения электрических сопротивлений и емкостей

$$R = \frac{\Phi}{\alpha_\Phi}, \quad C_м = \frac{C}{\alpha_C} \qquad \text{(III.3.33)}$$

оптимально укладывались в пределы их номинальных величин на интеграторе, причем величины R определяются в омах, а $C_м$ — в фарадах (Ф) или микрофарадах (мкФ$=10^{-6}$ Ф). Поскольку Ом$\times$Ф$=$с, то при задании емкости в фарадах получаемый по формуле (III.3.30) масштаб времени α_t будет иметь размерность

$$[\alpha_t] = [\alpha_\Phi][\alpha_C] = \frac{[\Phi][C]}{R][C_м]} = \frac{\text{сут} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \Phi} = \frac{\text{сут}}{\text{с}}.$$

Соответственно при задании емкости в микрофарадах масштаб времени, определяемый по формуле (III.3.30), получится в сутках за микросекунду.

Выбор величины масштаба времени должен обеспечить возможность решения нестационарной фильтрационной задачи в заданном диапазоне времени так, чтобы время решения задачи укладывалось в пределы возможной длительности процесса на модели $t_м^{макс}$, определяемой конструктивными особенностями используемого интегратора. Следует учесть также, что генератор сигналов, задающий граничные условия, формирует импульсы с некоторым искажением в начальном его участке длительностью $t_м^0$. В связи с этим масштаб времени должен задаваться таким, чтобы исследуемое время процесса существенно выходило за пределы времени $t_м^0$.

В частности, при использовании наиболее простого типа электроинтегратора нестационарных процессов ЭИНП-3/66 [26, 43] длительность модельного процесса может устанавливаться в диапазоне 1, 2, 10, 50 и 500 мс. Фронт нарастания прямоугольного импульса, задаваемого генератором сигналов прибора, измеряется величиной $t_м^0$ порядка 300 мкс, что сужает возможность использования диапазона в 1 и 2 мс.

Для построения сеточной RC-модели при использовании электроинтегратора ЭИНП-3/66 величины емкостей $C_м$ желательно ограничить диапазоном номинальных величин $1 \cdot 10^{-8}$—$1 \cdot 10^{-5}$ Ф (0,001—10 мкФ), поскольку малые емкости в модели могут оказаться соизмеримыми с паразитными емкостями монтажных соединений, а большие емкости обладают большими размерами и существенной утечкой заряда (саморазрядом). Величины сопротивлений R для возможности выбора удобной длительности процесса на модели целесообразно устанавливать в диапазоне значений 10^3—10^6 Ом.

Емкостные электрические модели могут быть сплошными — из специальной конденсаторной бумаги [43] или комбинированными — из обычной электропроводной бумаги с распределенными емкостями [26].

3.2. Электроинтеграторы на основе RR-сетки

Для решения задач неустановившейся фильтрации на сеточном интеграторе, составленном только из активных сопротивлений

(типа ЭИ-12 или МСМ-1), можно воспользоваться схемой сетки Либманна (*RR*-сетка), принцип которой заключается в моделировании правой части балансового уравнения (III.3.5) с помощью дополнительно подсоединяемых в каждую узловую точку «временных» сопротивлений R_t (рис. 62, *б*, *в*).

Обоснования этой схемы дадим для одномерного (линейного в плане) потока, когда балансовое уравнение принимает форму (III.3.8). Подставляя в это уравнение выражения для расходов (III.3.6), представим его в виде

$$\frac{H_{i-1}-H_i}{\Phi_{i-1}}+\frac{H_{i+1}-H_i}{\Phi_{i+1}}=\frac{C}{\Delta t}(H_i-H_i^0)-q_w, \qquad \text{(III.3.34)}$$

где H_i^0 — уровень в расчетном блоке на предыдущий момент времени, разнящийся от расчетного на интервал времени Δt, или

$$\frac{H_{i-1}-H_i}{\Phi_{i-1}}+\frac{H_{i+1}-H_i}{\Phi_{i+1}}=\frac{C}{\Delta t}\left(H_i-H_i^0+\frac{q_w}{C}\Delta t\right). \qquad \text{(III.3.35)}$$

Вместе с тем баланс тока в узловой точке с «временным» сопротивлением (рис. 62, *в*) запишется в виде $I_{i-1}-I_{i+1}=I_t$ или

$$\frac{U_{i-1}-U_i}{R_{i-1}}+\frac{U_{i+1}-U_i}{R_{i+1}}=\frac{U_i-U_i^0}{R_t}, \qquad \text{(III.3.36)}$$

Сопоставляя уравнения (III.3.35) и (III.3.36), можно видеть их качественное сходство. Для полной их аналогии следует задать потенциалы в узловых точках пропорциональными соответствующим значениям напоров, а потенциалы U_i^0 на концах временных сопротивлений — пропорциональными величине $H_i^0+\frac{q_w}{C}\Delta t=$ $=H_i^0+\frac{w}{\mu}\Delta t$. Кроме того, сопротивления основного поля устанавливаются процорциональными соответствующим фильтрационным сопротивлениям, а временные сопротивления — пропорциональными величине $\Delta t/C$:

$$R=\alpha_R\Phi,\ R_t=\alpha_R\frac{\Delta t}{C}, \qquad \text{(III.3.37)}$$

где α_R — масштаб электрических сопротивлений. Подставляя такие связи в одно из уравнений (III.3.35) или (III.3.36), можно видеть, что эти уравнения будут тождественно переходить друг в друга.

При расчетах неустановившейся фильтрации по схеме Либманна после составления соответствующей сетки следует разбить расчетный период времени на несколько промежутков Δt, затем последовательно для каждого промежутка времени задать на концах «временных» сопротивлений значения потенциалов на преды-

дущий момент времени, а на границах — значения потенциалов на расчетный момент времени; при этом в узлах получатся значения потенциалов на расчетный момент времени (через интервал времени Δt). Кроме того, при моделировании инфильтрации заданной интенсивности w здесь следует к потенциалам U_i^0, задаваемым на концах временных сопротивлений, добавлять потенциал ΔU_w^0, пропорциональный величине $\Delta H_w^0 = \frac{w}{\mu} \Delta t$.

Величину шага по времени Δt при расчетах по схеме Либманна следует устанавливать исходя из того, что при монотонном изменении потенциалов на границах весь расчетный период времени можно разбивать на три шага Δt, а при колебаниях граничных потенциалов можно гарантировать хорошую точность расчетов, если в пределах каждого участка монотонного изменения граничных уровней укладывается два шага по времени.

В ряде случаев, в частности при изучении фильтрации вблизи водохранилищ, задаются периодические (внутригодовые) изменения уровня воды в водоеме. Задание такой периодичности в течение многих лет резко осложняет технику расчетов и моделирования. Такую задачу можно существенно упростить, если разделить заданный периодический график на две части — одну, соответствующую среднегодовым уровням, и другую, дополнительную, составленную из внутригодовых изменений уровня относительно среднегодового, причем, как показывает анализ, вторую часть, при дополнительных (внутригодовых) изменениях уровня, можно задавать только в течение последних одного-двух лет.

В такой постановке моделирование проводится в два этапа: на первом этапе задаются многолетние изменения уровней без учета внутригодовых колебаний и расчет ведется при большом масштабе времени или шаге Δt (при этом Δt измеряется обычно годами), на втором — моделируются сезонные изменения относительно заданных на первом этапе многолетних уравнений, причем в этом случае достаточно моделировать только последний период одного-двух лет, задавая значительно меньшие масштабы времени или Δt (при этом Δt обычно измеряется месяцами). Окончательное решение находится сложением изменений уровней (напоров), получаемых на обоих этапах моделирования. Аналогичную методику можно применять и при моделировании периодически действующей инфильтрации, задавая при моделировании многолетнего режима среднегодовые значения инфильтрационного питания, а учет неравномерности питания проводить только на последний год, задавая в качестве расчетных величин интенсивности питания разницу текущего и среднегодового значения в течение последнего года.

Заметим, что последнее время наряду с интеграторами для расчетов нестационарной фильтрации начинают все шире использовать ЭЦВМ [26, 48] и гибридные модели, сочетающие электроинтеграторы и управляющие ими ЭЦВМ [26].

Глава 4
ФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО РЕЖИМА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

§ 1. ПРОЯВЛЕНИЯ УПРУГОГО РЕЖИМА ПРИ ДЕЙСТВИИ СОВРЕМЕННЫХ ГЕОДИНАМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

Геодинамические факторы проявляются в изменении внешней нагрузки на водоносные пласты, причем в дифференциальных уравнениях упругого режима (III.1.24) эти факторы выражаются свободным членом $\alpha_p v_п$, который занимает в нем такое же место, как интенсивность инфильтрационного питания в уравнении нестационарного безнапорного потока. Формально величину $w^* = \alpha_p \mu^* v_п$ можно рассматривать как интенсивность «упругой инфильтрации» и использовать для учета этого фактора те же зависимости, что и для безнапорного потока с заданным инфильтрационным питанием.

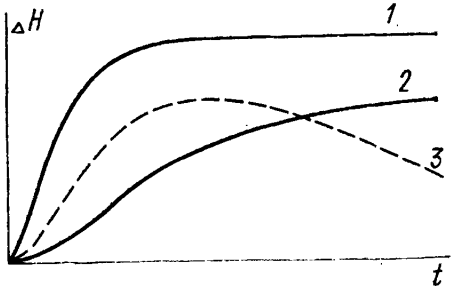


Рис. 63. Графики изменения уровней подземных вод при резком изменении уровня водоема:
1 — уровень в водоеме; *2* и *3* — уровни подземных вод под водоемом при наличии гидравлической связи и псевдосвязи

К наиболее интересным проявлениям геодинамических факторов относится возникновение режима «псевдосвязи» напорных подземных вод с поверхностными водотоками, обусловливаемого изменением нагрузки на пласт за счет изменения столба воды в водотоке. Действительно, если под водотоком находится напорный пласт, полностью изолированный от водотока, то при изменениях уровня воды в водотоке будет соответственно изменяться давление, передаваемое на пласт. Пренебрегая боковым рассеиванием изменения давления, получим, что в этом случае величина $v_п$ равна скорости изменения уровня воды в водотоке. Отсюда следует, что колебания уровней воды в напорных пластах под водотоками или водоемами (водохранилищами, морями) могут происходить при отсутствии гидравлической связи между ними. Поэтому наличие видимой связи между изменениями уровней поверхностных и подземных вод еще не служит признаком их гидравлической взаимосвязи. Диагностическим признаком режима «псевдосвязи» является характер изменения уровней подземных вод при монотонном изменении уровня водотока. Если, например, уровень водотока монотонно изменяется от одного положения до другого (рис. 63), то при наличии гидравлической связи уровни подземных вод будут также изменяться монотонно, а при режиме псевдо-

связи уровни подземных вод будут следовать за уровнем водотока только во время его изменения, а после его стабилизации уровни подземных вод будут возвращаться к своему исходному положению. Однако такая диагностика может производиться только при монотонных изменениях уровней водотока, достигающих стабилизированного положения; при колебаниях уровня (например, при паводках, приливах и отливах на море) качественных различий в режиме уровней при наличии или отсутствии гидравлической взаимосвязи поверхностных и подземных вод не имеется. Пока еще проявления режима псевдосвязи в натурных условиях изучены очень слабо; отдельные примеры такого процесса наблюдались при приливах и отливах морей [14].

Одно из наиболее изученных проявлений геодинамических факторов упругого режима представляет зафиксированное многими наблюдениями наличие четкой синхронной связи между колебаниями уровней подземных вод и атмосферного давления [11, 14]. Такая связь обосновывается передачей атмосферного давления на кровлю пласта, причем если предположить, что такая передача происходит без существенных потерь, то

$$v_{\text{п}} = v_a = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p_a}{\partial t}. \qquad \text{(III.4.1)}$$

Рассматривая влияние атмосферного давления, можно обычно считать изменения давления слабо зависящими от расстояния и в уравнении (III.1.24) пренебрегать пространственными производными, что дает

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha_p v_a \text{ или } \Delta H = \alpha_p \Delta h_a, \qquad \text{(III.4.2)}$$

где $\Delta h_a = \frac{\Delta p_a}{\gamma}$ — изменение высоты атмосферного давления. Таким образом, изменение напоров оказывается пропорциональным изменению давления, причем коэффициент пропорциональности зависит от соотношения характеристик сжимаемости грунта и воды. Это обстоятельство дает принципиальную возможность оценить коэффициент уплотнения грунта a_v, зная изменения атмосферного давления Δp_a и соответствующие изменения напора ΔH, по формуле

$$a_v = \frac{\varepsilon\beta_{\text{в}}}{\frac{\Delta h_a}{\Delta H} - 1}, \qquad \text{(III.4.3)}$$

если известен коэффициент объемного сжатия воды $\beta_{\text{в}}$. Применение такой методики расчета возможно только при условии, что сжимаемость воды и породы имеет один порядок, поскольку, если оказывается $a_v \gg \varepsilon\beta_{\text{в}}$, то $\frac{\Delta h_a}{\Delta H} \cong 1$ и точность расчетов по формуле (III.4.3) будет небольшой.

Интересно отметить, что в открытых скважинах, где уровень воды находится ниже устья скважины, изменения уровней имеют обратную связь с изменениями давления, т. е. повышениям давления соответствуют понижения уровня воды в скважине и наоборот (рис. 64). Для обоснования этого обстоятельства следует иметь в виду, что изменение напора ΔH на уровне воды в откры-

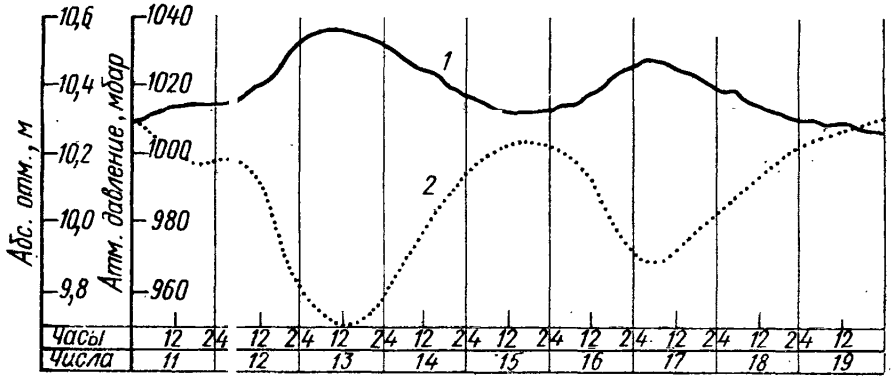


Рис. 64. Колебания уровня воды в открытой скважине гдовского водоносного горизонта (глубина 150 м) при изменении атмосферного давления, по данным П. М. Гасс [11]:
1 и *2* — кривые изменения уровня и давления

той наблюдательной скважине складывается из изменений высоты давления $\Delta h_a = \frac{\Delta p_a}{\gamma}$ и ординаты уровня Δz, т. е.

$$\Delta H = \Delta h_a + \Delta z, \qquad \text{(III.4.4)}$$

и заменяя согласно (III.4.2) ΔH на $\alpha_p \Delta h_a$, получим формулу для определения барометрических изменений уровня в открытой наблюдательной скважине:

$$\Delta z = (\alpha_p - 1)\,\Delta h_a, \qquad \text{(III.4.5)}$$

причем, поскольку $\alpha_p < 1$, то согласно (III.1.37) изменения уровней будут пропорциональны изменению высоты атмосферного давления, но с другим знаком.

Заметное влияние геодинамических факторов наблюдается также при землетрясениях [51], вскрытиях котлованов или карьеров [41, 49], прохождении поездов [14, 54].

Следует иметь в виду, что существующие теоретические представления о механизме передачи давлений в слабопроницаемых разделяющих слоях имеют довольно умозрительный характер и требуют дальнейшего анализа на базе специальных натурных исследований. В частности, положение о непосредственной передаче внешнего давления через разделяющие слои справедливо только для жестких водонепроницаемых слоев, передающих к то-

му же изменения внешнего давления без каких-либо потерь за счет перехода в другие формы энергии. Степень выполнения этого положения в каждом конкретном случае требует доказательства (например, с использованием данных о влиянии изменений атмосферного давления).

§ 2. ПАЛЕОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ КОНСОЛИДАЦИИ ГЛИНИСТЫХ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПЛАСТОВ

Палеогидродинамические расчеты проводят в комплексе палеогидрогеологических исследований по реконструкции геологической истории подземных вод для понимания принципиальных закономерностей их формирования. Наиболее характерное направление палеогидродинамической реконструкции — анализ влияния эли-

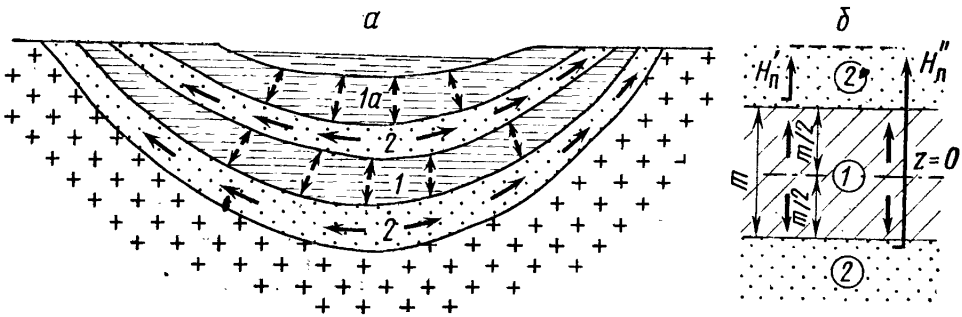


Рис. 65. Схемы к расчетам палеогидродинамической реконструкции:
а — структура потока в артезианском бассейне при элизионном водообмене; *б* — схема консолидации глинистого пласта (*1* — глинистый пласт, закончивший цикл осадконакопления; *1а* — глинистый пласт в процессе осадконакопления; *2* — водоносные пласты; стрелками показано направление потока при элизионном водообмене)

зионного водообмена, обусловленного отжатием седиментогенных вод, главным образом из глинистых отложений, на различных этапах геологической истории (рис. 65, *а*). Таким образом, палеогидродинамическая реконструкция должна базироваться на расчетах упругого режима фильтрации, формирующегося под действием геодинамических факторов, обусловленных осадконакоплением и тектоническими процессами, а также гидродинамических факторов, обусловленных палеогеологическими и палеогеографическими условиями. Вопросы методики палеогидродинамических реконструкций аналитическими методами и с использованием моделирования обстоятельно рассмотрены в работах [8, 9, 12].

Представление о постановке и результатах таких расчетов дает решение задачи нестационарной фильтрационной консолидации глинистого осадка при изменении нагрузки на него в процессе седиментации. Закономерности консолидации такого глинистого осадка в начальный период его накопления (пласт 1*а* на рис. 65, *а*)

изучались в работе [8]. Рассмотрим такой процесс для условий, когда накопление пласта глинистого осадка завершается и наступает новый цикл осадконакопления с отложением над этим пластом следующей системы водоносных и разделяющих пластов (пласт 1 на рис. 65, *а*), так что рассматриваемый пласт глинистых отложений становится разделяющим между двумя водоносными пластами (рис. 65). В таких случаях будем решать задачу фильтрационной консолидации глинистого пласта, исходя из того, что в процессе осадконакопления давление на пласт $p_п$ увеличивается со скоростью $\partial p_п/\partial t = \gamma_п v_0$, где $\gamma_п$ — объемный вес отлагающихся над глинистым пластом пород, а v_0 — скорость осадконакопления. При схематизации примем, что фильтрационный поток имеет вертикальное направление и подчиняется закону Дарси, а уплотнение породы описываем законом компрессии (I.3.30), пренебрегая влиянием реологических свойств пород.

Задавая гидродинамические условия, примем, что в начальный период времени напор в пределах глинистого пласта был постоянным, т. е. $H(z, 0) = H_0 = \text{const}$; в дальнейшем напоры в водоносных горизонтах (подстилающем и покрывающем глинистый пласт) росли с постоянной скоростью v_0, т. е. $H'_п = H''_п = H_0 + v_0 t$. При задании последнего условия предполагается синхронный рост напоров с увеличением глубины артезианского бассейна, что логично, если пренебречь влиянием потерь напора на продольную (латеральную) фильтрацию в водоносных горизонтах. Поскольку условия на верхней и нижней границах глинистого пласта одинаковы, то поток в нем будет иметь симметричный характер и, следовательно, в дальнейшем можно рассматривать каждую половину пласта изолированно от другой.

Имея в виду оценочный характер этой задачи, рассмотрим ее в упрощенной постановке, осредняя напоры в пределах каждой половины глинистого пласта. При этом ее емкость сосредоточивается на расстоянии 0,25 m от границы пласта, где задается осредненный напор H^*. Тогда, выделяя единичный элемент половины пласта, запишем для него уравнения баланса, пренебрегая изменением плотности воды:

$$-dV_0 = v^* dt, \tag{III.4.6}$$

где $V_0 = 0{,}5\ nm$ — объем воды в единичном элементе пласта: v^* — средняя скорость фильтрации в пласте, причем

$$v^* = k\frac{H^* - H_п}{0{,}25m}. \tag{III.4.7}$$

Как и при выводе общего уравнения упругого режима (см. § 1 главы 4 раздела I), заменяем n на $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ и считаем постоянным объем скелета породы $\frac{m}{1+\varepsilon}$, что дает

$$dV_0 = 0{,}5\,d(nm) = \frac{m}{2(1+\varepsilon)}\,d\varepsilon. \qquad \text{(III.4.8)}$$

В качестве уравнения состояния используем закон компрессии (1.4.4). Учитывая также, что $dp_{ск}=dp_п-dp$, а $dp_п=\gamma_п v_0 dt$ и $dp=\gamma dH$ *, приведем (III.4.8) к виду

$$dV_0 = \frac{m}{2(1+\varepsilon)}\,a_v(\gamma\,dH - \gamma_п v_0 dt). \qquad \text{(III.4.8а)}$$

Подставляя выражение (III.4.8а) в (III.4.6) и учитывая (III.4.7), получим

$$\frac{ma_v}{2(1+\varepsilon)}\left(\gamma_п v_0 - \gamma\frac{dH^*}{dt}\right) = 4k\frac{H^* - H_п}{m} \qquad \text{(III.4.9)}$$

или

$$\frac{\gamma_п}{\gamma}v_0 - \frac{dH^*}{dt} = \frac{8a}{m^2}(H^* - H_0 - v_0 t);\ a = \frac{k(1+\varepsilon)}{\gamma a_v}. \qquad \text{(III.4.9а)}$$

Уравнение (III.4.9а) является существенно нелинейным, поскольку параметры, входящие в коэффициент пьезопроводности a, в процессе уплотнения изменяются. Для получения оценочного решения пренебрежем изменениями параметров и тогда, вводя замену

$$\Delta H^* = H^* - H_0 - v_0 t - \left(\frac{\gamma_п}{\gamma} - 1\right)\frac{m^2 v_0}{8a}, \qquad \text{(III.4.9б)}$$

приведем уравнение (III.4.9а) к виду

$$-\frac{d\,\Delta H^*}{dt} = \frac{8a}{m^2}\Delta H^*. \qquad \text{(III.4.9в)}$$

Это уравнение легко интегрируется, а произвольная интегрирования находится из начального условия

$$H^* = -\left(\frac{\gamma_п}{\gamma} - 1\right)\frac{m^2 v_0}{8a} \text{ при } t = 0.$$

Тогда после алгебраических преобразований получим

$$H^* - H_п = \frac{m^2 v_0}{8a}\left(\frac{\gamma_п}{\gamma} - 1\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{8at}{m^2}\right)\right], \qquad \text{(III.4.10)}$$

а средний градиент напора

$$I^* = 4\frac{H^* - H_п}{m} = \frac{mv_0}{2a}\left(\frac{\gamma_п}{\gamma} - 1\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{8at}{m^2}\right)\right]. \qquad \text{(III.4.11)}$$

При длительном времени протекания процесса, когда $t > m^2/3a$, в (III.4.11) можно пренебречь величиной экспоненты и тогда

$$I^* = \frac{mv_0}{2a}\left(\frac{\gamma_п}{\gamma} - 1\right). \qquad \text{(III.4.12)}$$

Проведем теперь в условиях такой задачи оценку влияния отжатия воды из глинистого пласта, формирующегося при действии гидродинамических факторов на перетекание между водоносными горизонтами. При такой оценке можно исходить из того, что если величина $I_п$ оказывается больше вертикального градиента напора I_z, возникающего под действием гидродинамических факторов между водоносными горизонтами, то поток из нижнего горизонта не сможет поступать через разделяющий пласт и нижний горизонт окажется, таким образом, гидродинамически закрытым. Такой тип течения, когда преобладающую роль играет геодинамическое отжатие воды из глинистых пластов, называется элизионным; в противном случае (при $I_п < I_z$) формируется инфильтрационный тип течения, для которого характерно преобладающее действие современных гидродинамических факторов [12, 19]. Например, при характерных значениях $m=100$ м, $\eta^*=10^{-5}$ 1/м и $\gamma_п=2\gamma$ условие (III.4.12) принимает вид $I_п=10^{-3}\,v_0/k$, откуда видно, что значительные градиенты $I_п$ (порядка 0,01—0,1) возникают, если коэффициент фильтрации примерно на один-два порядка меньше скорости осадконакопления. Таким образом, при реальных значениях $v_0=10^{-4}$—10^{-5} м/год формирование элизионного режима можно ожидать при коэффициентах фильтрации глинистых пластов порядка 10^{-7} м/сут и менее.

Разумеется, такой анализ составляет только часть построений гидродинамической реконструкции, при которых необходимо учитывать влияние латеральной фильтрации в водоносных горизонтах, тектоническую историю рассматриваемой структуры, а также температурные деформации пластов и другие факторы [12]. Вместе с тем рассмотренная задача достаточно характерна для построений палеогидродинамической реконструкции, которые, таким образом, сводятся к решению задач упругого режима геофильтрационного потока, формирующегося под действием геодинамических и гидродинамических факторов, обусловливаемых палеогеологическими и палеогеографическими условиями территории.

Глава 5
ВЛАГОПЕРЕНОС В ЗОНЕ АЭРАЦИИ

§ 1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Специфическим признаком зоны аэрации является неполное водонасыщение, тесно связанное с проявлением капиллярных сил.

Экспериментальными исследованиями [33, 39, 42, 47] доказано, что при гравитационном влагопереносе в зоне неполного насыщения скорость фильтрации определяется законом Дарси, в кото-

ром коэффициент фильтрации (влагопереноса) k существенно зависит от относительной влажности $\bar{w}=w/w_0$, где w и w_0 — текущее и предельное влагосодержание свободной (несвязанной) воды в порах породы (рис. 66). Из теоретических соображений и анализа экспериментальных данных [1, 47] следует, что зависимость k от $\bar{w}$ имеет степенной характер вида

$$k = k_\Phi \bar{w}^n, \qquad \text{(III.5.1)}$$

где k_Φ — коэффициент фильтрации при полном насыщении, когда $\bar{w}=1$; для показателя степени рекомендуется принимать значения

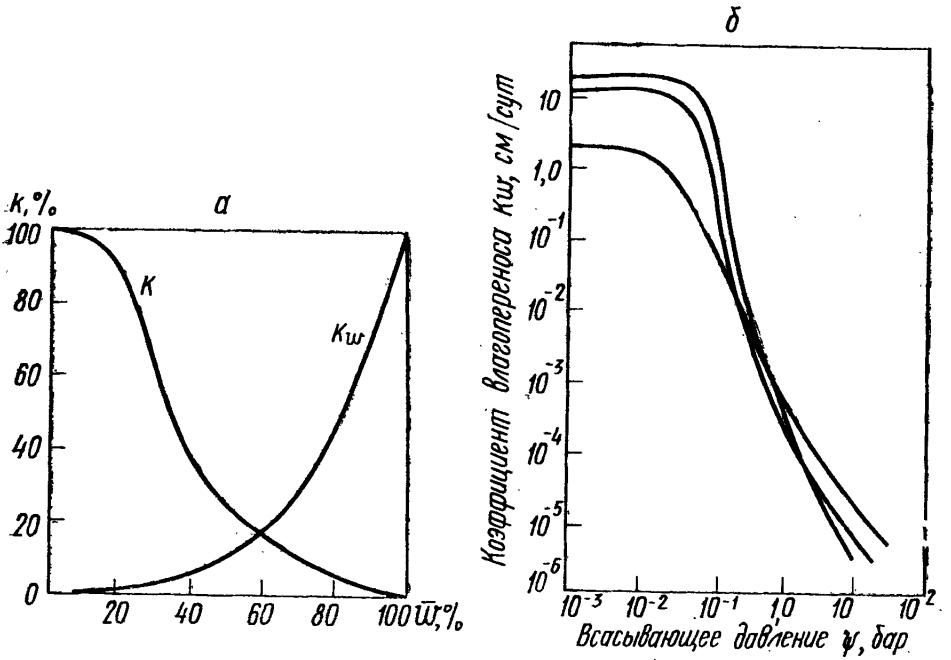


Рис. 66. Типичные кривые зависимости проницаемости от влажности и всасывающего давления [5]:
а — график зависимости относительной водопроницаемости k_w и воздухопроницаемости k от водонасыщенности; *б* — график зависимости коэффициента влагопереноса от всасывающего давления ψ

$n=3\div4$ [1, 35, 41]. Кроме того, в определенном диапазоне изменения влажности можно пользоваться экспоненциальной зависимостью коэффициента фильтрации от влажности вида

$$k = k_\Phi e^{-\alpha(w_0-w)}, \qquad \text{(III.5.2)}$$

где величина k_Φ является параметром, который при малых влажностях может иметь значение, отличное от коэффициента фильтрации насыщенной породы; по литературным данным можно принимать $\alpha\cong20$—70 [57].

Методика лабораторных определений коэффициента фильтрации при неполном насыщении приведена, например, в работах [39, 47, 53, 57].

Таким образом, компоненты скорости фильтрации в дифференциальной форме определятся выражениями

$$v_x = -k\frac{\partial H}{\partial x},\quad v_y = -k\frac{\partial H}{\partial y},\quad v_z = -k\frac{\partial H}{\partial z}, \qquad \text{(III.5.3)}$$

или имея в виду, что $H = h_p + z$,

$$v_x = -k\frac{\partial h_p}{\partial x},\quad v_y = -k\frac{\partial h_p}{\partial y},\quad v_z = -k\frac{\partial h_p}{\partial z} - k. \qquad \text{(III.5.4)}$$

В теории влагопереноса обычно вместо высоты давления h_p используется величина давления всасывания (suction) $\psi = -h_p$. Величина ψ в зоне неполного насыщения определенным образом зависит от влажности w; на основании лабораторных и полевых опытов [35, 47, 57] рекомендуется линейная, экспоненциальная или степенная зависимости вида

$$\psi = a - bw \text{ (а)},\quad \psi = ae^{-bw} \text{ (б)}\quad \psi = aw^{-b} \text{ (в)}, \qquad \text{(III.5.5)}$$

где a и b — параметры среды.

Для зависимости коэффициента фильтрации (влагопереноса) k от давления всасывания ψ В. Гарднер [53] рекомендует выражение

$$k = \frac{k_\Phi}{1 + \alpha\psi^m}, \qquad \text{(III.5.6)}$$

причем для песков $m=2$, а для тяжелых суглинков $m=4$; в определенном диапазоне влажностей можно использовать и степенную зависимость k от ψ (см. рис. 66).

Имея в виду, что для влагопереноса в любом направлении l $\frac{\partial h_p}{\partial l} = \frac{\partial h_p}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial l}$, и обозначая $\frac{\partial h_p}{\partial w} = -\frac{d\psi}{dw} = \psi'$, приведем выражения (III.5.4) к виду

$$v_x = -D_w\frac{\partial w}{\partial x},\quad v_y = -D_w\frac{\partial w}{\partial y},\quad v_z = -D_w\frac{\partial w}{\partial z} - k, \qquad \text{(III.5.7)}$$

где величина $D_w = k\psi'$ имеет смысл коэффициента влагопроводности; в теории влагопереноса эта величина обычно называется капиллярной диффузивностью, или диффузивностью почвенной влаги [39, 47, 57]; для аналитического ее описания рекомендуется экспоненциальная зависимость вида

$$D_w = D_w^0 e^{\beta(w - w^0)}, \qquad \text{(III.5.8)}$$

где D_w^0, β и w^0 — параметры, определяемые для данной породы опытным путем. По литературным данным можно считать $\beta \cong (0{,}5 \div 1)\alpha$, где α — параметр в зависимости (III.5.2).

Следует иметь в виду, что при нестационарном режиме может существенно проявляться гистерезис влагопереноса, когда величины ψ' и D_w зависят от направления процесса. Этот гистерезис объясняется различием в геометрии внутрипоровых менисков при повышении и понижении влажности, причем в случае иссушения эти величины всегда больше (до двух-трех раз), чем при насыщении.

Интересно, что, судя по экспериментальным данным, зависимость ψ от w для данной породы оказывается довольно единообразной [39, 42, 47], поэтому зависимость ψ' от w можно считать для данной литологической разности практически независимой от проницаемости. Следовательно, при неоднородном строении зоны аэрации в определенных диапазонах можно считать, что коэффициент влагопереноса D_w меняется пропорционально коэффициенту фильтрации $k_ф$.

При небольших темпах влагопереноса и резких перепадах температуры может заметно проявиться термодиффузия, которая реально рассматривается обычно только при агрофизических исследованиях влажностного режима в почве и припочвенных слоях [39, 47].

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Выведем дифференциальное уравнение нестационарного вертикального влагопереноса, наиболее характерного для зоны аэрации, рассматривая баланс влаги в бесконечно малом элементе высотой dz и единичной площадью горизонтального сечения. В этот элемент снизу входит поток с расходом, равным скорости фильтрации v_z, которая на выходе из элемента получает бесконечно малое приращение $\frac{\partial v_z}{\partial z}\partial z$. Разница между расходом потока на входе и выходе из элемента идет на увеличение его влагосодержания, так что баланс потока за время dt здесь запишется равенством

$$v_z\,dt - \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,\partial z\right)dt = \frac{\partial w}{\partial t}\,dt\,dz,$$

из которого после сокращений получаем уравнение неразрывности

$$-\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad \text{(III.5.9)}$$

Рассматривая движение только под действием гравитационных и капиллярных сил, представим v_z выражением (III.5.4), после чего получим искомое дифференциальное уравнение вертикального влагопереноса

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D_w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad \text{(III.5.10)}$$

В некоторых частных случаях удается получить аналитические решения задач влагопереноса, подметив упрощающие особенности процесса. Например, экспериментальными данными и теоретическим анализом показано [37, 39, 47], что в случае задания на поверхности зоны аэрации дождевания с постоянной интенсивностью w и при однородном строении этой зоны образуется четко выраженная область просачивания глубиной l, в пределах которой влажность практически оказывается постоянной (рис. 67, *а*). Таким образом, движение здесь происходит за счет свободного стекания при напорном градиенте, равном единице, а влажность на фронте просачивания изменяется скачкообразно от начального значения w_e до значения w в зоне просачивания (рис. 67, *б*). Тогда балансовое уравнение, получаемое при рассмотрении бесконечно малого продвижения фронта просачивания dl за время dt получим в виде

$$(w - w_e)\,dl = k dl \qquad \text{(III.5.11)}$$

или

$$v_l = \frac{dl}{dt} = \frac{k}{w - w_e} \qquad \text{(III.5.12)}$$

Имея в виду, что $w=k$, и используя выражение (III.5.1) для k, получим

$$w = k = k_\Phi \left(\frac{w}{w_0}\right)^n \qquad \text{(III.5.13)}$$

или

$$w = w_0 \left(\frac{w}{k_\Phi}\right)^{1/n}, \qquad \text{(III.5.14)}$$

после чего выражение (III.5.12) приобретает вид

$$v_l = \frac{w}{w_0 \left(\frac{w}{k_\Phi}\right)^{1/n} - w_e}. \qquad \text{(III.5.15)}$$

Если начальная влажность сравнительно невелика, то, полагая в (III.5.15) $w_e=0$, получим более простое выражение для скорости инфильтрационного просачивания

$$v_l = \frac{1}{w_0} w^{1-\frac{1}{n}} \cdot k_\Phi^{-\frac{1}{n}}. \qquad \text{(III.5.16)}$$

Принимая, в частности, $n=3$, придем к решению, впервые полученному Н. Н. Биндеманом:

$$v_l = \frac{1}{w_0} \sqrt[3]{w^2 k_\Phi}. \qquad \text{(III.5.17)}$$

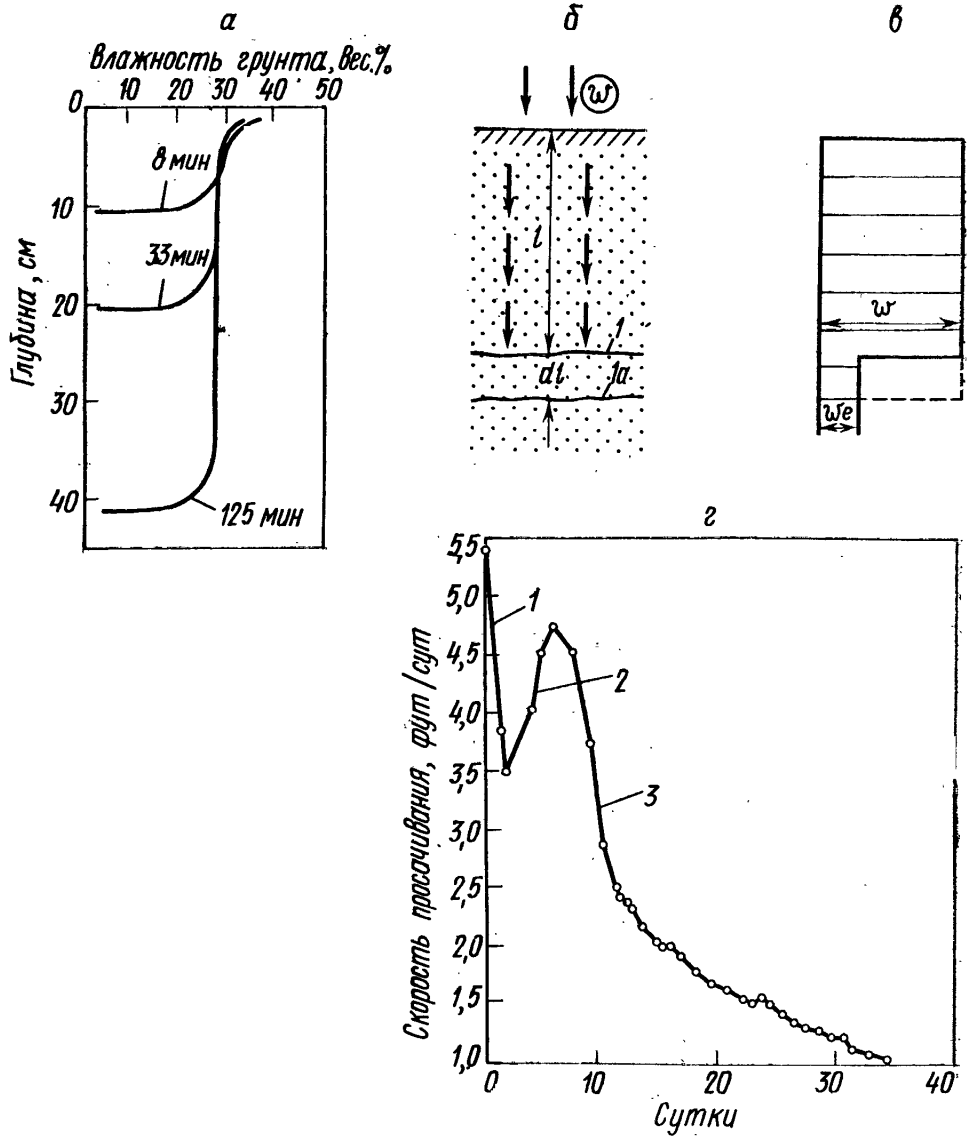


Рис. 67. Просачивание инфильтрующейся воды:
а — кривые изменения весовой влажности при инфильтрации в супесчаном грунте [5]; *б* — схема вертикального просачивания (*1* и *1а* — положения границы зоны просачивания на расчетный период времени); *в* — расчетная эпюра влажности (пунктиром показано перемещение эпюры за время *dt*); *г* — изменение скорости просачивания в монолите при затоплении сверху [15] (*1* — начальное снижение скорости, *2* — временное повышение скорости в связи с растворением и выделением воздуха, *3* — дальнейшее снижение скорости, обусловленное увеличением глубины просачивания и образованием экранирующего слоя на поверхности земли)

Эти зависимости могут быть использованы для решения обратных задач при обработке экспериментальных (лабораторных или натурных) данных по известным значениям скорости просачивания v_l. Так, зная величины w и k_Φ, можно получить значения показателя степени просачивания n. Расчетную формулу для решения этой задачи получим, логарифмируя выражение (III.5.16) и решая его далее относительно n, после чего она примет вид

$$n = \frac{\lg (\mathrm{w} k_\Phi)}{\lg \dfrac{\mathrm{w}}{w_0 v_l}}. \qquad \text{(III.5.18)}$$

Если же значение n известно или им можно задаться по литературным данным, то при известном k_Φ таким путем можно найти интенсивность инфильтрации w, а при известном w — определить коэффициент фильтрации k_Φ полностью насыщенной породы. Расчетные зависимости в этом случае получаются аналогичным путем и имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \lg \mathrm{w} &= \frac{n}{n-1}\left(\lg w_0 v_l + \frac{1}{n}\lg k_\Phi\right) \quad \text{(а)} \\ \lg k_\Phi &= n \lg \frac{w}{w_0 v_l} - \lg \mathrm{w}. \quad \text{(б)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.5.19)}$$

Решая обратные задачи влагопереноса, можно определить и основные параметры уравнения влагопереноса. Так, наиболее просто из данных натурных наблюдений может быть получена зависимость всасывающего давления (ψ и ψ') от влажности, если известно распределение влажности в капиллярной зоне при стационарном режиме и отсутствии инфильтрации. В этом случае $v_z = 0$, поэтому согласно (III.5.4) имеем $\frac{\partial h_p}{\partial z} = -1$, т. е. $-h_p = \psi = z + C$, причем постоянную C найдем из условия $\psi = 0$ на поверхности гравитационной зоны. Следовательно,

$$\psi = z^0, \qquad \text{(III.5.20)}$$

где z^0 — ордината данной точки относительно уровня грунтовых вод (гравитационной зоны). С другой стороны, по натурным замерам получим $w(z^0)$, что дает возможность построить зависимости ψ от w, а затем графическим путем найти зависимость ψ' от w. Экспериментальные данные показывают [47], что определенная таким образом зависимость $\psi(w)$ может успешно использоваться и при расчетах нестационарного влагопереноса.

Для решения задач влагопереноса используются аналитические методы [35, 47], имеющие, однако, сравнительно узкую область применения из-за существенной нелинейности исходного дифференциального уравнения; в общем случае задачи влагопереноса могут решаться численными методами с использованием вычислительной техники [23, 24, 26].

При интенсивном протекании процессов влагопереноса существенно проявляется неупорядоченная неоднородность строения зоны аэрации, которая обусловливается литолого-фациальной изменчи-

востью пород, наличием ходов землероев и остатков растений. Для учета этого фактора при математическом описании влагопереноса используется модель блоковой гетерогенной среды, аналогичной среде с двойной емкостью (см. рис. 17, *а*). Эта модель применялась для изучения процессов инфильтрации и водоотдачи [32, 35, 45], причем в последнем случае показано, что водоотдача пород блочного строения весьма затруднена и в реальное время проведения опытных откачек происходит только частичное осушение блоков. Влияние гетерогенности пород зоны аэрации на процессы инфильтрации подтверждается, в частности, натурными данными о просачивании дождевой влаги (см., например, [39]), свидетельствующими о довольно резкой площадной неравномерности инфильтрации.

При интенсивной инфильтрации заметную роль может играть движение воздуха при его вытеснении водой из пор, и защемление воздуха, связанное с отмеченной выше неравномерностью просачивания воды. Пример влияния защемления воздуха на характер просачивания показан на рис. 67, *г*, где после начального уменьшения скорости инфильтрации происходит ее увеличение, которое объясняется вытеснением и растворением защемленного воздуха. Таким же образом объясняется, по-видимому, и наблюдаемое иногда временное увеличение скорости инфильтрации из шурфов [4].

Раздел IV

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СКВАЖИН И МЕТОДИКИ ОБРАБОТКИ ОПЫТНО-ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ОПРОБОВАНИЙ

Вертикальные скважины — основное средство для извлечения и нагнетания подземных вод; они состоят из глухой и водоприемной частей, причем водоприемная обычно оборудуется фильтром, предохраняющим от выноса окружающей породы в скважину. Поэтому в дальнейшем водоприемную часть скважины для краткости будем называть фильтром. По степени вскрытия водоносного горизонта вертикальные скважины подразделяются на совершенные и несовершенные — в зависимости от того, полностью или частично они вскрывают водоносный горизонт своей рабочей частью (фильтром). На условия работы скважины нередко существенно влияет сопротивление фильтра (прискважинной зоны), тесно связанное с условиями бурения, разглинизации и оборудования скважин.

Построение расчетных зависимостей будет осуществляться для условий откачки как основной формы работы скважины.

Глава 1

ОДИНОЧНЫЕ СКВАЖИНЫ В ИЗОЛИРОВАННОМ ПЛАСТЕ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

§ 1. ОСНОВНАЯ РАДИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА (УРАВНЕНИЕ ДЮПЮИ)

При откачке из совершенной скважины свободная или пьезометрическая поверхность вблизи скважины имеет воронкообразный характер (воронка депрессии). Рассмотрим закономерности формирования такой воронки в изолированном однородном напорном горизонте постоянной мощности при отсутствии естественного потока, когда поток вблизи скважины имеет плоскорадиальный ха-

рактер (рис. 68, *а*, *б*). В таком потоке линии тока в плане будут радиальными, а линии равного напора будут проходить по цилиндрическим поверхностям с центром на оси скважины (в плане они будут концентрическими окружностями). Выражение для расхода такого потока через поверхность радиусом r с шириной потока $B=2\pi r$ будет $Q=qB$, причем удельный расход q запишется

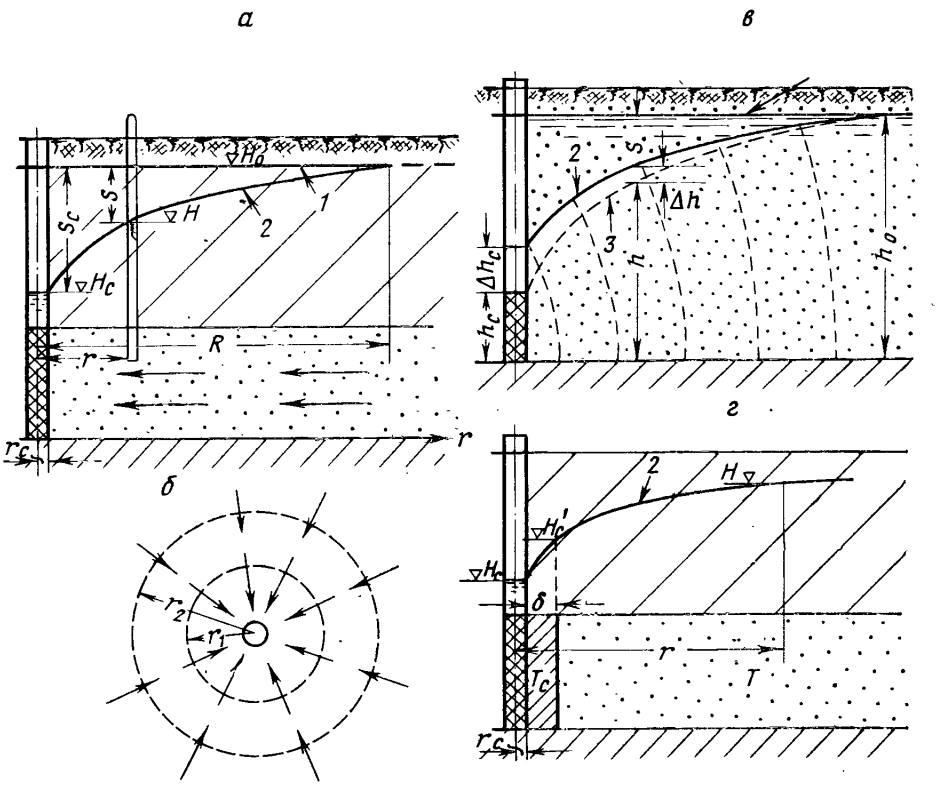


Рис. 68. Формы воронок депрессии вблизи скважины:
а и *б* — напорный поток ($T=\text{const}$) в разрезе и плане; *в* — безнапорный поток по схеме Дюпюи; *г* — поток с учетом сопротивления прискважинной зоны (*1* — статический уровень, *2* — свободная или пьезометрическая поверхность, *3* — свободная поверхность безнапорного потока, рассчитанная по уравнению Дюпюи)

согласно общей формуле (I.5.4), в которой градиент напора $I=\frac{dH}{dr}$ будет иметь тот же знак, что и расход откачки Q, принимаемый положительным, хотя он и направлен против положительного направления оси r, т. е.

$$Q=2\pi rT\frac{dH}{dr}. \qquad \text{(IV.1.1)}$$

Разделяя в уравнении (IV.1.1) переменные H и r, приведем его к виду

$$dH = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{dr}{r}. \qquad \text{(IV.1.1a)}$$

Интегрируя это уравнение в пределах между опорным сечением $r=r_1$, где $H=H_1$, и текущим сечением r с напором H, получим

$$H - H_1 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_1}. \qquad \text{(IV.1.2)}$$

В частности, совмещая опорное сечение со стенкой скважины, где $r_1=r_c$ и $H_1=H_c$, получим

$$H - H_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c}. \qquad \text{(IV.1.2a)}$$

Эти уравнения впервые были получены французским гидравликом Ж. Дюпюи [36] и обычно носят его имя. Более удобна запись этого уравнения в понижениях напора относительно статического уровня H_0, который имел место до откачки. Поскольку в точках с напорами H и H_1 будут $S=H_0-H$ и $S_1=H_0-H_1$, то уравнение (IV.1.2) можно записать в виде

$$S - S_1 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_1}, \qquad \text{(IV.1.3)}$$

а уравнение (IV.1.2а) при $H_c=H_0-S_c$ примет вид

$$S_c - S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c}. \qquad \text{(IV.1.4)}$$

Из уравнения (IV.1.4) следует, что существует условный радиус питания R, на котором $S=0$ и

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_c}. \qquad \text{(IV.1.5)}$$

Очевидно, что за пределами радиуса питания уравнение Дюпюи теряет физический смысл, поскольку при откачке не может возникать отрицательных понижений уровня.

Спецификой стационарного безнапорного потока является изменение проводимости пласта в связи с изменением напоров, причем характер этого изменения существенно зависит от строения пласта по вертикали. Для безнапорного потока на горизонтальном водоупоре (рис. 68, *в*) уравнения планового радиального потока можно получить на основе предпосылки Дюпюи, используя общие правила (II.1.14) перехода от зависимостей для напорного потока. Так, для однородного по вертикали безнапорного

потока, заменяя H на $0{,}5h^2$, H_c на $0{,}5h_c$ и T на k, приведем уравнение (IV.1.2а) к виду

$$h^2 - h_c^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_c} \qquad \text{(IV.1.6)}$$

или

$$h = \sqrt{h_c^2 + \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_c}}\,. \qquad \text{(IV.1.6а)}$$

Аналогично для горизонтально-слоистого потока заменой напора на функцию Гиринского согласно (II.1.13) получим

$$G - G_c = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c}, \qquad \text{(IV.1.7)}$$

где G и G_c — функции Гиринского в сечении r и на стенке скважины.

Записывая расчетные зависимости для безнапорного потока относительно понижений напора, следует исходить из того, что в случае горизонтально-слоистого пласта понижению S в напорном пласте будет соответствовать изменение функций Гиринского, отсчитываемых от значения G_0, соответствующего начальной глубине потока h_0. Формально переход к функциям Гиринского можно осуществить заданием расчетного понижения уровня S, определяемого по формуле

$$S = \frac{G_0 - G}{T}, \qquad \text{(IV.1.8)}$$

причем расчетное значение проводимости T целесообразно задавать соответствующим начальной проводимости пласта (при глубине потока h_0).

По формуле (IV.1.8), пользуясь общим выражением (II.1.12) для функции Гиринского, можно найти зависимость между расчетным понижением S и глубиной потока h (или истинным понижением уровня S^0). Например, для пласта однородного строения (схема Дюпюи) $G_0 = 0{,}5kh_0^2$, $G = 0{,}5kh^2$ и $T = kh_0$, поэтому расчетное понижение

$$S = \frac{h_0^2 - h^2}{2h_0} = \frac{(h_0 - h)(h_0 + h)}{2h_0} = S^0\left(1 - \frac{S^0}{2h_0}\right), \qquad \text{(IV.1.9)}$$

а для двухслойного пласта при снижении уровня ниже подошвы верхнего слоя и $k_в = 0$ (напорно-безнапорный поток) имеем $G_0 = km(h_0 - 0{,}5m)$, $G = 0.5kh^2$ и $T = km$, поэтому расчетное понижение

$$S = \frac{km(h - 0{,}5m) - 0{,}5kh^2}{km} = h_0 - \frac{m^2 + h^2}{2m}. \qquad \text{(IV.1.10)}$$

Естественно, что изменения проводимости в безнапорном потоке должны учитываться лишь в том случае, если понижение уровня составляет заметную часть от исходной мощности пласта, а при двухслойном строении пласта и $k_в \ll k$ изменением проводимости обычно можно пренебрегать до тех пор, пока снижение уровня не достигает подошвы верхнего слоя.

В безнапорном потоке вблизи от совершенной скважины (на расстоянии порядка глубины потока) происходит существенное отклонение линий равного напора от вертикального сечения, приводящее к образованию участка высачивания Δh_c. Для выявления параметров, от которых зависит величина участка высачивания, рассмотрим предельный случай притока к скважине из бесконечности. В этом случае величинами, определяющими участок высачивания, являются приведенный расход $\bar{Q}=Q/k$, уровень в скважине h_c и радиус скважины r_c, т. е. должна иметь место связь

$$\Delta h_c = f(r_c, h_c, \bar{Q}). \qquad \text{(IV.1.11)}$$

По теории подобия число переменных в уравнении (IV.1.11) можно уменьшить на одно, если привести переменные к безразмерному виду; можно, например, представить уравнение (IV.1.11) в следующей безразмерной форме:

$$\Delta\bar{h}_c = \frac{\Delta h_c}{\sqrt{\bar{Q}}} = f(\bar{r}_c, \bar{h}_c);\ \bar{r}_c = \frac{r_c}{\sqrt{\bar{Q}}},\ \bar{h}_c = \frac{h_c}{\sqrt{\bar{Q}}}. \qquad \text{(IV.1.11а)}$$

Зависимости (IV.1.11) и (IV.1.11а) должны иметь место и для потока, ограниченного некоторым контуром питания, — надо только, чтобы этот контур был отодвинут от скважины на такое расстояние, когда он перестал бы заметно влиять на картину движения вблизи скважины. Из многочисленных исследований известно, что контур питания перестает оказывать сколько-нибудь существенное влияние, если он располагается от скважины на расстоянии, большем мощности потока. Таким образом, если выполняется условие $R > h_c + \Delta h_c$, где R — радиус контура питания, то зависимости (IV.1.11) и (IV.1.11а) должны сохраняться. Поскольку это условие, как правило, выполняется, то приведенные формы зависимости для Δh_c можно считать достаточно универсальными.

Теоретический анализ, подтверждаемый экспериментальными данными, показывает [22], что для однородного потока величина Δh_c может определяться по формуле

$$\Delta h_c = \sqrt{\left(0{,}73 \lg \frac{\sqrt{\bar{Q}}}{r_c} - 0{,}5\right)\bar{Q} + h_c^2} - h_c. \qquad \text{(IV.1.12)}$$

§ 2. УЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИСКВАЖИННОЙ ЗОНЫ

2.1. Изменение проницаемости прискважинной зоны

Рассмотрим радиальную задачу стационарного притока к совершенной скважине в напорном пласте (T=const) с учетом изменения сопротивления фильтра (прискважинной зоны), когда прискважинная зона внешним радиусом r_c' имеет коэффициент фильтрации k_c, отличный от коэффициента фильтрации водоносного горизонта (рис. 68, *в*).

Для решения этой задачи рассмотрим отдельно поток во внутреннем фрагменте (прискважинной зоне), на границе которой устанавливается напор H_c'. Поскольку прискважинная зона не нарушает радиального характера потока, то выражение для напора H_c' получится из уравнения (IV.1.2а) с заменой H на H_c', T — на $T' = k'm$ и r — на r_c', т. е.

$$H_c' - H_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r_c'}{r_c}. \qquad \text{(IV.1.13)}$$

Во внешнем фрагменте уравнение радиального потока (IV.1.2) можно записать, заменяя H_1 на H_c' и r_1 на r_c', т. е.

$$H - H_c' = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c'}. \qquad \text{(IV.1.14)}$$

Складывая (IV.1.13) и (IV.1.14), исключим напор на границе фрагментов H_c' и получим уравнение

$$H - H_c = \frac{Q}{2\pi T}\left(\ln \frac{r}{r_c'} + \frac{k}{k_c} \ln \frac{r_c'}{r_c}\right). \qquad \text{(IV.1.15)}$$

Для учета сопротивления фильтра удобно ввести понятие расчетного радиуса скважины r_c^0, который представляет собой радиус фиктивной совершенной скважины, эквивалентной по своему сопротивлению действительной скважине. Для фиктивной скважины уравнение распределения напоров получится из (IV.1.2а) с заменой r_c на r_c^0, т. е.

$$H - H_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c^0}. \qquad \text{(IV.1.16)}$$

Сопоставляя (IV.1.16) и (IV.1.15), получим выражение для определения расчетного радиуса

$$\ln \frac{r_c'}{r_c^0} = \frac{k}{k_c} \ln \frac{r_c'}{r_c}; \qquad \text{(IV.1.17)}$$

или

$$r_c^0 = r_c' \left(\frac{r_c}{r_c'} \right)^{k/k_c}. \qquad \text{(IV.1.18)}$$

Из этих выражений видно, что величина расчетного радиуса определяется только размерами и относительной проницаемостью прискважинной зоны и не зависит от размеров формируемой воронки депрессии, так что она действительно может рассматриваться как параметр скважины.

Дополнительные потери напора в прискважинной зоне ΔH_c найдем вычитанием потерь напоров, определяемых уравнениями (IV.1.16) и (IV.1.2):

$$\Delta H_c = \frac{Q}{T} \Delta f_c; \quad \Delta f_c = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_c}{r_c^0} = 0{,}366 \lg \frac{r_c}{r_c^0}, \qquad \text{(IV.1.19)}$$

где величина Δf_c представляет собой безразмерное сопротивление фильтра (прискважинной зоны); в качестве показателя сопротивления фильтра используется также величина $\zeta_2 = 2\pi \Delta f_c$. Очевидно, что

$$r_c^0 = r_c e^{-2\pi \Delta f_c} = r_c e^{-\zeta_2}. \qquad \text{(IV.1.20)}$$

Для прискважинной зоны толщиной $r_c' - r_c = \delta_c$ с учетом выражения (IV.1.18) получим

$$2\pi \Delta f_c = \zeta_2 = \frac{k}{k_c} \ln \frac{r_c + \delta_c}{r_c}. \qquad \text{(IV.1.20а)}$$

Сопротивление фильтра зависит от строения пласта, способа бурения и устройства скважины, причем его реальное значение меняется в очень широких пределах [1, 5, 17, 19].

2.2. Проявления нелинейного режима течения

Дополнительные сопротивления в прискважинной зоне могут возникать при нарушении линейного закона фильтрации, граница которого определяется условием (I.3.21). Поскольку максимальное значение скорости фильтрации $v_{макс}$ имеет место на скважине, создающей площадь сечения потока $2\pi r_c m$, то условие нарушения линейного закона фильтрации примет вид

$$v_{макс} = \frac{Q}{2\pi r_c m} > v_{кр}. \qquad \text{(IV.1.21)}$$

При выполнении этого условия в качестве основного закона фильтрации используется двучленная зависимость (I.3.15). Рас-

смотрим на ее основе уравнение воронки депрессий для стационарного радиального потока в однородном напорном пласте, когда в сечении радиусом r скорость фильтрации $v = \frac{Q}{2\pi rm}$. Подставляя это выражение для v в зависимость (I.3.15) и имея в виду, что $I = \frac{dH}{dr}$, получим уравнение

$$\frac{dH}{dr} = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{k}\left(\frac{Q}{2\pi m}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2}, \qquad \text{(IV.1.22)}$$

которое позволяет разделить переменные и провести почленное интегрирование в пределах от r_c до r при изменениях напора от H_c до H:

$$\int_{H_c}^{H} dH = \frac{Q}{2\pi T}\int_{r_c}^{r} \frac{dr}{r} + \frac{a}{k}\left(\frac{Q}{2\pi m}\right)^2 \int_{r_c}^{r} \frac{dr}{r^2}, \qquad \text{(IV.1.22a)}$$

и после интегрирования получим уравнение воронки депрессии

$$H - H_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c} + \frac{\alpha}{k}\left(\frac{Q}{2\pi m}\right)^2 \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r}\right), \qquad \text{(IV.1.23)}$$

приведенное впервые В. М. Насбергом [20] и Ч. Джейкобом [39].

Из уравнения (IV.1.23) следует, что при $r \gg r_c$ нелинейность основного закона фильтрации уже не сказывается на форме кривой депрессии, так что влияние нелинейности носит довольно локальный характер.

При значительных дебитах или глубине скважин существенное влияние на ее сопротивление могут оказывать гидравлические потери внутри водоподъемных труб фильтра. Потери напора по длине водоподъемных труб $\Delta H_т$ в соответствии с формулой Дарси — Вейсбаха (I.2.18) будут

$$\Delta H_т = \varphi_т Q^2, \quad \varphi_т = \frac{8\lambda l_т}{\pi^2 g d_т^5}, \qquad \text{(IV.1.24)}$$

где $l_т$ и $d_т$ — длина и внутренний диаметр водоподъемных труб. Если водоподъемные трубы состоят из нескольких участков различного диаметра, то потери напора рассчитываются для каждого из этих участков и затем суммируются. Анализ влияния потерь напора в пределах фильтровой части скважины приведен в работе [17].

Глава 2

СОВЕРШЕННЫЕ СКВАЖИНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ НАПОРНОМ ПЛАСТЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНОГО ПОТОКА В ИЗОЛИРОВАННОМ НАПОРНОМ ПЛАСТЕ

Для вывода дифференциального уравнения планово-радиального потока в напорном водоносном пласте постоянной проводимости составим баланс цилиндрического элемента пласта бесконечно малой толщиной dr (заштрихован на рис. 69) за бесконечно малый период времени dt. Пусть по внутренней цилиндрической поверхности радиусом r в элемент поступает объемный расход Q_r, который на выходе из элемента получает бесконечно малое приращение $\frac{\partial Q_r}{\partial r} dr$, а через кровлю и подошву поступает поток со скоростями фильтрации $v_к$ и $v_п$. Тогда суммарное количество воды dV, поступающее в элемент за время dt, будет

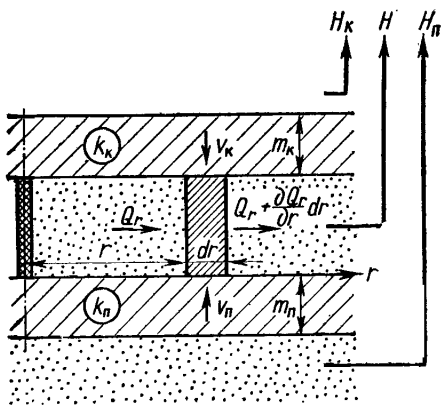


Рис. 69. Схема цилиндрического элемента радиального потока

$$dV = \left[-\frac{\partial Q_r}{\partial r} dr + \right.$$

$$\left. + 2\pi r (v_к + v_п)\, dr \right] dt. \qquad \text{(IV.2.1)}$$

Это количество воды пойдет на изменение упругих запасов в элементе потока, которое при действии гидродинамических факторов в соответствии с общей зависимостью (II.1.23) для упругой отдачи в данном случае будет

$$dV = 2\pi r \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} dr\, dt. \qquad \text{(IV.2.2)}$$

Приравнивая выражения (IV.2.1) и (IV.2.2), после сокращения на $drdt$ получим уравнение неразрывности

$$2\pi r \mu^* \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial Q_r}{\partial t} + 2\pi r (v_к + v_п). \qquad \text{(IV.2.3)}$$

Для Q_r можно использовать выражение (IV.1.1), меняя только в нем знак расхода, т. е.

$$Q_r = -2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r}. \qquad \text{(IV.2.4)}$$

Подставляя в (IV.2.3) выражение (IV.2.4) для Q_r, получим дифференциальное уравнение

$$\mu^* \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{T}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right) + v_к + v_п \qquad \text{(IV.2.5)}$$

или

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{v_к + v_п}{T}. \qquad \text{(IV.2.6)}$$

При работе скважины в потоке подземных вод меняющееся в пространстве начальное распределение напоров будет искажать радиальный характер потока. Вместе с тем при неизменной величине площадного питания для учета естественного (исходного) потока можно, как это показано в § 3 главы 1 раздела III (см. III.1.29—III.1.30), воспользоваться принципом суперпозиции, который позволяет автоматически учесть наличие естественного потока подземных вод, если отсчитывать понижение уровня, создаваемого откачкой, от уровня естественного потока. В такой постановке понижения напора S будут описываться уравнениями радиального планового потока при нулевых начальных условиях.

Типичными граничными условиями на стенке скважины являются условия постоянного (заданного) дебита или постоянного (заданного) во времени напора (понижения уровня), причем условие заданного дебита наиболее характерно для водообильных горизонтов, где дебит скважины лимитируется производительностью насоса, а условие заданного напора — для откачек из слабопроницаемых горизонтов и для самоизливающихся скважин. В качестве основного в дальнейшем будет рассматриваться наиболее распространенное условие заданного дебита скважины, когда по контуру скважины задается расход потока, соответствующий дебиту откачки Q. В радиальном потоке приток по контуру скважины равномерен и это условие имеет вид

$$Q = 2\pi r_c T \left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{r=r_c} = -2\pi r_c T \left.\frac{\partial S}{\partial r}\right|_{r=r_c}. \qquad \text{(IV.2.7)}$$

Обычно размеры области влияния скважины значительно превышают ее радиус, и это дает основание в качестве удобной модели скважины использовать источник-сток, который представляет собой скважину исчезающе малого радиуса (т. е. в этом случае $r_c \to 0$).

Условие заданного дебита допускает широкое применение принципа суперпозиции, ибо если на радиальный поток, возникающий при откачке из скважины, наложить любой поток, то, хотя равномерность притока к скважине нарушится ввиду небольшого размера скважины, это нарушение будет одинаковым по всему контуру и суммарный приток к скважине изменится.

§ 2. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАНОВО-РАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

2.1. Обоснование расчетных зависимостей

Основная задача нестационарной планово-радиальной фильтрации решается для условий откачки из скважины с постоянным дебитом Q, проходящей начиная с момента времени $t=0$ в неограниченном изолированном напорном пласте при отсутствии естественного потока.

Решение поставленной задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения (IV.2.5) при начальном условии $H=H_0=\text{const}$ и граничном условии (IV.2.7) на скважине. Удобнее решать такую задачу в понижениях напора $S=H_0-H$, которые также удовлетворяют уравнению (IV.2.6), но начальное условие здесь уже становится нулевым.

Решение такой задачи, полученное впервые Ч. Тейсом [42], имеет вид

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u),\quad u=\frac{r^2}{4at}, \tag{IV.2.8}$$

причем функция скважины $W(u)$ (well-function, по Ч. Тейсу) связывается со специальной функцией Ei, называемой интегральным экспоненциалом, и может быть представлена следующим образом:

$$W(u)=-Ei(-u)=\int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx=$$

$$=\ln\frac{1}{u}-0{,}577+u-\frac{u^2}{2\cdot 2!}+\ldots \tag{IV.2.8а}$$

Таблица функции $W(u)$ приведена в приложении.

Уравнение (IV.2.8) является приближенным, поскольку оно неточно удовлетворяет граничному условию на стенке скважины. Для анализа степени его приближенности найдем согласно (IV.2.4) выражение Q_r для расхода потока, движущегося к скважине, в сечении радиуса r, меняя только знак расхода и подставляя вместо S его выражение (IV.2.8):

$$Q_r=2\pi rT\frac{\partial H}{\partial r}=-2\pi rT\frac{\partial S}{\partial r}=-2\pi rT\cdot\frac{Q}{4\pi T}\cdot\frac{\partial}{\partial r}[W(u)]=$$

$$=-Q\frac{r}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial W}{\partial u}=\frac{rQ}{2}\cdot\frac{2r}{4at}\cdot\frac{e^{-u}}{u}=Qe^{-u}, \tag{IV.2.9}$$

а при $r=r_c$ получим расход Q_c на стенке скважины

$$Q_c=Qe^{-u_c},\quad u_c=\frac{r_c^2}{4at}. \tag{IV.2.10}$$

Таким образом, в решении (IV.2.8) приток в скважине оказывается переменным, лишь асимптотически (при $t\to\infty$) достигающим заданного дебита Q, поскольку именно в этом случае $u_c=0$ и $Q=Q_c$. Строгим это решение оказывается только при $r_c=0$, т. е. для источника-стока, представляющего собой математическую модель скважины исчезающе малого радиуса. Однако приближенность этого решения в большинстве случаев оказывается несущественной, поскольку величина Q_c, определяемая формулой (IV.2.10), довольно быстро стремится к своему предельному значению Q. Так, согласно (IV.2.10) $Q_c\cong Q$ с точностью до 1% уже начиная со значения аргумента $u_c=0{,}01$, когда $t=t^0=25\frac{r_c^2}{a}$. Задавая характерные значения $r_c=0{,}2$ м и $a=10^4$ м^2/сут, получим $t^0=\frac{25\cdot 0{,}04}{10^4}=10^{-4}$ сут $=10$ с, т. е. стабилизация расчетного расхода скважины происходит за время несоизмеримо меньшее времени реальной работы скважин. Это обстоятельство дает основание широко применять в гидродинамических исследованиях скважин теорию источников-стоков, позволяющую существенно упростить методику таких исследований.

Из общего выражения (IV.2.8а) для функции $W(u)$ следует, что при малых значениях аргумента она имеет логарифмическое представление

$$W(u)=\ln\frac{1}{u}-0{,}577=\ln\frac{2{,}25at}{r^2}, \qquad \text{(IV.2.11)}$$

причем абсолютная погрешность такого представления равна аргументу u. С точностью до 1—5% оно применимо при условии

$$u=\frac{r^2}{4at}<0{,}03\div 0{,}09. \qquad \text{(IV.2.12)}$$

В этом случае уравнение (IV.2.8) принимает вид

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2{,}25at}{r^2}=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1{,}5\sqrt{at}}{r}, \qquad \text{(IV.2.13)}$$

а понижение в скважине

$$S_c=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1{,}5\sqrt{at}}{r_c}. \qquad \text{(IV.2.14)}$$

Сопоставляя (IV.2.14) с выражением (IV.1.5) для понижения уровня в скважине при стационарном режиме, найдем, что в рассматриваемых условиях неограниченного изолированного потока условный радиус питания определяется формулой

$$R=1{,}5\sqrt{at}, \qquad \text{(IV.2.15)}$$

причем из (IV.2.15) следует, что в этом случае расчетный радиус питания неограниченно увеличивается со временем.

Запишем выражение (IV.2.14) в виде

$$S_c = \xi \frac{Q}{T};\ \xi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1{,}5\sqrt{at}}{r_c}. \qquad \text{(IV.2.16)}$$

Расчеты величины ξ при реальных значениях a и $r_c = 0{,}1$ м дают результаты, приведенные в табл. IV.1. Как видно, для «чистых» скважин (при отсутствии прискважинного сопротивления) значения ξ меняются в сравнительно узких пределах, причем ориентировочно можно принимать для безнапорных пластов $\xi = 1$, а для напорных пластов $\xi = 1{,}5$.

Таблица IV.1

Типичные расчетные значения ξ

Поток	Безнапорный				Напорный					
Порода — песок	мелкозернистый		крупнозернистый		тонкозернистый			мелкозернистый		
a, м²/сут	500—2000		2000—5000		10^4			10^5		
t, сут	1	10	1	10	1	10	100	1	10	100
ξ	0,9—1	1—1,2	0,9—1,1	1,1—1,3	1,2	1,3	1,5	1,3	1,5	1,7

2.2. Закономерности формирования воронки депрессии

Используя выражения (IV.2.13) и (IV.2.14), найдем разность понижений в скважине и в любой точке

$$S_c - S = \frac{Q}{2\pi T}\left(\ln \frac{1{,}5\sqrt{at}}{r_c} - \ln \frac{1{,}5\sqrt{at}}{r}\right) = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r}{r_c}, \qquad \text{(IV.2.17)}$$

которая оказывается независящей от времени и совпадающей с выражением, определяемым уравнением Дюпюи (IV.1.3), полученным для стационарного режима. Таким образом, при выполнении условия (IV.2.12) режим изменения уровней становится *квазистационарным*, когда уровни во времени снижаются, но их распределение в каждый момент времени соответствует закономерностям стационарного режима.

Дифференцируя уравнение (IV.2.13) во времени, получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi T t}, \qquad \text{(IV.2.18)}$$

откуда следует, что скорость снижения уровня в этом случае не зависит от радиуса r и, следовательно, воронка депрессии в зоне

квазистационарного режима при откачке опускается параллельно самой себе, а график в координатах S и $\lg t$ становится прямолинейным (рис. 70, *а*).

Таким образом, в неограниченном изолированном пласте уравнение Дюпюи для стационарного режима обосновывается в зоне квазистационарного режима, радиус которой $R_{кв}$ определяется условием (IV.2.12), из которого следует выражение

$$R_{кв} = (0{,}35 \div 0{,}6)\sqrt{at}. \qquad \text{(IV.2.19)}$$

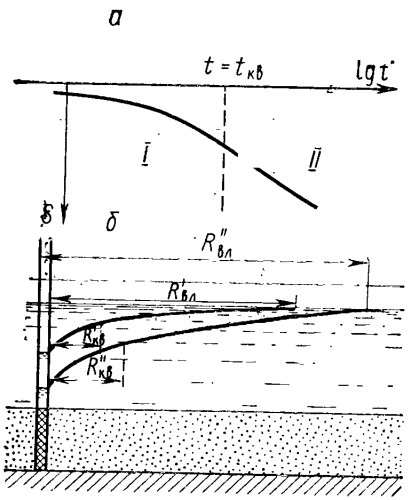


Рис. 70. Характер формирования воронки депрессии:
а — типичный график изменения понижения во времени (I и II — зоны нестационарного и квазистационарного режимов); *б* — форма воронки депрессии на два момента времени при откачке с постоянным дебитом

В прискважинной зоне квазистационарный режим наступает обычно очень быстро, поэтому учет дополнительных сопротивлений прискважинной зоны, возникающих в результате изменения ее проницаемости и нарушения линейного режима фильтрации, может проводиться по методике, рассмотренной для условий стационарного режима. Например, влияние сопротивления фильтра учитывается заменой в формуле (IV.2.16) величины r_c расчетным радиусом скважины r_c^0.

Приведенные зависимости позволяют составить представление о характере развития воронки депрессии в пространстве (рис. 70, *б*). Радиус влияния воронки депрессии $R_{вл}$, определяющий реальную область ее развития, находится из условия, что за его пределами понижения уровня будут меньше минимальной реально фиксируемой величины $S_{мин}$, т. е. должно быть

$$\frac{Q}{4\pi T} W(u_0) = S_{мин},\ u_0 = \frac{R_{вл}^2}{4at}. \qquad \text{(IV.2.20)}$$

Используя приближенное выражение (IV.2.16), представим условие (IV.2.20) в виде

$$\overline{S}_{мин} = \frac{S_{мин}}{S_c} = \frac{1}{4\xi} W(u_0). \qquad \text{(IV.2.20а)}$$

Исходя из возможностей замера уровней, можно принять $S_{мин} = 1$—5 см, а имея в виду, что обычно $S_c \leqslant 10$—15 м, найдем характерное значение $\overline{S}_{мин} = 0{,}001$. Согласно (IV.2.20а) при среднем значении $\theta = 1{,}2$ получим $W(u_0) = 0{,}015$ и по таблице функ-

ции W (см. приложение) находим $u_0=2{,}9$. Заметим, что полученное таким путем значение u_0 сравнительно слабо зависит от заданной величины $\bar{S}_{\text{мин}}$. Например, при $S_{\text{мин}}=0{,}005$ получим $u_0=1{,}7$, а при $\bar{S}_{\text{мин}}=0{,}0005$—$u_0=3{,}5$, поэтому значение $u_0=2{,}9$ вполне может быть принято как расчетное. В соответствии с выражением для u_0 запишем далее формулу для радиуса влияния

$$R_{\text{вл}}=2\sqrt{u_0 at}=3{,}4\sqrt{at}. \qquad \text{(IV.2.21)}$$

Как видно, выражение для $R_{\text{вл}}$ по форме оказалось аналогичным выражению (IV.2.15) для радиуса питания R, причем величина R оказывается примерно вдвое меньшей радиуса влияния.

§ 3. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕТЕКАНИЯ НА РАБОТУ СКВАЖИН В СЛОИСТЫХ СИСТЕМАХ

Слоистые системы представляют собой чередование водоносных пластов и разделяющих слоев; в гидродинамическом смысле они сводятся к планово-пространственным потокам, основанным на использовании предпосылки перетекания (см. § 1 главы 5 раздела I).

В этом случае для каждого водоносного пласта распределение напоров (понижений) описывается уравнением (IV.2.6), в котором скорости фильтрации $v_{\text{к}}$ и $v_{\text{п}}$ на кровле и подошве пласта определяются условиями перетекания в разделяющем слое.

Наиболее простой и широко используемой в практических расчетах является схема «жесткого перетекания», когда пренебрегают упругим режимом в разделяющих пластах, так что скорости фильтраций в кровле и подошве водоносного пласта представляются выражениями

$$v_{\text{к}}=k_{\text{к}}\frac{H_{\text{к}}-H}{m_{\text{к}}},\quad v_{\text{п}}=k_{\text{п}}\frac{H_{\text{п}}-H}{m_{\text{п}}}, \qquad \text{(IV.2.22)}$$

где $H_{\text{к}}$ и $H_{\text{п}}$ — напоры в соседних водоносных пластах со стороны кровли и подошвы расчетного водоносного пласта. Подставляя эти выражения в уравнение (IV.2.6), получим дифференциальное уравнение для напоров расчетного водоносного пласта

$$\frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)+b_{\text{к}}^2(H_{\text{к}}-H)+b_{\text{п}}^2(H_{\text{п}}-H), \qquad \text{(IV.2.23)}$$

где $b_{\text{к}}$ и $b_{\text{п}}$ — коэффициенты перетекания:

$$b_{\text{к}}=\sqrt{\frac{k_{\text{к}}}{m_{\text{к}}T}},\quad b_{\text{п}}=\sqrt{\frac{k_{\text{п}}}{m_{\text{п}}T}}. \qquad \text{(IV.2.23а)}$$

Для выявления закономерностей влияния перетекания на режим снижения уровней при откачках в слоистых пластах рассмотрим условия работы скважин с постоянным дебитом при неизмен-

ных и одинаковых уровнях в соседних горизонтах ($H_к = H_п = H_0$), когда оно, будучи записанным относительно понижений уровней $S = H_0 - H$, принимает вид

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial S}{\partial r}\right) - b^2 S, \qquad \text{(IV.2.24)}$$

$$b = \sqrt{b_к^2 + b_п^2} = \sqrt{\left(\frac{k_к}{m_к} + \frac{k_п}{m_п}\right)\frac{1}{T}}, \qquad \text{(IV.2.24а)}$$

а граничные условия на скважине сохраняются в форме (IV.2.7).

В такой постановке решение рассмотрели Ч. Джейкоб и М. Хантуш [37]. Согласно этому решению понижение в любой наблюдательной скважине описывается уравнением

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W_п(u, \bar{r}), \quad u = \frac{r^2}{4at}, \quad \bar{r} = br, \qquad \text{(IV.2.25)}$$

$$W_п(u, \bar{r}) = \int_u^\infty \exp\left(-x - \frac{\bar{r}^2}{4x}\right)\frac{dx}{x}. \qquad \text{(IV.2.25а)}$$

Функция $W_п(u, \bar{r})$ подробно табулирована [12]; в сокращенном виде ее таблица приведена в приложении.

Из анализа функции $W_п(u, \bar{r})$ следует, что в пределе при $t \to \infty$ и $u = 0$ она имеет конкретное конечное выражение $W_п(0, \bar{r}) = 2K_0(\bar{r})$, где K_0 — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента. Следовательно, в этом случае существует предельная стационарная воронка депрессии, описываемая уравнением

$$S = S_{ст} = \frac{Q}{2\pi T} K_0(\bar{r}), \quad \bar{r} = br, \qquad \text{(IV.2.26)}$$

которое получили Н. К. Гиринский, А. Н. Мятиев, Ч. Джейкоб [11, 23, 39]; практически оно применимо при условии

$$ab^2 t > 2{,}5. \qquad \text{(IV.2.27)}$$

Типовой график изменения уровней, описываемого уравнением (IV.2.25), приведен на рис. 71, *а*. Для этого гр ка характерно наличие точки перегиба (с понижением $S_п$, равн половине стационарного), после прохождения которой уровни асимптотически стремятся к своему предельному значению, определяемому уравнением (IV.2.26).

При малом значении $\bar{r}$ функция $K_0(\bar{r})$ имеет логарифмическую асимптоту и при $\bar{r} \leqslant 0{,}1$—$0{,}34$ с точностью 1÷5% можно считать $K_0(\bar{r}) = -\ln\bar{r} + 0{,}116$, так что уравнение (IV.2.26) примет вид

$$S = \frac{Q}{2\pi T}\left(\ln\frac{1}{\bar{r}} + 0{,}116\right) = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1{,}12B}{\bar{r}}. \qquad \text{(IV.2.28)}$$

В частности, на скважине

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{1{,}12B}{r_c}, \quad B = 1/b. \qquad \text{(IV.2.28а)}$$

Нетрудно убедиться, что разница понижений S_c—S в данном случае подчиняется уравнению Дюпюи (IV.1.4), полученному для изолированного пласта. Следовательно, в зоне, где $r < (0{,}1 \div 0{,}34)B$, перетекание не изменяет формы воронки депрессии и

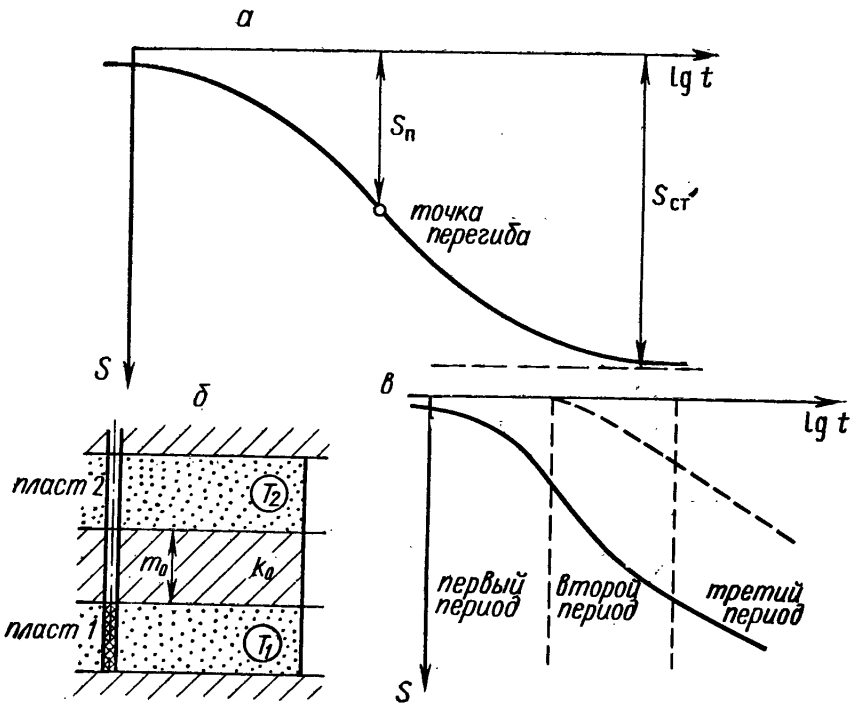


Рис. 71. Закономерности понижения напора при наличии перетекания:
а — типовой график при неизменном напоре в соседних слоях; *б* — схема откачки из двухпластовой системы; *в* — типовой график для откачки из двухпластовой системы (сплошная линия — в пласте 1, пунктир — в пласте 2)

здесь применимы все зависимости, полученные для схемы изолированного пласта.

Принятое в этой схеме условие постоянства уровней в соседних (подпитывающих) горизонтах можно считать логически обоснованным, если подпитывающие пласты более водообильны, чем опробуемый пласт. В противном случае это условие может носить лишь временный характер, поскольку при длительной откачке напоры подпитывающих горизонтов могут существенно снизиться. Например, при взаимодействии двух водоносных пластов с прово-

димостями T_1 и T_2 (рис. 71, *б*), в одном из которых ведется откачка, а другой является подпитывающим, режим снижения уровней в откачиваемом пласте будет иметь три характерных периода (рис. 71, *в*): в первый период, следующий до заметного снижения уровней в подпитывающем пласте, понижения будут формироваться по зависимости (VI.2.25), затем пройдет переходный период сложного взаимодействия уровней в пластах, после чего начнется период совместной работы водоносных пластов, когда снижение уровня будет происходить как в едином пласте суммарной проводимости, т. е. будет определяться уравнением (IV.2.8) при $T = T_1 + T_2$ и $\mu_{упр} = \mu'_{упр} + \mu''_{упр} + \mu^0_{упр}$ ($\mu'_{упр}$, $\mu''_{упр}$ и $\mu^0_{упр}$ — коэффициенты упругой отдачи водоносных пластов и разделяющего слоя). Интересно, что при одинаковых параметрах пластов ($T_1 = T_2$ и $\mu'_{упр} = \mu''_{упр}$) уравнением (IV.2.25) описывается разница понижений уровней в откачиваемом и подпитывающем пластах (S_1 и S_2), т. е. в выражении (IV.2.25) S заменяется на $S_1 - S_2$ при $b = \sqrt{\frac{k_0}{m_0 T}}$. Более подробно гидродинамика таких откачек рассмотрена, например, в работах [2, 17, 26, 40].

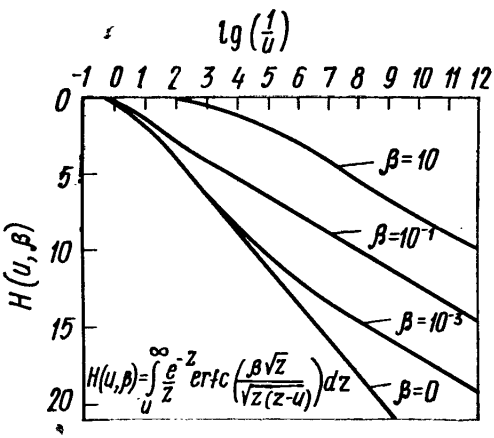


Рис. 72. График функции

$$H(u, \beta) = \int_u^\infty \frac{e^{-z}}{z} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sqrt{z}}{\sqrt{z(z-u)}}\right) dz$$

Специфический характер режима снижения уровней возникает при существенном влиянии упругого режима фильтрации в разделяющих слоях. Например, при бесконечной мощности разделяющих слоев, имеющих коэффициент фильтрации k_0 и коэффициент пьезопроводности a_0 (такая схема может, очевидно, применяться, если упругое возмущение не распространяется до границы разделяющего слоя), понижение уровней в откачиваемом пласте определяется уравнением [26].

$$S = \frac{Q}{4\pi T} H(u, \beta), \quad u = \frac{r^2}{4at},$$

$$\beta = \frac{rk_0}{4T}\sqrt{\frac{a}{a_0}}. \qquad \text{(IV.2.29)}$$

Графики и выражение функции $H(u, \beta)$ приведены на рис. 72; подробные таблицы этой функции имеются в работах [2, 17, 26]. Анализ уравнения (IV.2.29) показывает, что в данном случае также формируются три качественно разных периода снижения уровней: в первом периоде фильтрация из разделяющих слоев еще не оказывает влияния, так что понижение S практически определяется зависимостью (IV.2.8); второй период — переходный, а в третьем — формируется логарифмический закон снижения уровней во времени:

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{2{,}25at}{r^2}, \qquad \text{(IV.2.30)}$$

т. е. как в изолированном пласте, но при удвоенной проводимости. Таким образом, предельный эффект влияния упругого подпитывания из разделяющих слоев соответствует удвоению проводимости водоносного пласта.

§ 4. НЕУПОРЯДОЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКВАЖИН И УЧЕТ ПЕРЕМЕННОГО ДЕБИТА СКВАЖИН

При построении расчетных зависимостей для системы взаимодействующих скважин, работающих с заданным дебитом, используется принцип суперпозиции (сложения течений), согласно которому в потоках с неизменной проводимостью изменение (понижение) уровней под действием откачки из системы скважин определится как сумма понижений, вызываемых действием каждой скважины в отдельности. Необходимость задания дебита скважин обусловливается тем, что, как показано в § 1 настоящей главы, для скважин малого радиуса это граничное условие не нарушится при наложении влияния взаимодействующих скважин. Ниже будет показано, что применение принципа суперпозиции для расчета систем скважин дает погрешность не более 1—2%, если расстояние между скважинами превышает $(6 \div 8) r_c$; для скважин это условие выполняется практически всегда, что дает основание прилагать к их расчету принцип суперпозиции без каких-либо ограничений. В соответствии с этим принципом понижение от действия системы взаимодействующих скважин определится как сумма понижений действия каждой из этих скважин в отдельности, т. е. если S_1, S_2, ..., S_i — понижения уровней, определяемые при работе скважин номера 1, 2, ..., i, то суммарное понижение при работе всей системы будет

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_i. \qquad \text{(IV.2.31)}$$

При откачках с постоянным дебитом в однородном неограниченном изолированном пласте, где понижение уровней под действием одной скважины определяется формулой (IV.2.8), общее понижение уровня при работе системы i-того числа скважин в соответствии с (IV.2.31) определится уравнением

$$S = \frac{Q_1}{4\pi T} W(u_1) + \frac{Q_2}{4\pi T} W(u_2) + \ldots + \frac{Q_i}{4\pi T} W(u_i), \qquad \text{(IV.2.32)}$$

$$u_1 = \frac{r_1^2}{4a(t - t_1)}, \; u_2 = \frac{r_2^2}{4a(t - t_2)}, \; \ldots, \; u_i = \frac{r_i^2}{4a(t - t_i)}, \qquad \text{(IV.2.32a)}$$

где r_1, r_2, ..., r_i — расстояния от центральных скважин номера 1, 2, ..., i до расчетной точки (рис. 73, *а*); Q_1, Q_2, ..., Q_i — дебиты скважин номера 1, 2, ..., i; t_1, t_2, ..., t_i — время начала откачки из скважин номера 1, 2, ..., i.

При наступлении квазистационарного режима, имеющего место, когда аргументы u_1, u_2, ..., u_i удовлетворяют условию (IV.2.12), выражение (IV.2.32) принимает вид

$$S = \frac{Q_1}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25a(t-t_1)}{r_1^2} + \ldots + \frac{Q_i}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25a(t-t_i)}{r_i^2} =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi T} [\ln 2{,}25a(t-t_1) - 2 \ln r_1] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{Q_i}{4\pi T} [\ln 2{,}25a(t-t_1) - 2 \ln r_i], \qquad \text{(IV.2.33)}$$

а, введя безразмерный дебит скважины $\chi_i = \frac{Q_i}{Q}$, где $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_i$ — суммарный дебит скважин, получим

$$S = \frac{Q}{4\pi T} [\ln 2{,}25a + \chi_1 \ln (t-t_1) + \ldots + \chi_i \ln (t-t_i) -$$

$$- 2\chi_1 \ln r_1 - \ldots - 2\chi_i \ln r_i] = \frac{Q}{4\pi T} [\ln 2{,}25a + \ln (t-t_1)^{\chi_1} + \ldots$$

$$\ldots + \ln (t-t_i)^{\chi_i} - 2 \ln r_1^{\chi_1} - \ldots - 2 \ln r_i^{\chi_i}]. \qquad \text{(IV.2.34)}$$

Введем далее расчетное время t_0 и расчетный радиус r_0 такие, что

$$\ln t_0 = \ln (t-t_1)^{\chi_1} + \ldots + \ln (t-t_i)^{\chi_i}, \qquad \text{(IV.2.35)}$$

$$\ln r_0 = \ln r^{\chi_1} + \ldots + \ln r_i^{\chi_i}, \qquad \text{(IV.2.36)}$$

после чего выражение (IV.2.34) можно представить в виде

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25at_0}{r_0^2}, \qquad \text{(IV.2.37)}$$

соответствующем по форме выражению (IV.2.13) для откачки из одиночной скважины [34]. Таким образом, в неограниченном потоке при квазистационарном режиме можно пользоваться зависимостями, полученными для откачки из одиночной скважины, вводя только расчетные значения радиуса r_0 и времени t_0, определяемые согласно (IV.2.36) и (IV.2.37). Такой расчетный прием приведения системы скважин к одиночной, введенный впервые Ф. Форхгеймером [25], носит название способа «большого колодца».

Аналогичным путем можно составить решения и для взаимодействующих скважин в слоистых потоках. Например, при учете перетекания по уравнению (IV.2.25) выражение для понижения от действия системы скважин получится по форме таким же, как уравнение (IV.2.32), только в нем следует заменять $W(u_i)$ на $W_{\text{п}}(u_i, \overline{r_i})$.

Расчеты взаимодействующих скважин в безнапорных потоках, располагаемых на горизонтальном водоупоре, могут проводиться с использованием

принципа суперпозиции по общей формуле (IV.2.31), однако при этом операции суперпозиции в общем случае должны производиться с расчетными понижениями уровней, определяемыми по зависимостям (IV.1.8)—(IV.1.10).

Используя принцип суперпозиции, можно построить решение для переменного во времени дебита скважин, если задать его изменение по ступенчатому закону (рис. 73, *б*). Для первой ступени (при $t<t_1$) решение получится соответствующим режиму первоначальной откачки при $Q=Q_0$; для второй ступени решение получится наложением друг на друга двух откачек — одной, первоначальной, с дебитом Q_0 и другой с дополнительным дебитом второй ступени ΔQ_1, сдвинутой во времени на величину t_1; для третьей ступени на понижение, получаемое для двух ступеней, наложится понижение от действия третьей ступени с дополнительным дебитом ΔQ_2, сдвинутой во времени на величину t_2. В частности, для откачки в изолированном неограниченном напорном пласте для первой ступени понижение определится уравнением (IV.2.8) при $Q=Q_0$, а для второй ступени получим

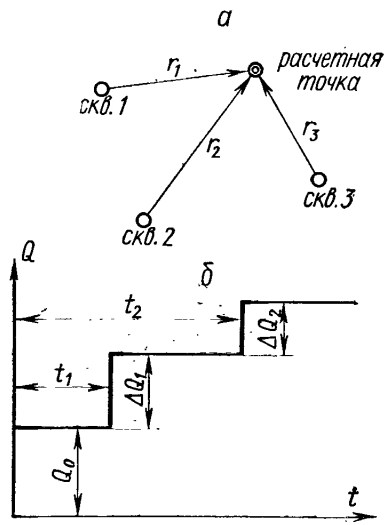


Рис. 73. К расчетам взаимодействующих и переменнодействующих скважин:
а — расположение взаимодействующих скважин; *б* — ступенчатый график изменения дебита скважин

$$S=\frac{Q_0}{4\pi T}W(u)+\frac{\Delta Q_1}{4\pi T}W(u_1),\quad u_1=\frac{r^2}{4a(t-t_1)}. \qquad \text{(IV.2.38)}$$

Соответственно для третьей ступени откачки

$$S=\frac{Q_0}{4\pi T}W(u)+\frac{\Delta Q_1}{4\pi T}W(u_1)+\frac{\Delta Q_2}{4\pi T}W(u_2),\quad u_2=\frac{r^2}{4a(t-t_2)}. \qquad \text{(IV.2.38а)}$$

Аналогично можно построить выражение для понижений уровня для любой последующей ступени откачки.

Глава 3
УЧЕТ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ ПЛАСТА В ПЛАНЕ

Влияние прямолинейных границ с условиями первого и второго родов (с постоянным напором и постоянным расходом) эффективно учитывается на основе метода зеркальных отображений [12, 22].

§ 1. ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЙ ПЛАСТ

Полуограниченный пласт имеет в плане прямолинейную границу, на которой могут задаваться граничные условия первого, второго или третьего родов.

1.1. Прямолинейная граница с условием первого рода (заданных напор $H=\text{const}$ или нулевое понижение напора $S=0$)

Наличие такой границы учитывается заданием фиктивной нагнетательной скважины, представляющей собой зеркальное отображение действующей скважины (рис. 74). Для такой дуплетной системы скважин понижение уровня в любой точке на расстоянии r от скважины уменьшится на величину повышения уровня в этой точке $\Delta H'$ от действия фиктивной (зеркально отображенной) скважины, которое определяется, как и понижение уровня при расчетном расстоянии r'.

Для условий откачки с постоянным дебитом Q понижение уровня от действия реальной скважины определится уравнением (IV.2.8), а повышение уровня от действия фиктивной скважины соответственно будет.

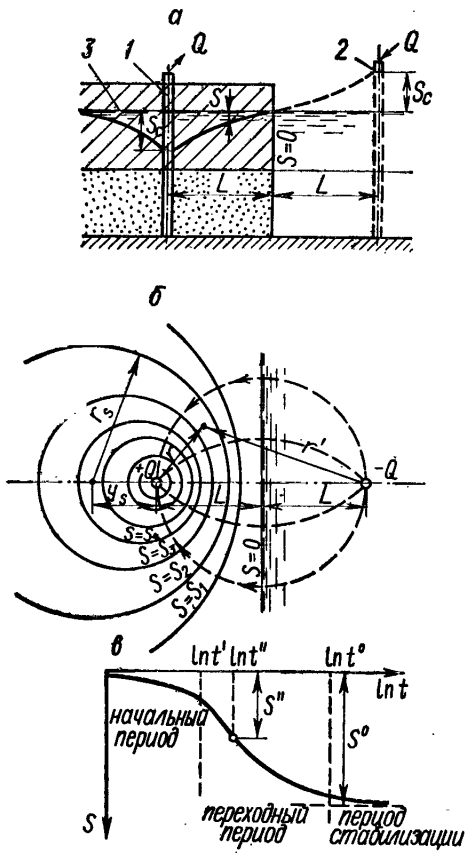


Рис. 74. Скважина у прямолинейной границы первого рода:
а — разрез через скважину по нормали к границе (*1* и *2* — действительная и отраженная скважины, *3* — начальная свободная поверхность); *б* — план течения (сплошные — линии равного понижения уровня, пунктирные — линии тока); *в* — полулогарифмический график понижения уровня

$$\Delta H' = \frac{Q}{4\pi T} W(u'); \quad u' = \frac{(r')^2}{4at}. \qquad \text{(IV.3.1)}$$

Следовательно, понижение от действия дуплетной системы реальной и фиктивной скважин будет

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W(u) - \frac{Q}{4\pi T} W(u') = \frac{Q}{4\pi T} [W(u) - W(u')]; \quad \text{(IV.3.2)}$$

$$u = \frac{r^2}{4at},\quad u' = \frac{(r')^2}{4at} \qquad \text{(IV.3.2a)}$$

Поскольку на границе $r=r'$ и $u=u'$, то $S=0$, так что уравнение (IV.3.2) действительно удовлетворяет заданному граничному условию первого рода.

Для определения понижения S_c на стенке скважины в выражениях аргументов u и u' следует положить $r=r_c$ и $r'=2L$.

При длительной откачке, когда аргументы u и u' удовлетворяют условию (IV.2.12), заменяя функции $W(u)$ и $W(u')$ их логарифмическими представлениями, получим

$$S = S^0 = \frac{Q}{4\pi T}\left[\ln\frac{2{,}25at}{r^2} - \ln\frac{2{,}25at}{(r')^2}\right] = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r'}{r}, \qquad \text{(IV.3.3)}$$

а для скважины $r=r_c$ и $r'=2L$ получим формулу

$$S_c = S_c^0 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{2L}{r_c}, \qquad \text{(IV.3.4)}$$

впервые доказанную Ф. Форхгеймером [25].

Сетка движения дуплетной системы источник-сток, описываемая уравнением (IV.3.3), имеет характер, изображенный на рис. 74, *б*. Здесь эквипотенциали (линии равного понижения уровня) представляются окружностями, центры которых расположены на прямой, проходящей через источник и сток; можно показать, что радиус эквипотенциальной окружности r_s с центром в точке на расстоянии y_s от скважины определяется формулой

$$r_s = \sqrt{y_s(2L + y_s)}, \qquad \text{(IV.3.5)}$$

а расстояние y_s связывается с понижением уровня S на эквипотенциальной окружности зависимостями

$$S = \frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{y_s + 2L}{y_s} \text{ или } y_s = -\frac{2L}{\exp\left(\frac{4\pi TS}{Q}\right) - 1}. \qquad \text{(IV.3.6)}$$

Линии тока тоже представляют собой окружности, не проходящие через источник-сток и имеющие центры на границе $S=0$.

Поскольку эквипотенциали являются здесь окружностями, то решение для дуплетной системы источника-стока будет справедливо и для скважины (колодца) конечного радиуса r_c, поскольку ее контур можно совместить с эквипотенциалью радиуса $r_s=r_c$. В этом случае только положение расчетного источника-стока сдвигается относительно действительного центра скажины на величину y_s, определяемую согласно (IV.3.5) при $r_s=r_c$, причем можно показать, что при расстоянии L от центра скважины до реки расчетное расстояние $L_0=L-y_s$ определяется по формуле

$$L_0 = \sqrt{L^2 - r_c^2}. \qquad \text{(IV.3.7)}$$

Н. К. Гиринским [11] была рассмотрена эта задача для стационарного потока в строгой постановке (методом конформных отображений) с учетом реального радиуса скважины (колодца) r_c, причем были получены следующие величины

погрешностей δQ в расчетах притока к скважине по строгому решению и с заменой скважины источником-стоком (последнее всегда дает заниженный результат):

L/r_c	5	4	3	2
δQ	0	0,01	0,02	0,04

Из уравнения (IV.3.2) обосновывается следующий характер зависимости понижения уровня S от времени t (рис. 74, *в*): в начальный период еще не сказывается влияние границы, затем наступает переходный период, который завершается асимптотической стабилизацией уровней, стремящихся к значениям S^0, определяемым выражением (IV.3.3).

Очевидно, что время наступления переходного периода можно установить из условия

$$\frac{W(u_1')}{W(u_1)} = \delta S, \qquad \text{(IV.3.8)}$$

где δS — допустимая относительная погрешность определения понижения уровня S. Численный анализ выражения (IV.3.8) показывает, что его можно аппроксимировать выражением

$$u_1' = 0{,}7\sqrt{\frac{\bar{r}}{\delta S}}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r'}. \qquad \text{(IV.3.9)}$$

Из выражения (IV.3.9) следует формула для оценки времени t' наступления переходного режима, начиная с которого необходимо учитывать влияние границы

$$t' = 0{,}36\frac{(r')^2}{a}\sqrt{\frac{\delta S}{\bar{r}}}. \qquad \text{(IV.3.10)}$$

Минимальное значение этого времени $(t' = t'_{\text{мин}})$ получится для точек, располагаемых на границе, где $r' = L$ и $\bar{r} = 1$, т. е.

$$t'_{\text{мин}} = 0{,}36\frac{L^2}{a}\sqrt{\delta S}. \qquad \text{(IV.3.11)}$$

Время t^0 практической стабилизации откачки найдем при $t = t^0$ из выражения для допустимой относительной погрешности

$$\delta S = \frac{S^0 - S}{S^0} = \frac{2\ln\frac{1}{\bar{r}} - W(u) + W(u')}{2\ln\frac{1}{\bar{r}}}. \qquad \text{(IV.3.12)}$$

Поскольку при стабилизации уровней величины u сравнительно малы, причем $u < u'$, то можно принять

$$W(u) = \ln\frac{2{,}25at}{r^2} \text{ и } W(u') = \ln\frac{2{,}25at}{(r')^2} + u', \qquad \text{(IV.3.13)}$$

так что выражение (IV.3.12) примет вид

$$u = \frac{(r')^2}{4at^0} = 2\delta S \ln\frac{1}{\bar{r}} = 4{,}6\delta S \lg\frac{1}{\bar{r}}.$$

Например, при $\bar{r}=0{,}33$ и $\delta S=0{,}02$ получим $u=4{,}6\cdot 0{,}02\cdot 0{,}477=0{,}044$.

1.2. Непроницаемая граница

Такая граница представляет собой наиболее характерный вариант границы второго рода: она учитывается заданием фиктивной откачивающей скважины той же интенсивности, что и действительная, и расположенной симметрично относительно этой границы (рис. 75, *а, б*). Соответственно понижение уровня в этом случае получится сложением понижений создаваемых действительной и фиктивной скважинами, т. е.

$$S = \frac{Q}{4\pi T}[W(u) + W(u')];\ u = \frac{r^2}{4at},\ u' = \frac{(r')^2}{4at}. \quad \text{(IV.3.14)}$$

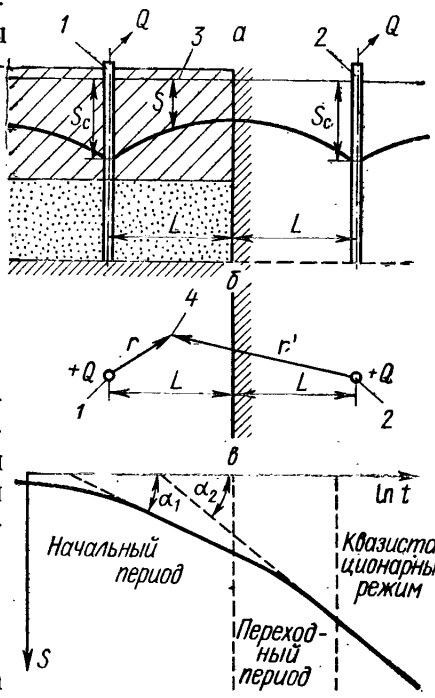


Рис. 75. Скважины у прямолинейной непроницаемой границы:
а — разрез через скважину по нормали к границе; *б* — план расположения скважины; *в* — полулогарифмический график понижения уровня (*1* и *2* — действительная и отраженная скважины, *3* — начальная свободная поверхность, *4* — расчетная точка)

Вследствие симметрии действительной и фиктивной скважин градиент напора (понижения) по оси симметрии будет нулевым, что и соответствует условию, задаваемому на непроницаемой границе. Строгое доказательство этого положения можно получить, дифференцируя выражение (IV.3.14) по x и имея в виду, что $r^2=(L-x)^2+y^2$, а $(r')^2=(L+x)^2+y^2$.

График $S\to\ln t$ в данном случае будет иметь вид, представленный на рис. 75, *в*: в начальный период, длительность которого определяется здесь также по формуле (IV.3.10), следующей из условия (IV.3.8), на снижение уровня граница практически не влияет; затем начинается переходный период, в течение которого влияние границы постепенно интенсифицируется, и, наконец, наступает период квазистационарного режима, когда можно принять логарифмические представления функции скважин, т. е. считать

$$W(u)=\ln\frac{2{,}25at}{r^2},\quad W(u')=\ln\frac{2{,}25at}{(r')^2}$$

и

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\left[\ln\frac{2{,}25at}{r^2}+\ln\frac{2{,}25at}{(r')^2}\right]=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{2{,}25at}{rr'}. \quad \text{(IV.3.15)}$$

Из этого выражения следует, что при квазистационарном режиме снижение уровней происходит по той же зависимости, что и в неограниченном пласте, но как бы при удвоенном дебите скважины и расчетном расстоянии, равном $\sqrt{rr'}$. Соответственно график $S\to\ln t$ (см. рис. 75, *в*) в этот период является прямолинейным, но уклон его будет в два раза больше, чем в таком же неограниченном пласте ($\operatorname{tg}\alpha_2=2\operatorname{tg}\alpha_1$).

1.3. Граница экранированного водоема

Под экранированным водоемом (рис. 76) возникает поток перетекания, который описывается уравнением (IV.2.23) при $H_к=H^0$

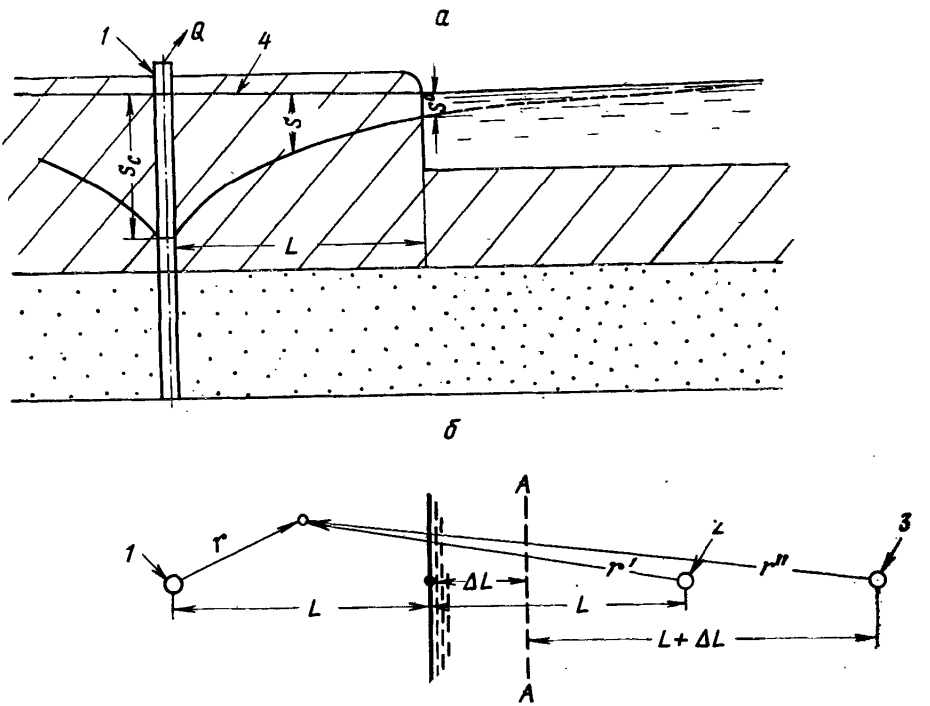


Рис. 76. Скважина у экранированного водоема:
а — разрез через скважину по нормали к границе водоема; *б* — план расположения скважины (*1* — действительная скважина, *2* и *3* — скважины зеркально отраженные относительно уреза водоема и его расчетного положения *АА*, сдвинутого на ΔL, *4* — начальная свободная поверхность)

и $b_п=0$. Анализ решения такой задачи показывает [6, 17, 31], что с высокой точностью здесь можно использовать расчетный прием сдвига уреза водоема на величину ΔL (см. § 1 главы 2 раз-

дела II), согласно которому при стационарном режиме фильтрации понижение уровня под влиянием откачки представляется выражением

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{r''}{r}, \quad r'' = \sqrt{(L + x + 2\Delta L)^2 + y^2}, \qquad \text{(IV.3.16)}$$

где r'' — расстояние от расчетной точки до отражения скважины относительно сдвинутого уреза водоема. Этот прием с некоторой модификацией может быть использован и при наличии водотока конечной ширины [17, 31].

Приближенные выражения для нестационарного режима откачки можно в этом случае получить, используя формальную аналогию между выражениями (IV.3.16) и (IV.3.3), т. е. считая, что и при нестационарном режиме влияние полупроницаемой границы третьего рода может быть учтено введением фиктивного источника, располагаемого от данной точки на расстоянии r'', определяемом согласно (IV.3.16). В такой постановке нестационарное понижение уровня в плановом потоке определится уравнением

$$S = \frac{Q}{4\pi T} [W(u) - W(u'')]; \quad u = \frac{r^2}{4at}, \quad u'' = \frac{(r'')^2}{4at}. \qquad \text{(IV.3.17)}$$

Численное сопоставление уравнения (IV.3.17) со строгим решением этой задачи показывает, что при $\Delta L \leqslant 0{,}2\sqrt{at}$ уравнение (IV.3.17) дает вполне удовлетворительные результаты (максимальная погрешность 1—2%).

§ 2. УГЛОВОЙ И ПОЛОСОВОЙ ПЛАСТЫ

Методику построения зависимостей для углового пласта рассмотрим на примере пласта-квадранта с непроницаемыми границами (рис. 77).

В соответствии с приведенным выше обоснованием для учета влияния каждой из непроницаемых границ в отдельности следует ввести фиктивные скважины 1 и 2, располагаемые симметрично относительно этих границ. Однако фиктивные скважины будут нарушать граничное условие: 1 — на оси y, а 2 — на оси x. Для исправления положения следует ввести еще одну дополнительную скважину 3, располагаемую как симметрично скважине 1 относительно оси y, так и симметрично скважине 2 относительно оси x. Построенная таким образом система скважин оказывается симметричной относительно каждой из границ углового пласта, и, следовательно, на них обеспечивается требуемое условие нулевого градиента напора.

Понижение напора в любой точке определится здесь также сложением понижений от действия реальной и всех фиктивных скважин в отдельности:

$$S = \frac{Q}{4\pi T}[W(u) + W(u_x) + W(u_y) + W(u_{xy})]; \qquad \text{(IV.3.18)}$$

$$u = \frac{r^2}{4at},\ u = \frac{r_x^2}{4at},\ u = \frac{r_y^2}{4at},\ u = \frac{r_{xy}^2}{4at}. \qquad \text{(IV.3.19)}$$

Аналогичным путем, меняя только знаки фиктивных (отраженных) скважин, получим решения для условий первого рода и смешанных условий на границах пласта-квадранта. Так, для пласта-квадранта с границами первого рода (рис. 77, *б*) меняется

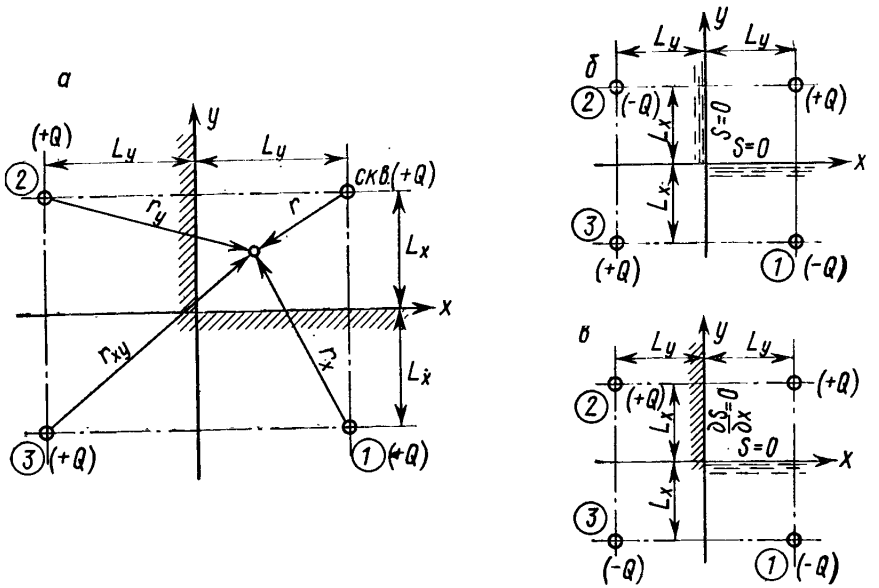


Рис. 77. Скважина в пласте-квадранте:
а — непроницаемые границы по осям *x* и *y*; *б* — границы с постоянным напором по осям *x* и *y*; *в* — непроницаемая граница по оси *y* и постоянный напор по оси *x* (*1*, *2* и *3* — отраженные скважины)

знак расхода у отраженных скважин 1 и 2 (они становятся источниками), а скважина 3 остается стоком, т. е. имеет положительный знак расхода; для пласта-квадранта с границами первого и второго родов (рис. 77, *в*) скважины 1 и 3 становятся источниками, т. е. меняют знак расхода, а скважина 2 остается стоком. Выражения для понижений уровня в этих случаях будут иметь вид, аналогичный выражению (IV.3.18), но с соответствующим изменением знаков отдельных членов.

При наличии границ третьего рода отраженные скважины вводятся так же, как и для границ первого рода, однако вместо геометрических расстояний до *i*-тых отражений скважин относительно этих границ вводятся расчетные расстояния r_i'', определяемые с учетом сдвига границы на расстояние ΔL. Например, для пласта-квадранта, у которого на оси *x* задана граница третьего рода, а на оси *y* — непроницаемая граница, система отраженных скважин

будет такой же, как и для схемы на рис. 77, *в*, но для учета влияния отраженных скважин 1 и 3 вместо расстояний r_x и r_{xy} должны вводиться расстояния r''_x и r''_{xy}, определяемые по общей формуле (IV.3.16) соответственно для реальной скважины и фиктивной скважины 2, так что выражение для понижения уровня здесь будет иметь вид

$$S = \frac{Q}{4\pi T}[W(u) - W(u''_x) + W(u_y) - W(u''_{xy})]; \qquad \text{(IV.3.20)}$$

$$u'_x = \frac{(r''_x)^2}{4at}, \quad u_y = \frac{r_y^2}{4at}, \quad u''_{xy} = \frac{(r'_{xy})^2}{4at}. \qquad \text{(IV.3.20а)}$$

Методику построения зависимостей для полосового пласта рассмотрим на примере пласта-полосы с непроницаемыми границами (рис. 78).

Для учета каждой из границ (I и II) введем фиктивные скважины 1 и 2, представляющие собой симметричные отражения реальной скважины относительно этих границ. Однако эти отраженные скважины изменят условия на противоположных границах: скважина 1 изменит условие на границе II, а скважина 2 — на границе I. Для исправления этого положения введем дополнительные фиктивные скважины 3 и 4, представляющие собой отражения скважины 2 относительно границы I и скважины 1 относительно границы II. Полученная таким образом система все же не будет

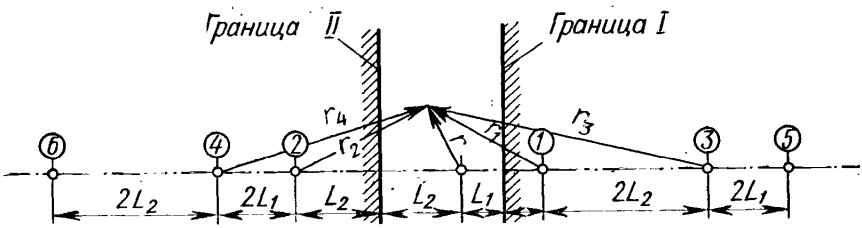


Рис. 78. Пласт-полоса с непроницаемыми границами: *1*, *2*, *3*, *4*, *5* и *6* — отраженные скважины

симметричной относительно границ, поскольку скважина 4 нарушает симметрию относительно границы I, а скважина 3 — относительно границы II. Введя для исправления этого положения скважины 5 и 6, являющиеся отражениями скважин 4 и 3 соответственно относительно границ I и II, увидим, что симметрии вновь достигнуть не удается, поскольку крайние скважины остаются неуравновешенными относительно противоположных границ пласта. Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо продолжать отражение фиктивных скважин до бесконечности, располагая их от реальной скважины в сторону границы I с чередующимися интервалами $2L_1$, $2L_2$, а в сторону границы II с интервалами $2L_2$, $2L_1$. Выражение для понижения уровня в лю-

бой точке определится сложением решений от действия реальной и всех фиктивных (отраженных) скважин, т. е.

$$S = \frac{Q}{4\pi T}[W(u) + W(u_1) + W(u_2) + W(u_3) + W(u_4) + \ldots]; \tag{IV.3.21}$$

$$u = \frac{r^2}{4at},\ u_1 = \frac{r_1^2}{4at},\ u_2 = \frac{r_2^2}{4at},\ u_3 = \frac{r_3^2}{4at},\ u_4 = \frac{r_3^2}{4at}. \tag{IV.3.21a}$$

Аналогично можно построить решения и для полосового пласта с другими граничными условиями — в этом случае будут только меняться знаки отраженных источников в соответствии с общими правилами отражений для учета границ разного рода.

Заметим, что учет влияния границ полосового пласта следует начинать с момента t', определяемого для каждой границы по формуле (IV.3.10) при $r'=r_1$ (для границы I) и $r'=r_2$ (для границы II). Рассматривая далее начальные периоды нестационарного режима, можно ограничиться только учетом ближайших отраженных скважин, причем погрешность за счет отбрасывания остальных членов можно в первом приближении оценивать величиной первых отбрасываемых членов.

В качестве примера такой оценки приведем определение понижения в ближайшей точке границы при расположении скважины посередине полосового пласта ($L_1=L_2=L$). В этом случае $r=r_1=L$, $r_2=r_3=2L$, $r_4=r_5=5L$ и

$$S = \frac{Q}{4\pi T}[2W(u_1) + 2W(u_3) + \ldots + 2W(u_i) + \ldots], \tag{IV.3.22}$$

$$u_1 = \frac{L^2}{4at},\ u_3 = \frac{(3L)^2}{4at},\ \ldots,\ u_i = \frac{(iL)^2}{4at}. \tag{IV.3.22a}$$

Оставляя, например, первые два члена, получим

$$S = \frac{Q}{2\pi T}[W(u_1) + W(u_3)], \tag{IV.3.23}$$

а относительная погрешность δ оценивается формулой

$$\delta = \frac{W(u_5)}{W(u_1) + W(u_3)}. \tag{IV.3.24}$$

Расчеты погрешности δ по формуле (IV.3.24) показывают, что $\delta=1\%$ при $u_1=0{,}11$, $\delta=2\%$ при $u_1=0{,}08$, $\delta=3{,}5\%$ при $u_1=0{,}06$ и $\delta=5\%$ при $u_1=0{,}05$. Считая допустимой погрешность 2—3%, получим $u_1\cong 0{,}07$, так что уравнение (IV.3.23) оказывается применимым при условии

$$L = 2\sqrt{u_1 at} = 0{,}53\sqrt{at}. \tag{IV.3.25}$$

Для больших периодов времени более удобны зависимости, основанные на использовании специальных способов суммирования получающихся бесконечных рядов при логарифмических представлениях входящих в них функций $W(u_i)$ [4, 22].

Глава 4

НЕСОВЕРШЕННЫЕ СКВАЖИНЫ

§ 1. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ НЕСОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН И РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПЛАСТА НЕОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

Пренебрегая гидравлическими потерями внутри скважины и деформациями прискважинной зоны, возникающими при бурении и освоении скважины, на стенке рабочей части скважины (фильтра) при $r=r_c$ и $-0{,}5l \leqslant z \leqslant +0{,}5l$ (рис. 79, *а*) в строгой гидродинами-

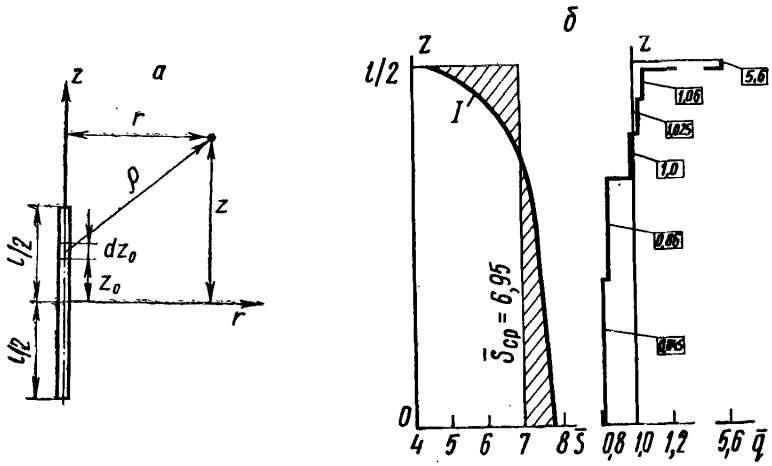


Рис. 79. Несовершенная скважина в неограниченном пласте:
а — расположение скважины в системе цилиндрических координат; *б* — распределение вдоль скважины безразмерного понижения $\bar{S}=4\pi klS/Q$ при постоянном притоке по ее длине и безразмерного притока $\bar{q}=ql/Q$ при постоянном понижении на стенке скважины ($l=50\ r_c$) [15]

ческой постановке должно задаваться условие постоянного напора (понижения напора), соответствующего уровню воды в скважине. При этом приток к скважине оказывается неравномерным по высоте, интенсифицируясь у концевых участков скважин (рис. 79, *б*). Решения фильтрационных задач в такой постановке оказываются весьма затруднительными, и имеются только некоторые их результаты, которые могут быть использованы в качестве тестовых примеров [17, 23].

Заметим, что условия притока к несовершенным скважинам еще более осложняются за счет влияния сопротивления фильтра, слоистости пласта, а иногда и влияния гидравлических потерь в скважине. В связи с этим допустимо, по крайней мере на первом

этапе исследования, использовать для несовершенных скважин более простые приближенные гидродинамические модели источников-стоков.

1.1. Точечный и линейный стоки в однородном стационарном потоке

В качестве простейшей модели скважины используется *точечный источник-сток*, представляющий собой сферическую скважину бесконечно малого радиуса.

В неограниченном однородном пространстве точечный источник-сток создает сферический поток, в котором линии тока направлены по радиусам, а поверхности равного напора проходят по сферам с центром в источнике-стоке.

Расход такого сферического потока будет равен расходу источника-стока Q, а при площади поверхности сферы $\omega=4\pi r^2$ и градиенте напора $\frac{dH}{dr}$ согласно общей формуле Дарси (I.3.1) он будет иметь выражение

$$Q = 4\pi r^2 k \frac{dH}{dr}. \qquad \text{(IV.4.1)}$$

(при выборе знака градиента здесь также принимаем положительным расход стока). Разделяя в формуле (IV.4.1) переменные, получим

$$dH = -\frac{Q}{4\pi k} \cdot \frac{dr}{r^2},$$

а после интегрирования

$$H = -\frac{Q}{4\pi k} \cdot \frac{1}{r} + C.$$

Из условия $H=H_0$ при $r\to\infty$ определим постоянную интегрирования $C=H_0$, тогда понижение напора в сферическом потоке определится уравнением

$$S = H_0 - H = \frac{Q}{4\pi k r}. \qquad \text{(IV.4.2)}$$

Из (IV.4.2) следует, что выражение для расхода сферической скважины радиусом r_0

$$Q = 4\pi k r_0 S_0, \qquad \text{(IV.4.3)}$$

где S_0 — понижение напора в скважине относительно ненарушенного напора H_0, теоретически задаваемого в бесконечности.

Интересно отметить, что в рассматриваемом неограниченном пространственном потоке получается вполне определенное выражение для расхода скважины, в то время как в рассмотренном

ранее (см. § 1 главы 1) плоском потоке решение стационарной задачи корректно только в ограниченной области, так как при $r\to\infty$ в уравнении (IV.1.2) $H\to\infty$.

Поскольку длина скважины обычно значительно превышает ее радиус, то в качестве приближенной модели скважины чаще используется *линейный сток*, представляющий собой цепочку точечных стоков, расположенных по оси скважины с одинаковой линейной интенсивностью $q=Q/l$ [8, 22, 23]. Чтобы получить решение для линейного стока в неограниченном однородном пласте, выделим бесконечно малый элемент линейного стока с текущей ординатой z_0, который будет представлять собой точечный сток с расходом qdz_0. В соответствии с уравнением (IV.4.2) понижение dS от этого точечного стока будет

$$dS=\frac{qdz_0}{4\pi k\rho},\quad \rho=\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}, \tag{IV.4.4}$$

а общее понижение S от действия линейного стока получится интегрированием выражения (IV.4.4) в пределах от $z_0=-0{,}5l$ до $z_0=+0{,}5l$, т. е.

$$S=\frac{Q}{4\pi kl}\int\limits_{-0{,}5l}^{0{,}5l}\frac{dz_0}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}. \tag{IV.4.5}$$

Подстановкой $z-z_0=\xi$ сводим полученный интеграл к табличному, приводя выражение (IV.4.5) к виду

$$S=\frac{Q}{4\pi kl}\bar{S}(z, r, l); \tag{IV.4.6}$$

$$\bar{S}(z, r, l)=\int\limits_{z-0{,}5l}^{z+0{,}5l}\frac{d\xi}{\sqrt{r^2+\xi^2}}=\operatorname{Arsh}\frac{z+0{,}5l}{r}-\operatorname{Arsh}\frac{z-0{,}5l}{r}, \tag{IV.4.6a}$$

где $\operatorname{Arsh}x$ — величина, обратная гиперболическому синусу, причем $\operatorname{Arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

При $r^0>l$ с точностью до 5% линейный сток можно заменить эквивалентным точечным стоком и считать

$$\bar{S}=\frac{l}{r^0},\quad r^0=\sqrt{r^2+z^2}. \tag{IV.4.7}$$

Особого обоснования для линейного источника-стока требует построение расчетных зависимостей для понижения напора в скважине. Формально можно получить выражение для понижения напора на стенке скважины из (IV.4.6) при $r=r_c$, однако при этом S_c оказывается переменным по высоте скважины, что является следствием принятого условия постоянства интенсивности притока к линейному источнику-стоку. Для задания расчетного напора на стенке скважины используются различные искусственные приемы.

В частности, по М. Маскету [16], расчетное понижение задается на расстоянии $l/8$ от конца фильтра $\left(\text{при } z = \pm \frac{3}{8} l\right)$; В. Д. Бабушкиным и В. М. Насбергом [23] было получено решение из условия равенства объемов внутри эквипотенциальной поверхности $S=S_c$ и объема скважины; В. Н. Николаевским и Н. Н. Веригиным [23] было предложено отождествлять понижение уровня в скважине со средним понижением на поверхности скважины, получаемым интегрированием выражения (IV.4.6) для S при $r=r_c$ в пределах от $-0{,}5l \leqslant z \leqslant 0{,}5l$.

При всех способах задания расчетного понижения на скважине с учетом того, что при больших значениях аргумента можно считать $\operatorname{Arsh} x \cong \ln 2x$, для S_c получается выражение вида

$$S_c = \frac{Q}{2\pi kl} \ln \frac{\alpha l}{r_c}, \qquad \text{(IV.4.8)}$$

где α — числовой коэффициент, зависящий от способа задания расчетного понижения скважины. В частности, по М. Маскету и В. Д. Бабушкину и В. М. Насбергу, $\alpha=0{,}66$, по Н. Н. Веригину и В. Н. Николаевскому, $\alpha=0{,}735$; практически же можно считать $\alpha=0{,}7$ [15, 17].

Сопоставляя выражения (IV.4.8) и (IV.4.3), можно сделать вывод, что реальную скважину длиной l и радиусом r_c можно заменить эквивалентным сферическим стоком радиусом r_0, который определится формулой

$$r_0 = \frac{l}{2 \ln \frac{0{,}7l}{r_c}} = 0{,}217 \frac{l}{\lg \frac{0{,}7l}{r_c}}. \qquad \text{(IV.4.9)}$$

1.2. Учет анизотропии пласта

Рассмотрим особенности анизотропного профильно-радиального стационарного потока, характеризующегося различными значениями коэффициентов фильтрации k_r и k_z (в горизонтальном и вертикальном направлениях). Выделяя в таком потоке бесконечно малый кольцевой элемент радиусом r, шириной dr и толщиной dz, в который по радиальному направлению входит расход $2\pi r k_r \frac{\partial S}{\partial r} dz$, а по вертикальному — расход $2\pi r k_z \frac{\partial S}{\partial z} dz$, из составляемого обычным образом уравнения неразрывности получим следующее дифференциальное уравнение для понижения напора:

$$k_r \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial S}{\partial r}\right) + k_z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0. \qquad \text{(IV.4.10)}$$

Следуя обоснованным выше (см. § 1 главы 4 раздела I) рекомендациям, преобразуем это уравнение, изменяя масштаб коор-

динаты z, т. е. заменяя z на $z_0=\varkappa z$, где $\varkappa=\sqrt{k_r/k_z}$. Тогда уравнение (IV.4.10) приводится к виду

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 S}{\partial z_0^2}=0, \qquad \text{(IV.4.10a)}$$

соответствующему уравнению фильтрации в изотропном пласте. В частности, для линейного стока решение уравнения (IV.4.10a) выражается согласно (IV.4.6) с заменой z на z_0 и l на $l_0=\varkappa l$:

$$S=\frac{Q}{4\pi k l_0}\bar{S},\quad \bar{S}=\operatorname{Arsh}\frac{z_0+0{,}5l_0}{r}-\operatorname{Arsh}\frac{z_0-0{,}5l_0}{r}. \qquad \text{(IV.4.11)}$$

Остается выяснить, чему здесь должен соответствовать расчетный коэффициент фильтрации k. Для этого запишем выражение расхода источника-стока, имея в виду, что при $r\to 0$ и $-0{,}5l<z<0{,}5l$ в выражении (IV.4.11) можно полагать $\operatorname{Arsh} x\cong\ln rx$ и $S\cong\ln\frac{0{,}25l_0^2-z_0^2}{r}$. Тогда

$$Q=-2\pi r k_r\int_{-0{,}5l}^{0{,}5l}\frac{\partial S}{\partial r}\Big|_{r\to 0}dz=\frac{Q}{4\pi k l^0}\cdot 2\pi r k_r\cdot\frac{2l}{r}, \qquad \text{(IV.4.11a)}$$

откуда следует, что $k=\sqrt{k_r k_z}$.

1.3. Решение для точечного стока при нестационарном режиме фильтрации

В пласте неограниченной мощности нестационарная фильтрация обусловливается только проявлениями упругого режима. Решение задачи нестационарной фильтрации при работе точечного стока с постоянной интенсивностью расхода в неограниченном однородном пласте сводится к интегрированию дифференциального уравнения упругого режима фильтрации для сферического потока [17, 22, 27]. Согласно этому решению понижение напора S на расстоянии r от стока в момент времени t от начала его работы выражается уравнением

$$S=\frac{Q}{4\pi k r}\operatorname{erfc}\xi,\quad \xi=\frac{r}{2\sqrt{at}}. \qquad \text{(IV.4.12)}$$

Естественно, что в пределе при $t\to\infty$, когда $\xi=0$ и $\operatorname{erfc}\xi=1$, выражение (IV.4.12) переходит в решение (IV.4.2) для стационарной задачи. Это решение может быть непосредственно использовано и для цилиндрической скважины при $r^0>l$, а для расчетов понижения уровня в скважине задается расчетное значение радиуса эквивалентного сферического стока r_0, определяемого по формуле (IV.4.9).

§ 2. СКВАЖИНЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ И ОГРАНИЧЕННОМ ПО МОЩНОСТИ ПЛАСТАХ

Наличие непроницаемой кровли над стоком (рис. 80, *а*) учитывается так же, как и для совершенных скважин, добавлением отраженного стока, располагаемого симметрично действительному относительно границы. Поскольку понижение от действия отра-

женного стока определится согласно (IV.4.2) с заменой r на r', то понижение при работе стока у непроницаемой кровли определится как сумма понижений, создаваемых под влиянием действительного и отраженного стоков, т. е. по формуле

$$S = \frac{Q}{4\pi k r^0} + \frac{Q}{2\pi k r'} = \frac{Q}{4\pi k}\left(\frac{1}{r^0} + \frac{1}{r'}\right), \qquad \text{(IV.4.13)}$$

причем

$$r^0 = \sqrt{r^2 + z^2},\ r' = \sqrt{r^2 + (2c - z)^2}. \qquad \text{(IV.4.13а)}$$

Непосредственно из решения для сферического потока получается решение для притока к полусферическому колодцу, примыкающему к непроницаемой кровле (рис. 80, *б*), поскольку в

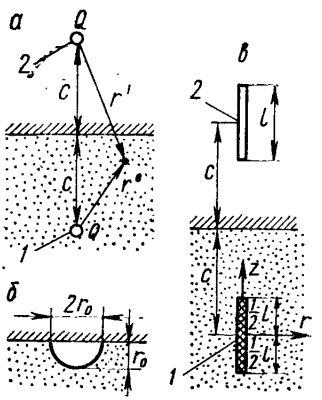


Рис. 80. Источник-сток и несовершенная скважина в полуограниченном по мощности пласте: *а* — источник-сток у кровли пласта; *б* — полусферический колодец у кровли пласта; *в* — несовершенная скважина у кровли пласта (*1* — источник-сток, *2* — его зеркальное отражение)

этом случае сферический характер потока не изменяется, только приток к полусфере будет вдвое меньшим, чем определяемый по формуле (IV.4.3) для сферы в неограниченном потоке, т. е. в данном случае

$$Q = 2\pi k r_0 S_0. \qquad \text{(IV.4.14)}$$

Для таких же условий, но в случае плоского дна колодца Ф. Форхгеймером [25] получена формула для расхода

$$Q = 4 k r_0 S_0. \qquad \text{(IV.4.14а)}$$

Из сопоставления выражений (IV.4.14) и (IV.4.14а) следует, что притоки к полусферическому и плоскому колодцам при одинаковом их радиусе различаются в 1,57 раза, т. е. форма дна колодца существенно влияет на величину его расходов.

Аналогичным путем можно составить решение для скважины (линейного стока) длиной l, располагаемой у непроницаемой границы (см. рис. 80, *а*), если симметрично относительно границы ввести такую же отраженную скважину. Понижение от действия отраженной скважины получится из выражения

(IV.4.6), если заменить z на $2c_0-z$, так что суммарное понижение определится в этом случае формулой

$$S=\frac{Q}{4\pi kl}[\overline{S}(z,\ r,\ l)+\overline{S}(2c_0-z,\ r,\ l)]. \qquad \text{(IV.4.15)}$$

В случае примыкания к водоупору отраженная скважина смыкается с действительной; тогда, помещая начало координат в точке примыкания скважины к водоупору, получим выражение для понижения уровня в любой точке из (IV.4.6), заменяя l на $2l$ и Q на $2Q$, т. е.

$$S=\frac{Q}{4\pi kl}\cdot\overline{S}(z,\ r,\ 2l), \qquad \text{(IV.4.16)}$$

$$\overline{S}(z,\ r,\ 2l)=\operatorname{Arsh}\frac{z+l}{r}-\operatorname{Arsh}\frac{z-l}{r}. \qquad \text{(IV.4.16а)}$$

Понижение уровня в скважине при этом будет

$$S_c=\frac{Q}{2\pi kl}\ln\frac{1{,}4l}{r_c}. \qquad \text{(IV.4.16б)}$$

Так же можно получить решения и при расположении в кровле пласта прямолинейной границы первого рода (с заданным напором или нулевым понижением), только в этом случае отражение имеет зеркальный характер, т. е. сток отражается источником.

Естественно, что расчетные зависимости принципиально не изменятся, если скважина (сток) располагается у подошвы пласта, в этом случае меняется только направление вертикальной оси координат.

Анализируя полученные выражения, можно оценить характер влияния горизонтальных границ (кровли и подошвы) пласта. Из уравнения (IV.4.1) следует, что погрешность, вносимая исключением влияния одной из границ пласта, выражается формулой

$$\delta=\frac{r^0}{r'}. \qquad \text{(IV.4.17)}$$

Для самой скважины величина r^0 в (IV.4.17) заменяется на эквивалентный радиус сферической скважины r_0, определяемый по формуле (IV.4.9), а $r'=2c_0$, так что в этом случае

$$\delta=\frac{l}{4c_0\ln\frac{0{,}7l}{r_c}}. \qquad \text{(IV.4.17а)}$$

Имея в виду, что обычно $r_c=0{,}1$ м, $l=3$—15 м, получим

$$\ln\frac{0{,}7l}{r_c}\cong 3\div 4{,}7 \text{ и } \delta=(0{,}05-0{,}08)\frac{l}{c_0}. \qquad \text{(IV.4.17б)}$$

Если принять допустимой погрешность $\delta=5\%$, то будет видно, что при $c_0>(1-1{,}6)l$ влиянием границы пласта (кровли или подошвы) можно пренебречь.

Для точек, расположенных невдалеке от скважины, принимая $r' \cong 2c_0$, получим

$$\delta = \frac{r^0}{2c_0}. \qquad \text{(IV.4.17в)}$$

Считая допустимым $\delta = 5\%$, установим, что границей можно пренебрегать, если она располагается на расстоянии, большем десяти расстояний от середины скважины до расчетной точки.

Из приведенных данных можно видеть, что влияние горизонтальных границ пласта на понижения уровня в скважине сказывается только при довольно близком их расположении; вместе с тем это влияние оказывается более существенным в точках, удаленных от скважины.

Для скважины, располагаемои в однородном пласте конечнои мощности (рис. 81, *а*), решение получается путем ее бесконечного отражения относительно кровли и подошвы пласта так же, как это делалось ранее (см. § 1 главы 3) для совершенной скважины в полосовом пласте. Однако такое решение приводит к бесконечному расходящемуся ряду, табулирование которого приведено, например, в работах [16, 22, 27]. При размерах воронки депрессии, существенно превышающих мощность водоносного пласта, зона резкой деформации, обусловленная гидродинамическим несовершенством скважины, имеет локальный характер, распространяясь на расстояние порядка полутора мощностей пласта. За пределами этой зоны поток приобретает плановый характер, и распределение напоров здесь получается таким же, как и при откачке из совершенной скважины. Исходя из этих особенностей потока, целесообразно записать уравнение для понижения напора при откачке из несовершенной скважины в пласте с ограниченной мощностью в следующей форме [16, 23, 27]:

$$S = \frac{Q}{2\pi T}[\bar{S}(r, t) + \zeta], \qquad \text{(IV.4.18)}$$

где $\bar{S}(r, t)$ — безразмерная функция, определяющая понижение от действия аналогичной совершенной скважины; ζ — добавочный член, обусловливающий влияние гидродинамического несовершенства скважины. По прошествии сравнительно небольшого времени, оцениваемого величиной [27]

$$t'_{кр} = \frac{m^2}{2a}, \qquad \text{(IV.4.19)}$$

режим фильтрации в зоне резкой деформации становится квазистационарным, и величина ζ практически не зависит от времени.

Из решения М. Маскета [16] следует, что в однородном пласте для определения величины ζ в точках, удаленных от скважины, можно пользоваться выражением в виде ряда

$$\zeta = 2\sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{n\pi r}{m}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi z}{m}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi c}{m}\right), \qquad \text{(IV.4.20)}$$

который при достаточно больших r/m быстро сходится (например, при $r>0{,}66\ m$ достаточно взять только два первых члена ряда).

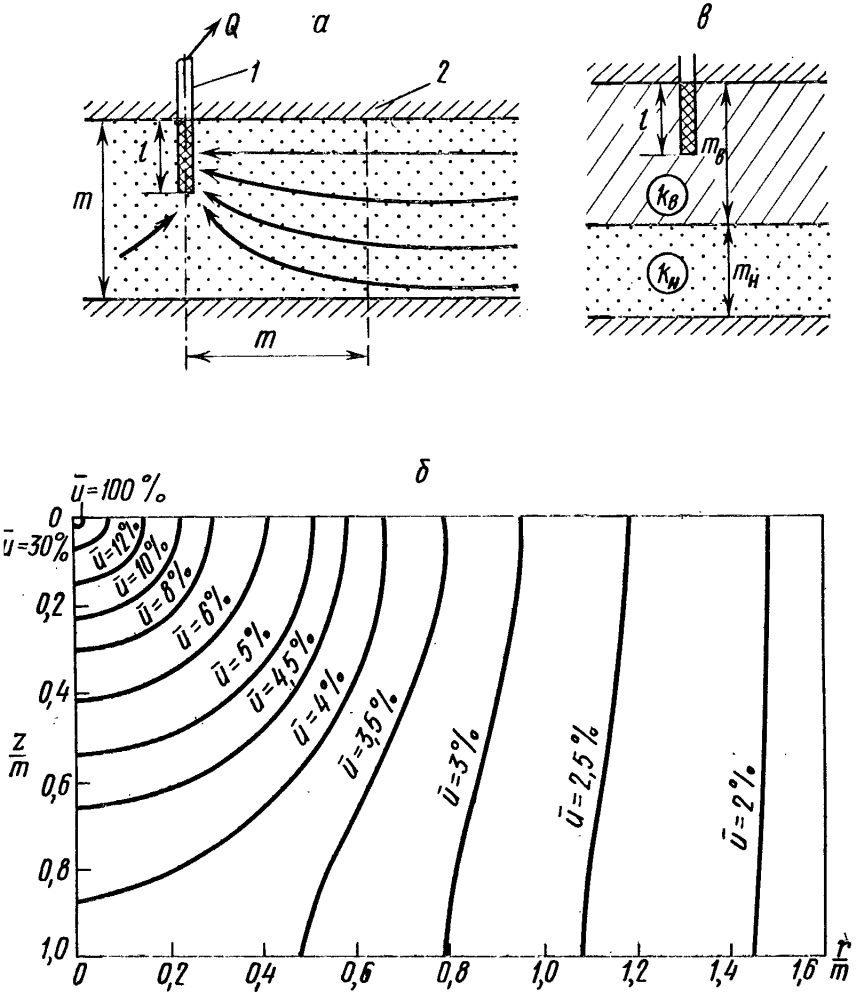


Рис. 81. Несовершенные скважины в пласте ограниченной мощности:
а — схема линий тока вблизи несовершенной скважины (*1* — скважина, *2* — граница зоны резкой деформации); *б* — эквипотенциалы вблизи точечной скважины, располагаемой в кровле пласта [16]; *в* — скважина в двухслойном пласте

В зоне квазистационарного режима

$$\bar{S}(r, t) = \ln\frac{R}{r}, \qquad \text{(IV.4.21)}$$

где R — расчетный радиус питания, который, в частности, для изолированного напорного пласта имеет выражение (IV.2.15). Тогда уравнение (IV.4.18) можно представить в виде

$$S = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r^*}, \quad r^* = re^{-\zeta}, \qquad \text{(IV.4.22)}$$

где r^* представляет собой расчетное расстояние до эквивалентной совершенной скважины. Соответственно для понижения напора в несовершенной скважине получим выражение

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_c^*}, \quad r_c^* = r_c e^{-\zeta_c}, \qquad \text{(IV.4.23)}$$

где r_c^* — расчетный (приведенный) радиус эквивалентной совершенной скважины; ζ_c — безразмерный показатель сопротивления несовершенной скважины. Вводя расчетный радиус скважины, можно далее связывать напоры (понижения) в пласте и скважине, считая последнюю совершенной. Этот прием применим и для расчетов систем взаимодействующих скважин, если расстояние между ними превышает одну-две мощности пласта, поскольку в этом случае зоны резкой деформации вблизи каждой скважины формируются обособленно.

Величина расчетного радиуса r_c^* или показателя дополнительного сопротивления ζ_c определяется степенью несовершенства скважины, расположением ее внутри пласта и существенно зависит от неоднородности пласта в разрезе.

Приведем выражение для ζ_c в характерном случае примыкания скважины к кровле (или подошве) пласта при различных схемах его строения в разрезе. Для скважины длиной l в однородном пласте мощностью m рекомендуется формула [29, 30]:

$$\zeta_c = \zeta_c^0 = \frac{1-\bar{l}}{\bar{l}} \left(\ln \frac{l}{r_c} + \varepsilon \right), \quad \bar{l} = \frac{l}{m}, \qquad \text{(IV.4.24)}$$

причем величина ε определяется по следующим данным:

$\bar{l}$	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7
ε	0,39	0,22	0,08	—0,13	—0,32	—0,65	—1,1

При двухслойном строении пласта (рис. 81, *б*) и расположении скважины в кровле верхнего слоя по рекомендациям А. Я. Олейника [21]

$$\zeta_c = (1+\beta) \frac{k_н}{k_в} \zeta_c^0 + \frac{k_в - k_н}{k_в} \zeta_c^0(m_в), \qquad \text{(IV.4.24а)}$$

где ζ_c^0 — величина ζ_c для однородного пласта, определяемая по формуле (IV.4.24) при $m = m_в + m_н$; $\zeta_c^0(m_в)$ — величина ζ_c^0 для верхнего слоя, также

определяемая по формуле (IV.4.24), но при $m=m_в$; β — поправочный коэффициент, определяемый по табл. IV.2 при $\lambda=\frac{k_н-k_в}{k_н+k_в}$.

Таблица IV.2

$\frac{m_в}{m_н}$	Значения β при λ, равном						
	0	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	1,0
$\leqslant 0,5$	0	0,02	0,03	0,05	0,05	0,06	0,07
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	—0,02	—0,02	—0,03	—0,04	—0,04	—0,04
4	0	—0,04	—0,06	—0,08	—0,09	—0,1	—0,1
9	0	—0,07	—0,12	—0,16	—0,18	—0,19	—0,2

Глава 5
ОБРАБОТКА ДАННЫХ ОПЫТНО-ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ОПРОБОВАНИЙ

Опытно-фильтрационные опробования проводятся для определения геофильтрационных параметров пород и пластов. Основной способ опытно-фильтрационных опробований — опытные откачки, которые могут быть кустовыми или одиночными в зависимости от наличия или отсутствия наблюдательных скважин. Кроме того, опытно-фильтрационные опробования проводятся путем закачек (наливов или нагнетаний) в скважины (колодцы, шурфы). В дальнейшем будем рассматривать способы обработки опытно-фильтрационных опробований главным образом применительно к условиям опытных откачек. Вместе с тем с гидродинамической точки откачки и закачки в водонасыщенных пластах эквивалентны друг другу и по существу представляют собой один вид опробования, меняющий только знак расхода и изменения напора. Поэтому все зависимости, обоснованные для откачек, могут использоваться и для закачек, но с заменой понижения напора на его повышение.

Практические методы обработки данных опытных откачек основаны на использовании аналитических решений в различных их модификациях, соответствующих характеру и степени использования информации, полученной при откачке.

По характеру использованной информации об изменчивости фильтрационного процесса (понижений напоров) методика обработки данных опробований основывается на анализе либо изменчивости понижений во времени по одной наблюдательной скважине (временно́е прослеживание), либо изменчивости понижений в пространстве по группе наблюдательных скважин на один и тот же момент времени (пространственное прослеживание); в неко-

торых случаях представляется возможным обобщение информации сразу во времени и в пространстве (комбинированное прослеживание).

Способы обработки данных опробований различаются по форме преобразования исходных расчетных зависимостей [17]; различные варианты способов обработки будут показаны далее применительно к конкретным условиям проведения опробований.

§ 1. ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ ОТКАЧКА ИЗ СОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН В ИЗОЛИРОВАННОМ НАПОРНОМ ПЛАСТЕ

В большинстве случаев современные методы обработки опытных откачек из совершенных скважин основываются прежде всего на теории нестационарного режима фильтрации, позволяющей использовать для определения гидрогеологических параметров данные о снижении уровня в каждой наблюдательной скважине во времени. Поэтому разбор методов обработки таких откачек начнем с анализа нестационарного режима первоначальной откачки, которая проводится с постоянным дебитом Q, причем понижения в наблюдательной скважине определяются в этом случае уравнением (IV.2.8).

Для обработки данных понижения уровней во всем диапазоне откачки может быть использован способ эталонной кривой, предложенной Ч. Тейсом [17, 39, 40]. Для обоснования этого способа прологарифмируем выражение (IV.2.8):

$$\lg S = \lg \frac{Q}{4\pi T} + \lg W(u), \qquad \text{(IV.5.1)}$$

а также выражение для аргумента u

$$\lg \frac{1}{u} = \lg 4a + \lg \frac{t}{r^2}. \qquad \text{(IV.5.2)}$$

Из формул (IV.5.1) и (IV.5.2) видно, что $\lg S$ и $\lg W$, а также $\lg \frac{t}{r^2}$ и $\lg \frac{1}{u}$ отличаются между собой на постоянные величины $\left(\text{соответственно } \lg \frac{Q}{4\pi T} \text{ и } \lg 4a\right)$, откуда следует, что на те же величины оказываются сдвинутыми между собой по каждой из осей билогарифмические кривые зависимости $\lg S$ от $\lg \frac{t}{r^2}$ и $\lg W$ от $\lg \frac{1}{u}$ (рис. 82, *а*). Поэтому, составив эталонный график зависимости $\lg W$ от $\lg \frac{1}{u}$ (по таблице функции $W(u)$) и график $\lg S$ от $\lg \frac{t}{r^2}$ (по материалам откачки), следует далее наложить эти графики друг на друга, добиваясь наилучшего совпаде-

ния путем передвижения их параллельно координатным осям. Снимая далее с совмещенного графика любую точку с координатами $\lg S$ и $\lg \frac{t}{r^2}$, $\lg W$ и $\lg \frac{1}{u}$, согласно (IV.5.1) и (IV.5.2) получим

$$\lg \frac{Q}{4\pi T} = \lg S - \lg W, \qquad \text{(IV.5.3)}$$

$$\lg 4a = \lg \frac{1}{u} - \lg \frac{t}{r^2}. \qquad \text{(IV.5.4)}$$

Заметим, что при такой форме обработки графики зависимости $\lg S$ от $\lg \frac{t}{r^2}$ должны для разных наблюдательных скважин совпадать, так что степень их совпадения в реальных условиях может

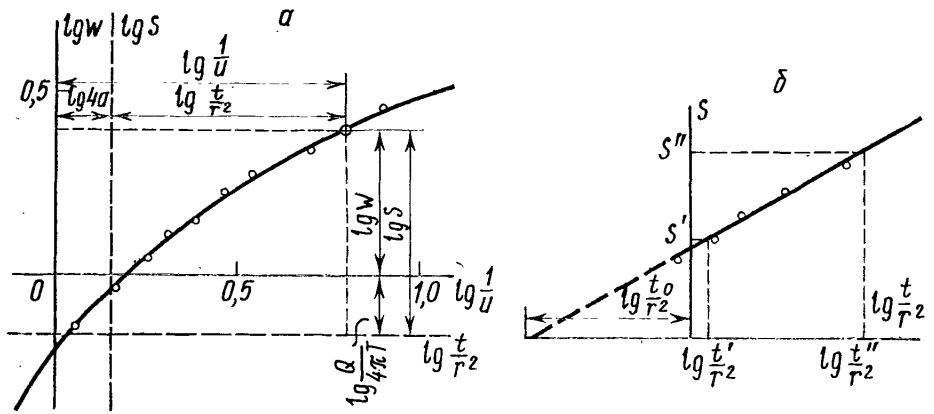


Рис. 82. Графики для обработки данных снижения уровней при откачке в изолированном напорном пласте:
а — способ эталонной кривой; *б* — способ полулогарифмической прямой

служить критерием для проверки правильности описания процесса откачки уравнением (IV.2.8) и, в частности, проверкой однородности и изолированности водоносного пласта.

Для удобства наложения график эталонной кривой строится на кальке; для его построения можно воспользоваться следующими данными:

$\lg \frac{1}{u}$	—0,3	—0,15	0	0,15	0,3	0,5	0,7	1	1,3
$\lg W$	—1,31	—0,943	—0,66	—0,433	—0,254	—0,062	—0,086	0,26	0,393

При наступлении квазистационарного режима понижения уровня определяются уравнением (IV.2.13), которое можно представить в виде

$$S = 0{,}183 \frac{Q}{T}\left(\lg 2{,}25a + \lg \frac{t}{r^2}\right), \qquad \text{(IV.5.5)}$$

откуда следует, что в координатах S, $\lg \frac{t}{r^2}$ график понижения уровня должен иметь прямолинейный характер.

На основании такой зависимости Ч. Джейкоб предложил наносить данные о снижении уровня в наблюдательных скважинах на график зависимости S от $\lg t$ или S от $\lg \frac{t}{r^2}$ (рис. 82, *б*). Прямая линия на таком графике отсекает на оси $\lg \frac{t}{r^2}$ величину $\lg \frac{t_0}{r^2}$, по которой согласно (IV.5.5) при $S=0$ получим

$$a = \frac{r^2}{2{,}25t_0}, \qquad \text{(IV.5.6)}$$

а по любым значениям понижений S' и S'', соответствующим значениям времени t' и t'', получим формулу для определения проводимости

$$T = 0{,}183 \frac{Q}{S'' - S'} \lg \frac{t''}{t'}. \qquad \text{(IV.5.7)}$$

Соображения о способах обработки первоначальной откачки, основанных на использовании уравнения (IV.2.8), изложены, например, в работах [3, 7, 17, 40].

Кроме того, в зоне квазистационарного режима можно пользоваться уравнением Дюпюи, что дает возможность определения проводимости по разнице понижений S_1 и S_2 в двух наблюдательных скважинах, расположенных на расстояниях r_1 и r_2 от центральной, положив в уравнении (IV.1.3) $S=S_2$, $r=r_2$ и разрешив его относительно проводимости

$$T = \frac{Q}{2\pi (S_1 - S_2)} \ln \frac{r_2}{r_1} = 0{,}366 \frac{Q}{S_1 - S_2} \lg \frac{r_2}{r_1}. \qquad \text{(IV.5.8)}$$

При расчетах по формулам (IV.5.6)—(IV.5.8) следует проверять правомерность использования зависимостей квазистационарного режима по условию (IV.2.12), причем, считая допустимой погрешность 5%, получим условие $u \leqslant 0{,}09$, и время $t_{кв}$ практического наступления квазистационарного режима будет определяться формулой

$$t_{кв} = \frac{r^2}{4 \cdot 0{,}09a} \cong 3\frac{r^2}{a}. \qquad \text{(IV.5.9)}$$

При расположении опытного куста скважин вблизи прямолинейной непроницаемой границы (например, сброса) обработка данных откачки проводится так же, как в неограниченном пласте, с введением некоторых корректив. В этом случае понижение на-

пора описывается уравнением (IV.3.14), которое для удобства использования запишем в виде

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W_1(u),\ W(u) = W(u) + W(u\bar{r}^2),\ \bar{r} = \frac{r'}{r}. \quad \text{(IV.5.10)}$$

Уравнение (IV.5.10) по форме идентично уравнению (IV.2.8), только безразмерная функция скважины $W_1(u)$ имеет здесь несколько иной вид, завися от соотношения расстояний r и r' до центральной и зеркально отраженной скважин. Следовательно, в данном случае необходимо строить эталонную кривую зависимости $\lg W_1(u)$ от $\lg 1/u$ для расчетной наблюдательной скважины (при конкретном значении $\bar{r}$), а дальнейший расчет ведется так же, как и для откачки в неограниченном пласте.

При наступлении логарифмической зависимости (IV.3.15) расчет ведется по способу Джекоба, но величину r^2 следует заменять на rr', а проводимость пласта определяется по формуле (IV.5.7) как бы при удвоенном дебите скважины, т. е.

$$T = 0{,}366 \frac{Q}{S'' - S'} \lg \frac{t_2}{t_1}. \quad \text{(IV.5.11)}$$

По такому же принципу можно скорректировать методику обработки откачек и для других схем границ пласта в плане [17].

Особого рассмотрения требует обработка данных понижения напора в центральной скважине, на которые существенное влияние оказывает сопротивление прискважинной зоны. В этом случае приближенная оценка проводимости пласта при стабилизированном режиме может производиться на основании соотношения (IV.2.16), из которого следует, что

$$T = \xi \frac{Q}{S_c}, \quad \text{(IV.5.12)}$$

причем для откачек в напорных пластах $\xi = 1{,}5$. Однако такой расчет дает сколько-нибудь достоверные результаты только при незначительном сопротивлении прискважинной зоны, так что его использование в каждом случае требует тщательного обоснования.

Интересную возможность определения проводимости пласта дают расчеты по квазистационарному изменению уровня в центральной скважине, который наступает обычно очень быстро, что следует из проверки условия (IV.5.9) при $r = r_c$. Тогда для расчетов проводимости можно использовать формулу (IV.5.7), в которую не входит радиус скважины, так что она справедлива и при наличии сопротивления прискважинной зоны. Это обстоятельство объясняется тем, что при постоянном дебите откачки перепад напора ΔH_c в прискважинной зоне остается неизменным и не влияет на разницу понижений S''—S', замеренных на два момента времени, поскольку эта разница понижений в скважине оказывается такой же, как в пласте за пределами прискважинной зоны. Таким образом, использование формулы (IV.5.7) позволяет достоверно

определить проводимость пласта по данным о снижении уровня в центральной скважине. Вместе с тем из-за влияния сопротивления прискважинной зоны расчеты коэффициента пьезопроводности по формуле (IV.5.6) оказываются недостоверными, и эту формулу можно использовать только для определения расчетного радиуса скважины r_c^0, характеризующего ее сопротивление. Полагая в (IV.5.6) $r = r_c^0$, получим

$$r_c^0 = 1{,}5\sqrt{at^0}, \qquad \text{(IV.5.13)}$$

причем значение коэффициента пьезопроводности a при этом предполагается известным. Отметим, что такие расчеты правомерны при высокой точности задания постоянства дебита откачки во времени (колебания дебита должны быть заметно меньшими изменениями величины $\lg t$) и неизменном сопротивлении прискважинной зоны; опытные данные показывают [17], что это условие выполняется далеко не всегда и в каждом конкретном случае требует специального обоснования.

Данные об уровнях в центральной скважине целесообразно использовать для оценки сопротивления прискважинной зоны. Для такого расчета следует иметь одну наблюдательную скважину в зоне развития квазистационарного режима. Тогда для разницы понижений в центральной S_c и наблюдательной S скважинах запишем уравнение (IV.1.4), в котором заменяется r_c на r_c^0:

$$S_c - S = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_c^0} = \frac{Q}{T}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{r_c} + \Delta f_c\right), \qquad \text{(IV.5.14)}$$

где Δf_c — безразмерное сопротивление прискважинной зоны, определяемое выражением (IV.1.19). Из выражения (IV.5.14) следует формула для определения величины Δf_c:

$$\Delta f_c = \frac{(S_c - S)T}{Q} - 0{,}366\lg\frac{r}{r_c}. \qquad \text{(IV.5.14а)}$$

При отсутствии данных по наблюдательной скважине ориентировочный расчет по формуле (IV.5.14а) можно провести, задавая $r = R = 1{,}5\sqrt{at}$ и $S = 0$, причем в случае одиночной откачки величина a может быть принята по типовым значениям для данного пласта.

При нарушении линейного режима фильтрации, устанавливаемого критерием (IV.1.21), обработка откачки ведется по уравнению (IV.1.23), которое после замены напоров на соответствующие понижения и при $r_c \ll r$ представляется в виде

$$\frac{S_c - S}{Q} = A + BQ, \qquad \text{(IV.5.15)}$$

где

$$A = 0{,}366\frac{1}{T}\lg\frac{r}{r_c},\quad B = \frac{\alpha}{4\pi^2 m r_c T}, \qquad \text{(IV.5.15а)}$$

а S — понижение в наблюдательной скважине, находящейся на расстоянии r от центральной в зоне квазистационарного режима.

Согласно (IV.5.15) график зависимости $\frac{S_c - S}{Q}$ от Q, построенный по опытным точкам при нескольких понижениях уровня в скважине, должен иметь прямолинейный характер (рис. 83). Проведенная по опытным откачкам такая прямая отсекает на оси S_c—S/Q отрезок A и имеет уклон $B = \operatorname{tg}\beta$ к оси Q. Для расчета прискважинного сопротивления по формуле (IV.5.14) следует принимать $\frac{S_c - S}{Q} = A$. Если же пренебречь сопротивлением прискважинной зоны, то по параметрам A и B определяются проводимость пласта T и параметр нелинейности α в двучленном законе фильтрации по формулам

$$T = \frac{0{,}366}{A} \lg \frac{r}{r_c}, \quad \alpha = 4\pi^2 r_c m T B. \qquad \text{(IV.5.15б)}$$

На расчеты по наблюдательным скважинам нелинейность режима фильтрации существенно не влияет.

При заметном проявлении гидравлических потерь в водоподъемных трубах во все расчеты должны включаться напоры (понижения) на забое скважины (в пределах ее рабочей части), которые будут отличаться от уровней, измеряемых на устье скважины. Величина потерь в трубах $\Delta H_т$ определяется согласно (IV.1.24) при $l_т$ и $d_т$, равных длине и диаметру водоподъемных труб, а при переменном диаметре труб подсчитывается согласно (I.2.20). При заметных потерях напора в пределах фильтра (рабочей части скважины) обработку данных понижений по центральной скважине можно вести по уравнению (IV.5.15), имея в виду, что в этом случае $B = \varphi_т$ [17].

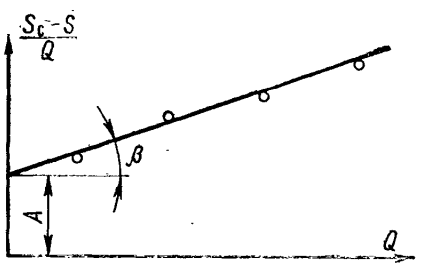


Рис. 83. График зависимости $\frac{S_c - S}{Q}$ от Q при двучленном законе фильтрации

Особенно важен учет нелинейности режима фильтрации при обработке данных самоизливающихся скважин в то время, как при расчетах проводимости пласта для откачки с постоянным дебитом по формуле (IV.5.7) учет нелинейности потерь напора необязателен, поскольку вводимые с этой целью поправки при постоянном дебите скважины во времени не меняются.

§ 2. ОТКАЧКИ В ИЗОЛИРОВАННОМ НАПОРНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ДЕБИТЕ. РЕЖИМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРОВНЯ

Для анализа особенностей методики учета переменного дебита скважины рассмотрим случай резкой смены режимов откачки,

когда дебит скважины меняется по ступенчатому закону, так что на первоначальную откачку с дебитом Q_0 в момент времени $t=t_1$ накладывается изменение дебита ΔQ_1 и понижение уровня определяется уравнением (IV.2.37). Более сложный характер этого уравнения не дает возможности использовать в данном случае для обработки откачки способ эталонной кривой. В общем виде данные изменения уровня в наблюдательной скважине можно обработать, составляя предварительно уравнение для соотношения понижений S'/S'' на два момента времени

$$\frac{S'}{S''}=\frac{W(u')+\Delta\bar{Q}W(u_1')}{W(u'')+\Delta\bar{Q}W(u_1'')},\quad \Delta Q=\frac{\Delta Q_1}{Q_0},\quad u'=\frac{r^2}{4at'},$$

$$u''=\frac{r^2}{4at''},\quad u_1=\frac{r^2}{4a(t'-t_1)},\quad u_1''=\frac{r^2}{4a(t''-t_1)}, \qquad \text{(IV.5.16)}$$

в котором исключается проводимость, так что соотношение оказывается зависящим только от параметра a. Решение уравнения (IV.5.16) приходится искать подбором, задаваясь различными значениями a.

При наступлении квазистационарного режима для каждой ступени откачки, критерием чего при допустимой точности расчета 5% является условие

$$t-t_1\geqslant 3\frac{r^2}{a}, \qquad \text{(IV.5.17)}$$

уравнение (IV.2.37) примет вид

$$S=\frac{Q_0}{4\pi T}\ln\frac{2{,}25at}{r^2}+\frac{\Delta Q}{4\pi T}\ln\frac{2{,}25a(t-t_1)}{r^2}=$$

$$=\frac{Q_1}{4\pi T}\left[\ln\frac{2{,}25a}{r^2}+\bar{Q}_0\ln t+\Delta\bar{Q}_1\ln(t-t_1)\right];\quad Q_1=Q_0+\Delta Q_1,$$

$$\bar{Q}_0=\frac{Q_0}{Q_1},\quad \Delta\bar{Q}_1=\frac{\Delta Q_1}{Q_1}. \qquad \text{(IV.5.18)}$$

Из выражения (IV.5.18) следует [34], что при соблюдении условия (IV.5.17) должен получиться прямолинейный график зависимости снижения S от величины $\tau=-Q_0\lg t-\Delta\bar{Q}_1\lg(t-t_1)$, по которому могут быть определены параметры a и T: при пересечении этой прямой оси τ получим значение $\tau=\tau_0$, а на пересечении с осью S получим значение $S=S^0$, по которому найдем

$$\lg\frac{2{,}25a}{r^2}=\tau_0,\quad T=\frac{Q_1\tau_0}{5{,}46S^0}. \qquad \text{(IV.5.19)}$$

Как видно, обработка данных откачек переменным режимом заметно сложнее и менее удобна, чем при постоянном дебите. Поэтому проводить откачки при переменном дебите следует только

в случаях нарушения линейного режима фильтрации, необходимости учета гидравлических потерь в скважинах или при решении таких специальных задач, как изучение фильтрационных деформаций прискважинной зоны в процессе откачки.

Важным этапом опытных работ является восстановление уровня после остановки откачки, когда дебит скважины мгновенно

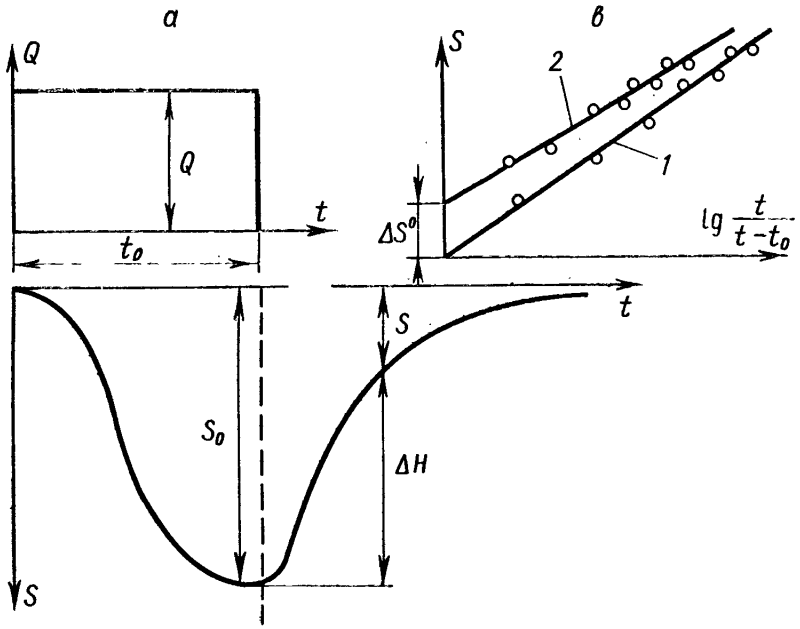


Рис. 84. Графики режима восстановления уровня после откачки:
а — изменение дебита; *б* — график восстановления уровня; *в* — полулогарифмический график (*1* и *2* — при правильном и ошибочном задании статического уровня)

уменьшается до нуля. При первоначальной откачке с постоянным дебитом график изменения дебита будет иметь одноступенчатый характер (рис. 84, *а*), а восстановление уровня будет соответствовать второй ступени с нулевым дебитом. Следовательно, выражение для понижения уровня S в процессе его восстановления можно получить из уравнения (IV.2.38) при $Q_0=Q$, $\Delta Q_1=Q$ и $t_1=t_0$, т. е. в данном случае

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u)-W(u_0)],\quad u=\frac{r^2}{4at},\quad u_0=\frac{r^2}{4a(t-t_0)}. \qquad \text{(IV.5.20)}$$

Типовой график восстановления уровня приведен на рис. 84, *б*. Для определения параметров по уравнению (IV.5.20) удобно использовать либо начальный, либо конечный периоды восстановления уровней.

В начальный период величина $W(u)$ меняется гораздо меньше, чем величина $W(u_0)$, поэтому можно принимать $\frac{Q}{4\pi T}W(u)$ равным значению понижения S_0 на момент остановки откачки. Тогда уравнение (IV.5.20) представится в виде

$$S_0 - S = \Delta H = \frac{Q}{4\pi T}W(u_0),\ u_0 = \frac{r^2}{4at_в},\ t_в = t - t_0, \qquad \text{(IV.5.21)}$$

т. е. в этом случае выражение для повышения уровня ΔH с момента остановки откачки оказывается идентичным выражению (IV.2.8) для понижения уровня S в процессе первоначальной откачки. Поэтому в начальный период обработку данных восстановления уровня можно вести по методике, разработанной выше для первоначальной откачки с постоянным дебитом, заменяя только S на ΔH и t на $t_в$, где $t_в$ — время, отсчитываемое от момента остановки откачки.

Поскольку строгое выражение повышения уровня ΔH согласно (IV.5.20) имеет вид

$$\Delta H = S_0 - S = \frac{Q}{4\pi T}[W(u^0) - W(u) + W(u_0)],\quad u^0 = \frac{r^2}{4at_0}, \qquad \text{(IV.5.22)}$$

то оценку относительной погрешности δ, вносимой при использовании упрощенного выражения (IV.5.21), можно представить в виде

$$\delta = \frac{W(u^0) - W(u)}{W(u_0)}. \qquad \text{(IV.5.23)}$$

Конечный период восстановления уровней характеризуется логарифмическим законом изменения уровней, когда можно принять $W(u) = \ln\frac{2{,}25at}{r^2}$ и $W(u_0) = \ln\frac{2{,}25a(t-t_0)}{r^2}$, так что уравнение (IV.5.20) принимает вид

$$S = \frac{Q}{4\pi T}\left[\ln\frac{2{,}25at}{r^2} - \ln\frac{2{,}25a(t-t_0)}{r^2}\right] =$$

$$= \frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{t}{t-t_0} = 0{,}183\frac{Q}{T}\lg\frac{t}{t-t_0}. \qquad \text{(IV.5.24)}$$

Из уравнения (IV.5.24) можно определить проводимость пласта, построив график зависимости S от $\lg\frac{t}{t-t_0}$, который должен иметь линейный характер (рис. 84, *в*), причем построенная таким образом прямая должна приходить в начало координат. Последнее условие может служить для проверки правильности выбора статического уровня, причем если прямая на этом графике не

идет в начало координат, то по расхождению ΔS^0 (см. рис. 84, *в*) может быть скорректирована величина статического уровня [1].

Построив такой график, прямолинейность которого служит критерием его правильности, определяют далее проводимость согласно (IV.5.20) по формуле

$$T = 0{,}183 \frac{Q}{S} \lg \frac{t}{t - t_0}, \qquad \text{(IV.5.25)}$$

беря в качестве расчетной любую из точек построенного графика.

Время восстановления уровня $t_в^0$, начиная с которого можно считать наступление конечного периода откачки, в соответствии с условием (IV.2.12) при допустимой погрешности расчетов 5% и $u_0 = 0{,}09$ определится по формуле

$$t_в^0 = \frac{r^2}{4 \cdot 0{,}09\, a} \cong 3 \frac{r^2}{a}. \qquad \text{(IV.5.26)}$$

При расчетах по восстановлению уровней в центральной скважине условие (IV.5.26) выполняется обычно довольно быстро, так что в этом случае расчет, как правило, можно вести по зависимостям (IV.5.24)—(IV.5.26). Однако в начальный период характер восстановления уровня в центральной скважине может оказаться искаженным из-за влияния заполнения емкости скважины. Теоретический анализ показывает [17, 33], что при допустимой погрешности 5% влияние заполнения скважин следует учитывать только при условии

$$\frac{Qt_в}{\omega \Delta H} \leqslant 20, \qquad \text{(IV.5.27)}$$

где ω — площадь сечения водоподъемных труб.

Если время восстановления уровня $t_в$ значительно превышает время первоначальной откачки t_0, то, представляя логарифм степенным рядом

$$\ln \frac{t}{t - t_0} = \ln \frac{t_0 + t_в}{t_в} \cong \frac{t_0}{t_в} - \frac{1}{2} \left(\frac{t_0}{t_в} \right)^2 \qquad \text{(IV.5.28)}$$

и считая допустимой погрешность 5%, при $t_в > 10 t_0$ можно отбросить все члены ряда, кроме первого, и привести выражение (IV.5.24) к виду

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \cdot \frac{t_0}{t_в} = \frac{V}{4\pi T t_в}, \qquad \text{(IV.5.29)}$$

---

[1] Аномальный характер такого графика может быть следствием проявления гистерезиса закона сжимаемости, когда величина коэффициента сжимаемости (а вместе с ним и коэффициента пьезопроводности) оказывается различной при снижении напора (сжатие пласта) и восстановлении уровня (разуплотнение пласта).

где $V=Qt_0$ — общий объем воды, отобранной из скважины в процессе откачки; согласно (IV.5.29) проводимость пласта определяется по формуле

$$T=\frac{V}{4\pi St_в}=0{,}08\frac{V}{St_з}. \qquad \text{(IV.5.30)}$$

Критерием правильности формулы (IV.5.30) может служить постоянство величины $St_в$.

§ 3. ОСОБЕННОСТИ ОТКАЧЕК ИЗ СОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН В СЛОИСТЫХ И БЕЗНАПОРНЫХ ПЛАСТАХ

3.1. Откачки в слоистых пластах

При обработке откачек в слоистых пластах с учетом перетекания через кровлю и подошву опробуемого пласта следует иметь в виду, что в связи с недостаточной ясностью физических предпосылок фильтрации в раздельных слоях необходимо весьма тщательно и разносторонне проводить анализ данных режима снижения уровней при откачках, исходя прежде всего из внимательного качественного анализа проявления влияния различных гидрогеологических факторов. В связи с этим ниже рассматриваются основные особенности режима откачек в таких условиях при различных постановках задачи.

Наиболее проста схема откачки с постоянным дебитом в пласте, подпитываемом из соседних пластов при сохранении в них постоянного напора и при жестком режиме перетекания, когда понижение уровня в опробуемом пласте описывается уравнением (IV.2.25). Типовой график снижения уровня в таких условиях, построенный в полулогарифмических координатах, приведен на рис. 71. Для него характерно асимптотическое стремление понижения S к его стационарной величине $S_{ст}$, определяемой уравнением (IV.2.26), и наличие точки перегиба, где понижение оказывается равным половине от стационарного ($S_п=0{,}5S_{ст}$). Наличие точки перегиба позволяет определить стабилизированное понижение в случае, если оно не достигается при откачке. Зная величину $S_{ст}$ по нескольким наблюдательным скважинам, можно построить график зависимости $\lg S=\lg S_{ст}$ от $\lg r$ и совместить его параллельным перенесением осей с эталонным графиком зависимости $\lg K_0(\bar{r})$ от $\lg \bar{r}$ (рис. 85, *а*). Взяв далее на этих совмещенных графиках любую точку, определим проводимость T и параметр перетекания B, поскольку

$$\lg\frac{Q}{2\pi T}=\lg S-\lg K_0(\bar{r}),\ \lg B=\lg r-\lg\bar{r}. \qquad \text{(IV.5.31)}$$

Коэффициент пьезопроводности можно определить, исходя из того, что в точке перегиба $2u_п=\bar{r}$, так что

$$a = \frac{rB}{2t_{\text{п}}}, \qquad \text{(IV.5.32)}$$

где $t_{\text{п}}$ — время, соответствующее точке перегиба на графике $S(\lg t)$.

При наличии нескольких наблюдательных скважин надежные результаты может дать способ эталонных кривых, причем в данном случае эталонный график будет представлять собой семейство

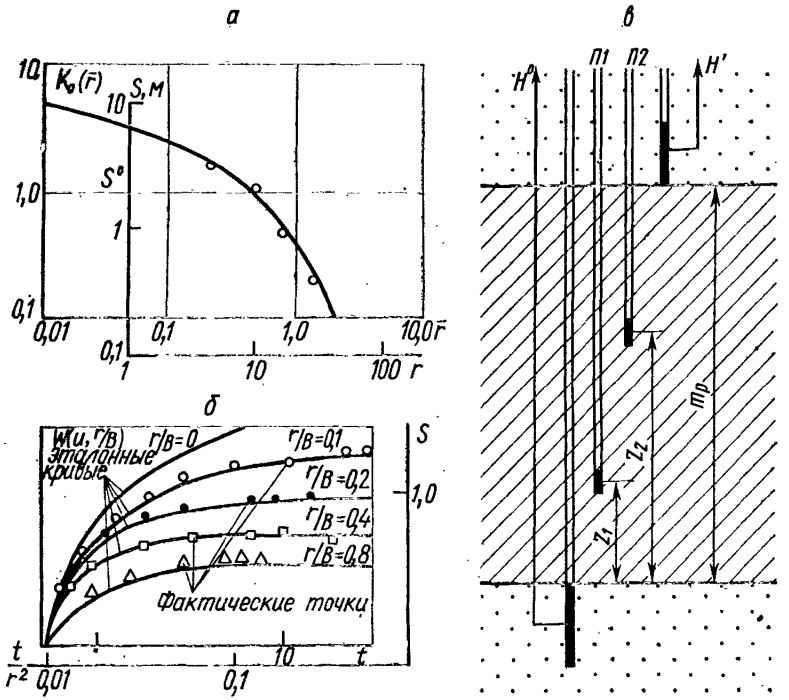


Рис. 85. Интерпретация откачек в напорных пластах с перетеканием:
а и *б* — наложение эталонных кривых для понижений в плане при стабилизированном и нестационарном режиме; *в* — расположение этажных пьезометров в разделяющем пласте

кривых зависимости $\lg W_{\text{п}}(u, \bar{r})$ от $\lg \frac{1}{u}$ при различных значениях $\bar{r}$. Данные понижения напора во времени для наблюдательных скважин наносятся на график зависимости $\lg S$ от $\lg \frac{t}{r^2}$, построенный в масштабе эталонной кривой. Затем этот график параллельным перемещением осей совмещается с эталонным графиком (рис. 85, *б*), причем выбор эталонных кривых должен производиться таким образом, чтобы удовлетворялось условие

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}, \quad \frac{r_2}{r_3} = \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_3}, \ \ldots, \qquad \text{(IV.5.33)}$$

где $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, ... — параметры эталонных кривых, которые совмещаются с кривыми для наблюдательных скважин, располагаемых на расстояниях r_1, r_2, r_3, ... от центральной.

После совмещения графиков параметры находятся из соотношений

$$\lg \frac{Q}{4\pi T} = \lg S - \lg W_{\text{п}}(u, \bar{r}), \quad \lg 4a = \lg \frac{1}{u} - \lg \frac{t}{r^2}, \qquad \text{(IV.5.34)}$$

которые обосновываются так же, как это показано в § 1 для условий откачки из изолированного пласта.

Коэффициенты фильтрации разделяющих слоев $k_{\text{к}}$ и $k_{\text{п}}$, залегающих в кровле и подошве пласта, можно далее оценить, исходя из выражений (IV.2.24а) для коэффициента перетекания

$$b = \frac{1}{B} = \frac{\bar{r}}{r}, \quad \frac{k_{\text{к}}}{m_{\text{к}}} + \frac{k_{\text{п}}}{m_{\text{п}}} = Tb^2, \qquad \text{(IV.5.35)}$$

в частности, при $k_{\text{к}} = k_{\text{п}}$ получим

$$k_{\text{к}} = k_{\text{п}} = \frac{m_{\text{к}} m_{\text{п}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{п}}} Tb^2. \qquad \text{(IV.5.35а)}$$

Для изучения фильтрационных свойств разделяющих слоев существенную информацию можно получить по данным наблюдений изменений напоров в самих разделяющих слоях, для чего используются «точечные» этажные пьезометры или датчики давления [17]. Интерпретация таких данных производится на основе анализа вертикального нестационарного потока, границы которого проводятся по подошве и кровле разделяющего слоя (или нескольких слоев) или задаются на уровне заложения пьезометров. Обработку данных нестационарного режима здесь целесообразно проводить в изображениях $H_{\text{р}}$ изменений напора по Лапласу — Карсону, рассчитываемых для каждого пьезометра. Для одномерного потока можно воспользоваться уравнением (III.2.35), которое в данном случае принимает вид

$$H_p = \frac{H_p' - H_p^0 \operatorname{ch} \lambda_p}{\operatorname{sh} \lambda_p} \operatorname{sh}(\bar{z}\lambda_p) + H_p^0 \operatorname{ch}(\bar{z}\lambda_p); \qquad \text{(IV.5.36)}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{m_p}, \quad \lambda_p = \frac{m_p}{\sqrt{at_p}},$$

где a — коэффициент пьезопроводности пород разделяющего слоя. Расчеты величины a по уравнению (IV.5.36) следует проводить подбором, причем можно рекомендовать для каждого пьезометра строить по уравнению (IV.5.36) эталонные кривые зависимости H_p от $\lg(1/\lambda_p^2)$ при значениях $\bar{z}$, соответствующих положению этого

пьезометра в разделяющем слое, и затем накладывать их на кривые графика зависимости H_p от $\lg t_p$, совмещая эти графики по вертикальной оси и передвигая их по горизонтальной оси. По горизонтальному сдвигу графиков находится коэффициент пьезопроводности из соотношения

$$\lg \frac{a}{m_p^2} = \lg \frac{1}{\lambda_p^2} - \lg t_p. \qquad \text{(IV.5.37)}$$

Некоторые натурные данные [14] показывают, что определяемая таким образом величина a может уменьшаться во времени. Это свидетельствует о нарушении принятой расчетной модели упругого режима фильтрации, причем наиболее вероятными факторами таких аномалий представляются гетерогенность пород и более сложная форма закона компрессии (переменный коэффициент сжимаемости и влияние реологических свойств).

3.2. Откачки в безнапорных пластах

Нестационарный режим формирования воронки депрессии при откачке из совершенной скважины в безнапорном пласте осложняется главным образом влиянием вертикальных сопротивлений, которые при нестационарном режиме проявляются сильнее в связи с проникновением вертикальных скоростей фильтрации, направленных от свободной поверхности внутрь пласта (рис. 86, *а, б*), и замедленным характером гравитационной водоотдачи, связанным с буферным действием капиллярной зоны (см. § 2 главы 3 раздела I).

Влияние этих факторов наиболее рельефно проявляется *при двухслойном строении* пласта. В этом случае описание понижений напора S в основной части пласта дается дифференциальным уравнением планового радиального потока (IV.2.6), в котором поступление воды на кровлю пласта определяется перетеканием со свободной поверхности. При жестком режиме фильтрации в покровном слое $v_к = \frac{k_п}{m_п}(S - S^0)$, где S^0 — понижение уровня свободной поверхности, а $m_п$ и $k_п$ — мощность и коэффициент фильтрации покровного слоя. Считая подошву пласта непроницаемой ($v_п = 0$), получим дифференциальное уравнение для понижений напора в нижнем пласте:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) - \frac{k_п}{m_п}(S - S^0). \qquad \text{(IV.5.38)}$$

Кроме того, при отсутствии влияния динамики водоотдачи баланс потока в верхнем слое описывается уравнением (III.1.15), в котором напоры меняются на понижения и при $w = 0$ получим

$$\mu\frac{\partial S^0}{\partial t} = \frac{k_п}{m_п}(S^0 - S). \qquad \text{(IV.5.38а)}$$

Такая же система дифференциальных уравнений получается и при учете динамики водоотдачи по схеме «капиллярной каймы» или с использованием предпосылки Н. Боултона (см. § 2 главы 3

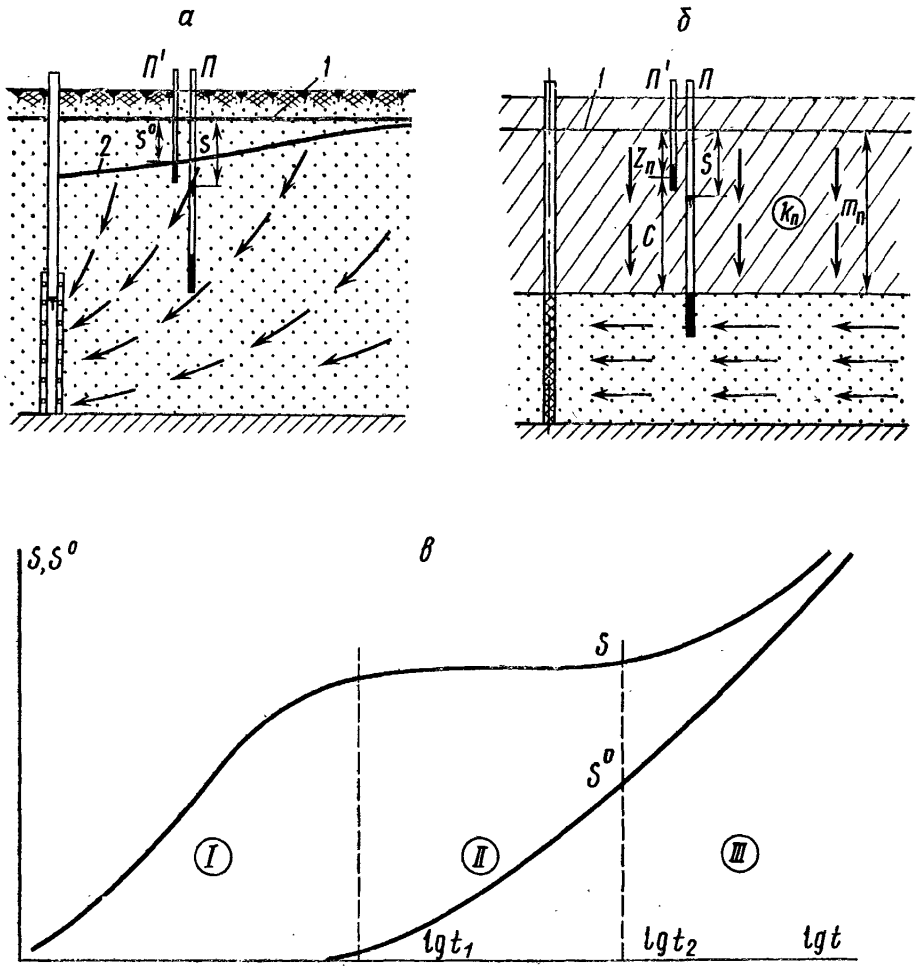


Рис. 86. Формирование потока при откачке в безнапорном пласте: *а* и *б* — сечение потока в однородном и двухслойном пласте (*1* и *2* — исходная и сниженная свободные поверхности потока, стрелками показаны направления линий тока); *в* — кривые снижения уровней в нижнем и верхнем пьезометрах (S и S^0)

раздела I). При этом величина $m_п$ должна заменяться на приведенную мощность $m_{пк}$ покровного слоя с капиллярной зоной, причем

$$m_{пк} = m_п + h_к \frac{k_п}{k_к} = m_п + \frac{k_п}{\alpha}, \qquad \text{(IV.5.39)}$$

где $h_к$ и $k_к$ — высота и коэффициент фильтрации капиллярной зоны; α — параметр динамики водоотдачи, по Н. Боултону.

В пласте относительно однородного строения на некотором удалении от скважины также можно пользоваться системой уравнений (IV.5.38 и IV.5.38а), принимая $m_п = h_0/3$ [17, 24] и заменяя $k_п$ на коэффициент фильтрации в вертикальном направлении k_z (в изотропном пласте $k_z = k$). Такой прием с погрешностью до 10% применим при условии $r > 0{,}3\, h_0 \sqrt{k/k_z}$, причем величина S представляет собой понижение напора в средней части пласта (в однородном пласте она фиксируется на глубине 0,42 h_0).

Решения уравнений (IV.5.38) для условий откачки с постоянным дебитом Q даны в ряде работ [17, 35, 40]. На основании этих решений и натурных данных опытных откачек выделяются три основных периода снижения напоров (рис. 86, *в*): *упругого* (I), *ложностационарного* (II), *гравитационного* (III) режимов, которые лучше всего диагностируются при наличии этажных пьезометров — нижнего, в основной части пласта, и верхнего на свободной поверхности. (Заметим, что при относительно однородном строении пласта нижний пьезометр располагается посередине пласта, а при двухслойном строении заглубляется в нижний пласт, см. пьезометры П и П′ на рис. 86, *а*, *б*.) В начале периода упругого режима водоотдача пласта имеет в значительной степени упругий характер, а затем постепенно интенсифицируется поступление воды со свободной поверхности за счет гравитационной водоотдачи. В этот период понижения напоров в каждом сечении существенно меняются по вертикали, причем уровни свободной поверхности почти не снижаются, а понижения уровней в средней части пласта (фиксируемые по нижнему пьезометру) развиваются наиболее интенсивно, и при откачке с постоянным дебитом они описываются уравнением (IV.2.25), в котором надо положить

$$a = \frac{T}{\mu^*},\quad B = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{m_{пк} T}{k_п}}\,.$$

В период ложностационарного режима наступает состояние кажущейся стабилизации напоров внутри потока (фиксируемое по нижнему пьезометру), которое объясняется временным равновесием между увеличивающейся гравитационной водоотдачей и оттоком в сформировавшейся воронке депрессии. На графике S, $\lg t$ в этот период наблюдается точка перегиба, свидетельствующая о переходе к гравитационному режиму, причем в точке перегиба понижение напора в пласте определяется уравнением (IV.2.26) при значении B, задаваемом согласно (IV.5.36). Вместе с тем для периода ложностационарного режима характерно интенсивное снижение уровней свободной поверхности; это различие в режимах снижения уровней по этажным пьезометрам является основным диагностическим признаком ложностационарного режима в безнапорном потоке, отличающим ложную стабилизацию от действительной.

Наступление гравитационного режима, характеризующегося новой интенсификацией снижения уровней, выраженной на полулогарифмическом или билогарифмическом графике временного прослеживания, связано со стабилизацией гравитационной водоотдачи и уменьшением влияния вертикальных сопротивлений в связи с увеличением размеров воронки депрессии. Здесь характер снижения напоров постепенно выравнивается по вертикали и стремится к такому же, как и в напорном потоке, но с заменой коэффициента упругой емкости μ^* на коэффициент гравитационной водоотдачи μ, т. е. в неограниченном пласте понижение уровней в этот период при откачке с постоянным дебитом описывается уравнением (IV.2.8) при $a=T/\mu$. Более подробно закономерности этого периода рассмотрены в работах [17, 18].

Для определения проводимости пласта наиболее удобны данные понижений периода ложностационарного режима, которые описываются уравнением (IV.2.26) и могут быть обработаны по способу эталонной кривой. Для этого график зависимости $\lg S$ и $\lg r$ параллельным перемещением осей совмещается с эталонной кривой зависимости $\lg K_0(\bar{r})$ от $\lg_1 r$, после чего проводимость и параметр перетекания рассчитываются по любой точке совмещенных графиков согласно (IV.5.36). Заметим, что при $r>0{,}3B$ для расчетов проводимости по данным понижений ложностационарного периода можно пользоваться уравнением Дюпюи (IV.5.8).

Для определения коэффициентов гравитационной емкости по периоду ложностационарного режима целесообразно использовать данные понижений напоров в пласте S и уровней свободной поверхности S^0, фиксируемых ярусными пьезометрами. Используя уравнение (IV.5.38а), получим выражение для определения коэффициента гравитационной емкости

$$\mu = \frac{k_{\text{п}}}{m_{\text{п}}} \cdot \frac{S - S^0}{v_s^0}, \qquad \text{(IV.5.40)}$$

где $v_s^0 = \Delta S^0/\Delta t$ — скорость снижения уровня свободной поверхности, которая рассчитывается по графику $S^0(t)$. При этом величину Δt рекомендуется принимать такой, чтобы за три-четыре интервала Δt снижение уровней S^0 составило бы примерно половину от понижения в пласте S. Проводя расчет по формуле (IV.5.40) на различные периоды времени, можно получить представление об изменчивости величины μ во времени.

При относительно однородном строении пласта этап упругого режима обычно проходит довольно быстро, этап ложностационарного режима выражен менее отчетливо и значительно больше проявляется этап гравитационного режима. В этом случае для обработки данных откачки эффективно использование решений, выраженных в интегральных преобразованиях по Лапласу — Карсону. По общим правилам таких преобразований (см. § 2 главы 3 раздела I), обозначая через S_p и S_p^0 изображения понижений S и

S^0, представим дифференциальные уравнения (IV.5.36) и (IV.5.36а) в виде

$$\frac{S_p}{at_p} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial S_p}{\partial r}\right) - \frac{k_п}{m_п}(S_p - S_p^0),$$

$$\mu \frac{S_p^0}{t_p} = \frac{k_п}{m_п}(S_p - S_p^0). \qquad \text{(IV.5.41)}$$

Исключая из этой системы уравнений величину S_p^0, получим уравнение

$$S_p\left(\frac{1}{at_p} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\mu}{k_п t_p/m_п + \mu}\right) =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial S_p}{\partial r}\right), \quad B = \sqrt{\frac{m_п T}{k_п}}. \qquad \text{(IV.5.41а)}$$

Решение этого уравнения для неограниченного радиального потока имеет вид

$$S_p = \frac{Q_p}{2\pi T} K_0\left(\frac{r}{B_0}\right), \quad B_0 = \left(\frac{1}{at_p} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\mu}{k_п t_p/m_п + \mu}\right)^{-1/2}, \qquad \text{(IV.5.42)}$$

где Q_p — изображение дебита откачки. Для обработки данных опытной откачки по уравнению (IV.5.42) необходимо иметь кривые временного прослеживания по трем наблюдательным скважинам, располагаемым в средней части пласта. По этим кривым рассчитываются значения S_p и Q_p при нескольких значениях t_p, а затем при каждом t_p составляется билогарифмический график зависимости S_p/Q_p от t_p, который параллельным перемещением осей совмещается с билогарифмическим эталонным графиком функции $K_0(\bar{r})$. Снимая с этих графиков координаты какой-либо одной точки, найдем значения параметров

$$T = \frac{K_0(\bar{r})}{2\pi S_p/Q_p}, \quad B_0 = \frac{r}{\bar{r}}. \qquad \text{(IV.5.43)}$$

Далее, исключая данные этапа упругого режима, строим график зависимости B_0 от t_p, который в этом случае должен быть прямолинейным, поскольку при $a \to \infty$ из (IV.5.42) получим

$$B_0^2 = B^2\left(1 + \frac{k_п t_p}{\mu m_п}\right). \qquad \text{(IV.5.44)}$$

На этом графике $B_0 = B$ при $t_p = 0$, а по его уклону находится величина $k_п/\mu m_п$ или $T/\mu = \Delta B_0^2/\Delta t_p$.

Для учета динамики водоотдачи в этих зависимостях следует заменить $m_п$ на $m_{пк}$, определяя эту величину согласно (IV.5.39).

Для отдельной оценки динамики водоотдачи следует определять величину $\mu m_{\text{п}} k_{\text{п}}$ по соотношению (IV.5.40), используя данные по снижению уровня в этажных пьезометрах, располагаемых в средней части пласта и на свободной поверхности. После этого из (IV.5.39) можно найти параметр динамики водоотдачи.

В безнапорных пластах однородного строения при значительных понижениях уровня происходит заметное изменение проводимости пласта, что можно учесть, вводя расчетные значения понижения уровня, определяемые согласно (IV.1.9).

3.3. Откачка вблизи водотока

При расчетах откачки вблизи водотоков (рек, каналов) рассматривается только случай подпертой фильтрации под водотоком (см. § 1 главы 2 раздела II), поскольку свободная фильтрация из водотока не влияет на характер снижения уровней в процессе откачки. Заметим, что при мощном водоотборе зона свободной фильтрации может образоваться в процессе откачки; такого положения допускать не следует, поскольку частичный переход подпертой фильтрации в свободную резко осложняет методику обработки данных опытных откачек, исключая возможность использования аналитических решений.

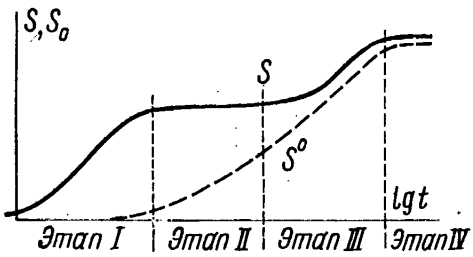


Рис. 87. Графики временного прослеживания при откачке из совершенной скважины вблизи водотока (S и S^0 — понижения напора в средней части пласта и на свободной поверхности)

Типичная схема строения ложа реки — двухслойная (см. рис. 76,*а*): в этом случае подпертый режим фильтрации сохраняется до тех пор, пока уровни воды в основном водоносном пласте не понижаются ниже подошвы экранирующего слоя. Если же сопротивление ложа водотока определяется главным образом заилением или кольматацией его русла, то свободный режим фильтрации возникает при снижении уровня воды под водотоком ниже его дна.

Рассмотрим условия откачки из совершенных скважин при сравнительно прямолинейном контуре берега реки. В режиме изменения уровней при откачке у реки выделяются следующие этапы (рис. 87): в начальный период, когда еще не проявляется влияние реки, формируются этапы упругого (I) и ложностационарного (II) режимов, после чего начинается формирование этапа гравитационного режима (III); затем в связи с влиянием реки изменения уровней начинают стабилизироваться, стремясь к своему стационарному положению (этап IV). Обработка данных нестационарного режима таких откачек ведется только для начального

периода откачки, когда еще не сказывается влияние реки, с использованием приведенных выше способов обработки для откачки в безнапорном неограниченном потоке. Обработку данных откачки с учетом влияния водотока рекомендуется проводить на период стационарной фильтрации. Следует подчеркнуть, что при диагностике данных такой откачки необходимо убедиться в достижении истинной стабилизации уровней (этап IV), не относя к ним данные этапа ложностационарного режима. Наиболее четко такая диагностика проводится путем сопоставления уровней в ярусных пьезометрах, располагаемых в основной части пласта и на свободной поверхности, поскольку для ложностационарного режима характерно интенсивное изменение уровней свободной поверхности при почти стабильном положении напоров в пласте.

Согласно методу отражений влияние водотока учитывается введением зеркально отраженной скважины относительно берегового контура реки. Учет сопротивления ложа крупного водотока,— когда практически отсутствует взаимовлияние потоков грунтовых вод на противоположных берегах, — производится путем формального сдвига уреза водотока на величину ΔL (см. § 1 главы 3), и стационарное понижение уровня грунтовых вод при откачке с дебитом Q определяется из уравнения (IV.3.16).

При обработке данных кустовой опытной откачки в общем случае здесь должны определяться проводимость пласта T и параметр ΔL. Для этого можно рекомендовать строить график зависимости понижения S от величины $\lg r''/r$ при различных значениях ΔL, на котором по опытным точкам проводятся прямые линии. В качестве расчетного принимается то значение ΔL, при котором такая прямая приходит в начало координат. Снимая с этой прямой любую точку, находим величину проводимости

$$T = 0{,}366 \frac{Q}{S} \lg \frac{r''}{r}. \qquad \text{(IV.5.45)}$$

Если же величина ΔL предварительно определена по данным режимных наблюдений, то необходимость такого подбора отпадает, поскольку величины r'' для каждого пьезометра здесь будут известны.

Несколько более сложны расчетные зависимости для откачки у водотока небольшой ширины, когда необходимо учитывать взаимосвязь потоков на различных берегах [6, 17, 31].

§ 4. ОПРОБОВАНИЕ НЕСОВЕРШЕННЫХ СКВАЖИН

Обработка данных опробований, проводимых в несовершенных скважинах, значительно затрудняется из-за более сложной структуры потока, которая к тому же может существенно искажаться влиянием слоистости водоносных пластов. Не задаваясь целью подробного рассмотрения всех вариантов анализа данных таких

откачек, ограничимся рассмотрением наиболее простых случаев расположения скважин в однородных пластах неограниченных и ограниченных по мощности.

При выборе расчетной схемы следует учитывать расположение скважин относительно кровли и подошвы пласта, имея в виду, что влияние границ пласта (кровли или подошвы) оказывается несущественным при следующих условиях: для расчетов по центральной скважине, когда она удалена от границы больше чем на 1,5 l (с точностью до 5%), а при расчетах по наблюдательным скважинам, когда их расстояние до центральной не больше одной десятой расстояния от центральной скважины до границы. Если эти условия выполняются по отношению как к кровле, так и к подошве пласта, то можно использовать схему неограниченного по мощности пласта, а при выполнении этого условия только по отношению к одной из границ пласта (кровле или подошве) можно использовать схему полуограниченного по мощности пласта. Если же эти условия не выполняются, то рассматривается схема пласта конечной мощности.

Пьезометры обычно не следует располагать в непосредственной близости от центральной скважины, где существенное (и вместе с тем довольно неопределенное) влияние оказывает неравномерность притока к фильтру центральной скважины. Целесообразно устанавливать пьезометры не ближе $l/3$ от центральной, поскольку в этом случае для расчетов могут использоваться более простые зависимости, основанные на применении модели точечного стока [15, 17]. Расчетное расстояние до такого точечного стока определяется по формуле

$$r^0 = \sqrt{r_1 r_2}, \qquad \text{(IV.5.46)}$$

где r_1 и r_2 — расстояния до характерных точек на центральной скважине, задаваемых на расстояниях $l/6$ от ее краев.

В неограниченном по мощности однородном изотропном пласте для расположенных таким образом пьезометров в качестве исходного может использоваться уравнение (IV.5.14), в котором величина r заменяется на расчетное расстояние r^0, определяемое согласно (IV.5.46).

Обработка данных временного прослеживания по одному пьезометру может проводиться наложением эталонной кривой, которая строится в координатах $\lg(\operatorname{erfc}\xi)$ и $\lg 1/\xi^2$, на график опытных данных, построенный в координатах $\lg S$ и $\lg t$. После совмещения этих кривых по любой паре совмещенных точек на графиках определяются величины

$$\lg \frac{Q}{4\pi k r^0} = \lg S - \lg(\operatorname{erfc}\xi), \quad \lg \frac{4a}{(r^0)^2} = \lg \frac{1}{\xi^2} - \lg t, \qquad \text{(IV.5.47)}$$

по которым находятся коэффициенты фильтрации k и пьезопроводности a.

При наличии двух и более пьезометров обработку можно производить методом комбинированного прослеживания, для чего опытные данные наносят на график в координатах $\lg(r^0 S)$ и $\lg t/(r^0)^2$, на котором данные по разным пьезометрам должны лечь на одну кривую, что является диагностическим призна-

ком правильности исходной зависимости. Совмещая этот график с тем же эталонным графиком, по любой паре точек рассчитываем величины

$$\lg \frac{Q}{4\pi k} = \lg (r^0 S) - \lg (\operatorname{erfc} \xi), \quad \lg 4a = \lg \frac{1}{\xi^2} - \lg \frac{t}{(r^0)^2}. \quad \text{(IV.5.48)}$$

При больших t, когда выполняется условие

$$r^0 \leqslant 0{,}9 \sqrt{at}, \quad \text{(IV.5.49)}$$

можно считать $\operatorname{erfc} \xi \cong 1 - 2/\sqrt{\pi}\xi$, и тогда уравнение (IV.4.12) примет вид

$$S = \frac{Q}{4\pi k} \left(\frac{1}{r^0} - \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \right), \quad \text{(IV.5.50)}$$

соответствующий условиям квазистационарного режима. Для обработки данных снижения уровня по этому уравнению строят график опытных данных в координатах S и $1/\sqrt{t}$, который должен быть прямолинейным, причем эта прямая линия отсекает на оси S величину $Q/4\pi r^0$, а на оси $1/\sqrt{t}$ величину $\sqrt{\pi a}/r^0$. Обработку комбинированного прослеживания по этому уравнению можно производить построением опытного графика в координатах $r^0 S$ и $r^0/\sqrt{t}$, на котором все опытные точки должны ложиться на одну прямую, отсекающую на осях $r^0 S$ и $r^0/\sqrt{t}$ величины $Q/4\pi k$ и $\sqrt{\pi a}$.

После расчетов параметров пласта можно определить сопротивление скважины по данным понижения уровня в центральной скважине, получив сначала расчетное понижение уровня S_c^0 (без учета ее сопротивления) по формуле (IV.4.8). После этого, зная «скачок» уровня на скважине $\Delta S_c = S_c - S_c^0$, найдем расчетный радиус скважины r_c^0, учитывающий прискважинное сопротивление, по формуле

$$r_c^0 = r_c \exp \left(- \frac{2\pi k l \Delta S_c}{Q} \right). \quad \text{(IV.5.51)}$$

Для обоснования рационального расстояния от центральной скважины до пьезометров будем исходить из того, что предельное понижение в пьезометрах S должно быть не менее 0,1 S_c. Составляя соотношение этих понижений при стабилизации уровней, можем записать, что $S/S_c = r_0/r^0$, где r_0 — приведенный радиус скважины, определяемый по формуле (IV.4.9). При реальных значениях $l/r_c = 50$—200 найдем, что при $S \geqslant 0{,}1\ S_c$ должно быть $r \leqslant l$. Таким образом, при откачках из несовершенных скважин в неограниченном пласте целесообразно располагать пьезометры (наблюдательные скважины) на расстоянии от центральной не далее длины фильтра l (но не ближе 0,3 l).

При использовании расчетной схемы *ограниченного по мощности изолированного пласта* обработку опытной откачки из несовершенной скважины наиболее удобно вести по данным квазистационарного режима, когда понижения напора согласно уравнению (IV.4.22) имеют выражение

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{4at}{(r^*)^2}. \quad \text{(IV.5.52)}$$

В этом случае можно производить обработку данных, как при откачке из совершенной скважины, т. е. по способу логарифмической прямой, — надо только заменить величину r на расчетное расстояние r^*, при расчетах которого величина ζ для сравнительно больших значений r определяется выражением (IV.4.20).

В однородно-анизотропных пластах дополнительного определения требует параметр анизотропии $\varkappa = \sqrt{k_r/k_z}$, для чего используются данные о соотношениях уровней в различным образом расположенных пьезометрах; способы таких расчетов приведены в работах [2, 17, 27]. Значительно более сложна обработка опытных опробований в неоднородных (слоистых) пластах; для некоторых сравнительно несложных схем слоистых пластов рекомендации по способам обработки опытных опробований также приведены в работах [2, 17].

Для оценки проницаемости прискважинной зоны используются данные *экспресс-налива*, при котором в скважину мгновенно заливается объем воды V, что приводит к повышению уровня на величину H_0, после чего замеряется ход восстановления уровней в скважине.

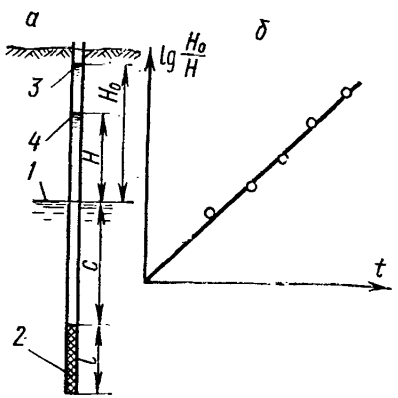


Рис. 88. Схема экспресс-налива: *а* — схема несовершенной скважины с цилиндрическим фильтром (*1* — статический уровень, *2* — фильтр, *3* и *4* — уровни в скважине сразу после залива ($t=0$) и в момент времени t после залива); *б* — график для обработки данных экспресс-налива

Баланс воды в скважине, имеющей радиус трубы $r_т$, запишется из условия, что расход Q потока, выходящего из скважины, компенсируется снижением уровня в ней, причем за бесконечно малое время dt будем иметь

$$-\pi r_т^2 dH = Q\,dt. \qquad \text{(IV.5.53)}$$

При опробовании несовершенной скважины (рис. 88, *а*) процессы упругого режима фильтрации вблизи скважины проходят довольно быстро, и поток здесь можно считать квазистационарным, так что связь между расходом Q и избыточном напором в скважине H может быть принята в каждый момент времени соответствующей условиям стационарной фильтрации. Задавая размер и положение фильтра скважин так, чтобы влияние кровли и подошвы пласта не сказывалось на расходе скважины (для этого достаточно задать $c<1{,}5\ l$), можно использовать выражение (IV.4.8), заменяя в нем S_c на H, т. е.

$$Q = kl^0 H,\quad l^0 = \frac{2\pi l}{\ln\dfrac{0{,}7\,l}{r_c}}. \qquad \text{(IV.5.54)}$$

Подставляя выражение (IV.5.54) для Q в балансовое уравнение (IV.5.53), получим уравнение $-\pi r_т^2 dH = kl^0 H dt$, которое позволяет разделить переменные

$$\frac{dH}{H} = -\frac{kl^0}{\pi r_т^2} dt$$

и после интегрирования получить

$$\ln H = -\frac{kl^0}{\pi r_т^2} t + C,$$

причем произвольная постоянная C определяется из условия $H = H_0$ при $t = 0$, т. е. $C = \ln H_0$, так что уравнение восстановления напора в скважине будет иметь вид

$$\ln \frac{H_0}{H} = \theta t, \quad \theta = \frac{kl^0}{\pi r_т^2}. \qquad \text{(IV.5.55)}$$

Из этого уравнения следует, что на графике зависимости $\lg \frac{H_0}{H}$ от t (рис. 88, *б*) данные изменения уровней после экспресс-налива должны ложиться на прямую линию, приходящую в начало координат. Сняв с этой прямой любую точку, определим величины параметра θ и коэффициента фильтрации:

$$\theta = \frac{1}{t} \ln \frac{H_0}{H}, \quad k = \frac{\pi r_т^2 \theta}{l^0} \approx 7{,}2 \frac{r_т^2}{l^0 t} \lg \frac{H_0}{H}, \qquad \text{(IV.5.56)}$$

где величина l^0 определяется согласно (IV.5.54). Аналогичный вид имеют зависимости для экспресс-налива в колодец, работающий плоским дном, диаметром $d_к$, где следует только принимать $l^0 = 5 d_к$. Поскольку приток к такому колодцу существенно зависит от формы его дна, то для достоверного применения такого опробования надо быть уверенным в отсутствии искажений поверхности дна колодца.

Все приведенные зависимости могут применяться и для обработки экспресс-откачек с подстановкой в расчетные формулы вместо повышений уровня H их соответствующие понижения S.

Опыт обработки данных экспресс-наливов показывает, что иногда нарушения прямолинейного характера расчетного графика существенно проявляются в самом начале процесса. В таких случаях рекомендуется сдвинуть расчетное начало процесса (момент $t = 0$), изменив соответственно величину H_0. Таким образом, обычно удается добиться достаточно хорошей прямолинейности расчетного графика.

Обработкой экспресс-опробований (откачки и налива) совершенных скважин можно определить проводимость пласта T, воспользовавшись зависимостью (IV.5.30), в которой V представляет собой объем воды, отобранной из скважины при экспресс-откачке

или налитой в нее при экспресс-наливе, причем для обработки экспресс-налива в формуле (IV.5.30) следует заменить понижение S на его повышение H относительно статического.

Анализ приведенных выше зависимостей для экспресс-опробований показывает, что применение этого вида работ рационально в сравнительно слабопроницаемых породах (ориентировочно, при $k<1$ м/сут).

Весьма эффективно использование данных экспресс-наливов для оценки сопротивления открытых наблюдательных скважин, определяющего их инерционность при замерах уровней в процессе нестационарного режима фильтрации. В этом случае происходит водообмен между водоносным пластом в месте расположения наблюдательной скважины и самой скважиной; расход этого водообмена $Q_{нс}$ определяется скоростью изменения количества воды в наблюдательной скважине $v_{нс}$, т. е. при площади горизонтального сечения трубы скважины $\omega_т = \pi r_т^2$ имеем $Q_{нс} = \pi r_т^2 v_{нс}$. В связи с этим между скважиной и пластом возникает разница напоров $\Delta H_{нс}$, которую для несовершенной скважины с фильтром, заглубленным под уровень свободной поверхности водоносного горизонта, можно считать равной избыточному напору H, определяемому согласно зависимости (IV.5.54) при $Q = Q_{нс}$, т. е.

$$\Delta H_{нс} = \frac{Q_{нс}}{kl^0} = \frac{\pi r_т^2 v_{нс}}{kl^0}. \qquad \text{(IV.5.57)}$$

Поскольку согласно (IV.5.56) $\frac{\pi r_т^2}{kl^0} = \frac{1}{\theta}$, то формулу (IV.5.57) можно представить в следующем расчетном виде:

$$\Delta H_{нс} = \frac{v_{нс}}{\theta}. \qquad \text{(IV.5.58)}$$

Таким образом, для оценки инерционности открытой наблюдательной скважины необходимо провести в ней экспресс-налив, определить по изложенной выше методике величину θ, характеризующую сопротивление прифильтровой зоны, а затем оценить погрешности замера напоров в несовершенной наблюдательной скважине по формуле (IV.5.58), где $v_{нс}$ представляет собой скорость изменения уровней в скважине на любой расчетный период времени. При этом величина истинного напора H в водоносном пласте при измененном напоре в наблюдательной скважине будет

$$H = H_с + \Delta H_{нс}, \qquad \text{(IV.5.59)}$$

причем для определения знака величины $\Delta H_{нс}$ в формуле (IV.5.58) следует считать величину $v_{нс}$ положительной при подъеме уровня и отрицательной при его спаде.

Эффективно используется теория экспресс-опробования также для замеров статического уровня воды непосредственно после бурения скважины [32].

Раздел V

ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ВОДОЗАБОРНЫХ И ДРЕНАЖНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Глава 1

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ВОДОЗАБОРНЫХ И ДРЕНАЖНЫХ СИСТЕМ

В современных условиях основной интерес для гидрогеологических расчетов представляют крупные водозаборы и дренажи подземных вод, влияние которых распространяется на большую территорию, так что при прогнозах режима подземных вод в районах таких сооружений поток, по крайней мере в большей своей части, может считаться плановым (или планово-пространственным). Поэтому гидродинамические основы расчетов водозаборных и дренажных систем сводятся к обоснованию методики расчетов плановых фильтрационных потоков, возникающих в зоне влияния таких систем.

Для забора подземных вод обычно служат вертикальные скважины (рис. 89, *а*). Для дренажа грунтовых вод при сравнительно неглубоком их залегании обычно используются открытые и закрытые горизонтальные дрены (рис. 89, *б*), которые при наличии слабопроницаемых покровных отложений могут усиливаться добавлением вертикальных скважин, разгружающихся в дрены (рис. 89, *в*). Для интенсификации водоотбора иногда применяются лучевые водозаборы, состоящие из больших колодцев (шахт), в основании которых устраиваются горизонтальные дрены большой длины (несколько сотен метров). Лучевые водозаборы пока еще не получили у нас заметного распространения, поэтому в дальнейшем методика их расчета рассматриваться не будет; ее специфика рассмотрена, например, в работе [27].

§ 1. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СКВАЖИН

Методика аналитических расчетов водозаборных и дренажных скважин прежде всего рассматривается для типовых условий, для которых имеются аналитические решения во всей области фильтрации. В настоящее время в типовые условия включаются следующие схемы контуров потока в плане: неограниченный, полу-

ограниченный, угловой (пласт-квадрант), полосовой и круговой, применительно к которым основы методики расчетов систем скважин разобраны в главах 2 и 3 раздела IV.

Для расчетов систем водозаборных и дренажных скважин в типовых условиях используется общая теория взаимодействую-

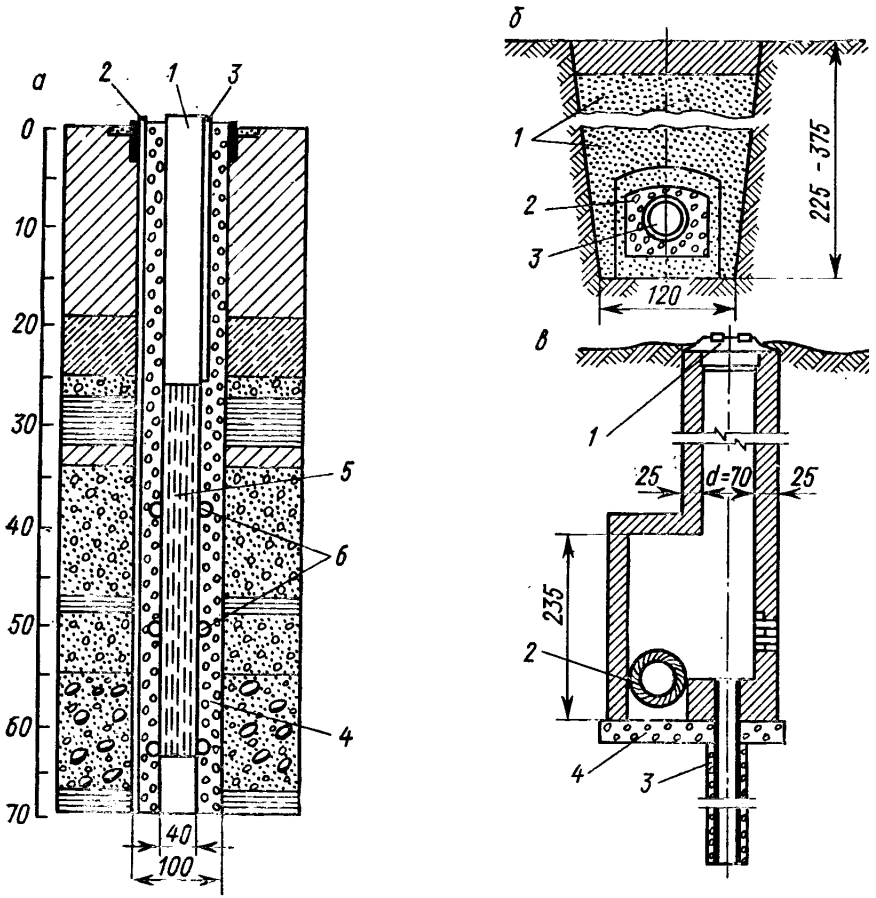


Рис. 89. Конструкции дренажных устройств:
а — скважина вертикального дренажа (*1* — глухая часть, *2* и *3* — затрубные пьезометры, *4* — гравийная обсыпка, *5* — фильтровый каркас, *6* — направляющие фонари); *б* — закрытый трубчатый дренаж (*1* — засыпка местным грунтом, *2* — обратный фильтр, *3* — дренажная труба); *в* — комбинированный дренаж — разрез по скважине (*1* — смотровой колодец, *2* — дренажная труба, *3* — труба скважины, *4* — обратный фильтр), все размеры даны в см

щих скважин, позволяющая определить понижение уровня в любой точке по методике, изложенной в § 4 главы 2 раздела IV.

В водозаборных и дренажных сооружениях взаимодействующие скважины чаще всего расположены упорядоченным образом, образуя линейные и круговые контурные системы или площадные

сеточные системы (рис. 90). Для расчетов таких систем эффективно использование *метода сопротивлений*, основанного на свойстве локальности зоны резкой деформации потока вблизи скважины.

Для расчетов контурных систем скважин этот метод был впервые предложен Ю. П. Борисовым [6]. Рассмотрим его основы применительно к наиболее типичному случаю линейного кон-

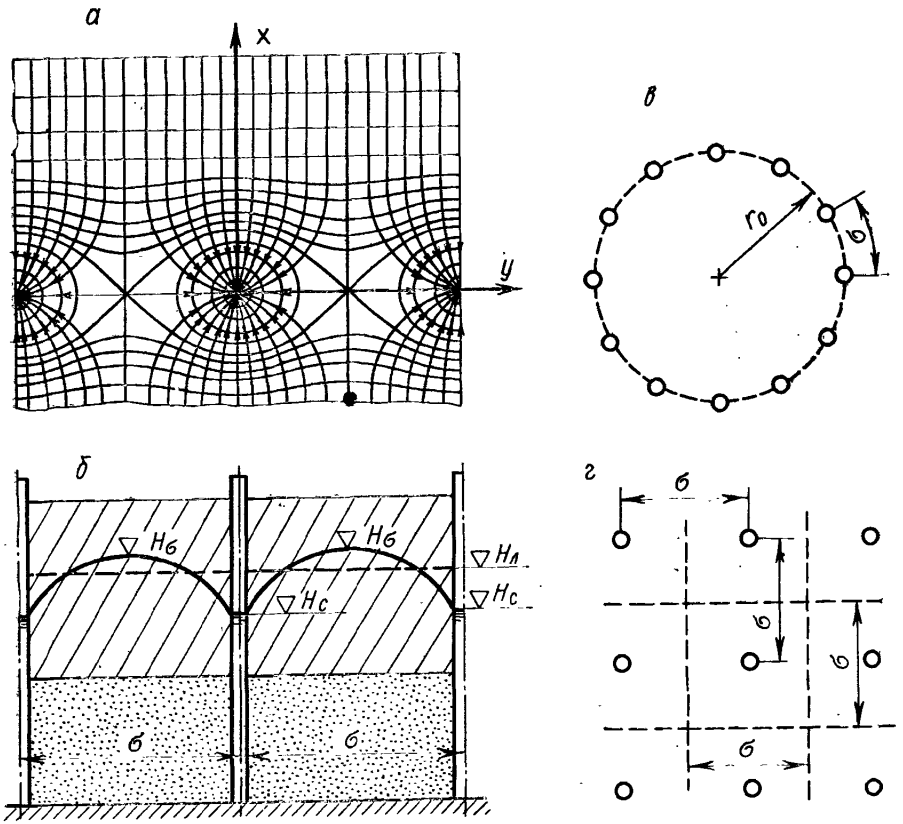


Рис. 90. Контурные и площадные системы скважин:
а — план течения вблизи линейного ряда скважин; *б* — разрез по линии скважин; *в* — кольцевой контур скважин; *г* — площадная система скважин, располагаемых по квадратной сетке (пунктиром показана граница зоны, захватываемой влиянием каждой скважины)

тура скважин (см. рис. 90). В силу локальности зоны резкой деформации потока вблизи скважин можно утверждать, что на удалении от скважин поток будет иметь такой же характер, как если бы контур скважин заменить эквивалентной сплошной траншеей, погонный приток к которой $q_к$ будет равным «размазанному» по контуру дебиту скважин ($q_к = Q/\sigma$). Заметная разница между истинными напорами H и напорами H^0 от действия эквивалентной траншеи будет иметь место лишь в зоне резкой деформации потока, причем если границы потока располагаются вне зоны резкой

деформации, то поправка $\Delta H = H - H^0$ на дискретность скважин может определяться без учета влияния внешних границ потока.

Поправку на дискретность скважин найдем, рассматривая работу бесконечного ряда скважин в неограниченном однородном пласте (T=const), где выражение для напора H имеет вид [19, 31]:

$$H = \frac{Q}{2\pi T} \ln (\operatorname{ch} 2\pi \bar{x} - \cos 2\pi \bar{y}) + C, \quad \bar{x} = \frac{x}{\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\sigma} \qquad (V.1.1)$$

(C — произвольная постоянная). Выражение для напора H^0 при работе эквивалентной траншеи получится, если в (V.1.1) считать x настолько большим, что

$$\operatorname{ch} (2\pi \bar{x}) \cong 0{,}5 \exp (2\pi x) \text{ и } \cos (2\pi \bar{y}) \ll \operatorname{ch} (2\pi \bar{x});$$

тогда

$$H^0 = \frac{Q}{4\pi T} \ln (0{,}5 \exp 2\pi \bar{x}) + C = \frac{Q}{4\pi T} (2\pi \bar{x} - \ln 2) + C, \qquad (V.1.2)$$

причем выражение (V.1.2) для напора H^0, естественно, дает прямолинейный характер его распределения на длине потока. Из (V.1.1) и (V.1.2) находим

$$\Delta H = H - H^0 = \frac{Q}{T} f(\bar{x}, \bar{y}), \qquad (V.1.3)$$

где безразмерная поправка $f(\bar{x}, \bar{y})$ определяется уравнением

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4\pi} \{\ln [2 (\operatorname{ch} 2\pi \bar{x} - \cos 2\pi \bar{y})] - 2\pi \bar{x}\}. \qquad (V.1.4)$$

На линии скважин $x = 0$ и $\operatorname{ch} (2\pi \bar{x}) = 1$, поэтому здесь

$$f(0, \bar{y}) = f_л(\bar{y}) = \frac{1}{4\pi} \ln [2 (1 - \cos 2\pi \bar{y})] = \frac{1}{2\pi} \ln (2 \sin \pi \bar{y}), \qquad (V.1.5)$$

причем на скважине, где $y = r_c$ и в силу малости r_c можно считать $\sin \frac{\pi r_c}{\sigma} \cong \frac{\pi r_c}{\sigma}$, так что связь между средним напором на линии скважин $H_л$ и напором в скважине H_c определится выражением

$$H_л - H_c = \frac{Q}{T} f_{кс}, \quad f_{кс} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sigma}{2\pi r_c} = 0{,}366 \lg \frac{\sigma}{2\pi r_c}, \qquad (V.1.6)$$

а для напора H_σ посередине между скважинами получим выражение

$$H_\sigma - H_л = \frac{Q}{T} f_л (0{,}5), \quad f_л (0{,}5) = \frac{1}{2\pi} \ln 2 = 0{,}11. \qquad (V.1.7)$$

Интеграл выражения $f_л$ по контуру скважин (в пределах $0 \leqslant \bar{y} \leqslant 1$) получается равным нулю, откуда следует, что уровень в эквивалентной траншее $H_л$ равен среднему уровню на линии скважин.

Расчеты безразмерной поправки вне контура скважин показывают, что уже на расстоянии 0,5 σ от контура ее влияние составляет 3%, а на расстоянии σ становится не более 0,1%, так что размер зоны резкой деформации можно оценивать величиной по-

рядка расстояния между скважинами. Теоретический и численный анализ показывает [27, 36], что эти поправки можно применять и при расчетах нестационарной фильтрации, если выполняется условие $\sqrt{at} > 0{,}4\sigma$, а также для контуров с конечным числом скважин.

Аналогичным путем показываются условия перехода от сеточной системы скважин (рис. 90, *б*) к обобщенной площадной системе, когда сетка скважин заменяется эквивалентной площадкой с интенсивностью площадного притока w, соответствующей «размазанному» по площади дебиту скважин ($w = Q/\sigma^2$). Из теоретического анализа следует [7, 27], что в этом случае разница напоров в скважинах H_c и напоров H^0, полученных по расчетам обобщенной системы, выражается формулой

$$H^0 - H_c = \frac{Q}{T} f_{пс},\ f_{пс} = 0{,}366 \lg \frac{\sigma}{2r_c} - 0{,}1. \qquad (V.1.8)$$

При определении понижения уровня в несовершенной скважине вместо действительного радиуса скважины следует подставлять его расчетное значение r_c^0, определяемое по зависимостям, приведенным в § 2 главы 4 раздела IV. Для контурных систем скважин при близком их расположении друг к другу (при $\sigma < m$) следует, кроме того, учитывать дополнительное сопротивление на несовершенство контура скважин, методика расчетов которого приведена, например, в работах [27, 36].

§ 2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТОВ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ДРЕНАЖА

Характерная особенность горизонтального дренажа — его гидродинамическое несовершенство, которое обусловливает деформации потока в вертикальном сечении при входе его в дрену.

Горизонтальные дрены имеют обычно сравнительно небольшие размеры, поэтому их гидродинамическое несовершенство может учитываться по упрощенной схеме (см. рис. 35, *в*) — путем введения одного дополнительного сопротивления $\Phi_{нд}$. Величина этого сопротивления характеризуется эквивалентной длиной $L_{нд}$, определяемой в основном степенью несовершенства дренажа и неоднородностью водоносного пласта. Кроме того, на величину $L_{нд}$ влияют положение кривой депрессии вблизи дренажа и размер капиллярной зоны, поскольку они определяют верхнюю границу потока. Однако наиболее резким фактором, по существу определяющим гидродинамическое несовершенство дренажа, в реальных гидрогеологических условиях оказывается обычно неоднородность пласта. Поэтому влияние положения кривой депрессии на несовершенство дренажа может быть учтено приближенно, путем замены вблизи дренажа действительной кривой депрессии осредненной

горизонтальной линией (рис. 91, *а*), причем расчетную мощность потока вблизи дрены можно принимать равной

$$m_д = 0{,}5\,(h_д + h_л) + h_к, \qquad (V.1.9)$$

где $h_к$ — эффективная высота капиллярной зоны. В первом приближении можно обычно принимать $m_д = h_д + h_л + h_к$ или $m_д = h_л + h_к$, имея в виду, что первый вариант дает завышенное значение $L_{нд}$, а второй — заниженное.

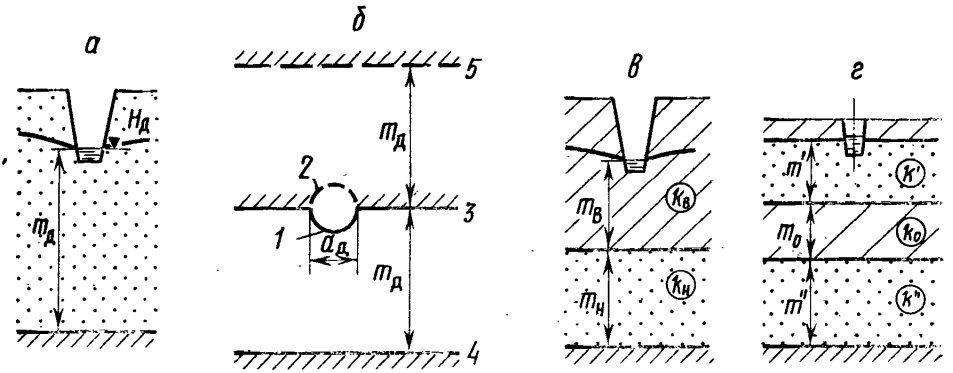


Рис. 91. Поперечные сечения по горизонтальным дренам:
а — дрена в однородном пласте; *б* — круглая модель дрены в однородном пласте (*1* — контур дрены, *2* — ее отражение, *3* — кровля пласта, *4* и *5* — подошва пласта и ее отражение относительно кровли); *в* — дрена в двухслойном пласте; *г* — дрена в двухпластовой системе

Учет местного сопротивления на несовершенство дренажа позволяет перейти от несовершенной дрены с напором $H_д$ к эквивалентной совершенной траншее с напором $H_л$, равным среднему напору на линии дрены, причем

$$H_л = H_д + \frac{q_д}{T_д} L_{нд}, \qquad (V.1.10)$$

где $q_д$ — удельный двусторонний приток к дрене; $T_д$ — проводимость пласта в пределах расчетной мощности $m_д$.

При определении величины $L_{нд}$ для трубчатого дренажа с крупнозернистой обсыпкой за контур дренажа, на котором задается напор, соответствующий уровню в дренаже, принимается контур обсыпки, поскольку потери напора в обсыпке при правильном ее устройстве бывают незначительными.

Для удобства расчета контур дренажа целесообразно привести к круговому с диаметром $d_д$, причем обычно можно считать $d_д = 0{,}56\,P_д$, где $P_д$ — смоченный периметр дренажа (под расчетной кровлей пласта у дрены). Следует только иметь в виду, что такой прием обоснован в тех случаях, когда размеры дренажа заметно меньше мощности пласта, а для дренажа в двухслойном пласте его размеры должны быть по крайней мере вдвое меньше

мощности покровного слоя. Используя решения соответствующих фильтрационных задач, можно получить следующие выражения для определения величины $L_{нд}$ при различном строении пласта.

Для дренажа, вскрывающего однородный пласт (см. рис. 91, *а*), из решения С. Ф. Аверьянова [2] следует выражение

$$L_{нд} = m_д f^0_д, \quad f^0_д = 0{,}73 \lg \frac{2m_д}{\pi d_д}. \qquad (V.1.11)$$

Упражнение. Получить выражение (V.1.11) исходя из приведенного выше решения для ряда скважин, считая верхнюю границу горизонтальной и приводя контур дрены к полукруглому (рис. 91, *б*).

Указание: отражением области потока относительно верхней границы получаем эквивалентную область шириной $2m_д$ с круглой дреной диаметром $d_д$ посередине; эта область по конфигурации соответствует полосовой области шириной σ, относящейся к одной скважине бесконечного ряда (см. рис. 90, *а*). Величина $L_{нд}$ находится далее сопоставлением выражений (V.1.10) и (V.1.6) при $H_с = H_д$, $Q/m = 2q_д$, $T_д = km_д$, $2r_с = d_д$, $\sigma = 2m_д$.

Для дренажа, вскрывающего двухслойный пласт (см. рис. 91, *б*), при существенно меньшей проницаемости верхнего слоя (когда $k_в \leqslant 0{,}1\ k$ и $T_н \gg k_в m_в$) величина $L_{нд}$ определяется по формуле [36]

$$L_{нд} = 0{,}73 \frac{T_н}{k_в} \lg \frac{8m_в}{\pi d_д}, \qquad (V.1.12)$$

где $T_н = k_н m_н$ — проводимость нижнего слоя.

При сравнительно небольшой разнице проницаемостей верхнего и нижнего слоев для определения величины $L_{нд}$ можно пользоваться более общей формулой [24, 25]

$$L_{нд} = 0{,}73 \frac{T}{k_в} \lg \frac{8m_в}{\pi d_д} - 0{,}73 m \lg \frac{4m_в}{m} - 1{,}5 (m_н - m_в) \chi^2 \lg \frac{T}{T_н}, \qquad (V.1.13)$$

где $T = T_н + T_в$ — суммарная проводимость пласта; $\chi = \frac{k_н - k_в}{k_н + k_в}$.

Для двухпластовой системы, состоящей из двух водоносных пластов с проводимостями $T' = k'm'$ и $T'' = k''m''$, разделенных слабопроницаемым слоем с коэффициентом фильтрации k^0 (рис. 91, *г*), при $k' \gg k^0$ и $k'' \gg k^0$ можно для обоснования величины $L_{нд}$ воспользоваться решениями задач перетекания в слоистых системах [36, 37] и получить выражение

$$L_{нд} = \frac{T''}{2T' b_0} + \frac{T}{T'} L_{нд} \quad b_0 = \sqrt{\frac{k_0 T}{m_0 T' T''}}, \quad T = T' + T'', \qquad (V.1.14)$$

причем величина $L_{нд}$ определяется только по верхнему слою, считая раздельный слой непроницаемым. Такой подход к оценке несовершенства дренажа в двухпластовой системе может быть использован, разумеется, только при условии, что в основной своей

части поток в обоих пластах является единым; для этого необходимо, чтобы расстояния от дрены до ближайшей границы были бы не меньше величины $2{,}5/b_0$, в противном случае поток в каждом из пластов следует рассматривать в отдельности.

Аналогичным образом можно производить учет гидродинамического несовершенства небольших (например, оросительных или осушительных) каналов. Однако при фильтрации из канала и глубоком залегании грунтовых вод специального анализа требует характер влияния положения кривой депрессии на формирование потока вблизи канала [36].

При работе комбинированного дренажа, представляющего собой комбинацию горизонтальной дрены с вертикальными разгрузочными скважинами (см. рис. 89, *в*), в придренной зоне образуется сложный пространственный поток, деформации которого происходят как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Однако локальность зоны резкой деформации потока вблизи комбинированного дренажа предопределяет возможность применения для оценки его гидродинамического несовершенства метода фильтрационных сопротивлений.

Обычно комбинированный дренаж применяется в тех случаях, когда горизонтальная дрена располагается в слабопроницаемых отложениях и потому оказывается недостаточно эффективной. В этих случаях структура потока дает основание при выводе зависимости для расчетной длины $L_{нд}$, характеризующей сопротивление на несовершенство комбинированного дренажа, считать справедливым принцип независимости сопротивлений горизонтальной дрены и скважин, т. е. принимать, что их сопротивления остаются такими же, как если бы дрены и скважины работали независимо друг от друга. Исходя из этого принципа, будем считать, что на линии дренажа устанавливается уровень $H_л$, который оказывается связанным с уровнем в дренаже $H_д$ зависимостью (V.1.10).

С уровнем в скважинах $H_с$ уровень $H_л$ связывается зависимостью (V.1.6), которую можно представить в виде

$$H_л - H_с = \frac{q_с}{T} L_{кс}, \quad L_{кс} = \sigma f_{кс}, \tag{V.1.15}$$

где $q_с$ — погонный приток к линии дренажа.

Для общего притока к дренажу $q_{кд}$, исходя из метода фильтрационных сопротивлений, можно записать выражение

$$q_{кд} = q_д + q_с = T \frac{H_л - H_{кд}}{L_{кд}}, \tag{V.1.16}$$

где $H_{кд}$ — расчетный уровень комбинированного дренажа.

Деля далее уравнение (V.1.10) на $L_{нд}$, а уравнение (V.1.15) на $L_{кс}$ и складывая эти уравнения, получим

$$H_л\left(\frac{1}{L_{нд}}+\frac{1}{L_{кс}}\right)-\frac{H_д}{L_{нд}}-\frac{H_с}{L_{кс}}=\frac{q_д+q_с}{T}, \qquad (V.1.17)$$

а сопоставляя (V.1.16) и (V.1.17), найдем связь между напорами в дренаже

$$H_л\left(\frac{1}{L_{нд}}+\frac{1}{L_{кс}}\right)-\frac{H_д}{L_{нд}}-\frac{H_с}{L_{кс}}=-\frac{H_л-H_{кд}}{L_{кд}}. \qquad (V.1.18)$$

Приравнивая в (V.1.18) коэффициенты при $H_л$, получим

$$\frac{1}{L_{кд}}=\frac{1}{L_{нд}}+\frac{1}{L_{кс}} \text{ или } L_{кд}=\frac{L_{нд}L_{кс}}{L_{нд}+L_{кс}}, \qquad (V.1.19)$$

а приравнивая оставшиеся члены уравнения (V.1.18), получим

$$H_{кд}=\frac{L_{кд}}{L_{нд}}H_д+\frac{L_{кд}}{L_{кс}}H_с=\frac{L_{кс}H_д+L_{нд}H_с}{L_{нд}+L_{кс}}. \qquad (V.1.20)$$

Естественно, что если $H_д=H_с$, то $H_{кд}=H_с=H_д$.

Приведенные зависимости для определения сопротивления комбинированного дренажа были подтверждены данными опытов на пространственной электролитической модели ЭГДА [37].

§ 3. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СКВАЖИН

Непосредственная реализация скважин на сплошных моделях производится электродами, одна из конструкций которых приведена на рис. 92. В связи с малым размером скважины обычно не удается задать геометрически подобного ей электрода, это осложнение устраняется заданием электрода большего диаметра $d_э$, соединяемого с дополнительным сопротивлением $R_с$, величина которого определяется, исходя из радиального характера потока вблизи скважины, по формуле

$$R_с=\left(0{,}366\lg\frac{d_э}{d_с^м}-\Delta f_к\right)\rho_м, \qquad (V.1.21)$$

где $\rho_м$ — удельное сопротивление модели; $d_с^м$ — диаметр скважины в масштабе модели; $\Delta f_к$ — безразмерное сопротивление контакта электрода с моделью (по опытным данным $\Delta f_к=0{,}02$ при $d_э=10$ мм; $\Delta f_к=0{,}04$ при $d_э=5$ мм и $\Delta f_к=0{,}07$ при $d_э=3$ мм).

Если задан дебит скважины $Q_с$, то на электроде задается соответствующая этому дебиту сила тока $I_с=Q_с/a_Q$, в этом случае введение дополнительного сопротивления $R_с$ не обязательно.

Задание скважин на плановых сеточных моделях осложняется тем, что поток у скважин резко концентрируется и для его непосредственного моделирования требуется весьма подробная разбивка потока на блоки. Этого осложнения можно избежать, если

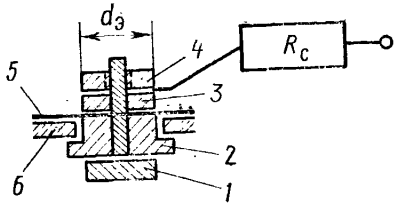


Рис. 92. Скважинный электрод на сплошной (бумажной) модели:
1 — болт; *2* и *3* — нижняя и верхняя шайбы; *4* — гайка; *5* — лист модели; *6* — картонная подкладка

учесть, что вблизи скважины поток имеет радиальный характер. Следуя выводу, приведенному в работе [10], поместим скважину в центр квадратного блока и будем считать, что до центров соседних блоков поток имеет радиальный характер (рис. 93, *а*). Тогда приток к скважине Q определится формулой Дюпюи для радиального потока, причем из (IV.1.2а) следует, что в данном случае

$$H - H_с = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{\Delta x}{r_с}, \quad \text{(V.1.22)}$$

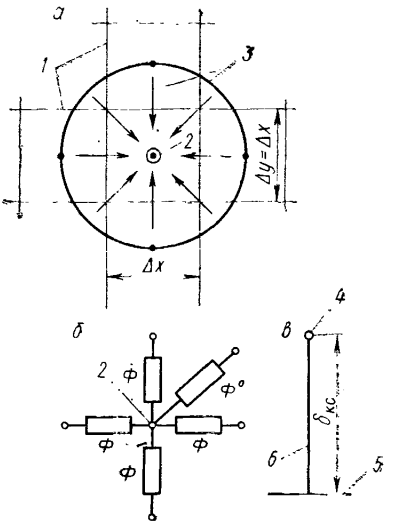


Рис. 93. Моделирование скважин на сеточной модели:
а — разбивка на блоки; *б* — эквивалентная сетка фильтрационных сопротивлений; *в* — дополнительный лист на бумажной модели (*1* — границы блоков, *2* — узловая точка со скважиной, *3* — круговая эквипотенциаль вблизи скважины, *4* — шина с потенциалом, соответствующим уровню в скважине, *5* — лист модели, *6* — дополнительный лист)

где H — напор в соседних блоках. Если же пренебречь влиянием радиальности потока, то при фильтрационном сопротивлении квадратного блока, равном $1/T$, потери напора между блоками будут

$$H - H_б = \frac{Q}{4T}, \quad \text{(V.1.23)}$$

где $H_б$ — средний напор в блоке со скважиной, который устанавливается в узловой точке сеточной модели. Вычитая (V.1.23) из выражения (V.1.2), получим дополнительно потери напора, обусловливаемые радиальным характером потока вблизи скважины:

$$H_б - H_с = \frac{Q}{T}\left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Delta x}{r_с} - 0{,}25\right). \quad \text{(V.1.24)}$$

Наличие разницы напоров $H_б$—$H_с$ соответствует введению в блок со скважиной дополнительного фильтрационного сопротивления Φ^0, определяемого по формуле

$$\Phi^0 = \frac{H_б - H_с}{Q} = \frac{1}{T}\left(0{,}366 \lg \frac{\Delta x}{r_с} - 0{,}25\right). \qquad (V.1.25)$$

Таким образом, в блоках, содержащих скважину, следует ввести дополнительное сопротивление, соответствующее фильтрационному сопротивлению Φ^0, определяемому по формуле (V.1.25). Такая методика учета радиальности потока в блоках со скважинами может быть распространена и на более общий случай многоугольной сетки [16].

При моделировании скважин с заданным дебитом введение в модель сопротивлений Φ^0 не обязательно; в этом случае, получая по данным моделирования величину напора в блоке $H_б$, можно далее определить напор в скважине $H_с$, поскольку согласно (V.1.25)

$$H_с = H_б - Q\Phi^0. \qquad (V.1.26)$$

Этот же прием может использоваться при моделировании контурных систем скважин, когда в пределах одного блока может располагаться несколько скважин; только в этом случае напор в блоке $H_б$ соответствует среднему напору на линии скважин $H_л$. При определении выражения для дополнительного сопротивления Φ^0 будем исходить из того, что здесь

$$\Phi^0 = \frac{H_л - H_с}{n_с Q}, \qquad (V.1.27)$$

где $n_с$ — число скважин в блоке, работающих с дебитом Q. Выражая далее разницу напоров $H_л$—$H_с$ из (V.1.6), получим формулу

$$\Phi^0 = \frac{f_{кс}}{n_с T} = \frac{L_{кс}}{N_с T}, \quad L_{кс} = \sigma f_{кс}, \qquad (V.1.28)$$

где $N_с$ — длина контура скважин в пределах блока, а $L_{кс}$ — эквивалентная длина зоны резкой деформации контура скважин.

Из выражения (V.1.28) следует, что сопротивление Φ^0 формально соответствует сопротивлению планового потока шириной $N_с$ и длиной $L_{кс}$, что дает основание учитывать это сопротивление на сплошных моделях подклеиванием полосы электропроводной бумаги высотой $\delta_{кс}$ (рис. 93, *в*), пропорциональной эквивалентной длине $L_{кс}$, причем

$$\delta_{кс} = \frac{\rho_м}{\rho_п} \cdot \frac{L_{кс}}{\alpha_l}, \qquad (V.1.29)$$

где $\rho_п$ — удельное сопротивление полосы, а α_l — линейный (геометрический) масштаб модели.

При моделировании площадных (сеточных) систем скважин с заданным дебитом на сеточных моделях в скважинных блоках задаются расходы, соответствующие суммарному дебиту скважин на занимаемом блоком участке, а получаемый на модели потенциал соответствует среднему напору в блоке H^0. Переход к напору в скважине $H_с$ осуществляется при этом по формуле (V.1.8). При моделировании же систем скважин с заданным напором $H_с$ на сеточных моделях в скважинные блоки добавляются дополнительные сопротивления Φ^0. Их величина находится по общей формуле (V.1.27), в которой $H_л - H_с$ заменяется величиной $H^0 - H_с$, задаваемой согласно (V.1.8), так что в этом случае

$$\Phi^0 = \frac{1}{n_с T} f_{пс}. \qquad \text{(V.1.30)}$$

При большом количестве моделируемых скважин на сплошных моделях ЭГДА целесообразно объединять площадные группы скважин, моделируя их одним электродом радиусом $r^0_э$, к которому подводится потенциал $U_с$, соответствующий напору в скважинах $H_с$. Связь между средним напором в площадной группе H^0 и напором $H_с$ определится выражением (V.1.8), в котором $Q = n_с Q_с$ ($Q_с$ — дебит скважины), σ заменяется на размер площадки скважин на модели $\sigma^0_м$, а $d_с = 2r^0_э$, так что

$$H^0 - H_с = \frac{n_с Q_с}{T} f^м_{пс},\ f^м_{пс} = 0{,}366 \lg \frac{\sigma^0_м}{2r^0_э} - 0{,}1. \qquad \text{(V.1.31)}$$

Вместе с тем соотношение (V.1.8) должно выполняться и для каждой скважины, где $Q = Q_с$, откуда следует выражение для определения расчетного радиуса электрода

$$n_с \left(0{,}366 \lg \frac{\sigma^0_м}{2r^0_э} - 0{,}1 \right) = 0{,}366 \lg \frac{\sigma}{d_с} - 0{,}1 \qquad \text{(V.1. 32}$$

или

$$\lg \frac{\sigma^0_м}{2r^0_э} = 0{,}27 \left(1 - \frac{1}{n_с} \right) + \frac{1}{n_с} \lg \frac{\sigma}{d_с}. \qquad \text{(V.1.33)}$$

Если получаемое из (V.1.33) значение $r^0_э$ оказывается слишком малым для непосредственного моделирования, то можно поставить электрод большего радиуса $r_э$, скомпенсировав их несоответствие подключением к электроду дополнительного сопротивления $R_с$, определяемого согласно (V.1.21).

Изложенные выше расчетные зависимости для скважин в плановых потоках получены для схемы потока с постоянной проводимостью, однако их легко трансформировать применительно к другим схемам потенциальных течений, используя общие правила

перехода (см. § 1 главы 1 раздела II). В частности, для схемы Дюпюи в соответствии с (II.1.5) напоры заменяются на половины квадрата глубины потока в соответствующих сечениях, а при определении сопротивлений проводимость пласта T заменяется на его коэффициент фильтрации.

Аналогичным путем может осуществляться моделирование горизонтального дренажа, поскольку уровень в дрене связывается со средним напором на линии дренажа зависимостью (V.1.10) аналогичной зависимости (V.1.27), так что, обозначая через $Q_д$ приток к дрене, имеющей в пределах блока длину $N_д$, можно записать

$$\Phi^0 = \frac{H_л - H_д}{Q_д} = \frac{H_л - H_и}{q_д N_д} = \frac{1}{T} \cdot \frac{L_{нд}}{N_д}. \qquad (V.1.34)$$

Для реализации сопротивления Φ^0 в электрическую сетку вводятся дополнительные сопротивления $R^0 = \alpha_R \Phi^0$ (где α_R — масштаб электрических сопротивлений; см. § 3 главы 6 раздела I), на концах которых задаются потенциалы, соответствующие напорам в дренах.

На сплошных моделях реализация сопротивления на несовершенство дренажа осуществляется подклеиванием дополнительного листа длиной $\delta_{нд}$, величина которого определяется аналогично величине $\delta_{кс}$:

$$\delta_{нд} = \frac{\rho_м}{\rho_п} \cdot \frac{L_{нд}}{\alpha_l}. \qquad (V.1.35)$$

Введение дополнительных сопротивлений на бумажных моделях ЭГДА по изложенной выше методике может вызвать технические осложнения при близком расположении дрен к границам модели (меньшим 2—3 см). В этом случае удобнее использовать способ приближенного задания средних уровней на линии каналов и дрен, сущность которого покажем на примере берегового дренажа, расположенного вдоль области питания (реки, водохранилища) на расстоянии L (рис. 94). В этом случае приток к дренажу $q_д$ складывается из расхода, притекающего к дрене со стороны водоема $q_в$, и расхода $q_б$, притекающего со стороны берега. Имея в виду, что в рассматриваемом случае обычно $q_в \gg q_б$, можно в первом приближении считать $q_д = q_в$, так что из общего выражения (V.1.10) получим

$$q_в = T \frac{H_л - H_д}{L_{нд}}. \qquad (V.1.36)$$

Поскольку, рассматривая поток между дреной и водоемом, имеем

$$q_в = T \frac{H_0 - H_л}{L}, \qquad (V.1.36а)$$

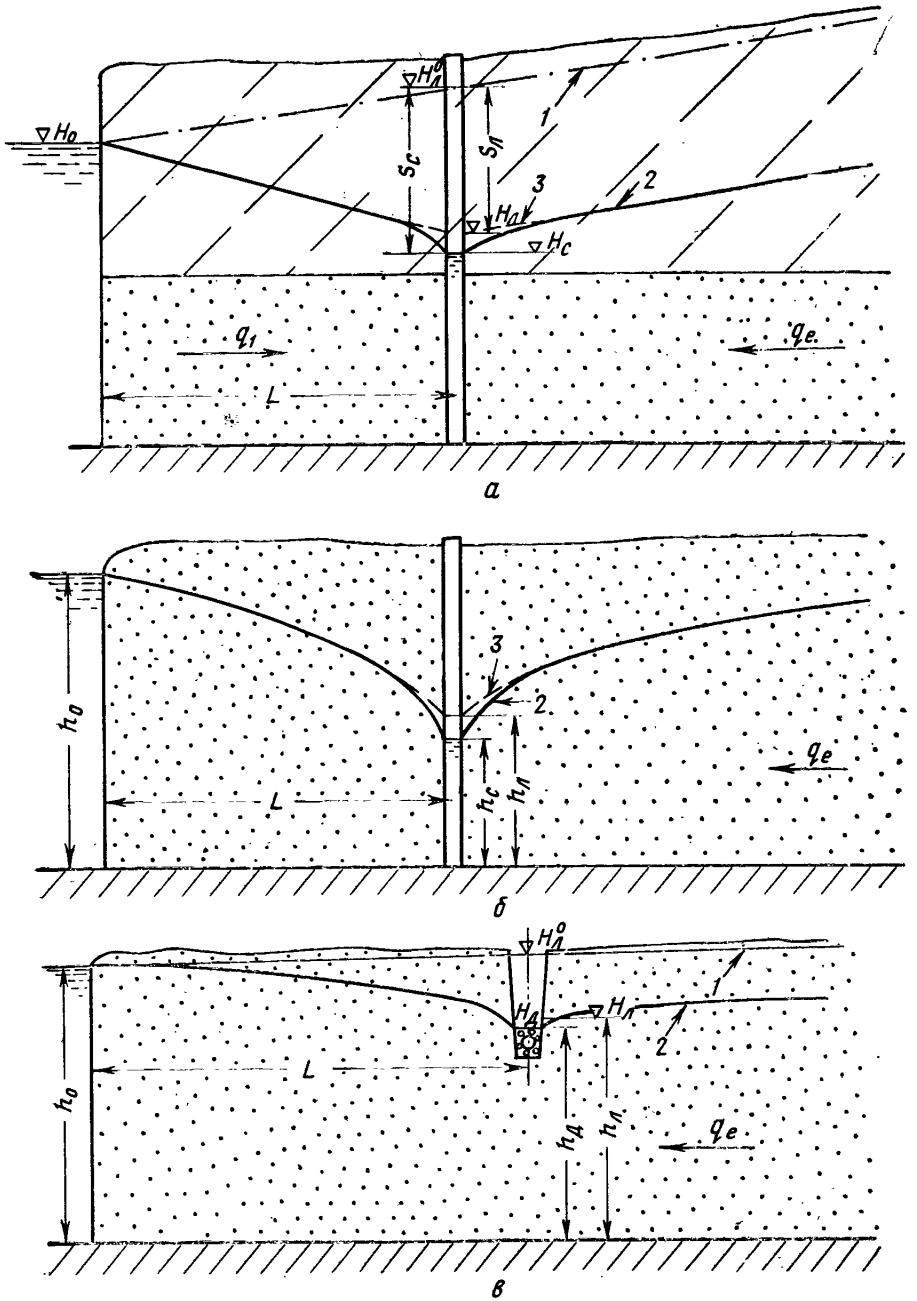


Рис. 94. Дренажный ряд вдоль реки:
а и *б* — линейный ряд скважин в напорном и однородном безнапорном потоках; *в* — горизонтальная дрена (*1* — начальная кривая депрессии до работы дренажа, *2* — кривая депрессии при работе дренажа, *3* — спрямленная кривая депрессии вблизи линии скважины)

то, исключая из уравнений (V.1.36) и (V.1.36а) величину $q_в$, получим формулу для определения среднего напора на линии дренажа

$$H_л = H_д + \frac{H_0 - H_д}{L + L_{нд}} \cdot L_{нд}. \qquad (V.1.37)$$

Рассчитав по формуле (V.1.37) значения $H_л$ на дрене, следует наложить вдоль линии дренажа шину с переменным потенциалом, соответствующим значениям $H_л$.

При моделировании установившейся фильтрации этот расчет может быть уточнен, если по данным моделирования, проведенного в первом приближении, определить удельный расход с береговой стороны $q_б$ и найти $H_л$ по формуле (V.1.10) во втором приближении при

$$q_д = q_б + T\frac{H_0 - H_л}{L}. \qquad (V.1.38)$$

Более подробно вопросы моделирования дренажа рассмотрены в работах [12, 16].

Глава 2
ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫЕ РАСЧЕТЫ ДРЕНАЖА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

§ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТОВ ДРЕНАЖА ПОДЗЕМНЫХ ВОД

По направленности можно выделить следующие виды дренажа.

Прибрежный дренаж устраивается вдоль рек и водохранилищ для защиты прилегающих территорий от подтопления; основная форма прибрежного дренажа — линейный ряд скважин или дрена, располагаемые вдоль уреза реки или водохранилища [1].

Карьерный дренаж устраивается вдоль бортов котлованов и карьеров для перехвата поступающего к ним фильтрационного потока [8, 14].

Шахтный дренаж устраивается для защиты от притока подземных вод в шахтные системы; контуры такого дренажа следуют расположению шахтных стволов, штолен и штреков; характерной формой шахтного дренажа являются сбросные скважины, устраиваемые в сводовой части штреков и штолен [8, 14].

Промышленный дренаж устраивается для устранения притока грунтовых вод в подземные части промышленных и гражданских зданий; основные его формы — кольцевой дренаж, располагающийся вокруг защищаемого объекта, и пластовый дренаж, представляющий собой сплошную дренажную подушку в основании

здания; в большинстве случаев промышленный дренаж не подвергается гидрогеологическим расчетам и проектируется на основании опыта его эксплуатации в аналогичных условиях [1, 32].

Мелиоративный дренаж устраивается для регулирования водно-солевого режима грунтовых вод на территориях сельскохозяйственных мелиораций. В основном мелиоративный дренаж рассчитывается на отвод излишних грунтовых вод, формирующихся за счет фильтрационных потерь на орошаемых территориях, и на осушение мелиорируемых территорий; в связи с этим основными формами такого дренажа являются линейные системы параллельных горизонтальных дрен (линейный систематический дренаж), а также равномерно распределенные по мелиорируемой территории (по сетке) вертикальные водозаборные скважины (площадной систематический дренаж), кроме того, для подземных вод, поступающих на мелиорируемую территорию, устраивается защитный (перехватывающий) дренаж в форме рядов вертикальных скважин, располагаемых поперек направления потока [20, 37].

Из анализа различных форм дренажа следует, что с точки зрения методики расчетов независимо от направленности дренажа выделяются два основных типа дренажа — защитный, приурочиваемый к контурам дренируемой (защищаемой) территории и рассчитываемый главным образом на перехват внешнего потока и на осушение всей дренируемой территории в целом, и систематический (линейный и площадной), устраиваемый внутри дренируемой территории и рассчитываемый на перехват внутреннего (площадного) питания подземных вод и на осушение междренных массивов.

Построение расчетных зависимостей для рядов скважин и дрен основывается на использовании метода фильтрационных сопротивлений, позволяющего заменить ряд скважин и дрен сплошной траншеей с напором $H_л$, равным среднему напору на линии в сечении этого ряда. Согласно методу фильтрационных сопротивлений (см. главу 1 этого раздела) величина $H_л$ связывается с уровнем в дренаже $H_д$ общей зависимостью

$$H_л = H_д + \frac{q_д}{T_д} L_д, \qquad \text{(V.2.1)}$$

где $q_д$ — удельный двусторонний приток к дренажу (на единицу длины); $T_д$ — средняя проводимость потока в зоне дренажа; $L_д$ — эквивалентная длина потока, характеризующая гидродинамическое несовершенство дренажа; для ряда скважин $L_д = L_{кс} = \sigma f_{кс}$, где $f_{кс}$ определяется по формуле (V.1.6), а $H_д$ соответствует напору в скважине $H_с$; для дрен $L_д = L_{нд}$, причем величина $L_{нд}$ определяется по рекомендациям § 2 главы 1 в зависимости от строения потока в разрезе и расположения дрены.

Для однородного по вертикали безнапорного потока зависимость (V.2.1) принимает вид

$$h_л^2 = h_д^2 + 2\frac{q_д}{k} \cdot L_д, \qquad \text{(V.2.1а)}$$

а для горизонтально-слоистого пласта выражение (V.2.1) можно записать относительно функций Гиринского:

$$G_л = G_д + q_д L_д, \qquad \text{(V.2.1б)}$$

где $G_л$ и $G_д$ определяются по общей формуле (II.1.12) соответственно при $h=h_л$ и $h=h_д$.

При стационарном режиме дренирования рекомендуется следующая этапность составления зависимостей для фильтрационных расчетов контурных систем скважин и дрен: 1) линии скважин и дрен заменяются эквивалентными траншеями с уровнями на них $H_л$ и удельным расходом $q_д$, причем для скважин $q_д=Q/\sigma$; 2) записываются выражения для расходов потоков в зонах между линиями скважин и границами потока, а также между отдельными рядами скважин и дрен, рассматривая уже их как траншеи; 3) составляются уравнения баланса потока на линиях дренажа; 4) совместное решение балансовых уравнений с уравнениями (V.2.1), связывающими средние уровни на линии дренажа с уровнями в скважинах или дренах, дает искомое решение задачи. Дальнейшие преобразования этой системы зависят от того, какие величины являются заданными, а какие — искомыми. Если, например, заданы дебит и расстановка скважин и, следовательно, известен удельный приток $q_д$, то по балансовым уравнениям можно найти уровни на линии скважин $H_л$, а затем по уравнениям (V.2.1) связи уровней на линии и в скважинах определить уровень в скважинах $H_с$. Если же заданы уровни в скважинах или дренах, то, решая балансовые уравнения с уравнениями (V.2.1), прежде всего следует исключить из них величину дебита скважин Q или удельного притока к дренам $q_д$.

Рекомендуемый порядок вывода расчетных зависимостей поясняется ниже на примере ряда типовых задач. Во всех случаях в качестве основной рассматривается схема потока с постоянной (неизменной) проводимостью, имея в виду, что переход к аналогичным зависимостям для схем однородного и горизонтально-слоистого безнапорного потока может быть осуществлен по общим правилам, приведенным в главе 1 раздела II. В частности, переходя к однородному безнапорному потоку на горизонтальном водоупоре, следует заменить понижение уровня $S=H_0-H$ на величину 0,5 $(h_0^2-h^2)$, где h_0 и h — глубины потока, соответствующие начальному и расчетному уровням (напорам H_0 и H). Кроме того, будем рассматривать условия, когда длина дренажных линий заметно превышает длину фильтрационного потока, так что дренажные ряды можно считать бесконечно длинными, а вся область фильтрации может быть представлена бесконечной полосой, заключенной между внешними контурами потока (для защитного дренажа) или между дренами (для линейного систематического дренажа).

§ 2. РАСЧЕТЫ ЗАЩИТНОГО ДРЕНАЖА

Расчетные зависимости для защитного дренажа будут составляться в условиях стационарной фильтрации.

2.1. Дренажный ряд, расположенный вдоль реки (рис. 94)

При решении этой задачи будем считать, что до устройства дренажа имел место естественный поток с удельным расходом q_e, образуемый за счет инфильтрационного питания, размер которого не изменяется и после устройства ряда.

Следуя рекомендуемому порядку составления расчетных зависимостей по методу сопротивлений, заменим линию скважин траншеей с уровнем $H_л$. Эквивалентная траншея разделяет полосу на две зоны: первую — между контурами реки и дренажа и вторую — между дренажем и верховым контуром (с заданным расходом потока q_e), причем в каждой зоне поток будет иметь линейный в плане характер. Удельный приток q_1 к эквивалентной траншее в зоне 1 со стороны контура питания будет

$$q_1 = T\frac{H_0 - H_л}{L}, \qquad (V.2.2)$$

а в зоне 2 от верховой границы по условию притекает расход q_e, размер которого может быть определен в естественных условиях.

Уравнение баланса на линии дренажа имеет вид

$$q_д = q_1 + q_e = T\frac{H_0 - H_л}{L} + q_e, \qquad (V.2.3)$$

причем для ряда скважин $q_д = Q/\sigma$. Уравнения (V.2.3) и (V.2.1) составляют замкнутую систему, позволяющую определить основные элементы фильтрационного потока. Если из этой системы исключить уровень на линии $H_л$, то получим уравнение, связывающее удельный приток к дренажу $q_д$ с напором в дрене $H_д$ или дебит скважин Q с напором в скважине $H_с$:

$$q_д = \frac{T(H_0 + H_д) + q_e L}{L + L_{нд}}, \quad Q = \frac{T(H_0 - H_с) + q_e L}{L + L_{кс}}. \qquad (V.2.4)$$

При решении аналогичной задачи для однородного безнапорного потока уравнение (V.2.3) принимает вид

$$q_д = k\frac{h_2^0 - h_л^0}{2L} + q_e. \qquad (V.2.5)$$

Аналогичные преобразования в уравнениях (V.2.4) дают следующие выражения для безнапорного потока:

$$q_д = \frac{k(h_0^2 - h_д^2) + 2q_e L}{2(L + L_{нд})}, \quad Q = \frac{k(h_0^2 - h_д^2) + 2q_e L}{2(L + L_{кс})}. \qquad (V.2.6)$$

Понижение уровня воды, которое будет иметь место за линией ряда для основной расчетной схемы ($T=\text{const}$), будет равным среднему понижению на линии ряда $H_л^0 - H_л$ (где $H_л^0$ — естественный уровень воды на линии скважин).

Выражение для понижения между скважинами S_σ найдем, используя зависимость (V.1.7):

$$S_\sigma = \frac{Q}{T}\left(\frac{L}{\sigma} - 0{,}11\right). \qquad \text{(V.2.7)}$$

Формулы (V.2.4), (V.2.6), (V.2.7) впервые были получены Ф. Форхгеймером [34], который обратил также внимание на формальную связь между зависимостями для притока к ряду скважин и траншее, но не сделал из этого методических выводов.

Упражнение. Получить расчетные зависимости для дренажного ряда между параллельными контурами с заданными напорами (рис. 95).

Уравнение баланса потока на линии дренажа имеет вид

$$q_д = q_1 + q_2 = T\left(\frac{H_1 - H_л}{L_1} + \frac{H_2 - H_л}{L_2}\right), \qquad \text{(V.2.8)}$$

а учитывая, что

$$H_1\frac{L_2}{L} + H_2\frac{L_1}{L} = H_л^0, \qquad \text{(V.2.9)}$$

где $H_л^0$ — исходный уровень на линии дренажа, получим

$$q_д = T\,(H_л^0 - H_л)\frac{L}{L_1 L_2}, \qquad \text{(V.2.10)}$$

причем для ряда скважин $q_д = Q/\sigma$.

Уравнение (V.2.10) совместно с уравнением (V.2.1) составляет замкнутую систему, пути решения которой зависят от конкретной постановки задачи.

При заданных уровнях в скважинах или дрене, исключая из этой системы величину $H_л$, получим уравнение для определения удельного притока к дренам или дебита скважин Q

$$q_д = T\frac{H_л^0 - H_д}{\frac{L_1 L_2}{L} + L_{нд}}, \quad Q = T\frac{H_л^0 - H_с}{\frac{L_1 L_2}{\sigma L} + f_{кс}}. \qquad \text{(V.2.11)}$$

Для ряда скважин такое же решение получено методом источников-стоков [35] и методом конформных отображений [33].

Кривые депрессии в каждой зоне могут быть построены по уравнениям прямой — от $H_л$ на линии дренажа до H_1 или H_2 на внешних контурах.

2.2. Дренажный ряд скважин вдоль откосов совершенного котлована (рис. 96)

овершенным называется котлован или карьер, который прорезает один или несколько водоносных пластов на всю их мощность (до водоупора). Дренаж совершенного котлована производится обычно рядами дренажных скважин, располагаемых по контуру котлована.

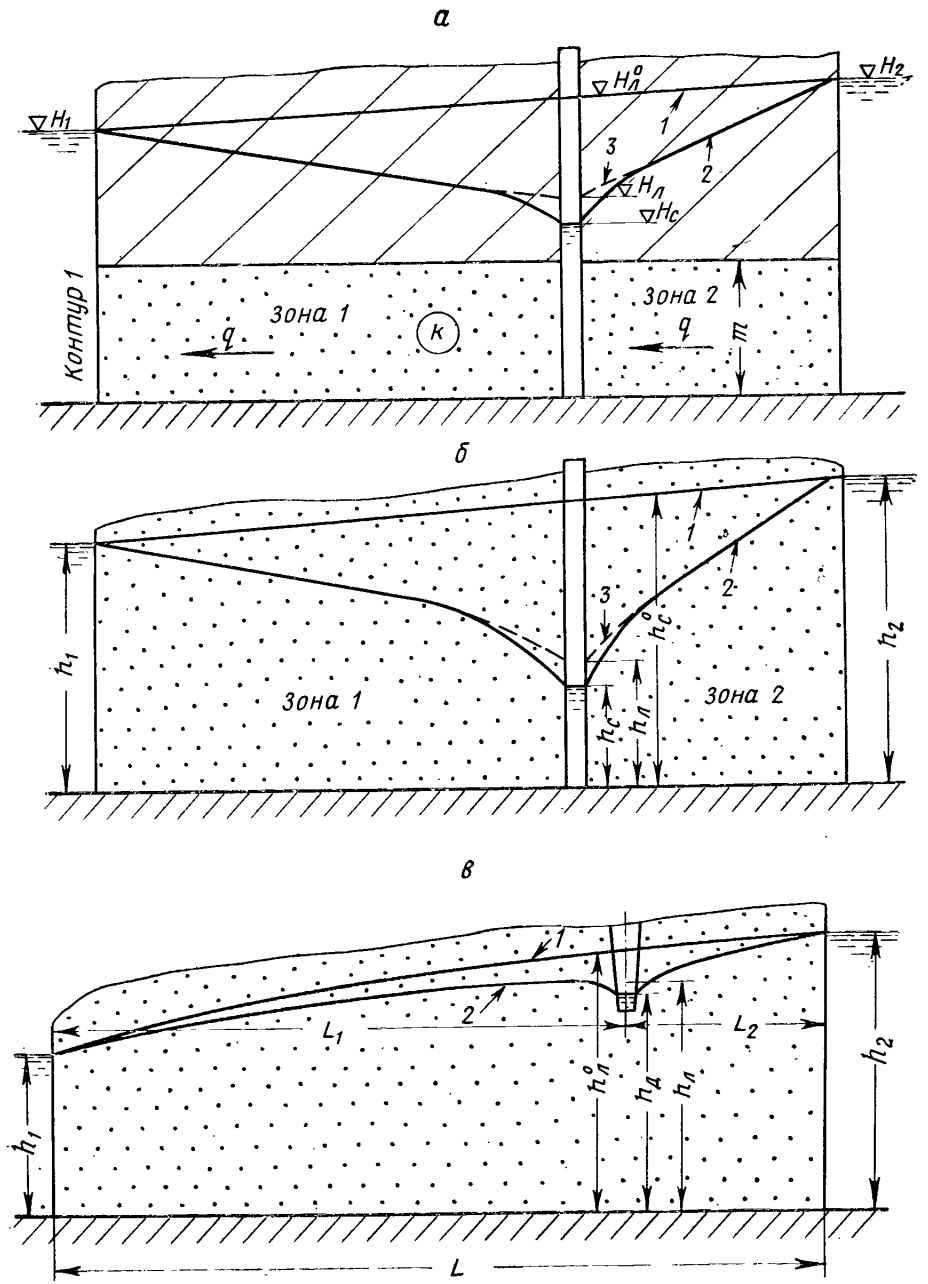


Рис. 95. Дренажный ряд между областями питания или стока:
а и *б* — линейный ряд скважин в напорном и однородном безнапорном потоках; *в* — горизонтальная дрена (*1* — начальная кривая депрессии до работы дренажа, *2* — кривая депрессии при работе дренажа, *3* — спрямленная кривая депрессии вблизи линии скважин)

Особенностью работы таких дренажных рядов являются наличие проскока грунтовых вод по кровле водоупорного слоя и выход их на откос вблизи его подошвы (точка A). В этом случае полный перехват грунтового потока при горизонтальном водоупоре принципиально невозможен, и задача дренажа заключается в обеспечении условий, при которых на откос котлована выходил бы фильтрационный расход, допустимый с точки зрения устойчивости откоса.

Рассмотрим наиболее простую схему дренажа совершенного котлована (см. рис. 96), когда котлован вскрывает безнапорный

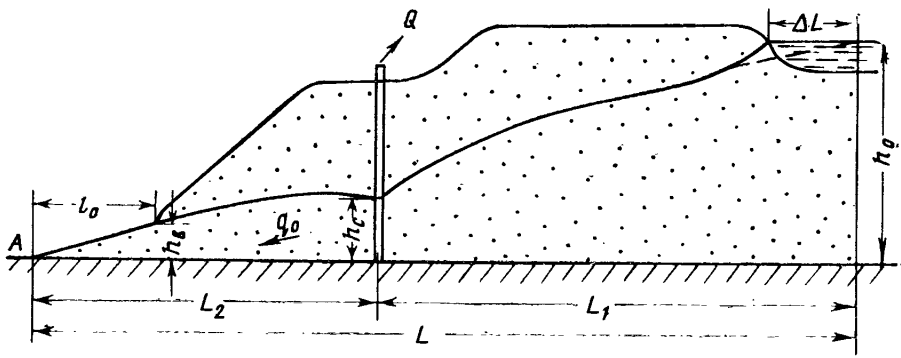


Рис. 96. Дренажный ряд скважин вблизи откоса совершенного котлована

горизонт, который может считаться однородным по вертикали и в плане, а дренаж осуществляется рядом скважин, располагаемых параллельно откосу, причем стационарный приток к котловану идет со стороны области питания (реки), располагаемой параллельно контуру котлована. Такая задача оказывается эквивалентной рассмотренной выше задаче расчета дренажного ряда между областями питания и стока, в которой на области стока задается нулевая глубина потока, что обосновывается анализом потока вблизи участка высачивания [40]. Поскольку в данном случае мощность и проводимость потока меняются очень резко, то используем расчетную схему Дюпюи. Расчетные зависимости получим из решений для предыдущей задачи заменой T на k, H_2 на $0{,}5\,h_0^2$, H_c на $0{,}5\,h_c^2$ и полагая $H_1=0$; соответственно величина $H_л^0$ согласно (V.2.9) заменится величиной $0{,}5\,\frac{L_2}{L}\,h_0^2$, и формула (V.2.11) для дебита дренажных скважин примет вид

$$Q = 0{,}5\,k\,\frac{h_0^2\,\frac{L_2}{L} - h_c^2}{\frac{L_1 L_2}{\sigma L} + f_{кс}}. \qquad \text{(V.2.12)}$$

В практических расчетах обычно приходится задаваться производительностью насосов, которые в оптимальном варианте должны равняться дебиту скважины Q. Тогда формулу (V.2.12) удобнее разрешить относительно σ и представить в виде

$$\sigma = 2\frac{Q}{k} \cdot \frac{L_1}{h_0^2 - \frac{L}{L_2} h_c^2 - 2\frac{Q}{k} \cdot \frac{L}{L_2} f_{кс}}. \qquad (V.2.13)$$

Величина σ находится подбором при заданном значении Q, причем для определения $f_{кс}$ можно ограничиться одним приближением, определяя величину σ по формуле

$$\sigma = 2\frac{Q}{\sigma} \cdot \frac{L_1}{h_0^2 - \frac{L}{L_2} h_c^2}. \qquad (V.2.13а)$$

Выражение для удельного расхода q_0 потока, выходящего на откос, получим из уравнения Дюпюи:

$$q_0 = k\frac{h_л^2}{2L_1}, \qquad (V.2.14)$$

причем величина $h_л$ связывается с глубиной воды в скважине уравнением (V.2.1а) при

$$q_д = \frac{Q}{\sigma},\ h_д = h_c \text{ и } L_д = L_{кс} = \sigma f_{кс},$$

так что уравнение (V.2.14) можно преобразовать к виду

$$q_0 = k\frac{h_c^2 + 2\frac{Q}{k\sigma} L_{кс}}{2L_1} = k\frac{h_c^2}{2L_1} + \frac{Q}{L_1} f_{кс}. \qquad (V.2.15)$$

Выбор величины удельного расхода q_0 потока, выходящего на откос, следует производить, исходя из условий фильтрационной устойчивости откосов, причем методика оценки устойчивости откосов зависит от их строения и состава слагающих пород.

Практические рекомендации по расчетам оплывания откосов для характерных условий, когда фильтрующий откос сложен несцементированными песками и не защищен фильтрующей пригрузкой, приведены в работах [39, 40].

§ 3. РАСЧЕТЫ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ДРЕНАЖА

Рассмотрим методику расчетов систематического дренажа применительно к условиям сельскохозяйственных мелиораций, где такой дренаж рассматривается в двух основных разновидностях: линейный, представляемый параллельными линиями дрен, и пло-

щадной, представляемый равномерной сеткой скважин. Типовым расчетным условием является поддержание определенного уровня воды между дренами при задании по всей дренируемой территории равномерной площадной инфильтрации интенсивностью w. В такой постановке дадим обоснование расчетных зависимостей для фильтрационных расчетов систематического дренажа при ста-

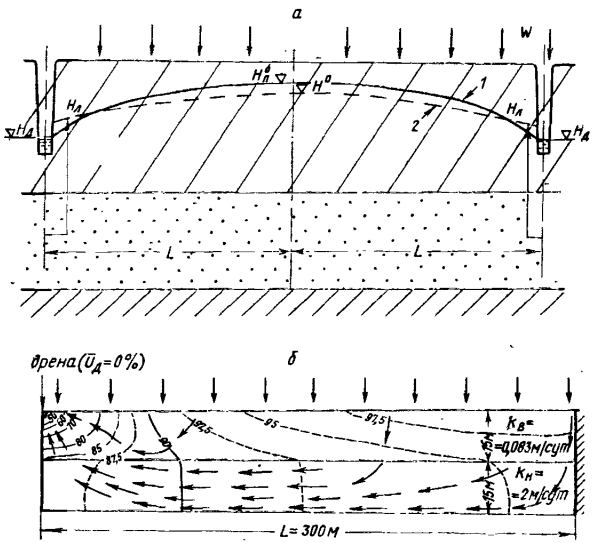


Рис. 97. Горизонтальный систематический дренаж:
а — гидродинамическая схема дренажа (*1* — свободная поверхность в верхнем слое, *2* — пьезометрическая кривая в нижнем слое); *б* — сетка движения при работе горизонтального дренажа в двухслойном пласте при $\Delta H_{макс}=H_п^0-H_д=2$ м, смоченном периметре дрены $P_д=2$ м и $w=4{,}82\times\times10^{-4}$ м/сут

ционарном инфильтрационном питании в однопластовой системе однородного или двухслойного строения (см. рис. 91, *а*, *в*).

Для линейного дренажа поток в плане можно считать линейным, направленным нормально к дренам.

Поскольку в реальных условиях расстояние между дренами обычно существенно превышает мощность водоносного пласта, то фильтрационный поток здесь в основном может считаться планово-плоским (рис. 97); при этом необходимо только учесть резкую деформацию потока в зоне гидродинамического несовершенства дренажа, заменяя несовершенную дрену совершенной с напором $H_л$, связанным с притоком к дрене уравнением (V.2.1). Считая проводимость потока постоянной, можно для распределения напо-

ров между дренами воспользоваться уравнением (II.1.25), положив в нем $H_0=H_L=H_л$, т. е.

$$H = H_л + \frac{w x}{2T}(2L - x). \qquad (V.2.16)$$

В частности, напор H^0 посередине между дренами получим из (V.2.16) при $x=L$

$$H^0 = H_л + \frac{w L^2}{2T}. \qquad (V.2.17)$$

Подставляя в (V.2.17) величину $H_л$ из (V.2.1) и имея в виду, что $q_д=wL$, получим формулу для величины «инфильтрационного горба» между дренами

$$\Delta H^0 = H^0 - H_д = \frac{w L}{T}(0{,}5L + L_д), \qquad (V.2.18)$$

где для горизонтального дренажа $L_д=L_{нд}$, а для ряда скважин $L_д=L_{кс}$, причем эти величины определяются по зависимостям, приведенным в § 2 главы 1.

Решая уравнение (V.2.18) относительно L, получим формулу для определения расстояния между дренами при заданном стационарном площадном питании

$$L = \sqrt{\frac{2T\Delta H^0}{w} + 4L_д^2} - 2L_д. \qquad (V.2.19)$$

Величина H^0 представляет собой напор между дренами в основном водоносном слое; при наличии покровных отложений величина напоров в нижнем слое может заметно отличаться от уровней свободной поверхности $H_п^0$ в покровном слое за счет потери напора при вертикальной фильтрации инфильтрационного потока через покровный слой. Поскольку скорость фильтрации здесь равна w, а длина пути фильтрации равна мощности водоносной части покровного слоя $m_п^0$, то согласно закону Дарси

$$H_п^0 - H^0 = \frac{w}{k_п} m_п^0. \qquad (V.2.20)$$

Расчеты мелиоративного горизонтального дренажа по приведенным зависимостям в реальных гидрогеологических условиях показывают [38, 39], что при расположении дрены в покровном слое на эффективность дренажа существенно влияет проницаемость покровного слоя, определяющая сопротивление на несовершенство дренажа.

Для площадного дренажа (рис. 98), учитывая симметрию потока, можно изолированно рассматривать квадратный участок

размером $\sigma \times \sigma$, относящийся к одной скважине, причем для упрощения расчетных зависимостей можно привести этот квадрат к эквивалентному по площади кругу радиусом $r_к = \sigma/\sqrt{\pi} = 0{,}56\sigma$.

Дифференциальное уравнение рассматриваемого радиального стационарного инфильтрационного потока получится как

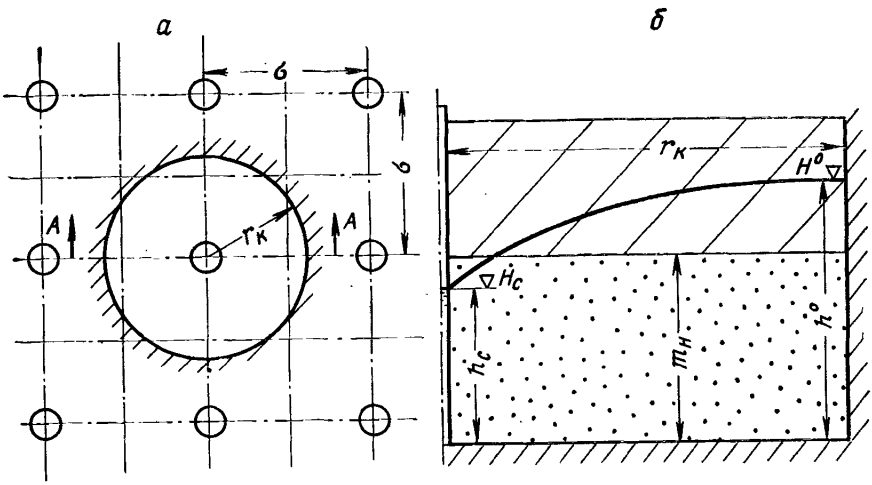


Рис. 98. Площадной систематический вертикальный дренаж:
а — расположение скважин в плане; *б* — разрез от скважины к расчетному непроницаемому контуру

частный случай уравнения (IV.2.5) при $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ и интенсивности площадного питания w, т. е.

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left(r \frac{dH}{dr}\right) + \frac{w}{T} = 0, \qquad \text{(V.2.21)}$$

которое позволяет разделить переменные

$$d\left(r \frac{\partial H}{dr}\right) + \frac{w}{T} r\, dr = 0 \qquad \text{(V.2.21а)}$$

и после почленного интегрирования получить уравнение

$$r \frac{dH}{dr} + \frac{w r^2}{2T} = C_1. \qquad \text{(V.2.22)}$$

Уравнение (V.2.22) тоже позволяет разделить переменные

$$dH + \frac{w\, r\, dr}{2T} = C_1 \frac{dr}{r} \qquad \text{(V.2.22а)}$$

и после почленного интегрирования дает форму уравнения распределения напоров

$$H + \frac{w r^2}{4T} = C_1 \ln r + C_2. \qquad \text{(V.2.23)}$$

Произвольные интегрирования C_1 и C_2 получим, используя граничные условия: в силу изолированности участка имеем условие $\frac{dH}{dr} = 0$ при $r = r_к$, откуда в (V.2.22) следует $C_1 = -\frac{w r_к^2}{2T}$, а из условия заданного уровня в скважине $H = H_с$ при $r = r_с$ в (V.2.23) получим $C_2 = H_с + \frac{w r_с^2}{4T} - C_1 \ln r_с$. Подставляя эти выражения для C_1 и C_2 в (V.2.23), получим уравнение распределения напоров в водоносном пласте

$$H = H_с + \frac{w r_к^2}{2T}\left(\ln \frac{r}{r_с} - \frac{r^2 - r_с^2}{2r_к^2}\right). \qquad \text{(V.2.24)}$$

Из (V.2.24) при $r = r_к$ и учитывая, что $r_с \ll r_к$, получим выражение для напора H^0 на внешнем контуре участка

$$H^0 = H_с + \frac{w r_к^2}{2T}\left(\ln \frac{r_к}{r_с} - 0{,}5\right). \qquad \text{(V.2.25)}$$

При наличии покровных отложений напор H^0 также связывается с уровнем воды в покровном слое $H_п^0$ уравнением (V.2.20).

При значительных понижениях уровня в скважинах может существенно сказаться изменение проводимости потока, характер которого определяется строением пласта в разрезе. В этом случае расчетные зависимости следует преобразовать применительно к схемам Дюпюи или Гиринского.

Для наиболее общего случая слоистого строения безнапорного потока преобразование полученных уравнений производится заменой напора на функции Гиринского при одновременном задании $T = 1$. Тогда уравнение (V.2.25) принимает вид

$$G^0 - G_с = 0{,}5\, w r_к^2 \left(\ln \frac{r_к}{r_с} - 0{,}5\right). \qquad \text{(V.2.26)}$$

Упражнение. Преобразовать уравнение (V.2.26) для напорно-безнапорного потока (рис. 98, *б*).

Ответ: записывая выражение функции Гиринского на внешнем контуре $G^0 = km(h^0 - 0{,}5\, m)$ и в скважине $G_с = 0{,}5\, kh_с^2$, получим формулу для глубины потока на контуре между скважинами:

$$h^0 = 0{,}5\, m + \frac{h_с^2}{2m} + \frac{w r_к^2}{2km}\left(\ln \frac{r_к}{r_с} - 0{,}5\right). \qquad \text{(V.2.27)}$$

Глава 3

ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫЕ РАСЧЕТЫ ВОДОЗАБОРОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Под производительностью водозаборов подземных вод понимается количество воды, которое может быть получено конкретно заданными водозаборными устройствами в данных гидрогеологических условиях при определенном режиме водозабора. Количество воды требуемого качества, которое может быть получено при возможных рациональных схемах устройства водозаборов, называется эксплуатационными запасами (ресурсами) подземных вод. Следовательно, оценка эксплуатационных запасов является частным случаем решения общей проблемы определения производительности водозаборов подземных вод [4, 7, 30].

Ниже рассматриваются геофильтрационные расчеты, обосновывающие режим и баланс водозаборов подземных вод. Для обоснования качества забираемой воды должны, кроме того, производиться специально прогнозные расчеты возможного загрязнения подземных вод [22, 30], основные положения которых даются в главе 4 раздела VI.

Поскольку водозаборы подземных вод, как правило, устраиваются из вертикальных скважин, то расчеты водозаборов сводятся к расчетам систем вертикальных скважин. При небольшом количестве водозаборных скважин или при существенно неоднородном строении эксплуатируемых водоносных горизонтов скважины имеют неупорядоченное расположение в плане, а при большом их количестве водозаборные системы делаются в плане контурными (линейными или кольцевыми) или площадными.

Перед расчетами водозаборов проводят следующие предварительные операции:

а) по материалам изысканий составляется геофильтрационная схема водоносных горизонтов района водозабора;

б) из гидрогеологических и технико-экономических соображений задается система водозаборных скважин;

в) устанавливаются конструктивные размеры водозаборных скважин и допустимое понижение уровня воды скважин;

г) устанавливается режим работы водозабора: оборудованные глубинными насосами будут работать при постоянном дебите, соответствующем оптимальной производительности установленного насосного оборудования, а открытые самоизливающиеся скважины, как правило, работают при режиме постоянного напора (понижения).

После проведения предварительных операций выбирается метод расчета водозабора, причем для водоносных горизонтов однородного строения и при типовых условиях питания расчеты водозаборных скважин производятся аналитическими методами, а для неоднородных водоносных пластов или при сложных усло-

виях питания — с использованием методов моделирования [15, 16, 30]. К методам моделирования приходится также обращаться для расчетов неупорядоченных систем скважин при заданном понижении уровня в скважинах или при смешанном режиме работы скважин (частично — с заданным расходом, частично — с заданным понижением уровня).

При заданном дебите скважин расчетом определяются понижения уровня в каждой водозаборной скважине, которые сравниваются с допустимым; при заданном понижении уровня в скважинах расчетом определяется дебит каждой водозаборной скважины, который и сравнивается с требуемым по техническому заданию.

Во всех приведенных вариантах решения этой задачи используется детерминированная ее постановка, когда предварительно обосновывается фильтрационная схема потока, применительно к которой проводится гидродинамический (фильтрационный) расчет водозаборного сооружения. Для обобщения и задания расчетных значений геофильтрационных параметров полезно применение методов математической статистики [13]. При весьма сложных условиях строения водоносных пластов, представленных, например, скальными (особенно карбонатными) породами, не всегда удается достаточно убедительно обосновать фильтрационную схематизацию гидрогеологических условий [5]. В этом случае приходится прогнозировать производительность водозаборов, исходя из данных опытных эксплуатационных работ, проводимых для реального расположения водозаборных скважин.

§ 1. ОСНОВЫ ГЕОФИЛЬТРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ ВОДОЗАБОРОВ В РАЗЛИЧНЫХ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим условия работы и методы расчетов централизованных водозаборов подземных вод в крупных гидрогеологических структурах различного типа. Наиболее типичными из таких структур для водозаборов являются артезианские бассейны, конусы выноса и локальные замкнутые структуры (мульды) [4, 5, 9, 29, 41].

Централизованные водозаборы в таких условиях состоят из группы скважин, располагаемых на ограниченной площади, именуемой участком водозабора. Чаще всего водозаборные скважины рассчитываются при заданных дебитах, и тогда понижение в каждой скважине определяется суммированием понижений, вызываемых в точке ее расположения от действия каждой водозаборной скважины в отдельности. Если в безнапорном потоке при понижении уровня заметно изменяется проводимость пласта, то учет этого фактора производится переходом от расчетных понижений к действительным с использованием одной из расчетных схем строения безнапорного потока (Дюпюи или Гиринского), как это показано в § 1 главы 1 раздела IV.

При длительной работе водозабора в пределах участка его расположения устанавливается квазистационарный режим снижения уровней. Тогда для упрощения расчетов группы скважин удобно пользоваться способом «большого колодца», когда группа скважин заменяется одной укрупненной скважиной (большим колодцем) радиусом $r_к$, определяемым из условия, что понижение напора в укрупненной скважине с суммарным расходом водозабора будет таким же, как и в водозаборных скважинах. При квазистационарном режиме понижение уровня на расстоянии r_i от скважины, работающей с постоянным дебитом Q_i, можно представить выражением

$$S_i = \frac{Q_i}{T}(f_i^0 + f_R);\ f_i^0 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1{,}5\sqrt{at}}{r_i}, \qquad \text{(V.3.1)}$$

где f_i^0 — безразмерное понижение от действия этой скважины в однородном неограниченном пласте; f_R — безразмерное понижение, учитывающее влияние границ потока, причем при относительно небольших размерах участка водозабора величину f_R для всех скважин можно считать одинаковой. Тогда, приравнивая понижение в «большом колодце» и расчетной скважине номера j, получим соотношение

$$\lg r_к = \sum_{i=1}^{n} \bar{Q}_i \lg r_{ij},\ \bar{Q}_i = \frac{Q_i}{Q}, \qquad \text{(V.3.2)}$$

где Q — суммарный расход водозабора; n — число скважин; r_{ij} — расстояние от каждой скважины номера i до расчетной скважины, причем r_{ij} равно расчетному радиусу скважины с учетом ее несовершенства и сопротивления прискважинной зоны (см. § 2 главы 1 раздела IV). В частности, при одинаковых расходах скважин из выражения (V.3.2) получим соотношение

$$\lg r_к = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lg r_{ij}. \qquad \text{(V.3.2а)}$$

Изменение расхода водоотбора обычно учитывается при задании ступенчатой формы графика водоотбора по принципу суперпозиции — путем сложения решений для каждой ступени в отдельности. Особого подхода требует нередко встречающийся случай периодической изменчивости водоотбора, которая обычно имеет сезонный характер, — например водоотбор для орошения осуществляется главным образом в течение вегетационного периода [23], — а также проявляется во внутрисуточном режиме. Для расчета таких водозаборов выделяются две составляющие графика его работы: осредненная (многолетняя), получаемая при осредненных значениях расходов в пределах каждого года, и дополнительная (внутригодовая), получаемая как разница действи-

тельного и осредненного графиков (рис. 99). Расчетное понижение уровней в водозаборных скважинах соответственно складывается из понижения S_0, получаемого при осредненном расходе водозабора (при многолетнем графике), и понижения $\Delta S_{пер}$, получаемого при задании дополнительного периодического графика работы водозабора, причем расчеты величины $\Delta S_{пер}$ достаточно проводить

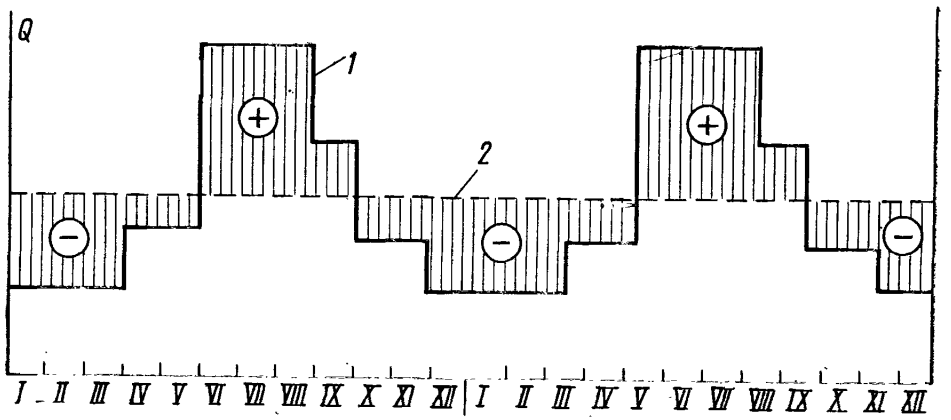


Рис. 99. График периодического расхода водоотбора (*1* — исходный расчетный график, *2* — осредненный расход; заштрихован график внутригодового изменения расхода относительно его среднемноголетнего значения)

только за последние один-два года (периода) работы водозабора [18].

Для представления об источниках формирования эксплуатационных запасов $Q_э$ используется следующее уравнение водного баланса:

$$Q_э = Q_{ст} + \Delta Q_{дин} + Q_{доп}. \qquad (V.3.3)$$

В этом уравнении $\Delta Q_{дин}$ — часть динамических запасов (естественного расхода потока), захватываемых водозабором; $Q_{доп}$ — дополнительно привлекаемые запасы за счет изменения питания или разгрузки подземных вод; $Q_{ст}$ — статистические запасы, состоящие из упругих и гравитационных запасов ($Q_{упр}$ и $Q_{гр}$), причем

$$Q_{упр} = \mu^* \frac{\Delta V_s}{\Delta t}, \quad Q_{гр} = \mu \frac{\Delta V_s^0}{\Delta t}, \qquad (V.3.4)$$

где ΔV_s и ΔV_s^0 — изменение объема воронки депрессии в напорных и безнапорных пластах за интервал времени Δt. Непосредственно для расчетов эксплуатационных запасов уравнение (V.3.3) может использоваться сравнительно редко, поскольку обособленное определение каждого из его составляющих обычно оказывается более сложным, чем расчеты величины $Q_э$ в целом.

Рассмотрим теперь основные положения расчетов эксплуатационных запасов (производительности водозаборов) подземных вод применительно к различным типам потоков подземных вод.

При работе водозаборов в междуречных потоках в начальный период эксплуатации значительная часть эксплуатационных запасов формируется за счет сработки упругих запасов в эксплуати-

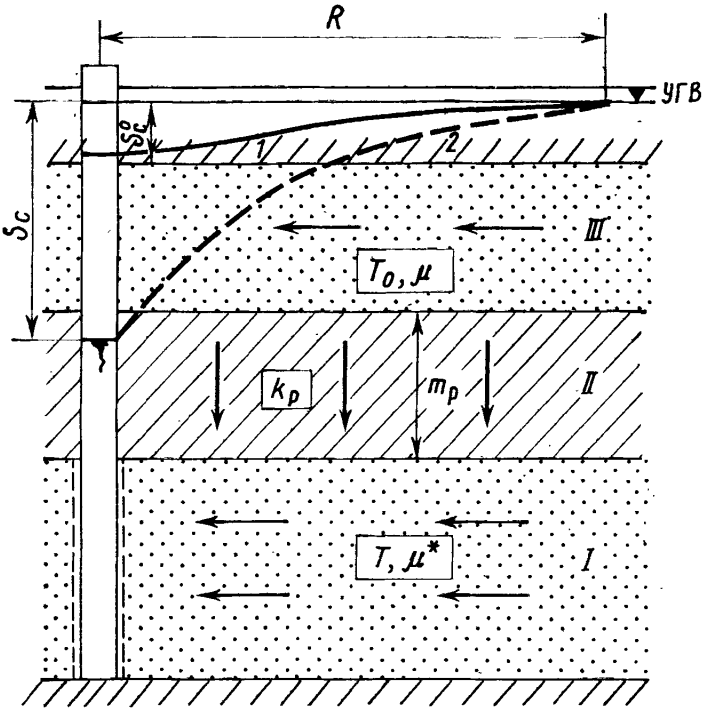


Рис. 100. Водозабор в двухпластовой системе (I — напорный пласт, II — разделяющий пласт, III — пласт грунтовых вод; *1* и *2* — уровни воронок депрессии в грунтовых водах и напорном пласте)

руемом пласте, после чего привлекаются упругие запасы из разделяющих пластов, а затем основную часть эксплуатационных запасов определяет перетекание из горизонта грунтовых вод, в котором происходит сработка гравитационных запасов [4, 7, 41]. Типичная геофильтрационная схема работы такого водозабора представляет собой скважину (большой колодец) в неограниченном по площади напорном пласте с параметрами T и μ^*, над которым располагается безнапорный пласт с параметрами T_0 и μ (рис. 100). При этом обычно безнапорный пласт представлен сравнительно слабопроницаемыми отложениями ($T_0 \ll T$), так что при расчетах проводимостью безнапорного слоя можно пренебречь и для понижения напора под действием водозаборной скважины можно воспользоваться упрощенным решением [8] для откачки в двухслой-

ном пласте. В частности, понижение напора в водозаборной скважине радиусом r_c определится выражением

$$S_c = \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{R}{r_c},$$

$$R = \sqrt{\frac{12T}{\mu + \mu^*}\left\{t + \frac{\mu^2}{\mu + \mu^*}\frac{m_p}{k_p}\left[1 - \exp\left(-\frac{k_p t}{\mu^* m_p}\right)\right]\right\}}, \quad \text{(V.3.5)}$$

причем в условиях постоянной длительной работы водозабора выражение для расчетного радиуса питания R упрощается и принимает вид

$$R = \sqrt{\left(12\frac{T}{\mu}t + B^2\right)}, \quad B = \sqrt{\frac{m_p T}{k_p}}. \quad \text{(V.3.5а)}$$

Это решение применимо и к расчету группового водозабора, если заменить r_c на радиус большого колодца $r_к$. При сравнительно близких значениях T и T_0 для расчетов могут использоваться приближенные решения, приведенные в работах [30, 36]. В частности, согласно такому решению понижение S_c^0 в безнапорном пласте над скважиной описывается уравнением

$$S_c^0 = \frac{Q}{4\pi(T + T_0)} \ln \frac{at}{B^2}, \quad a = \frac{T}{\mu + \mu^*}, \quad B = \sqrt{\frac{m_p T T_0}{k_p (T + T_0)}}. \quad \text{(V.3.6)}$$

Естественно, что приведенные зависимости могут использоваться лишь до тех пор, пока уровень в безнапорном пласте не понизится до его подошвы.

Для анализа структуры эксплуатационных запасов интересно получить выражение для расхода воды $Q_{упр}$, поступающего за счет сработки упругих запасов:

$$Q_{упр} = 2\pi\mu^* \int_0^R r \frac{\partial S}{\partial t} dr. \quad \text{(V.3.7)}$$

Дифференцируя уравнение (V.3.5), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial R} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{Q}{2\pi T}\left(\frac{1}{R} - \frac{r}{R^2}\right)\frac{dR}{dt} \quad \text{(V.3.7а)}$$

и тогда

$$Q_{упр} = \mu^* \frac{Q}{TR} \cdot \frac{dR}{dt} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = \frac{\mu^* Q}{12T} \cdot \frac{dR^2}{dt}. \quad \text{(V.3.7б)}$$

Дифференцируя выражение для R^2, получающееся из (V.3.5), находим

$$\frac{dR^2}{dt} = \frac{12T}{\mu + \mu^*}\left[1 + \frac{\mu^2}{\mu^*(\mu + \mu^*)}\exp\left(-\frac{k_p t}{\mu^* m_p}\right)\right], \quad \text{(V.3.7в)}$$

после чего относительный расход сработки упругих запасов будет

$$\frac{Q_{упр}}{Q} = \frac{\mu^*}{\mu + \mu^*} + \left(\frac{\mu}{\mu + \mu^*}\right)^2 \exp\left(-\frac{k_p t}{\mu^* m_p}\right). \quad \text{(V.3.8)}$$

Из формулы (V.3.7) следует, что при

$$t > \frac{4\mu^* m_p}{k_p} \quad \text{(V.3.8а)}$$

относительное влияние сработки упругих запасов становится незначительным ($Q_{упр}/Q$ имеет порядок процентов).

В частности, при типичных значениях $\mu^* = 10^{-3}$, $m_p = 20$ м и $k_p = 10^{-5}$ м/сут из (V.3.8а) получим, что упругими запасами можно пренебрегать при $t > 8 \cdot 10^3$ сут $\cong 20$ лет, причем, как следует из (V.3.8), уже при $t > 5$ лет упругие запасы обеспечивают только половину расхода водоотбора, хотя в конце первого года их доля составляет более 80%. При $k_p = 10^{-4}$ м/сут все полученные таким расчетом значения времени сработки упругих запасов уменьшаются на порядок, так что в этом случае значимость сработки упругих запасов реально проявляется только в первые один-два года работы водозабора.

На основании таких расчетов можно сделать выводы о весьма динамичном характере проявления упругих запасов, влияние которых может быть сравнительно кратковременным, так что его прогноз нельзя осуществлять только путем экстраполяции данных опытной эксплуатации. Следует подчеркнуть, что значительное влияние на структуру эксплуатационных запасов оказывает в таких условиях проницаемость разделяющих пластов между эксплуатируемым и безнапорным пластами.

На условие перетекания существенное влияние может оказывать литологическая неоднородность разделяющих пластов и особенно наличие «гидрогеологических окон», через которые осуществляется прямая гидравлическая связь напорных и грунтовых вод. Учет такой неоднородности обычно производится путем моделирования, однако для наиболее простых условий могут использоваться и аналитические решения [4, 7, 30].

В балансе артезианского потока заметную роль может играть местная разгрузка, проявляющаяся, например, в зонах солончаковых впадин или тектонических нарушений (см. рис. 48). Такая зона разгрузки представляется внутренней границей третьего рода и моделируется фильтрационным сопротивлением Φ_p, на конце которого задается напор, соответствующий уровню разгрузки z_p (например, отметкам родников). Тогда расход разгруз-

ки $Q_р$ связывается с напором $H_р$ под зоной разгрузки соотношением

$$Q_р = \frac{H_р - z_р}{\Phi_р}. \qquad (V.3.9)$$

При разгрузке в солончаковых впадинах соотношение (V.3.9) несколько усложняется, поскольку разгрузка проходит в две фазы: перетекания до уровня грунтовых вод и испарения через зону аэрации. В этом случае расход разгрузки $Q_р$ связывается с напором $H_р$ под зоной разгрузки соотношением

$$Q_р = \frac{H_р - z_р + z_{гв}}{\Phi_р}, \qquad (V.3.10)$$

где $\Phi_р = m_р/k_р F_р$ — фильтрационное сопротивление зоны разгрузки площадью $F_р$ при мощности экранирующих пластов $m_р$ и коэффициенте фильтрации $k_р$. При этом средняя глубина до грунтовых вод в зоне разгрузки $z_{гв}$ должна связываться определенной зависимостью с интенсивностью испарения $w_р = Q_р/F_р$, например вида (I.4.20) или (I.4.21). Если принять эту зависимость линейной, то соотношение (V.3.10) приводится к виду (V.3.9) при

$$\Phi_р^0 = \Phi_р + \frac{z_к'}{w_0 F_р}. \qquad (V.3.11)$$

Величины $\Phi_р$ и $\Phi_р^0$ во всех случаях должны определяться путем решения обратных задач по данным специальных режимных наблюдений [21, 39].

При этом надо учитывать, что такая разгрузка будет происходить только до тех пор, пока напоры под ней будут превышать ординаты зоны разгрузки, если же $H_р < z_р$, то зона разгрузки перестает функционировать.

При решении задачи в понижениях напора на поверхности зоны разгрузки задается нулевое понижение напора (через сопротивление $\Phi_р$), а когда уровень воды опускается ниже поверхности земли в зоне разгрузки, в ней задается инверсия расхода естественной разгрузки $Q_р^0$, который при этом как бы подается в пласт. Если расход разгрузки соизмерим с водоотбором, то в структуре эксплуатационных запасов после начального периода обработки упругой части запасов такая инверсия разгрузки определяет основную часть используемых запасов.

Значительные эксплуатационные запасы подземных вод формируются в предгорных отложениях, где они приурочиваются к конусам выноса стекающих с гор рек. Исходя из общих закономерностей таких потоков подземных вод (см. § 2 главы 1 раздела I), можно отметить, что в структуре эксплуатационных запасов потоков конусов выноса имеют место следующие специфические черты. Во-первых, в связи с большой мощностью сравнительно молодых осадочных отложений повышается значимость упругих запасов, которые здесь могут быть одного порядка с гравитационными запасами. Во-вторых, дополнительно привлекаемые запасы $Q_{доп}$ обусловливаются уменьшением разгрузки потока в зоне его выклинивания, осуществляемой путем испарения $Q_{исп}$ и родniко-

вого стока $Q_{род}$, включая субаквальную разгрузку в питающиеся этими родниками реки. Для расчета эксплуатационных запасов необходимо знать зависимость изменения величин $Q_{исп}$ и $Q_{род}$ от напора (понижения) в водоносных пластах, однако пока имеются довольно приближенные представления об этом, что существенно осложняет обоснованное решение такой задачи.

При схематизации строения водоносных отложений в средней и периферийной частях конуса выноса, где оно имеет сложнослоистый характер, необходимо учитывать определенную специфику влияния первого от поверхности выдержанного субнапорного пласта, который следует рассматривать обособленно, в то время как нижележащие слои могут объединяться в один-два водоносных песчано-гравийных пласта с разделяющими пачками глинистых слоев между ними [27]. Имея в виду сложный пространственный характер переформирования потока при водоотборе в конусах выноса, как правило, здесь следует для расчетов эксплуатационных запасов прибегать к использованию моделирования.

В потоках локальных структур эксплуатационные запасы формируются главным образом за счет инверсии естественного потока в области разгрузки, поскольку упругие запасы здесь обычно несущественны. Если задаваемая производительность водозабора оказывается меньшей минимального расхода разгрузки, то эксплуатационные запасы будут полностью обеспечены динамическими запасами и при расчетах понижений напора в водозаборных скважинах в области разгрузки задается граничное условие третьего рода вида (V.3.9). Если же производительность водозабора превысит расход разгрузки, то разгрузка прекратится, причем стабильно обеспеченные эксплуатационные запасы будут соответствовать расходу естественного потока (динамическим запасам).

Из анализа структуры эксплуатационных запасов в различных условиях можно сделать общий вывод, что использование непосредственной связи между естественными и эксплуатационными ресурсами целесообразно только в тех случаях, когда в процессе эксплуатации подземных вод в естественных областях разгрузки качественно меняется род граничного условия (вплоть до исчезновения областей разгрузки).

Для районов, где водовмещающая толща сложена трещиноватыми породами, обоснование фильтрационной схемы становится очень сложной задачей, поскольку фильтрационная неоднородность имеет здесь нерегулярный характер, что обусловливает значительный разброс параметров на различных, даже близко расположенных участках. В таких условиях для прогноза работы водозабора необходимо знание осредненных по массиву расчетных параметров водоносного горизонта, которые могут быть получены только в результате достаточно мощной (как правило, групповой) и длительной откачки. Если же обоснование фильтрационной схемы оказывается нереальным, то для прогнозов производительности водозаборов используются данные опытно-эксплуатационных откачек,

осуществляемых непосредственно из водозаборных скважин, включаемых по отдельности и обычно с дебитом, меньшим эксплуатационного. Соответственно прогноз производительности водозаборов проводится путем экстраполяции данных.

Для подобной оценки можно использовать данные откачки на квазистационарный период в неограниченных или полуограниченных пластах (метод срезок) [4, 7]. Проиллюстрируем этот метод на примере работы двух скважин. Пусть при откачке только из скважины 1 с дебитом Q_1 понижение в ней было S_1, а в скважине 2 — понижение S_{12}. При подключении скважины 2 с расходом Q_2 понижение в скважине 1 увеличилось на S_{21}, а во второй скважине — на S_2. Требуется определить понижение S_1' и S_2' в скважинах при увеличении расхода каждой на ΔQ_1 и ΔQ_2. В том случае, если дебит и понижение связаны между собой линейно, изменения понижения в самих скважинах ΔS_1 и ΔS_2 определяются по формулам

$$\Delta S_1 = S_1 \frac{\Delta Q_1}{Q_1}, \quad \Delta S_2 = S_2 \frac{\Delta Q_2}{Q_2}, \tag{V.3.12}$$

а дополнительные понижения ΔS_{12} и ΔS_{21} от влияния их друг на друга по формулам

$$\Delta S_{12} = S_{12} \frac{\Delta Q_1}{Q_1} \text{ и } \Delta S_{21} = S_{21} \frac{\Delta Q_2}{Q_2}. \tag{V.3.12a}$$

Учитывая (V.3.12) и (V.3.12a), можно определить искомые понижения S_1' и S_2':

$$S_1' = S_1 \left(1 + \frac{\Delta Q_1}{Q_1}\right) + S_{21} \left(1 + \frac{\Delta Q_2}{Q_2}\right), \tag{V.3.13}$$

$$S_2' = S_2 \left(1 + \frac{\Delta Q_2}{Q_2}\right) + S_{12} \left(1 + \frac{\Delta Q_1}{Q_1}\right). \tag{V.3.13a}$$

При таких расчетах нужно только быть уверенным в том, что характер зависимости дебита от понижения будет линейным и при больших понижениях. В некоторых случаях следует использовать более сложные зависимости дебита от понижения [30, 43].

В таких расчетах, кроме того, необходимо учитывать влияние нестационарного режима фильтрации, для чего должна быть известна зависимость удельного понижения в скважинах от времени. Для сравнительно однородного полуограниченного потока рекомендуется [4, 7, 30], исходя из зависимости понижения напора от времени вида (IV.2.13), рассчитывать дополнительные понижения напора в скважинах ΔS_t по формуле

$$\Delta S_t = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{t}{t_0}, \tag{V.3.14}$$

где Q — суммарный расход водоотбора; t — расчетное время; t_0 — время опытной эксплуатации; T — осредненная проводимость пласта, определяемая по данным квазистационарного режима снижения уровня в опытных скважинах.

Следует иметь в виду, что в режиме снижения уровней в водозаборных скважинах обычно выделяются три основные фазы: начальная, когда влияние водоотбора еще не распространяется до границ потока, переходная, когда начинает проявляться влияние границ, и завершающая, когда во всей области потока снижение уровней стабилизируется или принимает квазистационарный характер. При этом в зависимости от рода границ потока режим снижения уровней будет различаться, так как наличие на границах водотоков приводит к замедлению снижения уровней, а влияние слабопроницаемых границ приводит к ускорению этого процесса. Поэтому если опытная эксплуатация захватывает только начальную фазу (а это характерный случай), то при наличии в зоне влияния водозабора водотока расчеты по формуле (V.2.14) будут давать завышенные значения понижений, а если эксплуатируемый поток оконтурен слабопроницаемыми границами, то реальные значения понижений будут превышать расчетные. Наиболее достоверные материалы таких расчетов могут быть получены на основе определений удельных понижений в течение длительной эксплуатации, захватывающей все фазы развития процесса.

§ 2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТОВ ВОДОЗАБОРОВ В РЕЧНЫХ ДОЛИНАХ

Большое распространение имеют водозаборы подземных вод в долинах рек [4, 29, 30, 41], причем наличие реки в этом случае обычно определяет условия формирования и восполнения запасов подземных вод. Рассмотрим наиболее характерные условия работы водозаборов такого рода.

2.1. Береговые водозаборы

Береговым назовем водозабор, располагаемый вдоль берега постоянно действующей реки (водоема). Такие водозаборы чаще всего осуществляются в виде линейного ряда вертикальных скважин, устанавливаемых вдоль уреза реки (водоема) на сравнительно небольшом от него расстоянии. Последнее обстоятельство, во-первых, предопределяет возможность расчета такого водозабора в условиях стационарной фильтрации и, во-вторых, позволяет использовать расчетную схему бесконечного ряда водозаборных скважин. При наличии гидравлической связи между рекой и грунтовыми водами условия работы такого водозабора будут аналогичными рассмотренному выше случаю дренажного ряда скважин у реки (см. рис. 94), так что в этом случае дебит водозаборных скважин Q в потоке с постоянной проводимостью определится

формулой (V.2.4), а в безнапорном потоке, построенном по схеме Дюпюи, можно пользоваться формулой (V.2.6). Следует подчеркнуть, что эти формулы получены для условий отсутствия взаимодействия между берегами водоема (теоретически, при бесконечно большой ширине водоема), причем сопротивление ложа водоема учитывается здесь сдвигом его уреза на величину ΔL, так что $L=L_0+\Delta L$, где L_0 — действительное расстояние от уреза водоема до водозабора.

Эти формулы целесообразно преобразовать, выразив естественный расход потока q_e через непониженный уровень воды на линии водозабора-H_c^0. Например, для потока постоянной проводимости можно написать

$$q_e = T\frac{H_c^0 - H_0}{L} \qquad (V.3.15)$$

и формула (V.2.4) примет вид

$$Q = T\frac{H_c^0 - H_c}{L + L_{кс}} = \frac{TS_c\sigma}{L + L_{кс}}, \qquad (V.3.16)$$

где $S_c = H_c^0 - H_c$ — понижение уровня в скважинах относительно статического (естественного) уровня на линии скважин. Из выражения (V.3.16) следует, что производительность водозабора в этом случае не зависит от расхода естественного потока. Этот расход учитывается в скрытом виде через статические уровни на линии скважин, от которых отсчитывается понижение уровня S_c.

Приведем теперь вывод зависимостей для расчетов водозаборного ряда скважин при заметном взаимодействии потоков подземных вод на противоположных берегах в условиях подпертого режима фильтрации, когда гидродинамическое несовершенство реки (водоема) учитывается введением полной схемы сопротивлений ее ложа — по системе треугольника или звезды (§ 1 главы 2 раздела II). Считая поток одномерным в плане, составим его баланс в узловых точках потока (рис. 101). На линии скважин

$$q_0 + q_e = q_c, \qquad (V.3.17)$$

где q_0 — удельный расход потока от реки к ряду скважин; $q_c = Q/\sigma$ — удельный расход потока, притекающего к скважинам; в створах I и II урезов реки

$$q_0 = q_{21} + q_{01} \quad (а), \qquad q_e^0 = q_{21} - q_{02} \quad (б), \qquad (V.3.18)$$

где q_{21}, q_{01} и q_{02} — удельные расходы потока в ложе реки между берегами и из водоема к береговым створам I и II. Из уравнений (II.2.16) следует, что удельные расходы в ложе реки могут быть представлены выражениями

$$q_{21} = T\frac{H_2 - H_1}{L_н^0}, \quad q_{01} = T\frac{H_0 - H_1}{L_п}, \quad q_{02} = T\frac{H_0 - H_2}{L_н}, \qquad (V.3.19)$$

где H_1 и H_2 — средние напоры в створах берегов реки. Кроме того, запишем выражение для расхода q_0, заменяя линию скважин сплошной траншеей с уровнем $H_л$:

$$q_0 = T\frac{H_1 - H_л}{L_0}, \qquad \text{(V.3.20)}$$

причем величина $H_л$ связывается с напором $H_с$ в скважинах выражением (V.1.6).

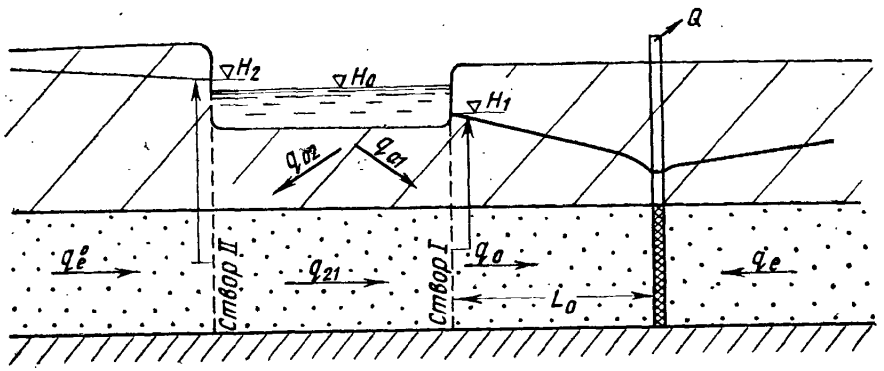


Рис. 101. Береговой водозабор (ряд водозаборных скважин вдоль реки)

Подставляя выражения (V.3.19) и (V.3.20) в балансовые уравнения (V.3.17) и (V.3.18), представим их в виде

$$\left.\begin{aligned} &T\frac{H_1 - H_л}{L_0} + q_e = q_с \ \text{(а)};\\ &\frac{H_1 - H_л}{L_0} = \frac{H_0 - H_1}{L_н} + \frac{H_2 - H_1}{L^0_н} \ \text{(б)};\\ &q_1 = q^0_e = T\frac{H_2 - H_1}{L^0_н} - T\frac{H_0 - H_2}{L_н} \ \text{(в)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.3.21)}$$

Такую же систему уравнений можно записать для естественного потока, обозначая через H^0_1, H^0_2 и $H^0_л$ его напоры в соответствующих сечениях и полагая $q_с = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &q_e = T\frac{H^0_л - H^0_1}{L_0} \ \text{(а)}; \quad \frac{H^0_л - H^0_1}{L_0} = \frac{H^0_1 - H_0}{L_н} + \frac{H^0_1 - H^0_2}{L^0_н} \ \text{(б)};\\ &q^0_e = T\frac{H^0_2 - H^0_1}{L^0_н} - T\frac{H^0_2 - H_0}{L_н} \ \text{(в)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.3.22)}$$

Вычитая из уравнений (V.3.22) соответствующие уравнения (V.3.21), получим выражения последних через понижения уровней

$$\left.\begin{aligned} T\frac{S_1-S_л}{L_0}=q_c \quad (а);\ \frac{S_л-S_1}{L_0}=\frac{S_1}{L_н}+\frac{S_1-S_2}{L_н^0} \quad (б);\\ \frac{S_2-S_1}{L_н^0}+\frac{S_2}{L_н}=0 \quad (в), \end{aligned}\right\} \quad (V.3.23)$$

где $S_1=H_1^0-H_1$, $S_2=H_2^0-H_2$, $S_л=H_л^0-H_л$ — понижения напоров по отношению к естественным (статическим) напорам в соответствующих сечениях.

Выражая S_2 через S_1 из уравнения (V.3.23в)

$$S_2=\frac{S_1}{1+\dfrac{L_н^0}{L_н}} \quad (V.3.24)$$

подставим это выражение в (V.3.23б) и разрешим его относительно S_1:

$$S_1=\frac{S_л}{+\dfrac{L_0}{L_н}+\dfrac{L_0}{L_н+L_н^0}}=\frac{S_л}{1+\dfrac{2L_н+L_н^0}{L_н(L_н+L_н^0)}L_0} \quad (V.3.25)$$

Подставляя затем это выражение в (V.3.23а), получим формулу для определения удельного притока к линии водозаборных скважин

$$q_c=T\frac{S_л-S_1}{L_0}=T\frac{S_л}{L_0}\left[1-\frac{1}{1+\dfrac{2L_н+L_н^0}{L_н+L_н^0}\cdot\dfrac{L_0}{L_н}}\right]=T\frac{S_л}{L}, \quad (V.3.26)$$

где обозначено

$$L=L_0+\Delta L^*,\ \Delta L^*=\frac{L_н+L_н^0}{2L_н+L_н^0}L_н. \quad (V.3.27)$$

Записывая далее зависимость (V.1.6) для понижений напора в виде

$$S_л=S_c-\frac{q_c}{T}L_{кс}, \quad (V.3.28)$$

после небольших алгебраических преобразований приведем выражение (V.3.26) к виду

$$Q=\frac{TS_c\sigma}{L+L_{кс}}, \quad (V.3.29)$$

который совпадает с выражением (V.3.16), полученным при отсутствии взаимодействия потоков между берегами водоема. Различие между ними заключается лишь в том, что величина ΔL^*, на которую следует сдвинуть урез водоема для учета его сопротивления, при взаимодействии берегов зависит от соотношения горизонтальных и вертикальных сопротивлений ложа реки. Поскольку выражение (V.3.29) не включает в себя расходов естественного потока, то в данном случае остается в силе принцип независимости производительности водозаборных скважин от расхода естественного потока, если расчеты дебитов скважин вести по их понижениям относительно естественных уровней.

Приведенные выше решения справедливы только при условии сохранения гидравлической связи грунтовых вод с рекой. Проверку этого условия можно сделать, сопоставив напоры на урезе водоема H_1 с отметкой подошвы экранирующего русло реки слоя, причем нарушение гидравлической связи произойдет, когда уровень воды H_1 окажется ниже подошвы экранирующего слоя. Если же четко выраженный экранирующий слой отсутствует, то наличие подпертого режима гарантируется только при расположении уровня воды выше дна реки.

При образовании свободной фильтрации под водотоком уравнение баланса расходов на линии водозаборных скважин будет

$$q_c = q_e + q_p + q_e^0, \qquad \text{(V.3.30)}$$

где q_p — удельный расход потока, фильтрующегося из реки, причем для реки шириной N в обозначениях, приведенных на рис. 34,

$$q_p = k_0 N \frac{h_0 + m_0}{m_0}. \qquad \text{(V.3.31)}$$

Если в естественных условиях фильтрация в ложе реки была подпертой, то величина k_0/m_0 может быть найдена по величине ΔL, определенной по данным режимных наблюдений. В структуру формулы (V.3.30) для производительности водозабора непосредственно входят расходы естественного потока q_e и q_e^0, к которым добавляется расход потока, привлекаемого из реки. Такое принципиальное отличие структуры водоотбора по сравнению с результатом, получающимся при подпертой фильтрации, вызывается изменением рода граничного условия под рекой при переходе от подпертой фильтрации к свободной.

Это положение свидетельствует о целесообразности использования структуры эксплуатационных запасов в форме (V.3.3) только в тех случаях, когда в процессе водоотбора происходят качественные изменения в характере взаимодействия подземных вод с поверхностными водами и атмосферой.

2.2. Инфильтрационные водозаборы

Под инфильтрационными понимаются водозаборы, эксплуатационные запасы которых пополняются за счет искусственной или естественной инфильтрации из водоемов (водотоков).

Искусственная инфильтрация чаще всего осуществляется из специально сооружаемых инфильтрационных бассейнов, которые обычно прорезают относительно слабопроницаемые покровные от-

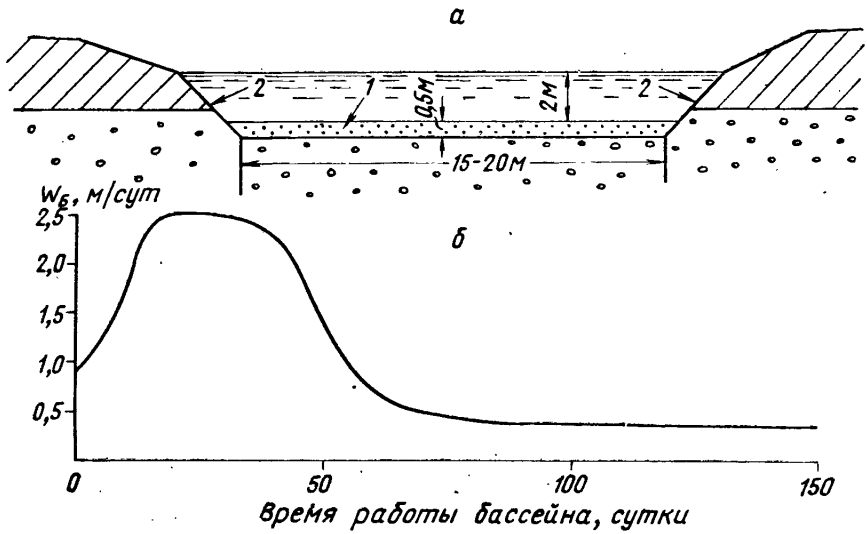


Рис. 102. Типовые характеристики инфильтрационного бассейна, по В. М. Григорьеву [11]:
а — поперечное сечение (*1* — искусственное фильтрующее дно, *2* — откосы); *б* — график изменения интенсивности инфильтрации из бассейна с момента его заполнения

ложения (рис. 102). Вода в такие бассейны поступает из рек, причем рекомендуется предварительно производить ее отстаивание для уменьшения мутности. На инфильтрацию из бассейна значительно влияют кольматация и заиливание дна бассейна, в связи с чем интенсивность инфильтрации достигает максимального значения в начальный период после его включения в работу (первые один-два месяца), затем заметно уменьшается, достигая сравнительно стабильного значения. Анализ данных ряда существующих водозаборов показывает [11, 28], что стабильные значения интенсивности инфильтрации $w_б$ из бассейнов оказываются в различных условиях сравнительно близкими: обычно величина $w_б$ составляет 0,5—1 м/сут, повышаясь до 2—3 м/сут в галечниках и снижаясь до 0,2—0,5 м/сут в песчано-глинистых покровных отложениях. Таким образом, наличие инфильтрационных бассейнов должно учитываться в расчетах заданием по их площади инфильтрационного питания интенсивности $w_б$.

В качестве примера рассмотрим методику построения расчетных зависимостей для типового случая берегового инфильтрационного водозабора (рис. 103), в котором инфильтрационные бассейны, забирая воду из реки, служат для пополнения потока, фильтрующегося из реки, причем инфильтрационные бассейны могут располагаться за линией скважин (рис. 103, *а*) или между скважинами и рекой (рис. 103, *б*). Во всех случаях будем считать, что

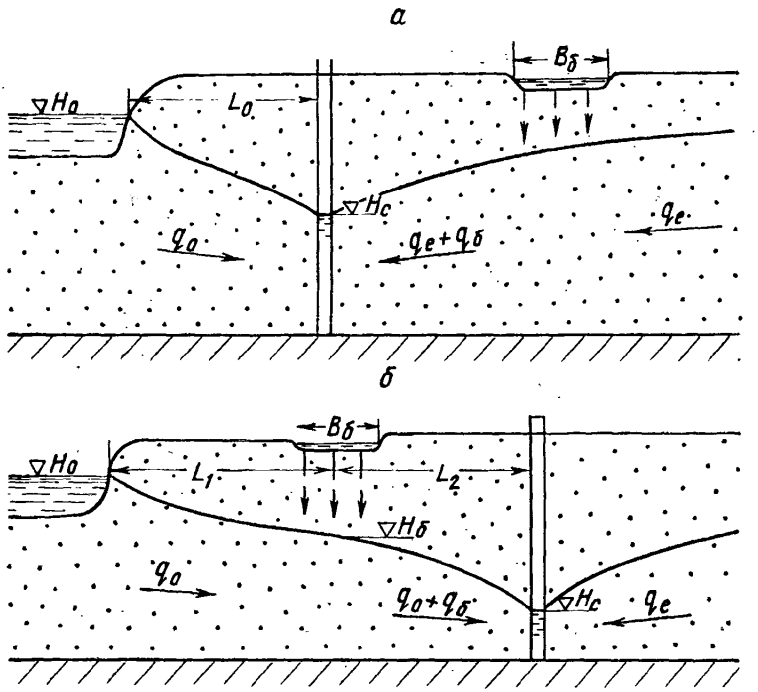


Рис. 103. Размещение берегового инфильтрационного водозабора:
а — водозабор между рекой и бассейном; *б* — бассейн между рекой и водозабором

длина инфильтрационных бассейнов заметно превышает их расстояние до реки, так что поток в плане в основном можно считать линейным, а его режим стационарным.

При расположении бассейна за линией скважин (см. рис. 103, *а*) береговой поток сложится из заданного естественного потока с удельным расходом q_e и потока, инфильтрующегося из бассейна с удельным расходом $q_б = w_б B_б$. Тогда для определения дебита водозаборных скважин при отсутствии взаимодействия между подземными водами на различных берегах реки можно пользоваться формулами (V.2.4) или (V.2.6), в которых только следует заменить q_e на $q_e + q_б$. Формально эту операцию можно осуществить, увеличив непониженный напор $H_л^0$ на линии скважин

Раздел VI
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ МИГРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Под миграцией подземных порово-трещинных вод будем понимать процессы перемещения компонентов подземных вод в порах и трещинах горных пород с учетом физико-химических изменений, происходящих при смешении подземных вод и их взаимодействии с горными породами.

Гидродинамические основы миграции подземных вод базируются на представлениях о тепло- и массопереносе в подземных водах.

Потребность в изучении миграции подземных вод возникает при обосновании количественных методов оценки изменений качественного состава воды в процессе ее перемещения в горных породах. Такие задачи все чаще возникают при исследованиях формирования физико-химического состава подземных вод [48], загрязнения подземных вод [5, 14], подземного захоронения промстоков [2, 22], миграции рудных элементов [1, 13], применения индикаторов для изучения динамики подземных вод [29, 47], геотехнологических методов добычи полезных ископаемых [3]. Близки к ним задачи вытеснения нефти растворителями [17].

В гидрогеологической практике задачи миграции подземных вод наиболее широко проявляются при изучении загрязнения (изменения физико-химического состава) подземных вод в зоне влияния водозаборов и при подземном захоронении промстоков. Поэтому в дальнейшем миграция подземных вод будет рассматриваться в основном применительно к такого рода задачам. Здесь не затрагивается специфика миграции подземных вод при наличии мерзлых пород, которая является основным предметом рассмотрения в теоретическом мерзлотоведении.

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ МИГРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

§ 1. КОНВЕКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС

Важнейшим фактором в миграции подземных вод является так называемый конвективный перенос, происходящий за счет гидравлического переноса частиц воды фильтрационным потоком. В качестве основной характеристики скорости конвективного переноса подземных вод используется *действительная скорость фильтрации* u, которая представляет собой отношение расхода фильтрационного потока к площади пор его поперечного сечения и является, таким образом, статистически средней из действительных скоростей движения воды в порах. Со скоростью фильтрации v величина u связывается соотношением

$$u = \frac{v}{n}, \qquad \text{(VI.1.1)}$$

где n — активная пористость породы, которая характеризует часть пор, заполненных свободной водой и открытых для фильтрации.

К физико-химическим процессам, осложняющим миграцию подземных вод, относятся сорбция растворенных в воде солей на горных породах и растворение водой отдельных компонентов горных пород. Сорбционные процессы прежде всего характеризуются сорбционной емкостью пород N, которая представляет собой предельное количество сорбируемого в данных условиях компонента в единице объема породы [1] при определенной его концентрации в воде c. Размерность сорбционной емкости такая же, как у концентрации раствора ($[N]=[c]$).

Из теоретических соображений, подтверждаемых экспериментальными данными, следует, что при сравнительно небольшой концентрации компонента c можно считать справедливым закон действующих масс, когда сорбционная емкость пропорциональна концентрации, так что коэффициент распределения

$$\beta = \frac{c}{N} \qquad \text{(VI.1.2)}$$

в данной физико-химической обстановке есть величина постоянная. В общем же случае величина β зависит от N и c согласно экспериментальной изотерме сорбции [32, 51].

---

[1] В физико-химической технологии в качестве сорбционной емкости обычно принимается количество сорбируемого компонента, отнесенное к единице веса сорбата (в данном случае горной породы). Обозначая эту величину через $N_в$, найдем, что $N_в = N/\gamma_п$, где $\gamma_п$ — объемный вес породы.

Особенно существенно влияние сорбции при миграции загрязняющих веществ в катионной форме. Например, при миграции радиоактивных элементов получены следующие значения коэффициента распределения: $\beta=0{,}06$ для ^{89}Sr и $\beta=0{,}007$ для ^{137}Cs в нейтральном растворе, $\beta=0{,}57$ для ^{45}Ca в растворе $CaCl_2$ [39].

Значительные экспериментальные исследования по сорбции загрязняющих компонентов проведены Ф. И. Тютюновой [50]. По данным этих исследований, сорбция цинка, содержащегося в промстоках, хорошо описывается уравнением (VI.1.2) при значениях $\beta=0{,}1$ на песке, $\beta=0{,}05$ на супеси и $\beta=0{,}04$ на каолине; для сорбции на мелкозернистом песке получены значения $\beta=0{,}05$ для $Cu^{2+}+CaCl^{+}$ и $\beta=0{,}16$ для Mn^{2+}. Отмечено также существенное влияние формы нахождения компонента, причем по натурным наблюдениям за миграцией меди в аллювиальном водоносном горизонте было показано значительное влияние сорбции меди в виде Cu^{2+}, $CuOH^{+}$ и $CuCl^{+}$ ($\beta=0{,}1$), тогда как сульфатные и органические комплексы меди оказались сорбционно нейтральными.

Сорбционные процессы должны, строго говоря рассматриваться с учетом их кинетики, т. е. закономерностей протекания во времени. Теоретический анализ показывает [56], что влияние кинетики внутрипоровых сорбционных процессов обычно несущественно. Это же положение относится и к теплопереносу, для которого

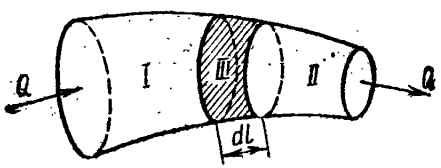


Рис. 104. Перемещение границы раздела растворов в трубке тока по схеме поршневого вытеснения (I и II — зоны вытесняющего и вытесняемого растворов, III — бесконечно малый элемент трубки тока)

обоснована возможность пренебрежения внутрипоровым теплообменом [52].

В наиболее простой постановке миграция подземных вод может рассчитываться по схеме *поршневого вытеснения*, когда принимается, что все частицы воды мигрируют с одинаковой скоростью u. Найдем в такой постановке выражение для скорости движения фронта раствора с концентрацией c, вытесняющего тот же раствор с концентрацией c^0, с учетом сорбции раствора, но при мгновенном наступлении сорбционного равновесия (т. е. пренебрегая кинетикой сорбции).

Рассмотрим баланс соли в бесконечно малом элементе трубки тока dl (рис. 104), который проходит фронт вытесняющего раствора за время dt. В этот элемент с расходом в трубке тока Q проходит солей $cQdt$, уходит c^0Qdt, а остается в элементе, имеющем площадь поперечного сечения ω: в порах $n\omega(c-c^0)dl$, за счет сорбции на породе $\omega\Delta Ndl$, где $\Delta N=N-N^0$ — изменение сорбционной емкости породы. Следовательно, баланс соли в элементе будет

$$(c-c^0)Qdt=n\omega(c-c^0)dl+\omega\Delta Ndl,$$

откуда скорость движения раствора на фронте вытеснения

$$u_l = \frac{dl}{dt} = \frac{Q}{\omega\left(n + \frac{\Delta N}{c - c^0}\right)} = \frac{v_l}{n_э}, \quad n_э = n + \frac{1}{\beta}, \qquad \text{(VI.1.3)}$$

где v_l — скорость фильтрации на фронте вытеснения, а $n_э$ — величина, которая может быть названа *эффективной пористостью* породы, поскольку она характеризует удельную суммарную емкость породы для рассматриваемого компонента раствора.

Сопоставляя (VI.1.3) и (VI. 1.1), можно видеть, что при мгновенно протекающих сорбционных процессах скорость движения раствора имеет ту же структуру, что и действительная скорость фильтрации, только для учета сорбции место активной пористости n занимает эффективная пористость $n_э$.

Аналогичным образом, составляя тепловой баланс в элементе трубки тока, можно показать, что формулой (VI.1.3) определяется скорость конвективного теплопереноса (движение границы раздела вод разной температуры), но в этом случае величина эффективной пористости связана с теплоемкостью водонасыщенной породы $c_п$ и определяется по формуле

$$n_э = \frac{c_п}{c_в}, \quad c_п = nc_в + (1 - n)c_{ск}\frac{\gamma_{ск}}{\gamma}, \qquad \text{(VI.1.4)}$$

где $c_в$ и $c_{ск}$ — удельные теплоемкости воды и скелета породы, $\gamma_{ск}$ — удельный вес скелета породы. Введение эффективной пористости позволяет унифицировать расчетные зависимости, имея в виду, что они могут быть записаны без учета взаимодействия воды с породой, которое автоматически учитывается заменой активной пористости n на эффективную пористость $n_э$, определяемую согласно (VI.1.3) или (VI.1.4).

Для практических расчетов конвективного переноса по схеме поршневого вытеснителя, когда скорость миграции определяется выражением (VI.1.3), общее уравнение для пути миграции l будет

$$\frac{dl}{dt} = \frac{k}{n} I_l, \qquad \text{(VI.1.5)}$$

где I_l — градиент напора в расчетной точке траектории миграции загрязнения.

При таких расчетах предварительно — решением гидродинамической задачи — строятся траектории движения в потоке (в стационарном потоке они совпадают с линиями тока) и определяются градиенты напора в каждой точке расчетной траектории. Подставляя значения этих градиентов в уравнение (VI.1.5), можно найти зависимость $l(t)$, характеризующую движение границы раздела. Для ряда простых задач оказывается возможным аналитически решить уравнение (VI.1.5), однако в большинстве случаев

для решения этого уравнения приходится прибегать к численному интегрированию.

Наиболее простой путь численного интегрирования дает способ Эйлера — Коши [41], согласно которому градиент I_l осредняется в пределах некоторого интервала времени Δt, так что вместо (VI.1.5) можно пользоваться выражением для конечно-разностного приращения

$$\Delta l = \frac{k}{n} I_l \Delta t, \qquad \text{(VI.1.6)}$$

где величина I_l принимается средней за расчетный интервал времени. Для нахождения величин Δl за фиксированные интервалы времени Δt это уравнение решается подбором. Относительную погрешность таких расчетов можно оценить по формуле

$$\varepsilon_l = \frac{l' - l''}{7l'}, \qquad \text{(VI.1.6а)}$$

где l' и l'' — значения пути продвижения границы раздела, рассчитанные при интервалах времени Δt и $2\Delta t$ [41].

Расчет по уравнению (VI.1.6) упрощается, если из него определять значения Δt, за которые рассматриваемый компонент мигрирует на определенное расстояние Δl, в пределах которого известна разница напоров ΔH. Тогда при $I_l \cong \Delta H/\Delta l$ получим

$$\Delta t = \frac{n(\Delta l)^2}{k \Delta H}. \qquad \text{(VI.1.7)}$$

Если же в пределах расчетного участка потока значительно меняется ширина ленты тока, то вместо (VI.1.7), лучше пользоваться формулой

$$\Delta t = \frac{n m_{\text{ср}} N_{\text{ср}}}{Q_{\text{лт}}} \Delta l, \qquad \text{(VI.1.7а)}$$

где $Q_{\text{лт}}$ — расход, проходящий через ленту тока; $m_{\text{ср}}$ и $N_{\text{ср}}$ — средние значения мощности и ширины потока в пределах участка ленты тока длиной Δl.

§ 2. ДИФФУЗИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС

Процессы молекулярной диффузии в песчаных грунтах рассматривались Дж. Клинкенбергом [65], который показал, что в пористой среде диффузия имеет те же закономерности, что и в свободной среде, т. е. диффузионный поток Q_D через поперечное сечение ω в направлении l определяется законом Фика

$$Q_D = -D_{\text{м}} \omega \frac{\partial c}{\partial l}, \qquad \text{(VI.1.8)}$$

где $D_{\text{м}}$ — коэффициент молекулярной диффузии в породе.

Нередко в литературе встречается другая запись уравнения (VI.1.8), в которой площадь поперечного сечения потока задается в пределах сечения порового пространства, т. е.

$$Q_D = -D^*_{\text{м}} n\omega \frac{\partial c}{\partial l}. \qquad \text{(VI.1.8а)}$$

Очевидно, что в этом случае $nD^*_{\text{м}} = D_{\text{м}}$. Однако, сохраняя используемые в фильтрации положения сплошной среды, в дальнейшем будем пользоваться для закона диффузии формой (VI.1.8). Для песчаных пород

$$D_{\text{м}} = \chi n D^0_{\text{м}}, \qquad \text{(VI.1.9)}$$

где $D^0_{\text{м}}$ — коэффициент молекулярной диффузии в свободной среде, имеющий порядок 10^{-4} м²/сут [49]; χ — параметр, характеризующий извилистость путей фильтрации в пористой среде (по опытам Клинкенберга для несцементированных песков $\chi = 0{,}5—0{,}7$, а для сцементированных $\chi = 0{,}25—0{,}5$).

В глинистых породах диффузионный поток осложняется торможением диффузии в пристенных слоях жидкости за счет уменьшения подвижности ионов в двойном электрическом слое и большей вязкости структурированных жидкостей пристенных слоев [6, 31]. В этом случае в выражение (VI.1.9) следует вводить поправочный коэффициент $\eta_{\text{м}}$, считая

$$D_{\text{м}} = \chi \eta_{\text{м}} n_0 D^0_{\text{м}}, \qquad \text{(VI.1.10)}$$

причем для бентонитовых глин $\eta_{\text{м}} = 0{,}2$, а для моренных и лёссовидных суглинков $\eta_{\text{м}} = 0{,}4—0{,}5$ [6, 31].

Обобщение опытных данных показывает [18, 38, 48], что значения коэффициента диффузии, определяемые на образцах глинистых пород, имеют порядок 10^{-5} м²/сут. Вместе с тем при уплотнении пород величина $D_{\text{м}}$ может значительно уменьшаться. Например, по данным Г. Ю. Валукониса [8], для аргиллитов при давлении 350 кг/см² величина $D_{\text{м}}$ уменьшается до 10^{-8} м²/сут. При неполном водонасыщении величина $D_{\text{м}}$ существенно зависит от влажности, однако характер этой зависимости пока что не изучен; например, при диффузии ^{90}Sr в воздушно-сухой почве при объемной влажности 1,5% получено $D_{\text{м}} = 2 \cdot 10^{-9}$ м²/сут [30].

Заметим, что закон Фика в форме (VI.1.8) справедлив для изотермических процессов и при независимой диффузии; последнее допущение строго обосновывается для смесей, состоящих из двух веществ или содержащих избыток одного из компонентов, а также при одинаковых коэффициентах диффузии всех компонентов смеси. При невыполнении этих условий возникают более сложные явления неизотермической многокомпонентной диффузии [13, 16].

Рядом исследований утверждается наличие в слабопроницаемых грунтах «фильтрационного эффекта» [25, 59], или «про-

сеивания солей» [61], что проявляется в полупроводимости грунтов для растворов. При наличии фильтрационного эффекта грунты будут пропускать через себя не все молекулы раствора, а только некоторую их часть, уменьшая тем самым концентрацию фильтрующегося раствора. Пока еще нет достаточно обстоятельного экспериментального материала, который позволил бы судить о значимости этого интересного явления при фильтрации в различных грунтах, однако можно считать, по-видимому, что оно проявляется только в ультрадисперсных грунтах, поры которых соизмеримы с размером молекул раствора.

Тепловой кондуктивный поток $Q_т$ в горных породах подчиняется общему уравнению теплопередачи

$$Q_т = -\lambda\omega\frac{d\theta}{dl}, \qquad \text{(VI.1.11)}$$

где θ — температура в градусах; λ — коэффициент теплопроводности. Приведенные в табл. VI.1 типовые теплофизические параметры горных пород заимствованы из работы [20].

Таблица VI.1

Теплофизические параметры горных пород

Параметры	Граниты	Андезиты	Базальты	Глины	Пески	Песчаники	Известняки
λ, ккал/м·ч·град	2—3,5	1,1—2,6	1,2—2,4	0,15—1,5	0,3—3,0	0,6—5,0	0,7—3,5
Удельная теплоемкость скелета породы $c_п$, ккал/кг·град	0,16	0,15	0,2	0,18	0,17—0,2	0,18—0,24	0,16—0,24

Примечание. Для воды $\lambda = 0{,}5$ ккал/м·ч·град и $c_в = 1$ ккал/кг·град.

При значительных скоростях фильтрации диффузионно-кондуктивный перенос усиливается за счет перемешивания частиц воды в порах грунта, которое обусловливается внутрипоровой неоднородностью поля скоростей. Этот процесс обычно называется фильтрационной, или гидравлической, дисперсией (*гидродисперсией*) [1]. Исследования показывают [3, 36, 63, 67], что гидродисперсия определяется теми же зависимостями, что и молекулярная диффузия, однако в этом случае коэффициент дисперсии зависит от величины и направления скорости фильтрации, причем можно считать практически справедливым следующее выражение для

[1] Иногда гидродисперсию называют фильтрационной диффузией [3, 36], однако такое название менее удачно, поскольку этот процесс одинаково влияет на масс- и теплоперенос, принципиально отличаясь тем самым от диффузии.

суммарного коэффициента *микродисперсии* D, учитывающего процессы молекулярной диффузии и гидродисперсии

$$D = D_м + \delta_1 v, \qquad \text{(VI.1.12)}$$

где v — скорость фильтрации; δ_1 — коэффициент, зависящий от вида грунта и направления фильтрационного потока; в сравнительно однородных мелкозернистых песках для гидродисперсии вдоль потока, по данным ряда экспериментальных работ [5, 12, 48, 55, 63], получается $\delta_1 = \delta_l = 0{,}1—1$ см, а для поперечной гидродисперсии $\delta_1 = \delta_т$ оценивается соотношением $\delta_т = 0{,}05—0{,}1\ \delta_l$ [43, 63]; обзоры экспериментальных данных по параметрам гидродисперсии приведены в работах [63, 66, 67].

Пока что имеются весьма скудные данные о характере движения воды в трещинных породах; наблюдения за движением водонефтяного контакта в карбонатных нефтяных коллекторах свидетельствуют о сравнительно однородной их трещиноватости, позволяющей применить к трещинной среде закономерности, установленные для пористой среды [27, 44]. По некоторым экспериментальным данным, в известняках и доломитах получаются величины δ_l порядка 10—100 м [64].

Аналогичным образом гидродисперсия должна проявляться при теплопереносе в фильтрационном потоке; здесь значение суммарного коэффициента теплопередачи будет

$$\lambda = \lambda_0 + \gamma c_в \delta_1 v, \qquad \text{(VI.1.13)}$$

где λ_0 — коэффициент теплопередачи в статических условиях; $c_в$ — удельная теплоемкость воды [19].

В неизотермической обстановке возникают процессы термодиффузии [15], которые создают поток солей, определяемый уравнением

$$Q_{TD} = -D_т \omega \frac{\partial \theta}{\partial l}, \qquad \text{(VI.1.14)}$$

где $D_т$ — коэффициент термодиффузии, который в грунтах имеет порядок $2 \cdot 10^{-5}$ см^2/с·град [69], а θ — температура.

Практическое влияние термодиффузии обычно сравнительно невелико; реально оно проявляется лишь непосредственно у поверхности земли (в приповерхностных слоях), где возникают значительные температурные градиенты в связи с внутрисуточными колебаниями температуры воздуха.

В некоторых случаях на формирование теплового поля в фильтрационном потоке может оказать влияние дроссельный процесс, который связан с превращением механической работы, затрачиваемой фильтрационным потоком на преодоление сопротивления сил вязкого трения, в тепловую энергию [52]. Дроссельный эффект приводит к выделению тепла, приращение которого по любому направлению потока будет пропорционально потерям энергии в этом направлении. Поскольку удельные потери энергии по длине фильтрационного потока характеризуются градиентом напора, то

уравнение дроссельного тепловыделения в фильтрационном потоке по направлению l представляется в следующем виде [52]:

$$\Gamma_д = -\varepsilon_1 \gamma I, \qquad \text{(VI.1.15)}$$

где $\Gamma_д$ — градиент температуры, вызываемый дроссельным процессом; I — градиент напора; ε_1 — осредненный коэффициент Джоуля — Томпсона, причем для воды $\varepsilon_1\gamma = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ град/м.

Влияние дроссельного процесса будет существенным, если соотношение величины $\Gamma_д$ и градиента температуры Γ, обусловленного другими факторами, выйдет за пределы допустимой погрешности расчетов δ, т. е. при условии

$$\frac{\Gamma_д}{\Gamma} = \varepsilon_1 \gamma \frac{I}{\Gamma} < \delta. \qquad \text{(VI.1.16)}$$

Например, при анализе теплового потока из недр земли, когда $\Gamma \cong 0{,}03$ град/м, из выражения (VI.1.16) получим $\Gamma_д/\Gamma = 0{,}07I$, т. е. в этом случае практическое влияние дроссельного эффекта проявляется при $I > 1$.

Глава 2

МИГРАЦИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В РАЗЛИЧНЫХ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

Переходя к рассмотрению закономерностей миграции подземных вод, следует прежде всего отметить, что они существенно различаются в водоносных пластах и в слабопроницаемых слоях, разделяющих водоносные горизонты, поскольку в водоносных пластах решающую роль обычно играет конвективный перенос с фильтрационным потоком, а в разделяющих слоях конвективный перенос может иметь уже подчиненное значение.

§ 1. ДИФФУЗИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ПЕРЕНОС В РАЗДЕЛЯЮЩИХ СЛОЯХ

Рассмотрим две характерные гидрогеологические задачи диффузионно-кондуктивного переноса через разделяющие (глинистые) слои (пласты).

1.1. Диффузионный вынос солей через разделяющий слой

Рассмотрим условия выноса соли из глубокого водоносного горизонта (зоны затрудненного водообмена), перекрытого слабопроницаемым разделяющим слоем (рис. 105), над которым располагаются пресные воды зоны активного водообмена; причем примем, что фильтрация через разделяющий слой и в зоне затрудненного водообмена практически отсутствует, а вынос солей из глубокого

горизонта, уменьшающий со временем концентрацию его воды, происходит через разделяющий слой путем диффузионного переноса. Имея в виду длительный характер процесса, будем считать диффузионный поток в разделяющем слое стационарным (точнее, квазистационарным). Тогда диффузионный поток через разделяющий слой определится уравнением (VI.1.8) при $\frac{dc}{dt} = \frac{c^0 - c}{m_D}$,

где c — текущая концентрация раствора в глубоком горизонте; c^0—концентрация этого же раствора в зоне активного водообмена, причем величина c^0 может считаться постоянной во времени.

Поскольку диффузионный поток должен компенсироваться уменьшением содержания солей в глубоком горизонте, то балансовое уравнение в элементе этого горизонта единичной площади горизонтального сечения будет

$$D_м \frac{c - c^0}{m_р} = -nm\frac{dc}{dt}. \quad (VI.2.1)$$

Разделяя переменные, получим уравнение

$$-\frac{dc}{c - c^0} = \frac{D_м}{nmm_р}dt, \quad (VI.2.1a)$$

интегрируя которое, найдем

$$-\ln(c - c^0) = \frac{D_м}{nmm_р}t + C.$$

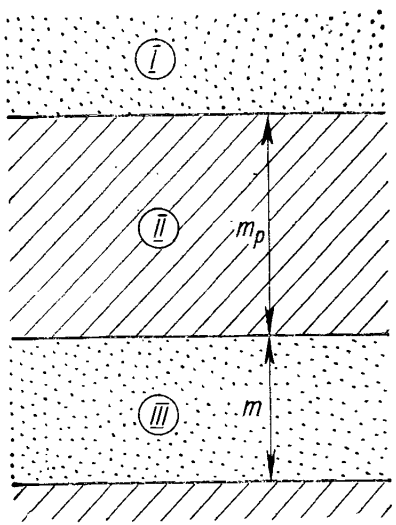


Рис. 105. Схема к расчету диффузионного рассоления горизонта соленых вод зоны затрудненного водообмена:
I — горизонт пресных вод зоны активного водообмена; II — разделяющие слои; III — горизонт соленых вод зоны затрудненного водообмена

Произвольную постоянную C найдем из условия $c = c_0$ при $t = 0$, т. е. $C = -\ln(c_0 - c^0)$, откуда окончательно получим

$$\ln\frac{c_0 - c^0}{c - c^0} = \frac{D_м}{n\,mm_р}t \quad (VI.2.2)$$

или

$$\bar{c} = \frac{c - c^0}{c_0 - c^0} = e^{-\beta t},\ \beta = \frac{D_м}{n\,mm_р}. \quad (VI.2.2a)$$

Рассмотрим условия практически полного опреснения глубокого горизонта, которое можно считать при $\bar{c} = 0{,}01$—$0{,}02$, что примерно соответствует значению $\beta t \cong 4$. Принимая для глинистых пород $D_м = 10^{-5}$ м²/сут, при типичных значениях $n = 0{,}2$, $m = 100$ м, $m_р = 500$ м найдем

$$\beta = \frac{10^{-5}}{0{,}2 \cdot 100 \cdot 500} = 10^{-9}\frac{1}{\text{сут}} \text{ и } t = 4/\beta = 4 \cdot 10^9 \text{ сут} \cong 10 \text{ млн. лет.}$$

Из такого расчета можно сделать вывод, что находящиеся на глубине нескольких сотен метров подземные воды высокой минерализации либо должны быть связаны с наличием солей в водовмещающих породах, либо не могут быть древнее неогена-палеогена, поскольку в противном случае они должны были подвергнуться диффузионно-осмотическому опреснению. Однако такой вывод, впервые сделанный на основании подобных расчетов С. И. Смирновым [48], справедлив только при условии, что коэффициенты диффузии глинистых разделяющих слоев соответствуют принятому значению $D_м$.

1.2. Конвективный теплоперенос через разделяющий пласт (стационарная задача)

Рассмотрим закономерности распределения температуры в разделяющем глинистом пласте (рис. 106), где на кондуктивный тепловой поток, возникающий за счет геотермического градиента, накладывается вертикальный водообмен со скоростью v. Тогда тепловой поток $v_т$ через единичную площадь горизонтального сечения разделяющего слоя определится формулой

$$v_т = c_в \gamma v \theta - \lambda \frac{d\theta}{dz}. \qquad \text{(VI.2.3)}$$

Имея в виду, что в разделяющем слое фильтрационный поток направлен практически по вертикали, а задача считается стационарной, то тепловой поток $v_т$ по вертикали постоянен и уравнение (VI.2.3) допускает разделение переменных

$$\frac{d\theta}{c_в \gamma v \theta - v_т} = \frac{dz}{\lambda}, \qquad \text{(VI.2.3а)}$$

причем после интегрирования при $\lambda = \text{const}$ имеем

$$\frac{1}{c_в \gamma v} \ln \left(\theta - \frac{v_т}{c_в \gamma v} \right) = \frac{z}{\lambda} + C. \qquad \text{(VI.2.4)}$$

Произвольную постоянную C и величину $v_т$ определим из условия заданности температур в кровле и подошве разделяющего слоя: задавая $\theta = \theta_0$ при $z = 0$, получим

$$C = \frac{1}{c_в \gamma v} \ln \left(\theta_0 - \frac{v_т}{c_в \gamma v} \right), \qquad \text{(VI.2.5)}$$

а задавая $\theta = \theta_m$ при $z = m$, получим уравнение

$$\frac{1}{c_в \gamma v} \ln \frac{\theta_m - \frac{v_т}{c_в \gamma v}}{\theta_0 - \frac{v_т}{c_в \gamma v}} = \frac{m}{\lambda}, \qquad \text{(VI.2.6)}$$

разрешая которое относительно $v_т$, получим выражение для единичного теплового потока

$$v_т = c_в \gamma v \left[\theta_0 - \frac{\theta_m - \theta_0}{\exp\left(\frac{c_в v_т m}{\lambda}\right) - 1} \right]. \qquad \text{(VI.2.7)}$$

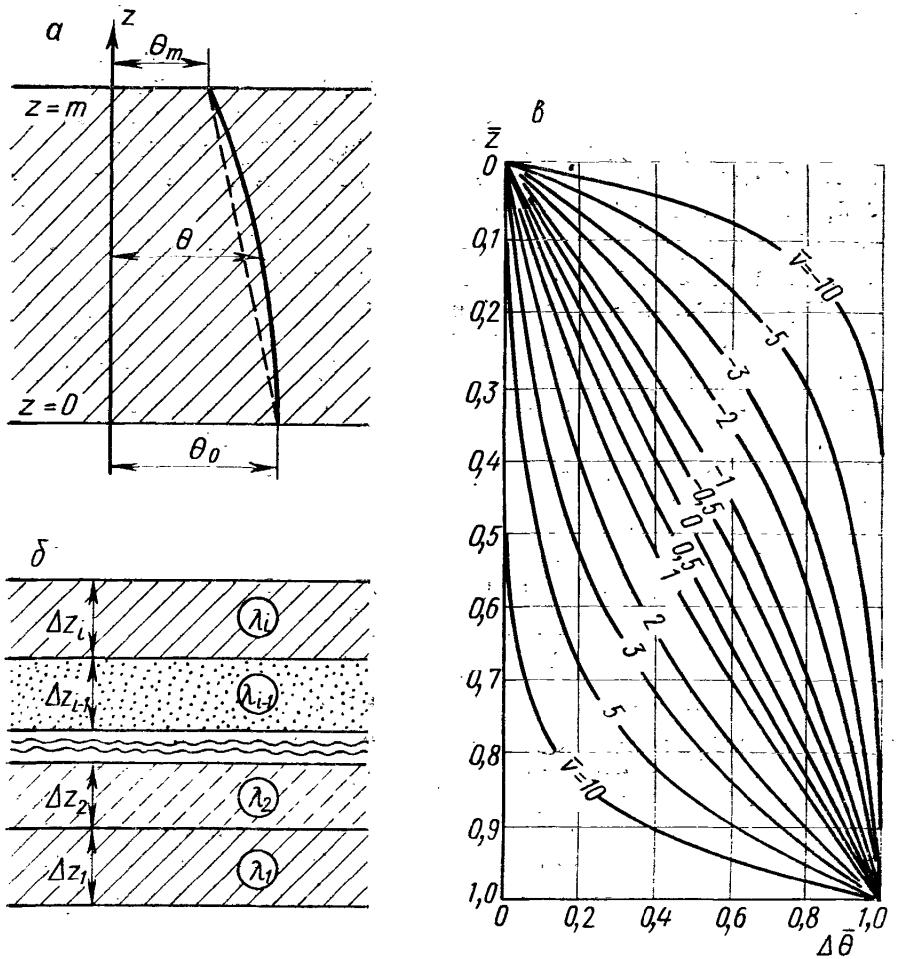


Рис. 106. Схема к расчету конвективного теплопереноса через разделяющие слои:
а — эпюра распределения температуры в однородном разделяющем слое; *б* — схема слоистого строения разделяющего слоя; *в* — график зависимости распределения относительной температуры по высоте однородного разделяющего слоя

Подставляя выражения (VI.2.5) и (VI.2.7) в уравнение (VI.2.4), приведем его к виду

$$\frac{1}{c_в \gamma v} \ln\left[1 + \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}\left(\exp\frac{c_в \gamma m v}{\lambda} - 1\right)\right] = \frac{z}{\lambda}. \qquad \text{(VI.2.8)}$$

Разрешая это уравнение относительно θ, получим распределение температуры по мощности разделяющего пласта в безразмерной форме:

$$\Delta\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0} = \frac{\exp(\bar{v}\bar{z}) - 1}{\exp\bar{v} - 1}, \quad \bar{v} = \frac{c_в \gamma m v}{\lambda}, \quad \bar{z} = \frac{z}{m}, \quad \text{(VI.2.9)}$$

которое впервые было дано в работах [52, 60].

Значительный интерес представляет применение этого уравнения для определения скорости перетекания v по данным о распределении температуры в пределах разделяющего слоя. Поскольку уравнение (VI.2.9) не разрешается относительно v, то его определение может быть проведено подбором, если известно хотя бы одно промежуточное значение θ. Для упрощения такого определения можно воспользоваться приведенным на рис. 106, *в* графиком зависимости $\Delta\bar{\theta}(\bar{z})$ при различных значениях $\bar{v}$.

Следует отметить, что в реальных условиях закономерности распределения температуры в разделяющем слое могут осложняться влиянием его теплофизической неоднородности $\lambda(z)$, если ввести новую переменную ξ, определяемую из соотношения

$$\frac{d\xi}{\lambda_0} = \frac{dz}{\lambda(z)} \text{ или } \xi = \int_0^z \frac{dz}{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \text{(VI.2.10)}$$

причем λ_0 — любое значение λ, которое выбирается в качестве расчетного. Тогда уравнение (VI.2.3а) принимает вид

$$\frac{d\theta}{c_в \gamma v \theta - v_т} = \frac{d\xi}{\lambda_0}, \quad \text{(VI.2.11)}$$

соответствующий условиям теплопереноса в слое с постоянным коэффициентом теплопроводности λ, в котором задаются расчетные координаты каждой точки ξ и расчетная мощность m_0, причем последняя определяется из (VI.2.10), как ξ при $z=m$. Обычно теплофизические параметры принимают постоянными для каждого литологического слоя, так что они меняются кусочным образом — от слоя к слою. Тогда для каждой пачки, состоящей из n слоев,

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta z_i}{\bar{\lambda}_i}, \quad \bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0}, \quad \text{(VI.2.12)}$$

где Δz_i и λ_i — мощность и коэффициент теплопередачи i-того слоя.

§ 2. ДИСПЕРСИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ОДНОРОДНЫХ ВОДОНОСНЫХ ПЛАСТАХ

В водоносных пластах миграция подземных вод обычно происходит в форме взаимовытеснения подземных вод различного состава. Основную роль в таком вытеснении играет конвективный

перенос, анализ которого производится по схеме поршневого вытеснения. Влияние же диффузионно-кондуктивного переноса проявляется в том, что граница раздела между взаимодействующими жидкостями в процессе вытеснения теряет свою четкую геометрическую форму, создаваемую конвективным вытеснением по поршневой схеме, и как бы размазывается вследствие образования переходной зоны между взаимодействующими жидкостями.

В однородной среде размазывание границы раздела происходит за счет проявления гидродисперсии. Для изучения и оценки процессов гидродисперсии рассмотрим наиболее простые условия вытеснения однокомпонентных растворов в одномерном фильтрационном потоке, направленном по оси x со скоростью фильтрации v. Дадим вывод дифференциального уравнения гидродисперсии (фильтрационной диффузии), используя приведенные выше основные закономерности конвективного и кондуктивного переноса.

В случае изучения процесса переноса солей составим баланс вещества с концентрацией c в бесконечно малом элементе длиной dx и единичного поперечного сечения. При весовой скорости массопереноса $v_c = cv - D\frac{\partial c}{\partial x}$ количество вещества, поступающего в элемент за время dt, будет равным $v_c dt$, а пройдя бесконечно малый элемент dx, скорость v_c получит бесконечно малое приращение $\frac{\partial v_c}{\partial x} dx$, так что количество вещества, выходящего из элемента за время dt, будет $\left(v_c + \frac{\partial v_c}{\partial x} dx\right) dt$.

Поскольку изменение количества вещества в элементе за время dt будет $n\frac{\partial c}{\partial t} dtdx$, то получим следующее уравнение баланса:

$$v_c dt - \left(v_c + \frac{\partial v_c}{\partial x} dx\right) dt = n\frac{\partial c}{\partial t} dxdt \qquad \text{(VI.2.13)}$$

или после сокращения бесконечно малых

$$\frac{\partial v_c}{\partial x} + n\frac{\partial c}{\partial t} = 0. \qquad \text{(VI.2.14)}$$

Подставляя сюда выражение для весовой скорости v_c, получим дифференциальное уравнение микродисперсии растворов в фильтрационном потоке

$$n\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \qquad \text{(VI.2.15)}$$

Уравнение (VI.2.15) и его решения могут использоваться и при наличии сорбционных процессов, если только пренебречь кинетикой сорбции, т. е. считать, что сорбция протекает мгновенно и

при постоянном коэффициенте распределения. В этом случае во всех зависимостях активную пористость n следует заменить на эффективную пористость $n_э$, определяемую формулой (VI.1.3).

Аналогичное уравнение для микродисперсии теплового потока получим, используя общее уравнение кондуктивного теплопереноса (VI.1.11), так что суммарная скорость теплопереноса, определяющая количество тепла, переносимого через единичную площадь сечения потока, будет

$$v_т = c_в \gamma v\theta - \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}. \qquad \text{(VI.2.16)}$$

Изменение количества тепла водонасыщенной породы определяется суммарной теплоемкостью скелета породы и находящейся в ней воды, так что в рассматриваемом бесконечно малом элементе это изменение за время dt будет $(c_{ск}\gamma_{ск} + nc_в\gamma)\frac{\partial \theta}{\partial x} dxdt$, где $c_{ск}$ — удельная теплоемкость скелета породы с объемным весом $\gamma_{ск}$. Поскольку изменение тепла в элементе должно компенсироваться изменением теплового потока по его длине, то получим уравнение неразрывности теплового потока

$$\frac{\partial v_т}{\partial x} + (c_{ск}\gamma_{ск} + nc_в\gamma)\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \qquad \text{(VI.2.16а)}$$

а уравнение микродисперсии теплового потока примет вид

$$\left(n + \frac{c_{ск}}{c_в} \cdot \frac{\gamma_{ск}}{\gamma}\right)\frac{\partial \theta}{\partial t} + v\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\lambda}{c_в \gamma} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \qquad \text{(VI.2.17)}$$

Сопоставляя уравнения (VI.2.15) и (VI.2.17), можно видеть их аналогичность, причем переходя от поля концентраций к температурному полю, т. е. заменяя концентрацию на температуру, следует вместо коэффициента дисперсии D поставить коэффициент температуропроводности $\frac{\lambda}{c_в \gamma}$ и определить эффективную пористость выражением (VI.1.4).

Рассмотрим теперь в такой постановке фундаментальную задачу вытеснения растворов в потоке постоянного сечения, имевшем до начала процесса постоянную концентрацию раствора c_0, причем в начальный момент процесса на его входной границе произошло мгновенное изменение концентрации до значения c^0.

Решение этой задачи получим, вводя в исходное дифференциальное уравнение (VI.2.15) вместо концентрации c ее интегральное преобразование, по Лапласу — Карсону, $C_р$, что приводит это уравнение к виду

$$np(C_р - c_0) + v\frac{\partial C_р}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C_р}{\partial x^2} \qquad \text{(VI.2.18)}$$

где p — параметр преобразования (см. § 2 главы 2 раздела III). Решение уравнения (VI.2.18) при условии $C_p = c^0$ на границе $x=0$ полуограниченного потока имеет вид

$$\bar{C}_p = \frac{C_p - c_0}{c^0 - c_0} = e^{-ax}, \quad a = \sqrt{\left(\frac{v}{2D}\right)^2 + \frac{np}{D}} - \frac{v}{2D}. \quad \text{(VI.2.18a)}$$

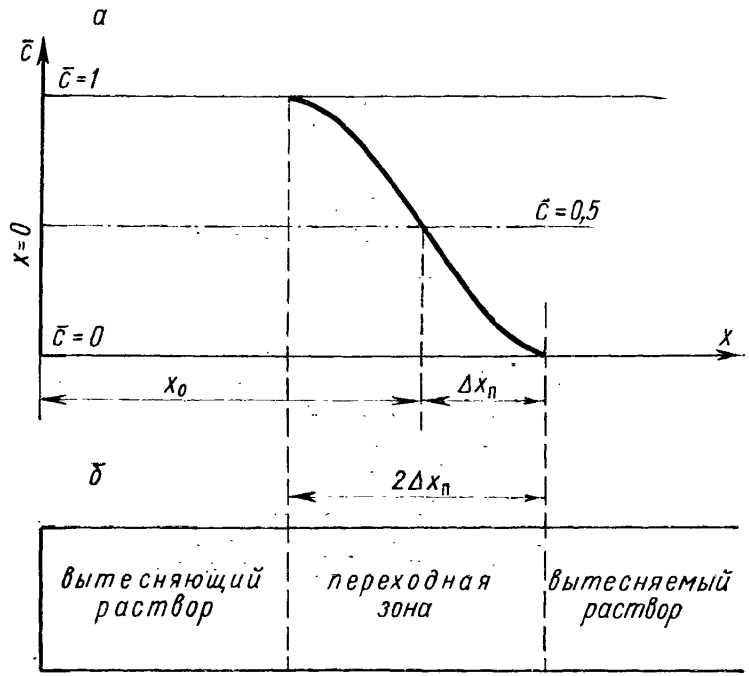


Рис. 107. Формирование процесса вытеснения растворов в потоке для условий фундаментального решения уравнения микродисперсии:
$а$ — распределение относительной концентрации раствора по длине колонны; $б$ — расположение основных миграционных зон

Переход от этого изображения к оригиналу дает выражение [21]

$$\bar{c} = \frac{c - c_0}{c^0 - c_0} = 0{,}5\,(\operatorname{erfc}\xi + e^{\eta}\cdot\operatorname{erfc}\xi'), \quad \text{(VI.2.19)}$$

где

$$\xi = \frac{nx - vt}{2\sqrt{nDt}}, \quad \xi' = \frac{nx + vt}{2\sqrt{nDt}}, \quad \eta = \frac{vx}{D}. \quad \text{(VI.2.19a)}$$

Расчеты по уравнению (VI.2.19) показывают, что через некоторое время после начала процесса формируются три основные миграционные зоны (рис. 107): вытесняющего раствора (с отно-

сительной концентрацией $\bar{c}=1$), переходная ($1>\bar{c}>0$) и вытесняемого раствора ($\bar{c}=0$). В это время второй член уравнения (VI.2.19) оказывается пренебрежимо малым, и тогда можно пользоваться упрощенным выражением для относительной концентрации [17, 21]:

$$\bar{c} = 0{,}5\,\mathrm{erfc}\,\xi. \qquad \text{(VI.2.20)}$$

Получаемая при этом относительная ошибка δ_c оценивается по формуле [55]

$$\delta_c = \frac{0{,}3}{\sqrt{\eta}}. \qquad \text{(VI.2.21)}$$

Из выражения (VI.2.20) прежде всего следует, что на фронте поршневого вытеснения, где $x = x_0 = \frac{v}{n}t$, получаем $\xi=0$, $\mathrm{erfc}\,\xi=1$ и $\bar{c}=0{,}5$, т. е. положение фронта поршневого вытеснения соответствует середине переходной зоны со средней концентрацией между вытесняющим и вытесняемым растворами.

Оценим далее размер переходной зоны, возникающей за счет влияния гидродисперсии. Этот размер характеризуется величиной $\Delta x_п$, на которую передняя граница переходной зоны обгоняет фронт поршневого вытеснения. Считая, что передняя граница переходной зоны соответствует относительной концентрации $\bar{c}=0{,}001$, по таблице функции erfc (см. приложение) при $\mathrm{erfc}\,\xi=0{,}002$ найдем соответствующее значение $\xi=\xi_п=2{,}2$, а поскольку

$$\xi_п = 0{,}5\Delta x_п \sqrt{\frac{n}{Dt}},$$

то получим формулу

$$\Delta x_п = 4{,}4 \sqrt{\frac{D}{n}t}. \qquad \text{(VI.2.22)}$$

Принимая для D выражение (VI.1.12), представим (VI.2.22) в виде

$$\Delta x_п = 4{,}4 \sqrt{\left(\frac{D_м}{v} + \delta_1\right) x_0}, \qquad \text{(VI.2.22а)}$$

где v — средняя скорость фильтрации на границе раздела при ее продвижении на расстояние x_0.

Оценим порядок величины $\Delta x_п$ в лабораторных и натурных условиях, считая $D_м^0=1$ см²/сут (эта величина характерна для большого класса растворов [49]), а по формуле (VI.1.9) при $\chi=0{,}6$ и $n=0{,}3$ найдем $D_м=0{,}02$ м²/сут$=2\cdot10^{-5}$ м²/сут.

В лабораторных условиях при опытах по фильтрации в колоннах с песчаными грунтами обычно $v\cong k=5$—50 м/сут и длина ко-

лонны $l_к \cong x_0 = 0{,}1—1$ м. Принимая $v = 10$ м/сут и $x_0 = 1$ м из (VI.2.22а), получим

$$\Delta x_п = 4{,}4 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{10} + 0{,}001\right) \cdot 1} = 0{,}14 \text{ м},$$

что вполне соизмеримо с длиной пути фильтрации. Следовательно, в лабораторных условиях и в натурных опытах небольшого масштаба (при длине пути фильтрации, измеряемой в метрах) микродисперсия может играть существенную роль (прежде всего за счет влияния гидравлической дисперсии).

В натурных условиях длина потока измеряется обычно сотнями и тысячами метров, а при $k = 1—10$ м/сут и градиенте фильтрации $I = 0{,}01—0{,}001$ может быть принята характерная скорость фильтрации $v \cong 0{,}01$ м/сут. Задавая, кроме того, $x_0 = 1$ км $= 10^3$ м, получим длину переходной зоны

$$\Delta x_п = 4{,}4 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^5}{0{,}01} + 0{,}001\right) 10^3} = 8 \text{ м},$$

т. е. неизмеримо меньшую длины потока. Следовательно, в натурных условиях при изучении процессов вытеснения растворов по направлению фильтрационного потока микродисперсия существенного значения не имеет.

Из приведенных расчетных данных можно также видеть, что в лабораторных условиях подавляющую роль играют процессы гидродисперсии $\left(\text{поскольку оказывается } \delta_1 \gg \frac{D_м}{v}\right)$, а в натурных условиях их влияние уже гораздо менее заметно $\left(\delta_1 \text{ оказывается уже меньшим } \frac{D_м}{v}\right)$. Такие расчеты позволяют утверждать, что в натурных условиях гидродисперсия может заметно проявляться главным образом в скальных породах.

Аналогичным путем можно показать, что продольный кондуктивный теплоперенос в фильтрационном потоке хотя имеет и несколько большее влияние, чем микродисперсия (в условиях лабораторных и натурных экспериментов он, безусловно, должен учитываться), однако в натурных условиях его следует принимать во внимание только при сравнительно небольших длинах потока (обычно порядка первых сотен метров).

§ 3. МАКРОДИСПЕРСИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Большое влияние на миграцию подземного потока оказывает неоднородность пласта в плане и в разрезе, обусловливающая проявление макродисперсии при переносе [53, 58, 63, 68].

Упорядоченная неоднородность пласта прежде всего представляется *горизонтальной слоистостью*, особенно резко выраженной

при переслаивании существенно различных по проницаемости пород (например, песчаных и глинистых). В этом случае миграционный поток прежде всего идет конвективным путем в хорошо проницаемых слоях, распространяясь в слабопроницаемые слои путем поперечной дисперсии (рис. 108, *а*).

Рассмотрим в такой постановке наиболее простую схему равномерно-слоистого пласта, т. е. считая, что чередующиеся хорошо и слабопроницаемые слои имеют одинаковые параметры по высоте пласта. Вследствие симметрии такого равномерно-слоистого пласта в нем можно изолированно рассматривать часть пласта, состоящую из половины хорошо проницаемого слоя мощностью $m_1=0{,}5\ m$ и половины слабопроницаемого слоя мощностью $m_2=0{,}5\ m_p$ (рис. 108, *б*). Приведем для этой схемы решения фундаментальной линейной (одномерной) задачи вытеснения растворов в полуограниченном пласте, содержавшем раствор с концентрацией c_0, который, начиная с момента времени $t=0$, вытесняется раствором концентрации c^0, подаваемым в сечении $x=0$ с удельным расходом $q=m_1v_1$. Полное решение такой задачи проанализировано в работах [45, 46] и оказывается довольно сложным, поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных представлений этого решения.

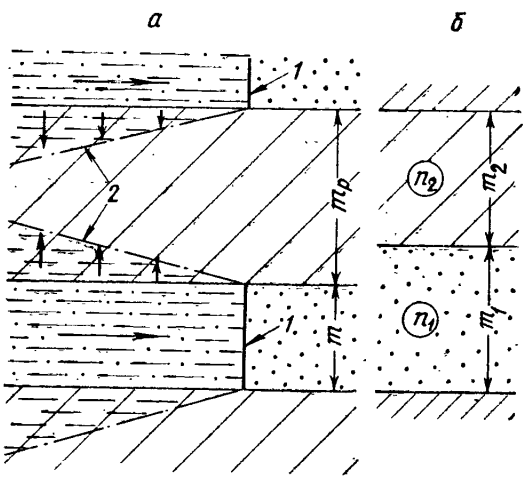


Рис. 108. Схема миграции при вытеснении в слоистом пласте: *а* — направления и зоны миграции (*1* и *2* — границы проникновения вытесняющего раствора); *б* — двухслойный пласт

В начальный период процесса вытеснения раствор проникает только в периферийные части слабопроницаемых слоев; в этом случае можно считать мощность разделяющего слоя m_2 неограниченной и пользоваться решением Лаверье [45, 46], которое в принятых обозначениях имеет вид

$$\bar{c}=\frac{c-c_0}{c^0-c_0}=\operatorname{erfc}\xi^0,\quad \xi^0=\frac{x\sqrt{n_2D_T}}{2\sqrt{q\,(qt-n_1m_1x)}},\qquad \text{(VI.2.23)}$$

где D_T — коэффициент поперечной дисперсии в слабопроницаемом слое. Время начального периода определяется условием

$$t<0{,}2\,\frac{n_1m_1^2}{D_T}\cdot\qquad \text{(VI.2.23а)}$$

Обоснуем исходя из этого решения условия применимости схемы послойного движения, когда можно пренебречь поперечным переносом в соседние слои. Для этого найдем такое значение скорости фильтрации v_0, которое соответствует движению фронта переноса, соответствующего значению $c=0{,}5$. При $\operatorname{erfc}\xi^0=0{,}5$ по таблице функции $\operatorname{erfc}\lambda$ приложения находим $\xi^0=0{,}467$ и, полагая $x=\frac{v_0}{n_1}t$, из выражения для ξ^0 после несложных преобразований получим выражение, связывающее относительную погрешность расчетов скорости миграции по схеме послойного переноса с безразмерным временем процесса:

$$\theta=\frac{n_2D_Tt}{n_1^2m_1^2}=0{,}87\frac{\delta_v}{(1-\delta_v)^2},\quad \delta_v=\frac{v_1-v_0}{v_0}. \qquad \text{(VI.2.24)}$$

Проведем по этому соотношению численный анализ погрешности схемы послойного переноса, принимая реальное значение $\delta_v=0{,}2$, которому согласно (VI.2.24) соответствует значение $\theta=0{,}27$. Рассчитывая по этому значению θ время процесса при значениях $m_1=m_2=1$ м, $n_1=n_2=0{,}3$ и $D_T=D_M=2\cdot10^{-5}$ м^2/сут, получим $t=4\cdot10^4$ сут$=100$ лет, т. е. при действии диффузионного поперечного переноса схема послойного переноса имеет почти неограниченные возможности применения. Если считать $D_T=\delta_Tv_2$, где v_2 — скорость фильтрации в слабопроницаемом слое, то для безразмерного параметра θ получим выражение

$$\theta=\frac{n_2\delta_Tl}{n_1m_1^2}\cdot\frac{v_2}{v_1}, \qquad \text{(VI.2.24а)}$$

где $l=v_1t/n_1$ — длина пути конвективного переноса. Считая $v_2/v_1=k_2/k_1$, где k_1 и k_2 — коэффициенты фильтрации слоев, запишем условие (VI.2.24) в виде

$$\frac{n_2\delta_Tl}{n_1m_1^2}\cdot\frac{k_2}{k_1}=0{,}87\frac{\delta_v}{(1-\delta_v)^2}. \qquad \text{(VI.2.25)}$$

Проведя расчеты по выражению (VI.2.25) при характерных значениях параметров, можно показать, что в песчаных пластах, где $\delta_T=10^{-3}$—10^{-4} м, схема послойного движения имеет широкую область применения и может давать существенные погрешности только в потоках очень большой длины (порядка 1 км и более), тогда как в скальных породах, где может быть $\delta_T=0{,}1$—1 м, эта схема нарушается уже в потоках небольшой длины.

При длительном протекании процесса область влияния диффундирующего раствора распространяется на всю мощность слабопроницаемого слоя; при этом зависимости макродисперсии по своей форме оказываются идентичными зависимостям «диффузионной» модели, описывающим процессы диффузионной микродисперсии. В частности, для поставленной задачи в этом случае

можно использовать решение (VI.2.20) фундаментальной задачи уравнения фильтрационной диффузии, задавая расчетный коэффициент дисперсии D выражением

$$D = \delta_2 v^2, \quad \delta_2 = \frac{n_2^2 m_2^3}{3n^2 (m_1 + m_2) D_м}, \qquad \text{(VI.2.26)}$$

где v и n — средние значения скорости фильтрации и пористости:

$$v = \frac{q}{m_1 + m_2}, \quad n = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad \text{(VI.2.26а)}$$

Условие применимости такой «диффузионной» модели в данном случае определяется неравенством

$$\frac{D_T t}{m_2 (n_1 m_1 + n_2 m_2)} > 0{,}1. \qquad \text{(VI.2.26 б)}$$

Численный анализ этого неравенства, проведенный при характерных значениях параметров, показывает, что в песчаных и песчано-глинистых пластах «диффузионная» схема применима для учета слоистости пласта только по отношению к чрезвычайно длительным процессам (порядка сотен лет и более), тогда как в пластах, сложенных скальными породами, она может иметь довольно широкую область применения.

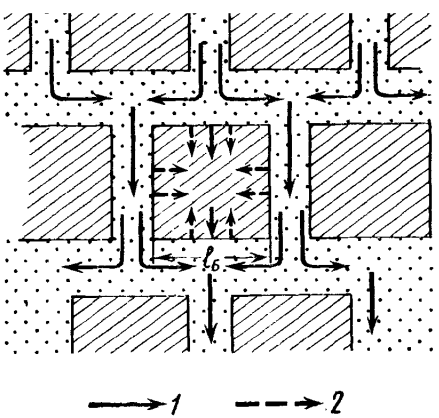


Рис. 109. Блоковая модель мозаичного строения с двойной емкостью (*1* и *2* — пути конвективного и диффузионного переноса)

На дисперсию при тепло- и массопереносе значительно влияет также *гетерогенность* пород, которая обусловливается изменчивостью их состава, структурностью, наличием различных нарушений. Имея в виду существенно неупорядоченный характер гетерогенности пород, целесообразно для ее учета прежде всего использовать наиболее простую гетерогенно-блоковую модель среды с двойной емкостью [15, 26], в которой порода представляет собой квазиоднородную систему слабопроницаемых блоков и прорезающих их проводящих каналов (см. рис. 11). Предполагается, что конвективный перенос осуществляется главным образом по проводящим каналам, а обмен между каналами и блоками — диффузионно-кондуктивным путем, причем емкость блока считается как бы сосредоточенной в его центре, что, строго говоря, справедливо при условии квазистационарного переноса внутри каждого блока. Такой постановке отвечает рассмотренная выше схема слоистого

строения. Вместе с тем реальной структуре проницаемости горных пород лучше соответствует «мозаичная» схема строения (рис. 109), в которой проницаемые каналы имеют извилистый характер, перемежаясь в пространстве со слабопроницаемыми блоками. В этой схеме предполагается, что перенос внутри блоков осуществляется не только диффузионно-кондуктивным, но и конвективным путем, — со скоростью фильтрации, обусловливаемой относительной проницаемостью блоков [57].

Исходя из такой схемы строения породы, рассмотрим солевой баланс блока, характеризующегося объемом $V_б$, площадью поверхности $\omega_б$ и средней площадью поперечного сечения $\omega_{бп}$. Обозначая концентрацию солей в каналах через c, а в блоке через c^*, запишем выражение для расхода поступления солей в блок диффузионном путем:

$$Q_D = D^*_м \omega_б \frac{c - c^*}{l_б}, \qquad \text{(VI.2.27)}$$

где $l_б$ — расчетное расстояние от поверхности до центра блока; $D^*_м$ — коэффициент молекулярной диффузии в блоке. Конвективным путем происходит перенос при скорости фильтрации в блоке $v_б = \tilde{k}v$, где $\tilde{k}$ — относительная проницаемость блока; $v_{ср}$ — средняя скорость фильтрации потока; расход конвективного поступления солей в блок определяется выражением

$$Q_к = v_б \omega_{бп} (c - c^*) = \tilde{k} v \omega_{бп} (c - c^*). \qquad \text{(VI.2.28)}$$

Уравнение баланса солей в блоке будет

$$Q_D + Q_к = n^* V_б \frac{\partial c^*}{\partial t}, \qquad \text{(VI.2.29)}$$

где n^* — активная (эффективная) пористость блока. Совместное решение этих уравнений дает дифференциальное уравнение внутреннего солеобмена:

$$n^* \frac{\partial c^*}{\partial t} = \alpha (c - c^*), \quad \alpha = \alpha_D + \alpha_к, \qquad \text{(VI.2.30)}$$

где α — коэффициент массообмена, составляющие которого α_D и $\alpha_к$ отражают действие диффузионного и конвективного переноса в блоках, причем

$$\alpha_D = D^*_м \frac{\omega_б}{l_б V_б}, \quad \alpha_к = \tilde{k} \frac{\omega_{бп}}{V_б} v. \qquad \text{(VI.2.31)}$$

В такой модели величина коэффициента массообмена оказывается линейно-зависящей от скорости фильтрации v.

Если принять, что блоки имеют кубическую форму с размером l_*, то $V_б = l_*^3$, $\omega_{бп} = l_*^2$, $\omega_б = 6l_*^2$, $l_б = 0{,}25 l_*$ и тогда можно пред-

ставить структуру коэффициента массообмена в форме

$$\alpha = \alpha_D + \frac{1}{\lambda} v, \quad \alpha_D = \frac{24 D_м}{l^2}, \quad \lambda = \frac{l_*}{\widetilde{k}}. \qquad \text{(VI.2.32)}$$

В дополнение к уравнению солеобмена следует записать общее уравнение солепереноса в проницаемых каналах и блоках. Для его вывода составим баланс солей в представительном элементе потока объемом V, включающем в себя блок объемом $V_б$, и относящиеся к нему каналы объемом $V_к$ (см. рис. 109). Пренебрегая дисперсией солей в каналах, получим следующее балансовое уравнение:

$$V_к n \frac{\partial c}{\partial t} + V_б n^* \frac{\partial c^*}{\partial t} + \Delta Q_c = 0, \qquad \text{(VI.2.33)}$$

где n — активная (эффективная) пористость каналов, а ΔQ_c — изменение расхода солепереноса в пределах рассматриваемого элемента, причем

$$Q_c = \omega_к v_к c + \omega_{бп} v_б c^*, \qquad \text{(VI.2.34)}$$

где $\omega_к$ — площадь поперечного сечения каналов; $v_к$ — скорость фильтрации в каналах.

Дальнейший вывод дадим для одномерного потока в направлении l. Обозначая через $\varkappa$ относительное содержание каналов по площади поперечного сечения, имеем

$$v = \varkappa v_к + (1 - \varkappa) v_б, \quad \omega_к = \varkappa \omega, \quad \omega_б = (1 - \varkappa) \omega \qquad \text{(VI.2.35)}$$

и тогда выражение (VI.2.34) приводится к виду

$$Q_c = \omega v [c + \widetilde{k}(1 - \varkappa)(c^* - c)]. \qquad \text{(VI.2.36)}$$

Подставляя это выражение в балансовое уравнение (VI.2.33) и имея в виду, что $\Delta Q_c \cong \frac{\partial Q_c}{\partial l} \Delta l$ и $\Delta l = V/\omega$, а также считая $V_к = \varkappa V$ и $V_б = (1 - \varkappa) V$, получим

$$\varkappa n \frac{\partial c}{\partial t} + (1 - \varkappa) n^* \frac{\partial c^*}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial l} [c + \widetilde{k}(1 - \varkappa)(c^* - c)] = 0. \qquad \text{(VI.2.37)}$$

При относительно малой проницаемости блоков можно упростить уравнение (VI.2.37), считая $\widetilde{k} = 0$:

$$\varkappa n \frac{\partial c}{\partial t} + (1 - \varkappa) n^* \frac{\partial c^*}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial l} = 0. \qquad \text{(VI.2.37а)}$$

В этом случае, как следует из сопоставления уравнений (VI.2.37а) и (VI.2.15), переход от гомогенной среды к гетерогенной производится следующей заменой:

$$n \frac{\partial c}{\partial t} \to \varkappa n \frac{\partial c}{\partial t} + (1 - \varkappa) n \frac{\partial c}{\partial t}. \qquad \text{(VI.2.38)}$$

Сопоставление фундаментальных решений для гетерогенно-блоковой среды и для схемы макродисперсии — в полуограниченном потоке при мгновенном изменении концентрации на границе — показывает, что распределение концентрации в переходной зоне описывается идентичными по форме уравнениями, которые согласуют-

ся, если связать коэффициент макродисперсии D с коэффициентом внутреннего обмена α соотношением

$$D = \frac{1-\varkappa}{\alpha} v^2, \qquad \text{(VI.2.39)}$$

где v — скорость фильтрации. На основе этого соотношения открывается возможность для понимания структуры зависимости коэффициента макродисперсии D от скорости фильтрации v, если принять для α выражение (VI.2.32).

Таким образом получается, что при малых скоростях фильтрации, когда $\alpha_D \gg \alpha_к = v/\lambda$ должно быть $D \sim v^2$, т. е. сохраняется выражение (VI.2.26) при $\delta_2 = (1-\varkappa)/\alpha_D$. Выражая α_D согласно (VI.2.32) через характерный размер блоков l_*, получим

$$\delta_2 = \frac{(1-\varkappa) l_*^2}{24 D_м}. \qquad \text{(VI.2.40)}$$

В частности, по данным опытно-миграционных работ, проведенных в опоках и песчаниках эоценового горизонта Зауралья [28], получено значение $\delta_2 = 135$ сут, что при $D_м = 10^{-5}$ м^2/сут соответствует характерному размеру блока $l_* = 0{,}18$ м.

При больших скоростях фильтрации, когда $\alpha_к \gg \alpha_D$, получим

$$D = \lambda (1-\varkappa) v, \quad \lambda = \frac{l_*}{\tilde{k}} \qquad \text{(VI.2.41)}$$

Такие условия характерны для солепереноса при размывках земель и при лабораторных опытах с монолитами пород. Имеющиеся опытные данные обработки полевых материалов и промывок дают сравнительно близкие значения $\lambda = D/v = 1{,}5$—3 м [9]. Несколько меньшие значения $\lambda = 0{,}1$—1 м получены обработкой опытных данных солепереноса в монолите непосредственно по схеме гетерогенно-блоковой среды [11]. Принимая далее для супесчано-суглинистых отложений характерное значение $\tilde{k} = 0{,}1$—$0{,}2$, получим, что такие значения λ отвечают размерам блоков порядка $l_* = 0{,}1$ м, соответствующим размерам зоны неоднородности пород, фиксируемым по данным фильтрационных опробований.

При таких размерах блоков согласно (VI.2.32) имеем $\alpha_D \cong 0{,}02$ м/сут, а при характерных для условий промывок значениях $v = 0{,}01$—$0{,}1$ м/сут и $\lambda = 0{,}1$—1 м получим наиболее вероятный диапазон значений $\alpha_к = 0{,}01$—$0{,}1$ м/сут.

Таким образом, при малых скоростях фильтрации значения α_D и $\alpha_к$ имеют примерно один порядок, а при больших v значения $\alpha_к$ оказываются заметно бо́льшими, чем α_D.

Влияние макродисперсии может в реальных условиях значительно превышать влияние гидродисперсии, поскольку величина λ на два-три порядка больше величины δ_1.

При квадратичной зависимости коэффициента дисперсии от скорости фильтрации вида (VI.2.26) решения для радиального потока, возникающего при закачке в скважину раствора с расходом Q, оказываются формально идентичными соответствующим решениям задач для линейного потока, если заменить в них v на $\frac{Q}{\pi m}$ и D на $\delta_2 \left(\frac{Q}{\pi m}\right)^2$ [55].

Например, решение основной радиальной задачи макродисперсии, когда при стационарном наливе в скважину воды с расходом Q, имеющей солевую концентрацию индикатора c_0, в момент времени $t=0$ с тем же расходом начинает подаваться раствор той же соли с концентрацией c^0, выражается уравнением (VI.2.19), в котором только следует положить

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{t_0 - t}{2\sqrt{\delta_2 n t}}, \quad \xi' = \frac{t_0 + t}{2\sqrt{\delta_2 n t}}, \\ \eta &= \frac{t_0}{\delta_2}, \quad t_0 = \frac{\pi n m}{Q}(r^2 - r_c^2). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI.2.42)}$$

Ряд более сложных задач при постоянном или линейно-зависящем от скорости фильтрации коэффициенте дисперсии рассмотрен, например, в работах [5, 17, 39].

Глава 3
МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИГРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Закономерности процессов миграции могут использоваться и для решения обратных задач — определения параметров миграции подземных вод по данным запуска индикаторных растворов, которые, следуя зарубежной терминологии [64, 66], будем называть «трассерами» (т. е. следящими, трассирующими).

§ 1. ЛАБОРАТОРНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МИКРОДИСПЕРСИИ

В лабораторных условиях опыты ведутся обычно в колонне постоянного сечения. Используя рассмотренное выше решение основной линейной задачи микродисперсии, можно обрабатывать опытные данные при фильтрации в колонне длиной $l_к$, первоначально заполненной раствором концентрации c_0, а с момента $t=0$ фильтрующей такой же раствор концентрации c^0. Подбирая параметры опыта так, чтобы на выходе из колонны (при $x=l_к$) погрешность δ_c, определяемая выражением (VI.2.21), была бы несущественной, получим возможность описать выходную кривую зависимости относительной концентрации раствора $\bar{c} = \dfrac{c - c_0}{c^0 - c_0}$ от времени t на выходе из колонны уравнением (VI.2.20). В этом случае для обработки выходной кривой целесообразно применить следующий путь: по выходным данным находится аргумент ξ при известном значении $\operatorname{erfc}\xi = 2\bar{c}$ или $\operatorname{erf}\xi = 1 - 2\bar{c}$ (последнее несколько более удобно при $\bar{c} > 0{,}5$, когда $\operatorname{erfc}\xi > 1$, а $\operatorname{erf}(-\xi) = -\operatorname{erf}\xi$),

после чего строится график зависимости $\xi\sqrt{t}$ от t (рис. 110), который согласно (VI.2.19) должен быть прямолинейным:

$$\xi\sqrt{t} = 0{,}5\sqrt{\frac{n}{D}}\left(l_к - \frac{v}{n}t\right). \qquad \text{(VI.3.1)}$$

По точке $t=t_0$, где $\xi\sqrt{t}=0$, имеем $l_к = \frac{v}{n}t_0$, откуда находим активную (эффективную) пористость

$$n = \frac{vt_0}{l_к}. \qquad \text{(VI.3.2)}$$

Затем по любой точке на построенной прямой линии определяется коэффициент микродисперсии D, поскольку

$$D = 0{,}25n_0\left(\frac{l_к - \frac{v}{n}t}{\xi\sqrt{t}}\right)^2 = 0{,}25\frac{v^2}{n}\left(\frac{t_0 - t}{\xi\sqrt{t}}\right)^2. \qquad \text{(VI.3.3)}$$

Достоинством такого способа обработки является возможность применения для расчета любых точек выходной кривой с автоматической проверкой используемой расчетной зависимости по тому, насколько хорошо опытные точки на графике $\xi\sqrt{t}$ от t ложатся на прямую линию.

Для экономии трассера и более рельефного проявления процессов дисперсии проводят также опыты с запуском трассерного «пакета», когда трассер с концентрацией c^0 подается с момента $t=0$ только в течение времени t_0, после чего снова подается раствор, первоначально находящийся в колонне (с концентрацией трассера c_0). Для этого случая зависимости, описывающие распределение концентрации раствора, могут быть получены на основе принципа суперпозиции, как для ступенчатого закона изменения граничной функции, когда в начальном сечении задается условие $\bar{c}=1$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $\bar{c}=0$ при $t>t_0$. Таким образом, принимая за основу упрощенное уравнение (VI.2.20), получим уравнение для выходной кривой при подаче трассерного пакета:

$$\bar{c} = 0{,}5\,(\operatorname{erfc}\xi - \operatorname{erfc}\xi_0); \quad \xi = \frac{nl_к - vt}{2\sqrt{nDt}}, \quad \xi_1 = \frac{nl_к - v(t-t_0)}{\sqrt{nD(t-t_0)}}. \qquad \text{(VI.3.4)}$$

Типовая форма выходного графика, описываемого этим уравнением, представлена на рис. 111. Обработку такого опыта удобно вести по данным прохождения пика концентрации. Анализ показывает [55], что время $t_{макс}$ продвижения пика концентрации практически соответствует времени движения середины трассерного пакета, т. е. $t_{макс} - 0{,}5t_0 = \frac{nl_к}{v}$, откуда следует простая формула для определения активной пористости

$$n = \frac{v(t_{макс} - 0{,}5t_0)}{l_к}. \qquad \text{(VI.3.5)}$$

Величину коэффициента дисперсии можно находить по графику рис. 111, составленному на основе уравнения (VI.3.4).

При заметном проявлении сорбции трассерного индикатора опытным путем вместо активной пористости определяется эффективная пористость $n_э$, выражаемая согласно (VI.1.3). При этом для определения активной пористости n должны использоваться данные прохождения несорбируемого трассера, после чего находится коэффициент распределения $\beta = \frac{1}{n_э - n}$.

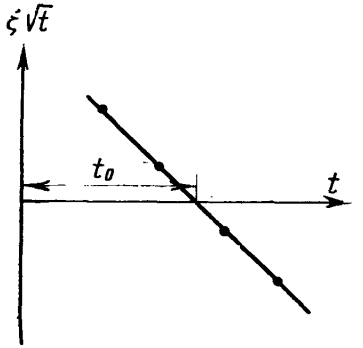


Рис. 110. График зависимости $\xi\sqrt{t}$ от t для обработки опытов по микродисперсии

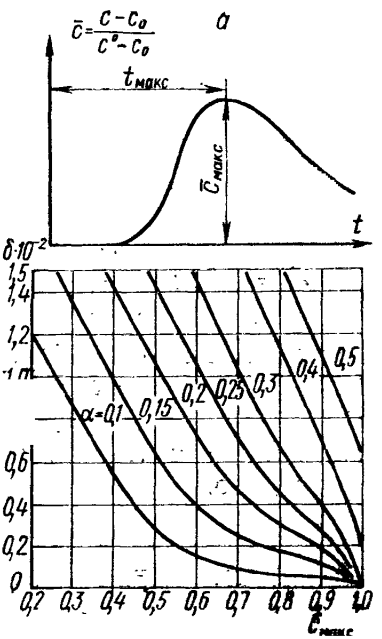


Рис. 111. Графики для опытов с трассерным «пакетом»: $а$ — выходная кривая; $б$ — график для расчетов коэффициента дисперсии при $\alpha = \frac{vt_0}{nl_к}$, $\delta = \frac{D}{vl_к}$

В лабораторных условиях существенным может оказаться влияние кинетики сорбции; способы ее учета показаны в работах [5, 56]. Методы определения коэффициентов молекулярной диффузии и теплопередачи в лабораторных условиях приведены в работах [31, 35, 56].

§ 2. ПОЛЕВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИГРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ

В полевых условиях для определения миграционных параметров используются различные опыты по запуску трассерных индикаторов в скважины.

2.1. Запуск трассера в естественном потоке

Наиболее просты для выполнения экспресс-опыты по единовременному запуску того или иного вида индикатора в скважину с последующим наблюдением за изменением концентрации индика-

тора во времени. Если считать, что внутри скважины происходит полное перемешивание индикатора, имеющего в скважине концентрацию c при его концентрации в подземных водах c^0, то баланс индикатора в скважине за время dt запишется следующим уравнением:

$$Q_c(c-c^0)\,dt = -\omega l\,dc,\quad \omega = \frac{\pi d_c^2}{4}, \tag{VI.3.6}$$

где ω, d_c и l—площадь поперечного сечения, диаметр и длина скважины, а Q_c — расход подземных вод, поступающей в скважину, который при допущении о постоянстве потока к скважине по ее высоте можно связать со скоростью фильтрации потока формулой

$$Q_c = \xi d_c l v, \tag{VI.3.7}$$

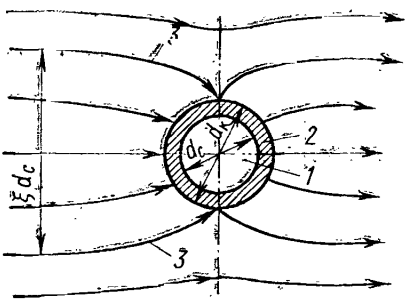


Рис. 112. Поток вблизи наблюдательной скважины:
1 — скважина; *2* — зона с коэффициентом фильтрации k_c; *3* — линия тока

причем ξ — коэффициент, учитывающий искажение потока вблизи скважины (рис. 112) и зависящий от сопротивления прискважинной зоны.

При наличии кольцевой прискважинной зоны толщиной δ_c с коэффициентом фильтрации k_c при коэффициенте фильтрации пласта k Н. А. Огильви получил следующую формулу:

$$\xi = \frac{4}{1+\left(\frac{d_c}{d_к}\right)^2 + \frac{k}{k_c}\left[1-\left(\frac{d_к}{d_c}\right)^2\right]}, \tag{VI.3.8}$$

где $d_к = d_c + 2\delta_c$, причем для «чистой» скважины (при $k_c = k$) получается $\xi = 2$; для скважин, пробуренных с глинистой промывкой, по данным работы [37], характерны значения $\xi = 0{,}3—0{,}6$.

Практическое использование этой формулы неудобно, поскольку значения δ_c и k_c не поддаются определению по данным опытных опробований. Преобразуем эту формулу применительно к условиям малой толщины прискважинной зоны, т. е. когда $\delta_c \ll d_c$. При этом можно считать $d_c/d_к \cong 1$, а $1 - d_c^2/d_к^2 \cong 2\delta_c/d_c$, так что выражение (VI.3.8) принимает вид

$$\xi = \frac{2}{1+\frac{k}{k_c}\cdot\frac{\delta_c}{d_c}}. \tag{VI.3.8а}$$

С другой стороны, при $\delta_c \ll d_c$ можно упростить выражение (VI.1.20а) для параметра сопротивления прискважинной зоны

$$\xi_2 = \frac{k}{k_c}\ln\frac{d_c+2\delta_c}{d_c} \cong 2\frac{k}{k_c}\cdot\frac{\delta_c}{d_c}. \tag{VI.3.8б}$$

Подставляя его в (VI.3.8а), получим расчетную формулу

$$\xi = \frac{2}{1 + 0{,}5\zeta_2}, \qquad \text{(VI.3.8в)}$$

по которой можно определить значения ξ при полученных по данным опытных опробований скважины (откачки или закачки) значения ζ_2.

Подставляя выражение (VI.3.7) для Q_c в уравнение (VI.3.6) и разделив переменные, получим уравнение

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{v\xi}{d_c} = -\frac{dc}{c - c^0}, \qquad \text{(VI.3.9)}$$

интегрируя которое, имеем

$$\frac{4}{\pi} \cdot \frac{v\xi t}{d_c} = -\ln(c - c^0) + C, \qquad \text{(VI.3.9а)}$$

причем произвольная интегрирования C определится из условия $c = c_0$ при $t = 0$, т. е.

$$C = \ln(c_0 - c^0), \qquad \text{(VI.3.9б)}$$

после чего из уравнения (VI.3.9а) можно получить формулу для определения скорости фильтрации

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_c}{\xi t} \ln \frac{c_0 - c^0}{c - c^0} = 1{,}82 \frac{d_c}{\xi t} \lg \frac{c_0 - c^0}{c - c^0}. \qquad \text{(VI.3.10)}$$

Для лучшего осреднения опытных данных полезно построить график зависимости $\lg \frac{c_0 - c^0}{c - c^0}$ от t, который должен иметь характер прямой, приходящей в начало координат.

Если к тому же по направлению потока на расстоянии L от скважины, в которую запускается индикатор, установить наблюдательные скважины для фиксации времени прохождения индикатора, то по времени прохождения $t_{макс}$ максимума концентрации можно определить скорость миграции:

$$u = \frac{L}{t_{макс}}. \qquad \text{(VI.3.11)}$$

После этого может быть определена активная пористость n_0, поскольку согласно (VI.1.1)

$$n = \frac{v}{u}. \qquad \text{(VI.3.12)}$$

Для сорбируемого трассера таким образом определится величина эффективной пористости $n_э$.

2.2. Нагнетание трассерного раствора в скважину

Наиболее полную информацию для определения миграционных параметров дает опыт по нагнетанию трассерного раствора в современную скважину с постоянным раствором Q при замерах

концентраций трассера c в наблюдательных скважинах, располагаемых в зоне распространения трассера. Для формирования стабильного режима закачки следует прежде всего некоторое время подавать в скважину пластовую воду (или близкую ей по составу), а затем вводить трассер с постоянной концентрацией c_0 на забое скважины. Изменение концентрации в наблюдательной скважине, располагаемой на расстоянии r от центральной, будет при этом описываться уравнением (VI.2.19), в котором параметры ξ, ξ' и η выражаются согласно (VI.2.42). Целесообразно подобрать расход закачки и расстояния до наблюдательных скважин таким образом, чтобы величина δ_c, определяемая согласно (VI.2.21), не превышала допустимой погрешности расчета. Для относительной концентрации можно пользоваться уравнением (VI.2.20) при ξ, задаваемом согласно (VI.2.42). Тогда, замерив ход изменения концентрации трассера в наблюдательной скважине, можно по значениям относительной концентрации трассера $\bar{c}$ на различные моменты времени t, отсчитываемого от момента начала запуска трассера, получить соответствующие значения $\operatorname{erf}\xi = 1 - \operatorname{erfc}\xi = 1 - 2\bar{c}$, а по таблице функции erfc найти соответствующие значения аргумента ξ. После этого целесообразно построить график зависимости величины $\xi\sqrt{t}$ от времени t, который согласно выражению (VI.2.42) должен иметь прямолинейный характер; по значению времени t_0, отсекаемого этой прямой на оси t, далее определяется величина активной (или эффективной) пористости

$$n = \frac{Qt_0}{\pi m (r^2 - r_c^2)}, \qquad \text{(VI.3.13)}$$

а по значению $(\xi\sqrt{t})_0$ отсекаемому этой прямой на оси $\xi\sqrt{t}$, найдем значение параметра макродисперсии

$$\delta_2 = \frac{t_0^2}{4n(\xi\sqrt{t})_0^2}. \qquad \text{(VI.3.14)}$$

Аналогичный опыт можно проводить с запуском «пакета» трассера, подаваемого при закачке в скважину в течение времени t_0. При этом выражение для относительной концентрации трассера в наблюдательной скважине получится аналогично тому, как это показано выше (см. § 1) для одномерного потока в колонне постоянного сечения применительно к лабораторным условиям определения миграционных параметров, т. е. по уравнению (VI.3.4), в котором ξ выражается согласно (VI.2.42), а ξ_0 выражается также, но с заменой t на $t - t_0$. Соответственно величину n можно определить по времени $t_{\text{макс}}$ прохождения максимума концентрации трассера, преобразуя формулу (VI.3.5) применительно к условиям радиального потока

$$n = \frac{Q(t_{\text{макс}} - 0{,}5t_0)}{\pi m (r^2 - r_c^2)}, \qquad \text{(VI.3.15)}$$

а величина D может быть найдена из графика рис. 111, *б*, положив $v = \frac{Q}{\pi m}$ и $l_к = r^2 - r_c^2$, после чего находится параметр макродисперсии $\delta_2 = D\left(\frac{\pi m}{Q}\right)^2$.

Глава 4

МЕТОДИКА ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Задачи оценки условий загрязнения подземных вод имеют две принципиально различные постановки: в первой постановке оцениваются условия загрязнения водозабора подземных вод за счет подтягивания воды из известного очага загрязнения; во второй — оценивается характер распространения загрязнения в подземных водах при искусственном его поступлении (при фильтрации из бассейнов промстоков и при закачке промстоков в подземные водоносные горизонты).

При изучении возможностей загрязнения водозабора прежде всего оценивается область захвата подземных вод водозабором, из которой вода может поступить в водозаборные скважины; в пределах этой области устанавливается зона санитарной охраны водозабора, территория которой ограничивается для хозяйственного использования требованием предотвращения загрязнения подземных вод. Обоснование зоны санитарной охраны обычно проводится для водозаборов, закладываемых в грунтовых водах. При существовании загрязнения в области захвата подземных вод, особенно при кратковременной работе водозабора, кроме того, ставится вопрос о времени попадания загрязнения в водозаборные скважины. При изучении распространения загрязнения, искусственно подаваемого в подземные воды, оценивается развитие его области во времени, причем ставится условие, чтобы это загрязнение не могло достигнуть мест возможного использования воды в концентрациях, превышающих допустимые.

§ 1. РАСЧЕТЫ ОБЛАСТИ ЗАХВАТА ПОДЗЕМНЫХ ВОД ВОДОЗАБОРАМИ

Область захвата подземных вод определяется как область потока, в которой линии тока направлены к водозаборным скважинам. Эта область ограничена так называемой нейтральной линией тока. Расчеты области захвата обычно производятся в условиях стационарного или квазистационарного режима, причем задачи распространения загрязнения решаются обычно как плановые [5, 14, 33].

Аналитическое построение линии тока может производиться с использованием известных уравнений Коши—Римана [5, 33, 42]:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{T}, \qquad \text{(VI.4.1)}$$

где ψ — функция тока, которая на каждой линии тока имеет постоянное значение, причем расход планового потока в пределах

ленты, заключенной между двумя линиями тока, имеющими значения $\psi=\psi_1$ и $\psi=\psi_2$, будет $Q_л=\psi_1-\psi_2$

Рассмотрим для примера наиболее простой случай работы одиночной водозаборной скважины с постоянным дебитом Q в однородном потоке с неизменным удельным расходом q_0, направ-

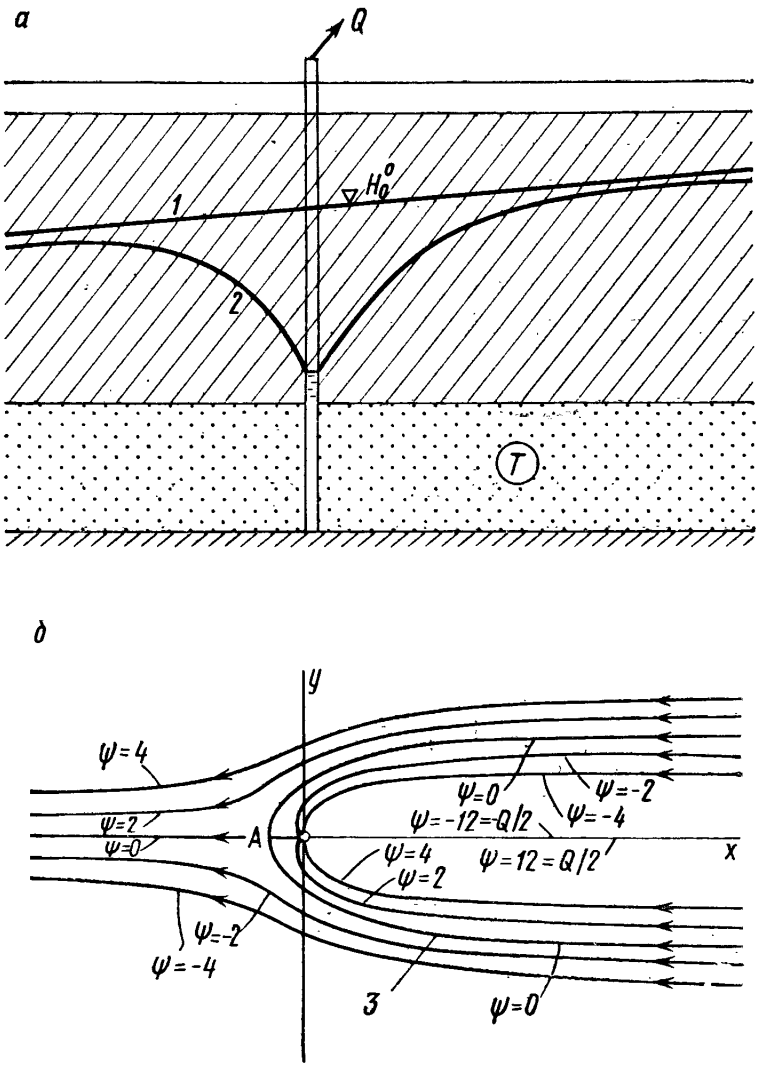


Рис. 113. Скважина в потоке подземных вод:
а — разрез по направлению потока; *б* — план течения (*1* — исходная кривая депрессии, *2* — кривая депрессии при работе скважины, *3* — нейтральная линия тока)

ленном по оси x (рис. 113). Считая режим квазистационарным, используем уравнение (IV.2.13), согласно которому напор H в любой точке равен

$$H = H_0 - \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25at}{r^2}. \qquad \text{(VI.4.2)}$$

Имея в виду, что $H_0 = H_0^0 + I_0 x$ (где H_0^0 — статический напор в месте расположения скважины, $I_0 = q_0/T$ — градиент естественного потока), а $r^2 = x^2 + y^2$, запишем выражение (VI.4.2) в виде

$$H = H_0^0 + I_0 x - \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2{,}25at}{x^2 + y^2}, \qquad \text{(VI.4.2а)}$$

а дифференцируя (VI.4.2а) по x, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x} = I_0 + \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}. \qquad \text{(VI.4.3)}$$

Используя первое из условий Коши — Римана (VI.4.1), получим выражение для приведенной функции тока $\bar{\psi}$

$$\bar{\psi} = \int \frac{\partial H}{\partial x} dy + C = I_0 y + \frac{Q}{2\pi T} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C. \qquad \text{(VI.4.4)}$$

Задавая нулевое значение $\bar{\psi}$ на линии тока, совпадающей с положительной осью x, где $y = 0$ и $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$, получим произвольную постоянную $C = 0$.

Рассматривая выражение (VI.4.3) для градиента напора на оси x, где

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{y=0} = I_0 + \frac{Q}{2\pi T x}, \qquad \text{(VI.4.5)}$$

можно видеть, что существует точка 0 при $x = -x_0$, где $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{y=0} = 0$, причем

$$x_0 = \frac{Q}{2\pi T I_0}. \qquad \text{(VI.4.6)}$$

Таким образом, через точку x_0 проходит нейтральная линия, ограничивающая область захвата потока водозаборной скважиной. Поскольку между нейтральной линией и положительной осью x (линией $\bar{\psi} = 0$) вследствие симметрии потока проходит расход $0{,}5\,Q$, то на нейтральной линии $\bar{\psi} = \frac{Q}{2T}$. Подставляя это выражение $\bar{\psi}$ в (VI.4.4), при $C = 0$ получим уравнение нейтральной линии тока

$$\frac{Q}{2T} = I_0 y + \frac{Q}{2\pi T} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \qquad \text{(VI.4.7)}$$

или, разрешая это уравнение относительно x, получим

$$x = -\frac{y}{\operatorname{tg}\frac{2\pi T I_0}{Q} y}. \qquad \text{(VI.4.7a)}$$

В частности, при $x=0$ имеем $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}$, так что нейтральная линия отсекает на оси y отрезок $y_0 = \frac{Q}{4I_0 T}$, а в бесконечности (при $x\to\infty$) нейтральная линия имеет асимптоту $y_\infty = \frac{Q}{2TI_0}$.

Аналогичным путем получен ряд решений построения функций тока и обоснования зоны захвата потока водозаборными скважинами и в более сложных условиях формирования потока [5, 14, 33]. Однако аналитические решения таких задач имеют довольно ограниченные условия применения, так что в более общем случае план течения, обосновывающий условия воздействия водозабора на поток, должен строиться по данным моделирования [5].

§ 2. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ ВРЕМЕНИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ПОДЗЕМНЫХ ВОДАХ

При оценке процессов миграции подземных вод, как показано в главе 2, основным действующим фактором является обычно конвективный перенос загрязнения с фильтрационным потоком, а различные формы дисперсии играют подчиненную роль. Поэтому основной расчетной схемой переноса в этом случае будет схема «поршневого вытеснения», когда считается, что в процессе взаимовытеснения жидкостей в фильтрационном потоке происходит полное их замещение в пределах каждого элемента порового пространства, так что граница раздела жидкостей различного состава не подвергается дисперсии и движется со скоростью конвективного переноса, определяемой общей зависимостью (VI.1.5).

Имея значения градиента напора в любой точке, можно записать I_l как функцию от l и найти из уравнения (VI.1.5) зависимость $l(t)$, характеризующую движение границы раздела. Для ряда простых задач выражение I_l позволяет аналитически решить уравнение (VI.1.5), однако в большинстве случаев для решения этого уравнения приходится прибегать к численному интегрированию, используя конечно-разностное уравнение (VI.1.6), причем в сложных условиях, исключающих применение аналитических зависимостей, значения градиентов I_l в различных точках должны определяться по данным моделирования.

Рассмотрим особенности расчетов распространения загрязнения применительно к характерным условиям закачки загрязняю-

щих растворов (промстоков) в скважину и распространения поверхностного загрязнения в грунтовых водах.

2.1. Закачка растворов в скважины

При интенсивной закачке в глубокую скважину характерен случай радиального потока, который имеет место при отсутствии или пренебрежимо малой величине естественного потока и однородном строении пласта. В этом случае путь l, проходимый вытесняющим раствором, равен радиусу фронта r, а градиент напора I_l на границе раздела определится из выражения (IV.2.9) для расхода потока в сечении $r=l$:

$$I_l = -\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)_{r=l} = \frac{Q}{2\pi l T} e^{-u_l},\ u_l = \frac{l^2}{4at}. \qquad \text{(VI.4.8)}$$

Подставляя это выражение I_l в (VI.1.5), получим уравнение передвижения границы раздела в следующем виде:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{Q}{2\pi nml} \exp\left(-\frac{l^2}{4at}\right). \qquad \text{(VI.4.9)}$$

Решение уравнения (VI.4.9) имеет вид [12, 53]

$$l = 2\sqrt{\alpha_0 at}, \qquad \text{(VI.4.10)}$$

где параметр α_0 определяется из трансцендентного уравнения

$$\alpha_0 e^{\alpha_0} = \frac{Q}{4\pi mT} \cdot \frac{\mu}{n} = \frac{Q}{4\pi nam}. \qquad \text{(VI.4.11)}$$

Для определения величины α_0 можно пользоваться следующими данными:

$\frac{Q}{4\pi nam}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
α_0	0,16	0,29	0,41	0,49	0,57	0,72	0,85	0,96	1,05

При соблюдении неравенства

$$Q \ll nam \qquad \text{(VI.4.12)}$$

можно считать $e^{\alpha_0} = 1$ и

$$l = \sqrt{\frac{Qt}{\pi nm}}, \qquad \text{(VI.4.13)}$$

что соответствует условиям квазистационарной фильтрации. В реальных условиях неравенство (VI.4.12) выполняется почти всегда, что дает основание миграционные расчеты при закачках в скважины проводить, исходя из предпосылок о квазистационарном режиме фильтрации.

При наличии естественного потока грунтовых вод с удельным расходом q_0 и уклоном I_0 (рис. 114) выражение для градиента I_l получится сложением величины I_l, определяемой выражением (VI.4.8), и величины I_0, принимаемой со своим знаком, так что в этом случае при квазистационарном режиме

$$I_l = -\frac{Q}{2\pi Tl} \pm I_0, \qquad \text{(VI.4.14)}$$

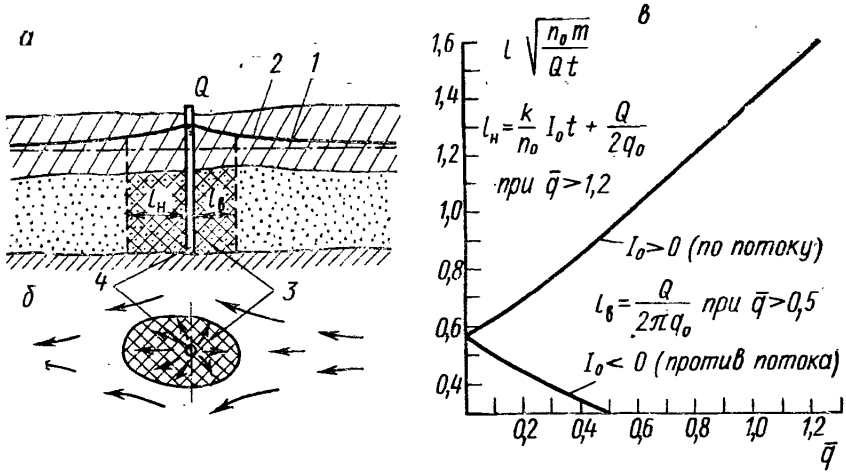


Рис. 114. Распространение загрязнения при закачке в скважину: *а* — разрез по направлению потока; *б* — план течения; *в* — график для расчетов зоны загрязнения (*1* — исходная кривая депрессии, *2* — кривая депрессии при работе скважины, *3* — зона загрязнения, *4* — скважина)

причем знак «+» берется для расчетов по направлению потока, а «—» в противоположном направлении. Тогда уравнение (VI.1.5) примет вид

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{Q}{2\pi nml} \pm \frac{k}{n} I_0, \qquad \text{(VI.4.15)}$$

допускающий разделение переменных. Его решение для продвижения границы раздела вниз по потоку (рис. 114, *а*) позволяет получить следующую формулу, определяющую время t продвижения загрязнения на расстоянии $l_н$ от места его поступления:

$$t = \frac{nm}{q_0}\left[l_н - \frac{Q}{2\pi q_0} \ln\left(1 + \frac{2\pi q_0}{Q} l_н\right)\right]. \qquad \text{(VI.4.16)}$$

Для расчета расстояния, на которое продвинется загрязнение вверх по потоку, в формуле (VI.4.16) следует заменить q_0 на $-q_0$. Для практических расчетов по формуле (VI.4.16) можно пользоваться графиком, приведенным на рис. 114, *б*.

Рассмотрим теперь схему закачки загрязняющего раствора на расстоянии L от области стока (реки, оврага, водоема). Очевидно, что особый интерес в данном случае представляет продвижение границы раздела по кратчайшему направлению к области стока.

Рассматривая предельный случай стационарного режима и пренебрегая сопротивлением ложа водоема, для градиента напора Il в направлении водоема получим выражение

$$I_l = \frac{Q}{2\pi T} \cdot \frac{2L}{(2L-l)\,l}. \qquad \text{(VI.4.17)}$$

Подставляя Il из (VI.4.17) в (VI.4.15), получим уравнение

$$\frac{dl}{dt} = \frac{Q}{\pi nm} \cdot \frac{L}{(2L-l)\,l}, \qquad \text{(VI.4.18)}$$

которое позволяет провести разделение переменных и получить решение в виде

$$l^2\left(1 - \frac{l}{3L}\right) = \frac{Qt}{\pi nm}. \qquad \text{(VI.4.19)}$$

Из уравнения (VI.4.19), в общем виде решаемого подбором, нетрудно получить выражение для времени t_L, в течение которого граница раздела достигает области стока (при $l=L$):

$$t_L = \frac{2\pi nmL^2}{3Q}. \qquad \text{(IV.4.20)}$$

Если же не считаться с наличием области стока, то согласно (VI.4.13) найдем

$$t_L = \frac{\pi nmL^2}{Q}. \qquad \text{(VI.4.20а)}$$

Структура формул (VI.4.20) и (VI.4.20а) совершенно идентична, причем по формуле (VI.4.20) величина t_L получается в 1,5 раза меньшей, чем по формуле (VI.4.20а). Поскольку в условиях стационарного движения влияние области стока сказывается наиболее резко, то можно сделать вывод, что в порядке первого приближения оценку скорости движения границы раздела можно считать без учета влияния областей питания и стока, увеличивая ее с некоторым запасом в 1,5 раза.

Граница раздела закачиваемой и пластовой жидкости деформируется по вертикали за счет вертикальной неоднородности (слоистости) пласта и различия гидродинамических свойств жидкостей. Для учета влияния слоистости строения водоносного пласта на продвижение закачиваемого раствора рассмотрим ту же задачу распространения раствора при его закачке в скважину, принимая схему послойного вытеснения в пределах каждого слоя и деля расходы нагнетания между слоями пропорционально проводимости каждого слоя, т. е. считая расход i-того слоя по соотношению $Q_i/Q = k_i m_i/T$, где T — суммарная проводимость пласта. Тогда для каждого i-того слоя согласно (VI.4.13) имеем

$$l_i = \sqrt{\frac{Q_i t}{\pi n_i m_i}} = \sqrt{\frac{k_i Qt}{\pi n_i T}}, \qquad \text{(VI.4.21)}$$

так что распространение раствора в пределах каждого слоя идет пропорционально величине $\sqrt{k_i/n_i}$.

Из гидродинамических различий жидкостей при закачке растворов может представлять интерес разница плотностей, которая заставляет наклоняться границу раздела жидкостей (рис. 115), причем в однородном потоке длина такой наклонной границы раздела при относительной разнице плотностей $\Delta\bar{\rho}=(\rho-\rho_0)/\rho_0$ определяется по формуле [4, 53]

$$\Delta l = 1{,}6\sqrt{\frac{km}{n}\cdot\Delta\bar{\rho}\,t}\,. \qquad \text{(VI.4.22)}$$

Расчетом по формуле (VI.4.22) нетрудно показать, что в некоторых случаях величина Δl может достигать ощутимых размеров, однако обычно слоистость пластов оказывается более силь-

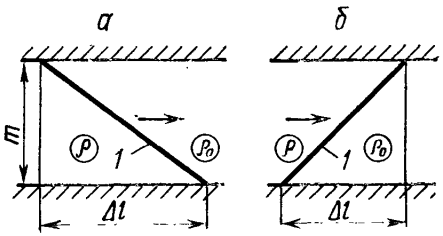


Рис. 115. Наклон границы раздела при различной плотности закачиваемой жидкости (ρ) и пластовой воды (ρ_0):
а — $\rho>\rho_0$; *б* — $\rho<\rho_0$ (*1* — граница раздела; стрелкой показано направление потока)

ным фактором. При заметных проявлениях сорбции компонентов закачиваемых растворов на фронте вытеснения формируются две границы раздела: 1) определяющая границу зоны загрязнения и 2) определяющая границу между чистой водой и зоной «очищенной» воды, которая образуется из загрязненной путем сорбционного осаждения загрязняющего компонента. Обе границы определяются по приведенной выше методике при задании в расчетных зависимостях активной и эффективной пористости соответственно при расчетах границы загрязнения и очищенной воды.

2.2. Миграция загрязнения в грунтовых водах

В грунтовые воды загрязнение обычно поступает с поверхности земли вместе с инфильтрационным питанием, а также за счет фильтрации из загрязненных водоемов (например, из хранилищ промстоков). В таких условиях миграция загрязнения осложняется тем, что наряду с основным переносом его по направлению потока происходит поперечное распределение загрязнения по глубине потока под действием конвективного и диффузионно-кондуктивного переноса. Вертикальный конвективный перенос, возникающий при наличии вертикальных скоростей фильтрации, обусловливается прежде всего структурой потока, а также различием плотности загрязняющего раствора и грунтовых вод.

Для оценки конвективного переноса по глубине потока рассмотрим условия стационарного одномерного инфильтрационного

потока с постоянными по длине потока проводимостью инфильтрации T и интенсивностью w при отсутствии различия плотностей жидкостей (рис. 116). Уравнение неразрывности (I.4.3) в данном случае (при $\varepsilon=\text{const}$, $\gamma=\text{const}$ и $\partial v_y/\partial y=0$) имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \qquad \text{(VI.4.23)}$$

Распределение вертикальных скоростей v_z получим далее, исходя из обобщенной предпосылки Дюпюи — Форхгеймера, которая предполагает постоянство горизонтальных скоростей течения по

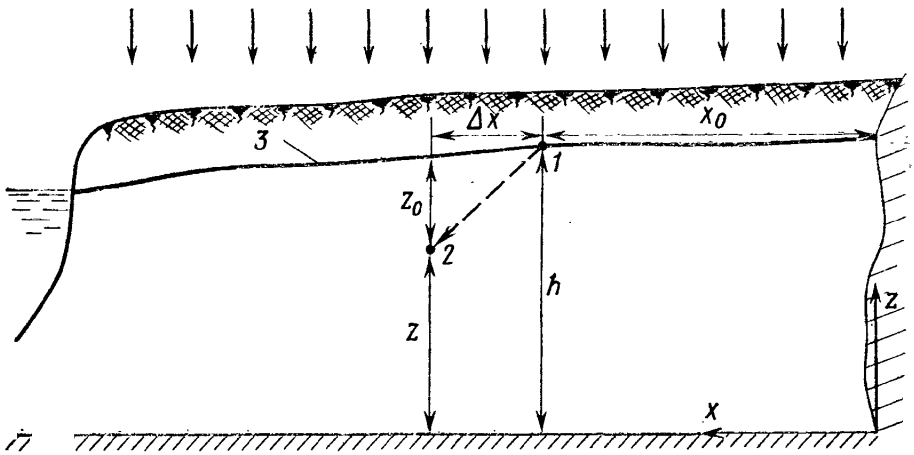


Рис. 116. Конвективная миграция загрязнения в инфильтрационном потоке (*1* — место поступления загрязнения конвективным путем, *2* — место миграции этого загрязнения в инфильтрационном потоке, *3* — свободная поверхность потока)

вертикали. При длине потока, значительно превышающей его мощность, такая предпосылка дает хорошие результаты. Тогда $\partial v_x/\partial x$ не зависит от z и интегрирование уравнения (VI.4.23) по z с учетом условия $v_z=0$ при $z=0$ (на водоупоре) дает

$$v_z=-\frac{\partial v_x}{\partial x}z. \qquad \text{(VI.4.23а)}$$

Имея в виду, что в данном случае на свободной поверхности $v_z=-\text{w}$, получим

$$v_z=-\text{w}\frac{z}{h}. \qquad \text{(IV.4.23б)}$$

Подстановка этого выражения в кинематическое условие (VI.1.5) дает дифференциальное уравнение для глубины z_0 погружения загрязнения с поверхности грунтовых вод:

$$n\frac{dz_0}{dt} = -v_z = w\frac{h-z_0}{h}, \qquad \text{(VI.4.23в)}$$

которое допускает разделение переменных; после его интегрирования — с учетом начального условия $z_0=0$ при $t=0$ — получим

$$\bar{z}_0 = \frac{z_0}{h} = 1 - e^{-\tau}, \quad \tau = \frac{wt}{nh}. \qquad \text{(VI.4.24)}$$

С другой стороны, уравнение конвективного переноса в горизонтальном направлении

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_x}{n} = \frac{wx}{nh}. \qquad \text{(VI.4.24а)}$$

Проинтегрируем это уравнение, осредняя величину h по длине потока, принимая начальное условие $x=x_0$ при $t=0$:

$$x = x_0 e^{\tau}. \qquad \text{(VI.4.25)}$$

Сопоставляя уравнения (VI.4.24) и (VI.2.25), получим соотношение между перемещением загрязнения в горизонтальном направлении $\Delta x = x - x_0$ и глубиной его опускания z_0:

$$\Delta x = \frac{z_0}{h - z_0} - x_0. \qquad \text{(VI.4.26)}$$

Пример расчета. Рассчитаем миграцию загрязнения, поступающего в середине инфильтрационного потока при $x_0=5000$ м, при типичных для естественных условий значениях $w=3\cdot10^{-4}$ м/сут, $n=0{,}3$, $h=20$ м за 10 лет ($t=3650$ сут). При $\tau = \frac{3\cdot10^{-4}\cdot3650}{0{,}3\cdot20} = 0{,}18$ по формуле (VI.4.24) получим $z = 20\cdot e^{-0{,}18} = 16{,}7$ м. Таким же образом за 100 лет ($t=3{,}65\cdot10^4$ сут) получим $z=3{,}3$ м. Эти результаты показывают, что при типичной для естественных условий интенсивности инфильтрации конвективное погружение загрязнения происходит довольно медленно. Вместе с тем за 10 лет продвижение по горизонтали согласно (VI.4.26) при $x_0=5000$ м будет $\Delta x = \frac{3{,}3}{16{,}7}\,5000 = 990$ м, а за 100 лет загрязнение достигает границы потока.

Интенсивность поперечного перемешивания может ускориться за счет гидродинамического смешения, и в частности путем гравитационного опускания загрязнения при значительной разнице плотностей загрязняющего раствора ρ_c и подземных вод ρ_0. В этом случае возникает дополнительный вертикальный градиент фильтрации $I_0 = \Delta\bar{\rho} = \frac{\rho_c - \rho_0}{\rho_0}$, под действием которого загрязняющий раствор опустится до подошвы пласта (на глубину h) за время

$$t_h = \frac{n\cdot h}{k\,\Delta\bar{\rho}}. \qquad \text{(VI.4.27)}$$

В то же время поток по горизонтали пройдет расстояние

$$l_{см} = \frac{v_x}{n} t_h = \frac{hv_x}{k\,\overline{\Delta\rho}} = \frac{hI_x}{\overline{\Delta\rho}}. \qquad \text{(VI.4.27а)}$$

Например, при $h=20$ м, $I_x=0{,}01$ и $\overline{\Delta\rho}=0{,}01$ по формуле (VI.4.27а) получим $l_x=20$ м, т. е. при таком различии плотностей проникновение раствора на всю мощность пласта произойдет уже

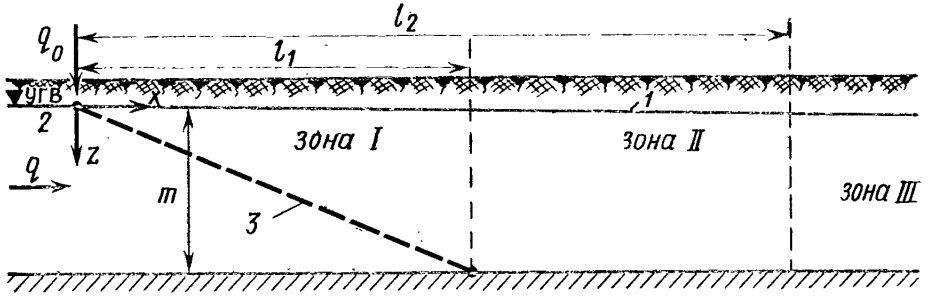


Рис. 117. Диффузионная миграция загрязнения в потоке грунтовых вод (*1* — свободная поверхность, *2* — место поступления загрязнения на поверхность грунтовых вод, *3* — граница диффузионного распространения загрязнения)

на небольшом расстоянии от места его поступления на поверхность потока.

Для оценки влияния распространения раствора по глубине потока за счет влияния поперечной дисперсии рассмотрим решение задачи конвективно-диффузионного переноса в линейном (одномерном) потоке мощностью m, по поверхности которого действует сосредоточенный источник загрязнения с концентрацией c_0 и удельным расходом q_0, значительно меньшим удельного расхода потока q (рис. 117), при различных коэффициентах дисперсии D_l и $D_т$ вдоль и поперек направления потока. Выделим в этом потоке три зоны: частичного смешения (I), в пределах которой загрязнение не распространяется на всю мощность пласта, перемешивания (II), в которой загрязнение захватывает весь пласт, и полного смешения (III), в которой загрязнение распространяется по всему пласту равномерно. В зоне I распределение концентрации загрязнения описывается уравнением [55]

$$c = \frac{q_0 c_0}{\sqrt{\pi r v D}} \exp\left[-\frac{v(r-x)}{2D_l}\right], \qquad \text{(VI.4.28)}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + z_0^2}\,,\quad z_0 = z\sqrt{D_l/D_T}\,,\quad D = \sqrt{D_l D_T}\,. \qquad \text{(VI.4.28а)}$$

Анализ этого решения показывает, что длину зоны I можно оценивать по формуле

$$l_1 = \frac{mq}{20\,D_T}. \qquad \text{(VI.4.29)}$$

Пренебрегая молекулярной диффузией в выражении (V.1.5), т. е. при $D_м = 0$, получим $D_T = \delta_T v$ и

$$l_1 = \frac{m^2}{20\,\delta_T}. \qquad \text{(VI.4.29а)}$$

Из выражения (VI.4.29а) следует, в частности, что для мелкозернистых песков, имеющих $\delta_T \cong 10^{-3}$—10^{-2} м, зона частичного смешения имеет большие размеры, значительно превышающие мощность пласта.

Расстояние l_2 до границы зоны полного смешения можно оценить по формуле [55]

$$l_2 = \frac{mq}{D}, \qquad \text{(VI.4.30)}$$

откуда следует, что полное диффузионное смешение происходит на значительном расстоянии от места загрязнения, примерно на порядок большем размера зоны частичного смешения.

Сопоставив различные формы вертикального переноса, можно сделать вывод о наибольшей значимости конвективного переноса, особенно за счет гравитационного опускания более тяжелых загрязняющих растворов, и относительно малой роли диффузионного переноса.

Заметим, что разобранные выше закономерности переноса загрязнения в грунтовых водах приложимы и при изучении миграции естественных компонентов грунтовых вод. В частности, они относятся и к обоснованию методики датирования грунтовых вод с применением естественных индикаторов [34].

При гидрогеологических прогнозах загрязнения подземных вод очень важна постановка целенаправленного комплекса изыскания для определения расчетных гидрогеологических параметров. При постановке опытно-фильтрационных работ специфичны исследования слоистости пласта и коэффициентов дисперсии. Физико-химические исследования для определения сорбционных свойств пород (эффективной пористости) в первом приближении могут проводиться в лабораторных условиях, как показано в § 1 главы 3. Изучение взаимодействия водоносных горизонтов, определяющее их изолированность, может оцениваться обычно только на основании анализа данных региональных режимных наблюдений за естественным потоком. Недостаточно разработана методика прогноза расхода загрязняющих растворов, поступающих из зон поверхностного загрязнения, который реально может оцениваться путем анализа наблюдений за распространением загрязнения в подземных водах [22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая рассмотрение основ динамики подземных вод и методов гидрогеологических расчетов, хотелось бы еще раз подчеркнуть, что выявление количественных закономерностей движения подземных вод требует обстоятельной проработки на всех этапах исследований. Особое внимание следует уделять этапу геофильтрационной схематизации, в процессе которой должны быть рассмотрены основные позиции постановки расчетов, причем исходными для составления геофильтрационной схемы являются гидрогеологическая схема и принятая математическая (теоретическая) модель процесса. В сравнительно сложных случаях целесообразно отрабатывать геофильтрационную схему путем решения обратных задач, особенно с использованием моделирования, требующего ясного и наглядного представления расчетной схемы. При расчетах миграции подземных вод помимо геофильтрационной схемы должна быть составлена также миграционная схема, опирающаяся на исходную физико-химическую модель миграционных процессов.

При выборе рациональной методики расчета, соответствующей природной постановке задачи, с осторожностью следует применять аналитические методы расчетов, обращая особое внимание на четкое соответствие принятой расчетной схемы тем условиям, для которых справедливы аналитические зависимости. При использовании моделирования целесообразно выделять этап вычислительной схематизации, в процессе которой геофильтрационная схема переводится на «язык» принятого моделирующего устройства.

Отдельные этапы гидрогеодинамических расчетов тесно связаны между собой и влияют друг на друга. Так, характер геофильтрационной схемы предопределяет выбор методики расчета, а возможности современных методов расчета, в свою очередь, оказывают влияние на задание геофильтрационной схемы, поскольку в ней могут быть представлены только такие элементы

строения, которые поддаются расчету. В частности, если использовать аналитические методы расчета, то поток в плане должен быть линейным и однородным, а в разрезе однородным или слоистым, поскольку для более сложных схем аналитические методы расчета практически неприменимы. Если же для расчетов используется моделирование, то надо стремиться к заданию структуры плоского потока (профильного или планового). Это положение имеет особое значение для рациональной постановки полевых исследований по определению геофильтрационных параметров (по данным опытных работ и режимных наблюдений), которая должна быть удобной для обработки, обеспечивая возможность наиболее достоверного расчета параметров. (Например, при постановке опытных откачек рекомендуется проводить их с постоянным во времени дебитом, поскольку такой режим дает возможность применения наиболее удобных для использования расчетных зависимостей.)

В дальнейшем развитии динамики подземных вод важнейшая роль принадлежит целенаправленным натурным исследованиям природных закономерностей гидрогеологических процессов, подкрепляемых экспериментальными и теоретическими работами. Прежде всего заслуживают анализа процессы фильтрации и миграции подземных вод в глинистых слоях (покровных и разделяющих водоносные пласты) с учетом физико-химического взаимодействия воды с породой и влияния неоднородности пород, физико-химические и гидродинамические аспекты миграции подземных вод для оценки изменения их качества, закономерности фильтрации подземных вод в трещиноватых (особенно карстовых) породах для обоснования их фильтрационного строения, изучение условий взаимодействия подземных и поверхностных вод.

При рассмотрении дальнейших путей развития геофильтрационных расчетов можно исходить из того, что аналитические методы в настоящее время почти исчерпали свои возможности и их совершенствование представляет сравнительно ограниченный интерес, главным образом для решения задач формирования локальных потоков (например, при опытных откачках и т. п.). Поэтому геофильтрационные исследования должны связываться в основном с применением вычислительной техники, причем большое значение здесь имеет совершенствование методов электрического моделирования, наиболее распространенного сейчас в практике, а также поиски рационального использования электронных цифровых вычислительных машин.

ЛИТЕРАТУРА

Раздел I

1. Амаглобели И. П. Основы теории медленного движения ньютоновских и неньютоновских жидкостей в капиллярах и ее применение к расчету нелинейной фильтрации. Автореф. докт. дис. Тбилиси, 1969, 38 с.
2. Антоненко Г. К., Гольберг В. М. Фильтрационные свойства пород и вязкость растворов глубоких водоносных горизонтов. М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1969, 73 с.
3. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформированных пористых средах. М., Гостехтеориздат, 1953, 616 с.
4. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972, 288 с.
5. Барон В. А. К вопросу о физическом смысле начального градиента при расчете фильтрации в глинистых породах.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1971, вып. 37, с. 106—111.
6. Бецинский П. А. Новый метод определения водоотдачи водоносных пластов.— «Гидротехника и мелиорация», 1960, № 6, с. 13—22.
7. Биндеман Н. Н. Определение динамических запасов подземных вод по водоотдаче песков.— «Информ. мат-лы ВНИИ ВОДГЕО», 1952, 31 с.
8. Бондаренко Н. Ф. Физика движения подземных вод. Л., Гидрометеоиздат, 1973, 215 с.
9. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М., «Мир», 1971, 451 с.
10. Ведерников В. В. Учет влияния капиллярности грунта на фильтрацию из каналов.— «ДАН СССР», 1940, т. 28, № 5, с. 408—410.
11. Веников В. А. Теория подобия и моделирование. М., «Высшая школа», 1966, 487 с.
12. Всеволожский В. А. К теории вертикальной гидродинамической зональности артезианских бассейнов платформенного типа.— «Водные ресурсы», 1974, № 2, с. 160—169.
13. Гавич И. К. Теория и практика применения аналогового моделирования в гидрогеологии. Автореф. докт. дис. М., 1972, 20 с.
14. Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практические применения. М., Стройиздат, 1948, 247 с.
15. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород (авт. Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шержуков). М., «Недра», 1977, 271 с.
16. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод.— В сб.: Гидрогеология и инженерная геология, № 9. М., Госгеолиздат, 1947, 102 с.
17. Гринбаум И. И. Об оценке водоотдачи и активной пористости рыхлооб-

ломочных грунтов по коэффициенту фильтрации.— «Разведка и охрана недр», 1965, № 10, с. 45—51.
18. Гуссейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1955, 276 с.
19. Делюнас И. П. Перспективы использования подземных вод речных долин Нямунас и Нерис. Вильнюс, 1973, 118 с.
20. Де Уист Р. Гидрогеология с основами гидрологии суши. М., «Мир», 1969, 312 с.
21. Дружинин Н. И. Метод электродинамических аналогий и его применение при исследовании фильтрации. М., Госэнергоиздат, 1956, 346 с.
22. Жуковский Н. Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод (1889 г.). Собр. соч., т. 3. М., Госгеолтехиздат, 1949.
23. Зауербрей И. И. К вопросу о коэффициенте фильтрации грунтов и методике его исследования.— «Изв. ВНИИ Гидротехники», 1932, вып. 5, с. 173—205.
24. Каменский Г. Н. Поиски и разведка подземных вод. М.—Л., Госгеолиздат, 1947, 313 с.
25. Каменский Г. Н., Гавич И. К., Семенова С. М. Гидродинамическая характеристика различных видов потоков подземных вод.— «Изв. вузов. Геология и разведка», 1960, № 10, с. 81—88.
26. Кац Д. М. Влияние орошения на грунтовые воды. М., «Колос», 1976, 271 с.
27. Колада М. Я., Фаренгольц З. Д. Характеристика коэффициентов водопроводности основных водоносных горизонтов европейской части СССР.— «Экспресс-информация ОНТИ ВИЭМС. Сер. гидрогеол. и инж. геол.», 1967, вып. 31, 11 с.
28. Краснопольский А. А. Грунтовые и артезианские колодцы. Спб., 1912, 77 с.
29. Кристеа Н. Подземная гидравлика, т. 1. М., Гостоптехиздат, 1961, 343 с.
30. Кульчицкий Л. И. Роль воды в формировании свойств глинистых пород. М., «Недра», 1975, 210 с.
31. Линзы пресных вод пустыни. М., Изд-во АН СССР, 1963, 380 с.
32. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование геофильтрации. М., «Недра», 1976, 407 с.
33. Лялько В. И., Шнейдерман Г. А. Формирование и прогноз ресурсов подземных вод засушливых районов. Киев, 1965, 187 с.
34. Мамуна В. Н. К расчету сжимаемости пластовых вод.— «Труды Всесоюзн. нефтегазового ин-та», 1958, вып. 15, с. 217—218.
35. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949, 627 с.
36. Минский Е. М. Статистическое обоснование уравнений фильтрационного движения.— «ДАН СССР», 1958, т. 118, № 2, с. 255—258.
37. Мироненко В. А., Шестаков В. М. Основы гидрогеомеханики. М., «Недра», 1974, 295 с.
38. Мироненко В. А., Шестаков В. М. Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М., «Недра», 1978.
39. Моркос Н. З. Экспериментальное изучение динамики водоотдачи при осушении.— «Вестн. Моск. ун-та. Сер. геол.», 1970, № 3, с. 96—101.
40. Мятиев А. Н. Напорный комплекс подземных вод и колодцы.— «Изв. АН СССР. Отд. техн. наук», 1947, № 9, с. 1069—1088.
41. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Физика почвы. М., «Наука», 1967, 583 с.
42. Николаевский В. Н. О подобии в среднем микроструктур поровых пространств.— «Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, механика и машиностроение», 1960, № 4, с. 41—47.
43. Носова О. Н. Расчет водоотдачи песчаных грунтов. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962, 116 с.
44. Основы гидрогеологических расчетов, изд. 2 (авт. Ф. М. Бочевер, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков). М., «Недра», 1969, 367 с.

45. Павилонский В. М. К вопросу о начальном градиенте напора в глинистых грунтах.— «Труды ВОДГЕО. Сер. гидротехн.», 1968, вып. 19, с. 78—85.
46. Павловский Н. Н. Основы гидравлики. Собр. соч., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1955, 547 с.
47. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения (1922 г.). Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956, 352 с.
48. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.. «Наука», 1969, 545 с.
49. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1966, 283 с.
50. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966, 659 с.
51. Ходжибаев Н. Н. Естественные потоки грунтовых вод Узбекистана. Ташкент, 1970, 174 с.
52. Чайлдс Э. Физические основы гидрологии почв. Л., Гидрометеоиздат, 1973, 427 с.
53. Чугаев Р. Р. Гидравлика. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963, 552 с.
54. Шевелев Ф. А. Таблицы для гидравлического расчета стальных, чугунных и асбоцементных труб. М., Госстройиздат, 1962, 113 с.
55. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960, 249 с.
56. Шестаков В. М. Некоторые вопросы моделирования неустановившейся фильтрации.— В сб.: Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений, сб. 2. М., Госстройиздат, 1956, с. 129, 139.
57. Шестаков В. М. Определение выходных градиентов фильтрационного потока вблизи откоса.— В сб.: Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений, сб. 3. М., Госстройиздат, 1959, с. 185—216.
58. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965, 233 с.
59. Шестаков В. М., Кравченко И. П., Пашковский И. С. Практикум по динамике подземных вод, изд. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975, 270 с.
60. Штенгелов Р. С. Некоторые вопросы формирования и оценки эксплуатационных запасов.— В сб.: Взаимодействие поверхностного и подземного стока. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 327—339.
61. Штоф В. А. Моделирование и философия. М.—Л., «Наука», 1965, 301 с.
62. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959, 467 с.
63. Ярцева Е. Н. Методическое пособие по определению коэффициента водоотдачи и недостатка насыщения почвогрунтов. М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1967 (ротапринт).
64. Bayer W., Schweiger K. H. Zur Bestimmung des entwässerbaren Porenanteile der Grundwasserleiter.— «Wasserwirtschaft — technik», 1969. N 2. S. 57—60.
65. Bear J. Dinamics of Fluids in Porons Media. N. Y., 1972, 764 p.
66. Boulton N. S. The analysis of data from nonequilibrum pumping test allowing for delayed yield from storage.— «Pros. Inst. Civil Engrs.», 1963, vol. 26, N 11, p. 469—482.
67. Cohen P. Specific-yield and particle size relations of quaternary alluvium.— «Geol. survey Water-supply Paper», 1963, 1669-M, 64 p.
68. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856, 647 p.
69. Davis S. Porosity and permeability of natural materials.— In: Flow through porous media (editor by R. de Wiest). N. Y., 1969, p. 54—89.
70. Dupuit J. Memoire sur le mouvement de l'eau à travers les terrains permeables. Paris, 1857, 304 p.
71. Jacob C. E. Radial flow in a leaky artesian aquifer.— «Transaction Amer. Geophis. Union», 1946, vol. 27, N 11, p. 198—208.
72. Kożerski B. Zależnosc mieżdy wspolczynnikami odszczalnosci, porowatosci efectiwnej i filtracji.— «Bul. Geologiczny», 1972, t. 14, s. 115—182.

73. Pricket T. A. Modeling Techniques for Groundwater Evalution.— «Advances in Hydroscience», 1975, vol. 10, p. 1—143.
74. Verruijt A. Elastic Storage in Aquifers.— In: Flow through porous media (editor by R. de Wiest). N. Y., 1969, p. 331—376.

Раздел II

1. Аравин В. И. Расчеты и моделирование плановой фильтрации. М., Госэнергоиздат, 1963, 78 с.
2. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. М., Госэнергоиздат, 1955, 291 с.
3. Бочевер Ф. М., Селюк Е. М. Применение метода ЭГДА для оценки подпора подземных вод и фильтрации в берегах водохранилищ. М., изд. ВНИИВОДГЕО, 1957, 31 с.
4. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М., «Мир», 1971, 451 с.
5. Гаврилов И. Т., Семенова С. М. Опыт оценки проницаемости глинистых слоев, разделяющих взаимодействующие водоносные горизонты, по данным их естественного режима.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1969, вып. 14, с. 75—87.
6. Гиринский Н. К. Комплексный потенциал потока со свободной поверхностью в пласте относительно малой мощности.— «ДАН СССР», 1946, т. 51, № 5, с. 337—338.
7. Гиринский Н. К. Приток воды в выработки, заложенные на междуречье в неоднородный по вертикали пласт.— В сб.: Методы исследований и расчетов при инженерно-геологических и гидрогеологических работах. М., Госгеолиздат, 1951, с. 71—98.
8. Гуревич А. Е., Капченко А. Н., Кругликов Н. М. Теоретические основы нефтяной гидрогеологии. Л., «Недра», 1972, 271 с.
9. Де Уист Р. Гидрогеология с основами гидрологии суши. М., «Мир», 1969, 312 с.
10. Дружинин Н. И. Метод электрогидродинамических аналогий и его применение при исследовании фильтрации. М., Госэнергоиздат, 1956, 346 с.
11. Каменский Г. Н. Основы динамики подземных вод. М., 1943, 248 с.
12. Каменский Г. Н., Корчебоков Н. А., Разин К. И. Движение подземных вод в неоднородных пластах. М.—Л., 1935, 168 с.
13. Керкис Е. Е. Влияние удельного веса подземных вод на условия их равновесия и движения.— «Зап. Ленингр. горн. ин-та», 1952, т. 22, вып. 2, с. 75—105.
14. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование геофильтрации. М., «Недра», 1976, 407 с.
15. Мироненко В. А., Шестаков В. М. О принципах интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений.— «Водные ресурсы», 1978, № 3.
16. Невечеря И. К. Прогноз подпора грунтовых вод и закономерности его формирования.— В сб.: Формирование береговой зоны Новосибирского водохранилища. Новосибирск, 1968, с. 61—83.
17. Орадовская А. Е. Фильтрационное выщелачивание дисперснораспределенного гипса из песчано-глинистых пород.— В сб.: Растворение и выщелачивание горных пород. М., Госстройиздат, 1957, с. 46—71.
18. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения (1922 г.). Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1956, 352 с.
19. Полканов М. П., Пронина Ф. В. Опыт разведки месторождении пресных подземных вод. М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1976.
20. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеориздат, 1952, 676 с.
21. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969, 545 с.

22. Силин-Бекчурин А. И. О влиянии кинематической плотности, приведенных давлений и проницаемости пород на скорость фильтрации рассолов.— «ДАН СССР», 1947, т. 58, № 6, с. 1133—1136.
23. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 2. М., Гостехиздат, 1948, 622 с.
24. Технические условия и нормы проектирования гидротехнических сооружений. Подземный контур плотин на нескальном основании. М., Госэнергоиздат, 1958, 91 с.
25. Фильтрация из водохранилищ и прудов. М., «Колос», 1975, 303 с.
26. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Киев, 1961, 171 с.
27. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. М., Гостоптехиздат, 1956, 260 с.
28. Чугаев Р. Р. Подземный контур гидротехнических сооружений. М., Госэнергоиздат, 1962, 283 с.
29. Чугаев Р. Р. Гидравлика, изд. 2. Л., «Энергия», 1970, 552 с.
30. Шаманский В. Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. Киев, 1969, 374 с.
31. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960, 249 с.
32. Шестаков В. М. Определение выходных градиентов фильтрационного потока вблизи откоса.— В сб.: Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений, сб. 3. М., Госстройиздат, 1959, с. 185—216.
33. Шестаков В. М. Оценка сопротивления ложа водоема при гидрогеологических расчетах.— «Разведка и охрана недр», 1964, № 5, с. 34—36.
34. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965, 233 с.
35. Шестаков В. М. О потенциале фильтрационного потока жидкости переменной плотности.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1967, вып. 1, с. 41—51.
36. Шестаков В. М. Постановка и методы интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений.— «Междунар. высш. гидрол. курсы ЮНЕСКО при МГУ, X сесс. Цикл «Формирование режима и баланса подземных вод». М., 1978 (ротапринт).
37. Шестаков В. М., Кравченко И. П., Пашковский И. С. Практикум по динамике подземных вод, изд. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975, 270 с.
38. Bear J. Dinamics of Fluids in Porous Media. N. Y., 1972, 764 p.
39. Dupuit J. Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. Paris, 1863, 304 p.
40. Edelman J. Groundwater Hydraulics of Extensive Aquifers. Wageningen, 1972.

Раздел III

1. Аверьянов С. Ф. Зависимость водопроницаемости почвогрунтов от содержания в них воздуха.— «ДАН СССР», 1949, т. 19, № 2, с. 141—144.
2. Баренблатт Г. И., Крылов А. Н. Об упругопластическом режиме фильтрации.— «Изв. АН СССР. Отд. техн. наук», 1953, № 2, с. 5—13.
3. Баренблатт Г. И., Ентов В. М. Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972, 288 с.
4. Бурчак Т. В. Особенности процесса фильтрации из колец при опробовании глинистой толщи наливами в шурфы.— «Гидравлика и гидротехника», 1974, вып. 19, с. 112—118.
5. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М., «Мир», 1971, 451 с.
6. Веригин Н. Н. О неустановившемся движении грунтовых вод вблизи водохранилища.— «ДАН СССР», 1949, т. 66, № 6, с. 1067—1070.
7. Влияние водохранилищ на прилегающие территории (авт. С. К. Абрамов, Н. Н. Биндеман, Ф. М. Бочевер, Н. Н. Веригин). М., Госстройиздат, 1960, 319 с.

8. Всеволожский В. А., Дюнин В. И. О направлении миграции поровых вод в уплотняющихся осадках.— В сб.: Взаимодействие поверхностного и подземного стока. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 186—198.
9. Гавич И. К. Теория и практика применения аналогового моделирования в гидрогеологии. Автореф. докт. дис. М., 1974, 20 с.
10. Гармонов И. В., Коноплянцев А. А. Влияние искусственного понижения уровня подземных вод на состояние земной поверхности.— «Разведка и охрана недр», 1964, № 2, с. 44—48.
11. Гасс П. М. Определение параметров артезианских пластов по барометрической эффективности.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1967, вып. 2, с. 41—54.
12. Гуревич А. Е., Капченко А. Н., Кругликов Н. М. Теоретические основы нефтяной гидрогеологии. Л., «Недра», 1972, 271 с.
13. Гохберг Л. К. Применение численного метода обращения преобразования Лапласа для гидродинамических расчетов.— В сб.: Взаимодействие поверхностного и подземного стока, вып. I. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 353—363.
14. Де Уист Р. Гидрогеология с основами гидрологии суши. М., «Мир», 1969, 312 с.
15. Девис С., Де Уист Р. Гидрогеология. М., «Мир», 1970, 254 с.
16. Желтов Ю. П. Механика нефтегазоносного пласта. М., «Недра», 1975, 216 с.
17. Каменский Г. Н. Уравнение неустановившегося движения грунтовых вод в конечных разностях и применение их к исследованию явлений подпора.— «Изв. АН СССР. Отд. техн. наук», 1940, № 4, с. 53—56.
18. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., ИЛ, 1962, 487 с.
19. Карцев А. А. Гидрогеология нефтяных и газовых месторождений. М., «Недра», 1972, 280 с.
20. Киселев П. А. Изучение баланса подземных вод в слоистых толщах по режимным данным. М., «Недра», 1975, 117 с.
21. Костяков А. Н., Фаворин Н. Н., Аверьянов С. Ф. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. М., Изд-во АН СССР, 1956, 451 с.
22. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, 1968, 295 с.
23. Кулик В. Я. Влияние точности исходных данных на погрешность расчета на ЭВМ влажности почвы в зоне аэрации.— «Почвоведение», 1974, № 4, с. 45—50.
24. Кулик В. Я., Пичугина Н. В. Одновременный расчет капиллярно-сорбционных потенциалов, влажностей и потоков влаги на ЭВМ по уравнениям движения воды в почве.— «Докл. ВАСХНИЛ», 1973, № 4.
25. Лебедев А. В. Методы изучения баланса грунтовых вод, изд. 2. М., «Недра», 1976, 224 с.
26. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование геофильтрации. М., «Недра», 1976, 407 с.
27. Лукьянов В. С. Возможные классы и области применения гидравлических интеграторов и методы решения на них краевых задач. — В сб.: Расчет физических полей методами моделирования. М., «Машиностроение», 1968, с. 41—50.
28. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967, 599 с.
29. Лялько В. И., Шнейдерман Г. А. Формирование и прогноз ресурсов подземных вод засушливых районов. Киев, 1965, 181 с.
30. Мироненко В. А. Приближенный метод решения задач неустановившейся фильтрации.— «Изв. вузов. Геология и разведка», 1972, № 11, с. 72—79.
31. Мироненко В. А., Шестаков В. М. О принципах интерпретации опытно-фильтрационных наблюдений.— «Водные ресурсы», 1978, № 3.
32. Маторкина Г. Н., Пашковский И. С. Двухкомпонентная модель водоотдачи при откачке в двухслойной среде.— «Сборник научных трудов ТашГУ» (материалы по гидрогеологии), 1976, № 488, с. 13—17.
33. Нерпин С. В., Чудновский А. В. Физика почвы. М., «Наука», 1967, 583 с.

34. Основы гидрогеологических расчетов, изд. 2 (авт Ф. М. Бочевер, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков). М., «Недра», 1969, 367 с.
35. Пашковский И. С. Методы определения инфильтрационного питания по расчетам влагопереноса в зоне аэрации. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, 119 с.
36. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеориздат, 1952, 676 с.
37. Проскурников С. М. Результаты экспериментального изучения движения гравитационной пленочной воды в однородных песках.— «Труды ГГИ», 1948, вып. 8/62, с. 111—149.
38. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969, 545 с.
39. Роде А. А. Основы учения о почвенной влаге. Л., Гидрометеоиздат, 1965, 664 с.
40. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., «Наука», 1977, 656 с.
41. Сокулина Н. В. Движение подземных вод в слоистой песчано-глинистой толще при изменении нагрузки на ее кровлю.—«Бюл. МОИП. Отд. геол.», 1974, т. 49, № 3, с. 149—150.
42. Судницын И. И. Закономерности передвижения почвенной влаги. М., «Наука», 1964, 135 с.
43. Тарапон А. Г. Моделирование нестационарных полей на интеграторах ЭИНП. Киев, 1970, 156 с.
44. Тиздель Р. Р. О сейсмических явлениях, вызванных созданием крупных водохранилищ.— «Гидротехническое строительство», 1972, № 8, с. 51—53.
45. Фавзи И. А., Шестаков В. М. Моделирование влагопереноса в зоне аэрации при периодических поливах.— «Мат-лы совещ. по физ. и матем. моделированию при мелиоративных исследованиях». М., «Колос», 1971, с. 173—183.
46. Фильтрация из водохранилищ и прудов. М., «Колос», 1975, 303 с.
47. Чайлдс Э. Физические основы гидрологии почв. Л., Гидрометеоиздат, 1973, 427 с.
48. Шаманский В. Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. Киев, 1969, 374 с.
49. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965, 233 с.
50. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
51. Bredehoeft J. D. Response of well-aquifer systems to earth tides.— «J. Geophys. Research», 1967, vol. 72, N 12.
52. Boussinesq J. Essai sur la theorie des eaux coutrantes. Paris, 1877.
53. Gardner W. R. Calcnlation of capillary conductivity from pressure plate outflow data.— «Soil Sci. Soc. Amer. Pros.», 1956, vol. 20, N 3, p. 317—320.
54. Jacob C. E. On the Flow of Water in Elastic Artesian Aquifer.— «Transaction Amer. Geophys. Union», 1940, N 7.
55. Land subsidence. Pros. Tokyo Symposium. Unesco, 1969.
56. Lohman. S. W. Ground-water Hydraulics.— «U. S. Geol. Survey Prof. Paper.», 1972, N 708, 70 p.
57. Stallman R. W. Flow in the zone aeration.— «Advances in Hydrosciece», 1967, vol. 4.

Раздел IV

1. Алексеев В. С., Тесля А. Г. Об оценке гидравлических сопротивлений сетчатых фильтров.— «Гидротехника и мелиорация», 1967, № 5, с. 107—112.
2. Бабушкин В. Д., Плотников И. И., Чуйко В. М. Методы изучения фильтрационных свойств неоднородных пород. М., «Недра», 1974, 208 с.
3. Боровский Б. В., Самсонов Б. Г., Язвин Л. С. Методика определения параметров водоносных горизонтов по данным откачек. М., «Недра», 1973, 304 с.
4. Бочевер Ф. М. Теория и практические методы расчетов эксплуатационных запасов подземных вод. М., «Недра», 1968, 325 с.

5. Бочевер Ф. М., Алексеев В. С. Оценка сопротивления водозаборных скважин по опытным и эксплуатационным откачкам.— «Разведка и охрана недр», 1965, № 3, с. 39—46.
6. Бочевер Ф. М., Лапшин Н. Н., Хохлатов Э. М. Оценка производительности водозаборов подземных вод в речных долинах.— «Водные ресурсы», 1978, № 1, с. 16—28.
7. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Гидродинамические методы исследований скважин и пластов. М., «Недра», 1973, 246 с.
8. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке, изд. 2. Л., «Недра», 1972, 367 с.
9. Гаврилко В. М., Алексеев В. С. Фильтры буровых скважин. М., «Недра», 1976, 345 с.
10. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород (авт. Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Мержуков). М., «Недра», 1977, 271 с.
11. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод.— В сб.: Гидрогеология и инженерная геология, № 9. М., Госгеолиздат, 1947, 102 с.
12. Де Уист Р. Гидрогеология с основами гидрологии суши. М., «Мир», 1969, 312 с.
13. Гринбаум И. И. Расходометрия гидрогеологических и инженерно-геологических скважин. М., «Недра», 1975, 271 с.
14. Ефремов Д. И., Авдошин Е. И. Оценка параметров слабопроницаемых слоев по материалам режимных наблюдений.— В сб.: Вопросы изучения режима подземных вод и гидрогеологических процессов. М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1973, с. 93—104.
15. Зеегофер Ю. О., Шестаков В. М. Вопросы методики расчета несовершенных скважин.— «Труды ТашГУ», 1972, вып. 424, с. 51—62.
16. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949, 627 с.
17. Мироненко В. А., Шестаков В. М. Теория и методы интерпретации опытно-фильтрационных работ. М., «Недра», 1978.
18. Моркос Н. З., Манукьян Д. А. Методика определения гидрогеологических параметров двухслойной среды по данным опытных работ.— «Разведка и охрана недр», 1968, № 10, с. 38—42.
19. Надарейшвили А. В. Методы исследования опытных гидродинамических работ и явлений в системе пласт — скважина. М., «Недра», 1978.
20. Насберг В. М. Обобщенная формула Дюпюи — Краснопольского для напорной совершенной скважины.— «Изв. ТНИСГЭИ», 1947, т. 1, с. 129—142.
21. Олейник А. Я., Носиковский В. П. Методы расчета мелиоративного дренажа в неоднородно-слоистых грунтах. Киев, 1970, 230 с.
22. Основы гидрогеологических расчетов, изд. 2 (авт. Ф. М. Бочевер, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков). М., «Недра», 1969, 367 с.
23. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969, 545 с.
24. Стрельцова Т. Д., Шестаков В. М. Определение гидрогеологических параметров безнапорных пластов по данным опытных откачек из совершенных скважин.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1967, вып. 2, с. 4—24.
25. Форхгеймер Ф. Гидравлика. М., 1935, 616 с.
26. Хантуш М. С. Новое в теории перетекания.— В сб.: Вопросы гидрогеологических расчетов. М., «Мир», 1965, с. 43—59.
27. Хантуш М. С. Неустановившийся приток подземных вод к скважине, несовершенной по степени вскрытия.— В сб.: Вопросы гидрогеологических расчетов. М., «Мир», 1965, с. 61—84.
28. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963, 396 с.
29. Шестаков В. М. Вопросы фильтрационного расчета совершенных и несовершенных скважин.— «Труды лабор. инж. гидрогеологии ВОДГЕО», сб. 3. М., Госстройиздат, 1960, с. 164—179.
30. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965, 233 с.

31. Шестаков В. М. Постановка опытно-фильтрационных работ вблизи водотоков.— «Разведка и охрана недр», 1977, № 9, с. 38—44.
32. Шестаков В. М., Бондарев В. Л. Определения уровней грунтовых вод после бурения необсаженной наблюдательной скважины.— «Разведка и охрана недр», 1977, № 3, с. 60—61.
33. Шестаков В. М., Пашковский И. С. Анализ режима восстановления уровня в скважине.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1967, вып. 2, с. 28—35.
34. Язвин Л. С., Боревский Б. В. Опыт определения расчетных гидрогеологических параметров по данным групповых откачек.— «Разведка и охрана недр», 1963, № 4, с. 42—47.
35. Boulton N. S. The Analysis of Data from Nonequilibrum Pumping Test Allowing for Delayed Yield from Storage.— «Pros. Inst. Civil Engrs.», 1963, vol. 26, Nov., p. 469—482.
36. Dupuit J. Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. Paris, 1863.
37. Hantush M. S. Hydraulics of Wells.— «Advances in Hydroscience», 1964, vol. 1, p. 201—291.
38. Hantush M. S., Jacob C. E. Nonsteady radial flow in an infinite leaky aquifer.— «Trans. Amer. Geophys. Union», 1955, vol. 36, N 1, p. 95—100.
39. Jacob C. E. Flow of groundwater.— In: Engineering Hydraulics, chap. 5. N. Y., 1950.
40. Kruseman I. P., De Ridder N. A. Analysis and evalution of pumping test data. Wageningen, 1970.
41. Stallman R. W. Aquifer-test design, observation and data analysis. Wash., 1971, 26 p.
42. Theis Ch. V. The relation between the lowering of the piezometric surfase.— «Trans. Amer. Geophys. Union», 1935, vol. 16, pt. 2, p. 519—524.

Раздел V

1. Абрамов С. К. Подземные дренажи в промышленном и городском строительстве. М., Стройиздат, 1973, 239 с.
2. Аверьянов С. Ф. Борьба с засолением орошаемых земель. М., «Колос», 1978.
3. Алексеев В. С., Ананьева Е. А. Опыт накопления пресных вод в водоносных пластах с солеными водами.— «Гидрогеология и инж. геология» (обзор). М., изд. ВИЭМС, 1975, 39 с.
4. Биндеман Н. Н., Язвин Л. С. Оценка эксплуатационных запасов подземных вод, изд. 2. М., «Недра», 1970, 215 с.
5. Боревский Б. В., Хордикайнен М. А., Язвин Л. С. Разведка и оценка эксплуатационных запасов месторождений подземных вод в трещинно-карстовых пластах. М., «Недра», 1976, 247 с.
6. Борисов Ю. П. Определение дебита скважин при совместной работе нескольких рядов скважин.— «Труды Моск. нефт. ин-та им. Губкина», 1951, вып. 11, с. 170—184.
7. Бочевер Ф. М. Теория и практические методы расчетов эксплуатационных запасов подземных вод. М., «Недра», 1968, 324 с.
8. Гидрогеологические исследования в горном деле (под ред. В. А. Мироненко). М., «Недра», 1976, 352 с.
9. Гидрогеология СССР. Сводный том, вып. 3. Ресурсы различных типов подземных вод СССР. М., «Недра», 1977, 279 с.
10. Гомонова К. В. К вопросу о модернизации притока к скважинам на электрических сетках.— «Труды УФНИИ», 1960, вып. 6, с. 73—78.
11. Григорьев В. М. Зарубежный опыт искусственного пополнения запасов подземных вод.— «Труды ВОДГЕО», вып. 9. М., изд. ВОДГЕО, 1964, с. 3—50.
12. Жернов И. Е., Шестаков В. М. Моделирование подземных вод. М., «Недра», 1970, 224 с.
13. Зеленин И. В. Оценка параметров фильтрации водоносных пластов с применением методов математической статистики. Кишинев, 1976, 224 с.

14. Климентов П. П., Сыроватко М. В. Гидрогеология месторождений твердых полезных ископаемых, ч. 2. М., «Недра», 1966, 378 с.
15. Крашин И. И., Пересунько Д. И. Оценка эксплуатационных запасов подземных вод методом моделирования. М., «Недра», 1976, 206 с.
16. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование геофильтрации. М., «Недра», 1976, 407 с.
17. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967, 599 с.
18. Манукьян Д. А., Шестаков В. М. Методика расчета производительности водозаборных скважин с периодически меняющимся водоотбором.— «Разведка и охрана недр», 1970, № 6, с. 43—47.
19. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М., Гостоптехиздат, 1949, 628 с.
20. Мелиоративная гидрогеология (авт. И. Е. Жернов, А. Г. Солдак, П. Ю. Кущ, А. А. Грыза). Киев, 1970, 330 с.
21. Минкин Е. Л. Взаимосвязь подземных и поверхностных вод и ее значение при решении некоторых гидрогеологических и водохозяйственных задач. М., Стройиздат, 1973, 103 с.
22. Минкин Е. Л. Исследования и прогнозные расчеты для охраны подземных вод. М., «Недра», 1972, 109 с.
23. Мирзаев С. Ш. Запасы подземных вод Узбекистана. Ташкент, 1974, 224 с.
24. Олейник А. Я. Расчет дополнительных фильтрационных сопротивлений горизонтальных дрен и несовершенных скважин в двухслойном пласте.— «Труды координац. совещ. по гидротехнике», вып. 35. М., «Энергия», 1967, с. 87—97.
25. Олейник А. Я. Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. Киев, 1978.
26. Олейник А. Я., Носиковский В. П. Расчет систематического несовершенного дренажа в однородном грунте при неустановившемся режиме фильтрации.— «Мелиорация и водное хозяйство», вып. 10. М., «Урожай», 1969, 230 с.
27. Основы гидрогеологических расчетов, изд. 2 (авт. Ф. М. Бочевер, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков). М., «Недра», 1969, 367 с.
28. Плотников Н. А., Сычев К. И. Оценка эксплуатационных запасов подземных вод с искусственным их восполнением. М., «Недра», 1976, 151 с.
29. Плотников Н. И. Поиски и разведка пресных подземных вод для целей крупного водоснабжения. М., Изд-во Моск. ун-та, ч. 1, 1965; ч. 2, 1968, 469 с.
30. Проектирование водозаборов подземных вод (под ред. Ф. М. Бочевера). М., Стройиздат, 1976, 290 с.
31. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1961, 359 с.
32. Рекомендации по прогнозам подтопления промышленных площадок грунтовыми водами. М., изд. ВНИИ ВОДГЕО, 1976, 324 с.
33. Романов А. В. Методы фильтрационных расчетов дренажных сооружений.— «Вопр. фильтрац. расчетов гидротехн. сооружений», сб. 3. М., Госстройиздат, 1959, с. 66—120.
34. Форхгеймер Ф. Гидравлика. М., 1935, 616 с.
35. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. М., Гостоптехиздат, 1948.
36. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа. М., Изд-во Моск. ун-та, 1965, 233 с.
37. Шестаков В. М. Методические указания по расчетам систематического дренажа в слоистых системах. М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1966, 65 с.
38. Шестаков В. М. О влиянии вертикальной неоднородности фильтрационного потока на эффективность дренажа.— «Гидротехника и мелиорация», 1969, № 1, с. 63—69.
39. Шестаков В. М., Кравченко И. П., Пашковский И. С. Практикум по динамике подземных вод, изд. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975, 270 с.
40. Шестаков В. М., Кузнецова Н. А. Фильтрационная устойчивость песчаных откосов.— «Труды ВОДГЕО». М., Госстройиздат, 1958, с. 273—305.
41. Язвин Л. С. Достоверность гидрогеологических прогнозов при оценке эксплуатационных запасов подземных вод. М., изд. ВСЕГИНГЕО, 1972, 168 с.
42. Bayer W., Banscher E. Zur Kolmation der Gewässerbetten bei der Ufer-

filtratgewinnung.— «Zeitschrift für angewandte Geologie», 1975, H. 12, S. 565—570.
43. Walton W. Groundwater resource evalution. Mc Graw-Hill Co, 1970, 664 p.

Раздел VI

1. Албул С. П. Рудопоисковая гидрогеохимия. М., Изд-во Университета дружбы народов им. П. Лумумбы, 1969, 344 с.
2. Алексеев В. С., Никольская Е. А. Опыт захоронения сточных вод.— «Итоги науки и техники. Гидрогеология. Инж. геология», т. 4. М., изд. ВИНИТИ, 1976, с. 5—101.
3. Аренс В. Ж., Гайдин А. М. Геолого-гидрогеологические основы геотехнологических методов добычи полезных ископаемых. М., «Недра», 1978, 215 с.
4. Бочевер Ф. М., Колбасов А. М. Экспериментальные исследования фильтрации разнородных жидкостей.— «Изв. вузов. Геология и разведка», 1976, № 3, с. 121—128.
5. Бочевер Ф. М., Орадовская А. Е. Гидрогеологическое обоснование защиты подземных вод и водозаборов от загрязнений. М., «Недра», 1972, 129 с.
6. Бриллинг И. А. Исследование переноса водных солевых растворов в порах глинистых грунтов.—«Вестн. Моск. ун-та. Сер. геол.», 1967, № 2, с. 90—99.
7. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М., «Мир», 1971, 451 с.
8. Валуконис Г. Ю. О диффузионной гипотезе происхождения солености подземных вод.— «Сов. геология», 1977, № 3, с. 129—133.
9. Вакcман Э. Г. Мелиорация засоленных почв юго-западного Таджикистана. Душанбе, 1976, 211 с.
10. Веригин Н. Н. О кинетике растворения и выноса солей при фильтрации воды в грунтах.— В сб.: Растворение и выщелачивание горных пород. М., Госстройиздат, 1957, с. 84—114.
11. Газенко Н. В., Рошаль А. А., Шестаков В. М. Изучение солепереноса при промывках орошаемых земель.— В сб.: Гидрогеология и инженерная геология. Новочеркасск, 1977, с. 3—13.
12. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород (авт. Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шержуков). М., «Недра», 1977, 271 с.
13. Голубев В. С., Гарибянц А. А. Гетерогенные процессы геохимической миграции. М., «Недра», 1968, 191 с.
14. Гольдберг В. М. Гидрогеологические прогнозы качества подземных вод на водозаборах. М., «Недра», 1976, 152 с.
15. Дворкин Л. Б. Теория солепереноса и учет реальных свойств почвогрунтов.— «Тез. докл. III Межвед. совещ. по вопросам прогнозирования гидрогеол., инж.-геол. и почв.-мелиорат. условий», вып. 3. М., изд. ВНИИГиМ, 1976, с. 206—213.
16. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
17. Забродин П. И., Раковский Н. Л., Розенберг М. Д. Вытеснение нефти из пласта растворителями. М., «Недра», 1968, 223 с.
18. Затенацкая Н. П., Сафохина И. А. Диффузионное выщелачивание глин. М., «Наука», 1968, 86 с.
19. Иванов Н. С. Тепло- и массообмен в горных породах.— В сб.: Теоретические исследования и использование тепла Земли. М., «Наука», 1966.
20. Кабранова В. Н. Физические свойства горных пород. М., Гостоптехиздат, 1962, 490 с.
21. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964, 487 с.
22. К методике гидрогеологического обоснования подземного захоронения промышленных стоков (авт. В. М. Гольдберг, С. М. Семенова, Е. Г. Чаповский, В. М. Шестаков).— «Разведка и охрана недр», 1969, № 3, с. 41—46.
23. Колбасов А. М. Применение радиоактивных методов для исследования

фильтрации подземных вод в связи с защитой их от загрязнения. Автореф. канд. дис. М., 1976, 25 с.
24. Коль С. А. Определение скорости фильтрации подруслового потока.— «Труды ГГИ», 1948, вып. 8 (62), с. 175—187.
25. Коржинский Д. С. Теория метасоматической зональности. М., «Наука», 1969, 112 с.
26. Кутляров В. С. Конвективная диффузия в трещиноватых пористых средах. — «Прикладная механика и техническая физика», 1967, № 1, с. 84—88.
27. Майдебор В. Н. Схема строения трещинной среды. — В сб.: Разработка нефтяных месторождений с трещинными коллекторами. М., «Недра», 1967, с. 57—59.
28. Манукьян Д. А., Штенгелов Р. С. Особенности миграции подземных вод при крупном водоотборе.— «Вестн. Моск. ун-та. Сер. геол.», 1972, № 6, с. 63—68.
29. Матвеев Б. К. Геофизические методы изучения движения подземных вод. М., Госгеолтехиздат, 1963, 133 с.
30. Мельникова М. К., Прохоров В. М. О диффузии катионов в воздушно-сухой почве.— «Колл. журн.», 1965, т. 27, № 3, с. 406—411.
31. Методическое пособие по инженерно-геологическому изучению горных пород, т. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968, 370 с.
32. Микрокинетика процессов в пористых средах (авт. Ю. А. Чизмаджев, В. С. Маркин, М. Р. Тарасевич, Ю. Г. Чирков). М., «Наука», 1971, 362 с.
33. Минкин Е. Л. Гидрогеологические расчеты для выделения зон санитарной охраны водозаборов подземных вод. М., «Недра», 1967, 124 с.
34. Морковкина И. К., Романов В. В. Применение природного трития для изучения подземных вод.— В сб.: Радиоактивные методы исследований в гидрогеологии. Киев, 1975.
35. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Физика почвы. М., «Наука», 1967, 587 с.
36. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах.— «Прикладная математика и механика», 1959, т. 23, вып. 6, с. 1042—1050.
37. Огильви Н. А., Федорович Д. И. Электролитический метод определения скорости фильтрации подземных вод. М., «Недра», 1964, 43 с.
38. Окнина Н. А. Процессы диффузии и диффузионного выщелачивания солей в глинистых и мелоподобных породах. — В сб.: Формирование инженерно-геологических свойств глинистых пород в процессе литогенеза. М., Изд-во АН СССР, 1962, с. 205—214.
39. Основы гидрогеологических расчетов, изд. 2 (авт. Ф. М. Бочевер, И. В. Гармонов, А. В. Лебедев, В. М. Шестаков). М., «Недра», 1969, 367 с.
40. Панин П. С., Долженко Н. Б., Чеканов В. И. Процессы засоления и рассоления почв. Новосибирск, 1976, 173 с.
41. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. М., Гостехтеориздат, 1950, 182 с.
42. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод, изд. 2. М., «Наука», 1977, 664 с.
43. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969, 545 с.
44. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., «Недра», 1966, 283 с.
45. Рошаль А. А. Массоперенос в двухслойной пористой среде.— «Прикладная механика и техническая физика», 1969, № 4, с. 47—53.
46. Рошаль А. А., Шестаков В. М. О миграции подземных вод в слоистых пластах.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1969, вып. 14, с. 43—56.
47. Рошаль А. А., Шестаков В. М. Методика полевых определений миграционных параметров пласта.— В сб.: Охрана подземных вод УССР от загрязнения и истощения, вып. 1. Киев, 1970, с. 75—79.
48. Смирнов С. И. Происхождение солености подземных вод седиментационных бассейнов. М., «Недра», 1971, 216 с.
49. Справочник химика. М.—Л., «Химия», 1964, 1005 с.

50. Тютюнова Ф. И. Физико-химические процессы в подземных водах. М., «Наука», 1976, 127 с.
51. Формирование и строение ореолов рассеяния вещества в подземных водах (авт. В. А. Грабовников, В. З. Рубейкин, Л. М. Самсонова, Б. Г. Самсонов). М., «Недра», 1977, 136 с.
52. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М., «Недра», 1965.
53. Шестаков В. М. Основы гидрогеологических расчетов при фильтрации из хранилищ промстоков. М., изд. ВНИИ ВОДГЕО, 1960.
54. Шестаков В. М. К вопросу о смешении сточных вод в реках.— «Водоснабжение и сантехника», 1961, № 7, с. 15—18.
55. Шестаков В. М. К теории фильтрации растворов в грунтах.— В сб.: Вопросы формирования химического состава подземных вод. М., Изд-во Моск. ун-та, 1963, с. 192—213.
56. Шестаков В. М. О кинетике сорбции на грунтах.— «Тематический сборник ВСЕГИНГЕО», 1969, вып. 14, с. 17—23.
57. Шестаков В. М. Теоретические модели переноса загрязнения в подземных водах.— «Междунар. высш. гидрол. курсы ЮНЕСКО при МГУ, X сесс. Цикл «Загрязнение подземных вод». М., 1979 (ротапринт).
58. Шестаков В. М., Рошаль А. А., Пашковский И. С. Методика определения миграционных параметров гетерогенных систем.— В сб.: Вопросы гидрогеологии. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 83—97.
59. Эршлер Б. Ф. О применении ультрафильтрации для различения коллоидов и кристаллоидов.— «Журн. физ. химии», 1934, № 10, с. 1353—1365.
60. Bredehoft J. D., Papadopulos I. S. Rates of vertical groundwater movement estimated from the earths termal profill.— «Water Resources Research», 1965, vol. 1, N 2.
61. De Sitter L. U. Diagensis of oil-field brines.— «Bul. Amer. Assoc. Petr. Geologists.», 1947, vol. 31, p. 2030—2040.
62. Domenico P. A. Concepts and models in groundwater hydrology. N. Y., 1972.
63. Fried J. J., Combarnous M. A. Dispersion in porous media.— «Advances in Hydroscience», 1971, vol. 7.
64. Isotope Techniques in Groundwater Hydrology, vol. II. Vienna, 1974.
65. Klinkenberg J. Analogy between diffusion and electrical conductivity in porons rocks.— «Bul. Amer. Geol. Society», 1951, vol. 62, N 6, p. 559—564.
66. Perkins T. K., Johnston O. C. A rewiew of diffusion and dispersion in porons media.— «J. Society of Petrol. Engrs.», 1963, vol. 3, N 1, p. 70—84.
67. Rose D. A. Hydrodinamic dispersion in porous materials.— «Soil Science», 1977, vol. 123, N 5, p. 277—283.
68. Skibitzke H. E., Robinson G. M. Dispersion in ground water flowing through heterogeneous materials.— «U. S. Geol. Survey Proffesional Paper», 1963, 386—B.
69. Sutor J., Novak V. Experimentalny vyskum interakcie gradientu teploty pody a vyparu z jej povrchu.— «Vodohospodarsky časopis», 1968, N 1, p. 100—

Таблица функции erfc λ

λ	erfc λ	λ	erfc λ	λ	erfc λ	λ	erfc λ	λ	erfc λ
0,00	1,000	0,25	0,724	0,50	0,480	0,75	0,289	1,00	0,157
0,01	0,989	0,26	0,713	0,51	0,471	0,76	0,282	1,05	0,138
0,02	0,977	0,27	0,703	0,52	0,462	0,77	0,276	1,10	0,120
0,03	0,966	0,28	0,692	0,53	0,453	0,78	0,270	1,15	0,104
0,04	0,955	0,29	0,682	0,54	0,445	0,79	0,264	1,20	0,090
0,05	0,944	0,30	0,671	0,55	0,437	0,80	0,258	1,25	0,088
0,06	0,933	0,31	0,661	0,56	0,428	0,81	0,252	1,30	0,066
0,07	0,921	0,32	0,651	0,57	0,420	0,82	0,246	1,35	0,056
0,08	0,910	0,33	0,641	0,58	0,412	0,83	0,240	1,40	0,048
0,09	0,899	0,34	0,631	0,59	0,404	0,84	0,235	1,45	0,040
0,10	0,887	0,35	0,621	0,60	0,396	0,85	0,229	1,50	0,036
0,11	0,876	0,36	0,611	0,61	0,388	0,86	0,224	1,60	0,024
0,12	0,865	0,37	0,601	0,62	0,381	0,87	0,219	1,70	0,016
0,13	0,854	0,38	0,591	0,63	0,373	0,88	0,213	1,80	0,011
0,14	0,843	0,39	0,581	0,64	0,365	0,89	0,208	1,90	0,007
0,15	0,832	0,40	0,572	0,65	0,358	0,90	0,203	2,00	0,005
0,16	0,829	0,41	0,562	0,66	0,351	0,91	0,198	2,10	0,003
0,17	0,810	0,42	0,552	0,67	0,343	0,92	0,193	2,20	0,002
0,18	0,799	0,43	0,543	0,68	0,336	0,93	0,188	2,30	0,001
0,19	0,789	0,44	0,534	0,69	0,329	0,94	0,184	2,40	0,001
0,20	0,777	0,45	0,524	0,70	0,322	0,95	0,179	∞	0,000
0,21	0,766	0,46	0,515	0,71	0,315	0,96	0,175		
0,22	0,756	0,47	0,506	0,72	0,309	0,97	0,170		
0,23	0,745	0,48	0,497	0,73	0,302	0,98	0,166		
0,24	0,734	0,49	0,488	0,74	0,295	0,99	0,161		

Таблица функции $R(\lambda)$

λ	$R(\lambda)$	λ	$R(\lambda)$	λ	$R(\lambda)$
0,00	1,00	0,24	0,558	0,47	0,305
0,01	0,978	0,25	0,549	0,48	0,296
0,02	0,956	0,26	0,535	0,49	0,288
0,03	0,934	0,27	0,522	0,50	0,280
0,04	0,913	0,28	0,509	0,52	0,264
0,05	0,892	0,29	0,496	0,54	0,249
0,06	0,872	0,30	0,483	0,56	0,235
0,07	0,852	0,31	0,470	0,58	0,222
0,08	0,832	0,32	0,458	0,60	0,209
0,09	0,813	0,33	0,446	0,65	0,180
0,10	0,794	0,34	0,434	0,70	0,154
0,11	0,775	0,35	0,419	0,75	0,128
0,12	0,757	0,36	0,412	0,80	0,112
0,13	0,739	0,37	0,399	0,90	0,0803
0,14	0,721	0,38	0,391	1,00	0,0568
0,15	0,704	0,39	0,380	1,10	0,0396
0,16	0,687	0,40	0,370	1,20	0,0272
0,17	0,670	0,41	0,360	1,30	0,0184
0,18	0,654	0,42	0,349	1,40	0,0122
0,19	0,639	0,43	0,341	1,50	0,0080
0,20	0,623	0,44	0,331	2,00	0,00076
0,21	0,607	0,45	0,322	2,50	0,000043
0,22	0,592	0,46	0,313	∞	0
0,23	0,578				

Таблица функции $F_1(\bar{x}, \tau)$

$\bar{x}$ \ τ	0,02	0,03	0,04	0,05	0,075	0,1	0,15	0,2	0,3
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,1	0,617	0,683	0,724	0,752	0,796	0,823	0,855	0,873	0,89
0,2	0,317	0,412	0,477	0,532	0,607	0,655	0,715	0,745	0,782
0,3	0,135	0,225	0,29	0,342	0,439	0,5	0,583	0,618	0,673
0,4	0,045	0,102	0,157	0,205	0,302	0,372	0,46	0,515	0,568
0,5	0,013	0,04	0,077	0,114	0,196	0,213	0,355	0,412	0,467
0,6	0,007	0,017	0,032	0,06	0,12	0,18	0,262	0,318	0,37
0,7	0,002	0,007	0,012	0,03	0,074	0,115	0,182	0,219	0,275
0,8	0	0,002	0,005	0,01	0,037	0,064	0,114	0,148	0,18
0,9	0	0	0,002	0,0075	0,016	0,029	0,055	0,073	0,09
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$F_1(\bar{x}, \tau) = 1 - \bar{x} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\tau} \sin(n\pi\bar{x})$$

Таблица функции $R_1(\bar{x}, \tau)$

$\bar{x}$ \ τ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,1	0,690	0,771	0,809	0,830	0,843	0,853	0,859	0,864	0,872
0,2	0,463	0,586	0,647	0,682	0,705	0,720	0,732	0,740	0,752
0,3	0,301	0,439	0,511	0,554	0,582	0,601	0,615	0,626	0,641
0,4	0,190	0,323	0,397	0,443	0,473	0,494	0,509	0,521	0,536
0,5	0,116	0,233	0,303	0,347	0,376	0,396	0,411	0,422	0,438
0,6	0,068	0,163	0,224	0,263	0,289	0,307	0,320	0,330	0,344
0,7	0,039	0,109	0,157	0,189	0,210	0,224	0,235	0,243	0,255
0,8	0,020	0,067	0,100	0,122	0,137	0,147	0,154	0,160	0,168
0,9	0,009	0,032	0,049	0,060	0,067	0,073	0,077	0,079	0,084
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$R_1(\bar{x}, \tau) = (1 - \bar{x}) \left[1 - \frac{\bar{x}(2 - \bar{x})}{6\tau} \right] + \frac{2}{\pi^3\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\pi^2 n\tau} \sin(n\pi\bar{x})$$

Таблица функции $F_н(\lambda, \theta)$

θ \ λ	0,1	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5
0,05	0,957	0,897	0,804	0,721	0,646	0,578	0,518	0,466	0,418	0,336
0,1	0,942	0,860	0,740	0,637	0,548	0,471	0,405	0,348	0,300	0,222
0,2	0,923	0,816	0,666	0,544	0,443	0,369	0,295	0,241	0,196	0,130
0,3	0,910	0,788	0,622	0,490	0,386	0,304	0,239	0,188	0,148	0,091
0,4	0,901	0,769	0,591	0,454	0,348	0,267	0,204	0,156	0,119	0,069
0,5	0,895	0,755	0,569	0,428	0,321	0,241	0,180	0,135	0,100	0,056
0,75	0,884	0,732	0,534	0,337	0,279	0,201	0,144	0,103	0,073	0,037
1,0	0,879	0,720	0,514	0,363	0,255	0,178	0,123	0,085	0,059	0,027
2,0	0,875	0,706	0,484	0,324	0,212	0,137	0,087	0,055	0,034	0,013
5,0	0,881	0,712	0,479	0,299	0,181	0,105	0,059	0,033	0,018	0,0048
10,0	0,884	0,718	0,475	0,292	0,169	0,092	0,048	0,024	0,011	0,0024
100,0	0,887	0,723	0,479	0,289	0,158	0,079	0,035	0,015	0,0054	0,0006
∞	0,887	0,724	0,480	0,289	0,157	0,080	0,034	0,014	0,0047	0,0004

$$F_н(\lambda, \theta) = 1 - \frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\beta\lambda}{\beta\left(4+\frac{\beta^2}{\theta}\right)}\cdot\exp\left(-\frac{\beta^2}{4+\frac{\beta^2}{\theta}}\right)d\beta$$

Таблица функции $P(\lambda)$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,00	0,564	0,28	0,328	0,62	0,148
0,01	0,554	0,29	0,321	0,64	0,141
0,02	0,544	0,30	0,314	0,66	0,133
0,03	0,535	0,31	0,307	0,68	0,127
0,04	0,525	0,32	0,301	0,70	0,120
0,05	0,516	0,33	0,294	0,72	0,114
0,06	0,506	0,34	0,288	0,74	0,108
0,07	0,497	0,35	0,282	0,76	0,102
0,08	0,488	0,36	0,276	0,78	0,096
0,09	0,479	0,37	0,272	0,80	0,091
0,10	0,470	0,38	0,264	0,82	0,086
0,11	0,461	0,39	0,258	0,84	0,081
0,12	0,452	0,40	0,252	0,86	0,077
0,13	0,444	0,41	0,246	0,88	0,072
0,14	0,435	0,42	0,241	0,90	0,068
0,15	0,427	0,43	0,235	0,92	0,064
0,16	0,419	0,44	0,230	0,94	0,060
0,17	0,410	0,45	0,225	0,96	0,057
0,18	0,402	0,46	0,219	0,98	0,053
0,19	0,394	0,47	0,214	1,00	0,050
0,20	0,387	0,48	0,209	1,10	0,036
0,21	0,379	0,49	0,204	1,20	0,026
0,22	0,371	0,50	0,200	1,30	0,018
0,23	0,364	0,52	0,190	1,40	0,013
0,24	0,356	0,54	0,181	1,50	0,009
0,25	0,349	0,56	0,172	1,60	0,006
0,26	0,342	0,58	0,164	1,80	0,002
0,27	0,335	0,60	0,156	2,00	0,001

$$P(\lambda) = i\,\mathrm{erfc}\,\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\lambda^2} - \lambda\,\mathrm{erfc}\,\lambda$$

Таблица функции $W(u)$

u	$W(u)$	u	$W(u)$	u	$W(u)$	u	$W(u)$	u	$W(u)$
0,001	6,332	0,11	1,737	0,39	0,719	0,67	0,396	0,95	0,239
0,002	5,639	0,12	1,660	0,40	0,702	0,68	0,388	0,96	0,235
0,003	5,235	0,13	1,589	0,41	0,686	0,69	0,381	0,97	0,231
0,004	4,948	0,14	1,524	0,42	0,670	0,70	0,374	0,98	0,227
0,005	4,726	0,15	1,465	0,43	0,640	0,71	0,367	0,99	0,223
0,006	4,544	0,16	1,409	0,44	0,655	0,72	0,360	1,00	0,219
0,007	4,392	0,17	1,358	0,45	0,625	0,73	0,353	1,1	0,186
0,008	4,259	0,18	1,310	0,46	0,611	0,74	0,347	1,2	0,158
0,009	4,142	0,19	1,265	0,47	0,598	0,75	0,340	1,3	0,135
0,01	4,038	0,20	1,223	0,48	0,585	0,76	0,334	1,4	0,116
0,015	3,637	0,21	1,183	0,49	0,572	0,77	0,328	1,5	0,100
0,02	3,355	0,22	1,145	0,50	0,560	0,78	0,322	1,6	0,086
0,025	3,137	0,23	1,110	0,51	0,548	0,79	0,316	1,7	0,075
0,03	2,959	0,24	1,076	0,52	0,536	0,80	0,311	1,8	0,065
0,035	2,810	0,25	1,044	0,53	0,525	0,81	0,305	1,9	0,056
0,04	2,681	0,26	1,014	0,54	0,514	0,82	0,300	2,0	0,049
0,045	2,568	0,27	0,985	0,55	0,503	0,83	0,294	2,5	0,025
0,05	2,468	0,28	0,957	0,56	0,493	0,84	0,289	3,0	0,013
0,055	2,378	0,29	0,931	0,57	0,483	0,85	0,284	3,5	0,007
0,06	2,295	0,30	0,906	0,58	0,473	0,86	0,279	4,0	0,0038
0,065	2,220	0,31	0,882	0,59	0,464	0,87	0,274	4,5	0,0021
0,07	2,151	0,32	0,858	0,60	0,454	0,88	0,269	5,0	0,0011
0,075	2,087	0,33	0,836	0,61	0,445	0,89	0,265	5,5	$6{,}4\cdot10^{-4}$
0,08	2,027	0,34	0,815	0,62	0,437	0,90	0,260	6,0	$3{,}6\cdot10^{-4}$
0,085	1,971	0,35	0,794	0,63	0,428	0,91	0,256		
0,09	1,919	0,36	0,775	0,64	0,420	0,92	0,251		
0,095	1,870	0,37	0,755	0,65	0,412	0,93	0,247		
0,10	1,823	0,38	0,737	0,66	0,404	0,94	0,243		

$$W(u) = -Ei(-u) = \int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \ln\frac{1}{u} - 0{,}577 + u - \frac{u^2}{2\cdot 2!} - \frac{u^3}{3\cdot 3!} - \dots$$

Таблица функции $W_{\text{п}}(u, \bar{r})$

u \ $\bar{r}$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0	1,5	2,0	3,0
0	4,854	3,505	2,745	2,229	1,849	1,555	1,321	1.131	0,974	0,842	0,428	0,228	0,0695
0,001	4,829	3,505											
0,005	4,296	3,457	2,743	2,229									
0,01	3,815	3,288	2,710	2,225	1,849	1,555	1,321	1,131					
0,02	3,244	2,952	2,569	2,181	1,838	1,553	1,321	1,131	0,974				
0,03	2,887	2,690	2,411	2,103	1,806	1,542	1,318	1,130	0,973	0,842			
0,04	2,629	2,482	2,266	2,016	1,760	1,521	1,309	1,127	0,972	0,842			
0,05	2,427	2,311	2,137	1,928	1,708	1,493	1,296	1,121	0,790	0,841			
0,06	2,262	2,167	2,023	1,845	1,652	1,459	1,277	1,112	0,966	0,834			
0,07	2,123	2,044	1,921	1,767	1,597	1,423	1,255	1,099	0,959	0,836	0,428		
0,08	2,003	1,935	1,829	1,695	1,544	1,386	1,231	1,085	0,951	0,832	0,428		
0,09	1,898	1,839	1,746	1,627	1,492	1,349	1,205	1,068	0,941	0,826	0,427		
0,1	1,805	1,753	1,670	1,564	1,442	1,312	1,179	1,051	0,930	0,819	0,427	0,228	
0,2	1,216	1,194	1,160	1,115	1,059	0,996	0,928	0,858	0,786	0,715	0,414	0,227	0,0695
0,3	0,902	0,890	0,871	0,846	0,814	0,778	0,737	0,693	0,648	0,601	0,381	0,221	0,0694
0,4	0,700	0,693	0,681	0,665	0,645	0,621	0,594	0,565	0,535	0,502	0,341	0,210	0,0691
0,5	0,558	0,553	0,545	0,534	0,521	0,504	0,486	0,466	0,444	0,421	0,301	0,194	0,0681
0,6	0,453	0,450	0,444	0,436	0,427	0,415	0,402	0,387	0,371	0,354	0,263	0,177	0,0664
0,7	0,373	0,370	0,366	0,361	0,353	0,345	0,335	0,324	0,312	0,300	0,229	0,160	0,0639
0,8	0,310	0,308	0,305	0,301	0,295	0,289	0,282	0,273	0,264	0,254	0,199	0,144	0,0607
0,9	0,260	0,258	0,256	0,253	0,249	0,244	0,238	0,231	0,224	0,217	0,173	0,128	0,0572
1,0	0,219	0,218	0,216	0,214	0,210	0,207	0,202	0,197	0,191	0,186	0,151	0,114	0,0534
2,0	0,0488	0,0487	0,0485	0,0482	0,0477	0,0473	0,0467	0,0460	0,0452	0,0444	0,0394	0,0335	0,0210
3,0	0,0130	0,0130	0,0130	0,0129	0,0128	0,0127	0,0126	0,0125	0,0123	0,0122	0,0112	0,0100	0,0071

$$W_{\text{п}}(u, \bar{r}) = \int_{\bar{r}^2/4u}^{\infty} \exp\left(-x - \frac{\bar{r}^2}{4x}\right) \frac{dx}{x}; \quad W_{\text{п}}(u, 0) = W(u); \quad W_{\text{п}}(0, \bar{r}) = 2K_0(\bar{r})$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Предисловие ко второму изданию 6

Раздел I. Гидродинамические основы геофильтрации

Глава 1. Исходные представления динамики подземных вод . . . 7
§ 1. Общие представления гидрогеомеханики 7
§ 2. Потоки подземных вод 12
Глава 2. Основы гидравлики 24
§ 1. Законы сопротивления в водных потоках 24
§ 2. Закономерности течения воды в трубах 28
Глава 3. Проницаемость и емкость горных пород 32
§ 1. Основной закон фильтрации и проницаемость горных пород 32
§ 2. Емкостные свойства горных пород 42
Глава 4. Исходная гидродинамическая модель геофильтрационного потока 48
§ 1. Дифференциальные уравнения геофильтрации 48
§ 2. Граничные условия геофильтрационного потока . . . 52
Глава 5. Геофильтрационная схематизация и постановка геофильтрационных расчетов 59
§ 1. Структура и режим геофильтрационного потока . . . 59
§ 2. Постановка геофильтрационных расчетов 66
Глава 6. Основы моделирования фильтрации 68
§ 1. Сплошные гидравлические модели 69
§ 2. Метод электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) . . 72

Раздел II. Методика расчетов и моделирования стационарной фильтрации подземных вод

Глава 1. Основы методики расчетов плановой стационарной фильтрации 77
§ 1. Принципы составления расчетных зависимостей для плановых потоков 77
§ 2. Одномерные задачи стационарной плановой фильтрации . 80
§ 3. Основы динамики плановых потоков переменной плотности 88
Глава 2. Фильтрация вблизи водоемов и гидросооружений 95
§ 1. Фильтрация вблизи водоемов и водотоков 95
§ 2. Фильтрация под гидросооружениями 106
Глава 3. Основы моделирования стационарной фильтрации 110
§ 1. Общие положения технологии электрического моделирования 110
§ 2. Моделирование профильной фильтрации 112
§ 3. Моделирование плановой фильтрации 119

Раздел III. Методика расчетов и моделирования нестационарной фильтрации

Глава 1. Дифференциальные уравнения плановой нестационарной фильтрации 132
§ 1. Дифференциальные уравнения планового безнапорного потока 132
§ 2. Дифференциальное уравнение планового напорного потока (упругий режим фильтрации) 137
§ 3. Краевые условия для плановых потоков 140
Глава 2. Аналитические методы решения задач нестационарной плановой фильтрации 144
§ 1. Методы решения дифференциальных уравнений . . . 146
§ 2. Решения задач нестационарной фильтрации с применением метода интегральных преобразований 154

§ 3. Определение геофильтрационных параметров по данным режимных наблюдений 157
Глава 3. Численные методы решения задач нестационарной фильтрации 163
§ 1. Конечно-разностные уравнения планового нестационарного безнапорного потока 164
§ 2. Теория и устройство гидравлического интегратора . . . 169
§ 3. Теория и устройство электрических интеграторов . . . 173
Глава 4. Формирование упругого режима под действием геодинамических факторов 179
§ 1. Проявления упругого режима при действии современных геодинамических факторов 179
§ 2. Палеогидродинамические расчеты консолидации глинистых разделяющих пластов 182
Глава 5. Влагоперенос в зоне аэрации 185
§ 1. Гидродинамические основы теории влагопереноса . . . 185
§ 2. Дифференциальные уравнения и методика расчетов влагопереноса 188

Раздел IV. Основы теории вертикальных скважин и методики обработки опытно-фильтрационных опробований

Глава 1. Одиночные скважины в изолированном пласте при стационарном режиме 193
§ 1. Основная радиальная задача (уравнение Дюпюи) . . . 193
§ 2. Учет сопротивления прискважинной зоны 198
Глава 2. Совершенные скважины в неограниченном напорном пласте при нестационарном режиме 201
§ 1. Дифференциальное уравнение планово-радиального потока в изолированном напорном пласте 201
§ 2. Решение основной задачи нестационарной планово-радиальной фильтрации 203
§ 3. Влияние перетекания на работу скважин в слоистых системах 207
§ 4. Неупорядоченные системы взаимодействующих скважин и учет переменного дебита скважин 211
Глава 3. Учет прямолинейных границ пласта в плане 213
§ 1. Полуограниченный пласт 214
§ 2. Угловой и полосовой пласты 219
Глава 4. Несовершенные скважины 223
§ 1. Расчетные модели несовершенных скважин и решение для пласта неограниченной мощности 223
§ 2. Скважины в полуограниченном и ограниченном по мощности пластах 227
Глава 5. Обработка данных опытно-фильтрационных опробований . 233
§ 1. Первоначальная откачка из совершенных скважин в изолированном напорном пласте 234
§ 2. Откачки в изолированном напорном пласте при переменном дебите. Режим восстановления уровня 239
§ 3. Особенности откачек из совершенных скважин в слоистых и безнапорных пластах 244
§ 4. Опробование несовершенных скважин 253

Раздел V. Гидрогеологические расчеты водозаборных и дренажных сооружений

Глава 1. Гидродинамические основы расчетов водозаборных и дренажных систем 259
§ 1. Основы расчетов взаимодействующих скважин 259
§ 2. Особенности расчетов горизонтального дренажа . . . 263
§ 3. Особенности моделирования скважин 267

Глава 2. Геофильтрационные расчеты дренажа подземных вод . . . 273
§ 1. Общие положения методики расчетов дренажа подземных вод 273
§ 2. Расчеты защитного дренажа 276
§ 3. Расчеты систематического дренажа 280
Глава 3. Геофильтрационные расчеты водозаборов подземных вод . . 285
§ 1. Основы геофильтрационных расчетов водозаборов в различных гидрогеологических условиях 286
§ 2. Особенности расчетов водозаборов в речных долинах . . 295

Раздел VI. Гидродинамические основы теории миграции подземных вод

Глава 1. Основные физико-химические законы миграции подземных вод 305
§ 1. Конвективный перенос 305
§ 2. Диффузионно-кондуктивный перенос 308
Глава 2. Миграция подземных вод в различных гидрогеологических условиях 312
§ 1. Диффузионно-кондуктивный перенос в разделяющих слоях 312
§ 2. Дисперсия границы раздела жидкостей в однородных водоносных пластах 316
§ 3. Макродисперсия в неоднородной среде 321
Глава 3. Методы определения миграционных параметров 328
§ 1. Лабораторные определения параметров микродисперсии . 328
§ 2. Полевые определения миграционных параметров . . . 330
Глава 4. Методика гидрогеологических расчетов загрязнения подземных вод 334
§ 1. Расчеты области захвата подземных вод водозаборами . 334
§ 2. Методика расчетов времени распространения загрязнения в подземных водах 337

Заключение 346

Литература 348

Приложения 361

Всеволод Михайлович Шестаков

ДИНАМИКА ПОДЗЕМНЫХ ВОД
2-е изд.

Зав редакцией И. И. Щехура. Редактор Н. В. Баринова
Переплет художника А. Савелова
Технический редактор В. И. Овчинникова
Корректоры Л. А. Костылева, С. Ф. Будаева, И. А. Мушникова

Тематический план 1979 г. № 120
ИБ № 762

Сдано в набор 25.12.78. Подписано к печати 12.06.79. Л-73629. Формат 60×80¹/₁₆ Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать Усл. печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 24,15. Тираж 4000 экз. Зак. № 5. Цена 1 р. 20 к. Изд. № 530.

Издательство Московского университета. Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы