П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Допущено
Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для государственных университетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952

Редакторы *Г. К. Михайлов* и *В. И. Левантовский.*
Техн. редактор *С. Н. Ахламов.* Корректор *Н. В. Казанская.*

Подписано к печати 28/X 1952 г. Бумага 60×92/16. 21,125 бум. листа. 42,25 печ. л. 41,11 уч.-изд. л. 39392 тип. зн. в печ. л. 1-08727 Тираж 5000 экз. Цена книги 12 руб. 35 коп. Переплет 1 руб. 50 коп. Номинал по прейскуранту 1952 года. Заказ № 3668

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9
Введение 11

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Глава I. **Физические и математические осиовы теории движения грунтовых вод** 13

§ 1. Состав грунта (13). § 2. Пористость грунта (16). § 3. Электромолекулярные силы в грунтах (19). § 4. Различные состояния воды в грунте (20). § 5. Скорость фильтрации (24). § 6. Опытные законы фильтрации (26). § 7. Коэффициент фильтрации (28). § 8. Пределы применимости линейного закона фильтрации. Нелинейные законы (30). § 9. Капиллярность (31). § 10. Водопроницаемость грунтов при неполном их насыщении (33). § 11. Уравнения движения грунтовых вод (34). § 12. Уравнения движения при нелинейных законах фильтрации (39).

Глава II. **Плоские движения в вертикальной плоскости** 45

А. Общие вопросы 45

§ 1. Уравнения плоского движения (45). § 2. Граничные условия в плоском установившемся движении (46). § 3. Условия на границе раздела двух грунтов (49). § 4. Годограф скорости (50). § 5. Поведение скорости в угловых точках области движения (53). § 6. Примеры построения годографа скорости (55). § 7. Треугольник фильтрации (62). § 8. Силы, действующие на частицы грунта (63).

Б. Простейшие примеры плоских движений . . . 66

§ 9. Предварительные замечания (66). § 10. Дренажная щель на водоупоре (66). § 11. Горизонтальная дрена при отсутствии водоупора. Изолинии грунтового потока (69). § 12. Плоский флютбет в слое бесконечной глубины (71). § 13. Шпунт в проницаемом грунте бесконечной глубины (79). § 14. Флютбет с дренажным отверстием (82).

Глава III. **Напорная фильтрация под гидротехническими сооружениями** 84

А. Многоугольные области в задачах о напорной фильтрации. Теорема единственности 84

§ 1. Постановка задачи (Н. Н. Павловский) (84). § 2. Конформное отображение многоугольника на полуплоскость (85). § 3. Отображение прямоугольника на полуплоскость (89). § 4. Основной прямоугольник задач напорной фильтрации (90). § 5. Теорема единственности (92).

Б. Фильтрация под флютбетами 94

§ 6. Плоский флютбет в слое конечной глубины (94). § 7. Флютбет при наличии дренирующего основания (99). § 8. Плоский разрезной флютбет в проницаемом слое конечной глубины (101).

В. Обтекание сооружений со шпунтами 102

§ 9. Отображение на полуплоскость многоугольника, все стороны которого проходят через одну точку (102). § 10. Обтекание наклонного шпунта (104). § 11. Шпунт при наличии водоупора или дренирующего основания (105). § 12. Плоский флютбет со шпунтом в грунте конечной глубины (108). § 13. Двухшпунтовый флютбет в проницаемом слое конечной глубины (114). § 14. Симметричный двухшпунтовый флютбет и котлован, огражденный двумя шпунтами (121). § 15. Толстый флютбет (124). § 16. О фильтрации под перепадами (126).

Г. Многошпунтовые схемы 128

§ 17. Метод фрагментов (128). § 18. Многошпунтовые схемы в грунте бесконечной глубины (129).

Д. Гидродинамические реакции на основание плотины 131

§ 19. Главный вектор сил давления (131). § 20. Главный момент сил давления (136). § 21. О движении граничных точек отображаемых областей (138). § 22. Приложения к движению грунтовых вод под плотинами (141).

Глава IV. **Функция Жуковского и ее приложения. Применение функционального анализа** 143

А. Прямые методы решения задач фильтрации. . 143

§ 1. Функция Жуковского (143). § 2. Шпунт Жуковского (144). § 3. Одиночная дрена (147). § 4. Приток к системе дрен при наличии инфильтрации (150). § 5. Фильтрация из канала в симметрично расположенные водоприемники (155). § 6. Фильтрация из канала при водоприемнике с одной стороны (158).

Б. Получение некоторых безнапорных движений из напорных 159

§ 7. Упрощенная схема земляной плотины на проницаемом основании конечной глубины (159). § 8. Упрощенная схема земляной плотины со шпунтом (161).

В. Полуобратный метод в теории фильтрации из каналов 163

§ 9. Фильтрация без подпора из каналов криволинейного периметра (163). § 10. Фильтрация с подпором (166). § 11. Приток воды к осушительной канаве криволинейного профиля (168). § 12. Простейшая схема плотины с дренажем в грунте бесконечной глубины (169). § 13. Приближенное решение задачи о кольматировании русла канала (170).

Г. Применение функционального анализа 172

§ 14. Сущность метода (172). § 15. Движение грунтовых вод при наклонном водоупоре (172).

Глава V. **Применение метода инверсии** 177

§ 1. Некоторые свойства инверсии (177). § 2. Фильтрация из канала трапецоидального русла (179). § 3. Канал треугольного

сечения (187). § 4. Учет капиллярности грунта при фильтрации из каналов (188). § 5. Канал трапецоидального сечения (189). § 6. Канал с малым уровнем воды (192). § 7. Приток грунтовых вод к дренажной канаве трапецоидального сечения (196). § 8. Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя (207). § 9. Дрена или ороситель при наличии испарения или инфильтрации (211). § 10. Полуобратный метод в применении к земляным плотинам на водопроницаемых основаниях (214). § 11. Контур постоянной скорости в грунте бесконечной глубины (218). § 12. Контур постоянной скорости в грунте конечной глубины (220). § 13. Контур с прямолинейными участками и участками постоянной скорости (224). § 14. «Обтекаемый» флютбет (226). § 15. «Обтекаемый» шпунт (229).

Глава VI. **Смешанная задача теории функций и ее приложения к теории фильтрации** 232

А. Смешанная задача теории функций 232

§ 1. Определение аналитической функции по ее действительной части на действительной оси (232). § 2. Смешанная задача теории функций (236). § 3. Частный случай задачи (239).

Б. Задачи о дренах и каналах 241

§ 4. Дрена над водоупором при несимметричном притоке грунтовых вод (241). § 5. Приток к прямоугольной траншее с уклоном депрессионной кривой в слое бесконечной глубины (248). § 6. О фильтрации при наличии дрены или канала в случае наклонного водоупора (253).

В. Земляные плотины 267

§ 7. Земляная плотина трапецоидального профиля на непроницаемом основании при наличии дренажа (267). § 8. Земляная плотина с горизонтальным дренажем на водопроницаемом основании бесконечной глубины (290).

Глава VII. **Применение аналитической теории линейных дифференциальных уравнений** 304

А. Общая теория 304

§ 1. Вводные замечания (304). § 2. Условия на действительной оси для двух основных функций (304). § 3. Задача об определении двух функций по условиям на действительной оси (306). § 4. Уравнение с тремя регулярными особыми точками (310). § 5. Гипергеометрические функции и их свойства (312). § 6. Круговые многоугольники, число вершин которых больше трех (316). § 7. Случай действительных показателей. Второй вывод характеристического уравнения (317). § 8. Показатели для основных случаев теории фильтрации (320).

Б. Задача о фильтрации через прямоугольную перемычку 326

§ 9. Расход перемычки и совершенного колодца (326). § 10. Построение решения для перемычки (329).

В. Перемычка в форме прямоугольной трапеции 345

§ 11. Фильтрация в трапецоидальной перемычке при испарении (345). § 12. Фильтрация в трапецоидальной перемычке при отсутствии испарения (349).

Глава VIII. **Фильтрация в неоднородных и анизотропных грунтах. Фильтрация двух жидкостей** 358

А. Неоднородные грунты 358

§ 1. Флютбет в двух слоях одинаковой толщины (358). § 2. Шпунт в двух слоях одинаковой толщины (370). § 3. Точечные шпунты в двуслойном грунте (381). § 4. Точечный вихрь в многослойной области (385). § 5. Простейшие движения в слоистых грунтах (391).

Б. Анизотропные грунты 394

§ 6. Уравнения движения. Граничные условия (394). § 7. Приток к дрене на водоупоре в анизотропном грунте (399). § 8. Интерпретация анизотропного грунта с помощью двух чередующихся грунтов (402).

В. Две жидкости разной плотности 403

§ 9. О движении двух жидкостей разной плотности (403). § 10. Обтекание точечного шпунта (407). § 11. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений (408). § 12. Неоднородный грунт при коэффициенте фильтрации — непрерывной функции координат (411).

Глава IX. **Колодцы и скважины. Горизонтальные дрены** 412

А. Совершенные скважины 412

§ 1. Совершенная скважина в центре пласта (412). § 2. Скважина, эксцентрично расположенная в круговом контуре (415). § 3. Случай произвольного контура (417). § 4. Об интерференции скважин (420). § 5. Приток к совершенным скважинам в неоднородной среде (424).

Б. Горизонтальные дрены 426

§ 6. Применение метода источников к задачам о горизонтальном дренаже (426). § 7. Подземный водозабор, питающийся водами соседнего водоносного пласта (429).

В. Движение в пластах, граничащих со слабо проницаемыми пластами 430

§ 8. Вывод уравнений (430). § 9. Движение в одном проницаемом пласте (433). § 10. Совершенные колодцы (скважины) в напорном пласте (434). § 11. Взаимодействие водопроницаемых пластов, разделенных слабо проницаемыми (439). § 12. О форме напорной поверхности (443). § 13. Безнапорный приток к колодцам со слабо проницаемым водоупором (447).

Г. Некоторые пространственные задачи теории фильтрации 449

§ 14. О пространственных задачах (449). § 15. Несовершенные скважины в полупространстве (449). § 16. Источник между двумя горизонтальными плоскостями (452). § 17. Несовершенные скважины в пласте конечной глубины (455). § 18. Задача о нагнетании воды в грунт (456).

Глава X. **Гидравлическая теория установившихся движений** . . 459

А. Безнапорные движения при наличии водоупора 459

§ 1. Гидравлическая теория и ее основные положения (459). § 2. Плоское течение с горизонтальным водоупором (463).

§ 3. Свободная поверхность при инфильтрации или испарении (464). § 4. Фильтрация в грунтах, слабо неоднородных по вертикали (465). § 5. Фильтрация с учетом уклона водоупора (470). § 6. Переход к другим переменным (473). § 7. Фильтрация в двуслойном грунте с наклонной линией раздела (475).

Б. Безнапорные и полунапорные пространственные движения 477

§ 8. Связь между пространственными безнапорными и плоскими напорными движениями (477). § 9. О притоке воды к котлованам, имеющим в плане форму многоугольника (479). § 10. Полунапорные движения (481). § 11. Фильтрация в обход сооружений (482).

Глава XI. **Графические, численные и экспериментальные методы изучения движения грунтовых вод** 487

А. Графические и численные методы 487

§ 1. Гидромеханическая сетка (487). § 2. Графический способ построения сетки (488). § 3. Способ средних арифметических. Конечные разности (490). § 4. Сетка в осесимметричном движении (493). § 5. Сетка для установившегося движения при наливе воды в скважину (осевая симметрия) (495). § 6. Построение изобар (499). § 7. Фиктивное течение в области годографа скорости (503) § 8. Построение сетки в области течения (505). § 9. Изоклины и изотахи фиктивного течения (506). § 10. Графоаналитический метод расчета пространственных движений (510). § 11. Применение метода сеток в случае анизотропных грунтов (514).

Б. Метод электро-гидродинамических аналогий (ЭГДА) 518

§ 12. Основные соотношения (518). § 13. Применение метода ЭГДА к плоским задачам (523). § 14. Применение метода ЭГДА к определению коэффициента фильтрации (523).

В. Опыты в щелевых лотках 526

§ 15. Теория щелевого лотка (526). § 16. Определение картины фильтрации (529). § 17. Моделирование неоднородных грунтов (531). § 18. Неустановившиеся движения (533). § 19. Учет капиллярности грунта (535). § 20. Моделирование анизотропного грунта. Моделирование в искаженном масштабе (535). § 21. Замечания по поводу опытов с щелевыми лотками (537).

Г. Наблюдения над фильтрацией воды в грунте 538

§ 22. Опыты в грунтовых лотках (538). § 23. Натурные наблюдения (539).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Глава XII. **Об инерционных членах в неустановившихся движениях. Напорные движения** 541

§ 1. О напорных движениях при действующих напорах, зависящих от времени (541). § 2. О влиянии волнения на фильтрацию под гидротехническими сооружениями (544). § 3. Одномерные движения по вертикали при постоянном действующем напоре (548). § 4. Фильтрация при заданном постоянном расходе (551). § 5. Постепенная подача воды (552). § 6. Фильтрация в двуслойном грунте (554).

Глава XIII. **Нелинейное уравнение неустановившихся движений со свободной поверхностью** 558

§ 1. Вывод основных соотношений (558). § 2. Вывод нелинейного уравнения (559). § 3. Метод малого параметра (560). § 4. Фильтрация при изменении уровня воды в водохранилище (561). § 5. Численное интегрирование (567). § 6. Фильтрация в пустой бассейн (567). § 7. Вытекание в грунт с нулевым уровнем грунтовых вод (570). § 8. Построение других кривых (572). § 9. Равномерный подъем уровня воды в канале. Решения нелинейного уравнения типа источника (575). § 10. Задача Буссинеска (578).

Глава XIV. **Линейное уравнение неустановившихся движений грунтовых вод** 581

А. Фильтрация из канала при наклонном водоупоре 581

§ 1. Просачивание из канала при горизонтальном водоупоре и отсутствии инфильтрации (581). § 2. Фильтрация из канала при наклонном водоупоре со слабым уклоном (584). § 3. Просачивание из одного канала в другой по наклонному водоупору (590).

Б. Динамика грунтовых вод при поливах 596

§ 4. Полосообразный полив при непроницаемом водоупоре (596). § 5. Растекание бугра грунтовых вод (599). § 6. Учет испарения и транспирации воды растениями (601). § 7. Растекание бугра грунтовых вод при наличии испарения (603).

В. Неустановившиеся движения в многослойной среде. Движения двух жидкостей 604

§ 8. Неустановившиеся движения при коэффициенте фильтрации, слабо меняющемся с высотой (604). § 9. Перемещение поверхности раздела между двумя жидкостями разной плотности (607).

Г. Некоторые пространственные задачи 609

§ 10. Пример пространственной задачи (609). § 11. Неустановившийся приток к скважинам в напорном пласте (615). § 12. Орошение круглой площадки (617).

Глава XV. **Плоские неустановившиеся движения грунтовых вод** 618

§ 1. Введение (618). § 2. Условие на свободной поверхности (618). § 3. Задача о растекании бугров грунтовых вод в полуплоскости (621). § 4. Та же задача при линеаризованном условии (626). § 5. Задача о растекании бугра грунтовых вод в слое конечной глубины (631). § 6. Приток грунтовых вод к дрене в слое бесконечной глубины (633). § 7. Задача о стягивании контура нефтеносности (638).

Глава XVI. **Приближенные, численные и графические методы изучения неустановившихся движений грунтовых вод** 640

§ 1. Метод последовательной смены стационарных состояний (640). § 2. Метод конечных разностей (646). § 3. Графический способ интегрирования уравнения теплопроводности (647). § 4. Графический способ расчета плоских неустановившихся движений грунтовых вод (649). § 5. Примеры графического расчета (650). § 6. Задача с осевой симметрией (657).

Литература 660
Алфавитный указатель 674

ПРЕДИСЛОВИЕ

Претворение в жизнь плана создания грандиозных гидротехнических сооружений Сталинской эпохи вызвало подъем интереса к теории движения грунтовых вод среди научных и инженерных работников Советского Союза.

В основу настоящей книги положены лекции, которые были прочитаны мной несколько раз в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова для студентов-гидромехаников механико-математического факультета. Содержание лекций в книге значительно расширено.

Первая часть книги посвящена установившимся движениям грунтовых вод, по которым имеются обширные и разнообразные математические исследования.

Во второй части рассматриваются вопросы неустановившихся движений, менее разработанные в настоящее время, но имеющие важное значение для прогноза режима грунтовых вод при возведении гидротехнических сооружений, при орошении полей и т. д.

В первой главе сделана попытка дать общее представление о современных взглядах на физические свойства системы вода — грунт — воздух, на основе которых должна строиться теория фильтрации, но которые еще мало разработаны и почти не учитываются при гидромеханических исследованиях в этой теории.

Материал книги расположен в основном по методам математического исследования и частично по объектам изучения. Мне хотелось дать такое изложение математических методов исследования в гидромеханике грунтового потока, чтобы лица, изучающие настоящую книгу, могли усвоить эти методы и быть в состоянии прилагать их к решению новых задач фильтрации. Однако вследствие обширности имеющегося материала по этому разделу гидромеханики пришлось ограничить себя в выборе задач. Так как автор не является специалистом-практиком, то этот выбор диктовался, быть может, несколько субъективными представлениями, а также желанием дать иллюстративный материал для математических методов.

Основное содержание книги составляет изложение теории движения грунтовой воды, рассматриваемой как несжимаемая жидкость в случае, когда можно считать закон фильтрации линейным и можно пренебрегать наличием воздуха в грунте. Поэтому разделы,

касающиеся других случаев, выделены в мелкий шрифт. Этим же шрифтом выделены громоздкие решения некоторых задач, представляющие принципиальный интерес, но еще мало использованные для приложений.

Там, где это возможно, задачи приводятся доведенными до численных или графических результатов, причем указывается, где можно найти данные расчетов, если из-за экономии места они не приведены.

В настоящее время в теории фильтрации существует ряд вопросов основного значения, на которые еще не установилась единая точка зрения. Таков вопрос о наиболее общем выводе уравнений теории фильтрации. Его я совершенно не касаюсь, тем более, что эти уравнения не успели еще найти практических применений. Спорными и подвергающимися дискуссии являются вопросы о фильтрационных силах, действующих на частицы грунта, а также на основание гидротехнического сооружения. Вследствие большой важности этих вопросов я их излагаю и притом так, как это делают математики, считая, что если указанные воззрения подвергнутся изменению, то метод расчета в основном сохранится.

Г. Н. Положий предоставил в мое распоряжение свои исследования по вариационным задачам и другим вопросам, С. Н. Нумеров — дополнительные исследования и вычисления к своим задачам, изложенным здесь в §§ 4 и 7 главы VI, за что я выражаю им обоим глубокую благодарность.

Г. К. Михайлов проделал большую работу при подготовке книги к печати; он произвел некоторые дополнительные вычисления; рядом его советов я воспользовалась, в особенности по главе первой; кроме того, им написан § 12 главы VII. Разнообразную помощь мне оказывали М. М. Семчинова и другие сотрудницы Института механики Академии наук Союза ССР, а также Н. Н. Кочина. Выражаю им всем искреннюю благодарность.

Настоящая книга, в которой впервые собран обширный материал по теории движения грунтовых вод, обладает, несомненно, многими недостатками. В частности, является неполным список литературы. Довольно подробный перечень работ до 1947 года приведен в статье [7] списка литературы к главе VII.

За все указания и замечания по книге буду благодарна. Прошу присылать их по адресу: Москва, Орликов пер., 3, Гостехиздат.

П. Полубаринова-Кочина

ВВЕДЕНИЕ

Главное содержание настоящей книги составляет изложение математических теорий движения грунтовых вод, основы которых заложены в работах Н. Е. Жуковского и Н. Н. Павловского.

Отметим, что Л. С. Лейбензону принадлежат основные исследования по уравнениям движения газированной нефти и газов в пористой среде. Этих вопросов мы не касаемся, ограничиваясь рассмотрением воды как несжимаемой жидкости (что в отдельных случаях приложимо и к нефти).

Начало изучению явления фильтрации в пористой среде (песке) было положено Дарси (1856), производившим опыты по движению воды в трубках с песком и установившим простейший закон этого движения. Аналогичные опыты проводились впоследствии многими исследователями в широких масштабах. Дюпюи и Буссинеск дали гидравлические теории движений грунтовых вод. Форхгеймер развил гидравлическую теорию колодцев.

К 1888 г. относятся первые исследования Н. Е. Жуковского по движениям подпочвенных вод, теоретические и экспериментальные.

Укажем здесь имена первых русских исследователей. Так, К. Э. Лембке (1886) дал приближенное решение некоторых задач по неустановившимся движениям грунтовых вод, применив впервые метод, который теперь называется методом последовательной смены стационарных состояний.

Н. Е. Жуковский в первой из своих работ пользуется результатами наблюдений Лембке над колодцами Костромской губернии. И. А. Евневичу, известному своими работами по гидравлике, принадлежит небольшое исследование по движению подпочвенных вод (1890). Значительное число русских гидротехников работало в области ирригации, близкой к вопросам фильтрации. Большую роль для своего времени (1912) сыграла книга А. А. Краснопольского [5] о грунтовых и артезианских колодцах. В ней изложены имевшиеся к тому времени теоретические результаты, а также исследования самого автора по фильтрации в трещиноватых породах (нелинейный закон фильтрации).

Отметим, что вопрос о подземных водах — их происхождении, их связи с морскими водами — привлекал уже внимание М. В. Ломоносова.

Настоящего и значительного развития теория фильтрации достигла лишь в советское время. Н. Н. Павловским (1922) была создана строгая математическая теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Его исследования были продолжены и развиты в многочисленных работах его учеников и последователей. Павловскому же принадлежат первые исследования по применению метода инверсии в теории безнапорных движений. Одновременно с ним работы в этой области начаты были другими авторами (В. В. Ведерников и др.), продолжены и широко развиты. Большой заслугой Павловского является разработка экспериментального метода электро-гидродинамических аналогий (ЭГДА), который широко используется в настоящее время в научно-исследовательских и проектных организациях. Следует отметить также большую организационную деятельность Н. Н. Павловского в области развития научных исследований по гидравлике.

Работы Н. Н. Павловского привлекли внимание Н. Е. Жуковского, который снова начал заниматься теорией движения грунтовых вод и дал в 1920 г. свой метод решения задач о напорном и безнапорном движениях. Последний широко используется в настоящее время при решении многих задач теории фильтрации.

Новые математические методы, основанные на современных результатах теории функций и уравнений математической физики, развиты в последние десятилетия в Советском Союзе. Из содержания настоящей книги выявляется ведущая роль советских ученых в развитии математической теории движения грунтовых вод.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

ГЛАВА I

ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

§ 1. Состав грунта. Прежде чем перейти к изложению математических теорий движения грунтовых вод, приведем в кратких чертах, не вдаваясь в детали, основные сведения о свойствах *грунта*.

Грунт следует рассматривать как единую систему, состоящую из минеральных частиц, коллоидных частиц, окружающей их воды с растворенными в ней солями и газообразной фазы (воздух, пары воды). С этой точки зрения то, что обычно называют грунтом, составляет собственно твердую фазу грунта.

Ниже будет дано определение термина *грунтовые воды* (§ 4). Здесь же мы отметим, что Н. Е. Жуковский называл эти воды *подпочвенными* [1] и говорил о *просачивании* их под плотинами [3]. Эти выражения сразу дают наглядное представление о том, какое явление рассматривается. Укоренившийся у нас термин *фильтрация* равносилен понятию просачивания, т. е. медленного движения в пористой среде.

Движение грунтовых вод происходит в верхнем слое земной коры. С точки зрения изучения режима подземных вод обычно представляют основной интерес верхние водопроницаемые горизонты на глубине нескольких метров или нескольких десятков метров. Однако полное изучение залегания грунтовых вод и взаимодействия между водами отдельных горизонтов требует знания и того, что делается на больших глубинах. Современные методы бурения позволяют получать скважины глубиной в несколько километров.

Грунты можно разделить на *скальные* и *нескальные*, или *рыхлые*. Нескальные грунты образуются путем разрушения скальных пород. Они образуют грунты двух основных видов: грунты типа *песков* (*несвязные*) и типа *глин* (*связные*) [36].

Типичный песок в сухом состоянии представляет сыпучее тело, которое по мере увлажнения переходит во временно связанное состояние. Влажность песка колеблется в небольших пределах, и при любой степени увлажнения песок лишен пластичности, т. е. свойства сохранять

данную ему форму. Песок легко водопроницаем, не набухает, обладает незначительным капиллярным поднятием воды и при высыхании не дает усадки.

Глина может быть в трех состояниях: текучем, пластичном и твердом. Связность глины может быть настолько высокой, что при ее разработке применяются иногда взрывные работы. Влажность глин может колебаться в очень широких пределах. Глина слабо водопроницаема, а в пластичном состоянии практически непроницаема, набухает сильно, имеет большое капиллярное поднятие, при высыхании дает большую усадку, причем уменьшение ее объема сопровождается растрескиванием.

С точки зрения формы частиц между песками и глинами имеется следующее различие. Пески имеют форму зерен, приближающихся к кубической или округлой форме, глинистые же частицы имеют форму чешуек или пластинок. Удельная поверхность частиц глин значительно больше, чем частиц песков, что является одной из причин больших молекулярных сил взаимодействия между частицами глины и воды.

Свойства обычных грунтов являются промежуточными между свойствами песков и глин (*супеси*, *суглинки*).

Грунты, у которых содержание глинистых частиц превышает 60% (по объему) от общего количества частиц, называются *тяжелыми глинами*; те же, в которых количество глинистых частиц колеблется между 30 и 60%, называются глинами. *Суглинки* (разделяемые на *тяжелые*, *средние* и *легкие*) содержат от 10 до 30% глинистых частиц, *супеси* (тяжелые и легкие) — от 3 до 10% и, наконец, *пески* могут содержать до 3% глинистых частиц.

В строительной практике существует классификация частиц грунта по их размерам [30], приведенная в таблице 1.

Существуют и другие разделения частиц по их крупности. Так, например, если частицы грунта имеют диаметр больше 3 *мм*, то почвоведы говорят [12], что они составляют каменистую часть почвы; частицы от 3 до 0,01 *мм* называют «физическим» песком, мельче 0,01 *мм* — «физической» глиной; частицы мельче 0,001 *мм* называют иногда илом, мельче 0,0001 *мм* — коллоидными частицами. Ниже (§ 4) будет указана важная роль коллоидных частиц во взаимодействии между водой и частицами грунта и влияние их на физические свойства грунта [10].

Разрез верхнего слоя земной коры на глубину порядка нескольких десятков метров показывает, что грунт обычно имеет слоистую структуру (представленную, например, на фиг. 1). В пределах каждого слоя грунт состоит из частиц различной формы и крупности.

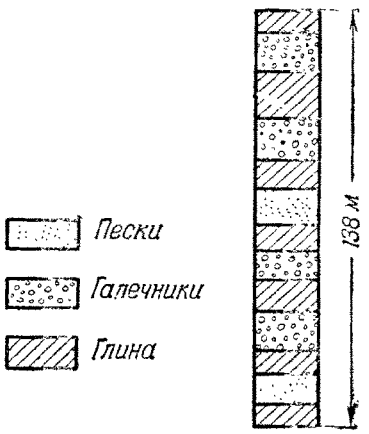
Чтобы получить понятие о составе данного грунта, производят анализ крупности его составных частей или фракций, например, при помощи просеивания грунта через ряд сит с отверстиями разных раз-

Таблица 1

Диаметры различных фракций, составляющих грунт

Наименование фракций		Диаметры в *мм*
Глинистые		< 0,005
Пылеватые	мелкие	0,005— 0,01
	крупные	0,01 — 0,05
Песчаные	очень мелкие	0,05 — 0,25
	мелкие	0,25 — 0,5
	средние	0,5 — 1,0
	крупные	1,0 — 2,0
Гравелистые	мелкие	2,0 — 4,0
	средние	4,0 —10
	крупные	10 —20
Галька		20 —60
Валуны		>60

меров. Результат анализа дает так называемую *кривую механического* или *гранулометрического анализа* грунта, которую принято строить так: по оси абсцисс откладывают диаметры частиц грунта в *мм*, по оси ординат — процентные отношения суммарного веса частиц, меньших данного диаметра, к весу всех частиц исследуемого образца грунта. На фиг. 2 и 3 дана кривая механического анализа грунта средней крупности [11], построенная в простом и полулогарифмическом масштабах.



Фиг. 1.

Отметим, что под *почвой* понимают поверхностные слои грунтов, переработанные и измененные совместным действием климата, растительных и животных организмов и деятельностью человека, обладающие плодородием [13]. Фильтрация воды в почве имеет свои особенности по сравнению с фильтрацией в грунте, которые мы будем иногда отмечать. Исследуя явления, имеющие место как в почвах, так и в грунтах, употребляют также название *почво-грунты*.

Стремление охарактеризовать крупность грунта одним числом приводит к понятию *гранулометрического показателя*, который разными авторами определяется по-разному — некоторыми, например, как средний диаметр частиц. Наибольшее распространение получил показатель, называемый *эффективным диаметром частиц* d_{10}. Он равен

Таблица 2

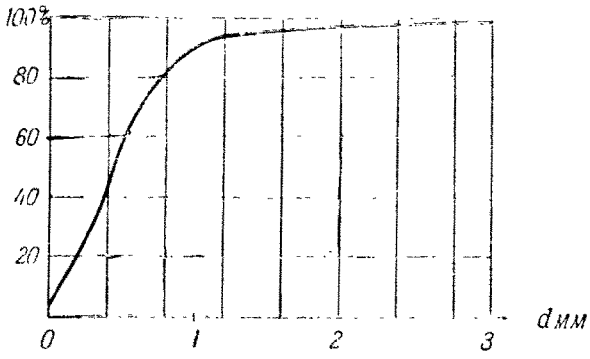
Гранулометрический состав овражного песка

Диаметры частиц в *мм*	1,0—0,25	0,25—0,10	0,10—0,05	0,05—0,01	0,01—0,005	0,005—0,0025	<0,0025
Фракции в % от веса сухой почвы	40,70	51,32	3,08	2,27	1,32	— 0,66	0,66

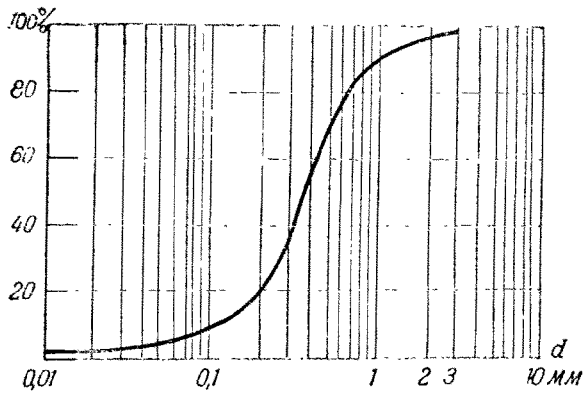
диаметру отверстия сита, сквозь которое просеивается 10% от пробы почво-грунта по весу (и на котором остается 90% по весу).

В качестве примера в таблице 2 дается гранулометрический состав образца овражного песка [15].

В вышеприведенном составе песка (таблица 2) пять мелких фракций дают в сумме $0{,}66+0{,}66+1{,}32+2{,}27+3{,}08=7{,}99\%$, т. е. на $2{,}01\%$ меньше 10%. Это означает, что d_{10} лежит в промежутке между 0,10 и 0,25 *мм*. Интерполяция дает $d_{10}=0{,}11$ *мм*.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

§ 2. Пористость грунта. Возьмем некоторый образец грунта объема V. Пусть объем всех пор в этом образце будет V_1. Отношение V_1 к V называется *порозностью* грунта, *пористостью* или *скважностью*. Обозначим эту величину буквой σ:

$$\sigma=\frac{V_1}{V}.$$

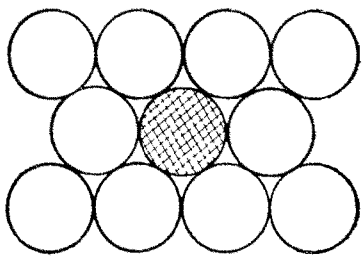
Другими словами, пористость есть суммарный объем всех пор, имеющихся в единице объема грунта.

Пористость зависит от характера грунта, от его геологического возраста, от испытываемого им давления, обработки почвы и т. д.; она зависит от утрамбовки грунта, — что часто наблюдается в лабораторных условиях, — и может изменяться со временем [17].

Поперечный размер отдельной поры колеблется от 2—3 *см* до малых долей микрона; на практике в вопросах фильтрации обычно поперечный размер пор составляет доли миллиметра.

Если бы грунт состоял из шариков одинакового размера, то можно было бы найти теоретически порозность при различных расположениях частиц. Так, при кубическом расположении шаров (когда шары можно считать вписанными в кубическую решетку) примем $V = d^3$, где d — диаметр шара; тогда $V_1 = d^3 - \frac{\pi}{6} d^3$ (разность между объемами куба и шара). Для пористости получаем:

$$\sigma = 1 - \frac{\pi}{6} = 0{,}476.$$

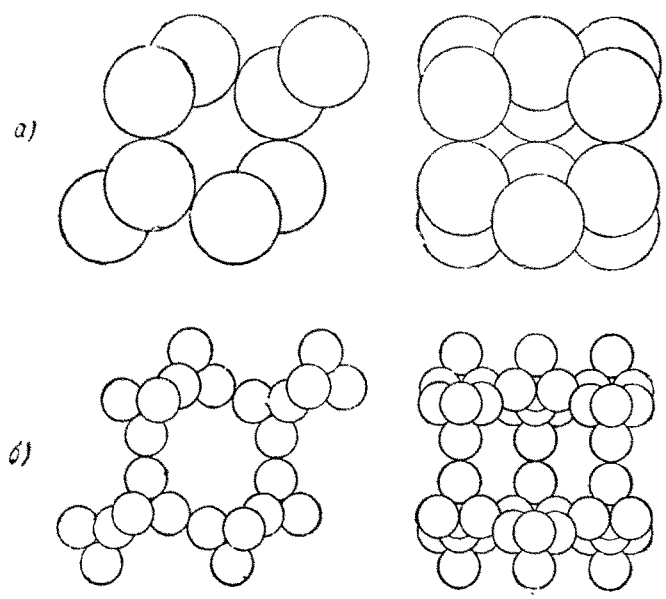


Фиг. 4.

В книгах по теории фильтрации кубическое расположение рассматривается как наименее плотное из всех правильных расположений [6], в качестве же наиболее плотного указывается «ромбоэдрическое» расположение, которое получится, если уложить наиболее плотно ряд шаров на плоскости (фиг. 4) и затем такие ряды накладывать один на другой так, чтобы шары второго ряда попадали в углубления первого. При этом пористость будет равна

$$\sigma = 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0{,}260\ldots$$

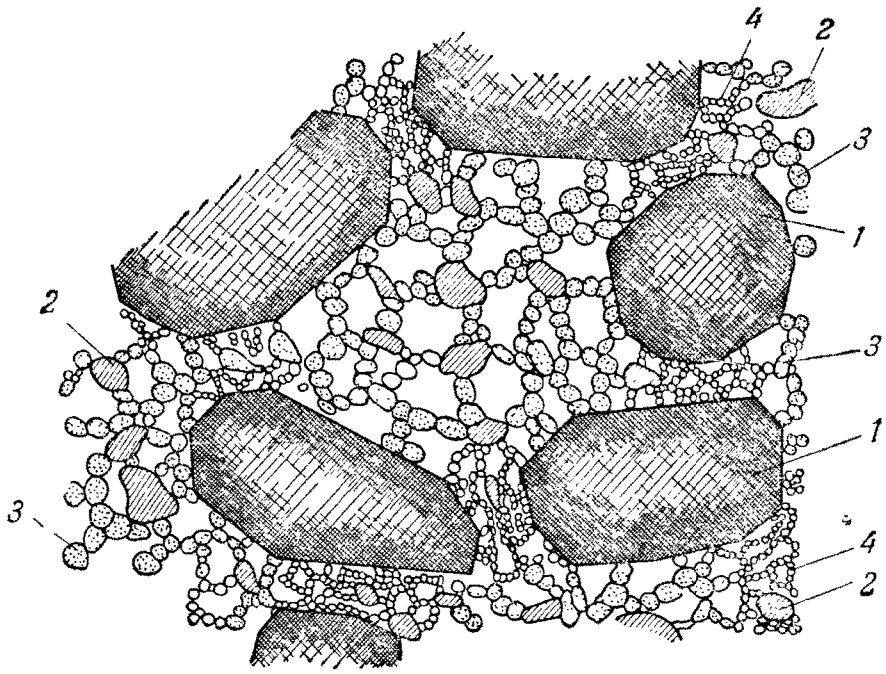
Последнее значение σ есть действительно наименьшее, что же касается кубической укладки, то она является наименее плотной лишь среди вполне однородных укладок. Чтобы пояснить это, заметим, что в ромбоэдрической укладке каждый шар соприкасается с двенадцатью шарами: так, на фиг. 4 заштрихованный шар граничит с шестью шарами, центры которых лежат в одной плоскости, и, кроме того, с не изображенными на чертеже тремя шарами верхнего и тремя шарами нижнего ряда. В кубической же укладке каждый шар соприкасается с шестью шарами.



Фиг. 5.

Были рассмотрены [28] укладки, при которых каждый шар касается четырех шаров. Одна из них, «тетраэдральная», при которой указанные четыре шара размещаются в вершинах тетраэдра (внутри которого находится первый шар), дает пористость 0,660 (фиг. 5, *а*). Другая укладка, еще более разреженная, дает пористость, равную 0,876 (фиг. 5, *б*) [27]. Это, повидимому, наибольшая пористость правильной твердой решетки одинаковых шаров, при которой шары удерживаются друг другом (последнее обстоятельство обеспечивается тем, что каждый шар касается четырех шаров, центры которых не лежат в одной плоскости).

В естественных грунтах порозность должна меняться в широких пределах, так как структура грунтов может быть сложной и разнообразной. Так, почвы имеют сложную комковатую структуру [13]. На фиг. 6 дан пример неоднородной глинистой породы [8], состоящей



Фиг. 6.

из крупных песчаных зерен (*1*), мелких пылеватых зерен (*2*), неуплотненных глинистых частиц в порах между крупными частицами (*3*) и уплотненных глинистых частиц на контакте между крупными частицами (*4*).

В таблице 3 даются значения пористости для ряда грунтов [18].

Таблица 3

Значения пористости для разных грунтов

Наименование грунта	Пористость
Гравий (с диаметром частиц от 2 до 20 *мм*)	0,30—0,40
Пески (с диаметром частиц от 0,05 до 2 *мм*)	0,30—0,45
Супесь	0,35 0,45
Суглинок	0,35—0,50
Глинистый грунт	0,40—0,55
Торфяной грунт	0,6 —0,8

В книге А. А. Роде [85] даны пределы пористости почвы 25—90% (и выше).

Для так называемых трещиноватых горных пород вводится понятие *трещиноватости*, т. е. отношения объема трещин образца данного грунта к общему объему образца [19].

Бывает, что после дождя уровень грунтовых вод, залегающих обычно на некоторой глубине под поверхностью земли, сильно поднимается. Так, если дождя выпало 2—3 *см*, то грунтовые воды могут подняться на 20—30 *см*. Если бы непосредственно над свободной поверхностью грунтовых вод грунт был сухим, то, принимая во внимание значения порозности, приведенные в таблице 3, можно было бы ожидать подъема грунтовых вод, превышающего высоту выпавших осадков максимум в 3—4 раза. Получающиеся же 10—12-кратные подъемы объясняются тем, что у поверхности грунтовых вод грунт является увлажненным, что уменьшает объем просветов между частицами грунта, могущих быть заполненными водой. Нужно еще заметить, что при подъеме грунтовых вод не весь объем этих просветов будет заполняться водой, так как в порах остается некоторое количество защемленного воздуха. При опускании уровня грунтовых вод от воды освобождается не весь объем порового пространства, так как грунт остается влажным.

В связи с этим вводят понятие об *активной порозности* грунта, взятого из зоны осушения или зоны, прилегающей к поверхности грунтовых вод: это есть отношение объема пар, не занятых связанной с грунтом водой, к общему объему образца. Активная порозность может быть порядка $^1/_{10}$ и меньше.

§ 3. Электромолекулярные силы в грунтах. Между твердыми частицами грунта и водой существуют электромолекулярные силы взаимодействия [14]. Вода состоит из полярных молекул с ионами водорода, заряженными положительно, и ионами кислорода, заряженными отрицательно. При действии внешнего электрического поля происходит поляризация молекул и ориентация диполей воды в электрическом поле.

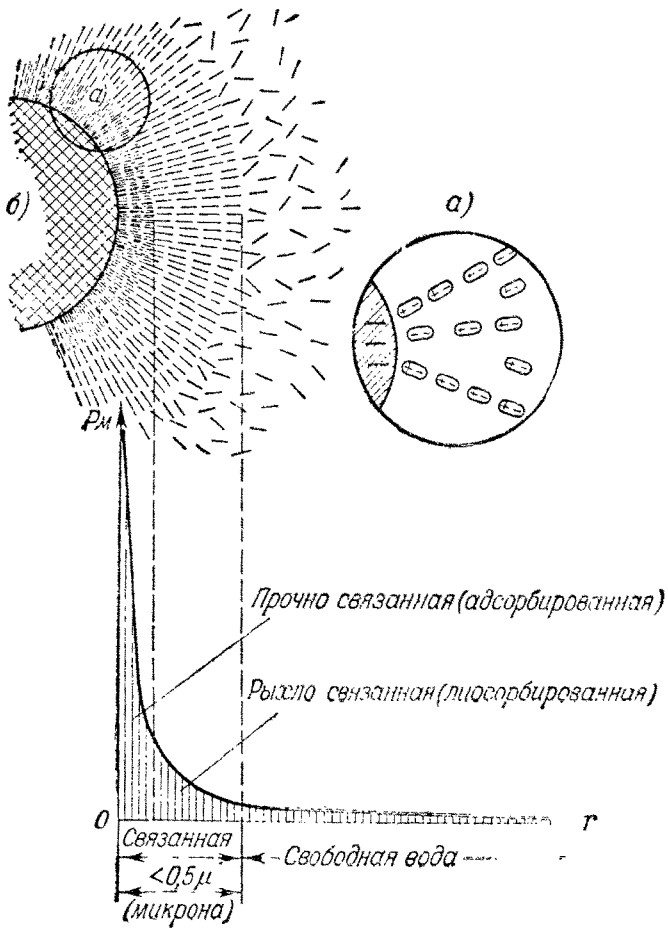
Так как диэлектрическая постоянная твердых частиц сильно отличается от диэлектрической постоянной воды, то при соприкосновении частиц грунта с водой возникает электрическое поле с избыточной энергией на поверхности частиц грунта, и диполи воды притягиваются к поверхности минеральных частиц.

Силы притяжения действуют на весьма близких расстояниях от поверхности частицы, не превышающих 0,25 — 0,5 μ (μ — микрон = = 0,001 *мм*). Величина молекулярных сил огромна у поверхности частицы (порядка десятков тысяч килограммов на квадратный сантиметр) и быстро убывает с расстоянием. Область силового действия измеряется толщиной слоя порядка нескольких слоев молекул.

На фиг. 7 показана схема взаимодействия молекулярных сил на границе раздела воды и твердой частицы. Фиг. 7, *а* представляет

в увеличенном виде часть фиг. 7, *б*. На ней показана ориентация диполей воды возле глинистой частицы.

Электрический заряд глинистых фракций имеет большое значение при осушении грунтов методом электродренажа.



Фиг. 7.

§ 4. Различные состояния воды в грунте. Молекулы воды, непосредственно окружающие частицу грунта, подвержены столь большим силам притяжения (см. § 3), что они оказываются прочно связанными с поверхностью частиц. Это те частицы воды, которые не удается отделить даже центрифугированием, развивающим силы, в несколько десятков тысяч раз превосходящие силу тяжести. Эти молекулы образуют так называемую *прочно связанную воду*. Слои прочно связанной воды, толщина которых имеет порядок нескольких десятков рядов молекул, в свою очередь связывают и ориентируют прилегающие к ним молекулы воды. Последние образуют *рыхло связанную воду*. Провести границу между прочно связанной и рыхло связанной водой трудно.

Основы классификации видов влаги в почвах и грунтах были даны А. Ф. Лебедевым [5]. Он различает следующие формы воды в грунтах: 1) водяной пар, 2) гигроскопическую воду, 3) пленочную воду, 4) гравитационную воду, 5) воду в твердом состоянии, 6) кристаллическую воду и 7) химически связанную воду. Последние три категории А. Ф. Лебедев не изучал. Рассмотрим четыре первые.

1) *Водяной пар* заполняет все свободные пустоты грунта и передвигается из областей с повышенным давлением в области с более низким давлением. А. Ф. Лебедев считал конденсацию перемещающихся в грунте паров воды одной из причин образования грунтовых вод, особенно в глубоких горизонтах.

2) *Гигроскопическая вода* — это вода, конденсирующаяся на поверхности частиц. Если сухой грунт поместить во влажный воздух, то частицы грунта будут адсорбировать пары, вес грунта будет увеличиваться, пока не достигнет некоторой величины, соответствующей максимальной гигроскопичности. Для различных грунтов максимальная гигроскопичность может иметь такие значения: для песков — около 1%, для пыли — до 7%, для глины — до 17% от веса сухого вещества.

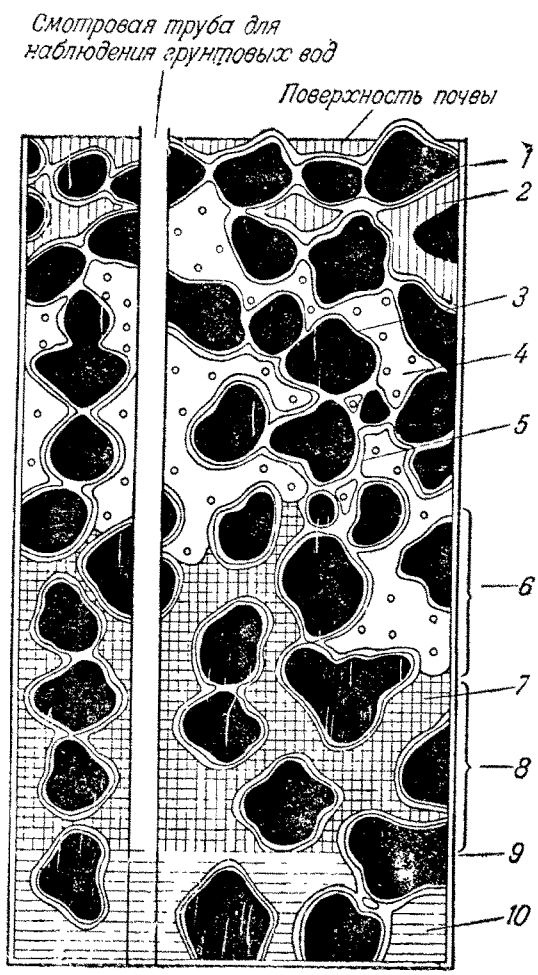
По А. Ф. Лебедеву, гигроскопическая вода может передвигаться в грунте, только переходя в парообразное состояние.

3) *Пленочная вода* образуется на частицах под влиянием молекулярных сил сцепления. Она удерживается с большой силой и не может быть удалена из нее центрифугированием с ускорением, в 70 тысяч раз превышающим ускорение силы тяжести. Пленочная вода способна передвигаться как жидкость от более толстых пленок к более тонким. Сила тяжести не оказывает влияния на движение пленочной влаги, и она не замерзает при минус 1,5° С. Влажность грунта, отвечающая максимальной толщине пленки, названа Лебедевым *максимальной молекулярной влагоемкостью*. Пленочная вода удаляется при высушивании грунта.

4) *Гравитационная вода* — это вода свободная, не подверженная действию сил притяжения к поверхности твердых частиц. Она передвигается под влиянием силы тяжести, в ней действует гидродинамическое давление. Мы будем называть гравитационную воду *грунтовой водой* и будем в дальнейшем изучать законы движения именно грунтовой воды.

К грунтовым водам причисляют обычно и капиллярную воду — это вода, заполняющая частично или полностью поры грунта и имеющая поверхность, ограниченную вогнутыми менисками (§ 9). Отметим, что некоторые щелочные воды могут давать выпуклые мениски и отрицательную высоту капиллярного поднятия, т. е. капиллярное опускание. Последние исследования показывают, что поднятие капиллярной воды происходит благодаря энергии гидратации ионов и молекул на пограничной поверхности твердой и жидкой фаз, т. е. что капиллярность имеет электрохимическую природу [14].

Представления А. Ф. Лебедева были уточнены и дополнены последующими исследованиями ряда ученых. В настоящее время придается большое значение роли коллоидных частиц в грунте. Коллоидные вещества откладываются на поверхности минеральных зерен в виде тонких оболочек [9]. Сорбируемые водяные пары впитываются этими оболочками, входя с ними в химическое взаимодействие. Электрически заряженные коллоидные частицы, называемые мицеллами, сорбируют пары воды до известного предела максимальной гигроскопичности, о которой мы говорили выше. Этот предел характеризуется прекращением выделения теплоты смачивания. В дальнейшем коллоидная оболочка может набухать, впитывая капельно-жидкую влагу без выделения тепла.



Фиг. 8.

Таким образом, частицы влажного грунта имеют гигроскопическую оболочку, а при дальнейшем увлажнении грунта, после освобождения всей теплоты смачивания, они приобретают пленочную воду. В натуре частицы грунта сближены между собой так, что пленочный слой не развивается до наибольшего возможного предела. В углах пор между частицами грунта образуется вода, поверхность которой представляет мениск поверхностного натяжения. При дальнейшем увлажнении грунта скопления воды в уголках пор увеличиваются и их мениски соприкасаются. В поре остается просвет, по которому может перемещаться вода.

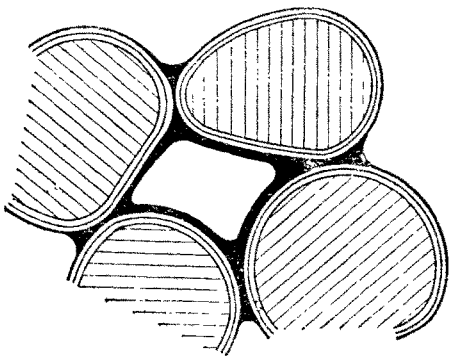
Когда вода заполняет все поры (в них может оставаться некоторое количество воздуха), то она получает способность передвигаться (за исключением пленочной воды) под влиянием силы тяжести. Такая вода, как мы уже говорили, называется гравитационной, или грунтовой. Движение такой воды в пористой среде называется *фильтрацией*.

Таким образом, физическая картина движения воды в грунте является сложной. В любом грунте, полностью или не полностью

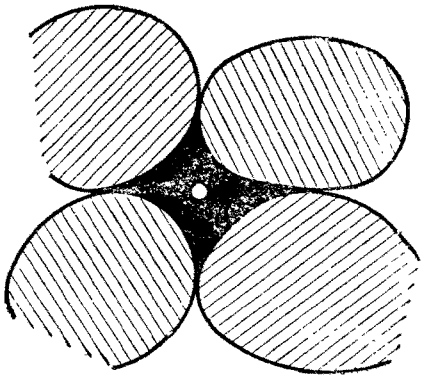
насыщенном водой, имеется вода, не участвующая в движении, связанная адсорбционными силами со скелетом грунта.

Вследствие обволакивания частиц грунта прочно связанной водой увеличивается объем твердой фазы и сокращается объем пор грунтовой массы. Величина связанной воды меняется от нескольких процентов от порозности для песков до полной порозности для некоторых глин. В последних движение возможно лишь при приложении сил, превышающих силы адсорбции.

В глинисто-коллоидных фракциях имеют место явления коагуляции и пептизации [11], которые ведут к образованию агрегатов или распаду их, что в итоге меняет гранулометрический состав, а вместе с тем и удельную поверхность твердой фазы грунта.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

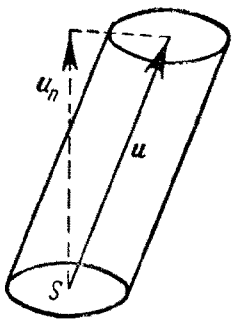
На фиг. 8 приведена схема различных форм воды в грунте, данная Н. А. Качинским [12]. На ней цифрой *1* обозначена частица почвы, *2* — вода выпавшего дождя, *3* — пленка гигроскопической воды, *4* — почвенный воздух с парами воды, *5* — вода пленочная, под которой Н. А. Качинский понимает воду, рыхло связанную с почвой, *6* — зона открытой капиллярной воды, где вода и воздух заполняют поры вперемежку, *7* — капиллярная вода, *8* — зона замкнутой капиллярной воды, *9* — уровень грунтовой воды, *10* — грунтовая вода.

Если мы рассмотрим отдельный просвет между зернами грунта, то в случае, когда вода еще не стала гравитационной, мы будем иметь картину, изображенную на фиг. 9: в уголках между песчинками будут капиллярные мениски, внутренняя область заполнена воздухом.

Что касается грунтовой воды, то, как мы уже отмечали выше, она обычно не заполняет полностью всю область между частицами грунта, так как в последней остаются пузырьки воздуха. Можно схематизировать движение грунтовой воды так, как это изображено на фиг. 10, где внутренний кружок соответствует пузырьку воздуха.

§ 5. Скорость фильтрации. Под *скоростью фильтрации* понимают расход жидкости, т. е. объем жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, выделенную в пористой среде.

Вспомним, как определяется расход жидкости в гидродинамике [32]. Пусть имеем элементарную площадку S (фиг. 11), через которую проходит жидкость со скоростью, представляемой вектором $\boldsymbol{u}$. Количество жидкости, протекающее в единицу времени через S, равно объему цилиндра, построенного на S и $\boldsymbol{u}$, а так как высота этого цилиндра равна u_n — нормальной к площадке S составляющей скорости, — то расход Q через площадку S равен

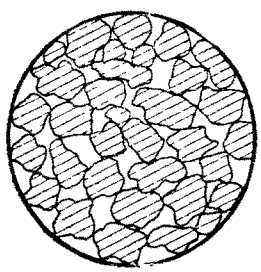


Фиг. 11.

$$Q = Su_n.$$

Если в данной точке вращать элементарную площадку и восстанавливать нормали к ней, то направление n, соответствующее наибольшему расходу, будет являться направлением вектора скорости.

Обратимся теперь к движению жидкости в пористой среде. Представим себе площадку в грунте, содержащую сечения зерен грунта и просветы между этими сечениями (фиг. 12). Движение жидкости между зернами грунта носит сложный характер, поэтому принято рассматривать не скорости в отдельных точках жидкости, а средние значения этих скоростей.


Фиг. 12.

Пусть вектор средней скорости частиц жидкости в области площадки S будет $\boldsymbol{u}$. Площадь просветов, находящихся на площадке S, обозначим через S_1. Положим

$$m = \frac{S_1}{S}$$

и назовем m *поверхностной пористостью*. Расход через площадку S будет:

$$Q = S_1 u_n = mSu_n.$$

Расход через площадку, величина которой равна единице, равен mu_n и называется *скоростью фильтрации*.

Вектор скорости фильтрации имеет величину mu, равную максимальному значению mu_n при различных положениях площадки S, и направлен по нормали к той площадке, через которую проходит наибольший расход.

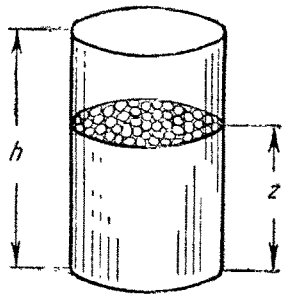
Если вектор $\boldsymbol{u}$ скорости частицы имеет составляющими

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

то для вектора скорости фильтрации v составляющие будут:

$$u = m\frac{dx}{dt}, \quad v = m\frac{dy}{dt}, \quad w = m\frac{dz}{dt}. \tag{5.1}$$

Для того чтобы определить поверхностную пористость некоторого образца, можно было бы поступить так, как это делают в некоторых специальных лабораториях: образец, вынутый из грунта с помощью цилиндрической трубки с острыми краями (такой образец называют *керном*), пропитывают склеивающим веществом и затем делают ряд тонких срезов этого образца. Положив срезы под микроскоп, можно измерить площади просветов и взять их отношения к площади сечения образца. Среднее из этих величин по всем взятым сечениям даст среднюю пористость взятого образца.



Фиг. 13.

Однако этот способ сложен. Вместе с тем очевидно, что описанный прием определения поверхностной пористости даст для нашего цилиндрического образца величину средней пористости грунта. В самом деле, обозначим через $S_1(z)$ площадь пор в сечении цилиндра на расстоянии z от его основания (фиг. 13). Пусть будет $m(z)$ — пористость этого сечения, т. е.

$$m(z) = \frac{S_1(z)}{S},$$

где S — площадь основания цилиндра.

Тогда среднее значение пористости m будет равно

$$m = \frac{1}{h}\int_0^h m(z)\,dz.$$

Это выражение можно представить так:

$$m = \frac{1}{hS}\int_0^h Sm(z)\,dz = \frac{1}{V}\int_0^h S_1(z)\,dz.$$

Здесь $hS = V$ — объем рассматриваемого цилиндра, а интеграл равен объему V_1 всех пор в данном образце. Поэтому средняя поверхностная пористость m равна средней объемной σ:

$$m = \frac{V_1}{V} = \sigma.$$

В дальнейшем мы не будем делать различия между поверхностной пористостью и объемной и будем обозначать ту и другую величины буквой σ или буквой m.

§ 6. Опытные законы фильтрации. Прежде чем перейти к изложению результатов экспериментальных исследований движения воды в трубках с грунтом, напомним некоторые сведения из области гидродинамики.

Если несжимаемая невязкая жидкость движется в трубке — горизонтальной или наклонной — с гладкими стенками, причем движение установившееся, то имеет место уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \tag{6.1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, p — давление, v — скорость; z есть *геометрическая высота*; $\frac{p}{\rho g}$ называется *пьезометрической* (т. е. обусловленной давлением) *высотой*; величина $\frac{v^2}{2g}$ носит название *скоростной высоты* или *скоростного напора*.

Уравнение Бернулли говорит, что для всех точек трубки сумма трех высот остается постоянной величиной.

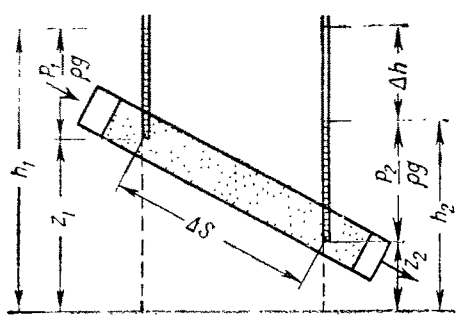
Сумма двух первых членов уравнения (6.1) называется *напором* или *пьезометрическим напором*. Обозначим его через h:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z. \tag{6.2}$$

Теперь можно переписать уравнение (6.1) в виде

$$h + \frac{v^2}{2g} = \text{const}. \tag{6.3}$$

Отсюда видно, что если бы жидкость двигалась в трубке *без трения* и с постоянной скоростью, то напор во всех точках трубки был бы один и тот же. Трение о шероховатые стенки трубки учитывается в гидравлике введением поправочных членов в уравнение (6.3).



Фиг. 14.

Посмотрим, как происходит движение жидкости в пористой среде. Многочисленные опыты, проведенные во многих лабораториях, над установившимся движением воды (и других жидкостей, например нефти) приводят к следующим результатам.

Возьмем две точки на оси трубки (фиг. 14) на расстоянии ΔS друг от друга и поместим в них концы пьезометров — открытых трубок. В пьезометрах вода поднимается соответственно на высоты h_1 и h_2, отсчитываемые от произвольной горизонтальной плоскости (фиг. 14), причем h определяется формулой (6.2).

В гидравлике рассматривают величину J, которую называют *пьезометрическим уклоном* или *градиентом пьезометрического напора*, определяя ее как производную от h по пути s, взятую со знаком минус:

$$J = -\frac{dh}{ds} = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta s}. \tag{6.4}$$

Эксперименты показывают, что скорость фильтрации является функцией от пьезометрического уклона, или уклон есть функция скорости:

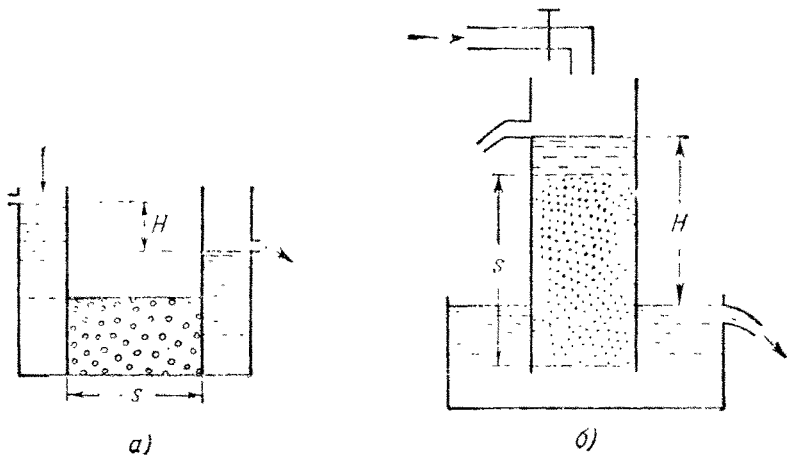
$$v = f(J), \quad J = \Phi(v). \tag{6.5}$$

Такой характер рассматриваемых движений вызывается тем, что при фильтрации в пористой среде жидкость испытывает большое сопротивление трения частиц жидкости о поверхности частиц грунта.

Для многих грунтов — пески, глины, торфяные грунты, мелкотрещиноватые скальные грунты и т. д. — имеет место линейная зависимость скорости фильтрации от пьезометрического уклона:

$$v = kJ = -k\frac{dh}{ds}, \tag{6.6}$$

где коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом фильтрации*. Заметим, что коэффициент фильтрации имеет размерность скорости; он равен скорости фильтрации при пьезометрическом уклоне, равном единице.



Фиг. 15.

Равенство (6.6) было впервые установлено Дарси [22] и называется иногда *законом Дарси*.

На фиг. 15 в виде примера приведены две схемы опыта, могущего служить проверкой закона фильтрации. Песок в трубках удерживается от размыва с помощью сетки или натянутой марли.

При рассмотрении этих простейших схем пьезометрический уклон J берется равным отношению разности напоров H к длине пути фильтрации s, так что скорость фильтрации будет:

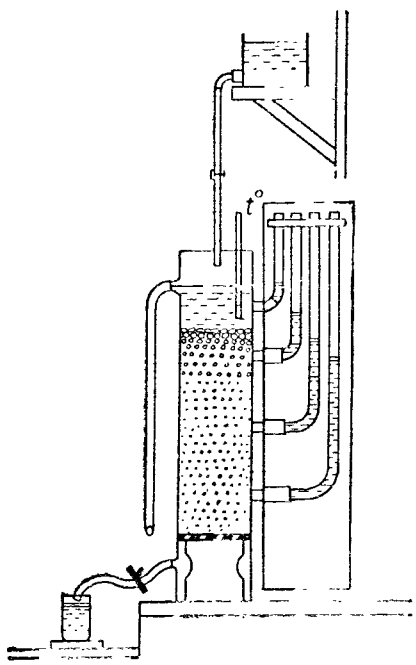
$$v = k\frac{H}{s}. \tag{6.7}$$

В плотных глинах и тяжелых суглинках, в которых вода содержится в молекулярно связанном виде, явление фильтрации возникает лишь тогда, когда градиент напора превышает некоторое значение i_0, называемое *начальным градиентом* [7]. В этом случае уравнение (6.6) заменяется таким:

$$v = -k\left(\frac{dh}{ds} - i_0\right). \tag{6.8}$$

Для очень плотных глин i_0 может достигать значений, равных 20—30.

§ 7. Коэффициент фильтрации. Коэффициент фильтрации данного образца грунта может быть определен на одном из приборов, изображенных на фиг. 15, *а*, *б*. На фиг. 16 приведена более подробная схема такого прибора, снабженного пьезометрическими трубками [24].



Фиг. 16.

Если нужно ориентировочно определить коэффициент фильтрации в природных условиях, то нужно взять образцы грунта (по возможности, ненарушенной структуры) и испытать их в указанном приборе. Однако этот способ недостаточно надежен, так как он может не дать характеристики всей области в целом. Прибегают к полевым способам определения коэффициента фильтрации по откачкам из скважины (см. главу IX), которые дают наиболее надежное значение этой величины. При этом получается некоторое среднее значение коэффициента фильтрации для рассматриваемой области движения. В таблице 4 дан порядок значений коэффициента фильтрации для различных грунтов [15].

Коэффициент фильтрации зависит от свойств грунта, величины и формы его зерен, а также от жидкости, протекающей в грунте, в частности от ее вязкости, а следовательно, и температуры.

Обычно коэффициент фильтрации, определенный тем или иным путем, относят к температуре 0° С или 10° С. Тогда коэффициент

фильтрации при температуре $t°C$ вычисляется по формулам вида

$$k = k_0(1 + 0{,}0337t + 0{,}000221t^2) \text{ (формула Пуазейля)},$$

$$k = k_{10}(0{,}7 + 0{,}03t) \text{ (формула Хазена)}.$$

Н. Е. Жуковский [2] в 1888 г. обратил внимание на зависимость коэффициента фильтрации от атмосферного давления. Наблюдения показывают, что высота грунтовых вод в буровых скважинах уменьшается с увеличением атмосферного давления и увеличивается с его

Таблица 4

Средние значения коэффициента фильтрации для различных грунтов

Наименование грунта	Среднее значение коэффициента фильтрации k *см/сек*
Песок чистый	1,0 —0,01
Песок глинистый	0,01 —0,005
Супесок	0,005 —0,003
Суглинок карбонатный	0,001 —0,00005
Глина	0,0005 —0,000005
Глина солонцеватая	0,000001—0,0000003
Лесс карбонатный	0,0005 —0,0001
Лесс бескарбонатный	0,00005 —0,00001
Солончак	0,001 —0,0001
Солонец столбчатый	0,000001—0,0000003
Торф осоковый мало разложившийся	0,006 —0,002
Торф средне разложившийся	0,0008 —0,0002
Торф сфагновый молодой	0,002 —0,0002
Торф сфагновый старый	0,0002 —0,0001

уменьшением. Жуковский это объясняет тем, что при падении давления упругие пузырьки воздуха, находящиеся в водоносном слое (они могут приноситься дождевыми водами), расширяются и выталкивают грунтовые воды. Уровень их в колодцах поднимается, а ключи текут быстрее. При увеличении давления будет обратная картина.

Но и при постоянном давлении наличие в грунтовой воде пузырьков воздуха изменяет степень водопроницаемости грунта, которая не остается постоянной при производстве более или менее длительного опыта. Переменность коэффициента фильтрации во времени может обусловливаться и другими физическими и химическими процессами, — например выщелачиванием растворимых солей, — а также биологическими процессами в почве.

В теории фильтрации нефти вместо коэффициента фильтрации рассматривают другую величину, называемую *проницаемостью грунта* [6]. А именно, при изучении движения нефти в горизонтальной трубке было найдено, что скорость фильтрации равна

$$v = -\frac{k_0}{\mu}\frac{dp}{ds}, \tag{7.1}$$

где коэффициент k_0 зависит от свойств грунта и называется проницаемостью грунта, μ — вязкость нефти, p — давление.

Если рассматривается движение в вертикальной плоскости или пространстве, то в этой формуле следует заменить p на $p + \rho gz$.

Как нетрудно видеть, коэффициент фильтрации k связан с проницаемостью k_0 соотношением

$$k = \frac{k_0 \rho g}{\mu} = \frac{k_0 g}{\nu}.$$

Здесь $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематическая вязкость жидкости.

Существуют формулы, выражающие зависимость коэффициента фильтрации от порозности и от данных механического состава грунта. Приведем в качестве примера формулу Козени [6]

$$k = \beta \frac{d^2}{\mu} \frac{\sigma^3}{(1-\sigma)^2},$$

где μ — вязкость жидкости, d — эффективный диаметр частиц (см. § 1), σ — порозность, β — коэффициент, который Козени считает постоянным (для воды). Е. А. Замарин [16] предложил для β выражение

$$\beta = 8{,}4\,(1{,}275 - 1{,}5\sigma)^2.$$

§ 8. Пределы применимости линейного закона фильтрации. Нелинейные законы. Многочисленные опыты показали, что линейный закон Дарси (6.6) имеет определенные пределы применимости. Так, для однородных грунтов — песка, гравия — закон Дарси имеет место лишь при выполнении для числа Рейнольдса неравенства [4]

$$\mathrm{R} = \frac{vd}{\nu} \leqslant A \tag{8.1}$$

(обозначения те же, что и в конце § 7). Здесь A — число, для которого разные авторы дают различные значения, заключающиеся в пределах от 3 до 10.

Если принять $\nu = 0{,}018$ *см*^{2}/*сек* (для воды), то

$$vd \leqslant 0{,}070 - 0{,}180, \tag{8.2}$$

где v выражается в *см*/*сек*, d — в сантиметрах [18].

Наличие верхнего предела применимости закона Дарси обычно связывают с переходом от ламинарного движения воды в пористой

среде к турбулентному [4]. Однако уже при ламинарном движении возможны отклонения от линейного закона [26].

Должен существовать и нижний предел применимости закона Дарси, когда начинает сильно сказываться действие молекулярных сил, на что указал Н. Н. Павловский [4].

За пределами линейного закона фильтрации, например для крупнозернистых грунтов или при больших скоростях движения, принимают на основании опытов иные зависимости между v и J. Так, рассматривают полином второй степени

$$J = Av + Bv^2,$$

реже — полином третьей степени или одночленную зависимость вида

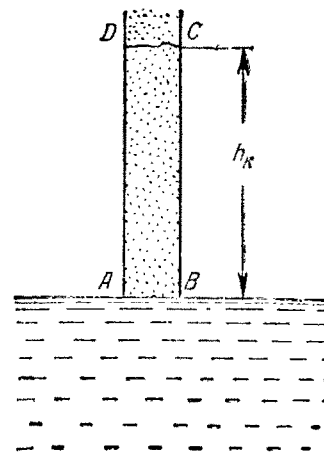
$$v = CJ^n.$$

Постоянные A, B, C, n определяются из опыта.

С. А. Христиановичем [25] дан метод изучения движения грунтовых вод при нелинейных законах фильтрации. Простейшая задача — о притоке воды к колодцу — рассматривалась рядом авторов, начиная с Н. Е. Жуковского (1888) [1]. Н. К. Гиринский [29] пришел к заключению, что для большинства грунтов (рыхлых) отклонения от закона Дарси могут иметь место лишь в непосредственной близости от скважины. При этом он указывает, что обычно зона нарушения закона Дарси является и зоной нарушения естественного состояния грунта под влиянием бурения и суффозионных (т. е. связанных с выносом частиц) процессов, происходящих при прокачке скважины.

В трещиноватых породах, повидимому, возможны более значительные отклонения от линейного закона фильтрации.

Отметим, что вдоль бетонного основания плотины может иметь место так называемая контактная фильтрация, при которой образуется слой воды между грунтом и плотиной [18]. Движение жидкости в таком слое не подчиняется обычным законам фильтрации.



Фиг. 17.

§ 9. Капиллярность. Если мы опустим конец трубки с песком в воду, то увидим, что вода в трубке будет подниматься сначала быстро, затем все медленнее, наконец, ее передвижение станет незаметным для глаза. Обозначим высоту наибольшего поднятия воды (вернее, ее среднее значение по контуру трубки) через $h_к$ и назовем ее *статической высотой капиллярного поднятия.*

Предположим, что основание трубки AB (фиг. 17) соприкасается с поверхностью воды в сосуде. Тогда вдоль AB будем иметь атмосферное давление. Молекулярные силы, заставляющие жидкость под-

ниматься между песчинками, действуют так, что в смоченной части трубки будет иметь место давление ниже атмосферного (вакуум). Если принять атмосферное давление равным нулю, то давление в области $ABCD$ придется считать отрицательным и на поверхности CD равным $-\rho g h_к$. Или, если атмосферное давление обозначить через p_a, то на поверхности CD

$$p = p_a - \rho g h_к.$$

Это условие, которое должно выполняться на свободной поверхности грунтовых вод, было указано Н. Е. Жуковским [3] (1920), уточнено В. В. Ведерниковым и применено им, а потом и другими авторами при решении ряда задач (см. главу V).

Отметим, что верхний слой грунта — почва — является *структурным* [13], т. е. таким, в котором элементарные частицы объединены в агрегаты минеральных частиц, сцементированных перегноем. Между комками диаметром 1—5 *мм* образуются крупные поры. В структурном грунте капиллярность почти не наблюдается. Мала она и в крупнозернистых грунтах. Однако есть грунты, в которых капиллярное поднятие достигает высоты 3—5 *м*.

В таблице 5 приведены значения высот капиллярного поднятия в некоторых грунтах [15].

Таблица 5

Значения высот капиллярного поднятия в некоторых грунтах

Грунт	$h_к$ (*см*)	Грунт	$h_к$ (*см*)
Глина	400—200	Лесс туркестанский . .	350—250
Суглинок	300—150	Подзол	35— 40
Супесок	150—100	Торф	120—150
Песчаная почва . . .	100— 50	Солонец и солончак . .	12

Как известно, высота поднятия воды в каппиллярной трубке, смачиваемой водой, зависит от кривизны мениска и для круглой трубки равна $\frac{2\sigma}{\gamma r}$, где σ — поверхностное натяжение воды, r — радиус трубки, γ — объемный вес воды.

Поры почвы представляют сложный «лабиринт пустот», а потому для высоты капиллярного поднятия будет иметь место более сложная зависимость. Для песка предложена приближенная формула [15]

$$h_к = 0{,}45 \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{1}{d_{10}} \text{ см},$$

где σ — пористость, d_{10} — эффективный диаметр частиц грунта в *см*.

§ 10. Водопроницаемость грунтов при неполном их насыщении. Этот вопрос мало исследован теоретически и не вполне еще ясен по физической его природе. Мы изложим здесь кратко результаты исследований С. Ф. Аверьянова [20], представляющих первую попытку теоретического освещения вопроса о зависимости коэффициента фильтрации от степени увлажнения грунта.

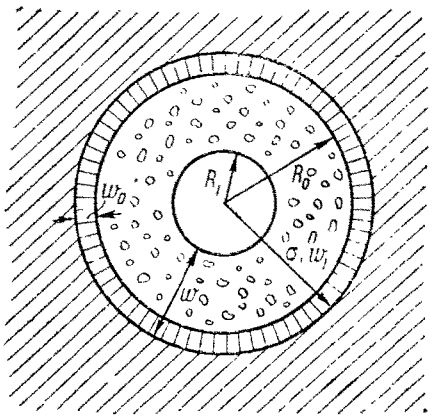
Обозначим пористость грунта через σ, количество связанной воды в долях от объема грунта через w_0, полную влагоемкость в природных условиях, т. е. с учетом наличия некоторого количества зажатого воздуха, через w_1 (в долях от объема грунта). Действительную степень насыщения обозначим через w. Тогда будем иметь неравенства

$$\sigma \geqslant w_1 > w > w_0.$$

Если нет зажатого воздуха, то $w_1 = \sigma$.

Предположим, что грунт не полностью насыщен, обладая влажностью w. Обозначим через k_w коэффициент фильтрации при неполном насыщении. Будем иметь при $w = w_0$ $k_w = 0$, при $w = \sigma$ должно быть $k_w = k$, где k — коэффициент фильтрации при полном насыщении. В общем случае положим:

$$k_w = \alpha k.$$



Фиг. 18.

С. Ф. Аверьянов рассматривает следующую схему движения вязкой жидкости в цилиндрической трубке (фиг. 18). В центральной части трубки цилиндрическая область радиуса R_1 заполнена воздухом; кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и R_1, заполнена движущейся вязкой жидкостью. При этом окружность радиуса R_0 есть граница между гравитационной и связанной водой. С. Ф. Аверьянов принимает, что скорость вдоль трубки равна нулю при $r = R_0$, а при $r = R_1$ достигает наибольшего значения.

Тогда, как известно из курса гидродинамики, скорость течения вязкой жидкости в цилиндрической трубке будет [32]:

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta_1 \Delta l} r^2 + a \ln r + b, \tag{10.1}$$

где v — скорость течения на расстоянии r от продольной оси трубки при разности Δp давлений, приложенных на расстоянии Δl; η — кинематический коэффициент вязкости. В нашем случае получим:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta \Delta l}\left[R_0^2 - r^2 + 2R_1^2 \ln \frac{r}{R_0}\right].$$

Расход Q определим по формуле (ρ — плотность жидкости)

$$Q = 2\pi\rho \int_{R_1}^{R_0} v r\, dr,$$

что дает:

$$Q = \frac{\pi\rho}{8\eta}\frac{\Delta p}{\Delta l}\left[(R_0^2 - R_1^2)(R_0^2 - 3R_1^2) + 4R_1^4 \ln \frac{R_0}{R_1}\right]. \tag{10.2}$$

Введем относительную влажность $\tilde{w}$ с учетом связанной воды:

$$\tilde{w} = \frac{w - w_0}{\sigma - w_0} = 1 - \frac{\sigma - w}{\sigma - w_0}.$$

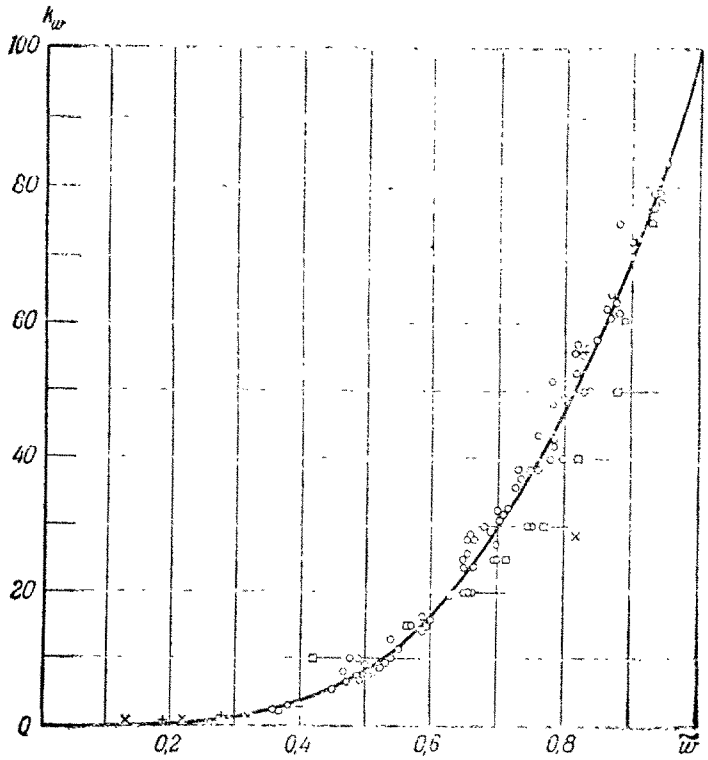
Но, как видно из фиг. 18, имеем:

$$\frac{\sigma - w}{\sigma - w_0} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_0^2}, \quad \frac{R_1}{R_0} = \sqrt{\frac{\sigma - w}{\sigma - w_0}} = \sqrt{1 - \tilde{w}}.$$

Видим, что отношение $\frac{R_1}{R_0}$ можно выразить через $\tilde{w}$. Таким путем С. Ф. Аверьянов приходит к зависимости α от $\tilde{w}$, которую он для упрощения представляет затем в виде степенной функции

$$\alpha = \tilde{w}(3\tilde{w} - 2) - 2(1 - \tilde{w})^2 \ln(1 - \tilde{w}) \approx \tilde{w}^n,$$

причем принимается $n = 3{,}5$. Сопоставление имеющихся опытных результатов, полученных разными авторами, с теоретической кривой дало хороший результат (фиг. 19).



Фиг. 19.

Отметим, что Б. П. Горбуновым [21] делается попытка установления зависимости между фильтрационными свойствами грунта и количеством связанной воды, а также величиной удельной поверхности грунта и рассматриваются способы определения этих величин.

§ 11. Уравнения движения грунтовых вод. Выше мы уже говорили о том, что вода в пористых породах может находиться в различных состояниях. При малом содержании она впитана в зерна грунта

(гигроскопическая вода); с увеличением влажности она начинает обволакивать зерна грунта в виде пленок; при дальнейшем увеличении влажности она заполняет узкие поры в виде менисков; наконец, вода может заполнить все поры (за исключением, может быть, отдельных участков, занятых пузырьками воздуха). В последнем состоянии вода приобретает способность двигаться под действием силы тяжести. Ее называют гравитационной или грунтовой водой. Для нее применимы законы, родственные законам гидродинамики. Мы будем заниматься вопросами движения именно гравитационной воды.

В каждой из пор грунта происходит сложное движение с изменением скорости и ускорения по величине и направлению от точки к точке. Поры имеют различное направление и различную форму стенок, а потому в каждом выделенном объеме грунта должны иметься самые разнообразные по величине и направлению скорости. Поэтому невозможно рассматривать скорости отдельных частиц.

Правильнее было бы рассматривать средние значения скоростей в некотором объеме. В теории фильтрации принято рассматривать не скорости, но расходы через определенную площадку. Будем вектор расхода через единичную площадку обозначать через $\boldsymbol{v}$. Если средняя скорость частиц некоторого объема есть V, то мы можем отнести ее к центру тяжести этого объема, координаты которого обозначим через (x, y, z). Примем вектор V имеющим составляющие $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Тогда, обозначая порозность грунта через σ, можем написать:

$$\boldsymbol{v} = \sigma V, \tag{11.1}$$

т. е. если составляющие вектора $\boldsymbol{v}$ обозначить через u, v, w, то

$$u = \sigma \frac{dx}{dt}, \quad v = \sigma \frac{dy}{dt}, \quad w = \sigma \frac{dz}{dt}. \tag{11.1'}$$

В гидродинамике [32] при выводе уравнений движения рассматривают ускорения частиц жидкости, которые выражаются через скорости так:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \quad \text{и т. д.}$$

Считая скорости v_x, v_y, v_z и их изменения по координатам $\frac{\partial v_x}{\partial x}, \ldots$ малыми, произведениями их будем пренебрегать, оставляя в выражениях составляющих ускорения лишь члены

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Теперь перепишем уравнения движения отдельных частиц жидкости в порах таким образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f_x,\\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + f_y,\\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + f_z - g.\end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Здесь p — давление жидкости, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести. Ось z направлена вверх. Через f_x, f_y, f_z обозначены составляющие сил сопротивления, которые испытывает частица жидкости в поре. Эти силы сопротивления зависят от трения частиц жидкости о частицы грунта. Силы внутреннего трения — частиц жидкости о частицы жидкости — пренебрежимо малы по сравнению с силами внешнего трения.

Можно произвести осреднение уравнений (11.2) по некоторому объему, достаточно малому, чтобы учесть изменения от одного места движения к другому, но достаточно большому по сравнению с размерами пор. Тогда можно будет под v_x, v_y, v_z, p, f_x, f_y, f_z понимать их средние значения по объему. При этом под f_x, f_y, f_z будем понимать составляющие сил сопротивления, полученные из опыта.

Таким образом, закон Дарси (гл. I, § 4) можно истолковать как линейный закон сопротивления, т. е. такой закон, при котором сопротивление пропорционально первой степени скорости фильтрации. Запишем эту зависимость в виде

$$f_x = -\frac{g u}{k}, \quad f_y = -\frac{g v}{k}, \quad f_z = -\frac{g w}{k}. \tag{11.3}$$

Считая, что коэффициент k сохраняет для неустановившегося движения то же значение, что для установившегося, перепишем уравнения (11.2) с помощью (11.1) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g u}{k},\\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g v}{k},\\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g w}{k} - g.\end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

Можно показать, что при реальных значениях коэффициента фильтрации ($k = 1 - 100$ *м/сутки*) членами, содержащими дифференцирование по времени, можно пренебречь.

В самом деле, каждое из уравнений (11.4) имеет вид [25]

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial U}{\partial t} = f - \frac{1}{\lambda} U.$$

Введем переменную

$$V = U - \lambda f,$$

выражающую отклонение U от λf. Получим:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{V}{\lambda}.$$

Если $\frac{\partial f}{\partial t}$ остается ограниченным при всех t, то

$$\frac{\lambda}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial t}$$

будет очень малым. Так, полагая $k = 100$ *м/сутки* $= \frac{1}{864}\frac{м}{сек}$, $g \approx 10$ *м/сек*^{2}, получим:

$$\lambda = \frac{k}{g} = \frac{1}{8640}\ сек,$$

и членом $\frac{\lambda}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial t}$ действительно можно пренебречь, если $\frac{\partial f}{\partial t}$ не очень велико (см. главу XII). Остающееся уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\lambda}V$$

по интегрировании дает:

$$V = V_0 e^{-\frac{\sigma t}{\lambda}}.$$

Правая часть стремится к нулю настолько быстро, что уже через доли секунды можно считать $V = 0$, $U = \lambda f$, т. е. пренебречь членами

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{1}{\sigma}\frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{1}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Тогда уравнения (11.4) можно переписать, вводя *пьезометрический напор* h, в виде

$$v = -k\,\mathrm{grad}\,h,\quad h = \frac{p}{\rho g} + z. \tag{11.5}$$

Линейные инерционные члены сохраняют в отдельных случаях, например для вывода соотношений подобия.

Движения, в которых можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами трения, Л. Прандтль [33] называет *ползущими*. В них обычно сопротивление пропорционально первой степени скорости.

Уравнения (11.4) содержат четыре неизвестные функции: u, v, w и p. Присоединим к этим уравнениям уравнение неразрывности. Движущуюся жидкость мы считаем несжимаемой. Вывод уравнения неразрывности проводится так же, как в гидродинамике несжимаемой жидкости.

Выделим элементарный объем в форме параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям координат. Расход жидкости через

площадку, перпендикулярную к оси x и находящуюся на расстоянии x от начала координат, равен

$$\sigma u\, dy\, dz.$$

Расход через площадку, параллельную первой и соответствующую абсциссе $x+dx$, равен

$$\left[\sigma u + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma u)\, dx\right] dy\, dz.$$

Разность между выходящим и входящим количеством жидкости в направлении оси x равна

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma u)\, dx\, dy\, dz.$$

В направлении осей y и z соответственно получим выражения для изменения расходов

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sigma v)\, dx\, dy\, dz, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\sigma w)\, dx\, dy\, dz.$$

Складывая три полученных выражения, будем иметь общее превышение количества жидкости, выходящего из объема $dx\, dy\, dz$, над количеством жидкости, входящим в объем. Сумма должна равняться нулю в силу несжимаемости жидкости. После деления на $dx\, dy\, dz$ получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma u) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma v) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma w) = 0. \tag{11.6}$$

Если порозность грунта σ не зависит от координат, то получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{11.7}$$

т. е. уравнение неразрывности имеет тот же вид, что и в гидродинамике несжимаемой жидкости. Из соотношения (11.5) следует, что скорость фильтрации имеет потенциал (при постоянных k)

$$\varphi(x, y, z) = -k\left(\frac{p}{\rho g} + z\right) + C = -kh + C \tag{11.8}$$

(C — *произвольная постоянная*), так что

$$V = \operatorname{grad}\varphi = -k \operatorname{grad} h, \quad h = \frac{f}{\rho g} + z. \tag{11.9}$$

Из уравнения неразрывности следует, что потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \nabla^2\varphi = 0,$$

где

$$\Delta\varphi \equiv \nabla^2\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{11.10}$$

§ 12. Уравнения движения при нелинейных законах фильтрации. Эта задача рассмотрена в работе С. А. Христиановича [25].

Как было указано в § 6 этой главы, движение грунтовых вод в общем случае подчиняется зависимости вида

$$I = \Phi(W), \tag{12.1}$$

где гидравлический уклон $I = -\dfrac{\partial H}{\partial s}$ связан со скоростью фильтрации W. Для закона Дарси $I = \dfrac{W}{k}$ в других случаях экспериментальные данные приводят к зависимостям вида

$$I = aW + bW^2 + cW^3, \qquad I = \frac{1}{\varkappa} W^l \qquad \text{и т. д.}$$

С. А. Христианович рассматривает уравнения $\operatorname{grad} H = -\Phi(W)\dfrac{\boldsymbol{W}}{W}$ или

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\Phi(W)\frac{u}{W}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\Phi(W)\frac{v}{W} \tag{12.2}$$

$$(W = \sqrt{u^2 + v^2}).$$

Считая жидкость несжимаемой, присоединим к ним уравнение неразрывности (мы ограничиваемся плоским случаем)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{12.3}$$

Введем обозначение

$$K = \frac{W}{\Phi(W)}. \tag{12.4}$$

Можно рассматривать условно K как коэффициент фильтрации, зависящий от скорости. Исключая H из (12.2), получим:

$$\frac{\partial\left(\frac{u}{K}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{v}{K}\right)}{\partial x} = 0. \tag{12.5}$$

Вместо u, v можно принять в качестве новых функций величину вектора скорости W и угол его с осью абсцисс ϑ:

$$u = W\cos\vartheta, \qquad v = W\sin\vartheta.$$

Тогда вместо (12.3) и (12.5) получим такую систему:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta\frac{\partial W}{\partial x} + \sin\vartheta\frac{\partial W}{\partial y} - W\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + W\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = 0, \\ \Phi'(W)\left[\sin\vartheta\frac{\partial W}{\partial x} - \cos\vartheta\frac{\partial W}{\partial y}\right] + \Phi(W)\left[\cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

Из уравнения неразрывности вытекает существование функции тока ψ такой, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v = -W\sin\vartheta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u = W\cos\vartheta. \tag{12.7}$$

Пусть имеем некоторую функцию $F(x, y)$ координат x, y. Если мы введем новые независимые переменные H и ψ, то получим на основании

(12.2) такие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= -\Phi(W)\cos\vartheta\frac{\partial F}{\partial H} - W\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial\psi},\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\Phi(W)\sin\vartheta\frac{\partial F}{\partial H} + W\cos\vartheta\frac{\partial F}{\partial\psi}.\end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

С помощью этих формул система (12.6) приводится к виду

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi} - \frac{\Phi(W)}{W^2}\frac{\partial W}{\partial H} = 0, \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial H} + \frac{W\Phi'(W)}{[\Phi(W)]^2}\frac{\partial W}{\partial\psi} = 0. \tag{12.9}$$

Прежде чем переходить к дальнейшим преобразованиям, рассмотрим вопрос о приведении системы уравнений эллиптического типа к каноническому виду.

Дана система

$$\left.\begin{aligned}a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{11}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{12}\frac{\partial v}{\partial y} &= e_1,\\ a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial v}{\partial x} + b_{21}\frac{\partial u}{\partial y} + b_{22}\frac{\partial v}{\partial y} &= e_2,\end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

коэффициенты которой a_{ik}, b_{ik} и e_k суть функции от x, y, u и v.

Для нахождения уравнений характеристик присоединим к уравнениям (12.10) уравнения

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy. \tag{12.11}$$

Будем решать систему уравнений (12.10) — (12.11) относительно производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Для этого перепишем (12.11) так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{12.12}$$

Обозначим

$$\frac{dy}{dx} = \lambda$$

и подставим значения (12.12) в (12.10). Получим систему двух уравнений, линейных относительно $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\left.\begin{aligned}(b_{11} - a_{11}\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + (b_{12} - a_{12}\lambda)\frac{\partial v}{\partial y} &= e_1 - a_{11}\frac{du}{dx} - a_{12}\frac{dv}{dx},\\ (b_{21} - a_{21}\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + (b_{22} - a_{22}\lambda)\frac{\partial v}{\partial y} &= e_2 - a_{21}\frac{du}{dx} - a_{22}\frac{dv}{dx}.\end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

Отсюда найдем $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\Delta_v}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\lambda & b_{12} - a_{12}\lambda \\ b_{21} - a_{21}\lambda & b_{22} - a_{22}\lambda \end{vmatrix},$$

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} e_1 - a_{11}\dfrac{du}{dx} - a_{12}\dfrac{dv}{dx} & b_{12} - a_{12}\lambda \\ e_2 - a_{21}\dfrac{du}{dx} - a_{22}\dfrac{dv}{dx} & b_{22} - a_{22}\lambda \end{vmatrix},$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11}\lambda & e_1 - a_{11}\dfrac{du}{dx} - a_{12}\dfrac{dv}{dx} \\ b_{21} - a_{21}\lambda & e_2 - a_{21}\dfrac{du}{dx} - a_{22}\dfrac{dv}{dx} \end{vmatrix}.$$

Уравнения характеристик получаются из условия, что вдоль них не существует единственного решения для $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$, т. е. из уравнений

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_u = 0, \qquad \Delta_v = 0.$$

Одно из этих уравнений есть следствие двух других.

Раскрывая определители Δ и Δ_u и вводя обозначения

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A, \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = C, \qquad \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = D,$$

$$\begin{vmatrix} b_{12} & a_{11} \\ b_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = E, \qquad \begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix} = F, \qquad \begin{vmatrix} e_1 & b_{12} \\ e_2 & b_{22} \end{vmatrix} = M, \qquad \begin{vmatrix} a_{12} & e_1 \\ a_{22} & e_2 \end{vmatrix} = N,$$

$$2B = F + E,$$

получим такие уравнения:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0, \qquad (E + A\lambda)\frac{du}{dx} + D\frac{dv}{dx} + M + N\lambda = 0.$$

Решая первое из них относительно λ, будем иметь:

$$\lambda = -\frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Если

$$B^2 - AC < 0, \tag{12.14}$$

то говорят, что данная система эллиптического типа. Предполагая это условие выполненным, положим:

$$\lambda_1 = P + iQ,$$

где

$$P = -\frac{B}{A}, \qquad Q = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}.$$

Можем написать уравнения характеристик в виде

$$dy = \lambda_1 dx, \tag{12.15}$$

$$(E + \lambda_1 A)\,du + D\,dv + (M + N\lambda_1)\,dx = 0. \tag{12.16}$$

Допустим, что мы нашли некоторое решение системы (12.10) $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Для определения характеристик, отвечающих этому решению,

подставим в P и Q вместо u и v их значения $u(x, y)$, $v(x, y)$. Пусть общий интеграл (12.15) будет $\mu(x, y) + i\nu(x, y) = \text{const}$. Дифференцируя это соотношение и используя (12.15), найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu + i\nu) + (P + iQ)\frac{\partial}{\partial y}(\mu + i\nu) = 0.$$

Разделение действительной и мнимой частей даст:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \nu}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial y} + P\frac{\partial \nu}{\partial y} = 0. \tag{12.17}$$

Рассмотрим систему уравнений (12.10), (12.17), принимая за независимые переменные μ, ν, а за искомые функции x, y, u, v. Формулы перехода будут:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \mu}, \tag{12.18}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu} - \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu} = Q\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2\right\}.$$

Сделаем замену переменных в (12.17) и (12.10), причем в последних уравнениях производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ... заменим через производные по μ, ν с использованием соотношений (12.17) и (12.18). Получим систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial \nu} - P\frac{\partial x}{\partial \nu} - Q\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} + Q\frac{\partial x}{\partial \nu} - P\frac{\partial x}{\partial \mu} = 0, \\ &\frac{F - E}{2}\frac{\partial u}{\partial \mu} + \sqrt{AC - B^2}\frac{\partial u}{\partial \nu} - D\frac{\partial v}{\partial \mu} = M\frac{\partial x}{\partial \mu} + N\frac{\partial y}{\partial \mu}, \\ &\frac{F - E}{2}\frac{\partial u}{\partial \nu} - \sqrt{AC - B^2}\frac{\partial u}{\partial \mu} - D\frac{\partial v}{\partial \nu} = M\frac{\partial x}{\partial \nu} + N\frac{\partial y}{\partial \nu}, \end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

которую можно назвать *канонической системой*. В ней x, y, u, v являются функциями параметров μ, ν. Решение этой системы при отличном от нуля определителе Δ будет также решением исходной системы.

Полученная система не меняется, если заменить μ, ν переменными μ^*, ν^*, где $\mu^* + i\nu^* = f(\mu + i\nu)$ — аналитическая функция. Если уравнения характеристик допускают интегрируемую комбинацию, т. е. если существует соотношение

$$p(x, y, u, v) + iq(x, y, u, v) = \text{const},$$

справедливое в силу уравнений (12.15), (12.16), то, если принять p и q за новые неизвестные вместо x, y или u, v, два уравнения системы будут уравнениями Коши-Римана, или $p + iq$ будет аналитической функцией $\mu + i\nu$.

Вернемся теперь к системе (12.9). Вместо x, y, u, v в нее входят ψ, H, W, ϑ. Каноническая система с параметрами μ, ν будет для системы (12.9) иметь такой вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \psi}{\partial \nu} + \frac{W}{\Phi(W)}\sqrt{\frac{W\Phi'(W)}{\Phi(W)}}\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{W}{\Phi(W)}\sqrt{\frac{W\Phi'(W)}{\Phi(W)}}\frac{\partial H}{\partial \nu} = 0, \\ &\sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}}\frac{\partial W}{\partial \nu} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0. \qquad \sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}}\frac{\partial W}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

Вместо функции W можно ввести фиктивную скорость фильтрации $\widetilde{W}$ и переменную S с помощью равенств

$$S = \ln \widetilde{W} = \int \sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}}\, dW. \tag{12.21}$$

Для закона Дарси $W = c\widetilde{W}$, для степенного закона

$$\widetilde{W} = cW^{\sqrt{\gamma}}.$$

Теперь можно переписать систему (12.20) так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ln \widetilde{W}}{\partial \nu} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0, \qquad & \frac{\partial \ln \widetilde{W}}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \mu} = -L\frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \qquad & \frac{\partial H}{\partial \nu} = L\frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \end{aligned}\right\} \tag{12.22}$$

где

$$L = \frac{\Phi(W)}{W}\sqrt{\frac{\Phi(W)}{W\Phi'(W)}} = L(\widetilde{W}). \tag{12.23}$$

Для степенного закона

$$L = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{W^{\gamma-1}}{\varkappa}.$$

С помощью формул (12.8) можно найти производные от x, y по H, ψ:

$$\frac{\partial x}{\partial H} = -\frac{\cos\vartheta}{\Phi(W)}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\sin\vartheta}{W}, \quad \frac{\partial y}{\partial H} = -\frac{\sin\vartheta}{\Phi(W)}, \quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\cos\vartheta}{W}.$$

Отсюда для x, y найдем выражения в виде криволинейных интегралов

$$x = -\int \frac{\cos\vartheta}{\Phi(W)}\, dH + \frac{\sin\vartheta}{W}\, d\vartheta, \qquad y = -\int \frac{\sin\vartheta}{\Phi(W)}\, dH - \frac{\cos\vartheta}{W}\, d\vartheta.$$

Рассмотрим условия на границах области движения.

Вдоль прямолинейных непроницаемых стенок $\psi = \text{const}$ и $\vartheta = \text{const}$. Вдоль прямолинейной границы водоема $H = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$. Вдоль свободной поверхности $\psi = \text{const}$ и давление постоянно, т. е.

$$p = \rho g(H - y) = \text{const}.$$

Дифференцируя это равенство вдоль свободной поверхности, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -u\frac{\Phi(W)}{W} - \frac{v^2}{u}\frac{\Phi(W)}{W} - \frac{v}{u} = 0$$

или

$$\Phi(W) + \sin\vartheta = 0.$$

Получаем некоторую замкнутую кривую на плоскости u, v.

Вдоль промежутка высачивания — отрезка прямой под углом ϑ_0 к оси — имеем постоянство давления. Дифференцируя вдоль этого отрезка уравнение $p = \text{const}$, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\operatorname{tg}\vartheta_0 - \operatorname{tg}\vartheta_0 = 0$$

или

$$u\frac{\Phi(W)}{W}+v\frac{\Phi(W)}{W}\operatorname{tg}\vartheta_0+\operatorname{tg}\vartheta_0=0,$$

что можно привести к виду

$$\Phi(W)\cos(\vartheta-\vartheta_0)+\sin\vartheta_0=0.$$

При решении конкретных задач рекомендуется на плоскости μ, ν рассматривать область, соответствующую движению, удовлетворяющему закону Дарси, и затем искать поправки на отклонение от этого закона.

В. В. Соколовским [34] рассмотрен частный случай, когда

$$\Phi(W)=-\frac{W}{k\sqrt{1-\left(\frac{W}{m}\right)^2}}.$$

Это соотношение, выбранное из соображения интегрируемости уравнений характеристик, является искусственным, однако оно все же может на некотором интервале значений W дать оценку решения в случае отклонения от линейного закона фильтрации.

ГЛАВА II

ПЛОСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

§ 1. Уравнения плоского движения. Уравнения плоского движения грунтовых вод можно написать в виде [см. уравнения (11.9) главы I]

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -k\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{1.1}$$

Принимая ось y вертикальной, направленной вверх, а ось x горизонтальной, будем иметь:

$$h = \frac{p}{\rho g} + y + C, \quad \varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) + C_1. \tag{1.2}$$

Если же ось y направлена вниз, то

$$h = \frac{p}{\rho g} - y + C, \quad \varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} - y\right) + C_1. \tag{1.2'}$$

Согласно формулам (11.10) главы I

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{1.3}$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.4}$$

вытекает, что существует функция тока $\psi(x, y)$ такая, что

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1.5}$$

Сопоставляя (1.1) и (1.5), получаем:

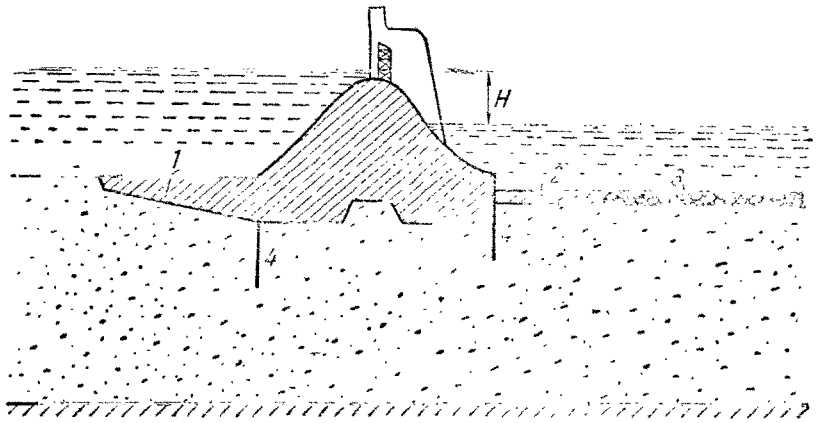
$$\frac{\partial \varphi}{\partial} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Это условия Даламбера-Эйлера (Коши-Римана). Если они выполняются, то, как известно, линейная комбинация функций φ и ψ

$$\omega = \varphi + i\psi \tag{1.6}$$

является функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Функцию ω называют *комплексным потенциалом*.

§ 2. Граничные условия в плоском установившемся движении. На фиг. 20 представлен вертикальный разрез *водосливной* плотины, нормальный к оси плотины [8]. Подземное основание ее, называемое *флютбетом*, состоит из *понура 1*, служащего для удлинения путей фильтрации под плотиной, *водобоя 2*, воспринимающего удары падающей воды и также удлиняющего пути фильтрации, *сливной части* или *рисбермы 3*, защищающей русло от размыва и обеспечивающей безопасный выход фильтрационных вод в нижний бьеф, и, наконец, *шпунтов* или *зубьев 4*, т. е. заглубленных в основание вертикальных стенок, служащих также для удлинения пути фильтрации.



Фиг. 20.

Понур в плотине может и отсутствовать. Рисберма устраивается водопроницаемой, и при фильтрационных расчетах ее основание не включается в подземный контур гидротехнического сооружения.

В глухой плотине, не пропускающей через себя воду, рисберма и водобой отсутствуют [9].

При рассмотрении задач о фильтрации воды под гидротехническими сооружениями, в теле земляных плотин, а также при просачивании воды в почву из каналов и т. д. мы встречаемся с четырьмя видами границ области движения.

1. *Непроницаемые границы.* Это подземные контуры гидротехнических сооружений (фиг. 20), а также границы области движения и непроницаемого грунта (последний называют *водоупором*).

Непроницаемые границы являются линиями тока, а потому вдоль них функция тока должна иметь постоянное значение

$$\psi = \text{const}. \tag{2.1}$$

Обычно непроницаемые границы состоят из отрезков прямых. Пусть уравнение такого отрезка (например, BC на фиг. 21) будет:

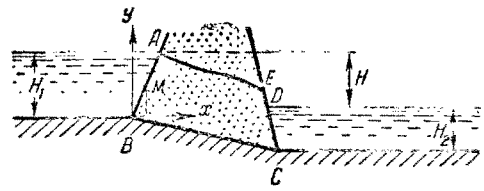
$$ax + by + c = 0. \tag{2.2}$$

Уравнения (2.1) и (2.2) можно рассматривать как два условия, которые должны выполняться вдоль непроницаемой границы.

2. *Границы водных бассейнов.* При больших размерах водного бассейна можно считать, что в нем давление распределяется по гидростатическому закону. Поэтому в произвольной точке M, находящейся на границе AB между грунтом и водоемом (фиг. 21), на высоте y, отсчитываемой от произвольной горизонтальной оси x, для давления будем иметь выражение

$$p = p_a + \rho g(H_1 - y), \quad (2.3)$$

где p_a — давление на поверхности бассейна, равное атмосферному давлению. Второе слагаемое формулы (2.3) выражает вес столба жидкости, действующего на единичную площадку в точке M.



Фиг. 21.

Подставляя (2.3) в формулу (1.2) для φ, получим:

$$\varphi = -k\left(\frac{p_a}{\rho g} + H_1\right) + C. \quad (2.4)$$

Таким образом,

$$\varphi = \text{const} \quad (2.5)$$

вдоль водной границы; другими словами, водная граница является линией равного потенциала.

Предполагая, что водная граница представляет отрезок прямой

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad (2.6)$$

мы будем в дальнейшем рассматривать (2.5) и (2.6) как два условия на границе водного бассейна.

3. *Линия свободной поверхности* представляет линию раздела между влажным и сухим грунтом. Принято рассматривать два вида условий для давления на свободной поверхности:

а) Это давление равно атмосферному давлению, что имеет место вследствие того, что поры грунта сообщаются между собой и с атмосферным воздухом. Можно принять атмосферное давление равным нулю ($p_a = 0$). На линии свободной поверхности, которую также называют *кривой депрессии*, получаем условие

$$\varphi + ky = \text{const}. \quad (2.7)$$

Если ось y направлена вниз, то (2.7) заменяется уравнением

$$\varphi - ky = \text{const}. \quad (2.7')$$

б) При наличии капиллярности грунта принимают [1,3], что на свободной поверхности давление имеет постоянное значение, меньшее

атмосферного на величину, соответствующую высоте капиллярного поднятия воды в грунте:

$$p = p_a - \rho g h_к. \tag{2.8}$$

Наблюдения показывают, что обычно при движении грунтовых вод для $h_к$ в формуле (2.8) следует брать значение, меньшее получающегося при подъеме воды в трубке с грунтом, о котором мы говорили в § 6 гл. I (см. дальше гл. V, § 4).

Подставляя вместо p его значение (2.8) в формулу (1.2), мы получим опять условие (2.7), но лишь с другим значением постоянной.

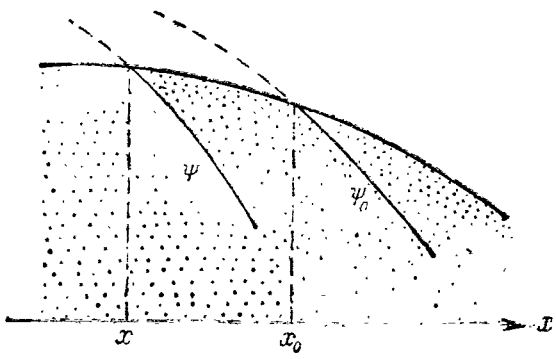
Одной из важнейших задач теории движения грунтовых вод является отыскание вида депрессионной кривой, уравнение которой заранее не известно. Но на свободной поверхности должно выполняться еще одно условие: она должна быть линией тока, т. е.

$$\psi = \text{const} \tag{2.9}$$

на свободной поверхности. Таким образом, на свободной поверхности выполняются два условия: (2.7) и (2.9).

Представляет интерес случай, когда на свободную поверхность выпадают осадки или просачивается вода (вследствие полива, при таянии снега и т. д.). В этом случае говорят, что имеется *инфильтрация* с поверхности земли на свободную поверхность грунтовых вод.

Принимают следующий закон притока влаги на свободную поверхность: расход воды через какую-нибудь часть свободной поверхности пропорционален горизонтальной проекции дуги этой поверхности, или, иначе, пропорционален разности абсцисс концов этой дуги:



Фиг. 22

$$\psi - \psi_0 = \varepsilon(x - x_0). \tag{2.10}$$

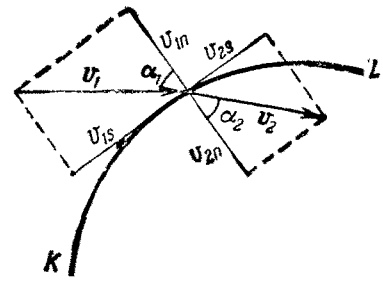
Здесь ψ и ψ_0 — значения функции тока соответственно в точках свободной поверхности с абсциссами x и x_0 (фиг. 22), ε — количество воды, поступающей в единицу времени на единицу длины горизонтальной проекции дуги депрессионной кривой. Для рассматриваемого случая — инфильтрации — ε больше нуля.

Этот же закон, выражаемый равенством (2.10), принимается и в случае испарения со свободной поверхности с той лишь разницей, что ε будет отрицательно.

Таким образом, можно считать, что на свободной поверхности выполняются условия (2.7) и (2.10), причем ε может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

4. *Промежуток высачивания.* В земляной плотине могут существовать участки, где вода из тела плотины высачивается не в водный бассейн, а прямо в атмосферу (фиг. 21, отрезок ED). Такие участки называются *промежутками высачивания.* Они имеются также на стенках колодцев, дренажных канав и т. п. Вдоль них давление должно равняться атмосферному, т. е. должно выполняться условие (2.7). Если промежуток высачивания прямолинеен, то к этому условию присоединяется еще уравнение прямой

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \qquad (2.11)$$



Фиг. 23.

§ 3. Условия на границе раздела двух грунтов. Допустим, что грунтовая вода проходит через два грунта с различными коэффициентами фильтрации k_1 и k_2, граничащих друг с другом по линии KL (фиг. 23).

Обозначая комплексные потенциалы первой и второй сред соответственно через ω_1 и ω_2:

$$\omega_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \quad \omega_2 = \varphi_2 + i\psi_2,$$

будем иметь для потенциалов скорости выражения

$$\varphi_1 = -k_1\left(\frac{p_1}{\rho g} + y\right) + C_1, \quad \varphi_2 = -k_2\left(\frac{p_2}{\rho g} + y\right) + C_2, \qquad (3.1)$$

где p_1 и p_2 — соответственно давления в первой и второй средах. Так как на границе двух сред давление должно меняться непрерывно, т. е. мы должны иметь

$$p_1 = p_2$$

в каждой точке линии KL, то из (3.1) получаем:

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} + C$$

или, если произвольную постоянную выбрать равной нулю,

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2} \qquad (3.2)$$

на линии раздела двух грунтов.

Другое условие мы получим, исходя из того, что нормальная к линии раздела составляющая скорости должна быть непрерывной. Если обозначим через v_{1n} и v_{2n} нормальные составляющие вектора скорости при подходе к линии раздела из первой и из второй среды, то имеем, что на KL

$$v_{1n} = v_{2n}.$$

Если ввести функции тока ψ_1 и ψ_2 для той и другой среды, то последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial s} = \frac{\partial\psi_2}{\partial s}.$$

Интегрируя полученное соотношение по s (s — длина дуги линии раздела) и выбирая постоянную интегрирования равной нулю, получим, что на линии раздела KL

$$\psi_1 = \psi_2. \tag{3.3}$$

Уравнения (3.2) и (3.3) представляют условия, которые должны выполняться на границе двух сред.

Продифференцируем теперь (3.2) по дуге линии раздела. Получим:

$$\frac{1}{k_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial s} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial s},$$

или, вводя касательные составляющие скорости v_{1s} и v_{2s}, имеем:

$$\frac{v_{1s}}{k_1} = \frac{v_{2s}}{k_2}.$$

Как видно из фиг. 23,

$$\frac{v_{1s}}{v_{1n}} = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad \frac{v_{2s}}{v_{2n}} = \operatorname{tg}\alpha_2,$$

где α_1 и α_2 — углы между нормалью к линии раздела и векторами скорости. На основании зависимостей между нормальными и касательными составляющими скоростей можно отсюда получить «закон преломления» для двуслойной среды:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{k_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{k_2}. \tag{3.4}$$

§ 4. Годограф скорости. Комплексный потенциал ω представляет функцию переменной z — комплексной координаты точек области движения:

$$\omega = f(z).$$

Комплексной скоростью называется производная

$$\frac{d\omega}{dz} = u - iv. \tag{4.1}$$

Она является, так же как и ω, функцией комплексного переменного z:

$$u - iv = w(z). \tag{4.2}$$

Области изменения z, т. е. области, занятой движущейся жидкостью, должна соответствовать на плоскости w некоторая область, которую называют *годографом скорости*.

Если граница области движения состоит из прямолинейных отрезков и депрессионной кривой, то, как мы сейчас докажем, соответствующая область плоскости u, v будет ограничена прямыми и дугой окружности [7].

Для доказательства рассмотрим различные виды границ. При этом для большей наглядности вместо плоскости $u - iv$ будем рассматривать плоскость $u + iv$. Нас будут интересовать величины углов, а они те же, что и на плоскости $u - iv$ (направление отсчета у них будет противоположное).

1. На непроницаемой границе вектор скорости направлен вдоль этой границы. Поэтому, если непроницаемая стенка составляет угол α с осью абсцисс, то проекции скорости связаны уравнением

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg}\alpha, \tag{4.3}$$

т. е. на плоскости u, v имеем прямую, проходящую через начало координат и параллельную границе.

2. Граница водного бассейна является эквипотенциальной линией, а потому вектор скорости перпендикулярен к этой границе. Если уравнение границы есть

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + b,$$

то конец вектора скорости должен лежать на прямой

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{ctg}\alpha, \tag{4.4}$$

проходящей через начало координат плоскости u, v и перпендикулярной к рассматриваемой границе.

3. Вдоль свободной поверхности имеем уравнение (2.7)

$$\varphi + ky = \text{const}.$$

Дифференцируя его по s, где s — длина дуги депрессионной кривой, получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} + k\frac{dy}{ds} = 0. \tag{4.5}$$

Отсюда, умножая почленно на $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, получаем:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 + k\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{dy}{ds} = 0.$$

Но $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ есть величина вектора скорости, поэтому

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 = u^2 + v^2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{dy}{ds} = v,$$

и условие на свободной поверхности можно переписать так:

$$u^2 + v^2 + kv = 0. \tag{4.6}$$

Это есть уравнение окружности радиуса $\frac{k}{2}$ с центром в точке $\left(0, -\frac{k}{2}\right)$, касающейся оси абсцисс в начале координат и отсекающей на оси ординат отрезок, величина которого равна коэффициенту фильтрации k.

При наличии инфильтрации или испарения на свободной поверхности имеем уравнения

$$\varphi + ky = \text{const}, \quad \psi - \varepsilon x = \text{const}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.5) здесь также имеет место, однако $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ уже не будет величиной полной скорости, а равно проекции скорости на направление касательной к депрессионной кривой. Обозначая через α угол касательной с осью u, будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \tag{4.8}$$

на основании чего уравнение (4.5) примет вид

$$u \cos \alpha + v \sin \alpha + k \sin \alpha = 0. \tag{4.9}$$

Дифференцирование второго из уравнений (4.7) по s приводит к уравнению

$$u \sin \alpha - v \cos \alpha - \varepsilon \cos \alpha = 0, \tag{4.10}$$

так как имеем соотношения

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -v_n = u \sin \alpha - v \cos \alpha.$$

Исключив переменную α из уравнений (4.9) и (4.10), получим:

$$u^2 + v^2 + (k + \varepsilon) v + k\varepsilon = 0. \tag{4.11}$$

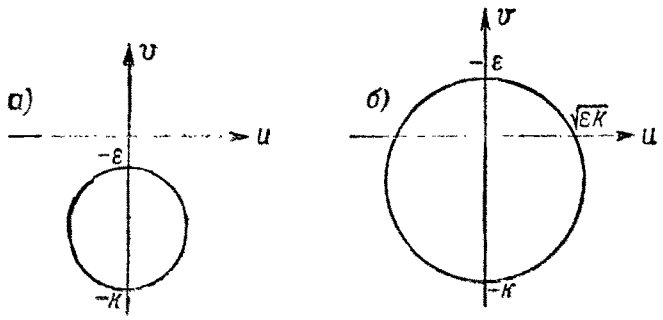
Это есть уравнение окружности, проходящей через точки $(0, -\varepsilon)$ и $(0, -k)$, имеющей центр в точке $\left(0, -\frac{\varepsilon + k}{2}\right)$ и радиус, равный $\frac{k - \varepsilon}{2}$ (фиг. 24). Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ получим уравнение (4.6). При $\varepsilon < 0$ получаем испарение со свободной поверхности (фиг. 24, *б*).

4. На промежутке высачивания, где давление постоянно, имеет место уравнение (4.5), а также уравнение (4.9), причем в последнем α теперь обозначает постоянный угол, который образуется промежутком высачивания с осью абсцисс. Поэтому для промежутка высачивания имеет место уравнение прямой

$$u \cos \alpha + v \sin \alpha + k \sin \alpha = 0, \tag{4.12}$$

проходящей через точку $(0, -k)$ и перпендикулярной к прямой высачивания.

Таким образом, мы видим, что рассмотрение условий на границах, встречающихся в широком круге задач по фильтрации, приводит нас к заключению, что на плоскости $u+iv$, а следовательно, и на плоскости $u-iv$ границами области являются прямые или окруж-

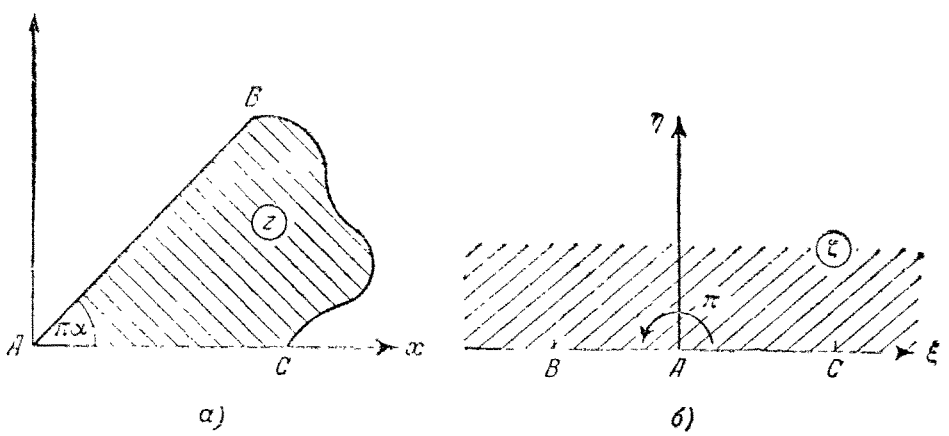


Фиг. 24.

ности. Если прямую интерпретировать как окружность бесконечно большого радиуса, то можно сказать, что область w ограничена дугами окружностей.

Прежде чем перейти к примерам построения годографа скорости, мы рассмотрим вопрос о поведении отображающих функций вблизи вершины угла. Это позволит нам составить представление о значениях скорости в угловых точках области движения и облегчит задачу построения годографа скорости.

§ 5. Поведение скорости в угловых точках области движения. Допустим, что в состав границы области z, которую мы хотим



а) б)

Фиг. 25.

отобразить на полуплоскость, входят отрезки двух пересекающихся прямых AB и AC. Рассмотрим поведение отображающей функции вблизи вершины угла области фильтрации (фиг. 25).

При отображении угла BAC на верхнюю полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ угол $\pi\alpha$ переходит в угол π. Будем рассматривать вместо z функцию

$$U = z^{1/\alpha}.$$

Примем ее аргумент равным нулю при $\zeta = \xi > 0$. Тогда при обходе точки $\zeta = 0$ на угол π в положительном направлении аргумент z получит значение $\alpha\pi$, z приобретет множитель $e^{\alpha\pi i}$, а $z^{1/\alpha}$ — множитель $e^{\pi i}$. Поэтому U вдоль AB будет иметь значение

$$U = e^{\pi i} |z|^{1/\alpha} = -|z|^{1/\alpha}.$$

Таким образом, U принимает действительные значения вдоль отрезка BAC. В окрестности точки $\zeta = 0$ функция U аналитична, однозначна и непрерывна вплоть до действительной оси. По принципу симметрии [14] такую функцию можно продолжить в нижнюю полуплоскость. Следовательно, U будет аналитической в точке $\zeta = 0$ и будет разлагаться в ряд по степеням ζ. Так как она обращается в нуль при $\zeta = 0$, то это разложение имеет вид

$$U = z^{1/\alpha} = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots = \zeta(a_1 + a_2\zeta + \ldots).$$

Отсюда

$$z = \zeta^\alpha (a_1 + a_2\zeta + a_3\zeta^2 + \ldots)^\alpha.$$

Так как $(a_1 + a_2\zeta + \ldots)^\alpha$ можно разложить в ряд по степеням ζ, то получаем:

$$z = \zeta^\alpha (b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots). \tag{5.1}$$

Если аналитическая функция вблизи некоторой точки $\zeta = \zeta_0$ представима в виде обобщенного степенного ряда

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^\nu [b_0 + b_1(\zeta - \zeta_0) + b_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots],$$

сходящегося в некоторой окрестности точки ζ_0, то говорят, что ζ_0 есть *регулярная особая точка* функции. Таким образом, вершина, в которой сходятся два прямолинейных отрезка границы области, есть регулярная особая точка функции, совершающей конформное отображение данной области на полуплоскость.

Рассмотрим различные случаи угловых точек.

1. Угловая точка на непроницаемой границе. Вдоль этой границы $\psi = \text{const}$; следовательно, для комплексного потенциала точка $\zeta = 0$, в которую мы переведем рассматриваемую угловую точку, при отображении на полуплоскость ζ будет обыкновенной точкой, в которой будем иметь:

$$\omega = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots \tag{5.2}$$

С помощью (5.1) и (5.2) находим выражение комплексной скорости в виде

$$\frac{d\omega}{dz} = \zeta^{1-\nu}(e_0 + e_1\zeta + \ldots). \tag{5.3}$$

Из него видно, что если угол $\pi\alpha < \pi$, то скорость будет равна нулю при $\zeta = 0$, если этот угол больше π, то скорость равна бесконечности.

2. Угловая точка на границе водоема. Здесь вдоль ломаной линии $\varphi = \text{const}$, поэтому для ω точка $\zeta = 0$ опять будет обыкновенной и скорость будет иметь вид (5.3).

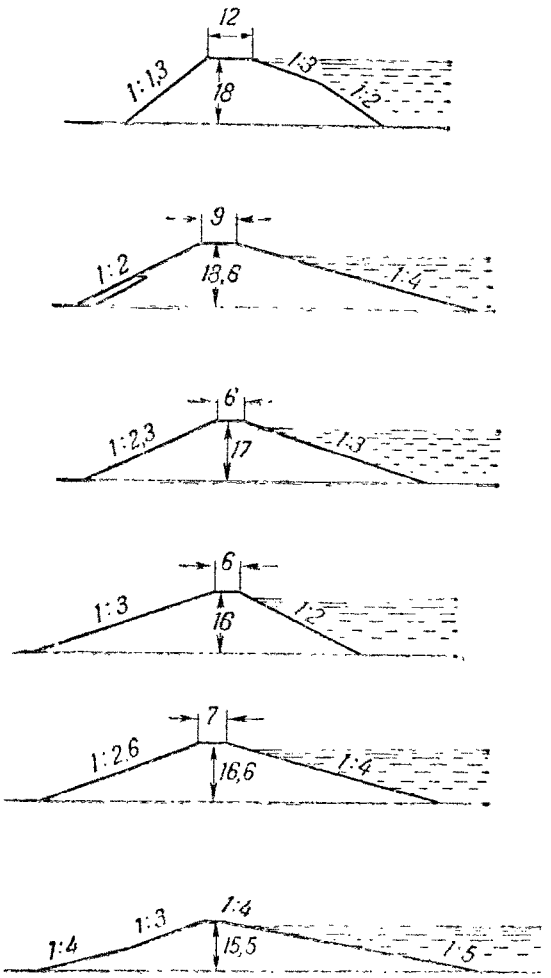
3. Угловая точка находится на пересечении прямолинейной границы водоема и прямолинейной непроницаемой границы. Тогда в точке A комплексный потенциал меняет условие $\operatorname{Re}\omega = \text{const}$ на условие $\operatorname{Im}\omega = \text{const}$, и его разложение около $\zeta = 0$ имеет вид

$$\omega = \zeta^{1/2}(c_0 + c_1\zeta + \ldots). \quad (5.4)$$

Из (5.1) и (5.4) получаем:

$$\frac{d\omega}{dz} = \zeta^{1/2-\alpha}(e_0 + e_1\zeta + \ldots). \quad (5.5)$$

Из этого равенства видно, что если $\alpha < \frac{1}{2}$, т. е. если угол в точке A острый, то скорость будет равна нулю; если этот угол тупой, то скорость равна бесконечности. В случае прямого угла будем иметь конечное значение скорости.



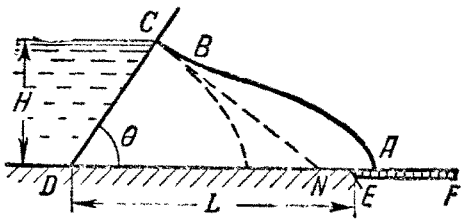
Фиг. 26.

§ 6. Примеры построения годографа скорости. Если мы имеем безнапорное движение, т. е. движение со свободной поверхностью, то бывает полезно построить годограф скорости.

В этом параграфе мы будем рассматривать примеры построения годографа скорости для земляных плотин. Поэтому приведем здесь несколько рисунков, дающих представление о форме некоторых существующих земляных плотин, построенных в разное время в разных странах.

На фиг. 26 приведены профили некоторых земляных плотин средней высоты [13]. (Для более высоких плотин принимают обычно более пологие откосы. На фигуре отмечены размеры в метрах и уклоны откосов.) Среди них отметим первую — Змеиногорскую плотину, по-

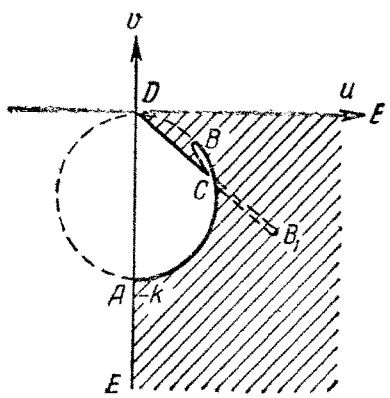
строенную на Алтае в 1780 г. русским гидротехником К. Д. Фроловым и существующую в настоящее время. Для нее характерны крутые откосы, причем верховой откос представляет выпуклую — по отношению к плотине — ломаную линию. Согласно исследованиям предыдущего параграфа скорость в вершине этой ломаной линии равна нулю. Ниже мы приводим годограф скорости такой плотины (фиг. 37).



Фиг. 27.

Возьмем в качестве примера простейшую плотину с наклонным верховым откосом CD (фиг. 27), лежащую на непроницаемом дренированном основании DE (EA — линия дренажа).

В земляной плотине обычно глубина воды H в верхнем бьефе мала по сравнению с длиной основания плотины L. Предположим, что отношение H к L настолько мало, что перпендикуляр CN к линии CD в точке C пересекает основание плотины DE (фиг. 27). В этом случае депрессионная кривая должна иметь точку перегиба. Действительно, в противном случае депрессионная кривая вся должна лежать под прямой CN, что, очевидно, невозможно, так как вода, накапливаясь в теле плотины, должна иметь выход в дренажную щель.



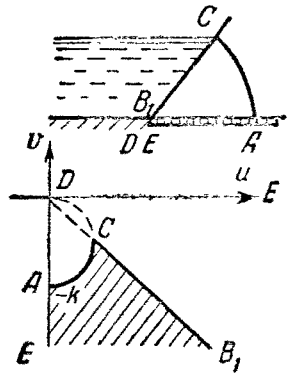
Фиг. 28.

Спрашивается: будет ли точка перегиба оставаться на кривой при увеличении высоты H воды в бассейне и если она может исчезнуть, то каким образом это может произойти?

Для получения ответа обратимся к годографу скорости (фиг. 28). Он ограничен согласно (4.6) окружностью $u^2+v^2+kv=0$, соответствующей свободной поверхности, прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной к верхнему откосу плотины, осью u, соответствующей непроницаемому основанию плотины, и, наконец, осью v, отвечающей линии дренажа. Рассмотрев конечное число областей, ограниченных перечисленными линиями, мы должны выбрать единственно возможную заштрихованную область фиг. 28. При этом, учитывая наличие точки перегиба у депрессионной кривой, нужно провести надрез по дуге окружности.

Теперь будем увеличивать отношение $\frac{H}{L}$. При достаточно больших значениях этого отношения депрессионная кривая не будет иметь точки перегиба: с увеличением $\frac{H}{L}$ надрез CB уменьшается и при неко-

тором определенном значении $\frac{H}{L}$ исчезнет; при дальнейшем увеличении $\frac{H}{L}$ появится надрез CB_1 вдоль прямой DC. Это означает, что точка перегиба C, в которой величина скорости имеет наименьшее значение, дойдя до откоса, исчезает, а вместо нее на откосе появляется точка с максимумом скорости. С увеличением $\frac{H}{L}$ эта точка будет перемещаться вниз по откосу, причем величина максимума увеличивается.



Фиг. 29.

Если рассматривать возрастание $\frac{H}{L}$ таким образом, что H остается постоянным, а L уменьшается и стремится к нулю, то в пределе получим схему, представленную на фиг. 29, с годографом скорости AEB_1CA. Мы видим, что в пределе часть EDB_1 первоначальной области (фиг. 28) исчезает.

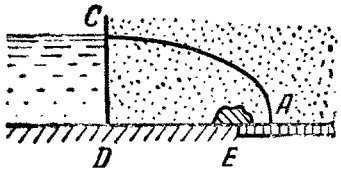
Вычисления для двух значений угла θ показывают [5], что точка перегиба исчезает при значениях

$$\frac{H}{L} = 1{,}16 \sin\theta = 0{,}820 \quad \text{для} \quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

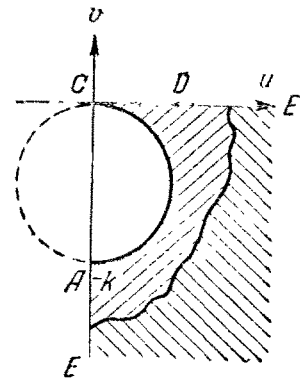
$$\frac{H}{L} = 1{,}19 \sin\theta = 0{,}232 \quad \text{для} \quad \theta = \frac{\pi}{16}.$$

Обычно в плотинах $\frac{H}{L}$ имеет меньшее значение, чем только что приведенные, поэтому, как правило, депрессионная кривая имеет точку перегиба.

Перейдем теперь к частному случаю дренированной плотины, когда



Фиг. 30.

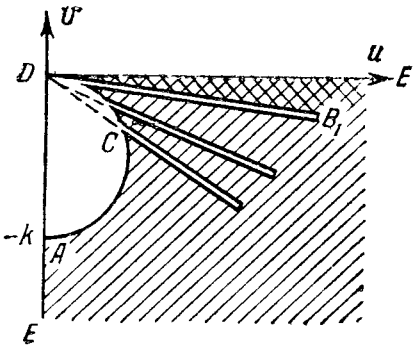


Фиг. 31.

угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ (фиг. 30). В этом случае годограф скорости имеет вид, изображенный на фиг. 31. Точки перегиба здесь нет.

Если сравнить годограф скорости фиг. 28 с годографом скорости фиг. 31, то на первый взгляд может показаться непонятным, каким образом точка D могла перейти из начала координат в некоторую точку оси u. Здесь дело обстоит так, что при увеличении угла θ

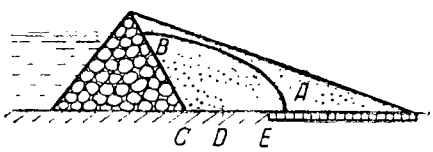
плотины (фиг. 27) при заданных H и L всегда найдется такое значение этого угла, при котором точка перегиба исчезает, и на годографе скорости появляется надрез CB_1 (фиг. 32), который будет увеличиваться и приближаться к оси u (фиг. 28). В пределе часть первоначальной области годографа исчезает.



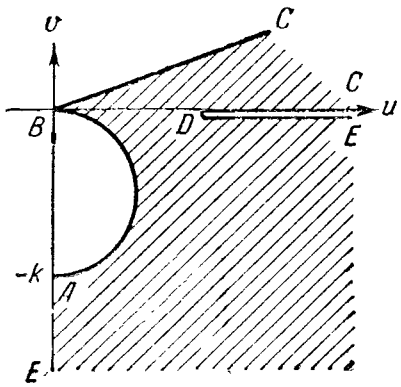
Фиг. 32.

В случае, когда угол θ верхового откоса с непроницаемым основанием тупой — такие случаи бывают в плотинах с каменной наброской (фиг. 33), — на годографе скорости появляется разрез вдоль оси u, идущий до бесконечности (фиг. 34).

Вернемся теперь к схеме плотины с вертикальным откосом. Единственным параметром, определяющим конфигурацию этой плотины, является отношение $\frac{H}{L}$ (длина отрезка EA является искомой). На годографе скорости (фиг. 31) единственной подвижной вершиной является точка D. Следовательно, при изменении $\frac{H}{L}$ эта точка должна перемещаться. В предельном случае, когда $L \to \infty$, оказывается, что депрессионная кривая представляет параболу с фокусом в точке E, причем ось абсцисс является осью симметрии этой параболы (см. § 10). Отсюда следует, что при $L \to \infty$ имеем также $H \to \infty$, причем $\lim\limits_{L \to \infty} \frac{H}{L} = 0$. Обе точки C и D уходят в бесконечность, следовательно, на годографе скорости точка D стремится к C. Наоборот, если $L \to 0$, то точка D годографа скорости должна уйти на бесконечность и, следовательно, точка D стремится к точке E.



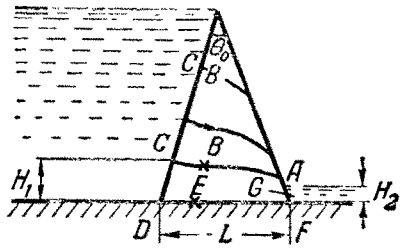
Фиг. 33.



Фиг. 34.

Предположим теперь, что стенка CD остается на месте, а отрезок дренажа EA удаляется в бесконечность и, следовательно, $\frac{H}{L} \to 0$. Тогда опять на годографе скорости точка D должна стремиться к точке C, и в этом предельном случае отрезку CD области движения отвечает только одна точка C, с которой совпадает точка D на

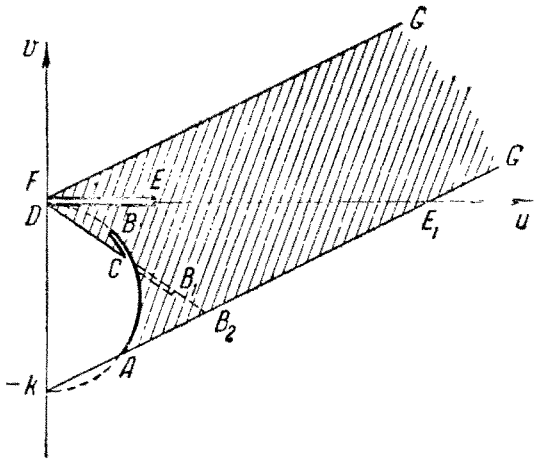
плоскости u, v. Но тогда и всей области плоскости w должна соответствовать эта же точка — точка нулевой скорости. Другими словами, движение в этом предельном случае будет отсутствовать. Из физических соображений также ясно, что если отрезок EA (фиг. 30) уйдет в бесконечность, то свободная поверхность воды в грунте будет горизонтальной прямой и движение в грунте прекратится.



Фиг. 35.

Отметим еще, что в рассматриваемом предельном случае область комплексной скорости отнюдь не стягивается к точке непрерывным образом, — она все время имеет вид, изображенный на фиг. 31, где может лишь меняться положение точки D. Иначе говоря, малой области плоскости z в окрестности точки E (см. заштрихованную часть фиг. 30) отвечает большая область плоскости w; при данном H и $L \to \infty$ скорость $u - iv$ стремится к нулю неравномерно [6].

Рассмотрим еще пример изменения годографа скорости. На фиг. 35 представлена плотина с наклонными откосами, угол между которыми θ_0 острый. Пусть H_1 и H_2 — глубины воды в верхнем и нижнем бьефах, L — длина непроницаемого основания. Обозначим $H = H_1 - H_2$.

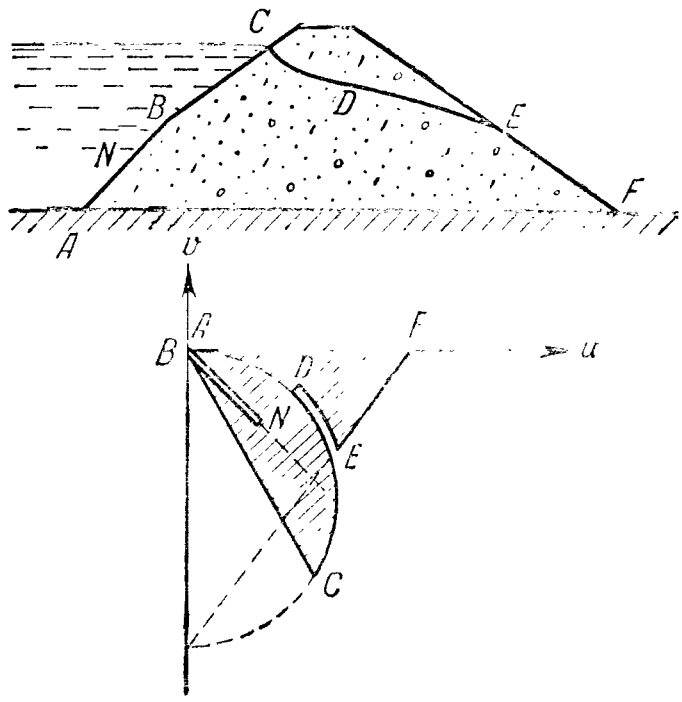


Фиг. 36.

Если значение отношения $\frac{H}{L}$ мало, то точке перегиба свободной поверхности соответствует точка B на годографе скорости (фиг. 36). При возрастании величины $\frac{H}{L}$ точка B стремится к точке C; затем вместо надреза CB появится надрез CB_1, который при полном заполнении плотины перейдет в отрезок CB_2, причем часть CB_2A первоначальной области годографа исчезает. При $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ точки C и A на годографе скорости совпадут, надрез CB_1 станет невозможным. Таким образом, при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ точка перегиба всегда существует, кроме предельного случая полного заполнения плотины.

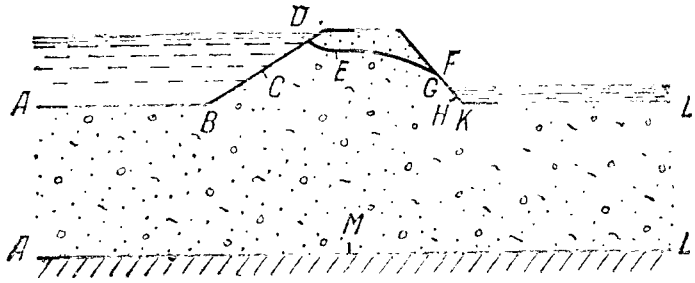
Если $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, то всегда, даже и при полном подъеме воды в верхнем бьефе, будет существовать свободная поверхность, на которой

имеется точка перегиба. Годограф скорости всегда будет иметь разрез AB по дуге окружности (так как точка C на годографе скорости в этом случае будет ниже точки A).



Фиг. 37.

При $H_2 = 0$, т. е. при отсутствии воды в нижнем бьефе, точка E годографа скорости займет положение E_1 и верхняя часть годографа отпадает.

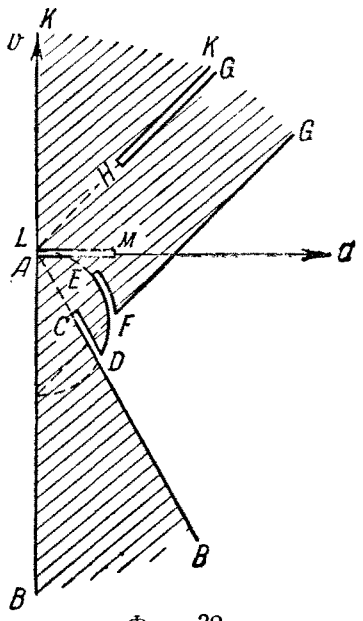


Фиг. 38.

Если будем двигать основание плотины DF вниз к бесконечности, то получим:

$$H_1 \to \infty, \quad H_2 \to \infty, \quad \frac{H_1}{H_2} \to 1.$$

При этом на годографе скорости разрез FED исчезнет. Он исчезнет также, если, считая L и H_1 (или H_2) неизменными, устремлять H_2 к H_1 (или H_1 к H_2). Но в этом случае движение стремится к покою, для которого годограф скорости сводится к точке. Таким образом, здесь, как и в предыдущем случае, при стремлении к покою нарушается непрерывность изменения скорости.

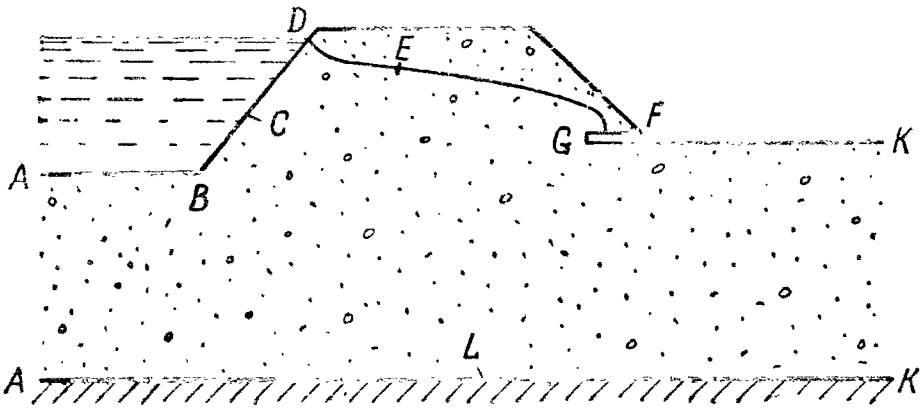


Фиг. 39.

На фиг. 37 дан годограф скорости плотины Фролова для случая отсутствия воды в нижнем бьефе. Если бы откос ABC состоял из одной прямой, то разрез ANB исчез бы. Если бы угол ABC был больше π, в точке B скорость была бы равна ∞.

На фиг. 38 представлена плотина на проницаемом основании конечной глубины; годограф скорости для нее дан на фиг. 39.

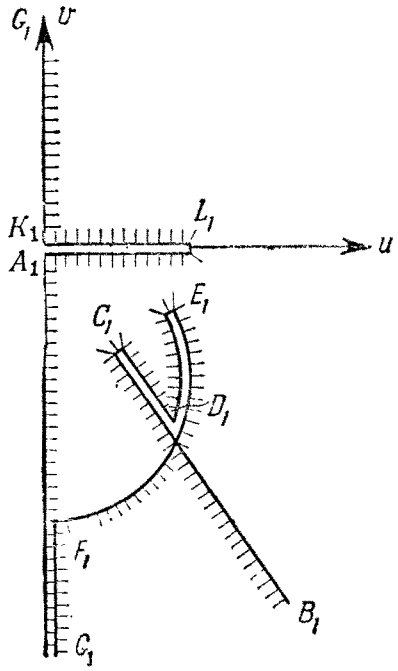
На фиг. 40 изображена такая же плотина, как в предыдущем случае, но с горизонтальным дренажем. Для нее годограф скорости представлен на фиг. 41. Дадим некоторые пояснения к этой фигуре. В бесконечно удаленных точках A и K скорость равна нулю, поэтому точки A_1 и K_1 будут в начале координат. Далее, вдоль AB имеем $u=0$, v направлена вниз, причем увеличивается при движении от A к B. Так как в точке B имеем разрыв в направлении



Фиг. 40.

скорости, то по свойству функции комплексного переменного $u+iv$ может равняться в этой точке или нулю, или бесконечности. В данном случае угол в точке B тупой, следовательно, $u+iv=\infty$. Дальше вектор скорости меняет направление, делаясь перпендикулярным к гра-

нице BD — на годографе имеем отрезок $B_1C_1D_1$. C_1 — точка, в которой скорость имеет наименьшее значение, D_1 — точка пересечения с окружностью, которая соответствует свободной поверхности. Точке перегиба соответствует точка возврата скорости E_1. По дуге окружности мы должны дойти до точки F_1 и затем перемещаться вдоль F_1G_1, так как вдоль отрезка дренажа FG скорость направлена перпендикулярно к отрезку. В точке G скорость обращается в бесконечность, меняя направление при переходе на отрезок GK. В бесконечно далекой точке K, как мы уже упоминали, скорость равна нулю. Вдоль непроницаемого основания скорость направлена вправо, принимая в некоторой точке L максимальное значение, изображаемое отрезком K_1L_1. Линии AK соответствует на годографе скорости отрезок $A_1L_1K_1$, проходимый в прямом и обратном направлении.



Фиг. 41.

На фиг. 41 мы имеем двулистную область, так как часть плоскости u, v покрыта два раза областью изменения переменной $u+iv$. Когда мы идем в плоскости z вдоль контура ABD, то область движения остается справа, на годографе же скорости при этом область находится налево от контура (так как $u+iv$ является функцией от z, а не от z), что изображено штриховкой вблизи контура.

Рассмотренные примеры показывают, что построение годографа скорости является, вообще говоря, сложным. Поэтому в сложных случаях желательно при решении задач обходиться без годографа скорости. Такие методы в применении к некоторым задачам будут указаны в главе VI.

§ 7. Треугольник фильтрации [4]. Под *треугольником фильтрации* мы будем понимать треугольник, построенный на векторах, которые получаются, если взять градиент от обеих частей уравнения

$$\frac{p-p_a}{\gamma}=h-y.$$

Это уравнение вытекает из (1.2), если положить

$$\rho g=\gamma, \qquad C=-\frac{p_a}{\gamma},$$

где γ — объемный вес жидкости, p_a — атмосферное давление. Получим:

$$\frac{1}{\gamma}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} h - j, \tag{7.1}$$

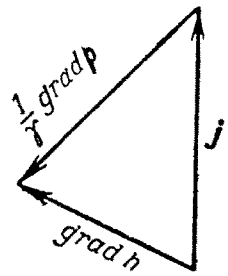
где j — единичный вектор, направленный вверх по вертикали. Такой треугольник изображен на фиг. 42.

Равенство (7.1) можно представить в другом виде, умножив его почленно на k (k — коэффициент фильтрации) и приняв во внимание, что

$$-k\operatorname{grad} h = V, \tag{7.2}$$

где V — вектор скорости фильтрации. Получим:

$$V = -\frac{k}{\gamma}\operatorname{grad} p - kj.$$

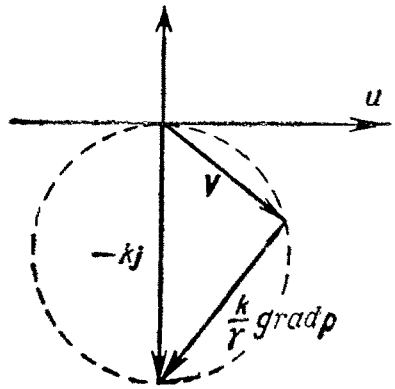


Фиг. 42.

Рассмотрим плоскость скоростей $(u + iv)$. На ней пунктиром построена окружность

$$u^2 + v^2 + kv = 0,$$

соответствующая свободной поверхности грунтового потока. Из рассмотрения фиг. 43 видно, что на свободной поверхности векторы V и $\frac{k}{\gamma}\operatorname{grad} p$ ортогональны.



Фиг. 43.

§ 8. Силы, действующие на частицы грунта. В вопросах прочности и устойчивости гидротехнических сооружений важное значение имеет вопрос об изучении силового воздействия воды, протекающей в грунте под сооружением (см. ниже §§ 12 и 13).

Задача эта рассматривалась многими учеными: Н. П. Пузыревским, Н. Н. Павловским, К. Терцаги, Н. М. Герсевановым и др. При этом вопрос о физической природе фильтрационных сил вызывал дискуссию [12]. Мы здесь приводим изложение в форме, данной в работе Б. К. Ризенкампфа [4].

Выделим единицу объема пористого тела и найдем равнодействующую S сил, действующих на твердые частицы этого объема. Эта сила может рассматриваться как геометрическая сумма следующих сил:

1. Вес F_1 сухих частиц выделенного объема. Эта сила направлена по вертикали вниз и равна по величине произведению $n\gamma_1$, где γ_1 — объемный вес (вес единицы объема) сухих частиц, $n = 1 - m$ — объем твердых частиц в единице объема пористого тела. Таким образом, можем написать, обозначая через j единичный вектор, направ-

ленный вверх по вертикали, равенство

$$\boldsymbol{F}_1 = -n\gamma_1 \boldsymbol{j}.$$

2. Сила $\boldsymbol{F}_2$ давления воды на твердые частицы в единице объема пористого тела. Так как действие давления на единицу объема пористого тела равно $-\operatorname{grad} p$, то для $\boldsymbol{F}_2$ имеем:

$$\boldsymbol{F}_2 = -n \operatorname{grad} p.$$

3. В качестве третьей силы Б. К. Ризенкампф рассматривает силу $\boldsymbol{F}_3$ — увлекающее действие фильтрующейся воды на твердые частицы, заключенные в единице объема пористого тела. Это действие равно и противоположно сопротивлению единицы объема пористого тела. Сопротивление же, отнесенное к единице массы воды, как мы видели [формулы (11.3) гл. I], определяется равенством

$$\boldsymbol{R} = -\frac{g}{k}\boldsymbol{V}.$$

Так как масса воды в объеме грунта, равном единице, равна $m\rho$, где ρ — плотность воды, то получаем для $\boldsymbol{F}_3$:

$$\boldsymbol{F}_3 = -m\rho \boldsymbol{R} = \frac{m\gamma}{k}\boldsymbol{V}.$$

$\boldsymbol{F}_3$ носит название фильтрационной силы.

Геометрическая сумма $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ дает равнодействующую $\boldsymbol{S}$

$$\boldsymbol{S} = -n\gamma_1 \boldsymbol{j} - n \operatorname{grad} p + \frac{m\gamma}{k}\boldsymbol{V}.$$

Преобразуем полученное выражение двумя способами, используя уравнения

$$\boldsymbol{V} = -k \operatorname{grad} h, \quad \frac{1}{\gamma}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} h - \boldsymbol{j}$$

и исключая с их помощью один раз p, другой раз $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\gamma}{k}\boldsymbol{V} - n(\gamma_1 - \gamma)\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{S} = -\operatorname{grad} p - \gamma_0 \boldsymbol{j}.$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma_0 = m\gamma + n\gamma_1.$$

Очевидно, что величина γ_0 представляет вес единицы объема пористого тела с заключенной в нем водой.

Силу $\boldsymbol{S}$ можно построить с помощью диаграммы фиг. 44, на которой даны оба указанных представления $\boldsymbol{S}$.

Вектор $\boldsymbol{S}$ можно представить через силовую функцию

$$V = -\gamma h - n(\gamma_1 - \gamma)y = -p - \gamma_0 y + \text{const}$$

в виде

$$S = \operatorname{grad} V.$$

Нетрудно убедиться в том, что V удовлетворяет уравнению Лапласа.

Все приведенные в этом пункте рассуждения годятся как для плоскости, так и для пространства.

В случае плоского движения, кроме функции V, можно ввести функцию U, гармонически сопряженную с V, так что

$$U + iV = \frac{i}{k}\gamma\omega - n(\gamma_1 - \gamma)z.$$

Линии $V = \text{const}$ суть линии равного потенциала силы S, уравнение $U = \text{const}$ определяет силовые линии поля силы S.

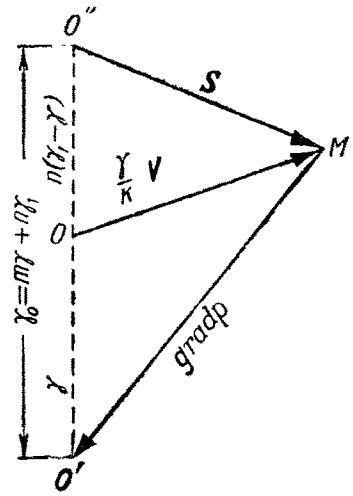
Если жидкость находится в покое, то $V = 0$ и

$$|S| = n(\gamma_1 - \gamma),$$

что выражает закон Архимеда: сила, действующая на грунтовый скелет, равна весу скелета, уменьшенному на вес вытесненной им воды.

Если давление в жидкости постоянно, то она движется лишь под действием силы тяжести. В этом случае

$$|S| = \gamma_0 = m\gamma + n\gamma_1,$$



Фиг. 44.

т. е. к весу грунтового остова присоединяется вес воды в порах.

Б. К. Ризенкампф заметил, что если принять $m = 0{,}4$, $\gamma = 1$, $\gamma_1 = 2\frac{2}{3}$, то получается, что отрезки OO' и OO'' (фиг. 44) имеют длины, равные единице.

Б. К. Ризенкампфом указана возможность вычисления напряжений в грунте, через который просачивается вода.

Если обозначить через σ_x и σ_y нормальные напряжения на площадках пористого тела, перпендикулярных к осям x и y, а через τ_{xy} — касательное напряжение на этих площадках, то на основании уравнений равновесия сплошной среды будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + S_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + S_y = 0,$$

где

$$S_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad S_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Если пористое тело подчиняется закону Гука, то, вводя функцию напряжений $\varphi(x, y)$ с помощью уравнений

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - v, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - v,$$

найдем, что φ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Б. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ПЛОСКИХ ДВИЖЕНИЙ

§ 9. Предварительные замечания. Теперь рассмотрим несколько примеров движений грунтовых вод. При этом здесь мы остановимся лишь на таких случаях, для которых точное решение получается сравнительно просто. Более сложные задачи будут рассматриваться в дальнейшем при помощи специальных методов математического анализа, разработанных различными авторами применительно к отдельным группам задач теории фильтрации.

Движения грунтовых вод делятся на *напорные*, *безнапорные и полунапорные*.

Напорным движением в теории фильтрации называют такое движение, в котором нет свободной поверхности. Таково движение грунтовой воды под гидротехническим сооружением, происходящее под влиянием разности напоров в верхнем и нижнем бьефах, или приток воды к скважинам в водоносном пласте, ограниченном непроницаемыми поверхностями. В напорном движении всегда сверху имеется твердая стенка, границы области движения бывают лишь двух типов: линии тока и линии равного потенциала.

Безнапорным движением называется такое, в котором область движения ограничена сверху свободной поверхностью (возможны случаи вырождения; см., например, конец § 12 главы VII).

Наконец, *полунапорная* фильтрация характеризуется тем, что фильтрационный поток сначала соприкасается с подземным контуром сооружения, а затем отрывается от него, образуя свободную поверхность. Полунапорное движение имеет место под сооружениями, ниже которых имеется значительное падение уровня грунтовых вод, например под водосбросами и напорными бассейнами гидростанций. Полунапорные движения будут рассмотрены в главе X. §§ 10 и 11 этой главы посвящены безнапорным движениям, остальные — напорным.

§ 10. Дренажная щель на водоупоре. Будем искать z как функцию от $\omega = \varphi + i\psi$, причем зададимся простейшим — после линейного — видом функциональной зависимости, положив

$$z = A\omega^2, \tag{10.1}$$

где A — пока неопределенная постоянная.

Посмотрим, может ли рассматриваемое течение иметь свободную поверхность. На последней должно выполняться условие равенства нулю давления, равносильное условию (2.7) при $\text{const} = 0$:

$$\varphi + ky = 0,$$

а также условие, что линия свободной поверхности есть линия тока:

$$\psi = \psi_0.$$

Подставляя в правую часть (10.1) значения

$$\varphi = -ky, \quad \psi = \psi_0,$$

получим:

$$x + iy = A(-ky + i\psi_0)^2.$$

Отделение действительной и мнимой частей дает для действительного A:

$$x = A(k^2y^2 - \psi_0^2), \quad y = -2Ak\psi_0 y.$$

Для выполнения последнего из двух равенств необходимо, чтобы

$$A = -\frac{1}{2k\psi_0}. \tag{10.2}$$

Тогда свободной поверхностью будет парабола

$$x = -\frac{ky^2}{2\psi_0} + \frac{\psi_0}{2k}$$

или при другой записи парабола

$$y^2 = -\frac{2\psi_0}{k}\left(x - \frac{\psi_0}{2k}\right). \tag{10.3}$$

Теперь подставим найденное значение A в уравнение (10.1) и разделим в нем действительную и мнимую части. Найдем зависимость координат x, y от функций φ и ψ:

$$x = -\frac{1}{2k\psi_0}(\varphi^2 - \psi^2), \quad y = -\frac{\varphi\psi}{k\psi_0}. \tag{10.4}$$

При $\psi = 0$ линией тока является отрицательная часть оси x, так как при этом имеем, считая $\psi_0 > 0$:

$$y = 0, \quad x = -\frac{\varphi^2}{2k\psi_0} < 0.$$

Другие линии тока получим, давая в (10.4) постоянные значения ψ. Это софокусные параболы с фокусом в начале координат (фиг. 45, *а*).

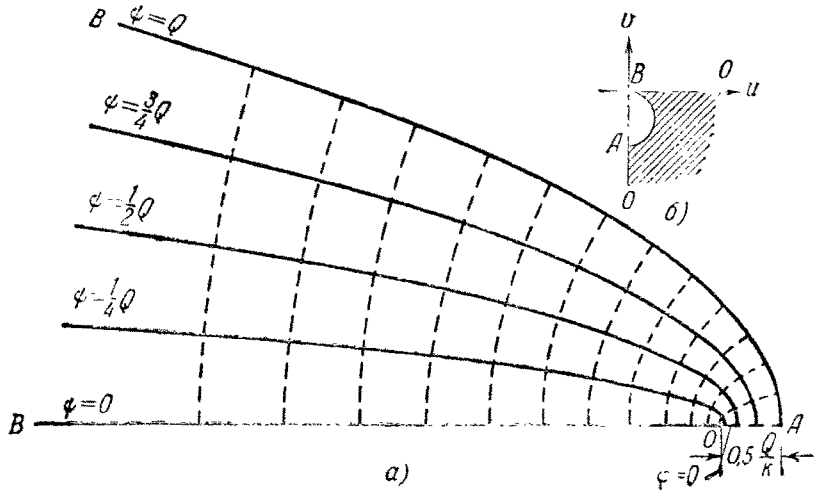
Наконец, положив в (10.4) $\varphi = 0$, получим эквипотенциаль

$$y = 0, \quad x = \frac{\psi^2}{2k\psi_0}.$$

Это часть положительной оси абсцисс. Мы возьмем ее отрезок

$$0 < x < \frac{\psi_0}{2k}.$$

Тогда три выделенные нами линии — две линии тока, $\psi = 0$ и $\psi = \psi_0$, и линия равного потенциала $\varphi = 0$ — образуют область движения, отвечающего притоку грунтовой воды из бесконечности к дренажной



Фиг. 45.

щели OA (фиг. 45, *а*). Эквипотенциали будут параболами, ортогональными к параболам — линиям тока.

Положим

$$\psi_0 = Q,$$

где Q — расход дренажной щели.

Длина отрезка дренажа d связана с расходом Q равенством

$$d = \frac{Q}{2k}.$$

Следовательно, расход пропорционален ширине щели:

$$Q = \psi_0 = 2kd. \tag{10.5}$$

Приведенная задача была рассмотрена Форхгеймером и Козени. Затем Н. Н. Павловский [2] получил ее решение прямым путем, задаваясь граничными условиями на трех частях контура, ограничивающего область движения, и строя годограф скорости, который, как нетрудно видеть, имеет вид фиг. 45, *б*.

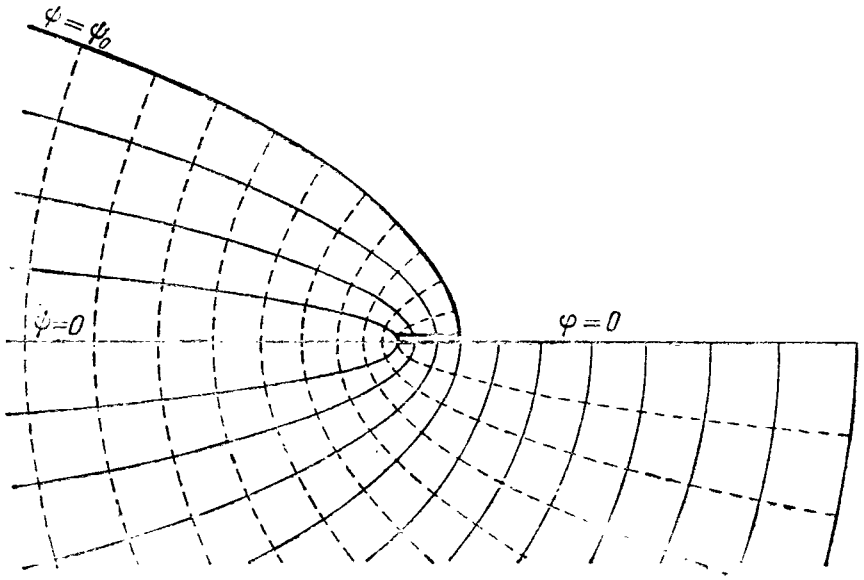
Возвращаясь к уравнению свободной поверхности (10.3), возьмем на ней две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и подставим их соответственно в уравнение (10.3). Вычитая затем почленно получен-

ные тождества, найдем для расхода выражение

$$Q = -k\frac{y_2^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)}.$$

Совершенно такая же формула для расхода получается в гидравлической теории установившегося движения (см. главу X), где ее принято называть формулой Дюпюи.

§ 11. Горизонтальная дрена при отсутствии водоупора. Изолинии грунтового потока. Этот случай получается из только что



Фиг. 46.

рассмотренного, если к области движения, выбранной нами в § 10, присоединить нижнюю полуплоскость (фиг. 46). Все линии тока являются софокусными параболами. Для их построения нужно давать ψ значения от ψ_0 до $-\infty$.

Помимо линий тока и линий равного потенциала, представляют интерес линии равного давления или изобары грунтового потока. Чтобы построить семейство изобар, вспомним зависимость между потенциалом скорости и давлением

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right).$$

Ее можно переписать в виде

$$\frac{\varphi}{k} + y = -\frac{p}{\rho g},$$

откуда видно, что графическое сложение (см. главу XI, п. 6) эквипотенциалей и линий $y = \text{const}$ дает изобары.

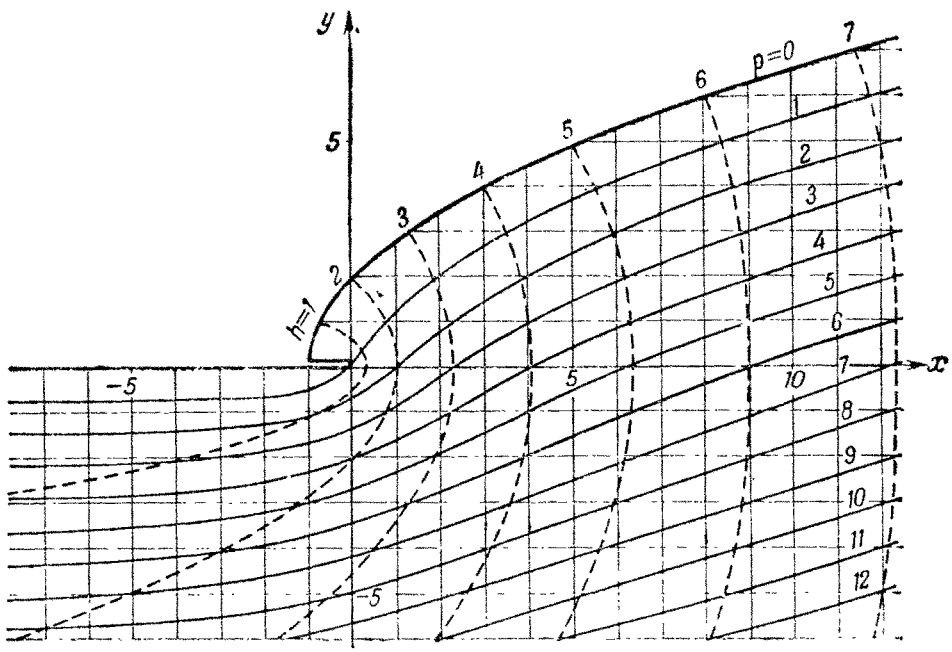
Для рассматриваемой задачи нетрудно найти уравнения изобар. Для этого достаточно исключить ψ из уравнений (10.4) и решить относительно φ получающееся уравнение четвертой степени. Для величины $\varphi + ky$, пропорциональной давлению, будем иметь:

$$\varphi + ky = ky \pm \sqrt{-kq\,(x \mp \sqrt{x^2+y^2})} \qquad (q = \psi_0).$$

Приравнивая $\varphi + ky$ постоянной C и избавляясь от иррациональностей, получим для изобар уравнение кривой четвертого порядка

$$k^2q^2y^2 = (C - ky)^2\,[(C - ky)^2 + 2kqx].$$

На фиг. 47 построено семейство изобар (сплошные линии) с помощью графического сложения линий $h = \text{const}$ (пунктирные линии) и горизонтальных прямых $y = \text{const}$. (О графическом сложении см. гл. XI.)



Фиг. 47.

Помимо ортогональной сетки, образованной семейством линий тока и линий равного потенциала, принято еще рассматривать семейства *изовел* или *изотах*, т. е. линий равной скорости, и *изоклин*, т. е. линий, вдоль которых вектор скорости имеет одно и то же направление. Сетки изотах, как указал Н. Н. Павловский, полезны для расчета *суффозии*, т. е. явления выноса мелких частиц грунта, которое в ряде случаев может приводить к авариям плотин.

Возьмем логарифм комплексной скорости и разделим в нем действительную и мнимую части

$$\ln w = \ln|w| + i\arg w = \ln V - i\vartheta$$

(V — величина скорости, ϑ — угол между вектором скорости и осью абсцисс). Так как действительная и мнимая части $\ln w$ являются гармоническими функциями, то линии

$$\ln V = \text{const}, \qquad \vartheta = \text{const}$$

образуют ортогональные семейства.

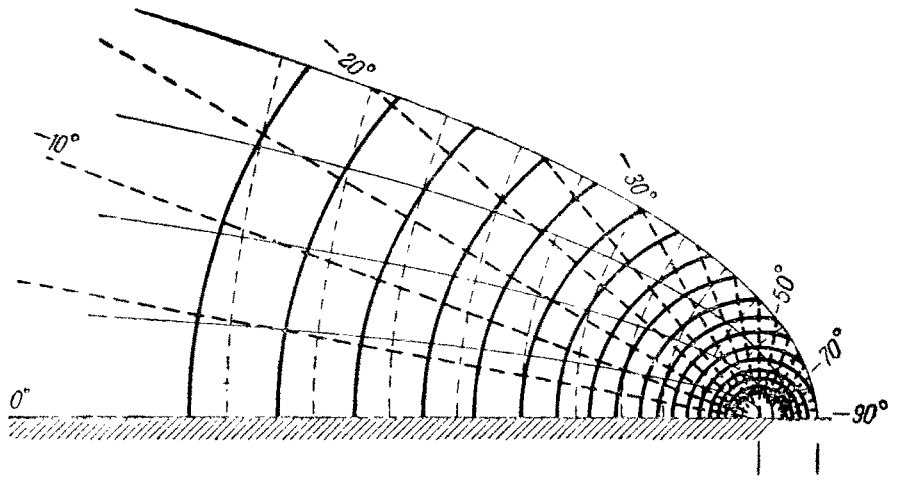
Для рассматриваемого нами простейшего примера нетрудно найти уравнения изоклин и изотах. Действительно, имеем на основании (10.1) и (10.2):

$$\omega = \sqrt{-2k\psi_0 z}, \qquad w = \frac{d\omega}{dz} = \sqrt{\frac{k\psi_0}{-2z}}.$$

Отсюда логарифм комплексной скорости равен

$$\ln w = \ln\sqrt{-\frac{k\psi_0}{2}} - \frac{1}{2}\left[\ln|z| + i\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right].$$

Отсюда видно, что изотахи суть концентрические окружности $r = \text{const}$ с центром в фокусе парабол, изоклины — лучи, исходящие из фокуса (фиг. 48).



Фиг. 48.

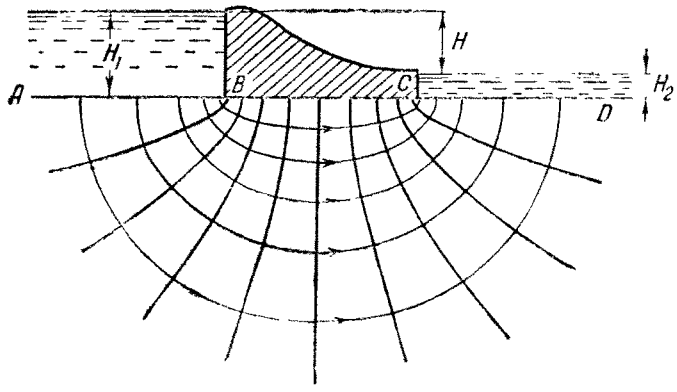
Величина скорости равна коэффициенту фильтрации вдоль окружности, которая касается свободной поверхности (в месте подхода этой поверхности к отрезку дренажа).

§ 12. Плоский флютбет в слое бесконечной глубины. Рассмотрим теперь простейший пример напорного движения грунтовых

вод под гидротехническим сооружением — обтекание *плоского флютбета* [9] в грунте бесконечной глубины (фиг. 49).

В этом случае можно построить решение по особенностям комплексной скорости $w = u - iv$, рассматриваемой как функция от z.

В самом деле, на отрезках AB и CD (фиг. 49) мы имеем $u = 0$, вдоль флютбета BC имеем $v = 0$; другими словами, w принимает действительное значение на отрезке BC, т. е. при $-b < x < b$, и чисто мнимые значения для $|x| > b$.



Фиг. 49.

Рассмотрим функцию $\sqrt{b-z}$. Она действительна при $z = x < b$ и имеет чисто мнимое значение при $z = x > b$. Функция $\sqrt{b+z}$ действительна при $z = x > -b$ и чисто мнима при $z = x < -b$. Поэтому функция $\sqrt{b^2 - z^2}$, принимая действительные значения на отрезке $(-b, b)$, является чисто мнимой вне этого отрезка на действительной оси. Мы должны поставить естественное в данной задаче условие — обращения скорости в нуль на бесконечности. Тогда за w может быть принята функция

$$w = \frac{M}{\sqrt{(b-z)(b+z)}} = \frac{M}{\sqrt{b^2 - z^2}}, \tag{12.1}$$

где M — некоторая постоянная.

Выражение w, как нетрудно видеть, удовлетворяет условиям: $v = 0$ при $|x| < b$ и $u = 0$ при $|x| > b$. Но это не единственная функция, удовлетворяющая данным условиям. Так, можно было бы выражение (12.1) умножить на рациональную функцию с действительными коэффициентами, в которой степень числителя не превышает степени знаменателя.

Например, можно взять за w функцию

$$\frac{M(z-c)^n}{(z-a)^m \sqrt{b^2 - z^2}}, \tag{12.2}$$

где m и n — целые числа, причем $n \leqslant m$.

Однако функция (12.2) будет иметь дополнительные особенности в точках a и c; если же, например, $a=b$, то при $z=b$ получается более сложная особенность, чем это отвечает нашей задаче: в то время как вектор скорости в этой точке (фиг. 49) должен поворачиваться на прямой угол, по формуле (2.2) он поворачивается на угол $\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

Таким образом, чтобы задача была определенной с математической точки зрения, нужно задаться порядком бесконечности функции в особой точке.

Если считать $-b<a<b$, то формула (12.2) дает функцию, имеющую особую точку при $z=a$, на флютбете. При $n=0$, $m=1$ эта особая точка — источник или сток. Это замечание мы используем ниже, при решении задачи о дренажной трубе под флютбетом (§ 14 настоящей главы).

Установив для нашего течения формулу (12.1), мы должны определить значение постоянной M. Для этого обратимся к комплексному потенциалу. Интегрируя уравнение

$$w=\frac{d\omega}{dz}=\frac{M}{\sqrt{b^2-z^2}},$$

найдем:

$$\omega=\varphi+i\psi=M\arcsin\frac{z}{b}+N. \tag{12.3}$$

Примем вдоль флютбета $\psi=0$.

Перепишем формулу (1.2), выражающую зависимость между потенциалом скорости и давлением, в таком виде:

$$\varphi=-k\left[\frac{p}{\rho g}+(y-H_2)\right]. \tag{12.4}$$

Произвольная постоянная C_1 выбрана так, чтобы значение φ вдоль нижнего бьефа было равно нулю. Атмосферное давление считается равным нулю. Вдоль границы верхнего бьефа имеем:

$$p=\rho g H_1.$$

Поэтому вдоль AB, учитывая, что $y=0$ вдоль верхнего бьефа, получим:

$$\varphi=-k(H_1-H_2).$$

Для разности H_1-H_2, называемой *действующим напором*, принято обозначение H:

$$H=H_1-H_2.$$

С помощью этой величины условие на границе верхнего бьефа запишем окончательно в виде

$$\varphi=-kH.$$

Теперь, полагая в (12.3) $z = \pm b$ и принимая во внимание, что в этих точках $\psi = 0$, а φ соответственно равно 0 и $-kH$, найдем, что

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \arcsin \frac{z}{b} - \frac{kH}{2} = -\frac{kH}{\pi} \arccos \frac{z}{b}. \tag{12.5}$$

Отсюда для z будем иметь:

$$z = b \cos \frac{\pi \omega}{kH}. \tag{12.6}$$

Разделяя здесь действительную и мнимую части, получим:

$$x = b \cos \tilde{\varphi} \operatorname{ch} \tilde{\psi}, \qquad v = -b \sin \tilde{\varphi} \operatorname{sh} \tilde{\psi}, \tag{12.7}$$

где принято

$$\tilde{\varphi} = \frac{\pi \varphi}{kH}, \qquad \tilde{\psi} = \frac{\pi \psi}{kH}. \tag{12.8}$$

Давая $\tilde{\psi}$ постоянное значение $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1$, получим линии тока — эллипсы с фокусами в точках $\pm b$:

$$\frac{x^2}{b^2 \operatorname{ch}^2 \tilde{\psi}_1} + \frac{y^2}{b^2 \operatorname{sh}^2 \tilde{\psi}_1} = 1. \tag{12.9}$$

При $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1$ получим эквипотенциальные линии — софокусные гиперболы

$$\frac{x^2}{b^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_1} - \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \tilde{\varphi}_1} = 1. \tag{12.10}$$

На фиг. 49 построены линии тока и линии равного потенциала. По их густоте можно судить о величинах средних скоростей.

Для вычисления точного значения скорости в любой точке $z = x + iy$ служит формула

$$w = u - iv = \frac{kH}{\pi \sqrt{b^2 - z^2}}. \tag{12.11}$$

В частности, найдем распределение скоростей вдоль флютбета (фиг. 50):

$$u = \frac{kH}{\pi \sqrt{b^2 - x^2}}$$

и вдоль границ верхнего и нижнего бьефов [знак (—) — для верхнего, знак (+) — для нижнего бьефа]:

$$v = \mp \frac{kH}{\pi \sqrt{x^2 - b^2}}.$$

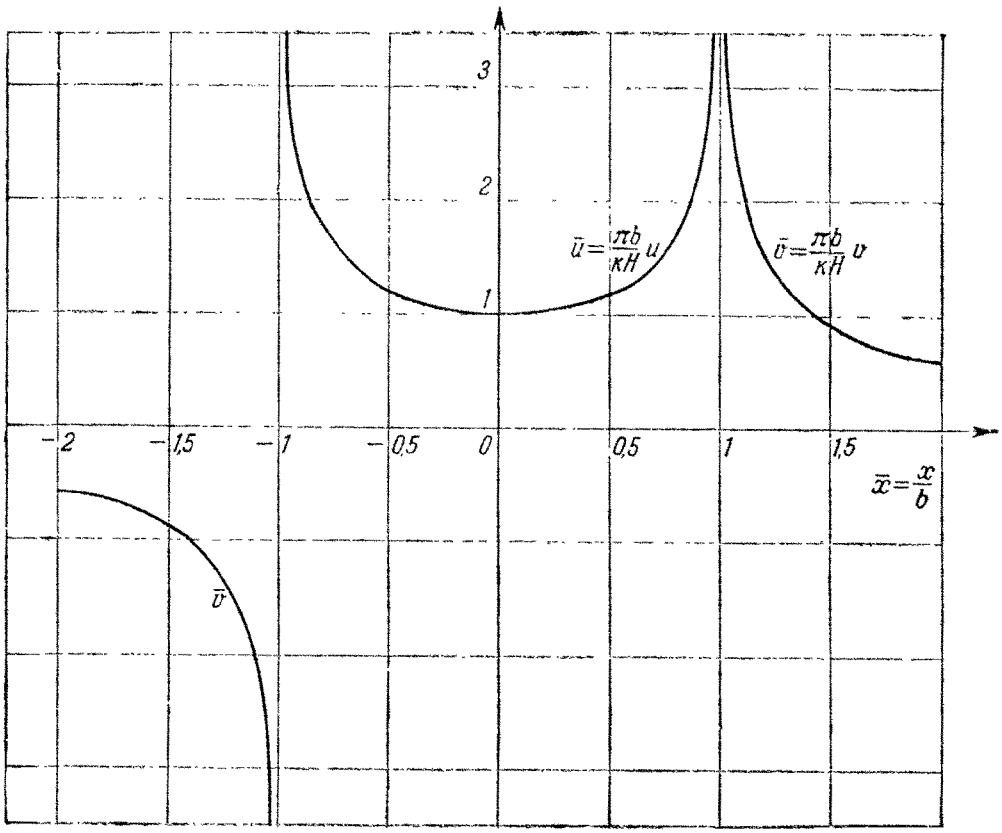
Отделение действительной части от мнимой в формуле для w дает величины составляющих скорости u, v в любой точке (x, y) об-

ласти движения:

$$u = \frac{kH}{\pi\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2} + b^2 - x^2 + y^2}}{\sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}},$$

$$v = \mp \frac{kH}{\pi\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2} - b^2 + x^2 - y^2}}{\sqrt{(b^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}},$$

причем верхний знак имеет место для $x < 0$, нижний для $x > 0$.



Фиг. 50.

Важным элементом движения является давление вдоль основания гидротехнического сооружения. В нашем примере давление с точностью до постоянного слагаемого совпадает с напором вдоль флютбета. Так как вдоль последнего $\psi = 0$, то получаем зависимость между x и φ [из (12.6)] в виде

$$x = b \cos \frac{\pi\varphi}{kH} = b \cos \frac{\pi h}{H},$$

откуда

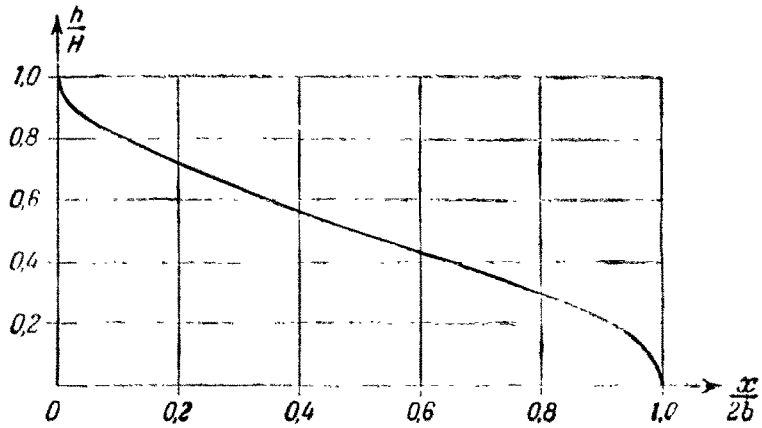
$$h = \frac{H}{\pi} \arccos \frac{x}{b}.$$

Так как вдоль флютбета $y = 0$, то давление пропорционально h:

$$p = \rho g h = \frac{\rho g H}{\pi} \arccos \frac{x}{b}.$$

На фиг. 51 представлено распределение напора вдоль флютбета.

Представляет интерес вычисление расхода ψ_0 через отрезок нижнего бьефа, от точки $x = b$ до точки $x = x_0$. Для его подсчета можно



Фиг. 51.

воспользоваться первым из уравнений (12.7), положив в нем $\varphi = 0$, $x = x_0$. Тогда получим:

$$\psi_0 = \frac{kH}{\pi} \operatorname{arch} \frac{x_0}{b} = \frac{kH}{\pi} \ln \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - b^2}}{b}. \qquad (12.12)$$

При удалении x_0 на бесконечность расход ψ_0 становится бесконечно большим. Мы увидим дальше, что для проницаемого слоя конечной глубины полный расход получается конечным.

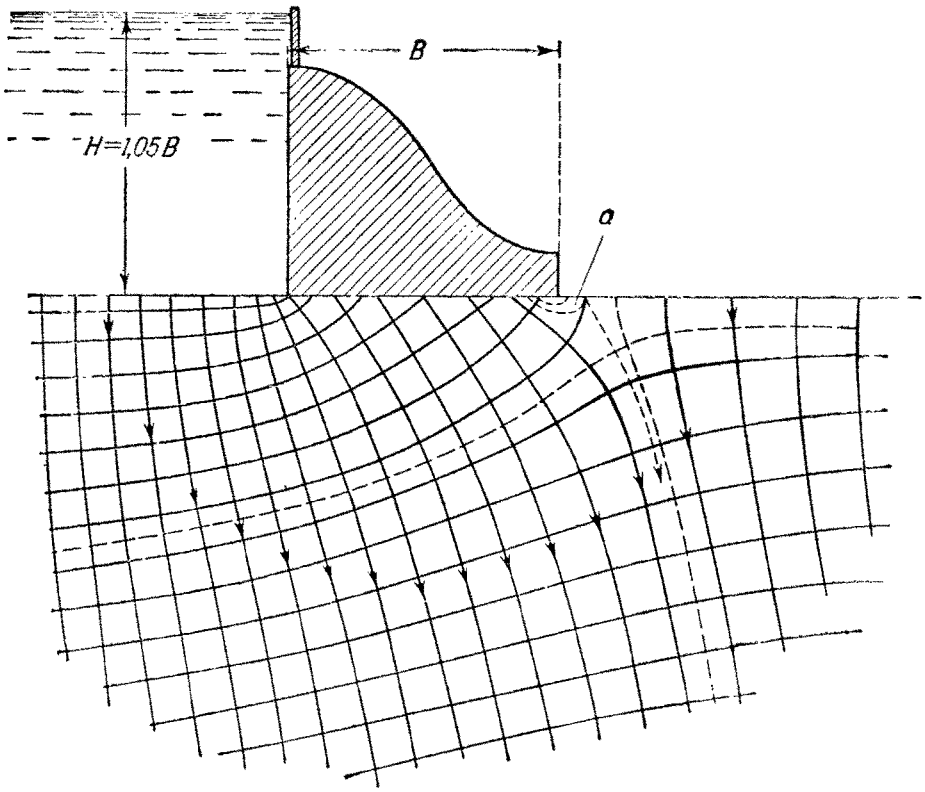
В § 9 настоящей главы мы ввели силовую функцию V для вектора S равнодействующей сил, действующих на частицы грунта:

$$V = -\gamma(h + \alpha y), \quad \alpha = n\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right).$$

На фиг. 52 дано построение линий $V = \text{const}$ для плоского флютбета. Отметим, что изобары в этом примере, если принять $\alpha = 1$, явились бы линиями, симметричными с линиями $V = C$ относительно вертикальной оси, проходящей через середину флютбета (или, иначе, изобары совпадали бы с линиями $V = C$, если бы мы поменяли местами верхний и нижний бьефы); при $\alpha \neq 1$ изобары были бы несколько деформированы по сравнению с линиями уровня.

На той же фиг. 52 построены линии $U = \text{const}$, вдоль которых направлен вектор S. При наложении этих семейств друг на друга получилась ортогональная сетка.

Из рассмотрения фиг. 52 видно, что вектор S всюду направлен вниз, за исключением области возле нижнего бьефа, где вертикальная составляющая этого вектора направлена вверх. Здесь возможно выпирание грунта и вынос частиц вверх.



Фиг. 52.

Замечание 1. Постоянную C_1 во второй из формул (1.2) можно выбрать иначе. Можно, например, поставить условие, чтобы значения потенциала скорости вдоль верхнего и нижнего бьефов были равны по величине, но противоположны по знаку. Тогда получим:

$$C_1 = k\frac{H_1+H_2}{2},\quad \varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g}+y-\frac{H_1+H_2}{2}\right).$$

Значения φ вдоль верхнего и нижнего бьефов соответственно будут:

$$\varphi_1 = -k\frac{H_1-H_2}{2} = -\frac{kH}{2},\qquad \varphi_2 = k\frac{H_1-H_2}{2} = \frac{kH}{2}.$$

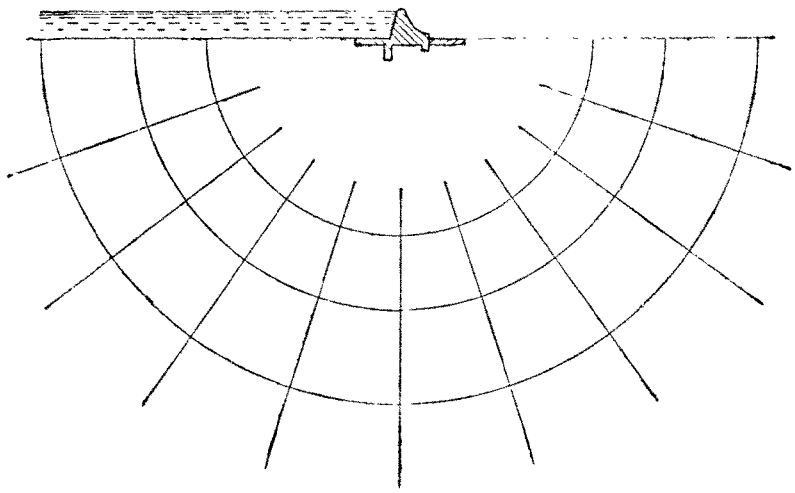
Комплексный потенциал будет связан с z зависимостью

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{kH}{\pi}\arcsin\frac{z}{b}. \qquad (12.13)$$

Замечание 2. Линии тока непосредственно под гидротехническим сооружением зависят от формы подземного контура этого соору-

жения. Но по мере удаления в глубину слоя и в обе стороны от основания сооружения это влияние будет все меньше. Линии тока становятся близкими к полуокружностям.

Иначе говоря, при удалении в глубь водопроницаемого слоя на достаточно большое расстояние от сооружения можно считать размеры последнего исчезающе малыми (фиг. 53). Поэтому условия на бесконечности будут для действительного контура такими же, как



Фиг. 53.

для «точечного флютбета», т. е. такого флютбета, для которого $b = 0$. Для этого случая формула (12.11) дает:

$$w = u - iv = \frac{kH}{\pi i z} \tag{12.14}$$

(мы берем i со знаком плюс, чтобы получить положительные значения составляющей скорости u в нижней полуплоскости).

Очевидно, что комплексный потенциал «точечного флютбета» будет:

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{kH}{\pi i} \ln z + C. \tag{12.15}$$

Другими словами, точечный вихрь интенсивности

$$\Gamma = 2kH$$

дает схему течения на далеких расстояниях от сооружения, а именно, начиная с того места, где линии тока практически начинают совпадать с полуокружностями (что будет для $r > 2L$, где L — ширина сооружения).

Замечание 3. В гидродинамике рассматривается задача о циркуляционном обтекании прямолинейного отрезка (фиг. 54). Если длина

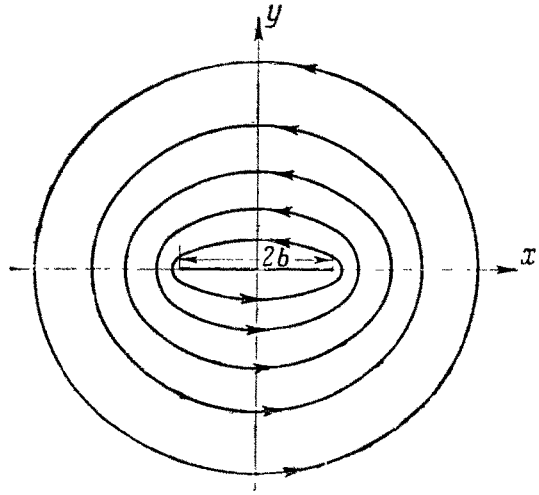
отрезка равна $2b$, величина циркуляции Γ, то комплексная скорость и комплексный потенциал даются выражениями

$$w = u - iv = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - z^2}},$$

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arcsin \frac{z}{b} + C.$$

Сравнивая эти выражения с (12.11) и (12.13), полученными для плоского флютбета, видим, что одно движение сводится к другому, если принять

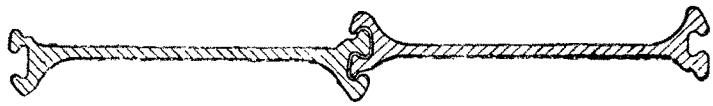
$$\frac{\Gamma}{2} = kH.$$



Фиг. 54.

§ 13. Шпунт в проницаемом грунте бесконечной глубины. Для уменьшения давления на плотину и уменьшения выходных скоростей движения под основанием гидротехнических сооружений устраивают шпунтовые ряды обычно из металлических фигурных пластин. Для того чтобы между шпунтинами не было щелей, им придают особую форму (на фиг. 55 дан пример профиля двух шпунтин).

Если в задаче, указанной в конце предыдущего параграфа, поменять ролями x и y, или, иначе, повернуть чертеж (фиг. 54) на 90°,


Фиг. 55.

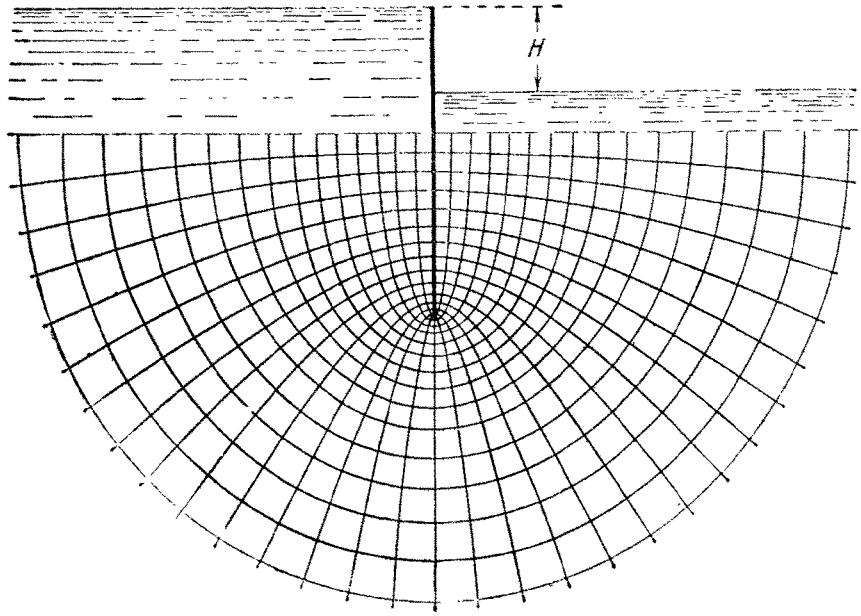
то получим другое движение, представленное на фиг. 56. На ней изображен вертикальный отрезок длины l, который обтекается грунтовой водой под влиянием разности напоров H.

Комплексная скорость и комплексный потенциал здесь имеют вид

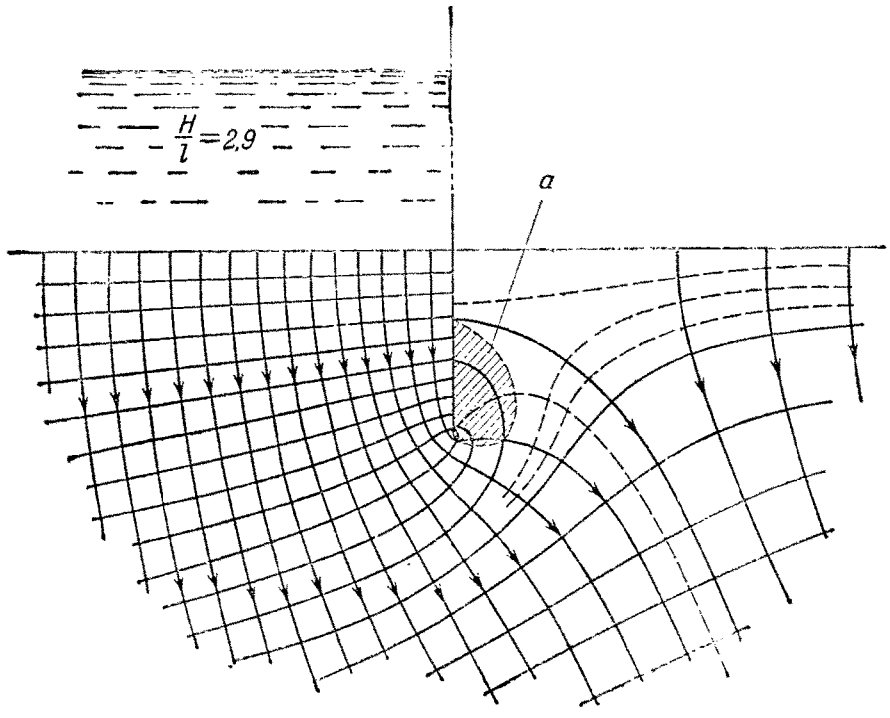
$$w = \pm \frac{kHi}{\pi} \frac{1}{\sqrt{l^2 + z^2}},$$

$$\omega = \pm \frac{kHi}{\pi} \ln (z + \sqrt{z^2 + l^2}) + C.$$

Знак плюс берется для правой части чертежа.



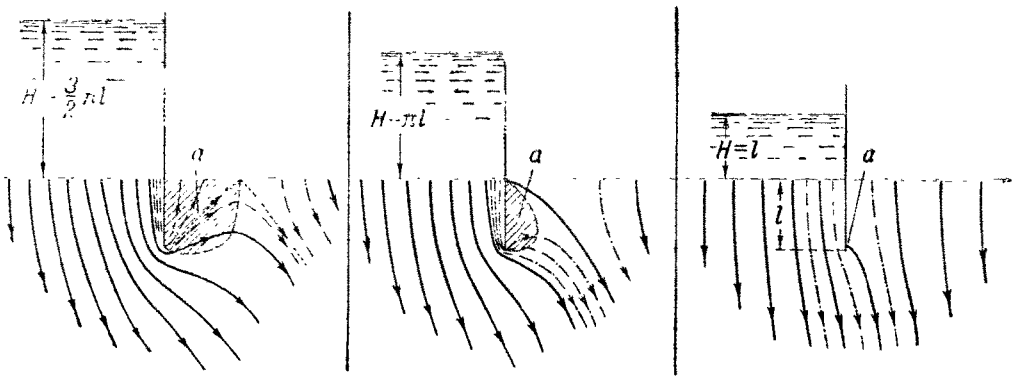
Фиг. 56.



Фиг. 57.

Линии тока суть половины эллипсов, эквипотенциали — ортогональные к ним гиперболы. На фиг. 56 построена сетка движения.

На фиг. 57 построены линии $V = \text{const}$ и $U = \text{const}$, подобно тому как это сделано в § 12 для случая плоского флютбета. Из этой фигуры видно, что за шпунтом имеется область, обозначенная буквой a, внутри которой сила S имеет вертикальную составляющую, направленную кверху. В этой области частицы грунта могут всплывать [4]. На фиг. 58 представлены три случая, соответствующие трем значениям отношения H к l. В последнем из них, для $H = l$, область a очень мала, так что ее трудно было поместить на рисунке — положение ее указано стрелкой. Однако такая область за бесконечно тонким шпунтом всегда должна существовать.



Фиг. 58.

Можно поставить задачу: найти такую глубину l забивки шпунта, чтобы вдоль границы нижнего бьефа вертикальная составляющая S_y не была отрицательной. Для решения этой задачи нужно иметь в виду, что вдоль границы нижнего водоема

$$u = 0, \quad v = \frac{kH}{\pi \sqrt{l^2 + x^2}}.$$

Наибольшее значение вертикальной составляющей скорости равно $\frac{kH}{\pi l}$, поэтому для точки выхода

$$S_y = \frac{\gamma H}{\pi l} - n(\gamma_1 - \gamma).$$

Если мы хотим, чтобы в этой точке выполнялось неравенство

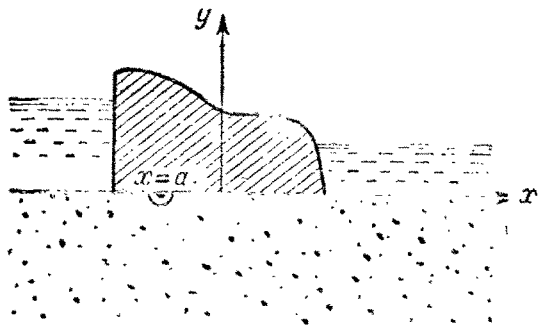
$$S_y \leqslant 0,$$

то должны взять длину шпунта не меньше, чем

$$l_1 = \frac{\gamma H}{\pi n (\gamma_1 - \gamma)}.$$

Такая длина достаточна для того, чтобы вдоль границы нижнего бьефа S_y была направлена внутрь грунта, однако всегда за шпунтом останется область, в которой сила S направлена кверху (фиг. 58).

§ 14. Флютбет с дренажным отверстием. Иногда под флютбетами устраивают отверстия для уменьшения давления. Предположим, что имеется труба в форме полуцилиндра, помещенного непосредственно под флютбетом (фиг. 59). Пусть центр трубы находится в точке $x = a$.

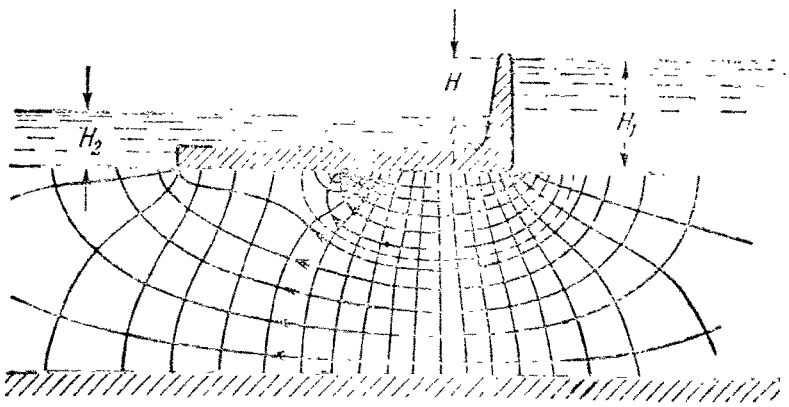


Фиг. 59.

Согласно замечанию, сделанному в § 3, мы можем искать решение в виде

$$w = u - iv = \frac{kH}{\pi \sqrt{b^2 - z^2}} + \frac{M}{(z-a)\sqrt{b^2 - z^2}}, \qquad (14.1)$$

ибо каждое из слагаемых правой части удовлетворяет граничным условиям для w, а второе слагаемое дает особенность типа стока в точке $z = a$.



Фиг. 60.

Если в точке $z = a$ имеется сток интенсивности Q', то w должно иметь вид

$$w = -\frac{Q'}{2\pi}\ln(z-a) + F(z),$$

где $F(z)$ — голоморфная функция в точке $z = a$. При этом

$$Q' = 2Q,$$

где Q — дебит нашей трубы, рассчитанный на единицу длины трубы. Выражение

$$-\frac{Q'}{2\pi} = -\frac{Q}{\pi}$$

является вычетом $w(z)$, который можно вычислить как предел

$$\lim_{z \to a} [(z - a)\, w(z)] = \frac{M}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Отсюда находим:

$$M = -\frac{Q}{\pi} \sqrt{b^2 - a^2}$$

и

$$w = \frac{kH}{\pi \sqrt{b^2 - z^2}} \left[1 - \frac{Q \sqrt{b^2 - a^2}}{kH (z - a)} \right].$$

На фиг. 60 дана гидродинамическая сетка для $a = 0$ [9]. Следует подчеркнуть, что линии тока этой фигуры должны быть ортогональны к прямолинейным границам водоемов, а линии равного потенциала — к непроницаемым границам.

Более сложные схемы рассмотрены в работе Н. Т. Мелещенко [10] и в книге В. И. Аравина и С. Н. Нумерова (см. литературу к гл. I [18]).

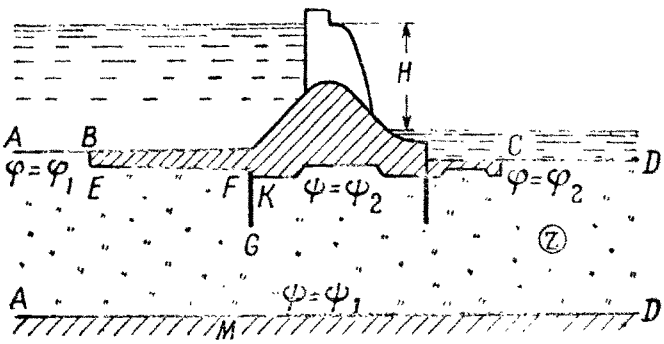
ГЛАВА III

НАПОРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ

А. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧАХ О НАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

§ 1. Постановка задачи (Н. Н. Павловский). В 1922 г. вышла в свет книга Н. Н. Павловского [1], в которой он дал полную математическую теорию напорного движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями, т. е. под плотинами, шлюзами, перепадами, водоспусками и т. п. Н. Н. Павловский подверг исследованию большое количество задач, для многих из которых дал расчетные формулы и вспомогательные графики. Ряд советских ученых продолжил и дополнил эти исследования.

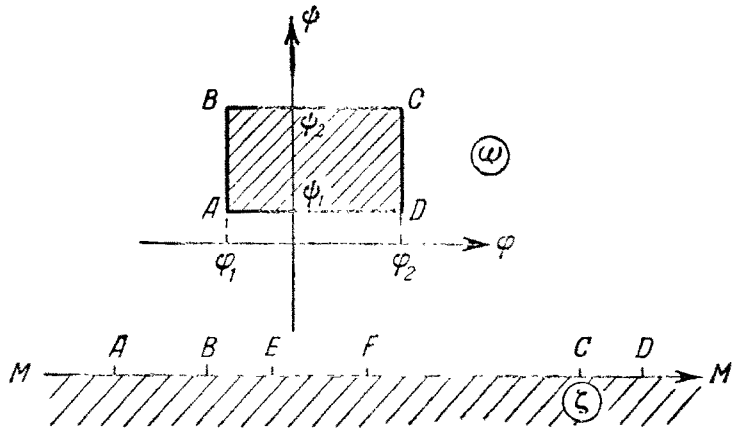
Н. Н. Павловским рассмотрена общая задача: контур основания гидротехнического сооружения и граница водоупора состоят из отрезков прямых линий, границы между грунтом и верхним и нижним



Фиг. 61.

бьефами также прямолинейные (фиг. 61). Другими словами, область движения z представляет многоугольник. На плоскости комплексного потенциала ω также получается многоугольник, именно прямоугольник (фиг. 62; вершины прямоугольника обозначены теми же буквами, что и вершины области движения).

Введем вспомогательную комплексную переменную ζ — ее называют иногда *параметрической переменной*, — на верхнюю или нижнюю

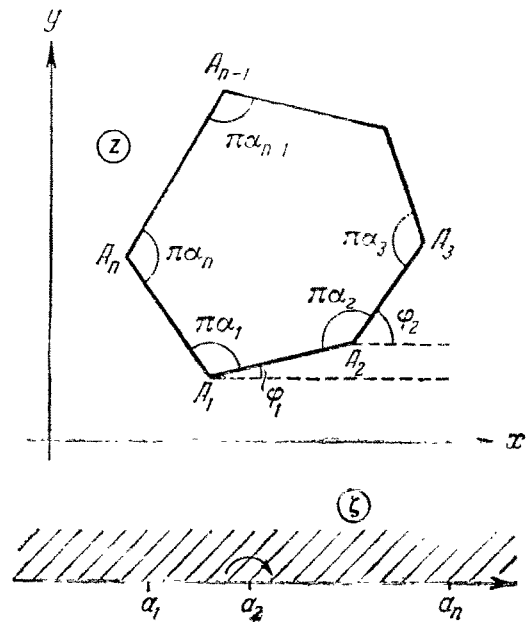


Фиг. 62.

полуплоскость которой будем отображать две области: область функции z и область функции $\omega = \varphi + i\psi$. Имея $z = F_1(\zeta)$, $\omega = F_2(\zeta)$, сможем найти все элементы движения; например, получим скорость с помощью формулы

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{F_2'(\zeta)}{F_1'(\zeta)}. \qquad (1.1)$$

Конформное отображение многоугольника на полуплоскость производится с помощью формулы Кристоффеля-Шварца, которую мы сейчас рассмотрим.



Фиг. 63.

§ 2. Конформное отображение многоугольника на полуплоскость. Пусть имеем многоугольник с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ на плоскости z (фиг. 63). Отобразим его на верхнюю полуплоскость плоскости ζ. Предположим, что вершины многоугольника перешли в точки действительной оси с абсциссами соответственно $\zeta = a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Формула Кристоффеля-Шварца имеет вид [26]

$$z = M \int (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + N. \qquad (2.1)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — деленные на π величины углов многоугольника.

Проверим справедливость формулы (2.1) и укажем способ определения постоянных M, N, $a_1, \ldots, a_n$.

Начнем с рассмотрения отрезка A_1A_2 и перепишем подинтегральную функцию (2.1) так, чтобы она была действительна и положительна на отрезке A_1A_2 плоскости ζ. Для этого достаточно заменить разности $\zeta - a_2, \ldots, \zeta - a_n$ разностями $a_2 - \zeta, \ldots, a_n - \zeta$, заменив постоянную M на новую неизвестную постоянную M_1. Можем написать, заменив неопределенный интеграл (2.1) определенным, в пределах от a_1 до ζ:

$$z = M_1 \int_{a_1}^{\zeta} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} \ldots (a_n - \zeta)^{\alpha_n - 1} d\zeta + z_1. \quad (2.2)$$

Здесь z_1 — комплексная координата вершины многоугольника A_1.

Обозначим подинтегральную функцию (2.2) через $\Phi_1(\zeta)$:

$$\Phi_1(\zeta) = (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} \ldots (a_n - \zeta)^{\alpha_n - 1}$$

и рассмотрим дифференциал z вдоль отрезка A_1A_2:

$$dz = M_1 \Phi_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Пусть отрезок A_1A_2 составляет угол φ_1 с осью абсцисс. Положив

$$M_1 = \rho e^{i\varphi_1}, \quad (2.3)$$

где ρ — положительная постоянная, получим:

$$z = \rho e^{i\varphi_1} \int_{a_1}^{\zeta} \Phi_1(\zeta)\, d\zeta + z_1, \quad dz = \rho e^{i\varphi_1} \Phi_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Мы видим, что так как $\Phi_1(\zeta) > 0$ вдоль A_1A_2, то dz действительно соответствует прямолинейному отрезку, составляющему угол φ_1 с осью абсцисс.

Придя в точку A_2, мы должны положить $\zeta = a_2$, $z = z_2$, где z_2 — координата вершины A_2. Принимая во внимание (2.3), получим из (2.2):

$$z_2 = \rho e^{i\varphi_1} \int_{a_1}^{a_2} \Phi_1(\zeta)\, d\zeta + z_1. \quad (2.4)$$

Обозначим длину стороны многоугольника A_1A_2 через l_{12}. Тогда можно написать:

$$z_2 - z_1 = l_{12} e^{i\varphi_1},$$

и последнее равенство по сокращении на $e^{i\varphi_1}$ даст:

$$l_{12} = \rho \int_{a_1}^{a_2} \Phi_1(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.5}$$

Отсюда можно было бы найти ρ, если бы были известны параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Перейдем теперь к отрезку A_2A_3. Для этого на плоскости ζ мы должны обойти точку $\zeta = a_2$ по полукругу в направлении часовой стрелки (фиг. 63). Величина $a_2 - \zeta$ станет теперь отрицательной, причем, если мы выбрали $\arg(a_2 - \zeta) = 0$ для $\zeta = \xi < a_2$, то после обхода точки $\zeta = a_2$ аргумент $a_2 - \zeta$ будет равен $-\pi$, и можно написать, что на отрезке A_2A_3

$$a_2 - \zeta = e^{-\pi i} |a_2 - \zeta| = (\zeta - a_2) e^{-\pi i}.$$

Множитель же $(a_2 - \zeta)^{\alpha_2 - 1}$ перейдет в

$$(\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} e^{-\pi i (\alpha_2 - 1)} = (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} e^{(\pi - \pi\alpha_2) i}.$$

Но угол $\pi - \pi\alpha_2$ есть угол поворота вектора $\overline{A_1A_2}$ при переходе его в положение вектора $\overline{A_2A_3}$.

Введя обозначения

$$\varphi_1 + \pi - \pi\alpha_2 = \varphi_2,$$

$$(\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} (a_3 - \zeta)^{\alpha_3 - 1} \ldots (a_n - \zeta)^{\alpha_n - 1} = \Phi_2(\zeta),$$

получим вместо (2.4):

$$z = \rho e^{i\varphi_1} \int_{a_1}^{a_2} \Phi_1(\zeta)\, d\zeta + \rho e^{i\varphi_1} \int_{a_2}^{\zeta} \Phi_1(\zeta)\, d\zeta + z_1 =$$

$$= z_2 - z_1 + \rho e^{i\varphi_1} e^{(\pi - \pi\alpha_2) i} \int_{a_2}^{\zeta} \Phi_2(\zeta)\, d\zeta + z_1$$

или

$$z = z_2 + \rho e^{i\varphi_2} \int_{a_2}^{\zeta} \Phi_2(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.6}$$

$\Phi_2(\zeta)$ принимает положительные значения вдоль A_2A_3. Обозначим через l_{23} длину стороны многоугольника A_2A_3. Тогда из последней формулы, полагая $\zeta = a_3$ в верхнем пределе интеграла, получим:

$$z_3 - z_2 = \rho e^{i\varphi_2} \int_{a_2}^{a_3} \Phi_2(\zeta)\, d\zeta.$$

Но $z_3 - z_2 = l_{23} e^{i\varphi_2}$, поэтому для l_{23} будем иметь уравнение

$$l_{23} = \rho \int_{a_2}^{a_3} \Phi_2(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.7}$$

Продолжая таким же образом дальше, получим уравнения, аналогичные (2.5) и (2.7), для других сторон многоугольника. Однако уравнения для двух последних сторон, $A_{n-1}A_n$ и A_nA_1, не будут независимыми от предыдущих. В самом деле, при заданных вершинах A_1 и A_{n-1} и заданных углах $\pi\alpha_1$ и $\pi\alpha_{n-1}$ в этих вершинах положение вершины A_n является вполне определенным, и, значит, равенства, относящиеся к сторонам $A_{n-1}A_n$ и A_nA_1, не дадут нам новых соотношений. Примем в качестве последнего из уравнений типа (2.5), (2.7) уравнение

$$l_{n-2,\,n-1} = \rho \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} \Phi_{n-2}(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.8}$$

где

$$\Phi_{n-2}(\zeta) = (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (\zeta - a_{n-2})^{\alpha_{n-2} - 1} (a_{n-1} - \zeta)^{\alpha_{n-1} - 1} (a_n - z)^{\alpha_n - 1}.$$

Формулы (2.5), (2.7), ..., (2.8) дают $n-2$ уравнений, содержащих $n+1$ параметров: ρ, a_1, a_2, ..., a_n. Следовательно, три из этих параметров остаются произвольными. Мы можем задать произвольно три из числа величин a_1, a_2, ..., a_n.

Это находится в соответствии с тем обстоятельством, что, совершая дробно-линейное преобразование с действительными коэффициентами

$$\zeta = \frac{\alpha\zeta_1 + \beta}{\gamma\zeta_1 + \delta}, \tag{2.9}$$

мы переводим полуплоскость ζ в полуплоскость ζ_1 с сохранением действительной оси; параметрами α, β, γ, δ, точнее отношением трех из них к четвертому, можно распорядиться так, чтобы три произвольные точки действительной оси ζ перевести в три заданные точки действительной оси плоскости ζ_1.

Нетрудно проверить, что подинтегральное выражение формулы (2.1) сохраняет свой вид, если мы от переменной ζ перейдем к переменной ζ_1 с помощью формулы (2.9). В самом деле, при этом получим соотношение вида

$$M_1 (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\, d\zeta = M_2 \frac{(\zeta_1 - b_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (\zeta_1 - b_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta_1}{(\gamma\zeta_1 + \delta)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n - n + 2}}.$$

Но по свойству углов многоугольника

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$$

и, следовательно, знаменатель правой части обращается в единицу.

Часто принимают в качестве трех специальных значений a_k значения 0, 1, ∞.

Отметим, что в формуле (2.1) переход к $a_n = \infty$ можно сделать, переписав эту формулу в виде

$$z = M_3 \int (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots \left(1 - \frac{\zeta}{a_n}\right)^{\alpha_n - 1} d\zeta + N;$$

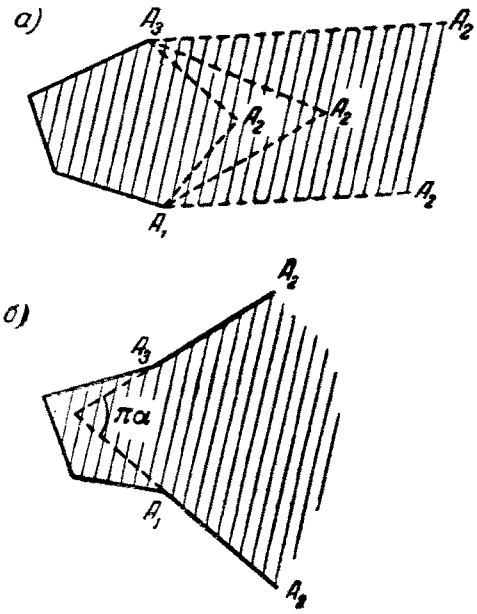
здесь $M_3 = M(-a_n)^{\alpha_n - 1}$.

Полагая $\frac{\zeta}{a_n} \to 0$ при $a_n \to \infty$, получим, что формула Кристоффеля-Шварца сохраняет свой вид, если одна из вершин многоугольника переводится в бесконечно удаленную точку плоскости ζ, причем соответствующий этой точке множитель в формуле (2.1) заменяется единицей.

Если какая-нибудь вершина, например A_2, удаляется на бесконечность так, что прилежащие к ней стороны становятся параллельными (фиг. 64, *а*), то нужно взять $\alpha_2 = 0$. При дальнейшем разворачивании сторон A_1A_2 и A_2A_3, когда они перестанут быть параллельными, но вершина A_2 будет бесконечно удаленной точкой (фиг. 64, *б*), угол $\pi\alpha_2$ следует считать отрицательным, а именно

$$\pi\alpha_2 = -\pi\alpha,$$

где $\pi\alpha$ — величина угла, образованного продолжением сторон A_1A_2 и A_3A_2.

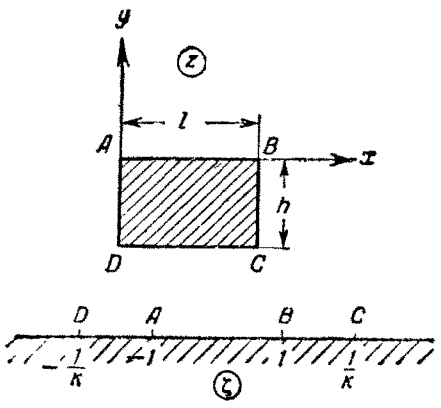


Фиг. 64.

Формула (2.1) справедлива и для многолистного многоугольника, т. е. расположенного на нескольких листах римановой поверхности [22, 23].

§ 3. Отображение прямоугольника на полуплоскость. Вследствие симметричности отображаемой фигуры (прямоугольник $ABCD$ на фиг. 65) удобно перевести две вершины — выберем вершины A и B — в точки $\zeta = \pm 1$ соответственно. Вершины C и D перейдут при этом в симметрично расположенные точки плоскости ζ, которые можно обозначить через $\pm\frac{1}{k}$, где k — некоторое число, меньшее единицы, подлежащее в дальнейшем определению. Вместо величин $\zeta - \frac{1}{k}$, $\zeta + \frac{1}{k}$ в формуле (2.1) можно взять $1 - k\zeta$, $1 + k\zeta$; вместо

$\zeta-1$, $\zeta+1$ возьмем $1-\zeta$, $1+\zeta$. Так как углы при вершинах у нас прямые, то все показатели α_s равны $\frac{1}{2}$ и $\alpha_s-1=-\frac{1}{2}$ $(s=1, 2, 3, 4)$.



Фиг. 65.

Формула Кристоффеля-Шварца примет вид

$$z=\frac{l}{2K}\int_{-1}^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \tag{3.1}$$

где

$$K=\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{3.2}$$

Вводя обозначение эллиптического интеграла первого рода

$$F(\varphi, k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

или полагая

$$\sin\varphi=\zeta,$$

$$F(\arcsin\zeta, k)=\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \tag{3.3}$$

можем написать:

$$z=\frac{l}{2K}(K+F(\arcsin\zeta, k)). \tag{3.4}$$

Если обозначить, как это принято, полный эллиптический интеграл первого рода при модуле $k'=\sqrt{1-k^2}$ через K', то получим соотношение

$$h=\frac{lK'}{2K}. \tag{3.5}$$

Если заданы длины l и h, то отсюда найдем:

$$\frac{K'}{2K}=\frac{h}{l}. \tag{3.6}$$

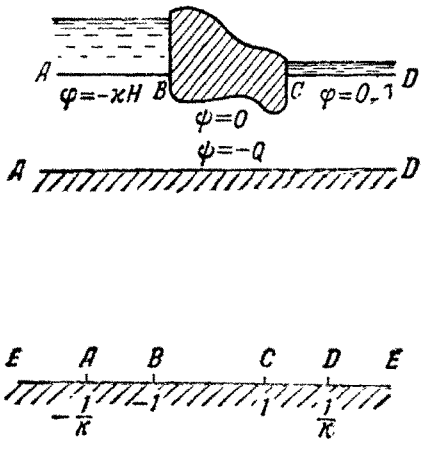
По специальным таблицам можно найти модуль k, зная отношение $\frac{K'}{K}$.

§ 4. Основной прямоугольник задач напорной фильтрации. Обращаясь к типовому случаю обтекания основания гидротехниче-

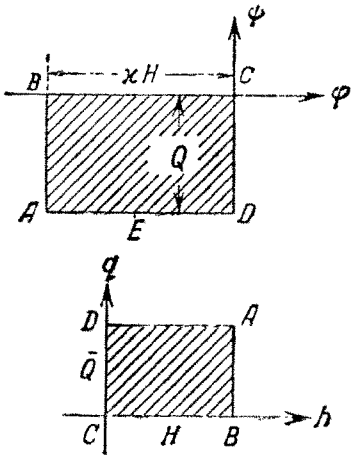
ского сооружения, изображенному на фиг. 66, найдем условия на границах области движения для функций φ и ψ или соответственно пропорциональных им *напора* h и функции q:

$$h = -\frac{\varphi}{\varkappa}, \quad q = -\frac{\psi}{\varkappa}.$$

Будем называть q *приведенным расходом*. Значения φ мы выберем так, как это сделано нами в § 12 главы II для обтекания плоского



Фиг. 66.



Фиг. 67.

флютбета, т. е. $\varphi = -\varkappa H$ по дну верхнего бьефа, $\varphi = 0$ по дну нижнего бьефа (фиг. 66). Вдоль основания сооружения примем $\psi = 0$, вдоль границы водоупора пусть

$$\psi = -Q \qquad (Q > 0).$$

Тогда для h и q получим соответственно:

$$\left.\begin{aligned} &h = H \text{ вдоль границы верхнего бьефа,}\\ &h = 0 \text{ вдоль границы нижнего бьефа,}\\ &q = 0 \text{ вдоль основания сооружения,}\\ &q = \overline{Q} = \frac{Q}{\varkappa} \text{ вдоль границы водоупора.} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

У нас $\overline{Q}$ будет величиной *приведенного расхода*, т. е. расхода при $\varkappa = 1$, рассчитанного на единицу длины плотины. Для получения действительного расхода нужно $\overline{Q}$ умножить на коэффициент фильтрации $\varkappa$.

При отображении на нижнюю полуплоскость (фиг. 66) прямоугольника $ABCD$ получим:

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \varphi + i\psi = -\frac{\varkappa H}{2K}[K - F(\arcsin\zeta,\ k)],\\ &h + iq = \frac{H}{2K}[K - F(\arcsin\zeta,\ k)]. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Обращение эллиптического интеграла

$$u = \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

есть *эллиптический синус*

$$\zeta = \operatorname{sn} u.$$

По формуле (4.2) получаем для ζ

$$\zeta = \operatorname{sn}\left(K + \frac{2K\omega}{\varkappa H}\right) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \tag{4.3}$$

где

$$u = \frac{2K\omega}{\varkappa H} \tag{4.4}$$

и $$\operatorname{cn} u = \sqrt{1-\operatorname{sn}^2 u}, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 u}.$$

Заменяя в (3.5) отрезок h на $\overline{Q}$ и l на H (фиг. 67), получим:

$$\overline{Q} = \frac{HK'}{2K}, \quad Q = \frac{\varkappa HK'}{2K}. \tag{4.5}$$

Если бы мы знали H и Q, то нашли бы k из соотношения

$$\frac{K'}{2K} = \frac{Q}{\varkappa H}.$$

Но обычно расход Q является неизвестным, модуль же k определяется из условия, что известны некоторые длины области z.

Если водоупор отсутствует, т. е. если он находится настолько глубоко, что можно считать грунт простирающимся вниз до бесконечности, то прямоугольник плоскости ω переходит в полуполосу. Можно получить отображение полуполосы на полуплоскость непосредственно, а можно положить $k = 0$ в предыдущих формулах и учесть, что при $k = 0$

$$K = \frac{\pi}{2}.$$

Эллиптический интеграл первого рода при $k = 0$ дает $\arcsin\zeta$. Из уравнений (4.2) получаем:

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{\varkappa H}{\pi}\left(\arcsin\zeta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\varkappa H}{\pi}\arccos\zeta, \tag{4.6}$$

$$h + iq = \frac{H}{\pi}\arccos\zeta, \tag{4.7}$$

откуда

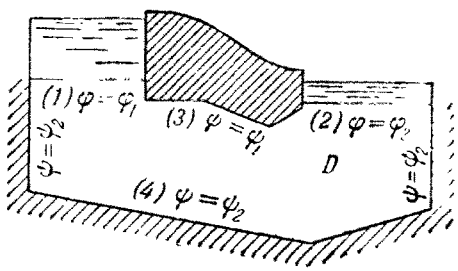
$$\zeta = \cos\frac{\pi\omega}{\varkappa H}. \tag{4.8}$$

§ 5. Теорема единственности. Задача о напорной фильтрации под гидротехническими сооружениями относится к числу так называемых *смешанных задач теории потенциала*, т. е. таких задач,

в которых на различных участках контура задаются поочередно φ ($\varphi = \text{const}$ на границах бассейнов) и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ на непроницаемых границах$\right)$, где φ — потенциал скорости. Как известно, если на всем контуре области задана функция φ и требуется найти значение φ внутри области, то задача называется задачей Дирихле; если задано значение нормальной производной на контуре области $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то задача об отыскании функции φ внутри области называется задачей Неймана. В курсах анализа доказывается единственность решения задач Дирихле и Неймана при определенных условиях.

Н. Н. Павловский [1] исследовал вопрос о единственности решения задачи о напорной фильтрации под гидротехническими сооружениями.

Предположим сначала, что имеем движение в области, изображенной на фиг. 68. Эта область ограничена линиями, вдоль которых $\varphi = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$; вдоль последних $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. При этом для доказательства единственности решения такой задачи нет надобности предполагать границы прямолинейными — они могут быть криволинейными, удовлетворяющими условиям, которые обычно ставятся при рассмотрении задач Дирихле и Неймана [26].



Фиг. 68.

Рассмотрим сначала случай, когда фильтрация происходит в конечной области D, ограниченной линиями тока и линиями равного потенциала (фиг. 68).

Допустим, что существуют две гармонические функции, $\varphi(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$, удовлетворяющие условиям на границах: $\varphi = \text{const}$ на контурах (*1*) и (*2*), $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ на контурах (*3*) и (*4*). Докажем, что $\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y)$.

Для этого составим разность

$$w = \varphi(x, y) - \varphi_1(x, y).$$

Напишем формулу Грина для двух функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, непрерывных в области D вместе с первыми и вторыми производными:

$$\int_D \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds - \int_D \int u\, \Delta v\, dx\, dy.$$

Здесь $\frac{\partial v}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к контуру C области.

Приняв $u = v = w$, получим:

$$\int_D \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \int_C w \frac{\partial w}{\partial n}\, ds - \int_D \int w\, \Delta w\, dx\, dy.$$

Так как $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 = \Delta w = 0$, то в правой части последнего равенства остается один контурный интеграл. Но и этот интеграл равен нулю, так как на границах (*1*) и (*2*) функция $w = 0$, а на границах (*3*), (*4*) ее нормальная производная равна нулю.

Поэтому остается равенство

$$\int_D \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = 0.$$

Интеграл от суммы квадратов может равняться нулю только в случае, если каждое слагаемое равно нулю:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что $w = c$, а так как на некоторых границах $w = 0$, то

$$w \equiv 0.$$

Этим и доказывается единственность решения смешанной задачи о фильтрации указанного вида в конечной области.

Если фильтрация происходит в водопроницаемом слое бесконечной глубины, то можно сначала ограничить область полуокружностью большого радиуса R, на которой $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ имеет порядок скорости (см. главу II, § 12), т. е. порядок $\frac{1}{R^2}$. Поэтому, так как $ds = R\, d\theta$, а функция φ порядка $\ln R$, получаем оценку

$$\int_{(R)} w \frac{\partial w}{\partial n}\, ds \approx \int_0^{\pi} \frac{\ln R}{R^2} R\, d\theta = \pi \frac{\ln R}{R} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

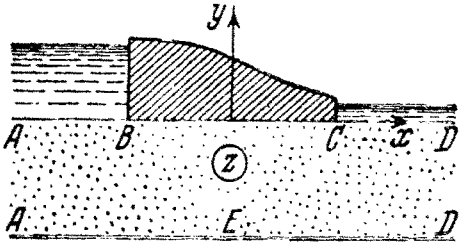
Следовательно, предыдущие заключения и здесь остаются в силе.

Для области, ограниченной водоупором, но простирающейся в стороны до бесконечности, теорема единственности также может быть получена предельным переходом от случая конечной области.

Б. ФИЛЬТРАЦИЯ ПОД ФЛЮТБЕТАМИ

§ 6. Плоский флютбет в слое конечной глубины. Теперь мы перейдем к рассмотрению отдельных групп задач о движении грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и начнем с задач об обтекании флютбетов. Простейшая задача такого рода — обтекание пло-

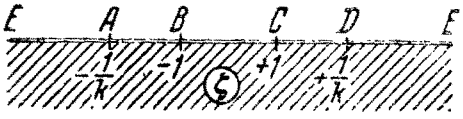
ского флютбета в грунте бесконечной глубины — рассмотрена у нас в § 12 главы II. Здесь мы рассмотрим более сложные случаи. Область движения — полоса (фиг. 69), которую нам нужно отобразить на полуплоскость ζ так, как это изображено на фиг. 69. С помощью формулы (2.1) получим:



$$z = M\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{1-k^2\zeta^2} = \frac{M}{2k}\ln\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}. \quad (6.1)$$

Пусть ширина флютбета BC равна $2l$. Тогда при $\zeta = \pm 1$ имеем $z = \pm l$ и

$$l = \frac{M}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}. \quad (6.2)$$



Фиг. 69.

Далее, обход точки $\zeta = \frac{1}{k}$ в положительном направлении в нижней полуплоскости соответствует переходу с отрезка CD плоскости z на отрезок DE, что даст для $\ln(1-k\zeta)$ приращение πi; следовательно, приращение z, которое мы обозначим через Δz, будет:

$$\Delta z = \frac{M}{2k}(-\pi i) = -\frac{M\pi i}{2k}.$$

M, как это видно из формулы (6.2), — действительное число; следовательно, мы получили для Δz чисто мнимое значение. Это соответствует изменению мнимой части z, т. е. ординаты y, со значения $y = 0$ на значение $y = -T$. Другими словами, $\Delta z = -Ti$ и

$$-Ti = -\frac{M\pi i}{2k},$$

откуда

$$M = \frac{2kT}{\pi}.$$

По формуле (6.2)

$$l = \frac{T}{\pi}\ln\frac{1+k}{1-k}.$$

Отсюда

$$\frac{1+k}{1-k} = e^{\frac{l\pi}{T}}, \qquad k = \operatorname{th}\frac{\pi l}{2T}. \quad (6.3)$$

В уравнении (4.3) положим на этот раз

$$\zeta = \operatorname{sn} u, \qquad u = \frac{2K\omega}{\varkappa H} + K;$$

тогда

$$z = \frac{T}{\pi}\ln\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta} = \frac{T}{\pi}\ln\frac{1+k\operatorname{sn} u}{1-k\operatorname{sn} u}. \quad (6.4)$$

Расход вычисляется по формулам (4.5)

$$Q = \frac{\varkappa HK'}{2K}, \qquad k = \operatorname{th}\frac{\pi l}{2T}. \tag{6.5}$$

Формула (6.4) дает зависимость z от комплексного потенциала. Обращая (6.4), получим:

$$k\zeta = \operatorname{th}\frac{\pi z}{2T}. \tag{6.6}$$

Если мы обратим внимание на выражение производной правой части полученного равенства

$$\left[\ln\frac{1+k\operatorname{sn}u}{1-k\operatorname{sn}u}\right]' = 2k\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u} \qquad (\operatorname{dn}u = \sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 u})$$

и, далее, выпишем разложение $\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$ в тригонометрический ряд [24]

$$\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u} = \frac{\pi}{kK}\left\{\frac{\cos\dfrac{\pi u}{2K}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi K'}{2K}} - \frac{\cos\dfrac{3\pi u}{2K}}{\operatorname{sh}\dfrac{3\pi K'}{2K}} + \frac{\cos\dfrac{5\pi u}{2K}}{\operatorname{sh}\dfrac{5\pi K'}{2K}} - \dots\right\},$$

то, интегрируя по u, получим z в виде ряда

$$z = \frac{4T}{\pi}\left\{\frac{\sin\dfrac{\pi u}{2K}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi K'}{2K}} - \frac{\sin\dfrac{3\pi u}{2K}}{3\operatorname{sh}\dfrac{3\pi K'}{2K}} + \frac{\sin\dfrac{5\pi u}{2K}}{5\operatorname{sh}\dfrac{5\pi K'}{2K}} - \dots\right\}.$$

Здесь $u = \dfrac{2K\omega}{\varkappa H} + K$; следовательно,

$$\frac{m\pi u}{2K} = \frac{m\pi\omega}{\varkappa H} + \frac{m\pi}{2}.$$

Так как у нас m нечетные, то

$$\sin\frac{m\pi u}{2K} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos\frac{m\pi\omega}{\varkappa H}$$

и

$$z = x + iy = \frac{4T}{\pi}\left\{\frac{\cos\dfrac{\pi\omega}{\varkappa H}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi K'}{2K}} + \frac{\cos\dfrac{3\pi\omega}{\varkappa H}}{3\operatorname{sh}\dfrac{3\pi K'}{2K}} + \frac{\cos\dfrac{5\pi\omega}{\varkappa H}}{5\operatorname{sh}\dfrac{5\pi K'}{2K}} + \dots\right\}. \tag{6.7}$$

Положим:

$$\frac{\pi\omega}{\varkappa H} = -\frac{\pi(h+iq)}{H},$$

$$\cos\frac{\pi}{H}(h+iq) = \cos\frac{\pi h}{H}\operatorname{ch}\frac{\pi q}{H} - i\sin\frac{\pi h}{H}\operatorname{sh}\frac{\pi q}{H}.$$

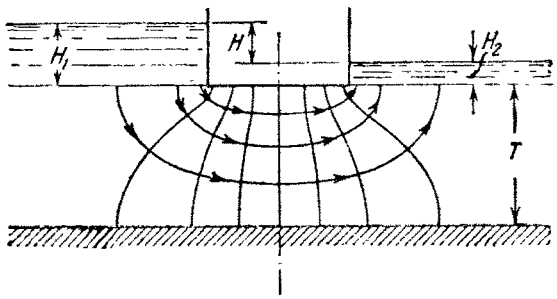
Отделяя в полученном ряде действительную часть от мнимой, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4T}{\pi}\left\{\frac{\cos\pi\bar{h}\,\operatorname{ch}\pi\bar{q}}{\operatorname{sh}\alpha}+\frac{\cos 3\pi\bar{h}\,\operatorname{ch}3\pi\bar{q}}{3\operatorname{sh}3\alpha}+\ldots\right\},\\ y &= -\frac{4T}{\pi}\left\{\frac{\sin\pi\bar{h}\,\operatorname{sh}\pi\bar{q}}{\operatorname{sh}\alpha}+\frac{\sin 3\pi\bar{h}\,\operatorname{sh}3\pi\bar{q}}{3\operatorname{sh}3\alpha}+\ldots\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

где

$$\bar{h}=\frac{h}{H},\qquad \bar{q}=\frac{q}{H},\qquad \alpha=\frac{\pi K'}{2K}.$$

По этим формулам можно строить сетку линий $q=\text{const}$ и $h=\text{const}$.



Фиг. 70.

Напор вдоль флютбета получим, подставляя ζ из (6.6) в (4.2), при $z=x$:

$$h=\frac{H}{2}\left\{1-\frac{1}{K}F\left(\arcsin\frac{\operatorname{th}\frac{\pi x}{2T}}{\operatorname{th}\frac{\pi l}{2T}},k\right)\right\}.$$

Для скорости найдем, дифференцируя (4.2) и (6.4):

$$\frac{d\omega}{dz}=\frac{d\omega}{d\zeta}:\frac{dz}{d\zeta}=\frac{\varkappa H\pi}{4kKT}\sqrt{\frac{1-k^2\zeta^2}{1-\zeta^2}},$$

что дает с помощью (6.4) для правой половины фиг. 70:

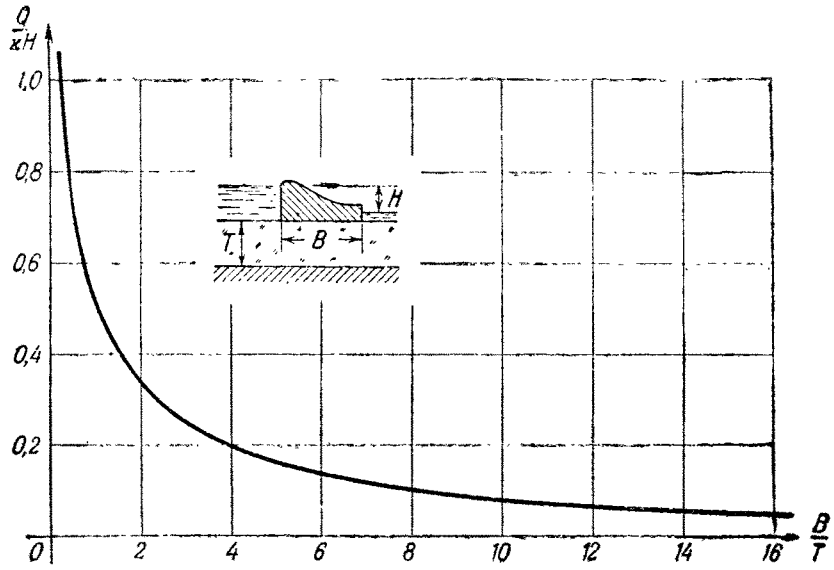
$$w=u-iv=\frac{\varkappa H\pi}{4KT}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2T}}{\sqrt{\operatorname{sh}\frac{\pi(l+z)}{2T}\operatorname{sh}\frac{\pi(l-z)}{2T}}}.$$

В частности, вдоль границы нижнего бьефа, где $z=x>l$,

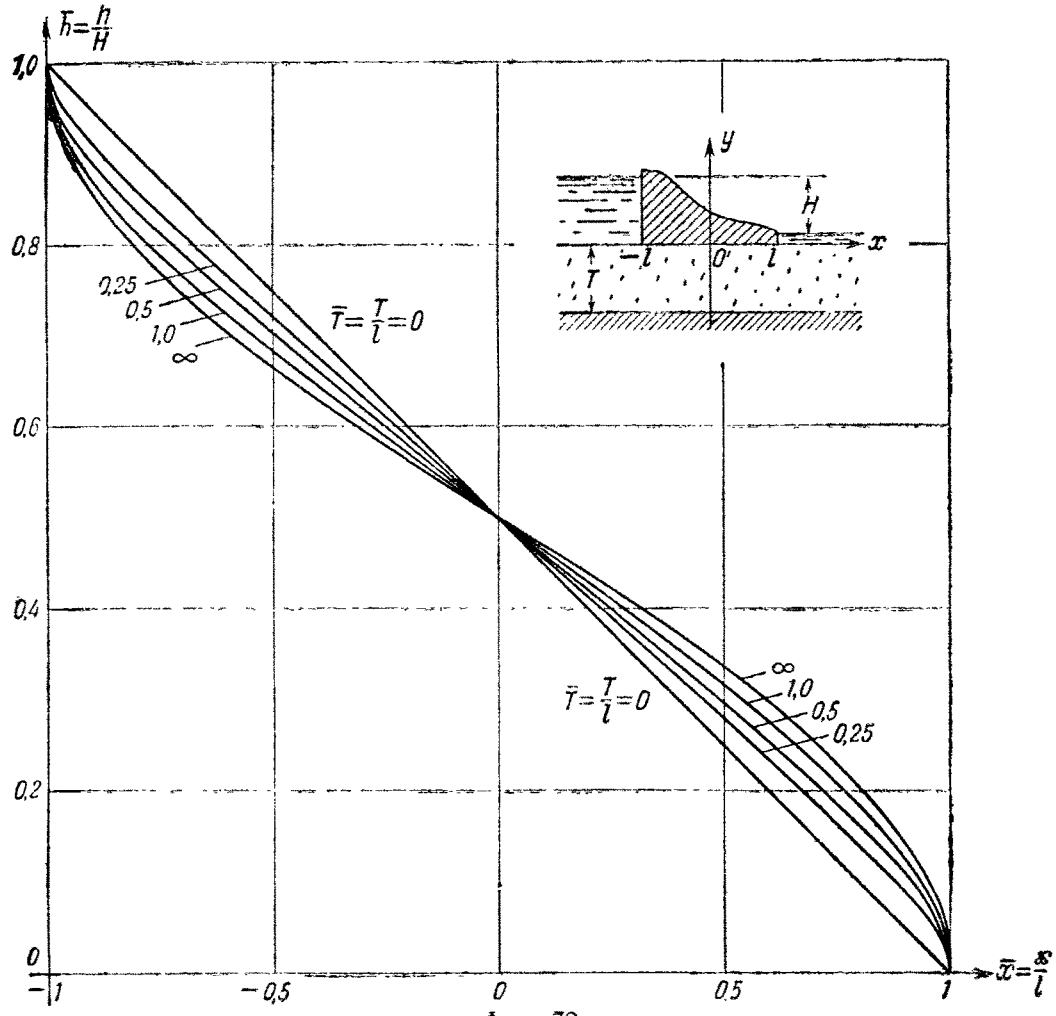
$$v=\frac{\varkappa H\pi}{4KT}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2T}}{\sqrt{\operatorname{sh}\frac{\pi(l+x)}{2T}\operatorname{sh}\frac{\pi(x-l)}{2T}}}$$

и вдоль непроницаемого основания, где $z=x-Ti$,

$$u=\frac{\varkappa H\pi}{4KT}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2T}}{\sqrt{\operatorname{ch}\frac{\pi(x+l)}{2T}\operatorname{ch}\frac{\pi(x-l)}{2T}}}.$$


Q/xH
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
B/T
H
T
B

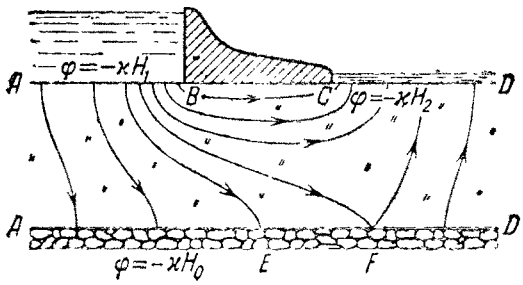
Фиг. 71.


h̄=h/H
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
−1
−0,5
0
0,5
1
x̄=x/l
0,25
0,5
1,0
∞
T̄=T/l=0
y
x
H
T
−l
0
l
T̄=T/l=0
∞
1,0
0,5
0,25

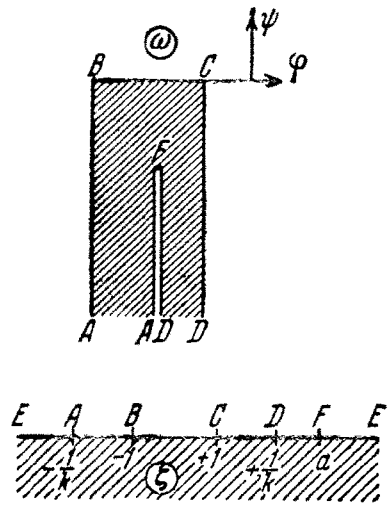
Фиг. 72.

На фиг. 70 указана сетка линий тока и линий равного потенциала. На фиг. 71 построена кривая зависимости приведенного расхода от размеров области движения. На фиг. 72 даны графики распределения напора (давления) вдоль флютбета.

§ 7. Флютбет при наличии дренирующего основания [14]. В природе встречаются случаи, когда под основным слоем грунта, в котором находится флютбет, залегает хорошо водопроницаемый пласт, такой, что его коэффициент фильтрации значительно больше коэффициента фильтрации вышележащего слоя. Тогда можно считать, что на границе двух слоев напор имеет постоянное значение H_0. Эту задачу можно рассматривать как



Фиг. 73.



Фиг. 74.

частный случай задачи о течении под флютбетом в двуслойном грунте (глава VIII, § 1).

Область движения здесь та же, что и в предыдущем случае (фиг. 73). Ее отображение на полуплоскость (фиг. 74) дает:

$$\zeta = \frac{1}{k} \operatorname{th} \frac{\pi z}{2T}, \tag{7.1}$$

где

$$k = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2T}. \tag{7.2}$$

Будем считать, что $H_1 > H_0 > H_2$. Тогда на плоскости комплексного потенциала получаем полуполосу с разрезом (фиг. 74).

Пусть точка F плоскости ω переходит в точку $\zeta = a$. Остальные точки отмечены на фиг. 74. Получаем:

$$\omega = M \int_1^{\zeta} \frac{(\zeta - a)\, d\zeta}{(1 - k^2\zeta^2)\sqrt{1-\zeta^2}} - \varkappa H_2 =$$

$$= M\left[-\frac{1}{kk'} \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{k'}\sqrt{1-\zeta^2} + \frac{a}{k'} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{k'\zeta}\right] - \varkappa H_2. \tag{7.3}$$

Обход особых точек C и D в положительном направлении, B и A —

в отрицательном по полуокружностям в нижней полуплоскости дает для ω полувычеты, равные скачкам при переходе с отрезка CD на FD и с AB на AF. Получаем равенства

$$-M\pi\frac{1-ka}{2kk'}=\varkappa(H_2-H_0),\qquad M\pi\frac{1+ka}{2kk'}=\varkappa(H_0-H_1).$$

Из этой системы уравнений находим:

$$ka=\frac{H_1-H_2}{H_1+H_2-2H_0},\quad M=-\frac{\varkappa}{\pi}(H_1+H_2-2H_0)kk'.$$

Для ω при этом равенство (7.3) дает:

$$\omega=\frac{\varkappa(H_1+H_2-2H_0)}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k'}\sqrt{1-\zeta^2}-$$
$$-\frac{\varkappa(H_1-H_2)}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{k'}-\varkappa H_2. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.1) и (7.2), окончательно получим:

$$\omega=\frac{\varkappa(H_1+H_2-2H_0)}{\pi}\arccos\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2T}}{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2T}}\right)-$$
$$-\frac{\varkappa(H_1-H_2)}{\pi}\arccos\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2T}}{\operatorname{sh}\frac{\pi l}{2T}}\right)-\varkappa H_2. \quad (7.5)$$

Отсюда легко найти напор вдоль флютбета, полагая $z=x$ и считая, что $h=-\frac{\varphi}{\varkappa}-H_2$:

$$h=\frac{2H_0-H_1-H_2}{\pi}\arccos\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2T}}{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2T}}\right)+\frac{H_1-H_2}{\pi}\arccos\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{2T}}{\operatorname{sh}\frac{\pi l}{2T}}\right). \quad (7.6)$$

Для сравнения рассматриваемого случая с предыдущим — флютбет при наличии водоупора — вычислим значение h в середине флютбета, при $x=0$. Получим:

$$h=h_0=\frac{H}{2}+\frac{2H_0-H_1-H_2}{\pi}\arccos\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi l}{2T}}$$
$$(H=H_1-H_2),$$

в то время как для флютбета при наличии водоупора

$$h=h_0'=\frac{H}{2}.$$

Таким образом, если

$$H_0 > \frac{H_1 + H_2}{2},$$

то

$$h_0 > h_0'.$$

Если же

$$H_0 < \frac{H_1 + H_2}{2},$$

то оказывается, что

$$h_0 < h_0'.$$

Мы считали, что $H_1 > H_0 > H_2$. Если это неравенство не выполнено, то область ω фиг. 74 изменится, но все формулы сохранятся.

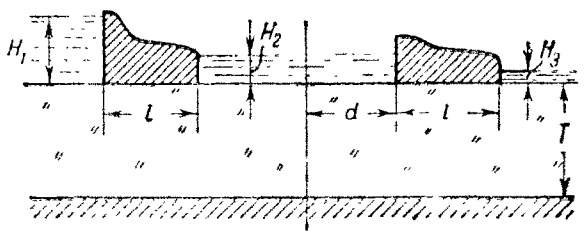
При $H_0 = \frac{H_1 + H_2}{2}$ все вычисления упрощаются. Линии тока станут симметричными относительно оси ординат, которая будет линией равного напора $h = \frac{H}{2}$.

Этот именно случай является предельным для неоднородного грунта (глава VIII). Расход через всю линию CD (фиг. 73) при $H_2 < H_0 < H_1$, какой случай мы и рассматриваем, бесконечно большой, причем часть воды переходит из верхнего бьефа в нижний, часть — из верхнего бьефа в нижний слой грунта и часть — из нижнего слоя грунта в нижний бьеф.

Приведем еще формулу для скорости по дну нижнего бьефа

$$v = \frac{\varkappa}{2T} \frac{H \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2T} + (2H_0 - H_1 - H_2) \operatorname{sh} \frac{\pi x}{2T}}{\sqrt{\operatorname{sh} \frac{\pi (x+l)}{2T} \operatorname{sh} \frac{\pi (x-l)}{2T}}}.$$

§ 8. Плоский разрезной флютбет в проницаемом слое конечной глубины. Схема такого флютбета дана на фиг. 75. Здесь мы



Фиг. 75.

приведем без вывода основные результаты.

Обозначим напоры в каждом из водоемов через H_1, H_2, H_3.

Расход отверстия между двумя элементами флютбета будет:

$$Q = \varkappa | H_1 - 2H_2 + H_3 | \frac{2K}{K'},$$

где

$$k = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi d}{2T}}{\operatorname{sh} \frac{\pi (d+l)}{2T}}.$$

Зависимость между комплексным потенциалом и координатой z можно представить в виде

$$\omega = -\frac{\varkappa}{\pi} (H_1 - 2H_2 + H_3) F(\arcsin \lambda, k'),$$

где

$$\lambda = \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi (d+l)}{2T}}{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{2T}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi (z+d)}{2T} \operatorname{sh} \frac{\pi (z-d)}{2T}}{\operatorname{sh} \frac{\pi l}{2T} \operatorname{sh} \frac{\pi (2d+l)}{2T}}}.$$

Заканчивая на этом изложение случаев обтекания флютбетов, заметим, что Н. Н. Павловский рассмотрел еще обтекание заглубленного прямоугольного флютбета. Мы приведем относящиеся к этим случаям результаты ниже как частные случаи более общей задачи (§ 14).

Имеются исследования по обтеканию плоского флютбета в слое конечной глубины, цельного и разрезного, с учетом наличия дрен. Результаты этих исследований приведены в книге В. И. Аравина и С. Н. Нумерова [6] и в работе Н. Т. Мелещенко [19]. В последней рассмотрена также задача о плоском флютбете при наклонном водоупоре.

В. ОБТЕКАНИЕ СООРУЖЕНИЙ СО ШПУНТАМИ

§ 9. Отображение на полуплоскость многоугольника, все стороны которого проходят через одну точку. Пусть имеем «звездообразный» многоугольник, т. е. такой, все стороны которого (или их продолжения) проходят через одну точку (фиг. 76). Пусть эта точка будет началом координат плоскости w, а область, которую мы хотим отобразить на полуплоскость, имеет границу $ABCDEFA$. Обозначим углы, образованные линиями AB, BCD, DE, ... с осью абсцисс, соответственно через $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_2$, $\pi\alpha_3$, ...

Составим функцию

$$w = Ce^{\pi\alpha_n i} (a_1 - \zeta)^{\alpha_n - \alpha_1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_1 - \alpha_2} \dots (a_k - \zeta)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \qquad (9.1)$$

и покажем, что она производит конформное отображение звездообразной области $ABCD\dots$ на верхнюю полуплоскость плоскости ζ. Здесь C — действительная постоянная, $\pi\alpha_n$ — угол с осью абсцисс отрезка $ANFE$, точка N которого переходит в точку $\zeta = \infty$.

Действительно, возьмем логарифм от (9.1)

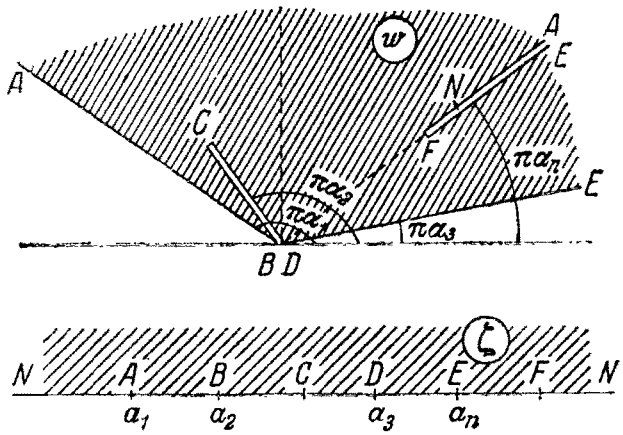
$$\ln w = \ln |w| + i \arg w = \ln C + \pi\alpha_n i + (\alpha_n - \alpha_1)\ln(a_1 - \zeta) + \\ + (\alpha_1 - \alpha_2)\ln(a_2 - \zeta) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\ln(a_n - \zeta). \quad (9.2)$$

Рассматривая действительные значения ζ, лежащие между $-\infty$ и a_1, и считая $\arg(a_1 - \zeta) = \ldots = \arg(a_n - \zeta) = 0$, мы видим, что все слагаемые правой части (9.2) имеют действительное значение, кроме $\pi\alpha_n i$. Поэтому

$$\arg w = \pi\alpha_n$$

на отрезке NA, что как раз соответствует условию задачи.

Далее, переходя на отрезок AB, обойдем точку A в отрицательном направлении по полуокружности, причем $\ln(a_1 - \zeta)$ получит



Фиг. 76.

приращение $-\pi i$, а $(\alpha_n - \alpha_1)\ln(a_1 - \zeta)$ получит приращение $-\pi i(\alpha_n - \alpha_1)$. Это будет изменением $\ln w$ при обходе точки A. При этом

$$\arg w = \pi\alpha_n - \pi(\alpha_n - \alpha_1) = \pi\alpha_1,$$

что соответствует значению $\arg w$ на отрезке AB. Обход точки B даст изменение $\ln w$ на

$$-\pi i(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Следовательно, получим, что

$$\arg w = \pi\alpha_2$$

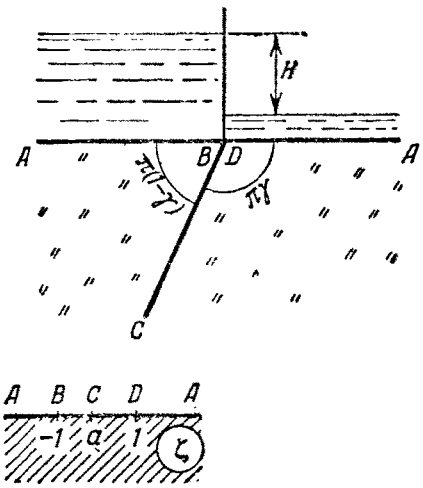
вдоль отрезка BCD.

Продолжая итти дальше, убедимся в справедливости формулы (9.1).

Заметим, что отображение звездообразной области на полуплоскость можно произвести с помощью формулы Кристоффеля-Шварца. Так как конформное отображение звездообразной области на полуплоскость единственно (при трех фиксированных вершинах), то интеграл Кристоффеля-Шварца должен совпасть с выражением (9.1); следовательно, в данном случае этот интеграл вычисляется в конечном виде.

Следует обратить внимание на то, что в формуле (9.1) содержатся аффиксы $a_1, \ldots, a_n$ не всех вершин многоугольника, а только тех, в которых происходит изменение направления ограничивающего отрезка.

§ 10. Обтекание наклонного шпунта. В главе II мы рассмотрели обтекание вертикального шпунта в слое бесконечной глубины. Здесь мы рассмотрим наклонный шпунт. Из таких шпунтов устраивают иногда противофильтрационные завесы [15]. К задаче о косом шпунте, как мы увидим ниже, сводится задача об обтекании прямого шпунта в анизотропном грунте. Наклонный шпунт изображен на фиг. 77.

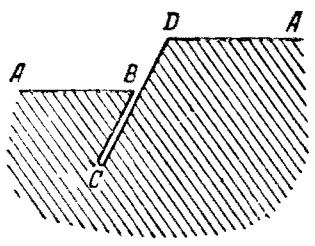


Фиг. 77.

Отобразим область $ABCDA$ (фиг. 77) на нижнюю полуплоскость ζ так, чтобы вершины B, C, D перешли соответственно в точки $\zeta = -1$, a, 1.

По формуле (9.1) имеем:

$$z = C(1+\zeta)^{1-\gamma}(1-\zeta)^{\gamma}. \qquad (10.1)$$



Фиг. 78.

Сопоставим этот результат с тем, что дает нам формула Кристоффеля-Шварца. Применяя ее, имеем:

$$z = A\int_{-1}^{\zeta}(1+\zeta)^{-\gamma}(\zeta-a)(1-\zeta)^{\gamma-1}\,d\zeta. \qquad (10.2)$$

Интеграл в правой части этого равенства представляет отображение многоугольника фиг. 78 и в общем случае не выражается в элементарных функциях. Но в данном случае, именно, когда вершины многоугольника B и D совпадают, это имеет место. Мы можем выражение (10.1) приравнять (10.2). Получим:

$$A\int_{-1}^{\zeta}(1+\zeta)^{-\gamma}(\zeta-a)(1-\zeta)^{\gamma-1}\,d\zeta = C(1+\zeta)^{1-\gamma}(1-\zeta)^{\gamma}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем:

$$A(1+\zeta)^{-\gamma}(\zeta-a)(1-\zeta)^{\gamma-1} = C(1+\zeta)^{-\gamma}(1-\zeta)^{\gamma-1}(\zeta+2\gamma-1).$$

Отсюда

$$A = -C, \quad a = 1-2\gamma.$$

Таким образом, сравнение с формулой Кристоффеля-Шварца позволило нам определить значение параметра a — аффикса конца шпунта на плоскости ζ. Можно было бы найти это значение из условия, что при $\zeta = a$ скорость равна бесконечности.

Найдем постоянную C. Концу шпунта отвечает значение

$$z = Se^{-\pi\gamma i},$$

где S — длина шпунта.

Полагая в формуле (10.1) $\zeta = a$, получим:

$$Se^{-\pi\gamma i} = C(1+a)^{1-\gamma}(1-a)^{\gamma}.$$

Отсюда найдем:

$$C = \frac{Se^{-\pi\gamma i}}{(1+a)^{1-\gamma}(1-a)^{\gamma}},$$

и равенство (10.1) примет вид

$$z = Se^{-\pi\gamma i}\left(\frac{1+\zeta}{1+a}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{1-\zeta}{1-a}\right)^{\gamma}, \qquad (10.3)$$

причем

$$a = 1 - 2\gamma.$$

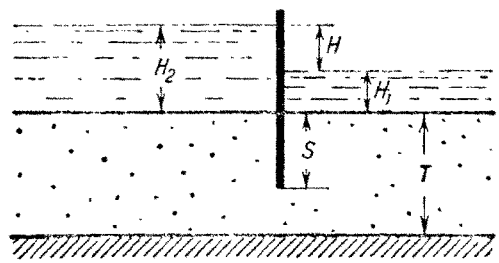
Область на плоскости комплексного потенциала представляет полуполосу, конформное отображение которой на полуплоскость ζ дает:

$$\omega = \frac{\varkappa H}{\pi}\arcsin\zeta.$$

Отсюда

$$\zeta = \sin\frac{\pi\omega}{\varkappa H}. \qquad (10.4)$$

В главе XI у нас приведена гидродинамическая сетка для косого шпунта.



Фиг. 79.

§ 11. Шпунт при наличии водоупора или дренирующего основания. Для случая, изображенного на фиг. 79, решение строится совершенно так же, как для плоского флютбета в § 6. Кроме того, решение для одиночного шпунта может быть получено как частный случай более общей задачи, которую мы рассматриваем ниже (§ 13). Поэтому мы приводим без вывода относящиеся сюда результаты.

Расход под шпунтом равен

$$Q = \varkappa H\frac{K'}{2K},$$

причем

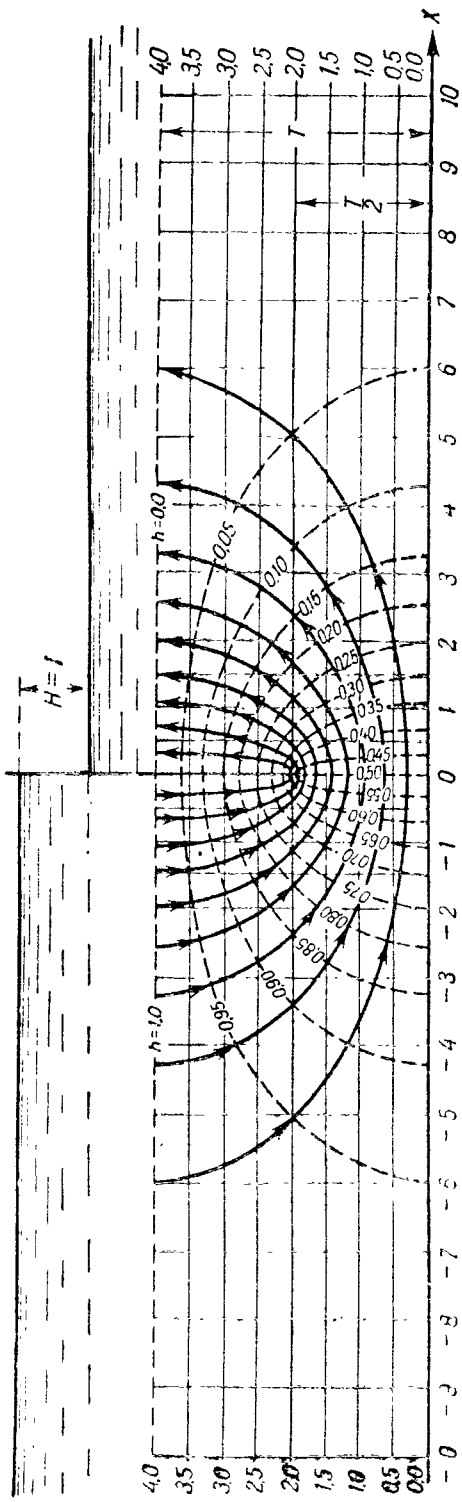
$$k = \sin\frac{\pi S}{2T}.$$

Комплексный потенциал имеет вид

$$\omega = -\frac{\varkappa H}{2}\left\{1 + \frac{1}{K}F(\arcsin\lambda, k)\right\},$$

где

$$\lambda = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi z}{2T} - \cos^2\frac{\pi S}{2T}}}{\sin\frac{\pi S}{2T}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{2T}}.$$

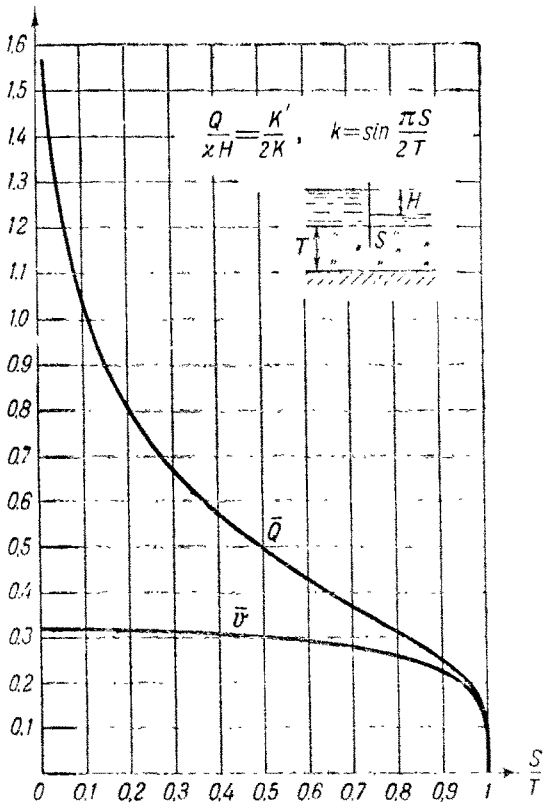


Фиг. 80.

Скорость фильтрации равна

$$w = u - iv = -\frac{\varkappa H\pi}{4KTi\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{\pi z}{2T} - \cos^2\frac{\pi S}{2T}}}.$$

На фиг. 80 дана сетка для частного случая шпунта $S = \frac{T}{2}$ [12].



Фиг. 81.

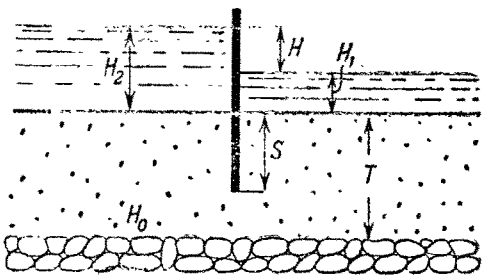
На фиг. 81 построен график зависимости приведенного расхода

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\varkappa H}$$

и выходной скорости, т. е. скорости в точке $z = 0$, от отношения $\frac{S}{T}$. Выходная скорость равна

$$v_0 = -\frac{\varkappa H\pi}{4KT\sin\frac{\pi S}{2T}} = \frac{\varkappa H\pi}{4KTk}.$$

Для случая шпунта при наличии дренирующего основания



Фиг. 82.

(фиг. 82) ввиду аналогии его с тем, который приведен в § 7, мы ограничимся лишь окончательными формулами.

Комплексный потенциал здесь имеет вид

$$\omega = -\varkappa\left[\frac{1}{2T}(2H_0 - H_1 - H_2)\frac{z}{i} + \frac{H}{\pi}\arcsin\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi z}{2T}}{\sin\frac{\pi S}{2T}}\right)\right]$$

$$(H = H_1 - H_2).$$

Отсюда получается распределение напора вдоль низовой грани шпунта

$$h = \left(H_0 - \frac{H_1 + H_2}{2}\right)\frac{y}{T} + \frac{H}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sin\frac{\pi y}{2T}}{\sin\frac{\pi S}{2T}}\right),$$

вдоль верховой грани имеем:

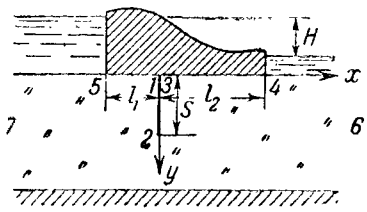
$$h = H + \left(H_0 - \frac{H_1 + H_2}{2}\right)\frac{y}{T} - \frac{H}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sin\dfrac{\pi y}{2T}}{\sin\dfrac{\pi S}{2T}}\right).$$

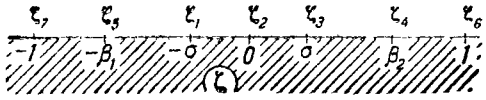
Скорость фильтрации определяется формулой

$$w = \frac{\varkappa}{2T}\left\{H_0 - \frac{H_1 + H_2}{2} + \frac{H\operatorname{ch}\dfrac{\pi z}{2T}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi z}{2T} + \sin^2\dfrac{\pi S}{2T}}}\right\}.$$

§ 12. Плоский флютбет со шпунтом в грунте конечной глубины. Пусть имеем плоский флютбет ширины $B = 2l$ со шпунтом длины S, разделяющим флютбет на отрезки с длинами l_1 и l_2 (фиг. 83). Глубина проницаемого слоя пусть будет T.

Излагая решение задачи по Н. Н. Павловскому [1], выберем оси координат, как указано на фиг. 83. Отобразим область движения на полуплоскость ζ, причем занумеруем вершины областей. Пусть точки $1, 2, \ldots, 7$ области z переходят в точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_7$ области ζ, причем





Фиг. 83.

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_1 = -\sigma, \quad \zeta_2 = 0, \\ &\zeta_3 = +\sigma, \quad \zeta_4 = \beta_2, \\ &\zeta_5 = -\beta_1, \quad \zeta_6 = 1, \\ &\zeta_7 = -1. \end{aligned}\right\} \quad (12.1)$$

Область z имеет прямые углы в точках

$$\zeta = \pm\sigma,$$

угол, равный 2π, в точке 2, для которой $\zeta = 0$, и нулевые углы в точках $\zeta = \pm 1$. Поэтому отображение области движения на нижнюю полуплоскость плоскости ζ дает:

$$z = A\int_0^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}} + Si.$$

С помощью подстановки

$$\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2} = t$$

мы получаем:

$$z = -\frac{A}{\sigma'}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}}{\sigma'} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma}{\sigma'}\right] + Si, \quad (12.2)$$

где

$$\sigma' = \sqrt{1 - \sigma^2}.$$

При $\zeta = \sigma$ имеем $z = 0$, откуда получаем:

$$0 = \frac{A}{\sigma'} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma}{\sigma'} + Si. \tag{12.3}$$

Следовательно,

$$z = -\frac{A}{\sigma'} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}}{\sigma'}. \tag{12.4}$$

Переходя к $\zeta = \xi > \sigma$ путем обхода точки $\zeta = \sigma$ в направлении от оси η к оси ξ, т. е. в отрицательном направлении, на угол π, получим, что $\sqrt{\sigma - \zeta}$ перейдет в $-i\sqrt{\zeta - \sigma}$, а $\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}$ в $-i\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}$. Тогда $\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}}{\sigma'}$ перейдет в

$$-i \operatorname{arth} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'},$$

и для отрезка $\zeta = \xi > \sigma$ получим:

$$z = \frac{Ai}{\sigma'} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'}.$$

Для того чтобы найти значение постоянной A, перепишем интеграл для z, заменив в нем $\sqrt{\sigma^2 - \zeta^2}$ на $-i\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}$. Найдем:

$$z = Ai \int \frac{\zeta\, d\zeta}{(1 - \zeta^2)\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}} + B.$$

Обход особой точки $\zeta = 1$ по полуокружности при переходе с отрезка $\xi < 1$ на отрезок $\xi > 1$ дает умноженный на $-\pi i$ вычет подинтегральной функции для z, равный

$$Ai \frac{-\pi i}{-2\sqrt{1 - \sigma^2}} = -\frac{A\pi}{2\sigma'}.$$

С другой стороны, указанный обход дает приращение z при переходе с границы нижнего бьефа на границу водоупора, т. е. величину Ti. Поэтому мы должны положить:

$$-\frac{A\pi}{2\sigma'} = Ti \tag{12.5}$$

и, следовательно, для z получаем:

$$z = \frac{2T}{\pi} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \sigma^2}}{\sigma'}.$$

Решая это уравнение относительно ζ, получим:

$$\zeta = \pm \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2 \operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2T}}.$$

Знак плюс соответствует правой полуплоскости, минус — левой.

Равенство (12.3) вместе с (12.5) теперь дает:

$$\frac{2Ti}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sigma}{\sigma'}=Si,$$

откуда

$$\frac{\sigma}{\sigma'}=\operatorname{tg}\frac{\pi S}{2T},$$

т. е.

$$\sigma=\sin\frac{\pi S}{2T},\quad \sigma'=\cos\frac{\pi S}{2T}. \tag{12.6}$$

Следовательно, для ζ можем написать:

$$\zeta=\pm\cos\frac{\pi S}{2T}\sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi z}{2T}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}}. \tag{12.7}$$

В частности, для концов флютбета $z=-l_1$ и $z=l_2$ получим соответственно:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_4=\beta_2&=\cos\frac{\pi S}{2T}\sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi l_2}{2T}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}},\\ \zeta_5=-\beta_1&=-\cos\frac{\pi S}{2T}\sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi l_1}{2T}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}}.\end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

Перейдем теперь к конформному отображению прямоугольника плоскости $\omega=\varphi+i\psi$ на полуплоскость ζ. Так как вершины прямоугольника переходят при этом в точки ζ_4, ζ_5, ζ_6, ζ_7, то будем иметь:

$$\omega=A\int_1^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-\zeta_4)(\zeta-\zeta_5)(\zeta-\zeta_6)(\zeta-\zeta_7)}}. \tag{12.9}$$

Введем функцию u с помощью подстановки

$$\operatorname{sn}^2(u,\ k)=\frac{(\zeta_4-\zeta_7)(\zeta-\zeta_6)}{(\zeta_6-\zeta_7)(\zeta-\zeta_4)},\quad k^2=\frac{(\zeta_4-\zeta_5)(\zeta_6-\zeta_7)}{(\zeta_6-\zeta_5)(\zeta_4-\zeta_7)}. \tag{12.10}$$

Находя отсюда $\zeta-\zeta_4$, $\zeta-\zeta_5$, ... и подставляя в (12.9), получим:

$$\frac{\omega}{A}=\int_1^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-\zeta_4)(\zeta-\zeta_5)(\zeta-\zeta_6)(\zeta-\zeta_7)}}=\frac{2u}{\sqrt{(\zeta_4-\zeta_7)(\zeta_6-\zeta_5)}}.$$

Тогда формула обращения интеграла (12.9) будет иметь вид

$$\zeta=\left(\zeta_6-\zeta_4\frac{\zeta_6-\zeta_7}{\zeta_4-\zeta_7}\operatorname{sn}^2\frac{\mu\omega}{A}\right):\left(1-\frac{\zeta_6-\zeta_7}{\zeta_4-\zeta_7}\operatorname{sn}^2\frac{\mu\omega}{A}\right), \tag{12.11}$$

где

$$\mu=\frac{1}{2}\sqrt{(\zeta_4-\zeta_7)(\zeta_6-\zeta_5)}.$$

Рассмотрим вершины прямоугольника. При $\zeta = \zeta_6$ имеем, как и должно быть, $\omega = 0$. При $\zeta = \zeta_4$ получаем:

$$\operatorname{sn}^2 \frac{\mu\omega}{A} = \infty,$$

т. е. [24]

$$\frac{\mu\omega}{A} = iK'.$$

Так как при $\zeta = \zeta_4$ должно быть $\omega = -Qi$, то предыдущее равенство дает:

$$-Qi = \frac{A}{\mu} K'i$$

или

$$Q = -\frac{AK'}{\mu}.$$

Далее, при $\zeta = \zeta_5$

$$\operatorname{sn} \frac{\mu\omega}{A} = \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$\omega = \frac{A}{\mu}(K + iK').$$

Но вершине ζ_5 соответствует

$$\omega = -\varkappa H - Qi.$$

Сравнивая эти выражения, найдем:

$$\frac{A}{\mu} K = -\varkappa H,$$

т. е.

$$A = -\frac{\varkappa\mu}{K} H.$$

Отсюда для расхода получим:

$$Q = \frac{\varkappa H K'}{K}.$$

Модуль k согласно (12.10) и (12.1) выражается так:

$$k = \sqrt{\frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)}},$$

причем β_1 и β_2 определяются формулами (12.8). Таким образом, мы имеем полное решение задачи.

Отметим, что для симметричного случая расположения шпунта, когда $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, получаем:

$$k = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}, \tag{12.12}$$

причем

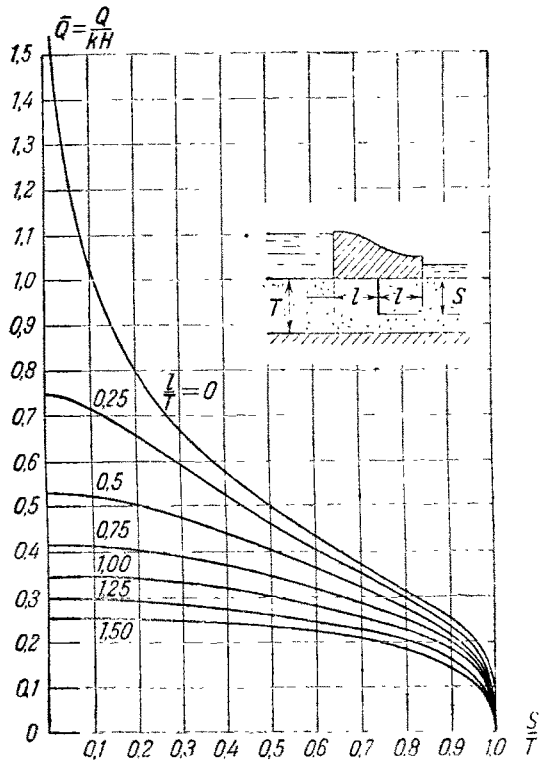
$$\beta = \cos\frac{\pi S}{2T} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi l}{2T} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi S}{2T}}.$$

Формула (12.12) соответствует преобразованию Ландена [24, 25]. Между полными эллиптическими интегралами модулей k и β существует соотношение

$$\frac{K'(k)}{K(k)} = \frac{K'(\beta)}{2K(\beta)}.$$

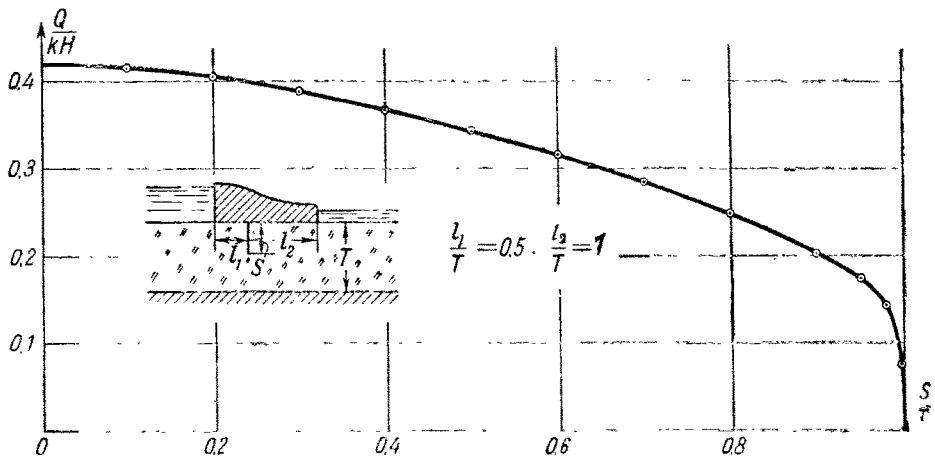
Поэтому для симметричного расположения шпунта формула расхода может быть переписана в том виде, в каком мы имели ее уже не раз:

$$Q = \frac{\varkappa HK'(\beta)}{2K(\beta)}.$$



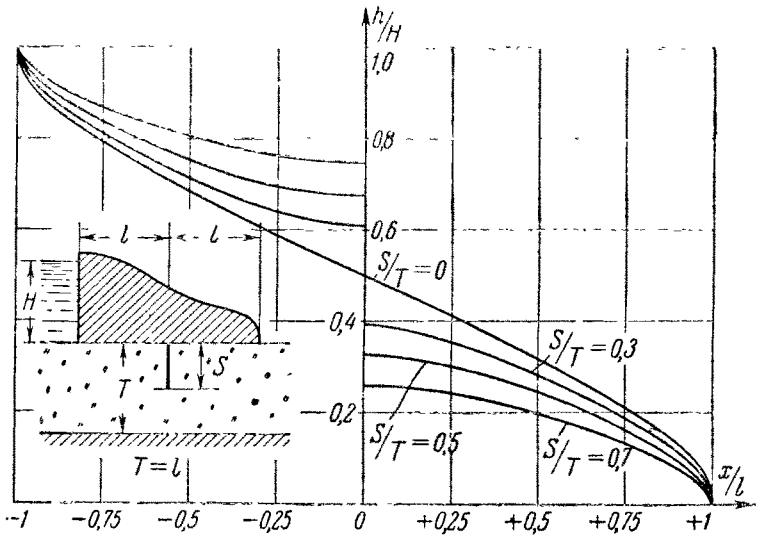
Фиг. 84.

Ряд расчетов Q для симметрично и несимметрично расположенного шпунта был произведен А. М. Мхитаряном [17] (фиг. 84, 85). Н. Т. Мелещенко [19] приведены подробные номограммы для этого случая. На фиг. 86 показано влияние шпунта на распределение давления вдоль флютбета: перед шпунтом давление поднимается, за ним — сильно падает. На фиг. 87, 88 и 89

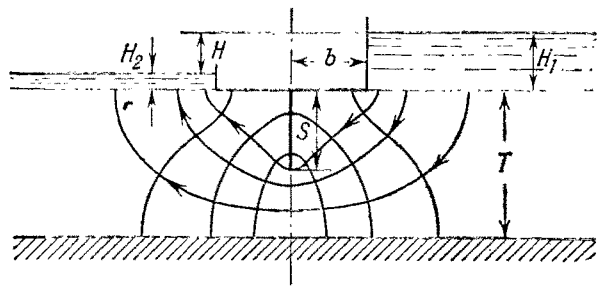


Фиг. 85.

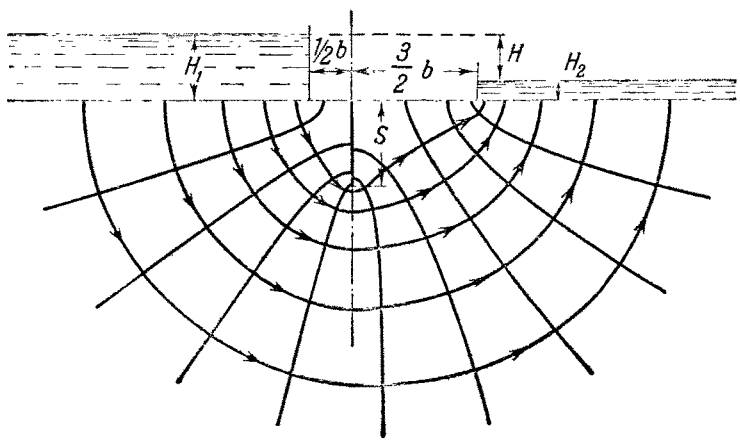
даны сетки движения, относящиеся к различным расположениям шпунтов [1, 11].



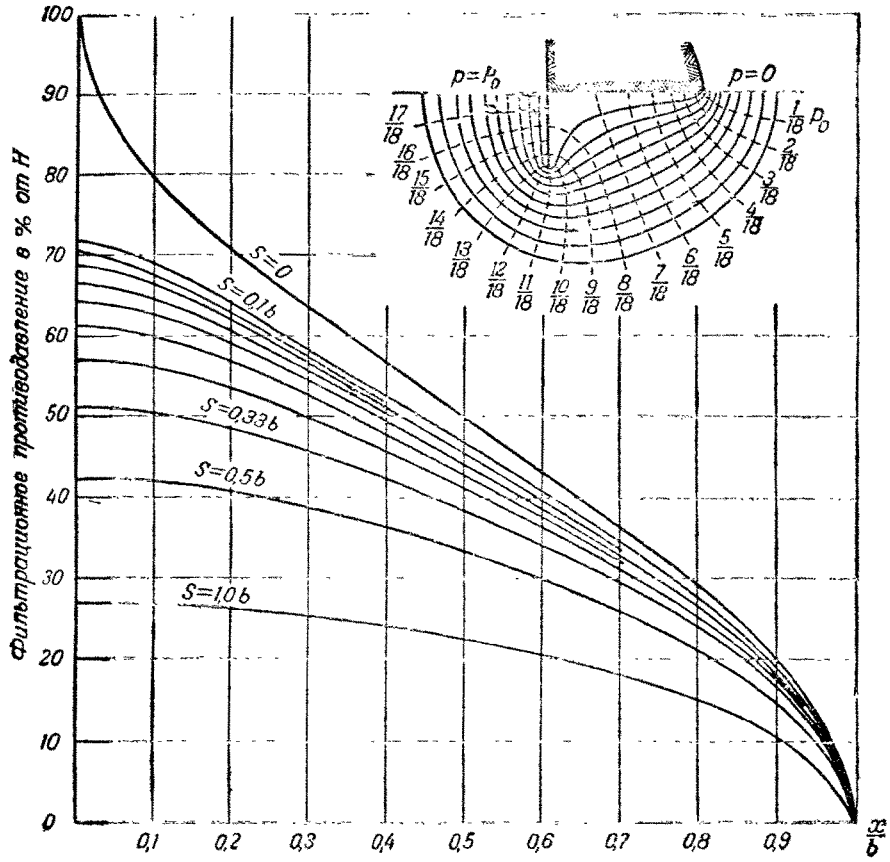
Фиг. 86.



Фиг. 87.

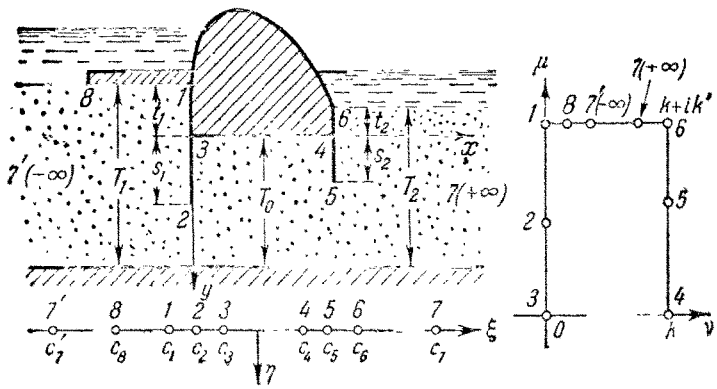


Фиг. 88.



Фиг. 89.

§ 13. Двухшпунтовый флютбет в проницаемом слое конечной глубины. П. Ф. Фильчаков [9] рассмотрел случай, включающий в себя все схемы



Фиг. 90.

плотин со шпунтом, которые встречались в этой главе, и содержащий некоторые новые схемы. Этот случай представлен на фиг. 90. Здесь флютбет заглубленный, понур плоский.

Функция, отображающая область движения на полуплоскость, имеет вид

$$z = A\int \frac{(\zeta - c_2)(\zeta - c_5)\,d\zeta}{(\zeta - c_7')(\zeta - c_7)\sqrt{(\zeta - c_1)(\zeta - c_3)(c_4 - \zeta)(c_6 - \zeta)}} + C. \quad (13.1)$$

Введем подстановку

$$\operatorname{sn}^2(u, k) = \frac{(c_4 - c_1)(\zeta - c_3)}{(c_4 - c_3)(\zeta - c_1)}, \quad (13.2)$$

$$k^2 = \frac{(c_4 - c_3)(c_6 - c_1)}{(c_4 - c_1)(c_6 - c_3)}. \quad (13.3)$$

Обозначая

$$R = \sqrt{(\zeta - c_1)(\zeta - c_3)(c_4 - \zeta)(c_6 - \zeta)}, \quad (13.4)$$

будем иметь, дифференцируя (13.2), для функции u, лишь постоянным множителем отличающейся от комплексного потенциала ω:

$$\frac{2\,du}{\sqrt{(c_4 - c_1)(c_6 - c_3)}} = \frac{d\zeta}{R}, \quad (13.5)$$

$$\zeta - c_m = \frac{c_3 - c_m - (c_1 - c_m)\dfrac{c_4 - c_3}{c_4 - c_1}\operatorname{sn}^2 u}{1 - \dfrac{c_4 - c_3}{c_4 - c_1}\operatorname{sn}^2 u}$$

и

$$\frac{(\zeta - c_2)(\zeta - c_5)}{(\zeta - c_7')(\zeta - c_7)} = \frac{c_3 - c_1}{c_7 - c_7'}\left[\frac{(c_7' - c_2)(c_7' - c_5)}{(c_7' - c_1)(c_7' - c_3)}\,\frac{1}{1 + n'\operatorname{sn}^2 u} - \right.$$

$$\left. - \frac{(c_7 - c_2)(c_7 - c_5)}{(c_7 - c_1)(c_7 - c_3)}\,\frac{1}{1 + n\operatorname{sn}^2 u}\right] + \frac{(c_5 - c_1)(c_2 - c_1)}{(c_7 - c_1)(c_7' - c_1)}.$$

Здесь введены обозначения

$$-n' = \frac{(c_4 - c_3)(c_7' - c_1)}{(c_4 - c_1)(c_7' - c_3)}, \quad -n = \frac{(c_4 - c_3)(c_7 - c_1)}{(c_4 - c_1)(c_7 - c_3)}. \quad (13.6)$$

Внося полученные выражения в формулу (13.1) и вводя еще обозначение

$$L = \sqrt{(c_4 - c_1)(c_6 - c_3)}, \quad (13.7)$$

получим:

$$z = \frac{2A}{L}\left\{\frac{(c_5 - c_1)(c_2 - c_1)}{(c_7 - c_1)(c_7' - c_1)}\,u + \frac{c_3 - c_1}{c_7 - c_7'}\left[\frac{(c_7' - c_2)(c_7' - c_5)}{(c_7' - c_1)(c_7' - c_3)}\,\Pi(u, n', k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(c_7 - c_2)(c_7 - c_5)}{(c_7 - c_1)(c_7 - c_3)}\,\Pi(u, n, k)\right]\right\} + C. \quad (13.8)$$

Здесь $\Pi(u, n', k)$, $\Pi(u, n, k)$ — эллиптические интегралы третьего рода:

$$\Pi(u, n, k) = \int_0^u \frac{du}{1 + n\operatorname{sn}^2 u}. \quad (13.9)$$

Полагая

$$\mathrm{sn}^2 a = -\frac{n}{k^2}, \tag{13.9'}$$

мы можем написать для $\Pi(u, n, k)$ [25]:

$$\Pi(u, n, k) = \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u} =$$

$$= u + \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}\left[\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} u + \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\right]. \tag{13.10}$$

Здесь θ — эллиптическая функция Якоби, для которой имеет место следующая формула [24]:

$$\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} = zna = \mathfrak{G}(\mathrm{am}\, a) - \frac{E}{K} a, \tag{13.11}$$

где

$$\mathfrak{G}(\mathrm{am}\, a) = \int_0^a \mathrm{dn}^2 u \, du, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi. \tag{13.12}$$

Подставляя выражение (13.10) в (13.8) и собирая члены с u, найдем:

$$z = \frac{2A}{L}\{Du + [D_7' \Phi(u, a_7') - D_7 \Phi(u, a_7)]\} + C, \tag{13.13}$$

где введено обозначение

$$\Phi(u, a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}. \tag{13.14}$$

При этом k и $\mathrm{sn}(u, k)$ определяются равенствами (13.3) и (13.2), постоянные a_7 и a_7' согласно (13.6) и (13.9') — соотношениями

$$\mathrm{sn}^2(a_7, k) = \frac{(c_6 - c_3)(c_7 - c_1)}{(c_6 - c_1)(c_7 - c_3)}, \quad \mathrm{sn}^2(a_7', k) = \frac{(c_6 - c_3)(c_7' - c_1)}{(c_6 - c_1)(c_7' - c_3)}. \tag{13.15}$$

Постоянные D_7, D_7' и D имеют такие значения:

$$D_7 = \frac{L}{(c_7 - c_7')} \frac{(c_7 - c_2)(c_7 - c_5)}{\sqrt{(c_7 - c_1)(c_7 - c_3)(c_7 - c_4)(c_7 - c_6)}}, \tag{13.16}$$

$$D_7' = \frac{L}{(c_7' - c_7)} \frac{(c_7' - c_2)(c_7' - c_5)}{\sqrt{(c_7' - c_1)(c_7' - c_3)(c_7' - c_4)(c_7' - c_6)}}, \tag{13.17}$$

$$D = \frac{(c_5 - c_3)(c_2 - c_3)}{(c_7 - c_3)(c_7' - c_3)} + \frac{1}{K}[D_7' \Pi(a_7') - D_7 \Pi(a_7)]. \tag{13.18}$$

Через $\Pi(a)$ обозначается следующее выражение:

$$\Pi(a) = K \mathfrak{G}(\mathrm{am}\, a) - aE. \tag{13.19}$$

С помощью формул (13.2), (13.3) можно найти еще следующие:

$$\left.\begin{aligned} k'^2 &= \frac{(c_6-c_4)(c_3-c_1)}{(c_4-c_1)(c_6-c_3)}, \\ \operatorname{cn}^2(u, k) &= \frac{(c_3-c_1)(c_4-\zeta)}{(c_4-c_3)(\zeta-c_1)}, \quad \operatorname{dn}^2(u, k) = \frac{(c_3-c_6)(c_6-\zeta)}{(c_6-c_3)(\zeta-c_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{13.20}$$

Чтобы найти дальнейшие соотношения, рассмотрим последовательно точки *3*, *4*, *6*, *7*, *1* (фиг. 90).

Для точки *3* $z=0$, $\zeta=c_3$, $\operatorname{sn}^2 u=0$, $u=0$, $\Phi(0, a)=0$, поэтому получаем:

$$C=0. \tag{13.21}$$

В точке *4* $z=B$, где B — ширина плотины, $\zeta=c_4$, $\operatorname{sn}^2(u, k)=1$, $u=K$, поэтому

$$\Phi(K, a)=\frac{1}{2}\ln\frac{\theta(K-a)}{\theta(K+a)}=0,$$

и уравнение (13.13) дает:

$$B=\frac{2ADK}{L}. \tag{13.22}$$

В точке *6*

$$z=B-it_2,\ \zeta=c_6,\ \operatorname{sn}^2(u, k)=\frac{1}{k^2},\ u=K+iK',\ \Phi(K+iK', a)=i\frac{\pi a}{2K},$$

поэтому из (13.13) получаем:

$$B-it_2=\frac{2A}{L}\left\{D(K+iK')+\frac{\pi i}{2K}(D_7'a_7'-D_7a_7)\right\}.$$

С помощью (13.22) будем иметь:

$$-t_2=\frac{2A}{L}\left\{DK'+\frac{\pi}{2K}(D_7'a_7'-D_7a_7)\right\}. \tag{13.23}$$

В точке *1*

$$z=-it_1,\ \zeta=c_1,\ \operatorname{sn}^2(u, k)=\infty,\ u=iK',\ \Phi(iK', a)=\frac{\pi i}{2K}(a-K)$$

и, следовательно,

$$-t_1=\frac{2A}{L}\left\{DK'+\frac{\pi}{2K}[(D_7'a_7'-D_7a_7)-K(D_7'-D_7)]\right\}.$$

Вычтя полученное уравнение из (13.23), найдем:

$$t_1-t_2=\frac{A\pi}{L}(D_7'-D_7). \tag{13.24}$$

Для точки *7* $z=\infty$, $\zeta=c_7$.

Из условия обхода бесконечно удаленной точки $z=\infty$, образ которой $\zeta=c_7$ является простым полюсом подинтегральной функции (13.1), находим:

$$T_2=\frac{\pi A(c_7-c_2)(c_7-c_5)}{(c_7-c_7')\sqrt{(c_7-c_1)(c_7-c_3)(c_7-c_4)(c_7-c_6)}}.$$

С помощью выражения (13.16) для D_7 получим:

$$A=\frac{LT_2}{\pi D_7}. \tag{13.25}$$

Для точки *7'* $z=-\infty$, $\zeta=c_7'$.

Так же как в предыдущем случае, получаем:

$$A = \frac{LT_1}{\pi D_7'}. \tag{13.26}$$

Приравнивая правые части уравнений (13.25) и (13.26), найдем:

$$D_7 T_1 = D_7' T_2 \tag{13.27}$$

или, учитывая значения D_7, D_7',

$$\frac{(c_7 - c_2)(c_7 - c_5)}{\sqrt{(c_7 - c_1)(c_7 - c_3)(c_7 - c_4)(c_7 - c_6)}} T_1 = \frac{(c_7' - c_2)(c_7' - c_5)}{\sqrt{(c_7' - c_1)(c_7' - c_3)(c_7' - c_4)(c_7' - c_6)}} T_2. \tag{13.28}$$

Теперь отображающей функции (13.13) можно придать следующий вид:

$$z = \frac{B}{K} u + \frac{2}{\pi} [T_2 \Phi(u, a_7') - T_1 \Phi(u, a_7)]. \tag{13.29}$$

Выпишем выражения этой функции для различных участков области движения.

На участке *3—4*, полагая

$$u = \nu + i\mu, \tag{13.30}$$

будем иметь:

$$z = x\,(0 \leqslant x \leqslant B), \quad c_3 \leqslant \zeta \leqslant c_4, \quad u = \nu\,(0 \leqslant \nu \leqslant K).$$

Для вычислений можно воспользоваться следующим рядом для $\Phi(u, a)$:

$$\Phi(u, a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(u - a)}{\theta(u + a)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi m u}{K} \sin \frac{\pi m a}{K}}{m \operatorname{sh} \frac{\pi m K'}{K}}. \tag{13.31}$$

Участок $4 - 5 - 6$. На нем $z = B + iy$ $(-t_2 \leqslant y \leqslant s_2)$,

$$c_4 \leqslant \zeta \leqslant c_6. \quad u = K + i\mu \quad (0 \leqslant \mu \leqslant K').$$

С помощью формулы (13.31) найдем:

$$\Phi(K + i\mu, a) = i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi m \mu}{K} \sin \frac{\pi m a}{K}}{m \operatorname{sh} \frac{\pi m K'}{K}}. \tag{13.32}$$

Можно отображающей функции придать вид

$$z - B = i \left\{ \frac{B\mu}{K} + \frac{2}{\pi} [T_2 \Phi(\mu, a_7') - T_1 \Phi(\mu, a_7)] \right\}, \tag{13.33}$$

где по свойству эллиптических фуикций [24]

$$\operatorname{sn}^2(\mu, k') = \operatorname{sn}^2[i(K - u), k'] = \left[\frac{i \operatorname{cn}(u, k)}{k' \operatorname{sn}(u, k)}\right]^2 = \frac{(c_6 - c_3)(\zeta - c_4)}{(c_6 - c_4)(\zeta - c_3)}.$$

В частности, для точки 6, где $\zeta = c_6$, $\mu = K'$,

$$\Phi(K + iK', a) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\sin \frac{\pi m a}{K}}{m} = \frac{\pi a}{2K}.$$

Следовательно,

$$z - B = i\left(\frac{BK'}{K} + \frac{T_2 a_7' - T_1 a_7}{K}\right) = -it_2,$$

как и должно быть.

На участке $[(6, +\infty); (-\infty, 1)]$ можно положить:

$$z = x + it_n \quad (B \leqslant x \leqslant +\infty; \ -\infty \leqslant x \leqslant 0),$$

причем

$t_n = -t_2$ вдоль линии нижнего бьефа $(c_6 \leqslant \zeta \leqslant c_7)$;

$t_n = T_0$ вдоль линии водоупора $(c_7 \leqslant \zeta \leqslant \infty; \ -\infty \leqslant \zeta \leqslant c_7')$;

$t_n = -t_1$ вдоль линии верхнего бьефа $(c_7' \leqslant \zeta \leqslant c_1)$;

на всем участке имеем:

$$u = K + iK' - \nu \qquad (K \geqslant \nu \geqslant 0).$$

Поэтому [24, 25]

$$\operatorname{sn}(\nu, k) = \operatorname{sn}(K + iK' - u, k) = \frac{\operatorname{dn}(u, k)}{k \operatorname{cn}(u, k)}$$

и

$$\frac{\theta(u - a)}{\theta(u + a)} = \frac{\theta[K + iK' - (\nu + a)]}{\theta[K + iK' - (\nu - a)]} = e^{\frac{i\pi a}{K}} \frac{H_1(\nu + a)}{H_1(\nu - a)}.$$

Вводя обозначение

$$\Phi^*(\nu, a) = \frac{1}{2} \ln \frac{H_1(\nu + a)}{H_1(\nu - a)},$$

будем иметь:

$$\Phi(u, a) = \Phi(K + iK' - \nu, a) = \frac{\pi a i}{K} + \Phi^*(\nu, a).$$

Формулу (13.29) можно переписать так:

$$z - B + it_n = -\frac{B\nu}{K} + \frac{2}{\pi}[T_2 \Phi^*(\nu, a_7') - T_1 \Phi^*(\nu, a_7)], \tag{13.34}$$

где

$$\operatorname{sn}^2(\nu, k) = \frac{(c_4 - c_1)(\zeta - c_6)}{(c_6 - c_1)(\zeta - c_4)}.$$

В точках 7 и 7′ функции $\Phi^*(\nu, a)$ имеют логарифмические особенности. Для вычисления $\Phi^*(\nu, a)$ можно пользоваться разложением

$$\Phi^*(\nu, a) = \frac{1}{2} \ln \frac{H_1(\nu + a)}{H_1(\nu - a)} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\cos \frac{\pi(\nu + a)}{2K}}{\cos \frac{\pi(\nu - a)}{2K}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin \frac{\pi m \nu}{K} \sin \frac{\pi m a}{K}}{\operatorname{sh} \frac{\pi m K'}{K}} \frac{e^{-\frac{m\pi K'}{K}}}{m}. \tag{13.35}$$

На участке *3—2—1*

$$z = iy \quad (-t_1 \leqslant y \leqslant s_1), \quad c_1 \leqslant \zeta \leqslant c_3, \quad u = i\mu \quad (0 \leqslant \mu \leqslant K');$$

следовательно,

$$\operatorname{sn}(\mu, k') = -i\frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)},$$

и по формуле (13.31) получаем:

$$\Phi(u, a) = \Phi(i\mu, a) = -i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi m\mu}{K}\sin\frac{\pi ma}{K}}{m\operatorname{sh}\frac{\pi mK'}{K}}. \tag{13.36}$$

Выражение для z принимает следующий вид:

$$z = i\frac{B\mu}{K} + \frac{2}{\pi}[T_2\Phi(i\mu, a_7') - T_1\Phi(i\mu, a_7)], \tag{13.37}$$

где

$$\operatorname{sn}^2(\mu, k') = \frac{(c_4 - c_1)(c_3 - \zeta)}{(c_3 - c_1)(c_4 - \zeta)}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению уравнений, которые позволяют найти значения постоянных $c_1, c_2, \ldots$ Выберем

$$-c_1 = c_6 = 1, \quad -c_7' = c_7.$$

Подлежащими определению будут тогда постоянные c_2, c_3, c_4, c_5, c_7. Для их определения нужно получить пять уравнений. Положим в (13.33) и (13.37) соответственно $\zeta = c_5$, $\zeta = c_2$, исключим D_7' из (13.24) и (13.27), исключим $\frac{A}{L}$ из формул для $t_1 - t_2$, T_2. Получим такие уравнения:

$$\frac{s_2}{B} = \frac{\mu_5}{K} - \frac{D_7'\Phi(\mu_5, a_7') - D_7\Phi(\mu_5, a_7)}{DK}, \tag{13.38}$$

причем

$$\operatorname{sn}^2(\mu_5, k') = \frac{(1 - c_3)(c_5 - c_4)}{2(c_5 - c_3)}, \quad k'^2 = \frac{(1 - c_4)(1 + c_3)}{(1 + c_4)(1 - c_3)},$$

$$\frac{s_1}{B} = \frac{\mu_2}{K} - i\frac{D_7'\Phi(i\mu_2, a_7') - D_7\Phi(i\mu_2, a_7)}{DK}, \tag{13.39}$$

где

$$\operatorname{sn}^2(\mu_2, k') = \frac{(1 + c_4)(c_3 - c_2)}{(1 + c_3)(c_4 - c_2)},$$

$$\frac{t_2}{B} = \frac{\pi}{2K}\frac{D_7a_7 - D_7'a_7'}{DK} - \frac{K'}{K}, \tag{13.40}$$

$$\frac{t_1 - t_2}{B} = \frac{\pi}{2}\frac{D_7' - D_7}{DK}, \tag{13.41}$$

$$\frac{T_2}{B} = \frac{\pi}{2}\frac{D_7}{DK}. \tag{13.42}$$

Перейдем теперь к рассмотрению частных случаев.

§ 14. Симметричный двухшпунтовый флютбет и котлован, огражденный двумя шпунтами. Для симметричного двухшпунтового флютбета (фиг. 91)

$$s_1 = s_2 = s, \quad t_1 = t_2 = t, \quad T_1 = T_2 = T$$

и в дополнение к ранее принятым условиям

$$-c_1 = c_6 = 1, \quad -c_7' = c_7 = \gamma$$

из условий симметрии следует:

$$-c_2 = c_5 = \sigma, \quad -c_3 = c_4 = \alpha.$$

Отображающая функция будет иметь вид (B — ширина флютбета)

$$z = \frac{B}{K} u + \frac{2T}{\pi} [\Phi(u, a_7') - \Phi(u, a_7)],$$

где

$$\mathrm{sn}^2(u, k) = \frac{(1+\alpha)(\zeta+\alpha)}{2\alpha(1+\zeta)}, \quad k^2 = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}, \quad \mathrm{sn}^2(a_7, k) = \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{2(\gamma+\alpha)},$$

$$\mathrm{sn}^2(a_7', k) = \frac{(1+\alpha)(\gamma-1)}{2(\gamma-\alpha)}.$$

Параметры α, γ, σ определяются из системы уравнений

$$t = \frac{T(a_7 - a_7') - BK'}{K}, \quad T = \frac{\pi B}{2} \frac{D_7}{DK}, \quad \frac{s}{B} = \frac{\mu_5}{K} + \frac{D_7}{DK} [\Phi(\mu_5, a_7') - \Phi(\mu_5, a_7)],$$

где

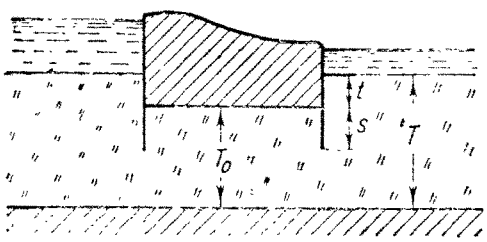
$$\mathrm{sn}^2(\mu_5, k') = \frac{(1+\alpha)(\sigma-\alpha)}{2(\sigma+\alpha)}, \quad k' = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Постоянные D_7, D_7', D и A находятся из уравнений

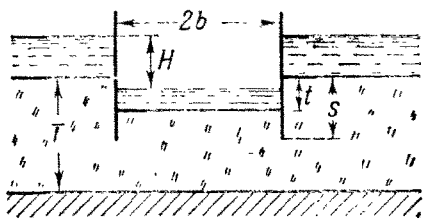
$$D_7' = D_7 = \frac{1+\alpha}{2\gamma} \frac{\gamma^2 - \sigma^2}{\sqrt{(\gamma^2-1)(\gamma^2-\alpha^2)}}, \quad D = \frac{\sigma^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2} + \frac{D_7}{K} [\Pi(a_7') - \Pi(a_7)],$$

$$A = \frac{2T\gamma}{\pi} \frac{\sqrt{(\gamma^2-1)(\gamma^2-\alpha^2)}}{(\gamma^2-\sigma^2)}.$$

Та же самая область движения, что и только что рассмотренная нами, будет иметь место в другой задаче — о притоке воды к котловану, огражден-



Фиг. 91.

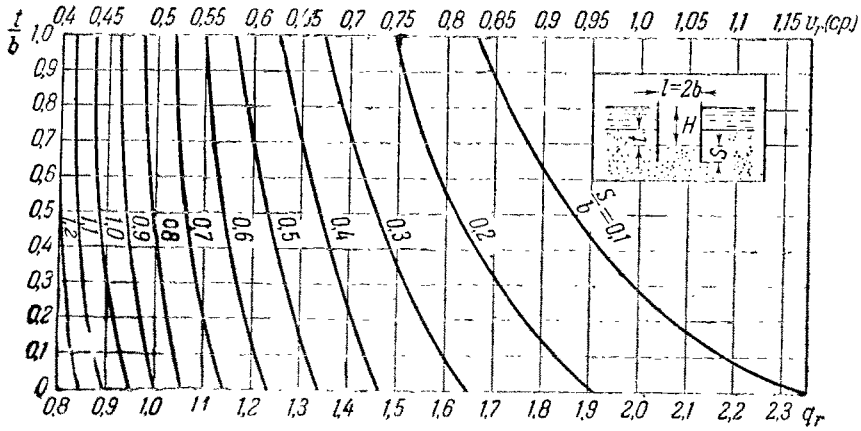


Фиг. 92.

ному двумя симметричными шпунтами (фиг. 92; здесь $B = 2b$, s имеет не то значение, что на фиг. 91).

Такие шпунтовые перемычки обычно устраивают при производстве работ в водоемах, например при постройке в реках устоев, быков и оснований гидротехнических сооружений. Для производства работ в котловане необходимо установить водоотлив, т. е. количество воды, которое придется откачивать, и запроектировать соответствующее оборудование для откачки.

Такая задача была рассмотрена В. С. Козловым [5]. Для случая водопроницаемого основания бесконечной глубины им даны некоторые вспомогатель-

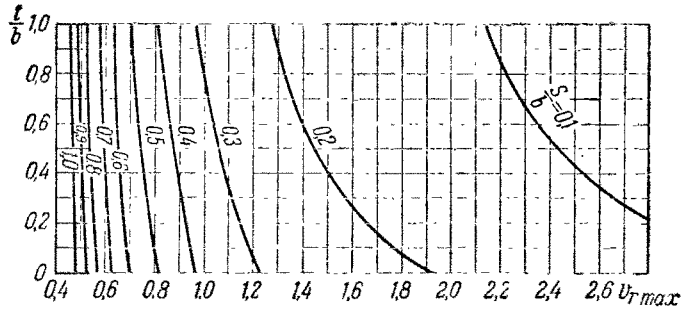


Фиг. 93.

ные номограммы для расчетов. На фиг. 93 мы приводим графики для вычисления расхода в зависимости от $\frac{t}{b}$ и $\frac{s}{b}$. При этом

$$q_r = \frac{Q}{kH}.$$

На фиг. 94 и 95 представлены графики зависимости наибольшей и наи-



Фиг. 94.

меньшей скоростей вдоль основания котлована от $\frac{t}{b}$ и $\frac{s}{b}$. При этом введены обозначения

$$v_{r\,\max} = \frac{b}{kH} v_{\max},$$

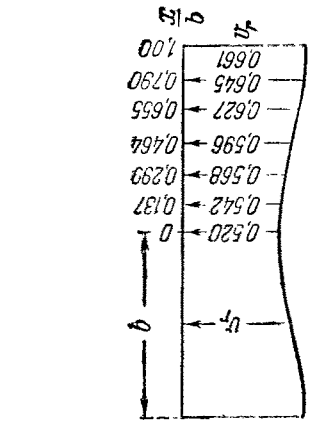
$$v_{r\,\min} = \frac{b}{kH} v_{\min}.$$

На фиг. 96 дано распределение приведенной скорости вдоль основания котлована для значений $t = 0{,}4$, $s = 0{,}6$, $b = 1$. При этом

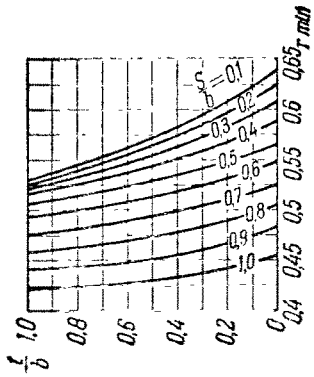
$$v = \frac{kH}{b} v_r,$$

где v — величина скорости фильтрации.

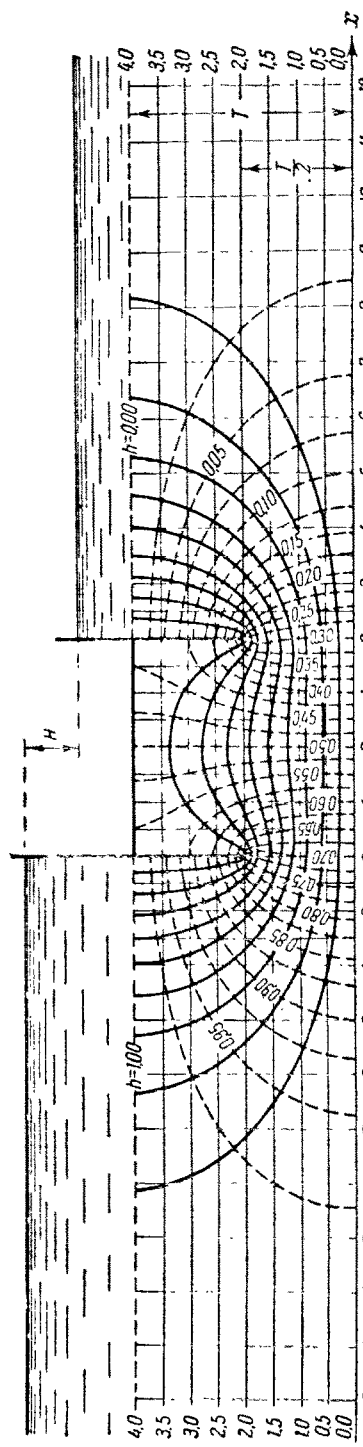
На фиг. 97 приведена сетка движения для симметричного двухшпунтового плоского флютбета [5], представляющего частный случай фиг. 91.



Фиг. 96.



Фиг. 95.

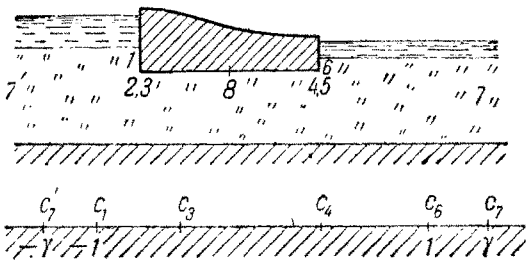


Фиг. 97.

§ 15. Толстый флютбет. Для толстого флютбета без шпунтов имеем (фиг. 98) $s_1 = s_2 = 0$ и, следовательно, в дополнение к условиям $-c_1 = c_6 = 1$, $-c_7' = c_7 = \gamma$ получим:

$$c_2 \equiv c_3, \quad c_4 \equiv c_5.$$

Отображающая функция сохраняет прежний вид (13.29). Для постоянных γ, c_3, c_4 равенства (13.22)—(13.27) дадут:



Фиг. 98.

$$\frac{t_2}{B} = \frac{\pi}{2K}\frac{D_7 a_7 - D_7' a_7'}{DK} - \frac{K'}{K},$$

$$\frac{t_1 - t_2}{B} = \frac{\pi}{2}\frac{D_7' - D_7}{DK},$$

$$\frac{T_2}{B} = \frac{\pi}{2}\frac{D_7}{DK}.$$

При этом для несимметричного случая, когда $t_1 \neq t_2$,

$$L^2 = (1 + c_4)(1 - c_3), \quad k^2 = \frac{2(c_4 - c_3)}{L^2}, \quad k'^2 = \frac{(1 + c_3)(1 - c_4)}{L^2},$$

$$D_7 = \frac{L\sqrt{(\gamma - c_3)(\gamma - c_4)}}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad D_7' = \frac{L\sqrt{(\gamma + c_3)(\gamma + c_4)}}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

и

$$DK = D_7'[K\mathfrak{E}(\operatorname{am} a_7') - a_7' E] - D_7[K\mathfrak{E}(\operatorname{am} a_7) - a_7 E],$$

$$\operatorname{sn}^2(a_7, k) = \frac{(1 - c_3)(\gamma + 1)}{2(\gamma - c_3)}, \quad \operatorname{sn}^2(a_7', k) = \frac{(\gamma - 1)(1 - c_3)}{2(\gamma + c_3)}.$$

Постоянная A определяется формулой

$$A = -\frac{2T_2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\pi\sqrt{(\gamma - c_3)(\gamma - c_4)}}.$$

Для симметричного толстого флютбета имеем:

$$t_1 = t_2 = t, \quad T_1 = T_2 = T,$$

поэтому

$$-c_3 = c_4 = \alpha, \quad D_7' = D_7.$$

Уравнения для $\frac{B}{T}$ и $\frac{t}{T}$ представляются в виде

$$\frac{\pi B}{2T} = (a_7 - a_7')E + K[\mathfrak{E}(\operatorname{am} a_7') - \mathfrak{E}(\operatorname{am} a_7)],$$

$$\frac{\pi t}{2T} = K'[\mathfrak{E}(\operatorname{am} a_7) - \mathfrak{E}(\operatorname{am} a_7')] - (K' - E')(a_7 - a_7').$$

При этом

$$k=\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha},\quad A=\frac{2T\gamma}{\pi}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},\quad \operatorname{sn}^2 u=\frac{(\alpha+1)(\zeta+\alpha)}{2\alpha(\zeta+1)}$$

и

$$\operatorname{sn}^2(a_\gamma, k)=\frac{(1+\alpha)(\gamma+1)}{2(\gamma+\alpha)},\quad \operatorname{sn}^2(a'_\gamma, k)=\frac{(\gamma-1)(1+\alpha)}{2(\gamma-\alpha)}.$$

Комплексный потенциал ω связан с переменной ζ следующим образом:

$$\omega=\frac{H}{2K}F\left(\zeta, \frac{1}{\gamma}\right).$$

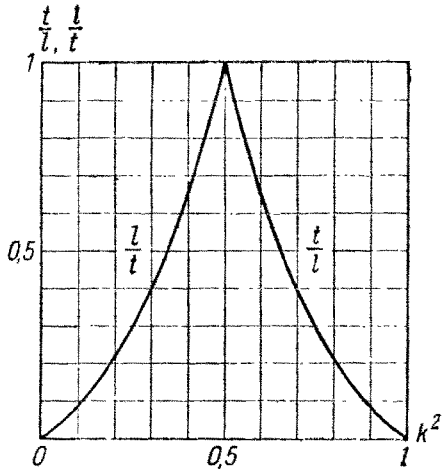
Отметим, что $\mathfrak{E}(\operatorname{am} a)$ есть не что иное, как эллиптический интеграл второго рода, так как

$$\operatorname{am} a=\arcsin(\operatorname{sn} a)$$

и

$$\mathfrak{E}(\operatorname{am} a)=\int_0^a \operatorname{dn}^2 u\,du=$$

$$=\int_0^{\operatorname{sn} a}\frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad (t=\operatorname{sn} u).$$



Фиг. 99.

Случай прямоугольного флютбета в бесконечно глубоком грунте рассмотрен Н. Н. Павловским. Приведем окончательные результаты (здесь $B=2l$):

$$z=\frac{k^2 l}{E-k'^2K}\{\mathfrak{E}(\arcsin\zeta, k)-k'^2F(\arcsin\zeta, k)\}-ti,\quad \zeta=\frac{1}{k}\sin\frac{\pi\omega}{xH}.$$

Модуль k определяется уравнением

$$\frac{t}{l}=\frac{E'-k^2K'}{E-k'^2K}.$$

Давая k ряд значений, Н. Н. Павловский нашел соответствующие значения для t/l и построил график. На фиг. 99 дается зависимость t/l от k^2 для $0<t/l<1$ и одновременно зависимость обратной величины, l/t, от k^2, причем $0<l/t<1$. Таким образом, этот график охватывает значения $0<l/t<\infty$.

Если $0\leqslant k^2\leqslant 0{,}001$, то при вычислениях с точностью до трех знаков можно принять:

$$\frac{l}{t}=\frac{E-k'^2K}{E'-k^2K'}\approx\frac{\pi}{4}k^2.$$

Если $0{,}999\leqslant k^2\leqslant 1$, то

$$\frac{t}{l}=\frac{E'-k^2K'}{E-k'^2K}\approx\frac{\pi}{4}k'^2.$$

Скорость в зависимости от ζ выражается так:

$$w = u - iv = \frac{\varkappa H}{\pi k l} \frac{E - k'^2 K}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Выходная скорость получается при $\zeta = \frac{1}{k}$, а потому имеем (см. фиг. 98):

$$v_6 = \frac{\varkappa H k}{\pi l k'} (E - k'^2 K).$$

В середине основания флютбета $\zeta = 0$, а потому минимальная скорость u_8 (фиг. 98) равна

$$u_8 = \frac{\varkappa H}{\pi l k} (E - k'^2 K).$$

Отношение двух минимальных скоростей оказывается равным

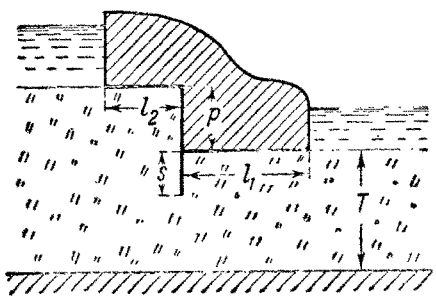
$$\frac{u_8}{v_6} = \frac{k'}{k^2}.$$

Так как для обычных флютбетов t/l мало, то k будет близким к единице, k' — к нулю. Поэтому

$$u_8 < v_6,$$

и это неравенство усиливается с удлинением флютбета.

§ 16. О фильтрации под перепадами. Перепады устраиваются в местах с крутым уклоном для усиления гашения напора (фиг. 100). Схема предыдущего параграфа содержит как частный случай и перепад со шпунтами.



Фиг. 100.

М. И. Базанов [7] применил метод Н. Н. Павловского к расчету фильтрации под одноступенчатым перепадом, без шпунта и со шпунтом. Те же схемы были рассмотрены Н. Н. Павловским и Е. А. Замариным [2, 3] для проницаемого грунта бесконечной глубины.

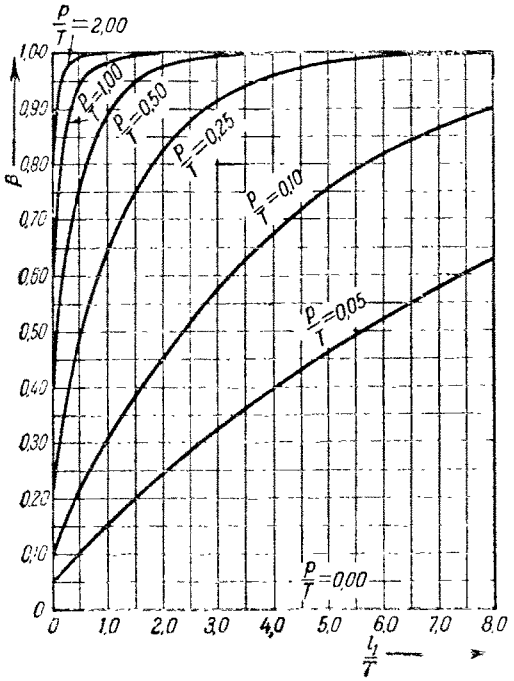
Для первого случая расход вычисляется по формуле

$$Q = \varkappa H \frac{K'}{K},$$

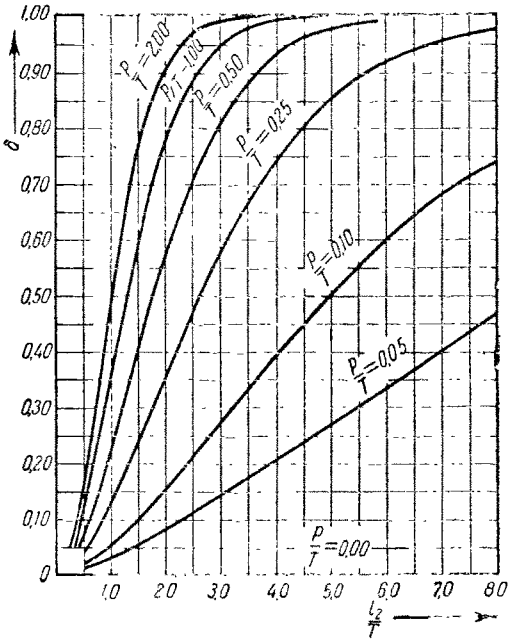
где модуль k определяется с помощью равенства

$$k = \sqrt{\frac{2(\beta + \delta)}{(1 + \beta)(1 + \delta)}}.$$

Для величин β и δ М. И. Базанов приводит графики (фиг. 101 и 102), дающие зависимость этих параметров соответственно от p/T и l_1/T и от p/T и l_2/T (см. обозначения на фиг. 100). На фиг. 103



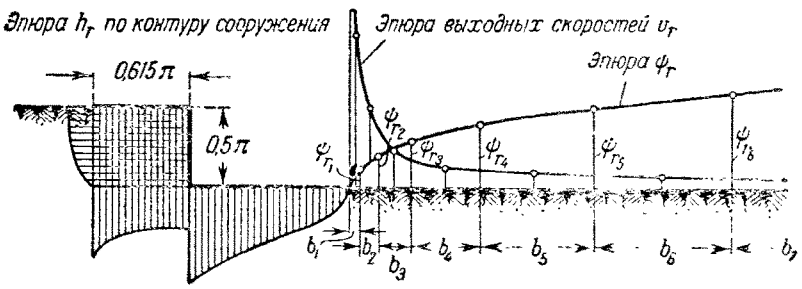
Фиг. 101.



Фиг. 102.

приведена эпюра выходных скоростей v_r, приведенных напоров h_r и расходов ψ_r для одного частного случая.

Для перепада со шпунтом β и δ определяются более сложно, так как зависят еще от одного отношения, s/p, т. е. отношения длины



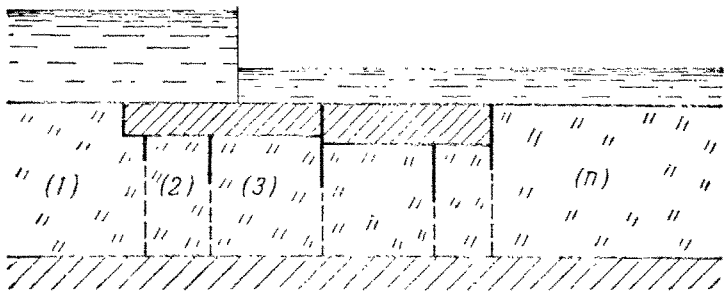
Фиг. 103.

шпунта к глубине ступени. Зависимости β и δ от отношений p/T, l_1/T, l_2/T при $s/p = 0{,}5$ и 1 также приведены М. И. Базановым в виде графиков.

Г. МНОГОШПУНТОВЫЕ СХЕМЫ

§ 17. Метод фрагментов. Если рассматривается флютбет с несколькими шпунтами, то сильно усложняется формула для отображения на полуплоскость области движения, что мы видели на примерах, в частности в § 13. При этом увеличивается число параметров, подлежащих определению, так как каждый шпунт дает две или три новые вершины в области движения. Ряд случаев с двумя, тремя и даже четырьмя шпунтами исследовали с помощью точной теории Н. Н. Павловский [1], В. С. Козлов [4], П. Ф. Фильчаков [9] и другие авторы, но, как мы видели, вычисления в этих случаях являются сложными.

Н. Н. Павловский предложил *метод фрагментов*, который применим для многошпунтовой схемы для проницаемого слоя конечной глубины. Этот метод состоит в том, что область движения разбивается вертикальными прямыми, проходящими через концы шпунтов,



Фиг. 104.

на участки — фрагменты. Линии раздела (пунктирные прямые фиг. 104) принимаются за линии равного напора. В действительности они отличаются от эквипотенциалей, но тем ближе к ним, чем меньше глубина проницаемого слоя.

Предположим, что мы можем рассчитать движение для каждого из n фрагментов нашей области. В частности, допустим, что вычислен расход каждого фрагмента

$$Q=\frac{\varkappa H_m}{\Phi_m} \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{17.1}$$

где H_m — потеря напора при фильтрации через m-й фрагмент, а Φ_m — *модуль формы* этого фрагмента, т. е. безразмерная величина, зависящая от формы фрагмента. Так, для n-го фрагмента (фиг. 104) на основании формул § 11 имеем $\Phi_n=\frac{2K}{K'}$ при $k=\sin\frac{\pi S}{2T}$.

Так как расход через все фрагменты один и тот же, то

$$Q=\frac{\varkappa H_1}{\Phi_1}=\frac{\varkappa H_2}{\Phi_2}=\ldots=\frac{\varkappa H_n}{\Phi_n}.$$

Складывая числители и знаменатели написанных отношений, получим:

$$Q = \varkappa \frac{\sum H_m}{\sum \Phi_m}.$$

Но сумма всех потерь напора равна действующему напору H (разности уровней воды в верхнем и нижнем бьефах). Поэтому окончательно расход выразится так:

$$Q = \frac{\varkappa H}{\sum_{m=1}^{n} \Phi_m}. \tag{17.2}$$

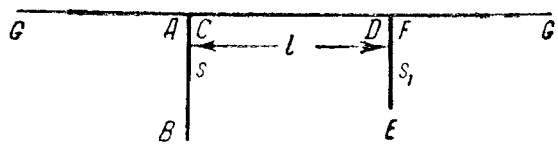
Каждый из потерянных напоров можно теперь вычислить по формуле

$$H_m = \frac{\Phi_m}{\sum_{s=1}^{n} \Phi_s} H. \tag{17.3}$$

Зная все напоры H_m, можно произвести расчет элементов движения каждого типового фрагмента [1]), а следовательно, и произвольной области.

Доказано, что метод фрагментов, основанный на введении искусственных эквипотенциалей в напорном потоке, не может занижать величину расхода против точного решения [18]. (При введении в напорном потоке искусственных линий тока величина фильтрационного расхода, напротив, не может быть больше, чем при точном решении.)

§ 18. Многошпунтовые схемы в грунте бесконечной глубины. В случае проницаемого слоя большой глубины метод фрагментов становится неприменимым. Н. Т. Мелещенко [8] предложил для этого случая *метод разворачивания шпунтов*. Этот метод был развит П. Ф. Фильчаковым. Сущность метода мы поясним на двухшпунтовой схеме плоского флютбета (фиг. 105). Произведем конформное отображение на нижнюю полуплоскость ζ области с первым шпунтом, выбросив второй шпунт. Выберем отображение в такой форме:



Фиг. 105.

$$\zeta = \sqrt{z^2 + s^2}. \tag{18.1}$$

Оно разворачивает шпунт длины s в отрезок ABC оси ξ, причем ширина отрезка будет равной $2s$.

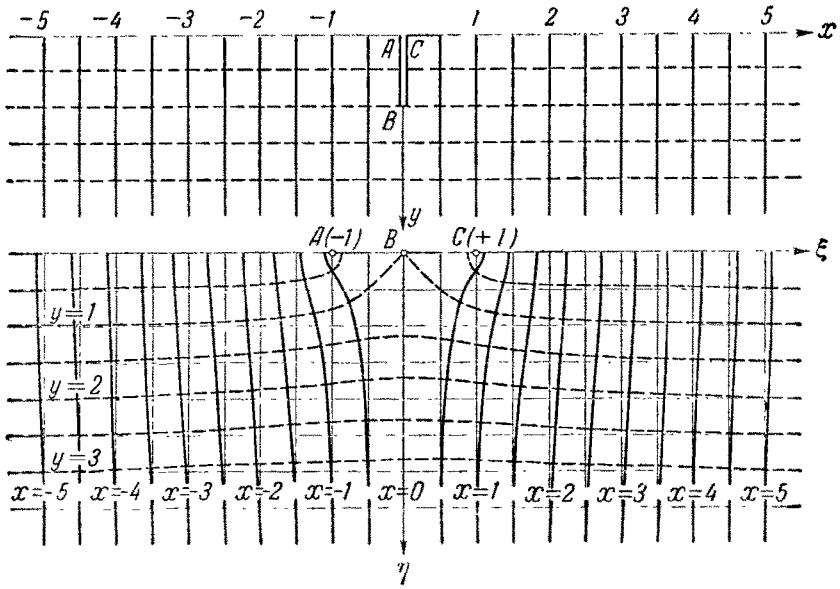
---

[1]) С. В. Козловым построены номограммы, которые приведены в его книге [4], а частично — в книге В. И. Аравина и С. Н. Нумерова [6].

Разделяя в (18.1) действительную и мнимую части, получим:

$$\left.\begin{aligned}\xi^2 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(s^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}+s^2+x^2-y^2\right],\\ \eta^2 &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{(s^2+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}-s^2-x^2+y^2\right].\end{aligned}\right\} \qquad (18.2)$$

На фиг. 106 представлена сетка линий $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ на плоскости x, y и на плоскости ξ, η при $s = 1$.



Фиг. 106.

Второй шпунт расположен на расстоянии l от первого. Подставив $x = l$ в (18.2) и полагая $y \to \infty$, найдем, раскрыв неопределенность:

$$\lim_{y \to \infty} \xi^2 = l^2.$$

Следовательно, та кривая, в которую перейдет линия $x = l$ после преобразования (18.1), имеет асимптоту

$$\xi = l.$$

На оси ξ эта кривая отсекает отрезок

$$\xi_1 = \sqrt{l^2+s^2} = l\sqrt{1+\frac{s^2}{l^2}} = l_1. \qquad (18.3)$$

Чем больше l, тем меньше ξ_1 отличается от l и тем меньше, следовательно, искажается второй шпунт.

Итак, теперь на плоскости ζ вместо двух прямолинейных шпунтов имеется один, несколько искривленный. Заменяя его близким к нему вертикальным отрезком, длину которого обозначим через s_2, мы вместо двухшпунтовой схемы получим более простую — одношпунтовую.

Если мы произведем еще одно преобразование, на новую полуплоскость ζ', то наш контур $GABCDEFG$ теперь развернется в флютбет общей длины L. Новое преобразование будет:

$$\left.\begin{aligned} z' + l_1 &= \sqrt{z^2 + s_2^2}, \\ z &= \sqrt{(\sqrt{l^2 + s_2^2} + \zeta')^2 - s_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18.4}$$

Напор вдоль такого флютбета, как мы видели, распределяется по закону (см. главу II, § 12)

$$h = \frac{H}{\pi} \arccos\left(\frac{2\xi'}{L} - 1\right),$$

где ξ' — расстояние от левого конца флютбета.

Перенеся это распределение с помощью обратных преобразований на первоначальный контур со шпунтами, получим приближенное значение напора в точках этого контура.

Вычисление выходной скорости можно произвести так. После первого преобразования, когда у нас получился флютбет с одним шпунтом, вычислим скорость для этого случая, равную $\frac{d\omega}{d\zeta}$. Тогда скорость на плоскости z будет:

$$w = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d\omega}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta},$$

что даст более простое выражение для скорости, чем при прямом решении задачи для первоначальной схемы.

Если число шпунтов больше двух, то процесс выпрямления шпунтов можно продолжить до получения простой схемы.

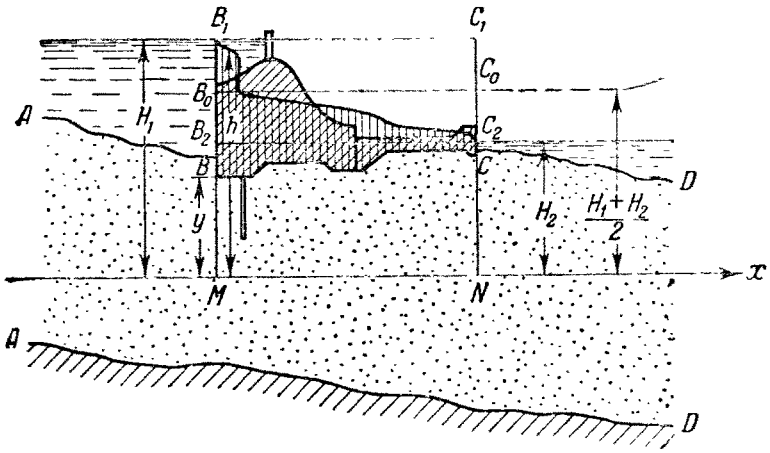
П. Ф. Фильчаков обратил внимание на то, что линии $y = \text{const}$ фиг. 106 с глубиной выпрямляются, становясь почти горизонтальными прямыми на глубине 4—5 длин шпунта. Поэтому метод выпрямления шпунтов применим и для слоя конечной глубины. П. Ф. Фильчаковым [10] даны таблицы для расчета плоских флютбетов со шпунтами в слое бесконечной глубины. С помощью схемы одноступенчатого перепада дается приближенный способ расчета также для флютбетов конечной толщины.

Д. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ НА ОСНОВАНИЕ ПЛОТИНЫ

§ 19. Главный вектор сил давления. Рассматривая плоское движение грунтовых вод под гидротехническим сооружением, выделим часть этого сооружения, ограниченную двумя вертикальными плоскостями, одна из которых есть плоскость фиг. 107, другая, ей параллельная, отстоит от нее на единицу длины.

Обозначим через α угол нормали к контуру с осью x, через θ — угол между касательной к контуру и осью x. При этом поло-

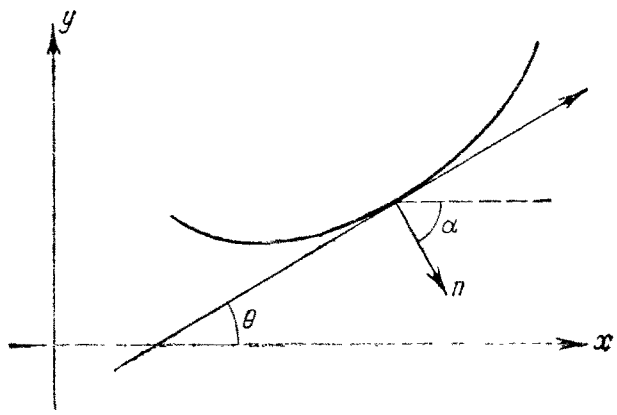
жительным направлением дуги будем считать направление от точки B к точке C контура основания, а положительным направлением нормали — направление внутрь области движения. Тогда направление n



Фиг. 107.

будет соответствовать направлению оси x, направление касательной — направлению оси y.

Обозначим через dF элемент силы давления, действующий на площадку, в виде криволинейного прямоугольника, одна сторона которого есть элемент дуги ds контура BC, другая имеет длину, равную единице, и направлена перпендикулярно к плоскости чертежа.



Фиг. 108.

Так как сила давления направлена по нормали к контуру и противоположна выбранному нами направлению нормали, то будем иметь, полагая

$$dF = dX + i\,dY, \quad (19.1)$$

следующие выражения проекций dX и dY силы dF на оси координат:

$$dX = -p\cos(n, x)\,ds = -p\cos\alpha\,ds,$$
$$dY = -p\cos(n, y)\,ds = -p\sin\alpha\,ds.$$

По чертежу фиг. 108 видно, что

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta,\\ \sin\alpha &= \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta.\end{aligned}\right\} \quad (19.2)$$

Поэтому можно написать:

$$dX + i\,dY = -p(\sin\theta - i\cos\theta)\,ds = pi(\cos\theta + i\sin\theta)\,ds.$$

Но

$$\cos\theta\,ds = dx, \quad \sin\theta\,ds = dy,$$

так что

$$dF = dX + i\,dY = pi(dx + i\,dy) = pi\,dz.$$

Производя интегрирование по контуру BC, найдем главный вектор сил давления на основание плотины

$$F = X + iY = i\int_{BC} p\,dz. \tag{19.3}$$

Мы видели в главе II, что давление p в любой точке грунтового потока выражается через напорную функцию таким образом:

$$p = \gamma(h - y), \tag{19.4}$$

где $\gamma = \rho g$ — объемный вес воды. При этом, как мы знаем, h связан с потенциалом скорости φ равенством

$$h = -\frac{\varphi}{k}, \tag{19.5}$$

где k — коэффициент фильтрации.

Подставляя (19.4) в (19.3), найдем:

$$X + iY = i\gamma\int_{BC}(h - y)\,dz \tag{19.6}$$

или, разделяя действительные и мнимые части,

$$X = -\gamma\int_{BC}(h - y)\,dy, \quad Y = \gamma\int_{BC}(h - y)\,dx. \tag{19.7}$$

Рассмотрим крайние точки B и C, в которых основание плотины соединяется с границей воды в верхнем и нижнем водоемах. Обозначив через H_1 и H_2 уровни воды в верхнем и нижнем бьефах, ординаты точек B и C через y_1 и y_2, давления в точках B и C через p_1 и p_2, будем иметь:

$$\frac{p_1}{\gamma} = H_1 - y_1, \quad \frac{p_2}{\gamma} = H_2 - y_2,$$

$$h(x_1, y_1) = H_1, \quad h(x_2, y_2) = H_2.$$

Предположим, что мы знаем распределение напора вдоль основания плотины. При этом считаем, что прямая, параллельная оси ординат, пересекает контур BC лишь в одной точке.

Тогда величина Y, определяемая уравнением (19.7), будет равна весу заштрихованной вертикальными прямыми области фиг. 107, если

бы она была заполнена водой, при единице длины плотины. Так как

$$H_2 < h < H_1,$$

то для величины Y получаем неравенство

$$\gamma \int_{BC} (H_2 - y)\, dx < Y < \gamma \int_{BC} (H_1 - y)\, dx.$$

Г. Н. Положий ввел понятия о верхнем и нижнем гидростатических давлениях $\Gamma_в$ и $\Gamma_н$, полагая

$$\Gamma_в = \gamma \int_{BC} (H_1 - y)\, dx, \quad \Gamma_н = \gamma \int_{BC} (H_2 - y)\, dx. \tag{19.8}$$

Очевидно, что $\Gamma_н$ есть вес воды в объеме, образованном движением площади BCC_2B_2 на единицу длины перпендикулярно к площади чертежа. Точно так же $\Gamma_в$ есть вес воды в объеме, образованном площадью BCC_1B_1.

Если область движения представляет фигуру, симметричную относительно оси ординат, то функция

$$h - \frac{H_1 + H_2}{2}$$

или, иначе, напор, отсчитываемый от средней линии между линиями $y = H_1$ и $y = H_2$, будет нечетной функцией, и площадь, ограниченная линиями B_1C_2 и BC будет равна площади между BC и отрезком B_0C_0, лежащим посредине между B_1C_1 и B_2C_2 (фиг. 107).

Следуя Г. Н. Положему, введем понятие о среднем гидростатическом давлении

$$\Gamma_{ср} = \gamma \int_{BC} \left(\frac{H_1 + H_2}{2} - y \right) dx. \tag{19.9}$$

В случае симметричной области имеем, что вертикальная составляющая сил давления равна среднему гидростатическому давлению:

$$Y = \Gamma_{ср}.$$

В общем случае можно написать:

$$Y = \gamma \int_{BC} \left(h - \frac{H_1 + H_2}{2} \right) dx + \gamma \int_{BC} \left(\frac{H_1 + H_2}{2} - y \right) dx$$

или

$$Y = \Gamma_{ср} + \gamma \int_{BC} \left(h - \frac{H_1 + H_2}{2} \right) dx. \tag{19.10}$$

Интегрированием по частям можно преобразовать интеграл

$$\int_{BC} \left(h - \frac{H_1 + H_2}{2} \right) dx = \frac{H_2 - H_1}{2} (x_1 + x_2) - \int_{BC} x\, dh.$$

Если ось y провести на равном расстоянии от точек B и C, то $x_1 + x_2 = 0$, и мы получим:

$$Y = \Gamma_{ср} - \gamma \int_{H_1}^{H_2} x\, dh. \tag{19.11}$$

По этой формуле нетрудно подсчитать Y, например, в том случае, когда построено семейство линий равного напора.

Обратимся к горизонтальной составляющей результирующей сил давления X. Предположим, что прямая, параллельная оси x, пересекает контур BC лишь в одной точке. (Это может иметь место в перепадах и быстротоках, но не имеет места в плотинах.) В этом случае можно дать неравенство для X

$$\gamma\left(H_2 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)|y_1 - y_2| < |X| < \gamma\left(H_1 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)|y_1 - y_2|.$$

Обозначим высоту $|y_1 - y_2|$ через d. Если расположить ось абсцисс посредине между $y = y_1$ и $y = y_2$, то будем иметь:

$$y_1 + y_2 = 0,$$

и можно написать:

$$\gamma H_2 d < |X| < \gamma H_1 d.$$

Нужно иметь в виду, что при этом H_1 и H_2 отсчитываются от указанной средней линии.

Интегрируя выражение (19.7) для X по частям, получим:

$$X = -\gamma(H_2 y_2 - H_1 y_1) + \gamma \int_{BC} y\, dh. \tag{19.12}$$

Обращаясь к общему случаю контура BC, обозначим через ρ_1 и ρ_2 ординаты самой верхней и самой нижней точек контура BC. Тогда для интеграла

$$\gamma \int y\, dh$$

будем иметь оценку

$$\gamma\rho_2 H < \gamma \int_{BC} y\, dh < \gamma\rho_1 H,$$

где $H = H_2 - H_1$.

Аналогичным образом получается оценка для Y в случае, если точки B и C не являются самой левой и самой правой точками основания сооружения.

Отметим, что в формулах (19.11) и (19.12) под знаком интеграла можно заменить h на $\Omega = h + iq$; так как q постоянно вдоль контура BC, то можно принять $q = 0$.

Получим:

$$X = B_{ср} - \gamma \int_{H_1}^{H_2} y\, d\Omega, \quad Y = \Gamma_{ср} - \gamma \int_{H_1}^{H_2} x\, d\Omega$$

или

$$X + iY = B_{ср} + i\Gamma_{ср} + \gamma i \int_{H_1}^{H_2} z\, d\Omega,$$

где

$$B_{ср} = \gamma (H_1 + H_2) y_2 \quad \text{при} \quad y_2 + y_1 = 0.$$

Знание вертикальной составляющей сил давления Y имеет важное значение в вопросе о невсплывании плотины. А именно, обозначим через Y' вес плотины, через Y'' — вертикальную составляющую равнодействующей сил давления жидкости на наземную часть плотины (для плотины с вертикальными боковыми стенками $Y'' = 0$). Тогда, считая, что отсутствуют силы сцепления между основанием плотины и частицами грунта, получаем необходимое условие для невсплывания

$$Y'' + Y' > Y.$$

В гидротехнике рассматривается величина

$$k_в = \frac{Y'' + Y'}{Y},$$

называемая *коэффициентом устойчивости на всплывание* [20]. Неравенства, установленные для Y, дают возможность также получить оценку для $k_в$.

Заметим, что вопросы силового воздействия грунтового потока на скелет грунта и на подошву сооружений представляют значительный практический интерес, так как решение их определяет многие детали гидротехнического проектирования. Однако, несмотря на наличие многих теоретических и экспериментальных исследований этой задачи, пока еще отсутствует единая точка зрения на способы расчета давления грунтового потока на грунт и на сооружения; не ясна физика воздействия потока на сооружения. Можно указать на специальную дискуссию, посвященную этой задаче [21].

§ 20. Главный момент сил давления. Для выяснения вопроса об устойчивости гидротехнического сооружения представляет интерес вычисление главного момента сил давления относительно прямой, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения плотины, или, что то же, момента относительно некоторой точки z_0 плоскости поперечного сечения плотины. В особенности интересен случай, когда z_0 совпадает с одним из концов плотины.

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$. Выражение главного момента M сил давления относительно z_0 имеет вид [27]

$$M = -\int_{BC} p\, [(x - x_0)\cos(n,\ y) - (y - y_0)\cos(n,\ x)]\, ds. \quad (20.1)$$

Согласно формулам (19.2) получим:

$$M = \int_{BC} p\,[(x-x_0)\,d(x-x_0)+(y-y_0)\,d(y-y_0)] = \frac{1}{2}\int_{BC} p\,d\,|z-z_0|^2.$$

Подставляя $p=\gamma(h-y)$ и производя интегрирование по частям, будем иметь:

$$M = \frac{1}{2}\gamma\,[H_2|z_2-z_0|^2-H_1|z_1-z_0|^2] - \frac{\gamma}{2}\int_{BC} y\,d\,|z-z_0|^2 + \\ + \frac{1}{2}\gamma\int_{H_2}^{H_1}|z-z_0|^2\,dh. \qquad (20.2)$$

Для последнего слагаемого можно дать следующие неравенства, если принять z_0 за одну из крайних точек, $B(z_1)$ или $C(z_2)$.

Положим $z_0=z_1$. Тогда

$$M(z_1) = \frac{1}{2}\gamma H_2|z_2-z_1|^2 - \frac{\gamma}{2}\int_{BC} y\,d\,|z-z_1|^2 + \frac{\gamma}{2}\int_{H_2}^{H_1}|z-z_1|^2\,dh. \qquad (20.3)$$

Теперь примем во внимание, что

$$0 \leqslant |z-z_1| \leqslant |z_2-z_1|.$$

Отсюда следует неравенство

$$0 < \frac{\gamma}{2}\int_{H_2}^{H_1}|z-z_1|^2\,dh < \frac{\gamma}{2}|z_2-z_1|^2(H_1-H_2).$$

Остальные члены формулы для $M(z_1)$ вычисляются согласно геометрической форме плотины.

В качестве примера найдем результирующий вектор и момент сил давления на плоский флютбет в слое бесконечной глубины, приняв за z_0 левый конец флютбета, примыкающий к верхнему бьефу.

Для этого случая мы нашли выражение напора в виде

$$h = -\frac{H_1-H_2}{\pi}\arcsin\frac{x}{l}+\frac{H_2+H_1}{2}.$$

С помощью формул (19.7) получаем:

$X=0$,

$$Y = \gamma\frac{H_1+H_2}{2}B - \frac{\gamma(H_1-H_2)}{\pi}\int_{-l}^{l}\arcsin\frac{x}{l}\,dx = \gamma B\frac{H_1+H_2}{2} = \Gamma_{ср}.$$

Здесь $B=2l$ — ширина основания плотины.

По формуле (20.3) найдем, так как у нас $z_1 = -l$, $y = 0$,

$$M(-l) = 2\gamma H_2 l^2 + \frac{\gamma}{2}\int_{-l}^{l}(x+l)^2\frac{H_1 - H_2}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Интеграл правой части равен

$$\int_{-l}^{l}\frac{(x^2 + 2lx + l^2)\,dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{3\pi}{2}l^2.$$

Поэтому для опрокидывающего момента относительно точки $z_0 = -l$ получаем:

$$M(-l) = \frac{3H_1 + 5H_2}{16}\gamma B^2.$$

Очевидно, что для момента относительно точки $z_0 = l$ будем иметь:

$$M(l) = -\gamma\frac{3H_2 + 5H_1}{16}B^2.$$

§ 21. О движении граничных точек отображаемых областей. Вопрос о характере движения граничных точек отображаемых областей представляет интерес для теории фильтрации, так как позволяет получать некоторые качественные выводы относительно изменения расхода при деформации контура области движения. Так как доказательство теоремы, данной Г. Н. Положим, опирается на так называемую лемму Шварца, то мы приведем здесь формулировку этой леммы [26].

Лемма Шварца. Если функция $w = f(z)$, голоморфная (или аналитическая) в круге $|z| < 1$, удовлетворяет условию

$$f(0) = 0 \tag{21.1}$$

и если $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, то имеем

$$|f(z)| \leqslant |z|$$

всюду в круге $|z| < 1$. Если знак равенства

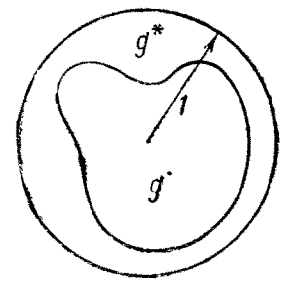
$$|f(z)| = |z|$$

имеет место хотя бы в одной внутренней точке (кроме точки $z = 0$, в которой это равенство выполняется по условию), то оно имеет место во всех точках области, и тогда $f(z) = e^{\alpha i}z$.

Другими словами, лемма Шварца утверждает, что если при условии (21.1) модуль отображающей функции меньше единицы, то он будет в соответствующих точках и меньше модуля z. Геометрически это означает, что если $w = f(z)$ переводит область единичного круга в область, внутреннюю по отношению к этому кругу, то с помощью

функции $f(z)$ всякая точка либо приближается к началу координат, либо отображение представляет вращение около начала координат.

Обозначим через g (фиг. 109) данную область, содержащуюся в круге радиуса единица, через g^* — область круга. Точка O является неподвижной точкой преобразования области g в область g^*. Когда область g переходит в область g^*, точка O является отталкивающей, так как она раздвигает точки области g, приближая их к контуру круга.



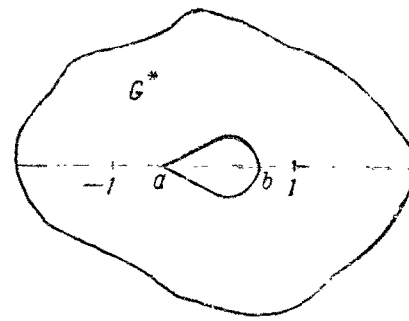
Фиг. 109.

Если вместо круга взять произвольную область, содержащую данную область g, то лемма Шварца остается в силе. В качестве неподвижной точки может быть взята любая, в том числе и бесконечно удаленная точка, которая рассматривается при этом как внутренняя точка области.

Теперь приведем теоремы Г. Н. Положего в изложении автора [27].

Пусть будет G — односвязная область в плоскости $z = x + iy$, G^* — односвязная область, содержащая G и имеющая с G частично общую границу в виде некоторой жордановой кривой Г.

Теорема. При конформном отображении односвязной области G на произвольную область G^*, содержащую G и имеющую с G частично общую границу в виде некоторой жордановой кривой Г, на открытой (т. е. не содержащей своих концов) кривой Г не может быть больше трех неподвижных точек. Если таких точек имеется три, то две крайние из них — притягивающие, а средняя — отталкивающая; если таких точек только две, то одна из них — притягивающая, другая — не притягивающая.



Фиг. 110.

В самом деле, при наличии на открытой кривой Г трех неподвижных точек без ограничения общности можем считать, что G^* совпадает с верхней полуплоскостью, G — с областью, лежащей в верхней полуплоскости, Г — с интервалом вещественной оси, лежащим вне отрезка $[a, b]$, $-1 < a \leqslant b < 1$, и неподвижные точки — с точками $z = 1$, $z = \infty$ и $z = -1$. Пусть H есть область, полученная склеиванием области G с областью, ей симметричной относительно вещественной оси, H^* — ее образ в плоскости функции $w = f(z)$, отображающей G на G^*. Область H, разрезанная вдоль отрезков $[-1, a]$ и $[b, 1]$, очевидно, преобразуется функцией $w = f(z)$ в плоскость, разрезанную вдоль отрезка $[-1, 1]$, и, следовательно, по лемме Шварца точка $z = \infty$ должна быть отталкивающей неподвижной точкой и никаких других неподвижных точек на интервале $|x| > 1$ не

будет. Область H, разрезанная вдоль отрезков $[-1, a]$ и $[b, 1-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<1-b$, преобразуется функцией $w=f(z)$ в плоскость, разрезанную вдоль некоторого отрезка $[-1, 1-\varepsilon']$, $\varepsilon'>0$. Предположение о том, что $\varepsilon'\geqslant\varepsilon$, приводит к противоречию с тем, что при отображении какой-либо области на область, ей внутреннюю, может быть не больше одной внутренней неподвижной точки. Следовательно, точка $z=1$ будет притягивающей неподвижной точкой и на интервале $(b, 1)$ никаких неподвижных точек не будет. Область H, разрезанная вдоль отрезков $[-1+\varepsilon, a]$ и $[b, 1]$, $0<\varepsilon<1+a$, преобразуется функцией $w=f(z)$ в плоскость, разрезанную вдоль отрезка $[-1+\varepsilon', 1]$, где ε' — некоторое положительное число. Предположив, что $\varepsilon'\geqslant\varepsilon$, также приходим к противоречию. Следовательно, точка $z=-1$ также будет притягивающей неподвижной точкой и на интервале $(-1, a)$ неподвижных точек нет. В том случае, когда на открытой кривой Γ имеется только две неподвижные точки, отобразим область G на G^* так, чтобы эти две неподвижные точки были притягивающими. Это возможно в силу вышесказанного. Отображая теперь область G^* саму на себя с помощью дробно-линейного преобразования при тех же заданных неподвижных точках, видим, что одна из них будет притягивающей, а другая — не притягивающей. Этим теорема доказана.

Следствие 1. Если P и Q — концы кривой Γ, то при наличии на открытой кривой Γ трех неподвижных точек A, B, C все точки полузакрытой кривой $[P, B)$ (т. е. содержащей точку P и не содержащей точки B), кроме точки A, и все точки полузакрытой кривой $(B, Q]$, кроме точки C, получают ненулевые смещения в направлении к точке A и, соответственно, в направлении к точке C.

Следствие 2. В случае, когда на открытой кривой Γ имеется только две неподвижные точки A и B, если для определенности считать притягивающей точку A, все точки полузакрытой кривой $[P, B)$, кроме точки A, получают ненулевые смещения в направлении к точке A, а все точки открытой кривой (B, Q) получают ненулевые смещения в одном и том же направлении по отношению к точке B.

Следствие 3 (о закрепленном конце). Если конец Q кривой Γ закреплен и на открытой кривой Γ имеются две неподвижные точки A и B, то все точки полузакрытой кривой $[P, B)$, кроме точки A, получают ненулевые смещения в направлении к точке A, а все точки открытой кривой (A, Q), кроме точки B, получают ненулевые смещения в направлении от точки B.

Следствие 4 (о закрепленных концах). Если концы P и Q кривой Γ закреплены и на открытой кривой Γ имеется неподвижная точка A, то все точки открытой кривой Γ, кроме точки A, получают ненулевые смещения в направлении от точки A.

Следствие 5. Пусть G^* — область, содержащая односвязную область G и имеющая с G частично общую границу в виде нескольких жордановых кривых. Если при отображении G на G^* на одной

из этих кривых имеются три или только две неподвижные точки, то на каждой другой из этих кривых может быть не больше одной неподвижной точки, и если такая точка имеется, то она притягивающая.

Теорема. Пусть G и G^* — односвязные области, частично содержащие друг друга и имеющие в качестве общей части границ только две жордановы кривые. Тогда, если на одной из этих кривых имеется неподвижная точка, то на другой из них может быть не больше двух неподвижных точек и если такие две точки имеются, то одна из них притягивающая, другая отталкивающая.

В самом деле, отображение G на G^* с тремя неподвижными точками можно получить путем выдавливания той части границы G, которая находится внутри G^*, и путем вдавливания той части границы G, которая находится вне G^*. При этом по предыдущей теореме из двух неподвижных точек, лежащих на одной и той же жордановой кривой, одна будет притягивающей, другая отталкивающей, и никаких других неподвижных точек на данной жордановой кривой быть не может.

Следствие (о свободной средней точке). Пусть границы односвязных областей G и G^* составлены из общей им жордановой кривой Γ и соответственно из жордановых кривых γ и γ^*, пересекающихся в некоторой точке P. Тогда при отображении G на G^* при условии, что концы кривой Γ закреплены и одна из точек открытой кривой остается неподвижной, точка P получает ненулевое смещение вдоль кривой γ^* в направлении к ее концу, подходящему к границе области G изнутри.

§ 22. Приложения к движению грунтовых вод под плотинами. Рассмотрим несколько простейших следствий из теорем, приведенных в предыдущем пункте [27, 28].

Пусть имеем движение грунтовых вод под гидротехническим сооружением произвольного основания (фиг. 107) с водоупором произвольной формы AD, с границами водоемов AB и CD. Точки A и D могут быть и не в бесконечности. Граничные кривые кусочно-гладкие.

Обозначим через G область движения $ABCD$. Пусть будет G_1 — область с теми же вершинами A, B, C, D, но полученная из G путем деформации некоторых границ, которые заменяются кусочно-гладкими кривыми, лежащими частично или полностью внутри G. Тогда имеет место теорема:

Теорема 1. При неизменном напоре расход уменьшится, если заменены непроницаемые границы BC или AD, и увеличится, если заменены (вдавлены) границы водоемов.

В самом деле, пусть будет g_1 — образ G_1 на плоскости комплексного потенциала ω. Отобразим прямоугольник g_1 на нижнюю полуплоскость ζ при неподвижных точках $\zeta = -1, 1, \frac{1}{k}$. В силу теоремы

о движении граничных точек точка $\zeta = -\frac{1}{k}$ приблизится к точке $\zeta = -1$ при замене BC или DA и удалится от точки $\zeta = -1$, если заменяются AB или CD. В первом случае Q уменьшается, во втором — увеличивается.

Теорема 2. При неизменном напоре H величина вектора скорости фильтрации на общей части границ областей G и G_1 уменьшается вблизи точек B и C, если G_1 получается из G заменой непроницаемой границы BC, и уменьшается вблизи D и A, если заменяется водоупор AD.

Действительно, пусть g_1^* — образ G на плоскости ω. Пусть область G_1 получена из G заменой BC. Отобразим g_1^* на G^* при неподвижных точках B^*, C^*, D^*. При этом B^* и C^* будут притягивающими точками.

Следствие. Если при замене BC части BB' и CC' остаются общими для G и G_1, то давление во всех точках BB' увеличится, во всех точках CC' уменьшится.

В частности, из изложенных предложений вытекает, что если в границе водоема нижнего бьефа сделать выемку, то выходные скорости, т. е. скорости вдоль границы нижнего водоема, уменьшатся (при этом Q увеличится). Выходные скорости уменьшатся также, если на границе верхнего бьефа устроить бугор (расход при этом уменьшится).

В другой форме вариационные принципы и их применение к задачам о напорной фильтрации даны М. А. Лаврентьевым [22, 23].

ГЛАВА IV

ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. Функция Жуковского. В плоском установившемся движении грунтовых вод между потенциалом скорости и давлением имеет место зависимость (глава I, § 11)

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right),$$

которую можно переписать в виде

$$-\frac{k}{\rho g} p = \varphi + ky.$$

Следовательно, выражение

$$\theta_1 = \varphi + ky \tag{1.1}$$

лишь постоянным множителем отличается от давления.

Функция θ_1 является гармонической по x, y, так как φ и y — гармонические функции. Сопряженной с θ_1 является функция

$$\theta_2 = \psi - kx. \tag{1.2}$$

Обозначим $\theta_1 + i\theta_2$ через θ:

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \omega - ikz \tag{1.3}$$
$$(\omega = \varphi + i\psi,\ z = x + iy).$$

Функцию (1.3) и всякую функцию, отличающуюся от нее лишь постоянным множителем, мы будем называть *функцией Жуковского* [1].

Можно по аналогии с (1.1) ввести обозначение

$$\theta_2 = -\frac{k}{\rho g} p', \tag{1.4}$$

тогда

$$\theta = -\frac{k}{\rho g}(p + ip'). \tag{1.5}$$

Можно назвать комплексным давлением выражение

$$P = p + ip', \tag{1.6}$$

и тогда функция Жуковского будет пропорциональна комплексному давлению.

На свободной поверхности грунтового потока давление равно атмосферному. В случае наличия капиллярности, как мы видели (глава II, § 2), давление также является постоянным. Если принять атмосферное давление равным нулю, то на границе капиллярной каймы следует положить

$$p = -\rho g h_к, \tag{1.7}$$

где $h_к$ — высота капиллярного поднятия воды в грунте.

Таким образом, видим, что на свободной поверхности действительная часть функции Жуковского является постоянной. Это и обусловливает значение функции Жуковского.

Вместо (1.1) и (1.2) можно написать соотношения, содержащие напор и приведенный расход:

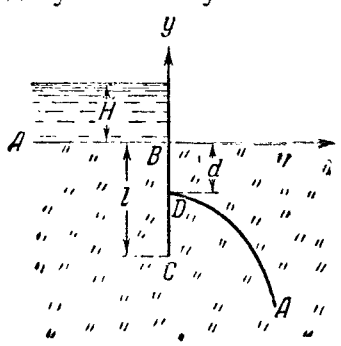
$$h = -\frac{\varphi}{k}, \quad q = -\frac{\psi}{k}.$$

Приняв $\rho g = 1$ и измеряя p и p' в метрах, будем иметь:

$$p = h - y, \quad p' = q + x.$$

Покажем применение функции Жуковского к различным задачам.

§ 2. Шпунт Жуковского. В качестве первого примера рассмотрим задачу Н. Е. Жуковского. Шпунт обтекается под действием напора H. Тогда за шпунтом вода поднимается на некоторую высоту CD (фиг. 111) и образует свободную поверхность DA.



Фиг. 111.

На свободной поверхности имеем условие

$$\theta_1 = \varphi + ky = kh_к. \tag{2.1}$$

Вдоль границы AB будет:

$$\varphi = -kH. \tag{2.2}$$

Вдоль шпунта положим:

$$\psi = 0. \tag{2.3}$$

Так как уравнение линии AB есть $y = 0$, то вместе с тем вдоль AB

$$\theta_1 = \varphi + ky = -kH. \tag{2.4}$$

Далее, так как вдоль шпунта BCD имеем $x = 0$, то вдоль него также

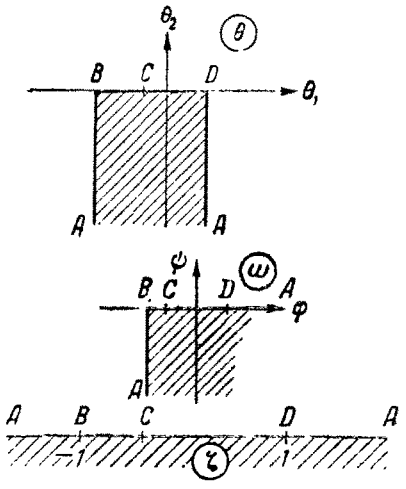
$$\theta_2 = \psi - kx = 0. \tag{2.5}$$

На плоскости Жуковского (фиг. 112) получаем полуполосу; отображение ее на нижнюю полуплоскость ζ дает:

$$0 = k\frac{H+h_к}{\pi}\arcsin\zeta - k\frac{H-h_к}{2} = \omega - ikz. \tag{2.6}$$

С другой стороны, на плоскости комплексного потенциала мы имеем простую область — прямой угол (фиг. 112), так как вдоль линии AB у нас $\varphi = -kH$, а вдоль всей остальной границы $\psi = 0$. Следовательно, можем положить:

$$\omega + kH = M\sqrt{\zeta+1}.$$



Фиг. 112.

В самом деле, вдоль BCA, где $\zeta = \xi > -1$, ω принимает действительные значения (при M действительном), т. е.

$$\psi = 0.$$

Вдоль AB, где $\zeta = \xi < -1$, получаем:

$$\omega + kH = -iM\sqrt{-\zeta-1},$$

т. е. $\varphi + kH = 0$.

Для определения M положим $\zeta = 1$. Тогда, так как в точке D имеем $\varphi = -ky + kh_к$, а $y = -d$ есть длина отрезка BD, то

$$kd + k(H + h_к) = M\sqrt{2}$$

и

$$M = \frac{k(H+h_к+d)}{\sqrt{2}}, \quad \omega + kH = \frac{k(H+h_к+d)\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{2}}. \tag{2.7}$$

Исключая ω из (2.6) и (2.7), получим для z уравнение

$$iz = \frac{1}{\sqrt{2}}(H+h_к+d)\sqrt{\zeta+1} - \frac{H+h_к}{2} - \frac{H+h_к}{\pi}\arcsin\zeta. \tag{2.8}$$

Чтобы найти скорость для любой точки области движения, продифференцируем по ζ уравнения (2.6) и (2.7):

$$\frac{d\omega}{d\zeta} - ik\frac{dz}{d\zeta} = k\frac{H+h_к}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{k(H+h_к+d)}{2\sqrt{2(\zeta+1)}}.$$

Разделив почленно левые и правые части полученных уравнений, найдем:

$$1 - ik\frac{dz}{d\omega} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{1-\zeta}}\frac{H+h_к}{H+h_к+d}.$$

На конце шпунта, в точке

$$z = -li$$

скорость обращается в бесконечность, а обратная ей величина $\frac{dz}{d\omega}$ — в нуль. При этом для ζ, соответствующего концу шпунта, получается такое значение $\zeta = \zeta_0$:

$$\zeta_0 = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{H + h_к}{H + h_к + d}\right)^2. \tag{2.9}$$

Подстановка этого выражения в (2.8) (причем z обращается в $-li$) дает длину шпунта

$$l = \sqrt{(H + h_к + d)^2 - \frac{4(H + h_к)^2}{\pi^2}} - (H + h_к) + \\ + \frac{2(H + h_к)}{\pi} \arcsin \frac{2(H + h_к)}{\pi(H + h_к + d)}. \tag{2.10}$$

Зависимость между ω и θ получается с помощью уравнений (2.6) и (2.7) в виде

$$\omega = -k\left[H - (H + h_к + d)\cos\frac{\pi(\theta - kh_к)}{2k(H + h_к)}\right].$$

Вдоль свободной поверхности $\varphi + ky = kh_к$, $\psi = 0$, $\theta = -ikx + kh_к$ и $\omega = \varphi = -ky + kh_к$. Поэтому для свободной поверхности получается уравнение

$$y = H + h_к - (H + h_к + d)\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2(H + h_к)}, \tag{2.11}$$

т. е. уравнение цепной линии.

Приведенное решение принадлежит В. В. Ведерникову [4]. Н. Е. Жуковский строил выражения для ω и θ как функции от вспомогательной комплексной переменной в виде интегралов, подинтегральные функции которых он находит по характеру особенностей — в данной задаче эти функции содержат квадратные корни в знаменателях, так как углы рассматриваемых областей прямые (см. фиг. 112). Он дает геометрическую иллюстрацию, строя изолинии на плоскости вспомогательного переменного, которые образуют по терминологии Н. Е. Жуковского *образующие* и *направляющие* сети.

В заключение этого параграфа приведем таблицу 6 зависимости величины $\frac{d}{H + h_к}$ от $\frac{l}{H + h_к}$, вычисленную В. В. Ведерниковым. Отрицательные значения $\frac{d}{H + h_к}$ означают, что вода за шпунтом поднимается выше точки B (фиг. 111).

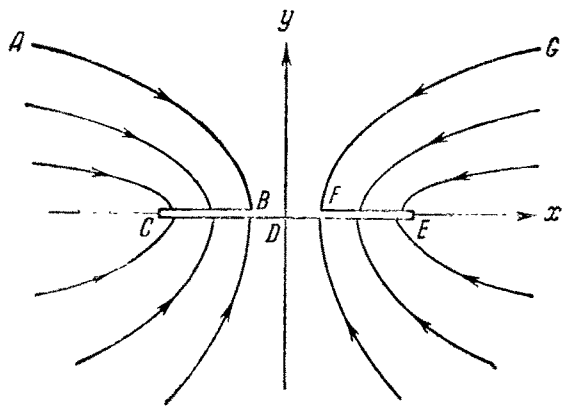
Таблица 6

Зависимость величины $\frac{d}{H+h_к}$ от $\frac{l}{H+h_к}$

$\frac{l}{H+h_к}$	0	0,074	0,213	0,64	1,10	2,066
$\frac{d}{H+h_к}$	—0,363	—0,2	0	0,5	1	2
$\frac{l-d}{H+h_к}$	0,363	0,274	0,213	0,14	0,10	0,066

Отметим, что действие капиллярности сказывается в задаче таким образом, как если бы вместо действующего напора H мы имели напор, увеличенный на высоту капиллярного поднятия, т. е. равный $H+h_к$.

§ 3. Одиночная дрена. Эта задача также рассмотрена Н. Е. Жуковским [1]. Осушительную канаву или *дрену* с очень малой глубиной воды в ней можно схематически представить в виде щели, изображенной на фиг. 113.



Фиг. 113.

На линиях AB и FG, являющихся свободными поверхностями, давление постоянно. Примем его равным нулю. Тогда можно записать условие для потенциала скорости на свободной поверхности (см. главу II, § 2) в виде

$$\varphi + ky = 0. \qquad (3.1)$$

Контур дрены $BCDEF$ является линией равного напора $\varphi = 0$. Так как для этого контура $y = 0$, то условие (3.1) выполняется также и на нем.

Таким образом, для функции Жуковского

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \varphi + ky + i(\psi - kx)$$

действительная часть равна нулю для всего контура области движения

Полуплоскости ζ отвечает полуплоскость θ, и мы можем принять:

$$\theta = a\zeta, \tag{3.2}$$

где a — постоянная, которую мы определим в дальнейшем.

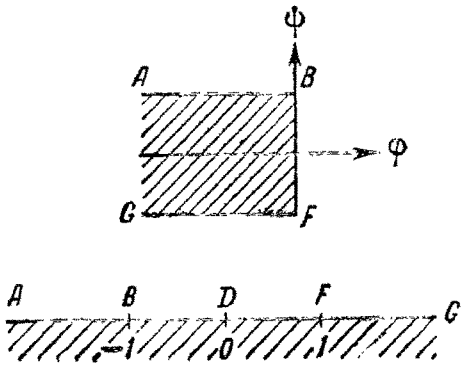
Линии AB и FG суть линии тока.

Обозначим через Q величину полного расхода дрены (на единицу ее длины). Можем принять $\psi = -\frac{Q}{2}$ вдоль FG, $\psi = \frac{Q}{2}$ вдоль AB.

Отображение области комплексного потенциала на нижнюю полуплоскость плоскости ζ (фиг. 114) дает:

$$\omega = M\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = M \arcsin\zeta. \tag{3.3}$$

При $\zeta = 1$ имеем $\varphi = 0$, $\psi = -\frac{Q}{2}$, поэтому из равенства (3.3) получим, полагая в нем $\zeta = 1$:



Фиг. 114.

$$-\frac{Qi}{2} = M\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$M = -\frac{Qi}{\pi}$$

и

$$\omega = -\frac{Qi}{\pi}\arcsin\zeta. \tag{3.4}$$

Решив это уравнение относительно ζ, найдем:

$$\zeta = \sin\frac{\pi\omega i}{Q}. \tag{3.5}$$

Подставляя это выражение ζ в (3.2) и заменяя θ на $\omega - ix\varkappa z$, получим:

$$\omega - ix\varkappa z = a\sin\frac{\pi\omega i}{Q}.$$

Решим это уравнение относительно z:

$$z = \frac{\omega}{x\varkappa i} - \frac{a}{x\varkappa i}\sin\frac{\pi\omega i}{Q}. \tag{3.6}$$

Для определения постоянной a положим $z = \frac{b_1}{2}$, где b_1 — ширина промежутка BF. При этом в точке F имеем (фиг. 114) $\varphi = 0$, $\psi = -\frac{Q}{2}$, т. е.

$$\omega = -\frac{Qi}{2}.$$

Поэтому (3.6) дает:

$$\frac{b_1}{2} = -\frac{Q}{2x\varkappa} - \frac{a}{x\varkappa i},$$

откуда находим:

$$a = -\varkappa i\left(\frac{Q}{2\varkappa} + \frac{b_1}{2}\right). \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.6), дифференцируя его по ω, найдем величину $\frac{dz}{d\omega}$, обратную скорости фильтрации:

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{w} = \frac{1}{\varkappa i} - \frac{a\pi}{\varkappa Q}\cos\frac{\pi\omega i}{Q}. \tag{3.8}$$

Точка E — конец дренажной щели — обладает тем свойством, что в ней скорость равна бесконечности и, следовательно, $\frac{1}{w} = 0$. Это дает, принимая во внимание значение a (3.7):

$$\cos\frac{\pi\omega i}{Q} = -\frac{Qi}{a\pi} = \frac{2Q}{\pi(Q + \varkappa b_1)}. \tag{3.9}$$

В точке E имеем $\varphi = 0$. Пусть Q' обозначает расход через отрезок CDE. Тогда в точке E будет:

$$\psi = -\frac{Q'}{2}, \quad \omega = -\frac{Q'i}{2}.$$

Подставляя это значение ω в (3.9) и решая последнее уравнение относительно Q', найдем:

$$Q' = 2\frac{Q}{\pi}\arccos\frac{2Q}{\pi(Q + \varkappa b_1)}. \tag{3.10}$$

Теперь определим ширину b щели по дну, считая $CDE = b$. В точке E

$$z = \frac{b}{2}, \quad \omega = -\frac{Q'i}{2}.$$

Подставляя эти значения в (3.6), получим, учитывая (3.7) и (3.9):

$$\frac{b}{2} = -\frac{Q'}{2\varkappa} + \left(\frac{Q}{2\varkappa} + \frac{b_1}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{4Q^2}{\pi^2(Q + \varkappa b_1)^2}},$$

или после подстановки Q' из (3.10)

$$b = \left(\frac{Q}{\varkappa} + b_1\right)\sqrt{1 - \frac{4Q^2}{\pi^2(Q + \varkappa b_1)^2}} - \frac{2Q}{\pi\varkappa}\arccos\frac{2Q}{\pi(Q + \varkappa b_1)}. \tag{3.11}$$

Наконец, найдем уравнение ветви свободной поверхности FG. Для этого в уравнение (3.6) подставим:

$$\varphi = -\varkappa y, \quad \psi = -\frac{Q}{2}.$$

Получим:

$$z = -\frac{\varkappa y + \frac{Qi}{2}}{\varkappa i} - \left(\frac{Q}{2\varkappa} + \frac{b_1}{2}\right)\sin\frac{\pi i}{Q}\left(\varkappa y + \frac{Qi}{2}\right).$$

Полагая $z = x + iy$, после сокращений находим:

$$x = -\frac{Q}{2\varkappa} + \left(\frac{Q}{2\varkappa} + \frac{b_1}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{\pi \varkappa y}{Q}. \tag{3.12}$$

Мы получили, как и в шпунте Жуковского, цепную линию в качестве кривой депрессии. Было отмечено [5], что задача о дрене Жуковского может быть получена из задачи о шпунте Жуковского (при отсутствии капиллярного поднятия в грунте), если сделать замену функции z на $-iz$, ω на $i0$, 0 на $i\omega$.

Уравнение (3.12) может быть переписано в форме

$$y = \frac{Q}{\varkappa \pi} \operatorname{arch} \frac{x + \frac{Q}{2\varkappa}}{\frac{b_1}{2} + \frac{Q}{2\varkappa}} \tag{3.13}$$

$$[\operatorname{arch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})].$$

Если известна какая-нибудь точка (x_1, y_1) депрессионной линии грунтового потока, а также отрезок b_1, то уравнение (3.13) позволяет вычислить расход Q дрены. Если заданы числа x_1, y_1 и b, то из (3.11) и (3.13) находим b_1 и Q.

Любую из эквипотенциалей (фиг. 113) можно принять за очертание дрены. Если данная дрена имеет форму, отличающуюся от этих эквипотенциалей (обычно сечение дренажной канавы вертикальной плоскостью имеет форму прямоугольника, трапеции или некоторой плавной линии), то вблизи нее форма депрессионной кривой будет иная, но на достаточно больших расстояниях от дрены уравнение депрессионной кривой будет близким к (3.13).

В. И. Аравиным [14] рассмотрены примеры дрен Жуковского с построением сеток движения для различных значений b_1, включая случай $b_1 = 0$. Здесь ветви депрессионной кривой получаются смыкающимися в одной точке, в середине дрены — такую дрену можно назвать *затопленной*. Полагая $b_1 = 0$, из (3.11) получим:

$$b = \frac{Q}{\varkappa}\left(\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{2}{\pi}\right) = 0{,}262 \frac{Q}{\varkappa}. \tag{3.14}$$

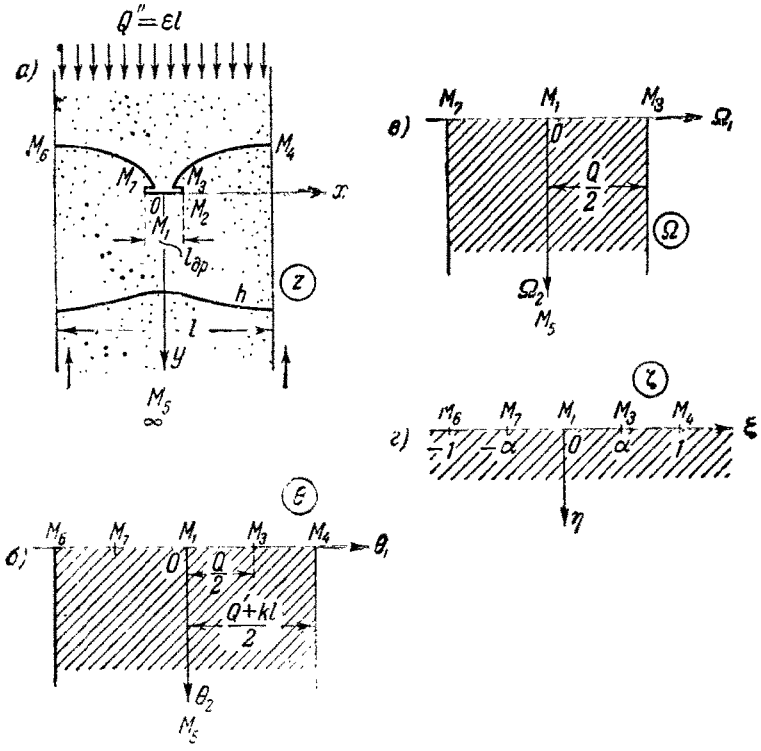
§ 4. Приток к системе дрен при наличии инфильтрации. Обычно дрены предназначаются для того, чтобы отводить из почвы излишки грунтовых вод. Для этого дренажные канавы делаются с уклоном, чтобы вода из них могла стекать в коллекторы — большие дрены, из которых вода отводится самотеком или перекачивается в реки или большие каналы.

Дрены питаются за счет инфильтрации, т. е. поступления воды с поверхности почвы вследствие дождей, поливов, просачивания тающего снега и т. п.

Другим источником питания является создание благодаря устройству дрены разности напоров в области движения, как было в случае § 3.

Рассмотрим задачу о притоке грунтовых вод в систему большого числа прямолинейных горизонтальных дрен, представляющих бесконечно тонкие щели, расположенные на одинаковой высоте, на равном расстоянии друг от друга, в водопроницаемом слое бесконечной глубины.

Обозначим через ε постоянную интенсивность инфильтрации (глава I). Если выделим часть потока (фиг. 115), ограниченную вертикальными



Фиг. 115.

линиями тока, находящимися посредине между соседними дренами, то получим область движения с вертикальными твердыми стенками и горизонтальными водопроницаемыми границами (стенки щелей). В этом случае применим функцию Жуковского в форме

$$\upsilon = -i\omega + kz = \theta_1 + i\theta_2. \tag{4.1}$$

Введем еще одну функцию

$$\Omega = -i\omega + \varepsilon z = \Omega_1 + i\Omega_2, \tag{4.2}$$

у которой действительная часть имеет постоянное значение на свободной поверхности

$$\Omega_1 = \psi + \varepsilon x = \text{const}. \tag{4.3}$$

Если мы найдем θ и Ω, то z и ω будут определяться из уравнений

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{k-\varepsilon}(\theta - \Omega), \\ \omega &= \frac{i}{k-\varepsilon}(k\Omega - \varepsilon\theta). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Обозначим через Q полный расход каждой из дрен, через Q' — расход, поступающий в дрену из толщи грунта. Тогда инфильтрационный расход дрены Q'' будет равен

$$Q'' = Q - Q' = \varepsilon l, \tag{4.5}$$

где l — расстояние между соседними дренами.

Конформное отображение областей Ω и θ на полуплоскость ζ (фиг. 115) дает:

$$\theta = \frac{1}{\pi}(Q' + kl)\arcsin\zeta \tag{4.6}$$

и

$$\Omega = \frac{Q}{\pi}\arcsin\frac{\zeta}{\alpha}, \tag{4.7}$$

где на основании (4.6)

$$\alpha = \sin\frac{\pi Q}{2(Q' + kl)} = \sin\frac{\pi Q}{2[Q + (k-\varepsilon)l]}. \tag{4.8}$$

Подставляя (4.6) и (4.7) в (4.4) и учитывая, что вдоль свободной поверхности $\alpha < \zeta < 1$, найдем:

$$z = \frac{1}{\pi(k-\varepsilon)}\left[(Q' + kl)\arcsin\zeta - Q\arcsin\frac{\zeta}{\alpha}\right],$$

откуда следует, что уравнение правой ветви кривой депрессии (симметричной левой) будет:

$$x = \frac{Q}{k-\varepsilon}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\arcsin\left(\alpha\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi y(k-\varepsilon)}{Q}\right)\right], \tag{4.9}$$

где

$$\delta = \frac{Q}{(k-\varepsilon)l}. \tag{4.10}$$

Полагая в (4.9) $x = \frac{l}{2}$, $y = H$, где H — максимальная отметка кривой депрессии, получим:

$$H = \frac{Q}{\pi(k-\varepsilon)}\ln\mathrm{ctg}\frac{\pi\delta}{4(1+\delta)}. \tag{4.11}$$

Чтобы определить ширину щели $l_{др}$, заметим, что в точках M_2 и M_8 абсцисса x как функция от ξ достигает экстремума. Следовательно, $\frac{dx}{d\xi}=0$, что приводит к условию

$$l_{др}=\frac{Q}{k-\varepsilon}f(\delta), \tag{4.12}$$

причем $f(\delta)$ имеет вид

$$f(\delta)=\frac{2}{\pi}\left\{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\arccos\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{1+2\delta}}\cos\frac{\pi\delta}{2(1+\delta)}\right)-\right.$$
$$\left.-\arccos\left(\frac{\delta}{\sqrt{1+2\delta}}\operatorname{ctg}\frac{\pi\delta}{2(1+\delta)}\right)\right\}. \tag{4.13}$$

Когда δ мало (что будет, в частности, когда l велико), имеет место приближенное равенство

$$f(\delta)\approx f(0),$$

что дает по раскрытии неопределенности

$$f(\delta)\approx\frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}-\arccos\frac{2}{\pi}\right)\approx 0{,}262,$$

откуда

$$l_{др}\approx\frac{0{,}262Q}{k-\varepsilon}.$$

Это выражение при $\varepsilon=0$ совпадает с тем, которое мы получили для затопленной дрены [формула (3.14)].

Теперь в уравнении (4.9) положим $x=\frac{1}{2}l_{др}$. Обозначая ординату депрессионной кривой в этой точке через h_0, найдем:

$$h_0=\frac{Q}{k-\varepsilon}F(\delta),\quad F(\delta)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{\sin\frac{\pi(1+f(\delta))\delta}{2(1+\delta)}}{\sin\frac{\pi\delta}{2(1+\delta)}}\right). \tag{4.14}$$

При малом δ имеем:

$$F(\delta)\approx F(0)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arch}[1+f(0)]=0{,}226$$

и

$$h_0\approx\frac{0{,}226Q}{k-\varepsilon}.$$

Эти результаты получены С. Н. Нумеровым [7], который выводит заключение, что если дрену в форме горизонтальной щели заменить вертикальной траншеей прямоугольного сечения ширины $l_{др}$, то высота высачивания грунтовых вод на стенки траншеи будет меньше высоты h_0, определенной по формуле (4.14). Случай $\varepsilon=0$ был рассмотрен В. И. Аравиным [6]. Задача о дрене прямоугольного сечения приведена у нас в главе VI, § 5.

Сетка движения в рассматриваемой задаче такова, что на некотором расстоянии внизу линии тока становятся почти вертикальными, а линии равного потенциала — почти горизонтальными. При глубине $|y| > l$ практически последние можно считать горизонтальными отрезками. Для напора h на такой линии, отсчитанного над отметкой дрены, получается равенство

$$h \approx \frac{Q'y}{kl} + \frac{Q}{k}\Phi(\delta) \tag{4.15}$$

с абсолютной ошибкой, равной приближенно

$$\frac{Q}{\pi k}\left\{(1+\delta)\cos^2\frac{\pi\delta}{2(1+\delta)}\cdot\sin^{2\delta}\frac{\pi\delta}{2(1+\delta)}\right\}e^{-\frac{2\pi y}{l}}.$$

Приближенное выражение $\Phi(\delta)$ дается формулой

$$\Phi(\delta) \approx -\frac{1}{\pi}(1+\delta)\ln\sin\frac{\pi\delta}{2(1+\delta)}.$$

Из (4.15) можно найти Q', зная Q.

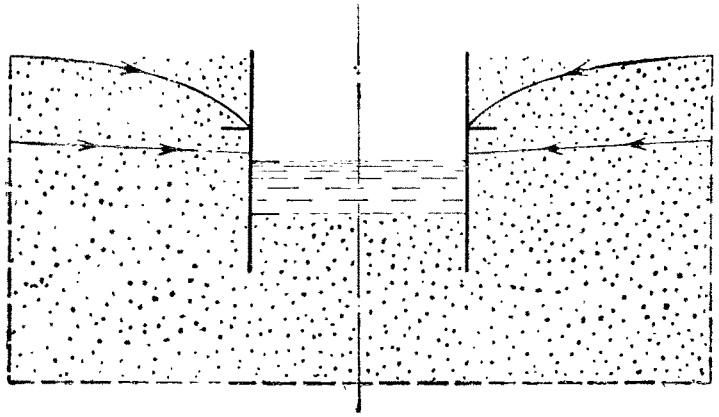
Если дрены питаются только за счет инфильтрации на свободной поверхности, то $Q' = 0$, $Q = Q'' = \varepsilon l$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - k}$. Если они питаются только за счет притока воды из толщи грунта, то $\varepsilon = 0$, $Q = Q'$. Отсюда получается, что если решена задача без учета инфильтрации, то из полученного решения можно найти решение задачи при учете инфильтрации, если изменить все линейные размеры в $\left(1 - \frac{\varepsilon}{k}\right)$ раз.

Отметим, что рассмотренная задача относится к тому случаю, когда причиной заболачивания являются не только атмосферные осадки или поливы, но и фильтрация из пласта с напорными (артезианскими) водами вверх через покрывающую этот пласт толщу земли. Другими словами, питание дрены, предназначенной отводить излишки воды, происходит снизу за счет притока под действием напора. Поэтому является возможным установившееся движение при отсутствии инфильтрации. Если бы внизу мы имели границу водоупора, то при заложении дрен получилось бы неустановившееся движение, в пределе стремящееся к покою, который и явился бы формой установившегося движения.

Решение задачи о притоке к системам дрен в области, ограниченной снизу линией равного напора (причем контур дрены рассматривается как малая окружность около точечного стока), было дано В. В. Ведерниковым (см. литературу к главе V [10]).

Заметим, что применение функции Жуковского удобно в тех случаях, когда имеем, помимо свободной поверхности, горизонтальные линии равного потенциала и вертикальные линии тока в области движения. Ряд примеров такого рода рассмотрен Ф. Б. Нельсоном-Скорняковым [10]. В работе [15] рассматривается задача о притоке грунтовых

вод к котловану или шлюзу, огражденному шпунтами (фиг. 116), при наличии поглощающих горизонтальных щелей — боковых дрен. Случай отсутствия боковых дрен был рассмотрен ранее В. И. Аравиным [14].



Фиг. 116.

§ 5. Фильтрация из канала в симметрично расположенные водоприемники. Схема задачи представлена на фиг. 117. Канал имеет простейшую форму — горизонтального отрезка. Дрены, в которые поступает вода, имеют вид горизонтальных отрезков AB и GH с щелями CB и GF.

Как и в предыдущей задаче, здесь вдоль всего контура мы имеем:

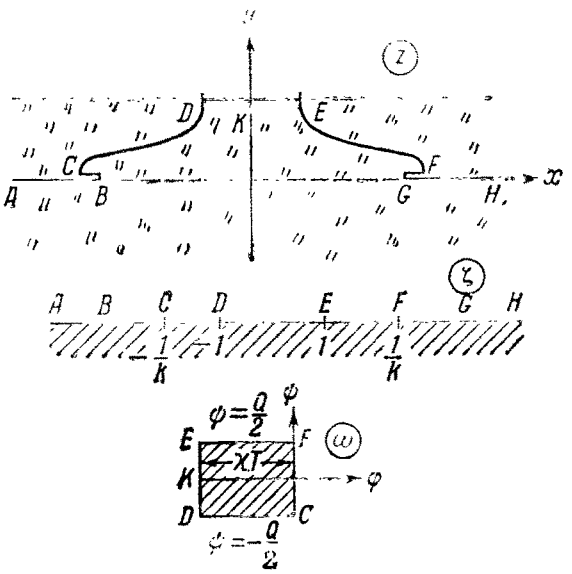
$$\varphi + \varkappa y = 0,$$

и при отображении на полуплоскость ζ (фиг. 117) для функции Жуковского $\theta = \omega - i\varkappa z$ получаем:

$$\theta = a\zeta + b. \qquad (5.1)$$

Положим вдоль отрезков ABC и FGH потенциал скорости равным нулю. Тогда вдоль DE будем иметь:

$$\varphi = -\varkappa T,$$



Фиг. 117.

где T — высота основания канала относительно дрен.

Обозначая полный расход на единицу длины канала через Q, положим, что вдоль EF $\psi = \frac{Q}{2}$, вдоль CD $\psi = -\frac{Q}{2}$. Тогда на плоскости ω (фиг. 117) получим прямоугольник, для которого отображение

на нижнюю полуплоскость плоскости ζ дает (см. аналогичные задачи в главе III):

$$\omega = \frac{Qi}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} - \varkappa T. \tag{5.2}$$

Расход связан с напором соотношением

$$Q = \frac{2\varkappa TK}{K'}. \tag{5.3}$$

Обратимся теперь к равенству (5.1) и перепишем его, вспоминая значение функции Жуковского:

$$\omega - i\varkappa z = a\zeta + b. \tag{5.4}$$

При $\zeta = 0$ имеем $z = Ti$, $\omega = -\varkappa T$, поэтому, подставляя в (5.4), получим, что $b = 0$.

Далее, при $\zeta = 1$

$$z = \frac{B}{2} + Ti, \quad \omega = -\varkappa T + \frac{Qi}{2},$$

где B — ширина канала. Получаем, подставляя в (5.4):

$$a = \frac{i}{2}(Q - \varkappa B),$$

откуда

$$\omega - i\varkappa z = \frac{i}{2}(Q - \varkappa B)\zeta. \tag{5.5}$$

Полагая $\zeta = \frac{1}{k}$, получим:

$$\frac{Qi}{2} - \frac{i\varkappa L}{2} = \frac{i(Q - \varkappa B)}{2k},$$

где L — расстояние между концами дрен C и F. Отсюда найдем для Q другое выражение

$$Q = \frac{\varkappa}{1-k}(B - kL). \tag{5.6}$$

Сравнивая его с (5.3), получим:

$$\frac{B}{T} - k\frac{L}{T} = 2(1-k)\frac{K}{K'}. \tag{5.7}$$

Из этого уравнения, зная $\frac{B}{T}$ и $\frac{L}{T}$, можно определить число k, которое позволит затем вычислить расход по формуле (5.3). Можно вместо L ввести другую величину, а именно расстояние l от уреза воды в канале до уреза воды в водоприемнике, или, иначе, проекцию EF на ось x (фиг. 117). Имеем связь между l, L и B:

$$l = \frac{1}{2}(L - B), \quad L = 2l + B.$$

При этом (5.7) перепишется так:

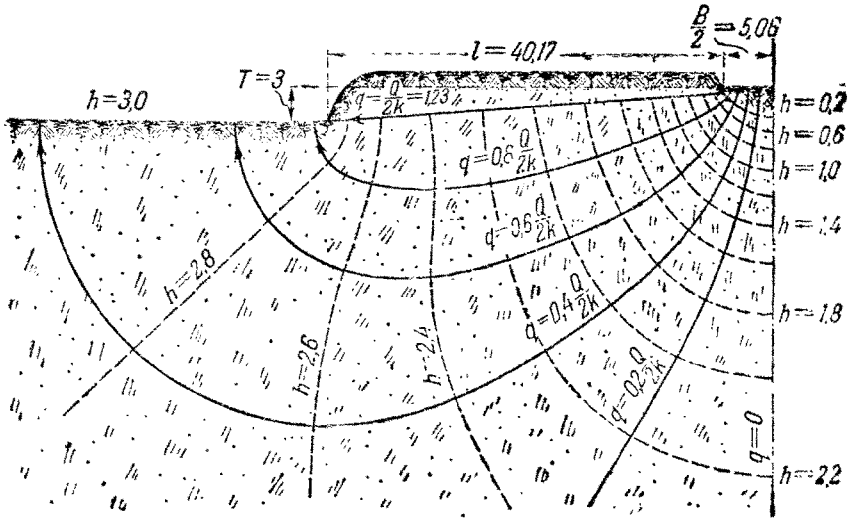
$$\frac{B}{T} = \frac{2k}{1-k}\frac{l}{T} + \frac{2K}{K'}. \tag{5.8}$$

Задаваясь рядом значений $\frac{l}{T}$ и параметра k, по формуле (5.8) найдем $\frac{B}{T}$, а по формуле (5.3), которую можно переписать так:

$$\frac{Q}{\varkappa T} = \frac{2K}{K'}, \tag{5.9}$$

найдем приведенный расход $\bar{Q} = \frac{Q}{\varkappa T}$.

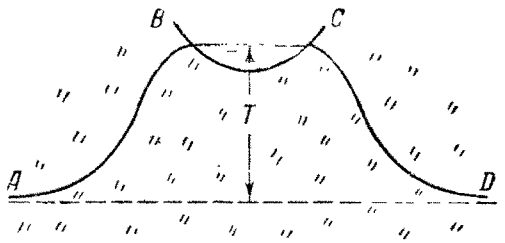
В. В. Ведерников вычислил таблицу зависимости приведенного расхода $\bar{Q}$ от $\frac{l}{T}$ и $\frac{B}{T}$ для некоторых значений этих отношений.



Фиг. 118.

На фиг. 118 представлена гидромеханическая сетка движения, рассчитанная для одного частного случая В. В. Ведерниковым.

Полученные результаты можно с некоторым приближением применить к выяснению следующего вопроса. Вода, просачивающаяся из канала, обычно смыкается с грунтовыми водами, залегающими под каналом на некоторой глубине T. Интересно выяснить, как изменяется расход из канала при уменьшении глубины T, т. е. при подъеме уровня грунтовых вод (фиг. 119).



Фиг. 119.

Схема фиг. 119, относящаяся к так называемой *фильтрации с подпором*, когда вода, вытекающая из канала, растекается по горизонтальной поверхности AD так, чтобы линия AD была асимптотой депрессионной кривой, не может быть осуществлена в установившемся

движении, так как при решении таких задач кривые AB и CD уходят вниз на бесконечность. Установившимся движением в схеме фиг. 119 будет покой, когда депрессионная поверхность представляет горизонтальную плоскость, проходящую через отрезок BC.

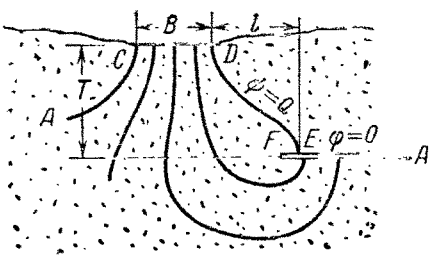
Для того чтобы было возможно установившееся движение с понижением депрессионной кривой до уровня линии AD, нужно предположить дополнительные устройства, отводящие воду; одной из таких возможностей является рассмотренная схема.

Можно заметить, что на участке, где $\frac{B}{T}$ слабо изменяется, величина $\bar{Q}=\frac{Q}{\varkappa T}$ убывает довольно медленно с возрастанием $\frac{l}{T}$. При фиксированном l это означает, что T убывает, и

$$\frac{Q}{\varkappa}=T\bar{Q}$$

также убывает с убыванием T. Таким образом, расход из канала убывает, если уровень грунтовых вод приближается к основанию канала.

§ 6. Фильтрация из канала при водоприемнике с одной стороны. Эта задача (фиг. 120) решается аналогично предыдущей. Здесь опять $0=\alpha\zeta$. Для ω получаем:

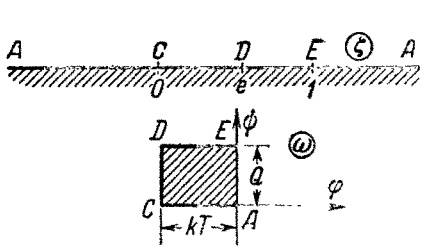


$$\omega=C\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(e-\zeta)(1-\zeta)}}.$$

Подстановка

$$\zeta=et^2,\quad e=k^2$$

приводит интеграл для ω к нормальной форме; выразим ω и 0 через t:



Фиг. 120

$$\omega=c'\int_0^{t}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$0=a't^2.$$

Здесь a', c' — постоянные, подлежащие определению.

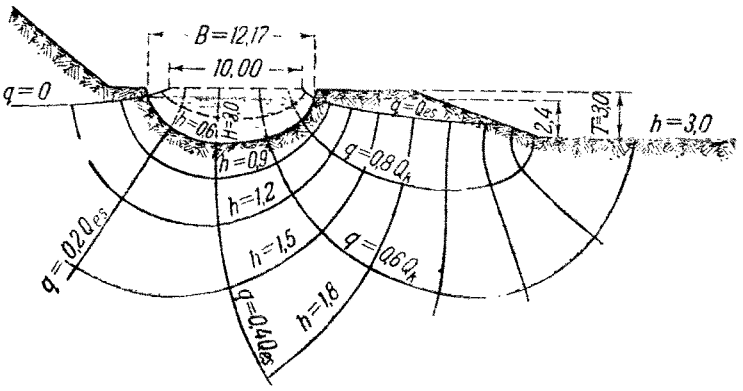
Дальнейшие вычисления, которые мы опускаем, дают зависимость, аналогичную (5.8):

$$\frac{B}{T}=\frac{k^2}{k'^2}\frac{l}{T}+\frac{K}{K'},\tag{6.1}$$

причем для расхода получается формула

$$\frac{Q}{\varkappa T}=\frac{B}{T}-\frac{k^2}{k'^2}\frac{l}{T}=\frac{K}{K'}.\tag{6.2}$$

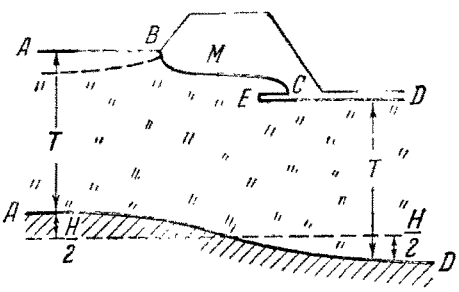
На фиг. 121 дана сетка движения, построенная для частного случая В. В. Ведерниковым [4]. Линия $h = 0{,}6$ принята за контур канала.



Фиг. 121.

Б. ПОЛУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ БЕЗНАПОРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИЗ НАПОРНЫХ

§ 7. Упрощенная схема земляной плотины на проницаемом основании конечной глубины. Расчет фильтрации в теле земляной плотины является очень сложным. Этим вопросам у нас будут посвящены главы VI и VII. Здесь же мы рассмотрим две упрощенные схемы, позволяющие рассчитывать суммарную характеристику движения в теле земляной плотины на проницаемом основании конечной глубины—расход под плотиной. Первая из этих задач, рассматриваемая в настоящем параграфе, была решена А. П. Вощининым [8].



Фиг. 122.

На фиг. 122 изображена земляная плотина, в верхнем и нижнем бьефах которой слой воды очень мал. Разность уровней воды равна H. Проницаемое основание снизу ограничено линией, форма которой заранее не известна; это линия тока, определяемая из искусственного условия, налагаемого на нее: на ней должно быть постоянным выражение $\varphi + \varkappa y$. Это условие возникает из того обстоятельства, что на свободной поверхности $\varphi + \varkappa y = \text{const}$, вдоль границ водоемов, на которых $y = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, также получаем $\varphi + \varkappa y = \text{const}$. Поэтому, если принять на свободной поверхности

$$\varphi + \varkappa y = 0,$$

на линии водоупора AD положить

$$\varphi + \varkappa y = -\varkappa T,$$

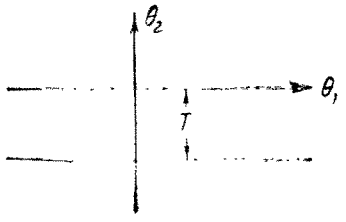
то на плоскости функции Жуковского, которую мы выберем в виде

$$\theta = z + \frac{i}{\varkappa}\omega = \theta_1 + i\theta_2 \tag{7.1}$$

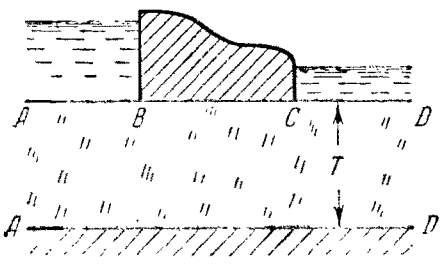
$$\left(\theta_1 = x - \frac{\psi}{\varkappa},\quad \theta_2 = y + \frac{\varphi}{\varkappa}\right),$$

получим полосу ширины T (фиг. 123).

Сравнив рассматриваемую задачу с задачей об обтекании флютбета в проницаемом слое глубины T (фиг. 124), мы видим, что область



Фиг. 123.



Фиг. 124.

движения здесь совпадает с областью функции Жуковского. Область же комплексного потенциала в той и другой задачах одна и та же.

Сравнение приводит нас к следующему результату. Если мы решили вторую задачу, о напорном движении, т. е. нашли

$$z = f_1(\zeta),\quad \omega = f_2(\zeta) \tag{7.2}$$

(где ζ — вспомогательная комплексная переменная), то для первой задачи решение немедленно напишется в виде

$$\theta = z + \frac{i\omega}{\varkappa} = f_1(\zeta),\quad \omega = f_2(\zeta). \tag{7.3}$$

Расход в обеих задачах один и тот же, если одинаковы H, T и $BC = 2l$. А именно,

$$Q = \varkappa H \frac{K'}{2K}, \tag{7.4}$$

где

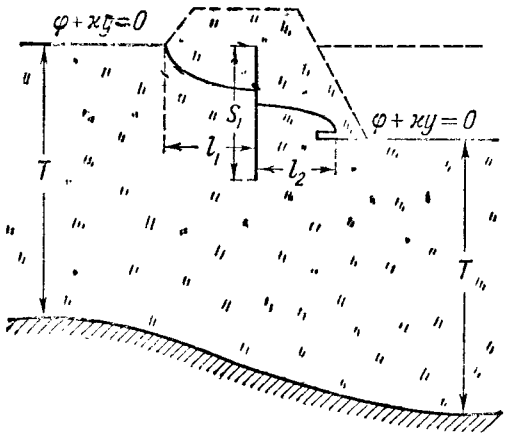
$$k = \operatorname{th}\frac{\pi l}{2T}.$$

Уравнение свободной поверхности получается кососимметричным относительно средней точки M (фиг. 122). Линия водоупора на бесконечности слева и справа отстоит от соответствующей границы верхнего или нижнего бьефа на расстояние T, следовательно, водоупор понижается на величину H при переходе от $x = -\infty$ к $x = +\infty$.

Изложенная задача для $T=\infty$ была рассмотрена ранее и приведена в книге Ф. Б. Нельсона-Скорнякова [10], где рассмотрены с помощью функции Жуковского также другие схемы.

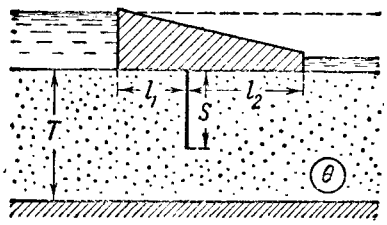
§ 8. Упрощенная схема земляной плотины со шпунтом. На основании сказанного в § 7 можно сразу написать решение следующей задачи.

Дана упрощенная схема плотины, аналогичная схеме предыдущего случая, но с забитым в ее теле вертикальным шпунтом (диафрагмой) длины S_1 (фиг. 125). Какие расходы через плотину получаются в этом случае?



Фиг. 125.

Воспользуемся формулами для задачи о флютбете со шпунтом (фиг. 126) (глава III, § 12).



Фиг. 126.

Обозначим неизвестное пока значение потенциала скорости в конце шпунта через φ_0. Тогда получим значение θ_2 [см. (7.1)] для конца шпунта (ось y направлена вдоль шпунта вверх)

$$\theta_2 = -S_1 + \frac{\varphi_0}{\varkappa} = -S. \tag{8.1}$$

В формулах § 12 главы III нужно заменить z на θ, понимая под S длину «шпунта» вспомогательной плоскости θ. Получим:

$$\omega = \varkappa H - \frac{\varkappa H}{K} F\left(\sqrt{\frac{(1+a_2)(\zeta-1)}{2(\zeta-a_2)}},\ \lambda\right), \tag{8.2}$$

где

$$\zeta = \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi\theta}{2T} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}\cos\frac{\pi S}{2T}} \tag{8.3}$$

и величины a_1, a_2 и λ определяются формулами

$$a_1 = \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi l_1}{2T} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}\cos\frac{\pi S}{2T}}, \tag{8.4}$$

$$a_2 = \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi l_2}{2T} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}\cos\frac{\pi S}{2T}}, \tag{8.5}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2(a_1+a_2)}{(1+a_1)(1+a_2)}}. \tag{8.6}$$

Длина шпунта нашей земляной плотины определится из (8.1)

$$S_1 = S - \frac{\varphi_0}{\varkappa}, \tag{8.7}$$

причем φ_0 определим из формулы (8.2), полагая

$$\theta = -Si, \quad \zeta = 0.$$

Получим:

$$\frac{\varphi_0}{\varkappa} = H - \frac{H}{K} F\left(\sqrt{\frac{1+a_2}{2a_2}}, \lambda\right). \tag{8.8}$$

Таким образом, при расчете конкретного случая плотины мы задаемся точными значениями l_1 и l_2 и приближенным значением длины шпунта, т. е. величиной S. Действительная длина шпунта S_1 находится по формулам (8.7) и (8.8).

Чтобы найти уравнение депрессионной кривой, заметим, что на последней должны выполняться условия

$$\psi = 0, \quad \varphi + \varkappa y = 0.$$

Поэтому можем написать:

$$y = -\frac{\varphi}{\varkappa}, \quad \theta = x,$$

и тогда (8.2) даст уравнение свободной поверхности

$$y = \frac{H}{K} F\left(\sqrt{\frac{(1+a_2)(\mp\zeta-1)}{2(\mp\zeta-a_2)}}, \lambda\right), \tag{8.9}$$

где

$$\zeta = \sqrt{\operatorname{th}^2\frac{\pi x}{2T} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi S}{2T}\cos\frac{\pi S}{2T}},$$

причем верхний знак берется для части свободной поверхности, примыкающей к нижнему бьефу, нижний — для области вблизи верхнего бьефа.

Точки пересечения депрессионных кривых со шпунтом найдем, полагая в уравнениях (8.9) $x = 0$. Получим $\zeta = \sin\frac{\pi S}{T}$ и

$$y_1 = -\frac{H}{K} F\left(\sqrt{\frac{(1+a_2)\left(1+\sin\frac{\pi S}{T}\right)}{2\left(a_2+\sin\frac{\pi S}{T}\right)}}, \lambda\right),$$

$$y_2 = -\frac{H}{K} F\left(\sqrt{\frac{(1+a_2)\left(1-\sin\frac{\pi S}{T}\right)}{2\left(a_2-\sin\frac{\pi S}{T}\right)}}, \lambda\right).$$

Здесь y_1 — ордината точки пересечения кривой депрессии с левой стороной шпунта, y_2 — с правой. Напор в точках пересечения будет равен соответственно ординатам y_1 и y_2.

Рассмотренная задача была исследована Ф. Б. Нельсоном-Скорняковым [18]. А. М. Мхитарян [9] произвел к ней некоторые расчеты.

В. ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛОВ

§ 9. Фильтрация без подпора из каналов криволинейного периметра. В качестве дальнейшего применения функции Жуковского рассмотрим такую задачу. Может ли зависимость между θ и $\omega = \varphi + i\psi$ вида

$$\theta = +iz + \frac{\omega}{k} = Ae^{\frac{\omega}{\alpha}} \tag{9.1}$$

дать течение со свободной поверхностью? Считая число A действительным, произведем разделение θ на действительную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned} -y + \frac{\varphi}{k} &= Ae^{\frac{\varphi}{\alpha}} \cos\frac{\psi}{\alpha}, \\ x + \frac{\psi}{k} &= Ae^{\frac{\varphi}{\alpha}} \sin\frac{\psi}{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

Прежде всего замечаем, что уравнения (9.2) не изменяются при замене ψ на $-\psi$ и x на $-x$; значит течение симметрично относительно оси y, которая является линией тока. Так как на свободной поверхности

$$-y + \frac{\varphi}{k} = 0,$$

то для значения $\psi = \psi_0$ на свободной поверхности должно быть:

$$\cos\frac{\psi_0}{\alpha} = 0.$$

Для ψ_0 получаем бесчисленное множество значений

$$-q = \psi_0 = (2n+1)\frac{\pi\alpha}{2}, \tag{9.3}$$

где n — любое целое число. Отсюда

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{(2n+1)\pi}{2q}$$

и

$$\theta = Ae^{-\frac{(2n+1)\pi\omega}{2q}} \tag{9.4}$$

Примем $\psi_0 = \frac{\pi\alpha}{2}$ или, иначе, $n = 0$. Эта линия тока может быть депрессионной кривой.

Подставив в (9.2) $\varphi = ky$, $\psi = \frac{\pi\alpha}{2}$, получим уравнение депрессионной кривой

$$x + \frac{\pi\alpha}{2k} = Ae^{\frac{ky}{\alpha}}.$$

Эта кривая имеет асимптоту

$$x = -\frac{\pi\alpha}{2k} = \frac{q}{k} = x_\infty.$$

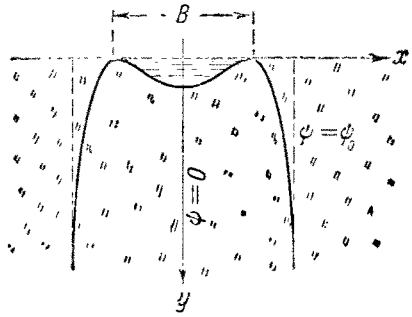
При $y = 0$ получаем полуширину канала (фиг. 127):

$$x = \frac{B}{2} = \frac{q}{k} + A.$$

Найдем теперь линию, вдоль которой $\varphi = 0$; она может быть принята за очертание канала, вдоль периметра которого напор должен быть постоянным. Из (9.2) получаем при $\varphi = 0$:

$$-y = A\cos\frac{\psi}{\alpha}, \quad x + \frac{\psi}{k} = A\sin\frac{\psi}{\alpha}. \tag{9.5}$$

Когда ψ меняется от 0 до $\psi_0 = \frac{\pi\alpha}{2}$, полученные уравнения дают уравнения периметра канала в параметрической форме (фиг. 127). При $\psi = 0$ $y = -A = H$, где H — максимальная глубина канала. При $\psi = \frac{\pi\alpha}{2} = \psi_0$ получим:



Фиг. 127.

$$y = 0, \quad x = -\frac{\psi_0}{k} - H = \frac{B}{2}.$$

Отсюда находим расход через половину сечения канала:

$$q = -\psi_0 = k\left(H + \frac{B}{2}\right).$$

Расход Q через полное сечение канала будет:

$$Q = 2q = k(B + 2H).$$

Ширина потока на бесконечности

$$B_\infty = 2x_\infty = B + 2H.$$

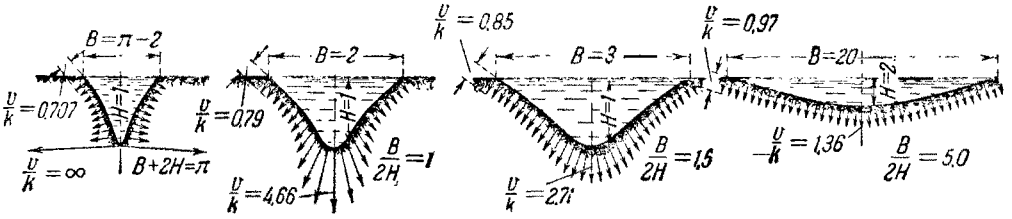
Отсюда следует, что скорость течения на бесконечности равна коэффициенту фильтрации k.

Уравнение периметра канала можно получить в явном виде, исключив ψ из (9.5) и заменяя A на $-H$:

$$\pm x = -\sqrt{H^2 - y^2} + \frac{B + 2H}{\pi}\arccos\left(\frac{y}{H}\right).$$

Это *укороченная циклоида* или *трохоида*.

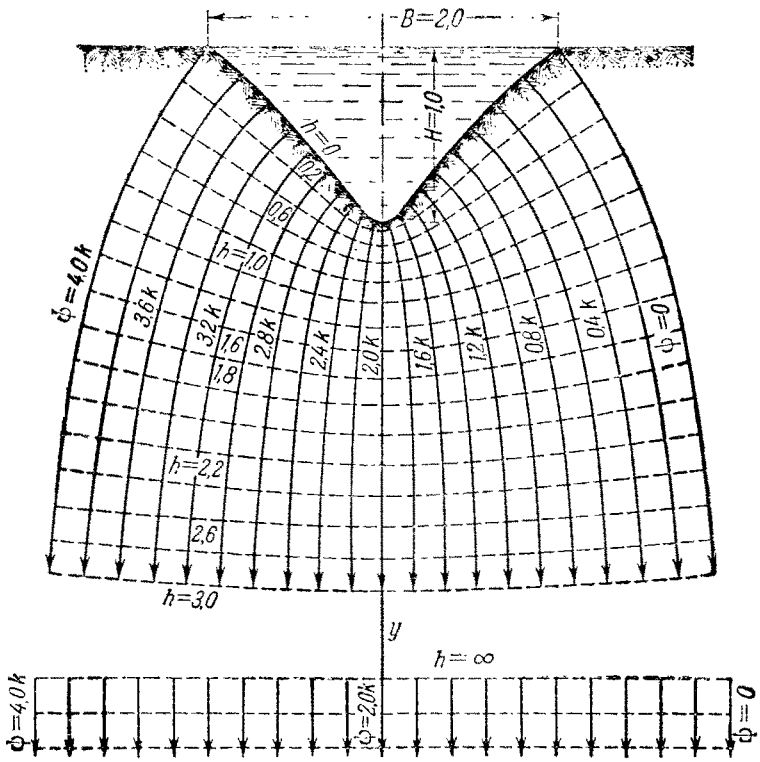
На фиг. 128 изображено несколько поперечных сечений таких каналов, на фиг. 129, 130 приводятся гидродинамическая сетка



Фиг. 128.

движения и семейство изобар для канала при $B:H=2$ [4].

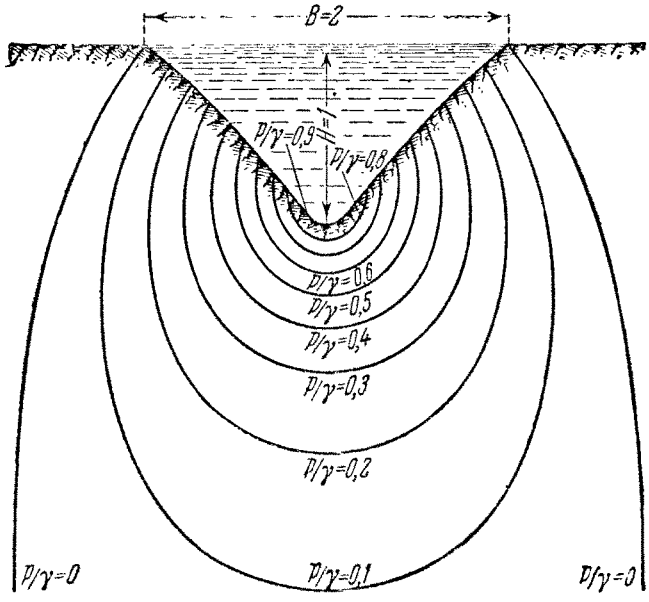
Решение этой задачи было дано Козени, а затем получено другим путем и развито Н. Н. Павловским [2, 3], В. В. Ведерниковым [4] и другими авторами.



Фиг. 129.

Заметим, что ветви депрессионной кривой очень быстро приближаются к асимптоте: на глубине $y=\frac{3}{2}(B+2H)$ абсцисса отличается от x_∞ на величину, меньшую $0{,}01H$. Можно считать, что уже на

этой глубине имеется дренирующий пласт, поглощающий воду. Говорят, что фильтрация происходит *без подпора*.



Фиг. 130.

§ 10. Фильтрация с подпором. Теперь мы рассмотрим тот частный случай уравнения (9.1), который получится при $n=-1$. Будем иметь, меняя A на $-C$ и полагая $\alpha=\frac{Q}{\pi}$:

$$-iz=\frac{\omega}{k}+Ce^{\frac{\pi\omega}{Q}}. \tag{10.1}$$

Разделение действительной и мнимой частей дает уравнение

$$\left.\begin{aligned} -x&=Ce^{\frac{\pi\varphi}{Q}}\sin\frac{\pi\psi}{Q}+\frac{\psi}{k},\\ y&=Ce^{\frac{\pi\varphi}{Q}}\cos\frac{\pi\psi}{Q}+\frac{\varphi}{k}. \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Как нетрудно проверить, здесь $C=H$, где H — глубина канала, и уравнение контура канала, соответствующее значению $\varphi=0$, будет:

$$-x=H\sin\frac{\pi\psi}{Q}+\frac{\psi}{k},$$

$$y=H\cos\frac{\pi\psi}{Q}$$

или

$$\pm x=\sqrt{H^2-y^2}+\frac{Q}{k\pi}\arccos\left(\frac{y}{H}\right). \tag{10.3}$$

Это также трохоида, но теперь контур канала состоит из более широкой части *удлиненной циклоиды.*

Для получения расхода положим $x=\frac{B}{2}$, $y=0$, тогда получим:

$$\frac{B}{2}=H+\frac{Q}{2k},$$

т. е.

$$Q=k(B-2H).$$

Теперь уравнение (10.3) контура канала можно написать так:

$$\pm x=\sqrt{H^2-y^2}+\frac{B-2H}{\pi}\arccos\left(\frac{y}{H}\right).$$

Уравнение правой ветви депрессионной кривой получим, полагая $\psi=-\frac{Q}{2}$ в (10.2) и учитывая, что $C=H$:

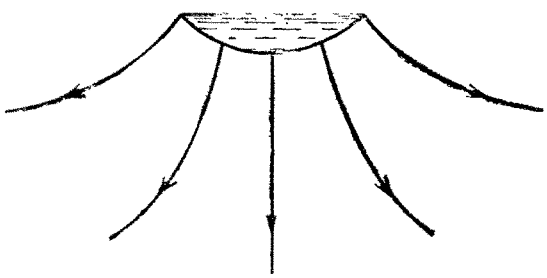
$$x=He^{\frac{\pi\varphi}{Q}}+\frac{Q}{2k},$$

$$y=\frac{\varphi}{k},$$

или

$$x=He^{\frac{\pi ky}{Q}}+\frac{Q}{2k}.$$

Очевидно, при $y\to+\infty$ получается $x\to\infty$. Депрессионная кривая (фиг. 131) имеет иной характер, чем в предыдущем случае. Говорят, что имеем фильтрацию из канала с *подпором*. Другими словами, получаем такую картину, как будто на бесконечности имеется водоупор. Скорость на бесконечности оказывается равной нулю.

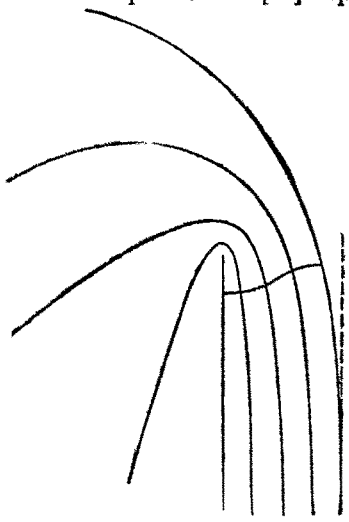


Фиг. 131.

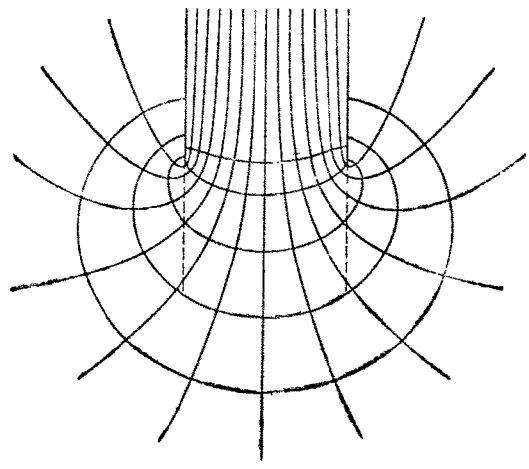
Б. К. Ризенкампф [5] обратил внимание на то, что оба рассмотренных случая получаются из одного и того же течения, из которого можно получить и некоторые другие случаи фильтрации со свободной поверхностью. А именно, если мы будем рассматривать течение, определяемое уравнением (9.1) или (10.1), на всей плоскости z, то получим систему линий тока, изображенных на фиг. 132 и 133. Можно получить другие формы поперечного сечения канала, если вместо уравнения (10.1) взять более общее уравнение

$$z=\frac{i\omega}{k}+F(\omega)$$

и выбрать подходящим образом периодическую функцию $F(\omega)$. Н. М. Герсеванов [18] предложил брать $F(\omega)$ в виде суммы функций,



Фиг. 132.



Фиг. 133.

имеющих период $2iQ$:

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{\frac{m\pi\omega}{Q}},$$

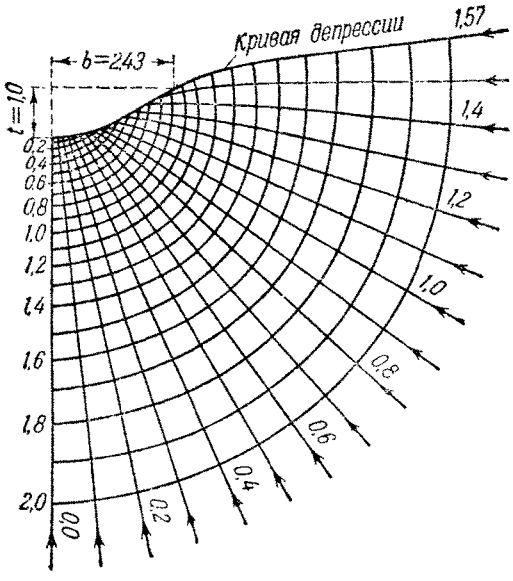
и подбирать коэффициенты A_m так, чтобы приблизиться к нужной форме канала.

§ 11. Приток воды к осушительной канаве криволинейного профиля. М. И. Базанов [11] решает задачу о притоке жидкости из бесконечности к канаве, в которой слой воды бесконечно тонок (точнее говоря, к пустой канаве). Здесь весь периметр канавы является линией высачивания, и по всему контуру области движения имеем условие

$$\theta_1 = \text{const}.$$

Форма канавы определяется условием, что на плоскости $\frac{1}{w}$ ей отвечает дуга окружности радиуса ρ. Автор получает, что расход Q всей канавы пропорционален глубине канавы t:

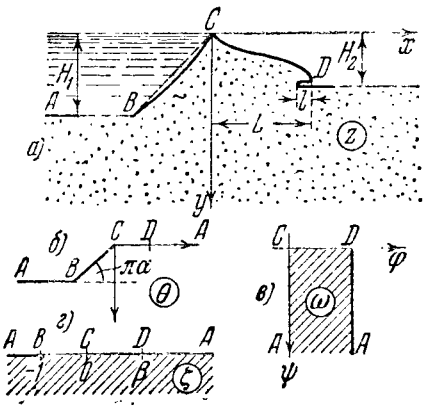
$$Q = k\pi t.$$



Фиг. 134.

На фиг. 134 приведена сетка, построенная М. И. Базановым для $t = 1$, $b = 2{,}43$ (b — полуширина канавы).

§ 12. Простейшая схема плотины с дренажем в грунте бесконечной глубины. Среди упрощенных схем плотины отметим предложенную В. В. Ведерниковым [12]. Он исходил из условия, чтобы на плоскости функции Жуковского область была ограничена линией вида, изображенного на фиг. 135, *б*. Сама плотина имеет вид фиг. 135, *а*. У нее верховой откос получается криволинейным, но мало отличающимся от прямолинейного.



Фиг. 135.

Если принять $\theta = z - \frac{i\omega}{k}$, $\omega = \varphi + i\psi$, то будем иметь:

$$\theta = \frac{H_1}{\pi\alpha}\int_0^{\zeta}\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)^{\alpha} d\zeta,$$

$$\omega = \frac{2kH_2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\zeta}{\beta}}.$$

Уравнение свободной поверхности можно написать, учитывая, что на ней $\varphi - ky = 0$, $\psi = 0$, $\theta = x$, в виде

$$x = \frac{H_1}{\pi\alpha}\int_0^{\zeta}\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)^{\alpha} d\zeta, \quad y = \frac{2H_2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\zeta}{\beta}} \quad (0 \leqslant \zeta \leqslant \beta).$$

Длину L (фиг. 135, *а*) найдем при $\zeta = \beta$:

$$L = \frac{H_1}{\pi\alpha}\int_0^{\beta}\left(\frac{1+\zeta}{\zeta}\right)^{\alpha} d\zeta.$$

Для верхового откоса, вдоль которого $\varphi = 0$, $-1 < \zeta < 0$, полагая $\zeta = -t$, получим уравнения

$$x = -\frac{H_1\cos\pi\alpha}{\pi\alpha}\int_0^{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha} dt - 2\frac{H_2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{\beta+t}}{\sqrt{\beta}},$$

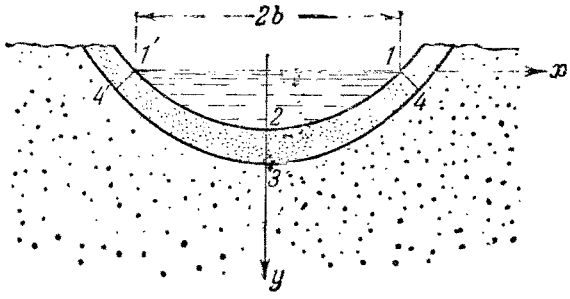
$$y = \frac{H_1\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\int_0^{t}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha} dt \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Чтобы получить длину l отрезка дренажа, нужно найти значение ζ, при котором скорость равна бесконечности — это будет при $\frac{d\theta}{d\omega} = -\frac{i}{k}$. Задаваясь значениями параметра β, можно определить l и L при заданных H_1 и H_2.

В. В. Ведерников дал также приближенное решение задачи.

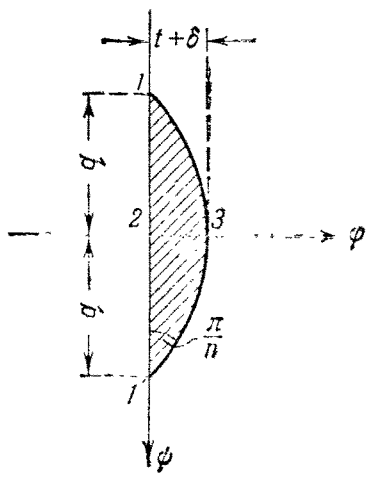
Для подобных схем имеются также и другие решения [10].

§ 13. Приближенное решение задачи о кольматировании русла канала. При движении воды в канале на его дне осаждаются мелкие илистые частицы. Заполняя промежутки между песчинками, они создают слой уплотненного грунта, обладающего малым коэффициентом фильтрации. Если разница между значением коэффициента фильтрации закольматированного слоя и нижележащего грунта велика, то из каймы кольматажа вода будет просачиваться вниз отдельными струйками, не заполняя всех пор грунта. В этом случае будем иметь условие постоянства давления на нижней границе $4'—3—4$ каймы (фиг. 136). На верхней границе $1'—2—1$ потенциал скорости φ имеет постоянное значение. На участках $1—4$ и $1'—4'$, которые являются линиями тока, давление также постоянно.

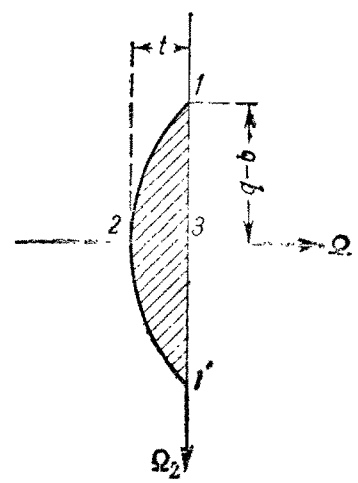


Фиг. 136.

Положим далее для простоты, что коэффициент фильтрации $k = 1$. Если точки 1 и 4 (и соответственно $1'$ и $4'$) совпадают, то для комплексного потенциала ω и функции Жуковского $\Omega = \omega + iz$ будем иметь области вида, изображенного на фиг. 137 и 138, где $1—3—1'$ и $1—2—1'$ суть соответственно некоторые кривые, зависящие от формы поперечного сечения русла и контура каймы кольматажа. В. И. Аравин [19] ставит условием, чтобы эти кон-



Фиг. 137.



Фиг. 138.

туры на плоскостях ω и Ω были дугами окружностей с одинаковыми углами $\frac{\pi}{n}$ в вершинах двуугольников (n может быть любым числом). Отсюда нужно определить форму контуров каймы.

Так как окружность одной плоскости переходит при конформном отображении в окружность или прямую другой плоскости с помощью дробно-линейного преобразования, то рассмотрим преобразование

$$\frac{\Omega - A}{\Omega - B} = K\frac{\omega - C}{\omega - D},$$

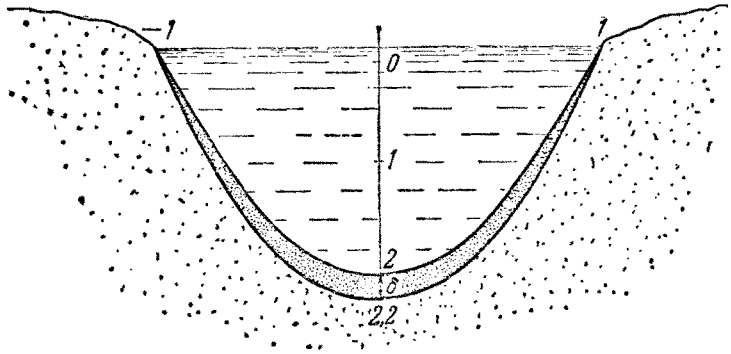
Из соответствия точек 1, 3, $1'$ областей ω и Ω определяются постоян-

ные A, B, C, D, K и получается зависимость

$$\frac{\Omega-(q-b)i}{\Omega+(q-b)i}=-\frac{t+\delta+qi}{t+\delta-qi}\,\frac{\omega-qi}{\omega+qi}. \tag{13.1}$$

Благодаря принятому условию равенства углов двуугольников уравнение (13.1) справедливо и для двух других сторон и, следовательно, дает конформное отображение области ω на область Ω.

В (13.1) $q=\dfrac{Q}{2k}$ — приведенный полурасход канала (Q — полный расход участка канала, длина которого равна единице).



Фиг. 139.

Вдоль $1—2—1'$ имеем $\varphi=0$, поэтому из (13.1) получаем уравнения контура канала:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\psi+\frac{(q-b)(\psi+q)\left[\psi(t+\delta)^2+q^3\right]}{\psi^2(t+\delta)^2+q^4}-(q-b),\\ y&=-\frac{(q-b)(\psi+q)(t+\delta)(\psi-q)q}{\psi^2(t+\delta)^2+q^4}\\ &\qquad(-q\leqslant\psi\leqslant q). \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Вдоль внешней поверхности $\varphi=y$; поэтому уравнение (13.1) дает (при $t_1=t+\delta$):

$$x=-\psi+\frac{q-b}{(yt_1+q^2)^2+t_1^2\psi^2}\times$$

$$\times\{[(\psi+q)q+yt_1](yt_1+q^2)+[t_1(\psi+q)-yq]t_1\psi\}-(q-b),$$

$$y=-\frac{q^2-t_1^2}{2t_1}+\frac{1}{2t_1}\sqrt{(q^2-t_1^2)+4q^2t_1^2(q^2-\psi^2)}$$

$$(-q\leqslant\psi\leqslant q).$$

Из условия равенства углов в областях ω и Ω имеем:

$$\frac{q-b}{t}=\frac{q}{t+\delta},$$

откуда, возвращаясь к произвольному значению k, найдем:

$$q=\frac{b(t+\delta)}{\delta},\quad Q=2kq=2k\frac{b(t+\delta)}{\delta}. \tag{13.3}$$

На фиг. 139 построены кривые при $b=1$, $t=2$, $\delta=0{,}2$.

Г. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

§ 14. Сущность метода. Решение ряда задач по теории движения грунтовых вод с помощью функционального анализа было получено Б. К. Ризенкампфом [5] и Н. М. Герсевановым [13].

Сущность этого метода состоит в следующем. Пусть имеем $z = x + iy$ как функцию от $\omega = \varphi + i\psi$:

$$z = x + iy = F(\omega).$$

Тогда

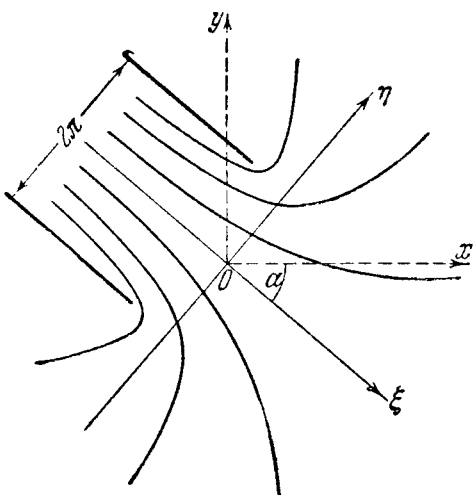
$$\bar{z} = x - iy = \bar{F}(\bar{\omega}), \quad \bar{\omega} = \varphi - i\psi,$$

откуда

$$x = \frac{1}{2}[F(\omega) + \bar{F}(\bar{\omega})], \tag{14.1}$$

$$y = \frac{1}{2i}[F(\omega) - \bar{F}(\bar{\omega})]. \tag{14.2}$$

Задание граничных условий позволяет в некоторых случаях найти функцию $F(\omega)$. Б. К. Ризенкампф [5] задавался условиями на двух линиях тока и получил решение задачи о фильтрации со свободной поверхностью при наклонном водоупоре, а также задач о фильтрации из каналов, которые мы уже изложили в § 10 другим методом.



Фиг. 140.

Н. М. Герсеванов [13] рассмотрел ряд задач для случая, когда областью комплексного потенциала является прямоугольник.

§ 15. Движение грунтовых вод при наклонном водоупоре. Поток грунтовых вод течет со свободной поверхностью, имея линией тока наклонную прямую, составляющую угол α с горизонтальной осью x (фиг. 140). Уравнение этой прямой напишем в виде

$$x \sin\alpha + y\cos\alpha = 0. \tag{15.1}$$

Пусть $\psi = 0$ на этой прямой. На свободной поверхности положим $\psi = Q$. В уравнении (15.1) подставим вместо x и y их выражения (14.1) и (14.2) и учтем, что $\psi = 0$ вдоль прямой (15.1). Получим:

$$\sin\alpha\,[F(\varphi) + \bar{F}(\varphi)] + \frac{\cos\alpha}{i}\,[F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)] = 0, \tag{15.2}$$

откуда

$$e^{2i\alpha}F(\varphi) - \bar{F}(\varphi) = 0. \tag{15.3}$$

Заменяя в последнем уравнении φ на ω, получим:

$$e^{2i\alpha}F(\omega) = \overline{F}(\omega).$$

Теперь рассмотрим условие на свободной поверхности. Полагая $\psi = Q$, получим:

$$\omega = \varphi + iQ.$$

Кроме того, на свободной поверхности

$$\varphi + ky = 0,$$

т. е.

$$y = -\frac{\varphi}{k}. \tag{15.4}$$

Подставляя в уравнение (15.4) выражения (14.2) и $\psi = Q$, получим:

$$-\frac{\varphi}{k} = \frac{1}{2i}[F(\varphi + iQ) - \overline{F}(\varphi - iQ)]. \tag{15.5}$$

Положим $\varphi - iQ = \omega$. Тогда $\varphi + iQ = \omega + 2iQ$, и последнее равенство можно написать в виде

$$F(\omega + 2iQ) - \overline{F}(\omega) = -\frac{2i}{k}(\omega + iQ).$$

На основании (15.3)

$$F(\omega + 2iQ) - e^{2i\alpha}F(\omega) = -\frac{2i\omega}{k} + \frac{2Q}{k}. \tag{15.6}$$

Это линейное уравнение в конечных разностях, решение которого мы составим из двух частей. Прежде всего найдем частное решение неоднородного уравнения (15.6) в виде линейной функции от ω:

$$F_*(\omega) = A\omega + B.$$

Подстановка в уравнение (15.6) дает:

$$A(\omega + 2iQ) + B - (A\omega + B)e^{2i\alpha} = -\frac{2i\omega}{k} + \frac{2Q}{k}.$$

Отсюда находим:

$$A = \frac{e^{-i\alpha}}{k\sin\alpha}, \qquad B = \frac{Qe^{-i\alpha}\operatorname{ctg}\alpha}{k\sin\alpha}$$

и

$$F_*(\omega) = \frac{e^{-i\alpha}}{k\sin\alpha}(\omega + Q\operatorname{ctg}\alpha).$$

Теперь найдем общее решение однородного уравнения

$$F(\omega + 2iQ) - e^{2i\alpha}F(\omega) = 0. \tag{15.6'}$$

Для этого заменим искомую функцию $F(\omega)$ новой функцией $f(\omega)$, полагая

$$F(\omega) = e^{M\omega}f(\omega). \tag{15.7}$$

Подставив (15.7) в (15.6'), получим:

$$e^{M(\omega+2iQ)}f(\omega + 2iQ) - e^{M\omega+2i\alpha}f(\omega) = 0.$$

Подберем постоянную M так, чтобы для $f(\omega)$ получилось уравнение

$$f(\omega + 2iQ) - f(\omega) = 0.$$

Мы видим, что за $f(\omega)$ можно принять любую периодическую функцию периода $2iQ$. Что касается числа M, то оно имеет такое значение:

$$M = \frac{\alpha + n\pi}{Q},$$

где n — любое целое число. Таким образом, общее решение уравнения (15.6) имеет вид

$$z = F(\omega) = e^{\frac{\alpha + n\pi}{Q}\omega} f(\omega) + \frac{e^{-i\alpha}}{k \sin \alpha}(\omega + Q \operatorname{ctg} \alpha), \tag{15.8}$$

причем $f(\omega)$ — произвольная периодическая функция с периодом $2iQ$.

Положим $n = 0$ и

$$f(\omega) = Ce^{-i\alpha},$$

где C — постоянная, и перепишем (15.8) так:

$$ze^{i\alpha} = Ce^{\frac{\alpha\omega}{Q}} + \frac{\omega + Q \operatorname{ctg} \alpha}{k \sin \alpha}. \tag{15.9}$$

Считая C действительным, отделим в (15.9) действительную часть от мнимой. Полагая еще

$$\zeta = \xi + i\eta = ze^{i\alpha},$$

получим:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha - y \sin \alpha = Ce^{\frac{\alpha\varphi}{Q}} \cos \frac{\alpha\psi}{Q} + \frac{\varphi + Q \operatorname{ctg} \alpha}{k \sin \alpha}, \\ \eta &= y \cos \alpha + x \sin \alpha = Ce^{\frac{\alpha\varphi}{Q}} \sin \frac{\alpha\psi}{Q} + \frac{\psi}{k \sin \alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

Исследуем полученные уравнения. Можно рассматривать ξ, η как новые координаты (фиг. 140).

При $C = 0$ имеем равномерное движение

$$\xi = \frac{\varphi}{k \sin \alpha} + \frac{Q \cos \alpha}{k \sin^2 \alpha},$$

$$\eta = \frac{\psi}{k \sin \alpha}$$

постоянной скоростью

$$\frac{d\psi}{d\eta} = k \sin \alpha.$$

Свободная поверхность получается при $\psi = Q$ и представляет прямую

$$\eta = \frac{Q}{k \sin \alpha}.$$

Положим

$$\frac{Q}{k\sin\alpha}=\eta_0$$

и назовем η_0 нормальной глубиной.

Возвращаясь к общему случаю, при $\psi=0$ получаем:

$$\eta=y\cos\alpha+x\sin\alpha=0,$$

$$\xi=Ce^{\frac{\alpha\varphi}{Q}}+\frac{\varphi+Q\operatorname{ctg}\alpha}{k\sin\alpha}.$$

Положим $\psi=Q$. Будем иметь:

$$\xi=Ce^{\frac{\alpha\varphi}{Q}}\cos\alpha+\frac{\varphi+Q\operatorname{ctg}\alpha}{k\sin\alpha},$$

$$\eta=Ce^{\frac{\alpha\varphi}{Q}}\sin\alpha+\frac{Q}{k\sin\alpha}.$$

Найдем φ из второго уравнения и подставим его в первое. Получим уравнение свободной поверхности

$$\xi=\eta\operatorname{ctg}\alpha+\frac{Q}{k\alpha\sin\alpha}\ln\frac{\eta-\frac{Q}{k\sin\alpha}}{C\sin\alpha}. \qquad (15.11)$$

Депрессионная кривая имеет асимптоту

$$\eta=\frac{Q}{k\sin\alpha}=\eta_0.$$

Зная нормальную глубину η_0 (т. е. глубину потока на бесконечности), найдем расход:

$$Q=k\eta_0\sin\alpha.$$

Если будем менять значения постоянной C, то кривая (15.11) будет лишь смещаться параллельно самой себе. Поэтому мы положим:

$$C=\pm\frac{\eta_0}{\sin\alpha}. \qquad (15.12)$$

Приняв во внимание (15.12), мы перепишем уравнение (15.11) в виде

$$\xi=\frac{\eta}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\eta_0}{\alpha}\ln\left|\frac{\eta}{\eta_0}-1\right|, \qquad (15.13)$$

причем вместо (15.9) можно написать:

$$ze^{i\alpha}=\pm\frac{\eta_0}{\sin\alpha}e^{\frac{\alpha\omega}{Q}}+\frac{\omega+Q\operatorname{ctg}\alpha}{k\sin\alpha}.$$

Семейство линий тока (15.13) изображено на фиг. 140. Если угол α мал, то можно положить:

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha \approx i,$$

где i — уклон линии тока $\psi = 0$, и уравнение (15.13) можно заменить таким:

$$\frac{i\xi}{\eta_0} = \frac{\eta}{\eta_0} + \ln\left|\frac{\eta}{\eta_0} - 1\right|.$$

Это уравнение свободной поверхности получается в гидравлической теории (см. главу X).

Н. М. Герсеванов [13] рассмотрел задачу о фильтрации под флютбетом и шпунтом в грунте конечной глубины, а также задачу о прямоугольной перемычке при наличии особенности на одном из ее откосов (см. об этом в статье [16]). При этом он ищет решение получающихся функциональных уравнений в виде тригонометрических рядов и приходит, в частности, к формуле (6.7) главы III.

ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВЕРСИИ

§ 1. Некоторые свойства инверсии. *Преобразованием обратными радиусами-векторами* или *инверсией* в окружности K радиуса R с центром в точке C называется преобразование, при котором точка M, лежащая на луче CM, переходит в точку M' на том же луче (фиг. 141), причем

$$CM \cdot CM' = R^2.$$

Координаты точки $M'(x', y')$ связаны с координатами точки $M(x, y)$ уравнениями

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда

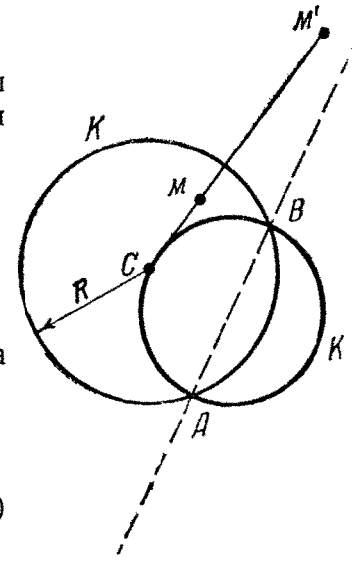
$$x' + iy' = \frac{R^2 (x + iy)}{x^2 + y^2} = \frac{R^2}{x - iy},$$

что можно записать, вводя комплексные числа

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy', \quad \bar{z} = x - iy,$$

таким образом:

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}}. \tag{1.1}$$



Фиг. 141.

Преобразование

$$z' = \frac{R^2}{z} \tag{1.2}$$

представляет соединение инверсии с отражением в действительной оси плоскости z. В этом случае имеем:

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{R^2 y}{x^2 + y^2}.$$

При инверсии точки, лежащие на окружности K (фиг. 141), преобразуются сами в себя. Центр окружности переходит в бесконечно далекую точку, бесконечно далекая точка переходит в центр окруж-

ности. При инверсии окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

Заметим, что мы обычно будем строить область функции $u+iv$ и искать выражение для $\frac{1}{w}=\frac{1}{u-iv}$, т. е. пользоваться отображением вида (1.1), которое представляет чистую инверсию области (u, v), без отражения в оси абсцисс (см., например, фиг. 142).

Возвратимся к фиг. 141.

Окружность K', проходящая через центр C окружности K, переходит в прямую. В самом деле, точка C преобразуется в бесконечно далекую точку, точки A и B (фиг. 141) остаются неподвижными. Следовательно, окружность K' переходит в прямую, проходящую через точки A и B.

Отсюда получается такое следствие.

Пусть имеем область, ограниченную дугами окружностей (прямые линии, которые мы можем считать окружностями бесконечно большого радиуса, могут также входить в число границ области), причем все эти окружности или их продолжения пересекаются в одной точке. Тогда, приняв точку пересечения окружностей за центр инверсии C и выбрав произвольно радиус R, применим преобразование инверсии к заданной области. На основании сказанного выше очевидно, что все границы рассматриваемой области перейдут в отрезки прямых линий, и, следовательно, в результате инверсии мы получим прямолинейный многоугольник.

Это свойство инверсии было использовано Н. Н. Павловским, В. В. Ведерниковым, а также другими авторами для решения различных задач по фильтрации, когда на годографе скорости получаются линии, проходящие через одну точку. Сущность метода выяснится на примерах.

Мы рассматриваем в этой главе задачи о фильтрации из каналов трапецоидального сечения и их частных случаев — прямоугольного и треугольного сечений. Целью исследования является выяснение вопроса о зависимости расхода и вида свободной поверхности от формы канала.

Далее, важным является вопрос о влиянии капиллярности грунта на фильтрацию из каналов. Мы рассматриваем задачи о фильтрации из канала трапецоидального сечения и из широкого канала.

В этой же главе мы рассматриваем задачу о притоке грунтовых вод к дренажной канаве трапецоидального сечения с малым количеством воды в ней. Эта задача является дополнением к задаче о притоке к канаве криволинейного сечения, приведенной в конце главы IV.

Некоторые задачи о дренажных каналах или трубах могут рассматриваться одновременно с задачами об оросительных каналах и трубах, так как метод их решения одинаков. Таковы задачи § 8 и 9. В последнем рассматривается дренажная или оросительная труба при наличии испарения или инфильтрации.

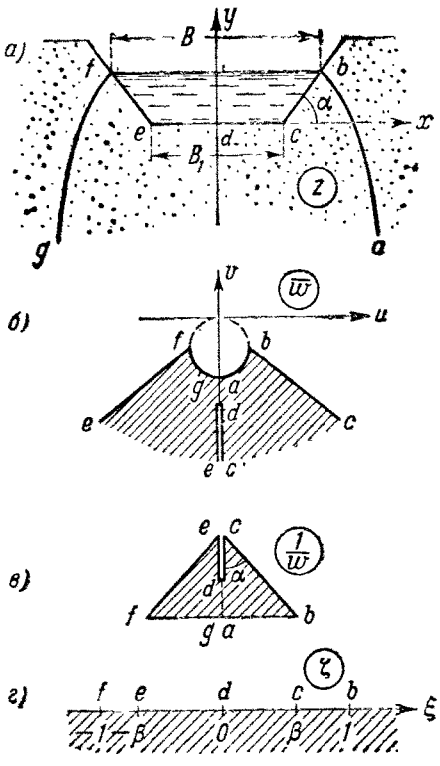
Свойства инверсии могут быть использованы при решении некоторых задач полуобратным методом: такова задача о фильтрации в земляной плотине с криволинейными границами верхнего и нижнего бьефов, изложенная в § 10.

Наконец, с помощью метода инверсии мы рассмотрим задачу о плавных контурах оснований гидротехнических сооружений.

§ 2. Фильтрация из канала трапецоидального русла. В главе IV мы рассмотрели ряд задач о фильтрации из каналов криволинейного очертания, причем форма канала не задавалась у нас заранее, но получалась в результате решения задачи. Это — полуобратный метод, при котором задается часть условий. Здесь мы рассмотрим прямые методы, когда по заданному периметру канала ищется картина фильтрации: из канала, если он оросительный, или к каналу, если он осушительный.

Имеются решения задач о фильтрации из канала трапецоидального сечения и частных его случаев — прямоугольного и треугольного сечения. Решение этих задач было дано В. В. Ведерниковым [3] с помощью применения преобразования инверсии к области комплексной скорости. Впоследствии Б. К. Ризенкампф [6] представил это решение в виде рядов.

На фиг. 142, *а* изображен канал трапецоидального сечения, из которого вода вытекает вниз на бесконечность, без подпора (о фильтрации без подпора см. главу IV, § 9). Годограф скорости изображен на фиг. 142, *б*.



Фиг. 142.

Приняв начало координат плоскости u, v за центр инверсии и полагая радиус инверсии равным единице, получим для $\frac{1}{w} = \frac{1}{u - iv}$ область, представленную на фиг. 142, *в*.

Границами области получаются прямолинейные отрезки. Обозначим угол между откосом cb и горизонтальной осью через $\alpha = \pi\sigma$. Тогда в формуле, дающей конформное отображение многоугольника фиг. 142, *в* на нижнюю полуплоскость ζ (фиг. 142, *г*), в показателях будет фигурировать число

$$\sigma = \frac{\alpha}{\pi}. \qquad (2.1)$$

По формуле Кристоффеля-Шварца получим:

$$\frac{1}{w} = M \int_0^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}\,(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}} + N. \tag{2.2}$$

Вводя обозначение

$$\int_0^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}\,(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}} = \Phi(\zeta), \tag{2.3}$$

можем написать:

$$\frac{1}{w} = M\Phi(\zeta) + N. \tag{2.4}$$

Положим еще:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\beta} \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}\,(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}} = J_1 = \Phi(\beta), \\ &\int_{\beta}^{1} \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}\,(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}} = J_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Второй интеграл с помощью подстановки

$$\frac{\zeta^2-\beta^2}{1-\beta^2} = x$$

приводится к такому:

$$J_2 = \frac{1}{2\beta'} \int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{-1/2-\sigma}\, dx, \tag{2.6}$$

где

$$\beta' = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Введя функцию бета

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \tag{2.7}$$

и вспомнив связь функции бета с функцией гамма

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{2.8}$$

где

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1}\, dx, \tag{2.9}$$

найдем:

$$J_2 = \frac{1}{2\beta'}\,\mathrm{B}\left(\sigma,\ \frac{1}{2}-\sigma\right) = \frac{1}{2\beta'}\,\frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{2.10}$$

Напомним свойства функции гамма:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p), \qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \quad (2.11)$$

Воспользовавшись последним из них, приведем J_2 к виду

$$J_2=\frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}{2\beta'\sqrt{\pi}}. \quad (2.12)$$

Возвращаясь к уравнению (2.4), положим в нем $\zeta=\beta$. Получим точку c, в которой скорость равна бесконечности. Следовательно, при этом (2.4) должно дать

$$M\Phi(\beta)+N=0$$

или на основании (2.5)

$$MJ_1+N=0, \quad (2.13)$$

и (2.4) можно переписать так:

$$\frac{1}{w}=M[\Phi(\zeta)-J_1]. \quad (2.14)$$

Перейдем теперь к отрезку cb, определяющему откос канала. При обходе в нижней полуплоскости ζ на угол π в положительном направлении точки c, для которой $\zeta=\beta$, получим, что

$$(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}$$

перейдет в

$$e^{\pi i(1-\sigma)}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}=-e^{-\pi i\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}.$$

Получим:

$$\Phi(\zeta)=J_1-e^{\pi i\sigma}\int_{\beta}^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}.$$

Полагая здесь $\zeta=1$, найдем:

$$\Phi(1)=J_1-e^{\pi i\sigma}J_2. \quad (2.15)$$

Рассматривая фиг. 142, *б*, получим значение скорости в точке *b*:

$$u=k\sin\pi\sigma\cos\pi\sigma, \quad v=-k\cos^2\pi\sigma,$$

$$w=u-iv=kie^{-\pi i\sigma}\cos\pi\sigma.$$

Поэтому формула (2.4) при $\zeta=1$ даст:

$$\frac{1}{ki}e^{\pi i\sigma}=M[\Phi(1)-J_1]\cos\pi\sigma,$$

что можно переписать с помощью (2.15) так:

$$\frac{1}{ki} e^{\pi\sigma i} = -Me^{\pi\sigma i} J_2 \cos \pi\sigma,$$

откуда найдем:

$$M = \frac{i}{kJ_2 \cos \pi\sigma}. \tag{2.16}$$

Вспомнив, что

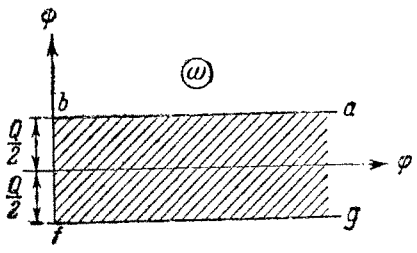
$$\omega = \varphi + i\psi,$$

$$\frac{d\omega}{dz} = w = u - iv$$

и использовав (2.16), перепишем (2.14) следующим образом:

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{w} = \frac{i}{kJ_2 \cos \pi\sigma} [\Phi(\zeta) - J_1]. \tag{2.17}$$

Теперь перейдем к определению комплексного потенциала. Положим вдоль периметра канала, являющегося линией равного потенциала, $\varphi = 0$. Обозначая через Q полный расход канала на единицу его длины, получим область комплексного потенциала, изображенную на фиг. 143. Ее отображение на нижнюю полуплоскость ζ (фиг. 142, *г*) дает:



Фиг. 143.

$$\omega = \frac{Qi}{\pi} \arcsin \zeta. \tag{2.18}$$

С помощью формул (2.17) и (2.18) найдем выражение

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{d\omega}\frac{d\omega}{d\zeta} = -\frac{Q}{k\pi J_2 \cos \pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\Phi(\zeta) - J_1].$$

Интегрирование даст нам z как функцию от ζ

$$z = -\frac{Q}{k\pi J_2 \cos \pi\sigma} \left\{ \int_0^{\zeta} \frac{\Phi(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - J_1 \arcsin \zeta \right\}. \tag{2.19}$$

Оси координат (x, y) выбраны на фиг. 142 так, чтобы $z = 0$ при $\zeta = 0$.

Преобразуем интеграл, вошедший в формулу (2.19), с помощью интегрирования по частям и учитывая равенство (2.3):

$$\int_0^{\zeta} \frac{\Phi(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \Phi(\zeta) \arcsin \zeta - \int_0^{\zeta} \frac{\zeta \arcsin \zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma} (\zeta^2 - \zeta^2)^{1-\sigma}}. \tag{2.20}$$

Теперь перепишем уравнение (2.19) для различных участков контура области движения.

Вдоль дна канала при $0<\zeta<\beta$

$$z=-\frac{Q}{k\pi J_2\cos\pi\sigma}\left\{\arcsin\zeta\left[\int_0^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}}-J_1\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\zeta}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}}\right\}. \qquad (2.21)$$

При $\zeta=\beta$ получаем $z=\frac{B_1}{2}$, где B_1 — ширина дна канала, а потому

$$\frac{B_1}{2}=\frac{Q}{k\pi J_2\cos\pi\sigma}\int_0^{\beta}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}}. \qquad (2.22)$$

Вдоль откоса bc при $\beta<\zeta<1$

$$z=\frac{B_1}{2}+\frac{Q}{k\pi J_2\cos\pi\sigma}e^{\pi\sigma i}\left\{\arcsin\zeta\int_{\beta}^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}-\right.$$

$$\left.-\int_{\beta}^{\zeta}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}\right\}. \qquad (2.23)$$

При $\zeta=1$ имеем $z=\frac{B}{2}+Hi$, где H — глубина канала, B — ширина канала поверху, и равенство (2.23) дает:

$$\frac{B-B_1}{2}=\frac{Q}{k\pi J_2}\left\{\frac{\pi}{2}J_2-\int_{\beta}^{1}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}\right\},$$

$$H=\frac{Q}{k\pi J_2}\operatorname{tg}\pi\sigma\left\{\frac{\pi}{2}J_2-\int_{\beta}^{1}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}\right\}. \qquad (2.24)$$

Вдоль свободной поверхности ba, где $1<\zeta<\infty$, имеем:

$$(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}=e^{\pi i\left(\frac{1}{2}+\sigma\right)}(\zeta^2-1)^{1/2+\sigma}=ie^{\pi\sigma i}(\zeta^2-1)^{1/2+\sigma}.$$

При этом для действительных значений ζ, бо́льших единицы $\arcsin\zeta$ преобразуется так:

$$\arcsin\zeta=\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{i}\int_1^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}=\frac{\pi}{2}-i\ln(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})=$$

$$=\frac{\pi}{2}-i\operatorname{arch}\zeta.$$

Заметим, что корень $\sqrt{1-\zeta^2}$ переходит в $+i\sqrt{\zeta^2-1}$, так как обход особой точки $\zeta=1$ происходит в положительном направлении при переходе с отрезка cb на отрезок ba в нижней полуплоскости ζ (фиг. 142, z).

Учитывая эти обстоятельства, из формулы (2.23) при переходе на отрезок $\zeta=\xi>1$ получаем:

$$z=\frac{B}{2}+Hi+\frac{Q}{k\pi J_2\cos\pi\sigma}\left\{-\operatorname{arch}\zeta\int_1^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}-\right.$$

$$\left.-iJ_2e^{\pi\sigma i}\operatorname{arch}\zeta+\int_1^{\zeta}\frac{\zeta\operatorname{arch}\zeta\,d\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}\right\}. \qquad (2.25)$$

Отделяя в этом равенстве действительную и мнимую части, получим уравнения свободной поверхности ba:

$$\left.\begin{aligned} x-\frac{B}{2}&=\frac{Q}{k\pi J_2\cos\pi\sigma}\left\{\int_1^{\zeta}\frac{\zeta\operatorname{arch}\zeta\,d\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}+\right.\\ &\left.+J_2\sin\pi\sigma\operatorname{arch}\zeta-\operatorname{arch}\zeta\int_1^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta^2-1)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}\right\},\\ y-H&=-\frac{Q}{k\pi}\operatorname{arch}\zeta\\ &(\operatorname{arch}\zeta=\ln(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})). \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

Перейдем теперь к определению зависимостей между расходами и размерами канала и параметрами σ и β. Формулы, служащие для этой цели, у нас уже получены: это формулы (2.22) и (2.24).

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\beta}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}&=f_1(\sigma,\beta),\\ \int_{\beta}^{1}\frac{\zeta\arcsin\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{1/2+\sigma}(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}}&=f_2(\sigma,\beta). \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

Тогда вместо (2.22) можно написать:

$$B_1=\frac{2Q}{k\pi J_2\cos\pi\sigma}f_1(\sigma,\beta), \qquad (2.28)$$

а вместо (2.24)

$$H=\frac{Q}{\pi k J_2}\operatorname{tg}\pi\sigma\left\{\frac{\pi}{2}J_2-f_2(\sigma,\ \beta)\right\},$$

$$\frac{B-B_1}{2}=\frac{Q}{\pi k J_2}\left\{\frac{\pi}{2}J_2-f_2(\sigma,\ \beta)\right\}.$$

Окончательно для ширины B русла поверху найдем значение

$$B=B_1+\frac{Q}{k}\left[1-\frac{2f_2(\sigma,\ \beta)}{\pi J_2}\right]. \tag{2.29}$$

Аналогично для глубины канала H:

$$H=\frac{Q}{2k}\operatorname{tg}\sigma\pi\left[1-\frac{2f_2(\sigma,\ \beta)}{\pi J_2}\right]. \tag{2.30}$$

Из этих формул можно выразить расход Q в зависимости от параметров σ, β и одной из трех величин B, b, H (между последними существует очевидное соотношение $\frac{B-B_1}{2}=H\operatorname{ctg}\sigma\pi$).

На практике приходится по заданным размерам канала отыскивать расход Q, для чего величина β подыскивается подбором.

В. В. Ведерников [3] записывает формулу для расхода в виде

$$Q=k(B+AH), \tag{2.31}$$

где

$$A=\frac{2}{\operatorname{tg}\sigma\pi}\cdot\frac{f_2(\sigma,\ \beta)-\frac{1}{\cos\sigma\pi}f_1(\sigma,\ \beta)}{\frac{\pi}{2}J_2-f_2(\sigma,\ \beta)}. \tag{2.32}$$

Найдем еще формулу для расхода Q' через дно канала.

Если в формуле (2.18)

$$\omega=\varphi+i\psi=\frac{Qi}{\pi}\arcsin\zeta$$

мы положим $\zeta=\beta$ (т. е. возьмем точку c фиг. 142, $г$), то получим, что $\varphi=0$, $\psi=\frac{Q'}{2}$, т. е.

$$\frac{Q'}{2}=\frac{Q}{\pi}\arcsin\beta,$$

откуда

$$Q'=\frac{2Q}{\pi}\arcsin\beta. \tag{2.33}$$

Давая β и α ряд значений, В. В. Ведерников вычислил соответствующие значения величин

$$\frac{kB_1}{Q},\ \frac{kB}{Q},\ \frac{kH}{Q},\ \frac{Q'}{Q},\ A \text{ и } \frac{B}{H}.$$

Результаты этих вычислений мы приводим в таблице 7 (автором все числа даны с четырьмя значащими цифрами).

Заметим, что, обозначив ширину просачивающегося потока на бесконечности через L, мы будем иметь:

$$Q = kL,$$

так как скорость на бесконечности равна коэффициенту фильтрации k.

Таблица 7

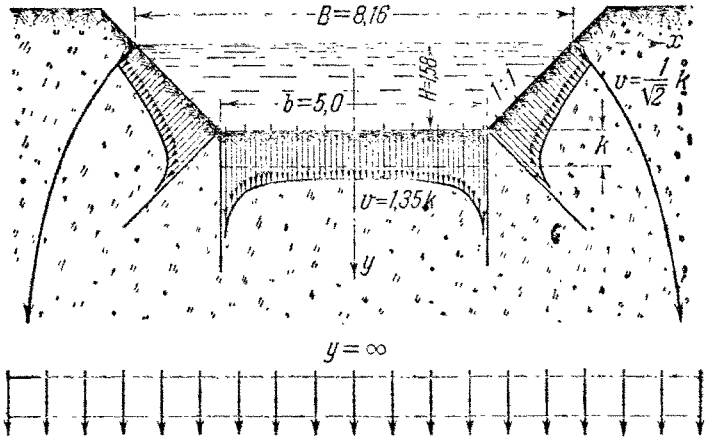
Значения величин $\frac{kB_1}{Q}$, $\frac{kB}{Q}$, $\frac{kH}{Q}$, $\frac{Q'}{Q}$, A, $\frac{B}{H}$ в зависимости от $\alpha = \sigma\pi$ (или $m = \operatorname{ctg}\alpha$) и от β для канала трапецоидального сечения

α	m	β^2	$\frac{kB_1}{Q}$	$\frac{kB}{Q}$	$\frac{kH}{Q}$	$\frac{Q'}{Q}$	A	$\frac{B}{H}$
45°	1	0	0	0,500	0,250	0	2,00	2,00
45°	1	0,25	0,167	0,545	0,189	0,333	2,40	2,88
45°	1	0,50	0,304	0,595	0,146	0,500	2,78	4,08
45°	1	0,75	0,479	0,676	0,0986	0,667	3,29	6,86
45°	1	0,875	0,609	0,746	0,0682	0,770	3,73	10,9
45°	1	0,9375	0,706	0,802	0,0480	0,839	4,12	16,7
45°	1	1	1	1	0	1	∞	∞
30°	1,732	0	0	0,656	0,189	0	1,82	3,46
30°	1,732	0,25	0,204	0,684	0,139	0,333	2,28	4,93
30°	1,732	0,50	0,353	0,720	0,106	0,500	2,63	6,78
30°	1,732	0,75	0,530	0,777	0,0713	0,667	3,13	10,9
30°	1,732	0,875	0,653	0,824	0,0494	0,770	3,55	16,7
30°	1,732	1	1	1	0	1	∞	∞
22°30′	2,414	0	0	0,736	0,152	0	1,74	4,82
22°30′	2,414	0,25	0,229	0,757	0,109	0,333	2,22	6,92
22°30′	2,414	0,50	0,384	0,786	0,0832	0,500	2,58	9,45
22°30′	2,414	0,75	0,559	0,829	0,0559	0,667	3,05	14,8
22°30′	2,414	0,875	0,678	0,865	0,0387	0,770	3,48	22,3
22°30′	2,414	1	1	1	0	1	∞	∞

Интересно сопоставить формулу (2.31) для расхода с соответствующей формулой для канала криволинейного очертания по трохоидам, рассмотренного у нас в главе IV, § 9. Там мы имели в обозначениях формулы (2.31) величину $A = 2$. Приведенная таблица показывает, что для канала трапецоидального сечения для практически интересных случаев A меняется в пределах от 2 до 3—4.

Для канала, получающегося при $\beta = \sin 52°30'$, В. В. Ведерниковым построена картина распределения скоростей вдоль периметра

канала и форма депрессионной кривой, а также вычислена ширина потока на бесконечности. Эти результаты представлены на фиг. 144.



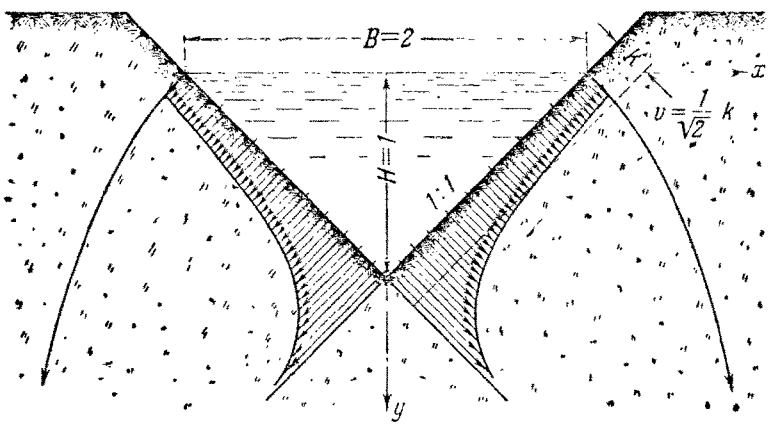
Фиг. 144.

§ 3. Канал треугольного сечения. Отдельно В. В. Ведерников исследовал канал треугольного сечения. Из общих формул этот случай получится при $\beta = 0$. Величина A, входящая в формулу расхода (2.31), здесь меняется в пределах, даваемых прилагаемой таблицей 8.

Таблица 8

Зависимость A от $\alpha = \sigma\pi$ для канала треугольного сечения

α	9°	22°30′	30°	45°	60°	67°30′	87°
A	1,58	1,74	1,82	2,00	2,20	2,31	2,53



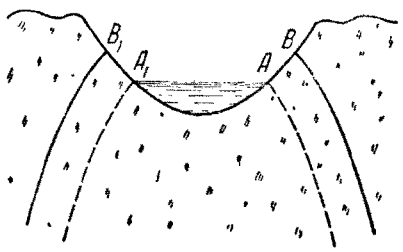
Фиг. 145.

При $\alpha = 45°$, как видим, $A = 2$. На фиг. 145 приводится график, данный В. В. Ведерниковым, для канала треугольного русла.

В рассматриваемых здесь работах предполагается, что скорость фильтрации на бесконечности равна коэффициенту фильтрации. Это соответствует тому, что очень далеко внизу — теоретически на бесконечности — имеется дренирующий слой. Для случая конечной глубины дренирующего слоя задача о фильтрации из трапецоидального канала была решена Ю. Д. Соколовым [4].

§ 4. Учет капиллярности грунта при фильтрации из каналов. Мы уже отмечали, что явление капиллярности играет большую роль при движении грунтовых вод со свободной поверхностью. Под действием капиллярных сил расширяется площадь, смоченная водой, и увеличивается расход. Мы рассмотрели в § 2 главы IV задачу о шпунте Жуковского при учете капиллярности. Теперь рассмотрим простейшие случаи фильтрации из каналов.

Пусть имеем канал с произвольной формой поперечного сечения (фиг. 146). Пунктирная линия означает свободную поверхность при отсутствии капиллярности, сплошная — при наличии ее. В последнем случае, как мы знаем, принимается условие [1], что на депрессионной кривой давление постоянно и равно атмосферному, уменьшенному на величину $\gamma h_к$ (где $h_к$ — высота капиллярного поднятия, γ — объемный вес жидкости):



Фиг. 146.

$$p = p_а - \gamma h_к \qquad (4.1)$$

на свободной поверхности.

С. Ф. Аверьянов [8] дает приближенный учет переменной насыщенности грунта в области капиллярной каймы. А именно, рассматривая движение с депрессионной кривой в форме параболы Дюпюи, автор принимает, что в области капиллярной каймы насыщенность грунта водой меняется в зависимости от высоты по параболическому закону, убывая при подъеме вверх. Тогда расход определится по формуле, представляющей обобщение формулы Дюпюи (гл. II),

$$Q = k\frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2}\left(\frac{h_1 + h_2}{2} + \alpha h_к\right),$$

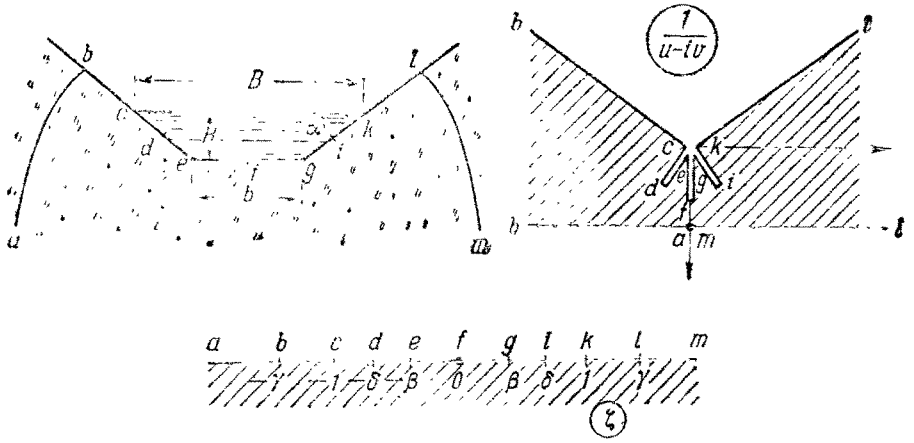
где $h_к$ — высота капиллярного поднятия, α — число, меньшее единицы, зависящее от насыщенности грунта. Для наиболее часто встречающихся случаев С. Ф. Аверьянов предлагает брать $\alpha = 0{,}3$.

Мы не будем заниматься мало еще разработанным вопросом о переменной насыщенности грунта, ограничиваясь способом учета влияния капиллярности, указанным Н. Е. Жуковским в виде формулы (4.1).

Возникает вопрос о том, какое условие должно выполняться на откосах канала AB и A_1B_1 (фиг. 146). В. В. Ведерников, а вместе с ним и другие авторы принимают эти участки (в рассмотренных до настоящего времени задачах эти участки прямолинейны) за твердые

стенки, на которых функция тока имеет постоянное значение. При этом условии применимы изложенные нами методы решения задач по теории фильтрации. Понятно, однако, что при учете капиллярности решение этих задач усложняется. Мы ограничимся здесь рассмотрением простейших случаев, когда можно получить числовые результаты.

§ 5. Канал трапецоидального сечения. В. В. Ведерников [7] дал общие формулы для фильтрации из канала трапецоидального



Фиг. 147.

сечения (фиг. 147) при учете капиллярности. Как частный случай им рассмотрен случай одиночных откосов, т. е. составляющих угол в 45° с горизонтальной плоскостью.

Формула для величины, обратной комплексной скорости, имеет вид (фиг. 147)

$$\frac{1}{u-iv}=-\frac{i}{J_1+J_2}\int_0^{\zeta}\frac{\zeta(\delta^2-\zeta^2)\,d\zeta}{(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}\sqrt{1-\zeta^2}\,(\gamma^2-\zeta^2)^{1+\sigma}}+\frac{iJ_2}{J_1+J_2}, \tag{5.1}$$

где

$$\delta^2=\frac{J_3}{J_4}, \quad \sigma=\frac{\alpha}{\pi}, \tag{5.2}$$

а величины J_1, J_2, J_3, J_4 имеют значения

$$J_1=\int_0^{\infty}\frac{\eta(\delta^2+\eta^2)\,d\eta}{(\beta^2+\eta^2)^{1-\sigma}\sqrt{1+\eta^2}\,(\gamma^2+\eta^2)^{1+\sigma}},$$

$$J_2=\int_0^{\beta}\frac{\zeta(\delta^2-\zeta^2)\,d\zeta}{(\beta^2-\zeta^2)^{1-\sigma}\sqrt{1-\zeta^2}\,(\gamma^2-\zeta^2)^{1+\sigma}},$$

$$J_3=\int_{\beta}^{1}\frac{\zeta^3\,d\zeta}{(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}(\gamma^2-\zeta^2)^{1+\sigma}\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$J_4=\int_{\beta}^{1}\frac{\zeta\,d\zeta}{(\zeta^2-\beta^2)^{1-\sigma}(\gamma^2-\zeta^2)^{1+\sigma}\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Для комплексного потенциала имеем:

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{Q}{k\pi} \arcsin \zeta,$$

где Q — расход канала. Зависимость z от ζ дается формулой

$$z = \frac{Q}{\varkappa\pi} \int \frac{1}{u - iv} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{5.3}$$

Если ввести еще интегралы

$$J_5 = \int_0^{\beta} \arcsin \zeta \frac{\zeta(\delta^2 - \zeta^2)\, d\zeta}{(\beta^2 - \zeta^2)^{1-\sigma} (\gamma^2 - \zeta^2)^{1+\sigma} \sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$J_6 = -\int_{\beta}^{1} \arcsin \zeta \frac{\zeta(\delta^2 - \zeta^2)\, d\zeta}{(\zeta^2 - \beta^2)^{1-\sigma} (\gamma^2 - \zeta^2)^{1+\sigma} \sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$J_7 = \int_1^{\gamma} \frac{(\operatorname{arch}\beta - \operatorname{arch}\zeta)(\zeta^2 - \delta^2)\, \zeta\, d\zeta}{(\zeta^2 - \beta^2)^{1-\sigma} (\gamma^2 - \zeta^2)^{1+\sigma} \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$(\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})),$$

то параметры β и γ, расход Q и высота капиллярного поднятия

Таблица 9

Результаты расчета для случая одиночного откоса

$\frac{B}{H}$	$\frac{h_к}{H}$	A	$\frac{h}{h_к}$	γ^2	β^2
2,0	7,3	16,0	0,246	2,25	0
4,1	12,6	27,1	0,24		0,25
8,3	22,0	46,8	0,233		0,50
22,8	51,2	106,8	0,225		0,75
2,0	3,0	8,8	0,285	1,44	0
3,8	4,8	13,9	0,273		0,25
7,2	8,0	22,9	0,254		0,50
19,7	18,6	48,2	0,248		0,75
2,0	0,97	4,7	0,32	1,1	0
3,4	1,46	6,6	0,315		0,25
5,8	2,2	9,5	0,306		0,50
13,2	4,1	16,5	0,287		0,75

вдоль откосов $h_к$ определятся следующими уравнениями:

$$\frac{b}{2} = \frac{Q}{k\pi}\frac{J_5}{J_1 + J_2}, \tag{5.4}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{Q}{k\pi}\frac{J_5 + J_6\cos\pi\sigma}{J_1 + J_2}, \tag{5.5}$$

$$h = h_к - \frac{Q}{k\pi}\operatorname{arch}\gamma = \frac{J_7\sin\alpha}{J_1 + J_2}\frac{Q}{k\pi}. \tag{5.6}$$

Здесь b — ширина канала по дну, h — высота капиллярного поднятия данного грунта.

Обозначая через H глубину воды в канале и через B — ширину зеркала воды в канале, будем иметь:

$$H = \frac{Q}{k\pi}\frac{J_6\sin\alpha}{J_1 + J_2}, \tag{5.7}$$

$$B = 2H\left(\frac{J_5}{J_6\sin\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right). \tag{5.8}$$

Расход на единицу длины канала определяется по формуле

$$Q = k(B + AH), \tag{5.9}$$

где

$$A = \frac{\pi(J_1 + J_2) - 2(J_5 + J_6\cos\alpha)}{J_6\sin\alpha}. \tag{5.10}$$

Можно также определить расход по другой формуле:

$$Q = kNB,$$

где

$$N = \frac{\pi}{2}\frac{J_1 + J_2}{J_5 + J_6\cos\alpha}.$$

Таблица 10

Результаты расчета для случая вертикальной щели

$\frac{h_к}{H}$	A	$\frac{h}{h_к}$
0	2,8	1,0
0,75	3,7	0,58
1,9	6,8	0,55
3,2	9,6	0,48
27,4	43,7	0,33

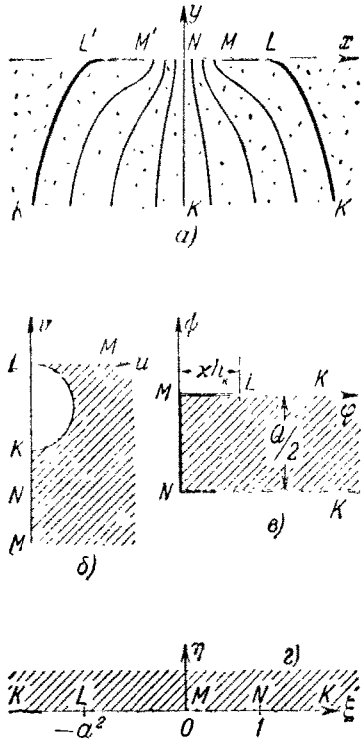
В. В. Ведерниковым произведены вычисления для двух случаев: одиночного откоса (таблица 9) и для вертикальной щели $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, B = 0\right.$; таблица 10).

Отметим, что высота поднятия воды по откосам получается меньшей, чем высота статического капиллярного поднятия.

В дополнение к этому исследованию рассмотрим еще один более простой случай фильтрации из канала, который можно исследовать более подробно.

§ 6. Канал с малым уровнем воды [6]. Если уровень воды в канале близок к нулю, то расход Q_0 на фильтрацию из канала в случае отсутствия капиллярного поднятия близок к величине

$$Q_0 = \varkappa B. \tag{6.1}$$



Фиг. 148.

Предположим, что имеем фильтрацию из канала MM' в грунт, капиллярная высота которого есть $h_к$. Тогда годограф скорости будет иметь вид фиг. 148, *б*, где изображена половина области годографа, соответствующая правой половине области движения жидкости. В точке M скорость равна бесконечности, в точке L — нулю, на бесконечности она равна коэффициенту фильтрации $\varkappa$.

Область комплексного потенциала представлена на фиг. 148, *в*. Приняв значение $\varphi = 0$ вдоль MM', $\psi = 0$ вдоль MLK, получим в точке L для φ значение

$$\varphi = + \varkappa h_к.$$

Вдоль оси симметрии KN будем иметь:

$$\psi = -\frac{Q}{2},$$

где Q — расход всего канала.

Отобразим область комплексного потенциала на полуплоскость ζ. Абсцисса точки L обозначена на фиг. 148, *г* через $-a^2$.

Для комплексного потенциала получим формулу

$$\omega = -\frac{iQ}{2\pi} \arccos(1 - 2\zeta). \tag{6.2}$$

Решая это уравнение относительно ζ, найдем:

$$\zeta = \sin^2 \frac{\pi \omega i}{Q} = -\operatorname{sh}^2 \frac{\pi \omega}{Q}. \tag{6.3}$$

Полагая

$$\zeta = -a^2, \quad \omega = + \varkappa h_к,$$

получим:

$$a = \operatorname{sh} \frac{\pi \varkappa h_к}{Q}. \tag{6.4}$$

Обращаясь к годографу скорости, произведем инверсию области скорости в круге радиуса 1 с центром в начале координат. Получим полуполосу. Ее отображение на полуплоскость ζ представляется

с помощью интеграла

$$\frac{1}{u-iv}=\frac{dz}{d\omega}=M\int\frac{d\zeta}{(\zeta+a^2)\sqrt{\zeta}}=\frac{2M}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\zeta}}{a}+N, \tag{6.5}$$

где M и N — постоянные.

Условия $\zeta=0$, $u-iv=\infty$ и $\zeta=\infty$, $v=-\varkappa$ дают:

$$\frac{dz}{d\omega}=-\frac{2i}{\varkappa\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\zeta}}{a}=-\frac{2i}{\varkappa\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{\pi\omega i}{Q}}{a}. \tag{6.6}$$

Обозначим для краткости

$$\frac{\pi\omega i}{Q}=W \tag{6.7}$$

и рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{dz}{d\omega}=-\frac{2i}{\pi\varkappa}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{W}{a}}{}=-\frac{4i}{\pi\varkappa}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(2n-1)\alpha}\frac{\sin(2n-1)W}{2n-1}, \tag{6.8}$$

где

$$\alpha=\frac{\pi\varkappa h_{\text{к}}}{Q}.$$

Ряд (6.8) получается из известного ряда

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2p\sin x}{1-p^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}p^{2n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

При этом, положив $W=U+iV$, мы можем представить правую часть уравнения (6.8) в виде

$$-\frac{2}{\pi\varkappa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left\{e^{-(2n-1)(\alpha-iU+V)}-e^{-(2n-1)(\alpha+iU-V)}\right\},$$

из которого вытекает, что ряд (6.8) сходится в полосе

$$-\alpha<V<\alpha$$

или, переходя к значениям φ, для

$$-\varkappa h_{\text{к}}<\varphi<+\varkappa h_{\text{к}}.$$

Интегрируя ряд (6.8) почленно, найдем z:

$$z=\frac{4Q}{\varkappa\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(2n-1)\alpha}\frac{\cos(2n-1)W}{(2n-1)^2}. \tag{6.9}$$

Постоянная интегрирования здесь принята равной нулю, так как у нас $z=0$ при $\omega=-\frac{Qi}{2}$.

Полагая в (6.9) $\zeta=0$ и $\zeta=-a^2$, получим соответственно $\omega=0$, $W=0$ и $\omega=+\varkappa h_к$, $W=i\varkappa$. Поэтому найдем для ширины канала B:

$$B=\frac{8Q}{\varkappa\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)\alpha}}{(2n-1)^2}\quad\left(\alpha=\frac{\pi\varkappa h_к}{Q}\right) \tag{6.10}$$

и для ширины смоченной поверху части грунта B_1:

$$B_1=\frac{8Q}{\varkappa\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(2n-1)\alpha}\frac{\operatorname{ch}(2n-1)\alpha}{(2n-1)^2}. \tag{6.11}$$

Раскрывая выражение гиперболического косинуса, перепишем последнее равенство в виде

$$B_1=\frac{4Q}{\varkappa\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+e^{-2(2n-1)\alpha}}{(2n-1)^2},$$

откуда следует равенство $\left(\text{если учесть, что } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\right)$

$$B_1(\alpha)=\frac{Q}{2\varkappa}+\frac{1}{2}B(2\alpha). \tag{6.12}$$

По заданной ширине канала из (6.10) и (6.11) или (6.12) найдем ширину B_1 и расход Q. Так как на бесконечности скорость равна коэффициенту фильтрации, то ширина потока просачивающейся воды на бесконечности B_2 будет:

$$B_2=\frac{Q}{\varkappa}. \tag{6.13}$$

Ряды (6.10) и (6.11) хорошо сходятся для больших значений α, но они медленно сходятся для малых α. Поэтому преобразуем (6.10) следующим образом. Обозначив

$$A=e^{-x}+\frac{1}{3^2}e^{-3x}+\frac{1}{5^2}e^{-5x}+\ldots, \tag{6.14}$$

продифференцируем это выражение и преобразуем получаемый при этом ряд

$$\frac{dA}{dx}=-e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{5}e^{-5x}-\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1}{2}\ln\operatorname{sh}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{ch}\frac{x}{2}. \tag{6.15}$$

Воспользуемся рядами

$$\ln\frac{\operatorname{sh} u}{u}=\frac{s_2}{\pi^2}u^2-\frac{1}{2}\frac{s_4}{\pi^4}u^4+\frac{1}{3}\frac{s_6}{\pi^6}u^6-\ldots,$$

$$\ln\operatorname{ch} u=(2^2-1)\frac{s_2}{\pi^2}u^2-\frac{2^4-1}{2}\frac{s_4}{\pi^2}u^4+\ldots,$$

где

$$s_n=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Найдем для производной $\frac{dA}{dx}$ ряд, сходящийся при $0<x<\pi$:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2}-(2-1)\frac{s_2}{2^2\pi^2}x^2+\frac{2^3-1}{2}\frac{s_4}{2^4\pi^4}x^4-\frac{2^5-1}{3}\frac{s_6}{2^6\pi^6}x^6+\ldots,$$

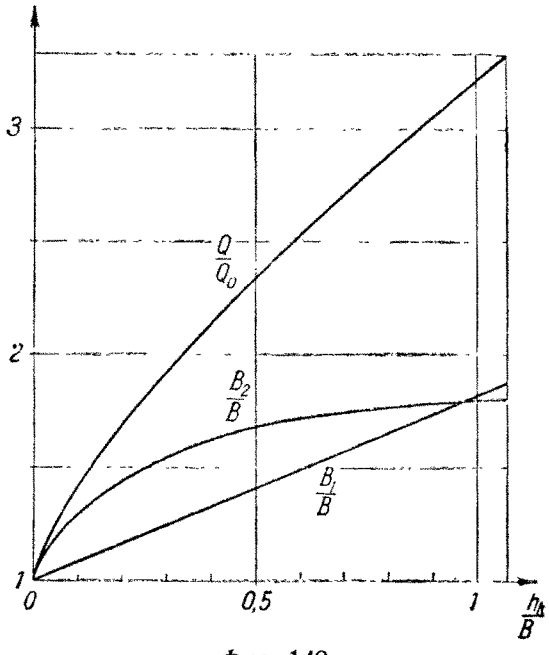
интегрирование которого приводит к такому выражению:

$$A=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{x}{2}-1\right)x-\frac{s_2}{2^2\pi^2}\frac{x^3}{3}+\frac{2^3-1}{2}\frac{s_4}{2^4\pi^4}\frac{x^5}{5}-\frac{2^5-1}{3}\frac{s_6}{2^6\pi^6}\frac{x^7}{7}+\ldots+C.$$

Так как при $x=0$ согласно (6.14) $A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$, то следует принять $C=\frac{\pi^2}{8}$. Возвращаясь к выражению (6.10) для B, найдем:

$$B=\frac{4Q}{\varkappa\pi^2}\left[\frac{\pi^2}{4}+\left(\ln\frac{\alpha}{2}-1\right)\alpha-\frac{\alpha^3}{36}+\frac{7\alpha^5}{7200}-\frac{31\alpha^7}{635\,040}+\ldots\right]. \quad (6.16)$$

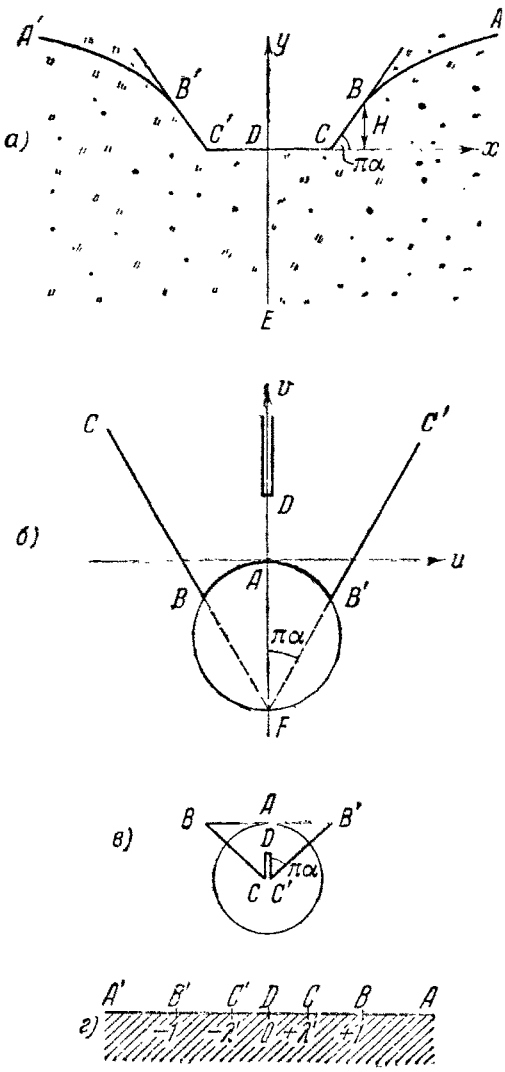
На фиг. 149 построены графики зависимости Q/Q_0, B_1/B, B_2/B от $h_к/B$. Здесь Q_0 есть расход, определяемый равенством $Q_0=\varkappa B$, т. е. расход из канала при $h_к=0$.



Фиг. 149.

Рассмотрение графиков показывает, что влияние капиллярности на фильтрацию является значительным. При этом роль капиллярности возрастает с возрастанием отношения $h_к/B$. В действительных условиях статическое капиллярное поднятие часто бывает порядка нескольких десятков сантиметров, а иногда достигает двух-трех метров. В литературе имеется ряд указаний на то, что при рассмотрении движения грунтовых вод нужно брать не статическое поднятие, но некоторую долю его. Если мы возьмем

$h_к = \frac{1}{3} h_{кс}$, где $h_{кс}$ — высота статического поднятия, то получим величину, могущую достигать значения в 1 *м* и более. При ширине канала в 10 *м* будем иметь $h_к : B = 0{,}1$, и, как видно из фиг. 149, расход увеличивается на 40%, а разность $B_1 - B$ будет равна 0,9 *м*. При меньшей ширине канала изменения расхода и величины растекания поверху будут еще значительнее.



Фиг. 150.

Отметим, что зависимость B_1/B от $h_к/B$ получается близкой к линейной. Для значений $0 < h_к < 0{,}4B$ получаем:

$$B_1 = B + 0{,}883 h_к;$$

в более широком интервале, для $0 < h_к < 1{,}1B$, можно принять:

$$B_1 = B + 0{,}8 h_к.$$

Н. Н. Веригин [9] рассмотрел вопрос об учете капиллярности при фильтрации из канала почти полукруглого сечения; в нем растекание в стороны будет еще сильнее, чем в случае широкого канала. Н. Н. Веригин считает, что эта задача применима к фильтрации из оросителя ирригационной системы (ширина такого оросителя бывает порядка 20—30 *см*). Отметим, что почва со структурным грунтом обладает очень слабой капиллярностью.

§ 7. Приток грунтовых вод к дренажной канаве трапецоидального сечения. Решение этой задачи было дано В. В. Ведерниковым [3]. Его исследование дополнено Ю. Д. Соколовым [5].

Канава изображена на фиг. 150, *а*. Высотой воды в канаве пренебрегаем, так как при наличии воды решение задачи сильно усложняется.

Вдоль всего контура области движения мы имеем здесь условие $\varphi + ky = 0$; поэтому удобно использовать функцию Жуковского

$$\theta = \omega - ikz = \varphi + ky + i(\psi - kx).$$

Годограф скорости (фиг. 150, *б*) имеет границами дугу окружности и прямые, причем все они пересекаются в одной точке F, где $u=0$, $v=-k$. Инверсия в окружности с центром в точке F дает многоугольник фиг. 150, *в*, который уже нетрудно отобразить на полуплоскость ζ (фиг. 150, *г*).

Заметив, что

$$\frac{d\theta}{dz}=w-ik,$$

мы видим, что обратная величина

$$U=\frac{dz}{d\theta}=\frac{1}{w-ik} \tag{7.1}$$

как раз соответствует той функции, область которой получается после указанной выше инверсии на фиг. 150. Переводя вершины этой многоугольной области в точки плоскости ζ, указанные на фиг. 150, *г*, получим:

$$U=M\int_0^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}(\lambda'^2-\zeta^2)^{1-\alpha}}+N.$$

При $\zeta=0$ имеем $w=-iv_0$, где через v_0 обозначена величина скорости в точке D — наименьшая скорость вдоль дна канавы. Это дает для N значение

$$N=\frac{1}{-iv_0-ik}=\frac{i}{v_0+k}.$$

Далее, при $\zeta=\lambda'$ имеем $w=\infty$, т. е. $U=0$. Поэтому можно написать:

$$U=M\int_{\lambda'}^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}(\lambda'^2-\zeta^2)^{1-\alpha}}. \tag{7.2}$$

Для того чтобы получить действительные значения подинтегральной функции для $\lambda'<\zeta<1$, заметим, что $(\lambda'-\zeta)^{1-\alpha}$ при переходе с отрезка CD на отрезок CB путем обхода точки C в нижней полуплоскости против часовой стрелки на угол π переходит в

$$(\zeta-\lambda')^{1-\alpha}e^{\pi i(1-\alpha)}=-(\zeta-\lambda')^{1-\alpha}e^{-\pi i\alpha}.$$

Следовательно, U можно представить в виде

$$U=-Me^{\pi i\alpha}\int_{\lambda'}^{\zeta}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}(\zeta^2-\lambda'^2)^{1-\alpha}}. \tag{7.2'}$$

При $\zeta=1$, как видно из фиг. 150, *б*,

$$u+iv=-k\sin\pi\alpha e^{\pi i\alpha},$$

откуда для U в точке $\zeta = 1$ получается значение

$$U_1 = \frac{1}{u - iv - ki} = \frac{ie^{\pi i\alpha}}{k\cos\pi\alpha}.$$

Подставляя в (7.2′) $\zeta = 1$, $U = U_1$, получим после сокращения на $e^{\pi i\alpha}$

$$\frac{i}{k\cos\pi\alpha} = -M\int_{\lambda'}^{1}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}(\zeta^2-\lambda'^2)^{1-\alpha}} = -MJ, \qquad (7.3)$$

где

$$J = \int_{\lambda'}^{1}\frac{\zeta\,d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}(\zeta^2-\lambda'^2)^{1-\alpha}}.$$

Подстановка

$$1-\zeta^2 = \lambda^2 x \qquad (\lambda^2 = 1-\lambda'^2)$$

приводит J к виду

$$J = \frac{1}{2\lambda}\int_0^1 x^{-\alpha-1/2}(1-x)^{\alpha-1}\,dx.$$

Вспоминая обозначение функции бета

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

и связь этой функции с функцией гамма

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

напишем:

$$J = \frac{1}{2\lambda}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}-\alpha,\ \alpha\right) = \frac{1}{2\lambda}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Далее, по формуле

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}$$

найдем:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = \frac{\pi}{\cos\pi\alpha\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}$$

и, зная еще, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

окончательно напишем для J:

$$J = \frac{1}{2\lambda}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}{\cos\pi\alpha\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}.$$

Теперь из уравнения (7.3), подставляя в него найденное значение J, получим M:

$$M = -\frac{2\lambda i \Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}{k\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}.$$

Положим для краткости:

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}.$$

Тогда можно будет переписать уравнение (7.1) так:

$$\frac{dz}{d\theta} = U = -\frac{2\lambda i A}{k}\int_0^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{\alpha+1/2}(\lambda'^2-\zeta^2)^{1-\alpha}} + \frac{i}{v_0+k}. \qquad (7.4)$$

Теперь найдем зависимость θ от ζ. Так как области нашего движения соответствует полуплоскость плоскости θ, это означает, что θ и ζ связаны линейным преобразованием вида

$$\theta = M_1\zeta + N_1.$$

Постоянные M_1 и N_1 определяются из двух условий. А именно, при $\zeta = 0$ имеем $\varphi = 0$, $\psi = \frac{Q}{2}$, $x = 0$; поэтому

$$\theta = \frac{iQ}{2}.$$

Далее, при $\zeta = 1$ у нас $\varphi + ky = 0$, $\psi = 0$, $x = \frac{B}{2}$; поэтому

$$\theta = -\frac{ikB}{2}.$$

Как нетрудно видеть, получаем для θ:

$$\theta = -\frac{i}{2}(kB+Q)\zeta + \frac{iQ}{2} \qquad (7.5)$$

и для $d\theta$:

$$d\theta = -\frac{i}{2}(kB+Q)\,d\zeta.$$

Теперь, интегрируя по ζ уравнение (7.4), получим:

$$z = -\lambda A\left(B+\frac{Q}{k}\right)\int_0^{\zeta} d\zeta_2 \int_0^{\zeta_2} \frac{\zeta_1\, d\zeta_1}{(1-\zeta_1^2)^{\alpha+1/2}(\lambda'^2-\zeta_1^2)^{1-\alpha}} + \frac{kB+Q}{2(v_0+k)}\zeta. \qquad (7.6)$$

Это уравнение было дано В. В. Ведерниковым, который более детально исследовал случай $\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. вертикальных откосов.

Ю. Д. Соколов подверг (7.6) дальнейшим преобразованиям, положив

$$t = \frac{1-\zeta^2}{\lambda^2},$$

где

$$\lambda^2 = 1 - \lambda'^2.$$

Тогда для U можно написать следующие выражения:

На $DC\left(1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\right)$

$$U = \frac{iA}{k} \int_1^t \frac{dt}{t^{\alpha+1/2}(t-1)^{1-\alpha}}; \tag{7.7}$$

на $CB\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$

$$U = \frac{A(i\cos\pi\alpha - \sin\pi\alpha)}{k} \int_t^1 \frac{dt}{t^{\alpha+1/2}(1-t)^{1-\alpha}}; \tag{7.7'}$$

на $BA\,(-\infty < t \leqslant 0)$

$$U = -\frac{A}{k} \int_{-\infty}^t \frac{dt}{(-t)^{\alpha+1/2}(1-t)^{1-\alpha}} + \frac{i}{k}. \tag{7.7''}$$

Положим в формуле (7.7) $t = \frac{1}{\lambda^2}$ и введем обозначение

$$J_1 = \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dt}{t^{\alpha+1/2}(t-1)^{1-\alpha}}. \tag{7.8}$$

Так как при этом $\zeta = 0$ и $w = u - iv = -iv_0$, то получим:

$$U = \frac{i}{v_0 + k}$$

и

$$\frac{k}{v_0 + k} = AJ_1. \tag{7.9}$$

Последнее уравнение дает зависимость между параметром λ и величиной скорости v_0. Введем безразмерную величину $v_0/k = \bar{v}$. Тогда это уравнение перепишется так:

$$\frac{1}{\bar{v}+1} = AJ_1. \tag{7.9'}$$

Отметим два крайних случая равенства (7.9'). Во-первых, когда λ близко к нулю, ему соответствует малое значение скорости v_0. В самом деле, при этом λ' близко к единице, точки C и B на фиг. 150

близки; следовательно, на плоскости z будем иметь относительно большую ширину основания b канавы и, значит, малую скорость v_0.

Но при малых значениях λ можно написать:

$$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1/2}(t-1)^{1-\alpha}} + \int_{\infty}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dt}{t^{3/2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{1-\alpha}}. \qquad (7.10)$$

Первый интеграл правой части с помощью подстановки $t = \frac{1}{\tau}$ приводится к функции бета. Во втором можно пренебречь в скобках величиной $\frac{1}{t}$ по сравнению с единицей. Таким образом, получим:

$$J_1 \approx \int_0^1 \tau^{-1/2}(1-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau - \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$$

или

$$J_1 \approx B\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) - 2\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)} - 2\lambda.$$

Вспоминая равенство для A, можем для краткости написать для малых λ:

$$J_1 \approx \frac{1}{A} - 2\lambda.$$

Теперь рассмотрим второй случай, когда λ близко к единице. При этом λ' близко к нулю, основание канала относительно мало, скорость v_0 велика. В интеграле J_1 теперь t меняется в узких пределах от 1 до $1/\lambda^2$, близкого к единице. Поэтому положим под знаком интеграла (7.8) $t^{\alpha+1/2} \approx 1$. Тогда получим:

$$J_1 \approx \int_1^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dt}{(t-1)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\frac{\lambda'^{2\alpha}}{\lambda^{2\alpha}} \approx \frac{\lambda'^{2\alpha}}{\alpha}.$$

Формула (7.9) дает:

для $\lambda \approx 0$

$$\lambda \approx -\frac{1}{2A\left(1+\frac{k}{v_0}\right)},$$

для $\lambda \approx 1$

$$\lambda' \approx \left[\frac{\alpha}{A\left(\frac{v_0}{k}+1\right)}\right]^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Займемся теперь преобразованием формулы (7.6). Применим интегрирование по частям к двойному интегралу. Получим:

$$J(\zeta)=\int_0^{\zeta} d\zeta_2 \int_0^{\zeta_2} \frac{\zeta_1\, d\zeta_1}{(1-\zeta_1^2)^{1/2+\alpha}(\lambda'^2-\zeta_1^2)^{1-\alpha}}=$$

$$=\zeta\int_0^{\zeta}\frac{\zeta_1\, d\zeta_1}{(1-\zeta_1^2)^{\alpha+1/2}(\lambda'^2-\zeta_1^2)^{1-\alpha}}-\int_0^{\zeta}\frac{\zeta_1^2\, d\zeta_1}{(1-\zeta_1^2)^{\alpha+1/2}(\lambda'^2-\zeta_1^2)^{1-\alpha}}.$$

Подстановка $t_1=\frac{1-\zeta_1^2}{\lambda^2}$, из которой следует, что $\zeta_1=\sqrt{1-\lambda^2 t_1}$, дает, если объединить два полученных интеграла:

$$J(\zeta(t))=-\frac{1}{2\lambda}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{t}\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}-\sqrt{1-\lambda^2 t_1}}{t_1^{\alpha+1/2}(t_1-1)^{1-\alpha}}\,dt_1.$$

Рассматривая различные участки контура и принимая во внимание (7.9), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{на } DC\ \left(1<t<\tfrac{1}{\lambda^2}\right)\\
&z=-\frac{A(kB+Q)}{2k}\int_1^t\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t_1}-\sqrt{1-\lambda^2 t}}{t_1^{\alpha+1/2}(t_1-1)^{1-\alpha}}\,dt_1+\frac{b}{2},\\
&\text{на } CB\ (0<t<1)\\
&z=e^{\pi\alpha i}\frac{A(kB+Q)}{2k}\int_t^1\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}-\sqrt{1-\lambda^2 t_1}}{t_1^{\alpha+1/2}(1-t_1)^{1-\alpha}}\,dt_1+\frac{b}{2},\\
&\text{на } BA\ (-\infty<t<0)\\
&z=\frac{iA(kB+Q)}{2k}\int_0^t\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}-\sqrt{1-\lambda^2 t_1}}{(-t_1)^{\alpha+1/2}(1-t_1)^{1-\alpha}}\,dt_1+\\
&\quad+\frac{kB+Q}{2k}(1+i\operatorname{tg}\pi\alpha)\,(\sqrt{1-\lambda^2 t}-1)+\frac{B}{2}+iH.
\end{aligned}\right\}\qquad(7.11)$$

Из последнего уравнения, отделяя действительную часть от мнимой, получим уравнение депрессионной кривой в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned}
x&=\frac{B+\bar{Q}}{2}\,(\sqrt{1-\lambda^2 t}-1)+\frac{B}{2},\\
y&=\frac{A(B+\bar{Q})}{2}\int_0^t\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}-\sqrt{1-\lambda^2 t_1}}{(-t_1)^{\alpha+1/2}(1-t_1)^{1-\alpha}}\,dt_1+\\
&\quad+\left(x-\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\pi\alpha+H.
\end{aligned}\right\}\qquad(7.12)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{Q}=\frac{Q}{k}, \qquad \bar{v}=\frac{v_0}{k}.$$

Наконец, заменяя в последнем интеграле переменную интегрирования t_1 с помощью равенства

$$t_1=\frac{\eta_1^\beta}{\gamma_1^\beta-1}, \qquad \beta=\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}$$

и исключая t из уравнений (7.12), можем написать уравнение депрессионной кривой в явном виде:

$$y-H=\left(x-\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\pi\alpha-\frac{A(B+\bar{Q})}{1-2\alpha}\int_0^{\eta}\frac{\frac{2x+\bar{Q}}{B+\bar{Q}}-\sqrt{1+\frac{\lambda^2\eta_1^\beta}{1-\eta_1^\beta}}}{\sqrt{1-\eta_1^\beta}}\,d\eta_1,$$

где

$$\eta=\left[\frac{\left(\frac{2x+\bar{Q}}{B+\bar{Q}}\right)^2-1}{\left(\frac{2x+\bar{Q}}{B+\bar{Q}}\right)^2-\lambda^2}\right]^{1/2-\alpha}.$$

Разлагая подинтегральную функцию в ряд по степеням η_1^β и ограничиваясь лишь свободным членом разложения, получим приближенное равенство для депрессионной кривой вблизи точки B

$$y-H\approx\left(x-\frac{B}{2}\right)\left\{\operatorname{tg}\alpha\pi-\frac{A}{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}\left[\frac{4}{\lambda^2}\frac{x-\frac{B}{2}}{B+\bar{Q}}\right]^{1/2-\alpha}\right\}.$$

Ю. Д. Соколов получает также приближенное уравнение депрессионной кривой для больших x следующим образом.

Применим подстановку

$$-t=\frac{1-\xi^2}{\lambda^2\xi^2}, \qquad t_1=\frac{1-\xi_1^2}{\lambda^2\xi_1^2} \qquad \left(\xi=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 t}}\right).$$

Тогда с помощью (7.12) получим:

$$\left(x-\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\alpha\pi-(y-H)=$$

$$=A\lambda(B+\bar{Q})\int_{\xi}^{1}\frac{\xi^{-1}-\xi_1^{-1}}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}}\,d\xi_1, \qquad (7.13)$$

где

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 t}}=\frac{B+\bar{Q}}{2x+Q}. \qquad (7.13')$$

У интеграла, стоящего в правой части (7.13), подинтегральная функция ведет себя, как $-\frac{1}{\xi}$ при $\xi = 0$; прибавим и вычтем $\frac{1}{\xi}$ под знаком интеграла и разобьем промежуток интегрирования на части. Получим:

$$I = \int_{\xi}^{1} \frac{\xi^{-1} - \xi_1^{-1}}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}}\, d\xi_1 =$$

$$= -\int_{\xi}^{1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} + \int_{0}^{1} \left[\frac{\xi^{-1} - \xi_1^{-1}}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\xi_1}\right] d\xi_1 -$$

$$- \int_{0}^{\xi} \frac{\xi^{-1} - \xi_1^{-1}}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}}\, d\xi_1.$$

Разложив подинтегральную функцию по степеням λ_1, найдем:

$$\int_{0}^{1} \frac{d\xi_1}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi}{2A\lambda} \qquad \left(A = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}\right),$$

после чего можем написать:

$$I = \ln\xi + \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi}{2A\lambda\xi} - \int_{0}^{\xi} \frac{\xi^{-1} - \xi_1^{-1}}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}}\, d\xi_1,$$

и (7.13) даст:

$$y - H = A\lambda(B+\bar{Q}) \times$$

$$\times \left\{-\ln\xi + \int_{0}^{\xi} \left[\frac{\xi^{-1} - \xi_1^{-1}}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}}\xi + \frac{1}{\xi_1}\right] d\xi_1 + J_2 - \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi}{2A\lambda}\right\},$$

где

$$J_2 = \int_{0}^{1} \left[\frac{1}{(1-\xi_1^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2\xi_1^2)^{1-\alpha}} - 1\right] \frac{d\xi_1}{\xi_1}.$$

Отсюда для больших значений x (т. е. малых ξ) получаем в силу (7.13′):

$$y - H \approx A\lambda(B+\bar{Q})\left(\ln\frac{2x+\bar{Q}}{B+\bar{Q}} + E\right),$$

где

$$E = \int_{0}^{1} \left\{\frac{1}{(1-t^2)^{\alpha+1/2}(1-\lambda_1^2t^2)^{1-\alpha}} - 1\right\} \frac{1-t}{t}\, dt.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. для канавы прямоугольного сечения, будем иметь:

$$E = 1 + \ln 2 - \frac{1+\lambda}{\lambda}\ln(1+\lambda).$$

Нам нужно еще найти основную величину, представляющую интерес при изучении данного движения, — это расход, поступающий в дренажную канаву. Он должен выражаться через параметр λ, который также нам не известен. Таким образом, нам нужно получить два уравнения для определения λ и Q.

Обратимся к формуле (7.11) (для DC) и положим в ней $t=\frac{1}{\lambda^2}$. Тогда $\zeta=0$, $z=0$, и мы находим:

$$b=A(B+\overline{Q})I_0,$$

где

$$I_0=\int_1^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}\,dt}{t^{\alpha+1/2}(t-1)^{1-\alpha}}. \tag{7.14}$$

Далее, полагая в формуле (7.11) (для CB) $t=0$, т. е. $\zeta=1$, найдем, принимая во внимание, что (см. фиг. 150, a, где $C'C=b$)

$$z=\frac{b}{2}+He^{i\pi\alpha},$$

такое уравнение:

$$\frac{H}{\sin\alpha\pi}=\frac{A(B+\overline{Q})}{2}I_1,$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_1&=\frac{1}{A\cos\pi\alpha}-I_2=\int_0^1\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2 t}}{t^{\alpha+1/2}(1-t)^{1-\alpha}}\,dt,\\ I_2&=\int_0^1\frac{\sqrt{1-\lambda^2 t}}{t^{\alpha+1/2}(1-t)^{1-\alpha}}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Разделим почленно (7.15) на (7.14). Принимая во внимание зависимость между I_0 и I_2

$$I_0=I_2\cos\alpha\pi-\pi\lambda=\frac{1}{A}-I_1\cos\alpha\pi-\pi\lambda,$$

найдем связь между H/b и λ:

$$\frac{2H}{b\sin\alpha\pi}=\frac{I_1}{I_0}=\frac{\frac{1}{A}\cos\alpha\pi-I_2}{I_2\cos\alpha\pi-\pi\lambda}.$$

Тогда (7.14) и (7.15) дадут нам возможность определить расход $\overline{Q}$ по одной из формул

$$B+\overline{Q}=\frac{b}{AI_0}\qquad\left(\overline{Q}=\frac{Q}{k}\right) \tag{7.16}$$

или

$$B+\overline{Q}=\frac{2H}{AI_1\sin\alpha\pi}=\frac{B}{1-A\pi\lambda}. \tag{7.17}$$

Нетрудно вычислить расход через откосы, составляющий часть общего расхода Q. Обозначим расход через оба откоса через Q_1, а приведенный расход через $\overline{Q}_1$, т. е.

$$\overline{Q}_1 = \frac{Q_1}{k}.$$

Для нахождения Q_1 вернемся к уравнению (7.5), связывающему θ и ζ:

$$\theta = -\frac{i}{2}(kB + Q)\zeta + \frac{iQ}{2}.$$

При $\zeta = \lambda'$ имеем $z = \frac{b}{2}$, $\psi = \frac{Q_1}{2}$, $\varphi + ky = 0$; поэтому получим:

$$Q_1 = Q + kb - \lambda'(Q + kB) = kb + B\frac{\pi A\lambda - \lambda'}{1 - A\pi\lambda}.$$

Используя полученные для Q и H выражения, можно получить такие формулы:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{I_2 \cos \alpha\pi - \frac{\lambda'}{A}}{\pi\lambda}, \quad \frac{Q_1}{2kH} = \frac{AI_2 \cos \alpha\pi - \lambda'}{\operatorname{tg} \alpha\pi\,(1 - AI_2 \cos \alpha\pi)}.$$

Рассмотрим теперь частный случай вертикальных откосов, когда $\alpha = \frac{1}{2}$. Все формулы значительно упрощаются, так как все интегралы выражаются в конечном виде.

Так, для U вместо (7.7) получаем:

на DC

$$U = \frac{2i}{k\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{t - 1},$$

на CB

$$U = -\frac{2}{k\pi} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - t},$$

на BA

$$U = -\frac{2}{k\pi} \operatorname{Arcth} \sqrt{1 - t} + \frac{i}{k}.$$

Вычислив интеграл (7.8), найдем:

$$J_1 = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Положив

$$\lambda' = \cos \vartheta,$$

можем рассматривать вместо λ параметр ϑ. Нетрудно видеть, что при этом

$$J_1 = 2 \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{ctg} \vartheta) = \pi - 2\vartheta.$$

Формула (7.9) дает:

$$\frac{k}{v_0 + k} = \frac{\pi - 2\vartheta}{\pi},$$

что можно переписать в виде

$$\sin\frac{k\pi}{2(v_0+k)}=\cos\vartheta=\lambda'.$$

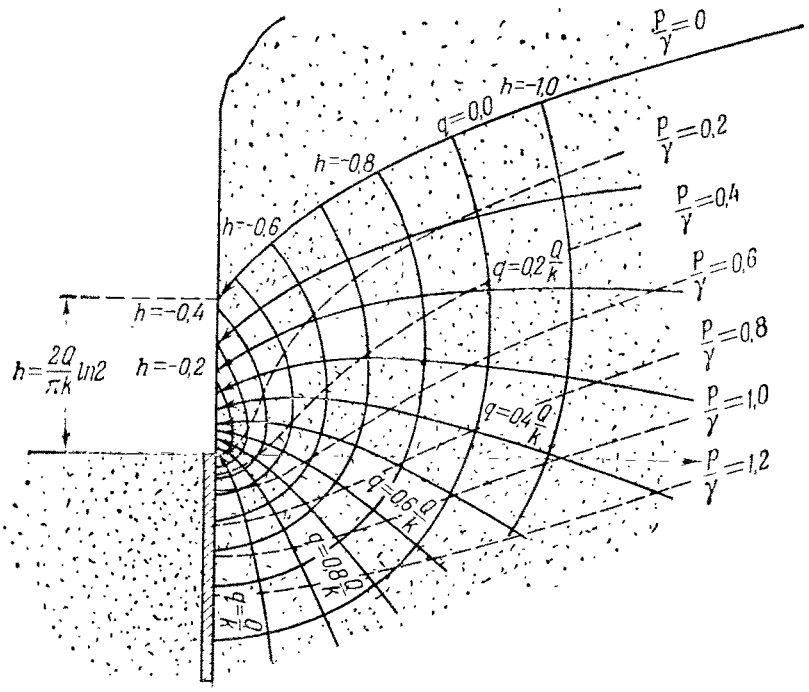
Далее, при $\alpha=\frac{1}{2}$ интегралы I и I_1 дают:

$$I_0=\pi(1-\lambda),\quad I_1=2\left(\ln\lambda'+\lambda\ln\frac{1+\lambda}{\lambda'}\right).$$

По формулам (7.16) и (7.17) получим:

$$\overline{Q}=\frac{B\lambda}{1-\lambda},\quad H=\frac{B}{\pi(1-\lambda)}\left(\ln\lambda'+\lambda\ln\frac{1+\lambda}{\lambda'}\right).$$

Эти формулы были получены В. В. Ведерниковым [3]. Задаваясь различными значениями λ, $0<\lambda<1$, можно вычислить H/B и $\overline{Q}$.



Фиг. 151.

Отметим, что случай $\alpha=1$, когда откосы становятся горизонтальными, дает нам задачу Жуковского.

Другой частный случай — вся канава сводится к вертикальной щели — представлен на фиг. 151.

§ 8. Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя. Приведем решение задачи [11] о фильтрации из канала ширины B с глубиной воды H, с учетом влияния капиллярности грунта, а также наличия на некоторой глубине T от уровня воды в канале дренирующего или водоносного слоя. При этом предположим, что

пьезометрический уровень воды в слое сильно проницаемого грунта стоит на H_0 выше границы между грунтом, в котором прорыт этот канал, и этим слоем (фиг. 152, *а*).

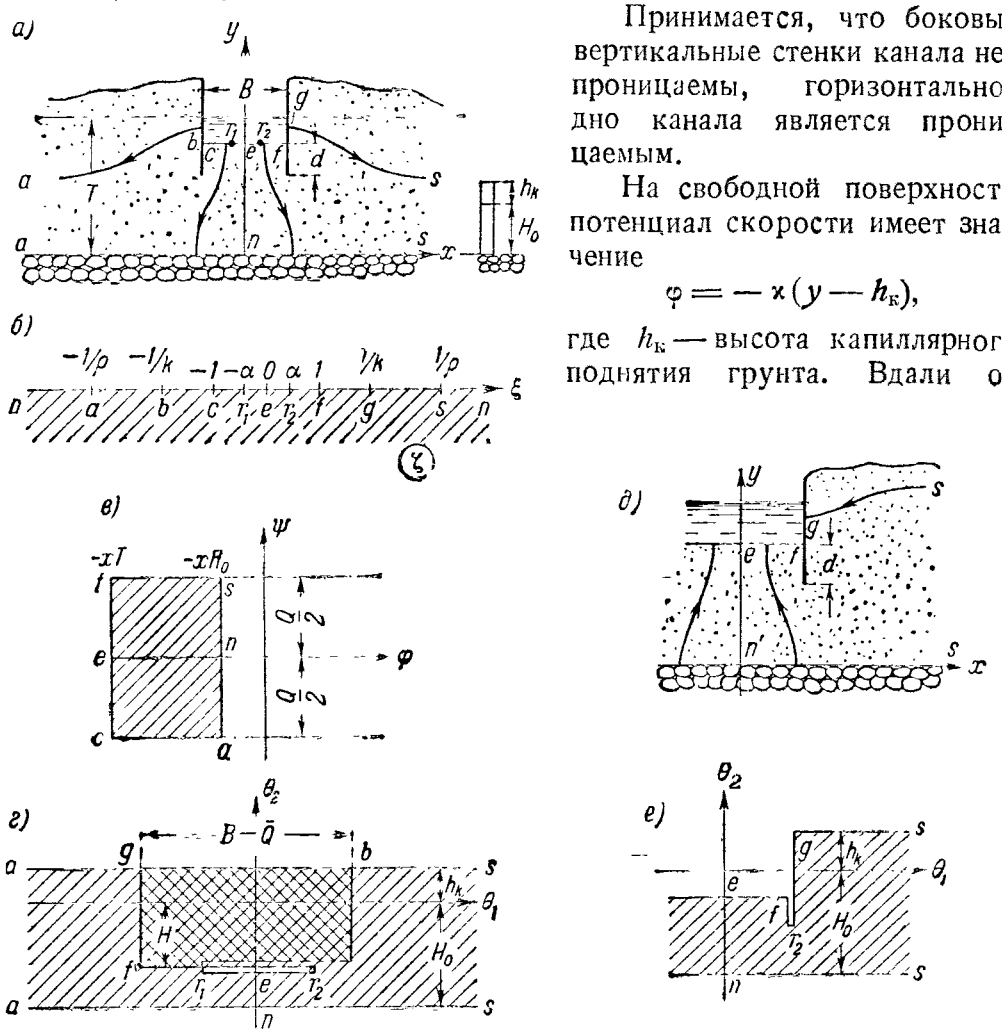
Это же решение при соответствующем подборе значений параметров будет и решением задачи о притоке грунтовых вод к осушительному каналу из водоносного слоя с напорными водами.

Принимается, что боковые вертикальные стенки канала непроницаемы, горизонтальное дно канала является проницаемым.

На свободной поверхности потенциал скорости имеет значение

$$\varphi = -\varkappa(y - h_к),$$

где $h_к$ — высота капиллярного поднятия грунта. Вдали от



Фиг. 152.

канала при $x = \infty$ свободная поверхность горизонтальна и расположена на высоте $H_0 + h_к$ над водоносным слоем.

Область функции Жуковского $0 = z + \frac{i\omega}{\varkappa}$ имеет вид многоугольника с разрезами, горизонтальными или вертикальными (фиг. 152, *г*, *е*), причем в первом случае область может оказаться двулистной. Отображение на полуплоскость ζ дает:

$$\omega = \frac{iQ}{2K_р} F(\arcsin\zeta,\ \rho) - \varkappa T. \qquad (8.1)$$

Полагая $\zeta = \frac{1}{\rho}$ и учитывая, что при этом $\omega = -\varkappa H_0 + \frac{Qi}{2}$, найдем:

$$Q = \frac{2\varkappa (T - H_0)}{K'_\rho} K_\rho. \tag{8.2}$$

Здесь K_ρ, K'_ρ — полные эллиптические интегралы модуля ρ. Для функции Жуковского отображающая функция имеет вид

$$\theta = P \int_0^\zeta \frac{(\alpha^2 - \zeta^2)\, d\zeta}{(1 - \rho^2\zeta^2) \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} - iH. \tag{8.3}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\alpha^2 - \zeta^2}{1 - \rho^2\zeta^2} = \frac{1}{\rho^2}\left[1 - \frac{1 - \rho^2\alpha^2}{1 - \rho^2\zeta^2}\right],$$

получим:

$$\theta = \frac{P}{\rho^2}\left[u - (1 - \rho^2\alpha^2)\, \Pi(-\rho^2, \arcsin\zeta, k)\right], \tag{8.4}$$

где u и Π — эллиптические интегралы первого и третьего рода

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}, \\ \Pi(-\rho^2, \arcsin\zeta, k) &= \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{(1 - \rho^2\zeta^2) \sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Вычисляя полувычет в точке $\zeta = \frac{1}{\rho}$, найдем значение P:

$$P = \frac{2(H_0 + h_к)\sqrt{(1 - \rho^2)(k^2 - \rho^2)\rho}}{\Pi(1 - \rho^2\alpha^2)}. \tag{8.6}$$

Интеграл $\Pi(-\rho^2, \arcsin\zeta, k)$ с помощью подстановок

$$\rho = k \operatorname{sn} a, \qquad \zeta = \operatorname{sn} u \tag{8.7}$$

приводится к интегралу, выражающемуся через эллиптические функции:

$$\Pi = \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\left\{\frac{u}{2K}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{a}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a}{2K}\right)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_0\left(\frac{a+u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{a-u}{2K}\right)}\right\}. \tag{8.7'}$$

Поэтому для θ получаем:

$$\theta = Su + \frac{H_0 + h_к}{\pi}\ln\frac{\vartheta_0\left(\frac{a+u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{a-u}{2K}\right)} - iH, \tag{8.8}$$

где

$$S=\frac{2(H_0+h_к)}{\pi}\left[\frac{\alpha^2\sqrt{(1-\rho^2)(k^2-\rho^2)}}{1-\rho^2\alpha^2}-\frac{1}{K}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{\pi a}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi a}{2K}\right)}\right]. \qquad (8.9)$$

Функция Якоби ϑ_0 определяется с помощью ряда

$$\vartheta_0\left(\frac{u}{2K},\ k\right)=1-2e^{-\frac{\pi K'}{K}}\cos\frac{\pi u}{K}+2e^{-\frac{4\pi K'}{K}}\cos\frac{2\pi u}{K}-\ldots \qquad (8.10)$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_0(x+y)}{\vartheta_0(x-y)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x\sin 2n\pi y}{n\operatorname{sh}n\pi\rho}\qquad\left(\rho=\frac{K'}{K}\right), \qquad (8.11)$$

$$\frac{\vartheta_0'(x)}{\vartheta_0(x)}=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{\operatorname{sh}n\pi\rho}\qquad\left(\rho=\frac{K'}{K}\right). \qquad (8.12)$$

Положим $\zeta=\frac{1}{\rho}$. Будем иметь:

$$\frac{B-\overline{Q}}{2}-ih_к=S(K-iK')-\frac{i(H_0+h_к)a}{K}+iH,$$

что даст после отделения действительной и мнимой частей:

$$B-\overline{Q}=2SK,\qquad H+h_к=(H_0+h_к)\frac{a}{K}-SK'.$$

Исключая из этих формул S, получим соотношение

$$\overline{Q}=\frac{Q}{\varkappa}=B+\frac{2K}{K'}(H+h_к)-2(H_0+h_к)\frac{a}{K'}. \qquad (8.13)$$

Если из формул (8.2) и (8.11) исключить $\overline{Q}$, то найдем:

$$(T-H_0)\frac{2K\rho}{K_c'}=B+\frac{2K}{K'}(H+h_к)-\frac{2a}{K'}(H_0+h_к).$$

Для определения координат конца шпунта составим выражение

$$\frac{1}{w}=\frac{dz}{d\omega}=\frac{d\theta}{d\omega}-\frac{i}{\varkappa}=\frac{2KP}{Qi}\frac{\alpha^2-\zeta^2}{\sqrt{(1-k^2\zeta^2)(1-\rho^2\zeta^2)}}-\frac{i}{\varkappa}.$$

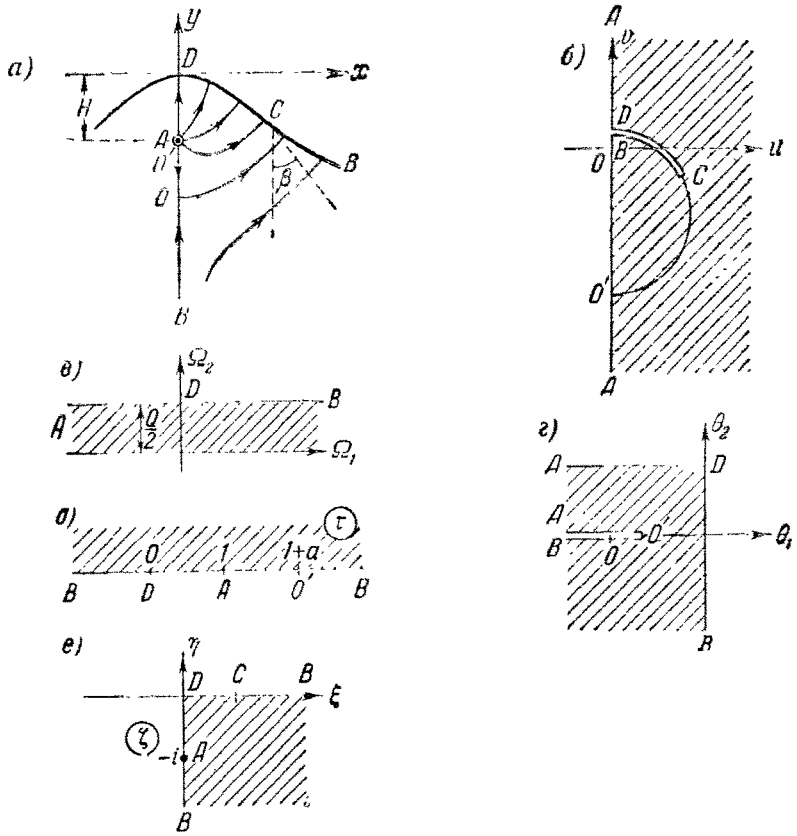
Приравнивая его нулю, найдем для $\zeta=\zeta_ш$ уравнение

$$\frac{\zeta_ш^2-\alpha^2}{\sqrt{(1-k^2\zeta_ш^2)(1-\rho^2\zeta_ш^2)}}=\frac{T-H_0}{K_\rho'}\frac{\pi(1-\alpha^2\rho^2)}{(H_0+h_к)\sqrt{(1-\rho^2)(k^2-\rho^2)}}. \qquad (8.14)$$

Глубине забивки шпунта $d = 0$ отвечает $\zeta_{ш} = 1$. При этом уравнение (8.14) упрощается и принимает вид

$$\frac{H_0 + h_к}{T - H_0} = \frac{\pi}{2K'_ρ} \frac{(1 - ρ^2α^2)\sqrt{1 - k^2}}{(1 - α^2)\sqrt{k^2 - ρ^2}}. \tag{8.15}$$

§ 9. Дрена или ороситель при наличии испарения или инфильтрации. Возьмем для определенности случай испарения [6].



Фиг. 153.

В связи с этим положим $-\varepsilon = c > 0$ и будем рассматривать функции (ось y на этот раз у нас направлена вверх)

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \omega - ikz, \qquad \Omega = \Omega_1 + i\Omega_2 = \omega + icz. \tag{9.1}$$

На фиг. 153, *а* дана область движения, на фиг. 153, *б* представлена область годографа скорости, к которой можно было бы применить инверсию в точке D. Но удобнее рассмотреть область Ω, для которой получаем полосу (фиг. 153, *в*). (Область функции Жуковского изображена на фиг. 153, *г*. Конец разреза этой области находится в точке O'. В самом деле, так как $\theta_1 = \varphi + ky$, то в этой точке $\frac{\partial\theta_1}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + k = 0$.)

Конформное отображение на верхнюю полуплоскость τ дает:

$$d\Omega = \frac{Q\,d\tau}{2\pi(\tau-1)}, \qquad d\theta = B\frac{\tau-(1+a)}{(\tau-1)\sqrt{\tau}}\,d\tau. \tag{9.2}$$

Подстановка $\sqrt{\tau} = i\zeta$ переводит полуплоскость τ в угол области ζ. Получаем:

$$d\Omega = \frac{Q\zeta\,d\zeta}{\pi(\zeta^2+1)}, \qquad d\theta = B\left(2i\,d\zeta + \frac{2ai\,d\zeta}{\zeta^2+1}\right).$$

Отсюда найдем:

$$dz = -\frac{i}{k+c}(d\Omega - d\theta) = -\frac{i}{k+c}\left(-2iB + \frac{\frac{Q}{\pi}\zeta - 2aiB}{\zeta^2+1}\right)d\zeta =$$

$$= -\frac{i}{k+c}\left(-2iB + \frac{\frac{Q}{2\pi}+aB}{\zeta+i} + \frac{\frac{Q}{2\pi}-aB}{\zeta-i}\right)d\zeta. \tag{9.3}$$

Так как точка $\zeta = -i$ соответствует точке A области движения, где z имеет конечное значение, то мы должны иметь $\frac{Q}{2\pi} + aB = 0$, откуда

$$B = -\frac{Q}{2a\pi}, \qquad dz = -\frac{i}{k+c}\left(\frac{iQ}{a\pi} + \frac{Q}{\pi}\frac{1}{\zeta-i}\right)d\zeta. \tag{9.4}$$

Интегрируя и считая $z = 0$ при $\zeta = 0$, получаем:

$$z = \frac{Q}{(k+c)\pi}\left[\frac{\zeta}{a} - i\ln(1+i\zeta)\right]. \tag{9.5}$$

Так как при $\zeta = -i$ имеем $z = -iH$, то найдем:

$$(k+c)\frac{\pi}{Q}H = \frac{1}{a} + \ln 2. \tag{9.6}$$

Уравнение свободной поверхности получим, полагая $\zeta = \xi + i\eta$ и учитывая, что при этом $\eta = 0$:

$$x = \frac{Q}{(k+c)\pi}\left(\frac{\xi}{a} + \operatorname{arc\,tg}\xi\right), \qquad y = -\frac{Q}{(k+c)\pi}\ln\sqrt{1+\xi^2}. \tag{9.7}$$

В точке перегиба линии свободной поверхности, как нетрудно видеть, $\xi = \sqrt{1+a}$. Обозначая через β угол касательной в точке перегиба с вертикалью, найдем, что

$$\frac{a}{2\sqrt{1+a}} = \operatorname{ctg}\beta, \qquad a = \frac{2}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{9.8}$$

Ветви кривой (9.7) уходят вниз на бесконечность.

Пусть h_0 будет напор по контуру трубы. С помощью формулы (9.1) можем написать для ω выражение

$$\omega = \varphi + i\psi = -icz + \frac{Q}{2\pi} \ln (1 + \zeta^2). \tag{9.9}$$

Полагая $\zeta = -i + \zeta'$, $z = -iH + z'$, будем иметь в бесконечно малой окрестности точки A

$$\omega = -cH + \frac{Q}{2\pi} \ln (-2i\zeta'), \tag{9.10}$$

причем на основании (9.5) имеем с точностью до малых высшего порядка

$$z' = \frac{Q\zeta'}{2\pi (k + c) \cos \beta}. \tag{9.11}$$

Положим теперь $z' = \delta e^{i\theta}$, где δ — радиус трубы. Подставляя это выражение в (9.11) и (9.10) и отделяя действительную часть от мнимой, найдем:

$$h_0 = -\frac{Q}{2\pi k} \ln \frac{4\pi\delta (k + c) \cos \beta}{Q} + \frac{c}{k} H.$$

На основании соотношения ($h_к$ — высота капиллярного поднятия)

$$h = \frac{p}{\gamma} + y + h_к$$

можно написать выражение для давления на трубе p_0:

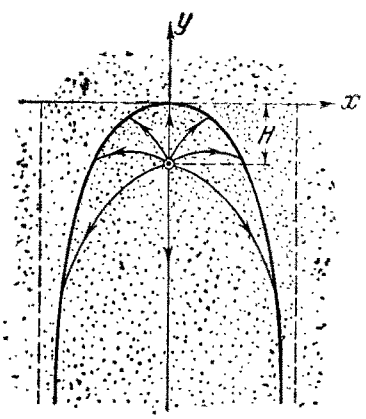
$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi k} \ln \frac{Q}{4\pi\delta (k + c) \cos \beta} + \frac{k + c}{k} H - h_к. \tag{9.12}$$

При этом считается, что коэффициент фильтрации материала трубы равен коэффициенту фильтрации грунта.

Если угол $\beta = 0$, то точка перегиба уходит на бесконечность, параметр a будет равен бесконечности, и мы получим из (9.6):

$$H = \frac{\ln 2}{\pi} \frac{Q}{k + c}.$$

Свободная поверхность будет иметь асимптоту $x = \frac{Q}{2(k + c)}$ (фиг. 154). Скорость на бесконечности будет $v = -k$, в то время как в общем случае эта скорость равна $v = c$.



Фиг. 154.

Точно так же решается задача для осушительной трубы (дрены). Можно получить это решение из предыдущего, заменяя Q на $-Q$ и полагая $-a = b > 0$.

Уравнение свободной поверхности будет иметь вид

$$\frac{\pi(k+c)}{Q}x=\frac{\xi}{b}-\operatorname{arc\,tg}\xi,\quad \frac{\pi(k+c)}{Q}y=\frac{1}{2}\ln(1+\xi^2),\qquad (9.13)$$

где

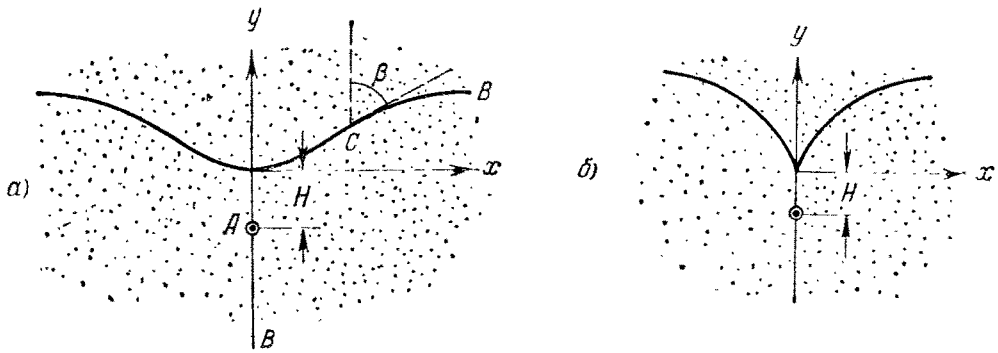
$$b=\frac{2}{1+\sec\beta}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\beta},$$

причем β — угол между вертикалью и касательной в точке перегиба C (фиг. 155, *а*). Для глубины H залегания трубы будем иметь уравнение

$$\frac{\pi(k+c)}{Q}H=\frac{\sec\beta+1}{2}-\ln 2.$$

Формула (9.12) для давления сохраняет свой вид.

Если угол $\beta=0$, то точки перегиба сливаются и образуют точку заострения (фиг. 155, *б*). В формулах (9.13) нужно положить $b=1$.



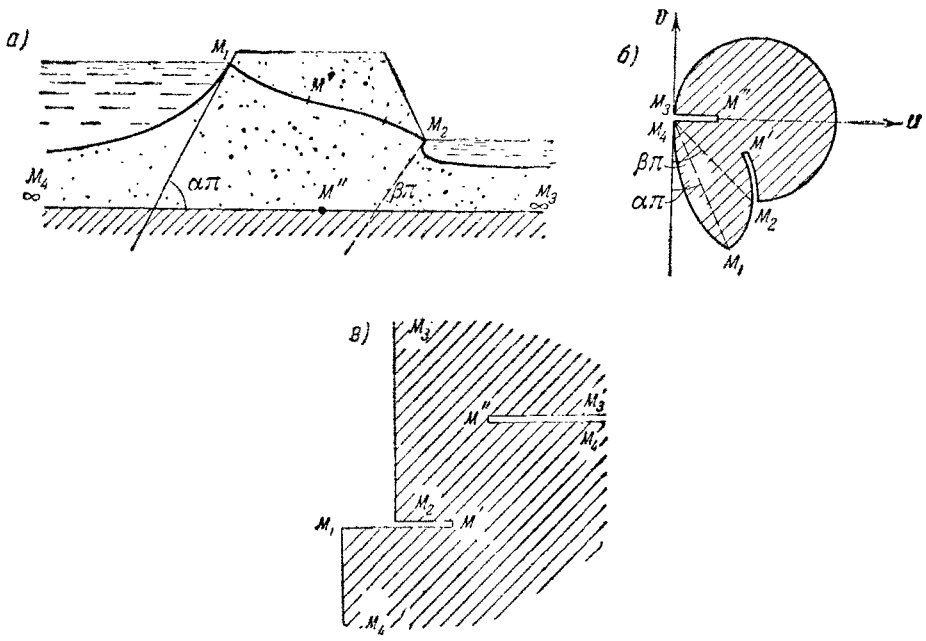
Фиг. 155.

Рассмотренные задачи могут представить интерес в теории кротового дренажа. Кротовая дрена (или кротовый ороситель) пробуривается таким образом: на нижнем конце вертикально поставленного ножа находится снаряд с заостренным концом. Когда нож прорезает почву, то снаряд пробивает цилиндрическую полость в грунте.

§ 10. Полуобратный метод в применении к земляным плотинам на водопроницаемых основаниях. В предыдущей главе мы уже имели примеры применения полуобратных методов, когда задача решается при условии, что часть границ задается точно, часть определяется по некоторым искусственным условиям, имеющим целью получение более простых решений, чем те, которые получаются при полном задании всех границ. Часто такие условия задают на плоскости комплексного потенциала. Наиболее общий пример такого рода дан С. Н. Нумеровым [12].

На фиг. 156, *а* представлена земляная плотина с горизонтальной прямой в качестве границы водоупора. Границы плотины с водоемами являются криволинейными. Их форма заранее не известна, но

определяется из условия, что на годографе скорости им соответствуют дуги окружностей, касающиеся оси ординат в начале координат. Касательные к откосам в точках M_1 и M_2, совпадающих с урезом воды в верхнем и нижнем бьефах, наклонены к горизонту под заданными углами $\alpha\pi$ и $\beta\pi$, глубины воды в бьефах равны H_1 и H_2.



Фиг. 156.

Считая, что вершины M_1, M_2, M_3, M_4, M', M'' переходят соответственно в точки $\zeta = -1$, $+1$, $\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, μ, ν и что на плоскости ω имеем прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$ ($\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \varkappa H$, $\omega_3 = \varkappa H - iQ$, $\omega_4 = -iQ$), получим:

$$\frac{\varkappa}{u - iv} = \varkappa \frac{dz}{d\omega} = M \int \frac{(\zeta - \mu)(\zeta - \nu)\, d\zeta}{(1 - k^2\zeta^2)\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}} + N, \qquad (10.1)$$

$$\omega = -\frac{\varkappa H}{2K}\left[K - \int_0^{\xi} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)}}\right]. \qquad (10.2)$$

Подстановка $\zeta = \operatorname{sn} u$ $\left(u = \frac{2K\omega}{\varkappa H} + K\right)$ приводит (10.1) к интегралам

$$\int \frac{\operatorname{sn} u\, du}{\operatorname{dn}^2 u} = -\frac{1}{k'^2}\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{k'^2}\operatorname{sn}(u - K) = \frac{1}{k'^2}\operatorname{sn}\frac{2K\omega}{\varkappa H}, \qquad (10.3)$$

$$\int \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = pu + q\,\frac{\vartheta_0'\left(\frac{u - K}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u - K}{2K}\right)}. \qquad (10.4)$$

Второй из них есть эллиптический интеграл третьего рода вида (8.7′), где нужно взять $\operatorname{sn} a = 1$. Тогда $a = K$, $\operatorname{dn} a = k'$, $\operatorname{cn} a = 0$, и в правой части (8.7′) получается неопределенность. Раскрыв ее, найдем (10.4), где p и q — некоторые постоянные. Тета-функция Якоби ϑ_0 определяется с помощью ряда (8.10).

Теперь, вводя новые значения постоянных, получим вместо (10.1):

$$\varkappa \frac{dz}{d\omega} = -i + A + 2B\frac{\omega}{\varkappa H} + C\frac{\vartheta_0'\left(\frac{\omega}{\varkappa H}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\omega}{\varkappa H}\right)} + 2kKD\operatorname{sn}\left(\frac{2K\omega}{\varkappa H}\right). \quad (10.5)$$

Перейдем к определению постоянных A, B, C, D. В точке M_1, где $\omega = 0$, $u = \varkappa \sin \alpha\pi \cos \alpha\pi$, $v = -\varkappa \cos^2 \alpha\pi$, поэтому должно быть:

$$A = \operatorname{tg} \alpha\pi. \quad (10.6)$$

В точке M_2, где $\omega = \varkappa H$, $w = \varkappa i \cos \beta\pi e^{-\beta\pi i}$; отсюда найдем:

$$B = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \beta\pi - \operatorname{tg} \alpha\pi). \quad (10.7)$$

При этом модуль k является корнем уравнения

$$\frac{Q}{\varkappa H} = \frac{K'}{2K}. \quad (10.8)$$

Интегрируя (10.5) по ω, получим (см. литературу к главе III [24, 25]):

$$\frac{z}{H} = (A - i)\frac{\omega}{\varkappa H} + B\left(\frac{\omega}{\varkappa H}\right)^2 + C \ln \frac{\vartheta_0\left(\frac{\omega}{\varkappa H}\right)}{\vartheta_0(0)} - D \ln \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{2K\omega}{\varkappa H}\right) + k \operatorname{cn}\left(\frac{2K\omega}{\varkappa H}\right)}{1 + k}. \quad (10.9)$$

Применяя (10.9) к точке M_2, где $z = L - iH$ (ось x проходит по горизонтали через точку M_1, ось y — через точку M_1 вверх), найдем:

$$\frac{L}{H} = A + B + D \ln \frac{1+k}{1-k}. \quad (10.10)$$

В точке M_3 $y = -H_1$, $\omega = \varkappa H - Qi$, в точке M_4 $y = -H_1$, $\omega = -Qi$. Поэтому получаем:

$$-\frac{H_1}{H} = -A\frac{Q}{\varkappa H} + \frac{\pi}{2}(C + D) - i, \quad (10.11)$$

$$1 + 2B\frac{Q}{\varkappa H} - \pi C = 0. \quad (10.12)$$

Исключая C и D из последних уравнений, найдем уравнение для k:

$$\frac{L}{H} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{H_1}{H}+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1+k}{1-k}+(B+A)\left(1-\frac{K'}{\pi K}\ln\frac{1+k}{1-k}\right).$$

При A и B заданных [см. (10.6), (10.7)] C и D определяются из (10.12).

В принятой схеме предполагается, что промежуток высачивания отсутствует. С. Н. Нумеров указывает, что приемлемые очертания линий верхнего и нижнего бьефов получаются при соблюдении неравенств

$$H_1 > \frac{Q}{\varkappa}\operatorname{tg}\alpha\pi,\quad H_2 > \frac{Q}{\varkappa}\operatorname{tg}\beta\pi. \tag{10.13}$$

Полагая в (10.9) $\omega = -\varkappa y$, найдем уравнение депрессионной кривой

$$\frac{x}{H} = -\frac{Ay}{H}+B\left(\frac{y}{H}\right)^2+C\ln\frac{\vartheta_0\left(\frac{y}{H},k\right)}{\vartheta_0(0,k)}-$$

$$-D\ln\frac{\operatorname{dn}\left(\frac{2Ky}{H},k\right)+k\operatorname{cn}\left(\frac{2Ky}{H},k\right)}{1+k}. \tag{10.14}$$

Рассмотрим частные случаи.

1) В случае проницаемого основания бесконечной глубины ($T=\infty$) будем иметь: $Q=\infty$, $k=0$; зависимости (10.9) и (10.14) дают ($m=\operatorname{ctg}\alpha\pi$, $n=\operatorname{ctg}\beta\pi$):

$$\frac{z}{H} = \left(\frac{1}{m}-i\right)\frac{\omega}{\varkappa H}+\frac{m-n}{2mn}\left(\frac{\omega}{\varkappa H}\right)^2+\left(\frac{L}{H}-\frac{m+n}{2mn}\right)\sin^2\frac{\pi\omega}{2\varkappa H} \tag{10.15}$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant\varkappa H,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\infty)$$

и

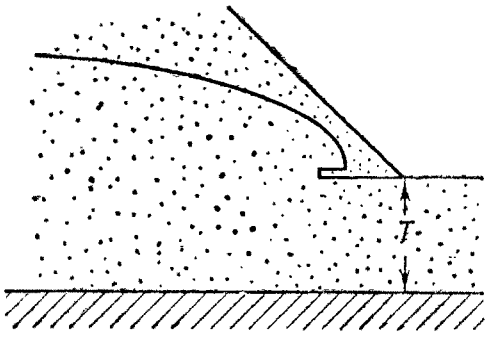
$$\frac{x}{H} = -\frac{1}{m}\frac{y}{H}+\frac{m-n}{2mn}\left(\frac{y}{H}\right)^2+\left(\frac{L}{H}-\frac{m+n}{2mn}\right)\sin^2\frac{\pi y}{2H}. \tag{10.16}$$

Неравенства (10.13) заменяются одним

$$\frac{L}{H} > \frac{m+n}{2mn}.$$

2) Если, кроме того, $n=\infty$, то имеем случай, рассмотренный Ф. Б. Нельсоном-Скорняковым (см. литературу к главе IV [10]), когда дно нижнего бьефа получается горизонтальным. Им же получен случай $n=\infty$, $H_2=0$.

3) Если положить, считая глубину T конечной, угол $\pi\beta = 0$, т. е. $n = \infty$, то получится случай, представленный на фиг. 157. Изменяя начало координат плоскостей z и ω, напишем уравнение, выражающее зависимость z от ω:



Фиг. 157.

$$z = -\frac{i\omega}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{2Q}\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2 + \frac{2T}{\pi}\ln \operatorname{ch}\frac{\pi\omega}{2Q}, \quad (10.17)$$

и уравнение депрессионной кривой (для нее $\psi = 0$, $\frac{\omega}{\varkappa} = -y$):

$$x = -\frac{\varkappa}{2Q}y^2 - \frac{2T}{\pi}\ln \operatorname{ch}\frac{\pi\varkappa y}{2Q}. \quad (10.18)$$

Ширина l фильтра определяется уравнением, которое получится из (10.17) при $\varphi = 0$, $\psi = \psi_0 = Q$, $y = 0$:

$$\frac{l}{T} = \frac{Q}{\varkappa T}\left(a + \frac{1}{2}a^2\right) + \frac{2}{\pi}\ln\cos\frac{\pi a}{2},$$

причем a есть корень уравнения, получаемого из условия $\frac{d\omega}{dz} = \infty$:

$$\frac{Q}{\varkappa T} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2}}{1 + a} = \frac{\pi a}{2} + \ldots$$

При малом a имеем $\ln\cos\frac{\pi a}{2} \approx -\frac{\pi^2 a^2}{8}$, что дает приближенное равенство

$$l \approx \frac{Q^2}{\pi\varkappa^2 T}.$$

§ 11. Контур постоянной скорости в грунте бесконечной глубины. На фиг. 158 мы имеем типовые очертания подземного контура железобетонной плотины. Линия BC является подошвой плотины. Дополнительные устройства — понур AB, шпунты MN, BK и рисберма CD — имеют целью обеспечение устойчивости сооружения и замедление гашения напора H с таким расчетом, чтобы не получилось больших скоростей вдоль контура основания сооружения.

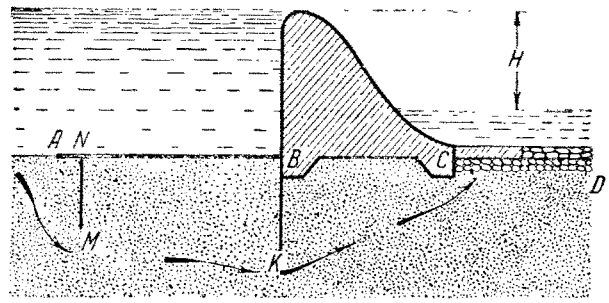
Пользуясь формулой для скорости фильтрации

$$v = kJ,$$

где J — градиент напора, можно сделать грубую оценку средней скорости фильтрации, если принять среднее значение J равным просто отношению действующего напора H ко всей длине пути фильтрации, т. е. к длине L подземного контура:

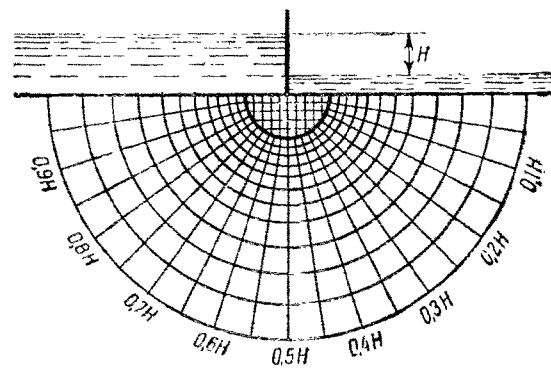
$$v_{ср} = kJ_{ср} = k\frac{H}{L}.$$

Из наблюдений установлено [14], что размываемость грунта и его деформации зависят не от скоростей, но от градиентов напора, причем критический градиент, т. е. такой, при котором начинается опасная для размыва деформация грунта, близок к единице. Так, для песков можно принять $J_{кр} = 0{,}8$. Исходя из этого, можно было бы принять длину контура, скажем, в полтора раза большей H, тогда $v_{ср}$ не будет превышать критического значения скорости. Однако в потоке возможны местные скорости, значительно превышающие средние. Так, на концах плоского флютбета, на концах шпунта, в вершинах заглубленного флютбета и т. д. теоретически эти скорости получаются бесконечно большими, какова бы ни была длина флютбета или шпунта. На самом деле мы, конечно, не будем иметь бесконечных скоростей, но каковы эти скорости — на этот вопрос обычно применяемая теория не дает ответа.



Фиг. 158.

А. П. Вощинин поставил задачу об *идеальном* контуре, т. е. таком, во всех точках которого скорость имеет одно и то же значение.



Фиг. 159.

Очевидно, что для грунта бесконечной глубины, граничащего с водой верхнего и нижнего бьефов по горизонтальной прямой, идеальным контуром будет полуокружность. Пусть будет R радиус этой полуокружности (фиг. 159). Тогда комплексный потенциал можно написать в виде

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{kH}{\pi i} \ln\left(\frac{z}{R}\right) + C.$$

Комплексная скорость равна

$$w = u - iv = \frac{kH}{\pi i z}$$

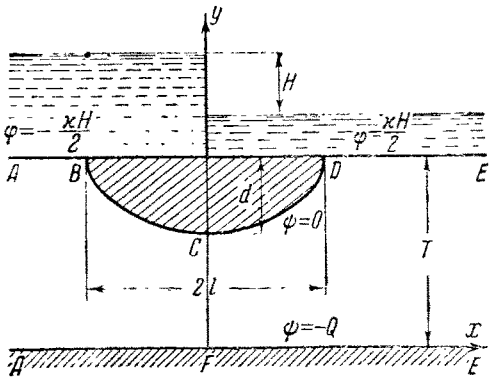
и скорость вдоль контура

$$v_0 = \frac{kH}{\pi R} = \frac{kH}{L}.$$

Здесь через L обозначена длина полуокружности: $L=\pi R$. Величина градиента J здесь точно равна $\frac{H}{L}$.

Задавшись, например, $J=0{,}8$, получим $L=1{,}25H$, чем и обеспечим значения градиента, нигде не превышающие критического значения.

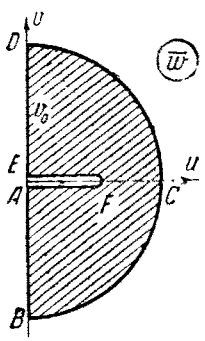
Однако полукруглый контур неприемлем с точки зрения его устойчивости и способа изготовления. Поэтому мы обобщаем задачу А. П. Вощинина, рассматривая контуры, содержащие прямолинейные отрезки [15]. Предварительно же мы остановимся на форме контура постоянной скорости в грунте конечной глубины.



Фиг. 160.

Подчеркнем, что особенно важное значение имеет форма контура в районе выхода грунтового потока в нижний бьеф, так как часто размыв связан с неудачными очертаниями контура в области нижнего бьефа.

§ 12. Контур постоянной скорости в грунте конечной глубины. Пусть имеем горизонтальный слой грунта глубины T (фиг. 160). Контур основания водонепроницаемого сооружения BCD выберем так, чтобы во всех точках его пьезометрический уклон (или напорный градиент) имел заданное значение $J_0 \leqslant J_{кр}$. При этом под $J_{кр}$ понимается критическое значение градиента, т. е. такое, при котором возможны опасные деформации грунта [14]. Тогда скорость вдоль контура будет иметь постоянное значение v_0, равное



Фиг. 161.

$$v_0=\varkappa J_0,$$

где $\varkappa$ — коэффициент фильтрации.

Примем годограф скорости таким, какой представлен на фиг. 161, а именно, вдоль BCD примем величину вектора скорости равной v_0, так что BCD будет дугой полуокружности. Разрез AFE соответствует границе водоупора.

На плоскости $\omega=\varphi+i\psi$ имеем прямоугольник, который выберем так, как указано на фиг. 162. Тогда будем иметь, отображая прямоугольник $BDEA$ на нижнюю полуплоскость ζ:

$$\omega=\frac{\varkappa H}{2K}F(\arcsin\zeta,\ k), \tag{12.1}$$

$$F(\arcsin\zeta,\ k)=\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}=\int_0^{\arcsin\zeta}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad(12.2)$$

$$K=\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}.\quad(12.3)$$

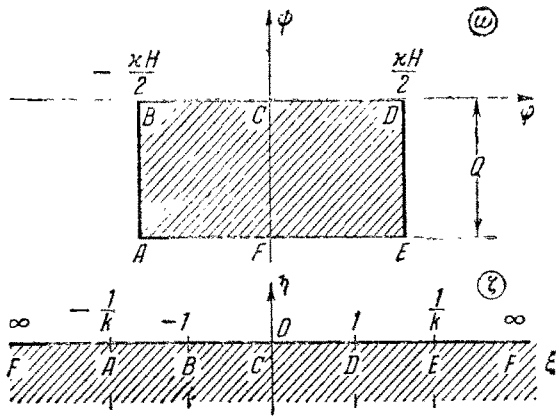
Для расхода Q получаем, как обычно, формулу

$$Q=\frac{\varkappa HK'}{2K},$$

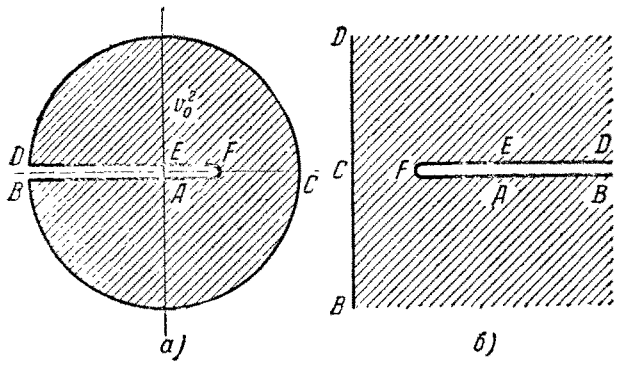
где

$$K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\qquad(k'^2=1-k^2).$$

Обратимся к годографу скорости. Обозначая $u-iv=w$, $u+iv=\overline{w}$, составим функцию $W=\overline{w}^2$. Область значений этой функции пред-



Фиг. 162.



Фиг. 163.

ставлена фиг. 163, *а*. Граница этой области образована окружностью радиуса v_0^2 и разрезом $DEFAB$. Примем точку $(D,\ B)$, для

которой $\overline{W} = -v_0^2$, за центр инверсии и применим преобразование инверсии. Тогда для функции

$$U = \frac{1}{w^2 + v_0^2}$$

получим область, изображенную фиг. 163, *б*, ограниченную прямолинейными отрезками. Отобразим ее на полуплоскость ζ. Получим:

$$U = \frac{1}{w^2 + v_0^2} = M \int \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)^{3/2}} = \frac{M\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + N.$$

Постоянные M и N определим из условия, что $w = v_0$ при $\zeta = 0$ и $w = 0$ при $\zeta = \frac{1}{k}$. Получим (фиг. 163, *б*)

$$w = -v_0 \frac{ik'\zeta - \sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-k^2\zeta^2}}. \tag{12.4}$$

Теперь, принимая во внимание, что $w = \frac{d\omega}{dz}$ и что на основании (12.1) и (12.2)

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{\varkappa H}{2K} \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \tag{12.5}$$

найдем, деля (12.5) на (12.4):

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\varkappa H}{2Kv_0} \frac{1}{(\sqrt{1-\zeta^2} - ik'\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}} =$$

$$= \frac{\varkappa H}{2Kv_0} \left(\frac{1}{1-k^2\zeta^2} + \frac{ik'\zeta}{(1-k^2\zeta^2)\sqrt{1-\zeta^2}} \right).$$

Интегрируя, получаем:

$$z = \frac{\varkappa H}{2Kkv_0} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+k\zeta}{1-k\zeta} - i \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{k'} \sqrt{1-\zeta^2} \right]. \tag{12.6}$$

Постоянная интегрирования здесь принята равной нулю, так как должны выполняться условия: при $\zeta = 0$ величина z имеет чисто мнимое значение, при $\zeta = 1$ — действительное значение.

Уравнение (12.6) удобно для значений $\zeta = \xi$, причем

$$0 < \xi < 1,$$

т. е. для определения формы кривой CD, которая получится, если в (12.6) разделить действительную и мнимую части. Предварительно, однако, мы введем глубину проницаемого грунта T с помощью таких рассуждений. Переход с линии DE на линию EF (фиг. 160) соответствует обходу особой точки $\zeta = \frac{1}{k}$ по полуокружности в положительном направлении, что дает $\ln(1-k\zeta)$ приращение πi. По формуле

(12.6) имеем, что приращение z будет равно

$$\frac{\varkappa H}{2Kkv_0}\frac{1}{2}(-\pi i).$$

С другой стороны, мнимая часть z при этом переходе меняется с Ti на 0. Поэтому получаем:

$$-\frac{\varkappa H\pi i}{4Kv_0k}=-Ti,$$

откуда

$$T=\frac{\varkappa H\pi}{4Kv_0k}=\frac{H\pi}{4KkJ_0}. \tag{12.7}$$

Равенство (12.6) можно переписать, вводя T, так:

$$z=\frac{T}{\pi}\left[\ln\frac{1+k\zeta}{1-k\zeta}-2i\operatorname{arc\,tg}\frac{k\sqrt{1-\zeta^2}}{k'}\right]. \tag{12.8}$$

Разделяя действительную и мнимую части и считая $\zeta=\xi$, причем $0<\xi<1$, получим параметрические уравнения части CD контура флютбета

$$x=\frac{T}{\pi}\ln\frac{1+k\xi}{1-k\xi},\quad y=-\frac{2T}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k'}\sqrt{1-\xi^2}. \tag{12.9}$$

Теперь можно написать уравнение контура в явной форме:

$$x=\frac{T}{\pi}\ln\frac{1+\cos\frac{\pi d}{2T}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi d}{2T}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi y}{2T}}}{1-\cos\frac{\pi d}{2T}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi d}{2T}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi y}{2T}}}.$$

Отсюда, в частности, найдем полуширину флютбета l и глубину его d, полагая соответственно $\xi=1$ и $\xi=0$:

$$\left.\begin{aligned} l&=\frac{T}{\pi}\ln\frac{1+k}{1-k},\\ d&=\frac{2T}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{k'}=\frac{2T}{\pi}\operatorname{arc\,sin}k. \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

Из формул (12.10) находим два выражения для модуля эллиптического интеграла

$$k=\sin\frac{\pi d}{2T}=\operatorname{th}\frac{\pi l}{2T}. \tag{12.11}$$

Эти равенства служат для определения k. Они дают зависимость между шириной и глубиной флютбета. Эта зависимость представлена таблицей 11.

Таблица 11

Зависимость между шириной $2l$ и глубиной d флютбета

$\frac{d}{T}$	0,1	0,5	0,9	0,95
$\frac{l}{T}$	0,1	0,562	1,62	2,06

На фиг. 164 дан схематический график семейства контуров флютбета с постоянной скоростью обтекания.

Отметим, что расход Q, вычисляемый по формуле

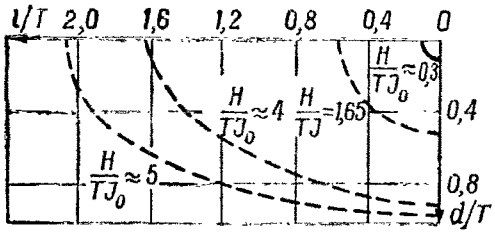
$$Q = \frac{\varkappa HK'}{2K},$$

при значении (12.11) для k получается таким, как если бы мы имели шпунт, забитый на глубину d (без флютбета), или плоский флютбет ширины $2l$.

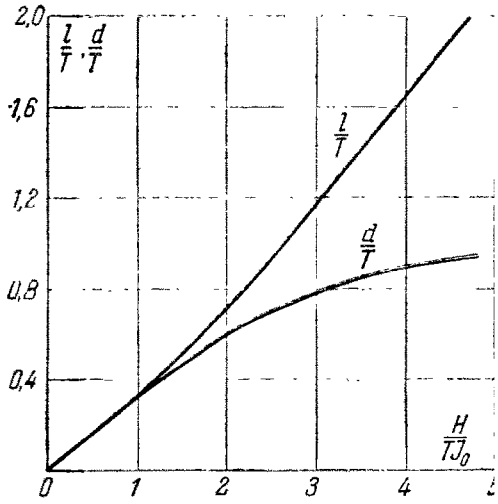
При этом глубина слоя T у нас не будет произвольной; она связана с напором H, с задаваемой величиной градиента J_0 и с числом k.

Прямой метод решения задачи требует по заданным H, T, J_0 найти k из уравнения (12.7), а по нему уже найти соответствующие значения l и d.

На фиг. 165 дана зависимость l/T и d/T от H/TJ_0. Мы видим,



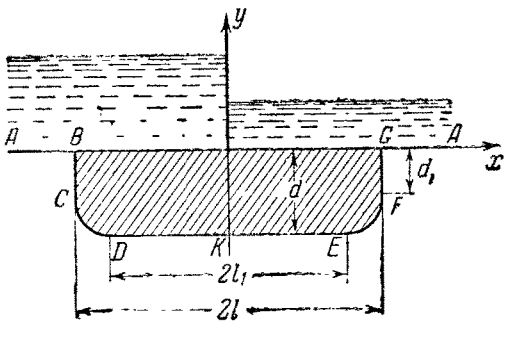
Фиг. 164.



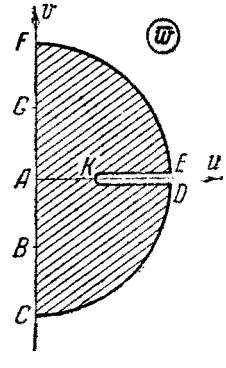
Фиг. 165.

что при $\frac{H}{TJ_0} \leqslant 1$ контур близок к полукругу и лишь при относительно больших напорах он приближается к полуэллипсу, сильно заглубляясь в грунт.

§ 13. Контур с прямолинейными участками и участками постоянной скорости. Предположим, что флютбет имеет вид, изобра-



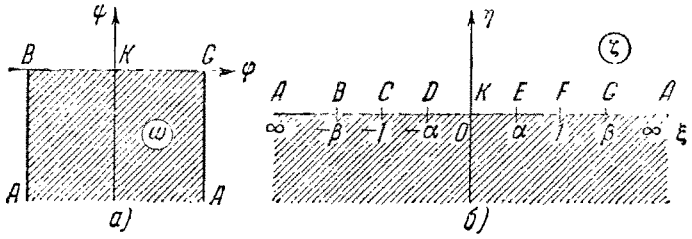
Фиг. 166.



Фиг. 167.

женный на фиг. 166. В нем BC, GF — отрезки вертикальных прямых, DE — отрезок горизонтальной прямой. Поставим условие: на участках

CD и EF градиент скорости имеет заданное значение J_0. Тогда годограф скорости будет представлен фиг. 167, а плоскость комплексного потенциала ω — фиг. 168, $а$.



Фиг. 168.

Отображение на нижнюю полуплоскость ζ (фиг. 168, $б$) дает:

$$\omega = \frac{\varkappa H}{\pi} \arcsin \frac{\zeta}{\beta}, \qquad w = \frac{d\omega}{dz} = \frac{v_0}{\alpha'}\left(\sqrt{1-\zeta^2} - i\sqrt{\zeta^2-\alpha^2}\right).$$

Отсюда, как и в § 12, найдем:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\varkappa H}{\pi v_0 \alpha'} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + i\sqrt{\zeta^2-\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$z = \frac{\varkappa H}{\pi v_0 \alpha'} \int_1^{\zeta} \frac{\sqrt{1-\zeta^2} + i\sqrt{\zeta^2-\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}\, d\zeta + l - d_1 i. \qquad (13.1)$$

Здесь l — полуширина флютбета, d_1 — глубина вертикального отрезка флютбета (фиг. 166).

Полагая $\zeta = \alpha$, найдем, разделяя действительную и мнимую части, ширину и глубину закругленной части флютбета (фиг. 166):

$$a = l - l_1 = \frac{\varkappa H}{\pi v_0 \alpha'} \int_{\alpha}^{1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}\, d\zeta, \qquad (13.2)$$

$$b = d - d_1 = \frac{\varkappa H}{\pi v_0 \alpha'} \int_{\alpha}^{1} \frac{\sqrt{\zeta^2-\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}\, d\zeta. \qquad (13.3)$$

Возьмем пределы $(0, \alpha)$ в (13.1) и обойдем точку $\zeta = \alpha$ по полуокружности в отрицательном направлении. Получим уравнение для l_1:

$$l_1 = \frac{\varkappa H}{\pi v_0 \alpha'}\left\{\int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\beta^2-\zeta^2}}\, d\zeta + \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2-\zeta^2}{\beta^2-\zeta^2}}\, d\zeta\right\}.$$

Сравнивая это уравнение с (13.2), найдем:

$$l=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\left\{\int_0^1\sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\beta^2-\zeta^2}}\,d\zeta+\int_0^\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2-\zeta^2}{\beta^2-\zeta^2}}\,d\zeta\right\}. \tag{13.4}$$

Уравнение криволинейного участка EF получим, давая ζ действительные значения между α и 1:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\int_\alpha^\xi\sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\beta^2-\zeta^2}}\,d\zeta+l_1,\\ y&=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\int_\alpha^\xi\sqrt{\frac{\zeta^2-\alpha^2}{\beta^2-\zeta^2}}\,d\zeta-d. \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Рассмотрим частные случаи.

§ 14. «Обтекаемый» флютбет. При $\beta=1$ получаем флютбет только с горизонтальной вставкой.

При этом уравнение (13.1) дает:

$$z=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\left\{\zeta+i\int_1^\zeta\sqrt{\frac{\zeta^2-\alpha^2}{1-\zeta^2}}\,d\zeta\right\}. \tag{14.1}$$

Так как при $\zeta=1$ мы должны иметь $z=l$, то из (14.1) получаем:

$$l=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}. \tag{14.2}$$

Далее, равенство (13.2) дает при $\beta=1$:

$$l-l_1=\frac{\varkappa H(1-\alpha)}{\pi v_0\alpha'}=\frac{\varkappa H\alpha'}{\pi v_0(1+\alpha)}. \tag{14.3}$$

Наконец, из (13.3) получаем:

$$d=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\int_\alpha^1\sqrt{\frac{\zeta^2-\alpha^2}{1-\zeta^2}}\,d\zeta.$$

Подстановка

$$t=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha'}$$

приводит выражение для d к виду

$$d=\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\alpha'^2t^2}}\,dt. \tag{14.4}$$

При $\alpha'\approx 0$, что имеет место для достаточно длинных флютбетов, получаем из (14.4) приближенную формулу

$$d\approx\frac{\varkappa H}{\pi v_0\alpha'}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\varkappa H}{4v_0\alpha'}. \tag{14.5}$$

Уравнение округленной части флютбета найдем, давая ζ действительные значения, $\zeta = \xi$, в пределах от α до 1. Будем иметь:

$$x = l\xi,$$

$$y = -l\int_{\xi}^{1}\sqrt{\frac{\xi^2-\alpha^2}{1-\xi^2}}\,d\xi \qquad (\alpha < \xi < 1).$$

Полагая

$$\xi = \sqrt{1-\alpha'^2t^2},$$

получим уравнение «обтекаемой» части в такой форме:

$$x = l\sqrt{1-\alpha'^2t^2},$$

$$y = -\alpha'^2 l\int_{0}^{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\alpha'^2t^2}}\,dt.$$

Интеграл в выражении для y после подстановки

$$t = \sin\varphi$$

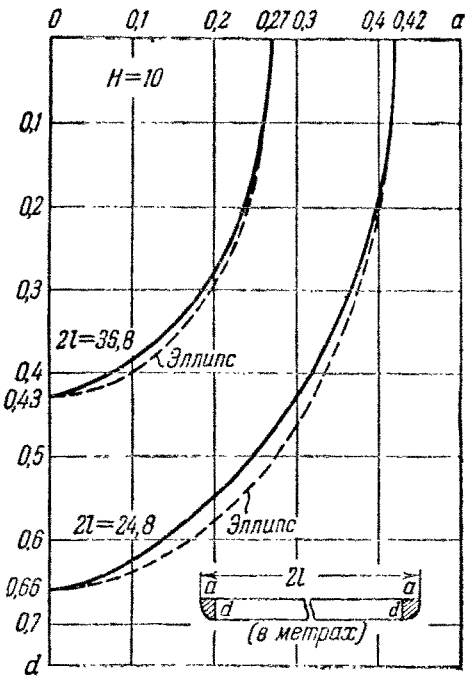
выражается через эллиптические интегралы в канонической форме

$$\int_0^t\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\alpha'^2t^2}}\,dt = \frac{1}{\alpha'^2}E(\varphi,\ \alpha') - \frac{\alpha^2}{\alpha'^2}F(\varphi,\ \alpha'),$$

где

$$E(\varphi,\ k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$F(\varphi,\ k) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$



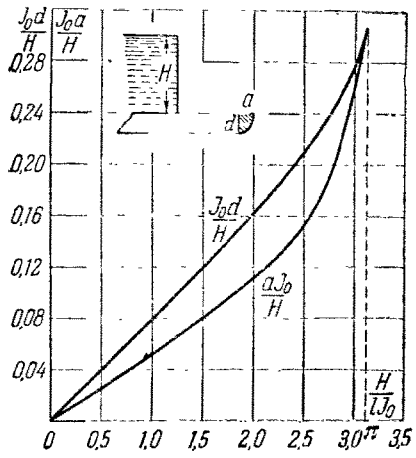
Фиг. 169.

Окончательно уравнения округленного конца приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sqrt{1-\alpha'^2\sin^2\varphi},\\ y &= -l\,[E(\varphi,\ \alpha') - \alpha^2F(\varphi,\ \alpha')]. \end{aligned}\right\} \qquad (14.6)$$

Для того чтобы составить представление о форме закругленного конца, были произведены вычисления для $J_0 = 1$, $\alpha' = \sin 10°$ и $\alpha' = \sin 15°$. Результаты их представлены на фиг. 169. Получаются кривые, близкие к эллипсам с полуосями $a = l - l_1$ и d.

Давая $\frac{H}{lJ_0}$ ряд других значений, можно составить таблицу и график (фиг. 170), показывающие зависимость толщины флютбета и ширины закругленного уголка от заданной полуширины флютбета l. Мы видим, что чем короче флютбет, тем он должен быть толще, при сохранении одного и того же градиента J_0. Увеличение напора H или уменьшение градиента J_0 приводит к пропорциональному увеличению всех размеров флютбета.



Фиг. 170.

Введем обозначение

$$\tilde{H} = \frac{H}{\pi J_0 l}.$$

Тогда нетрудно получить для $\frac{a}{l}$

$$\frac{a}{l} = \frac{\tilde{H}^2}{1 + \sqrt{1 - \tilde{H}^2}} \approx \frac{1}{2}\tilde{H}^2\left(1 + \frac{1}{4}\tilde{H}^2\right).$$

Для d/l будем иметь приближенное равенство

$$\frac{d}{l} \approx \frac{\pi}{4}\tilde{H}^2\left(1 + \frac{1}{8}\tilde{H}^2 + \frac{3}{64}\tilde{H}^4\right).$$

Умножая полученные равенства почленно на $\frac{lJ_0}{H}$, получим другие соотношения

$$\frac{aJ_0}{H} \approx \frac{H}{\pi^2 J_0 l}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{H^2}{\pi^2 J_0^2 l^2}\right),$$

$$\frac{dJ_0}{H} \approx \frac{H}{2\pi J_0 l}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{H^2}{\pi^2 J_0^2 l^2}\right).$$

Для достаточно малых отношений H/l, а именно для

$$\frac{H}{l} \leqslant J_0$$

имеем приближенные линейные зависимости $\frac{a}{H}$ и $\frac{d}{H}$ от $\frac{H}{l}$, которые можно представить так:

$$\frac{a}{H} \approx \frac{H}{\pi^2 J_0 l},$$

$$\frac{d}{H} \approx \frac{H}{2\pi J_0 l}.$$

При заданных H, l и J_0 мы можем, таким образом, найти a и d.

На фиг. 170 дан график зависимости величин

$$\frac{aJ_0}{H}, \quad \frac{dJ_0}{H}$$

от величины

$$\frac{H}{lJ_0}.$$

При $J_0 = 1$ эти графики выражают зависимости

$$\frac{a}{H} = f_1\left(\frac{H}{l}\right), \quad \frac{d}{H} = f_2\left(\frac{H}{l}\right).$$

Подчеркнем еще раз, что обтекаемые концы флютбета нами определяются из условия, чтобы градиент напора вдоль них J_0 имел заданное постоянное значение. Тогда скорость вдоль обтекаемой части, как мы знаем, имеет постоянное значение

$$v_0 = kJ_0.$$

Такова же будет, в частности, выходная скорость, т. е. скорость в точке E выхода грунтового потока в нижний бьеф.

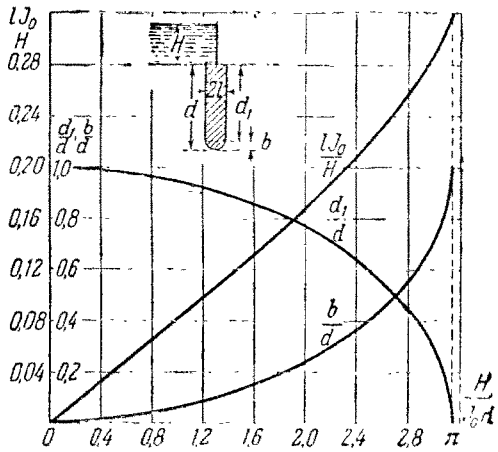
Вдоль прямолинейной части флютбета скорость имеет значения, меньшие или равные v_0, причем в середине флютбета будет минимум скорости. Нетрудно найти величину этой скорости:

$$v_{\min} = v_0 \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

§ 15. «Обтекаемый» шпунт. Другой частный случай, представляющий интерес, получится из общей формулы (13.1) при $\alpha = 0$. Он будет соответствовать «обтекаемому» шпунту или зубу (фиг. 171).

Уравнение (13.1) переходит при $\alpha = 0$ в следующее:

$$z = \frac{H}{\pi J_0}\int_1^{\zeta} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}+i\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}\,d\zeta + l - d_1 i,$$



Фиг. 171.

где l — полуширина зуба, d_1 — глубина его прямолинейной части (фиг. 171).

В данном случае $l_1 = 0$. Для l, d и d_1 получаем:

$$l = \frac{H}{\pi J_0}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{\beta^2-\zeta^2}}\,d\zeta,$$

$$d - d_1 = \frac{H}{\pi J_0}\int_0^1 \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}} = \frac{H}{\pi J_0}(\beta - \sqrt{\beta^2-1}),$$

$$d = \frac{H\beta}{\pi J_0}, \quad d_1 = \frac{H}{\pi J_0}\sqrt{\beta^2-1}.$$

Задавшись значениями величин J_0, H и d, найдем β, после чего сможем определить l и все элементы движения. Интересно найти величину выходной скорости около шпунта. Она будет получена, если в выражении для комплексной скорости

$$w = u - iv = v_0 (\sqrt{1-\zeta^2} - i\zeta) = -iv_0 (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

положим $\zeta = \beta$. Получим:

$$v_{\min} = v_0 (\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}) = \frac{v_0}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

Положим для примера $J_0 = 1$, $d = H$. Тогда будем иметь:

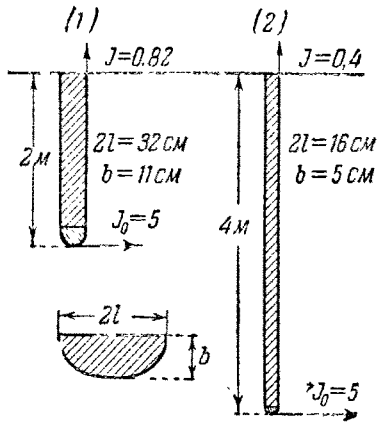
$$\beta = \pi, \quad d_1 = \frac{d}{\pi}\sqrt{\pi^2 - 1} = 0{,}95\, d,$$

$$v_{\min} = \frac{v_0}{\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}} = 0{,}16 v_0.$$

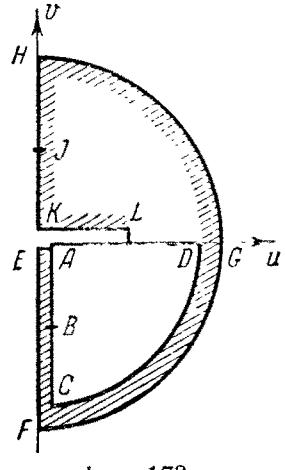
Формулу для l преобразуем, приведя правую часть к эллиптическим интегралам в канонической форме

$$l = \frac{H}{\pi J_0 \beta} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{1-\frac{1}{\beta^2}\zeta^2}}\, d\zeta = \frac{H\beta}{\pi J_0}\left[E - \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) F\right]$$

(E и F — полные эллиптические интегралы модуля $\frac{1}{\beta}$).



Фиг. 172.



Фиг. 173.

Положив $\beta = \pi$, получим для $d = H$, $J_0 = 1$:

$$l = 0{,}080 d.$$

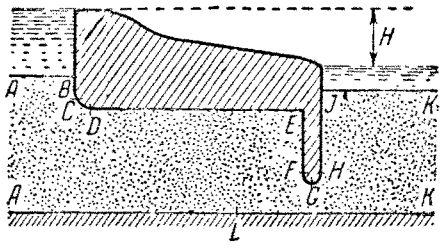
Если, например, $H = 10$ *м*, то по нашему условию $d = 10$ *м*, и тогда получаем:

$$b = d - d_1 = 0{,}52 d = 52 \text{ см}, \quad l = 80 \text{ см}.$$

На фиг. 172 представлены два других примера, также для $H = 10$ *м* при $J_0 = 5$. Для выходного градиента получаются при этом небольшие значения: 0,82 и 0,4.

Задачу можно обобщить, рассматривая годограф скорости, изображенный на фиг. 173. Это двулистная область, состоящая из дуг окружностей заданных радиусов и прямолинейных разрезов.

Область движения изображена на фиг. 174. Для функции $W = \ln w$ получаем условие, что на дугах окружностей имеем постоянное значение $\operatorname{Re} W = \ln V$, вдоль лучей $\operatorname{Im} W = \arg w$ постоянна. Зависимость w от ζ можно найти с помощью применения интеграла типа Коши (см. главу VI).



Фиг. 174.

Отметим, что математический аппарат, примененный в разделе об обтекаемых контурах, является не более сложным, чем тот, которым мы пользовались в главе III при рассмотрении аналогичных задач об обтекании контуров с угловыми точками.

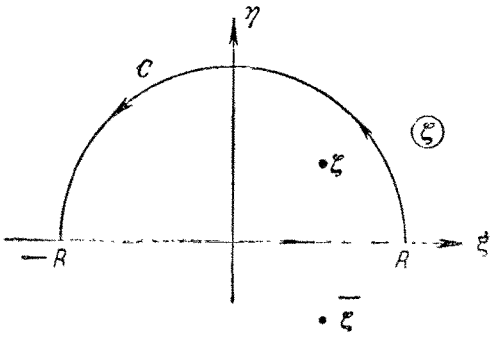
ГЛАВА VI

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

А. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

§ 1. Определение аналитической функции по ее действительной части на действительной оси. Пусть дана аналитическая функция $f(\zeta)$ в верхней полуплоскости, непрерывная вплоть до действительной оси и имеющая предельное значение f_0 на бесконечности:

$$\lim_{\zeta\to\infty} f(\zeta) = f_0.$$



Фиг. 175.

Положим для определенности, что при больших по модулю значениях ζ

$$f(\zeta) = f_0 + O\left(\frac{1}{\zeta^\beta}\right) \quad (\beta > 0).$$

Последнее равенство означает, что существует отличный от нуля предел A выражения $\zeta^\beta(f - f_0)$:

$$\lim_{\zeta\to\infty} [\zeta^\beta (f - f_0)] = A.$$

Применим теорему Коши к функции $f(\zeta)$, взяв замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $(-R, R)$ и полуокружности C радиуса R, проходимой в положительном направлении (фиг. 175). Получим для точки ζ, лежащей внутри контура:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}. \tag{1.1}$$

Устремляя R к бесконечности, получим:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_0 + \dfrac{A}{\tau^\beta}}{\tau-\zeta} = \frac{f_0}{2},$$

так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_0\,d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{\pi i f_0}{2\pi i}=\frac{1}{2}f_0,$$

а второе слагаемое дает нуль. Таким образом,

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta}+\frac{1}{2}f_0. \tag{1.2}$$

Возьмем точку $\overline{\zeta}=\xi-i\eta$ в нижней полуплоскости. Она является внешней по отношению ко взятому нами контуру; как известно из теории функций комплексного переменного, интеграл в правой части равенства (1.1) будет равен нулю, следовательно, будет равен нулю и предел его, выражаемый правой частью равенства (1.2):

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-\overline{\zeta}}+\frac{f_0}{2}. \tag{1.3}$$

В равенстве (1.3) заменим все комплексные числа на сопряженные. Получим:

$$0=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{f}(t)\,dt}{t-\zeta}+\frac{\overline{f}_0}{2}. \tag{1.4}$$

Теперь вычтем почленно из (1.2) равенство (1.4). Получим:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f+\overline{f}}{t-\zeta}\,dt+\frac{1}{2}(f_0-\overline{f}_0).$$

Полагая

$$f=\varphi+i\psi,\quad f_0=\varphi_0+i\psi_0, \tag{1.5}$$

перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}+i\psi_0. \tag{1.6}$$

Точно так же, складывая почленно (1.2) и (1.4), получим выражение аналитической функции $f(\zeta)$ в верхней полуплоскости через значения мнимой ее части на оси абсцисс

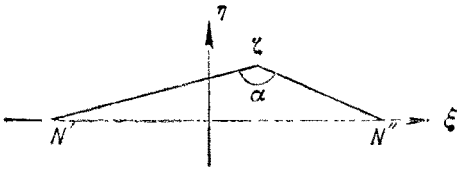
$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)\,dt}{t-\zeta}+\varphi_0. \tag{1.7}$$

Перед интегралами (1.6), (1.7) нужно взять знак минус, если ζ— точка *нижней* полуплоскости.

Рассмотрим интеграл

$$U(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)\,dt}{t-\zeta}$$

и будем искать предельное значение функции $U(\zeta)$, когда точка ζ стремится к некоторой точке ξ действительной оси. Для этого возьмем на действительной оси две точки $N'(-\xi_1, 0)$ и $N''(\xi_2, 0)$ (фиг. 176) и будем искать предел выражения



Фиг. 176.

$$U(\zeta)=\frac{\omega(\zeta)}{2\pi i}\int_{-\xi_1}^{\xi_2}\frac{dt}{t-\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\xi_1}^{\xi_2}\frac{\omega(t)-\omega(\zeta)}{t-\zeta}\,dt.$$

Этот предел будет существовать при $\xi_1=\xi_2$ в смысле главного значения [15] (если ω удовлетворяет, например, условиям Гельдера-Липшица и выполнены условия сходимости для U).

Поэтому, когда ζ стремится к точке ξ из верхней полуплоскости,

$$\lim_{\zeta\to\xi}U(\zeta)=\frac{1}{2}\,\omega(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(t)-\omega(\xi)}{t-\xi}\,dt. \tag{1.8}$$

С помощью уравнения (1.8) из формулы (1.6) получим, полагая $\omega=2\varphi$:

$$\lim_{\zeta\to\xi}f(\zeta)=\varphi(\xi)+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\xi)}{t-\xi}\,dt+i\psi_0. \tag{1.9}$$

В правой части (1.9) действительная часть равна $\varphi(\xi)$, что и доказывает, что функция $f(\zeta)$, построенная по формуле (1.6), действительно удовлетворяет поставленному условию.

Такая же проверка применима к уравнению (1.7).

Если на некоторой части оси ξ, например вне отрезка (a, b), функция $\varphi(\xi)=0$, то в формуле (1.5) можно взять пределы a, b и написать выражение для $f(\zeta)$ так:

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int_{a}^{b}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}+i\psi_0.$$

Тогда при переходе на ось ξ будем различать два случая:

1) если $a<\xi<b$, то

$$\lim_{\zeta\to\xi}f(\zeta)=\varphi(\xi)+\frac{1}{\pi i}\int_{a}^{b}\frac{\varphi(t)-\varphi(\xi)}{t-\xi}\,dt+i\psi_0;$$

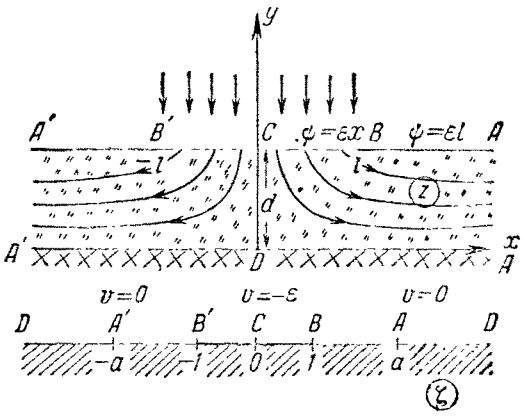
2) если ξ вне промежутка (a, b), то

$$\lim_{\zeta \to \xi} f(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t - \xi}\, dt + i\psi_0.$$

В качестве примера рассмотрим схему движения, изображенную на фиг. 177. Дождь падает полосой на увлажненный грунт глубины d. Грунтовые воды растекаются так, что линию AB можно считать твердой стенкой. Тогда на отрезке $B'CB$ будем иметь условие $v = -\varepsilon$, где ε есть интенсивность дождя, т. е. количество его, выпадающее на единицу площади в единицу времени.

На остальных границах области движения $v = 0$. Отображая область движения на нижнюю полуплоскость ζ (фиг. 177), получим (например, с помощью формулы Кристоффеля-Шварца) зависимость между ζ и z

$$\zeta = a \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2d}. \qquad (1.10)$$



Фиг. 177.

Чтобы найти зависимость скорости $w = u - iv$ от ζ, воспользуемся формулой (1.7) этой главы, дающей значение функции в *нижней* полуплоскости, когда известны значения ее мнимой части на действительной оси, причем $w = 0$ на бесконечности:

$$w = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v\, d\xi}{\xi - \zeta} = -\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} = -\frac{\varepsilon}{\pi} \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}. \qquad (1.11)$$

Исключая ζ из уравнений (1.10) и (1.11), найдем w как функцию z:

$$w = -\frac{\varepsilon}{\pi} \ln \frac{a \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2d} - 1}{a \operatorname{cth} \frac{\pi z}{2d} + 1}.$$

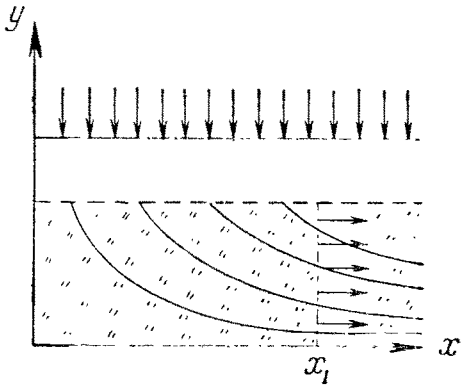
Так как при $\zeta = 1$ имеем $z = l + di$, то из (1.10) найдем:

$$a = \operatorname{cth} \frac{\pi l}{2d}.$$

Предположим, что дождь идет в виде бесконечной полуполосы (фиг. 178). Этот частный случай получается из предыдущего при $l=\infty$, $a=1$. При этом получаем:

$$w=-\frac{\varepsilon}{\pi}\ln\frac{\operatorname{cth}\frac{\pi z}{2d}-1}{\operatorname{cth}\frac{\pi z}{2d}+1}=-\frac{\varepsilon}{\pi}\ln e^{-\frac{\pi z}{d}}=\frac{\varepsilon z}{d}.$$

Интегрируя это уравнение по z, получим:



Фиг. 178.

$$\omega=\varphi+i\psi=\frac{\varepsilon z^2}{2d}+C.$$

Отделение действительной и мнимой частей дает:

$$\varphi=\frac{\varepsilon}{2d}(x^2-y^2)+C_1,$$

$$\psi=\frac{\varepsilon}{d}xy+C_2.$$

Это семейства софокусных гипербол. В полученном движении горизонтальная скорость фильтрации не зависит от y и возрастает по мере удаления от оси y:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\varepsilon x}{d}.$$

Расход через поперечное сечение $x=x_1$, равный $q=\varepsilon x_1$, беспредельно возрастает с возрастанием x_1, как этого и следовало ожидать в силу условий задачи. Если обрезать область движения прямой $x=x_1$, то можно считать, что мы имеем приближенную модель движения грунтовых вод, стекающих во время дождя в реку, на расстоянии x_1 от места начала дождя.

§ 2. Смешанная задача теории функций. Рассмотрим задачу: найти функцию $w=f(\zeta)$, голоморфную в верхней полуплоскости и непрерывно продолжимую на действительную ось L, за исключением, быть может, отдельных точек, при подходе к которым $f(\zeta)$ имеет порядок роста, меньший единицы, если w удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im}[w(\xi)e^{-i\omega(\xi)}]=c(\xi) \text{ на } L. \tag{2.1}$$

Здесь $c(\xi)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию Гельдера [15, 16] на каждом открытом отрезке между точками разрыва $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\omega(\xi)$ кусочно-постоянна.

Сначала обратимся к однородной задаче, когда $c(\xi) = 0$, считая $\omega(\xi) = \pi\alpha_k$ на отрезке (a_k, a_{k+1}) (фиг. 179).

В § 9 главы III мы имели пример такой задачи, отображая конформно на полуплоскость многоугольник, ограниченный прямыми, проходящими через начало. В самом деле, уравнение (2.1) при $c(\xi) = 0$ дает $(w = u + iv)$ прямую $v\cos\pi\alpha_k - u\sin\pi\alpha_k = 0$. Решение указанной задачи было дано формулой (9.1) главы III (C — действительная постоянная):

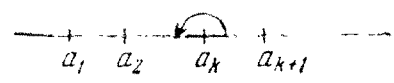
$$w_* = Ce^{\pi\alpha_n i}(\alpha_1 - \zeta)^{\alpha_n - \alpha_1}(\alpha_2 - \zeta)^{\alpha_1 - \alpha_2}\ldots(\alpha_n - \zeta)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n}. \quad (2.2)$$

Однако однородные условия (2.1) будут также удовлетворены, если в выражении (2.2) каждый из показателей увеличим или уменьшим на целое число.

По поводу выбора показателей заметим следующее. Обозначим через γ_k скачок $\frac{\omega(\xi)}{\pi}$ при обходе точки a_k (фиг. 179):

$$\gamma_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \; a_{n+1} = a_1. \quad (2.3)$$

Можно выбрать целые числа λ_k так, чтобы выполнялись неравенства $-1 < \gamma_k + \lambda_k < 1$. Если γ_k — целое, то, положив $\lambda_k = -\gamma_k$, получим единственное число $\gamma_k + \lambda_k = 0$, удовлетворяющее этому условию; если γ_k — не целое, то существует два значения λ_k, при которых удовлетворяются соответственно неравенства



Фиг. 179.

$$-1 < \gamma_k + \lambda_k < 0, \quad 0 < \gamma_k + \lambda_k < 1. \quad (2.4)$$

Если в (2.2) заменить γ_k на $\gamma_k + \lambda_k$ из первого неравенства (2.4), то w_* обращается в бесконечность порядка < 1 в точке a_k: такого типа решения часто встречаются в теории фильтрации. Но иногда ищется решение, ограниченное при $\zeta = a_k$ [17]. Тогда нужно взять λ_k удовлетворяющим второму из условий (2.4).

Остановившись на определенном выборе λ_k, введем обозначения

$$\delta_k = \gamma_k + \lambda_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k + \lambda_k. \quad (2.5)$$

Выражение

$$T(\zeta) = Ce^{\pi\alpha_n i}\prod_{k=1}^{n}(a_k - \zeta)^{\delta_k} \quad (2.6)$$

называют [16] *канонической функцией класса* $h(a_1, \ldots, a_q)$, если в точках $a_1, a_2, \ldots, a_q$ имеем $0 \leqslant \delta_k < 1$. C — действительная постоянная, которую можно принять равной единице.

Индексом $\varkappa$ решения класса $h(a_1, \ldots, a_q)$ называется число

$$\varkappa = -(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n). \quad (2.7)$$

Обращаясь к неоднородному условию (2.1), перепишем его так:

$$-\frac{i}{2}\left[w(\xi)-\overline{w}(\xi)\,e^{2i\omega(\xi)}\right]=c(\xi)\,e^{i\omega(\xi)}. \tag{2.8}$$

Функция (2.6) удовлетворяет уравнению $T(\xi)-\overline{T}(\xi)e^{2i\omega}=0$. Подставляя найденное отсюда выражение $e^{2i\omega}=T:\overline{T}$ в (2.8), получим:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w}{T}\right)=-\frac{i}{2}\left(\frac{w}{T}-\frac{\overline{w}}{\overline{T}}\right)=\frac{c(\xi)\,e^{i\omega}}{T(\xi)}. \tag{2.9}$$

Мы приходим к задаче об определении функции, голоморфной в верхней полуплоскости, по ее мнимой части на действительной оси (§ 1). Для ее решения нужно задаться условием для $c(\xi)$ на бесконечности. При этом будем различать два случая.

1) Пусть индекс $\varkappa\geqslant 0$. Это значит, что $T(\zeta)$ при $\zeta=\infty$ обращается в нуль порядка $\varkappa$. Потребуем для $c(\xi)$ при подходе к $\xi=\pm\infty$ выполнения неравенства

$$|c(\xi)-A|<\frac{M}{|\xi|^{\varkappa+\alpha}} \tag{2.10}$$

(A, M, α — постоянные, $\alpha>0$; $A=0$ при $\varkappa>0$).

Общее решение класса $h(a_1, \ldots, a_q)$, ограниченное на бесконечности, имеет вид (см. формулу (1.7), где произвольную постоянную можно заменить полиномом)

$$w(\zeta)=\frac{T(\zeta)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(\xi)\,e^{i\omega}\,d\xi}{T(\xi)(\xi-\zeta)}+(C_0\zeta^{\varkappa}+C_1\zeta^{\varkappa-1}+\ldots+C_{\varkappa})\,T(\zeta) \tag{2.11}$$

(C_0, C_1, $\ldots$, $C_{\varkappa}$ — действительные постоянные).

2) Если $\varkappa<0$, то решение класса $h(a_1, \ldots, a_q)$, вообще говоря, не существует. В самом деле, в этом случае при $\zeta\to\infty$ $T(\zeta)$ обращается в бесконечность порядка $-\varkappa$. Разлагая подинтегральную функцию (2.11) по степеням $1/\zeta$, получим:

$$-\frac{T(\zeta)}{\pi\zeta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(\xi)\,e^{i\omega}}{T(\xi)}\left[1+\frac{\xi}{\zeta}+\frac{\xi^2}{\zeta^2}+\ldots+\frac{\xi^{-\varkappa-1}}{\zeta^{-\varkappa-1}}+\ldots\right]d\xi.$$

Отсюда видно, что для существования решения, имеющего конечный предел при $\zeta=\infty$, необходимо обращение в нуль всех членов ряда, включая член с $\xi^{-\varkappa-1}$; получим условия

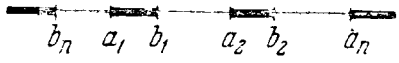
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(\xi)e^{i\omega}\xi^m d\xi}{T(\xi)}=0\qquad(m=0, 1, 2, \ldots, -\varkappa-1),$$

при выполнении которых и при выборе $C_0=\ldots=C_{\varkappa}=0$ существует решение, ограниченное на бесконечности.

Если ищется решение, могущее обращаться в бесконечность порядка ρ при $\zeta = \infty$ (ρ — целое положительное число), то достаточно в (2.11) взять полином степени $\varkappa + \rho$, а не $\varkappa$. Если решение должно обращаться в нуль на бесконечности, то нужно в (2.11) положить $C_0 = 0$.

§ 3. Частный случай задачи. Пусть L' — совокупность отрезков действительной оси (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), L'' — остальная часть действительной оси (фиг. 180). Требуется найти функцию $f(\zeta)$, голоморфную в верхней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и в точках a_k, а при подходе к точкам b_k имеющую порядок роста, меньший единицы, по контурному условию

$$\operatorname{Re} w = c(\xi) \text{ на } L', \ \operatorname{Im} w = c(\xi) \text{ на } L'', \quad (3.1)$$



Фиг. 180.

где $c(\xi)$ в интервалах между точками a_k и b_k удовлетворяет условию Гельдера, а при подходе к бесконечности — условию (2.10). Примем $\alpha_n = 0$, $\omega = 0$ на L'' и $\omega = -\frac{\pi}{2}$ на L' в (2.1), а скачки в точках a_k и b_k соответственно равными $^1/_2$ и $-^1/_2$. Индекс $\varkappa$ класса $h(a_1, \ldots, a_n)$ равен нулю, и функция (2.6) будет:

$$T(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k - \zeta} : \sqrt{b_k - \zeta}).$$

Решение класса $h(a_1, \ldots, a_n)$ будет:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\zeta - a_k}{\zeta - b_k}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{1}^{n} \sqrt{\frac{\xi - b_k}{\xi - a_k}} \frac{ce^{i\omega}}{\xi - \zeta} d\xi + C_0 \prod_{1}^{n} \sqrt{\frac{\zeta - a_k}{\zeta - b_k}}. \quad (3.2)$$

C_0 — действительная постоянная.

Если потребовать в точках a_k лишь выполнения условия, что порядок роста в них меньше единицы, то решение, ограниченное на бесконечности, будет [16–18]:

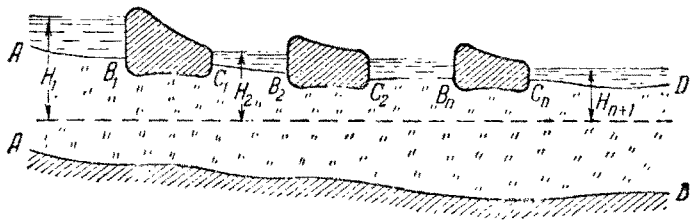
$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \prod_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\zeta - a_k}{\zeta - b_k}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{1}^{n} \sqrt{\frac{\xi - b_k}{\xi - a_k}} \frac{ce^{i\omega}}{\xi - \zeta} d\xi + \frac{C_0 + C_1\zeta + \ldots + C_n\zeta^n}{\sqrt{\prod_{1}^{n} (\zeta - a_k)(\zeta - b_k)}}, \quad (3.3)$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ — действительные постоянные, $\omega = 0$ на L'' и $\omega = -\frac{\pi}{2}$ на L'.

В качестве примера рассмотрим задачу о плоском напорном движении под n плотинами в произвольной области (фиг. 181), для которой нетрудно построить комплексный потенциал как функцию от ζ [18].

Пусть на действительной оси плоскости ζ точкам A, B_1, C_1, ..., B_n, C_n, D соответствуют точки a, b_1, c_1, ..., b_n, c_n, d.

Действительная часть функции $\omega = \varphi + i\psi$ принимает на отрезках ab_1, c_1b_2, ..., c_nd постоянные значения $-\varkappa H_m$, мнимая часть — на отрезках b_1c_1, ..., b_nc_n постоянные значения Q_m. Производная $\frac{d\omega}{d\zeta}$, взятая вдоль действительной оси плоскости ζ, будет иметь действи-



Фиг. 181.

тельную часть равной нулю на отрезках c_mb_{m+1}, мнимую часть равной нулю на b_mc_m. Поэтому $\frac{d\omega}{d\zeta}$ можно представить в виде

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{P(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}, \tag{3.4}$$

где $R(\zeta) = (\zeta - a)(\zeta - b_1)(\zeta - c_1)(\zeta - b_2)\ldots(\zeta - b_n)(\zeta - c_n)(\zeta - d)$, если $A \neq D$, и $R(\zeta) = -(\zeta - b_1)(\zeta - c_1)\ldots(\zeta - b_n)(\zeta - c_n)$, если $A = D$.

Полином $P(\zeta)$ должен быть степени не выше $n+1$ при наличии водоупора и не выше $n-1$ при его отсутствии. В самом деле, в первом случае имеем при $\zeta = \infty$, предполагая контур AD гладким, конечную скорость в точке плоскости z, переходящей в бесконечно далекую точку плоскости ζ; во втором случае $\frac{d\omega}{d\zeta} = O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Интегрируя $\frac{d\omega}{d\zeta}$ в пределах b_m, c_m и c_m, b_{m+1}, найдем:

$$\int_{b_m}^{c_m} \frac{P(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{R(\zeta)}} = k(H_m - H_{m+1}), \quad \frac{1}{i}\int_{c_m}^{b_{m+1}} \frac{P(\zeta)}{\sqrt{R(\zeta)}}\,d\zeta = Q_{m+1} - Q_m. \tag{3.5}$$

Пусть заданы значения части величин H_1, H_2, ..., H_{n+1}, Q_1, Q_2, ..., Q_{n+1}, а именно, $n+1$ из них при $A \neq D$ и n из них при $A = D$. Тогда уравнения (3.5) позволяют определить коэффициенты полинома $P(\zeta)$; после этого из остальных уравнений (3.5) определятся оставшиеся неизвестными H_m и Q_m.

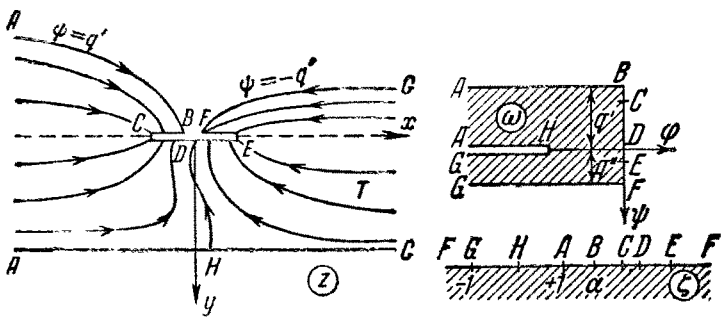
Отметим, что определитель системы, служащей для определения коэффициентов полинома $P(\zeta)$, отличен от нуля [16, 18].

Б. ЗАДАЧИ О ДРЕНАХ И КАНАЛАХ

§ 4. Дрена над водоупором при несимметричном притоке грунтовых вод. В §§ 2 и 3 мы имели задачу, которая является частным случаем задачи Римана-Гильберта [16]. Ее решение с помощью умножения искомой функции на функцию $T(\zeta)$ (2.6) сводится к решению задачи Дирихле по формулам (1.6), (1.7). Этот метод применен С. Н. Нумеровым к ряду задач теории фильтрации. Для каждой задачи подбирается функция, удовлетворяющая определенным условиям на бесконечности, для нее строится функция $T(\zeta)$, после чего применяется одна из формул (1.6), (1.7).

В § 1 мы уже имели простейший пример такой задачи. В настоящем и следующих параграфах мы рассмотрим ряд более сложных задач, в которых возникают значительные вычислительные трудности. В некоторых примерах (§§ 4, 5) мы излагаем вычисления подробно. В последующих примерах часть выкладок опускаем.

На фиг. 182 изображен случай дрены над водоупором при несимметричном притоке грунтовых вод. К дренажной щели $BCDEF$ прите-



Фиг. 182.

кает вода с двух сторон из бесконечности [9]. Линия DH есть линия тока, разделяющая область движения на две части — левую и правую. Ось y направим вниз. Глубину проницаемого слоя обозначим через T.

Величину расхода, поступающего из левой части в дрену, обозначим через q', из правой — через q''. Потенциал скорости вдоль дрены положим равным нулю. Тогда на плоскости ω получим многоугольник, изображенный на фиг. 182.

Рассмотрим значения функции Жуковского $\theta = z - \frac{i\omega}{k}$ вдоль границ области движения. Вдоль депрессионных кривых и вдоль контура дренажа

$$\varphi - ky = 0, \quad \operatorname{Im}\theta = \theta_2 = 0. \tag{4.1}$$

Вдоль непроницаемого основания AHG значения φ являются неизвестными. Но если мы отобразим области z и ω на полуплоскость ζ, то, найдя зависимость ω от ζ, будем иметь значения $\varphi(\zeta)$, а также

$\operatorname{Im}\theta(\zeta)$ вдоль всей действительной оси плоскости ζ. Так как нас будут специально интересовать значения $\operatorname{Im}\theta$ на отрезке AHG, то удобно перевести точки A и G в точки ± 1 плоскости ζ. Пусть, кроме того, точка B переходит в точку $\zeta=\alpha$, а F — в бесконечно далекую точку оси ξ. Тогда для ω получим такое выражение [см. ниже, в § 6, вывод аналогичной формулы (6.7)]:

$$\omega = -\frac{q'}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}}}{1-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}}} - \frac{q''}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}}{1-\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}}. \tag{4.2}$$

На отрезке $|\xi|<1$, где $\psi=0$, функция $\omega=\varphi(\xi)$. Мнимая часть функции Жуковского здесь равна

$$\operatorname{Im}\theta = \theta_2 = \nu - \frac{\varphi}{k} = T - \frac{\varphi(\xi)}{k},$$

т. е.

$$\theta_2 = T + \frac{q'}{k\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}}}{1-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}}} + \frac{q''}{k\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}}{1-\sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}} \tag{4.3}$$

$$(|\xi|<1).$$

Как мы видели,

$$\theta_2(\xi)=0 \quad \text{для} \quad |\xi|>1. \tag{4.4}$$

Таким образом вдоль всей оси ξ нам известны значения функции θ_2, которая является мнимой частью функции θ. По формуле (1.6) найдем:

$$\theta(\zeta) = \frac{T}{\pi}\ln\frac{1-\zeta}{-1-\zeta} + \frac{q'}{\pi^2 k}\int_{-1}^{1}\ln\frac{\sqrt{\alpha-t}+\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha-t}-\sqrt{\alpha-1}}\frac{dt}{t-\zeta} +$$

$$+\frac{q''}{\pi^2 k}\int_{-1}^{1}\ln\frac{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha-t}}{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha-t}}\frac{dt}{t-\zeta}+\frac{q''}{k}. \tag{4.5}$$

Постоянное слагаемое нужно взять здесь равным $\frac{q''}{k}$ для того, чтобы удовлетворить условию

$$\theta(\infty)=\frac{q''}{k}.$$

При $\zeta=\alpha$ получим $\theta(\alpha)=-\frac{q'}{k}$, а поэтому

$$-\frac{q}{k} = \frac{T}{\pi}\ln\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{q'}{\pi^2 k}J_1 + \frac{q''}{\pi^2 k}J_2 + \frac{q''}{k}. \tag{4.6}$$

Здесь

$$J_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\ln\left[\left(1+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}\right):\left(1-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}\right)\right]}{t-\alpha}\,dt,$$

$$J_2 = \int_{-1}^{1} \frac{\ln\left[\left(1+\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha+1}}\right):\left(1-\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha+1}}\right)\right]}{\tau-\alpha}\,d\tau.$$

Сделав замену переменных

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}} &= \ln\left[\left(1+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}\right):\left(1-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}\right)\right] = u_1,\\ 2\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha+1}} &= \ln\left[\left(1+\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha+1}}\right):\left(1-\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha+1}}\right)\right] = v_1, \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

приведем оба интеграла к одному и тому же выражению

$$J_1 = 2\int_c^\infty \frac{u_1\,du_1}{\operatorname{sh} u_1}, \quad J_2 = 2\int_c^\infty \frac{v_1\,dv_1}{\operatorname{sh} v_1},$$

где

$$c = \ln\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}{1-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}}. \quad (4.8)$$

Так как $J_1 = J_2$, то из (4.6) определяем сумму $q' + q''$:

$$\frac{q'+q''}{k} = \frac{-\frac{T}{\pi}\ln\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}{1+\frac{1}{\pi^2}J_1}.$$

Преобразуем J_1 с помощью интегрирования по частям:

$$J_1 = 2\int_c^\infty u_1\,d\ln\operatorname{th}\frac{u_1}{2} = 2\left(-c\ln\operatorname{th}\frac{c}{2} - \int_c^\infty \ln\operatorname{th}\frac{u_1}{2}\,du_1\right).$$

Далее, интеграл, стоящий в скобках, можно написать в виде

$$J_3 = \int_c^\infty \ln\frac{1-e^{-u}}{1+e^{-u}}\,du;$$

поэтому подстановка $e^{-u} = t$ дает:

$$J_3 = \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1-t)\,dt}{t} - \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1+t)\,dt}{t}.$$

Для J_1 получаем:

$$J_1 = 2\left(c \ln \operatorname{cth} \frac{c}{2} + \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt - \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt\right). \tag{4.9}$$

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{th} \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}, \tag{4.10}$$

перепишем выражение для полного расхода $q = q' + q''$

$$\frac{q}{kT} = \frac{\frac{2}{\pi} \ln \operatorname{cth} \frac{c}{2}}{1 - \frac{2}{\pi^2}\left(c \ln \operatorname{cth} \frac{c}{2} + \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt - \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt\right)}. \tag{4.11}$$

Обозначая через $f_1\left(\frac{q}{kT}\right)$ (или $f_1\left(\frac{q_r}{T}\right)$, где $q_r = \frac{q}{k}$) функцию, обратную по отношению к (4.11), получим:

$$c = f_1\left(\frac{q}{kT}\right).$$

Будем искать уравнение левой ветви кривой депрессии. Ей отвечают на плоскости ζ значения $1 < \xi < \alpha$. При этом для депрессионной кривой будем иметь:

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{q'i}{k} + y.$$

С другой стороны, полагая в уравнении (4.2) $\zeta = \xi$, причем $1 < \xi < \alpha$, выделим из логарифма мнимую часть. Получим:

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{q'i}{k} - \frac{q'}{\pi k} \ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}} + 1}{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}} - 1} - \frac{q''}{\pi k} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}}. \tag{4.12}$$

Введем обозначения

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}} + 1}{\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-\xi}} - 1} = u, \quad \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha-\xi}{\alpha+1}}} = v. \tag{4.13}$$

Между u и v существует зависимость

$$\operatorname{th} \frac{v}{2} = \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{u}{2}. \tag{4.14}$$

При этом области изменения u и v таковы:

$$0 < u < \infty, \quad 0 < v < c.$$

Теперь можем написать для y вдоль депрессионной кривой такое выражение через параметры u и v:

$$y = -\frac{q'}{\pi k} u - \frac{q''}{\pi k} v. \tag{4.15}$$

Чтобы найти зависимость x от u, v вдоль свободной поверхности, обратимся к выражению (4.5) для функции Жуковского. На свободной поверхности $\theta = \theta_1 = x + \frac{\psi}{k} = x - \frac{q'}{k}$, а поэтому получим из (4.5), полагая $\zeta = \xi$:

$$x = \frac{q}{k} + \frac{T}{\pi} \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \frac{q'}{\pi^2 k} J_1(\xi) + \frac{q''}{\pi^2 k} J_2(\xi). \tag{4.16}$$

Здесь

$$J_1(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{u_1\, dt}{t - \xi}, \quad J_2(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{v_1\, d\tau}{\tau - \xi},$$

где u_1 и v_1 имеют значения (4.7).

Чтобы вычислить интеграл

$$J_1(\xi) = 2 \int_{-1}^{1} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - t}}\, dt,$$

сделаем замену переменных согласно равенствам (4.7) и (4.13)

$$t = \alpha - (\alpha - 1) \operatorname{cth}^2 \frac{u_1}{2}, \quad \xi = \alpha - (\alpha - 1) \operatorname{th}^2 \frac{u}{2}$$

и положим затем

$$e^{-u_1} = \tau.$$

Получим:

$$J_1(\xi) = -e^{-u} (e^u + 1)^2 \int_0^{e^{-c}} \frac{(1 + \tau) \ln \tau\, d\tau}{(1 - \tau)(\tau + e^u)(\tau + e^{-u})}.$$

Разложение множителя при $\ln \tau$ на простейшие дроби дает:

$$J_1(\xi) = -2 \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln \tau}{1 - \tau}\, d\tau - \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln \tau\, d\tau}{e^u + \tau} - \int_0^{e^{-c}} \frac{\ln \tau\, d\tau}{e^{-u} + \tau}.$$

Во втором интеграле сделаем подстановку

$$\tau = e^u t,$$

в третьем положим:

$$\tau = e^{-u} t.$$

Получим:

$$J_1(\xi) = -2\int_0^{e^{-c}} \frac{\ln\tau}{1-\tau}\,d\tau - \int_0^{e^{-c-u}} \frac{\ln t}{1+t}\,dt - \int_0^{e^{-c+u}} \frac{\ln t}{1+t}\,dt - u\ln\frac{1+e^{-c-u}}{1+e^{-c+u}}.$$

Теперь проинтегрируем по частям все три интеграла правой части последнего равенства. При этом выделится слагаемое

$$2c\ln(1-e^{-c}) + (c+u)\ln(1+e^{-c-u}) + (c+u)\ln(1+e^{-c+u}).$$

Поэтому $J_1(\xi)$ примет вид

$$J_1(\xi) = 2\int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt - \int_0^{e^{-c-u}} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt - \int_0^{e^{-c+u}} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt + c\ln\frac{(1+e^{-c-u})(1+e^{-c+u})}{(1-e^{-c})^2}.$$

Перейдем к вычислению интеграла

$$J_2(\xi) = 2\int_{-1}^{1} \operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-t}{\alpha+1}}\,\frac{dt}{\xi-t}.$$

Подстановки (4.7), (4.13) с учетом соотношений

$$\xi = \alpha - (\alpha+1)\operatorname{th}^2\frac{v}{2}, \quad \tau = \alpha - (\alpha+1)\operatorname{th}^2\frac{v_1}{2},$$

а затем подстановки

$$e^{-v_1} = t_1 = e^{v}t, \quad e^{-v_1} = t_1 = e^{-v}t$$

приводят этот интеграл к выражению

$$J_2(\xi) = 2\int_0^{e^{-c}} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt - \int_0^{e^{-c-v}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt - \int_0^{e^{-c+v}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt - c\ln\frac{(1-e^{-c-v})(1-e^{-c+v})}{(1+e^{-c})^2}. \quad (4.17)$$

Из соотношения

$$\operatorname{cth}\frac{v}{2} = \operatorname{cth}\frac{c}{2}\operatorname{cth}\frac{u}{2}$$

можно получить равенство

$$\frac{(1+e^{-c+u})(1+e^{-c-u})}{(1-e^{-c})^2} = \operatorname{cth}^2\frac{c}{2}\,\frac{\operatorname{ch}^2\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{v}{2}}.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$\frac{J_1(\xi)}{\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-t}}}{\xi-t}\,dt=\frac{2}{\pi^2}\,c\ln\left(\operatorname{cth}\frac{c}{2}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}\right)+$$

$$+f_5(e^{-c})+\frac{1}{2}f_4(e^{-c-u})+\frac{1}{2}f_4(e^{-c+u}), \qquad (4.18)$$

$$\frac{J_2(\xi)}{\pi^2}=\frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\alpha-t}{\alpha+1}}}{\xi-t}\,dt=\frac{2}{\pi^2}\,c\ln\frac{\operatorname{cth}\frac{c}{2}\operatorname{ch}\frac{u}{2}}{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}+$$

$$+f_4(e^{-c})+\frac{1}{2}f_5(e^{-c-v})+\frac{1}{2}f_5(e^{-c+v}). \qquad (4.19)$$

где

$$f_4(t)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^t\frac{\ln(1+t)}{t}\,dt,\quad f_5(t)=-\frac{2}{\pi^2}\int_0^t\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt. \qquad (4.20)$$

Преобразуем еще $\ln\frac{\xi-1}{\xi+1}$ с помощью формул

$$\xi-1=(\alpha-1)\left(1-\operatorname{th}^2\frac{u}{2}\right),\quad \xi+1=(\alpha+1)\left(1-\operatorname{th}^2\frac{v}{2}\right).$$

Найдем:

$$\ln\frac{\xi-1}{\xi+1}=2\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}.$$

Теперь можно привести выражение (4.16) к окончательному виду

$$x=\frac{2}{\pi}\left(T+\frac{qc}{\pi k}\right)\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}+\frac{q'}{k}\left\{f_4(e^{-c})-\frac{1}{2}f_4(e^{-c+u})-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}f_4(e^{-c-u})\right\}+\frac{q''}{k}\left\{f_5(e^{-c})-\frac{1}{2}f_5(e^{-c+v})-\frac{1}{2}f_5(e^{-c-v})\right\}. \qquad (4.21)$$

Присоединим сюда выражение для y:

$$y=-\frac{q'}{\pi k}u-\frac{q''}{\pi k}v. \qquad (4.22)$$

Мы получили систему уравнений для определения координат точек свободной поверхности x и y в функции от двух параметров, связанных соотношением (4.14).

Для функций $f_4(t)$ и $f_5(t)$ С. Н. Нумеровым составлена таблица. С помощью этих функций выражение (4.11) для расхода напишется так:

$$q = \frac{\frac{2kT}{\pi} \ln \operatorname{cth} \frac{c}{2}}{1 - \frac{2}{\pi^2} c \ln \operatorname{cth} \frac{c}{2} - f_4(e^{-c}) - f_5(e^{-c})}.$$

Уравнение правой ветви кривой депрессии получается из уравнения левой ветви заменой x на $-x$, q' на q'' и q'' на q'.

Для больших значений $\frac{x}{T}\left(\frac{|x|}{T} > 3\right)$ параметр u принимает большое значение, а v близко к нулю.

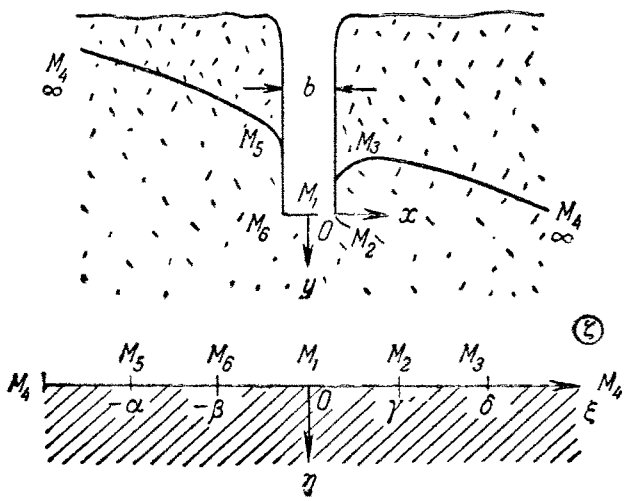
С. Н. Нумеров дает для этого случая приближенное уравнение свободной поверхности.

Если известны расходы q' и q'', то по специальной таблице [9] определяется c, после чего можно построить ветви депрессионной кривой.

Если известна точка правой и точка левой ветви, то, подставив их координаты в соответствующие уравнения, подбором определяем q' и q''.

Отдельно С. Н. Нумеров рассматривает случай одностороннего притока к дрене, когда $q'' = 0$, и к системе двух симметричных дрен.

§ 5. Приток к прямоугольной траншее с уклоном депрессионной кривой в слое бесконечной глубины. Приведем решение С. Н. Нумерова [11] задачи, схема которой дана на фиг. 183. Дренажная канава прямоугольного сечения не содержит воды и, следовательно, вдоль ее контура давление считается постоянным. Здесь удобно применить функцию Жуковского, которую можно выбрать так, чтобы ее мнимая часть равнялась нулю вдоль всего контура области движения. В таком случае можно считать, что полуплоскость вспомогательного переменного ζ совпадает с областью функции Жуковского, и принять в качестве последней переменную ζ:



Фиг. 183.

$$\zeta = \xi + i\eta = z - i\omega, \tag{5.1}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \xi = x + \psi, \quad \eta = y - \varphi, \\ u - iv = k\frac{d\omega}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Здесь ω, φ, ψ суть приведенные функции, т. е. отнесенные к коэффициенту фильтрации, равному единице.

В средней точке дна траншеи M_1 (0, 0) примем $\psi = 0$, приведенный расход через линию $M_5M_6M_1$ обозначим буквой q', через $M_1M_2M_3$ — буквой q''. Полный приведенный расход дрены пусть будет q:

$$q = q' + q''. \tag{5.3}$$

Так как дрена питается потоком, идущим из бесконечности, то в выражении комплексного потенциала как функции ζ можно выделить логарифмический член, полагая

$$\omega = -\frac{q}{\pi}\ln\zeta + iq'' + W. \tag{5.4}$$

Функция W будет аналитической в верхней полуплоскости и непрерывной вплоть до ее границ за исключением точек $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$. Чтобы определить ее значения на границах, где $\zeta = \xi$, напишем ее в виде

$$\left.\begin{aligned} W = U + iV = -iq'' + \frac{q}{\pi}\ln\zeta + \omega, \\ U = \frac{q}{\pi}\ln|\zeta| + \varphi, \quad V = -q'' + \frac{q}{\pi}\arg\zeta + \psi, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

причем $\arg\zeta = 0$ для $\zeta = \xi > 0$ и $\arg\zeta = \pi$ для $\zeta = \xi < 0$.

Вдоль отрезка M_4M_5, где $\psi = -q'$, имеем $V = 0$. Вдоль M_5M_6, где $x = -\frac{b}{2}$, $\psi = \xi - x$, получаем $V = \xi + q' + \frac{b}{2}$. Продолжая дальше, найдем такие условия на границах:

$$\left.\begin{aligned} V(\xi) &= 0, && -\infty < \xi < -\alpha, \quad \delta < \xi < \infty, \\ V(\xi) &= \alpha + \xi, && -\alpha \leqslant \xi \leqslant -\beta, \\ V(\xi) &= \xi - \delta, && \gamma \leqslant \xi \leqslant \delta, \\ U(\xi) &= \frac{q}{\pi}\ln|\xi|, && -\beta \leqslant \xi \leqslant \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Из условий $V = 0$ при $\zeta = -\alpha$ и $\zeta = \delta$ находим:

$$\alpha = q' + \frac{b}{2}, \quad \delta = q'' + \frac{b}{2}. \tag{5.7}$$

Функция

$$W : \sqrt{(\gamma - \zeta)(-\beta - \zeta)}$$

удовлетворяет условиям применимости формулы (1.7). Поэтому мы можем написать:

$$\frac{W}{\sqrt{(\gamma-\zeta)(-\beta-\zeta)}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{-\beta} \frac{(\alpha+t)\,dt}{(t-\zeta)\sqrt{(\gamma-t)(-\beta-t)}} + \frac{q}{\pi^2}\int_{-\beta}^{\gamma} \frac{\ln|t|\,dt}{(t-\zeta)\sqrt{(\gamma-t)(\beta+t)}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\gamma}^{\delta} \frac{(\delta-t)\,dt}{(t-\zeta)\sqrt{(t-\gamma)(\beta+t)}} + C, \qquad (5.8)$$

где C — предел действительной части этой функции на бесконечности.

Произведя вычисления и подставив результат в формулу (5.4), получим для ω следующее выражение:

$$\omega = -iq' + C\sqrt{(-\beta-\zeta)(\gamma-\zeta)} + \frac{2}{\pi}(\alpha-\zeta)\operatorname{arth}\frac{A}{f} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}(\delta-\zeta)\operatorname{arth}(Bf) - \frac{2}{\pi}q\operatorname{arth} f, \qquad (5.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &f = \sqrt{\frac{-\beta-\zeta}{\gamma-\zeta}}, \quad A = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}, \quad B = \sqrt{\frac{\delta-\gamma}{\delta+\beta}}, \\ &C = -J + \frac{2}{\pi}\operatorname{arth} A - \frac{2}{\pi}\operatorname{arth} B, \quad \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

В правильности формулы (5.9) можно убедиться непосредственной проверкой. Постоянная J, как показано ниже, представляет уклон депрессионной кривой на бесконечности.

В уравнение (5.9) входит шесть постоянных: J, q, α, β, γ, δ. Величины q', q'' выражаются через α и δ. Имеем четыре условия, позволяющих определить четыре из указанных постоянных:

1) получаемое из (5.7) равенство

$$\alpha + \delta = b + q; \qquad (5.11)$$

2) в точках M_6, M_2, где скорость равна бесконечности, соотношение $\frac{d\zeta}{d\omega} = \frac{dz}{d\omega} - i$ дает $\frac{d\omega}{d\zeta} = i$, т. е.

$$\omega'(-\beta) = i, \quad \omega'(\gamma) = i; \qquad (5.12)$$

3) при $\zeta = 0$ примем:

$$\omega(0) = 0. \qquad (5.13)$$

Из (5.12) найдем:

$$\left.\begin{aligned} &C = -J + \frac{2}{\pi}\operatorname{arth} A - \frac{2}{\pi}\operatorname{arth} B = 0, \\ &q = \sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+\gamma)} + \sqrt{(\delta-\gamma)(\delta+\beta)}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Тогда из (5.11) и (5.14) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha-\beta&=\frac{b}{4}e^{-\frac{\pi}{2}J}\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi J}{2}\left(e^{\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}-1\right)^2,\\
\alpha+\gamma&=\frac{b}{4}e^{-\frac{\pi J}{2}}\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi J}{2}\left(e^{\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}+1\right)^2,\\
\delta-\gamma&=\frac{b}{4}e^{\frac{\pi J}{2}}\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi J}{2}\left(e^{-\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}-1\right)^2,\\
\delta+\beta&=\frac{b}{4}e^{\frac{\pi J}{2}}\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi J}{2}\left(e^{-\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}+1\right)^2.
\end{aligned}\right\}\tag{5.15}$$

Отсюда найдем следующие выражения для A и B:

$$\left.\begin{aligned}
A&=\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}=\left(e^{\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}-1\right):\left(e^{\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}+1\right),\\
B&=\sqrt{\frac{\delta-\gamma}{\delta+\beta}}=\left(e^{-\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}-1\right):\left(e^{-\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}+1\right).
\end{aligned}\right\}\tag{5.16}$$

Уравнения депрессионной кривой. На левой ветви имеем:

$$\varphi=y,\quad \psi=-q',\quad -\alpha-\xi=-\frac{b}{2}-x.$$

Из уравнения (5.9), учитывая, что $C=0$, получим:

$$y=\frac{2}{\pi}\left(\frac{b}{2}+x\right)\operatorname{arth}\frac{A}{f}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{b}{2}+q-x\right)\operatorname{arth}(Bf)-\frac{2}{\pi}q\operatorname{arth}f,\tag{5.17}$$

где

$$f^2=\frac{b\left(e^{\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}-1\right)^2-4e^{\frac{\pi J}{2}}\left(\frac{b}{2}+x\right)\operatorname{ch}\frac{\pi J}{2}}{b\left(e^{\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1+\frac{2q}{b}}+1\right)^2-4e^{\frac{\pi J}{2}}\left(\frac{b}{2}+x\right)\operatorname{ch}\frac{\pi J}{2}},\tag{5.18}$$

причем $-\infty<x\leqslant-\frac{b}{2}$.

Положив $x=-\frac{b}{2}$, найдем высоту высачивания грунтовых вод на левый откос траншеи:

$$\frac{h'}{q}=\frac{J}{2}+\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{b}{2q}\right)\ln\left(1+\frac{2q}{b}\right)+\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{b}{q}\right)\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi J}{2}}{1+\frac{q}{b}}.\tag{5.19}$$

Для достаточно удаленных точек свободной поверхности, а именно для $-x\gg q$, выделяя члены с $\ln(-x)$ и разлагая оставшиеся выра-

жения по степеням $\frac{1}{x}$, найдем асимптотическое выражение с точностью до величины $O\left(\frac{q}{x}\right)$:

$$\frac{y}{q} \sim \frac{Jx}{q} - \frac{1}{\pi} \ln\left(-\frac{x}{q}\right) + D, \tag{5.20}$$

где

$$D = -\frac{1}{\pi}\left[1 + \ln\left(1 + e^{\pi J}\right) + \ln\frac{2q}{b} - \left(1 + \frac{b}{2q}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{2q}\right)\right].$$

Из (5.20) следует, что J равно уклону депрессионной кривой на бесконечности.

Для правой ветви получаются такие уравнения кривой депрессии:

$$y = \frac{2}{\pi}\left(\frac{b}{2} + q + x\right)\operatorname{arth}(Af) - \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{b}{2}\right)\operatorname{arth}\frac{B}{f} - \frac{2q}{\pi}\operatorname{arth} f, \tag{5.21}$$

где

$$f^2 = \frac{b\left(e^{-\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1 + \frac{2q}{b}} - 1\right)^2 + 4e^{-\frac{\pi J}{2}}\operatorname{ch}\frac{\pi J}{2}\left(x - \frac{b}{2}\right)}{b\left(e^{-\frac{\pi J}{2}}\sqrt{1 + \frac{2q}{b}} + 1\right)^2 + 4e^{-\frac{\pi J}{2}}\operatorname{ch}\frac{\pi J}{2}\left(x - \frac{b}{2}\right)}.$$

Полагая $x = \frac{b}{2}$, найдем высоту высачивания на правый откос

$$\frac{h''}{q} = -\frac{1}{2}J + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{b}{2q}\right)\ln\left(1 + \frac{b}{2q}\right) + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{b}{q}\right)\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi J}{2}}{1 + \frac{q}{b}}. \tag{5.22}$$

Сравнивая (5.19) и (5.22), найдем разность высот высачивания

$$h' - h'' = Jq = J\frac{Q}{k},$$

где Q — полный расход единицы длины дрены.

При $x \gg q$ имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y}{q} \sim J\frac{x}{q} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{x}{q} + D + J. \tag{5.23}$$

Координаты максимума правой ветви депрессионной кривой найдутся из условия $\frac{dy}{dx} = 0$. В силу (5.21) получаем:

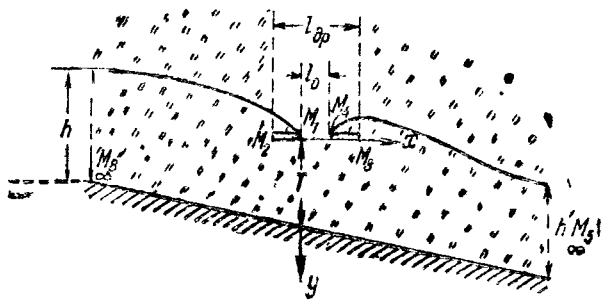
$$\frac{x_{\max}}{q} = \frac{1}{e^{\pi J} - 1}, \quad \frac{y_{\max}}{q} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{b}{q} + 1\right)\operatorname{arth}\sqrt{AB} - \frac{2}{\pi}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{B}{A}}. \tag{5.24}$$

При малом J отсюда получаем приближенные равенства

$$\frac{x_{\max}}{q} \approx \frac{1}{\pi J}, \quad \frac{y_{\max}}{q} \approx \frac{1}{\pi}\ln\frac{\pi Jb}{4q} + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{b}{2q}\right)\ln\left(1 + \frac{2q}{b}\right). \tag{5.25}$$

При решении практических задач должны быть заданы уклон естественной свободной поверхности грунтовых вод и координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ кривой депрессии, достаточно далекой от канавы. Подставляя координаты этой точки в уравнение той или иной ветви, (5.20) или (5.23), найдем q, после чего можно будет найти остальные характеристики потока. Частный случай задачи, $b=0$, рассмотрен Н. Н. Веригиным [14]. Если, кроме того, $J=0$, то получаем задачу, приведенную В. В. Ведерниковым (см. литературу к главе IV [4]). У нас она рассмотрена в главе V, § 7.

§ 6. О фильтрации при наличии дрены или канала в случае наклонного водоупора. Схема рассматриваемого движения дана на фиг. 184. Дрена имеет вид горизонтальной щели. Граница водоупора составляет угол $\alpha\pi$ с горизонтальной прямой [10].



Фиг. 184.

В этом разделе мы будем обозначать через $\omega=\varphi+i\psi$ приведенный комплексный потенциал, равный обычному, деленному на коэффициент фильтрации, так что комплексная скорость фильтрации выражается так.

$$w=u-iv=k\frac{d\omega}{dz}. \tag{6.1}$$

Обозначим через Q и Q' расходы соответственно на бесконечности слева и на бесконечности справа, через q и q' — приведенные расходы:

$$Q=kq, \quad Q'=kq'. \tag{6.2}$$

Будем различать три случая:

1) Всесторонний приток воды к дрене, когда расход q больше расхода q'. В этом случае правая ветвь депрессионной кривой имеет максимум.

2) Расход из дрены в грунт, т. е. фильтрация из канала. При этом левая часть кривой депрессии имеет минимум.

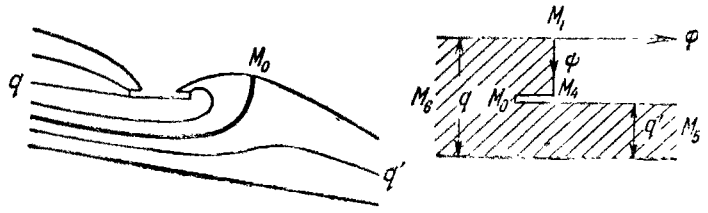
3) В верховой части дрены имеет место приток грунтовых вод, в низовой — просачивание из дрены в грунт.

Все три случая изображены на фиг. 185—187 вместе с соответствующими областями плоскости $\omega=\varphi+i\psi$.

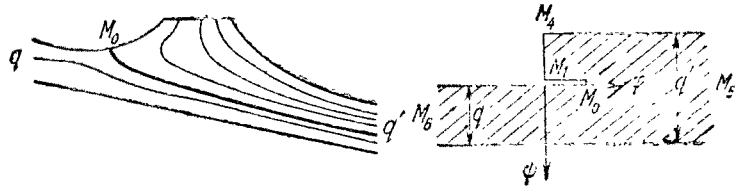
Построение решения. Конформное отображение этих областей на полуплоскость ζ (фиг. 188) дает:

$$\omega=iq-\frac{2}{\pi}q\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta\zeta}}+\frac{2}{\pi}q'\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-\zeta)}} \tag{6.3}$$

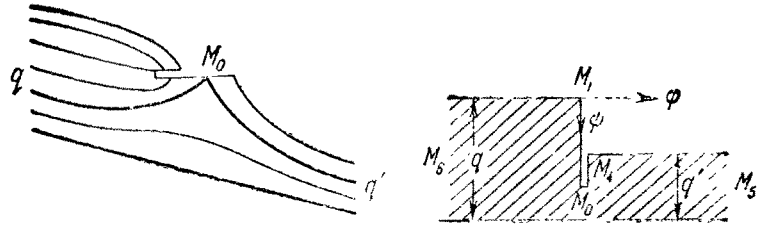
$$\left(\operatorname{arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad \operatorname{arch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right).$$



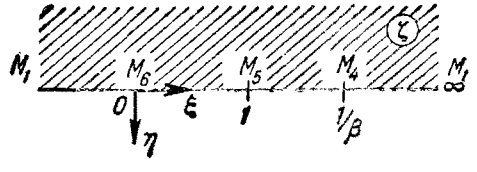
Фиг. 185.



Фиг. 186.



Фиг. 187.



Фиг. 188.

В самом деле, пусть конец разреза на плоскости ω, т. е. точка M_0, переходит в точку a плоскости ζ. Тогда формула Кристоффеля, примененная к любой из трех фигур плоскости ω, даст:

$$\omega = M\int \frac{(\zeta - a)\,d\zeta}{\zeta(\zeta-1)\sqrt{\beta-\zeta}} =$$

$$= Ma\int \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{\beta-\zeta}} + M(1-a)\int \frac{d\zeta}{(\zeta-1)\sqrt{\beta-\zeta}}.$$

Учитывая, что полувычет первого интеграла правой части около точки $\zeta = 0$ равен $-iq$, а полувычет второго около $\zeta = 1$ есть iq', и вычислив указанные интегралы, придем к формуле (6.3).

Теперь введем в рассмотрение функцию Жуковского (см. § 5)

$$W = U + iV = z - i\omega. \tag{6.4}$$

Для промежутков $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$, т. е. вдоль депрессионной кривой и вдоль контура дрены, давление равно атмосферному, а потому

$$V(\xi) = y - \varphi = 0. \tag{6.5}$$

На промежутке $0 < \xi < 1$ имеем условия

$$x\sin\alpha\pi - y\cos\alpha\pi = -T\cos\alpha\pi, \quad \psi = q. \tag{6.6}$$

В силу (6.4) $U = x + \psi$, $V = y - \varphi$, а потому (6.6) перепишется так:

$$U\sin\alpha\pi - V\cos\alpha\pi = -T\cos\alpha\pi + q\sin\alpha\pi + \varphi(\xi)\cos\alpha\pi.$$

Учитывая, что по (6.3)

$$\varphi(\xi) = -\frac{2q}{\pi}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta\xi}} + \frac{2q'}{\pi}\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-\xi)}}, \tag{6.7}$$

находим, что $V = \operatorname{Im} W = 0$ вне отрезка $(0, 1)$ действительной оси, на отрезке же $(0, 1)$ имеем:

$$-\operatorname{Im}\left[e^{-\alpha\pi i}W\right] = -T\cos\alpha\pi + q\sin\alpha\pi + \varphi(\xi)\cos\alpha\pi = f(\xi).$$

Бесконечно удаленная точка плоскости ζ для W является нулем. Применяя формулу (1.7) к функции

$$(W + T\operatorname{ctg}\alpha\pi - q)\zeta^{-\alpha}(1-\zeta)^{\alpha-1},$$

получим:

$$z(\zeta) = -T\operatorname{ctg}\alpha\pi + q + i\omega - \frac{\cos\alpha\pi}{\pi}\zeta^{\alpha}(\zeta-1)^{1-\alpha}\int_0^1 \frac{t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt}{t-\zeta} \tag{6.8}$$

Определение постоянных. Уравнения (6.3) и (6.8) содержат две неизвестные постоянные: q' и β. Величина q является заданной, она выражается через глубину h потока на бесконечности слева:

$$q = h\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi. \tag{6.9}$$

Точно так же имеем, обозначая через h' глубину потока справа на бесконечности:

$$q' = h' \sin \alpha\pi \cos \alpha\pi. \tag{6.9'}$$

Условия $z(\infty) = 0$, $\varphi = \psi = 0$ и $z\left(\frac{1}{\beta}\right) = l_0$, $\varphi = 0$, $\psi = q - q'$ дают:

$$0 = -T \operatorname{ctg} \alpha\pi + q + \frac{\cos \alpha\pi}{\pi} \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt,$$

$$l_0 = -T \operatorname{ctg} \alpha\pi + q' + \frac{\cos \alpha\pi}{\pi} (1-\beta)^{1-\alpha} \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \frac{\varphi(t)\, dt}{1-\beta t}.$$

Можно считать заданным β, а искомыми q и q' и написать последние равенства в виде системы уравнений

$$a_{11} q + a_{12} q' = T, \quad a_{21} q + a_{22} q' = J l_0 \qquad (J = \operatorname{tg} \alpha\pi), \tag{6.10}$$

где

$$a_{11}(\beta, \alpha) = \operatorname{tg} \alpha\pi - \frac{2}{\pi^2} \sin \alpha\pi \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{\beta t}}\, dt, \tag{6.11}$$

$$a_{12}(\beta, \alpha) = \frac{2}{\pi^2} \sin \alpha\pi \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}}\, dt, \tag{6.12}$$

$$a_{21}(\beta, \alpha) = -a_{11}(\beta, \alpha) - a_{12}(\beta, 1-\alpha), \tag{6.13}$$

$$a_{22}(\beta, \alpha) = -a_{11}(\beta, 1-\alpha) - a_{12}(\beta, \alpha) = a_{21}(\beta, 1-\alpha). \tag{6.14}$$

Последние равенства можно получить, если под знаком интеграла для l_0 сделать замену переменной $\tau = \frac{1-t}{1-\beta t}$, что даст:

$$(1-\beta)^{1-\alpha} \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \left(q \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{\beta t}} - q' \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}} \right) \frac{dt}{1-\beta t} =$$

$$= \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{-\alpha} \left(q \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-\tau)}} - q' \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{\beta\tau}} \right) d\tau.$$

Чтобы упростить выражения для величин $a_{11}, a_{12}, \ldots$, С. Н. Нумеров применяет различные приемы для двух промежутков, в которых может заключаться число β.

1) Промежуток $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$. Дифференцируя a_{11} по β, найдем:

$$\beta \frac{\partial a_{11}}{\partial \beta} = \frac{1}{\pi^2} \sin \alpha\pi \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} (1-\beta t)^{-1/2}\, dt = \frac{1}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right),$$

где $F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right)$ — гипергеометрическая функция (см. главу VII, § 5). Интегрируя полученное уравнение, будем иметь:

$$a_{11} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\beta} \frac{1}{\beta}\left[F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right) - 1\right] d\beta + \frac{1}{\pi}\ln\beta + c,$$

где постоянная c не зависит от β. Она находится путем перехода к пределу в (6.11) при $\beta \to 0$ с учетом, что $\lim\left(2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta t}} + \ln\beta\right) = \ln\frac{2}{\sqrt{t}}$:

$$c = \lim_{\beta\to 0}\left(a_{11} - \frac{1}{\pi}\ln\beta\right) = \operatorname{tg}\alpha\pi + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi^2}\int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\ln\frac{t}{4}\,dt =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\pi + \frac{1}{\pi}[-\ln 4 - \psi(1) + \psi(1-\alpha)].$$

Здесь $\psi(a)$ — логарифмическая производная функции гамма. Для получения последней формулы можно продифференцировать функцию бета по одному из ее параметров. Найдем:

$$a_{11} = \operatorname{tg}\alpha\pi + \frac{1}{\pi}\left\{\psi(1-\alpha) - \psi(1) - \ln\frac{4}{\beta} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\beta}\frac{1}{\beta}\left[F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right) - 1\right] d\beta\right\}$$

и аналогично

$$a_{12} = \operatorname{ctg}\alpha\pi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\psi(1) - \psi(1-\alpha) + 2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \int_0^{\beta}\frac{F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right) - 1}{\beta\sqrt{1-\beta}}\,d\beta\right\}$$

или, разлагая гипергеометрическую функцию в ряд по степеням β:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(\beta, \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha\pi + \frac{1}{\pi}\left[\psi(1-\alpha) - \psi(1) - \ln\frac{4}{\beta} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{1\cdot(1!)^2}\beta + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\cdot(2!)^2}\beta^2 + \dots\right], \right. \\ a_{12}(\beta, \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha\pi + \frac{1}{\pi}\left[\psi(1) - \psi(1-\alpha) + 2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{(1!)^2}\int_0^{\beta}\frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)}{(2!)^2}\int_0^{\beta}\frac{\beta\,d\beta}{\sqrt{1-\beta}} + \dots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (6.15)$$

Перейдем к рассмотрению второго промежутка значений β.

2) Промежуток $\frac{1}{2} \leqslant \beta < 1$. Воспользуемся вспомогательной подстановкой для гипергеометрической функции (см. главу VII, § 5):

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, a+b+1-c, 1-x) + \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} \times \\ \times F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-x).$$

В применении к функции $F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right)$ она дает равенство

$$\beta \frac{\partial a_{11}}{\partial \beta} = \frac{1}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, 1; \beta\right) = \\ = -\frac{\operatorname{tg} \alpha\pi \Gamma(1-\alpha)}{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)} F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; 1-\beta\right) + \\ + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\pi^{3/2}\Gamma(1-\alpha)} (1-\beta)^{-1/2+\alpha} F\left(\frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}+\alpha; 1-\beta\right).$$

Интегрируя его по β и определяя значение постоянной интегрирования, найдем:

$$a_{11}(\beta, \alpha) = \operatorname{tg} \alpha\pi - \frac{2}{\pi^2} \sin \alpha\pi \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{\beta t}}\, dt + \\ + \frac{\operatorname{tg} \alpha\pi \Gamma(1-\alpha)}{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)} \int_\beta^1 \frac{1}{\beta} F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; 1-\beta\right) d\beta - \\ - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\pi^{3/2}\Gamma(1-\alpha)} \int_\beta^1 \frac{F\left(\frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}+\alpha; 1-\beta\right)}{\beta(1-\beta)^{1/2-\alpha}}\, d\beta$$

и аналогично

$$a_{12}(\beta, \alpha) = -\frac{\operatorname{tg} \alpha\pi \Gamma(1-\alpha)}{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)} \int_\beta^1 \frac{F\left(\frac{1}{2}, 1-\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; 1-\beta\right)}{\beta\sqrt{1-\beta}}\, d\beta + \\ + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\pi^{3/2}\Gamma(1-\alpha)} \int_\beta^1 \frac{F\left(\frac{1}{2}, \alpha, \frac{1}{2}+\alpha; 1-\beta\right)}{\beta(1-\beta)^{1-\alpha}}\, d\beta.$$

Эти равенства можно переписать в виде таких рядов:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11} = {} & \operatorname{tg}\alpha\pi - \frac{4}{\pi^2}\sin\alpha\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{1-2\alpha} t \ln \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt + \\
& + \frac{\operatorname{tg}\alpha\pi\,\Gamma(1-\alpha)}{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}\left[\ln\frac{1}{\beta} + \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{1!\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t\,dt}{1-t} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)}{2!\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t^2\,dt}{1-t} + \cdots\right] - \\
& - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\pi^{3/2}\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_0^{1-\beta}\frac{t^{\alpha-1/2}}{1-t}\,dt + \frac{\frac{1}{2}\alpha}{1!\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t^{\alpha+1/2}}{1-t}\,dt + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\alpha(1+\alpha)}{2!\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t^{\alpha+3/2}}{1-t}\,dt + \cdots\right], \\
a_{12} = {} & -\frac{\operatorname{tg}\alpha\pi\,\Gamma(1-\alpha)}{\pi^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}\left[\int_0^{1-\beta}\frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} + \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha)}{1!\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{\sqrt{t}}{1-t}\,dt + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)}{2!\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t^{3/2}\,dt}{1-t} + \cdots\right] + \\
& + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\pi^{3/2}\Gamma(1-\alpha)}\left[\int_0^{1-\beta}\frac{dt}{t^{1-\alpha}(1-t)} + \frac{\frac{1}{2}\alpha}{1!\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t^{\alpha}\,dt}{1-t} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\alpha(1+\alpha)}{2!\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)}\int_0^{1-\beta}\frac{t^{\alpha+1}}{1-t}\,dt + \cdots\right].
\end{aligned}
\right\} \quad (6.16)
$$

Экстремумы депрессионной кривой. При всестороннем притоке к дрене, как мы говорили, правая ветвь депрессионной кривой имеет максимум. Чтобы его найти, напишем с помощью уравнения (6.3) для правой ветви:

$$y = \varphi = -\frac{2q}{\pi}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta\xi}} + \frac{2q'}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(\xi-1)}}\quad\left(1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{\beta}\right).$$

Приравнивая нулю производную по ξ

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{1}{2\pi}(1-\beta\xi)^{-1/2}\left(\frac{q}{\xi} - \frac{q'\sqrt{1-\beta}}{\xi-1}\right)$$

и имея в виду, что $q' : q = h' : h$, найдем:

$$\xi_{\max} = \frac{1}{1-\frac{h'}{h}\sqrt{1-\beta}}.$$

Превышение отметки максимума над горизонтом воды в дрене будет:

$$-y_{\max} = \frac{2q}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{h-h'\sqrt{1-\beta}}{h\beta}} - \frac{2q'}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\beta}\,(h-h'\sqrt{1-\beta})}{h'\beta}}. \qquad (6.17)$$

В силу условия для $\xi_{\max}$ заключаться в промежутке $(1, 1/\beta)$ имеем:

$$\beta < 1-\frac{h'}{h}\sqrt{1-\beta} < 1,$$

откуда получаем неравенство

$$\frac{h}{h'} > \frac{1}{\sqrt{1-\beta}}.$$

Точно так же для левой ветви депрессионной кривой в случае фильтрации из канала получаем значение минимальной ординаты

$$y_{\min} = -\frac{2q}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{h'\sqrt{1-\beta}-h}{h\beta}} + \frac{2q'}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{\sqrt{1-\beta}\,(h'\sqrt{1-\beta}-h)}{h'\beta}} \qquad (6.18)$$

при условии

$$\frac{h}{h'} < \sqrt{1-\beta}.$$

Случай малого уклона. Если угол $\alpha\pi$ мал, то выражения для a_{ik} можно упростить. А именно, обозначая

$$\operatorname{tg}\alpha\pi = J,$$

рассмотрим опять два случая.

1) $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$. Из уравнений (6.15) найдем:

$$a_{11} \approx -\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{4}{\beta} - \frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1!}\beta - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot 2!}\beta^2 - \ldots\right) \approx -\frac{2}{\pi}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

$$a_{12} \approx \frac{1}{J} + \frac{1}{\pi}\left(2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\frac{1}{2}}{1!}\int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\int_0^\beta \frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{1-\beta}} - \ldots\right) \approx \frac{1}{J} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{4(1-\beta)}{\beta},$$

$$a_{21} \approx -J + \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{4}{\beta} - 2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1!}\beta - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot 2!}\beta^2 - \ldots\right) \approx -J,$$

$$a_{22} \approx J + \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{4}{\beta} - 2\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\int_0^\beta \frac{dt}{\sqrt{1-t}} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\int_0^\beta \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t}} + \ldots\right) \approx J - \frac{1}{\pi}\ln(1-\beta).$$

Поэтому вместо (6.10) можно написать:

$$-\frac{2}{\pi}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\cdot q + \left(\frac{1}{J} + \frac{1}{\pi}\ln\frac{4(1-\beta)}{\beta}\right)q' \approx T,$$

$$-Jq + \left[J - \frac{\ln(1-\beta)}{\pi}\right]q' \approx Jl_0. \qquad (6.19)$$

Обозначим через $q_{\text{др}}$ приведенный фильтрационный расход единицы погонной длины дрены

$$q_{\text{др}} = q - q'$$

и положим:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}\frac{l_0 + q_{\text{др}}}{T}. \qquad (6.20)$$

Тогда уравнения (6.19) можно будет переписать следующим образом:

$$\frac{1}{J}q' \approx T, \quad -\frac{\ln(1-\beta)}{\pi}q' \approx J(l_0 + q_{\text{др}}).$$

Отсюда найдем приближенные равенства

$$q' \approx JT, \quad \beta \approx 1 - e^{-2\gamma}, \tag{6.21}$$

а также

$$h' = \frac{q'}{\sin \alpha\pi \cos \alpha\pi} \approx T, \quad q_{\text{др}} \approx J(h - l). \tag{6.22}$$

2) $\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 1$. Из уравнений (6.16) получаем приближенные равенства

$$a_{11} \approx -\frac{1}{\pi}\int_0^{1-\beta} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \approx -\frac{2}{\pi}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

$$a_{12} \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{1-\beta} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \approx \frac{1}{J}(1-\beta)^{\alpha}, \quad a_{21} \approx 1,$$

$$a_{22} \approx \frac{4}{\pi}\sin\alpha\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2\alpha-1} t \ln \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{1-\beta} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \approx \frac{1}{J}[1-(1-\beta)^{\alpha}].$$

Вместо (6.10) будем иметь:

$$-\frac{2}{\pi}q\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{J}(1-\beta)^{\alpha}q' \approx T, \quad q + \frac{1}{J}[1-(1-\beta)^{\alpha}]q' \approx Jl_0.$$

Отсюда находим для q' и β приближенные равенства (6.21). Следовательно, приближенные равенства (6.21) и (6.22) имеют место для всех значений $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Далее, можно найти приближенные значения экстремальных ординат депрессионной кривой при малых $\alpha\pi$:

$$-y_{\max} \approx \frac{2q}{\pi}\left\{\operatorname{arch}\sqrt{\frac{\bar{h}-e^{-\gamma}}{\bar{h}(1-e^{-2\gamma})}} - \frac{1}{\bar{h}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{e^{-\gamma}(\bar{h}-e^{-\gamma})}{1-e^{-2\gamma}}}\right\},$$

причем

$$\bar{h} = \frac{h}{T} > e^{\gamma},$$

$$y_{\min} \approx \frac{2q}{\pi}\left\{\frac{1}{\bar{h}}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{e^{-\gamma}(e^{-\gamma}-\bar{h})}{1-e^{-2\gamma}}} - \operatorname{arch}\sqrt{\frac{e^{-\gamma}-\bar{h}}{\bar{h}(1-e^{-2\gamma})}}\right\},$$

причем

$$\bar{h} = \frac{h}{T} < e^{-\gamma}.$$

Отсюда следует, что при $\bar{h} > e^{\gamma}$ имеем случай всестороннего притока грунтовых вод к дрене, при $\bar{h} < e^{-\gamma}$ — случай фильтрации из канала в грунт. Для $e^{-\gamma} \leqslant \bar{h} \leqslant e^{\gamma}$ имеет место случай фиг. 187.

О величине дренажной щели. В силу уравнений (6.3) и (6.8) вдоль щели абсцисса x меняется по закону

$$x = -T \operatorname{ctg} \alpha\pi + q + \frac{2q}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{\beta\xi}} - \frac{2q'}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(\xi-1)}} -$$

$$- \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi^2} \xi^{\alpha} (\xi-1)^{1-\alpha} \times$$

$$\times \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \left(q \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{\beta t}} - q' \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}} \right) \frac{dt}{\xi - t} \qquad (6.23)$$

$$\left(\frac{1}{\beta} \leqslant \xi \leqslant \infty \right).$$

Вводя

$$M(t) = q \operatorname{arch} \frac{1}{\sqrt{\beta t}} - q' \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}}$$

и учитывая, что при $\xi = \infty$ $x = 0$, получим:

$$0 = -T \operatorname{ctg} \alpha\pi + q + (q - q') - \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi^2} \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} M(t)\, dt. \qquad (6.24)$$

Вычитая (6.24) из (6.23), перепишем выражение для x так:

$$x = \frac{2q}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{\beta\xi}} - \frac{2q'}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta\xi\left(1-\frac{1}{\xi}\right)}} + q' - q +$$

$$+ \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi^2} \int_0^1 t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} M(t) \left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{-\alpha}}{1 + \frac{1-t}{\xi-1}} \right] dt.$$

Рассмотрим случай малых значений β, которым соответствует малое значение ширины щели поверху (по сравнению с глубиной T). В этом случае ξ принимает большие значения, и можно написать приближенные равенства

$$\frac{1-\beta}{\beta\xi\left(1-\frac{1}{\xi}\right)} \approx \frac{1}{\beta\xi}, \quad 1 - \frac{\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{-\alpha}}{1+\frac{1-t}{\xi-1}} \approx \frac{1-\alpha-t}{\xi}.$$

Тогда получим, учитывая, что $q - q' = q_{др}$:

$$x \approx \frac{2}{\pi} q_{др} \arccos \frac{1}{\sqrt{\beta\xi}} + \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi\beta\xi} \int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1} M(t)(1-\alpha-t)\,dt,$$

или, наконец,

$$x \approx \frac{2}{\pi} q_{др} \arccos \frac{1}{\sqrt{\beta\xi}} + [l_0 + q_{др}] \frac{1}{\beta\xi}. \tag{6.25}$$

В точках M_2, M_3 скорость обращается в бесконечность; следовательно,

$$\frac{dx}{d\xi} = -\frac{q_{др}}{\pi\xi\sqrt{1-\beta\xi}} - \frac{l_0 + q_{др}}{\beta\xi^2} \approx 0.$$

Введем обозначение

$$\delta = \frac{2q_{др}}{\pi(l_0 + q_{др})}. \tag{6.26}$$

Пусть корни уравнения

$$\frac{1}{(\beta\xi)^2} - \frac{1}{\beta\xi} - \frac{\delta^2}{4} = 0$$

будут ξ_2, ξ_3 ($\xi_2 > \xi_3$). Подставляя их последовательно в приближенную формулу для x (6.25) и производя затем вычитание, получим:

$$l_{др} \approx \frac{2}{\pi} q_{др}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{\beta\xi_3}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{\beta\xi_2}}\right) + (l_0 + q_{др})\left(\frac{1}{\beta\xi_3} - \frac{1}{\beta\xi_2}\right)$$

или

$$l_{др} \approx -\frac{2}{\pi} q_{др} \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{\beta\xi_2}\cdot\frac{1}{\beta\xi_3}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1 - \frac{1}{\beta\xi_2} - \frac{1}{\beta\xi_3} - \frac{1}{\beta\xi_2}\cdot\frac{1}{\beta\xi_3}}\right) + (l_0 + q_{др})\left(\frac{1}{\beta\xi_3} - \frac{1}{\beta\xi_2}\right).$$

Используя свойства корней квадратного уравнения, получим:

$$l_{др} \approx \frac{2q_{др}}{\pi}\left(\sqrt{\frac{1}{\delta^2}} - 1 - \arccos\delta\right). \tag{6.27}$$

Это выражение совпадает с формулой для одиночной дрены (глава IV, § 1).

Как легко видеть, $\delta \leqslant \frac{2}{\pi}$. При $l_0 = 0$ имеем $\delta = \frac{2}{\pi}$ и

$$l_{др} \approx \frac{2}{\pi}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}} - 1 - \arccos\frac{2}{\pi}\right) q_{др} \approx 0{,}262 q_{др}.$$

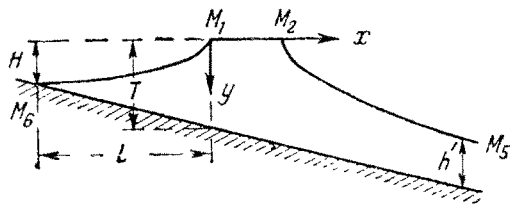
По формуле (6.27) найдем разность

$$l_{др} - l_0 \approx q_{др}\left[1 - \frac{2\delta}{\pi(\sqrt{1-\delta^2}+1)} - \frac{2}{\pi}\arccos\delta\right].$$

Производная этого выражения положительна:

$$\frac{\partial(l_{др}-l_0)}{\partial\delta} = q_{др}\frac{1-\sqrt{1-\delta^2}}{\Delta} > 0.$$

Следовательно, при заданном приведенном расходе дрены разность между ее внешней и внутренней шириной уменьшается с ростом внутренней ширины. Наибольшее значение этой разности будет при $l_0 = 0$, оно равно $0{,}262q_{др}$.

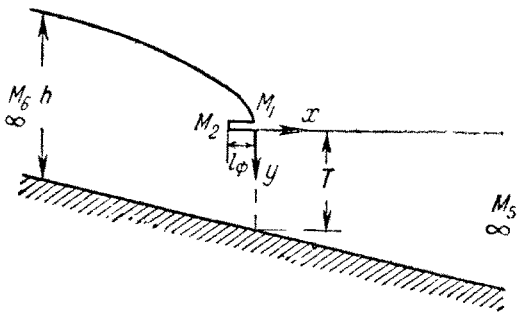


Фиг. 189.

В случае фильтрации воды из дрены в грунт имеем:

$$l_{др} = l_0.$$

Рассмотрим частный случай: фильтрацию из канала при отсутствии естественного потока (фиг. 189). В этом случае $q = 0$.



Фиг. 190.

Найдем границу распространения подтопления каналом L и отметку H кривой депрессии на этой границе. Рассматривая промежуток $-\infty < \xi \leqslant 0$, напишем с помощью (6.8), учитывая, что на свободной поверхности $\varphi = y$:

$$x = -T\operatorname{ctg}\alpha\pi + \frac{2q'}{\pi^2}\cos\alpha\pi\,(-\xi)^{\alpha}(1-\xi)^{1-\alpha}\int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}\frac{dt}{(1-t)(t-\xi)}},$$

$$y = \frac{2q'}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-\xi)}}.$$

Переходя к пределу при $\xi = 0$, найдем:

$$-L = \frac{T}{J} - \frac{2q'}{\pi J}\operatorname{arch}\frac{1}{\sqrt{\beta}}, \qquad H = \frac{2q'}{\pi}\operatorname{arch}\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}},$$

где $J = \operatorname{tg}\alpha\pi$.

Рассмотрим приток к горизонтальному фильтру (фиг. 190). Здесь мы имеем $l_0 = \infty$, $q' = 0$, $\beta = 1$. Поэтому формулы (6.3)

и (6.8) дают:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega = \frac{2\xi q}{\pi}\operatorname{arsh}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}, \quad \zeta = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2\dfrac{\pi\omega}{2\xi q}},\\
&z = -\frac{T}{J} + q + i\omega + \left(\frac{T}{J} - q + Aq\right)\operatorname{ch}^{-2\alpha}\frac{\pi\omega}{2q} -\\
&\qquad - \frac{4q}{\pi^2}\cos\alpha\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{1-2\alpha}t\operatorname{arsh}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\omega}{q}\operatorname{ctg}t\right)dt,\\
&A = \frac{4\cos\alpha\pi}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{1-2\alpha}t\cdot\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

Обозначим через l_Φ ширину верхней части щели; последнюю будем называть фильтром. На границе фильтра $\omega = i\psi$ и по (6.28) имеем:

$$x = -\frac{T}{J} + q - \psi + \left(\frac{T}{J} - q + Aq\right)\cos^{-2\alpha}\frac{\pi\psi}{2q} -$$
$$- \frac{4q}{\pi^2}\cos\alpha\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{1-2\alpha}t\operatorname{arsh}\left(\cos\frac{\pi\psi}{2q}\operatorname{ctg}t\right)dt.$$

На ребре M_2 фильтра x достигает экстремума, а потому

$$\frac{dx}{d\psi} = -1 + \frac{\alpha\pi}{q}\left(\frac{T}{J} - q + Aq\right)\cos^{-1-2\alpha}\frac{\pi\psi}{2q}\sin\frac{\pi\psi}{2q} +$$
$$+ \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} B(t)\,dt = 0.$$

Здесь

$$B(t) = \frac{\sin\dfrac{\pi\psi}{2q}}{\operatorname{tg}^{2\alpha}t\sqrt{1+\cos^2\dfrac{\pi\psi}{2q}\cdot\operatorname{ctg}^2 t}}.$$

Значение ψ в точке M_2 определяется уравнением

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi\psi}{2q} = \frac{\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\frac{T}{q}\cos\alpha\pi - \sin\alpha\pi + \sin\alpha\pi A\right)\cos^{-2\alpha}\frac{\pi\psi}{2q} +$$
$$+ \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} C(t)\,dt,$$

где введено обозначение

$$C(t) = \frac{\cos\frac{\pi\psi}{2q}\sin^{1-2\alpha}t\cos^{2\alpha}t}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi\psi}{2q}\cos^2 t}}.$$

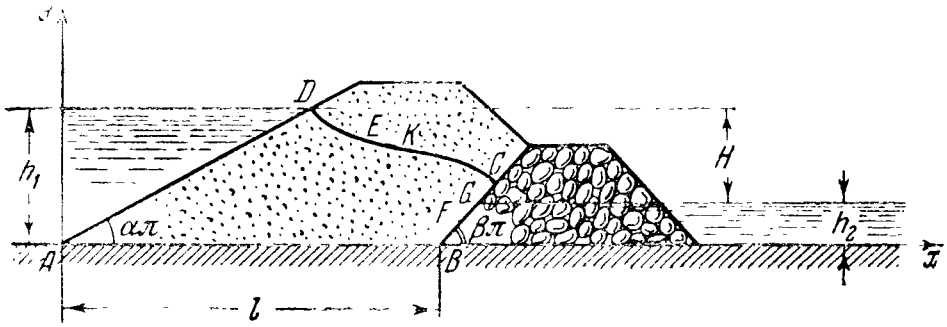
С. Н. Нумеров находит приближенную формулу

$$l_\Phi \approx \frac{q^2}{\pi T}.$$

Рассмотренный метод был применен им также к задаче о притоке воды к дрене при наличии инфильтрации или испарения с части свободной поверхности [2].

В. ЗЕМЛЯНЫЕ ПЛОТИНЫ

§ 7. Земляная плотина трапецоидального профиля на непроницаемом основании при наличии дренажа. Теперь мы перейдем к рассмотрению фильтрации в земляной плотине, построенной на непроницаемом основании, с дренажем или *обратным фильтром* в виде призмы [7]. Тогда линия дренажа будет наклонной прямой CGB



Фиг. 191.

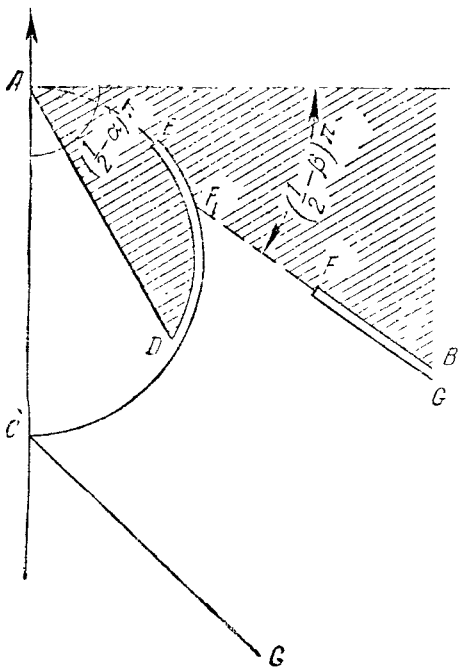
(фиг. 191). Для такой плотины годограф скорости имеет вид фиг. 192 с большим числом особых точек. Наличие промежутка высачивания вносит усложнение годографа, так как дает линию CG, не проходящую через начало координат.

В частных случаях промежуток высачивания может отсутствовать. Так, если разрез GFB удлиняется и точка F займет положение F_1, нижний кусок области годографа отпадает, и у нас остается заштрихованная область фиг. 192. При этом депрессионная кривая ортогональна к низовому откосу.

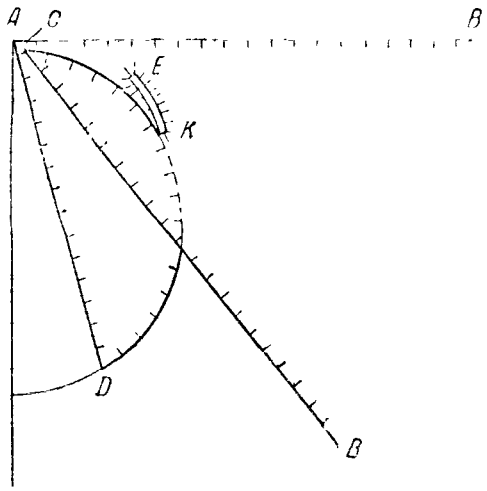
При построении годографа фиг. 192 мы исходили из предположения, что депрессионная кривая имеет одну точку перегиба E. Но можно предположить, что на свободной поверхности имеются две точки перегиба: K и E. В этом случае, пройдя по окружности дугу DE

(фиг. 193), мы возвращаемся по разрезу к точке K, затем опять поднимаемся по дуге окружности, перейдя на другой лист римановой поверхности, до точки C (лежащей над точкой A на втором листе). От точки C мы идем по прямой CB. В этом случае вырождения годографа, для которого отпадает промежуток высачивания, в точке C выхода депрессионной кривой на низовой откос скорость равна нулю, и касательная к свободной поверхности горизонтальна.

Из рассмотренного примера видно, насколько сложным может



Фиг. 192.



Фиг. 193.

оказаться годограф и какое большое число параметров может содержать формула Кристоффеля-Шварца.

С. Н. Нумеров применяет свой метод, показанный у нас на примерах предыдущих параграфов, предполагая промежуток высачивания отсутствующим. Он доводит решение до таблиц, с помощью которых можно делать расчеты.

При сделанном предположении, рассматривая область движения $ABCD$ (фиг. 191), видим, что границами этой области являются линии тока и эквипотенциали. Положим вдоль AB

$$\psi = 0,$$

вдоль CD

$$\psi = Q.$$

Потенциал скорости связан с давлением равенством

$$\varphi = -\varkappa\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) + C.$$

Выбрав постоянную C в виде

$$C = \varkappa \frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{\varkappa p_0}{\rho g},$$

т. е. считая

$$\varphi = -\varkappa\left(\frac{p - p_0}{\rho g} + y\right) + \varkappa \frac{h_1 + h_2}{2}, \tag{7.1}$$

мы тем самым принимаем, что атмосферное давление равно p_0, а потенциал скорости имеет значения

$$\varphi = -\frac{\varkappa H}{2}$$

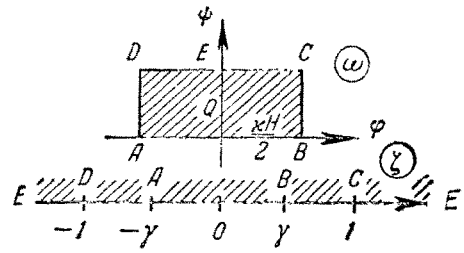
на границе верхнего бьефа и

$$\varphi = \frac{\varkappa H}{2}$$

на границе нижнего бьефа, где

$$H = h_1 - h_2$$

(см. главу II, § 12).



Фиг. 194.

Область комплексного потенциала представлена на фиг. 194. Отображая ее на верхнюю полуплоскость плоскости ζ так, как указано на нижнем графике фиг. 194, получим аналогично тому, как мы это делали в ряде случаев:

$$\omega = \frac{\varkappa H}{2K} \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(\gamma^2 - \zeta^2)}}, \tag{7.2}$$

где

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}} \qquad (k = \gamma).$$

Для того чтобы привести интеграл (7.2) к каноническому виду, сделаем замену переменной, полагая

$$\zeta = \gamma t.$$

Получим:

$$\omega = \frac{\varkappa H}{2K} \int_0^{\frac{\zeta}{\gamma}} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \gamma^2 t^2)}}. \tag{7.3}$$

Полагая $\zeta = \xi$, будем итти вдоль действительной оси плоскости ζ. Выражение (7.3), удобное для $\zeta = \xi$, когда $|\xi| < \gamma$, для промежутка $\gamma < \xi < 1$ приведем к виду

$$\omega = \frac{\varkappa H}{2} + \frac{\varkappa H i}{2K} \int_1^{\frac{\zeta}{\gamma}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - \gamma^2 t^2)}}. \tag{7.4}$$

Подстановка

$$\gamma^2 t^2 + \gamma'^2 t'^2 = 1,$$

где

$$\gamma' = \sqrt{1-\gamma^2},$$

дает:

$$J(\zeta) = \int_1^{\frac{\zeta}{\gamma}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-\gamma^2 t^2)}} = \int_{\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\gamma'}}^1 \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-\gamma'^2 t'^2)}} =$$

$$= K' - \int_0^{\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\gamma'}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\gamma'^2 t^2)}}, \tag{7.5}$$

где

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\gamma'^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Пользуясь обозначением

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = F(\arcsin x,\ k), \tag{7.6}$$

можем написать:

$$J(\xi) = K' - F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\gamma'},\ \gamma'\right). \tag{7.7}$$

Теперь (7.4) приводится для $\gamma < \xi < 1$ к виду

$$\omega(\xi) = \frac{\varkappa H}{2} + \frac{\varkappa H i}{2K}\left[K' - F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\gamma'},\ \gamma'\right)\right]. \tag{7.8}$$

Отсюда, в частности, полагая $\xi = 1$, найдем формулу для расхода

$$Q = \frac{\varkappa H K'}{2K}. \tag{7.9}$$

Используя это равенство, перепишем (7.8) для $\gamma < \xi < 1$ так:

$$\omega(\xi) = \frac{\varkappa H}{2} + iQ\left[1 - \frac{F(\lambda, \gamma')}{K'}\right]. \tag{7.10}$$

Здесь принято

$$\lambda = \arcsin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\gamma'}. \tag{7.11}$$

Аналогичным образом для промежутка $-1<\xi<-\gamma$ получим такое значение:

$$\omega(\xi)=-\frac{\varkappa H}{2}+iQ\left[1-\frac{F(\lambda,\gamma')}{K'}\right], \tag{7.12}$$

где λ имеет значение (7.11).

Теперь будем, по С. Н. Нумерову, рассматривать z как функцию ω. Вместо $z(\omega)$ удобнее рассматривать другую функцию, получаемую из следующих соображений. Если бы мы вместо действительной депрессионной кривой рассматривали параболу Козени для течения с горизонтальной дренажной щелью, исходящей из точки B, то соответствующее течение определялось бы уравнением

$$z=-\frac{1}{2\varkappa Q}\left[\frac{\varkappa(h_1+h_2)}{2}-\omega\right]^2.$$

Для рассматриваемого случая введем функцию $Z(\omega)$ с помощью равенства

$$Z(\omega)=X+iY=z(\omega)+\frac{1}{2\varkappa Q}\left[\frac{\varkappa(h_1+h_2)}{2}-\omega\right]^2. \tag{7.13}$$

Для этой функции получаем следующие условия на контурах области движения.

На AB, где $\psi=0$ и $y=0$,

$$Y=0. \tag{7.14}$$

На линии BC, уравнение которой можно написать в виде

$$x\sin\beta\pi-y\cos\beta\pi=l\sin\beta\pi$$

и вдоль которой $\varphi=\frac{1}{2}\varkappa H$, получаем:

$$X\sin\beta\pi-Y\cos\beta\pi=\left(l+\frac{\varkappa h_2^2}{2Q}\right)\sin\beta\pi+\frac{h_2\cos\beta\pi}{Q}\psi-\frac{\sin\beta\pi}{2\varkappa Q}\psi^2. \tag{7.15}$$

Вдоль свободной поверхности CD, где

$$\varphi=\frac{1}{2}\varkappa(h_1+h_2)-\varkappa y$$

и

$$\psi=Q,$$

получаем опять:

$$Y=0. \tag{7.16}$$

Наконец, вдоль верхового откоса DA, где $\varphi=-\frac{\varkappa H}{2}$ и уравнение которого имеет вид

$$x\sin\alpha\pi-y\cos\alpha\pi=0,$$

получаем уравнение

$$X\sin\alpha\pi - Y\cos\alpha\pi = \frac{\varkappa h_1^2 \sin\alpha\pi}{2Q} + \frac{h_1\cos\alpha\pi}{Q}\psi - \frac{\sin\alpha\pi}{2\varkappa Q}\psi^2. \quad (7.17)$$

Мы видим, что наша задача свелась к следующей: на сторонах прямоугольника плоскости ω заданы линейные комбинации функций X, Y; найти функцию $X+iY$ внутри прямоугольника ω. Это так называемая задача Гильберта. Однако С. Н. Нумеров заменяет область ω полуплоскостью плоскости ζ, на которую отображает область движения, и затем приемом, указанным у нас в § 2 этой главы, сводит задачу к задаче Дирихле.

Мы уже имеем зависимость ω от ξ, выражающуюся формулами (7.10) и (7.12), для двух отрезков оси ξ, на которых получились ненулевые условия (7.15) и (7.17). Принимая во внимание, что на этих отрезках соответственно

$$\varphi = \pm\frac{\varkappa H}{2},$$

найдем по формулам (7.10) и (7.12), что в обоих случаях для $\gamma \leqslant \xi \leqslant 1$ и для $-1 \leqslant \xi \leqslant -\gamma$

$$\psi = Q\left[1 - \frac{F(\lambda, \gamma')}{K'}\right],$$

где

$$\lambda = \arcsin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\gamma'}.$$

Подставим это выражение ψ в равенства (7.15) и (7.17). После простых преобразований получим:

для $\gamma < \xi < 1$

$$\left.\begin{aligned} &X(\xi)\sin\beta\pi - Y(\xi)\cos\beta\pi = \\ &\qquad = b_0 - \frac{b_1}{K'}F(\lambda, \gamma') - \frac{b_2}{K'^2}F^2(\lambda, \gamma') = \chi_1(\xi); \\ &\text{для } -1 < \xi < -\gamma \\ &X(\xi)\sin\alpha\pi - Y(\xi)\cos\alpha\pi = \\ &\qquad = a_0 - \frac{a_1}{K'}F(\lambda, \gamma') - \frac{a_2}{K'^2}F^2(\lambda, \gamma') = \chi_2(\xi); \\ &\text{для } |\xi| < \gamma \text{ и } |\xi| > 1 \\ &\qquad Y = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.18)$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= l\sin\beta\pi + h_2\cos\beta\pi + \frac{\varkappa h_2^2\sin\beta\pi}{2Q} - \frac{Q\sin\beta\pi}{2\varkappa}, \\ b_1 &= h_2\cos\beta\pi - \frac{Q\sin\beta\pi}{\varkappa}, \quad b_2 = \frac{Q\sin\beta\pi}{2\varkappa}, \\ a_0 &= h_1\cos\alpha\pi + \frac{\varkappa h_1^2\sin\alpha\pi}{2Q} - \frac{Q\sin\alpha\pi}{2\varkappa}, \\ a_1 &= h_1\cos\alpha\pi - \frac{Q\sin\alpha\pi}{\varkappa}, \quad a_2 = \frac{Q\sin\alpha\pi}{2\varkappa}. \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

Отсюда видно, что на отрезках действительной оси получились такие условия, какие были у нас отмечены в § 2.

В самом деле, рассмотрим, например, выражение

$$e^{\pi i\,(1/2-\alpha)}Z.$$

Очевидно, имеем:

$$\operatorname{Re}\left[e^{\pi i\,(1/2-\alpha)}Z\right] = X\sin\alpha\pi - Y\cos\alpha\pi.$$

Составим функцию

$$T(\zeta) = i(\gamma-\zeta)^{\beta}(\gamma+\zeta)^{1-\alpha}(1-\zeta)^{1-\beta}(1+\zeta)^{\alpha}. \tag{7.20}$$

Эта функция принимает чисто мнимые значения для действительных значений $\zeta=\xi$, причем $-\gamma<\xi<\gamma$. Примем ее аргумент равным $\frac{\pi}{2}$ для $0<\xi<\gamma$. Тогда на различных участках действительной оси ξ для $T(\zeta)$ будем иметь следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } |\xi|<\gamma \\ &\quad T(\xi) = i(\gamma-\xi)^{\beta}(\gamma+\xi)^{1-\alpha}(1-\xi)^{1-\beta}(1+\xi)^{\alpha}; \\ &\text{для } \gamma<\xi<1 \\ &\quad T(\xi) = (\xi-\gamma)^{\beta}(\gamma+\xi)^{1-\alpha}(1-\xi)^{1-\beta}(1+\xi)^{\alpha}e^{\pi i\,(1/2-\beta)}; \\ &\text{для } -1<\xi<-\gamma \\ &\quad T(\xi) = (\gamma-\xi)^{\beta}(-\gamma-\xi)^{1-\alpha}(1-\xi)^{1-\beta}(1+\xi)^{\alpha}e^{\pi i\,(3/2-\alpha)}; \\ &\text{для } -\infty<\xi<-1 \\ &\quad T(\xi) = -i(\gamma-\xi)^{\beta}(-\gamma-\xi)^{1-\alpha}(1-\xi)^{1-\beta}(-1-\xi)^{\alpha}; \\ &\text{для } 1<\xi<\infty \\ &\quad T(\xi) = -i(\xi-\gamma)^{\beta}(\gamma+\xi)^{1-\alpha}(\xi-1)^{1-\beta}(1+\xi)^{\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

Произведение

$$T(\zeta)Z(\zeta)$$

будет чисто мнимым для $|\xi|<\gamma$ и $|\xi|>1$, т. е. для него действительная часть равна нулю на этих промежутках.

На промежутках $\gamma<\xi<1$ и $-1<\xi<-\gamma$ у нас известна действительная часть функции

$$T(\xi)\,Z(\xi).$$

Для того чтобы можно было применить формулу Коши для отыскания $T(\zeta)\,Z(\zeta)$, нужно исследовать это произведение при $\zeta=\infty$.

Так как $Z(\zeta)$ — аналитическая функция, ограниченная на всей полуплоскости ζ, то на бесконечности она разлагается в ряд Лорана вида

$$Z(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n}. \tag{7.22}$$

При этом, заметив, что на отрезках $|\xi|>1$ мнимая часть Z равна нулю ($Y=0$), по принципу симметрии Шварца для функции $Z(\zeta)$ получим следующее свойство: она принимает в сопряженных точках ζ и $\overline{\zeta}$ сопряженные значения. Отсюда вытекает, что коэффициенты c_n должны быть действительными членами.

Что касается $T(\zeta)$, то для равенства (7.21) показывают, что около $\zeta=\infty$ можно положить:

$$T(\zeta)=-i\zeta^2\left(1-\frac{\gamma}{\zeta}\right)^{\beta}\left(1+\frac{\gamma}{\zeta}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^{1-\beta}\left(1+\frac{1}{\zeta}\right)^{\alpha}=$$

$$=-i\zeta^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\zeta^n}\right),$$

причем все коэффициенты d_n будут действительны.

Произведение $T(\zeta)\,Z(\zeta)$ на бесконечности имеет вид

$$T(\zeta)\,Z(\zeta)=-i\zeta^2\left(1+\frac{d_1}{\zeta}+\frac{d_2}{\zeta^2}+\ldots\right)\left(c_0+\frac{c_1}{\zeta}+\frac{c_2}{\zeta^2}+\ldots\right)=$$

$$=-ic_0\zeta^2-i(c_1+c_0d_1)\zeta-i(c_0+c_1d_1+c_0d_2)+\ldots$$

Функция

$$W(\zeta)=T(\zeta)\,Z(\zeta)+ic_0\zeta^2+i(c_1+c_0d_1)\zeta \tag{7.23}$$

будет ограниченной на бесконечности и ее удобно принять в качестве вспомогательной функции. На тех участках, где $Y=0$, новая функция обладает свойством, что ее действительная часть равна нулю. Что касается остальных отрезков, то на них нетрудно найти значение действительной части этой функции. Получаем:

$$f(\xi)=\operatorname{Re}W(\xi)=\begin{cases}\chi_1(\xi)\,\lambda_1(\xi) & \text{для } \gamma<\xi<1,\\ -\chi_2(\xi)\,\lambda_2(\xi) & \text{для } -1<\xi<-\gamma,\\ 0 & \text{для } |\xi|<\gamma \quad \text{и} \quad |\xi|>1,\end{cases} \tag{7.24}$$

где $\chi_1(\xi)$, $\chi_2(\xi)$ имеют значения (7.18), причем

$$\lambda_1(\xi) = (\xi-\gamma)^{\beta}(\gamma+\xi)^{1-\alpha}(1-\xi)^{1-\beta}(1+\xi)^{\alpha},$$

$$\lambda_2(\xi) = (\gamma-\xi)^{\beta}(-\gamma-\xi)^{1-\alpha}(1-\xi)^{1-\beta}(1+\xi)^{\alpha}.$$

Задача оказалась сведенной к задаче Дирихле, для решения которой применима формула (1.6) этой главы

$$W(\zeta) = -\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{t-\zeta} + iC, \tag{7.25}$$

где C — произвольная действительная постоянная.

Подставим в (7.25) выражение (7.23) для $W(\zeta)$ и, использовав равенство (7.20), получим, сокращая на i:

$$(c_0d_1+c_1)\zeta + c_0\zeta^2 + (\gamma-\zeta)^{\beta}(\gamma+\zeta)^{1-\alpha}(1-\zeta)^{1-\beta}(1+\zeta)^{\alpha}Z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-\zeta}\,dt + C. \tag{7.26}$$

Полученное уравнение содержит неизвестные постоянные c_0, c_1, d_1 и C. Их можно исключить, полагая в (7.26) последовательно $\zeta = \pm\gamma$, ± 1. При $\zeta = \gamma$ будем иметь из (7.26):

$$(c_0d_1+c_1)\gamma + c_0\gamma^2 = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{t-\gamma} + C.$$

Вычитая это выражение из (7.26) и сокращая получающийся результат на $\gamma-\zeta$, получим:

$$c_0d_1 + c_1 + c_0(\gamma+\zeta) - (\gamma-\zeta)^{\beta-1}(\gamma+\zeta)^{1-\alpha}(1-\zeta)^{1-\beta}(1+\zeta)^{\alpha}Z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(t-\gamma)(t-\zeta)}.$$

Вычитая из этого равенства аналогичное соотношение, соответствующее $\zeta = -\gamma$, получим:

$$c_0 - (\gamma-\zeta)^{\beta-1}(\gamma+\zeta)^{-\alpha}(1-\zeta)^{1-\beta}(1+\zeta)^{\alpha}Z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(t-\gamma)(t+\gamma)(t-\zeta)}.$$

Полагая $\zeta = 1$ и вычитая соответствующие уравнения, исключим c_0 и найдем:

$$(\gamma-\zeta)^{\beta-1}(\gamma+\zeta)^{-\alpha}(1-\zeta)^{-\beta}(1+\zeta)^{\alpha}Z(\zeta) = \\ = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(t^2-\gamma^2)(t-1)(t-\zeta)}. \qquad (7.27)$$

Наконец, положим в последнем уравнении $\zeta = -1$. Так как левая часть при этом обратится в нуль, то правая даст нам следующее уравнение:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma^2-t^2)(1-t^2)} = 0. \qquad (7.28)$$

Вычитая из правой части (7.27) левую часть (7.28), приведем (7.27) к более симметричному виду. После этого, решая (7.27) относительно $Z(\zeta)$, напишем:

$$Z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}(\gamma-\zeta)^{1-\beta}(\gamma+\zeta)^{\alpha}(1-\zeta)^{\beta}(1+\zeta)^{1-\alpha}\times \\ \times\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma^2-t^2)(1-t^2)(t-\zeta)}. \qquad (7.29)$$

Наконец, вспоминая зависимость (7.13) между Z и z, напишем уравнение для $z(\zeta)$

$$z(\zeta) = -\frac{1}{2\varkappa Q}\left[\varkappa\frac{h_1+h_2}{2}-\omega\right]^2 - \frac{T_1(\zeta)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{(\gamma^2-t^2)(1-t^2)(t-\zeta)}, \qquad (7.30)$$

где

$$T_1(\zeta) = (\gamma-\zeta)^{1-\beta}(\gamma+\zeta)^{\alpha}(1-\zeta)^{\beta}(1+\zeta)^{1-\alpha}.$$

Уравнение (7.28) содержит неизвестный параметр γ и может служить для определения значения этого параметра. Когда найдено γ, расход Q определится по формуле (7.9).

Перепишем более подробно уравнение (7.28), используя выражения (7.24) и (7.18):

$$\int_{-1}^{-\gamma}\left[a_0-\frac{a_1}{K'}F-\frac{a_2}{K'^2}F^2\right]\frac{\lambda_2(t)\,dt}{(t^2-\gamma^2)(1-t^2)} - \\ -\int_{\gamma}^{1}\left[b_0-\frac{b_1}{K'}F-\frac{b_2}{K'^2}F^2\right]\frac{\lambda_1(t)\,dt}{(t^2-\gamma^2)(1-t^2)} = 0. \qquad (7.31)$$

Здесь

$$F = F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}, \gamma'\right).$$

Уравнение (7.31) можно переписать иначе, вводя обозначения интегралов:

$$J_0 = \int_{-1}^{-\gamma} \frac{\lambda_2(t)\,dt}{(t^2-\gamma^2)\sqrt{(1-t^2)}} =$$

$$= \int_{-1}^{-\gamma} (\gamma - t)^{\beta-1}(-\gamma - t)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}(1+t)^{\alpha-1}\,dt.$$

Заменяя t на $-t$, можно привести J_0 к виду

$$J_0 = \int_{\gamma}^{1} \Phi(t)\,dt,$$

$$\Phi(t) = (\gamma + t)^{\beta-1}(t-\gamma)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}(1-t)^{\alpha-1}.$$

Далее, положим:

$$J_1 = \int_{-1}^{-\gamma} \frac{\lambda_2(t)\,F\,dt}{(t^2-\gamma^2)\sqrt{(1-t^2)}} = \int_{\gamma}^{1} \Phi(t)\,F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}, \gamma'\right)dt,$$

$$J_2 = \int_{-1}^{-\gamma} \frac{\lambda_2(t)\,F^2\,dt}{(t^2-\gamma^2)\sqrt{(1-t^2)}} = \int_{\gamma}^{1} \Phi(t)\,F^2\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}, \gamma'\right)dt,$$

и введем три аналогичных интеграла:

$$J_0' = \int_{\gamma}^{1} \Phi_1(t)\,dt,$$

$$J_1' = \int_{\gamma}^{1} \Phi_1(t)\,F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}, \gamma'\right)dt,$$

$$J_2' = \int_{\gamma}^{1} \Phi_1(t)\,F^2\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}, \gamma'\right)dt,$$

где

$$\Phi_1(t) = (t-\gamma)^{\beta-1}(t+\gamma)^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}(1+t)^{\alpha-1}.$$

Теперь (7.31) перепишем в виде

$$a_0 J_0 - \frac{a_1}{K'} J_1 - \frac{a_2}{K'^2} J_2 - b_0 J_0' + \frac{b_1}{K'} J_1' + \frac{b_2}{K'^2} J_2' = 0. \qquad (7.32)$$

Для случаев, имеющих место на практике, обычно $\frac{l}{H} > 10$. При этом параметр γ очень близок к единице, γ' очень близко к нулю. Интегралы J_n и J_n' можно тогда упростить, принимая

$$F(\theta, \gamma') \approx \theta, \quad \gamma \approx 1.$$

Рассмотрим интеграл J_0. Положим:

$$(\gamma + t)^{\beta-1} = (1+t)^{\beta-1}\left[1 + \frac{\gamma-1}{1+t}\right]^{\beta-1} =$$

$$= (1+t)^{\beta-1} + (\beta-1)(\gamma-1)(1+t)^{\beta-2} + \ldots \approx (1+t)^{\beta-1}. \quad (7.33)$$

Подинтегральную функцию в J_0 заменим на

$$(1+t)^{-1}(t-\gamma)^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1} \approx \frac{1}{2}(t-\gamma)^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1},$$

так как

$$(1+t)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t-1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t-1}{2} + \ldots\right) \approx \frac{1}{2}. \quad (7.34)$$

Тогда

$$J_0 \approx \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{1} (t-\gamma)^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\,dt.$$

Подстановка

$$1 - t = (1-\gamma)x$$

приводит интеграл правой части к функции бета

$$J_0 \approx \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\sin\alpha\pi}.$$

Точно так же найдем приближенное равенство

$$J_0' \approx \frac{\pi}{2\sin\beta\pi}.$$

На основании рядов (7.33), (7.34) можно сделать оценку принятых приближений.

Перейдем к интегралу J_1. Примем в нем:

$$F\left(\arcsin\frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'},\ \gamma'\right) \approx \arcsin\frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}.$$

Тогда, применяя те же упрощения, что для J_0, напишем:

$$J_1 \approx \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{1}(t-\gamma)^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\arcsin\frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}\,dt.$$

Сделаем подстановку

$$\arcsin\frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}=\frac{\pi}{2}\tau.$$

Отсюда

$$t=\sqrt{1-\gamma'^2\sin^2\frac{\pi\tau}{2}}\approx 1-\frac{1}{2}\gamma'^2\sin^2\frac{\pi\tau}{2},$$

$$dt\approx-\frac{\pi}{2}\gamma'^2\sin\frac{\pi\tau}{2}\cos\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau,$$

$$1-t\approx\frac{1}{2}\gamma'^2\sin^2\frac{\pi\tau}{2},$$

$$t-\gamma\approx(1-\gamma)\left[1-\frac{1}{2}(1+\gamma)\sin^2\frac{\pi\tau}{2}\right]\approx(1-\gamma)\cos^2\frac{\pi\tau}{2}.$$

Теперь получаем для J_1:

$$J_1\approx\frac{\pi^3}{4}\int_0^1\tau\operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{\pi^2}{4}f_1(\alpha).$$

Точно так же получим:

$$J_2\approx\frac{\pi^3}{8}\int_0^1\tau^2\operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{\pi^3}{4}f_3(\alpha).$$

Переходя к интегралу J_1', напишем:

$$J_1'\approx\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{1}(t-\gamma)^{\beta-1}(1-t)^{-\beta}\arcsin\frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}\,dt=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\int_0^1\tau\operatorname{ctg}^{2\beta-1}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{\pi^2}{4}f_1(1-\beta).$$

Аналогично

$$J_2'\approx\frac{\pi^3}{8}\int_0^1\tau^2\operatorname{ctg}^{2\beta-1}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{\pi^3}{4}f_3(1-\beta).$$

Равенство (7.32) содержит величину K'. Для γ', близких к нулю, можно принять:

$$K'\approx\frac{\pi}{2}.$$

Интересно отметить, что параметр γ совсем исчез во всех приближенных формулах.

Подставим теперь найденные приближенные выражения интегралов $J_0, J_1, \ldots$ в (7.32). Сократив на общий множитель $\frac{\pi}{2}$, получим:

$$\frac{a_0}{\sin \alpha\pi} - \frac{b_0}{\sin \beta\pi} - a_1 f_1(\alpha) + b_1 f_1(1-\beta) - 2a_2 f_3(\alpha) + 2b_2 f_3(1-\beta) = 0.$$

Наконец, принимая во внимание равенства (7.19), напишем:

$$h_1 \operatorname{ctg} \alpha\pi - h_2 \operatorname{ctg} \beta\pi + \frac{\varkappa h_1^2}{2Q} - \frac{\varkappa h_2^2}{2Q} - l -$$
$$- \left(h_1 \cos \alpha\pi - \frac{Q}{\varkappa} \sin \alpha\pi\right) f_1(\alpha) + \left(h_2 \cos \beta\pi - \frac{Q}{\varkappa} \sin \beta\pi\right) f_1(1-\beta) -$$
$$- \frac{Q}{\varkappa} \sin \alpha\pi f_3(\alpha) + \frac{Q}{\varkappa} \sin \beta\pi f_3(1-\beta) = 0.$$

Отсюда можно найти приближенное равенство для l

$$l \approx \frac{\varkappa(h_1^2 - h_2^2)}{2Q} + h_1 [\operatorname{ctg} \alpha\pi - \cos \alpha\pi f_1(\alpha)] +$$
$$+ h_2 [-\operatorname{ctg} \beta\pi + \cos \beta\pi f_1(1-\beta)] - \frac{Q}{\varkappa} [-\sin \alpha\pi f_1(\alpha) +$$
$$+ \sin \beta\pi f_1(1-\beta) + \sin \alpha\pi f_3(\alpha) - \sin \beta\pi f_3(1-\beta)].$$

Введем еще одно обозначение

$$f_2(\alpha) = f_1(\alpha) - f_3(\alpha) = \int_0^1 t\left(1 - \frac{1}{2}t\right) \operatorname{ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi t}{2}\, dt.$$

Тогда можно переписать уравнение для l так:

$$l \approx \frac{\varkappa(h_1^2 - h_2^2)}{2Q} + h_1 [\operatorname{ctg} \alpha\pi - \cos \alpha\pi f_1(\alpha)] - h_2 [\operatorname{ctg} \beta\pi - \cos \beta\pi f_1(1-\beta)] -$$
$$- \frac{Q}{\varkappa} [-\sin \alpha\pi f_2(\alpha) + \sin \beta\pi f_2(1-\beta)].$$

Выполним еще одно преобразование, использовав свойство функций $f_1(1-\beta)$ и $f_2(1-\beta)$, которое мы получим, если в равенстве

$$f_1(1-\beta) = \int_0^1 t \operatorname{ctg}^{2\beta-1} \frac{\pi t}{2}\, dt$$

положим:

$$t = 1 - \tau.$$

Будем иметь:

$$f_1(1-\beta)=\int_0^1 \operatorname{ctg}^{1-2\beta}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau-\int_0^1 \tau\operatorname{ctg}^{1-2\beta}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{1}{\sin\beta\pi}-f_1(\beta).$$

Аналогично найдем:

$$f_3(1-\beta)=\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\tau)^2\operatorname{ctg}^{1-2\beta}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{1}{2\sin\beta\pi}-f_1(\beta)+f_3(\beta),$$

$$f_2(1-\beta)=\int_0^1 (1-\tau)\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)\operatorname{ctg}^{1-2\beta}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau=\frac{1}{2\sin\beta\pi}-\frac{1}{2}f_3(\beta).$$

Подставляя полученные выражения в формулу для l, после простых преобразований окончательно получим:

$$l\approx\frac{\varkappa(h_1^2-h_2^2)}{2Q}+h_1[\operatorname{ctg}\alpha\pi-\cos\alpha\pi f_1(\alpha)]-h_2\cos\beta\pi f_1(\beta)-$$
$$-\frac{Q}{\varkappa}\left[\frac{1}{2}-\sin\alpha\pi f_2(\alpha)-\sin\beta\pi f_3(\beta)\right]. \qquad (7.35)$$

Эта приближенная формула обладает большой степенью точности для широких плотин. Для функций f_1, f_2, f_3 вычислены таблицы [8, 12].

В частном случае прямоугольной перемычки с горизонтальным дренажем, т. е. при $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$, полагая

$$h_1=H,\quad h_2=0,$$

получим из (7.35):

$$l\approx\frac{\varkappa H^2}{2Q}-\frac{Q}{6\varkappa},$$

откуда для Q находим приближенное равенство

$$Q\approx\frac{\varkappa H^2}{l+\sqrt{l^2+\frac{1}{3}H^2}}.$$

П. А. Шанкиным [13] приведены графики зависимости f_1, f_2, f_3 от α, изображенные у нас на фиг. 195.

Уравнения депрессионной кривой. Для получения уравнения кривой депрессии в уравнении (7.30) нужно положить:

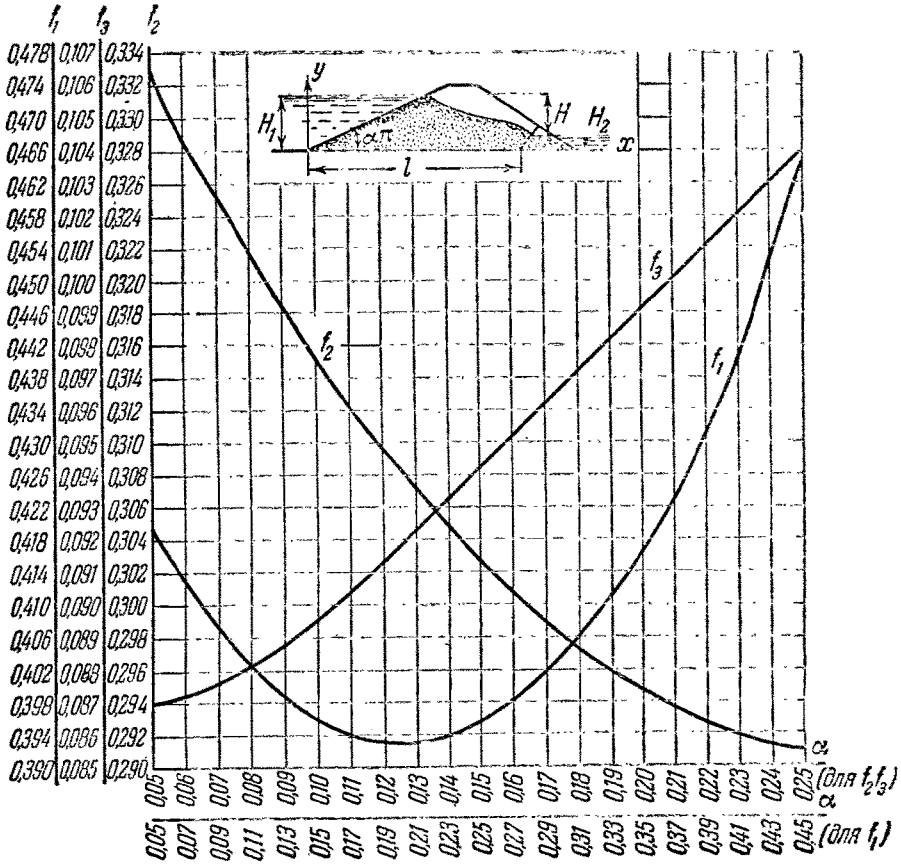
$$\omega=\varphi+iQ=\frac{1}{2}\varkappa(h_1+h_2)-\varkappa y+iQ.$$

Получим:

$$x = -\frac{\varkappa y^2}{2Q} + \frac{Q}{2\varkappa} + \frac{1}{\pi}(\gamma-\xi)^{1-\beta}(-\gamma-\xi)^{\alpha}(1-\xi)^{\beta}(-1-\xi)^{1-\alpha}\times$$

$$\times\left\{\int_{-1}^{-\gamma}\frac{\left(a_0-\frac{a_1}{K'}F-\frac{a_2}{K'^2}F^2\right)dt}{(\gamma-t)^{1-\beta}(-\gamma-t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1+t)^{1-\alpha}(t-\xi)}-\right.$$

$$\left.-\int_{1}^{\gamma}\frac{\left(b_0-\frac{b_1}{K'}F-\frac{b_2}{K'^2}F^2\right)dt}{(t-\gamma)^{1-\beta}(\gamma+t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}(1+t)^{1-\alpha}(t-\xi)}\right\}. \qquad (7.36)$$



Фиг. 195.

Рассмотрим левую часть кривой депрессии, для которой

$$-\infty < \xi < -1.$$

Для $\gamma \approx 1$ уравнение (7.36) можно упростить, подобно тому как мы это делали выше при вычислении интегралов J_1, J_2. Получим, принимая

$K' \approx \frac{\pi}{2}$:

$$x \approx \frac{\varkappa y^2}{2Q} + \frac{Q}{2\varkappa} + \frac{1}{\pi}(1-\xi)(-\gamma-\xi)^{\alpha}(-1-\xi)^{1-\alpha} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{-\gamma} \frac{\left(a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2\right) dt}{(-\gamma-t)^{\alpha}(1+t)^{1-\alpha}(t-\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^{1} \frac{\left(b_0 - \frac{2b_1}{\pi} F - \frac{4b_2}{\pi^2} F^2\right) dt}{(t-\gamma)^{1-\beta}(1-t)^{\beta}(1-\xi)} \right\}. \qquad (7.37)$$

Здесь для F можно написать приближенное равенство

$$F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}, \gamma'\right) \approx \arcsin \frac{\sqrt{1-t^2}}{\gamma'}.$$

Отметим, что во втором интеграле разность $t-\xi$ заменена на $1-\xi$. Это допустимо в силу того, что в данном случае в ряде

$$\frac{1}{t-\xi} = \frac{1}{1-\xi}\left(1 - \frac{t-1}{1-\xi} + \ldots\right)$$

при

$$\gamma \approx 1, \quad 1 < t < \gamma, \quad 1-\xi > 2$$

можно принять:

$$\frac{1}{t-\xi} \approx \frac{1}{1-\xi}.$$

После таких же упрощений уравнение (7.31) принимает вид

$$\int_{-1}^{-\gamma} \frac{a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2}{(-\gamma-t)^{\alpha}(1+t)^{1-\alpha}} dt \approx \int_{\gamma}^{1} \frac{b_0 - \frac{2b_1}{\pi} F - \frac{4b_2}{\pi^2} F^2}{(t-\gamma)^{1-\beta}(1-t)^{\beta}} dt.$$

Умножив обе части этого равенства на

$$\frac{1}{\pi}(-t-\xi)^{\alpha}(-1-\xi)^{1-\alpha},$$

вычтем его почленно из (7.37). Примем во внимание, что

$$\frac{1-\xi}{t-\xi} - 1 = \frac{1-t}{t-\xi}.$$

Под знаком первого интеграла, где $t \approx -1$, можно принять $1-t \approx 2$. Поэтому из (7.37) получаем следующее уравнение:

$$x \approx -\frac{\varkappa y^2}{2Q} + \frac{Q}{2\varkappa} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}(-\gamma-\xi)^{\alpha}(-1-\xi)^{1-\alpha} \int_{-1}^{-\gamma} \frac{a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2}{(-\gamma-t)^{\alpha}(1+t)^{1-\alpha}(t-\xi)} dt.$$

Теперь введем новую переменную интегрирования с помощью зависимости

$$t=\frac{-\xi-\gamma+(1-\gamma)\,\xi\sin^2\frac{\pi\tau}{2}}{-\xi-\gamma-(1-\gamma)\sin^2\frac{\pi\tau}{2}}. \tag{7.38}$$

Получим:

$$x\approx-\frac{\varkappa y^2}{2Q}+\frac{Q}{2\varkappa}+\int_0^1 \operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\left(a_0-\frac{2a_1}{\pi}F-\frac{4a_2}{\pi^2}F^2\right)d\tau. \tag{7.39}$$

При этом можно принять:

$$F\approx\arcsin\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\gamma^2}}\approx\arcsin\sqrt{\frac{1+t}{1-\gamma}}, \tag{7.40}$$

так как

$$\frac{1-t}{1+\gamma}\approx\frac{2}{2}=1.$$

Заменяя $\arcsin x$ на $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, получим:

$$F\approx\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+t}{-t-\gamma}}.$$

Далее по формуле (7.38) найдем:

$$F\approx\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{-1-\xi}{-\gamma-\xi}}\operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right).$$

В силу уравнения (7.3) имеем:

$$\zeta=\gamma\,\mathrm{sn}\,\frac{2K\omega}{\varkappa H}$$

и для $-\infty<\xi<-1$

$$\xi=\gamma\,\mathrm{sn}\,\frac{2K}{\varkappa H}(\varphi+iQ).$$

На основании (7.9) получаем:

$$\xi=\gamma\,\mathrm{sn}\left[\frac{K'}{Q}(\varphi+iQ),\ \gamma\right]=\gamma\,\mathrm{sn}\left(\frac{K'\varphi}{Q}+iK',\ \gamma\right).$$

Для левой ветви депрессионной кривой, для которой y близко к h_1, можно написать:

$$\frac{\varphi}{Q}=\frac{\varkappa(h_1+h_2)}{2Q}-\frac{\varkappa y}{Q}=\frac{\varkappa(h_1-y)}{Q}-\frac{\varkappa H}{2Q}=\frac{\varkappa(h_1-y)}{Q}-\frac{K}{K'}.$$

Пользуясь формулами (см. литературу к главе III [24])

$$\gamma\,\mathrm{sn}\,(x+iK',\ \gamma)=\frac{1}{\mathrm{sn}\,(x,\gamma)},$$

$$\mathrm{sn}\,(x-K,\ \gamma)=-\frac{\mathrm{cn}\,(x,\gamma)}{\mathrm{dn}\,(x,\gamma)},$$

получим:

$$\xi = \frac{1}{\operatorname{sn}\left(\frac{K'\varphi}{Q}, \gamma\right)} = -\frac{\operatorname{dn}\left[K'\frac{\varkappa(h_1 - y)}{Q}, \gamma\right]}{\operatorname{cn}\left[K'\frac{\varkappa(h_1 - y)}{Q}, \gamma\right]}. \tag{7.41}$$

Возвращаясь к уравнению (7.38), положим:

$$u = \sqrt{\frac{-1-\xi}{-\gamma-\xi}} \approx \sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\gamma^2}}.$$

Последнее выражение можно принять в силу того, что при $\gamma \approx 1$

$$\frac{\xi+1}{\xi+\gamma} \approx 1.$$

На основании (7.41) получаем:

$$u = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}^2 x - \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x - \gamma^2 \operatorname{cn}^2 x}} = \operatorname{sn}\left[K'\frac{\varkappa(h_1 - y)}{Q}, \gamma\right] \approx \operatorname{th}\frac{\pi\varkappa(h_1 - y)}{2Q}. \tag{7.42}$$

Поэтому (7.40) принимает вид

$$F \approx \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\xi}{-\gamma-\xi}}\operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right) \approx \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\gamma^2}}\operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right) = \operatorname{arc\,ctg}\left(u\operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right),$$

где u имеет значение (7.42).

Теперь, принимая во внимание значение (7.19) величины a_0, учитывая равенство $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$

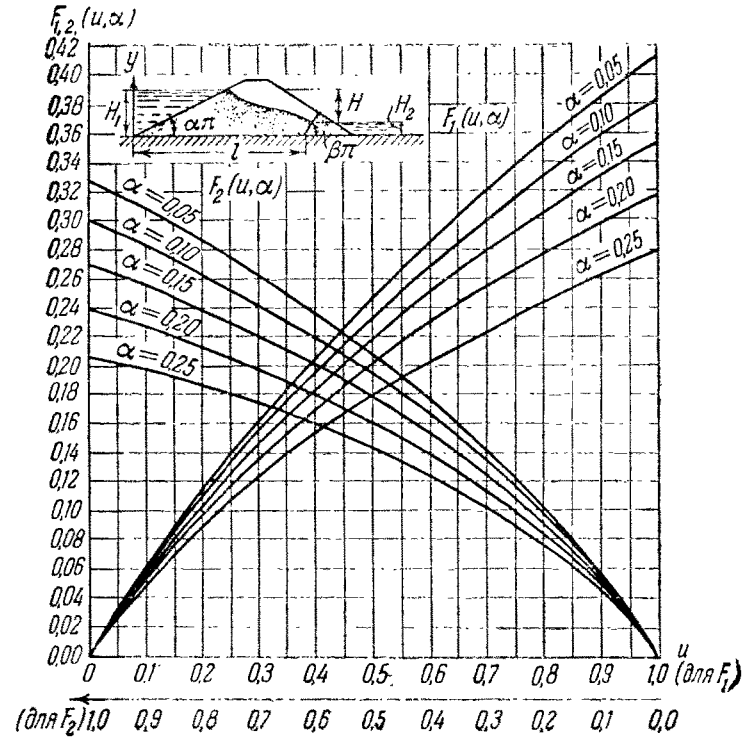
$$\int_0^1 \operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau = \frac{1}{\sin\alpha\pi},$$

напишем уравнение левой части депрессионной кривой в виде

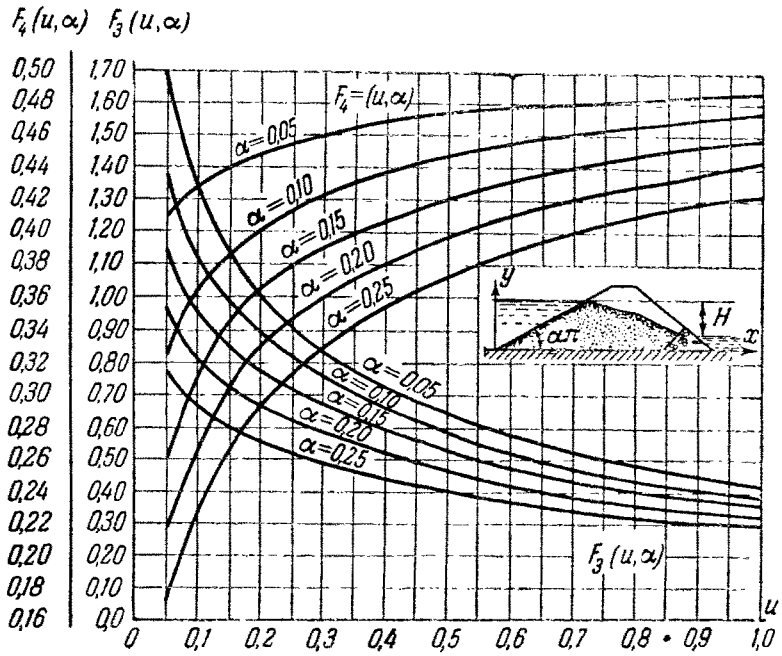
$$x \approx \frac{\varkappa(h_1^2 - y^2)}{2Q} + h_1 \operatorname{ctg}\alpha\pi - \frac{2a_1}{\pi}\int_0^1 F\operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau - \frac{4a_2}{\pi^2}\int_0^1 F^2\operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\,d\tau.$$

На основании (7.19)

$$a_1 = h_1\cos\alpha\pi - \frac{Q\sin\alpha\pi}{\varkappa}, \quad a_2 = \frac{Q\sin\alpha\pi}{2\varkappa}.$$



Фиг. 196.



Фиг. 197.

Поэтому удобно ввести обозначения

$$F_1(u, \alpha) = \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi} \int_0^1 \operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(u \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right) d\tau,$$

$$F_2(u, \alpha) =$$

$$= \frac{2\cos\alpha\pi}{\pi} \int_0^1 \operatorname{ctg}^{1-2\alpha}\frac{\pi\tau}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(u \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(u \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right)\right] d\tau.$$

Тогда окончательно уравнение левой ветви депрессионной кривой напишем в форме

$$x \approx \frac{\varkappa(h_1^2 - y^2)}{2Q} + h_1\left[\operatorname{ctg}\alpha\pi - F_1\left(\operatorname{th}\frac{\varkappa\pi(h_1 - y)}{2Q}, \alpha\right)\right] + \\ + \frac{Q}{\varkappa}\operatorname{tg}\alpha\pi F_2\left(\operatorname{th}\frac{\varkappa\pi(h_1 - y)}{2Q}, \alpha\right). \quad (7.43)$$

Аналогичным путем получается уравнение правой части депрессионной кривой в виде

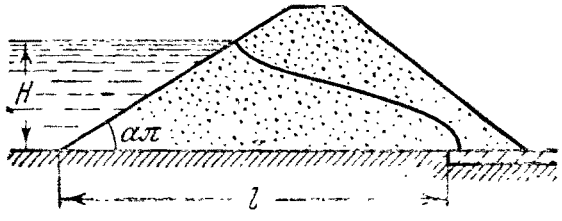
$$x \approx l + \frac{\varkappa(h_2^2 - y^2)}{2Q} + h_2 F_3\left(\operatorname{th}\frac{\varkappa\pi(y - h_2)}{2Q}, \beta\right) + \frac{Q}{\varkappa}F_4\left(\operatorname{th}\frac{\varkappa\pi(y - h_2)}{2Q}, \beta\right),$$

где (7.44)

$$F_3(u, \beta) = \frac{2\cos\beta\pi}{\pi} \int_0^1 \operatorname{tg}^{1-2\beta}\frac{\pi\tau}{2} \operatorname{arc\,ctg}\left(u \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right) d\tau,$$

$$F_4(u, \beta) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sin\beta\pi \int_0^1 \operatorname{tg}^{1-2\beta}\frac{\pi\tau}{2} \operatorname{arc\,ctg}^2\left(u \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2}\right) d\tau.$$

С. Н. Нумеров составил таблицы значений функций $F_1(u, \alpha)$, $F_2(u, \alpha)$, $F_3(u, \alpha)$, $F_4(u, \alpha)$ [8, 12]. На фиг. 196 и 197 приведены графики этих функций [13].



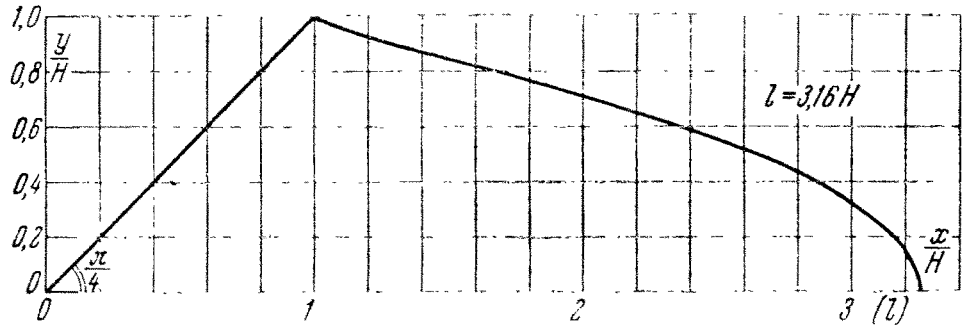
Фиг. 198.

Для плотины с горизонтальным дренажем [1, 6] (фиг. 198) положение всей кривой депрессии может быть определено одним уравнением,

совпадающим с (7.43):

$$x \approx \varkappa \frac{H^2 - y^2}{2Q} + H\left[\operatorname{ctg} \alpha\pi - F_1\left(\operatorname{th} \varkappa\pi \frac{H-y}{2Q},\ \alpha\right)\right] + \\ + \frac{Q}{\varkappa} F_2\left(\operatorname{th} \varkappa\pi \frac{H-y}{2Q},\ \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha\pi.$$

На фиг. 199 приведена для примера депрессионная кривая, построенная для случая $Q = 0{,}2\varkappa H$, $l \approx 3{,}16H$ [1].



Фиг. 199.

Для прямоугольных перемычек с горизонтальным дренажем ($\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$) уравнение кривой депрессии принимает вид

$$x = \varkappa \frac{H^2 - y^2}{2Q} + \frac{Q}{\pi} F\left(\operatorname{th} \varkappa\pi \frac{H-y}{2Q}\right),$$

где

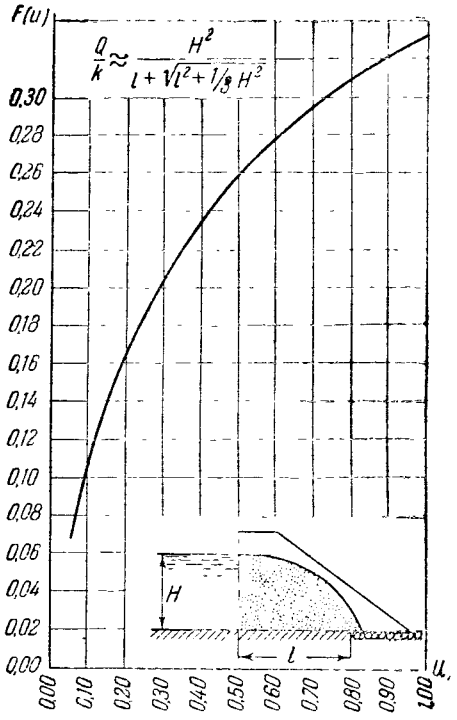
$$F(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\left(u \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(u \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2}\right)\right] d\tau.$$

На фиг. 200 приведен график зависимости F от u [12].

С помощью (7.44) можно найти для окрестности точки C — выхода депрессионной кривой в нижний бьеф — выражение производной

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\varkappa y}{Q} + \left[\left(\sin \beta\pi - \frac{\varkappa h_2}{Q} \cos \beta\pi\right) \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}^{2-2\beta} \frac{\pi\tau}{2}\, d\tau}{1 - u^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\tau}{2}} - \right. \\ \left. - \frac{2 \sin \beta\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}^{2-2\beta} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{arc\,ctg}\left(u \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2}\right) d\tau}{1 + u^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi\tau}{2}}\right](1 - u^2).$$

При $u \to 0$ оба интеграла стремятся к бесконечности и, вообще говоря, $\frac{dx}{dy} \to \pm\infty$. Для уточнения вопроса о знаке сделаем подстановку



Фиг. 200.

$$u \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi s}{2},$$

что даст:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\varkappa y}{Q} + u^{2\beta-1}(1-u^2)\left[\left(\sin\beta\pi - \frac{\varkappa h_2}{Q}\cos\beta\pi\right)\int_0^1 \frac{\operatorname{ctg}^{2\beta}\frac{\pi s}{2}\,ds}{1+u^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi s}{2}} - \right.$$

$$\left. - \sin\beta\pi \int_0^1 \frac{s\operatorname{ctg}^{2\beta}\frac{\pi s}{2}\,ds}{1+u^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi s}{2}}\right]. \quad (7.45)$$

Отсюда найдем предел выражения

$$\lim_{u\to 0}\left(u^{1-2\beta}\frac{dx}{dy}\right) = \left(\sin\beta\pi - \frac{\varkappa h_2}{Q}\cos\beta\pi\right)\cdot\frac{1}{\cos\beta\pi} - \sin\beta\pi f_1\left(\frac{1}{2}-\beta\right).$$

Мы видим, что знак производной $\frac{dx}{dy}$ зависит от знака величины

$$A = \frac{\varkappa h^2}{Q} - \operatorname{tg}\beta\pi + \sin\beta\pi f_1\left(\frac{1}{2}-\beta\right).$$

При $A=0$ для $\frac{dx}{dy}$ получается конечное, отличное от нуля значение.

Если $A>0$, то

$$\frac{dx}{dy}\to-\infty,$$

т. е. кривая депрессии подходит к низовому откосу горизонтально.

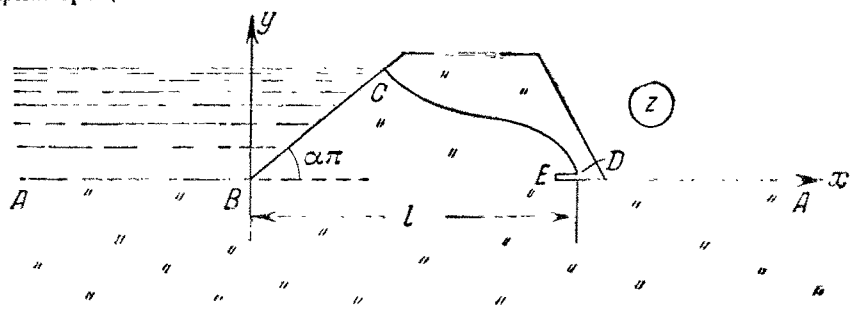
Если $A<0$, т. е. $\frac{dx}{dy}\to+\infty$, то кривая депрессии подходит к низовому откосу, имея касательную, направленную вдоль откоса к его подошве. Очевидно, эта последняя форма движения физически нереальна, и этот случай соответствует движению с участком высачивания.

Таким образом, для отсутствия участка высачивания необходимо и достаточно, чтобы $A\geqslant 0$, т. е.

$$h_2\geqslant \sin\pi\beta\left[\frac{1}{\cos\pi\beta}-f_1\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right]\frac{Q}{k}. \tag{7.46}$$

Способы приближенного вычисления величины промежутка высачивания указаны в цитированной книге [12].

§ 8. Земляная плотина с горизонтальным дренажем на водопроницаемом основании бесконечной глубины [3]. В большинстве случаев земляные плотины возводятся на проницаемом грунте, причем иногда бывает, что коэффициент фильтрации тела плотины мало отличается от коэффициента фильтрации основания. При выходе потока в нижний бьеф устраивают *фильтр* (или *обратный фильтр*, как его часто называют). Назначение обратного фильтра — препятствовать созданию условий для выноса частиц грунта (суффозии). Обычно обратный фильтр устраивается из нескольких слоев грунтов различной крупности с возрастанием крупности частиц по ходу фильтрации.



Фиг. 201.

Простейшей схемой такого типа является земляная плотина с горизонтальным дренажем на водопроницаемом основании бесконечной глубины (фиг. 201).

Мы вводили комплексный потенциал ω, равный

$$\omega=\varphi+i\psi,\quad \varphi=-k\left(\frac{p}{\rho g}+y\right) \tag{8.1}$$

(см. главу II, § 1).

Введем *приведенный комплексный потенциал* Ω с помощью равенства

$$\Omega = \frac{\omega}{kh} = \Phi + i\Psi, \tag{8.2}$$

где

$$\Phi = \frac{\varphi}{kh}, \quad \Psi = \frac{\psi}{kh}.$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, h — уровень воды в верхнем бьефе. В нижнем бьефе по принятой схеме вода отсутствует. Ω является безразмерной величиной. Условия на границах для Ω следующие.

Вдоль депрессионной кривой CD, считая атмосферное давление равным нулю, получим, что $\varphi = -ky$; следовательно,

$$\Phi = -\frac{y}{h}$$

или

$$y = -h\Phi; \tag{8.3}$$

Вдоль контура верхнего бьефа ABC, где

$$p = \rho g(h - y),$$

имеем $\varphi = -\varkappa h$; следовательно,

$$\Phi = -1.$$

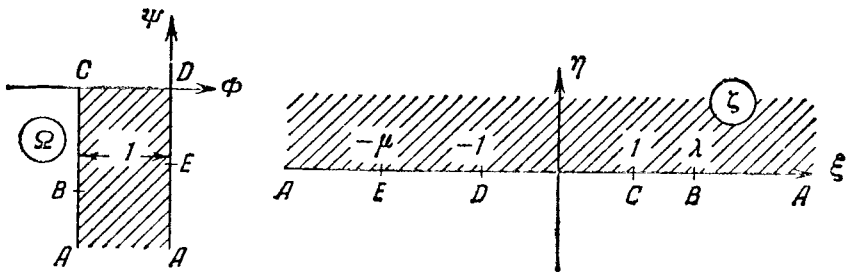
Вдоль отрезка DE и границы нижнего бьефа EA имеем $p = 0$, $y = 0$, а потому

$$\Phi = 0.$$

Область приведенного комплексного потенциала, если принять еще

$$\Psi = 0$$

вдоль свободной поверхности, имеет вид полуполосы фиг. 202. Отображая



Фиг. 202.

эту область на верхнюю полуплоскость плоскости ζ (фиг. 202), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= -\cos \pi\Omega, \\ \Omega &= \frac{1}{\pi} \arccos(-\zeta). \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Мы будем рассматривать z как функцию от Ω. Тогда вдоль различных границ области Ω будем иметь следующие условия для $z(\Omega)$. Вдоль AB и DEA

$$y = 0. \tag{8.5}$$

Вдоль откоса BC можно написать уравнение откоса

$$x \sin \alpha\pi - y \cos \alpha\pi = 0 \tag{8.6}$$

или в комплексном виде

$$\operatorname{Re}(ize^{-\alpha\pi i}) = 0. \tag{8.7}$$

Вдоль депрессионной кривой

$$y = -h\Phi. \tag{8.8}$$

Рассматривая теперь z как функцию ζ, получим на различных участках оси ξ вместо (8.5), (8.7) и (8.8) следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} y = \operatorname{Im} z = 0 \quad &\text{для } \xi > \lambda \text{ и } \xi < -1, \\ \operatorname{Im}(ze^{-\alpha\pi i}) = 0 \quad &\text{для } 1 < \xi < \lambda, \\ y = \operatorname{Im} z = -\frac{h}{\pi} \arccos(-\xi) \quad &\text{для } -1 < \xi < 1. \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Последнее условие получается из (8.8), если принять во внимание, что для $-1 < \xi < 1$ имеем $\Omega = \Phi$.

Условия (8.9) являются условиями того вида, которые мы рассмотрели в § 2. Это позволяет свести задачу к задаче Дирихле. Но предварительно нужно исследовать поведение функции $z(\zeta)$ на бесконечности.

Формулы (8.9) показывают, что z принимает действительные значения на отрезках $\xi > \lambda$ и $\xi < -1$ действительной оси. По принципу симметрии Римана-Шварца, если функция, аналитическая в области, содержащей отрезок оси абсцисс, принимает на этом отрезке непрерывные действительные значения, то эту функцию можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость, причем в сопряженных точках она будет иметь сопряженные значения.

На этом основании $z(\zeta)$ будет аналитической на всей плоскости с разрезом вдоль действительной оси от точки $\xi = -1$ до точки $\xi = \lambda$. Функция $\frac{1}{z}$ будет разлагаться в ряд Лорана в окрестности бесконечно далекой точки, причем так как $z(\infty) = \infty$, то $\frac{1}{z}$ будет разлагаться лишь по отрицательным степеням ζ:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}. \tag{8.10}$$

При этом $a_1 \neq 0$, так как на бесконечности

$$z \approx a_1 \zeta.$$

Все коэффициенты a_n действительны. Это следует из того, что на бесконечности вдоль оси ξ переменная z имеет действительные значения (ось ξ переходит в ось x), и можно написать:

$$\operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\xi^n} = 0$$

при достаточно большом ξ. Но тогда, умножая это уравнение на ξ и полагая $\xi = \infty$, получим, что

$$\operatorname{Im} a_1 = 0.$$

Продолжая этот процесс дальше, убедимся, что все a_n действительны.

Из (8.10) вытекает, что

$$z(\zeta) = b_{-1}\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n}, \tag{8.11}$$

причем все коэффициенты ряда действительны.

Задача отыскания функции $z(\zeta)$ сводится теперь к задаче, рассмотренной у нас в § 2. В качестве функции $T(\zeta)$ возьмем функцию

$$T(\zeta) = i(1-\zeta)^{\alpha}(\lambda-\zeta)^{1-\alpha}. \tag{8.12}$$

Выберем ту ветвь этой многозначной функции, для которой

$$\arg w = \frac{\pi}{2} \text{ для } \zeta = \xi < 1.$$

Тогда для $-\infty < \xi < 1$

$$T(\xi) = e^{\frac{\pi i}{2}}(1-\xi)^{\alpha}(\lambda-\xi)^{1-\alpha}. \tag{8.13}$$

После обхода точки $\xi = 1$ на угол π в отрицательном направлении аргумент $(1-\zeta)^{\alpha}$ получит приращение $-\alpha\pi$, и для $1 < \xi < \lambda$ можно написать:

$$T(\xi) = (\xi-1)^{\alpha}(\lambda-\xi)^{1-\alpha}e^{\pi i\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}. \tag{8.14}$$

Для промежутка $\lambda < \xi < \infty$ будем иметь:

$$T(\xi) = (\xi-1)^{\alpha}(\xi-\lambda)^{1-\alpha}e^{-\frac{\pi i}{2}}. \tag{8.15}$$

Чтобы исследовать поведение $T(\zeta)$ на бесконечности, в равенстве (8.15) вынесем ξ за скобки, переписав его так:

$$T(\xi) = -i\xi\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{\lambda}{\xi}\right)^{1-\alpha} = -i\xi - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\xi^n},$$

где c_n — действительные коэффициенты. Но тогда и

$$T(\zeta) = -i\zeta - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n}. \tag{8.16}$$

Произведение $z(\zeta)\,T(\zeta)$ на основании (8.11) и (8.16) вблизи бесконечно далекой точки имеет вид

$$z(\zeta)\,T(\zeta) = -b_{-1}i\zeta^2 - i(b_0 + b_{-1}c_0)\zeta + i\sum_{n=0}^{\infty}\partial_n\zeta^{-n},$$

где коэффициенты ∂_n действительны.

Составим функцию

$$W(\zeta) = z(\zeta)\,T(\zeta) + b_{-1}i\zeta^2 + i(b_0 + b_{-1}c_0)\zeta. \tag{8.17}$$

Она будет аналитической вблизи бесконечно далекой точки. Условия для $W(\zeta)$ имеют в силу (8.9) и (8.13), (8.14), (8.15) следующий вид:

$$\operatorname{Re} W(\xi) = f^*(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{h}{\pi}\arccos(-\xi)(1-\xi)^{\alpha}(\lambda-\xi)^{1-\alpha} & \text{для } |\xi| < 1, \\ 0 & \text{для } |\xi| > 1. \end{cases} \tag{8.18}$$

Для определения функции $W(\zeta)$ можно теперь применить формулу (1.6). Получим:

$$W(\zeta) = -\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{t-\zeta} + ic, \tag{8.19}$$

где c — действительная постоянная, подлежащая определению.

Учитывая выражения (8.17) и (8.12), мы можем написать по сокращении на i:

$$(1-\zeta)^{\alpha}(\lambda-\zeta)^{1-\alpha}z(\zeta) + b_{-1}\zeta^2 + (b_0 + b_{-1}c_0)\zeta = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{t-\zeta} + c. \tag{8.20}$$

В уравнение (8.20) входит ряд неизвестных постоянных. Для их исключения применяется такой метод. Положим $\zeta = 1$. Получим:

$$b_{-1} + (b_0 + b_{-1}c_0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{t-1} + c.$$

Это равенство вычитается почленно из (8.20), и полученный результат сокращается на $1-\zeta$. Будем иметь:

$$(1-\zeta)^{\alpha-1}(\lambda-\zeta)^{1-\alpha}z(\zeta) - b_{-1}(\zeta+1) - (b_0 + b_{-1}c_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{(t-1)(t-\zeta)}.$$

Теперь полагаем $\zeta = \lambda$. Производя вычитание и сокращение на $\lambda-\zeta$, получаем:

$$(1-\zeta)^{\alpha-1}(\lambda-\zeta)^{-\alpha}z(\zeta) + b_{-1} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{(1-t)(\lambda-t)(t-\zeta)}. \tag{8.21}$$

Можно выбрать оси координат так, чтобы при $\zeta = \lambda$ получилось $z = 0$ (фиг. 201, 202). При этом, имея в виду, что обходу точки $\zeta = \lambda$ на угол π в плоскости ζ отвечает обход на угол $\pi(1+\alpha)$ в плоскости z, будем иметь для z такое разложение:

$$z = (\lambda-\zeta)^{1+\alpha}[A + B(\zeta-\lambda) + \ldots].$$

Отсюда видно, что произведение

$$(\lambda-\zeta)^{-\alpha}z(\zeta) = (\lambda-\zeta)[A + B(\zeta-\lambda) + \ldots]$$

равно нулю при $\zeta = \lambda$. Поэтому, полагая в (8.21) $\zeta = \lambda$, получим:

$$b_{-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{(1-t)(\lambda-t)^2}.$$

Подставим полученное значение b_{-1} в (8.21) и перепишем это уравнение в следующем виде:

$$z(\zeta) = -\frac{1}{\pi}(1-\zeta)^{1-\alpha}(\lambda-\zeta)^{\alpha+1}\int_{-1}^{1}\frac{f^*(t)\,dt}{(1-t)(\lambda-t)^2(t-\zeta)}. \tag{8.22}$$

Вспоминая значение (8.18) для $f^*(t)$, получим:

$$z(\zeta) = \frac{h}{\pi^2}(1-\zeta)^{1-\alpha}(\lambda-\zeta)^{1+\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}(t-\zeta)}. \qquad (8.23)$$

Присоединяя к этому уравнение (8.4)

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\arccos(-\zeta),$$

мы получаем решение задачи в параметрической форме.

В уравнении (8.23) содержится неизвестный параметр λ. Для его определения используем условие, что $z = l$ при $\zeta = -1$ (отрезок l на фиг. 201 есть расстояние между точками B и D). Из (8.23) получим:

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\pi^2}2^{1-\alpha}(\lambda+1)^{1+\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}(1+t)}. \qquad (8.24)$$

Это трансцендентное уравнение, служащее для определения λ по заданному $\frac{l}{h}$. Так как функция

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-t}$$

монотонно убывающая относительно λ при всяком $-1<t<1$, то такой же будет и функция

$$\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-t}\right)^{1+\alpha},$$

а также правая часть уравнения (8.24). Поэтому каждому заданному значению $\frac{l}{h}$ соответствует единственное значение λ.

Преобразование основных формул. Подставим в формулу (8.23)

$$\zeta = -\cos\pi\Omega$$

и одновременно

$$t = -\cos\pi\tau.$$

Получим:

$$z = h(1+\cos\pi\Omega)^{1-\alpha}(\lambda-\cos\pi\Omega)^{1+\alpha}\times$$

$$\times\int_{0}^{1}\frac{\tau\sin\pi\tau\,d\tau}{(1+\cos\pi\tau)^{1-\alpha}(\lambda+\cos\pi\tau)^{1+\alpha}(\cos\pi\Omega-\cos\pi\tau)}.$$

Сделаем преобразования, перейдя к тригонометрическим функциям половинного угла и вводя обозначение

$$f(\tau) = \frac{\left(1+\frac{2}{\lambda-1}\cos^2\frac{\pi\tau}{2}\right)^{1+\alpha}}{\cos^{2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}}. \qquad (8.25)$$

Получим:

$$z = h\cos^2\frac{\pi\Omega}{2} f(\Omega) \int_0^1 \frac{\tau \sin \pi\tau \, d\tau}{\cos^2\frac{\pi\tau}{2} f(\tau)(\cos\pi\Omega - \cos\pi\tau)}.$$

При $\tau = 1$ подинтегральная функция обращается в бесконечность. Применяя преобразование

$$\frac{\cos^2\frac{\pi\Omega}{2}}{\cos^2\frac{\pi\tau}{2}(\cos\pi\Omega - \cos\pi\tau)} = \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi\tau}{2}} + \frac{1}{\cos\pi\Omega - \cos\pi\tau},$$

разобьем интеграл на два слагаемых:

$$z = hf(\Omega)\left\{c + \int_0^1 \frac{\tau \sin \pi\tau \, d\tau}{f(\tau)(\cos\pi\Omega - \cos\pi\tau)}\right\}. \tag{8.26}$$

Здесь

$$c = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\tau \sin \pi\tau \, d\tau}{\cos^2\frac{\pi\tau}{2} f(\tau)} = \int_0^1 \frac{\tau \operatorname{tg}\frac{\pi\tau}{2} d\tau}{f(\tau)}.$$

Положив

$$\tau = 1 - t,$$

получим:

$$f(\tau) = f(1-t) = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{1+\alpha} \frac{\left(1 - \frac{2}{\lambda+1}\sin^2\frac{\pi t}{2}\right)^{1+\alpha}}{\sin^{2\alpha}\frac{\pi t}{2}},$$

и интеграл для c разобьется на два:

$$c = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{\sin^{2\alpha-1}\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi t}{2} dt}{\left(1 - \frac{2}{\lambda+1}\sin^2\frac{\pi t}{2}\right)^{1+\alpha}} - \int_0^1 \frac{t \operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2} dt}{f(1-t)}.$$

Интеграл в первом слагаемом подстановкой

$$\sin^2\frac{\pi t}{2} = x$$

приводится к интегралу

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-\mu x)^{-\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha}(1-\mu)^{-\alpha}$$

и получается равным

$$\frac{1}{\pi\alpha}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^{-\alpha}.$$

Поэтому, вводя обозначение

$$J_1(\alpha, \lambda) = \int_0^1 \frac{t \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2}\, dt}{f(1-t)}, \tag{8.27}$$

найдем, что

$$c(\alpha, \lambda) = \frac{1}{\pi\alpha}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right) - J_1. \tag{8.28}$$

Уравнение (8.24), служащее для определения параметра λ, можно привести к виду

$$\frac{l}{h} = \frac{1}{\pi\alpha}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{1+\alpha}(J_2 - J_1), \tag{8.29}$$

где

$$J_2(\alpha, \lambda) = \int_0^1 \frac{t \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2}\, dt}{f(t)}. \tag{8.30}$$

Чтобы получить выражение комплексной скорости, нужно принять во внимание, что

$$\frac{d\omega}{dz} = kh\,\frac{d\Omega}{dz}.$$

Проще получить величину, обратную комплексной скорости, а именно:

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{u - iv} = \frac{1}{kh}\,\frac{dz}{d\Omega}.$$

Имеем:

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{kh}\,\frac{dz}{d\zeta} : \frac{d\Omega}{d\zeta}.$$

Согласно (8.4)

$$\frac{d\Omega}{d\zeta} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Поэтому

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{\pi}{kh}\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{dz}{d\zeta}. \tag{8.31}$$

Прежде чем вычислять производную $z'(\zeta)$, преобразуем выражение (8.23) для $z(\zeta)$. Заметим, что

$$\frac{1-\zeta}{t-\zeta} = \frac{1-t}{t-\zeta} + 1$$

и

$$\lambda - \zeta = (\lambda - t) + (t - \zeta).$$

Отсюда

$$\frac{(\lambda-\zeta)(1-\zeta)}{t-\zeta} = \frac{(\lambda-t)(1-t)}{t-\zeta} + (1-t) + (\lambda-\zeta)$$

и интеграл (8.23), внеся в него множитель $(1-\zeta)(\lambda-\zeta)$, можно разбить на три слагаемых:

$$z(\zeta) = \frac{h}{\pi^2}\left(\frac{\lambda-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha}\left\{\int_{-1}^{1} \frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{-\alpha}(\lambda-t)^{\alpha}(t-\zeta)} + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}} + (\lambda-\zeta)\int_{-1}^{1} \frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}}\right\}. \tag{8.32}$$

Положив

$$T(\zeta)=\left(\frac{\lambda-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha},$$

найдем:

$$T'(\zeta)=\alpha(\lambda-1)\left(\frac{\lambda-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha-1}.$$

Переходя к дифференцированию $z(\zeta)$, можем написать:

$$z'(\zeta)=\frac{h}{\pi^2}T'(\zeta)\int_{-1}^{1}\frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}(t-\zeta)}+$$

$$+\frac{h}{\pi^2}T(\zeta)\left\{\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-\zeta)^2}-\int_{-1}^{1}\frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}}\right\}, \quad (8.33)$$

где

$$\varphi(t)=\frac{\arccos(-t)}{(1-t)^{-\alpha}(\lambda-t)^{\alpha}}.$$

Здесь мы заменили во множителе при $T'(\zeta)$ три слагаемых одним выражением — тем, из которого эти слагаемые и были получены.

Займемся преобразованием по частям интеграла

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-\zeta)^2}=-\frac{\varphi(t)}{t-\zeta}\Bigg|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-\zeta}.$$

Нетрудно видеть, что выделенное при интегрировании по частям слагаемое равно нулю. (Разложение интеграла на три слагаемых нужно было именно для того, чтобы выделить этот член.) При этом

$$\varphi'(t)=\frac{1}{(1-t)^{1/2-\alpha}(1+t)^{1/2}(\lambda-t)^{\alpha}}-\alpha(\lambda-1)\frac{\arccos(-t)}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}},$$

а потому

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-\zeta)^2}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{1/2-\alpha}(1+t)^{1/2}(\lambda-t)^{\alpha}(t-\zeta)}-\alpha(\lambda-1)\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}.$$

При подстановке этих выражений в уравнение (8.33) оказывается, что все слагаемые сокращаются, кроме двух, которые дают:

$$z'(\zeta)=\frac{h}{\pi^2}\left(\frac{\lambda-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{1/2-\alpha}\sqrt{1+t}(\lambda-t)^{\alpha}(t-\zeta)}-\right.$$

$$\left.-\int_{-1}^{1}\frac{\arccos(-t)\,dt}{(1-t)^{1-\alpha}(\lambda-t)^{1+\alpha}}\right\}.$$

Теперь, учитывая (8.31) и вспоминая, что

$$\zeta = -\cos \pi\Omega,$$

найдем выражение функции, обратной комплексной скорости:

$$\frac{1}{u - iv} =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \sin \pi\Omega \,(\lambda + \cos \pi\Omega)^{\alpha} (1 + \cos \pi\Omega)^{-\alpha} \left\{ -A + \int_{-1}^{1} \frac{\Phi(t)\, dt}{t + \cos \pi\Omega} \right\}, \quad (8.34)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \frac{\arccos(-t)\, dt}{(1-t)^{1-\alpha} (\lambda - t)^{1+\alpha}}, \\ \Phi(t) &= \frac{1}{(1-t)^{1/2-\alpha} (1+t)^{1/2} (\lambda - t)^{\alpha}}. \end{aligned}\right\} \quad (8.35)$$

Если заменить еще переменную интегрирования t, полагая

$$t = -\cos \pi\tau,$$

то можно переписать (8.34) так:

$$\frac{1}{u - iv} = \frac{\sin \pi\Omega}{k\pi} F(\Omega) \left\{ \frac{\pi c}{\lambda - 1} - \int_{0}^{1} \frac{d\tau}{F(\tau)(\cos \pi\Omega - \cos \pi\tau)} \right\}, \quad (8.36)$$

где

$$F(\tau) = \frac{\left(1 + \frac{2}{\lambda - 1} \cos^2 \frac{\pi\tau}{2}\right)^{\alpha}}{\cos^{2\alpha} \frac{\pi\tau}{2}}.$$

Чтобы получить уравнение депрессионной кривой, нужно в (8.26) перейти к пределу при $\Omega \to \Phi$. При этом интеграл (8.26) становится несобственным. Подобно тому как мы поступали раньше, для перехода к пределу перепишем указанный интеграл в виде

$$J = \int_{0}^{1} \frac{\tau \sin \pi\tau\, d\tau}{f(\tau)(\cos \pi\Omega - \cos \pi\tau)} =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{\left(\frac{\tau}{f(t)} - \frac{\Omega}{f(\Omega)}\right) \sin \pi\tau}{\cos \pi\Omega - \cos \pi\tau}\, d\tau + \frac{\Omega}{f(\Omega)} \int_{0}^{1} \frac{\sin \pi\tau\, d\tau}{(\cos \pi\Omega - \cos \pi\tau)}.$$

Второй интеграл дает:

$$\lim_{\Omega \to \Phi} \int_{0}^{1} \frac{\sin \pi\tau\, d\tau}{\cos \pi\Omega - \cos \pi\tau} = i + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \cos \pi\Phi}{1 - \cos \pi\Phi}.$$

Таким образом, для депрессионной кривой получаем из (8.26):

$$z = hf(\Phi)\, c + hf(\Phi) \int_{0}^{1} \frac{\left[\frac{\tau}{f(\tau)} - \frac{\Phi}{f(\Phi)}\right] \sin \pi\tau}{\cos \pi\Phi - \cos \pi\tau}\, d\tau -$$

$$- h\left(\Phi i + \frac{\Phi}{\pi} \ln \frac{1 + \cos \pi\Phi}{1 - \cos \pi\Phi}\right).$$

Приравнивание мнимых частей этого уравнения даст:

$$y = -h\Phi,$$

что соответствует уравнению (8.3). Отделение действительных частей с подстановкой

$$\Phi = -\frac{y}{h}$$

дает уравнение свободной поверхности

$$x = \frac{2y}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2h} + \operatorname{ch} f\left(\frac{y}{h}\right) + J\left(\frac{y}{h}\right), \tag{8.37}$$

где

$$J(u) = u \int_0^1 \frac{\frac{\tau f(u)}{u f(\tau)} - 1}{\cos \pi u - \cos \pi \tau} \sin \pi \tau \, d\tau, \tag{8.38}$$

причем $f(u)$ имеет значение (8.25).

Чтобы определить длину отрезка ED дренажа, нужно использовать условие, что скорость обращается в бесконечность в точке E. Можно было бы приравнять нулю правую часть выражения (8.36) и искать его решение для $\Omega = i\psi$, когда $-\infty < \psi < 0$. Ниже будет дана приближенная формула для вычисления $b = ED$.

Приближенные формулы. Уравнение (8.37) неудобно при вычислении x для y, близких к h. Поэтому С. Н. Нумеров предлагает следующее преобразование. Он вычисляет производную

$$[\sqrt{1-\zeta^2}\, z'(\zeta)]' = -\frac{h}{\pi^2}\left\{\frac{2^\alpha \pi^2 c}{(\lambda-1)^{1+\alpha}} \frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta)^{1/2-\alpha}(1+\zeta)^{1/2}(\lambda-\zeta)^\alpha\right] - \right.$$

$$\left. - 2^\alpha (\lambda-1)^{1-\alpha} B (1-\zeta)^{-1/2-\alpha}(1+\zeta)^{-1/2}(\lambda-\zeta)^{\alpha-1}\right\}, \tag{8.39}$$

где

$$B = \left(\frac{\alpha}{\lambda-1} - \alpha^2\right) c - \frac{2}{\pi(\lambda-1)} \int_0^1 \frac{\sin^{2+2\alpha}\frac{\pi\tau}{2}\, d\tau}{\left(1 + \frac{2}{\lambda-1}\sin^2\frac{\pi\tau}{2}\right)^\alpha}.$$

Для того чтобы получить формулу (8.39), можно поступить аналогично тому, как это было при вычислении $z'(\zeta)$. А именно, напишем:

$$z'\sqrt{1-\zeta^2} = -\frac{h}{\pi^2} P(\zeta)\left\{A - \int_{-1}^{1} \frac{\Phi(t)\, dt}{t-\zeta}\right\}, \tag{8.40}$$

где

$$P(\zeta) = (\lambda-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^{1/2-\alpha}(1+\zeta)^{1/2}.$$

Прежде чем дифференцировать интеграл правой части равенства (8.40), внесем в него множитель $(1-\zeta)(1+\zeta)$ и разобьем на слагаемые дробь

$$\frac{(1-\zeta)(1+\zeta)}{t-\zeta} = \frac{(1+t)(1-t)}{t-\zeta} + (1+t) - (1-\zeta).$$

Обозначая

$$P_1(\zeta) = (\lambda-\zeta)^\alpha (1-\zeta)^{-1/2-\alpha}(1+\zeta)^{-1/2},$$

мы можем переписать (8.40) в виде

$$z'\sqrt{1-\zeta^2}=-\frac{h}{\pi^2}\left\{AP(\zeta)-P_1(\zeta)\left[\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}+\right.\right.$$

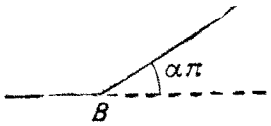
$$\left.\left.+\int_{-1}^{1}(1+t)\varphi(t)\,dt-(1-\zeta)\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt\right]\right\}$$

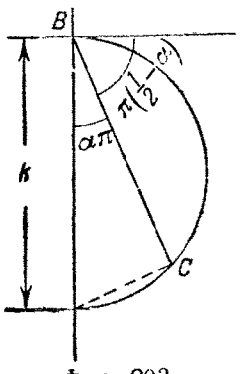
и поступать дальше, как при вычислении $z'(\zeta)$.

Возвращаясь к уравнению (8.39), проинтегрируем его, принимая во внимание, что (фиг. 203)

$$\sqrt{1-\zeta^2}\,z'(\zeta)\Big|_{\zeta=1}=-\frac{kh}{\pi}\frac{1}{u-iv}\Big|_{\zeta=1}=$$

$$=-\frac{he^{\pi i(\alpha-1/2)}}{\pi\cos\alpha\pi}=\frac{he^{\pi i(\alpha+1/2)}}{\pi\cos\alpha\pi}.$$





Фиг. 203.

Найдем для $z'(\zeta)$ новое выражение

$$z'(\zeta)=\frac{he^{\pi i(\alpha+1/2)}}{\pi\cos\alpha\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}-\frac{ch}{(\lambda-1)^{\alpha+1}2^{-\alpha}}\left(\frac{\lambda-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha}+$$

$$+2^{\alpha}(\lambda-1)^{1-\alpha}\frac{Bh}{\sqrt{1-\zeta^2}}\times$$

$$\times\int_{1}^{\zeta}(1-t)^{-1/2-\alpha}(1+t)^{-1/2}(\lambda-t)^{\alpha-1}dt. \qquad (8.41)$$

Введем новую переменную интегрирования

$$\eta=\frac{1-t}{2} \qquad (8.42)$$

и вычислим интеграл с помощью разложения в ряд по степеням η. Получим:

$$J=\int_{1}^{\zeta}(1-t)^{-1/2-\alpha}(1+t)^{-1/2}(\lambda-t)^{\alpha-1}\,dt=$$

$$=-2^{-\alpha}(\lambda-1)^{\alpha-1}\int_{0}^{\frac{1-\zeta}{2}}\eta^{-1/2-\alpha}(1-\eta)^{-1/2}\left(1+\frac{2}{\lambda-1}\eta\right)^{\alpha-1}d\eta=$$

$$=-2^{-\alpha}(\lambda-1)^{\alpha-1}\left\{\frac{1}{2^{1/2-\alpha}(1-\zeta)^{\alpha-1/2}}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}-\frac{D}{\frac{3}{2}-\alpha}\frac{1-\zeta}{2}+\cdots\right]\right\},$$

где

$$D=\frac{2(1-\alpha)}{1-\lambda}-\frac{1}{2}.$$

Теперь для $z'(\zeta)$ будем иметь:

$$z'(\zeta)=\frac{he^{\pi i(\alpha+1/2)}}{\pi\cos\alpha\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}-\frac{hc}{2^{1-\alpha}(\lambda-1)^{\alpha+1}}\left(\frac{\lambda-\zeta}{1-\zeta}\right)^{\alpha}-$$

$$-\frac{Bh}{2^{1/2-\alpha}(1-\zeta)^{\alpha}(1+\zeta)^{1/2}}\left\{\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}-\frac{D}{\frac{3}{2}-\alpha}\frac{1-\zeta}{2}+\cdots\right\}.$$

Проинтегрируем это выражение в пределах от 1 до ζ, причем под знаком интегралов опять применим подстановку (8.42). Получим, принимая во внимание, что при $\zeta = 1$

$$z = \frac{he^{\pi i\alpha}}{\sin \alpha\pi},$$

следующее уравнение:

$$\frac{z}{h} = \frac{e^{\pi i\alpha}}{\sin \alpha\pi} - \frac{e^{i\pi(1/2+\alpha)}}{\pi \cos \alpha\pi} \arccos \zeta + \frac{2c}{1-\lambda} \int_0^{\frac{1-\zeta}{2}} \eta^{-\alpha} \left(1 + \frac{2}{\lambda - 1}\eta\right)^{\alpha} d\eta +$$

$$+ B \int_0^{\frac{1-\zeta}{2}} \eta^{-\alpha} (1-\eta)^{-1/2} \left\{\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha} - \frac{D}{\frac{3}{2}-\alpha}\eta + \ldots\right\} d\eta.$$

Разлагая подинтегральные функции в ряды по степеням η, найдем в окрестности точки $\zeta = 1$ такое разложение:

$$\frac{z}{h} = \frac{e^{i\alpha\pi}}{\sin \alpha\pi} - \frac{e^{i\pi(1/2+\alpha)}}{\pi \cos \alpha\pi} \arccos \zeta +$$

$$+ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{B}{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{2c}{1-\lambda}\right)\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^{1-\alpha} - \frac{E}{2-\alpha}\left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^{2-\alpha} + \ldots, \qquad (8.43)$$

где

$$E = B\left\{\frac{1}{\frac{3}{2}-\alpha}\left[\frac{2(1-\alpha)}{1-\lambda} - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha}\right\} - \frac{4c\alpha}{(1-\lambda)^2}.$$

Депрессионной кривой соответствуют значения ζ между -1 и 1, причем $\zeta = -\cos \pi\Phi$, так как здесь $\psi = 0$.

Кроме того, на свободной поверхности

$$\Phi = -\frac{y}{h},$$

так что

$$\zeta = -\cos\frac{\pi y}{h}. \qquad (8.44)$$

Отделим действительную часть в уравнении (8.43). Принимая во внимание (8.44) и учитывая, что $1 - \zeta = 2\cos^2\frac{\pi y}{2h}$, получим такое представление уравнения депрессионной кривой у выхода из верхнего бьефа:

$$\frac{x}{h} = \operatorname{ctg} \alpha\pi + \operatorname{tg} \alpha\pi \left(1 - \frac{y}{h}\right) + a_1 \cos^{2-2\alpha}\frac{\pi y}{2h} + a_2 \cos^{4-2\alpha}\frac{\pi y}{2h} + \ldots,$$

где

$$a_1(\alpha, \lambda) = \frac{1}{(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\lambda-1)}\left\{c(1-\alpha) - \alpha^2 c(\lambda-1) - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{\pi t}{2}}{F(t)}\,dt\right\},$$

$$a_2(\alpha, \lambda) = \frac{1}{(2-\alpha)\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(\lambda-1)^2} \times$$

$$\times \left\{ c\alpha\left[(1-2\alpha)(2-\alpha) + (1-\alpha)^2(1+2\alpha)(\lambda-1) - \alpha(1-\alpha)(\lambda-1)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}(1-\alpha)\left[1-2\alpha-(\lambda-1)\right] \int_0^1 \frac{\cos^2\frac{\pi t}{2}}{F(t)}\, dt \right\}.$$

Для того чтобы определить ширину отрезка дренажа, С. Н. Нумеров дает представление $z(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = -1$:

$$z(\zeta) = l + \frac{hi}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\zeta\right) - h\left\{\frac{2c}{1-\lambda}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{\alpha} - 2B\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^{1-\alpha}\right\}\frac{1+\zeta}{2} + \ldots$$

Так как на границе дренажа $\Phi = 0$, $\Omega = i\Psi$, то отсюда получается уравнение для x:

$$x(\Psi) = l - h\Psi + \left\{\frac{2c}{1-\lambda}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{\alpha} - 2B\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^{1-\alpha}\right\}\operatorname{sh}^2\frac{\pi\Psi}{2} + \ldots \quad (8.45)$$

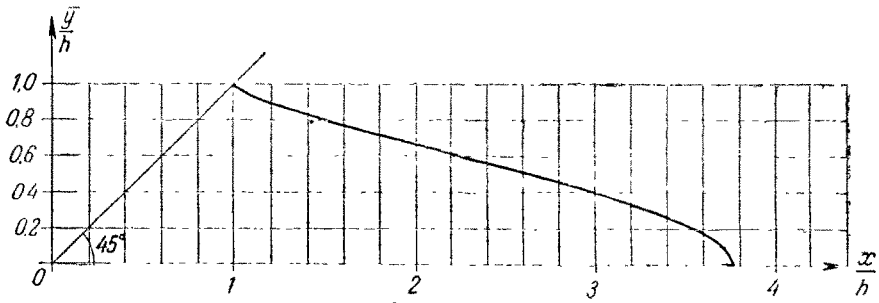
В точке E границы дренажа $x'(\Psi) = 0$. Найдя Ψ из этого условия и подставив его в уравнение (8.45), можно найти для отрезка дренажа b формулу

$$\frac{b}{h} = \frac{(\lambda+1)^{1-\alpha}(\lambda-1)^{1+\alpha}}{2\pi^2 c\left[\lambda+1-\alpha(\lambda-1)+\alpha^2(\lambda-1)^2\right] + 4\pi(\lambda-1)\int_0^1 \frac{\cos^2\frac{\pi t}{2}\, dt}{F(t)}}.$$

С. Н. Нумеров взял значения $\lambda = 2$, $\alpha = \frac{1}{4}$ и произвел вычисление отрезка дренажа и длины l. Получается

$$\frac{l}{h} = 3{,}76, \quad \frac{b}{h} = 0{,}046.$$

Вычисление координат точек депрессионной кривой дает график, приведенный на фиг. 204.



Фиг. 204

Отметим, что С. Н. Нумеровым дано решение задачи о фильтрации в земляной плотине на проницаемом основании бесконечной глубины с наклонным отрезком дренажа [4].

ГЛАВА VII

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Вводные замечания. Как указано автором настоящей книги [1], Н. Е. Кочин дал идею о применении к задачам о движении грунтовых вод аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Эта мысль была принята за основу метода, развитого в работах автора [1–3], а также Б. К. Ризенкампфа [8]. Метод был применен к решению двух задач о фильтрации в земляных плотинах: в прямоугольной перемычке [5, 8] и плотине, поперечное сечение которой представляет прямоугольную трапецию [4, 7, 10, 11]. В случае более сложных плотин [3] мы приходим к дифференциальным уравнениям с большим числом параметров, подлежащих определению, что затрудняет эффективное применение метода. Эта трудность вполне аналогична той, с которой мы встречаемся, применяя формулу Кристоффеля к многоугольнику с большим числом сторон.

С помощью аналитической теории дифференциальных уравнений удалось решить несколько задач о фильтрации в двух грунтах различной водопроницаемости (см. главу VIII).

§ 2. Условия на действительной оси для двух основных функций. В главе II мы рассмотрели условия на границах для тех движений, в которых границами являются отрезки прямых и депрессионные кривые. Можно заметить (глава II, § 2), что все эти условия представляются или в виде равенства нулю линейных функций от координат (уравнения прямых) или линейных функций от координаты и потенциала скорости или функции тока. Другими словами, на каждой из границ контурные условия могут быть представлены в виде двух уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} k_1 x + l_1 y + m_1 \varphi + n_1 \psi = p, \\ k_2 x + l_2 y + m_2 \varphi + n_2 \psi = q, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где коэффициенты суть постоянные.

Уравнения (2.1) можно записать, пользуясь знаком мнимой части функции Im, в таком виде:

$$\operatorname{Im}(kz + l\omega) = p, \qquad \operatorname{Im}(mz + n\omega) = q. \tag{2.2}$$

Здесь k, l, m, n — комплексные, p и q — действительные числа.

Можно проверить, что для всех границ, которые мы рассмотрели, определитель

$$\begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix}$$

отличен от нуля за исключением одного совершенно частного случая инфильтрации, когда $\varepsilon = \varkappa$ (глава II, § 2).

В дальнейшем мы будем отображать область движения и область комплексной скорости на полуплоскость вспомогательного комплексного переменного ζ. При этом границы области перейдут у нас в отрезки действительной оси плоскости ζ; поэтому значения ζ, соответствующие контуру области движения, будут действительны.

Продифференцируем (2.1) или (2.2) по действительной переменной ζ и введем обозначения

$$F = \frac{d\omega}{d\zeta}, \qquad Z = \frac{dz}{d\zeta}. \tag{2.3}$$

Тогда вместо условий (2.2) получим однородные условия следующего вида:

$$\operatorname{Im}(kZ + lF) = 0, \qquad \operatorname{Im}(mZ + nF) = 0. \tag{2.4}$$

Именно исходя из них, и удается построить всю теорию, развиваемую в настоящей главе.

Уравнения (2.4) показывают, что величины

$$kZ + lF \quad \text{и} \quad mZ + nF$$

принимают действительные значения на соответствующем отрезке действительной оси. Но тогда и отношение этих величин будет принимать только действительные значения, так что можно написать, например, такое равенство:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{kZ + lF}{mZ + nF}\right) = 0,$$

или, разделив числитель и знаменатель на Z:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{k + l\dfrac{F}{Z}}{m + n\dfrac{F}{Z}}\right) = 0.$$

Замечая, что

$$\frac{F}{Z} = \frac{d\omega}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\omega}{dz} = w,$$

получаем уравнение

$$\operatorname{Im}\left(\frac{k + lw}{m + nw}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Это уравнение определяет на плоскости w окружность. В самом деле, дробно-линейное преобразование

$$w_1 = \frac{k + lw}{m + nw}$$

переводит окружность плоскости w в окружность плоскости w_1 и обратно. Но это преобразование переводит уравнение (2.5) в уравнение

$$\operatorname{Im} w_1 = 0,$$

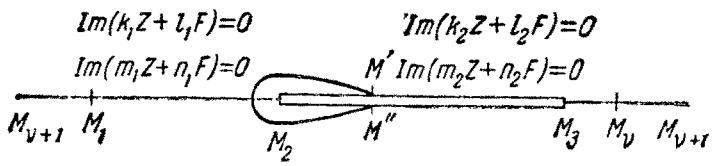
т. е. в уравнение действительной оси плоскости w_1, которая является окружностью в обобщенном смысле и переходит, следовательно, в некоторую окружность плоскости w.

Непосредственно видно, что окружность (2.5) проходит через точки $w = -\frac{k}{l}$ и $w = -\frac{m}{n}$.

§ 3. Задача об определении двух функций по условиям на действительной оси. Рассмотрим задачу о нахождении двух функций F и Z комплексного переменного ζ, если эти функции удовлетворяют на отрезках действительной оси условиям вида

$$\operatorname{Im}(k_s Z + l_s F) = 0, \quad \operatorname{Im}(m_s Z + n_s F) = 0 \qquad (3.1)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

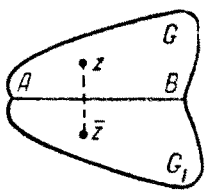
Возьмем два соседних участка M_1M_2 и M_2M_3 оси ζ и выпишем на них условия (фиг. 205).



Фиг. 205.

Покажем, что F и Z при обходе особой точки, например M_2, претерпевают линейную подстановку.

Мы продолжим функции на нижнюю полуплоскость и применим принцип симметрии Шварца в его простейшей форме: если функция $f(z)$ аналитическая в области G, примыкающей к действительной оси, и непрерывна вплоть до отрезка AB, причем на отрезке AB имеется условие $\operatorname{Im} f(z) = 0$, то $f(z)$ может быть продолжена в нижнюю полуплоскость так, что в сопряженных точках функция принимает сопряженные значения (фиг. 206). Другими словами, если мы в нижней полуплоскости возьмем точку z^*, причем



Фиг. 206.

$$z^* = \bar{z} = x + iy,$$

то получим, обозначая через f^* значение аналитического продолжения, что

$$f^*(z^*) = \overline{f(z)}. \qquad (3.2)$$

Применим это правило к линейным комбинациям, изображенным на отрезке M_1M_2. Сделаем надрез вдоль отрезка M_2M_3 и обозначим соответствующие точки на верхней и нижней сторонах разреза через M' и M'' (фиг. 205). Значения функций F и Z после обхода особой точки M_2, когда мы попадаем в точку M'', обозначим через F^* и Z^*. Тогда на основании равенства (3.2) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} k_1Z^* + l_1F^* &= \bar{k}_1\bar{Z} + \bar{l}_1\bar{F}, \\ m_1Z^* + n_1F^* &= \bar{m}_1\bar{Z} + \bar{n}_1\bar{F}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Обратимся теперь к условиям на отрезке M_2M_3. Заметив, что равенство

$$\operatorname{Im} w = 0$$

равносильно такому:

$$w - \bar{w} = 0,$$

перепишем условия на отрезке M_2M_3 в виде

$$\left.\begin{aligned} k_2Z + l_2F - \bar{k}_2\bar{Z} - \bar{l}_2\bar{F} &= 0, \\ m_2Z + n_2F - \bar{m}_2\bar{Z} - \bar{n}_2\bar{F} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Из уравнений (3.4) и (3.3) можно исключить $\bar{F}$ и $\bar{Z}$. Тогда получим зависимость F^*, Z^* от F, Z вида

$$\left.\begin{aligned} Z^* &= \alpha Z + \beta F, \\ F^* &= \gamma Z + \delta F. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Итак, мы видим, что функции F и Z действительно претерпевают линейную подстановку при обходе вокруг особой точки.

С помощью характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

можно привести (3.5) к каноническому виду [21]. Это значит, что существуют функции U, V, претерпевающие при обходе особых точек подстановку

$$U^* = \lambda' U, \quad V^* = \lambda'' V, \tag{3.7}$$

где λ', λ'' — корни характеристического уравнения, причем F и Z являются линейными комбинациями этих функций.

Равенство (3.7) имеет место, если λ' не равно λ''. В случае кратного корня уравнения (3.6) каноническая подстановка имеет вид

$$U^* = \lambda' U, \quad V^* = \alpha U + \lambda' V. \tag{3.8}$$

Введем числа α', α'', полагая

$$\alpha' = \frac{\ln \lambda'}{2\pi i}, \quad \alpha'' = \frac{\ln \lambda''}{2\pi i}. \tag{3.9}$$

Пусть точке M_2 соответствует значение ζ, равное ζ_0. Функции

$$(\zeta-\zeta_0)^{\alpha'},\quad (\zeta-\zeta_0)^{\alpha''}$$

при обходе особой точки ζ_0 в положительном направлении на угол 2π переходят соответственно в

$$e^{2\pi i\alpha'}(\zeta-\zeta_0)^{\alpha'}=\lambda'(\zeta-\zeta_0)^{\alpha'},$$
$$e^{2\pi i\alpha''}(\zeta-\zeta_0)^{\alpha''}=\lambda''(\zeta-\zeta_0)^{\alpha''},$$

отношения же

$$\frac{U}{(\zeta-\zeta_0)^{\alpha'}},\quad \frac{V}{(\zeta-\zeta_0)^{\alpha''}}$$

при этом не претерпевают изменений, т. е. остаются однозначными функциями. Следовательно, они могут быть представлены рядами Лорана около $\zeta=\zeta_0$. Для U и V получаем поэтому:

$$\left.\begin{aligned} U&=(\zeta-\zeta_0)^{\alpha'}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(\zeta-\zeta_0)^k,\\ V&=(\zeta-\zeta_0)^{\alpha''}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(\zeta-\zeta_0)^k. \end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

Если $\lambda'=\lambda''$, то первое выражение сохраняется, второе же будет, вообще говоря, содержать $\ln(\zeta-\zeta_0)$:

$$V=\frac{\alpha U}{2\pi i\alpha'}\ln(\zeta-\zeta_0)+U\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(\zeta-\zeta_0)^k.\tag{3.11}$$

Если ряды Лорана в формулах (3.10), (3.11) содержат лишь конечное число членов с отрицательной степенью $\zeta-\zeta_0$, точка ζ_0 называется *регулярной особой точкой*. Так как показатели α', α'' определяются формулами (3.9) лишь с точностью до целых слагаемых, то можно изменить их значения так, чтобы в этом случае степенные ряды не содержали членов с отрицательной степенью $\zeta-\zeta_0$.

Можно представить каноническую систему функций U, V в окрестности регулярной особой точки $\zeta=\zeta_0$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} U&=(\zeta-\zeta_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\zeta-\zeta_0)^k,\\ V&=(\zeta-\zeta_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\zeta-\zeta_0)^k+\alpha U\ln(\zeta-\zeta_0), \end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

причем a_0, b_0 отличны от нуля. Если $\alpha'-\alpha''$ не есть целое число или нуль, то следует считать $\alpha=0$.

В целях упрощения характеристического уравнения (3.6) можно поступить следующим образом. Заменим функции Z и F их линейными комбинациями, положив

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= k_2 Z + l_2 F, \\ F_1 &= m_2 Z + n_2 F. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Тогда на отрезке M_2M_3 будем иметь:

$$\operatorname{Im} Z_1 = 0, \quad \operatorname{Im} F_1 = 0. \tag{3.14}$$

На отрезке M_1M_2 получим условие того же вида, что и раньше, но с другими коэффициентами. Положим, что на M_1M_2

$$\operatorname{Im}(kZ_1 + lF_1) = 0, \quad \operatorname{Im}(mZ_1 + nF_1) = 0. \tag{3.15}$$

Тогда уравнения (3.3) и (3.4) упростятся; получим:

$$k_1 Z_1^* + l_1 F_1^* = \bar{k}\bar{Z}_1 + \bar{l}\bar{F}_1,$$
$$mZ_1^* + nF_1^* = \bar{m}\bar{Z}_1 + \bar{n}\bar{F}_1,$$
$$Z_1 = \bar{Z}_1, \quad F_1 = \bar{F}_1,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} Z_1^* &= \frac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} Z_1 + \frac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} F_1, \\ F_1^* &= \frac{k\bar{m} - \bar{k}m}{kn - ml} Z_1 + \frac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - ml} F_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\bar{k}n - \bar{m}l}{kn - ml} - \lambda & \dfrac{\bar{l}n - l\bar{n}}{kn - ml} \\ \dfrac{k\bar{m} - \bar{k}m}{kn - ml} & \dfrac{k\bar{n} - m\bar{l}}{kn - ml} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(kn - lm)\lambda^2 - (k\bar{n} - \bar{m}l + \bar{k}n - m\bar{l})\lambda + \bar{k}\bar{n} - \bar{l}\bar{m} = 0. \tag{3.17}$$

Корни этого уравнения λ' и λ'' должны совпадать с корнями уравнения (3.6), так как Z_1 и F_1 как линейные комбинации Z и F должны принадлежать тем же показателям. По найденным λ', λ'' с помощью (3.9) определяются показатели α', α''.

Рассматривая поведение функций $\omega(\zeta)$, $z(\zeta)$ около особых точек области движения (см. ниже § 8), мы можем убедиться в том, что все встречающиеся в наших задачах о движении грунтовых вод особые точки являются регулярными особыми точками функций $F = \frac{d\omega}{d\zeta}$, $Z = \frac{dz}{d\zeta}$.

Из аналитической теории дифференциальных уравнений [21] известно следующее.

Две линейно независимые функции U, V, имеющие точку ζ_0 регулярной особой точкой, т. е. представимые вблизи этой точки в форме (3.12), являются системой решений линейного дифференциального уравнения

$$u'' + p(\zeta)\,u' + q(\zeta)\,u = 0, \tag{3.18}$$

где $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ имеют вид

$$p = \frac{p_1(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}, \quad q = \frac{q_1(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^2}. \tag{3.19}$$

Здесь $p_1(\zeta)$ и $q_1(\zeta)$ — функции, регулярные в точке ζ_0, т. е. разлагающиеся в ряды по целым положительным степеням $\zeta - \zeta_0$.

Как указано выше, функции Z и F имеют каждую из особых точек регулярной особой точкой. Следовательно, они могут быть представлены в виде линейных комбинаций двух линейно независимых решений уравнения (3.18) с коэффициентами вида (3.19).

Заметим, что показатели α' и α'' определяются однозначно лишь тогда, когда известна полностью геометрическая фигура области годографа и области движения [8,9].

§ 4. Уравнение с тремя регулярными особыми точками. Линейное уравнение (3.18), все особые точки которого являются регулярными, называется уравнением класса Фукса.

Остановимся прежде всего на случае, когда имеются три регулярные особые точки. В этом случае можно полностью построить линейное дифференциальное уравнение задачи.

Можем считать согласно сказанному выше, что на плоскости особыми точками являются 0, 1 и ∞.

Предположим, что один из показателей у каждой из особых точек на конечном расстоянии равен нулю. Другими словами, пусть показатели около особых точек будут:

$$\begin{aligned} &0,\ \alpha \text{ около } \zeta = 0,\\ &0,\ \beta \text{ около } \zeta = 1,\\ &\gamma,\ \gamma' \text{ около } \zeta = \infty. \end{aligned}$$

Ветвь аналитической функции Y, принадлежащей этим показателям, обозначается, по Риману, так:

$$Y = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma' & \end{Bmatrix}. \tag{4.1}$$

Дифференциальное уравнение для Y имеет вид [21–24]

$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\zeta} + \frac{1-\beta}{\zeta - 1}\right) Y' + \frac{\gamma\gamma'}{\zeta(\zeta - 1)}\, Y = 0. \tag{4.2}$$

При этом сумма всех показателей должна равняться единице *соотношение Фукса*)

$$\alpha+\beta+\gamma+\gamma'=1. \tag{4.3}$$

Обозначим через U, V фундаментальную каноническую систему решений уравнения (4.2) около точки $\zeta=0$. Она может быть написана в виде

$$\left.\begin{aligned} U&=1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots,\\ V&=\zeta^{\alpha}(1+a_1'\zeta+a_2'\zeta^2+\ldots).\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

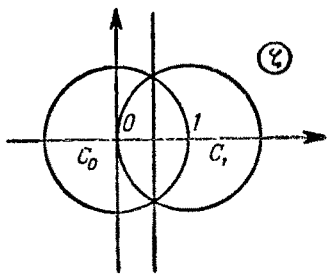
Около точки $\zeta=1$ систему линейно независимых интегралов примем в виде

$$\left.\begin{aligned} U_1&=1+b_1(\zeta-1)+\ldots,\\ V_1&=(1-\zeta)^{\beta}[1+b_1'(\zeta-1)+\ldots].\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Около $\zeta=\infty$ можно принять фундаментальную систему решений в виде

$$\left.\begin{aligned} U_\infty&=\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\gamma}\left[1+\frac{c_1}{\zeta}+\frac{c_2}{\zeta^2}+\ldots\right],\\ V_\infty&=\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\gamma'}\left[1+\frac{c_1'}{\zeta}+\frac{c_2'}{\zeta^2}+\ldots\right].\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ рядов (4.4)—(4.6)—действительные числа. При этом ряды (4.4) сходятся в круге C_0 (фиг. 207) с центром в точке $\zeta=0$, проходящем через ближайшую особую точку, т. е. $\zeta=1$; ряды (4.5) сходятся в круге C_1, для которого $|\zeta-1|<1$; ряды (4.6) сходятся для $|\zeta|>1$, т. е. вне круга C_0.



Фиг. 207.

Уравнение (4.2) связано с задачей о конформном отображении кругового треугольника на полуплоскость. Чтобы это показать, составим функцию

$$w=\mu\frac{V}{U}=\mu\frac{\zeta^{\alpha}(1+a_1\zeta+\ldots)}{1+b_1\zeta+\ldots}, \tag{4.7}$$

где μ — заданная вещественная постоянная. Для определенности будем считать α и β положительными.

Для $\zeta=\xi$, причем $0<\xi<1$, функция w принимает действительные значения; значит, w при этом пробегает некоторый отрезок оси абсцисс. При $\zeta=\xi<0$ имеем (считая $\arg\zeta=0$ при $\zeta=\xi>0$):

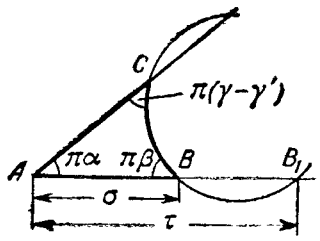
$$\zeta^{\alpha}=e^{\pi i\alpha}(-\xi)^{\alpha}.$$

Следовательно, w пробегает точки отрезка прямой AC (фиг. 208).

Дробно-линейное преобразование

$$w_1 = \frac{A + Bw}{C + Dw} = \frac{AU + BV}{CU + DV} \tag{4.8}$$

переводит прямые в окружности, и, следовательно, в окрестности точки $\zeta = 0$ некоторому отрезку действительной оси $\zeta = \xi$ отвечают дуги пересекающихся окружностей.



Фиг. 208.

Для рассмотрения окрестности особой точки $\zeta = 1$ перейдем от системы функций U, V к системе U_1, V_1 с помощью *вспомогательной подстановки*

$$U = pU_1 + qV_1, \quad V = rU_1 + sV_1. \tag{4.9}$$

(Между системами функций U, V и U_1, V_1 должна существовать линейная зависимость, так как они являются фундаментальными системами решений линейного уравнения.)

С помощью (4.9) можно переписать (4.7) так:

$$w = \frac{\mu r U_1 + \mu s V_1}{pU_1 + qV_1}.$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что в точках $\zeta = 1$ и $\zeta = \infty$ также получаем пересечения дуг окружностей. Имеет место теорема [21]: *функции вида* (4.7) *или* (4.8) *преобразуют конформно верхнюю полуплоскость в круговой треугольник, не имеющий внутри точек разветвления.*

§ 5. Гипергеометрические функции и их свойства. Гипергеометрической функцией называется функция

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \ldots \tag{5.1}$$

Она является частным решением следующего уравнения:

$$x(1-x)Y'' + [c - (a+b+1)x]Y' - abY = 0. \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) получается из (4.2), если положить:

$$\gamma = a, \quad \gamma' = b, \quad \alpha = 1 - c, \quad \beta = c - a - b$$

[при этом учитывается соотношение (4.3)].

Всякое решение этого уравнения выражается с помощью символа Римана так:

$$Y = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & x \\ 1-c & b & c-a-b & \end{Bmatrix}. \tag{5.3}$$

Отметим свойство символа Римана для любого числа особых точек. Пусть

$$Y = P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \beta & \end{matrix}\right\}. \tag{5.4}$$

Если мы в выражении Y выделим множитель

$$(x-a_1)^p,$$

то во втором множителе показатели около точки $x=a_1$ уменьшатся на p и будут, следовательно,

$$\alpha_1-p, \quad \beta_1-p,$$

а около бесконечно далекой точки показатели увеличатся на p, так что вместо α и β мы будем иметь:

$$\alpha+p, \quad \beta+p.$$

Другими словами,

$$P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \beta & \end{matrix}\right\} =$$

$$= (x-a_1)^p P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \infty & \\ \alpha_1-p & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha+p & x \\ \beta_1-p & \beta_2 & \dots & \beta_n & \beta+p & \end{matrix}\right\}. \tag{5.5}$$

В частности, можно с помощью этого преобразования получить функцию Римана, имеющую по одному равному нулю показателю около каждой особой точки на конечном расстоянии. А именно,

$$P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \alpha & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n & \beta & \end{matrix}\right\} = (x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_n)^{\alpha_n} \times$$

$$\times P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \infty & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_n & x \\ \beta_1-\alpha_1 & \beta_2-\alpha_2 & \dots & \beta_n-\alpha_n & \beta+\alpha_1+\dots+\alpha_n & \end{matrix}\right\}. \tag{5.6}$$

Пользуясь символом Римана, можно отыскивать другие решения гипергеометрического уравнения. Так, чтобы получить, кроме

$F(a, b, c, x)$, другое решение уравнения (5.2) около $x=0$, выделим множитель x^{1-c} в (5.3). Получим:

$$Y=x^{1-c}P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1\\ c-1 & a+1-c & 0 & x\\ 0 & b+1-c & a+b+1-c\end{matrix}\right\}=$$

$$=x^{1-c}P\left\{\begin{matrix}0 & \infty & 1\\ 0 & a+1-c & 0 & x\\ c-1 & b+1-c & a+b+1-c\end{matrix}\right\}. \qquad (5.7)$$

Выражение, являющееся множителем при x^{1-c}, есть гипергеометрическая функция, в которой первыми аргументами являются показатели на бесконечности

$$a+1-c, \quad b+1-c,$$

третий же аргумент представляет дополнение до единицы отличного от нуля показателя при $x=0$. Таким образом, получаем:

$$Y=x^{1-c}F(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c,\ x).$$

Эта функция линейно независима с $F(a, b, c, x)$, поэтому в качестве фундаментальной системы решений около $x=0$ для уравнения (5.2) мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} U&=F(a,\ b,\ c,\ x),\\ V&=x^{1-c}F(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c,\ x).\end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Аналогично можно найти системы решений около особых точек $x=1$ и $x=\infty$:

$$\left.\begin{aligned} U_1&=F(a,\ b,\ a+b-c+1,\ 1-x),\\ V_1&=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,\ c-a-b+1,\ 1-x),\end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

$$\left.\begin{aligned} U_\infty&=x^{-a}F\left(a,\ a-c+1,\ a-b+1,\ \frac{1}{x}\right),\\ V_\infty&=x^{-b}F\left(b,\ b-c+1,\ b-a+1,\ \frac{1}{x}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

Ряды (5.8) сходятся при $|x|<1$, ряды (5.9) при $|x-1|<1$, ряды (5.10) при $|x|>1$.

Замена x соответственно на

$$x'=x,\quad 1-x,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{x}{x-1},\quad \frac{x-1}{x}$$

меняет коэффициенты уравнения, но сохраняет в качестве особых точек 0, 1 и ∞.

Отсюда можно найти новые формы интегралов уравнения (5.2). Вместе с уже найденными получаются 24 формы Куммера [22].

Между различными ветвями гипергеометрической функции существует линейная зависимость, выражаемая вспомогательной подстановкой вида (4.9). Так, имеем:

$$F(a, b, c, z) = pF(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \\ + q(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-z),$$

$$z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z) = \\ = rF(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \\ + s(1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-z), \quad (5.11)$$

где

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, & q &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ r &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, & s &= \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)}. \end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

Если $c-a-b>0$, то гипергеометрический ряд сходится при $z=1$. Поэтому из (5.11) получаем для этого случая:

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (5.13)$$

Отметим еще представление гипергеометрических функций в форме эйлеровых интегралов [24].

Гипергеометрическую функцию $F(a, b, c; z)$ можно представить в виде определенного интеграла

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt. \quad (5.14)$$

Проверку этого равенства можно произвести, разложив в ряд

$$(1-zt)^{-a}$$

по степеням t и использовав затем, при почленном интегрировании (5.14), свойства функций бета и гамма.

Так как функция $F(a, b, c; z)$ симметрична относительно a и b (т. е. не меняется при перестановке этих аргументов), то имеем также другое представление гипергеометрической функции

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt. \quad (5.15)$$

Эти представления годятся, если b и $c-b$ в (5.14) и a, $c-a$ в формуле (5.15) имеют положительные действительные части и если z

имеет значение, не лежащее на действительной оси в интервале $(1, \infty)$.

Каждый из интегралов (5.14), (5.15) принадлежит к системе двадцати четырех интегралов, получаемых из основных интегралов посредством линейных преобразований переменной интегрирования и параметра z, при которых особые точки

$$t = 0, \quad \infty, \quad 1, \frac{1}{z}$$

переставляются между собой. Так, уравнения

$$zt\tau - t - \tau + 1 = 0,$$
$$zt\tau - zt - z\tau + 1 = 0,$$
$$zt\tau - 1 = 0$$

преобразуют интеграл (5.14), если принять за новую переменную интегрирования τ, соответственно к следующему виду:

$$(1-z)^{c-a-b} \int_0^1 \tau^{c-b-1}(1-\tau)^{b-1}(1-z\tau)^{a-c}\, d\tau,$$

$$z^{1-c}(1-z)^{c-a-b} \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \tau^{-a}(\tau-1)^{a-c}(z\tau-1)^{b-1}\, d\tau,$$

$$z^{1-c} \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \tau^{a-c}(\tau-1)^{-a}(z\tau-1)^{c-b-1}\, d\tau.$$

Заменяя z одним из выражений

$$\frac{1}{z}, \quad 1-z, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{z}{z-1},$$

получим все 24 формы интеграла уравнения Эйлера. Благодаря разработанному математическому аппарату для уравнений класса Фукса с тремя особыми точками удается до конца рассмотреть те задачи теории фильтрации, в которых число особых точек сводится к трем. Значительно сложнее обстоит дело, когда число особых точек больше трех. В задачах теории фильтрации обычно число особых точек равно 5, 7 и т. д. Чтобы отметить возникающие при этом трудности, рассмотрим случай кругового многоугольника с числом вершин, большим трех.

§ 6. Круговые многоугольники, число вершин которых больше трех. Предположим, что имеем круговой многоугольник, т. е. многоугольник, ограниченный дугами окружностей

$$\operatorname{Im}\left(\frac{k_s + l_s w}{m_s + n_s w}\right) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, \nu, \nu+1). \tag{6.1}$$

Углы в вершинах многоугольника обозначены через

$$\pi\alpha_1,\ \pi\alpha_2,\ \ldots,\pi\alpha_{\nu+1}.$$

Отобразим его конформно на верхнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного ζ. Пусть вершины многоугольника переходят в точки вещественной оси a_s $(s=1,\ 2,\ \ldots,\nu+1)$, причем пусть

$$a_{\nu+1}=\infty.$$

Если выберем произвольно аффиксы еще двух точек a_s, то положение остальных точек будет вполне определенным (но заранее неизвестным) для данного многоугольника.

Функцию w можно представить в виде отношения двух линейно независимых частных решений дифференциального уравнения

$$Y''+\left(\frac{1-\alpha_1}{\zeta-a_1}+\frac{1-\alpha_2}{\zeta-a_2}+\ldots+\frac{1-\alpha_\nu}{\zeta-a_\nu}\right)Y'+ \\ +\frac{\alpha'_{\nu+1}\alpha''_{\nu+1}(\zeta-\lambda_1)\ldots(\zeta-\lambda_{\nu-2})}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)\ldots(\zeta-a_\nu)}Y=0. \qquad (6.2)$$

Здесь $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_\nu$ суть деленные на π углы в вершинах многоугольника, переходящих при конформном отображении в точки вещественной оси ζ, лежащие на конечном расстоянии; $\alpha'_{\nu+1}$, $\alpha''_{\nu+1}$ таковы, что

$$\alpha'_{\nu+1}-\alpha''_{\nu+1}=\alpha_{\nu+1} \qquad (6.3)$$

($\pi\alpha_{\nu+1}$ есть угол при вершине, переходящей в точку $\zeta=\infty$).

При этом между числами $\alpha_s(s=1,\ 2,\ \ldots,\nu)$, $\alpha'_{\nu+1}$ и $\alpha''_{\nu+1}$ должно выполняться соотношение Фукса

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu+\alpha'_{\nu+1}+\alpha''_{\nu+1}=\nu-1. \qquad (6.4)$$

Здесь ν — число особых точек, находящихся на конечном расстоянии от начала.

Наконец, величины $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{\nu-2}$ в уравнении (6.2) представляют собой так называемые *акцессорные параметры*, которые заранее не известны. В случае кругового треугольника эти параметры, как мы видели, отсутствуют, что и облегчает решение задачи.

Обозначим линейно независимые интегралы уравнения (6.2) около точки a_s через U_s и V_s. Тогда величина w будет дробно-линейной функцией от них

$$w=\frac{AU_s+BV_s}{CU_s+DV_s}, \qquad (6.5)$$

где A, B, C, D — постоянные.

Некоторые свойства конформного отображения четырехугольника и пятиугольника рассмотрены в работах [3, 6].

§ 7. Случай действительных показателей. Второй вывод характеристического уравнения. Вернемся к вопросу об определении показателей около особых точек (см. § 3). Нас специально будет интересовать случай, когда α' и α'' действительны. Нетрудно убедиться, что необходимым и достаточным условием действительности α' и α'' является условие пересечения окружностей

$$\operatorname{Im}\left(\frac{k+lw_1}{m+nw_1}\right)=0, \qquad \operatorname{Im}w_1=0, \qquad (7.1)$$

полученных из уравнений (3.14) и (3.15), где

$$w_1 = \frac{F_1}{Z_1}.$$

Действительно, если окружности (7.1) пересекаются, то $\alpha' - \alpha''$ есть действительное число, так как $\pi(\alpha' - \alpha'')$ есть угол между этими окружностями. Тогда отношение $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ должно по модулю равняться единице. Но уравнение (3.17) имеет вид

$$a\lambda^2 - b\lambda + \bar{a} = 0,$$

где b — действительное, a и $\bar{a}$ — комплексные сопряженные числа, поэтому

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4a\bar{a}}}{b - \sqrt{b^2 - 4a\bar{a}}}.$$

Для того чтобы было

$$\left|\frac{\lambda'}{\lambda''}\right| = 1,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$b^2 - 4a\bar{a} < 0$$

или

$$(\bar{k}n + k\bar{n} - \bar{m}l - m\bar{l})^2 - 4(kn - lm)(\bar{k}\bar{n} - \bar{l}\bar{m}) \leqslant 0, \qquad (7.2)$$

а это есть условие того, что окружности (7.1) пересекаются (или касаются). Действительно, в последнем случае координаты точек пересечения являются корнями уравнения

$$w^2 + \frac{l\bar{m} - \bar{k}n + k\bar{n} - \bar{l}m}{l\bar{n} - \bar{l}n} w + \frac{k\bar{m} - \bar{k}m}{l\bar{n} - \bar{l}n} = 0,$$

а эти корни действительны при условии

$$(\bar{k}n - k\bar{n} + \bar{l}m - l\bar{m})^2 - 4(k\bar{m} - \bar{k}m)(\bar{l}n - l\bar{n}) \leqslant 0,$$

что совпадает с условием (7.2).

Так как произведение $\lambda'\lambda'' = \frac{\bar{a}}{a}$ по модулю всегда равно единице, то легко видеть, что из действительности числа $\alpha' - \alpha''$ вытекает действительность чисел α' и α''.

Предполагая теперь выполненными условия действительности показателей α', α'' около $\xi = 0$, вернемся к условиям на отрезках вида (3.1). Предположим, что

$$Z = AU + BV, \quad F = CU + DV, \qquad (7.3)$$

где

$$U = \zeta^{\alpha'} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad V = \zeta^{\alpha''} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n, \qquad (7.4)$$

причем для простоты считаем, что в этих разложениях члены с $\ln\zeta$ отсутствуют.

Тогда первое из условий на отрезке M_2M_3 можно по (7.3) представить в виде

$$\operatorname{Im}(k_2Z+l_2F)=\operatorname{Im}[(k_2A+l_2C)U+(k_2B+l_2D)V]=0. \quad (7.5)$$

Если показатели около всех особых точек действительны, что считаем выполненным, то коэффициенты в разложениях (7.4) будут действительными. Поэтому (7.5) можно представить в виде

$$U\operatorname{Im}(k_2A+l_2C)+V\operatorname{Im}(k_2B+l_2D)=0.$$

Так как функции U и V линейно независимы, то коэффициенты при них должны равняться нулю:

$$\operatorname{Im}(k_2A+l_2C)=0, \quad \operatorname{Im}(k_2B+l_2D)=0. \quad (7.6)$$

Таким же образом получим еще два уравнения:

$$\operatorname{Im}(m_2A+n_2C)=0, \quad \operatorname{Im}(m_2B+n_2D)=0. \quad (7.7)$$

Перейдем теперь с отрезка M_2M_3 на отрезок M_1M_2 (фиг. 205), совершив обход около точки $\zeta=0$ по полуокружности в верхней полуплоскости. Если на отрезке M_2M_3 считать $\arg\zeta=0$, то $\arg\zeta=\pi$ на отрезке M_1M_2, а следовательно, на отрезке M_1M_2 при $\zeta=\xi<0$

$$\zeta^{\alpha'}=|\zeta|^{\alpha'}e^{\pi i\alpha'}, \quad \zeta^{\alpha''}=|\zeta|^{\alpha''}e^{\pi i\alpha''}.$$

Полагая для $\zeta=\xi<0$

$$U=e^{\pi i\alpha'}U', \quad V=e^{\pi i\alpha''}V',$$

где U' и V' действительны при $\xi<0$, на отрезке M_1M_2 получим:

$$\operatorname{Im}(k_1Z+l_1F)=\operatorname{Im}[(k_1A+l_1C)e^{\pi i\alpha'}U'+(k_1B+l_1D)e^{\pi i\alpha''}V']=0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Im}[(k_1A+l_1C)e^{\pi i\alpha'}]=0, \quad \operatorname{Im}[(k_1B+l_1D)e^{\pi i\alpha''}]=0. \quad (7.8)$$

Аналогичным путем найдем:

$$\operatorname{Im}[(m_1A+n_1C)e^{\pi i\alpha'}]=0, \quad \operatorname{Im}[(m_1B+n_1D)e^{\pi i\alpha''}]=0. \quad (7.9)$$

Полученные восемь уравнений (7.6)—(7.9) распадаются на две группы, в одну из которых входят A и C, в другую B и D. Пере-

пишем эти уравнения, вводя комплексные сопряженные числа ($\overline{A}$ — сопряженное с A и т. д.):

$$\left.\begin{aligned} k_2A + l_2C - \overline{k}_2\overline{A} - \overline{l}_2\overline{C} &= 0,\\ m_2A + n_2C - \overline{m}_2\overline{A} - \overline{n}_2\overline{C} &= 0,\\ (k_1A + l_1C)\,e^{2\pi i\alpha'} - \overline{k}_1\overline{A} - \overline{l}_1\overline{C} &= 0,\\ (m_1A + n_1C)\,e^{2\pi i\alpha'} - \overline{m}_1\overline{A} - \overline{n}_1\overline{C} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

$$\left.\begin{aligned} k_2B + l_2D - \overline{k}_2\overline{B} - \overline{l}_2\overline{D} &= 0,\\ m_2B + n_2D - \overline{m}_2\overline{B} - \overline{n}_2\overline{D} &= 0,\\ (k_1B + l_1D)\,e^{2\pi i\alpha''} - \overline{k}_1\overline{B} - \overline{l}_1\overline{D} &= 0,\\ (m_1B + n_1D)\,e^{2\pi i\alpha''} - \overline{m}_1\overline{B} - \overline{n}_1\overline{D} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Для того чтобы система (7.10) имела отличные от нуля решения, необходимо равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} k_1e^{2\pi i\alpha'} & l_1e^{2\pi i\alpha'} & \overline{k}_1 & \overline{l}_1\\ m_1e^{2\pi i\alpha'} & n_1e^{2\pi i\alpha'} & \overline{m}_1 & \overline{n}_1\\ k_2 & l_2 & \overline{k}_2 & \overline{l}_2\\ m_2 & n_2 & \overline{m}_2 & \overline{n}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если в этом определителе заменить α' на α'', то получим условие того, что система (7.11) имеет для B и D отличные от нуля решения.

Это показывает, что $e^{2\pi i\alpha'}$ и $e^{2\pi i\alpha''}$ являются корнями уравнения второй степени относительно λ:

$$\begin{vmatrix} k_1\lambda & l_1\lambda & \overline{k}_1 & \overline{l}_1\\ m_1\lambda & n_1\lambda & \overline{m}_1 & \overline{n}_1\\ k_2 & l_2 & \overline{k}_2 & \overline{l}_2\\ m_2 & n_2 & \overline{m}_2 & \overline{n}_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.12}$$

Мы получили, таким образом, характеристическое уравнение для $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$. Хотя при выводе мы пользовались условием вещественности α' и α'', однако уравнение (7.12) годится и для комплексных α', α'', в чем можно убедиться, преобразовав уравнение (3.6) к виду (7.12).

§ 8. Показатели для основных случаев теории фильтрации. Приведем результаты, относящиеся к способу определения показателей около особых точек для различных комбинаций граничных условий, которые встречаются при изучении движения грунтовых вод.

Рассмотрим [8, 6] некоторые комбинации границ, которые могут встретиться в задачах о земляных плотинах. Именно, границами области фильтрации могут быть:

а) прямолинейные непроницаемые стенки,

б) прямолинейные границы водоемов,

в) прямолинейные промежутки высачивания,

г) свободные поверхности, вдоль которых может происходить испарение воды (или к которым может притекать вода извне).

Всего имеем шесть возможных случаев соединений (*аб*), (*ав*), (*аг*), (*бв*), (*бг*), (*вг*) вышеуказанных границ.

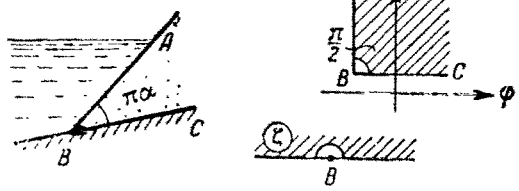
1. Случай *аб*. Пусть откос плотины составляет угол $\pi\alpha$ с линией непроницаемого основания (фиг. 209).

Тогда конформное отображение области z на полуплоскость ζ вблизи точки B, если считать, что точка B переходит в начало координат плоскости ζ, имеет вид

$$z = \zeta^{\alpha}(a_0 + a_1\zeta + \ldots).$$

Для функции Z получаем:

$$Z = \frac{dz}{d\zeta} = \zeta^{\alpha-1}(b_0 + b_1\zeta + \ldots).$$



Фиг. 209.

Следовательно, функция Z принадлежит показателю $\alpha - 1$.

На плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ в точке B сходятся линии $\varphi = \text{const}$, $\psi = \text{const}$; поэтому имеем:

$$\omega = \zeta^{1/2}(c_0 + c_1\zeta + \ldots),$$

$$F = \frac{d\omega}{d\zeta} = \zeta^{-1/2}(l_0 + l_1\zeta + \ldots),$$

т. е. функция F принадлежит показателю $-\frac{1}{2}$.

Таким образом, для функций Z и F имеем показатели

$$\left(\alpha - 1, -\frac{1}{2}\right).$$

Если угол $\pi\alpha$ прямой, то показатели будут $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. В этом случае на годографе скорости точка B будет обыкновенной точкой. Подстановка

$$Z = \frac{Z_1}{\sqrt{\zeta}}, \qquad F = \frac{F_1}{\sqrt{\zeta}}$$

приводит к функциям Z_1 и F_1, для которых точка B является также обыкновенной точкой, т. е. разложения этих функций имеют вид

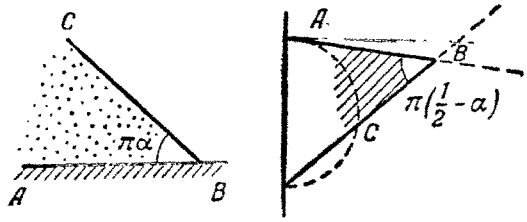
$$Z_1 = a_0 + a_1\zeta + \ldots, \quad F_1 = b_0 + b_1\zeta + \ldots$$

Такие точки, особенность в которых можно устранить подстановкой вида

$$U = \zeta^m U_1,$$

можно назвать *устранимыми* особыми точками [8, 9]. В нашем случае можно составить линейную комбинацию функций Z_1 и F_1, принадлежащую показателю $+1$, и считать, что функции Z_1 и F_1 принадлежат показателям 0 и 1, а функции Z и F — показателям $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$.

2. Случай *ав*. Непроницаемая стенка соединяется с промежутком высачивания (фиг. 210). Как и в предыдущем случае, для Z имеем:



Фиг. 210.

$$Z = \zeta^{\alpha-1}(a_0 + a_1\zeta + \ldots).$$

Рассмотрим плоскость комплексной скорости. На ней имеем прямые, пересекающиеся в точке B под углом $\pi\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$.

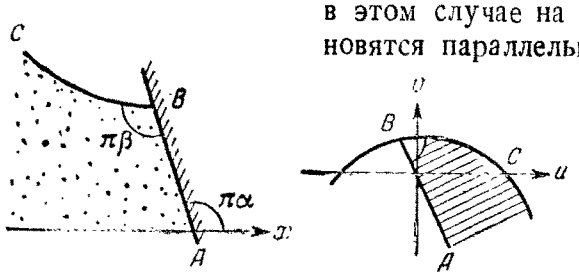
Следовательно, для $u - iv$ получим:

$$u - iv = \frac{F}{Z} = \zeta^{1/2-\alpha}(c_0 + c_1\zeta + \ldots).$$

Отсюда

$$F = Z\zeta^{1/2-\alpha}(c_0 + \ldots) = \zeta^{-1/2}(a_0c_0 + \ldots).$$

Таким образом, функции Z и F будут принадлежать показателям $\alpha - 1$, $-\frac{1}{2}$. Здесь в отличие от предыдущего случая при $\alpha = \frac{1}{2}$ разложения для Z и F содержат логарифмический член. Действительно, в этом случае на плоскости $u - iv$ прямые становятся параллельными, а потому



Фиг. 211.

$$u - iv = \frac{F}{Z} = m\ln\zeta + \ldots$$

Следовательно,

$$F = Z\ln\zeta + \ldots$$

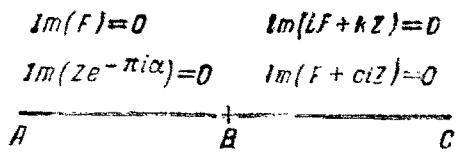
3. Случай *аг*. Непроницаемая стенка соединяется со свободной поверхностью (фиг. 211). С поверхности CB происходит испарение интенсивности c, или имеется инфильтрация на поверхность CB, так что $\psi + cx = \text{const}$. Кроме того, вдоль CB давление постоянно, т. е. $\varphi + ky = \text{const}$.

Уравнение стенки AB пусть имеет вид

$$y\cos\alpha\pi - x\sin\alpha\pi = 0.$$

Вдоль стенки $\psi = \text{const}$.

Условия на отрезках AB и BC плоскости ζ представлены на фиг. 212.



Фиг. 212.

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} \lambda e^{-\pi i\alpha} & 0 & e^{\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ k & i & k & -i \\ ci & 1 & -ci & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение приводится к виду

$$\lambda^2 - 2\lambda \frac{k-c}{k+c} e^{\pi i\alpha} \cos \pi\alpha + e^{2\pi i\alpha} = 0.$$

Каждый раз, когда $\left(\frac{k-c}{k+c}\right)^2 \cos^2 \pi\alpha < 1$ (в частности, это неравенство имеет место при $c > 0$, т. е. в случае испарения), в выражении для λ

$$\lambda = e^{\pi i\alpha}\left[\frac{k-c}{k+c}\cos \pi\alpha \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{k-c}{k+c}\right)^2 \cos^2 \pi\alpha}\right]$$

мы можем положить:

$$\frac{k-c}{k+c}\cos \pi\alpha = \cos \pi\delta.$$

Будем иметь:

$$\lambda = e^{\pi i(\alpha \pm \delta)}.$$

Искомые показатели около особой точки B, определяемые по формулам $r_1 = \frac{\ln \lambda'}{2\pi i}$, $r_2 = \frac{\ln \lambda''}{2\pi i}$, будут соответственно: $\frac{1}{2}(\alpha + \delta) + m$, $\frac{1}{2}(\alpha - \delta) + m'$, где m и m' — целые числа и $0 < \delta < 1$.

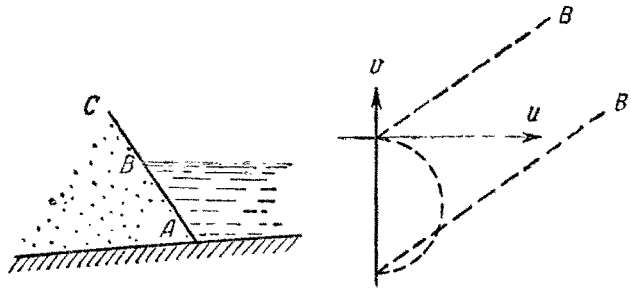
Рассмотрение годографа скорости показывает, что $m = -1$, $m' = 0$, причем $\pi\delta$ есть дополнение до π угла ABC на годографе скорости; при этом угол $\pi\beta$, образуемый стенкой и линией свободной поверхности, определяется через величины α и δ таким образом:

$$\pi\beta = \pi\frac{\alpha + \delta}{2}.$$

В данном случае показатели системы функций Z и F имеют вид

$$\frac{\alpha - \delta}{2}, \quad \frac{\alpha + \delta}{2} - 1.$$

4. Случай *бв* (фиг. 213). Прямолинейная граница водоема является и прямолинейной границей промежутка высачивания.



Фиг. 213.

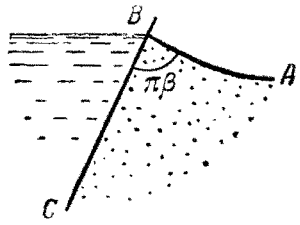
Здесь на плоскости z, а следовательно, и для функции Z имеем обыкновенную точку

$$Z = a_0 + a_1 z + \dots$$

На плоскости $u—iv$ точка B находится на бесконечности и представляет пересечение двух параллельных прямых, перпендикулярных к прямой ABC плоскости z. Поэтому около точки B

$$u - iv = c_0 \ln \zeta + \dots$$

Показатель системы функций Z и F есть двукратный нуль (0, 0).



Фиг. 214.

5. Случай *бг* (фиг. 214). Свободная поверхность при наличии инфильтрации или испарения соединяется с границей водного бассейна. Условия на линии AB будут такие же, как в третьем случае, а условия на отрезке BC, наклоненном под углом $\pi\alpha$ к горизонту, имеют вид

$$\operatorname{Im}(Ze^{-\pi i\alpha}) = 0, \quad \operatorname{Im}(iF) = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} k\lambda & i\lambda & k & -i \\ ci\lambda & \lambda & -ci & 1 \\ e^{-\pi i\alpha} & 0 & e^{\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{vmatrix} = 0$$

приводится к виду

$$\lambda^2 + 2\lambda \frac{k-c}{k+c} e^{\pi i (1/2 - \alpha)} \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + e^{2\pi i (1/2 - \alpha)} = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = e^{\pi i (1/2 - \alpha)} \left[-\frac{k-c}{k+c} \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k-c}{k+c}\right)^2 \cos^2 \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) - 1} \right].$$

Полагая

$$-\frac{k-c}{k+c} \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \cos \pi\delta,$$

получим:

$$\lambda = e^{\pi i\left(1/2-\alpha\pm\delta\right)},$$

откуда для показателей получаем значения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\alpha+\delta\right)-1, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\alpha-\delta\right)$$

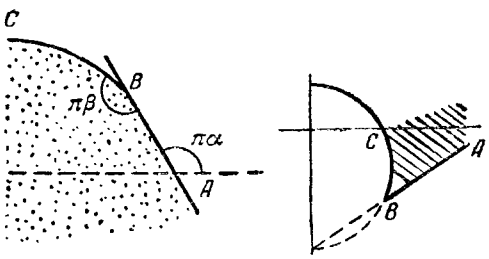
или

$$-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\alpha-\delta), \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\alpha+\delta).$$

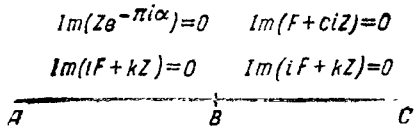
Если нет испарения, т. е. $c=0$, то $\delta=\alpha+\frac{1}{2}$, и показатели будут:

$$-\frac{1}{2}, \quad -\alpha.$$

6. Случай *вг* (фиг. 215). Свободная поверхность граничит



Фиг. 215.



Фиг. 216.

с прямолинейным промежутком высачивания. Условия на отрезках AB и BC представлены на фиг. 216.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} k\lambda & i\lambda & k & -i \\ \lambda e^{-\pi i\alpha} & 0 & e^{\pi i\alpha} & 0 \\ k & i & k & -i \\ ci & 1 & -ci & 1 \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -e^{2\pi i\alpha} = e^{2\pi i\left(1/2+\alpha\right)}.$$

Отсюда нетрудно придти к заключению, что около вершины B показатели будут 0 и $\alpha-\frac{1}{2}$. Если откос составляет тупой угол с линией горизонта, то $\pi\beta=\pi$, если острый, то $\pi\beta=\pi\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$.

В заключение сделаем замечание относительно показателей около бесконечно далекой точки [8].

Если считать, что данной вершине B соответствует бесконечно удаленная точка плоскости ζ, то полученные выше значения показа-

телей нужно увеличить на две единицы. В самом деле, положим:

$$\zeta = \frac{1}{\tau}.$$

Тогда точка $\zeta = \infty$ перейдет в точку $\tau = 0$; после преобразования к новой переменной функций

$$Z = \frac{dz}{d\zeta}, \quad F = \frac{d\omega}{d\zeta}$$

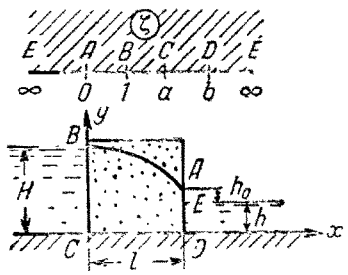
получим выражения

$$Z = -\frac{dz}{d\tau}\tau^2, \quad F = -\frac{d\omega}{d\tau}\tau^2,$$

откуда и следует высказанное утверждение.

Б. ЗАДАЧА О ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПЕРЕМЫЧКУ

§ 9. Расход перемычки и совершенного колодца. На фиг. 217 представлена перемычка с откосами BC и AD на непроницаемом горизонтальном основании CD длины l. Высота воды в нижнем бьефе h, в верхнем H. Требуется определить элементы движения, в том числе длину h_0 промежутка высачивания AE (см. § 2 главы II).



Фиг. 217.

Прежде всего мы обратимся к задаче об определении полного расхода.

Докажем, что расход через перемычку (фиг. 217), т. е. расход через отрезок BC или равный ему расход через отрезок AED, определяется формулой Дюпюи, если провести параболу Дюпюи через концы ординат H и h. Доказательство этой теоремы дано И. А. Чарным [12].

Наблюдениями ряда исследователей давно уже установлено, что формула Дюпюи дает хорошее значение для расхода через перемычку. Имевшиеся гидромеханические решения Б. Б. Девисона [13] и Гамеля [14] давали близкое согласие с формулой Дюпюи. А именно, были произведены вычисления для шести случаев перемычки [15], по которым величина расхода оказалась близкой к той, которая дается формулой Дюпюи, но не вполне совпадающей с ней, и было неизвестно, за счет чего получаются расхождения: за счет неточности вычислений (вследствие их сложности) или за счет того, что формула Дюпюи не является точной для перемычки.

Будем исходить из предположения, что имеем установившееся движение с потенциалом скорости $\varphi(x, y)$, причем на свободной поверхности AB удовлетворяется условие постоянства давления

$$\varphi(x, y) + ky = 0. \tag{9.1}$$

Обозначим ординату свободной поверхности через $Y = Y(x)$, тогда на свободной поверхности будем иметь тождество

$$\varphi(x,\ Y(x)) + kY(x) = 0. \tag{9.2}$$

Вдоль откоса BC для φ имеем значение

$$\varphi(0,\ y) = -kH, \tag{9.3}$$

вдоль ED

$$\varphi(l,\ y) = -kh. \tag{9.4}$$

Вдоль промежутка высачивания AE должно выполняться условие (9.1).

Вычислим расход через произвольное вертикальное сечение перемычки. Очевидно,

$$q = \int_0^Y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy. \tag{9.5}$$

Рассмотрим интеграл

$$J(x) = \int_0^{Y(x)} \varphi(x,\ y)\, dy \tag{9.6}$$

и составим производную от него по x:

$$\frac{dJ}{dx} = \int_0^Y \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy + \varphi(x,\ Y)\frac{dY}{dx}. \tag{9.7}$$

Учитывая (9.2), можно написать:

$$q = \frac{dJ}{dx} - \varphi(x,\ Y)\frac{dY}{dx} = \frac{dJ}{dx} + kY\frac{dY}{dx}. \tag{9.8}$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$qx = \int_0^Y \varphi(x,\ y)\, dy + \frac{kY^2}{2} + C.$$

Учитывая, что при $x = 0$ имеем $Y = H$, получим:

$$0 = \int_0^H \varphi(0,\ y)\, dy + \frac{kH^2}{2} + C.$$

С помощью (9.3) отсюда найдем C:

$$C = -\frac{kH^2}{2},$$

и, следовательно,

$$qx = \int_0^Y \varphi(x,\ y)\, dy + \frac{k(Y^2 - H^2)}{2}. \tag{9.9}$$

Теперь положим $x = l$. При этом интеграл правой части разобьем на два и используем соотношение (9.4):

$$\int_0^{h_0} \varphi(x, y)\,dy = -\int_0^{h} kh\,dy - k\int_h^{h_0} y\,dy = -kh^2 - \frac{k}{2}(h_0^2 - h^2).$$

После этого уравнение (9.9) нам дает:

$$ql = -kh^2 - \frac{k}{2}(h_0^2 - h^2) + k\,\frac{h_0^2 + H^2}{2}.$$

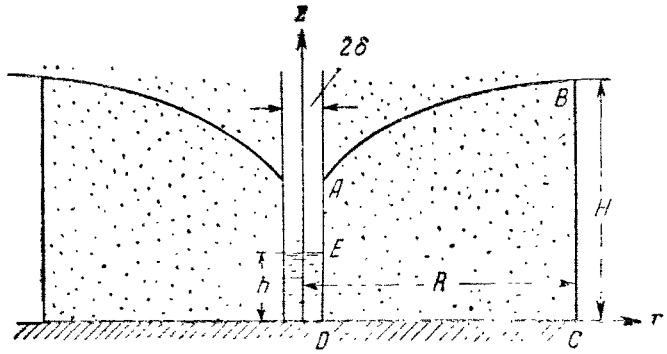
Мы видим, что h_0^2 выпадает из правой части и остается

$$q = \frac{k(H^2 - h^2)}{2l}, \tag{9.10}$$

т. е. действительно получается формула Дюпюи, которую мы отметили в § 10 главы II и выводим в § 2 главы X, причем там у нас $l = x_2 - x_1$.

Точно так же выводится формула расхода для осесимметричной задачи в случае совершенного колодца.

Рассмотрим колодец радиуса δ, в котором вода стоит на уровне h. Пусть цилиндрическая поверхность $r = R$ есть поверхность равного потенциала (фиг. 218).



Фиг. 218.

Пусть глубины свободной поверхности будут:

$$z = h + h_0 \text{ при } r = \delta, \quad z = H \text{ при } r = R.$$

В цилиндрических координатах (r, z) имеем потенциал скорости $\varphi(r, z)$, так что проекции скорости равны

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

На свободной поверхности имеем соотношение, выражающее постоянство давления:

$$\varphi(r, z) + kz = 0. \tag{9.11}$$

Расход через произвольный цилиндр радиуса r, ось которого совпадает с осью z, выражается так:

$$q = 2\pi r \int_0^z \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz, \tag{9.12}$$

где z есть ордината свободной поверхности. Если положим:

$$\frac{\ln r}{2\pi} = x,$$

то задача сводится к предыдущему случаю перемычки. Для получения окончательного результата достаточно в выражении расхода (9.10) заменить $l = x_2 - x_1$ разностью

$$\frac{1}{2\pi}(\ln R - \ln \delta),$$

что и даст формулу Дюпюи для колодца (см. главу X, § 8):

$$q = \frac{\pi k (H^2 - h^2)}{\ln \frac{R}{\delta}}. \tag{9.13}$$

Таким образом, не имея в настоящее время точного решения задачи о безнапорном притоке жидкости к колодцу, мы имеем, однако, точную формулу для расхода колодца.

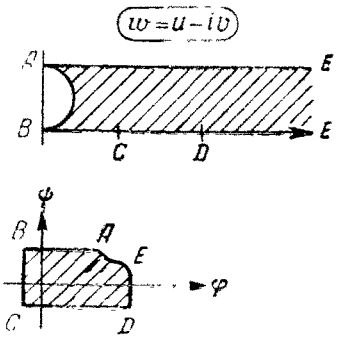
Отметим, что С. М. Проскурниковым [15] в 1937 г. была проведена серия экспериментов с помощью метода электрогидродинамических аналогий (см. ниже главу XI). Полученные значения расхода для перемычек оказались очень близкими к даваемым формулой Дюпюи, и С. М. Проскурников вывел эту формулу для перемычки, исходя из искусственной гипотезы.

§ 10. Построение решения для перемычки. Пользуясь результатами § 6, найдем показатели системы функций Z, F для нашей задачи (фиг. 217, 219).

Около точки A ($\zeta = 0$) имеет место шестой случай, поэтому показатели $\left(\text{здесь } \alpha = \frac{1}{2}\right)$ будут 0, 0.

Около точки B ($\zeta = 1$) имеет место пятый случай. Здесь получаем, что $-1/2$ является кратным корнем характеристического уравнения, т. е. что показатели равны $-1/2$, $-1/2$.

Около точки C ($\zeta = a$), соответственно первому случаю, можно считать, что имеем показатели $-1/2$, $1/2$, причем здесь особенность является устранимой.



Фиг. 219.

Около точки D ($\zeta = b$) получаем то же самое, что и около точки C, т. е. показатели будут $-1/2$, $1/2$.

Около точки $E(\zeta=\infty)$ имеем четвертый случай, которому соответствует кратный корень характеристического уравнения, равный нулю. Так как эта особая точка — бесконечно далекая, то показатели около нее будут 2, 2 (см. конец § 8).

Функции F и Z являются различными ветвями функции, которая может быть представлена с помощью символа Римана

$$\widetilde{Y}=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & b & \infty & \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & \zeta \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \end{matrix}\right\}. \tag{10.1}$$

Отметим, что сумма всех показателей у нас равна трем, следовательно, условие Фукса (6.4) здесь выполняется (у нас число особых точек $\nu+1$ равно пяти).

Для функции Римана имеет место свойство (5.6). Применяя его к нашей функции $\widetilde{Y}$, можем написать:

$$\widetilde{Y}=(1-\zeta)^{-1/2}(\zeta-a)^{-1/2}(\zeta-b)^{-1/2}P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & a & b & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \zeta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{Y}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}}. \tag{10.2}$$

Отсюда следует, что введенная нами новая функция Y в точках $\zeta=a$ и $\zeta=b$ имеет показатели 0 и 1 и, как было указано выше, в своих разложениях не содержит логарифмических членов. Поэтому $\zeta=a$ и $\zeta=b$ являются обыкновенными точками и могут быть исключены из рассмотрения, т. е. функция Y имеет лишь три особые точки и может быть обозначена так:

$$Y=P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \zeta \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}. \tag{10.3}$$

Мы видели, что функция

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma' & \end{matrix}\right\} \tag{10.4}$$

есть решение уравнения (5.2)

$$Y''+\left(\frac{1-\alpha}{\zeta}+\frac{1-\beta}{\zeta-1}\right)Y'+\frac{\gamma\gamma'}{\zeta(\zeta-1)}=0. \tag{10.5}$$

В рассматриваемом случае

$$\alpha=\beta=0,\quad \gamma=\gamma'=\frac{1}{2},$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение (10.5) принимает вид

$$\zeta(1-\zeta)\,Y''+(1-2\zeta)\,Y'-\frac{1}{4}Y=0, \tag{10.6}$$

причем, если U и V — его линейно независимые интегралы, то

$$F=\frac{AU+BV}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}},\quad Z=\frac{CU+DV}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a)(\zeta-b)}}. \tag{10.7}$$

Около $\zeta=0$ имеем следующий интеграл этого уравнения в виде гипергеометрической функции $\left(\text{у нас } a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=1\right)$:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\zeta\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\zeta+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\zeta^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\zeta^3+\ldots \tag{10.8}$$

Рассмотрим определенный интеграл

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-\zeta t)}}. \tag{10.9}$$

Подстановка $t=\sin^2\varphi$ дает:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\zeta\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\zeta+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\zeta^2+\ldots\right].$$

Отсюда видно, что гипергеометрическая функция (10.8) лишь постоянным множителем отличается от полного эллиптического интеграла первого рода, рассматриваемого как функция от квадрата модуля $k^2=\zeta$. Следовательно, в качестве одного из частных решений уравнения (10.6) можем взять:

$$U=K(\zeta)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\zeta\sin^2\varphi}}\qquad (k^2=\zeta). \tag{10.10}$$

При замене ζ на $1-\zeta$ уравнение (10.7) не меняется, поэтому

$$V=K(1-\zeta)=K'\quad (k'^2=1-\zeta) \tag{10.11}$$

также является решением нашего уравнения, регулярным около точки $\zeta=1$.

Ряд для $K(\zeta)$ сходится для $|\zeta|<1$, т. е. в круге C_0 (фиг. 207), ряд $K(1-\zeta)$ — в круге C_1, для которого $|\zeta-1|=1$. Выясним, как ведет себя $K(1-\zeta)$ при $\zeta=0$.

Между K и K' существует соотношение (получаемое с помощью теоремы об определителе Вронского [21])

$$K\frac{dK'}{d\zeta}-K'\frac{dK}{d\zeta}=-\frac{\pi}{4\zeta(1-\zeta)}.$$

Его можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{K'}{K}\right)=-\frac{\pi}{4K^2\zeta(1-\zeta)}=-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{2}+P_1(\zeta)\right\},$$

где $P_1(\zeta)$ — ряд по целым положительным степеням ζ.

Отсюда, интегрируя, найдем:

$$K'=K(1-\zeta)=-\frac{K}{\pi}\ln\zeta+P(\zeta),$$

где $P(\zeta)$ имеет вид

$$P(\zeta)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\right]^2\sum_{m=1}^{2n}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\zeta^n.$$

Таким образом, $K(1-\zeta)$ представляет решение, имеющее логарифмическую особенность около точки $\zeta=0$; следовательно, $K(\zeta)$, $K(1-\zeta)$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений около $\zeta=0$:

$$U=K(\zeta),\quad V=K(1-\zeta). \tag{10.12}$$

На основании формул (5.10) и аналогичных им находим, что

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{\zeta}}K\left(\frac{1}{\zeta}\right),\qquad V_1=\frac{1}{\sqrt{\zeta}}K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right) \tag{10.13}$$

есть фундаментальная система интегралов уравнения (10.7). Ряды для функций (10.13) сходятся при $|\zeta|>1$.

Заменяя ζ на $1-\zeta$, из (10.13) найдем новую систему интегралов

$$U_2=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right),\qquad V_2=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}K\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right), \tag{10.14}$$

ряды для которых сходятся вне круга C_1 (фиг. 207).

Конформное отображение *модулярного* треугольника плоскости $w=u-iv$ (фиг. 219, где $AB=k$) на верхнюю полуплоскость ζ (фиг. 217) производится по формуле

$$w=\frac{AK(\zeta)+BK(1-\zeta)}{CK(\zeta)+DK(1-\zeta)}.$$

Рассматривая промежуток (0, 1) для ζ, имеем такое соответствие точек ζ и w: при $\zeta=0$ $w=ki$, при $\zeta=1$ $w=0$ и при $\zeta=\frac{1}{2}$ $w=\frac{k}{2}+\frac{ki}{2}$. Отсюда найдем A, B, C, D и получим:

$$w=k\frac{K(1-\zeta)}{K(\zeta)-iK(1-\zeta)}. \tag{10.15}$$

Для того чтобы перейти на другие стороны треугольника, нужно знать вспомогательные подстановки, связывающие U, V с другими интегралами. Если точка ζ находится в верхней полуплоскости, то имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} K(\zeta)-iK(1-\zeta)&=\frac{1}{\sqrt{\zeta}}K\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{i}{\sqrt{1-\zeta}}K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right),\\ K(1-\zeta)&=\frac{1}{\sqrt{\zeta}}K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}\left[K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)-iK\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

С их помощью найдем для отрезка $1<\zeta<\infty$

$$w=k\frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \tag{10.17}$$

для отрезка $-\infty<\zeta<0$

$$w=ki\frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)-iK\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)}{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}. \tag{10.18}$$

Справедливость (10.17) и (10.18) проверяется непосредственно из рассмотрения фиг. 217 и 219.

Теперь нетрудно составить выражения для функций F и Z, исходя из уравнений (10.7), (10.16) и учитывая, что числители этих выражений должны быть пропорциональны числителям формул (10.15), (10.17), (10.18). Получим:

для $0<\zeta<1$

$$\left.\begin{aligned} Z&=\frac{dx}{d\zeta}+i\frac{dy}{d\zeta}=-A\frac{K(\zeta)-iK(1-\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)}},\\ F&=\frac{d\varphi}{d\zeta}=-kA\frac{K(1-\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(a-\zeta)(b-\zeta)}}; \end{aligned}\right\} \tag{10.19}$$

для $-\infty<\zeta<0$

$$\left.\begin{aligned} Z&=i\frac{dy}{d\zeta}=\frac{AiK\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}},\\ F&=\frac{d\varphi}{d\zeta}+\frac{i\,d\psi}{d\zeta}=-\frac{k\,dy}{d\zeta}+\frac{i\,d\psi}{d\zeta}=-\frac{kA\left[K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)-iK\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)\right]}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}}; \end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

для $1 < \zeta < a$

$$\left.\begin{aligned} Z = i\frac{dy}{d\zeta} &= -A\frac{iK\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}, \\ F = i\frac{d\psi}{d\zeta} &= -kA\frac{iK\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}}; \end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

для $a < \zeta < b$

$$\left.\begin{aligned} Z = \frac{dx}{d\zeta} &= A\frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(b-\zeta)}}, \\ F = \frac{d\varphi}{d\zeta} &= kA\frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(b-\zeta)}}; \end{aligned}\right\} \tag{10.22}$$

для $b < \zeta < \infty$

$$\left.\begin{aligned} Z = i\frac{dy}{d\zeta} &= A\frac{iK\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}, \\ F = i\frac{d\psi}{d\zeta} &= kA\frac{iK\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

Здесь множитель A является постоянной величиной. Производя интегрирование по ζ в соответствующих пределах, найдем формулы для длин отрезков H, l, h, h_0 и для расходов Q, Q_h, Q_{h_0} через отрезки H, h, h_0. Получим:

$$l = A\int_a^b \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta}{\zeta\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-a)(b-\zeta)}} = AJ_1, \tag{10.24}$$

$$H = A\int_1^a \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta}{\zeta\sqrt{(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}} = AJ_2, \tag{10.25}$$

$$h = A\int_b^\infty \frac{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta\sqrt{(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}\,d\zeta = AJ_3, \tag{10.26}$$

$$h_0 = A\int_{-\infty}^0 \frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)d\zeta}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}} = AJ_4, \tag{10.27}$$

$$Q = kA\int_1^a \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a-\zeta)(b-\zeta)}}\,d\zeta = kAJ_5, \tag{10.28}$$

$$Q_h = kA\int_b^{\infty} \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a)(\zeta-b)}}\,d\zeta = kAJ_6, \tag{10.29}$$

$$Q_{h_0} = kA\int_{-\infty}^{0} \frac{K\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)}{(1-\zeta)\sqrt{(a-\zeta)(b-\zeta)}}\,d\zeta = kAJ_7. \tag{10.30}$$

Полный расход, как мы знаем, определяется формулой (9.10). Поэтому из (10.24)—(10.26) и (10.28) должно вытекать такое соотношение между интегралами:

$$2J_1J_5 = J_2^2 - J_3^2.$$

Для удобства вычислений введем обозначения

$$\alpha = \frac{1}{b}, \quad \beta = \frac{1}{a}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \tag{10.31}$$

и сделаем в интегралах подстановку

$$\frac{1}{\zeta} = \tau. \tag{10.32}$$

Далее, заменим τ новыми выражениями, различными для разных интервалов, делающими подинтегральную функцию конечной на пределах интегрирования. А именно, положим:

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \alpha + (\beta-\alpha)\sin^2\psi \quad (a<\zeta<b),\\ &\tau = \beta + (1-\beta)\sin^2\psi \quad (1<\zeta<a),\\ &\tau = \alpha\sin^2\psi \quad (b<\zeta<\infty). \end{aligned}\right\} \tag{10.33}$$

Вводя еще одно обозначение

$$\frac{2A}{\sqrt{ab}} = C,$$

получим следующие формулы:

$$l = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K[\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\psi]}{\sqrt{1-\alpha-(\beta-\alpha)\sin^2\psi}}\,d\psi, \tag{10.34}$$

$$H = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K[\beta+(1-\beta)\sin^2\psi]\,d\psi}{\sqrt{\beta-\alpha-(1-\beta)\sin^2\psi}}, \tag{10.35}$$

$$h = C\sqrt{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(\alpha\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(\beta-\alpha\sin^2\psi)}}. \tag{10.36}$$

В интегралах для h_0 и Q_{h_0} введем подстановку

$$\frac{1}{1-\zeta} = \tau = \cos^2\psi,$$

что даст нам:

$$h_0 = C\int_0^1 \frac{K(\cos^2\psi)\sin\psi\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha_1\sin^2\psi)(1-\beta_1\sin^2\psi)}}, \tag{10.37}$$

$$Q_{h_0} = kC\int_0^1 \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha_1\sin^2\psi)(1-\beta_1\sin^2\psi)}}. \tag{10.38}$$

Здесь положено:

$$\alpha_1 = 1-\alpha, \quad \beta_1 = 1-\beta. \tag{10.39}$$

Остается преобразовать интеграл Q_h. Полагая

$$\frac{\zeta-1}{\zeta} = \tau = 1-\alpha\sin^2\psi,$$

будем иметь:

$$Q_h = kC\sqrt{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(1-\alpha\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(\beta-\alpha\sin^2\psi)}}. \tag{10.40}$$

Наконец, найдем уравнение депрессионной кривой в параметрической форме. Для этого отделим действительную часть от мнимой в первом из уравнений (10.19) и введем подстановку

$$\zeta = \sin^2\psi.$$

Получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= l - C\int_0^{\psi} \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(1-\beta\sin^2\psi)}}, \\ y &= h + h_0 + C\int_0^{\psi} \frac{K(\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(1-\beta\sin^2\psi)}}. \end{aligned}\right\} \tag{10.41}$$

Постоянная C остается произвольной; можно, например, считать ее равной единице.

Полагая в полученных уравнениях $\psi = \frac{\pi}{2}$, найдем другое выражение для l, а также равенство для $H-h-h_0$:

$$l = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(1-\beta\sin^2\psi)}}, \tag{10.42}$$

$$H-h-h_0 = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(1-\beta\sin^2\psi)}}. \tag{10.43}$$

При вычислениях по приведенным формулам можно пользоваться разложением подинтегральных функций в ряды по степеням параметров α, β и т. д.

Обозначим через I_n, J_n интегралы, входящие в коэффициенты этих разложений:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sin^2\psi)\sin^n\psi\,d\psi,$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\cos^2\psi)\sin^n\psi\,d\psi.$$

Приведем значения некоторых из них:

$$I_1 = \int_0^1 K(1-t^2)\,dt = \frac{\pi^2}{4}, \quad I_3 = \frac{3\pi^2}{16}, \quad I_5 = \frac{41\pi^2}{256}, \quad I_7 = \frac{147\pi^2}{1024},$$

$$J_1 = \int_0^1 K(t^2)\,dt = 2G = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots\right) = 1{,}8319,$$

$$J_3 = 1{,}124, \quad J_5 = 0{,}8764, \quad J_7 = 0{,}7478.$$

Здесь G — постоянная, называемая постоянной Каталана.

Займемся теперь вычислением l. Для малых значений α и β, соответствующих узким перемычкам, имеем разложение в ряд интеграла (10.42):

$$l(\alpha, \beta) = \frac{\pi^2}{4}\{1 + 0{,}375(\alpha+\beta) + 0{,}24023(\alpha^2+\beta^2) + 0{,}16016\,\alpha\beta + 0{,}1794(\alpha^3+\beta^3) + 0{,}1075\,\alpha\beta(\alpha+\beta) + 0{,}1443(\alpha^4-\beta^4) + \ldots\}. \quad (10.44)$$

Из формулы (10.34), полагая

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\sin^2\psi}} = u,$$

найдем:

$$l = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \int_0^K K(1 - \alpha_1\,\mathrm{dn}^2 u)\,du, \quad (10.45)$$

где $\alpha_1 = 1 - \alpha$, и эллиптическая функция $\operatorname{dn} u$ имеет квадрат модуля, равный

$$k^2 = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}.$$

Подинтегральная функция для малых α_1 близка к линейной.

Вычислим H и Q. Для этих величин имеем ряды по степеням β_1 и γ_1:

$$H = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha_1}}\left\{2{,}0794 + 0{,}07243\beta_1 + 0{,}39486\gamma_1 + \right.$$

$$+ 0{,}01737\beta_1^2 + 0{,}02326\beta_1\gamma_1 - 0{,}21039\gamma_1^2 -$$

$$\left. - \frac{\ln \beta_1}{2}\left(1 + \frac{1}{8}\beta_1 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{27}{512}\beta_1^2 + \frac{3}{64}\beta_1\gamma_1 + \frac{9}{64}\gamma_1^2 + \ldots\right)\right\}, \quad (10.46)$$

$$Q = \frac{k\pi^2}{4\sqrt{\alpha_1}}\left\{1 + \frac{1}{8}\beta_1 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{27}{512}\beta_1^2 + \frac{3}{64}\beta_1\gamma_1 + \frac{9}{64}\gamma_1^2 + \ldots\right\}. \quad (10.47)$$

Эти ряды хорошо сходятся при $\beta \geqslant 0{,}9$ и $\alpha < \beta$.

Для h и Q_h при малых α и одновременно β, близких к единице, имеем ряды

$$h = \frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\gamma + 0{,}3417\alpha^2 + 0{,}2\alpha\gamma + 0{,}2\gamma^2 + \right.$$

$$\left. + 0{,}2625\alpha^3 + 0{,}1464\alpha^2\gamma + 0{,}1286\alpha\gamma^2 + 0{,}1429\gamma^3 + \ldots\right), \quad (10.48)$$

$$Q_h = k\sqrt{\gamma}\left(E_0 + \frac{1}{2}\gamma E_1 + \frac{3}{8}\gamma^2 E_2 + \ldots\right), \quad (10.49)$$

где

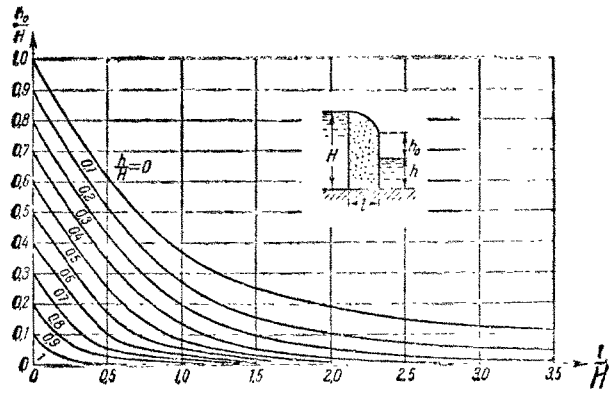
$$E_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{41}{120}\alpha^2 + \ldots\right)\ln\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + 1 + \frac{1}{4}\alpha + \frac{817}{7200}\alpha^2 + \ldots,$$

$$E_1 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\alpha + \frac{41}{140}\alpha^2 + \ldots\right)\ln\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{5}{9} + \frac{9\alpha}{50} + \frac{5309}{58\,800}\alpha^2 + \ldots,$$

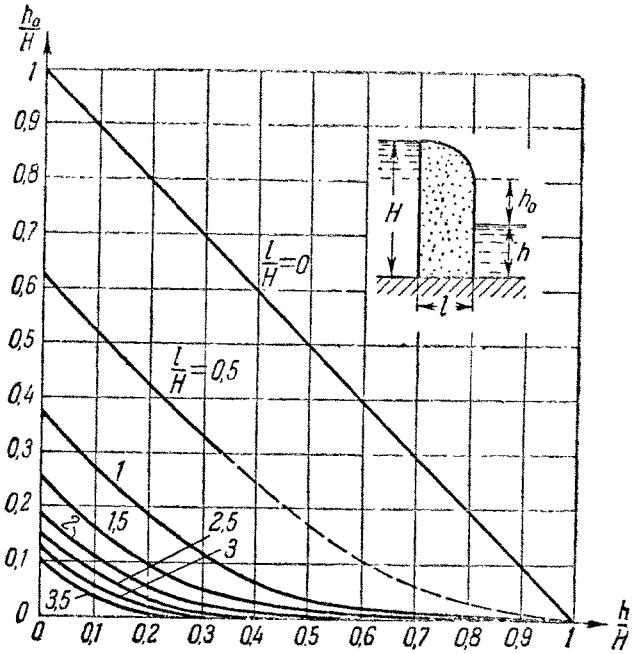
$$E_2 = \left(\frac{8}{15} + \frac{12}{35}\alpha + \frac{82}{315}\alpha^2 + \ldots\right)\ln\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{94}{225} + \frac{179}{1225}\alpha + \frac{30\,419}{396\,900}\alpha^2 + \ldots$$

Вычисления, проведенные для $\beta = 0{,}9;\ 0{,}99;\ \ldots;\ 1 - 10^{-8}$ и $\alpha = 0;\ 0{,}1;\ \ldots;\ 0{,}9;\ \ldots;\ 1 - 10^{-8}$, с последующим графическим интерполированием дали графики, приведенные на фиг. 220—226.

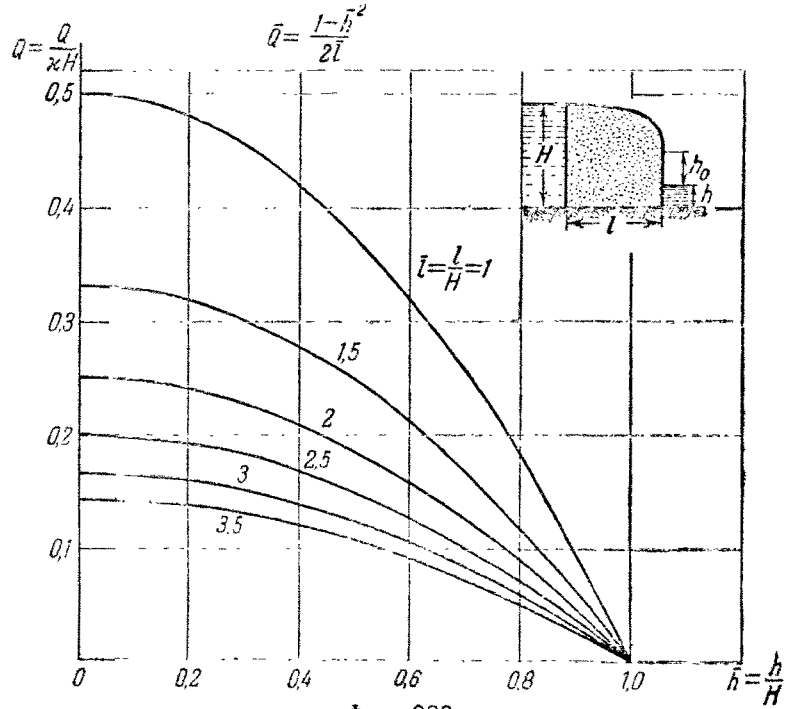
Что касается этих графиков, то они точны для случая $h = 0$ (отсутствия воды в нижнем бьефе), где проще вычисления и где не было надобности в интерполировании, и обладают меньшей степенью точности при h, отличном от нуля, когда приходилось проводить интерполирование. В особо сомнительных случаях вместо сплошных линий проведены пунктирные.



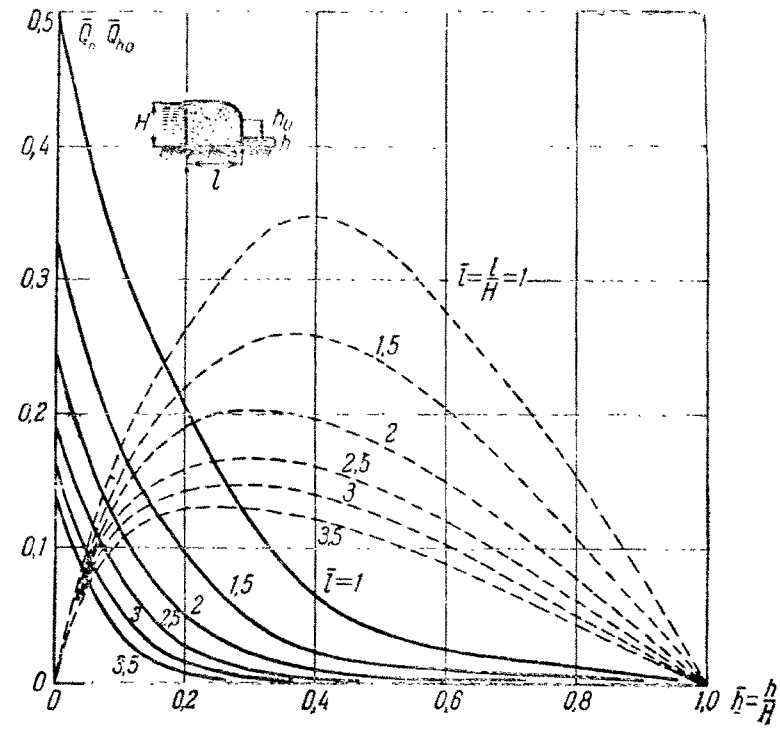
Фиг. 220.



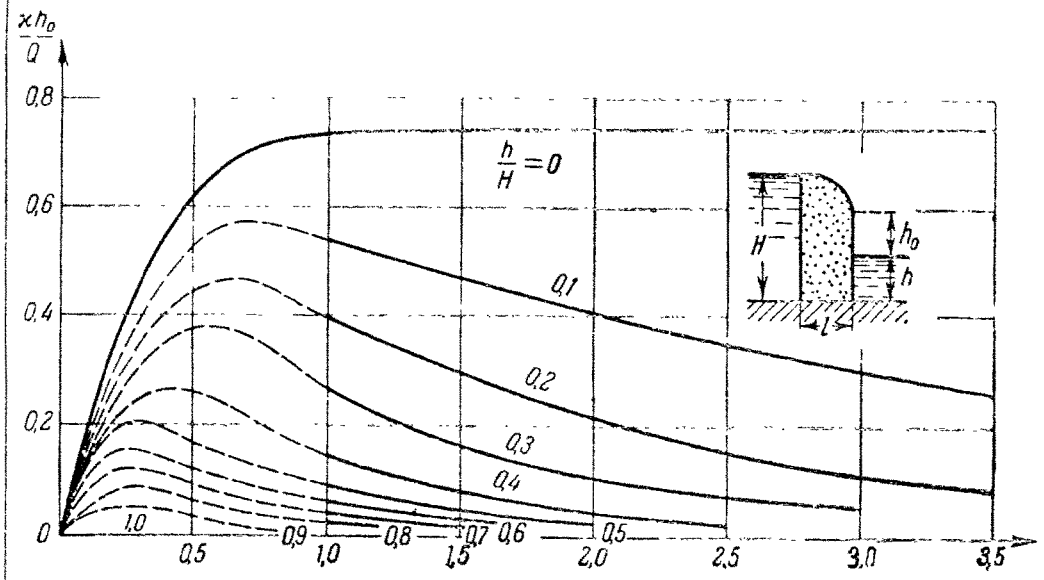
Фиг. 221.



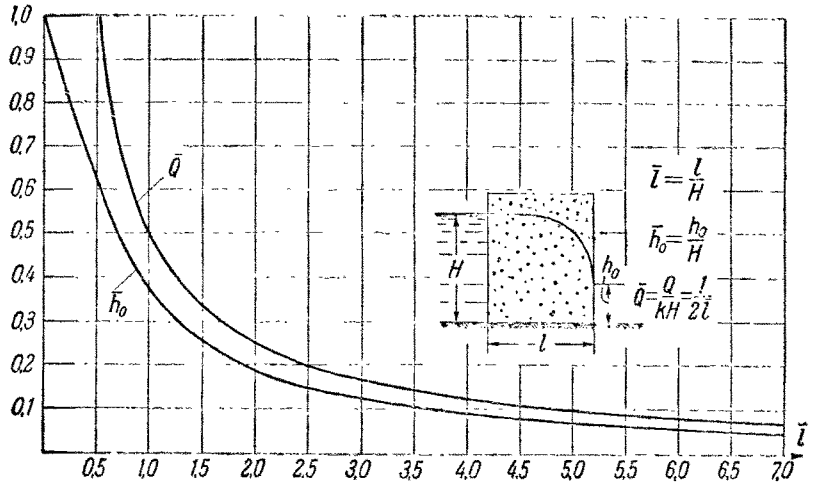
Фиг. 222.



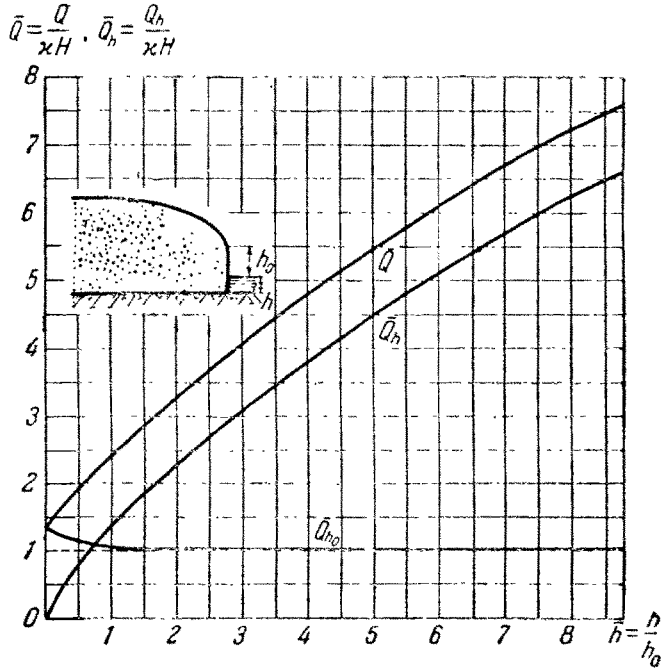
Фиг. 223.



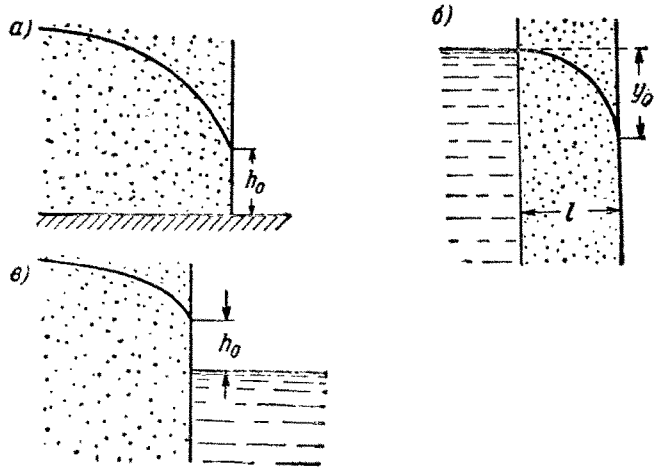
Фиг. 224.



Фиг. 225.



Фиг. 226.



Фиг. 227.

Отметим частные случаи.

1. Случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Это случай, когда в нижнем бьефе нет воды и когда длина основания перемычки бесконечно велика (фиг. 227, *а*). В этом случае для отрезка высачивания h_0 из (10.37) получаем:

$$h_0 = C\int_0^1 K(\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi = CJ_1 = 1{,}8319C. \qquad (10.50)$$

Расход Q_{h_0} определится из (10.38):

$$Q_{h_0} = kC\int_0^1 K(\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi = CJ_1 = \frac{\pi^2}{4}C.$$

Отсюда найдем зависимость между Q_{h_0} и l:

$$Q_{h_0} = \frac{k\pi^2}{8G}h_0 = 1{,}3469\,kh_0. \qquad (10.51)$$

Уравнения депрессионной кривой упрощаются, и их можно написать в виде

$$x = \frac{C}{2}\int_0^m \frac{K(m)\,dm}{1-m}, \qquad y - h_0 = y_1 = \frac{C}{2}\int_0^m \frac{K(1-m)\,dm}{1-m}. \qquad (10.52)$$

Заметим, что при $l = \infty$, но h отличном от нуля, т. е. при наличии воды в нижнем бьефе, равенство (10.51) приближенно выполняется, а именно, Q_{h_0}/kh_0 изменяется в пределах от 1,346 до 1, когда h/h_0 изменяется от 0 до ∞. В случае перемычки с конечной, но достаточно большой шириной основания равенство (10.51) также приближенно выполняется. А именно, для $\frac{l}{H} \geqslant 1$

$$Q \approx 1{,}35kh_0.$$

При $l/H < 1$ это равенство становится все менее точным по мере приближения l/H к нулю (фиг. 226).

2. Случай $\alpha = \beta = 0$. Это случай бесконечно глубокой перемычки без воды в нижнем бьефе. Обозначим через y_0 отрезок, изображенный на фиг. 227, *б*. Формула (10.44) дает:

$$l = C\frac{\pi^2}{4}.$$

По формуле (10.41) получаем y_0:

$$y_0 = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi = 2CG.$$

Отсюда найдем отношение

$$\frac{y_0}{l} = \frac{8G}{\pi^2}$$

или

$$y_0 = 0{,}7425l.$$

3. Случай $\alpha = \beta = 1$. Этому случаю соответствует фиг. 227, *в*. Формулы (10.38) и (10.37) для Q_{h_0} и h_0 дают:

$$h_0 = C\int_0^1 K(t^2)\,t\,dt = C, \qquad Q_{h_0} = kC\int_0^1 K(1-t^2)\,t\,dt = kC.$$

Следовательно,

$$Q_{h_0} = kh_0.$$

В таблице 12 дается зависимость координат точек депрессионной кривой от параметра m в случае отсутствия воды в нижнем бьефе для бесконечно широкой перемычки, или, что то же, для случая притока воды из бесконечности к канаве с вертикальными стенками при отсутствии в ней воды [по уравнениям (10.52) при $C = 1$].

Таблица 12

Зависимость координат депрессионной кривой от параметра m в случае отсутствия воды в нижнем бьефе для бесконечно широкой перемычки

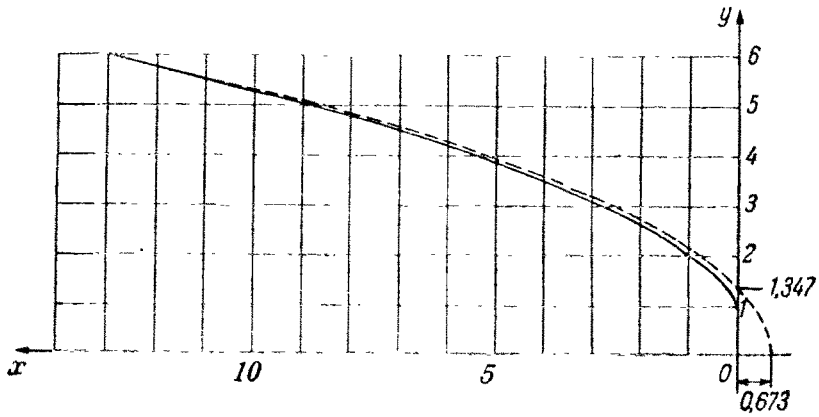
m	0	0,05	0,10	0,25	0,5	0,6	0,7
x	0	0,036	0,073	0,250	0,593	0,805	1,094
y_1	0	0,084	0,160	0,445	0,773	0,976	1,226
m	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	$1-10^{-5}$	$1-10^{-6}$
x	1,533	2,370	5,977	10,890	17,126	24,686	33,572
y_1	1,568	2,133	3,961	5,771	7,579	9,388	11,196
m	$1-10^{-7}$	$1-10^{-8}$	$1-10^{-9}$	$1-10^{-12}$	$1-10^{-15}$	$1-10^{-18}$	$1-10^{-21}$
x	43,784	55,321	68,184	114,72	173,19	243,59	420,18
y_1	13,005	14,813	16,622	22,047	22,472	32,898	43,748

Чтобы получить ординаты депрессионной кривой $y = y_1 + h_0$, нужно к значениям y_1 таблицы 12 прибавить $h_0 = 1{,}8319$. На графике (фиг. 228) h_0 принято равным единице, поэтому все значения x, y_1 таблицы 12 разделены на 1,8319. При этом согласно (10.51) расход Q_{h_0} будет равен $1{,}3469k$. Такой же расход через горизонтальный отрезок d дренажа дает парабола с параметром $p = 2d = 1{,}3469$ [см. формулу (10.5) главы II]. На фиг. 228 она показана пунктиром — это асимптотическая парабола для построенной депрессионной кривой.

Заметим, что если мы будем сдвигать эту параболу вдоль ее оси, то будем получать опять параболы, асимптотические к депрессионной кривой фиг. 228. Из них наибольший интерес будет представлять

парабола, вершина которой находится в начале координат. Депрессионная кривая будет заключаться между двумя указанными параболами.

Мы уже говорили в § 9 об экспериментах С. М. Проскурникова [15] по методу электро-гидродинамических аналогий. Кроме расходов для серии перемычек, он определял величину промежутка выса-



Фиг. 228.

чивания. Для узких перемычек результаты получаются более точными, чем для широких, как можно установить путем сопоставления экспериментальных данных с теоретическими.

В. ПЕРЕМЫЧКА В ФОРМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРАПЕЦИИ

§ 11. Фильтрация в трапецоидальной перемычке при испарении. Будем называть *перемычкой* не только плотину с вертикальными откосами, но и плотину, у которой верховой откос вертикален, а низовой имеет форму прямой, составляющей с горизонтальной осью угол $\theta = \pi\sigma$, не превышающий π.

Пусть имеем перемычку на непроницаемом основании (фиг. 229, *а*).

В верхнем бьефе глубина воды равна H, в нижнем бьефе воды нет, так что жидкость просачивается через откос, являющийся промежутком высачивания. Со свободной поверхности происходит испарение таким образом, что на CB имеем:

$$\psi + cx = \text{const}, \tag{11.1}$$

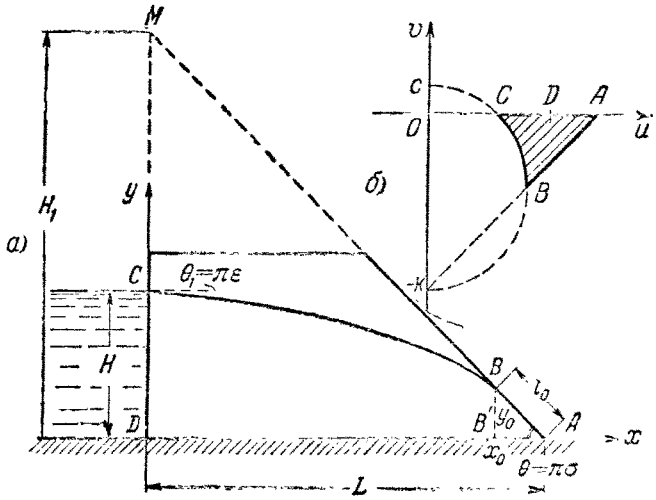
где $c > 0$. Годограф скорости представлен на фиг. 228, *б*.

Отметим, что линия CB не есть линия тока и угол $\theta_1 = \pi\varepsilon$, составляемый линией свободной поверхности с горизонталью, не будет равен нулю. Как видно из графика годографа, отрезок OC

равен, с одной стороны, $\sqrt{kc}$, с другой $-k\operatorname{tg}\theta_1$, откуда получаем, полагая $\theta_1 = \pi\varepsilon$:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}\pi\varepsilon = \sqrt{\frac{c}{k}}. \tag{11.2}$$

Пусть на действительной оси вспомогательной плоскости ζ точки A, B, C и D переходят соответственно в точки $\zeta = 0,\ 1,\ \infty,\ -a$.



Фиг. 229.

При $\zeta = -a$ имеем устранимую особенность с показателем $-\frac{1}{2}$ для функций F и Z. Положив

$$F = \frac{F_1}{\sqrt{\zeta + a}}, \quad Z = \frac{Z_1}{\sqrt{\zeta + a}}, \tag{11.3}$$

для функций F_1 и Z_1 около особых точек получим показатели

$$-\frac{1}{2},\ 1-\sigma \text{ при } \zeta = 0,$$
$$1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon \text{ при } \zeta = \infty,$$
$$0,\ \frac{1}{2}-\sigma \text{ при } \zeta = 1.$$

Функции Z_1 и F_1 представляют линейные комбинации двух ветвей функции Римана:

$$Y = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1+\varepsilon & 0 \\ \sigma-1 & 1-\varepsilon & \frac{1}{2}-\sigma \end{Bmatrix} \begin{matrix} \zeta \\ \zeta \\ \zeta \end{matrix} = \zeta^{-1/2} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}+\varepsilon & 0 \\ \sigma-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\varepsilon & \frac{1}{2}-\sigma \end{Bmatrix} \begin{matrix} \zeta \\ \zeta \\ \zeta \end{matrix} = \zeta^{-1/2} Y_1.$$

Около точки $\zeta = 0$ линейно независимые ветви функции Y_1 выражаются через гипергеометрические функции U и V:

$$\left.\begin{aligned} U &= F(a, b, c, \zeta) = F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{3}{2}-\sigma, \zeta\right), \\ V &= \zeta^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \zeta) = \\ &= \zeta^{\sigma-1/2}F\left(\sigma+\varepsilon, \sigma-\varepsilon, \frac{1}{2}+\sigma, \zeta\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

Функции F и Z, удовлетворяющие всем условиям на отрезках действительной оси, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{B}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}}\left\{\frac{ir}{p}(k\operatorname{tg}^2\theta - c)U + k\operatorname{tg}\theta(1 - i\operatorname{tg}\theta)V\right\}, \\ Z &= B(1 - i\operatorname{tg}\theta)\frac{V}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

Здесь B — постоянная, подлежащая определению, r и p — коэффициенты вспомогательной подстановки [см. формулы (5.12)]. Отношение $\frac{r}{p}$ выражается через функции гамма:

$$\frac{r}{p} = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)} = \frac{\cos\pi\varepsilon}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+\delta\right)}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\delta\right)\Gamma(\delta-\varepsilon)\Gamma(\delta+\varepsilon).$$

Формулы (11.5) нетрудно проверить, переходя от одного отрезка к другому.

Длина L основания плотины находится по формуле

$$L = B(1 - i\operatorname{tg}\theta)\int_{-a}^{0}\frac{V\,d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}}. \tag{11.6}$$

Для расхода получается выражение

$$Q = Bk\int_0^1 \operatorname{tg}^2\theta\left(\frac{rq}{p}-s\right)(1-\zeta)^{\sigma-\frac{1}{2}}d\zeta + \frac{rBc}{p}\int_0^1\frac{U\,d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}}. \tag{11.7}$$

Отметим частный случай, когда $\theta = \pi$. Это значит, что мы имеем горизонтальный отрезок дренажа. Формулы (11.4) перейдут в такие:

$$\left.\begin{aligned} U &= F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}, \zeta\right), \\ V &= \zeta^{1/2}F\left(1+\varepsilon, 1-\varepsilon, \frac{3}{2}, \zeta\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

Гауссом были найдены выражения

$$F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\varepsilon,\ \frac{1}{2},\ \sin^2 t\right)=\frac{\cos 2\varepsilon t}{\cos t},$$

$$F\left(1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon,\ \frac{3}{2},\ \sin^2 t\right)=\frac{\sin 2\varepsilon t}{2\varepsilon \sin t\cos t}.$$

Полагая $\sin^2 t=\zeta$, найдем для нашего случая:

$$\left.\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\varepsilon,\ \frac{1}{2},\ \zeta\right)&=\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{2\sqrt{1-\zeta}},\\ F\left(1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon,\ \frac{3}{2},\ \zeta\right)&=\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}-(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{2\varepsilon\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}. \end{aligned}\right\} \quad (11.9)$$

Ограничиваясь случаем бесконечно широкой перемычки, или, иначе, рассматривая приток к горизонтальной щели из бесконечности, получим ω и z в виде

$$\omega=\frac{i\sqrt{kc}}{2\varepsilon}A\int\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}d\zeta,$$

$$z=-\frac{Ai}{4\varepsilon}\int\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}-(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}d\zeta.$$

Подстановка $\zeta=\sin^2 t$ приводит к интегралам, которые выражаются в конечном виде

$$\left.\begin{aligned} z&=-\frac{Ai}{2\varepsilon}\int_0^t\sin 2\varepsilon t\,dt=-\frac{A}{4\varepsilon^2}(1-\cos 2\varepsilon t),\\ \omega&=\frac{i\sqrt{kc}}{\varepsilon}A\int_0^t\cos 2\varepsilon t\,dt=\frac{i\sqrt{kc}}{2\varepsilon^2}A\sin 2\varepsilon t. \end{aligned}\right\} \quad (11.10)$$

Перенесем начало координат в точку выхода свободной поверхности в дренаж (на низовой откос). Тогда длина отрезка дренажа l_0 найдется из (11.10) при $t=\frac{\pi}{2}$, когда $x=-l_0$, $y=0$:

$$l_0=+\frac{A}{4\varepsilon^2}(1-\cos\pi\varepsilon).$$

Полагая во втором из уравнений (11.10) $t=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$, $\psi=Q$, найдем зависимость между расходом Q и отрезком дренажа

$$Q=\frac{\sqrt{kc}}{2\varepsilon^2}A\sin\pi\varepsilon=+\sqrt{k}(\sqrt{c+k}+\sqrt{k})l_0.$$

Чтобы найти уравнение свободной поверхности, положим $\varphi + ky = 0$, $\psi + cx = 0$; при этом $t = \frac{\pi}{2} + i\lambda$, где $\lambda > 0$. Получим гиперболу

$$y^2 = \frac{c}{k} x^2 - 2l_0\left(1 + \sqrt{\frac{k+c}{k}}\right)x.$$

§ 12. Фильтрация в трапецоидальной перемычке при отсутствии испарения. Здесь мы рассмотрим частный случай задачи предыдущего параграфа, когда величина $\varepsilon = 0$, т. е. испарение отсутствует. Для элементов перемычки получаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
H &= B\int_0^{\frac{1}{1+a}} \frac{F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \sigma+\frac{1}{2}, 1-x\right)}{(1-x)^{1-\sigma}\sqrt{x}\sqrt{1-(1+a)x}}\,dx,\\
L &= B\int_0^{1} \frac{F\left(\sigma, c, \sigma+\frac{1}{2}, -ax\right)}{a^{1/2-\sigma}x^{1-\sigma}\sqrt{1-x}}\,dx,\\
Q &= kB\frac{\Gamma^2(1-\sigma)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\sin^2\theta}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)\cos\theta}\int_0^{1} \frac{F\left(1-\sigma, 1-\sigma, \frac{3}{2}-\sigma, 1-x\right)}{(1-x)^{\sigma-1/2}\sqrt{x(x+a)}}\,dx,\\
l_0 &= B\int_0^{1} \frac{F\left(\sigma, \sigma, \sigma+\frac{1}{2}, x\right)}{x^{1-\sigma}\sqrt{x(x+a)}}\,dx.
\end{aligned}\right\} \quad (12.1)$$

Для случая бесконечно широкой плотины ($L = \infty$) С. В. Фалькович[7] найдено выражение для $\frac{kl_0}{Q}$ непосредственно в функции от угла наклона низового откоса

$$\frac{kl_0}{Q} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg} x)^{1-2\sigma} \ln \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx. \quad (12.2)$$

Формулы (12.1) преобразованы Г. К. Михайловым[11] к виду, удобному для вычислений.

Для этого гипергеометрические функции были разложены в ряды и затем подинтегральные функции почленно интегрировались. В резуль-

тате были получены следующие формулы, удобные при $a \gg 1$:

$$\left.\begin{aligned}
H &= \frac{\sqrt{\pi}\,t}{\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n + 2\nu_n \left[\ln 2 + \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^m}{m} + \ln \sqrt{1+a}\right]}{\Gamma(n+1)(1+a)^n} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right), \\
L &= \sum_{n=0}^{\infty} t(\nu_n \bar{I}^n + \mu_n \bar{\bar{I}}^n) + \\
&+ \frac{(-1)^n}{\sqrt{a-1}} \frac{\Gamma^2(\sigma+n)\,\Gamma\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(\sigma)\,\Gamma\left(\sigma+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)(n+\sigma)} F\left(\frac{1}{2}, 1, n+\sigma+1, \frac{-1}{a-1}\right), \\
Q &= kl_0 \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - k \frac{\Gamma^2(1-\sigma)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)\operatorname{ctg}^3\theta} \frac{1}{\pi\sqrt{1+a}} \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\sigma\right)\Gamma(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, 1, n+\frac{3}{2}, \frac{1}{1+a}\right), \\
l_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(\sigma+n)\,\Gamma\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2(\sigma)\,\Gamma\left(\sigma+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)(n+\sigma)} \times \\
&\times F\left(\frac{1}{2}, 1, \sigma+n+1, \frac{1}{1+a}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (12.3)$$

Здесь для простоты положено $B = 1$ и введены следующие обозначения:

$$\bar{I}^n = -\int_{\frac{1}{1+a}}^{1/2} \frac{x^n \ln x\,dx}{\sqrt{x}\sqrt{(a+1)x-1}}, \quad \bar{\bar{I}}^n = \int_{\frac{1}{1+a}}^{1/2} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x}\sqrt{(a+1)x-1}},$$

$$\frac{F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \sigma+\frac{1}{2}, 1-x\right)}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv \frac{-t\left[(\ln x - R)F\left(\sigma, \frac{1}{2}, 1, x\right) + d_n x^n\right]}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv$$

$$\equiv t\sum_{n=0}^{\infty}(\mu_n x^n - \nu_n x^n \ln x), \quad \text{где} \quad t = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\sigma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\sigma+1)}.$$

Первая часть последнего тождества основана на формуле Гаусса для преобразования функции $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x)$ к функции аргумента x, вторая — на основании обычного разложения в степенной ряд.

По этим формулам были проведены некоторые вычисления.

Путем предельного перехода при $\sigma \to 0$ Г. К. Михайлов получил из приведенных формул простую формулу

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{h}^2}{1 + \sqrt{1 - \tilde{h}^2}}. \tag{12.4}$$

При $\sigma \to \frac{1}{2}$ путем такого же предельного перехода им была получена формула

$$\tilde{Q} = \tilde{h} - (1 - \tilde{h}) \ln \frac{1}{1 - \tilde{h}}. \tag{12.5}$$

Здесь $\tilde{h} = \frac{H}{H_1}$ и $\tilde{Q} = \frac{Q}{Q_0}$, где $Q_0 = \frac{kH_1^2}{L}$ — расход при наибольшем напоре.

Приведем вкратце вывод формулы (12.4). Очевидно, что при $\sigma \to 0$ также $a \to \infty$. Однако, чтобы получить конечные значения $\tilde{h}$ и $\tilde{Q}$, необходимо положить $\sigma \ln a = \alpha = \text{const}$.

Рассмотрим поведение $H\sqrt{a}$ при $a \to \infty$ и $\sigma \ln a = \alpha$. Для этого преобразуем соответствующую формулу из (12.3) к виду

$$H\sqrt{a} + 1 = t\pi(\mu_0 + 2\nu_0 \ln 2\sqrt{1+a}) + \\ + t\sqrt{\pi} \sum_1^\infty \frac{\mu_n + 2\nu_n \left[\ln 2 + \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^m}{m} + \ln \sqrt{1+a}\right]}{\Gamma(n+1)(1+a)^n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Заметим, что

$$\mu_0 = R = \frac{1}{\sigma} - \psi(\sigma) + \psi(0) + \ln 4, \quad \nu_0 = 1.$$

Здесь $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Переходя к пределу, будем иметь:

$$\lim H\sqrt{a} = \pi(1 + 2\sigma \ln \sqrt{a}) = \pi(1 + \alpha), \tag{12.6}$$

так как сумма в правой части стремится к 0 с ростом a. Рассмотрим теперь поведение $l_0\sigma\sqrt{a}$:

$$l_0\sigma\sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{a+1}} \left\{F\left(\frac{1}{2}, 1, 1+\sigma, \frac{1}{1+a}\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma^3 \sum_1^\infty \frac{\Gamma^2(\sigma+n)\,\Gamma\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\sigma+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)\Gamma^2(\sigma+1)(n+\sigma)} F\left(\frac{1}{2}, 1, \sigma+n+1, \frac{1}{1+a}\right)\right\}.$$

Сумма в правой части стремится к 0 при $\sigma \to 0$, и имеем:

$$\lim l_0 \sigma \sqrt{a} = 1.$$

Рассмотрим теперь величину $\frac{Q\sqrt{a}}{\sigma k}$. Очевидно,

$$\lim \frac{Q\sqrt{a}}{\sigma k} = \lim \pi^2 \sigma l_0 \sqrt{a} -$$

$$- \lim 2\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}-\sigma\right)\Gamma(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{1+a}\right);$$

второй предел правой части стремится к 0 при $\sigma \to \infty$ и $\lim \frac{Q\sqrt{a}}{\sigma k} = \pi^2$.

Перейдем, наконец, к изучению величины $2L\sigma\sqrt{a}$. Разобьем величину L на две части ($L = L_1 + L_2$) соответственно двум слагаемым выражения, стоящего под знаком суммы в соответствующей формуле из (12.3):

$$\lim 2L_1\sigma\sqrt{a} = \lim 2\sigma\sqrt{a}\, t \sum_{0}^{\infty} (\nu_n \bar{I}^n + \mu_n \bar{\bar{I}}^n) =$$

$$= \lim 2\sigma\sqrt{a}\, t(\bar{I}^0 + R\bar{\bar{I}}^0) + \lim 2\sigma t\sqrt{a} \sum_{1}^{\infty} (\nu_n \bar{I}^n + \mu_n \bar{\bar{I}}^n).$$

Второй предел в правой части равен нулю, так как $\bar{I}^n$ и $\bar{\bar{I}}^n$ стремятся к нулю, как $a^{-1/2}$. Следовательно,

$$\lim 2L_1\sigma\sqrt{a} = \lim 2\sigma\sqrt{a}\, t(\bar{I}^0 + R\bar{\bar{I}}^0) = \lim 2t\sqrt{a}\,(\sigma\bar{I}^0 + \bar{\bar{I}}^0).$$

Но

$$\bar{\bar{I}}^0 = \frac{\ln a + \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{1+a}} \quad \text{и} \quad \lim 2t\sqrt{a}\,\bar{\bar{I}}^0 = 2\alpha.$$

Разлагая $\bar{I}^0$ в подходящие ряды, можно показать, что

$$\lim 2t\sqrt{a}\,\bar{I}^0\sigma = \alpha^2.$$

Следовательно, $\lim 2L_1\sigma\sqrt{a} = \alpha^2 + 2\alpha$.

Переходя к части L_2, заметим, что

$$L_2\sigma\sqrt{a} = \sqrt{\frac{a}{a-1}}\left\{F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ 1+\sigma,\ \frac{-1}{a-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma^8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma^2(\sigma+n)\Gamma\left(\sigma+\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ n+\sigma+1,\ \frac{-1}{a-1}\right)}{\Gamma^2(\sigma+1)\,\Gamma\left(\sigma+n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)(n+\sigma)} \right\}$$

и $\lim 2L_2\sigma\sqrt{a} = 2$. Окончательно $\lim 2L\sigma\sqrt{a} = \alpha^2 + 2\alpha + 2$.

Следовательно,

$$\lim \tilde{h} = \lim \frac{H \operatorname{ctg} \theta}{L} = \lim \frac{H}{\pi \sigma L} = \lim \frac{H \sqrt{a}}{\pi \sigma L \sqrt{a}} = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha^2 + 2\alpha + 2}, \tag{12.7}$$

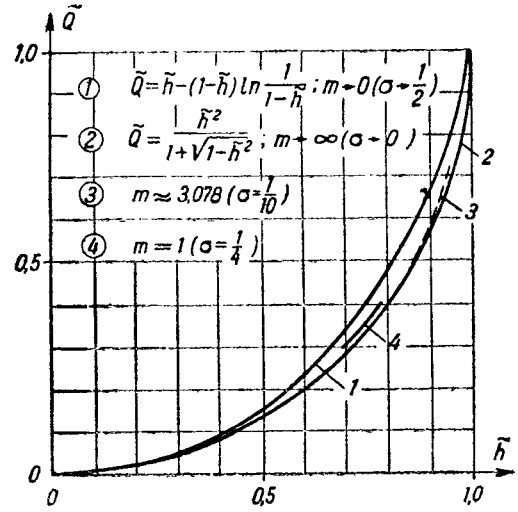
$$\lim \tilde{Q} = \lim \frac{Q \operatorname{ctg}^2 \theta}{Lk} = \lim \frac{Q}{\pi^2 \sigma^2 L k} = \frac{1}{\pi^2} \lim \frac{Q \sqrt{a}}{k\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma L \sqrt{a}} = \frac{2}{\alpha^2 + 2\alpha + 2}. \tag{12.8}$$

Исключая из последних двух формул параметр α и опуская знаки предела при $\tilde{h}$ и $\tilde{Q}$, найдем (12.4).

Аналогично, но более громоздко выводится формула (12.5).

Следует отметить, что при $\sigma = 0$ и $\sigma = \frac{1}{2}$ расчетная схема плотины теряет смысл, но формулы (12.4), (12.5) сохраняют свое значение. Их можно рассматривать как приближенные при $\sigma \approx 0$ и $\sigma \approx \frac{1}{2}$.

Графики формул (12.4) и (12.5), а также результаты вычислений по формулам (12.3) при $\sigma = 0{,}1$ и $\sigma = 0{,}25$ приведены на фиг. 230. Буквой m на фиг. 230 обозначен коэффициент заложения низового откоса, т. е. $m = \operatorname{ctg} \theta$. Как видно из фиг. 230, формулы (12.4) и (12.5) дают близкие кривые, между которыми лежат кривые для всех прямых наклонов низового откоса $\left(\sigma < \frac{1}{2}\right)$.



Фиг. 230.

К этим же граничным кривым можно притти и другим путем. Рассмотрим для этого сначала плотину, сложенную из анизотропного горизонтально - слоистого грунта, для которого $k_y = 0$ (см. главу VIII, § 9). Движение в таком грунте происходит по горизонтальным прямым, причем

$$v_x = -k \frac{dh}{dx}.$$

Выделим элементарную горизонтальную полоску на высоте y от водоупора. Длина такой полоски равна $l = L - y \operatorname{ctg} \theta = L\left(1 - \frac{y}{H_1}\right)$.

Разность напоров на ее концах составляет $H - y$. Поэтому

$$v_x = k \frac{H-y}{l} = \frac{kH_1}{L} \cdot \frac{H-y}{H_1 - y}.$$

Расход найдем из формулы

$$Q = \frac{kH_1}{L} \int_0^H \frac{H-y}{H_1 - y} dy = \frac{kH_1}{L} \left[H - (H_1 - H) \ln \frac{H_1}{H_1 - H} \right]. \tag{12.9}$$

В обозначениях $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{h}$ формула (12.9) совпадает с приведенной выше формулой (12.5). Формула (12.9) была дана и рекомендована в качестве приближенной для изотропных плотин Н. Т. Мелещенко [16].

Рассмотрим теперь фильтрацию в вертикально-слоистом грунте при $k_y = \infty$. В этом случае вертикали $x = \text{const}$ являются линиями равного потенциала (см. главу VIII). Как выше указывалось, эта схема есть точная интерпретация уравнения Дюпюи, для которого линией свободной поверхности является парабола вида

$$y^2 = ax + b.$$

Найдем постоянные a и b из условия, что парабола проходит через точку C $(0, H)$ и пересекает прямую низового откоса в некоторой точке $B(x_0, y_0)$ (фиг. 229). Очевидно,

$$y^2 = H^2 - \frac{H^2 - y_0^2}{x_0} x.$$

Расход Q через сечение CD (фиг. 229) составляет:

$$Q = k \frac{H^2 - y_0^2}{2x_0}. \tag{12.10}$$

Во всем треугольнике ABB' горизонтальная скорость фильтрации постоянна. Разность напоров в точках B' и A равна y_0, длина пути фильтрации между ними $L - x_0$. Поэтому фильтрационный расход в сечении BB', равный расходу в сечении CD, составляет:

$$Q = ky_0 \frac{y_0}{L - x_0} = ky_0 \operatorname{tg} \theta. \tag{12.11}$$

Присоединяя к соотношениям (12.10) и (12.11) условие, что точка (x_0, y_0) лежит на прямой низового откоса, получим окончательно для фильтрационного расхода формулу

$$Q = k \frac{H^2}{L + \sqrt{L^2 - H^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}}. \tag{12.12}$$

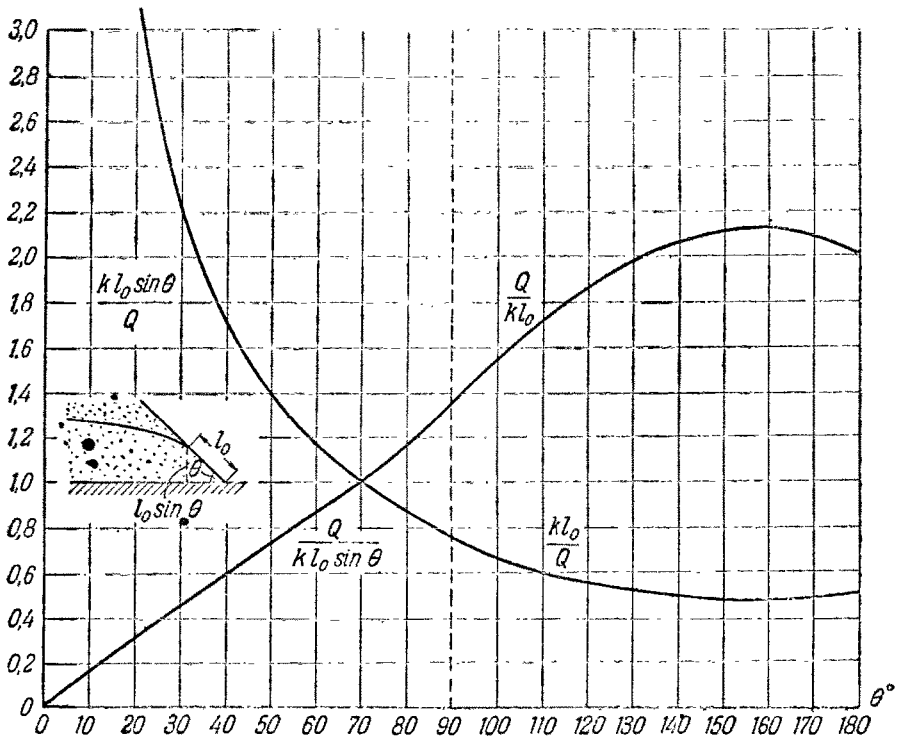
В обозначениях $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{h}$ формула (12.12) принимает вид формулы (12.4). Формула (12.12) была рекомендована Н. Н. Павловским в качестве приближенной для изотропных плотин [17].

Так как кривые зависимостей $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(\widetilde{h})$ для случая изотропного грунта следует предполагать лежащими между кривыми формул (12.9) и (12.12), то приведенные соображения о фильтрации в предельно-анизотропных грунтах позволяют довольно точно оценить величину фильтрационного расхода в плотине. Применение модели предельно-анизотропных грунтов оказывается полезным и в некоторых других задачах теории фильтрации (см. главу XIII).

Кривые расходов $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(\widetilde{h})$ в реальных плотинах, как показывает фиг. 230, получаются очень близкими к кривой, построенной по

формуле (12.4) [или, что то же, по формуле (12.12)]. Поэтому для практических расчетов можно рекомендовать формулу Н. Н. Павловского (12.12).

Что касается зависимости отношения величины участка высачивания к фильтрационному расходу $\left(\frac{kl_0}{Q}\right)$ от угла наклона низового откоса, то эта зависимость получается, как показывают расчеты, практически одной и той же для всех реальных плотин. При значениях $\frac{H}{L}$, не превышающих практически встречающихся, отно-



Фиг. 231.

шение $\frac{kl_0}{Q}$ зависит только от угла наклона низового откоса к горизонту. Поэтому для этого отношения можно использовать формулу С. В. Фальковича (12.2), которую Г. К. Михайлов привел к двойному ряду

$$\frac{kl_0}{Q} = \frac{4^{\sigma}}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n+m}\,\Gamma(m-1+2\sigma)}{(n+\sigma)^2\,\Gamma(-1+2\sigma)\,m!}. \qquad (12.13)$$

На фиг. 231 приведен график этой зависимости, причем для удобства при $\theta < 90°$ вместо $\frac{kl_0}{Q}$ отложены значения $\frac{kl_0 \sin\theta}{Q}$, чаще встречающиеся в практических подсчетах.

При $\theta < \frac{\pi}{2}$ формула (12.13) может быть с точностью свыше 3% представлена приближенной зависимостью [11]

$$\frac{kl_0}{Q} = \frac{\alpha \operatorname{ctg} \theta + 6 - \alpha}{4 \sin \theta}, \tag{12.14}$$

где $\alpha = 4$ при $\operatorname{ctg} \theta > 1$ и $\alpha = 3$ при $\operatorname{ctg} \theta < 1$.

Для того чтобы перейти от рассмотренной схемы к реальным профилям плотин, необходимо рассмотреть различные наклоны верхового откоса, отличные от вертикального. Известно, что уклон верхового откоса плотины оказывает малое влияние на величину фильтрационного расхода. Ряд авторов в течение последних десяти лет использует для расчета плотин прием приведения наклонного верхового откоса к вертикальному путем замены действительной плотины в расчетной схеме эквивалентной ей в смысле величины фильтрационного расхода плотиной с вертикальным верховым откосом.

Для ширины основания ΔL эквивалентного прямоугольника, заменяющего в указанном смысле треугольник верхового откоса, были предложены различные полуэмпирические формулы. Г. К. Михайлов из анализа существующих гидромеханических исследований нашел, что при $\operatorname{tg} \psi < \frac{4}{3}$ эта величина довольно точно выражается формулой

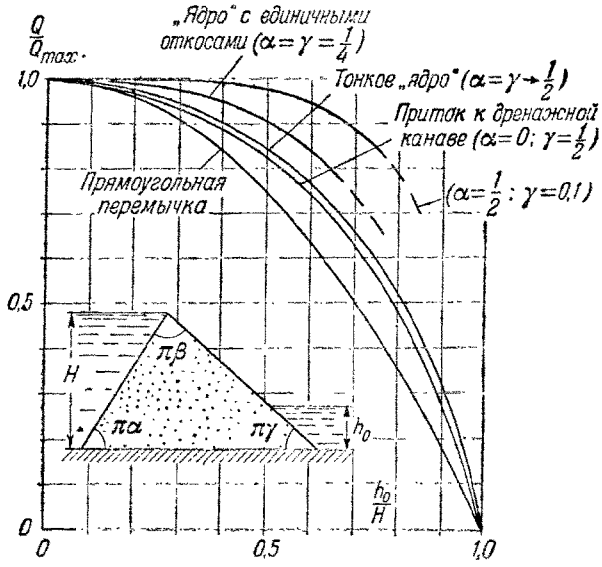
$$\Delta L = \frac{H}{2 + \operatorname{tg} \psi}, \tag{12.15}$$

где ψ — угол наклона верхового откоса к горизонту. При $\operatorname{tg} \psi > \frac{4}{3}$ формула (12.15) может быть заменена более точной для этого интервала зависимостью

$$\Delta L = \frac{H}{2} \cos \psi. \tag{12.16}$$

Влияние воды в нижнем бьефе. Для получения ориентировочной оценки влияния глубины воды в нижнем бьефе на расход плотины Г. К. Михайлов рассмотрел треугольную плотину при наибольшем уровне воды в верхнем бьефе, достигающем гребня треугольника. Для такой плотины с пологими откосами, когда угол при вершине более прямого, при максимальном заполнении верхнего бьефа сохраняется участок свободной поверхности; точное решение задачи в этом случае является сложным. Если же угол при вершине менее прямого, то грунтовый поток сплошь заполняет треугольник плотины. Точное решение задачи в этой постановке может быть получено с помощью конформного отображения треугольника плотины на пятиугольник области годографа скорости. Несколько более простая задача, когда один откос плотины вертикален, рассматривалась А. М. Мхитаряном при его фрагментном способе расчета фильтрации в трапецоидальных плотинах на водоупоре. В последнем случае область годографа скорости вырождается в треугольник.

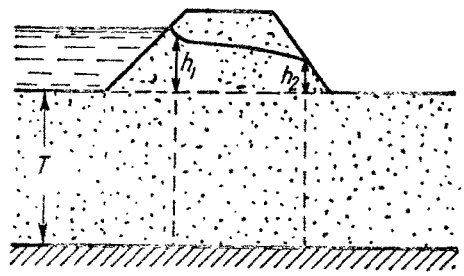
На фиг. 232 даны некоторые графики, характеризующие влияние воды в нижнем бьефе на фильтрационный расход плотины. Под Q_{max} здесь понимается фильтрационный расход при отсутствии воды в ниж-



Фиг. 232.

нем бьефе. Задача о фильтрации в подобных треугольных плотинах без воды в нижнем бьефе была рассмотрена М. М. Моргулисом [19]. Кривая $\alpha=\frac{1}{2}$, $\gamma=0{,}1$ построена по вычислениям А. М. Мхитаряна [18], остальные — по вычислениям Г. К. Михайлова.

Как видно из фиг. 232, встречающиеся на практике небольшие подтопления плотины водой со стороны нижнего бьефа мало сказываются на снижении фильтрационного расхода в плотине. Влияние это уменьшается с ростом пологости низового откоса.



Фиг. 233.

Заметим, что для случая плотины трапецоидального профиля на проницаемом основании конечной глубины (фиг. 233) с горизонтом воды в нижнем бьефе на уровне поверхности грунта расчет расходов был проведен А. М. Мхитаряном. При этом он использовал метод фрагментов, разбив плотину двумя вертикалями на три части. Решения для каждого фрагмента проведены на основании гидромеханического анализа и сведены для отдельных случаев в графики.

ГЛАВА VIII

ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ГРУНТАХ. ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

А. НЕОДНОРОДНЫЕ ГРУНТЫ

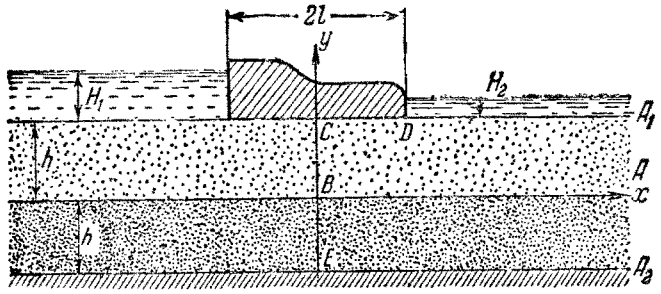
§ 1. Флютбет в двух слоях одинаковой толщины. По фильтрации в неоднородных грунтах имеются в настоящее время следующие результаты. Дано точное решение задач о фильтрации в двух горизонтальных слоях грунта одинаковой толщины: обтекание плоского флютбета и обтекание шпунта [1]. Имеется точное решение задачи об обтекании двух флютбетов, симметричных относительно вертикальной линии раздела двух грунтов, а также об обтекании одного флютбета в таком же двуслойном грунте. Кроме того, имеется ряд точных решений о фильтрации в многослойных грунтах при наличии особенности — точечного вихря или источника как на плоскости [2], так и в пространстве. Подбирая интенсивности таких особенностей, размещаемых вдоль контуров или в области гидротехнических сооружений, можно рассчитывать на получение решений для различных контуров гидротехнических сооружений.

Так как практическое значение имеют случаи, когда отношение коэффициентов фильтрации соседних слоев очень велико — обычно больше 10, но может быть порядка 10^2 — 10^4 и больше, — то представляет интерес развитие приближенных теорий.

Рассмотрим следующую задачу. В полосе глубины h с коэффициентом фильтрации $\varkappa_1$ имеется плоский флютбет (основание гидротехнического сооружения, имеющее вид горизонтального отрезка) шириной $2l$. Нижний слой, также глубины h, имеет коэффициент фильтрации $\varkappa_2$ и лежит на непроницаемом основании (фиг. 234). Требуется определить все элементы движения.

Величины, относящиеся к первой области, снабдим значком 1, ко второй области — значком 2. Будем рассматривать только правую половину чертежа. Выпишем условия, которые должны выполняться на контуре областей A_1DCBA и $ABEA_2$.

Границы водоемов представляют эквипотенциальные линии. Следовательно, на них можно принять условия:



Фиг. 234.

вдоль границы левого водоема

$$\varphi_1 = -\varkappa_1 \frac{H}{2}, \tag{1.1}$$

на DA_1

$$\varphi_1 = \varkappa_1 \frac{H}{2}, \tag{1.2}$$

где $H = H_1 - H_2$ — действующий напор.

Вследствие симметричности потока на линии CB, которая также является линией равного потенциала, должны иметь:

$$\varphi_1 = 0. \tag{1.3}$$

Линия BE также должна быть эквипотенциалью, так что на ней $\varphi_2 = \text{const}$. Положим на BE:

$$\varphi_2 = 0. \tag{1.4}$$

Далее, CD и EA_2 являются линиями тока. Положим:

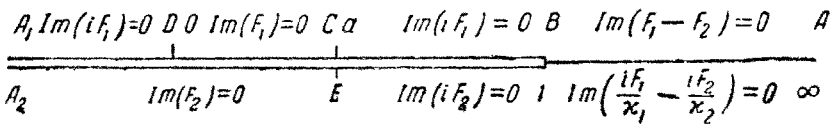
на EA_2 $$\psi_2 = 0, \tag{1.5}$$

на CD $$\psi_1 = Q. \tag{1.6}$$

На границе AB двух сред должны выполняться условия (см. главу II, § 3)

$$\frac{\varphi_1}{\varkappa_1} = \frac{\varphi_2}{\varkappa_2}, \quad \psi_1 = \psi_2. \tag{1.7}$$

Отобразим область A_1DCBEA_2 плоскости $z = x + iy$ на надрезанную плоскость комплексного переменного ζ (фиг. 235) так,



Фиг. 235.

чтобы область A_1DCBA перешла в верхнюю полуплоскость, область $ABEA_2$ в нижнюю.

Зависимость между z и ζ будет иметь вид

$$\zeta = \frac{1+a}{2} + \frac{1-a}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{h}, \tag{1.8}$$

где a — аффикс точек C и E на плоскости ζ. Полагая в уравнении (1.8) $\zeta = 0$, $z = l + hi$, найдем:

$$a = \operatorname{th}^2 \frac{\pi l}{2h}. \tag{1.9}$$

Таким образом, по заданным l и h легко вычислить a.

Будем рассматривать комплексные потенциалы $\omega_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ и $\omega_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ первой и второй областей движения. На плоскости ζ функция $\omega_1(\zeta)$ рассматривается в верхней полуплоскости, $\omega_2(\zeta)$ — в нижней. Через функции ω_1 и ω_2 можно выразить условия на границах:

на DA_1 $\quad \operatorname{Im}(i\omega_1) = \varkappa_1 \frac{H}{2}$,

на CD $\quad \operatorname{Im}(\omega_1) = Q$,

на CB $\quad \operatorname{Im}(i\omega_1) = 0$,

на BE $\quad \operatorname{Im}(i\omega_2) = 0$,

на EA_2 $\quad \operatorname{Im}(\omega_2) = 0$,

на AB

$$\operatorname{Im}\left(\frac{i\omega_1}{\varkappa_1} - \frac{i\omega_2}{\varkappa_2}\right) = 0, \quad \operatorname{Im}(\omega_1 - \omega_2) = 0.$$

Чтобы получить однородные условия на контуре, введем функции

$$F_1 = \frac{d\omega_1}{d\zeta}, \quad F_2 = \frac{d\omega_2}{d\zeta}.$$

Для функций F_1 и F_2 получаем условия, которые выписаны возле соответствующих отрезков на фиг. 235.

В точке C (фиг. 235) сходятся линии $\varphi_1 = \text{const}$ и $\psi_1 = \text{const}$, следовательно, на плоскости комплексного потенциала здесь имеем прямой угол. Поэтому разложение $\omega_1(\zeta)$ около точки $\zeta = a$ должно иметь вид (см. главу II, § 5)

$$\omega_1(\zeta) = \sqrt{\zeta - a}\,[a_0 + a_1(\zeta - a) + \ldots].$$

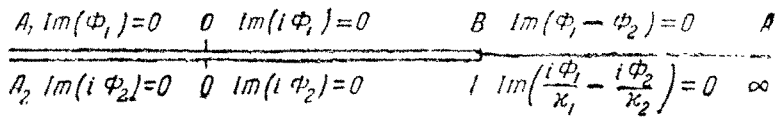
Точно так же в точке E функция $\omega_2(\zeta)$ имеет вид

$$\omega_2(\zeta) = \sqrt{\zeta - a}\,[b_0 + b_1(\zeta - a) + \ldots].$$

Отсюда для функций $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ получаем:

$$\left.\begin{aligned} F_1(\zeta) &= \frac{c_0 + c_1(\zeta - a) + \ldots}{\sqrt{\zeta - a}} = \frac{\Phi_1(\zeta)}{\sqrt{\zeta - a}}, \\ F_2(\zeta) &= \frac{d_0 + d_1(\zeta - a) + \ldots}{\sqrt{\zeta - a}} = \frac{\Phi_2(\zeta)}{\sqrt{\zeta - a}}, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

где $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$ — функции, имеющие точку $\zeta = a$ обыкновенной точкой. Будем рассматривать вместо F_1 и F_2 функции Φ_1 и Φ_2. Вдоль действительной оси полуплоскости ζ при $\zeta = \xi > a$ радикал $\sqrt{\zeta - a}$ имеет действительные значения, следовательно, условия для функций Φ_1 и Φ_2 направо от точки a будут такими же, как для F_1 и F_2. При $\zeta = \xi < a$ радикал $\sqrt{\zeta - a}$ имеет мнимые значения, вследствие чего условия на отрезках A_1D, DC и A_2E изменятся так, как указано на фиг. 236.



Фиг. 236.

Функции F_1 и F_2 должны быть аналитическими функциями соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, имеющими регулярные особенности в точках $\zeta = 0,\ 1,\ a,\ \infty$. Предположим, что каждая из этих функций может быть продолжена в другую полуплоскость, и попытаемся искать F_1 и F_2 как решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Исследуем поведение рассматриваемых функций около особых точек.

Около $\zeta = 0$. Функция $\omega_1(\zeta)$ должна иметь вид

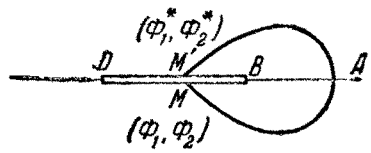
$$\omega_1(\zeta) = \zeta^{1/2}(a_1 + a_1\zeta + \ldots),$$

так как здесь сходятся линия тока и эквипотенциальная линия. Тогда

$$F_1(\zeta) = \zeta^{-1/2}(a_0' + \ldots),$$

т. е. $F_1(\zeta)$, а значит, и $\Phi_1(\zeta)$ принадлежат показателю $-\frac{1}{2}$. Для $F_2(\zeta)$ точка $\zeta = 0$ является обыкновенной, т. е. показатель в ней равен нулю как для $F_2(\zeta)$, так и для $\Phi_2(\zeta)$.

Около $\zeta = 1$. Предположим, что функции Φ_1 и Φ_2 могут быть продолжены через отрезок BA. Сделаем надрез вдоль отрезка DB (фиг. 237). Изменим несколько обозначения. А именно, сохраним обозначение Φ_1, Φ_2 для значений рассматриваемых функций на нижней стороне разреза и обозначим через Φ_1^*, Φ_2^* значения тех же функций на верхней стороне разреза. Тогда разность $\Phi_1 - \Phi_2$ перейдет в $\Phi_1^* - \Phi_2^*$. Но так как вдоль BA разность $\Phi_1 - \Phi_2$ принимает действительные значения, то в точке M', которую можно рас-



Фиг. 237.

сматривать как сопряженную с M, эта разность заменится на сопряженное выражение, и будем иметь:

$$\Phi_1^* - \Phi_2^* = \overline{\Phi}_1 - \overline{\Phi}_2. \tag{1.11}$$

Точно так же второе условие на отрезке AB дает:

$$\frac{i\Phi_1^*}{\varkappa_1} - \frac{i\Phi_2^*}{\varkappa_2} = -\frac{i\overline{\Phi}_1}{\varkappa_1} + \frac{i\overline{\Phi}_2}{\varkappa_2}. \tag{1.12}$$

Решая эти уравнения относительно Φ_1^* и Φ_2^*, получим:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^* &= \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_1-\varkappa_2}\overline{\Phi}_1 - \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1-\varkappa_2}\overline{\Phi}_2, \\ \Phi_2^* &= \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_1-\varkappa_2}\overline{\Phi}_1 - \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_1-\varkappa_2}\overline{\Phi}_2. \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

Что касается условий на отрезке CB, то в наших новых обозначениях они должны быть представлены в виде

$$\operatorname{Im}(i\Phi_1^*) = 0, \quad \operatorname{Im}(i\Phi_2) = 0$$

или иначе

$$\Phi_1^* + \overline{\Phi}_1^* = 0, \quad \Phi_2 + \overline{\Phi}_2 = 0, \tag{1.14}$$

откуда

$$\overline{\Phi}_1^* = -\Phi_1^*, \quad \overline{\Phi}_2 = -\Phi_2.$$

В равенстве (1.13) для Φ_1^*, заменяя все величины им сопряженными, получим:

$$\overline{\Phi}_1^* = \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_1-\varkappa_2}\Phi_1 - \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1-\varkappa_2}\Phi_2.$$

Сложив последнее равенство с равенством (1.13) для Φ_1^* и принимая во внимание (1.14), найдем:

$$\Phi_1 + \overline{\Phi}_1 = 0.$$

Поэтому функции $\overline{\Phi}_1^*$ и Φ_2^* можно выразить через функции Φ_1 и Φ_2:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^* &= \frac{\varkappa_1+\varkappa_2}{\varkappa_2-\varkappa_1}\Phi_1 - \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\Phi_2, \\ \Phi_2^* &= \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_2-\varkappa_1}\Phi_1 - \frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\Phi_2, \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

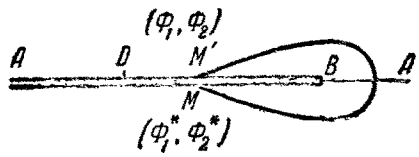
Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1} - \lambda & -\frac{2\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1} \\ \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_2-\varkappa_1} & -\frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$. Показатели, при которых функции ω_1 и ω_2 остаются ограниченными в точке B, соответственно будут:

$$\gamma = \frac{\ln \lambda}{2\pi i} = 0, \quad \gamma' = \frac{\ln \lambda'}{2\pi i} = -\frac{1}{2}.$$

Около $\zeta = \infty$. Положительный обход вокруг бесконечно далекой точки может быть заменен отрицательным обходом вокруг точек D и B. При этом рассматриваемые функции будут продолжены через отрезок BA, следовательно, формулы (1.13) сохраняются и в этом случае. Если через Φ_1, Φ_2 обозначить значения функций до обхода, т. е. на верхнем краю разреза (фиг. 238), а через Φ_1^*, Φ_2^* — их значения после обхода, т. е. на нижнем краю разреза, то условия на AD будут иметь вид



Фиг. 238.

$$\operatorname{Im}(\Phi_1) = 0, \quad \operatorname{Im}(i\Phi_2^*) = 0,$$

или

$$\overline{\Phi}_1 = \Phi_1, \quad \overline{\Phi}_2^* = -\Phi_2^*.$$

Во втором из уравнений (1.13) заменим все величины на сопряженные. Получим:

$$\overline{\Phi}_2^* = -\Phi_2^* = \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Phi_1 - \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Phi_2.$$

Складывая полученное равенство со вторым из равенств (1.13), найдем:

$$0 = \frac{4\varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Phi_1 - \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}(\Phi_2 + \overline{\Phi}_2),$$

откуда

$$\overline{\Phi}_2 = -\Phi_2 + \frac{4\varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\Phi_1. \tag{1.16}$$

Подставив $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ в уравнения (1.13), получим:

$$\Phi_1^* = -\frac{\varkappa_1^2 - 6\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2}{(\varkappa_1 - \varkappa_2)(\varkappa_1 + \varkappa_2)}\Phi_1 + \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Phi_2,$$

$$\Phi_2^* = \frac{2\varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Phi_1 + \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2}\Phi_2.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\varkappa_1^2 - 6\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2^2}{(\varkappa_1 - \varkappa_2)(\varkappa_1 + \varkappa_2)} - \lambda & \dfrac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 - \varkappa_2} \\ -\dfrac{2\varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} & \dfrac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{\varkappa_1 - \varkappa_2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\lambda + 1 = 0$$

имеет корни

$$\lambda = \frac{\sqrt{\varkappa_1} + i\sqrt{\varkappa_2}}{\sqrt{\varkappa_1} - i\sqrt{\varkappa_2}}, \quad \lambda' = \frac{\sqrt{\varkappa_1} - i\sqrt{\varkappa_2}}{\sqrt{\varkappa_1} + i\sqrt{\varkappa_2}}.$$

Положим:

$$\operatorname{tg}\varepsilon\pi=\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}},\quad \sin\varepsilon\pi=\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}},\quad \cos\varepsilon\pi=\sqrt{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}}.$$

Тогда

$$\lambda=e^{2\pi\varepsilon i},\quad \lambda'=e^{-2\pi\varepsilon i},$$

откуда

$$\beta=\frac{\ln\lambda}{2\pi i}=\varepsilon+n,\quad \beta'=\frac{\ln\lambda'}{2\pi i}=-\varepsilon+n'.$$

Условие ограниченности функций ω_1 и ω_2 при $\zeta=0$ дает для n и n' значения

$$n=n'=1,$$

так что

$$\beta=1+\varepsilon,\quad \beta'=1-\varepsilon.$$

Предполагая, что Φ_1 и Φ_2 не имеют никаких других особых точек, получаем, что функции Φ_1 и Φ_2 представляют ветви функции Римана

$$Y=P\begin{Bmatrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & \zeta\\ 1-c & b & c-a-b & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0 & \infty & 1 & \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 & \zeta\\ -\frac{1}{2} & 1-\varepsilon & -\frac{1}{2} & \end{Bmatrix}. \quad (1.17)$$

Имеем:

$$a=1+\varepsilon,\quad b=1-\varepsilon,\quad c=\frac{3}{2}.$$

Функции Φ_1 и Φ_2 будут линейными комбинациями интегралов уравнения

$$\zeta(1-\zeta)\,Y''+[c-(a+b+1)\zeta]\,Y'-abY=0$$

или

$$\zeta(1-\zeta)\,Y''+\left(\frac{3}{2}-3\zeta\right)Y'-(1-\varepsilon^2)\,Y=0. \quad (1.18)$$

А именно, около $\zeta=0$ можно взять фундаментальную систему решений

$$\left.\begin{aligned}U&=F(a,\ b,\ c,\ \zeta)=F\left(1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon,\ \frac{3}{2},\ \zeta\right),\\ V&=\zeta^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c,\ \zeta)=\\ &=\zeta^{-1/2}F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\varepsilon,\ \frac{1}{2},\ \zeta\right),\end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

где гипергеометрическая функция определяется рядом

$$F(a,\ b,\ c,\ \zeta)=1+\frac{ab}{c}\zeta+\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}\zeta^2+\ldots$$

Полученные гипергеометрические функции можно представить в виде (см. литературу к главе VII [25])

$$\left.\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\varepsilon,\ \frac{1}{2},\ \zeta\right) &= \frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{2\sqrt{1-\zeta}}, \\ F\left(1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon,\ \frac{3}{2},\ \zeta\right) &= \frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}-(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{4\varepsilon i\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}. \end{aligned}\right\} \quad (1.20)$$

Функции Φ_1 и Φ_2 выражаются линейно через U и V, т. е.

$$\Phi_1 = AU + BV,$$
$$\Phi_2 = CU + DV,$$

где A, B, C, D — комплексные постоянные.

Так как на отрезке DB, где $0 < \zeta < 1$, функции U и V принимают действительные значения, то для выполнения условий

$$\operatorname{Im}(i\Phi_1) = \operatorname{Im}(i\Phi_2) = 0$$

необходимо, чтобы постоянные A, B, C, D были чисто мнимыми. Поэтому, меняя обозначения, имеем:

$$\Phi_1 = AiU + BiV,$$
$$\Phi_2 = CiU + DiV,$$

где A, B, C, D — действительные постоянные. Для того чтобы на промежутке AC, где $\zeta < 0$, функция Φ_1 принимала действительные, а функция Φ_2 чисто мнимые значения, необходимо, чтобы

$$A = D = 0.$$

Поэтому

$$\Phi_1 = BiV = \frac{Bi}{\sqrt{\zeta}} F\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,\ \frac{1}{2}-\varepsilon,\ \frac{1}{2},\ \zeta\right),$$

$$\Phi_2 = CiU = CiF\left(1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon,\ \frac{3}{2},\ \zeta\right)$$

или

$$\Phi_1 = \frac{Bi}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}\{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\},$$

$$\Phi_2 = \frac{C}{4\varepsilon\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}\{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}-(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\}.$$

Предположим теперь, что $\zeta > 1$. Тогда, совершив обход вокруг точки $\zeta = 1$ по полуокружности, получим:

$$(1-\zeta)^{1/2} = \mp i(\zeta-1)^{1/2},$$

смотря по тому, в какой полуплоскости рассматривается функция, верхней или нижней. Для функции Φ_1 нужно взять знак минус, для функции Φ_2 — знак плюс.

Точно так же при переходе от значений $\zeta < 0$ к значениям $\zeta > 0$ получаем:

$$\sqrt{-\zeta} = \mp i\sqrt{\zeta},$$

причем минус относится к функции Φ_1, плюс — к Φ_2.

Для $\zeta > 1$ функции Φ_1 и Φ_2 можно представить в виде

$$\Phi_1 = \frac{Bi}{2}\frac{e^{-\pi\varepsilon i}(\sqrt{\zeta-1}+\sqrt{\zeta})^{2\varepsilon} + e^{\pi\varepsilon i}(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta-1})^{2\varepsilon}}{-i\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}, \quad (1.21)$$

$$\Phi_2 = \frac{C}{4\varepsilon i}\frac{e^{\pi\varepsilon i}(\sqrt{\zeta-1}+\sqrt{\zeta})^{2\varepsilon} - e^{-\pi\varepsilon i}(\sqrt{\zeta}-\sqrt{\zeta-1})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}. \quad (1.22)$$

Условие $\operatorname{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0$ при $\zeta > 1$ приводит к равенству

$$\operatorname{Im}\left(-Be^{-\pi\varepsilon i} + \frac{iC}{2\varepsilon}e^{\pi\varepsilon i}\right) = B\sin\varepsilon\pi + \frac{C}{2\varepsilon}\cos\varepsilon\pi = 0,$$

откуда

$$C = -2\varepsilon\operatorname{tg}\varepsilon\pi B.$$

Второе условие на отрезке AB выполняется тождественно.

Для функций F_1 и F_2 получаем на основании (1.10), (1.21) и (1.22):

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{Bi\{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\}}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}}, \\ F_2 &= -\frac{B\operatorname{tg}\varepsilon\pi\{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}\}}{2\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}}. \end{aligned}\right\} \quad (1.23)$$

Функции ω_1 и ω_2 будут определяться с помощью интегралов

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{Bi}{2}\int\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}}\,d\zeta, \\ \omega_2 &= -\frac{B\operatorname{tg}\varepsilon\pi}{2}\int\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} - (\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}}\,d\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (1.24)$$

Для определения постоянной B возьмем интеграл для ω_1 в пределах от $\zeta = a$ до $\zeta = 0$. Так как

$$\omega_1(0) = \frac{\varkappa_1 H}{2} + Qi, \quad \omega_1(a) = Qi,$$

то

$$Bi\int_a^0\frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon} + (\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}}\,d\zeta = \varkappa_1 H. \quad (1.25)$$

Параметр a, как было показано, определяется равенством (1.9). Введем обозначения

$$\operatorname{th}\frac{\pi l}{2h} = k, \quad \operatorname{ch}\frac{\pi l}{2h} = \frac{1}{k'}. \quad (1.26)$$

Тогда

$$a = k^2. \tag{1.27}$$

Под знаком интеграла (1.26) сделаем подстановку

$$\zeta = a \sin^2 \alpha = k^2 \sin^2 \alpha.$$

Тогда получим:

$$B = \frac{\varkappa_1 H}{2J}, \tag{1.28}$$

где

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2 \arcsin k \sin \alpha)\, d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\arcsin k} \frac{\cos 2\varepsilon\alpha \, d\alpha}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \alpha}}. \tag{1.29}$$

Беря интеграл для $\omega_1(\zeta)$ в пределах от $\zeta = -\infty$ до $\zeta = 0$, найдем расход

$$Q = \frac{\varkappa_1 H J'}{2J \cos \varepsilon\pi}, \tag{1.30}$$

где

$$J' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\varepsilon \arcsin k' \sin \alpha)}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \alpha}}\, d\alpha = \int_0^{\arcsin k'} \frac{\cos 2\varepsilon\alpha \, d\alpha}{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \alpha}}. \tag{1.31}$$

Так как

$$\frac{d\omega_s}{dz} = \frac{d\omega_s}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta} = F_s \frac{d\zeta}{dz} \qquad (s = 1,\ 2),$$

то, пользуясь формулами (1.8) и (1.23), найдем выражения для комплексных скоростей в первой и второй среде. А именно,

$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \frac{\varkappa_1 H \pi}{4hJ} \times \\ \times \frac{(-\sin \lambda i z + i\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda i z})^{2\varepsilon} + (-\sin \lambda i z - i\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda i z})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda i z}}&, \\ u_2 - iv_2 &= \frac{\varkappa_1 H \pi i \operatorname{tg} \pi\varepsilon}{4hJ} \times \\ \times \frac{(+\sin \lambda i z + i\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda i z})^{2\varepsilon} - (+\sin \lambda i z - i\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda i z})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \lambda l - \sin^2 \lambda i z}}&, \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

причем

$$\lambda = \frac{\pi}{2h}.$$

Докажем, что для $u_1 - iv_1$ и $u_2 - iv_2$ выполняются все условия на границах, т. е. что построенное решение правильно.

Введем приведенную скорость $\tilde{u} - i\tilde{v}$, полагая

$$u - iv = \frac{\varkappa_1 H}{2h} (\tilde{u} - i\tilde{v}).$$

Вдоль линии раздела BA, где $z=x$, будем иметь после отделения действительной и мнимой частей:

$$\widetilde{u}_1=\frac{\pi}{J}\frac{M+N}{P}\cos\varepsilon\pi,\quad \widetilde{v}_1=\frac{\pi}{J}\frac{N-M}{P}\sin\varepsilon\pi,$$

где

$$M=(P-\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon},\quad N=(P+\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon},\quad P=\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l+\operatorname{sh}^2\lambda x}$$

$$\left(\lambda=\frac{\pi}{2h},\quad 0\leqslant x<\infty\right).$$

Вдоль отрезка CD флютбета

$$\widetilde{v}_1=0,\quad \widetilde{u}_1=\frac{\pi}{J}\frac{(\operatorname{ch}\lambda l)^{2\varepsilon}\cos 2\varepsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l-\operatorname{ch}^2\lambda x}},$$

где

$$\theta=\arccos\frac{\operatorname{ch}\lambda x}{\operatorname{ch}\lambda l}\quad\left(\lambda=\frac{\pi}{2h},\quad 0\leqslant x\leqslant l\right).$$

Вдоль границы DA_1 нижнего бьефа

$$\widetilde{u}_1=0,\quad \widetilde{v}_1=\frac{\pi}{J}\frac{\operatorname{ch}2\varepsilon\theta}{(\operatorname{ch}\lambda l)^{1-2\varepsilon}\operatorname{sh}\theta},$$

где

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{\operatorname{ch}\lambda x}{\operatorname{ch}\lambda l}\quad\left(\lambda=\frac{\pi}{2h}\right).$$

Вдоль отрезка BC, где $x=0$, $z=yi$, имеем:

$$\widetilde{v}_1=0,\quad \widetilde{u}_1=\frac{\pi}{J}\frac{\operatorname{ch}\lambda l\cos 2\varepsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l-\sin^2\lambda y}},$$

где

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l-\sin^2\lambda y}}{\sin\lambda y}$$

$$\left(\lambda=\frac{\pi}{2h}\right).$$

Вдоль отрезка BE получим:

$$\widetilde{v}_2=0,\quad \widetilde{u}_2=\frac{\operatorname{tg}\pi\varepsilon}{J}\frac{\operatorname{ch}\lambda l\sin 2\varepsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l-\sin^2\lambda y}},$$

где θ и λ имеют те же выражения, что и в предыдущем случае.

Вдоль непроницаемого основания EA_2

$$\widetilde{v}_2=0,\quad \widetilde{u}_2=\frac{\operatorname{tg}\varepsilon\pi}{J}\frac{\operatorname{ch}\lambda l\sin 2\varepsilon\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l-\operatorname{ch}^2\lambda x}},$$

где

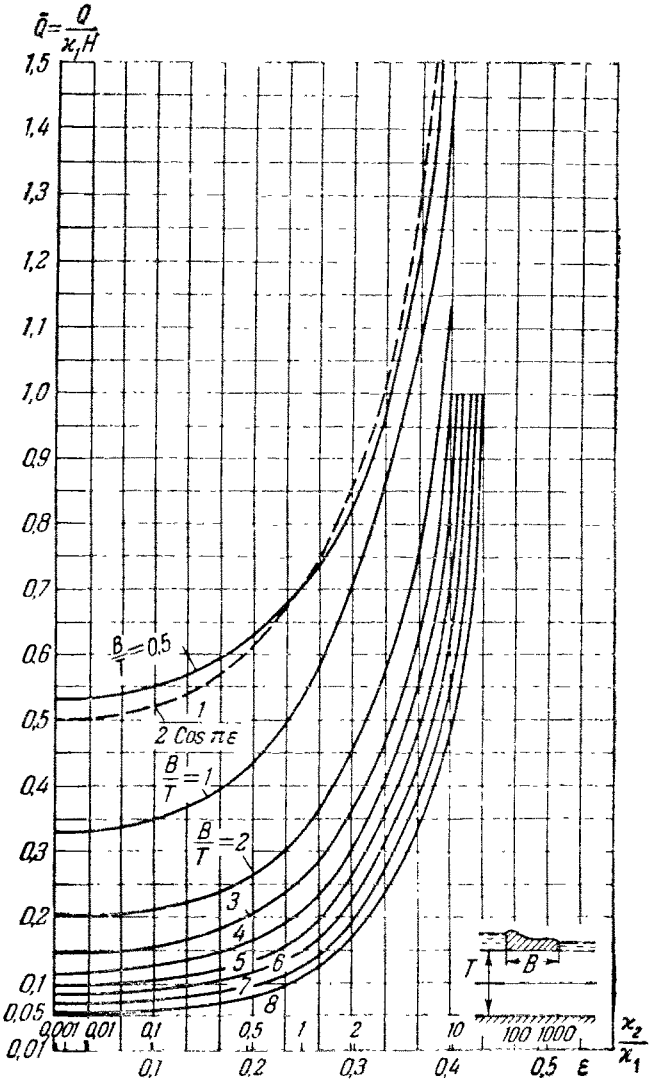
$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda l-\operatorname{ch}^2\lambda x}}{\operatorname{ch}\lambda x}\quad\left(\lambda=\frac{\pi}{2h}\right).$$

Обозначим через $\bar{Q}$ приведенный расход, т. е. расход при $\varkappa_1 = 1$, $H = 1$. Тогда

$$Q = \varkappa_1 H \bar{Q}.$$

На фиг. 239 даны графики зависимости $\bar{Q}$ от

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}.$$

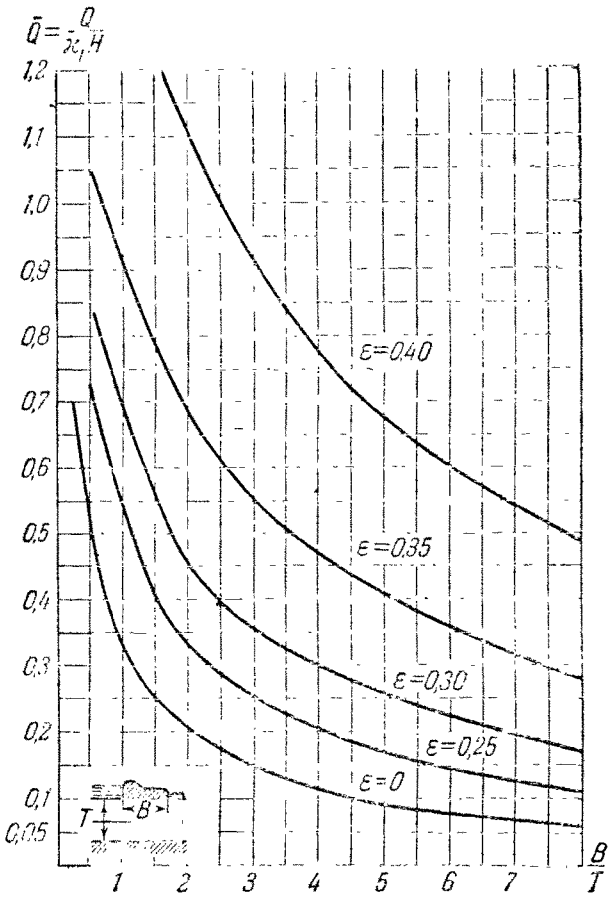


Фиг. 239.

Заметим, что при $\varepsilon = 0$, т. е. $\varkappa_2 = 0$, имеем движение в однородном верхнем слое грунта глубины h с коэффициентом фильтрации $\varkappa_1$.

При $\varepsilon = \frac{1}{4}$ имеем $\varkappa_1 = \varkappa_2$, т. е. приходим к случаю фильтрации в однородном слое грунта глубины $2h$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ имеем $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = \infty$, т. е. в нижнем слое нет сопротивления.

Движение происходит так, как если бы в этом слое была вода (без грунта). Линия BA (фиг. 234) является линией равного напора, причем $\varphi = -\varkappa_1 \frac{H_1 + H_2}{2}$.



Фиг. 240.

При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ приведенный расход $\bar{Q} = \infty$, причем при ε, близких к $\frac{1}{2}$,

$$\bar{Q} \approx \frac{1}{\cos \varepsilon\pi},$$

точнее

$$\lim_{\varepsilon \to \frac{1}{2}} \bar{Q} \cos \varepsilon\pi = 1.$$

Графики зависимости $\bar{Q}$ от $\frac{B}{T}$ даны на фиг. 240. Здесь $B = 2l$ означает ширину флютбета, $T = 2h$ — глубину слоя (всего грунта).

Полагая $\varepsilon = 0$ в формулах (1.30) и (1.31), получим расход в однородной среде глубины h:

$$Q = \frac{\varkappa_1 H K'}{2K},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле

$$k = \operatorname{th} \frac{\pi B}{2T},$$

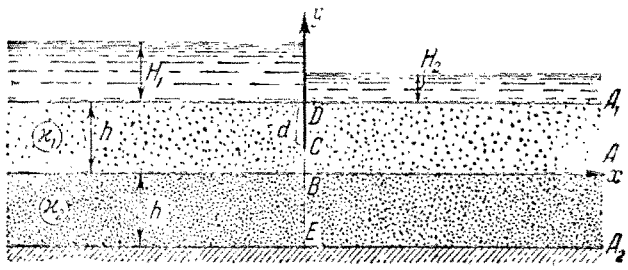
а K' — полный эллиптический интеграл первого рода от дополнительного модуля.

§ 2. Шпунт в двух слоях одинаковой толщины. В двуслойном грунте, состоящем из двух горизонтальных слоев (фиг. 241) одинаковой толщины h, расположен шпунт, глубина забивки которого равна d. Коэффициенты фильтрации этих слоев равны соответственно $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

В этой задаче приходится различать три случая.

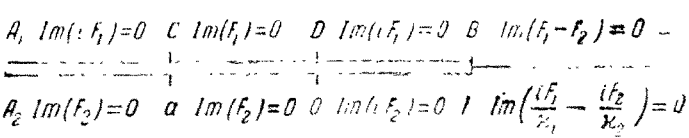
1°. Пусть $d<h$.

Как и в задаче § 1, отобразим область $ABCDA_1$ на верхнюю,



Фиг. 241.

а область $ABEA_2$ на нижнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного ζ, как это показано на фиг. 242.



Фиг. 242.

Зависимость между z и ζ будет опять выражаться формулой

$$\zeta=\frac{1+a}{2}+\frac{1-a}{2}\operatorname{ch}\frac{\pi z}{h},$$

но в ней a имеет другое значение. В самом деле, принимая здесь $\zeta=0$, $z=(h-d)i$, найдем:

$$a=-\operatorname{tg}^2\frac{\pi d}{2h}. \tag{2.1}$$

Введем обозначения

$$\sin\frac{\pi d}{2h}=k,\quad \cos\frac{\pi d}{2h}=k'; \tag{2.2}$$

тогда

$$a=-\frac{k^2}{k'^2}.$$

Положим и здесь:

$$F_1=\frac{\Phi_1}{\sqrt{\zeta-a}},\qquad F_2=\frac{\Phi_2}{\sqrt{\zeta-a}}.$$

Тогда для функций Φ_1 и Φ_2 будут выполняться на отрезках $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ те же условия, что и в предыдущей задаче. Следовательно, решение будет выражаться через те же функции (1.20), и для F_1 и F_2 получим те же уравнения (1.24) и (1.25).

Но постоянная B здесь имеет другое значение. А именно, интегрируя в формуле (1.25) от a до 0, найдем:

$$\frac{B}{2}\int_0^a \frac{(\sqrt{1-\zeta}+\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-\zeta}-\sqrt{-\zeta})^{2\varepsilon}}{\sqrt{-\zeta(1-\zeta)(\zeta-a)}}\,d\zeta=\frac{\varkappa_1 H}{2}.$$

Подстановка

$$\zeta = a\sin^2\varphi$$

дает:

$$B=\frac{\varkappa_1 H}{J},$$

где

$$J=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1+b\sin^2\varphi}+\sqrt{b}\sin\varphi)^{2\varepsilon}+(\sqrt{1+b\sin^2\varphi}-\sqrt{b}\sin\varphi)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1+b\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

причем

$$b=-a=\frac{k^2}{k'^2}.$$

Полагая

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha,$$

найдем:

$$J=2(k')^{1-2\varepsilon}(J_1+J_2),$$

где

$$\left.\begin{aligned} J_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k\cos\varphi)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^K(\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u)^{2\varepsilon}\,du,\\ J_2&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-k\cos\varphi)^{2\varepsilon}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\int_0^K(\mathrm{dn}\,u-k\,\mathrm{cn}\,u)^{2\varepsilon}\,du \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

($\mathrm{dn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ — эллиптические функции).

Далее, беря в выражении (1.25) для ω пределы $-\infty$ и a, найдем расход Q:

$$Q=\frac{B}{2}\int_{-\infty}^a \frac{(\sqrt{1-t}+\sqrt{-t})^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-t}-\sqrt{-t})^{2\varepsilon}}{\sqrt{t(1-t)(t-a)}}\,dt.$$

Полагая

$$t=a\,\mathrm{cosec}^2\varphi=-\frac{k^2}{k'^2\sin^2\varphi},$$

получим:

$$Q = Bk'^{1-2\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}+k)^{2\varepsilon}+(\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}-k)^{2\varepsilon}}{\cos^2\varphi\ \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \quad (2.4)$$

Можно вычислить расход Q иначе — как сумму расходов через отрезки EB и BD. Ниже приводится полученная таким образом формула для Q, которая была использована при числовых расчетах. Не останавливаясь на вычислениях, ограничимся приведением окончательных результатов.

1°. Для $d < h$, полагая

$$Q = \varkappa_1 H \bar{Q},$$

будем иметь:

$$\bar{Q} = \frac{1}{J_1+J_2}\left[\frac{k'^{2\varepsilon}}{\cos\varepsilon\pi} J_3 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon\pi\,(J_1-J_2)\right], \quad (2.5)$$

где

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varepsilon\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \quad (2.6)$$

а J_1 и J_2 определяются формулами (2.3) и (2.4). Далее, выражения комплексных скоростей первой и второй среды имеют вид

$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= -\frac{\varkappa_1 H\pi i}{4h(J_1+J_2)} \times \\ &\times \frac{(-\sin\lambda iz+\sqrt{\sin^2\lambda iz-k'^2})^{2\varepsilon}+(-\sin\lambda iz-\sqrt{\sin^2\lambda iz-k'^2})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\lambda iz-k'^2}}, \\ u_2 - iv_2 &= \frac{\varkappa_1 H\pi\operatorname{tg}\varepsilon\pi}{4h(J_1+J_2)} \times \\ &\times \frac{(\sin\lambda iz+\sqrt{\sin^2\lambda iz-k'^2})^{2\varepsilon}-(\sin\lambda iz-\sqrt{\sin^2\lambda iz-k'^2})^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\lambda iz-k'^2}} \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

где

$$\lambda = \frac{\pi}{2h}.$$

В частности, для *выходной скорости* v_0, т. е. скорости в точке C шпунта, имеем:

$$v_0 = \frac{\varkappa H\bar{v}}{2h},$$

где $\bar{v}$ — приведенная скорость — определяется формулой

$$\bar{v} = \frac{(1+k)^{2\varepsilon}+(1-k)^{2\varepsilon}}{2k(J_1+J_2)}.$$

При $\varepsilon = 0$, т. е. при $\varkappa_2 = 0$, получаем однослойный грунт глубины h. При этом

$$\overline{Q} = \frac{K'}{2K}, \quad \overline{v} = \frac{\pi}{2kK},$$

где K — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем

$$k = \sin\frac{\pi d}{2h},$$

а K' — такой же интеграл с дополнительным модулем. При $\varepsilon = \frac{1}{4}$ имеем однослойный грунт глубины $2h$. При $\varepsilon = \frac{1}{2}$ имеем $\varkappa_2 = \infty$, т. е. получаем задачу главы III, § 11 о шпунте при наличии дренирующего основания. Здесь

$$\overline{Q} = \infty, \quad \overline{v} = \frac{1}{k}. \tag{2.8}$$

2°. Для $d > h$ имеют место формулы

$$u_1 - iv_1 =$$

$$= -\frac{\varkappa_1 H\pi i}{4hJ_0}\,\frac{\left(-\sin\lambda iz + \sqrt{\sin^2\lambda iz - k'^2}\right)^{2\varepsilon} - \left(-\sin\lambda iz - \sqrt{\sin^2\lambda iz - k'^2}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\lambda iz - k'^2}},$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{\varkappa_1 H\pi \operatorname{tg}\varepsilon\pi}{4hJ_0}\,\frac{\left(\sin\lambda iz + \sqrt{\sin^2\lambda iz - k'^2}\right)^{2\varepsilon} + \left(\sin\lambda iz - \sqrt{\sin^2\lambda iz - k'^2}\right)^{2\varepsilon}}{\sqrt{\sin^2\lambda iz - k'^2}}.$$

Здесь

$$J_0 = J_1 - J_2 + \frac{2k'^{2\varepsilon}}{\sin\varepsilon\pi} J_3, \quad \lambda = \frac{\pi}{2h}.$$

Для приведенного расхода и приведенной выходной скорости имеем:

$$\overline{Q} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon\pi\,(J_1 + J_2)}{2J_0}, \quad \overline{v} = \frac{\pi}{2k}\,\frac{(1+k)^{2\varepsilon} - (1-k)^{2\varepsilon}}{J_0}. \tag{2.9}$$

Отметим частные случаи. При $\varepsilon = 0$, т. е. $\varkappa_2 = 0$, мы, очевидно, должны иметь (так как в этом случае движения нет):

$$\overline{Q} = 0, \quad \overline{v} = 0.$$

При $\varepsilon = \frac{1}{4}$ получаем однородный грунт глубины $2h$.

3°. Наконец, положим $d = h$, $\overline{Q} = \infty$, $\overline{v} = 1$.

Этот случай был найден Н. К. Гиринским [18]. Он может быть получен как из случая $d < h$, так и из случая $d > h$ при $k = 1$,

$k'=0$, что дает:

$$u_1 - iv_1 = -\frac{\varkappa_1 H i\sqrt{\pi}}{2h\Gamma(\varepsilon)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{(-\sin\lambda i z)^{1-2\varepsilon}},$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,H\sqrt{\pi}}{2h\Gamma(\varepsilon)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{(-\sin\lambda i z)^{1-2\varepsilon}},$$

где $\Gamma(\varepsilon)$ — функция гамма, $\lambda=\frac{\pi}{2h}$. Далее,

$$Q=\frac{1}{2}\varkappa_1 H\operatorname{tg}\varepsilon\pi=\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}\,H,\quad v_0=\frac{\varkappa_1 H\sqrt{\pi}}{2h}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)},$$

т. е.

$$\overline{Q}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon\pi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}},\quad \overline{v}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)}.$$

На фиг. 243—246 построены графики зависимости $\overline{Q}$ и $\overline{v}$ от величины $\varepsilon=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}$ при $\frac{d}{2h}=\frac{1}{8},\frac{1}{4},\ldots,\frac{7}{8}$ и графики зависимости $\overline{Q}'$, $\overline{v}'$ от $\frac{d}{2h}$ при различных значениях ε.

Для рассмотренной задачи приведем еще формулы скоростей вдоль контура области, полагая

$$\tilde{u}-i\tilde{v}=\frac{2h}{\varkappa_1 H}(u-iv),\quad \lambda=\frac{\pi}{2h}.$$

1°. Случай $d<h$.

Вдоль нижнего бассейна

$$\tilde{u}_1=0,\quad \tilde{v}_1=\frac{\pi}{2(J_1+J_2)}\frac{(\operatorname{ch}\lambda x+M)^{2\varepsilon}+(\operatorname{ch}\lambda x-M)^{2\varepsilon}}{M},$$

$$M=\sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda x-k'^2}\quad (0\leqslant x<\infty).$$

Вдоль шпунта

$$\tilde{u}_1=0,\quad \tilde{v}_1=\frac{\pi}{2(J_1+J_2)}\frac{(\sin\lambda y+N)^{2\varepsilon}+(\sin\lambda y-N)^{2\varepsilon}}{N},$$

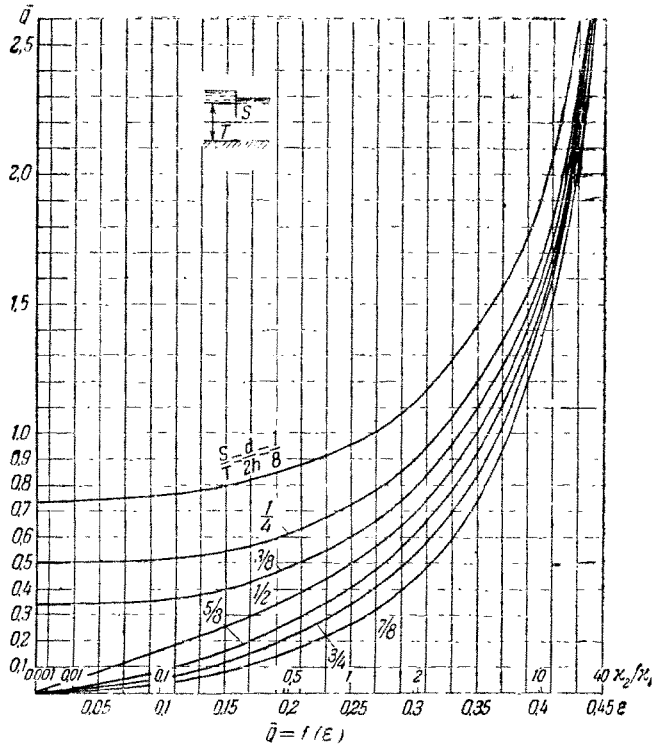
$$N=\sqrt{\sin^2\lambda y-k'^2}\quad (h-d<y\leqslant h).$$

Вдоль вертикали под шпунтом

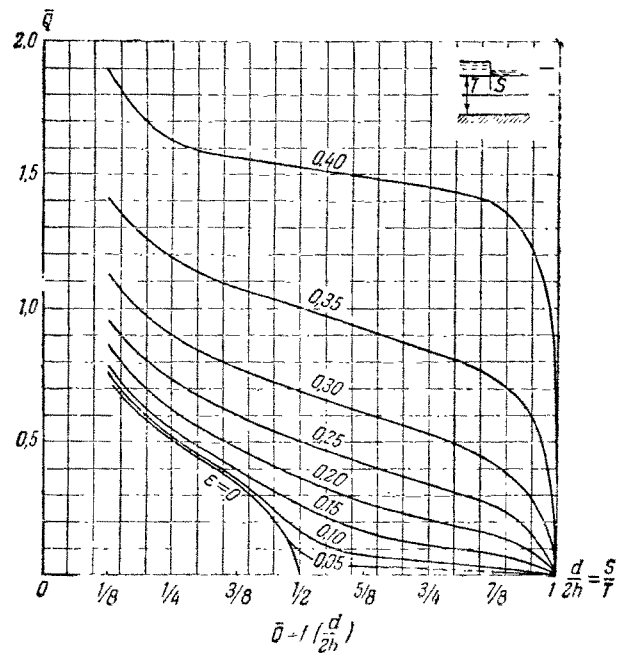
$$\tilde{v}_1=0,\quad \tilde{u}_1=\frac{\pi k'^{2\varepsilon}}{J_1+J_2}\frac{\cos 2\varepsilon\theta}{\sqrt{k'^2-\sin^2\lambda y}},$$

где

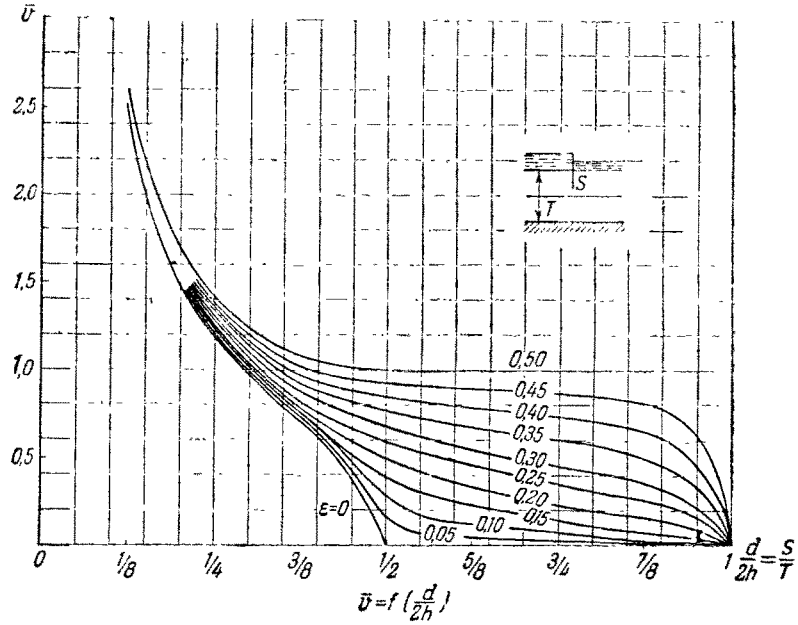
$$\theta=\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{k'^2-\sin^2\lambda y}}{k'}\quad (0\leqslant y<h-d).$$



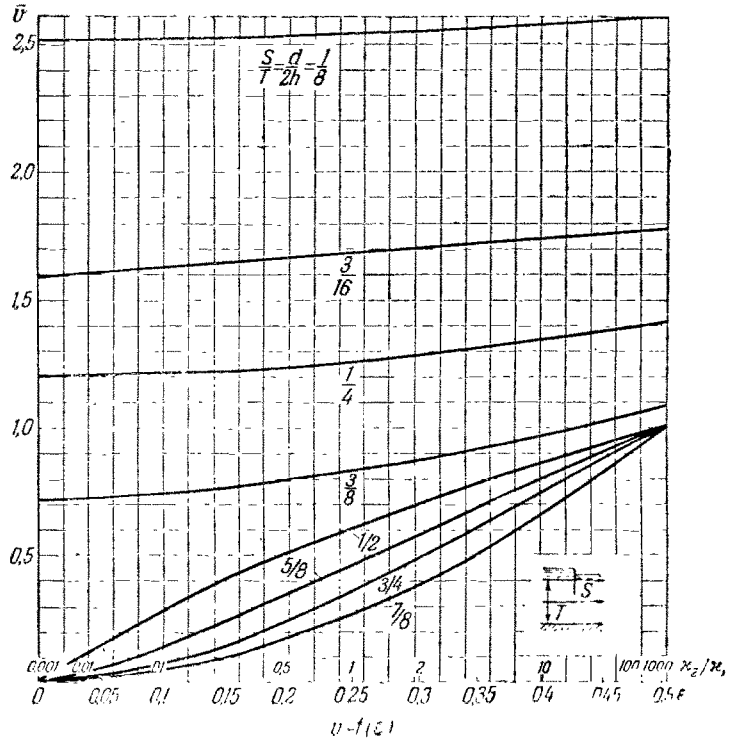
Фиг. 243.



Фиг. 241.



Фиг. 245.



Фиг. 246.

Вдоль линии раздела

$$\tilde{u}_1 = \frac{\pi}{2(J_1+J_2)} \frac{(P+\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}+(P-\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}}{P} \cos\varepsilon\pi,$$

$$\tilde{v}_1 = \frac{\pi}{2(J_1+J_2)} \frac{(P+\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}-(P-\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}}{P} \sin\varepsilon\pi,$$

где

$$P = \sqrt{\operatorname{sh}^2\lambda x + k'^2} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

Вдоль непроницаемого основания в нижнем слое

$$\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \frac{\pi \operatorname{tg}\varepsilon\pi}{2(J_1+J_2)} \frac{(R+\operatorname{ch}\lambda x)^{2\varepsilon}-(\operatorname{ch}\lambda x - R)^{2\varepsilon}}{R},$$

где

$$R = \sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda x - k'^2} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

Вдоль вертикали в нижнем слое

$$-\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \frac{k'\pi \operatorname{tg}\varepsilon\pi}{2(J_1+J_2)} \frac{\sin 2\varepsilon\theta}{\sqrt{k'^2-\sin^2\lambda y}},$$

где

$$0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{k'^2-\sin^2\lambda y}}{\sin\lambda y}.$$

2°. Случай $d > h$.

Вдоль линии раздела

$$\tilde{u}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(M+\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}-(M-\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}}{M} \cos\varepsilon\pi,$$

$$\tilde{v}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(M+\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}+(M-\operatorname{sh}\lambda x)^{2\varepsilon}}{M} \sin\varepsilon\pi,$$

где

$$M = \sqrt{\operatorname{sh}^2\lambda x + k'^2}.$$

Вдоль границы водоема

$$\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{v}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(\operatorname{ch}\lambda x+N)^{2\varepsilon}-(\operatorname{ch}\lambda x - N)^{2\varepsilon}}{N},$$

$$N = \sqrt{\operatorname{ch}^2\lambda x - k'^2} \qquad (0 \leqslant x < \infty).$$

Вдоль шпунта в верхнем слое

$$\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{v}_1 = \frac{\pi}{2J_0} \frac{(\sin\lambda y+P)^{2\varepsilon}-(\sin\lambda y - P)^{2\varepsilon}}{P} \qquad (0 \leqslant y < h).$$

Вдоль шпунта в нижнем слое

$$\tilde{u}_2 = 0, \quad \tilde{v}_2 = \frac{\pi k' \operatorname{tg}\varepsilon\pi}{2J_0} \frac{\cos 2\varepsilon\theta}{\sqrt{k'^2-\sin^2\lambda y}},$$

где

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{k'^2 - \sin^2 \lambda y}}{\sin \lambda y} \quad (d - h < y < 0).$$

Под шпунтом в нижнем слое

$$\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \frac{\pi \operatorname{tg} \varepsilon\pi}{2J_0} \frac{(-\sin \lambda y + R)^{2\varepsilon} + (-\sin \lambda y - R)^{2\varepsilon}}{R},$$

где

$$R = \sqrt{\sin^2 \lambda y - k'^2} \quad (h - d < y < -h).$$

3°. Случай $d = h$.

Вдоль границы водоема

$$\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{v}_1 = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{1}{(\operatorname{ch} \lambda x)^{1-2\varepsilon}} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Вдоль шпунта

$$\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{v}_1 = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{1}{(\sin \lambda y)^{1-2\varepsilon}} \quad (0 < y \leqslant h).$$

Вдоль линии раздела

$$\tilde{u}_1 = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\sin \varepsilon\pi}{(\operatorname{sh} \lambda x)^{1-2\varepsilon}}, \quad \tilde{v}_1 = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\cos \varepsilon\pi}{(\operatorname{sh} \lambda x)^{1-2\varepsilon}}$$
$$(0 \leqslant x < \infty).$$

По вертикали под шпунтом

$$\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon\pi}{(-\sin \lambda y)^{1-2\varepsilon}} \quad (-h \leqslant y < 0).$$

Вдоль непроницаемого основания

$$\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{1}{(\operatorname{ch} \lambda x)^{1-2\varepsilon}} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Приведем здесь также формулы для скоростей *точечного шпунта* в двуслойной среде при одинаковых глубинах обоих слоев. Для этого можно воспользоваться формулами (2.7), положив в них $k = 0$, $k' = 1$. При этом оказывается

$$J_1 = \frac{\pi}{2}, \quad J_2 = 0.$$

Поэтому получим:

$$u_1 - iv_1 = -\frac{\varkappa_1 H}{2h}\left[e^{\frac{\pi\varepsilon z}{h}i} + e^{-\frac{\pi\varepsilon z}{h}i}\right]\sec\frac{\pi z}{2hi} =$$

$$= -\frac{\varkappa_1 H}{h}\sec\frac{\pi z}{2hi}\cos\frac{\pi\varepsilon(hi-z)}{hi},$$

$$u_2 - iv_2 = \frac{\varkappa_1 H \operatorname{tg}\varepsilon\pi}{h}\sec\frac{\pi z}{2hi}\sin\frac{\pi\varepsilon(hi+z)}{hi}.$$

По этим формулам для скоростей получаются следующие выражения. Вдоль линии раздела

$$\tilde{u}_1 = \frac{2\operatorname{ch}2\lambda\varepsilon x}{\operatorname{ch}\lambda x}\cos\varepsilon\pi, \quad \tilde{v}_1 = \frac{2\operatorname{sh}2\lambda\varepsilon x}{\operatorname{ch}\lambda x}\sin\varepsilon\pi \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Вдоль вертикали в верхнем слое

$$\tilde{v}_1 = 0, \quad \tilde{u}_1 = \frac{2\cos\frac{\pi\varepsilon(h-y)}{h}}{\cos\lambda y} \quad (0 < y < h).$$

Вдоль вертикали в нижнем слое

$$\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = 2\operatorname{tg}\varepsilon\pi\,\frac{\sin\pi\varepsilon\left(\frac{y}{h}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\lambda y} \quad (0 \leqslant y < h).$$

Вдоль границы водоема

$$\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{v}_1 = \frac{2\operatorname{ch}2\lambda\varepsilon x}{\operatorname{sh}\lambda x} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

Вдоль непроницаемой границы

$$\tilde{v}_2 = 0, \quad \tilde{u}_2 = \frac{2\operatorname{sh}2\lambda\varepsilon x}{\operatorname{sh}\lambda x} \quad (0 \leqslant x < \infty).$$

С помощью метода, примененного в этой главе, можно решить еще ряд симметричных задач о фильтрации в двуслойной среде: например, можно было бы рассмотреть флютбет, от середины которого отходит шпунт, или два симметричных флютбета. Но при этом увеличивается число особых точек, и приходится учитывать наличие побочных особенностей.

Можно рассмотреть отношение

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = W(\zeta)$$

и построить область функции W. Посмотрим, что можно здесь получить для только что рассмотренных задач.

Разделив уравнение

$$\operatorname{Im}\left(\frac{i\Phi_1}{\varkappa_1} - \frac{i\Phi_2}{\varkappa_2}\right) = 0$$

на уравнение

$$\operatorname{Im}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0,$$

на линии AB имеем:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{iW - \frac{i\varkappa_1}{\varkappa_2}}{W-1}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Это есть уравнение окружности, проходящей через точки

$$W = 1 \quad \text{и} \quad W = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}.$$

На остальных отрезках нельзя считать, что в формуле для W функции Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют тем условиям, которые выписаны на фиг. 236. Нужно, как это указывалось выше, например на верхнем крае разреза, заменить функцию Φ_1 на Φ_1^*. Тогда на основании формул (1.15) условия для функции Φ_2 можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Im}[(\varkappa_2 + \varkappa_1)\Phi_1 - 2\varkappa_1\Phi_2] = 0, \quad \operatorname{Im}\Phi_2 = 0 \text{ для } -\infty < \xi < 0, \\ &\operatorname{Im}[(\varkappa_2 + \varkappa_1)\Phi_1 i - 2\varkappa_1\Phi_2 i] = 0, \quad \operatorname{Im}(i\Phi_2) = 0 \text{ для } 0 < \xi < 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Деля первое равенство (2.11) на второе, получим для $-\infty < \xi < 0$:

$$\operatorname{Im}[(\varkappa_2 + \varkappa_1)\, W - 2\varkappa_1] = 0$$

или

$$\operatorname{Im} W = 0.$$

Аналогично для $0 < \xi < 1$

$$\operatorname{Im}[(\varkappa_1 + \varkappa_2)\, Wi - 2\varkappa_1 i] = 0$$

или

$$\operatorname{Im}\left(iW - \frac{2\varkappa_1 i}{\varkappa_2 + \varkappa_1}\right) = 0.$$

Если положить

$$W = U + iV,$$

то полученные уравнения дают две прямые: действительную ось W и прямую

$$U = \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2},$$

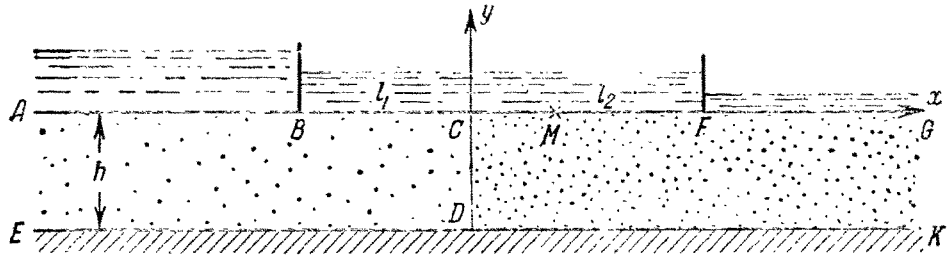
и на плоскости W образуется треугольник, ограниченный этими прямыми и окружностью (2.10). Изложенное указывает на аналогию между рассмотренными двуслойными задачами и задачей о фильтрации со свободной поверхностью, причем функция W соответствует комплексной скорости [5].

§ 3. Точечные шпунты в двуслойном грунте. Рассмотрим здесь две схемы [2].

1. Два несимметрично расположенных точечных шпунта. Этот случай изображен на фиг. 247.

Если отобразить конформно область движения на надрезанную плоскость, как это делалось в случае двух флютбетов, то получим, что на верхнем краю разреза есть особенность в точке $\zeta = -a$, а на нижнем краю разреза — особенность в точке $\zeta = -b$. При обходах вокруг точки C получим различные листы римановой поверхности, причем если точку $\zeta = -a$ возьмем, например, на верхнем листе этой поверхности, то точка $\zeta = -b$ будет расположена на нижнем.

Проанализировав решение задачи для двух точечных шпунтов, изображенных на фиг. 247, но в однородной среде, т. е. при $\varkappa_1 = \varkappa_2$,



Фиг. 247.

можно притти к заключению, что функции F_1 и F_2 для задачи с двумя различными коэффициентами фильтрации следует искать в виде

$$F_1 = \frac{1}{\zeta + a}\left(\frac{Ai}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{B}{\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{1}{\zeta + b}\left(\frac{Ci}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{D}{\sqrt{\zeta}}\right),$$

$$F_2 = \frac{1}{\zeta + a}\left(\frac{Ki}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{L}{\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{1}{\zeta + b}\left(\frac{Mi}{\sqrt{1-\zeta}} + \frac{N}{\sqrt{\zeta}}\right).$$

Условия, которые должны выполняться на отрезках надрезанной плоскости ζ, приводят к таким соотношениям между постоянными:

$$K = A, \quad M = C, \quad L = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} B, \quad N = \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} D,$$

так что выражения для F_1 и F_2 примут вид

$$F_1 = \frac{Ai\sqrt{\zeta} + B\sqrt{1-\zeta}}{(\zeta + a)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{Ci\sqrt{\zeta} + D\sqrt{1-\zeta}}{(\zeta + b)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}},$$

$$F_2 = \frac{Ai\sqrt{\zeta} + B\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\sqrt{1-\zeta}}{(\zeta + a)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} + \frac{Ci\sqrt{\zeta} + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} D\sqrt{1-\zeta}}{(\zeta + b)\sqrt{\zeta(1-\zeta)}}.$$

Беря полувычеты функций F_1 и F_2 около точек $\zeta = -a$ и $\zeta = -b$, найдем (H_1, H_2 — разности уровней воды в водоемах):

$$\pi\frac{-A\sqrt{a} + B\sqrt{1+a}}{\sqrt{a(1+a)}} = \varkappa_1 H_1, \qquad \pi\frac{C\sqrt{b} + D\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\sqrt{1+b}}{\sqrt{b(1+b)}} = -\varkappa_2 H_2,$$

$$\pi\frac{A\sqrt{a} + B\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\sqrt{1+a}}{\sqrt{a(1+a)}} = 0, \qquad \pi\frac{-C\sqrt{b} + D\sqrt{1+b}}{\sqrt{b(1+b)}} = 0.$$

Отображение наших областей на плоскость ζ дается, как и раньше, формулой

$$\zeta = \sin^2 \frac{\pi z}{2h}.$$

Поэтому имеем:

$$a = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi l_1}{2h}, \quad b = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi l_2}{2h},$$

где l_1 и l_2 — длины отрезков CB и CF ($l_1,\ l_2 > 0$).

Для постоянных получим значения

$$A = -\frac{\varkappa_1\varkappa_2 H_1}{\pi(\varkappa_1+\varkappa_2)} \operatorname{ch} \lambda l_2, \qquad C = -\frac{\varkappa_1\varkappa_2 H_2}{\pi(\varkappa_1+\varkappa_2)} \operatorname{ch} \lambda l_1,$$

$$B = -\frac{\varkappa_1\varkappa_2 H_1}{\pi(\varkappa_1+\varkappa_2)} \operatorname{sh} \lambda l_2, \qquad D = \frac{\varkappa_1\varkappa_2 H_2}{\pi(\varkappa_1+\varkappa_2)} \operatorname{sh} \lambda l_1$$

$$\left(\lambda = \frac{\pi}{2h}\right).$$

Окончательные формулы для скоростей имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= \\ &= -\frac{\varkappa_1\varkappa_2 i}{h(\varkappa_1+\varkappa_2)} \left[\frac{H_1(-\operatorname{ch}\lambda l_1 \operatorname{sh}\lambda z + \operatorname{sh}\lambda l_1 \operatorname{ch}\lambda z)}{\operatorname{sh}\lambda(l_1+z)\operatorname{sh}\lambda(l_1-z)} \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} - \frac{H_2}{\operatorname{sh}\lambda(l_2-z)}\right], \\ u_2 - iv_2 &= \\ &= -\frac{\varkappa_1\varkappa_2 i}{h(\varkappa_1+\varkappa_2)} \left[\frac{H_1}{\operatorname{sh}\lambda(l_1+z)} - \frac{H_2(\operatorname{ch}\lambda l_2 \operatorname{sh}\lambda z + \operatorname{sh}\lambda l_2 \operatorname{ch}\lambda z)}{\operatorname{sh}\lambda(l_2+z)\operatorname{sh}\lambda(l_2-z)} \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

Если точка M на границе среднего водоема, в которой скорость обращается в нуль, лежит во второй области (где $x > 0$), то абсцисса x_0 этой точки определяется уравнением

$$H_1 \operatorname{sh}\lambda(l_2+x_0)\operatorname{sh}\lambda(l_2-x_0) = \\ = H_2(\operatorname{ch}\lambda l_2 \operatorname{sh}\lambda x_0 + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} \operatorname{sh}\lambda l_2 \operatorname{ch}\lambda x_0)\operatorname{sh}\lambda(l_1+x_0). \quad (3.2)$$

Если эта точка лежит в первой области, то в уравнении (3.2) нужно заменить H_2, l_2, $\varkappa_2$ на H_1, l_1, $\varkappa_1$ и x_0 на $-x_0$.

Положив для краткости

$$\lambda l_1 = \frac{\pi l_1}{2h} = \alpha_1, \quad \lambda l_2 = \frac{\pi l_2}{2h} = \alpha_2, \quad \frac{H_2}{H_1} = H, \quad \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = \varkappa,$$

получим из уравнения (3.2):

$$\operatorname{th}\frac{\pi x_0}{2h}=-\frac{H(\operatorname{ch}\alpha_2\operatorname{sh}\alpha_1+\varkappa\operatorname{sh}\alpha_2\operatorname{ch}\alpha_1)}{2\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}\alpha_2+H\operatorname{ch}\alpha_1)}+$$
$$+\frac{\sqrt{[H(\operatorname{ch}\alpha_2\operatorname{sh}\alpha_1-\varkappa\operatorname{sh}\alpha_2\operatorname{ch}\alpha_1)+\operatorname{sh}2\alpha_2]^2+2H(\varkappa+1)\operatorname{sh}2\alpha_2\operatorname{sh}(\alpha_2-\alpha_1)}}{2\operatorname{ch}\alpha_2(\operatorname{ch}\alpha_2+H\operatorname{ch}\alpha_1)}.$$

При $l_1=l_2=l$, т. е. при $\alpha_1=\alpha_2$, последнее уравнение приобретает вид

$$\operatorname{th}\frac{\pi x_0}{2h}=\frac{\varkappa_1H_1+\varkappa_2H_2}{\varkappa_1(H_1+H_2)}\operatorname{th}\frac{\pi l}{2h}.$$

2. Точечный шпунт в бесконечной полуплоскости. Положим в формулах предыдущего случая $H_2=0$. Тогда будем иметь шпунт лишь в точке $z=-l_1$. Обозначим

$$-l_1=l,\quad H_1=H.$$

Тогда формулы (3.1) примут вид

$$\left.\begin{aligned}u_1-iv_1&=\frac{\varkappa_1\varkappa_2H}{ih(\varkappa_1+\varkappa_2)}\frac{\operatorname{ch}\lambda l\operatorname{sh}\lambda z+\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\operatorname{sh}\lambda l\operatorname{ch}\lambda z}{\operatorname{sh}\lambda(z-l)\operatorname{sh}\lambda(z+l)},\\ u_2-iv_2&=\frac{\varkappa_1\varkappa_2H}{ih(\varkappa_1+\varkappa_2)}\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda(z-l)}\\ &\left(\lambda=\frac{\pi}{2h}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(3.3)$$

Рассмотрим теперь случай грунта бесконечной глубины, т. е. положим $h=\infty$. Уравнения (3.3) после преобразований примут вид

$$\left.\begin{aligned}u_1-iv_1&=\frac{\varkappa_1H}{\pi i}\left(\frac{1}{z-l}+\frac{\lambda}{z+l}\right),\\ u_2-iv_2&=\frac{\varkappa_2H}{\pi i}\frac{1-\lambda}{z-l},\end{aligned}\right\}\qquad(3.4)$$

где

$$\lambda=\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}.$$

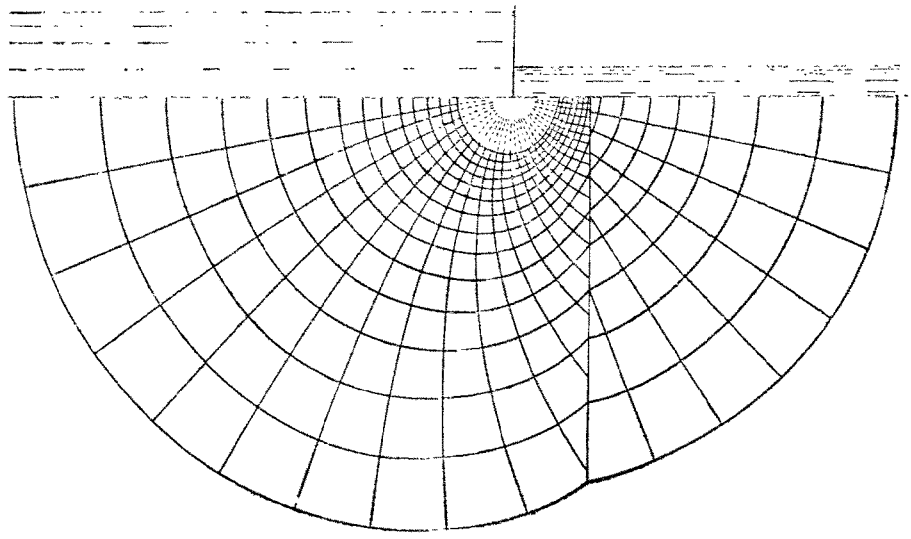
Если линия раздела между двумя грунтами есть ось абсцисс плоскости xy и точечный вихрь в области *1* помещается в точке $z=z_0$, то комплексные скорости соответственно в областях *1* и *2* будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned}u_1-iv_1&=\frac{\varkappa_1\Gamma}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-z_0}+\frac{\lambda}{z-\bar{z}_0}\right),\\ u_2-iv_2&=\frac{\varkappa_2\Gamma}{2\pi i}\frac{1-\lambda}{z-z_0}.\end{aligned}\right\}\qquad(3.5)$$

Здесь Γ — величина, характеризующая интенсивность точечного вихря. В этом случае нельзя говорить о точечном шпунте, так как

среди линий равного потенциала нет горизонтальной прямой, которая могла бы быть принятой за границу водного бассейна. Однако рассмотрение точечного вихря в теории фильтрации грунтовых вод является полезным, так как с помощью подбора системы вихрей подходящей интенсивности можно решать задачи об обтекании гидротехнических сооружений.

Если первые части формул (3.3) умножить на i, то вместо точечного вихря получим точечный сток или источник в полуплоскости с коэффициентом фильтрации $\varkappa_1$, в то время как в другой полуплоскости находится грунт с коэффициентом фильтрации $\varkappa_2$.



Фиг. 248.

На фиг. 248 построены линии тока и линии равного потенциала для точечного шпунта в средах *1* и *2*, когда $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}=\frac{1}{3}$.

Интегрируя уравнения (3.4), получим для комплексного потенциала областей *1* и *2* соответственно:

$$\omega_1(z)=\frac{\varkappa_1 H}{\pi i}[\ln(z-l)+\lambda\ln(z+l)]+C_1,$$

$$\omega_2(z)=\frac{\varkappa_2 H}{\pi i}(1-\lambda)\ln(z-l)+C_2.$$

Нетрудно видеть, что в первой области линии тока представляют собой «обобщенные лемнискаты», т. е. линии, уравнение которых есть

$$|z-l|\cdot|z+l|^{\lambda}=\text{const}.$$

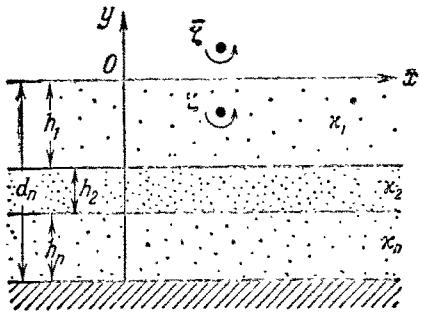
Во второй области линии тока являются дугами окружностей.

§ 4. Точечный вихрь в многослойной области. Для решения задачи о движении грунтовых вод под гидротехническими сооружениями в среде, состоящей из горизонтальных слоев грунта различной

проницаемости, можно поступить подобно тому, как это делается в гидродинамике в задаче об обтекании тел, а именно, заменить контур основания гидротехнического сооружения системой точечных вихрей и подбирать плотность интенсивности этих вихрей так, чтобы удовлетворялось условие на контуре — нормальная составляющая скорости равна нулю.

Для составления интегрального уравнения, которому должна удовлетворять интенсивность источников, нужно найти выражение комплексного потенциала точечного вихря в многослойной области [2].

На фиг. 249 изображен горизонтальный слой грунта толщины h_1 с коэффициентом фильтрации $\varkappa_1$, далее слой толщины h_2 с коэффициентом фильтрации $\varkappa_2$ и т. д., наконец, нижний слой грунта толщины h_n с коэффициентом фильтрации $\varkappa_n$.



Фиг. 249.

Наряду с величинами h_r будем рассматривать их суммы d_r, так что

$$d_1 = h_1,$$
$$d_2 = h_1 + h_2, \ldots,$$
$$d_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_n.$$

Линия $y = -d_n$ представляет непроницаемую границу.

В точке $\zeta = \xi + i\eta$ верхнего слоя поместим точечный вихрь, интенсивность которого равна единице.

Обозначим через $w_r = u_r - iv_r$ комплексную скорость в точке z, принадлежащей r-му слою, обусловленную наличием точечного вихря в точке ζ. Будем искать функцию w_r в виде интеграла Фурье

$$w_r(z) = \int_0^\infty [A_r(\alpha)\, e^{i\alpha z} + B_r(\alpha)\, e^{-i\alpha z}]\, d\alpha \quad (r = 2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{4.1}$$

где $A_r(\alpha)$ и $B_r(\alpha)$ — комплексные функции действительной переменной α.

Что касается скорости в точке верхнего слоя, содержащего точечный вихрь, то в ее выражении выделим член

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{z - \zeta}.$$

Вдоль оси x, соответствующей границе водного бассейна, горизонтальная составляющая скорости равна нулю, что можно записать так:

$$\operatorname{Im}(iw_1) = 0.$$

Отсюда следует, что функция комплексного переменного iw_1 может быть продолжена в верхнюю полуплоскость (в область, пред-

ставляющую полосу между прямыми $y=0$ и $y=+h_1$), причем в точке $\bar{z}$ функция $i\bar{w}_1$ переходит в $-i\bar{w}_1$. Это позволяет искать w_1 в виде

$$w_1=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\bar{\zeta}}+\int_0^\infty [A_1(\alpha)e^{i\alpha z}+B_1(\alpha)e^{-i\alpha z}]\,d\alpha, \quad (4.2)$$

где

$$B_1(\alpha)=-\bar{A}_1(\alpha). \quad (4.3)$$

На непроницаемой границе нижнего n-го слоя вертикальная скорость должна равняться нулю. Это определяет зависимость между $A_n(\alpha)$ и $B_n(\alpha)$ вида

$$B_n(\alpha)=e^{2d_n\alpha}A_1(\alpha). \quad (4.4)$$

На границе раздела r-го и $(r+1)$-го слоев нормальная к границе составляющая скорости должна быть непрерывна, касательные же составляющие пропорциональны соответствующим коэффициентам фильтрации. Поэтому при $y=-d_r$ имеем:

$$v_{r+1}=v_r, \quad \frac{u_{r+1}}{\varkappa_{r+1}}=\frac{u_r}{\varkappa_r}$$

или иначе

$$\operatorname{Im}(w_{r+1})=\operatorname{Im}w_r, \qquad \varkappa_r\operatorname{Re}(w_{r+1})=\varkappa_{r+1}\operatorname{Re}(w_r).$$

Наконец, последнее условие можно переписать так:

$$\left.\begin{aligned} w_{r+1}-\bar{w}_{r+1}&=w_r-\bar{w}_r,\\ \varkappa_r(w_{r+1}+\bar{w}_{r+1})&=\varkappa_{r+1}(\bar{w}_r+w_r).\end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

При $z=x-d_ri$ имеем:

$$w_{r+1}(z)=\int_0^\infty [A_{r+1}(\alpha)e^{d_r\alpha+i\alpha x}+B_{r+1}(\alpha)e^{-d_r\alpha-i\alpha x}]\,d\alpha,$$

$$w_r(z)=\int_0^\infty [A_r(\alpha)e^{d_r\alpha+i\alpha x}+B_r(\alpha)e^{-d_r\alpha-i\alpha x}]\,d\alpha.$$

Условия (4.5) должны выполняться не только для самих функций но и для их подинтегральных выражений. Поэтому получаем:

$$(A_{r+1}-A_r)e^{d_r\alpha+i\alpha x}+(B_{r+1}-B_r)e^{-d_r\alpha-i\alpha x}=$$
$$=(\bar{A}_{r+1}-\bar{A}_r)e^{d_r\alpha-i\alpha x}+(\bar{B}_{r+1}-\bar{B}_r)e^{-d_r\alpha+i\alpha x},$$
$$(\varkappa_rA_{r+1}-\varkappa_{r+1}A_r)e^{d_r\alpha+i\alpha x}+(\varkappa_rB_{r+1}-\varkappa_{r+1}B_r)e^{-d_r\alpha-i\alpha x}=$$
$$=-(\varkappa_r\bar{A}_{r+1}-\varkappa_{r+1}\bar{A}_r)e^{d_r\alpha-i\alpha x}-(\varkappa_r\bar{B}_{r+1}-\varkappa_{r+1}\bar{B}_r)e^{-d_r\alpha+i\alpha x}.$$

Эти уравнения должны выполняться тождественно относительно x, поэтому можно приравнять между собой коэффициенты при $e^{i\alpha x}$ и $e^{-i\alpha x}$. Это даст четыре уравнения, из которых выпишем два:

$$\left.\begin{aligned}(A_{r+1}-A_r)\,e^{d_r\alpha}-(\overline{B}_{r+1}-\overline{B}_r)\,e^{-d_r\alpha}&=0,\\(\varkappa_r A_{r+1}-\varkappa_{r+1}A_r)\,e^{d_r\alpha}+(\varkappa_r\overline{B}_{r+1}-\varkappa_{r+1}\overline{B}_r)\,e^{-d_r\alpha}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4.6)$$

Два других уравнения получим, если заменим в (4.6) все комплексные величины их сопряженными.

Уравнения (4.6) имеют место для $r=2, 3, \ldots, n-1$. Что касается линии $y=-h_1=-d_1$, то для того, чтобы использовать условие на ней, представим главную часть выражения w_1 в виде определенного интеграла

$$\frac{1}{z-\zeta}=i\int_0^\infty e^{-i\alpha(z-\zeta)}\,d\alpha \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}(z-\zeta)<0.$$

Вдоль линии $y=-d_1$ условие $\operatorname{Im}(z-\zeta)<0$, равно как и условие $\operatorname{Im}(z-\overline{\zeta})<0$, выполнено. Поэтому функцию $w_1(z)$ можно представить в виде

$$w_1(z)=\int_0^\infty\left\{A_1(\alpha)\,e^{i\alpha z}+B_1(\alpha)\,e^{-i\alpha z}+\frac{1}{\pi}e^{-i\alpha(z-\xi)}\operatorname{ch}\alpha\eta\right\}d\alpha$$

$$(y-\eta_1<0),$$

а при $z=x-d_1 i$ в виде

$$w_1(z)=\int_0^\infty\left\{A_1(\alpha)\,e^{d_1\alpha+i\alpha x}+B_1(\alpha)\,e^{-d_1\alpha-i\alpha x}+\frac{1}{\pi}e^{-d_1\alpha-i\alpha(x-\xi)}\operatorname{ch}\alpha\eta\right\}d\alpha.$$

Условия на линии раздела дают:

$$\left.\begin{aligned}(A_1-A_2)\,e^{d_1\alpha}-(\overline{B}_1-\overline{B}_2)\,e^{-d_1\alpha}&=\frac{1}{\pi}e^{-d_1\alpha}\cdot e^{-i\alpha\xi}\operatorname{ch}\alpha\eta,\\(\varkappa_2A_1-\varkappa_1A_2)\,e^{d_1\alpha}+(\varkappa_2\overline{B}_1-\varkappa_1\overline{B}_2)\,e^{-d_1\alpha}&=\\&=-\frac{\varkappa_2}{\pi}e^{-d_1\alpha-i\alpha\xi}\operatorname{ch}\alpha\eta.\end{aligned}\right\}\qquad(4.7)$$

Введя обозначения

$$e^{2d_r\alpha}=\alpha_r,\quad \frac{1}{\pi}e^{i\alpha\xi}\operatorname{ch}\alpha\eta=b,\quad \frac{\varkappa_r}{\varkappa_{r+1}}=\lambda_r,$$

систему уравнений (4.3), (4.4), (4.6) и (4,7) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} A_1 + \overline{B}_1 &= 0,\\ \alpha_1 A_1 - B_1 - \alpha_1 A_2 + \overline{B}_2 &= b,\\ \alpha_1 A_1 + \overline{B}_1 - \lambda_1\alpha_1 A_2 - \lambda_1 \overline{B}_2 &= -b,\\ \alpha_2 A_2 - \overline{B}_2 - \alpha_2 A_3 + \overline{B}_3 &= 0,\\ \alpha_2 A_2 + \overline{B}_2 - \lambda_2\alpha_2 A_3 - \lambda_2 \overline{B}_3 &= 0,\\ \cdots\cdots\cdots\

2) $\varkappa_2 = \infty$, т. е. линия $y = -h_1$ представляет линию равного напора. Тогда

$$w(z) = \frac{1}{4h_1 i}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(z-\zeta)}{2h_1} + \operatorname{cth}\frac{\pi(z-\bar{\zeta})}{2h_1}\right].$$

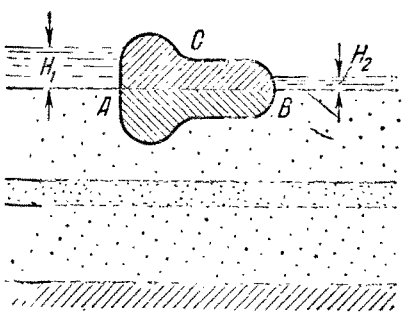
3) Нижний слой бесконечно глубокий, $h_2 = \infty$. Этот случай был рассмотрен Б. К. Ризенкампфом [3]. Для него можно написать (считаем вихрь находящимся на оси x, т. е. $\zeta = \xi$):

$$w_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)\sin\alpha(z-\xi)}{\varkappa_1 \operatorname{ch} h_1\alpha + \varkappa_2 \operatorname{sh} h_1\alpha} e^{-h_1\alpha}\, d\alpha$$

или в виде ряда по степеням $\lambda = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}$:

$$w_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\xi} - \frac{\lambda(z-\xi)}{\pi i\,[4h_1^2 + (z-\xi)^2]} + \frac{\lambda^2(z-\xi)}{\pi i\,[9h_1^2 + (z-\xi)^2]} + \cdots$$

Перейдем теперь к составлению интегрального уравнения. Пусть основание гидротехнического сооружения ограничено линией AB (фиг. 250). Отразив эту линию в оси абсцисс, получим замкнутый контур C. Будем считать, что контур C в каждой точке имеет касательную. Распределим вдоль контура C вихри с интенсивностью $\Gamma(s)\,ds$ на элементе дуги ds. Обозначим через $w(z, \zeta)$ комплексную скорость, происходящую от действия вихря с интенсивностью, равной единице, в точке ζ. Тогда элемент дуги ds будет вызывать в точке z скорость



Фиг. 250.

$$\Gamma(s)\,w(z, \zeta)\,ds.$$

При этом $\zeta = \xi(s) + i\eta(s)$ будет функцией дуги s. Скорость $W(z)$, происходящая от действия на точку z системы всех вихрей, распределенных по контуру C, будет:

$$W(z) = \int_C \Gamma(s)\,w(z, \zeta)\,ds. \qquad (4.9)$$

Положим:

$$w(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\zeta} + \Phi(z, \zeta),$$

где $\Phi(z, \zeta)$ — голоморфная функция. Будем приближать точку z к точке контура $\zeta_0 = \zeta(\sigma)$, где σ — длина дуги в точке ζ_0. В пределе

для интеграла типа Коши получим ($\theta(\sigma)$ — угол касательной с осью x):

$$\lim_{z\to\zeta_0}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Gamma(s)\,ds}{z-\zeta}=\frac{1}{2}\Gamma(\sigma)\,e^{-i\theta(\sigma)}+\frac{1}{2\pi i}\text{v. p.}\int_C\frac{\Gamma(s)\,ds}{\zeta(\sigma)-\zeta(s)}. \quad (4.10)$$

Умножив (4.9) почленно на $e^{i\theta(\sigma)}$ и перейдя к пределу при $z\to\zeta_0$, получим:

$$W(\zeta_0)\,e^{i\theta(\sigma)}=\frac{1}{2}\Gamma(\sigma)+\frac{1}{2\pi i}\text{v. p.}\int_C\Gamma(s)\,w(z,\zeta)\,e^{i\theta(\sigma)}\,ds. \quad (4.11)$$

Но $W(\zeta_0)\,e^{i\theta(\sigma)}=V_t-iV_n$, где V_t — проекция скорости на касательную к контуру, V_n — проекция на нормаль. Поэтому, отделив в (4.11) действительную часть от мнимой и учитывая, что на контуре $V_t=\Gamma(\sigma)$, $V_n=0$, получим два интегральных уравнения: уравнение второго рода с обыкновенным ядром

$$\frac{1}{2}\Gamma(\sigma)=\int_C\Gamma(s)\,E(\sigma,\ s)\,ds,$$

где

$$E(\sigma,\ s)=u(\sigma,\ s)\sin\theta(\sigma)-v(\sigma.\ s)\cos\theta(\sigma),$$

и уравнение первого рода с несобственным ядром

$$\int_C\Gamma(s)\,G(\sigma,\ s)\,ds=0,$$

где

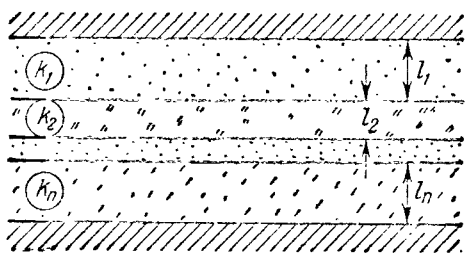
$$G(\sigma,\ s)=u(\sigma,\ s)\cos\theta(\sigma)+v(\sigma,\ s)\sin\theta(\sigma).$$

Н. К. Калининым [4] и Б. К. Ризенкампфом [3], а также автором настоящей книги [2] указаны некоторые возможности для отыскания решения последнего уравнения для плоского флютбета.

§ 5. Простейшие движения в слоистых грунтах. В заключение этого раздела остановимся на простейших, одноразмерных движениях в неоднородных грунтах [19]. Эти задачи нам понадобятся ниже при интерпретации анизотропных грунтов.

Рассмотрим два случая.

1. Горизонтальная напорная фильтрация. Схема такого движения изображена на фиг. 251: грунт состоит из горизонтальных слоев (толщины которых l_1, l_2, ..., l_n), отделенных один от другого горизонтальными плоскостями. Коэффициенты фильтрации слоев обозначены соответственно через k_1, k_2, ..., k_n. Первый и последний слои граничат с водоупором.



Фиг. 251.

Расход, проходящий через каждый слой, вычисляется по формуле

$$Q_i = -k\frac{H_2 - H_1}{L} l_i. \tag{5.1}$$

Здесь $H_2 - H_1$ — разность напоров на концах рассматриваемого слоя, L — длина пути фильтрации.

Для суммарного расхода через всю толщу грунта получаем выражение

$$Q = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu l_\nu \frac{H_1 - H_2}{L}. \tag{5.2}$$

Разделив расход на площадь поперечного сечения потока, получим среднюю скорость фильтрации u. Принимая толщину слоя в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, за единицу, получим, что площадь S численно равна общей глубине потока:

$$S = 1 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu = l.$$

Поэтому для средней скорости потока получим:

$$u = \frac{\sum k_\nu l_\nu}{l}\frac{H_1 - H_2}{L}.$$

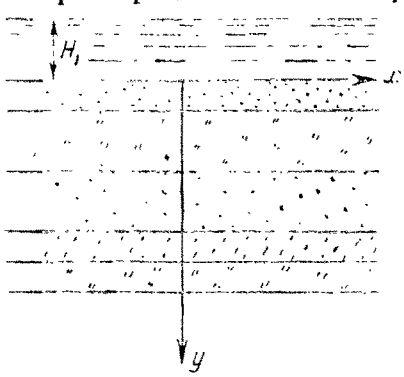
Введя обозначение

$$k = \frac{\sum_{\nu=1} k_\nu l_\nu}{l}, \tag{5.3}$$

будем иметь:

$$u = k\frac{H_1 - H_2}{L}. \tag{5.4}$$

Можно назвать k эквивалентным или приведенным коэффициентом фильтрации: это есть среднее значение, взвешенное по глубинам слоев, коэффициентов фильтрации отдельных слоев. Движение происходит так, как если бы мы имели однородный грунт с коэффициентом фильтрации, равным среднему коэффициенту фильтрации всех слоев.



Фиг. 252.

2. Фильтрация по вертикали в слоистых грунтах. Допустим, что движение происходит в таком же грунте, как и в предыдущем случае, но скорость движения направлена по вертикали (фиг. 252).

Для потенциала скорости и напора будем иметь, направляя ось ординат по вертикали вниз (см. главу II, § 1):

$$\varphi_i = -k_i\left(\frac{p_i}{\rho g} - y\right), \quad h_i = \frac{p}{\rho g} - y \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.5}$$

Атмосферное давление примем равным нулю, тогда напор по линии $y=0$ будет равен H_1. Вдоль линий

$$y=l_1,\quad y=l_1+l_2,\ \ldots,\quad y=l_1+l_2+\ldots+l_{n-1}$$

значения напоров не известны, обозначим их соответственно через $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n-1)}$. Вдоль линии $y=l=l_1+l_2+\ldots+l_n$ напор равен H_2.

Применяя к каждому из слоев формулу Дарси (§ 6 главы I), обозначим через v_i скорость в i-м слое:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -k_1\frac{h^{(1)}-H_1}{l_1},\quad v_2=-k_2\frac{h^{(2)}-h^{(1)}}{l_2},\ \ldots,\\ v_n &= -k_n\frac{H_2-h^{(n-1)}}{l_n}. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Все эти скорости равны между собой, так как мы считаем жидкость несжимаемой, а движение одноразмерным. Уравнение неразрывности дает при этом $\frac{\partial v}{\partial y}=0$, т. е. постоянное значение скорости.

Приравнивая между собой выражения (5.6), получим $n-1$ уравнений для $n-1$ неизвестных $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(n-1)}$:

$$\frac{h^{(1)}-H_1}{\alpha_1}=\frac{h^{(2)}-h^{(1)}}{\alpha_2}=\ldots=\frac{H_2-h^{(n-1)}}{\alpha_n}, \tag{5.7}$$

где

$$\alpha_i=\frac{l_i}{k_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{5.8}$$

Перепишем их в виде следующей системы (первое из уравнений — тождество, введенное для удобства вычислений):

$$\begin{aligned} &\alpha_1(h^{(1)}-H_1)=\alpha_1(h^{(1)}-H_1),\\ &\alpha_2(h^{(1)}-H_1)=\alpha_1(h^{(2)}-h^{(1)}),\\ &\alpha_3(h^{(1)}-H_1)=\alpha_1(h^{(3)}-h^{(2)}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_n(h^{(1)}-H_1)=\alpha_1(H_2-h^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части этих уравнений, получим:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)(h^{(1)}-H_1)=\alpha_1(H_2-H_1),$$

откуда будем иметь для v_1, а следовательно, и для всех v_i:

$$v_1=-\frac{h^{(1)}-H_1}{\alpha_1}=-\frac{H_2-H_1}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

Обозначая через v общее выражение скорости, получим:

$$v = \frac{H_1 - H_2}{\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \ldots + \frac{l_n}{k_n}}. \tag{5.9}$$

Можно сделать приведение этой скорости к какому-нибудь слою грунта, например верхнему, написав ее так:

$$v = k_1 \frac{H_1 - H_2}{L},$$

где

$$L = l_1 + \frac{k_1}{k_2} l_2 + \ldots + \frac{k_1}{k_n} l_n.$$

Величину L можно назвать эквивалентной или приведенной длиной.

Но можно дать и другую интерпретацию формулы (5.9). Положим:

$$\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \ldots + \frac{l_n}{k_n} = \frac{l}{k}; \tag{5.10}$$

тогда можем написать:

$$v = k \frac{H_1 - H_2}{l}. \tag{5.11}$$

Здесь k — эквивалентный или приведенный коэффициент фильтрации, дающий ту же скорость, что и неоднородный грунт, при глубине слоя, равной глубине неоднородного грунта.

Б. АНИЗОТРОПНЫЕ ГРУНТЫ

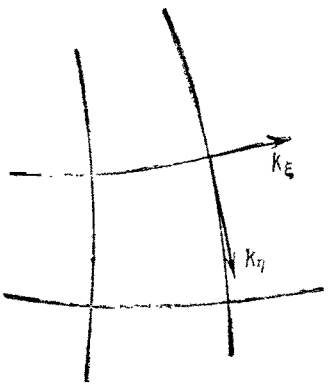
§ 6. Уравнения движения. Граничные условия. Известно, что в лёссовых грунтах водопроницаемость в вертикальном направлении больше, чем в горизонтальном, в ряде других грунтов мы имеем обратную картину — проницаемость в горизонтальном направлении больше, чем в вертикальном.

Случай плоского движения в мелкослоистом грунте со слоями, ограниченными параллельными плоскостями, был кратко рассмотрен Дахлером, затем, по свидетельству В. И. Аравина [7], более подробно Н. Н. Павловским в неопубликованной работе.

В. И. Аравин исследует общий закон слоистости в плоской задаче. Были рассмотрены также примеры движений под гидротехническими сооружениями в анизотропных грунтах [9] и примеры движений со свободной поверхностью и с линией раздела между двумя жидкостями в тех же грунтах [8].

Не останавливаясь на пространственном случае, мы рассмотрим лишь случай плоских движений.

Анизотропным грунтом называется такой грунт, у которото величина коэффициента фильтрации в данной точке области движения зависит от направления скорости фильтрации.



Фиг. 253.

Для рассмотрения общего закона слоистости предположим, что мы имеем семейства линий $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$, где

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y), \quad (6.1)$$

взаимно ортогональных и обладающих свойством, что коэффициенты фильтрации k_ξ, k_η вдоль касательных к этим линиям являются соответственно максимальным и минимальным (фиг. 253).

Обозначая элементы дуг вдоль этих осей соответственно через ds_1 и ds_2, коэффициенты Ламе через H_1, H_2:

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}, \quad H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2},$$

напишем уравнение неразрывности в виде [21]

$$\frac{\partial (H_2 v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_1 v_\eta)}{\partial \eta} = 0, \quad (6.2)$$

где

$$v_\xi = -k_\xi \frac{\partial h}{\partial s_1} = -k_\xi \frac{1}{H_1}\frac{\partial h}{\partial \xi}, \quad v_\eta = -k_\eta \frac{\partial h}{\partial s_2} = -k_\eta \frac{1}{H_2}\frac{\partial h}{\partial \eta}, \quad (6.3)$$

h — пьезометрический напор (см. главу II, § 1).

На основании (6.3) можно написать вместо (6.2):

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k_\xi \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial h}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(k_\eta \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) = 0. \quad (6.4)$$

Если k_ξ, k_η постоянны, то их можно вынести из-под знака производных.

В. И. Аравиным [7] рассмотрены частные случаи расположения слоев в виде концентрических окружностей и в виде пучков прямых. Мы ограничиваемся в дальнейшем рассмотрением «однородной» анизотропии, когда семейства линий (6.1) — параллельные прямые и величины k_ξ, k_η постоянны.

Для изотропного грунта мы имели основную зависимость для линейного закона фильтрации

$$V = -k \operatorname{grad} h,$$

где k — коэффициент фильтрации, h связано с давлением формулой

$$h = \frac{p}{\rho g} + y + \text{const}.$$

В случае анизотропного грунта будем иметь симметричный тензор фильтрации. Ограничиваясь рассмотрением плоского движения, можем написать тензор фильтрации в виде

$$\begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Vmatrix}.$$

Примем главные оси этого тензора за оси прямоугольной системы координат x_1, y_1. Тогда тензор фильтрации будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} k_{x_1} & 0 \\ 0 & k_{y_1} \end{Vmatrix}.$$

Величины k_{x_1}, k_{y_1} — коэффициенты фильтрации в направлении главных осей.

Уравнения движения в координатах x_1, y_1 запишутся так (см. главу I, § 11):

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{g}{k_{x_1}} u_1 - g\sin\alpha, \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_1} - \frac{g}{k_y} v_1 - g\cos\alpha. \tag{6.5}$$

Здесь α — угол, отсчитываемый от горизонтальной оси X (фиг. 254).

Полагая

$$\Phi(x_1, y_1) = -\frac{p}{\rho g} - x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha, \tag{6.6}$$

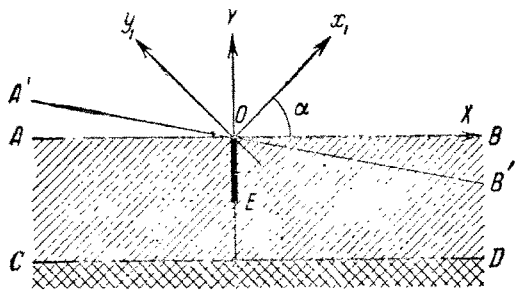
найдем:

$$u_1 = -k_{x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad v_1 = -k_{y_1}\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}. \tag{6.7}$$

Можно назвать Φ приведенным напором. Введем также функцию $\Psi(x_1, y_1)$ с помощью равенств

$$u_1 = \sqrt{k_{x_1}k_{y_1}}\frac{\partial\Psi}{\partial y_1},$$

$$v_1 = -\sqrt{k_{x_1}k_{y_1}}\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}.$$



Фиг. 254.

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0$$

следует, что Φ удовлетворяет уравнению

$$k_{x_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + k_{y_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1^2} = 0.$$

Если ввести еще одно преобразование, полагая

$$x = x_1, \quad y = \nu y, \quad \nu^2 = k_{y_1} : k_{x_1} \tag{6.8}$$

то в новых координатах x, y для Φ получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Комбинация $\Phi + i\Psi$, где Ψ — введенная выше приведенная функция тока, является функцией комплексного переменного $z = x + iy$.

Расход жидкости через контур, ограниченный дугой MN, выражается с помощью функции тока так:

$$Q = \sqrt{k_{x_1} k_{y_1}} (\Psi_N - \Psi_M). \tag{6.9}$$

Три системы координат, введенные нами, связаны уравнениями

$$\left.\begin{aligned} X &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha = x\cos\alpha - \nu y \sin\alpha, \\ Y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha = x\sin\alpha + \nu y \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \\ y_1 &= \nu y = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Здесь введено обозначение

$$\nu = \sqrt{k_{y_1}} : \sqrt{k_{x_1}}.$$

В частности, уравнения горизонтальных линий AB, CD и вертикальной линии OE в системе координат x, y будут соответственно:

$$y = -\frac{1}{\nu} x \operatorname{tg}\alpha, \tag{6.12}$$

$$x\sin\alpha + \nu y \cos\alpha + h = 0, \tag{6.13}$$

$$y = \frac{1}{\nu} x \operatorname{ctg}\alpha. \tag{6.14}$$

На фиг. 254 $A'B'$ — положение прямой AB в системе x, y.

В системе координат x, y мы можем рассматривать некоторое фиктивное движение в области, получаемой из области плоскости X, Y аффинным преобразованием (6.10), при котором прямые линии переходят в прямые, причем углы между прямыми, вообще говоря, не сохраняются.

На границах области движения в плоскости x, y будут выполняться условия:

1) На границе водного бассейна

$$\Phi(x, y) = \text{const},$$

так как на соответствующей границе плоскости x_1, y_1 имеем:

$$\Phi(x_1, y_1) = \text{const}.$$

2) На непроницаемой границе

$$\Psi(x, y) = \text{const}.$$

3) На свободной поверхности, где давление постоянно, имеем согласно (6.6) и (6.11) соотношение

$$\Phi + x \sin\alpha + \nu y \cos\alpha = \text{const}. \tag{6.15}$$

Кроме того, на депрессионной кривой, как линии тока,

$$\Psi(x, y) = \text{const}.$$

Дифференцируя (6.15) по дуге s свободной поверхности (на плоскости x, y), после почленного умножения на $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$ получим:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right)^2 + \sin\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{dx}{ds} + \nu\cos\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{dy}{ds} = 0.$$

Введя составляющие u, v фиктивной безразмерной скорости

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial s}\frac{dy}{ds} = v,$$

будем иметь уравнение окружности

$$u^2 + v^2 + u\sin\alpha + \nu v\cos\alpha = 0 \tag{6.16}$$

на плоскости скорости u, v. Эта окружность проходит через начало координат и имеет центр в точке $\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha, -\frac{\nu}{2}\cos\alpha\right)$.

4) На промежутке высачивания имеет место уравнение (6.15). Пусть промежуток высачивания есть прямая, образующая угол β с осью x. Дифференцируя (6.15) по дуге s вдоль промежутка высачивания, получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \sin\alpha\frac{dx}{ds} + \nu\cos\alpha\frac{dy}{ds} = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\sin\beta = u\cos\beta + v\sin\beta,$$

найдем уравнение прямой:

$$u\cos\beta + v\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \nu\cos\alpha\sin\beta = 0. \tag{6.17}$$

Эта прямая проходит через точку $(-\sin\alpha, -\nu\cos\alpha)$ и перпендикулярна к промежутку высачивания.

Мы видим, что для движений в анизотропном грунте сохраняются, лишь немного видоизменяясь, методы исследования, рассмотренные в предыдущих главах.

Отметим частный случай анизотропии, когда $\alpha = 0$. Если при этом $\nu < 1$, то имеем горизонтальную слоистость, если $\nu > 1$, то вертикальную.

Формулы (6.10) теперь принимают вид

$$X = x_1 = x,$$

$$Y = y_1 = \nu y.$$

Направления осей координат рассматриваемых систем совпадают, но в области фиктивного течения (x, y) имеет место изменение масштаба вдоль оси y: плоский флютбет сохраняет свою длину, а вертикальный шпунт укорачивается при горизонтальной слоистости и удлиняется при вертикальной.

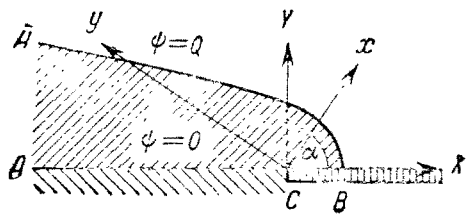
Связь между приведенным напором и давлением согласно (6.6) будет:

$$\Phi(x_1, y_1) = -\frac{p}{\rho g} - y_1.$$

В главе XI у нас приводятся примеры некоторых напорных движений в анизотропном грунте при α, отличном от нуля. На вспомогательной плоскости (x, y) вместо вертикальных шпунтов действительной области движения получаются наклонные шпунты. Построив тем или иным способом сетку движения на плоскости (x, y), с помощью формул (6.10) можно затем вернуться к плоскости (X, Y).

Не останавливаясь здесь на напорных движениях, приведем пример безнапорного движения в однородном анизотропном грунте.

§ 7. Приток к дрене на водоупоре в анизотропном грунте [8]. Рассмотрим простейший случай движения со свободной поверхностью — приток грунтовых вод к горизонтальному фильтру при наличии горизонтального водоупора (фиг. 255). Эту задачу для изотропного грунта мы рассматривали в главе II.



Фиг. 255.

Напишем полученное ранее решение, вводя другие обозначения, а именно, обозначая координаты точек области движения в изотропном грунте большими буквами:

$$Z = X + iY$$

и расход дрены — буквой Q_0. Будем иметь:

$$Z = -\frac{\omega^2}{2kQ_0} = -\frac{(\varphi + i\psi)^2}{2kQ_0}. \qquad (7.1)$$

Уравнение депрессионной кривой, вдоль которой $\psi = Q_0$, напишем в виде

$$X_0 = -\frac{\varphi^2 - Q_0^2}{2kQ_0}, \quad Y_0 = -\frac{\varphi}{kQ_0}$$

или, учитывая, что вдоль кривой депрессии $\varphi = -kY$, в виде

$$Y_0^2 = \frac{Q_0^2}{k^2} - \frac{2Q_0}{k} X_0. \tag{7.2}$$

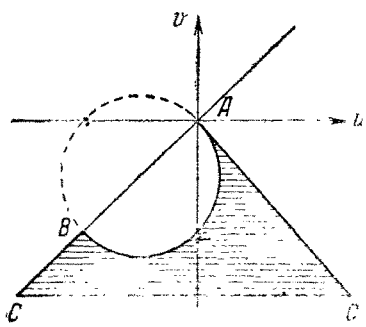
Длина отрезка дренажа l_0 связана с расходом Q_0 соотношением

$$Q_0 = 2kl_0. \tag{7.3}$$

Положим $k = 1$ и используем полученное решение при переходе к анизотропному грунту.

Для анизотропного грунта на плоскости $\Phi\Psi$ мы будем иметь ту же фигуру (полуполосу), что и для изотропного. На плоскости uv окружность, соответствующая депрессионной кривой, сдвигается (фиг. 256), так как центр ее будет лежать в точке

$$\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha, \quad -\frac{\nu}{2}\cos\alpha\right).$$



Фиг. 256.

Уравнение линии BC в области движения имеет вид

$$Y = x\sin\alpha + \nu y\cos\alpha = 0.$$

Линия BC годографа скорости должна быть перпендикулярна к этой прямой, т. е. имеет уравнение

$$v = \nu u\,\mathrm{ctg}\,\alpha = u\,\mathrm{ctg}\,\gamma.$$

Буквой γ обозначен угол прямой ABC с осью v, причем

$$\mathrm{ctg}\,\gamma = \nu\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Уравнение прямой AC в координатах x, y имеет также вид

$$Y = x\sin\alpha + \nu y\cos\alpha = 0.$$

Прямая AC годографа скорости параллельна линии AC, т. е. имеет уравнение

$$u\sin\alpha + \nu v\cos\alpha = 0$$

или

$$v = -u\,\mathrm{tg}\,\gamma;$$

следовательно, она перпендикулярна к ABC.

Если повернуть годограф скорости плоскости uv на угол γ против часовой стрелки, то получим годограф скорости изотропного случая, для которого составляющие скорости обозначим через v_x, v_y. Тогда

$$u + iv = e^{-i\gamma}(v_x + iv_y)$$

или

$$u - iv = e^{i\gamma}(v_x - iv_y), \qquad \frac{d\omega}{dz} = e^{i\gamma}\frac{d\omega}{dZ}.$$

Отсюда, так как функция ω в соответствующих точках плоскостей z и Z принимает одинаковые значения, получаем:

$$z = e^{-i\gamma}Z. \tag{7.4}$$

Пусть мы нашли, что уравнение свободной поверхности для изотропного грунта есть (ζ — параметр, принимающий действительные значения)

$$Z = Z_0(\zeta) = X_0(\zeta) + iY_0(\zeta).$$

На основании формул (6.11) и (7.4) имеем:

$$x + iy = X\cos\alpha + Y\sin\alpha + i\frac{-X\sin\alpha + Y\cos\alpha}{\nu} = e^{-i\gamma}(X_0 + iY_0).$$

Отделяя здесь действительную часть от мнимой, найдем:

$$\left.\begin{aligned} X &= mX_0 + nY_0, \\ Y &= pY_0, \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

где

$$m = \frac{\nu}{\sqrt{\sin^2\alpha + \nu^2\cos^2\alpha}}, \quad n = \frac{(1-\nu^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \nu^2\cos^2\alpha}}, \quad p = \sqrt{\sin^2\alpha + \nu^2\cos^2\alpha}.$$

Такова зависимость между координатами точек области движения для анизотропного и изотропного грунта в случае, если области $\Phi + i\Psi$ в обоих случаях одинаковы, а область $u + iv$ повернута на угол γ относительно области $v_x + iv_y$.

В частности, координаты точек свободной поверхности анизотропного грунта X, Y связаны с координатами точек свободной поверхности изотропного грунта X_0, Y_0 соотношениями (7.5). Применяя эти уравнения к рассматриваемому нами частному случаю движения, получим, подставляя (7.5) в (7.2), уравнение линии свободной поверхности в виде параболы

$$\frac{Y^2}{p^2} = \bar{Q}_0^2 - \frac{2\bar{Q}_0}{m}\left(X - \frac{n}{p}Y\right),$$

где

$$\bar{Q}_0 = 2l_0.$$

Расход Q через отрезок CB на основании формулы (6.9) равен

$$Q = \sqrt{k_{x_1}k_{y_1}}\,\bar{Q}_0.$$

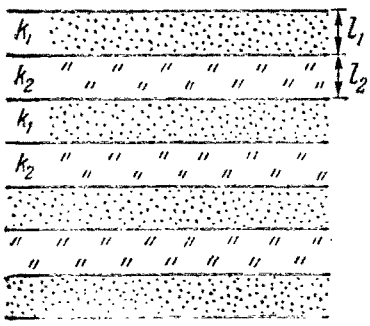
Зависимость между расходом Q и отрезком дренажа CB, длину которого обозначим через l, определяется соотношением

$$Q = \frac{2l}{m}\nu\sqrt{k_{x_1}k_{y_1}}$$

или

$$Q = 2k_{x_1}l\sqrt{\sin^2\alpha + \nu^2\cos^2\alpha}.$$

§ 8. Интерпретация анизотропного грунта с помощью двух чередующихся грунтов. Можно представить себе однородный анизотропный грунт состоящим из тонких перемежающихся слоев одинаковой толщины с двумя коэффициентами фильтрации k_1 и k_2 (фиг. 257). Тогда движение вдоль этих слоев будет аналогично рассмотренному в § 5 первому случаю, и для скорости вдоль слоев (направляя вдоль них ось x) можно написать:



Фиг. 257.

$$v_x = -k_x\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{8.1}$$

причем, считая $l_1 = l_2$, $n = 2$, по (5.3) будем иметь:

$$k_x = \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{8.2}$$

Для движения в направлении, перпендикулярном к направлению слоев, будем иметь:

$$v_y = -k_y\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{8.3}$$

где согласно (5.10) будем иметь при $l_1 = l_2$, $n = 2$:

$$\frac{l}{k_1} + \frac{l}{k_2} = \frac{2l}{k_y}, \tag{8.4}$$

откуда

$$k_y = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}. \tag{8.5}$$

Отметим крайние случаи значений k_2.

1) Пусть $k_2 = 0$; это означает, что проницаемые прослойки чередуются с непроницаемыми. В этом случае получаем:

$$k_x = \frac{k_1}{2}, \quad k_y = 0.$$

Возможным является лишь движение вдоль прослоек (теоретически мы должны считать толщины прослоек бесконечно малыми), по прямолинейным линиям тока.

2) В качестве второго крайнего случая возьмем $k_2 = \infty$. Это означает, что в слоях k_2 движение происходит как в сплошной

жидкости, без грунта. При этом (8.2) и (8.5) дадут:

$$k_x = \infty, \quad k_y = \frac{k_1}{2}.$$

Формула $v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$ показывает, что следует положить:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

так как иначе для скорости v_x получилось бы бесконечно большое значение. Но из последнего условия вытекает, что напор не зависит от x, т. е. что линии $y = \text{const}$ являются линиями равного напора.

Предположим теперь, что у нас имеется вертикальное чередование слоев с проницаемостями k_1 и k_2. Тогда имеем:

$$k_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}, \quad k_y = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

полагая теперь $k_2 = \infty$, найдем:

$$k_x = \frac{k_1}{2}, \quad k_y = \infty.$$

Это будет случай движения, в котором линиями равного напора являются вертикальные прямые $x = \text{const}$, что вытекает из уравнения

$$v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}$$

при условии, что $k_y = \infty$, а скорость v_y остается ограниченной.

Такая схема представляет модель движения Дюпюи, принимавшего, что при слабо изменяющейся свободной поверхности грунтового потока линии равного напора являются вертикальными прямыми. Это предположение, выполняющееся в однородном грунте (в слабо изменяющихся движениях) приближенно, в анизотропном грунте с $k_y = \infty$ выполняется точно.

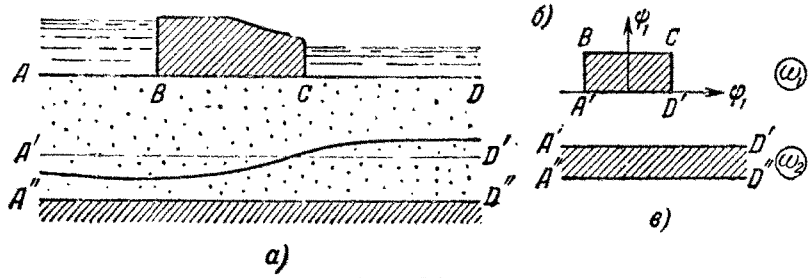
Выше уже было отмечено, что в природе встречаются анизотропные грунты, у которых коэффициент фильтрации в вертикальном направлении больше, чем в горизонтальном, — для них гипотеза Дюпюи должна хорошо оправдываться.

В. ДВЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ

§ 9. О движении двух жидкостей разной плотности. Задача о фильтрации двух жидкостей разной плотности возникает в случае, когда при движении воды под плотиной на некоторой глубине имеется слой соленой воды, образовавшейся вследствие того, что проницаемый слой лежит на толще каменной соли; морские воды, проникая в грунт, могут находиться под пресными грунтовыми водами; на раз-

ных глубинах грунтовые воды могут иметь различную минерализацию, в то время как воды, фильтрующиеся из канала, являются пресными.

В качестве примера остановимся на случае [2, 10], когда на некоторой глубине под гидротехническим сооружением имеется слой соленой воды $A'D'D''A''$, находящийся над непроницаемой толщей соли



Фиг. 258.

(фиг. 258, *а*). Весь слой грунта $ADD''A''$ считается однородным, т. е. состоящим из одной и той же породы.

Предполагается, что после возведения гидротехнического сооружения будет происходить отжим рассола так, что левая часть линии $A'D'$ будет понижаться, правая подниматься.

Каким же образом будет происходить это явление, т. е. как будет изменяться с течением времени линия раздела между пресной и соленой водой? О неустановившихся движениях такого рода будет сказано во второй части настоящей книги. Здесь же мы рассматриваем случай установившегося движения.

Будем считать обе жидкости несжимаемыми, обладающими соответственно плотностями ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_2 > \rho_1$. Примем, учитывая, что коэффициент фильтрации зависит не только от грунта, но и от жидкости, в частности от ее вязкости, коэффициенты фильтрации двух рассматриваемых областей движения равными соответственно k_1 и k_2.

Напишем уравнения для скоростей u_i, v_i $(i = 1, 2)$ каждой из двух жидкостей:

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \quad v_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \\ \Delta \varphi_i &= 0, \\ \varphi_i &= -k_i\left(\frac{p_i}{\rho_i g} + y\right) \\ &(i = 1, 2). \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Условие равенства давлений на линии раздела приводит к уравнению

$$\frac{\rho_1}{k_1}\varphi_1 - \frac{\rho_2}{k_2}\varphi_2 = (\rho_2 - \rho_1)y \tag{9.2}$$

на линии раздела.

Кроме того, линия раздела должна быть линией тока, т. е. на ней

$$\psi_1 = \text{const}, \quad \psi_2 = \text{const}.$$

Если рассмотрим плоскость комплексного потенциала $\omega_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ для первой области, то на ней получим прямоугольник $A'D'CB$ (фиг. 258, *б*). Следовательно, φ_1 конечно во всей области *1*.

Перейдем к области *2*. Если бы в ней было возможно движение, то на плоскости ее комплексного потенциала $\omega_2 = \varphi_2 + i\psi_2$ мы получили бы полосу $A'D'A''D''$ (фиг. 258, *в*), откуда следует, что $\varphi_2 = \pm\infty$, когда $x = \pm\infty$. Но тогда из уравнения (9.2) следовало бы, что и $\varphi_1 = \pm\infty$ при $x = \pm\infty$, что невозможно. Следовательно, в случае установившегося движения в области *2* жидкость должна оставаться в покое.

Таким образом, задача сводится к определению движения в одной области, причем для линии раздела получаются условия, совершенно аналогичные тем, какие имеют место на линии свободной поверхности. А именно, полагая в уравнении (9.2) величину φ_2 постоянной, его можно представить в виде

$$\varphi_1 - \mu y = \text{const}, \tag{9.3}$$

где

$$\mu = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) k_1. \tag{9.4}$$

Такое же выражение мы получили бы, считая $k_1 = k_2$. Другими словами, величина коэффициента фильтрации второй среды не входит в условие задачи.

Очевидно, что на годографе скорости уравнению (9.3) соответствует окружность (см. главу II, § 4)

$$u^2 + v^2 - \mu v = 0. \tag{9.5}$$

Пусть имеем гидротехническое сооружение произвольной формы. На границах водоемов AB и CD (фиг. 258) потенциал скорости имеет постоянные значения. Положим:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} k_1 H \quad \text{на} \quad AB,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} k_1 H \quad \text{на} \quad CD,$$

где

$$H = H_1 - H_2.$$

Обозначим глубины движущейся жидкости для $x = -\infty$ и $x = +\infty$ соответственно через h' и h''. Представив уравнение (9.3) в виде

$$y = \frac{\varphi_1}{\mu} + C,$$

будем иметь: при $x = -\infty$

$$-h' = -\frac{k_1 H}{2\mu} + C,$$

при $x = +\infty$

$$-h'' = \frac{kH}{2\mu} + C.$$

Отсюда

$$C = -\frac{h' + h''}{2}.$$

Для установившегося движения в конечной области должно было бы выполняться условие равенства первоначальной и окончательной площадей соленых вод. В рассматриваемом случае эти площади бесконечны, поэтому заменим указанное условие следующим: будем считать полусумму глубин h' и h'' равной глубине верхнего слоя в состоянии равновесия

$$\frac{h' + h''}{2} = h_1.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} C &= -h_1, \\ h' &= h_1 + \frac{k_1 H}{2\mu} = h_1 + \frac{H}{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)}, \\ h'' &= h_1 - \frac{k_1 H}{2\mu} = h_1 - \frac{H}{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

Разность глубин равна

$$h' - h'' = \frac{H}{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}.$$

Таким образом, глубина вытеснения будет тем больше, чем меньше разность плотностей ρ_1 и ρ_2.

Если окажется, что

$$h_1 \leqslant \frac{H}{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)},$$

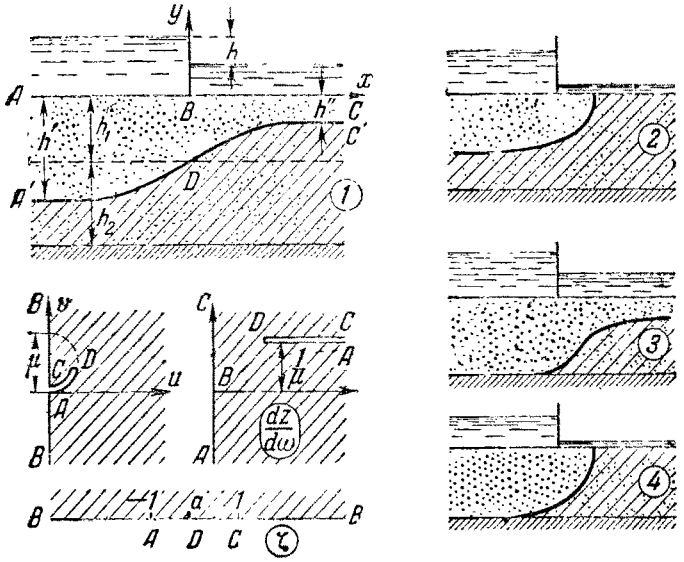
то правый конец линии раздела будет упираться в границу нижнего водоема.

Если глубина h_2 нижнего слоя удовлетворяет неравенству

$$h_2 \leqslant \frac{H}{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)},$$

то линия раздела упирается в линию водоупора. Возможны четыре вида линии раздела, изображенные на фиг. 259.

Для ряда частных форм основания гидротехнического сооружения нетрудно получить решение с помощью конформного отображения на полуплоскость области потенциала и области годографа скорости (или ее инверсии). Для шпунта можно получить решение, используя функцию Жуковского так, как это делается для движений со свободной поверхностью.



Фиг. 259.

§ 10. Обтекание точечного шпунта. Рассмотрим случай 1 фиг. 259. Принимая $\varphi = -\frac{kH}{2}$ вдоль AB, $\varphi = \frac{kH}{2}$ вдоль BC, $\varphi = 0$ вдоль $A'DC'$, получим для $\omega = \varphi + i\psi$:

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \arcsin \zeta. \tag{10.1}$$

На плоскости u, v областью является полуплоскость с разрезом по окружности (9.5). Инверсия в окружности радиуса μ с центром в начале координат даст область функции $\mu^2 \frac{dz}{d\omega}$. По сокращении на μ^2 будем иметь:

$$\frac{dz}{d\omega} = C \int \frac{(\zeta - a)\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^{3/2}} + D = C \frac{1 - a\zeta}{(1-\zeta^2)^{3/2}} + D. \tag{10.2}$$

При $|\xi| < 1$ имеем $\operatorname{Im} \frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{\mu}$, при $|\xi| > 1$ $\operatorname{Re} \frac{dz}{d\omega} = 0$, при $\zeta = \infty$ $\frac{dz}{d\omega} = 0$. Это дает:

$$C = \frac{1}{\mu a}, \quad D = \frac{l}{\mu}. \tag{10.3}$$

Умножим (10.2) на $\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{kH}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}}$ и проинтегрируем по ζ. Учитывая, что обход точек $\zeta = \pm 1$ дает приращения для z, соответственно равные $h''i$, $h'i$, для которых имеют место равенства (9.6), найдем:

$$z = \frac{k_1 H - 2\mu h_1}{2\mu\pi}\ln(1-\zeta) + \frac{k_1 H + 2\mu h_1}{2\mu\pi}\ln(1+\zeta) + \\ + \frac{ik_1 H}{\mu\pi}\arcsin\zeta + \frac{k_1 H}{\mu\pi}\ln 2 - ih_1. \quad (10.4)$$

Уравнения линии раздела получим при $-1 < \zeta < 1$:

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= -\frac{H}{\pi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)}\ln(2\sqrt{1-\zeta^2}) + \frac{h_1}{\pi}\ln\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \\ Y_0 &= -\frac{H}{\pi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)}\arcsin\zeta - h_1. \end{aligned}\right\} \quad (10.5)$$

Если между h_1 и H имеет место зависимость

$$h_1 = \frac{k_1 H}{2\mu} = \frac{H}{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)},$$

то уравнения линии раздела принимают вид

$$X_0 = \frac{2h_1}{\pi}\ln[2(1+\zeta)], \quad Y_0 = \frac{2h_1}{\pi}\arcsin\zeta - h_1. \quad (10.6)$$

В статье [12] были рассмотрены случаи заглубленного шпунта и плоского флютбета. В статье [11] дано решение тех же задач для анизотропного грунта.

§ 11. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений. В предыдущих параграфах мы пренебрегали диффузией солей, считая, что имеем две жидкости, плотности которых остаются все время постоянными. Между тем в действительности происходит процесс диффузионного выноса растворимых веществ (каменная соль и т. п.), находящихся в основании гидротехнического сооружения. В результате этого процесса могут происходить деформации грунта.

Будем рассматривать задачу, пренебрегая изменением плотности жидкости в области фильтрации и деформацией во времени самой области.

Возьмем дифференциальное уравнение диффузии при наличии движущейся жидкости [17], в котором v_x, v_y — составляющие скорости частиц жидкости:

$$D\Delta c = \frac{\partial c}{\partial x}v_x + \frac{\partial c}{\partial y}v_y + \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (11.1)$$

Для установившегося движения это уравнение принимает вид [18]:

$$D\,\Delta c = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{u}{m} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{v}{m}. \tag{11.2}$$

Здесь c — концентрация растворимого вещества в данной точке области фильтрации ($г/см^2$), D — коэффициент диффузии, т. е. параметр, характеризующий диффузионные свойства среды и растворимого вещества, измеряемый в $см^2/сек$, u, v — составляющие скорости фильтрации, m — пористость.

Будем понимать под ω приведенный комплексный потенциал, полагая обычный комплексный потенциал равным

$$kH\omega = kH(\varphi + i\psi).$$

Следовательно, для комплексной скорости фильтрации будем иметь:

$$u - iv = kH\frac{d\omega}{dz},$$

где $H = H_1 - H_2$ — действующий напор, H_1, H_2 — уровни воды в верхнем и нижнем бьефах. При этом

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\frac{1}{H}\left(\frac{p - p_0}{\rho g} - y - H_1\right), \\ u &= kH\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = kH\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

p_0 — постоянная, например атмосферное давление. Ось y направлена вниз.

Допустим, что мы нашли зависимость между комплексной координатой z и приведенным комплексным потенциалом ω:

$$z = f(\omega). \tag{11.4}$$

В уравнении (11.2) удобнее перейти от переменных x, y к переменным φ, ψ. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial c}{\partial x}u + \frac{\partial c}{\partial y}v = \frac{\partial c}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}u + \frac{\partial\varphi}{\partial y}v\right) + \frac{\partial c}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}u + \frac{\partial\psi}{\partial y}v\right).$$

Выражение во второй скобке равно нулю, в первой равно

$$\frac{V^2}{kH},$$

где V — величина скорости, равная $\sqrt{u^2 + v^2}$. Поэтому

$$\frac{\partial c}{\partial x}u + \frac{\partial c}{\partial y}v = \frac{V^2}{kH}\frac{\partial c}{\partial\varphi}. \tag{11.5}$$

Преобразуя оператор Лапласа

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

к переменным φ, ψ, найдем:

$$\Delta c = \left(\frac{V}{kH}\right)^2\left(\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial\psi^2}\right). \tag{11.6}$$

Если подставить выражения (11.5) и (11.6) в уравнение (11.2), то получим после сокращения на $\frac{V^2}{kH}$ уравнение

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} - 2\lambda \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} = 0. \tag{11.7}$$

Здесь λ — безразмерный параметр:

$$\lambda = \frac{kH}{mD}.$$

Можно найти решение уравнения (11.7) в точках прямоугольника (φ, ψ) при следующих граничных условиях. По дну верхнего и нижнего бьефов концентрация принимается равной нулю. На контуре непроницаемого основания плотины принимают условие $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$ [20]. Это дает:

$$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial c}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial n} = V\frac{\partial c}{\partial \psi} = 0, \tag{11.8}$$

откуда $\frac{\partial c}{\partial \psi} = 0$ вдоль отрезка $\psi = 0$.

Наконец, вдоль границы водоупора, которая, по предположению, является поверхностью кровли мощного пласта растворимого вещества, принимается, что $c = c_0$, где c_0 — предельное насыщение раствора данным веществом.

С помощью ряда Фурье найдено решение в виде

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{4}{\pi} e^{\lambda\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(1-e^{-2\mu_n})} [(e^{-\lambda} - e^{-\mu_n}) e^{-\mu_n(1-\varphi)} + (1 - e^{-\lambda-\mu_n}) e^{-\mu_n\varphi}] \cos(2n+1)\frac{\pi\psi}{2q}, \tag{11.9}$$

где

$$\mu_n = \sqrt{\lambda^2 + \left[(2n+1)\frac{\pi}{2q}\right]^2}, \tag{11.10}$$

q есть приведенный расход, т. е. $q = \frac{Q}{kH}$, где Q — полный расход. Величина $\frac{c}{c_0}$ зависит лишь от двух параметров:

$$\lambda = \frac{kH}{mD}, \quad q = \frac{Q}{kH}.$$

Вычисление расхода растворимого вещества через отрезок границы водоупора MN производится с помощью формулы

$$Q_{MN} = -\int_M^N D\frac{\partial c}{\partial n}\Big|_{\psi=q} ds = -D\int_M^N v\frac{\partial c}{\partial \psi}\Big|_{\psi=q} ds = -D\int_m^n \frac{\partial c}{\partial \psi}\Big|_{\psi=q} d\varphi.$$

Можно думать [18], что при глубине слоя, большей, чем удвоенная длина подземного контура основания, в силу медленности процессов диффузии деформация границы водоупора практически не влияет на картину фильтрации.

Уравнение (11.9) вместе с зависимостью (11.4), или сеткой движения, построенной тем или иным способом (например, по методу электро-гидродинамических аналогий — см. главу XI), позволяет определить концентрацию растворимого вещества в любой точке области фильтрации.

§ 12. Неоднородный грунт при коэффициенте фильтрации — непрерывной функции координат. Рассматривая плоское движение в неоднородной среде с переменным коэффициентом фильтрации $k(x, y)$, введем безразмерную величину

$$K(x, y) = \frac{k(x, y)}{k_0},$$

где k_0 — некоторое постоянное значение (например, среднее по всей области движения) коэффициента фильтрации. Тогда для вектора V скорости фильтрации можно написать уравнения (см. литературу к главе III [27])

$$\operatorname{div} V = 0, \quad V = K\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \quad \varphi = k_0 h. \tag{12.1}$$

Введем функцию $\omega = \varphi + i\psi$ такую, что

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \psi}{\partial x} = K\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

Тогда получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{K}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{K}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{12.2}$$

Для функций φ, ψ, удовлетворяющих системе (12.2) эллиптического типа, имеет место теорема о сохранении области: область плоскости $z = x + iy$ переходит в область плоскости $\varphi + i\psi$; бесконечно малым окружностям плоскости z соответствуют бесконечно малые эллипсы плоскости ω с полуосями a, b, параллельными осям φ, ψ, причем $\frac{b}{a} = K$.

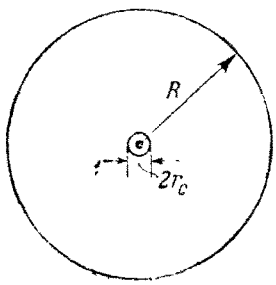
На указанные здесь движения можно распространить ряд вариационных теорем, примеры которых приведены у нас в конце главы III (см. литературу к главе III [27, 28]).

ГЛАВА IX

КОЛОДЦЫ И СКВАЖИНЫ. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ДРЕНЫ

А. СОВЕРШЕННЫЕ СКВАЖИНЫ

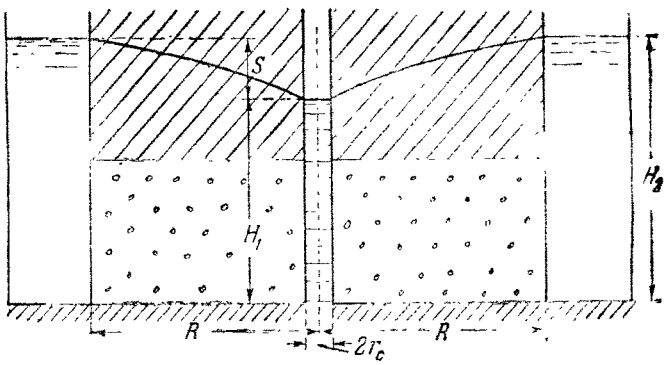
§ 1. Совершенная скважина в центре пласта. Будем рассматривать движение жидкости — воды или нефти — в проницаемом слое (обычно песке), ограниченном двумя горизонтальными непроницаемыми пластами. Скважину цилиндрической формы считаем пробуренной через весь пласт — такая скважина называется *совершенной* или полной в отличие от *несовершенной*, заглубленной лишь частично в проницаемый пласт.



Фиг. 260.

Движение в таком пласте можно считать плоскопараллельным. Мы излагаем здесь теорию круглого совершенного колодца или скважины. Приближенно результаты можно использовать и для колодцев другой формы, например четырехугольных (см. главу X, § 9).

Рассмотрим осесимметричный приток к скважине радиуса r_0 (фиг. 260 и 261). Вычислим расход Q через цилиндрическую поверх-



Фиг. 261.

ность произвольного радиуса r и высоты M. Он равен

$$Q = 2\pi r M v, \tag{1.1}$$

где v — радиальная скорость фильтрации, зависящая только от r в силу предположенной осевой симметрии. Жидкость считается несжимаемой, движение установившимся. Мы считаем движение напорным, т. е. не образующим свободной поверхности. При этих условиях расход Q через цилиндр любого радиуса r должен быть постоянным. Следовательно, скорость v будет обратно пропорциональной расстоянию. Принимая во внимание направление этой скорости к центру скважины, который мы помещаем в начале координат, и введя обозначение радиальной скорости

$$v_r = -v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{1.2}$$

получим:

$$v_r = -\frac{Q}{2\pi M r}. \tag{1.3}$$

Интегрируя это уравнение, найдем потенциал скорости или пропорциональный ему напор $h = -\frac{\varphi}{k}$:

$$h = -\frac{\varphi}{k} = \frac{Q}{2\pi k M} \ln r + C.$$

Для определения постоянной C нужно иметь некоторое условие. Мы будем предполагать, что известен напор H_2 на расстоянии R от центра скважины. Это дает:

$$H_2 = \frac{Q}{2\pi k M} \ln R + C.$$

Предположим еще, что нам известен напор H_1 на самой скважине, т. е. при $r = r_c$. Тогда получим:

$$H_1 = \frac{Q}{2\pi k M} \ln r_c + C.$$

Из последних двух уравнений можно исключить C, после чего получим уравнение для определения расхода скважины

$$Q = \frac{2\pi k M (H_2 - H_1)}{\ln \frac{R}{r_c}}. \tag{1.4}$$

Это основная формула, по которой рассчитывают дебит скважины. Для напора h получаем уравнение (M — глубина пласта)

$$h = \frac{Q}{2\pi k M} \ln \frac{r}{r_c} + H_1. \tag{1.5}$$

Заметим, что раньше вводилось представление о *радиусе влияния* скважины, как о том расстоянии, на которое распространяется влияние данной скважины (в случае безнапорного движения это понятие употребляется и теперь). Однако это понятие является неопределенным, так как зависимость напора h от радиуса-вектора r является логарифмической, и h возрастает до бесконечности при $r \to \infty$.

В. Н. Щелкачев и Г. В. Пыхачев [1] предложили вместо понятия области влияния другое понятие — области питания скважины. Это понятие имеет значение при рассмотрении нефтеносного пласта, который обычно бывает при так называемом *водонапорном режиме* окружен областью воды. Граница между областью грунта, насыщенного нефтью или водой, и областью воды (без грунта) называется *контуром питания*, который принимается за изобару, или, что то же, при горизонтальном движении — за линию равного напора.

Напомним, что при изучении притока нефти к совершенным скважинам, вместо напора h рассматривают давление p, связанное с напором равенством

$$p = \rho g h = -\frac{\rho g}{k}\varphi, \tag{1.6}$$

а вместо коэффициента фильтрации k — *проницаемость пласта* k_0, причем

$$k = \frac{k_0 g}{\nu}. \tag{1.7}$$

Полагая $p = p_c$, $r = r_c$ на контуре скважины, $r = R$ и $p = p_0$ на контуре питания (мы считаем здесь область питания кругом, концентричным с контуром скважины), получим формулу дебита скважины в виде

$$Q = \frac{2\pi k_0 M (p_0 - p_c)}{\mu \ln \dfrac{R}{r_c}}, \tag{1.8}$$

где μ — вязкость нефти, M — мощность пласта.

Возвращаясь к формуле (1.4), заметим, что ею пользуются в гидрогеологии для вычисления коэффициента фильтрации по данным откачки из скважины. При этом нужно знать глубину проницаемого слоя M и значения напоров H_1 и H_2 в скважине и на расстоянии R от нее. Величина H_2 есть напор в одной из наблюдательных скважин, которые обычно расставляются вокруг действующей и сопоставление напоров в которых служит для проверки применимости формулы (1.4) к условиям данной скважины.

Иногда в результате наблюдений устанавливается, что в напорном пласте имеется постоянный поток грунтовых вод. Тогда в равенстве (1.4) к членам правой части добавляется линейная функция координат, соответствующая постоянному потоку. Если выбрать направление оси x параллельным направлению потока, обладающего скоростью $-U$, где $U > 0$, то получим (фиг. 262):

$$w = -Uz - \frac{Q}{2\pi}\ln z + C, \tag{1.9}$$

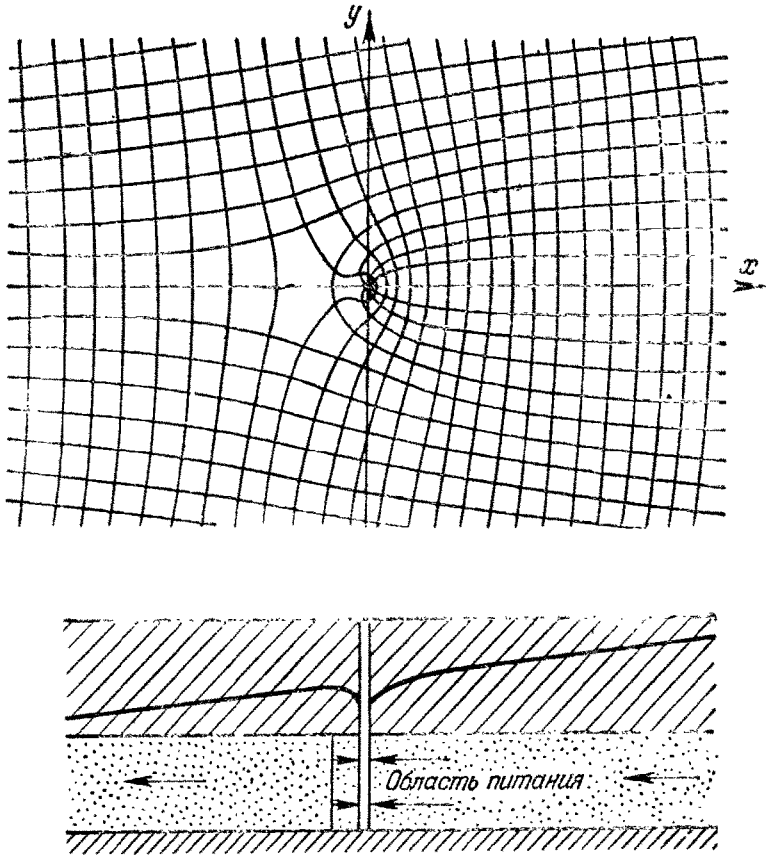
откуда для потенциала скорости и функции тока будем иметь:

$$\varphi = -Ux - \frac{Q}{2\pi}\ln r + C', \quad \psi = -Uy - \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + C''.$$

Линия тока $\psi = 0$ распадается на две: $y = 0$ и

$$y = -x \operatorname{tg} \frac{2\pi U y}{Q}.$$

Последняя имеет асимптоты $y = \pm \frac{Q}{2U}$ и пересекает ось ординат в точках $y = \pm \frac{Q}{4\pi U}$, а ось абсцисс в точке $x = -\frac{Q}{2\pi U}$, в которой по-



Фиг. 262.

ток разветвляется и скорость равна нулю. Область, ограниченная линией $\psi = 0$, называют *областью питания колодца* (фиг. 262).

§ 2. Скважина, эксцентрично расположенная в круговом контуре. Пусть контуром питания будет окружность радиуса R с центром в начале координат (фиг. 263). Мощность пласта принимаем равной единице. Скважина помещается в точке $M_1(X_1, Y_1)$. Возьмем произвольную точку M области и обозначим через Z комплексную координату этой точки, через Z_1 — аффикс точки M_1. Через q_1 обозначим дебит скважины с центром в точке M_1.

Тогда комплексный потенциал в точке Z

$$\omega(Z) = \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y) \tag{2.1}$$

можно получить, поместив сток интенсивности q_1 в точке M_1 и источник той же интенсивности в точке M_1' (с комплексной координатой $Z_2 = R^2/\overline{Z}_1$), представляющей инверсию точки M_1 в круге радиуса R (глава V, § 1):

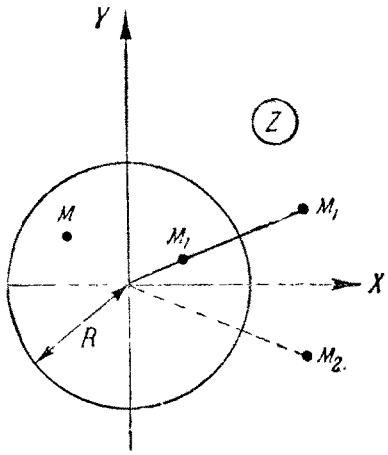
$$\omega(Z) = -\frac{q_1}{2\pi}\ln\frac{Z - Z_1}{Z - \frac{R^2}{\overline{Z}_1}} + C = -\frac{q_1}{2\pi}\left\{\ln(Z - Z_1) - \ln\frac{R^2 - Z\overline{Z}_1}{R}\right\} + C_1, \tag{2.2}$$

причем $\overline{Z}_1 = X_1 - iY_1$. Через q_1 обозначен расход стока, помещенного в точке M_1, которую мы рассматриваем как центр скважины, через C_1 — постоянная, пока произвольная. Функция $\varphi(X, Y)$ является вещественной частью выражения (2.2), а поэтому она может быть представлена в виде

$$\varphi(X, Y) = -\frac{q_1}{2\pi}\left\{\ln|Z - Z_1| - \ln\left|\frac{R^2 - Z\overline{Z}_1}{R}\right|\right\} + C_1'. \tag{2.3}$$

По формуле (1.6), принимая во внимание (1.7), для давления p будем иметь:

$$p(X, Y) = \frac{q_1\mu}{2\pi k_0}\ln\frac{R|Z - Z_1|}{|R^2 - Z\overline{Z}_1|} + C_2. \tag{2.4}$$



Фиг. 263.

Вблизи скважины линии равного давления очень близки к окружностям, поэтому за контур скважины мы можем принять одну из таких изобар, близкую к окружности радиуса δ (радиус скважины с центром в точке Z_1). Вдоль контура скважины давление по условию равно p_1. В частности, $p = p_1$ в точке $Z = Z_1 + \delta$, что дает согласно равенству (2.4):

$$p_1 = \frac{q_1\mu}{2\pi k_0}\ln\frac{\delta R}{R^2 - |Z_1|^2} + C_2. \tag{2.5}$$

На контуре питания давление пусть будет равно p_0. В частности, $p = p_0$ в точке (фиг. 263), для которой $Z = R$. Это дает равенство

$$p_0 = C_2. \tag{2.6}$$

Вычтем (2.5) из (2.6) и подставим

$$|Z_1|^2 = X_1^2 + Y_1^2 = R_1^2.$$

Получим:

$$p_0 - p_1 = \frac{q_1\mu}{2\pi k_0}\ln\frac{R^2 - R_1^2}{\delta R}.$$

Отсюда для дебита скважины получаем:

$$q_1 = \frac{2\pi k_0 (p_0 - p_1)}{\mu [\ln (R^2 - R_1^2) - \ln (R\delta)]}.$$

Если скважина центральная, т. е. находится в центре окружности, то ее дебит согласно (1.8) равен

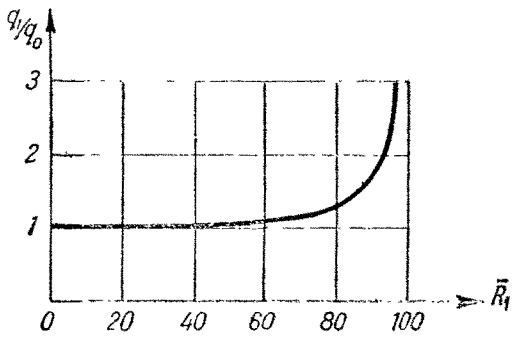
$$q_0 = \frac{2\pi k_0 (p_0 - p_1)}{\mu (\ln R - \ln \delta)}.$$

Составим отношение

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{\ln \bar{R}}{\ln\left(\bar{R} - \frac{\bar{R}_1^2}{\bar{R}}\right)},$$

где

$$\bar{R} = \frac{R}{\delta}, \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{\delta}.$$

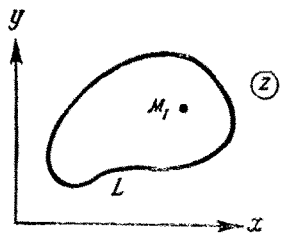


Фиг. 264.

На фиг. 264 представлена зависимость величины q_1/q_0 от $\bar{R}_1$ при заданном $\bar{R} = 100$. Мы видим, что дебит скважины резко возрастает при ее приближении к контуру питания.

§ 3. Случай произвольного контура [2]. Совершим конформное отображение внутренности круга $|Z| = R$ на внутренность некоторой области S плоскости z (фиг. 265) с помощью преобразования

$$Z = F(z). \tag{3.1}$$



Фиг. 265.

Пусть при этом контур круга, представленного на фиг. 263, перейдет в контур L, изображенный на фиг. 265, а точка M_1 перейдет в точку, обозначенную той же буквой на фиг. 265. Обозначим комплексную координату этой точки через z_1. Тогда распределение давления в новой области будет выражаться формулой, которую получим из (2.4) заменой Z с помощью (3.1):

$$p(x, y) = \frac{q_1 \mu}{2\pi k_0} \ln \frac{R\,|F(z) - F(z_1)|}{|R^2 - F(z)\overline{F(z_1)}|} + C. \tag{3.2}$$

Условие, что в точке $z = z_1 + \delta$ давление $p = p_1$, если пренебречь малыми высшего порядка для δ, дает [1]):

$$p_1 = \frac{q_1 \mu}{2\pi k_0} \ln \frac{\delta\,|F'(z_1)|\,R}{R^2 - |F(z_1)|^2} + C. \tag{3.3}$$

[1]) В самом деле,

$$F(z_1 + \delta) - F(z_1) = \delta F'(z_1) + \frac{\delta^2}{2} F''(z_1) + \ldots \approx \delta F'(z_1),$$

$$F(z_1 + \delta)\overline{F(z_1)} = |F(z_1)|^2 + \delta F'(z_1)\overline{F(z_1)} + \ldots \approx |F(z_1)|^2.$$

Так как вдоль окружности фиг. 263 имеем $|z| = R$, то уравнение контура L согласно равенству (3.1) будет:

$$|F(z)| = R.$$

Возьмем произвольную точку z_0 контура L. В этой точке, как и вдоль всего контура L, пусть давление равно p_0. Из (3.2) имеем тогда:

$$p_0 = \frac{q_1\mu}{2\pi k_0} \ln \frac{R\,|F(z_0) - F(z_1)|}{|R^2 - F(z_0)\,\overline{F(z_1)}|} + C. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание, что $|F(z_0)| = R$, найдем:

$$\frac{R\,|F(z_0) - F(z_1)|}{|R^2 - F(z_0)\,\overline{F(z_1)}|} = 1, \quad C = p_0. \tag{3.5}$$

Вычтя из (3.4) почленно уравнение (3.3), получим:

$$p_0 - p_1 = \frac{q_1\mu}{2\pi k_0} \ln \frac{R^2 - |F(z_1)|^2}{R\delta\,|F'(z_1)|}. \tag{3.6}$$

Отсюда находим общую формулу для дебита скважины внутри контура, получаемого из кругового контура путем конформного отображения (3.1):

$$q_1 = \frac{2\pi k_0 (p_0 - p_1)}{\mu\,[\ln (R^2 - |F(z_1)|^2) - \ln (R\delta\,|F'(z_1)|)]}. \tag{3.7}$$

Если принять $R = 1$, то получим:

$$q_1 = \frac{2\pi k_0 (p_0 - p_1)}{\mu\,[\ln (1 - |F(z_1)|^2) - \ln (\delta\,|F'(z_1)|)]}. \tag{3.8}$$

В качестве примера вытянутой области естественно взять эллипс. Функция, дающая конформное отображение внутренности эллипса на внутренность единичного круга, имеет вид

$$Z = F(z) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c}\right), \tag{3.9}$$

где k — модуль эллиптической функции, определяемый с помощью равенства

$$\frac{K'}{K} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arth} \frac{b}{a} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} \tag{3.10}$$

$$\left(K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},\ K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},\ k'^2 = 1 - k^2\right).$$

Здесь $c^2 = a^2 - b^2$, a и b — полуоси эллипса. Составим производную

$$F'(z) = \frac{2K}{\pi} \frac{\sqrt{k}\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{c^2 - z^2}}, \quad u = \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z}{c}. \tag{3.11}$$

С помощью формулы (3.9) найдем для дебита скважины, находящейся в точке z_1, выражение

$$q_1 = \frac{2\pi k_0 (p_0 - p_1)}{\mu \{ \ln [(1 - k \operatorname{sn}^2 u_1) \sqrt{c^2 - z_1^2}] - \ln [\alpha | \operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1 |] \}}.$$

Здесь

$$u_1 = \frac{2K}{\pi} \arcsin \frac{z_1}{c}, \quad \alpha = \frac{2K\delta \sqrt{k}}{\pi},$$

где δ, как всегда, есть радиус скважины.

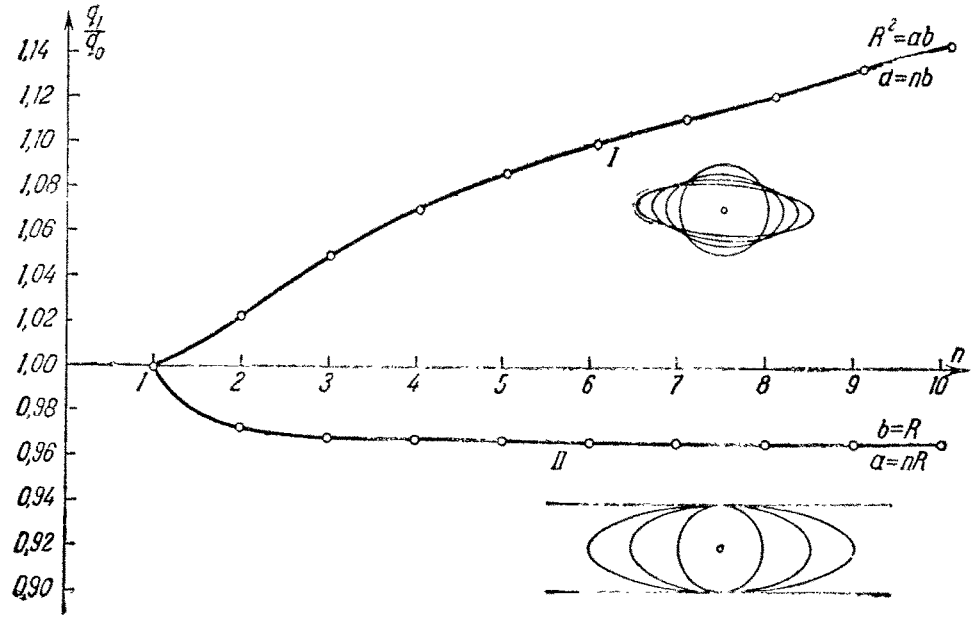
Если скважина находится в центре эллипса, то

$$q_1 = \frac{2\pi k_0 (p_0 - p_1)}{\mu [\ln (\pi c) - \ln (2\delta K \sqrt{k})]}.$$

С помощью этой формулы были вычислены отношения дебита скважины в эллиптической области к дебиту q_0 скважины в круговой области радиуса R, центр которой совпадает с центром эллипса:

$$\frac{q_1}{q_0} = \ln \frac{R}{\delta} : \ln \frac{\pi c}{2\delta K \sqrt{k}}.$$

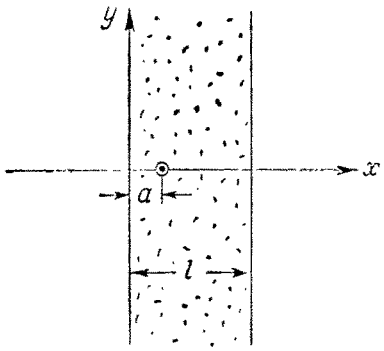
Если брать эллипсы, равновеликие кругу, то $R^2 = ab$. Положим $a = nb$ и дадим n ряд целых значений $n = 1, 2, 3, \ldots$ По вычисле-



Фиг. 266.

ниям такого рода построена кривая *I* фиг. 266, которая показывает, что дебит возрастает с увеличением вытянутости эллипса при сохранении его площади, однако возрастает очень медленно.

Если примем $b=R$, т. е. будем сохранять постоянной малую полуось, и положим $a=nR$, где n — целое, то получим кривую II фиг. 266. Из нее видно, что при вытягивании области в одном направлении дебит центральной скважины уменьшается, но очень медленно. В пределе при $n\to\infty$, когда вместо эллиптической области получаем бесконечную полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми, дебит ее составляет 0,966 от дебита круговой области.



Фиг. 267.

Произведенные вычисления подтверждают общее положение о том, что изменение формы области оказывает малое влияние на величину дебита скважины.

Рассмотрим скважину в бесконечной полосе (между двумя каналами). В этом случае (фиг. 267) комплексный потенциал имеет вид

$$f(z)=-\frac{q_1}{2\pi}\left\{\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z-a)-\ln\sin\frac{\pi}{2l}(z+a)\right\}+C.$$

Для давления имеем выражение

$$p=\frac{q_1\mu}{2\pi k_0}\left\{\ln\left|\sin\frac{\pi}{2l}(z-a)\right|-\ln\left|\sin\frac{\pi}{2l}(z+a)\right|\right\}+C.$$

Около скважины, в точке $z=a+\delta$, $p=p_1$, а потому

$$p_1\approx\frac{q_1\mu}{2\pi k_0}\left\{\ln(\pi\delta)-\ln\left(2l\sin\frac{\pi a}{l}\right)\right\}+C.$$

В точке $z=l$ получаем $p_0=C$ (мы считаем $p=p_0$ при $x=0$ и $x=l$). Отсюда дебит скважины

$$q_1=\frac{2\pi k_0(p_0-p_1)}{\mu\ln\left(\frac{2l}{\pi\delta}\sin\frac{\pi a}{l}\right)}.$$

§ 4. Об интерференции скважин. С увеличением числа совершенных скважин, пробуриваемых в пласте, суммарный дебит скважин увеличивается. Однако это увеличение не пропорционально числу скважин, а именно, суммарный дебит n одинаковых скважин меньше чем n-кратный дебит одной скважины (предполагается, что все скважины находятся в одинаковых условиях). Это явление называют интерференцией скважин: скважины оказывают влияние друг на друга, уменьшая дебит каждой из скважин. При этом, чем большее число скважин будет находиться на данной площади, тем меньше будет дебит каждой скважины. При некотором значении $n=N$ дальнейшее увеличение числа скважин уже станет невыгодным, так как затраты на сква-

жину не окупят того малого приращения суммарного дебита, которое получится за счет $(N+1)$-й скважины. Вопросы о наивыгоднейшем числе скважин имеют важное значение в теории фильтрации нефти [3]. Здесь мы ограничимся рассмотрением простейших случаев.

Две скважины. Поместив в точках $z=\pm a$ по стоку одинаковой интенсивности Q, получим схему двух скважин в пласте. Комплексный потенциал такого течения будет:

$$w=\varphi+i\psi=-\frac{Q}{2\pi}\ln[(z-a)(z+a)]+C, \tag{4.1}$$

где Q — дебит каждой из скважин. Потенциал скорости в плоском горизонтальном движении связан с давлением равенством

$$\varphi=-\frac{kp}{\rho g}=-\frac{k_0}{\mu}p \tag{4.2}$$

(глава I, § 7). Поэтому, отделяя в (4.1) действительную часть и используя (4.2), можем написать:

$$p=\frac{\mu Q}{2\pi k_0}\ln|(z-a)(z+a)|+C_1. \tag{4.3}$$

Для определения постоянной C_1 и дебита Q нам нужно два условия.

Считая, что радиус скважины δ мал по сравнению с расстоянием $2a$ между скважинами, примем за контур поперечного сечения скважины изобару, проходящую через точку

$$z=a+\delta.$$

При указанных условиях эта изобара близка к окружности радиуса δ с центром в точке a.

На контуре скважины пусть давление равно p_c. Тогда формула (4.3) даст после пренебрежения величиной δ^2

$$p_c=\frac{\mu Q}{2\pi k_0}\ln(2a\delta)+C_1. \tag{4.4}$$

Предположим теперь, что нам известна изобара

$$r=R.$$

В действительности в течении с двумя скважинами не будет изобар в форме окружностей, так как изобары представляют семейство лемнискат. Однако на достаточно большом расстоянии от начала эти лемнискаты становятся близкими к окружностям. Считая R достаточно большим по сравнению с a, предположим, что при $r=R$ давление равно $p_к$ (контурному давлению, как говорят в теории фильтрации нефти). Подставляя в (4.3) $r=R$, $p=p_к$, получим:

$$p_к=\frac{\mu Q}{2\pi k_0}\ln(R^2-a^2)+C_1. \tag{4.5}$$

Вычитая (4.4) из (4.5), получим:

$$p_к - p_с = \frac{\mu Q}{2\pi k_0} \ln \frac{R^2 - a^2}{2a\delta}.$$

Отсюда найдем расход каждой из скважин:

$$Q = \frac{2\pi k_0}{\mu} \frac{p_к - p_с}{\ln \dfrac{R^2 - a^2}{2a\delta}}. \tag{4.6}$$

Сравним этот расход с расходом одиночной скважины радиуса δ, центр которой находится в начале координат, для которой давления при $r = \delta$ и $r = R$ соответственно равны $p_с$ и $p_к$. Как мы видели [см. (1.8)], этот дебит, который мы обозначим через Q_1, равен

$$Q_1 = \frac{2\pi k_0}{\mu} \frac{p_к - p_с}{\ln \dfrac{R}{\delta}}. \tag{4.7}$$

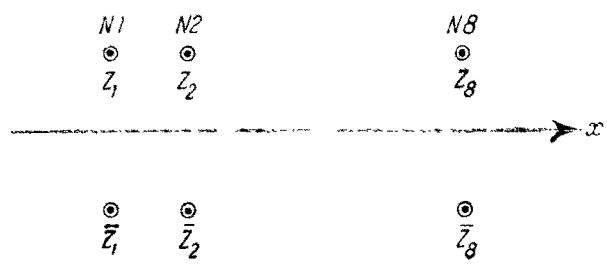
Отношение Q/Q_1 равно

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{\ln \dfrac{R}{\delta}}{\ln \dfrac{R^2 - a^2}{2a\delta}} = \frac{\ln \dfrac{R}{\delta}}{\ln \dfrac{R}{\delta} + \ln\left(\dfrac{R}{2a} - \dfrac{a}{2R}\right)}.$$

Так как мы считаем $\dfrac{R}{2a}$ достаточно большим (иначе окружность $r = R$ в случае двух скважин нельзя будет принять за изобару), то второе слагаемое знаменателя положительно, и

$$\frac{Q}{Q_1} < 1.$$

Таким образом, наше утверждение для случая двух скважин справедливо.



Фиг. 268.

Чтобы охарактеризовать зависимость суммарного дебита скважин от их числа при числе скважин, большем двух, рассмотрим следующий пример [3].

Предположим, что вначале пласт эксплоатируется одной скважиной № 1, а затем вводятся последовательно скважины № 2, 3 и т. д. до скважины № 8 включительно (фиг. 268). Расстояние всех скважин от прямолинейного контура питания пусть будет L, расстояния между скважинами обозначим через $2h$. Взяты числовые значения: радиус скважины $\delta = 10$ *см*, расстояние между скважинами

$2h = 100$ *м*, $L = 10$ *км*. Контуром питания может быть берег реки или канала.

Для комплексного потенциала получаем, помещая источники в точках, сопряженных с центрами скважин:

$$\omega = -\frac{Q}{2\pi}\sum_{s=1}^{n} \ln \frac{\frac{\pi}{h}(z - z_s)}{\frac{\pi}{h}(z - \bar{z}_s)} \qquad (n = 1, 2, \ldots, 8),$$

где z_s — координата s-й скважины, а Q — дебит каждой из скважин. Обозначая через Q_0 дебит одиночной скважины (№ 1), получим, что величина

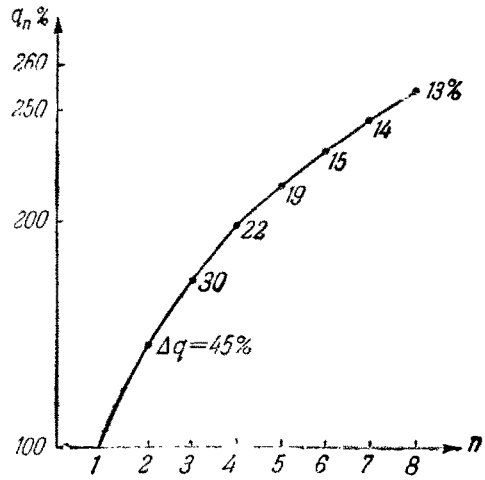
$$q_n = \frac{nQ}{Q_0} \cdot 100\%$$

представляет суммарный дебит n скважин, выраженный в процентах от дебита одной скважины.

Таблица 13

Зависимость суммарного дебита от числа скважин и значения в процентах среднего приращения суммарного дебита на каждую скважину

n	q_n	$\frac{q_n - q_1}{n-1}$	Δq_n
1	100	0	
			45
2	145	45	
			30
3	175	37,5	
			22
4	197	32	
			18,5
5	215,5	29	
			15,5
6	231	26	
			14
7	245	24	
			13
8	258	22,5	



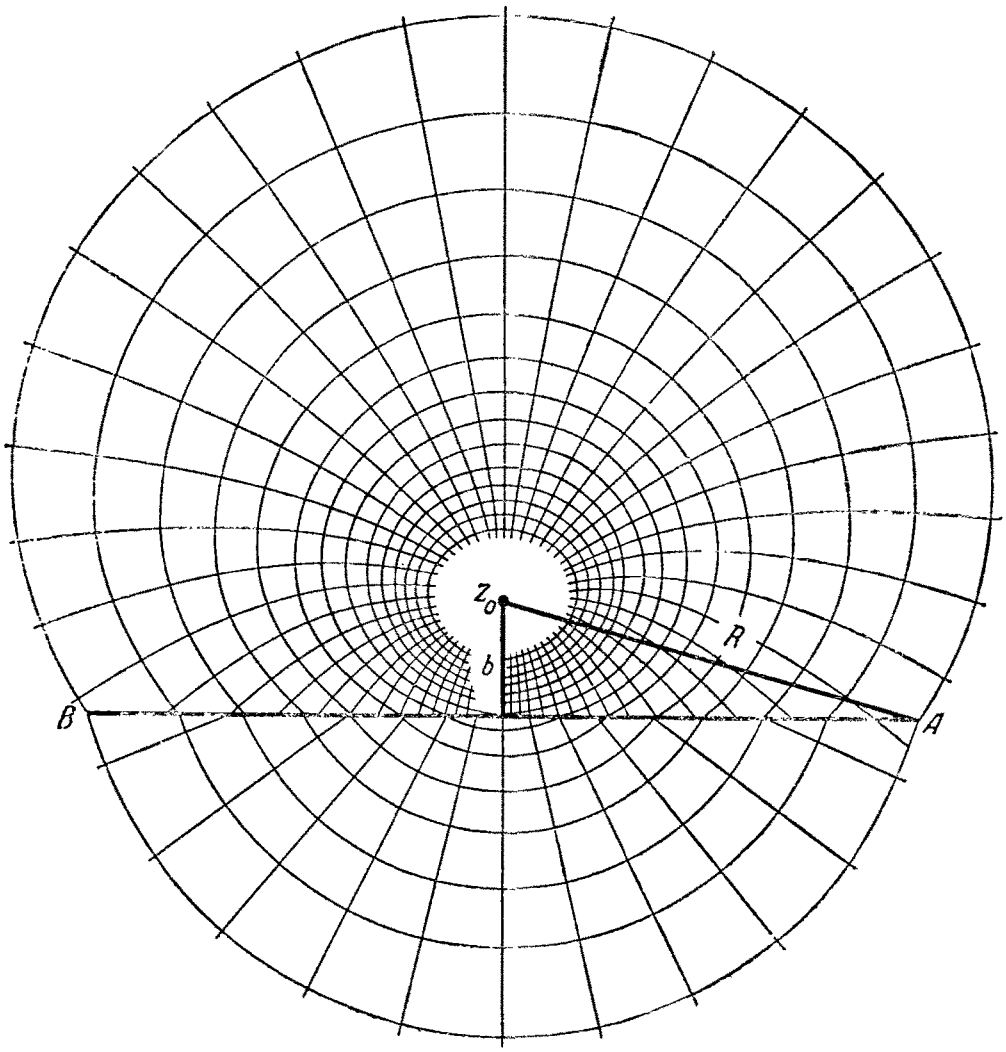
Фиг. 269.

В таблице 13 приведены вычисленные В. Н. Щелкачевым [8] значения величины q_n в зависимости от числа скважин n, а также значения $\frac{q_n - q_1}{n-1}$ — среднего приращения суммарного дебита на каждую скважину в процентах. На фиг. 269 дан график зависимости суммарного дебита в процентах от числа скважин. Числа, поставленные у отдельных точек, суть приращения Δq_n:

$$\Delta q_n = q_n - q_{n-1}.$$

Мы видим, что с увеличением числа скважин приращение суммарного расхода уменьшается, поэтому густая сетка скважин может оказаться невыгодной.

§ 5. Приток к совершенным скважинам в неоднородной среде [4]. Вторую задачу главы VIII, § 4 можно интерпретировать иначе, заменив точечный вихрь точечным источником. Для этого до-



Фиг. 270.

статочно поменять роли φ и ψ. А именно, допустим, что напорный пласт, в котором происходит движение жидкости к совершенной скважине, состоит из двух частей: полуплоскости, в которой грунт имеет коэффициент фильтрации k_1, и другой полуплоскости с коэффициентом фильтрации k_2 (фиг. 270).

Тогда, обозначая через Q дебит скважины, можно написать для первой и второй областей, если скважина находится в первой области

в точке z_0:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1(z) &= -\frac{Q}{2\pi}\left[\ln(z-z_0)+\lambda\ln(z-\bar{z}_0)\right]+C_1,\\ \omega_2(z) &= -\frac{Q}{2\pi}(1-\lambda)\ln(z-z_0)+C_2\quad\left(\lambda=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right).\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

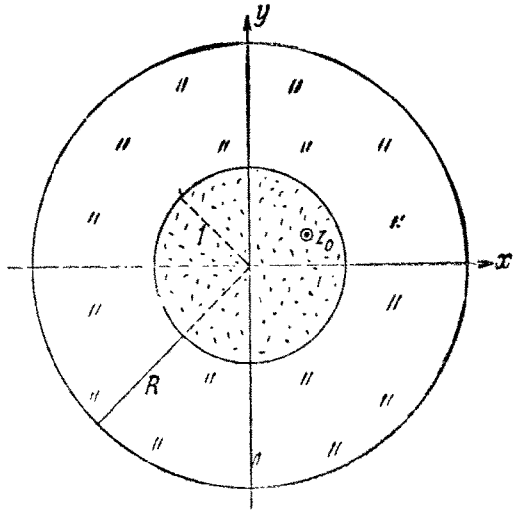
Для дебита скважины получается формула

$$Q=\frac{2\pi k_1(\varphi_к-\varphi_c)}{\ln\dfrac{R}{\delta}+\lambda\ln\dfrac{R}{2b}},\tag{5.2}$$

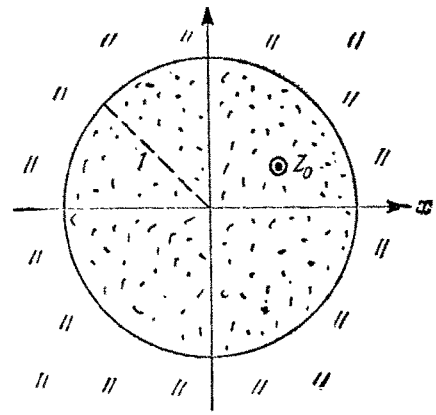
где δ — радиус скважины, b — расстояние скважины от оси абсцисс, R — расстояние от скважины до точки пересечения A с линией раздела AB той изобары, на которой давление равно $p_к=-\frac{\rho g}{k_1}\varphi_к$.

Формулы (5.1) строятся так, чтобы на оси абсцисс удовлетворялись условия (3.2) и (3.3) главы II: $\frac{\varphi_1}{k_1}=\frac{\varphi_2}{k_2}$, $\psi_1=\psi_2$.

Если скважина находится в области, ограниченной окружностью радиуса $r=1$, где грунт имеет коэффициент фильтрации k_1, а в кольцевой области, между окружностями радиусов 1 и R, находится грунт с коэффициентом фильтрации k_2, причем внешняя



Фиг. 271.



Фиг. 272.

окружность является изобарой, то имеем такие формулы для скоростей (фиг. 271):

$$\left.\begin{aligned}u_1-iv_1 &= -\frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{\lambda}{z-z_0}+\frac{\lambda}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}}+(1-\lambda^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\bar{z}_0^{n+1}}{R^{2n+2}-\lambda}\right\},\\ u_2-iv_2 &= -\frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{1-\lambda}{z-z_0}+\frac{\lambda}{z}+(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\bar{z}_0^{n+1}}{R^{2n+2}-\lambda}+\right.\\ &\qquad\left.+\lambda(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_0^n}{z^{n+1}(R^{2n}-\lambda)}\right\}.\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

Когда внешняя область бесконечна, т. е. $R=\infty$, получаем (фиг. 272):

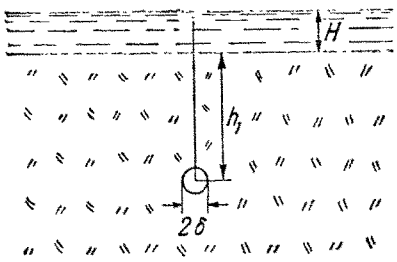
$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= -\frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{1}{z-z_0}+\frac{\lambda}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}}\right\},\\ u_2 - iv_2 &= -\frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{1-\lambda}{z-z_0}+\frac{\lambda}{z}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Формулы (5.3) можно еще представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= -\frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{1}{z-z_0}+\frac{\lambda}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{z-\frac{R^{2n}}{\bar{z}_0}}\right\},\\ u_2 - iv_2 &= -\frac{Q(1-\lambda)}{2\pi}\left\{\frac{1}{z-z_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{z-\frac{z_0}{R^{2n}}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{z-\frac{R^{2n}}{\bar{z}_0}}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Б ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ДРЕНЫ

§ 6. Применение метода источников к задачам о горизонтальном дренаже. Поверхность земли может оказаться заболоченной по разным причинам: вследствие выхода грунтовых вод на данный участок, под влиянием атмосферных осадков, при поливах, предназначенных для промывки засоленных почв, и т. д.



Фиг. 273.

Рассмотрим тот случай [5], когда над поверхностью земли находится слой воды высоты H. На некоторой глубине от поверхности земли заложена горизонтальная труба, собирающая воду (фиг. 273, 274) и отводящая ее в какой-нибудь коллектор.

Будем считать, что примерно в центре трубы находится сток, расход которого на единицу длины трубы равен Q. Координаты центра стока пусть будут $(0, 0, h_1)$. В точке $(0, 0, -h_1)$ поместим источник такой же интенсивности, как сток. Тогда для комплексного потенциала скорости будем иметь:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln\left|\frac{z+h_1 i}{z-h_1 i}\right| - kH = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{x^2+(y+h_1)^2}}{\sqrt{x^2+(y-h_1)^2}} - kH. \tag{6.1}$$

Постоянное слагаемое выбрано равным $-kH$ для того, чтобы удовлетворить условию $\varphi = -kH$ на оси x.

Предположим, что на контуре дренажной трубы напор равен $h_{др}$. Возьмем в качестве контура дрены линию равного потенциала, про-

ходящую через точку (δ, h_1), где δ — малое по сравнению с h_1 число, так что рассматриваемая эквипотенциаль близка к окружности.

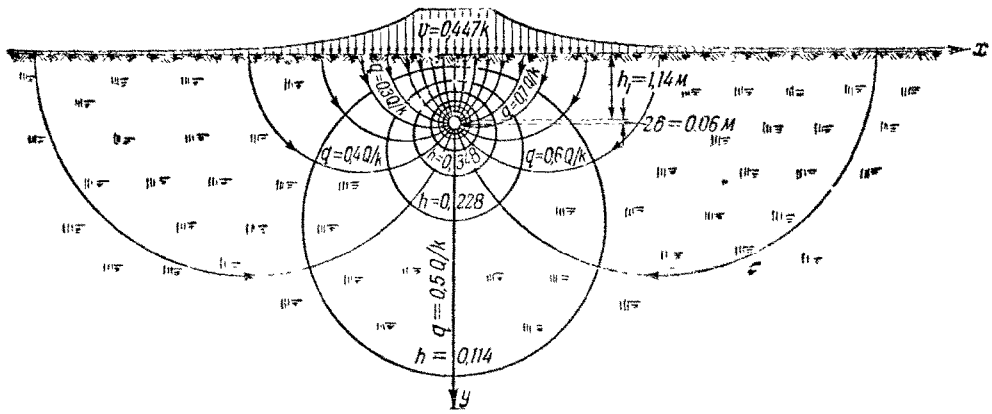
Тогда будем иметь, полагая $x = \delta$, $y = h_1$:

$$\varphi = -kh_{\text{др}} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\delta^2 + 4h_1^2}}{\delta} - kH \approx \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{2h_1}{\delta} - kH,$$

откуда найдем выражение расхода:

$$Q = \frac{2\pi k (H - h_{\text{др}})}{\ln \frac{2h_1}{\delta}}. \tag{6.2}$$

На фиг. 274 представлена сетка движения, построенная В. В. Ведерниковым [5] для одного частного случая. Он решал эту задачу,



Фиг. 274.

так же как и следующие в этом пункте, методом конформного отображения области движения и области комплексного потенциала на полуплоскость. Применяемые им обозначения отличаются от наших: он обозначает через h_1 расстояние от поверхности земли до верхней точки дренажной трубы, через 2δ — диаметр дрены.

В случае бесчисленного множества параллельных дренажных труб, находящихся на расстоянии l друг от друга (фиг. 275), будем иметь:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{l} (z + h_1 i)}{\sin \frac{\pi}{l} (z - h_1 i)} \right| - kH.$$

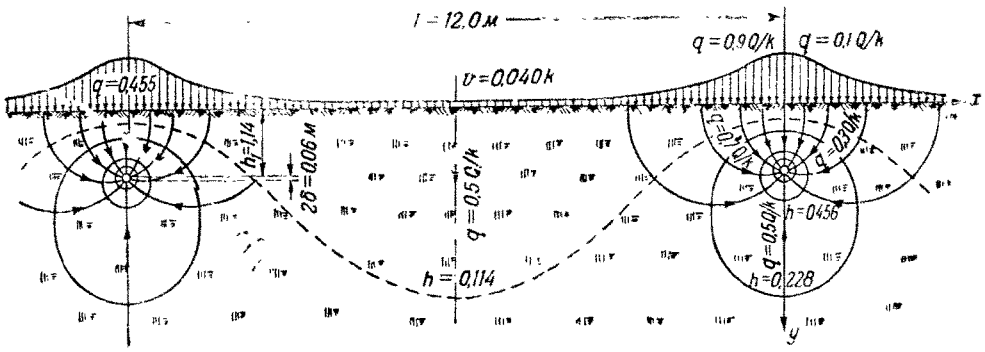
Полагая $x = 0$, $y = h_1 + \delta$, $\varphi = -kh_{\text{др}}$, получим:

$$-kh_{\text{др}} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi h_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi\delta}{l}} - kH,$$

откуда найдем выражение расхода:

$$Q = \frac{2\pi k (H - h_{др})}{\ln \operatorname{sh}^2 \frac{2\pi h_1}{l} - \ln \operatorname{sh} \frac{\pi\delta}{l}}. \qquad (6.3)$$

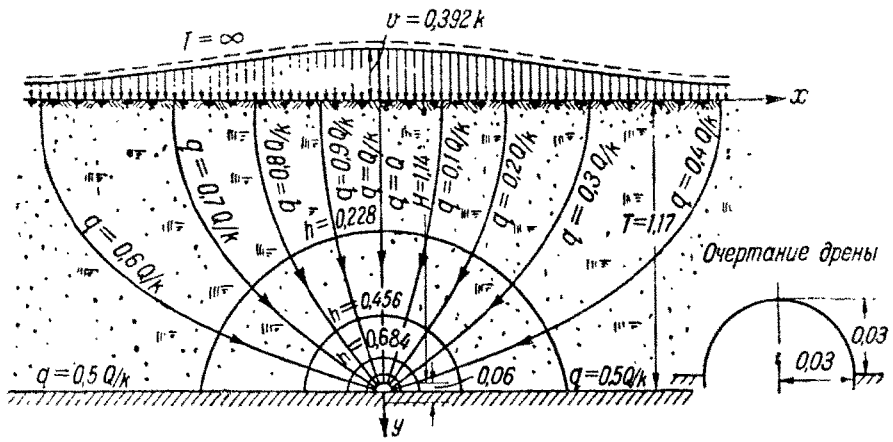
Заметим, что мы считаем $\frac{\delta}{l}$ настолько малым, что вместо $\operatorname{sh} \frac{\pi\delta}{l}$



Фиг. 275.

можно взять $\frac{\pi\delta}{l}$. Этим объясняется различие во внешнем виде формул, даваемых в подобных задачах различными авторами.

Аналогичным образом рассматривается случай дрены на водоупоре (фиг. 276). Здесь имеем, обозначая через T глубину проницаемого



Фиг. 276.

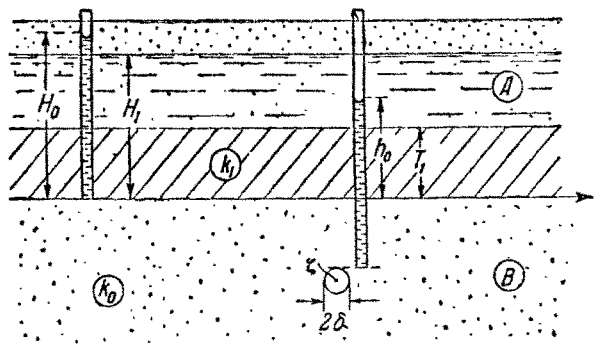
слоя и располагая поочередно источники и стоки на расстояниях $\pm 2nT$ от основного стока:

$$\varphi = -\frac{q}{\pi} \ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi(z - iT)}{4T} \right| - kH.$$

При этом q — расход единицы длины дрены, равный половине расхода стока, помещенного в точке $(0, T)$:

$$q = \frac{k\pi (H - h_{др})}{\ln \operatorname{th} \frac{\pi\delta}{2T}} \approx \frac{k\pi (H - h_{др})}{\ln \frac{\pi\delta}{2T}}.$$

§ 7. Подземный водозабор, питающийся водами соседнего водоносного пласта [6]. Предположим, что напорный водоносный пласт B (фиг. 277), простирающийся вниз до бесконечности, имеет естественный напор H_0 и коэффициент фильтрации k_0. Сверху он ограничен слабо проницаемым слоем пород мощности T_1 с коэффициентом фильтрации k_1. Над этим слоем залегает артезианский пласт с естественным напором H_1. В точке ζ нижнего пласта помещен точечный сток. Эквипотенциаль его, близкую к окружности, можно будет принять за контур дрены.



Фиг. 277.

Считая H_1 постоянным, примем, что вдоль оси x вертикальная составляющая скорости определяется по формуле Дарси, которую в данном случае можно написать так (см. ниже § 8):

$$v_y = -k_1 \frac{H_1 - h}{T_1} = -\frac{k_1}{T_1}\left(H_1 + \frac{\varphi}{k_0}\right). \tag{7.1}$$

Составим функцию

$$W = \frac{d\omega}{dz} - \frac{ik_1}{T_1}\left(H_1 + \frac{\omega}{k_0}\right). \tag{7.2}$$

Если найдем $W = F(z)$, то после интегрирования получим для ω:

$$\omega = e^{-az} \int e^{az} [F(z) - b]\, dz + Ce^{-az}, \tag{7.3}$$

где

$$a = -\frac{ik_1}{k_0 T_1}, \quad b = -\frac{ik_1 H_1}{T_1}.$$

Нетрудно видеть, что в случае одного стока, помещенного в точке $z = \zeta$, имеем (D — постоянная):

$$F(z) = -\frac{Q}{2\pi}\left(\frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{z - \bar{\zeta}}\right) + D. \tag{7.4}$$

В случае бесконечного ряда стоков, отстоящих от точки $z = \zeta$ на расстояниях $2nl$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$F(z) = -\frac{Q}{2\pi}\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi (z - \zeta)}{2l} + \operatorname{ctg} \frac{\pi (z - \bar{\zeta})}{2l}\right) + D.$$

В самом деле, так как при $z = x$ имеем в обоих случаях

$$\operatorname{Im} F(z) = 0,$$

то

$$\operatorname{Im} W = -v_y - \frac{k_1}{T_1}\left(H_1 + \frac{\varphi}{k_0}\right) = 0,$$

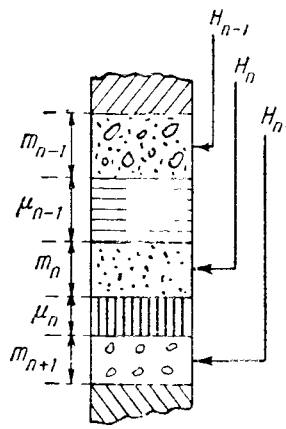
поэтому условие (7.1) оказывается выполненным. Обычно принятые условия на бесконечности также выполняются.

Постоянные C и D определяются из условий $\varphi = -k_0 H_0$ при $x = \infty$, $\psi = Q$ при $x > 0$, $\psi = 0$ при $x < 0$. Для определения расхода дрены Q служит условие $h = h_0$ в верхней точке дрены (при $z = \zeta + \delta i$, где δ — радиус дрены); ось y направлена вверх.

В. ДВИЖЕНИЕ В ПЛАСТАХ, ГРАНИЧАЩИХ СО СЛАБО ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛАСТАМИ

§ 8. Вывод уравнений [7]. В главе III мы рассматривали водоносный пласт, ограниченный двумя непроницаемыми горизонтальными плоскостями. Напорное движение грунтовых вод к *совершенным*, т. е. проходящим через весь пласт, колодцам мы рассматривали как плоское движение, а скважины интерпретировали с помощью источников и стоков.

Однако в действительности абсолютно непроницаемых «водоупорных» пластов нет. Обычно хорошо проницаемые пласты перемежаются со слабо проницаемыми. Отношение коэффициентов фильтрации двух соседних слоев может быть порядка 10^{-5} —10^{-10}, и все же слабо проницаемый грунт может оказывать влияние на фильтрацию, если она происходит на большой площади.



Фиг. 278.

Предположим, что мы имеем горизонтальные слои хорошо проницаемых грунтов, перемежающиеся со слабо проницаемыми грунтами (фиг. 278). Пусть n-й водопроницаемый слой имеет мощность (глубину) m_n и коэффициент фильтрации k_n. Нижележащий слой плохо проницаемого грунта пусть имеет глубину μ_n и коэффициент фильтрации λ_n. Вышележащий плохо проницаемый слой пусть имеет глубину μ_{n-1}, коэффициент фильтрации λ_{n-1}. Мы считаем величины λ_n/k_n и λ_{n-1}/k_n малыми. Тогда какая-нибудь линия тока, переходящая из области m_n в соседнюю область, будет преломляться, причем, как мы видели в § 3 главы II, если линия тока образует с нормалью к границе двух грунтов углы α и β, то

$$\operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\alpha = \lambda_n : k_n. \tag{8.1}$$

Для любого значения α, отличного от $\frac{\pi}{2}$, получаем вследствие предположенной малости отношения $\lambda_n : k_n$, что угол β будет малым, и, следовательно, после преломления линии тока в слабо проницаемом грунте будут близки к вертикальным прямым. Этим замечанием мы воспользуемся ниже.

Обозначим через u, v, w проекции на оси x, y, z скорости фильтрации в какой-нибудь точке $M(x, y, z)$ хорошо проницаемого пласта.

Считая жидкость несжимаемой, т. е. плотность ее постоянной, будем иметь уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8.2}$$

Мы будем рассматривать задачу *гидравлически* (см. главу X), т. е. будем считать, что горизонтальные скорости мало меняются с высотой, и введем в рассмотрение средние по высоте значения этих скоростей U и V, полагая

$$U(x, y) = \frac{1}{m_n} \int_0^{m_n} u(x, y, z)\, dz,$$

$$V(x, y) = \frac{1}{m_n} \int_0^{m_n} v(x, y, z)\, dz.$$

Проинтегрируем уравнение (8.2) по z (как это делают иногда в динамической метеорологии, принимая за m_n толщину слоя атмосферы). Примем во внимание равенства

$$\int_0^{m_n} \frac{\partial u}{\partial x}\, dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{m_n} u\, dz = m_n \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\int_0^{m_n} \frac{\partial v}{\partial y}\, dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{m_n} v\, dz = m_n \frac{\partial V}{\partial y},$$

а также то, что интегрирование третьего члена уравнения (8.2) дает:

$$\int_0^{m_n} \frac{\partial w}{\partial z}\, dz = w_2 - w_1,$$

где w_1 — значение вертикальной скорости на нижней, w_2 — на верхней границе пласта.

Теперь уравнение неразрывности примет вид

$$m_n\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+w_2-w_1=0. \tag{8.3}$$

Пусть потенциал скорости неосредненного движения будет $\varphi(x, y, z)$, так что

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

при этом, направляя ось z по вертикали вверх, будем иметь:

$$\varphi=-khh(x, y, z)=-k\left(\frac{p}{\rho g}+z\right).$$

Иначе говоря, мы можем написать:

$$u=-k\frac{\partial h}{\partial x},\quad v=-k\frac{\partial h}{\partial y},\quad w=-k\frac{\partial h}{\partial z}.$$

Применив осреднение к горизонтальным составляющим скорости u, v, мы тем самым осредним и напорную функцию $h(x, y, z)$. Будем обозначать осредненное значение этой функции через $H(x, y)$:

$$H(x, y)=\frac{1}{m_n}\int_0^{m_n}h(x, y, z)\,dz.$$

Тогда можно написать:

$$U=-k\frac{\partial H}{\partial x},\quad V=-k\frac{\partial H}{\partial y};$$

применяя эти равенства к n-му проницаемому пласту, получим:

$$U_n=-k_n\frac{\partial H_n}{\partial x},\quad V_n=-k_n\frac{\partial H_n}{\partial y}. \tag{8.4}$$

Теперь нам нужно найти выражения вертикальных скоростей w_1 и w_2 на кровле и подошве n-го пласта. Согласно сделанному выше замечанию можно считать, что фильтрация в слабо проницаемом пласте происходит по вертикали. Обозначая напорные функции для $(n+1)$-го и $(n-1)$-го проницаемых пластов соответственно через H_{n+1} и H_{n-1}, по закону Дарси будем иметь (так как скорость фильтрации при наших предположениях будет пропорциональна разностям напоров на границах плохо проницаемого пласта и обратно пропорциональна толщине пласта):

$$w_2=\lambda_{n-1}\frac{H_n-H_{n-1}}{\mu_{n-1}},\quad w_1=\lambda_n\frac{H_{n+1}-H_n}{\mu_n}. \tag{8.5}$$

При $H_{n+1}>H_n$ получаем $w_1>0$ и наоборот.

Подставляя выражения (8.4) и (8.5) в уравнение (8.3), получим:

$$-m_nk_n\left(\frac{\partial^2H_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H_n}{\partial y^2}\right)+\lambda_{n-1}\frac{H_n-H_{n-1}}{\mu_{n-1}}-\lambda_n\frac{H_{n+1}-H_n}{\mu_n}=0,$$

или

$$m_n k_n \Delta H_n - \frac{\lambda_n}{\mu_n}(H_n - H_{n+1}) - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}(H_n - H_{n-1}) = 0. \quad (8.6)$$

Введем следующие обозначения:

$$\zeta_n = \frac{\frac{\lambda_n}{\mu_n} + \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}}{m_n k_n}, \quad (8.7)$$

$$\tilde{H}_n = \frac{H_{n-1}\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} + H_{n+1}\frac{\lambda_n}{\mu_n}}{\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} + \frac{\lambda_n}{\mu_n}}. \quad (8.8)$$

Тогда уравнение (8.6) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} - \zeta_n (H_n - \tilde{H}_n) = 0. \quad (8.9)$$

Если пьезометрические напоры H_{n-1} и H_{n+1} в соседних пластах изменяются настолько слабо, что их можно считать постоянными, то и $\tilde{H}_n$ будет постоянным. Если же H_{n-1} и H_{n+1} переменны, то нужно составлять и для них уравнения, аналогичные (8.9). Если пласт (μ_n) или (μ_{n-1}) совершенно непроницаем, то соответствующее значение λ_n или λ_{n-1} равно нулю.

§ 9. Движение в одном проницаемом пласте [8]. Предположим, что движение происходит параллельно оси x. Отбросим значок n в уравнении (8.9) и перепишем это уравнение применительно к рассматриваемому случаю в виде

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - \zeta(H - \tilde{H}) = 0. \quad (9.1)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$H - \tilde{H} = C_1 e^{-x\sqrt{\zeta}} + C_2 e^{x\sqrt{\zeta}}.$$

Нужно поставить два граничных условия для определения постоянных C_1 и C_2. Так, C_1 и C_2 будут определены, если будут известны значения напора H в двух точках пласта. Если рассматривается поток жидкости из бесконечности, например приток из бесконечности к канаве, то, поставив условие конечности напора при $x = +\infty$, получим, что $C_2 = 0$ и

$$H = \tilde{H} + C_1 e^{-x\sqrt{\zeta}}.$$

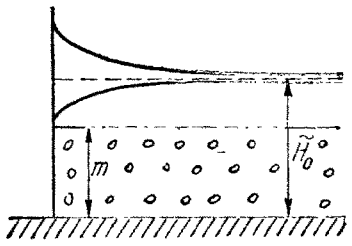
Зная величину напора в какой-нибудь точке, определим C_1. Например, если $H = H_1$ при $x = 0$, то будем иметь:

$$H = \tilde{H} + (H_1 - \tilde{H}) e^{-x\sqrt{\zeta}}. \quad (9.2)$$

Мы видим, что $\tilde{H}$ будет в этом случае величиной напора при $x=\infty$.

Если $H_1>\tilde{H}$, то кривая (9.2) лежит над асимптотой $H=H_0$ и вогнута кверху; если $H_1<\tilde{H}$, то кривая лежит под своей асимптотой и выпукла (фиг. 279).

Направление выпуклости пьезометрической кривой можно определить непосредственно из уравнения (9.1), переписав его так:



Фиг. 279.

$$\frac{d^2H}{dx^2}=\zeta(H-\tilde{H}).$$

Так как $\zeta>0$, то при $H>\tilde{H}$ вторая производная положительна, т. е. кривая вогнута, при $H<\tilde{H}$ она, наоборот, выпукла.

§ 10. Совершенные колодцы (скважины) в напорном пласте [7, 8]. Предположим сначала, что имеется один цилиндрический колодец, ось которого совпадает с осью z и приток к которому со всех сторон одинаков, так что течение не зависит от полярного угла, а зависит только от радиуса-вектора r.

Оператор Лапласа у нас приведется к виду

$$\Delta H=\frac{\partial^2H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H}{\partial y^2}=\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH}{dr},$$

и вместо (8.9) будем иметь (отбрасывая значок n):

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH}{dr}-\alpha^2(H-\tilde{H})=0 \qquad (10.1)$$

$$(\alpha^2=\zeta).$$

Это уравнение Бесселя, общее решение которого представляется в виде

$$H-\tilde{H}=C_1I_0(\alpha r)+C_2K_0(\alpha r), \qquad (10.2)$$

где I_0 — цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого порядка первого рода, K_0 — соответствующая функция второго рода.

Если известно значение напора на двух окружностях радиусов r_1 и r_2, то постоянные C_1 и C_2 определяются.

Рассматривая движение в бесконечном пласте, поставим условие: H должно оставаться ограниченным при r, стремящемся к бесконечности. Так как функция $I_0(x)$ неограниченно возрастает при увеличении аргумента, то следует положить $C_1=0$. Получаем:

$$H-\tilde{H}=C_2K_0(\alpha r).$$

Функция $K_0(x)$ стремится к нулю при возрастании x; поэтому H стремится к $\tilde{H}$ при $r \to \infty$. Следовательно, $\tilde{H}$ есть невозмущенное значение напора. Можно ввести величину

$$S = \tilde{H} - H, \tag{10.3}$$

называемую *понижением напора*. Тогда для S получаем выражение

$$S = -C_2 K_0(\alpha r). \tag{10.4}$$

Обозначим радиус колодца через δ и вычислим расход Q_δ через боковую поверхность цилиндра радиуса δ высоты M:

$$Q_\delta = 2\pi\delta M v_\delta, \tag{10.5}$$

где v_δ — скорость течения на стенке цилиндра. Имеем:

$$v_\delta = -k\frac{dH}{dr}\Big|_{r=\delta} = -k\alpha K_0'(\alpha\delta)\cdot C_2 = C_2 k\alpha K_1(\alpha\delta), \tag{10.6}$$

где K_1 — цилиндрическая функция мнимого аргумента второго рода первого порядка.

Подставляя (10.6) в (10.5), получим:

$$Q_\delta = 2\pi k\delta C_2 \alpha K_1(\alpha\delta) M. \tag{10.7}$$

Отсюда найдем постоянную C_2:

$$C_2 = \frac{Q_\delta}{2\pi k\delta\alpha K_1(\alpha\delta) M},$$

и уравнение (10.3) дает:

$$S = \tilde{H} - H = -\frac{Q_\delta}{2\pi k\delta\alpha M}\cdot\frac{K_0(\alpha r)}{K_1(\alpha\delta)}. \tag{10.8}$$

Так как через горизонтальные плоскости, ограничивающие хорошо проницаемый пласт, происходит просачивание жидкости, то расход Q_r через цилиндр радиуса r будет зависеть от r. Мы получим Q_r, заменяя в (10.7) δ на r:

$$Q_r = 2\pi k r M \alpha C_2 K_1(\alpha r).$$

Деля это выражение на (10.7), получим:

$$Q_r = Q_\delta \frac{r}{\delta}\frac{K_1(\alpha r)}{K_1(\alpha\delta)}.$$

Если $x < 0{,}02$, то можно пользоваться приближенными формулами

$$K_0(x) \approx -\ln x + \ln 2 - C = 0{,}1159\ldots - \ln x \tag{10.9}$$

(C — эйлерова постоянная),

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x}. \tag{10.10}$$

Обычно $\alpha\delta < 0{,}02$; поэтому

$$K_1(\alpha\delta) \approx \frac{1}{\alpha\delta},$$

и формулу (10.8) можно заменить такой:

$$H - \tilde{H} \approx -\frac{Q_\delta}{2\pi kM} K_0(\alpha r) \tag{10.11}$$

или

$$S = \frac{Q_\delta}{2\pi kM} K_0(\alpha r). \tag{10.12}$$

Полагая в уравнении (10.8) $r = \delta$, найдем понижение напора на скважине:

$$\tilde{H} - H(\delta) = S(\delta) = \frac{Q_\delta}{2\pi kM} \frac{K_0(\alpha\delta)}{\alpha\delta K_1(\alpha\delta)},$$

где $H(\delta)$ — напор на стенках скважины.

Воспользовавшись приближенными выражениями для K_0 и K_1, напишем:

$$S(\delta) \approx \frac{Q_\delta}{2\pi kM} [-\ln(\alpha\delta) + 0{,}1159\ldots].$$

Отсюда для дебита скважины находим:

$$Q_\delta = \frac{2\pi kM(\tilde{H} - H(\delta))}{0{,}1159 - \ln(\alpha\delta)}. \tag{10.13}$$

Сравним эту формулу с формулой (1.4), полученной для дебита совершенного колодца, которую можно переписать так:

$$Q_* = \frac{2\pi kM(H(R) - H(\delta))}{\ln R - \ln \delta}.$$

Здесь $H(R)$ — напор в точке, лежащей на расстоянии R (произвольном) от центра колодца, в то время как $\tilde{H}$ формулы (10.13) есть напор при $R = \infty$. В знаменателе (10.13) стоит вместо $\ln R$ выражение

$$\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right) - C = 0{,}1159 - \ln\alpha, \tag{10.14}$$

зависящее — через α — от интенсивности фильтрации через слабо проницаемые грунты, которые в формуле (10.14) рассматриваются как водоупорные, т. е. совершенно непроницаемые.

Вычисления А. Н. Мятиева [9] показывают, что Q_* тем ближе к Q, чем ближе R к δ.

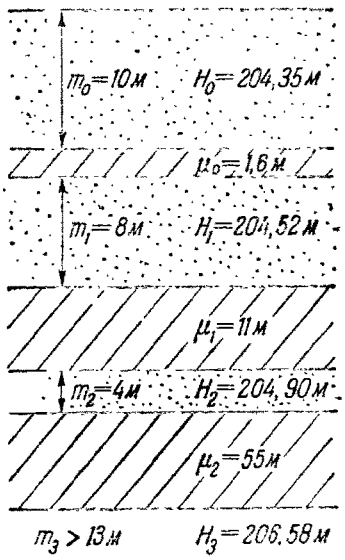
Если производится откачка воды из колодца, то на некоторых расстояниях от него $r_1, r_2, \ldots, r_n$ расположены наблюдательные ко-

лодцы, в которых отмечаются понижения соответственно $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Имея по крайней мере две пары значений (r, S), можно вычислить величины α и kM. Если считать, что $\lambda_{n-1} = 0$, то можно по формуле (8.7), зная μ_n, вычислить λ_n.

В качестве одного из примеров А. Н. Мятиев [9] рассматривает случай, схематически представленный на фиг. 280.

Отметим прежде всего, что напоры H_0, H_1, H_2, H_3 в начальном состоянии пластов, до откачки, возрастают с глубиной. Это показывает, что на рассматриваемом опытном участке должны иметься восходящие фильтрационные токи.

Водоносные горизонты испытывались путем последовательного углубления скважин с изоляцией всех горизонтов кроме одного.



Фиг. 280.

В пласте, который у нас характеризуется значком 1, были произведены две откачки, и установившееся состояние при каждой из этих откачек дало результаты, представленные таблицей 14.

Таблица 14

Результаты двух откачек из четырех скважин

№ скважины	H_1 (м)	r (м)	Откачка I $Q = 0{,}01245$ м³/сек S (м)	Откачка II $Q = 0{,}0178$ м³/сек S (м)
1	204,53	0	3,15	4,90
3	204,52	25,00	0,27	0,37
5	204,50	75,00	0,18	0,25
7	204,53	250,00	0,13	0,19

Скважина № 1 — опытная, остальные три наблюдательные.

Возьмем два наблюдения, например скважины № 3 и № 5 при второй откачке. Подставляя соответствующие значения r и S в уравнение (10.12), получим:

$$S_3 = \frac{Q}{2\pi kM} \frac{K_0(\alpha r_3)}{\alpha K_1(\alpha\delta)}, \quad S_5 = \frac{Q}{2\pi kM} \frac{K_0(\alpha r_5)}{\alpha K_1(\alpha\delta)}, \qquad (10.15)$$

и разделим их почленно друг на друга. Будем иметь:

$$\frac{K_0(25\alpha)}{K_0(75\alpha)} = 1{,}48.$$

Подбором определяем *коэффициент связи* α:

$$\alpha = 0{,}00116.$$

Из равенства (10.15) теперь можно найти коэффициент фильтрации

$$k = \frac{QK_0(25\alpha)}{S \cdot 2\pi M} = 0{,}00356.$$

Теперь уравнение депрессионной поверхности колодца № 1 будет:

$$S = 5{,}60QK_0\ (0{,}00116\, r).$$

Подставляя сюда значения Q из таблицы, а также значения r для наблюдательных скважин, вычислим соответствующие понижения, которые затем можно сравнить с наблюденными.

А. Н. Мятиевым получена таблица 15.

Таблица 15

Результаты вычисленных и опытных понижений при двух откачках

Откачка	$Q\ \frac{м^3}{сек}$	Скважина № 3			Скважина № 5			Скважина № 7		
		$S_{оп}$	$S_{выч}$	$\Delta S = S_{оп} - S_{выч}$	$S_{оп}$	$S_{выч}$	ΔS	$S_{оп}$	$S_{выч}$	ΔS
I	0,01245	0,27	0,26	0,01	0,18	0,18	0,00	0,13	0,10	0,03
II	0,0178	0,37	0,37	0,00	0,25	0,25	0,00	0,19	0,14	0,05

В других примерах, когда бывают удовлетворены условия развиваемой теории, результаты вычислений получаются близкими к результатам наблюдений, т. е. лежащими в пределах точности измерений.

Обратим внимание на то, что по данным наблюдений мы можем всегда вычислить два параметра, входящих в уравнение (10.12):

$$A = \frac{Q}{2\pi kM} \text{ и } \alpha.$$

Эти параметры характеризуют суммарно свойства пласта. Если известны некоторые из величин, от которых зависят A и α, то можно бывает вычислить еще какие-нибудь из мощностей слоев и коэффициентов фильтрации.

В действительности обычно не бывает известной достаточно точно ни одна из величин λ_i, μ_i, k_i; поэтому можно, когда известно Q, смотреть на величины α и kM как на некоторые постоянные, суммарно характеризующие область движения грунтовых вод. Опытные откачки дают возможность определить эти важные постоянные.

Перейдем теперь к случаю n совершенных колодцев [8, 9], центры которых находятся в точках $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Обозначим через r_i расстояние от произвольной точки (x, y) до точки (x_i, y_i):

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Функция $K_0(\alpha r_i)$ при любых значениях (x_i, y_i) является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \alpha^2 (H - \tilde{H}) = 0.$$

Поэтому понижение от действия всех колодцев будет равно сумме понижений, вызываемых отдельными колодцами. С помощью формулы (10.8) можем написать:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{2\pi k \delta_i \alpha M} \frac{K_0(\alpha r_i)}{K_1(\alpha \delta_i)}.$$

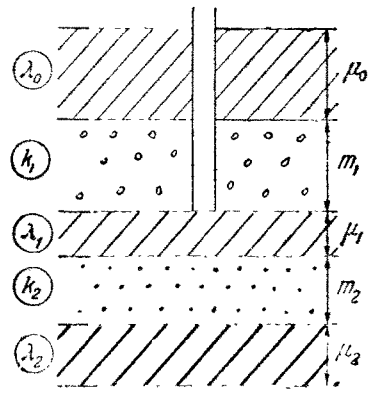
Отметим, что в рассматриваемой теории понятие *радиуса влияния* колодца или скважины является более ясным, чем в теории Дюпюи. Именно, радиус влияния R_0 можно определить как величину радиуса того цилиндра, вне пределов которого понижение практически равно нулю, или, иначе, величина понижения S не превосходит заданной величины, например 1 *см*, или для которого отношение $S : S_\delta$ не превышает определенного числа, например 0,01 [23].

§ 11. Взаимодействие водопроницаемых пластов, разделенных слабо проницаемыми. Между напорными пластами грунтовых вод существует взаимодействие, так как водоотлив в одном из горизонтов должен оказать влияние на напорные функции других горизонтов. Для того чтобы выяснить, какова возможная степень влияния, мы рассмотрим здесь случай двух проницаемых пластов.

Вернемся к уравнению (8.6). Введем обозначения

$$m_n k_n = \beta_n, \quad \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \gamma_n, \quad \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} = \Delta H_n \tag{11.1}$$

и будем давать n значения 1, 2. При этом будем считать H_0 и H_3 постоянными, H_1 и H_2 — напоры первого и второго водоносных слоев — переменными. Другими словами, будем рассматривать движение в двух водоносных слоях, граничащих с тремя слабо проницаемыми пластами (фиг. 281). С помощью уравнения (8.6) получим систему двух уравнений



Фиг. 281.

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 \Delta H_1 - \gamma_1 (H_1 - H_2) - \gamma_0 (H_1 - H_0) = 0, \\ \beta_2 \Delta H_2 - \gamma_2 (H_2 - H_3) - \gamma_1 (H_2 - H_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11.2}$$

Перепишем эту систему, перенося в правые части постоянные слагаемые:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 \Delta H_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) H_1 + \gamma_1 H_2 = -\gamma_0 H_0, \\ \beta_2 \Delta H_2 + \gamma_1 H_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) H_2 = -\gamma_2 H_3. \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

Прежде всего отметим, что эта система имеет частное решение

$$H_1 = H_{10}, \qquad H_2 = H_{20}.$$

где H_{10}, H_{20} — постоянные. В самом деле, в этом случае $\Delta H_1 = \Delta H_2 = 0$, и постоянные определятся при подстановке их в (11.3) из системы алгебраических уравнений

$$-(\gamma_0+\gamma_1)H_{10}+\gamma_1 H_{20} = -\gamma_0 H_0,$$
$$\gamma_1 H_{10}-(\gamma_1+\gamma_2)H_{20} = -\gamma_2 H_3.$$

Определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} -\gamma_0-\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & -\gamma_1-\gamma_2 \end{vmatrix} = \gamma_0\gamma_1+\gamma_0\gamma_2+\gamma_1\gamma_2 \qquad (11.4)$$

больше нуля, и, следовательно, искомое решение всегда существует. Нетрудно его найти:

$$\left.\begin{aligned} H_{10} &= \frac{\gamma_0(\gamma_1+\gamma_2)H_0+\gamma_1\gamma_2 H_3}{D}, \\ H_{20} &= \frac{\gamma_0\gamma_1 H_0+\gamma_2(\gamma_0+\gamma_1)H_3}{D}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.5)$$

Полученные значения H_{10} и H_{20} дают те уровни воды в пьезометрах, которые должны установиться при заданных H_0 и H_3 в пластах *1* и *2*, если грунтовые воды будут находиться в состоянии равновесия.

Для получения общего решения системы (11.3) к найденному частному решению нужно прибавить общее решение однородной системы

$$\left.\begin{aligned} \beta_1\Delta H_1-(\gamma_0+\gamma_1)H_1+\gamma_1 H_2 &= 0, \\ \beta_2\Delta H_2+\gamma_1 H_1-(\gamma_1+\gamma_2)H_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.6)$$

Рассматривая задачу о круглом колодце, ось которого расположена вдоль оси z, мы, как и в предыдущем случае, будем понимать под ΔH выражение

$$\Delta H = \frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH}{dr}.$$

Будем искать решение системы (11.6) в виде

$$H_1 = AK_0(\omega r)+CI_0(\omega r),$$
$$H_2 = BK_0(\omega r)+DI_0(\omega r).$$

Здесь ω, A, B, C, D — пока неизвестные постоянные, K_0 и I_0 — цилиндрические функции мнимого аргумента.

Так как мы ограничимся рассмотрением движения в бесконечном пласте, то положим, как и в § 10, $C = D = 0$, для того чтобы удовлетворить условию ограниченности решений на бесконечности. Таким образом, ищем H_1, H_2 в виде

$$H_1 = AK_0(\omega r), \qquad H_2 = BK_0(\omega r). \qquad (11.7)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d^2K_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dK_0}{dr} = \omega^2 K_0,$$

получим:

$$\Delta H_1 = A\omega^2 K_0(\omega r), \qquad \Delta H_2 = B\omega^2 K_0(\omega r).$$

После подстановки в (11.6) и сокращения на $K_0(\omega r)$ получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (\beta_1\omega^2-\gamma_0-\gamma_1)A+\gamma_2 B &= 0, \\ \gamma_1 A+(\beta_2\omega^2-\gamma_1-\gamma_2)B &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11.8)$$

Для того чтобы существовали отличные от нуля решения этой системы однородных уравнений, необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. Это дает для ω^2 уравнение

$$\begin{vmatrix} \beta_1\omega^2 - \gamma_0 - \gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \beta_2\omega^2 - \gamma_1 - \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.9}$$

Найдя два корня этого уравнения ω_1^2, ω_2^2, получим две системы решений вида (11.7). А именно, если в (11.8) подставим $\omega = \omega_1$, то получим для A и B значения, определяемые с точностью до постоянного множителя, который мы обозначим через C':

$$A = C'A_1, \qquad B = C'B_1.$$

Соответствующее частное решение системы (11.6) будет:

$$H_1^{(1)} = C'A_1K_0(\omega_1 r), \qquad H_2^{(1)} = C'B_1K_0(\omega_1 r). \tag{11.10}$$

Точно так же для второго корня, ω_2, получим решение

$$H_1^{(2)} = C''A_2K_0(\omega_2 r), \qquad H_2^{(2)} = C''B_2K_0(\omega_2 r). \tag{11.11}$$

Здесь C'' — произвольная постоянная.

Решение системы (11.3), ограниченное на бесконечности, представляется в виде суммы решений (11.5), (11.10), (11.11):

$$H_1 = H_{10} + C'A_1K_0(\omega_1 r) + C''A_2K_0(\omega_2 r),$$
$$H_2 = H_{20} + C'B_1K_0(\omega_1 r) + C''B_2K_0(\omega_2 r).$$

Для определения произвольных постоянных нужно задать два условия, например, задать расходы колодца в первом и втором водопроницаемых пластах или напоры у стенки колодца и т. п.

В качестве примера рассмотрим случай, когда имеют место равенства $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2$. Положим:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta, \qquad \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

Как показывают формулы (11.1), принятое условие означает, что проницаемые пласты имеют одинаковое произведение $k_n m_n$, а плохо проницаемые — одинаковые отношения $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$. В частности, поставленное условие будет выполнено, если оба проницаемых пласта будут иметь одинаковую толщину m и один и тот же коэффициент фильтрации k, все слабо проницаемые пласты совершенно одинаковы между собой, т. е. имеют одинаковую мощность и одинаковую проницаемость. В этом случае характеристическое уравнение для ω^2 принимает вид

$$\begin{vmatrix} \beta\omega^2 - 2\gamma & \gamma \\ \gamma & \beta\omega^2 - 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни

$$\omega_1^2 = \frac{3\gamma}{\beta}, \qquad \omega_2^2 = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Система (11.8) для первого из них дает:

$$\gamma A + \gamma B = 0,$$

т. е.

$$B = -A.$$

Приняв $A = 1$, получим $B = -1$, т. е.

$$H_1^{(1)} = C' K_0\left(\sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}}\, r\right), \quad H_2^{(1)} = -C' K_0\left(\sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}}\, r\right).$$

Для второго корня получим:

$$-A + B = 0,$$

т. е.

$$A = B.$$

Примем $A = B = 1$, тогда

$$H_1^{(2)} = C'' K_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\, r, \quad H_2^{(2)} = C'' K_0\left(r\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\, r\right).$$

Частное решенне неоднородного уравнения по (11.5) будет:

$$H_{10} = \frac{1}{3}(2H_0 + H_3),$$

$$H_{20} = \frac{1}{3}(H_0 + 2H_3).$$

Таким образом, наиболее общее решение для рассматриваемого случая, при условии ограниченности этого решения на бесконечности, будет нметь вид

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{2H_0 + H_3}{3} + C' K_0\left(r\sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}}\right) + C'' K_0\left(r\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\right), \\ H_2 &= \frac{H_0 + 2H_3}{3} - C' K_0\left(r\sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}}\right) + C'' K_0\left(r\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

Для получения дополнительных граничных условий введем предположение, что из колодца радиуса δ отбирается жидкость, причем расход нз первого пласта равен Q_1, из второго Q_2. Так как

$$Q_i = -2\pi\delta km \frac{dH_i}{dr}\bigg|_{r=\delta},$$

то, полагая

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\gamma}{\beta}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}},$$

получим с помощью (11.12):

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= -2\pi\delta km\,[C'\omega_1 K_1(\omega_1\delta) + C''\omega_2 K_1(\omega_2\delta)], \\ Q_2 &= -2\pi\delta km\,[-C'\omega_1 K_1(\omega_1\delta) + C''\omega_2 K_1(\omega_2\delta)] \end{aligned}\right\} \tag{11.13}$$

(K_1 — моднфицированная цилиндрическая функция второго рода первого порядка).

Последние уравнения служат для определения C' н C''. Сделаем дополнительные частные предположения.

Предположим, что вода отбирается лишь из верхнего горизонта, так что $Q_2 = 0$. Тогда из (11.13) получим:

$$C'' = C' \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{K_1(\omega_1\delta)}{K_1(\omega_2\delta)} = C'\sqrt{3}\, \frac{K_1(\omega_1\delta)}{K_2(\omega_2\delta)}$$

и

$$C' = -\frac{Q_1}{2\pi\delta km\,(\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2)\,K_1(\omega_1\delta)},$$

$$C'' = -\frac{Q_1\sqrt{3}}{2\pi\delta km\,(\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2)\,K_1(\omega_2\delta)}.$$

Теперь (13.12) можем переписать так:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{2H_0 + H_3}{3} - \frac{P}{K_1(\omega_1\delta)}K_0(r\omega_1) - \frac{P\sqrt{3}}{K_1(\omega_2\delta)}K_0(r\omega_2), \\ H_2 &= \frac{H_0 + 2H_3}{3} + \frac{P}{K_1(\omega_1\delta)}K_0(r\omega_1) - \frac{P\sqrt{3}}{K_1(\omega_2\delta)}K_0(r\omega_2), \end{aligned}\right\} \tag{11.14}$$

где

$$P = -\frac{Q_1}{2\pi\delta km\,(\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2)}. \tag{11.15}$$

Обратим внимание на то, что предельные значения напора в первом и втором пластах, соответственно равные

$$H_{10} = \frac{2H_0 + H_3}{3}, \qquad H_{20} = \frac{H_0 + 2H_3}{3},$$

представляют средние взвешенные из напоров H_0 и H_3, причем напор ближайшего пласта входит с бо́льшим весом. Обозначая понижения напора в каждом из пластов соответственно через S_1 и S_2:

$$S_1 = H_{10} - H_1, \qquad S_2 = H_{20} - H_2,$$

перепишем уравнения (11.14) следующим образом:

$$S_1 = \frac{P}{K_1(\omega_1\delta)}K_0(\omega_1 r) + \frac{P\sqrt{3}}{K_1(\omega_2\delta)}K_0(\omega_2 r),$$

$$S_2 = -\frac{P}{K_1(\omega_1\delta)}K_0(\omega_1 r) + \frac{P\sqrt{3}}{K_1(\omega_2\delta)}K_0(\omega_2 r).$$

Мы видим, что понижение в первом пласте, откуда отбирается жидкость, больше, чем понижение в нижнем, откуда, по предположению, ие поступает расхода. Вычислим, в частности, понижение при $r = \delta$ вблизи самой скважины:

$$S_1(\delta) = -\frac{Q_1}{2\pi\delta km\,(\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2)}\left[\frac{K_0(\omega_1\delta)}{K_1(\omega_1\delta)} + \sqrt{3}\,\frac{K_0(\omega_2\delta)}{K_1(\omega_2\delta)}\right],$$

$$S_2(\delta) = -\frac{Q_1}{2\pi\delta km\,(\omega_1 + \sqrt{3}\,\omega_2)}\left[\frac{\sqrt{3}\,K_0(\omega_2\delta)}{K_1(\omega_2\delta)} - \frac{K_0(\omega_1\delta)}{K_1(\omega_1\delta)}\right].$$

Зная одну из величин — $S_1(\delta)$ или $S_2(\delta)$, — можно вычислить расход Q_1. В более общем случае, когда вода отбирается из двух слоев грунта, можно было бы найти Q_1, Q_2 по понижениям $S_1(\delta)$, $S_2(\delta)$.

§ 12. О форме напорной поверхности. Перепишем уравнение (8.9) для пьезометрического напора n-го пласта $H_n(x, y)$ в виде

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} = \alpha^2(H_n - \tilde{H}). \tag{12.1}$$

где $\widetilde{H}$ согласно (8.8) есть некоторое среднее из значений напоров в двух соседних с n-м водопроницаемых пластах:

$$\widetilde{H}=\frac{\frac{\lambda_n}{\mu_n}H_{n+1}+\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}H_{n-1}}{\frac{\lambda_n}{\mu_n}+\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}}. \tag{12.2}$$

Это величина напора, который обеспечивается в n-м пласте двумя соседними пластами.

Уравнение (12.1) имеет частное решение

$$H_n=\widetilde{H},$$

соответствующее покою.

Предположим, что под влиянием каких-нибудь причин (например, откачки или нагнетания) происходит движение грунтовой воды.

Рассмотрим два случая:

1-й случай:

$$H_n<\widetilde{H}. \tag{12.3}$$

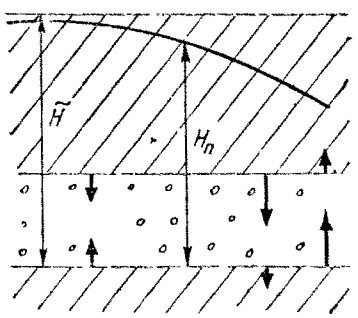
В этом случае суммарная вертикальная скорость

$$w=k_n m_n \zeta_n (H_n-\widetilde{H})$$

будет направлена внутрь пласта. Следовательно, n-й горизонт обогащается водой других горизонтов. Так как

$$w=\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}(H_n-H_{n-1})+\frac{\lambda_n}{\mu_n}(H_n-H_{n+1})$$

состоит из двух слагаемых — скоростей просачивания через каждую из двух границ n-го пласта, то одна из этих скоростей может быть направленной и из пласта, но другая скорость, направленная внутрь, должна быть больше. Поэтому мы получаем три возможности, схематически изображенные на фиг. 282 посредством стрелок различной длины.



Фиг. 282.

Уравнение (12.1) показывает, что в этом случае

$$\Delta H_n<0,$$

т. е. пьезометрическая поверхность выпукла [1]).

Поэтому, если по наблюдениям в пьезометрах пьезометрическая поверхность оказывается выпуклой, то мы должны иметь:

$$H_n<\widetilde{H},$$

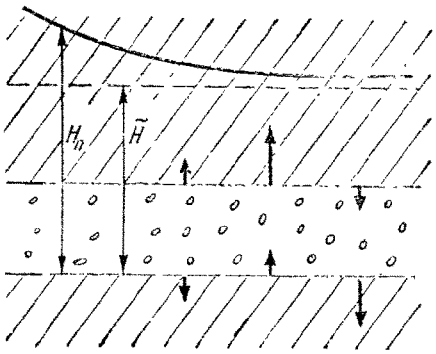
[1]) Как известно, оператор Лапласа Δu пропорционален средней кривизне поверхности $z=u(x, y)$, а средняя кривизна положительна для вогнутой и отрицательна для выпуклой поверхности.

и водоносный горизонт должен обогащаться водой. А. Н. Мятиев называет область, в которой имеет место неравенство (14.3), *областью питания* n-го водоносного горизонта. Он отмечает, что обычно эта область приурочена к междуречному пространству и возвышенности, т. е. связана, как говорят геологи, с «положительными формами рельефа».

2-й случай:

$$H_n > \tilde{H}. \qquad (12.4)$$

При этом имеем общее *вытекание* из n-го пласта (см. три возможных случая на фиг. 283).



Фиг. 283.

Поверхность пьезометрического напора вогнута. А. Н. Мятиев называет такую область *областью высачивания* n-го горизонта. Он отмечает, что обычно такие области приурочены к речным долинам, котловинам и впадинам, т. е. связаны с «отрицательными формами» рельефа местности. На фиг. 284 дана схема А. Н. Мятиева движения подземных вод в междуречном массиве. А. И. Силин-Бекчурин [11], приводя схему Мятиева, отмечает, что она относится лишь к верхним горизонтам.

Теперь предположим, что ордината $\tilde{H}$ невозмущенной свободной поверхности (т. е. до начала движения) есть функция от x, y

$$\tilde{H} = f(x, y), \qquad (12.5)$$

соответствующая некоторому установившемуся движению. Тогда в уравнении

$$\Delta H_n = \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} = \zeta_n [H_n - \tilde{H}(x, y)]$$

удобно сделать подстановку

$$H_n - \tilde{H}(x, y) = S. \qquad (12.6)$$

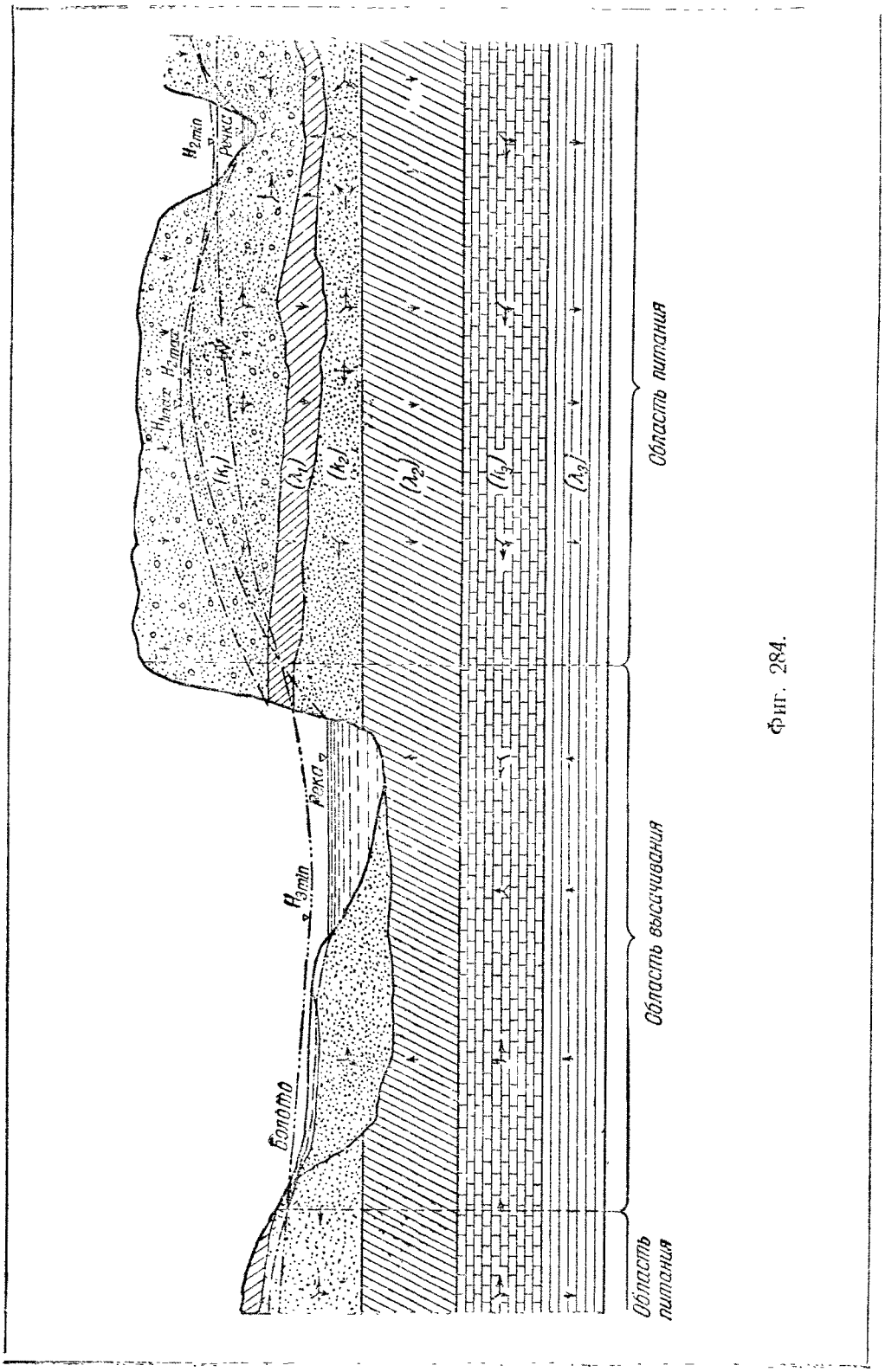
Принимая во внимание, что

$$\Delta H_n = \Delta \tilde{H} + \Delta S,$$

получим уравнение для S:

$$\Delta S - \zeta_n S = \Delta \tilde{H}. \qquad (12.7)$$

Это неоднородное уравнение с известной правой частью.


Область питания
Область высачивания
Область питания
Болото
Река
Река
H_{2min}
H_{3min}
H_{1max} H_{2max}
(k_1)
(λ_1)
(k_2)
(λ_2)
(k_3)
(λ_3)

Фиг. 284.

В частном случае, когда начальная пьезометрическая поверхность есть поверхность второго порядка

$$\widetilde{H} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

имеем:

$$\Delta\widetilde{H} = 2(a + c),$$

и в правой части уравнения (12.7) получаем постоянную.

Положим: $2(a + c) = \xi$. Тогда будем иметь вместо (12.7):

$$\Delta S - \alpha^2 S = \xi \qquad (12.8)$$

$$(\alpha^2 = \zeta_n).$$

Подстановка

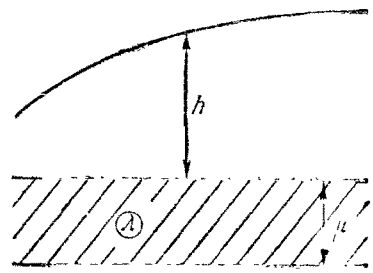
$$S + \frac{\xi}{\alpha^2} = \sigma$$

приводит уравнение (12.8) к прежнему однородному уравнению, с которым мы уже имели дело:

$$\Delta\sigma - \alpha^2\sigma = 0.$$

§ 13. Безнапорный приток к колодцам со слабо проницаемым водоупором. Ниже, в главе X, будет получено дифференциальное уравнение для ординаты h свободной поверхности (фиг. 285)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right) + w + e = 0. \qquad (13.1)$$



Фиг. 285.

Здесь e — количество выпадающих осадков на единицу площади в единицу времени, w — скорость просачивания через нижележащий водоупорный слой:

$$w = -\frac{\lambda}{\mu}(h - h_0), \qquad (13.2)$$

где h_0 — пьезометрический уровень нижнего горизонта. Уравнение (13.1) теперь перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{\lambda}{\mu}\left(h - h_0 - \frac{\mu e}{\lambda}\right) = 0. \qquad (13.3)$$

Мы получили нелинейное уравнение в частных производных второго порядка. Если сделать подстановку $h^2 = u$, то получим квазилинейное (т. е. такое, в котором линейна часть, содержащая вторые производные) уравнение эллиптического типа [23]

$$\Delta u - \frac{2\lambda}{\mu}\left(\sqrt{u} - h_0 - \frac{\mu e}{\lambda}\right) = 0.$$

Для того чтобы получить линейное уравнение, применяют упрощение уравнения (13.3). А именно, обозначив среднюю глубину

ординаты свободной поверхности в рассматриваемой области через h_1, положим $h = h_1$ в множителе под знаком производной. Тогда получим:

$$h_1\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)-\frac{\lambda}{\mu}\left(h-h_0-\frac{\mu e}{\lambda}\right)=0.$$

Это линейное уравнение того же вида, что и соответствующее уравнение в только что рассмотренной теории напорного движения Из этой теории можно заимствовать и решения соответствующих задач о колодцах.

Так, полагая

$$H_1 = h_0+\frac{\mu e}{\lambda},\quad S = h_0+\frac{\mu e}{\lambda}-h = H_1-h, \tag{13.4}$$

для колодца радиуса δ с уровнем воды в колодце h_δ получим:

$$S=\frac{1}{2\pi k\sqrt{\zeta}}\frac{Q_\delta}{h_\delta}\frac{K_0(r\sqrt{\zeta})}{K_1(\delta\sqrt{\zeta})}. \tag{13.5}$$

Понижение S_δ на скважине получается равным

$$S_\delta=\frac{1}{2\pi k\delta\sqrt{\zeta}}\frac{Q_\delta}{h_\delta}\frac{K_0(\delta\sqrt{\zeta})}{K_1(\delta\sqrt{\zeta})}$$

или

$$S_\delta=\frac{Q_\delta}{h_\delta\varepsilon}, \tag{13.6}$$

где через ε обозначена величина

$$\varepsilon = 2\pi\delta\sqrt{\zeta}\frac{K_1(\delta\sqrt{\zeta})}{K_0(\delta\sqrt{\zeta})}. \tag{13.7}$$

Подставляя в (13.6)

$$h_\delta = H_1-S_\delta,$$

найдем для Q_δ выражение

$$Q_\delta = \varepsilon S_\delta(H_1-S_\delta),$$

представляющее полином второй степени относительно понижения у скважины S_δ.

Зависимость Q_δ от S_δ показывает, что расход убывает при $S_\delta > \frac{1}{2}H_1$, что невозможно. Отсюда А. Н. Мятиев [10] делает вывод, что понижение у колодца не может превышать половины мощности водоносного слоя. Однако это утверждение нуждается в проверке, так как вывод его опирается на ряд предположений, в частности, на линеаризацию уравнения (13.3). Если вычислять расход по формуле Дюпюи [формула (8.5) главы X]:

$$Q = A(H_2^2-H_1^2),$$
$$A=\frac{2\pi k}{\ln\frac{R}{\delta}},$$

то, учитывая, что

$$H_2 - H_1 = S_\delta,$$

где S_δ — понижение у стенки колодца, найдем:

$$Q = AS_\delta(2H - S_\delta).$$

Таким образом, в случае непроницаемого водоупора также получается параболическая зависимость Q от S_δ, но S_δ по этой зависимости может быть любым, от нуля до H.

Г. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 14. О пространственных задачах. Точных решений пространственных задач теории фильтрации при наличии свободной поверхности мы в настоящее время совершенно не имеем, если не считать одного случая, указанного Б. К. Ризенкампфом и Н. К. Калининым [12] в 1941 г., но не нашедшего до настоящего времени никакого применения к каким-либо конкретным условиям.

А именно, Б. К. Ризенкампф и Н. К. Калинин заметили, что в задаче об обтекании несжимаемой жидкостью эллипсоида с полуосями a, b, c поступательным потоком жидкости потенциал скорости на поверхности эллипсоида является линейной функцией координат. А так как на свободной поверхности грунтового потока должно выполняться условие $\varphi + kz = 0$, то при некоторых условиях поверхность трехосного эллипсоида может быть свободной поверхностью грунтового потока, причем область фильтрации должна находиться вне эллипсоида.

Между тем имеет важное значение рассмотрение некоторых задач об осесимметричных течениях и трехмерных течениях. Можно указать на широкий круг задач о притоке к скважинам и о взаимодействии групп скважин, а также на задачи о пространственном обтекании сооружений и др.

В настоящем отделе мы приведем приближенное решение одной осесимметричной задачи и укажем несколько формул для пространственных стоков, которые могут быть полезны при решении некоторых пространственных задач.

§ 15. Несовершенные скважины в полупространстве. Несовершенной скважиной называется скважина, не доходящая до основания проницаемого пласта. В пласте бесконечной глубины скважина всегда будет несовершенной.

Пусть дана скважина в пласте, занимающем все нижнее полупространство. Разместим вдоль оси скважины стоки. Для пространственного стока в точке ζ на оси скважины потенциал скорости выражается так:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + r^2}}, \qquad (15.1)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Горизонтальная плоскость $z = 0$ является у нас твердой стенкой. Поэтому продолжим ось скважины вверх и возьмем интеграл от выражения (15.1) в пределах $-l$, l. Получим:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_{-l}^{l} \frac{q(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + r^2}}. \tag{15.2}$$

Интенсивность стоков $q(\zeta)$ надо подобрать так, чтобы на поверхности цилиндра радиуса r_0 иметь постоянное значение потенциала. Кроме того, на дне цилиндра должно выполняться некоторое заданное условие. В такой постановке задача является сложной.

Обычно принимают интенсивность q постоянной вдоль всей скважины [18]. Тогда интеграл (15.2) легко вычисляется, и мы получаем:

$$\varphi(r, z) = \frac{Q}{4\pi l} \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{l-z}{r}\right)^2 + 1} + \frac{l-z}{r}}{\sqrt{\left(\frac{l+z}{r}\right)^2 + 1} - \frac{l+z}{r}}, \tag{15.3}$$

где $Q = lq$ — расход скважины.

Поверхности равного потенциала здесь будут эллипсоидами вращения с фокусами в точках $(0, 0, l)$ и $(0, 0, -l)$. Следовательно, поверхность скважины заменяется поверхностью узкого эллипсоида. Можно подобрать полуоси этого эллипсоида так, чтобы объем эллипсоида был равен объему цилиндра. Получим:

$$Q \approx \frac{2\pi k l}{\ln \frac{1{,}6\,l}{r_0}} S_0. \tag{15.4}$$

Здесь $S_0 = -\frac{\varphi_0}{k}$ — понижение на скважине.

Положив в формуле (15.3) $z = 0$, получим распределение потенциала вдоль кровли пласта:

$$\varphi(r, 0) = \frac{Q}{2\pi l} \ln \frac{\sqrt{l^2 + r^2} + l}{r}. \tag{15.5}$$

Потенциалы линейных источников, которые мы помещаем внутрь скважин, можно складывать. Можно, в частности, таким образом вычислить распределение напора от нескольких скважин вдоль кровли пласта. На фиг. 286 построено несколько напорных воронок, происходящих от действия одной и двух скважин.

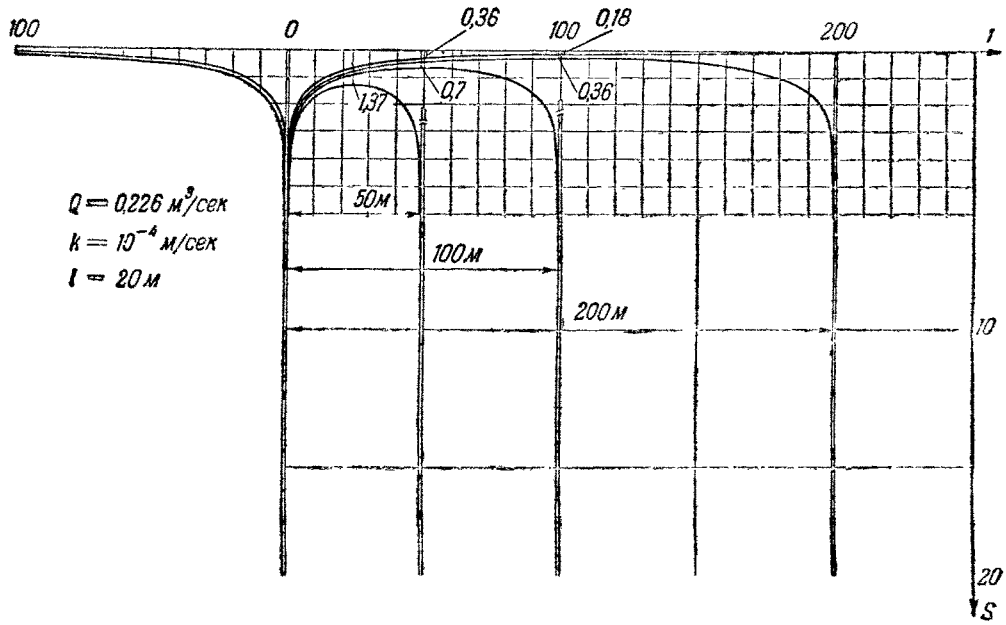
Если перейти к безнапорному движению, считая, что плоскость $z = 0$ была поверхностью грунтовых вод до устройства скважины,

то можно принять, что после устройства скважины свободная поверхность определяется уравнением

$$z = -\frac{\varphi(r, 0)}{k},$$

т. е. считать, что депрессионная поверхность совпадает с поверхностью пьезометрического напора напорного движения.

В случае проницаемого слоя конечной глубины мы заменяем $h = -\frac{\varphi}{k}$ напорного движения на h^2 при переходе к безнапорному



Фиг. 286.

движению. Для случая бесконечной глубины нам представляется более рациональным принятое здесь допущение. Оно оправдывается тем, что по мере углубления проницаемого слоя линия свободной поверхности становится все более пологой.

Возвращаясь к способу построения потенциала скорости с помощью стоков, распределенных вдоль оси скважины, заметим, что для получения более точного решения можно было бы задаться иным распределением интенсивности. Очевидно, что $q(\zeta)$ должно увеличиваться при приближении к концам отрезка $(-l, l)$. В соответствующей плоской задаче распределение $q(\zeta)$ имеет вид

$$q(\zeta) = \frac{q_0}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}}. \qquad (15.6)$$

Если принять этот же закон для пространственного случая, то получится приближенное решение в виде эллиптического интеграла,

тем более точное, чем меньше радиус скважины r_0. Если к выражению (15.6) прибавить целый многочлен относительно ζ, то можно подобрать еще более точное решение.

Прежде чем переходить к несовершенной скважине в слое конечной глубины, приведем несколько формул для источников в пласте, ограниченном горизонтальными плоскостями.

§ 16. Источник между двумя горизонтальными плоскостями. Представляют интерес два основных случая: когда источник находится в области, ограниченной двумя параллельными непроницаемыми плоскостями, и когда одна из граничных плоскостей непроницаема, а другая есть плоскость равного потенциала.

Пусть сток помещен в точке M, которая имеет координаты $(0, 0, \zeta)$. Для первой задачи мы можем поместить стоки в точках, симметричных с данной точкой относительно обеих ограничивающих плоскостей, $z=0$ и $z=c$, затем продолжить процесс отражения, перейдя к плоскостям $z=nc$, $z=-nc$. Взяв у всех источников одинаковую интенсивность и написав ряд для потенциала скорости

$$\varphi=-\frac{q}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+\zeta)^2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(2nc+z-\zeta)^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+(2nc+z+\zeta)^2}}\right]\right\},$$

видим, что ряд является расходящимся. М. Маскет [14] дает выражения, пригодные для малых значений r, и другие, удобные для больших значений r.

Здесь мы приведем выражения в виде определенных интегралов двух функций: 1) функции $U(r, z, \zeta)$, обращающейся в нуль на двух плоскостях $z=\pm c$ и имеющей в точке $z=\zeta$ особенность типа источника, так что

$$U-\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}$$

— регулярная гармоническая функция вблизи точки (x, y, ζ); 2) функцию $V(r, z, \zeta)$, для которой нормальная производная равна нулю на стенках, т. е. $\frac{\partial V}{\partial z}=0$ при $z=\pm c$. В точке $z=\zeta$ характер особенности тот же, что и у функции U.

Имеем, полагая

$$U=\int_0^{\infty} g(z, \zeta) J_0(lr)\, dl, \quad V=\int_0^{\infty} \gamma(z, \zeta) J_0(lr)\, dl,$$

где $J_0(x)$—цилиндрическая функция нулевого порядка:

$$g(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{sh} l(c-z)\operatorname{sh} l(c+\zeta)}{\operatorname{sh} 2lc} & (\zeta\leqslant z\leqslant c),\\ \dfrac{2\operatorname{sh} l(c-\zeta)\operatorname{sh} l(c+z)}{\operatorname{sh} 2lc} & (-c\leqslant z\leqslant\zeta),\end{cases}$$

$$\gamma(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{ch} l(c-z)\operatorname{ch} l(c+\zeta)}{\operatorname{sh} 2lc} & (\zeta\leqslant z\leqslant c),\\ \dfrac{2\operatorname{ch} l(c-\zeta)\operatorname{ch} l(c+z)}{\operatorname{sh} 2lc} & (-c\leqslant z\leqslant\zeta).\end{cases}$$

Можно представить U и V в другом виде, выделив в них слагаемое

$$\int_0^\infty e^{-l|z-\zeta|}J_0(rl)\,dl=\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}=\frac{1}{R}.$$

Другими словами, положим:

$$g(z,\zeta)=e^{-l|z-\zeta|}+h(z,\zeta),\quad \gamma(z,\zeta)=e^{-l|z-\zeta|}+k(z,\zeta),$$

где

$$h(z,\zeta)=\frac{e^{-2lc}}{\operatorname{sh} 2lc}\operatorname{ch} l(z-\zeta)-\operatorname{ch} l(z+\zeta),\quad k(z,\zeta)=\frac{e^{-2lc}}{\operatorname{sh} 2lc}\operatorname{ch} l(z-\zeta)+\operatorname{ch} l(z+\zeta)$$

остаются непрерывными. Теперь имеем:

$$U=\frac{1}{R}+\int_0^\infty h(z,\zeta)J_0(rl)\,dl,\qquad V=\frac{1}{R}+\int_0^\infty k(z,\zeta)J_0(rl)\,dl.$$

Тогда потенциалы

$$U_1=\int_0^\infty h(z,\zeta)J_0(rl)\,dl,\qquad V_1=\int_0^\infty k(z,\zeta)J_0(rl)\,dl$$

остаются непрерывными при $z=\zeta$, так же как производные $\frac{\partial U_1}{\partial z}$, $\frac{\partial V_1}{\partial z}$.

Можно проверить, что все поставленные для U и V условия удовлетворяются, и, следовательно, U и V являются искомыми функциями Грина, дающими источник между твердыми стенками или плоскостями равного напора [24].

Если в точках $z=\zeta$ и $z=-\zeta$, симметричных относительно плоскости $z=0$, поместить источник и сток равной интенсивности в случае 1) или источники одного знака в случае 2), то получим источник между двумя плоскостями, из которых одна — плоскость тока, другая — плоскость равного потенциала.

Для этой последней задачи можно построить решение и в виде ряда, который, являясь знакопеременным, будет сходиться. Этот ряд имеет вид ($z = 0$ — непроницаемая плоскость, $z = c$ — эквипотенциальная поверхность):

$$V = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nc - \zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nc + \zeta)^2}} \right].$$

Для $r < c$ можно пользоваться этим рядом, приняв в расчет несколько первых его членов. Для больших r можно взять разложение в тригонометрический ряд по $\sin \frac{m\pi z}{2c}$ $(m = 2n + 1)$:

$$V = a_1 \sin \frac{\pi z}{2c} + a_3 \sin \frac{3\pi z}{2c} + a_5 \sin \frac{5\pi z}{2c} + \ldots$$

Коэффициенты этого ряда вычисляются так:

$$a_m = \frac{1}{c} \int_0^{2c} \sin \frac{m\pi z}{2c} \sum (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nc - \zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nc + \zeta)^2}} \right] dz.$$

Если положить

$$z + 2nc - \zeta = \tau, \quad z + 2nc + \zeta = \tau,$$

то, изменяя в каждом слагаемом переделы интегрирования, найдем:

$$a_m = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sin \frac{m\pi}{2c} (\tau + \zeta) - \sin \frac{m\pi}{2c} (\tau - \zeta) \right] \frac{d\tau}{\sqrt{r^2 + \tau^2}} =$$

$$= \frac{2}{c} \sin \frac{m\pi\zeta}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi\tau}{2c} d\tau}{\sqrt{r^2 + \tau^2}}.$$

Но имеет место равенство

$$K_0(z) = \int_0^{\infty} \frac{\cos u \, du}{(u^2 + z^2)^{1/2}},$$

где $K_0(z)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого порядка второго рода. Поэтому окончательно можно написать:

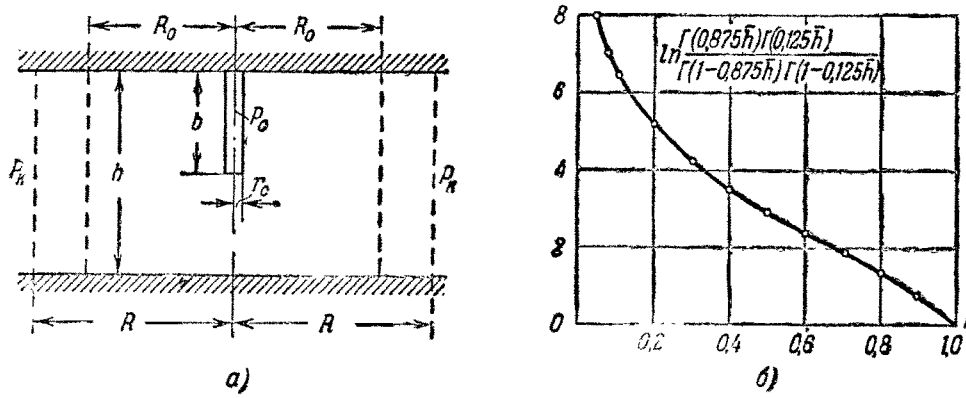
$$V = \frac{4}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2c} \sin \frac{(2n+1)\pi\zeta}{2c} K_0\left(\frac{(2n+1)\pi r}{2c}\right).$$

Отметим, что для больших z имеет место асимптотическое представление функции

$$K_0(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}.$$

Функция V может быть использована [15] при решении задачи об определении коэффициента фильтрации путем откачивания воды.

§ 17. Несовершенные скважины в пласте конечной глубины. Для несовершенной скважины в пласте конечной мощности (фиг. 287, *а*) решение принято искать с помощью точечных стоков, распределенных вдоль оси скважины, интенсивность которых надо подобрать так, чтобы на поверхности скважины потенциал скорости имел постоянное значение (или заданное по какому-нибудь закону). Условия



Фиг. 287.

на кровле и подошве пласта обычно бывают удовлетворены при составлении потенциала скорости каждого стока. Точного решения этой задачи до настоящего времени нет. М. Маскетом дано приближенное решение, полученное путем подбора. Его формула для дебита скважины радиуса r_0, длина проницаемой части которой есть b, в пласте мощности h имеет вид ($\Gamma(a)$ обозначает функцию гамма):

$$Q=\frac{2\pi kb\dfrac{\Delta p}{\gamma}}{\dfrac{1}{2}\left\{2\ln\dfrac{4h}{r_0}-\ln\dfrac{\Gamma(0{,}875\bar{h})\,\Gamma(0{,}125\bar{h})}{\Gamma(1-0{,}875\bar{h})\,\Gamma(1-0{,}125\bar{h})}\right\}-\bar{h}\ln\dfrac{4h}{R}}\left(\bar{h}=\frac{b}{h}\right),\quad(17.1)$$

R — расстояние до «контура питания», на котором $p=p_к$. Для групп несовершенных скважин И. А. Чарным [16] дан приближенный метод вычисления дебита. Приняв, что на некотором удалении от несовершенной скважины поток можно считать плоскопараллельным (это расстояние равно примерно мощности пласта), автор выделяет цилиндрическую поверхность, которую можно считать поверхностью равного потенциала. Тогда к каждой из скважин можно применить формулу Маскета. Потенциалы на выделенных около каждой скважины цилиндрических поверхностях определяются из системы линейных уравнений, в которые войдут дебиты фиктивных «скважин».

На фиг. 287, *б* дан график зависимости от $\bar{h}=\frac{b}{h}$ вспомогательной величины, входящей в формулу (17.1).

Б. И. Сегал [17] рассматривает пространственную решетку несовершенных скважин. Он помещает вдоль оси скважин линию стоков, интенсивность которой подбирает в виде полинома второй степени относительно ординаты точек стока, и кроме того на нижнем конце скважины помещает точечный сток. Интенсивность последнего, а также коэффициенты указанного полинома подбираются путем вычислений.

§ 18. Задача о нагнетании воды в грунт. Если в грунт на достаточную глубину заложить вертикальную трубку с непроницаемыми стенками и открытым дном и затем нагнетать в нее жидкость под постоянным давлением, то через некоторый промежуток времени установится движение со свободной поверхностью и постоянным расходом Q [18]. Потенциал скорости отыскивался [18] в виде суммы (ось x направлена вертикально вниз)

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\rho} + kx. \tag{18.1}$$

Здесь

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

— расстояние точки области движения (x, y, z) от точечного источника интенсивности Q, помещенного в начале координат, k — коэффициент фильтрации.

Функция тока, соответствующая потенциалу скорости (18.1), есть

$$\psi = \frac{kr^2}{2} - \frac{Q}{2\pi}\cos\theta \tag{18.2}$$

$$\left(r^2 = y^2 + z^2,\ \theta = \arccos\frac{x}{\rho}\right).$$

Одной из поверхностей тока является поверхность так называемого «полутела Прандтля», которая была принята [18] за свободную поверхность изучаемого течения. Однако эта поверхность не является свободной поверхностью грунтового потока, так как на последней должно выполняться условие постоянства давления

$$\frac{p}{\gamma} = \varphi - kx = \text{const}. \tag{18.3}$$

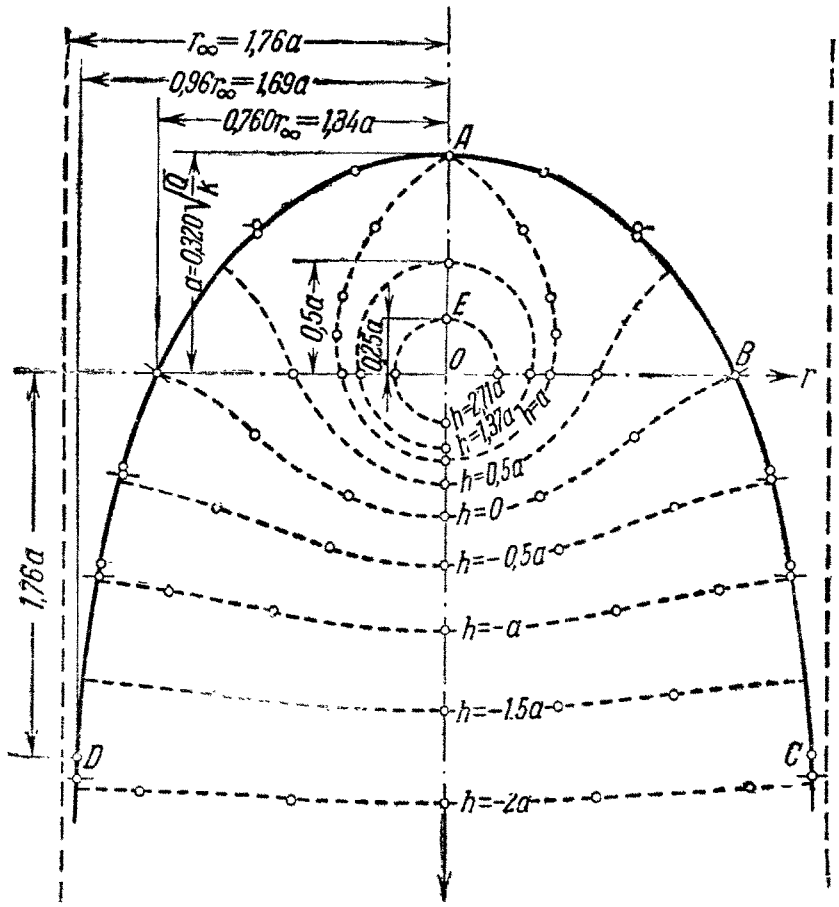
Но при выполнении условия (18.3) мы из уравнения (18.1) получаем сферические поверхности, т. е. изобарическими поверхностями являются сферы $\rho = \text{const}$.

В статье В. М. Насберга [19] дается также приближенное, но более точное решение, а именно, в правой части (18.1) он прибавляет слагаемое

$$-\frac{Q_1}{\sqrt{(b+x)^2 + r^2}},$$

соответствующее стоку в точке $(-b, 0, 0)$ интенсивности Q_1.

В. М. Насберг подбирает Q_1 и b так, чтобы в точках A и B фиг. 288 условие $\varphi - kx = 0$ было удовлетворено точно. При этом получаются



Фиг. 288.

такие значения Q_1 и b в зависимости от расхода Q:

$$Q_1 = 3{,}50Q, \quad b = 5{,}1\sqrt{\frac{Q}{4\pi k}}.$$

Ордината точки A и абсцисса точки B оказываются имеющими такие значения:

$$x_A = 0{,}320\sqrt{\frac{Q}{k}}, \qquad y_B = 0{,}429\sqrt{\frac{Q}{k}}.$$

Окончательно получаем:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{3{,}50}{\sqrt{(b+x)^2+r^2}}\right] + kx,$$

$$\psi = \frac{kr^2}{2} - \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} - \frac{3{,}50\,(x+b)}{\sqrt{(b+x)^2+r^2}}\right] \quad \left(b = 5{,}1\sqrt{\frac{Q}{4\pi k}}\right).$$

Уравнение линии тока DAC:

$$r^2 - \frac{Q}{2\pi k}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} - \frac{3{,}50\,(x+b)}{\sqrt{(x+b)^2+r^2}} + 4{,}50\right] = 0.$$

При этом подтверждается положение [18], что верхняя часть свободной поверхности DAC (см. фиг. 288) близка к эллипсоиду вращения. На бесконечности получаем:

$$r_\infty = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}.$$

На фиг. 288 построены линии равного напора. Буквой a обозначена величина

$$a = \sqrt{\frac{Q}{4\pi k}} \approx 0{,}320\sqrt{\frac{Q}{k}}.$$

На этом мы заканчиваем краткое изложение имеющихся результатов по пространственным задачам.

Отметим, что имеется решение группы пространственных двумерных задач, которые могут быть применены к случаю скважин в изогнутом пласте, что представляет интерес главным образом в теории фильтрации нефти; это — задачи об источниках и стоках на поверхностях [20,21].

ГЛАВА X

ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ

А. БЕЗНАПОРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОДОУПОРА

§ 1. Гидравлическая теория и ее основные положения. Под *гидравлической теорией* мы будем понимать такую теорию, в которой применяется *осреднение потока по высоте*. Тем самым уменьшается число измерений в изучаемом движении: плоская задача превращается в одноразмерную, т. е. такую, в которой элементы движения зависят лишь от одной координаты x, если движение происходит в плоскости xz, и в двумерную, где координатами являются x, y, если рассматривается движение в трехмерном пространстве x, y, z.

В гидродинамической теории рассматриваются все — два или три — измерения, отвечающие данной задаче. При этом могут вводиться те или иные упрощения, например, в граничных условиях и т. д.

При современном развитии гидравлической теории в некоторых задачах приходится пользоваться сложным математическим аппаратом (см., например, главу IX, §§ 8—13); поэтому нельзя уже противопоставлять гидравлическую теорию гидродинамической как простую теорию. Сравнение для ряда задач гидравлических и гидродинамических решений показывает, что во многих случаях гидравлические теории дают хорошие результаты.

При расчете фильтрации через земляные плотины применяются методы, которые можно назвать полугидравлическими: плотина разбивается на участки, из которых средний рассчитывается по формуле Дюпюи, а участки, примыкающие к верхнему и нижнему бьефам, рассчитываются различными искусственными приемами.

Свободная поверхность грунтового потока бывает слабо изогнутой, если поток обнимает большую площадь, например, когда рассматривается фильтрация из канала в реку, фильтрация при орошении и т. п. Такой поток может занимать площадь, измеряемую квадратными километрами, в то время как глубина потока измеряется в метрах или десятках метров и на больших протяжениях — за исключением областей, прилежащих непосредственно к каналу или реке, — изменяется лишь на доли метра.

На границах области движения, т. е. возле самых рек и каналов, поверхность потока может оказаться сильно изогнутой, непосредственно

под каналом течение носит пространственный характер. В этих частях потока требуются более точные методы исследования.

Что касается тех участков течения, на которых оно является слабо изменяющимся от точки к точке, и где скорости близки к горизонтальным, то для них применима излагаемая здесь гидравлическая теория. Эта теория у нас уже встречалась при изучении напорных движений (глава IX, § 8). Здесь мы останавливаемся на безнапорных движениях.

Вспомним условие, которое должно выполняться на свободной поверхности: это условие постоянства давления, т. е. равенства его атмосферному давлению (или капиллярному).

Зависимость между потенциалом скорости и давлением имеет вид (см. главу I, § 11):

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + z\right). \tag{1.1}$$

Потенциал скорости пропорционален напору

$$\varphi = -kh, \tag{1.2}$$

где

$$h = z + \frac{p}{\rho g}, \tag{1.3}$$

причем h есть функция от координат x, y, z. Считая атмосферное давление равным нулю, получим из (1.3) условие на свободной поверхности в виде

$$h(x, y, z) = z \tag{1.4}$$

или из (1.2)

$$\varphi(x, y, z) + kz = 0.$$

Если мы считаем поверхность грунтового потока слабо изогнутой, то это значит, что z слабо изменяется, колеблясь около некоторого среднего значения $\bar{z}$. Разложим h в ряд по степеням $z - \bar{z}$:

$$h(x, y, z) = h(x, y, \bar{z}) + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=\bar{z}}(z - \bar{z}) + \ldots$$

Будем считать вертикальные скорости течения очень малыми, т. е. будем считать малой величину $\frac{\partial h}{\partial z}$, пропорциональную вертикальной скорости, и произведением этой величины на малую величину $z - \bar{z}$ будем пренебрегать. Другими словами, мы заменяем действительный напор $h(x, y, z)$ величиной $h(x, y, \bar{z})$, зависящей от средней глубины потока $\bar{z}$, но не зависящей от координаты z. Будем его обозначать через $h(x, y)$:

$$h = h(x, y).$$

Это означает, что мы считаем напор постоянным вдоль каждой вертикали, или, иначе, поверхности равного напора принимаем за вер-

тикальные цилиндрические поверхности [1]. В плоском течении линии равного напора будут вертикальными прямыми. (Ниже мы увидим, что в это основное предположение гидравлической теории можно будет внести некоторые поправки.)

Теперь можно считать уравнение (1.4) [приняв вместо $h(x, y, z)$ осредненное по высоте значение $h(x, y)$] уравнением свободной поверхности:

$$z = h(x, y). \tag{1.5}$$

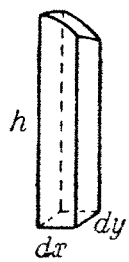
Таким образом, в гидравлической теории напор в каком-нибудь сечении принимается за глубину воды в этом сечении.

Выведем уравнение неразрывности для потока со слабо изменяющейся свободной поверхностью.

Горизонтальные составляющие скорости u и v выражаются через напор $h(x, y)$ при помощи равенств

$$u = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{1.6}$$

Выделим в жидкости столб, ограниченный сверху свободной поверхностью, снизу — горизонтальной плоскостью xy, представляющей основание проницаемого пласта, с боков — вертикальными плоскостями, образующими в основании прямоугольник со сторонами dx, dy (фиг. 289).



Фиг. 289.

Расход через левую грань полученного тела равен площади грани $h\,dy$, умноженной на скорость u. Обозначим через q_x расход в направлении оси x (на единицу длины в направлении оси y). Тогда расход через левую грань тела будет равен

$$q_x\,dy = -k\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)_x dy. \tag{1.7}$$

Здесь h и $\frac{\partial h}{\partial x}$ берутся в точке (x, y). Расход через правую грань равен такому же выражению (1.7), в котором надо лишь заменить x на $x + dx$:

$$q_{x+dx}\,dy = -k\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x+dx} dy. \tag{1.8}$$

Разность между количеством жидкости, вытекающим в единицу времени через грань $x + dx$, и количеством ее, втекающим через грань x, равна $(q_{x+dx} - q_x)\,dy$; по формуле Лагранжа

$$f(x + dx) - f(x) = f'(\xi)\,dx$$

где ξ — некоторое число, лежащее между x и $x + dx$), и изменение расхода в направлении оси x преобразуется так:

$$(q_{x+dx} - q_x)\,dy = \frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx\,dy = -k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)dx\,dy. \tag{1.9}$$

Точно так же найдем изменение расхода в направлении оси y:

$$\frac{\partial q_y}{\partial y}\,dx\,dy = -k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{1.10}$$

В выражениях (1.9) и (1.10) нужно считать независимые переменные равными величинам ξ, η, лежащим соответственно между x и $x+dx$, y и $y+dy$. При переходе к пределу, когда $dx \to 0$, $dy \to 0$, получим вместо (ξ, η) значение (x, y).

Общее изменение расхода через боковые грани, равное сумме выражений (1.9) и (1.10), в установившемся движении несжимаемой жидкости может компенсироваться поступлением или оттоком жидкости сверху или через основание пласта.

Сверху на свободную поверхность может падать дождь или вода при поливе — эти явления называют *инфильтрацией*; *испарение* дает отток жидкости с поверхности. Через основание пласта может происходить слабое просачивание, если нижележащий пласт является не абсолютно водоупорным (что обычно и имеет место в действительности), но слабо проницаемым. Этот случай будет рассмотрен ниже в настоящей главе. Пусть на единицу площади (горизонтальной проекции свободной поверхности) поступает сверху расход e и снизу расход w_0. На площадку $dx\,dy$ соответствующие расходы будут:

$$e\,dx\,dy,\quad w_0\,dx\,dy. \tag{1.11}$$

Складывая выражения (1.9), (1.10) и приравнивая их сумме (1.11), после деления на $dx\,dy$ получим:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = e + w_0$$

или

$$k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] + e + w_0 = 0. \tag{1.12}$$

Величина e положительна, если вода поступает в область движения, т. е. в случае инфильтрации или в случае превышения интенсивности инфильтрации над интенсивностью испарения, и отрицательна в случае испарения или преобладания испарения над инфильтрацией. Вертикальная скорость w_0 положительна, если вода просачивается из нижнего грунта в верхний, и отрицательна в обратном случае.

Если основание грунта непроницаемо и отсутствуют инфильтрация и испарение, то $e = w_0 = 0$, и уравнение (1.12) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 (h^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (h^2)}{\partial y^2} = 0. \tag{1.13}$$

В этом случае функция h^2 удовлетворяет уравнению Лапласа.

§ 2. Плоское течение с горизонтальным водоупором. Рассмотрим движение грунтового потока в плоскости xz (фиг. 290).

Уравнение (1.13) переходит в данном случае в следующее:

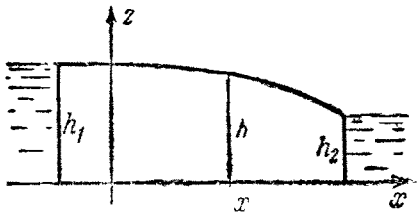
$$\frac{d^2(h^2)}{dx^2} = 0. \tag{2.1}$$

Интегрирование дает параболу (A и B — произвольные постоянные)

$$h^2 = Ax + B. \tag{2.2}$$

Можно также получить эту параболу, исходя из выражения расхода q через сечение x (рассчитанного на единицу длины потока в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа фиг. 290):

$$q = -kh\frac{dh}{dx}. \tag{2.3}$$



Фиг. 290.

Интегрируя это уравнение и подставляя координаты точек (x_1, h_1), (x_2, h_2), после преобразований получим:

$$q = -\frac{k(h_2^2 - h_1^2)}{2(x_2 - x_1)}. \tag{2.4}$$

Формула (2.4) называется *формулой Дюпюи* [1].

Мы видели, что такая же формула получается при точном решении двумерной задачи о притоке к горизонтальной дрене (глава II, § 10). В § 9 главы VII эта же формула выведена для земляной перемычки, где, однако, h_2 не есть ордината свободной поверхности.

Мы уже указывали, что в гидравлической теории вертикальными скоростями обычно пренебрегают. Однако можно дать способ приближенного учета вертикальных скоростей потока. Напишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

и проинтегрируем его по z, помня, что у нас u есть функция только от x, определяемая уравнением

$$u = -k\frac{dh}{dx}.$$

Получим:

$$w = -\int_0^z \frac{\partial u}{\partial x}\,dz = k\int_0^z \frac{d^2h}{dx^2}\,dz.$$

Так как $\frac{d^2h}{dx^2}$ не зависит от z, то интегрирование дает, учитывая условие, что на водоупоре при $z = 0$ вертикальная скорость равна нулю:

$$w = kz\frac{d^2h}{dx^2}.$$

С помощью выражения (2.3) получаем:

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{q^2}{k^2h^3}.$$

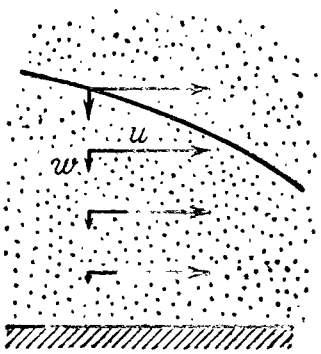
Отсюда

$$w = -\frac{q^2z}{kh^3}.$$

На свободной поверхности, где $z = h$, имеем:

$$w = -\frac{q^2}{kh^2} = -k\left(\frac{q}{kh}\right)^2.$$

Отсюда видно, что вертикальная скорость всегда отрицательна, величина ее возрастает с высотой (фиг. 291).



Фиг. 291.

§ 3. Свободная поверхность при инфильтрации или испарении [9]. В уравнении (1.12) примем $w_0 = 0$, но оставим слагаемое e, определяющее инфильтрацию или испарение. Ограничиваясь рассмотрением плоского движения в плоскости xz, перепишем уравнение (1.12) так:

$$k\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) + e = 0. \qquad (3.1)$$

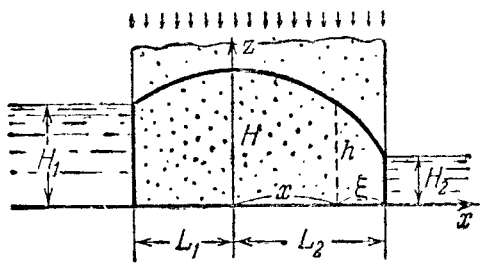
Интегрирование его дает:

$$kh^2 + ex^2 = C_1x + C_2. \qquad (3.2)$$

В случае инфильтрации, при $e > 0$, имеем уравнение эллипса, в случае испарения, когда можно положить $e = -\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), получим уравнение гиперболы

$$kh^2 - \varepsilon x^2 = C_1x + C_2. \qquad (3.3)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 нужно задать два условия, например две точки свободной поверхности. Перемещая начало координат вдоль оси x, можно добиться того, чтобы $C_1 = 0$. Пусть, например, при фильтрации из водоприемника глубины H_1 в водоприемник глубины H_2 имеется инфильтрация на поверхность грунтового потока (фиг. 292). Обозначая максимальную ординату свободного потока через H, а расстояние ее от водоприемников соответственно через L_1 и L_2, перепишем уравнение (3.2) следующим образом:



Фиг. 292.

$$h^2 + \frac{e}{k}x^2 = H^2.$$

При этом, полагая $x=-L_1$, $h=H_1$ и $x=L_2$, $h=H_2$, получим зависимости

$$H_1^2+\frac{e}{k}L_1^2=H^2,\quad H_2^2+\frac{e}{k}L_2^2=H^2. \tag{3.4}$$

Обозначая расстояние между водоприемниками через $2L$, будем иметь уравнение

$$L_1+L_2=2L. \tag{3.5}$$

Два уравнения (3.4) и уравнение (3.5), в которых L, H_1, H_2 являются заданными, служат для определения неизвестных L_1, L_2 и H.

Можно вместо x ввести расстояние от водоприемников ξ. Для правого участка, полагая

$$x+\xi=L_2,$$

получим уравнение части депрессионной кривой в виде

$$h^2=\frac{e}{k}(2L_2\xi-\xi^2)+H_2^2.$$

Для левой части депрессионной кривой, полагая

$$x+\xi=L_1,$$

будем иметь:

$$h^2=\frac{e}{k}(2L_1\xi-\xi^2)+H_1^2.$$

Что касается случая испарения, то здесь представляются две возможности в зависимости от знака C_2 (если выбрать $C_1=0$), так как может получиться одна из двух сопряженных гипербол.

§ 4. Фильтрация в грунтах, слабо неоднородных по вертикали. Мы уже встречались в главе VIII с простейшими напорными движениями в неоднородных — слоистых — грунтах. Здесь мы рассматриваем движение со свободной поверхностью в грунте, коэффициент фильтрации которого является функцией от высоты z.

Вычислим расход q_x в направлении оси x, протекающий через прямоугольник высоты h, основание которого равно единице длины и плоскость которого перпендикулярна к оси x. Разбивая h на элементы dz, весь прямоугольник разобьем на элементарные прямоугольники с расходом

$$-k(z)\frac{\partial h}{\partial x}\cdot dz.$$

Проинтегрировав это выражение по z в пределах от нуля до h, найдем расход q_x через упомянутый прямоугольник высоты h:

$$q_x=-\int_0^h k(z)\frac{\partial h}{\partial x}dz=-\frac{\partial h}{\partial x}\int_0^h k(z)\,dz. \tag{4.1}$$

Здесь $\frac{\partial h}{\partial x}$ можно вынести за знак интеграла, так как h согласно рассматриваемой гидравлической теории не зависит от z (см. § 1 этой главы).

Точно так же определяется расход q_y через площадку высоты h с основанием, равным единице, перпендикулярную к оси y:

$$q_y = -\frac{\partial h}{\partial y}\int_0^h k(z)\,dz. \tag{4.2}$$

Н. К. Гиринский [6] ввел функцию

$$\Phi(x, y) = \int_0^h (z-h)\,k(z)\,dz, \tag{4.3}$$

через которую просто выражаются q_x и q_y:

$$q_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{4.4}$$

Докажем первое из равенств (4.4). Для этого заметим, что x содержится в качестве параметра в функции $h(x, y)$, последняя же входит под знак интеграла и в качестве предела интеграла. Применяя к (4.3) формулу дифференцирования по параметру α для интеграла

$$I = \int_a^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx,$$

а именно:

$$\frac{dI}{d\alpha} = f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} + \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx,$$

получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (h-h)\,k(h)\frac{\partial h}{\partial x} - \int_0^h \frac{\partial h}{\partial x}\,k(z)\,dz = -\frac{\partial h}{\partial x}\int_0^h k(z)\,dz,$$

что и доказывает первую из формул (4.4). Вторая доказывается таким же образом.

Если грунт однороден, то

$$\Phi(x, y) = k\int_0^h (z-h)\,dz = k\frac{(z-h)^2}{2}\Big|_0^h = -\frac{kh^2}{2}. \tag{4.5}$$

Функция (4.3), как нетрудно проверить, удовлетворяет уравнению Лапласа по переменным x, y. Таким образом, функция $\Phi(x, y)$ представляет обобщение функции

$$-\frac{kh^2}{2}$$

на случай грунта, неоднородного по вертикали.

Пример 1. В качестве примера непрерывного изменения $k(z)$ с высотой возьмем случай линейной зависимости:

$$k(z) = k_0(1 + bz).$$

Подстановка этого выражения в (4.3) и интегрирование дают:

$$\Phi(x) = -\frac{k_0 h^2}{2} - \frac{k_0 b h^3}{6}. \tag{4.6}$$

Считая расход q постоянным для всех x и полагая

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = q,$$

после интегрирования получим:

$$\Phi = qx + C, \tag{4.7}$$

где C — произвольная постоянная. В силу (4.6) будем иметь уравнение параболы третьего порядка

$$-\frac{k_0 h^2}{2} - \frac{k_0 b h^3}{6} = qx + C$$

или

$$h^2 + \frac{1}{3} b h^3 = -\frac{2q}{k_0} x + C_1. \tag{4.8}$$

Задание двух точек (x_1, h_1) и (x_2, h_2) свободной поверхности дает нам q:

$$q = -\frac{k_0 (h_2 - h_1)\left[h_2 + h_1 + \frac{b}{3}(h_2^2 + h_1 h_2 + h_1^2)\right]}{2(x_2 - x_1)}. \tag{4.9}$$

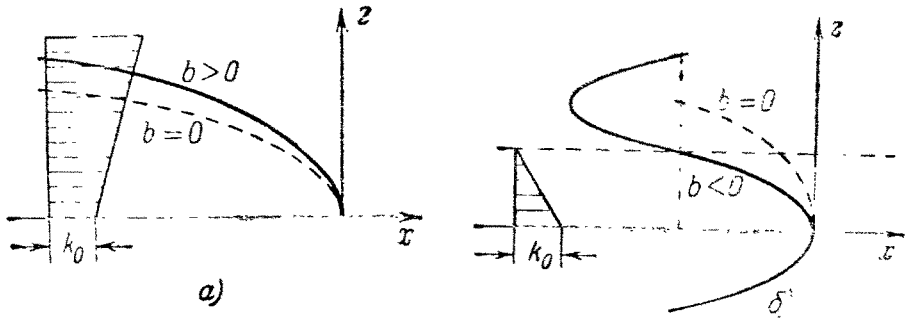
Если $b > 0$, то коэффициент фильтрации возрастает с высотой, и абсолютное значение q больше, чем при $b = 0$; если $b < 0$, то k убывает с высотой, и q по абсолютной величине меньше, чем при $b = 0$.

Исследование формы свободной поверхности (можно принять $C_1 = 0$) показывает, что при $b > 0$ получается кривая (фиг. 293, *а*), лежащая выше параболы

$$h^2 = -\frac{2q}{k_0} x.$$

При $b < 0$ в качестве возможной формы свободной поверхности получается лишь участок кривой, на котором h меняется от нуля

до $h_1 = -\frac{1}{b}$, а x — от нуля до $x_1 = -\frac{k_0}{3qb^2}$, т. е. участок от точки перегиба до вершины параболы (0, 0). Этому участку отвечает изменение коэффициента фильтрации от k_0 до нуля (фиг. 293, *б*).



Фиг. 293.

Пример 2. В качестве второго примера мы возьмем случай разрывного изменения $k(z)$, когда

$$k(z) = k_0 \quad \text{для} \quad 0 < z < h_0,$$
$$k(z) = k_1 \quad \text{для} \quad z > h_0,$$

причем k_0 и k_1 постоянны. Другими словами, мы рассматриваем двуслойный грунт с двумя коэффициентами фильтрации (фиг. 294, 295). Тогда в нижнем слое будем иметь для Ф выражение

$$\Phi = k_0 \int_0^h (z - h)\, dz = -\frac{k_0}{2} h^2, \tag{4.10}$$

в верхнем же слое

$$\Phi = k_0 \int_0^{h_0} (z - h)\, dz + k_1 \int_{h_0}^{h} (z - h)\, dz =$$

$$= -\frac{k_1}{2}\left\{[h + (c-1)h_0]^2 + c(c-1)h_0^2\right\}, \tag{4.11}$$

где обозначено

$$c = \frac{k_0}{k_1}.$$

Будем рассматривать возможное движение в плоскости xz. При этом уравнение Лапласа, которому удовлетворяет функция Ф, сведется к уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0.$$

Интегрирование его дает:

$$\Phi = C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Принимая во внимание выражения для Ф (4.10) и (4.11), получим, что в нижнем грунте уравнение депрессионной кривой будет:

$$-\frac{k_0}{2}h^2 = C_1 x + C_2$$

или

$$h^2 = Cx + D, \tag{4.12}$$

где C и D — новые постоянные:

$$C = -\frac{2}{k_0}C_1, \quad D = -\frac{2}{k_0}C_2.$$

В верхнем грунте

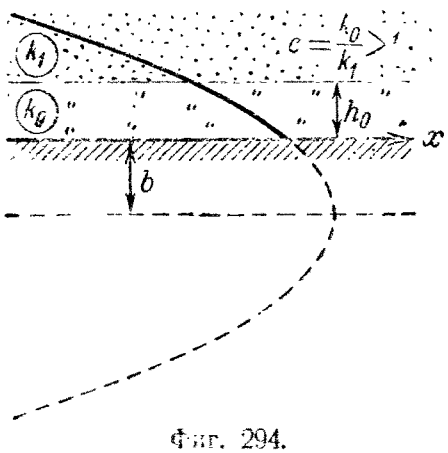
$$[h + (c-1)h_0]^2 = Ax + B. \tag{4.13}$$

A, B, C, D — постоянные, подлежащие определению.

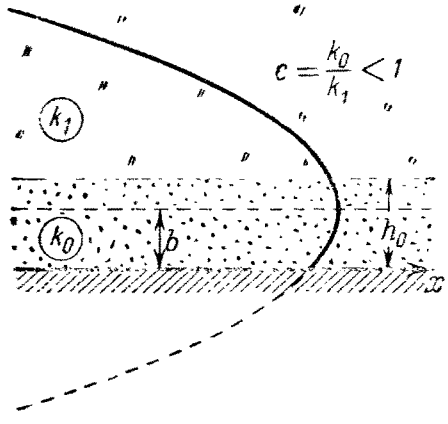
Уравнение (4.13) представляет параболу с осью симметрии

$$z = -(c-1)h_0 = b.$$

Эта ось лежит под осью x, если $c > 1$ (фиг. 294), т. е. если нижний грунт более проницаем, чем верхний, причем абсолютное значение b в этом случае может быть сколь угодно большим (при доста-



Фиг. 294.



Фиг. 295.

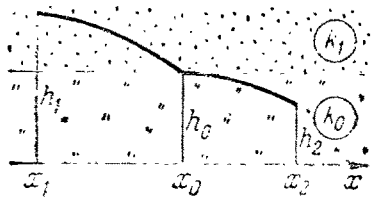
точно большом $c = \frac{k_0}{k_1}$). Чем больше b, тем более пологой является свободная поверхность. Если $c < 1$, то ось параболы (4.13) будет выше оси абсцисс (фиг. 295), причем ее расстояние от оси абсцисс

$$b = (1-c)h_0$$

заключается между нулем и h_0.

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что свободная поверхность проходит через точки (x_1, h_1), (x_2, h_2), причем первая

из этих точек лежит в верхнем грунте, вторая — в нижнем (фиг. 296). Обозначим неизвестную абсциссу той точки, в которой $h = h_0$, где h_0 — толщина нижнего слоя грунта, через x_0. Тогда уравнения парабол (4.12) и (4.13) примут соответственно вид



Фиг. 296.

$$(h+b)^2 = (h_0+b)^2 + \\ + (h_1 - h_0)(h_1 + h_0 + 2b)\frac{x_0 - x}{x_0 - x_1},$$

$$h^2 = h_0^2 - (h_0^2 - h_2^2)\frac{x - x_0}{x_2 - x_0},$$

где

$$b = (c-1)h_0.$$

Абсцисса x_0 определится равенством

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

где

$$m_1 = c(h_0 + h_2)(h_0 - h_2),$$
$$m_2 = (h_1 - h_0)(h_1 + h_0 + 2b).$$

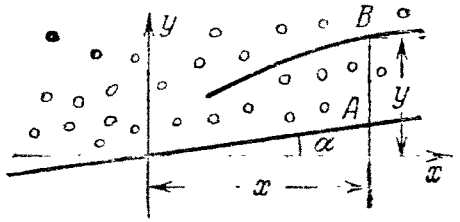
Для расхода получается формула

$$q = \frac{k}{2}\frac{(1-c)(h_1 - h_0)^2 + c(h_1^2 - h_2^2)}{x_2 - x_1}.$$

§ 5. Фильтрация с учетом уклона водоупора [2]. Пусть линия водоупора составляет малый угол α с горизонтальной осью. Положим:

$$i = \operatorname{tg}\alpha.$$

Через y обозначим ординату свободной поверхности, отсчитываемую от горизонтальной оси фиг. 297. Для вычисления расхода через сечение x нужно скорость $u = -k\frac{dy}{dx}$ умножить на отрезок AB (фиг. 297), равный



Фиг. 297.

$$y - ix.$$

Следовательно,

$$q = -k(y - ix)\frac{dy}{dx}. \qquad (5.1)$$

Расход q является постоянным. Чтобы проинтегрировать уравнение (5.1), перепишем его следующим образом:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{ki}{q}x + \frac{k}{q}y = 0. \qquad (5.2)$$

Полученное линейное уравнение имеет общее решение

$$x = Ae^{\frac{kiy}{q}} + \frac{y}{i} + \frac{q}{ki^2}.$$

которое можно переписать еще так (B — новая произвольная постоянная):

$$y - ix + \frac{q}{ki} = Be^{\frac{kiy}{q}}. \tag{5.3}$$

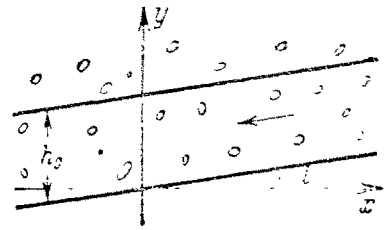
При $B = 0$ получаем частное решение

$$y = ix - \frac{q}{ki}. \tag{5.4}$$

Оно соответствует так называемой *равномерной фильтрации*[1]), т. е. фильтрации с постоянной скоростью

$$u = -k\frac{dy}{dx} = -ki,$$

параллельной дну потока (фиг. 298).



Фиг. 298.

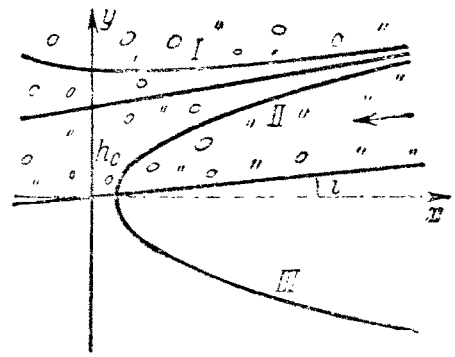
Постоянная глубина потока h_0 в случае равномерной фильтрации называется *нормальной глубиной*. Расход для равномерной фильтрации равен

$$q = -kh_0 i. \tag{5.5}$$

При отличном от нуля значении B в уравнении (5.3) фильтрация называется *неравномерной*. Кривая (5.3) имеет асимптотой прямую (5.4); с помощью (5.5) можно переписать равенства (5.3) и (5.4) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} y - ix - h_0 &= Be^{-\frac{y}{h_0}}, \\ y &= ix + h_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Рассмотрим различные случаи уравнения (5.3), которые могут представиться.

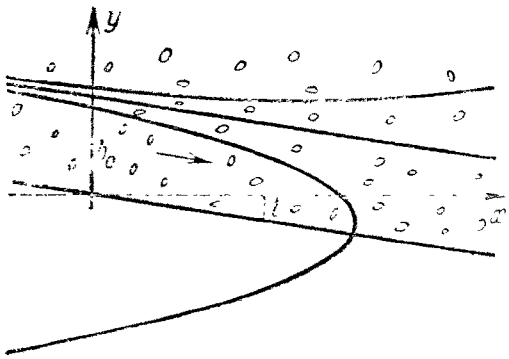


Фиг. 299.

1°. $i > 0$, $h_0 > 0$. Приближение к асимптоте будет при $y \to +\infty$. Если $B > 0$, то кривая лежит над асимптотой. Говорят, что депрессионная кривая есть *кривая подпора* (кривая *I* на фиг. 299). Если $B < 0$, то вся кривая (5.3) лежит под асимптотой. При этом она состоит из двух частей: часть *II* лежит над водоупором и, следовательно, отвечает возможному в данном случае движению. Она называется *кривой спада*. Часть *III* находится под линией водоупора и в рассматриваемом случае не отвечает реальному движению (она у нас будет фигурировать дальше). Движение происходит вниз по уклону.

[1]) Для равномерной фильтрации решение (5.4) является точным гидродинамическим. Годограф скорости вырождается при этом в точку.

2°. $i<0$, $h_0>0$. Этот случай изображен на фиг. 300. Стремление к асимптоте будет для $y\to-\infty$. Опять получаем кривую подпора и кривую спада, а также ветвь кривой, расположенную в области водоупора.



Фиг. 300

По существу случай 2° не отличается от случая 1°; дело сводится лишь к другому расположению чертежа (ниже, при рассмотрении двуслойного грунта с наклонной линией раздела, эти случаи будут различными по существу).

Отметим, что в обоих рассмотренных случаях течение происходит вниз по уклону водоупора. Это видно и из знака в формуле

$$q=-kh_0i,$$

которая дает для q отрицательное значение в случае 1° и положительное в случае 2°. Формула (5.7) определяет расход в бесконечно далеком сечении потока.

3°. $i>0$, $h_0<0$. Введем обозначение

$$-h_0=h'. \tag{5.7}$$

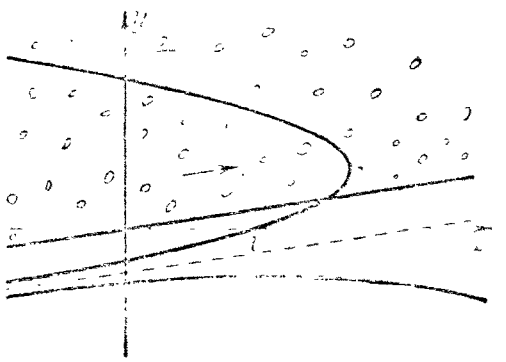
Тогда уравнение (5.6) перепишется так:

$$y-ix+h_0'=Be^{\frac{y}{h_0'}}. \tag{5.8}$$

Мы видим, что теперь стремление кривой (5.8) к асимптоте

$$y=ix-h_0'$$

будет происходить при отрицательных значениях y, в области водоупора, где мы получаем ветви кривой, ранее обозначенные нами через *I* и *II*. В верхней же части чертежа фиг. 301, над границей водоупора, имеем ту ветвь кривой, которая у нас была обозначена как ветвь *III*.



Фиг. 301.

Как видно из формулы

$$q=kih_0', \tag{5.9}$$

для случая 3° расход получается положительным, и движение происходит вверх, против уклона линии водоупора.

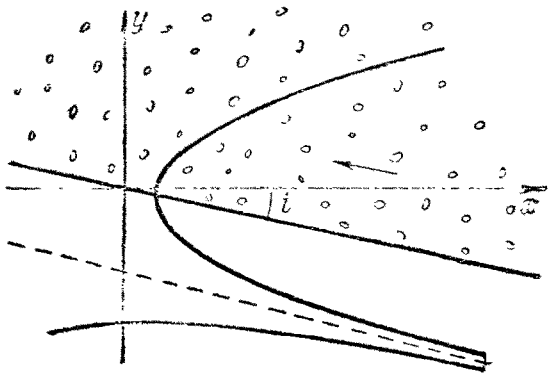
4°. $i<0$, $h_0<0$. Этот случай отличается от 3° лишь расположением чертежа. Расход по формуле (5.5) получается отрицательным (фиг. 302).

Вернемся к уравнению (5.3). Если нам известна некоторая точка (x_1, y_1) свободной поверхности, то мы сможем определить постоянную B. Подставляя x_1, y_1 в (5.6), получим:

$$y_1 - ix_1 - h_0 = Be^{-\frac{y_1}{h_0}}. \quad (5.10)$$

Разделив почленно (5.3) на (5.10), исключим B и получим уравнение

$$y - ix - h_0 = (y_1 - ix_1 - h_0)\, e^{-\frac{y-y_1}{h_0}}. \quad (5.11)$$



Фиг. 302.

Если известна еще одна точка (x_2, y_2) свободной поверхности, то, подставив ее координаты в уравнение (5.11), получим после логарифмирования:

$$y_2 - y_1 = h_0 \ln \frac{y_1 - ix_1 - h_0}{y_2 - ix_2 - h_0}. \quad (5.12)$$

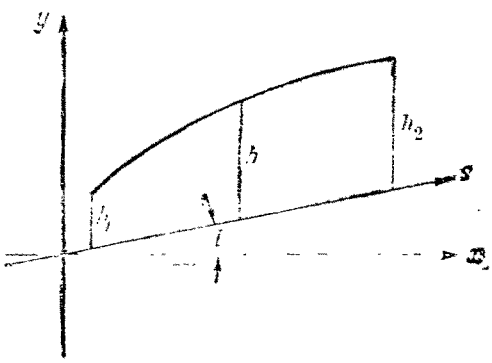
Из этого уравнения можно найти h_0. Тогда формула (5.5) позволит вычислить расход.

§ 6. Переход к другим переменным. Дюпюи [1] и Н. Н. Павловский [2], которые исследовали задачу об установившемся движении грунтовых вод при наклонной линии водоупора, употребляли другие переменные вместо наших x и y. Чтобы перейти к ним, положим

$$h = y - ix \quad (6.1)$$

и введем новую абсциссу s, отсчитываемую вдоль границы водоупора (фиг. 303). Между s и x имеет место зависимость

$$s = -\frac{x}{\cos\alpha}.$$



Фиг. 303

При достаточно малых углах $\cos\alpha \approx 1$, и мы будем считать

$$s = x$$

(или отсчитывать x по горизонтальной оси); в этом случае уравнение (6.1) перепишется в виде

$$q = -kh\left(\frac{dh}{dx} + i\right), \quad (6.2)$$

а первое из уравнений (5.6) примет вид

$$h - h_0 = Be^{-\frac{h+ix}{h_0}}. \tag{6.3}$$

Вместо (5.11) и (5.12) будем иметь соответственно:

$$h - h_0 = (h_1 - h_0)\, e^{-\frac{h-h_1+i(x-x_1)}{h_0}} \tag{6.4}$$

или после логарифмирования

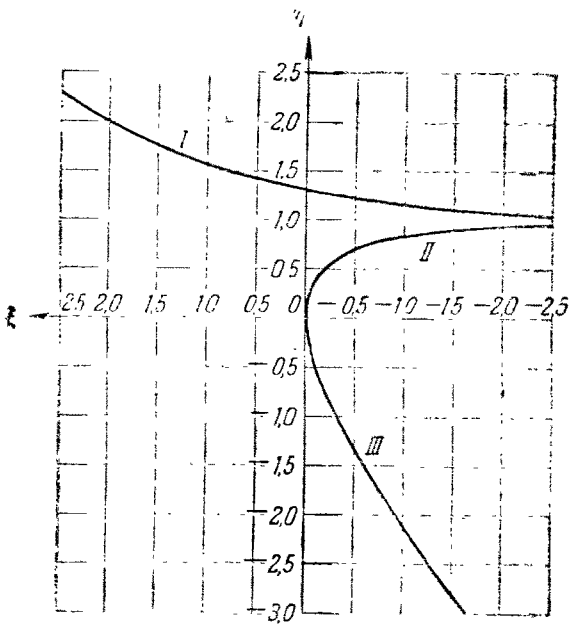
$$h - h_1 + i(x - x_1) = h_0 \ln \frac{h_1 - h_0}{h - h_0}, \tag{6.5}$$

$$h_2 - h_1 + i(x_2 - x_1) = h_0 \ln \frac{h_1 - h_0}{h_2 - h_0}. \tag{6.6}$$

Последнее уравнение будет нам служить для определения одной из неизвестных: h_1, h_2, h_0, $x_2 - x_1$, когда три из этих величин заданы.

Прежде всего мы рассмотрим вопрос о построении депрессионной кривой. Для этого уравнение (6.5) перепишем в виде

$$i(x - x_1) = h_1 - h - h_0 \ln \left| \frac{h - h_0}{h_0} \right| + h_0 \ln \left| \frac{h_1 - h_0}{h_0} \right|. \tag{6.7}$$



Фиг. 304.

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \frac{i(x - x_1)}{h_0} &= \xi, \quad \frac{h}{h_0} = \eta, \\ \ln \left| \frac{h_1 - h_0}{h_0} \right| + \frac{h_1}{h_0} &= C \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

и перепишем (6.7) таким образом:

$$\xi = -\eta - \ln|\eta - 1| + C. \tag{6.9}$$

Давая постоянной C различные значения, будем получать одну и ту же кривую, лишь смещенную вдоль оси ξ. Поэтому достаточно построить кривую

$$\xi = -\eta - \ln|\eta - 1|, \tag{6.10}$$

чтобы иметь возможность затем построить линию свободной поверхности для любых значений C.

Кривая (6.10), изображенная на фиг. 304, была построена Н. Н. Павловским, причем он рассматривал два случая: $\eta < 1$, когда уравнение (6.10) переписывается так:

$$\xi = -\eta - \ln(1 - \eta),$$

что дает кривые подпора и спада, и $\eta_1 > 1$, когда имеем:

$$\xi = -\eta - \ln(\eta - 1),$$

что дает кривую обратного течения.

Мы уже указали, что уравнение (6.6) позволяет определить одну из входящих в него постоянных, если известны остальные.

Если h_0, h_1 и h очень близки между собой, так что $(h_1 - h_0)/(h - h_0)$ близко к единице, то можно воспользоваться разложением в ряд логарифма в формулах (6.5) и (6.6). Имеем:

$$\ln u = 2\left[\frac{u-1}{u+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 + \dots\right] \approx 2\frac{u-1}{u+1}.$$

Приближенное равенство справедливо для u, близких к единице. Применим его к выражению

$$u = \frac{h_1 - h_0}{h - h_0}.$$

Тогда уравнение (6.5) перепишется в виде

$$h - h_1 + i(x - x_1) = 2h_0 \frac{h_1 - h}{h + h_1 - 2h_0}.$$

Разрешая полученное уравнение относительно h_0, найдем, заменяя h_0 по формуле (5.5):

$$q = -k\left[\frac{h^2 - h_1^2}{2(x - x_1)} + i\frac{h + h_1}{2}\right] = -k\frac{h + h_1}{2}\left[\frac{h - h_1}{x - x_1} + i\right]. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) представляет собой обобщение уравнения Дюпюи и обращается в него при $i = 0$.

Расход q можно вычислить, зная еще одну точку (x_2, h_2):

$$q = -k\left[\frac{h_2^2 - h_1^2}{2(x_2 - x_1)} + i\frac{h_2 + h_1}{2}\right] = -k\frac{h_1 + h_2}{2}\left[\frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1} + i\right]. \quad (6.12)$$

Эта формула может быть получена также из (6.2), если в ней заменить h на среднее значение $\frac{h_1 + h_2}{2}$, а $\frac{dh}{dx}$ на $\frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2}$.

Отметим, что формула (6.12) годится лишь в случае, когда h_1 близко к h_2. В этом случае $x_2 - x_1$ также не может быть большим.

§ 7. Фильтрация в двуслойном грунте с наклонной линией раздела [12]. Пусть уравнение линии раздела двух грунтов будет:

$$y = ix. \quad (7.1)$$

Под этой линией находится грунт с коэффициентом фильтрации k_0, над ней — с коэффициентом фильтрации k.

Расход через сечение, соответствующее абсциссе x и ординате свободной поверхности h, состоит из двух частей: расхода через от-

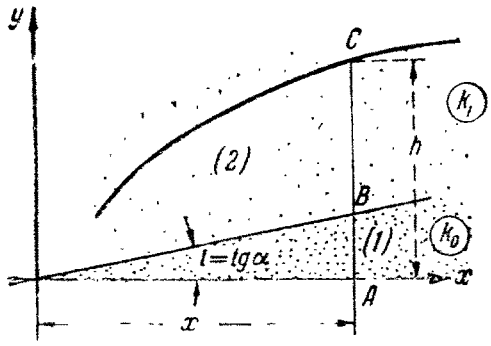
резок AB и через отрезок BC (фиг. 305). Будем считать, что пьезометрический уклон постоянен и равен $\frac{dh}{dx}$. Тогда будем иметь:

$$q = -k_0 y \frac{dh}{dx} - k(h-y)\frac{dh}{dx} = -[k_0 ix + k(h-ix)]\frac{dh}{dx}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение, считая расход q постоянным. Для этого перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{dx}{dh} - \frac{(k-k_0)i}{q}x + \frac{k}{q}h = 0. \tag{7.2}$$

Это линейное уравнение первого порядка, того же вида, что рассмотренное нами выше уравнение (5.2) для фильтрации при наличии



Фиг. 305.

водоупора. Оно переходит в последнее при $k_0 = 0$. Если в пределах точности вычислений k_0 пренебрежимо мало по сравнению с k, то (7.2) также приводится к (5.2); следовательно, если $k_0 : k$ мало (практически $\leqslant 0{,}001$), то линия раздела играет роль водоупора.

Если ввести обозначения

$$\left(1 - \frac{k_0}{k}\right)i = J, \quad H_0 = -\frac{q}{kJ} = -\frac{q}{(k-k_0)i},$$

то уравнение (7.2) примет вид

$$\frac{dx}{dh} - \frac{kJ}{q}x + \frac{k}{q}h = 0,$$

совпадающий с (7.2), а его решение, проходящее через точку (x_1, y_1), будет:

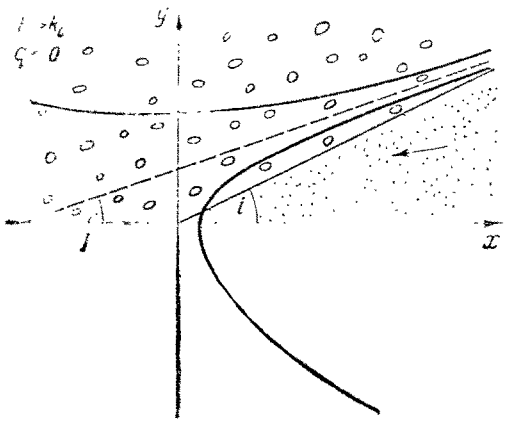
$$h - J(x - x_1) = Ce^{-\frac{h-h_1}{H_0}}.$$

Полагая

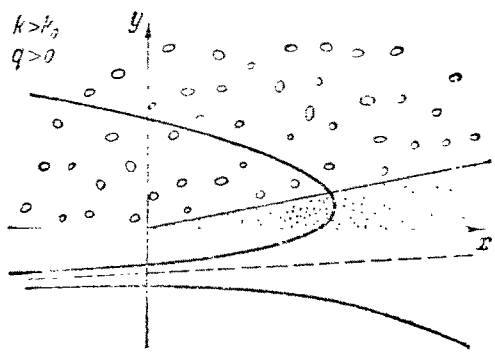
$$h - Jx = H, \quad h_1 - Jx_1 = H_1,$$

получим уравнение, соответствующее уравнению (7.5). Однако здесь четыре случая, рассмотренных в § 5, будут по существу различными

между собой, так как асимптоты интегральных кривых не будут параллельны линии раздела грунтов. На фиг. 306—309 представлены эти четыре случая.

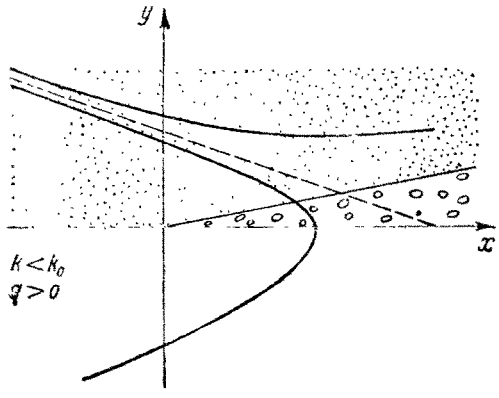


Фиг. 306.

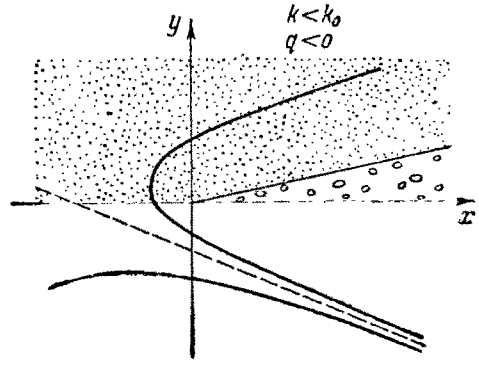


Фиг. 307.

По поводу двух последних из них, когда $k < k_0$, т. е. $J < 0$, заметим, что если отношение коэффициентов фильтрации k_0/k велико, то асимптота будет крутой, линия свободной поверхности сильно



Фиг. 308.



Фиг. 309.

изогнутой и излагаемая гидравлическая теория неприменимой. Случай большого k_0/k представляет значительный интерес, но его надо изучать другим методом.

Б. БЕЗНАПОРНЫЕ И ПОЛУНАПОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 8. Связь между пространственными безнапорными и плоскими напорными движениями. В § 1 мы выяснили, что задача о пространственном движении грунтовых вод при условии слабой изменяемости свободной поверхности, при наличии горизонтального

водоупора приводится к уравнению Лапласа для функции $h^2(x, y)$. При этом $h(x, y)$ есть осредненный по высоте напор и вместе с тем ордината точки свободной поверхности. С другой стороны, в плоском напорном движении, в пласте, ограниченном двумя горизонтальными плоскостями, напорная функция, которую мы обозначим через $h_н(x, y)$, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta h_н = 0.$$

Если граничные условия для двух задач одинаковы, то между h^2 и $h_н$ должна существовать линейная зависимость [3].

В дальнейшем удобно использовать введенное Н. Н. Павловским понятие о *приведенном напоре* h_r, т. е. напоре, деленном на действующий напор H:

$$h_r = \frac{h}{H}.$$

При этом Павловский принимал, что $h_r = 1$ вдоль границы верхнего бьефа и $h_r = 0$ вдоль границы нижнего бьефа.

Допустим, что действительный напор h вдоль верхнего бьефа равен h_1, вдоль нижнего — h_2. Тогда зависимость между h и h_r можно выразить с помощью уравнения

$$\frac{h - h_2}{h_1 - h_2} = \frac{h_r}{1}. \tag{8.1}$$

Если рассмотрим более общий случай, когда задано соответствие между напорами h и h_r в двух произвольных точках, причем значению $h = h_1$ соответствует $h_r = h_{r1}$, а значению $h = h_2$ отвечает $h_r = h_{r2}$, то будем иметь:

$$\frac{h - h_2}{h_1 - h_2} = \frac{h_r - h_{r2}}{h_{r1} - h_{r2}}. \tag{8.2}$$

Теперь предположим, что мы приводим в соответствие два движения: безнапорное и напорное приведенное. Тогда в левой части уравнения (8.2) нужно заменить h, h_1, h_2 соответственно на h^2, h_1^2, h_2^2, и мы получим:

$$\frac{h^2 - h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} = \frac{h_r - h_{r2}}{h_{r1} - h_{r2}}. \tag{8.3}$$

В качестве примера рассмотрим приток к котловану, круглому в плане. Такой котлован есть не что иное, как скважина большого радиуса. Обозначим этот радиус через r_1, а соответствующее значение h — через h_1. Пусть при $r = r_2$ напор $h = h_2$.

Соответствующее напорное движение определяется функцией h_r вида

$$h_r = A \ln r + B. \tag{8.4}$$

Пусть при $r = r_1$ имеем $h_r = h_{r1}$, при $r = r_2$ $h_r = h_{r2}$, где h_{r1}, h_{r2} — произвольные числа. Из (8.2) с помощью (8.4) получим:

$$\frac{h_r - h_{r2}}{h_{r1} - h_{r2}} = \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Тогда (8.3) дает:

$$h^2 = h_2^2 + (h_1^2 - h_2^2) \frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Отсюда с помощью равенства

$$Q = -k \frac{dh}{dr}\Big|_{r=r_1} \cdot 2\pi r_1 h_1,$$

где r_1 — радиус скважины, получаем формулу Дюпюи для дебита скважины Q (см. также главу VII, § 9):

$$Q = \frac{\pi k (h_1^2 - h_2^2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{8.5}$$

§ 9. О притоке воды к котлованам, имеющим в плане форму многоугольника. В. И. Аравин [4] дает приближенный метод расчета притока грунтовых вод к котлованам, границей которых в плане является многоугольник. Здесь можно было бы применить формулу Кристоффеля для отображения внешности многоугольника на полуплоскость. Однако В. И. Аравин поступает следующим образом. Он рассматривает уравнение для пространственного притока воды к щели

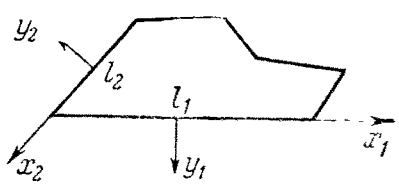
$$h^2 - h_*^2 = \frac{4q}{\pi} \operatorname{arsh} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - l^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 - l^2}{2}\right)^2 + l^2 y^2}} =$$
$$= f(q, l, x, y). \tag{9.1}$$

Здесь h_* — неизвестная пока постоянная, q — расход половины отрезка.

Формула (9.1) может быть получена из решения плоской задачи о притоке жидкости к прямолинейному отрезку, совершенно аналогичной задаче об обтекании шпунта в полуплоскости (глава II, § 13).

Для n отрезков, ограничивающих рассматриваемую нами область (фиг. 310), напишем сумму

$$h^2 - h_*^2 = \sum_{k=1}^{n} f(q_k, l_k, x_k, y_k), \tag{9.2}$$



Фиг. 310.

где индекс k означает номер отрезка длины l_k, ось x_k направляется вдоль отрезка, а ось y_k проходит через его середину.

Применим (9.2) к вертикалям, проходящим через центр каждой из n сторон периметра котлована. Так как глубина во всех этих точках одинакова, то, обозначая ее через h_0, получим:

$$\left.\begin{aligned} h_0^2 - h_*^2 &= \sum_{k=1}^{n} f_1(q_k,\ l_k,\ x_k,\ y_k),\ \ldots, \\ h_0^2 - h_*^2 &= \sum_{k=1}^{n} f_n(q_k,\ l_k,\ x_k,\ y_k) \end{aligned}\right\} \qquad (9.3)$$

Эти равенства дают нам $n-1$ уравнений для определения

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n-1}.$$

Рассматривая контур в виде окружности, удаленной на большое расстояние R_k от средней точки отрезка l_k, будем иметь расход, вычисляемый по формуле, соответствующей круглому колодцу:

$$f(q_k,\ l_k,\ x_k,\ y_k) = \frac{4q_k}{\pi} \ln \frac{2R_k}{l_k},$$

а потому, принимая $h = H$ в точках R_k, получим:

$$H^2 - h_*^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{4q_k}{\pi} \ln \frac{2R_k}{l_k}.$$

Принимая приближенно $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$, напишем:

$$H^2 - h_*^2 = \frac{4(q_1 + \ldots + q_n)}{\pi} \ln R -$$

$$- \frac{4}{\pi}\left(q_1 \ln \frac{l_1}{2} + q_2 \ln \frac{l_2}{2} + \ldots + q_n \ln \frac{l_n}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} f_1(q_k, l_k, x_k, y_k). \qquad (9.4)$$

Если многоугольник правильный, то $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$ и

$$H^2 - h_*^2 = \frac{4(q_1 + \ldots + q_n)}{\pi} \ln \frac{2R}{l}.$$

Для определения h_* может служить одно из равенств (9.3).

Выражая расходы каждого из отрезков через расход первого:

$$q_2 = a_2 q_1,\ \ldots,\ q_n = a_n q_1$$

и подставляя эти выражения в (9.4), получим:

$$H^2 - h_0^2 = \frac{4q_1}{\pi}(1 + a_2 + \ldots + a_n) \ln R -$$

$$- \frac{4q_1}{\pi}\left(\ln \frac{l_1}{2} + \ldots + a_n \ln \frac{l_n}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n} f_1(a_k q_1,\ l_k,\ x_k,\ y_k).$$

Отсюда найдем q_1 и полный расход котлована Q:

$$Q = 4kq_1(1 + a_1 + \ldots + a_n).$$

Для правильного многоугольника получаем:

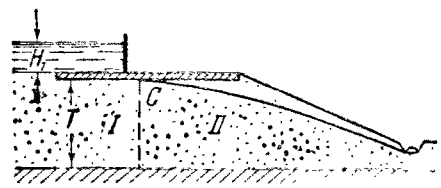
$$H^2 - h_0^2 = \frac{4nq}{\pi} \ln \frac{2R}{l} - \frac{4Mnq}{\pi},$$

$$M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{l} \sqrt{\frac{x_k^2 + y_k^2 + l^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_k^2 + y_k^2 + l^2}{2}\right) + l^2 y_k^2}}.$$

Сравнивая расходы, получаемые для треугольного, квадратного и шестиугольного сечений колодца, с расходом круглого колодца, автор приходит к заключению, что в случае многоугольного колодца расход можно вычислять с достаточной точностью по формуле круглого колодца, если принять радиус последнего равным среднему из радиусов вписанной и описанной окружностей многоугольника.

§ 10. Полунапорные движения [9]. В § 9 главы II упоминалось о существовании полунапорных движений, т. е. таких, для которых область движения распадается на ряд областей с безнапорным и напорным движениями.

Так, может случиться, что напорный поток под флютбетом отрывается и дальнейшее движение происходит с образованием свободной поверхности (фиг. 311).



Фиг. 311.

В области I имеем напорное движение, в области II — безнапорное. На границе между ними $h = h_п$ (напор *пограничного сечения*). В данном случае $h_п = T$. Для области I применима формула (8.2), которую можно переписать, принимая во внимание, что $h_2 = T$, $h_1 = H_1$, $h_{,2} = 1$, следующим образом:

$$\frac{h - T}{H_1 - T} = \frac{h_r - h_{rп}}{1 - h_{rп}}. \tag{10.1}$$

Через $h_{rп}$ обозначен неизвестный пока напор на границе раздела. Для области II нужно воспользоваться формулой (8.3), которая дает, если учесть, что теперь $h_1 = T$, $h_2 = H_2$, $h_{r1} = T$, $h_{r2} = 0$:

$$\frac{h^3 - H_2^2}{T^3 - H_2^2} = \frac{h_r}{h_{rп}}. \tag{10.2}$$

Для определения неизвестного напора пограничного сечения $h_{rп}$ можно воспользоваться условием равенства расходов через это сечение в областях I и II.

В качестве примера рассмотрим случай, изображенный на фиг. 311. Грунтовый поток, обтекая флютбет, отрывается от него в точке C,

образуя свободную поверхность и впадая дальше в реку или дрену. Разбивая течение на две части, применяем к левой части формулу для расхода при обтекании плоского флютбета ширины $2l$ (глава III):

$$Q = \varkappa \frac{H_1 - T}{K} K', \quad k = \operatorname{th} \frac{\pi l}{2T}.$$

Для правого участка вычисляем расход по формуле Дюпюи:

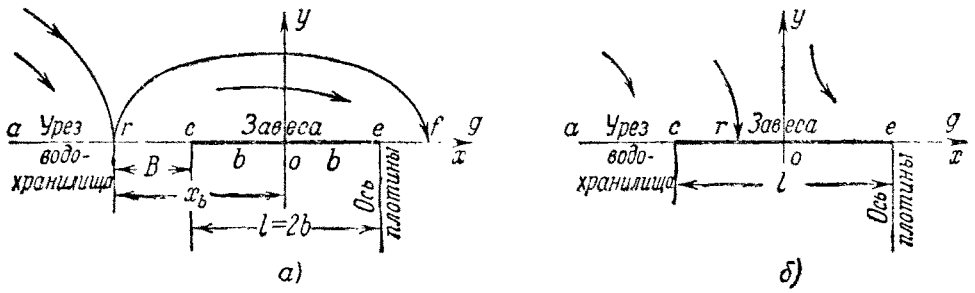
$$Q = \varkappa \frac{T^2 - H_2^2}{2l_2} = \varkappa \frac{T^2 - H_2^2}{2(l_1 - l)}.$$

Сравнение этих формул позволяет найти положение точки отрыва потока, т. е. отрезок l.

§ 11. Фильтрация в обход сооружений. Рассмотрим движение грунтовых вод в берегах реки, вызванное разностью уровней воды в верхнем и нижнем бьефах плотины, снабженной противофильтрационной завесой. Завеса представляет собою вертикальную стенку, расположенную вдоль берега или врезанную в берег, предназначенную для уменьшения фильтрации из водохранилища (верхнего бьефа) в нижний бьеф.

Предположим, что поток грунтовых вод до возведения сооружений был направлен из бесконечности нормально к прямолинейному участку реки и имел постоянную скорость $v = kI$, где I — первоначальный градиент потока. Пусть берега реки вертикальны и доходят до горизонтального водоупора, служащего также основанием сооружений.

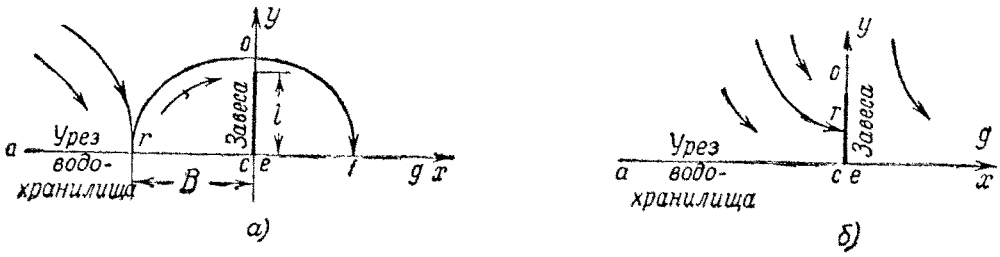
На фиг. 312, 313 представлены два типа завес. Берег реки совмещен с осью x так, что движение происходит в верхней полуплоскости чертежа. Возведенные сооружения нарушают первоначальный поток и создают дополнительный поток из верхнего в нижний бьеф.



Фиг. 312.

При этом возможны два случая разветвления потока: когда точка нулевой скорости r находится вне завесы (фиг. 312, *а* и 313, *а*) и когда она попадает на завесу (фиг. 312, *б* и 313, *б*).

Сначала найдем решение для напорного потока, соответствующего принятым на фиг. 312—313 схемам. Область комплексного потен-



Фиг. 313.

циала (приведенного)

$$\omega = -H + \frac{i\psi}{k}, \quad H = -\frac{\varphi}{k}$$

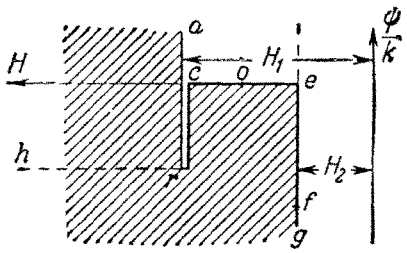
имеет вид, изображенный на фиг. 314 и 315. Отображение любой из них на полуплоскость ζ дает:

$$\omega = Ai \int_0^{\zeta} \frac{(\alpha + \zeta)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + C.$$

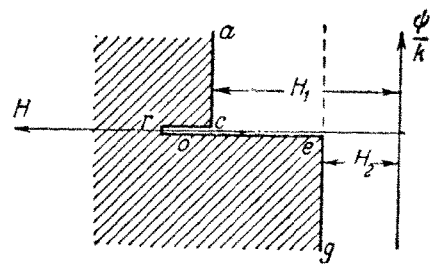
Для отрезка $-1 < \zeta < 1$

$$\omega = \frac{H_0}{\pi} \arcsin \zeta + \frac{H_0}{\pi\alpha} \sqrt{1-\zeta^2} - \frac{H_1 + H_2}{2},$$

где $H_0 = H_1 - H_2$, а H_1, H_2 — напоры соответственно в верхнем и



Фиг. 314.



Фиг. 315.

нижнем бьефах. Для отрезка $-\infty < \zeta < -1$ имеем:

$$\omega = \frac{iH_0}{\pi} \operatorname{arch} \zeta + \frac{iH_0}{\pi\alpha} \sqrt{\zeta^2 - 1} - H_1.$$

Отображая на полуплоскость область движения, получим соответственно: для продольной завесы (b — половина ширины завесы)

$$z = b\zeta, \tag{11.1}$$

для поперечной

$$z = l\sqrt{\zeta^2 - 1}. \tag{11.2}$$

Координаты точки разветвления потока находятся из условия

$$v = kl, \quad u = 0$$

на бесконечности. Отсюда получаем для продольной завесы:

$$\alpha = -\frac{H_0}{\pi lb},$$

для поперечной завесы (которая называется шпорой):

$$\alpha = -\frac{H_0}{\pi ll}.$$

Приведенный потенциал в зависимости от z выразится следующим образом:

для продольной завесы: на отрезке *coe*

$$\omega = \frac{H_0}{\pi} \arcsin \frac{z}{b} - lb\sqrt{1 - \frac{z^2}{b^2}} - \frac{H_1 + H_2}{2},$$

на отрезке *ca*

$$\omega = \frac{iH_0}{\pi} \operatorname{arch} \frac{z}{b} - ilb\sqrt{\frac{z^2}{b^2} - 1} - H_1;$$

для поперечной завесы: на отрезке *coe*

$$\omega = \pm \frac{H_0}{\pi} \operatorname{arch} \frac{z}{b} - ilz - \frac{H_1 + H_2}{2}$$

(плюс для $-1 < \zeta < 0$, минус для $0 < \zeta < 1$), на отрезке *ca*

$$\omega = -\frac{iH_0}{\pi} \operatorname{arsh} \frac{z}{l} + ilz - H_1.$$

При $\alpha = -1$ точка b совпадает с точкой c, следовательно, отсутствует фильтрация из верхнего бьефа в нижний. В общем случае ширина зоны обходной фильтрации в области верхнего бьефа будет для продольной завесы

$$B = x_b - b,$$

для поперечной

$$B = x_b.$$

Абсцисса x_b определяется из уравнений (11.1) и (11.2) при $\zeta = -\alpha$.

Для продольной завесы получаем выражение напора за завесой

$$H = lb\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} - \frac{H_0}{\pi} \arcsin \frac{x}{b} + \frac{H_1 + H_2}{2}$$

и выражение расхода

$$Q = kH_0A, \quad A = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arch} \frac{1}{\beta} - \sqrt{1 - \beta^2}\right), \quad B = \frac{H_0}{\pi l} - b, \qquad (11.3)$$

где

$$\beta = \frac{\pi l b}{H_0}. \tag{11.4}$$

Для потока с точкой разветвления на завесе имеем:

$$Q = 0, \quad B = 0.$$

Предельная длина завесы $l_m = 2b_m$, при которой обходная фильтрация из верхнего бьефа в нижний отсутствует, выражается таким образом:

$$l_m = \frac{2H_0}{\pi l} \approx \frac{2}{3} L. \tag{11.5}$$

Здесь $L = \frac{H_0}{l}$ — расстояние от линии берега до линии пересечения горизонта верхнего бьефа с первоначальной плоскостью пьезометрических напоров.

В случае поперечной завесы получаем для напора:

$$H = \frac{H_1 + H_2}{2} \pm \frac{H_0}{\pi} \arccos \frac{y}{l} + ly.$$

Здесь y — расстояние точки, в которой подсчитывается напор, от линии берега; l — полная длина завесы.

Для потоков первого типа расход определяется по формулам (11.3) и (11.4), где вместо b берется полная длина поперечной завесы l. Ширина зоны обходной фильтрации B равна

$$B = l\sqrt{\left(\frac{H_0}{\pi l l}\right)^2 - 1}.$$

Для потоков второго типа $Q = 0$, $B = 0$. Предельная длина завесы находится из условия отсутствия обходной фильтрации:

$$l_m = \frac{H_0}{\pi l} \approx \frac{1}{3} L.$$

Отсюда видно, что для достижения отсутствия обходной фильтрации продольная завеса должна быть вдвое длиннее поперечной.

Переходя к безнапорному потоку, мы должны заменить H на $\frac{h^2}{2}$. Получим для продольной завесы:

$$h^2 = \frac{h_1^2 + h_2^2}{2} - \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \arcsin \frac{x}{b} + \frac{2Qb}{k}\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}.$$

В случае движения первого типа

$$Q = \frac{k(h_1^2 - h_2^2)}{2} \cdot A,$$

где h_1, h_2 — напоры в верхнем и нижнем бьефах,

$$A=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arch}\frac{1}{\beta_0}-\sqrt{1-\beta_0^2}\right),\quad \beta_0=\frac{2\pi Qb}{k(h_1^2-h_2^2)}=\frac{\pi b}{L}.$$

Здесь L имеет то же значение, что и в соотношении (11.5). Для величины B получаем:

$$B=\frac{k}{Q}\frac{h_1^2-h_2^2}{2\pi}-b=\frac{L_c}{\pi}-b.$$

Для движений второго типа $Q=0$, $B=0$

$$l_m=2b_m=\frac{k}{Q}\frac{h_1^2-h_2^2}{2}=\frac{2}{\pi}\frac{h_1+h_2}{h_в+h_2}\cdot\frac{h_0}{I_{ср}}\approx\frac{2}{3}L.$$

Здесь $h_в$ — глубина подземных вод на водоразделе, $I_{ср}$ — средний уклон их на участке от водоупора до реки, $h_0=h_1-h_2$.

Для поперечной завесы имеют место равенства

$$h^2=\frac{h_1^2+h_2^2}{2}-\frac{h_1^2-h_2^2}{\pi}\arccos\frac{y}{l}+\frac{Q}{k}y,$$

$$B=l\sqrt{\frac{k}{Q}\left(\frac{h_1^2-h_2^2}{2\pi l}\right)^2-1}.$$

В случае течения второго типа

$$l_m=\frac{k}{Q}\frac{h_1^2-h_2^2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{(h_1+h_2)h_0}{(h_в+h_2)I_{ср}}\approx\frac{1}{3}L.$$

Настоящий раздел изложен по статье [11]. В работе [10] эти вопросы рассматриваются несколько иначе; там также дается решение задачи для случая комбинации шпоры и плоского устоя.

ГЛАВА XI

ГРАФИЧЕСКИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ ГРУНТОВЫХ ВОД

А. ГРАФИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Гидродинамическая сетка. Построение сетки линий тока и линий равного потенциала (см. главу II), которую называют иногда *гидродинамической сеткой* или *сеткой движения* [1], имеет большое значение для изучения плоских установившихся течений. По этой сетке виден характер течения и можно найти средние скорости в различных местах области движения.

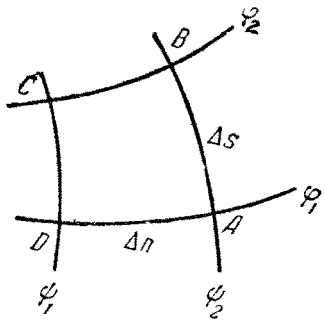
При изучении движения грунтовых вод бывает удобно функцию тока и потенциал скорости заменить пропорциональными им функциями — *приведенным расходом* q и *напором* h:

$$q = -\frac{\psi}{k}, \quad h = -\frac{\varphi}{k}. \qquad (1.1)$$

Комплексный потенциал $\omega = \varphi + i\psi$ заменится при этом выражением

$$\tilde{\omega} = h + iq. \qquad (1.2)$$

Функция $\tilde{\omega} = h + iq$, так же как и ω, является функцией комплексного переменного z, ее действительная и мнимая части суть гармонические функции.



Фиг. 316.

Сетка $h = \text{const}$, $q = \text{const}$ может быть выбрана *изотермической*, т. е. образующей криволинейные *квадраты*. В самом деле, пусть в точке A (фиг. 316) Δn означает расстояние между соседними линиями тока, Δs — расстояние между соседними эквипотенциалями. Скорость в точке A приближенно равна

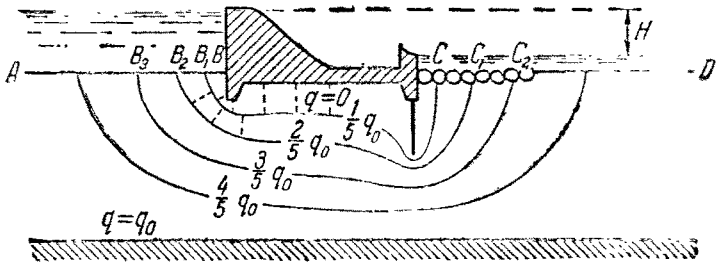
$$v_A \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta n}.$$

Если мы выберем $\Delta\varphi = \Delta\psi$, то получим, что $\Delta s = \Delta n$, т. е. две соседние стороны прямоугольника $ABCD$ оказываются равными. Это свойство и называют *изотермичностью* сетки.

При желании можно строить и сетку прямоугольников с заданным отношением сторон [2]. Полагая $\Delta\varphi = m\,\Delta\psi$, где m — заданное число, получим, что $\Delta s = m\,\Delta n$.

Мы уже имели примеры построения гидродинамических сеток в главе III для простейших случаев движения, когда линии тока и линии равного потенциала представляются простыми кривыми, уравнения которых легко написать. В более сложных случаях пользуются приближенными методами. Укажем главнейшие из них.

§ 2. Графический способ построения сетки [2]. Допустим для примера, что мы рассматриваем напорное движение под гидротехническим сооружением произвольной формы (фиг. 317). Известны две



Фиг. 317.

линии тока или приведенного расхода: контур основания гидротехнического сооружения и граница водоупора, а также две линии равного напора — границы верхнего и нижнего бьефов. Последние мы можем принять за линии $h = H$ и $h = 0$.

Проведем на-глаз линии тока $q = q_1, q_2, \ldots, q_5 = q_0$ (на фиг. 317 $q = 0$, $\frac{1}{5}q_0$, $\frac{2}{5}q_0$, $\frac{3}{5}q_0$, $\frac{4}{5}q_0$ и q_0). Значение q_0 нам пока не известно.

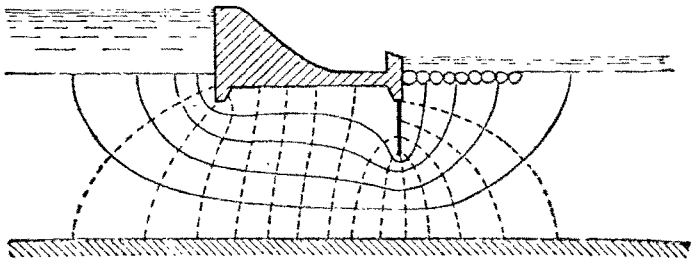
Теперь будем строить линии равного напора. Начнем, например, с линии, ближайшей к линии AB. Около отрезков BB_1, B_1B_2, ... построим криволинейные квадраты. Отметим, что криволинейный прямоугольник можно считать квадратом, если длины его средних линий, измеренные циркулем, оказываются равными (или если длина стороны равна длине средней линии).

Квадраты, примыкающие к линии AB фиг. 317, оказались такими, что их стороны (отмеченные пунктиром) не составляют продолжения одна другой, т. е. не образуют линии равного напора, как это должно было бы иметь место. Следовательно, нам нужно поправить линии тока, уменьшив прежде всего отрезок BB_1. Выправив первый ряд клеток, переходят ко второму и т. д. Последний ряд, примыкающий к линии CD, как правило, будет состоять не из квадратов, а из прямоугольников. Окончательно получим сетку фиг. 318.

Для проверки правильности сетки можно провести диагонали квадратов, которые должны также образовать оргогональную сетку.

Около особых точек вместо квадратов получаются другие фигуры. Так, линии равных напоров, оканчивающиеся в углах водонепроницаемого контура, делят эти углы пополам. В конце шпунта касательная к линии равного напора является продолжением шпунта.

Теперь допустим, что мы построили всю сетку, причем контур BC оказался разбитым на n участков (n может быть и дробным числом,



Фиг. 318.

если последний ряд клеток состоит из прямоугольников). Тогда линии равного напора будут иметь отметки

$$h = 0,\ \frac{H}{n},\ \frac{2H}{n},\ \ldots,\ H.$$

Сетку мы строили как изотермическую; следовательно, отрезок $\frac{q_0}{s}$ (где s — число участков, на которые оказались разбитыми линии AB и CD) должен равняться $\frac{H}{n}$:

$$\frac{q_0}{s} = \frac{H}{n}.$$

Отсюда найдем приближенное значение приведенного расхода q_0 и действительного расхода Q:

$$q_0 = \frac{s}{n} H, \qquad Q = \frac{ks}{n} H. \tag{2.1}$$

Вместо сетки квадратов можно было бы строить сетку прямоугольников, сохраняя пропорциональность сторон всех прямоугольников.

Если грунт простирается вниз на бесконечность, то в качестве линии тока $q = q_0$ можно взять полуокружность достаточно большого радиуса, равного примерно утроенной длине флютбета (глава II, § 12).

В безнапорном движении на депрессионной кривой должно выполняться условие $h = y$ или

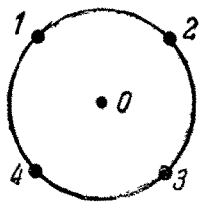
$$\Delta h = \Delta y,$$

где Δh — падение напора между двумя эквипотенциалями, Δy — расстояние по вертикали между точками кривой депрессии.

§ 3. Способ средних арифметических. Конечные разности. Этот способ основан на свойстве гармонической функции: значение функции в некоторой точке равно среднему из ее значений на окружности, в центре которой находится взятая точка:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_M \, d\theta.$$

Здесь φ_0 — значение гармонической функции в точке O, φ_M — значение ее в точке M окружности.



Фиг. 319.

Отсюда получается приближенная формула

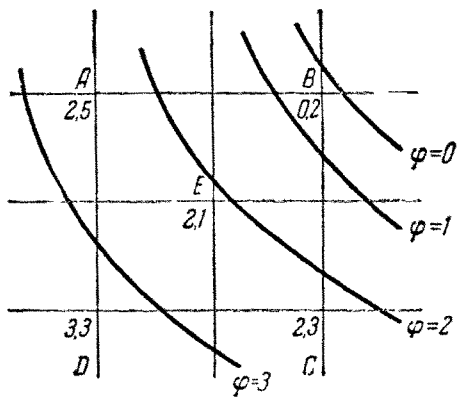
$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n}{n},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — значения φ в равноотстоящих точках по контуру окружности. В частности, если ограничиться четырьмя точками, то

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{4}, \qquad (3.1)$$

причем взятые точки будут находиться в вершинах квадрата, а φ_0 будет значением функции в центре квадрата (фиг. 319).

Допустим теперь, что грубо система изолиний у нас построена на бумаге, разграфленной квадратами. Интерполированием между соседними изолиниями найдем приближенные значения функции в вершинах квадрата $ABCD$ (фиг. 320). Их среднее арифметическое принимаем за значение функции в точке E — центре квадрата.



Фиг. 320.

Заполнив таким образом центры всех возможных квадратов, будем составлять средние арифметические из новых значений. Они дадут нам уточнение первой системы значений наших функций в вершинах A, B, C, D, ... Можно стереть старые значения и написать на их месте новые. Продолжая этот процесс, мы должны получить систему чисел, стремящихся к определенным пределам — точным значениям нашей гармонической функции в вершинах квадратов [4]. Практически получается, что после 3—4 шагов значения постоянных перестают изменяться. Имея написанными в вершинах квадратов значения функции φ, можно провести систему изолиний, т. е. линий, соединяющих одинаковые числа (при этом, конечно, придется бо́льшую часть точек получать интерполированием).

Таким способом можно построить одно семейство линий, например равного расхода. Другое семейство — линии равного напора — можно строить как ортогональное к первому или же независимо от первого тем же способом средних арифметических.

Метод конечных разностей [4] в применении к уравнению Лапласа состоит в том, что вместо уравнения

$$\Delta u = 0$$

рассматривают соответствующее ему разностное уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3.2}$$

где

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2}[u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)],$$

$$u_{yy} = \frac{1}{h^2}[u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)],$$

или в других обозначениях

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_{k+1,i} - 2u_{k,i} + u_{k-1,i}),$$

$$u_{yy} = \frac{1}{h^2}(u_{k,i+1} - 2u_{k,i} + u_{k,i-1}).$$

Следовательно, уравнение (3.2) принимает вид

$$u_{k+1,i} + u_{k,i+1} - 4u_{k,i} + u_{k-1,i} + u_{k,i-1} = 0. \tag{3.3}$$

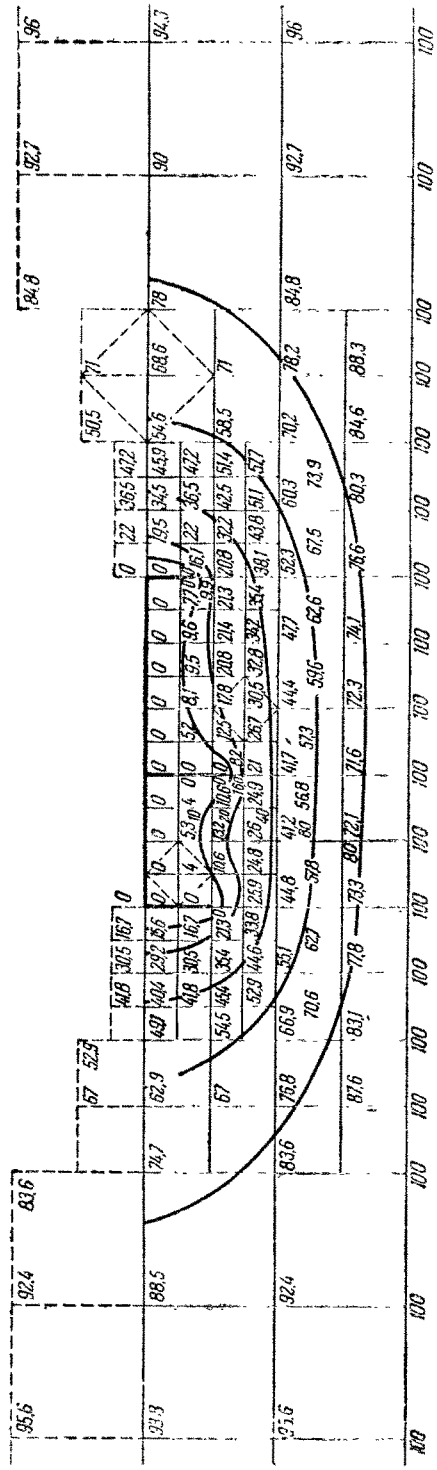
Из формулы (3.3) можно получить формулу (3.1) для $u_{k,i}$.

Задаваясь значениями функции на контуре области или значениями ее нормальной производной, которую при этом надо выразить через разности, или, наконец, задавая на одних частях контура значения функции, на других — значения нормальной производной, можно получить систему уравнений для $u_{k,i}$. Обычно число уравнений и число неизвестных получаются очень большими.

Способы упрощенного решения этих систем рассмотрены различными авторами [6]. Сауселлом [12] и его соавторами эти методы применены к решению ряда примеров из различных областей, в том числе из области фильтрации.

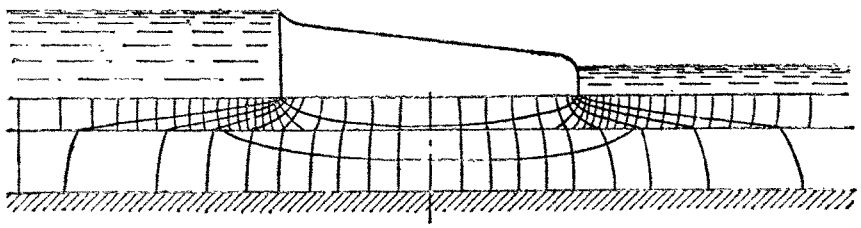
На фиг. 321 дано построение линий тока для флютбета с тремя шпунтами в слое конечной глубины [7]. Существуют упрощения и усовершенствования указанных методов.

Для неоднородных грунтов при переходе из одного слоя в другой нужно учитывать закон преломления линий тока на границе раздела двух грунтов. Приемы построения сеток в неоднородных грунтах развиты в работах [3, 8].

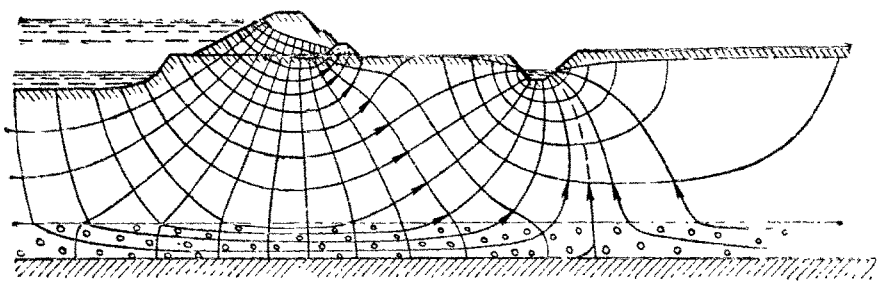


Фиг. 321.

На фиг. 322 и 323 даны примеры построения сеток для двух различных грунтов [22].



Фиг. 322.



Фиг. 323

§ 4. Сетка в осесимметричном движении. В случае движения с осевой симметрией несжимаемой жидкости существует функция тока ψ, через которую составляющие скорости выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ v_z &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Ось z — ось вращения, r — полярный радиус-вектор.

Функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0. \tag{4.2}$$

Если движение имеет потенциал скорости φ, то для последнего получаем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0. \tag{4.3}$$

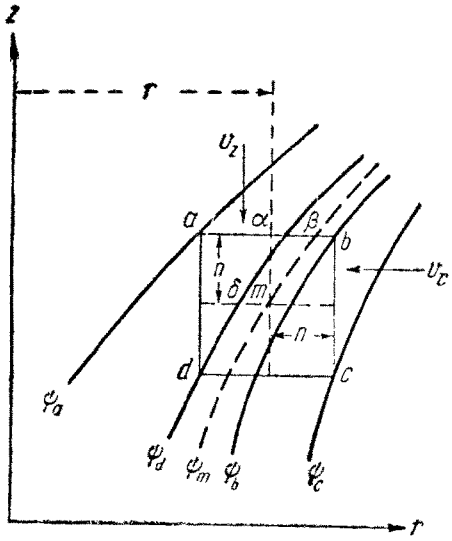
Допустим, что построена сетка линий $\psi = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. Эти линии ортогональны, но из них нельзя образовать изотермиче-

скую сетку, т. е. сетку квадратов. В самом деле, из равенств (4.1) и из свойства функции φ имеем:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Если давать φ и ψ равноотстоящие системы значений, полагая $\Delta\psi = \Delta\varphi$, то получим, что должны выполняться условия

$$r\,\Delta z_\psi = \Delta r_\varphi, \qquad \Delta z_\varphi = r\,\Delta r_\psi. \quad (4.4)$$



Фиг. 324.

Индекс φ или ψ указывает, между какими линиями берется приращение. В нижней части фиг. 325 Δz_φ почти постоянны, а потому Δr_ψ уменьшаются с возрастанием r.

Выведем формулу [5] для вычисления значения функции тока ψ_m в середине квадрата со сторонами $2n$, если известны значения этой функции ψ_a, ψ_b, ψ_c, ψ_d в вершинах квадрата (фиг. 324). Проведем линии $\psi = \psi_a, \ldots, \psi = \psi_d$ через вершины квадрата и вычислим расход между поверхностями вращения $\psi = \psi_a$ и $\psi = \psi_m$. Элементарный расход dQ между поверхностями ψ и $\psi + d\psi$ равен

$$dQ = 2\pi r v_z\,dr = 2\pi\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dr.$$

Отсюда, выбирая соответствующим образом значение постоянной интегрирования, получим:

$$Q = 2\pi\psi. \quad (4.5)$$

Для расхода q_{am} между поверхностями ψ_a и ψ_m находим, принимая во внимание, что расходы через стороны $\alpha\beta$ и $m\alpha$ одинаковы:

$$q_{am} = q_{a\alpha} + q_{\alpha\beta} = q_{a\alpha} + q_{\alpha m} = 2\pi\left(r - \frac{n}{2}\right)nv_z + 2\pi r \cdot nv_r.$$

Отсюда, выражая расходы через значения функции тока по формуле (4.5) и сокращая на 2π, получим:

$$\psi_m = \psi_a + \left(r - \frac{n}{2}\right)nv_z + rnv_r.$$

Таким же образом, подсчитав расход между поверхностями ψ_m и ψ_b, будем иметь:

$$\psi_m = \psi_b - \left(r + \frac{n}{2}\right)nv_z + rnv_r.$$

Точно так же получим:

$$\psi_m = \psi_c - \left(r + \frac{n}{2}\right) n v_z - (r + n)\, n v_r,$$

$$\psi_m = \psi_d + \left(r - \frac{n}{2}\right) n v_z - (r - n)\, n v_r.$$

Складывая все четыре выражения для ψ_m, после деления на 4 найдем:

$$\psi_m = \frac{\psi_a + \psi_b + \psi_c + \psi_d}{4} - \frac{n^2}{2} v_z.$$

При этом для v_z можно взять одно из приближенных выражений

$$v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \approx \frac{1}{r}\frac{\psi_b - \psi_a}{2n} \approx \frac{1}{r}\frac{\psi_c - \psi_d}{2n} \approx \frac{1}{r}\frac{\psi_b + \psi_c - \psi_a - \psi_d}{4n}.$$

В следующем параграфе рассматривается пример применения графического метода.

§ 5. Сетка для установившегося движения при наливе воды в скважину (осевая симметрия). В полевых условиях водопроницаемость грунтов определяется в основном двумя методами: методом откачки и методом нагнетания. Частным случаем нагнетания является налив воды в скважину.

Предположим, что нам удалось осуществить установившееся движение при наливе в скважину — для этого нужно вести опыт до тех пор, пока расход, подаваемый в скважину, сделается практически постоянным. В. М. Насберг [10] рассмотрел такой случай: отношение

$$\frac{h}{d} = 50, \tag{5.1}$$

где h — высота столба воды в скважине, считая от ее дна, d — диаметр скважины. Действующий напор, отсчитываемый от некоторой плоскости a_1c_1 (фиг. 325), обозначен через H. Поверхности равного напора построены через равные интервалы напоров ΔH, причем

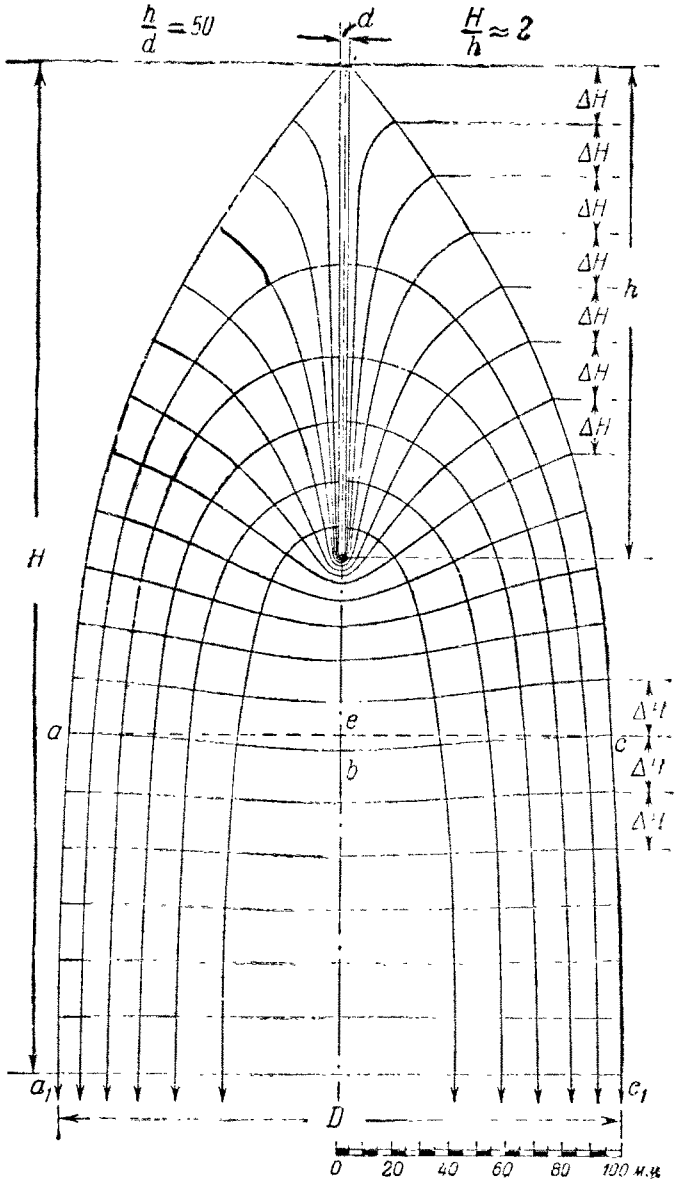
$$\Delta H = \frac{H}{n}, \tag{5.2}$$

где n — число поясов напора. Поверхности тока построены через равные интервалы расходов, т. е. расходы ΔQ каждой трубки тока, протекающей между любыми двумя смежными поверхностями токов, должны быть одинаковы:

$$\Delta Q = \frac{Q}{t}, \tag{5.3}$$

где Q — полный расход скважины, t — число трубок тока, равное числу поверхностей тока, принятых для построения.

Согласно условию $h = z$ на свободной поверхности мы должны иметь, что расстояние между горизонтальными плоскостями, проведенными через линии, образованные пересечением двух соседних



Фиг. 325.

эквипотенциальных поверхностей с поверхностью депрессии, должны быть одинаковы и равны ΔH.

При построении сетки можно использовать некоторые методы, применяемые при построении электростатических полей с осевой симметрией [11].

Назовем величину

$$\Delta R = k\frac{\Delta H}{\Delta Q} = \text{const} \tag{5.4}$$

приведенным сопротивлением участка трубки тока, заключенного между смежными эквипотенциальными поверхностями. Из (4.1) следуют приближенные равенства

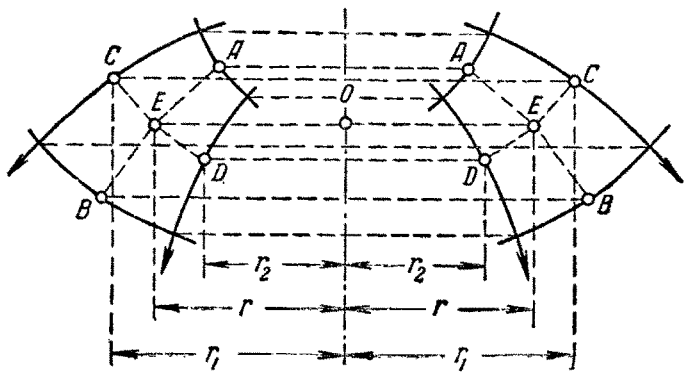
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{r}\frac{\Delta\psi}{\Delta n}, \qquad \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi} = \frac{\Delta s}{r\,\Delta n},$$

где Δs, Δn — два взаимно перпендикулярных направления. Полагая $\Delta\varphi = k\,\Delta H$, $2\pi\,\Delta\psi = \Delta Q$, $\Delta s = l$, $\Delta n = b$, получим:

$$\Delta R = \frac{l}{2\pi r b}. \tag{5.5}$$

Для r, малых по сравнению с b (на фиг. 325 — вблизи скважины), поверхности тока близки к горизонтальным плоскостям, поверхности равного напора — к вертикальным цилиндрам, и для расхода ΔQ можно принять формулу (1.4) главы IX. Поэтому

$$\Delta R = \frac{\ln r_1/r_2}{2\pi b}. \tag{5.6}$$



Фиг. 326.

В последних формулах введены следующие обозначения (фиг. 326): l — средняя длина участка трубки тока, заключенного между смежными эквипотенциальными поверхностями ($l = AB$ на фиг. 326); b — средняя ширина меридионального сечения участка трубки тока ($b = CD$); $2\pi rb$ — площадь среднего поперечного сечения участка трубки тока; r — расстояние от середины сечения трубки тока до оси скважины ($r = OE$); r_1 — расстояние от точки C до оси скважины; r_2 — расстояние от точки D до оси скважины.

Из равенств (5.2), (5.3), (5.4) получается формула для определения коэффициента фильтрации k:

$$k = \frac{\Delta R}{H}\cdot\frac{n}{t}\cdot Q = \frac{\Delta R}{H}\cdot\frac{1}{t}\cdot Q = CQ. \tag{5.7}$$

Из этой формулы видно, что, зная постоянную C и определив из опыта значение расхода Q, можно вычислить искомый коэффициент фильтрации.

Постоянная C имеет размерность: (длина)$^{-2}$. Поэтому, чтобы получить величину C, отвечающую натуре, нужно постоянную C_m, найденную по чертежу сетки, построенному в масштабе $1:m$, разделить на m^2. Получим:

$$C=\frac{C_m}{m^2}. \tag{5.8}$$

На сетке фиг. 325 принято

$$\frac{h}{d}=50,\ h=175\ мм,\ \Delta H=20\ мм,\ t=6,\ \Delta R=3{,}82\cdot 10^{-3}\frac{1}{мм}.$$

По уравнению (5.7) получаем:

$$C_m=\frac{\Delta R}{\Delta H}\cdot\frac{1}{t}=31{,}8\cdot 10^{-6}\frac{1}{мм^2}. \tag{5.9}$$

Для контроля можно брать различные участки фиг. 326 и сравнивать получающиеся при этом значения C_m. Если в натуре имеем скважину, подобную построенной на фиг. 325, с глубиной воды h', то $m=h':h$.

В качестве примера возьмем $h'=5\ м$. Тогда диаметр скважины согласно условию должен быть $d'=\frac{5}{50}=0{,}1\ м$.

Для величины C имеем по формуле (5.8):

$$C=31{,}8\cdot 10^{-6}:28{,}6^2=0{,}0389\frac{1}{м^2}.$$

Пусть Q измеряется в $м^3/сек$, а k — в $м/сек$, тогда для k получаем выражение

$$k=0{,}0389Q$$

при размерах скважины $h'=5\ м$, $d'=0{,}1\ м$ и расходе Q.

Если для данной скважины отношение $h':d'\neq 50$, то нужно было бы построить другую сетку движения. Однако можно воспользоваться приближенным приемом для вычисления расхода при диаметре скважины d'', если известен расход при диаметре d', при всех прочих условиях, одинаковых для той и другой скважин.

Пусть имеем две несовершенные скважины в бесконечном напорном пласте, обе длины h', с действующим напором H, но с разными диаметрами: d' и d''. Тогда, обозначив соответствующие этим скважинам значения величины C через C' и C'', В. М. Насберг предлагает формулу

$$\frac{C'}{C''}=\frac{\ln\frac{4h'}{d'}}{\ln\frac{4h'}{d''}}.$$

Для рассматриваемого нами случая налива воды эта формула не будет точной. Однако автор указывает, что ее можно принять как приближенную для $25 < \frac{h'}{d'} < 100$.

В § 15 главы IX у нас рассматривается задача о скважине в бесконечном напорном пласте, для которой приводится формула Н. К. Гиринского. Согласно этой формуле мы имели бы несколько иное, впрочем, мало отличающееся от предыдущего, выражение:

$$\frac{C'}{C''} = \frac{\ln \frac{3{,}2h'}{d'}}{\ln \frac{3{,}2h'}{d''}}.$$

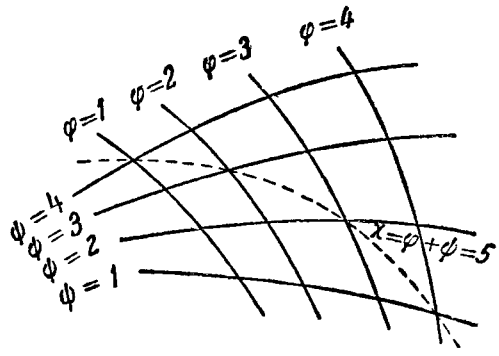
§ 6. Построение изобар. Если нам даны семейства линий $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, то можно построить семейство линий $\chi = \varphi + \psi = \text{const}$ с помощью *графического сложения*. На фиг. 327 приведен пример такого построения.

Мы уже имели в главе II зависимость между давлением (измеряемым в метрах высоты) и напором

$$p = h + y. \qquad (6.1)$$

Из этого равенства следует, что если мы построим линии $h = C_1$ и $y = C_2$, то в точках пересечений этих линий будем иметь:

$$p = C_1 + C_2.$$



Фиг. 327.

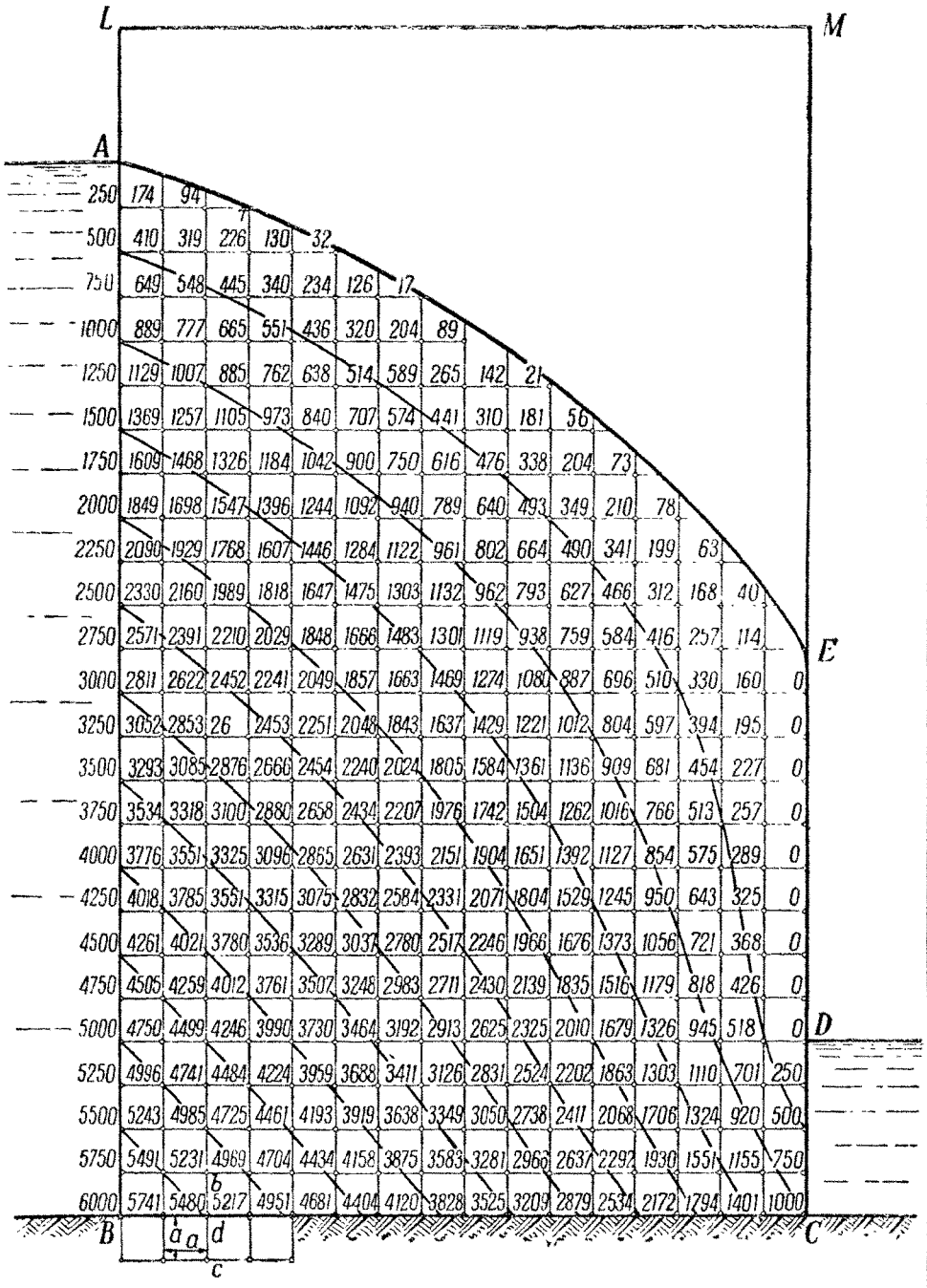
Выбирая те значения C_1 и C_2, сумма которых равна заданному числу

$$C_1 + C_2 = C,$$

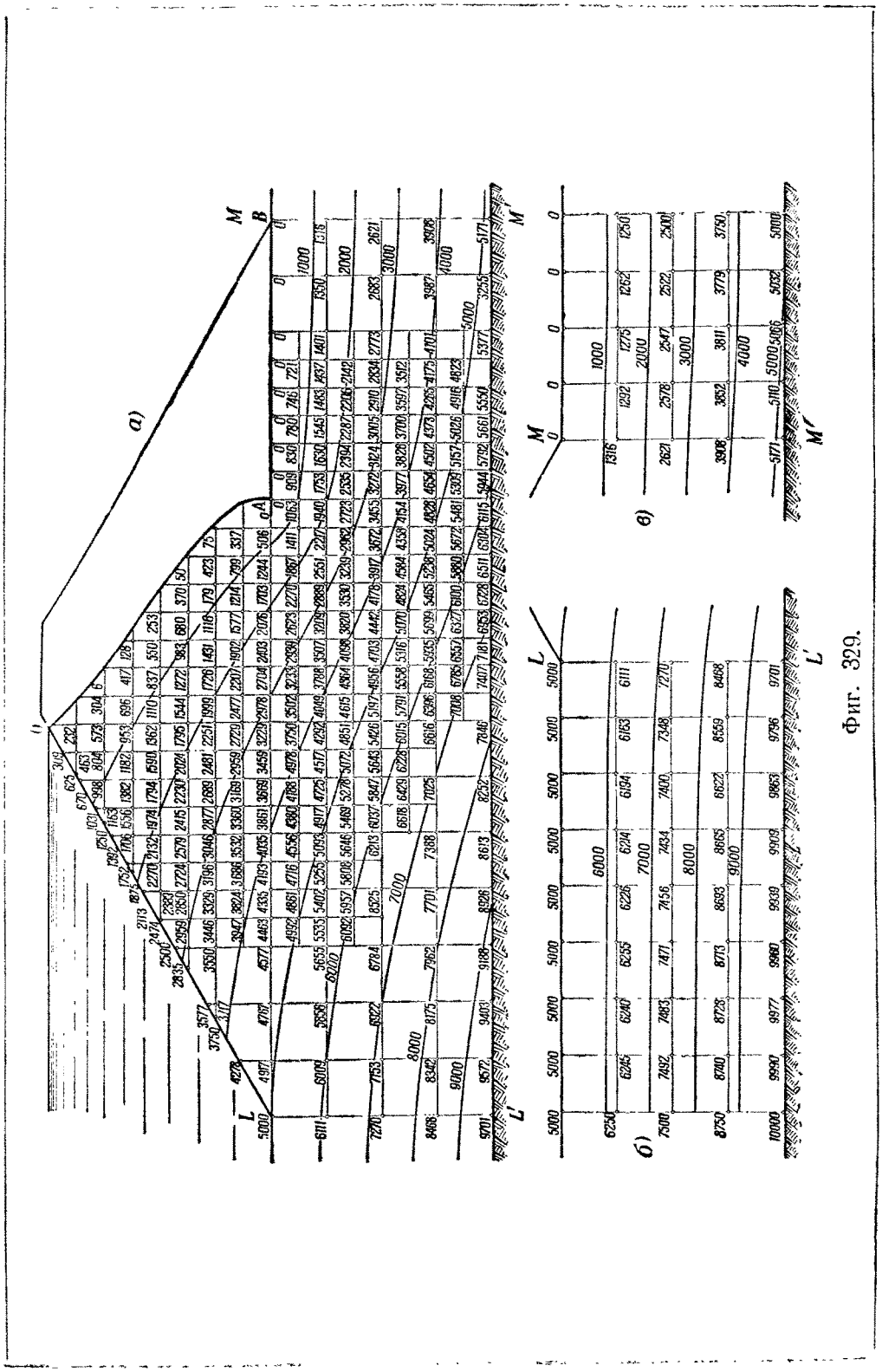
и проводя через них плавные линии (это будут диагонали четырехугольников, образованных линиями $h = C_1$ и $y = C_2$), получим изобару

$$p(x, y) = C.$$

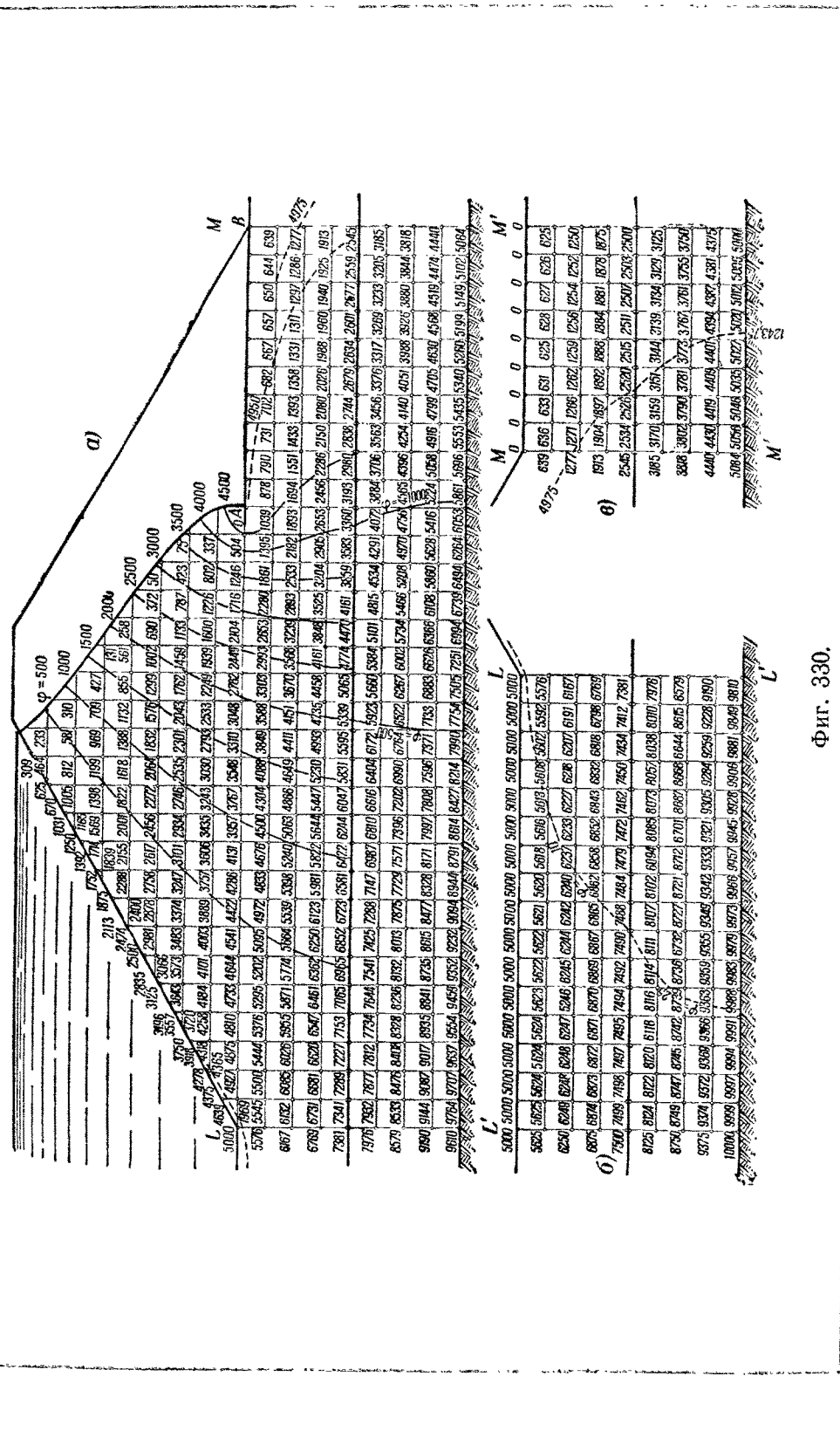
На фиг. 328 представлено семейство изобар для земляной перемычки на непроницаемом основании, на фиг. 329 — для плотины на проницаемом основании конечной глубины. На фиг. 330 по вычисленной сетке давлений построены линии равного потенциала для земляной плотины на неоднородном основании (отношение коэффициентов фильтрации верхнего и нижнего грунтов равно четырем) [12]. Переход от семейства изобар к семейству эквипотенциалей может быть осуществлен путем графического сложения.


L
M
A
E
D
B
C
a
a
d
b
c
250 174 94
500 410 319 226 130 32
750 649 548 445 340 234 126 17
1000 889 777 665 551 436 320 204 89
1250 1129 1007 885 762 638 514 389 265 142 21
1500 1369 1257 1105 973 840 707 574 441 310 181 56
1750 1609 1468 1326 1184 1042 900 750 616 476 338 204 73
2000 1849 1698 1547 1396 1244 1092 940 789 640 493 349 210 78
2250 2090 1929 1768 1607 1446 1284 1122 961 802 664 490 341 199 63
2500 2330 2160 1989 1818 1647 1475 1303 1132 962 793 627 466 312 168 40
2750 2571 2391 2210 2029 1848 1666 1483 1301 1119 938 759 584 416 257 114
3000 2811 2622 2452 2241 2049 1857 1663 1469 1274 1080 887 696 510 330 160 0
3250 3052 2853 26 2453 2251 2048 1843 1637 1429 1221 1012 804 597 394 195 0
3500 3293 3085 2876 2666 2454 2240 2024 1805 1584 1361 1136 909 681 454 227 0
3750 3534 3318 3100 2880 2658 2434 2207 1976 1742 1504 1262 1016 766 513 257 0
4000 3776 3551 3325 3096 2865 2631 2393 2151 1904 1651 1392 1127 854 575 289 0
4250 4018 3785 3551 3315 3075 2832 2584 2331 2071 1804 1529 1245 950 643 325 0
4500 4261 4021 3780 3536 3289 3037 2780 2517 2246 1966 1676 1373 1056 721 368 0
4750 4505 4259 4012 3761 3507 3248 2983 2711 2430 2139 1835 1516 1179 818 426 0
5000 4750 4499 4246 3990 3730 3464 3192 2913 2625 2325 2010 1679 1326 945 518 0
5250 4996 4741 4484 4224 3959 3688 3411 3126 2831 2524 2202 1863 1303 1110 701 250
5500 5243 4985 4725 4461 4193 3919 3638 3349 3050 2738 2411 2068 1706 1324 920 500
5750 5491 5231 4969 4704 4434 4158 3875 3583 3281 2966 2637 2292 1930 1551 1155 750
6000 5741 5480 5217 4951 4681 4404 4120 3828 3525 3209 2879 2534 2172 1794 1401 1000

Фиг. 328.



Фиг. 329.



Фиг. 330.

Отметим, что при построении изолиний для случая фильтрации в земляной плотине мы сталкиваемся с тем затруднением, что линия свободной поверхности заранее не известна, и ее надо определять подбором как линию тока, вдоль которой должны быть $h = y$.

Используя то обстоятельство, что депрессионная кривая является изобарой, можно найти, что вдоль депрессионной кривой должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\cos(n, y), \tag{6.2}$$

где n — внешняя к области движения нормаль к линии свободной поверхности.

Уравнение (6.2) можно вывести из условия, что на свободной поверхности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \tag{6.3}$$

Так как

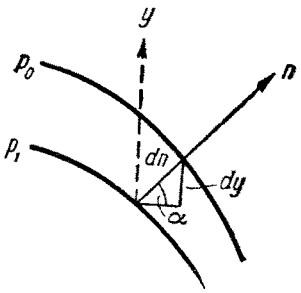
$$\varphi = -k(p + y)$$

(при $\rho g = 1$), то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -k\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{dy}{dn}\right) = 0. \tag{6.4}$$

Но $\frac{dy}{dn}$, как видно из фиг. 331, равно косинусу угла между нормалью n и осью y:

$$\frac{dy}{dn} = \sin\alpha = \cos(n, y).$$



Фиг. 331.

Подставляя это значение $\frac{dy}{dn}$ в уравнение (6.4), мы и получим соотношение (6.2). Оно может служить для проверки правильности построения депрессионной кривой или для построения изобары $p = p_1$, когда известна изобара — депрессионная кривая $p = p_0$. В последнем случае имеем приближенное равенство

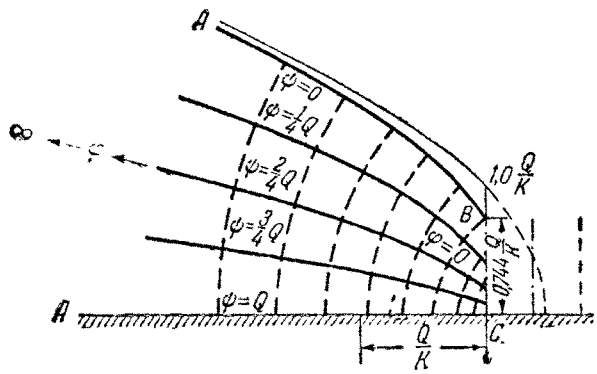
$$p_1 - p_0 \approx \Delta n \cos(n, y),$$

позволяющее, построив нормали в ряде точек свободной поверхности и вычислив в них $\cos(n, y)$, найти длины отрезков нормали Δn между линиями p_0 и p_1.

§ 7. Фиктивное течение в области годографа скорости. Предположим, что мы отобразили плоскость комплексного потенциала на плоскость скорости $w = u - iv$. Тогда $\omega(w)$ будет представлять течение в области годографа скорости, т. е. фиктивное течение, на границах которого выполняются те же условия для φ и ψ, что и для действительного течения на плоскости z [13].

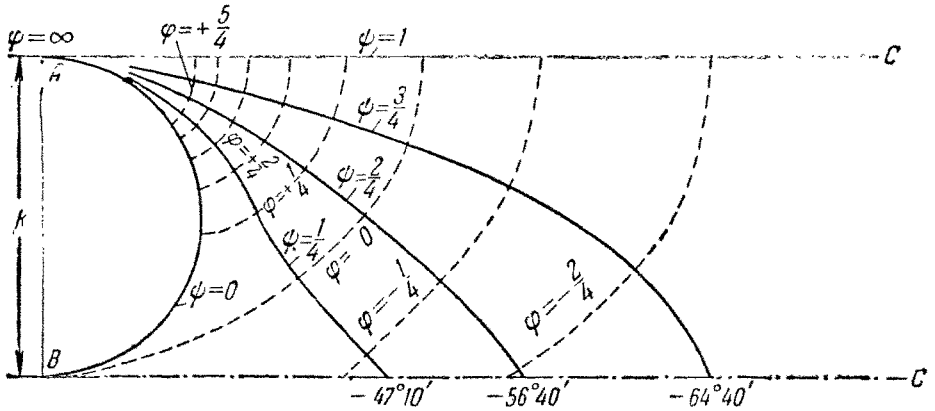
В качестве примера рассмотрим приток из бесконечности к вертикальному откосу на непроницаемом водоупоре, когда вода в нижнем бьефе отсутствует [14] (фиг. 332). Это — частный случай прямоугольной перемычки, рассмотренной у нас в главе VII.

На фиг. 333 построен годограф скорости перемычки. Свободной поверхности отвечает дуга окружности $u^2+v^2+kv=0$, непроницаемому основанию — ось u, промежутку высачивания — прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $u=0$, $v=-k$. На плоскости годографа линии AB и AC являются линиями тока фиктивного течения. Примем вдоль них соответственно $\psi=0$ и $\psi=1$. (Когда мы найдем величину расхода Q, то умножим значения функции тока на него.)



Фиг. 332.

Линия BC есть промежуток высачивания. Чтобы исследовать поведение линий тока вдоль этой прямой, можно построить семейство изоклин на плоскости (u, v). Это — пучок прямых, исходящих из начала координат (они не изображены на фиг. 333). Угол ϑ каждой из них с осью абсцисс меняется от нуля в точке C до $-90°$ в точке B.



Фиг. 333.

Так как область z отображается на область $u+iv$ конформно, с сохранением углов (но с измененным направлением отсчета углов — конформное отображение второго рода), то на плоскости годографа линии тока должны пересекать прямую BC под тем же углом α, под каким линии тока плоскости z пересекают промежуток высачивания. При этом α представляет дополнение угла ϑ до $-90°$.

Разметив вдоль отрезка BC фиг. 333 значения α, можем построить семейство линий тока, исходящих из вершины A, и линий равного потенциала. Эквипотенциаль, исходящую из вершины B, принимаем за нулевую. В точке A эквипотенциали сгущаются до $\varphi = \infty$ и скорость фиктивного течения здесь будет равна бесконечности.

§ 8. Построение сетки в области течения. Линиям тока фиктивного течения отвечают линии тока действительного течения на плоскости z. То же относится к эквипотенциалям. Выясним вопрос о том, как перенести эти изолинии с плоскости $u+iv$ на плоскость $x+iy$.

Из уравнения

$$\frac{d\omega}{dz} = w$$

получаем:

$$z = \int \frac{d\omega}{w} = \int \frac{d\omega}{u - iv}. \tag{8.1}$$

Вводя величину скорости V и угол вектора скорости с осью абсцисс ϑ, имеем:

$$w = Ve^{-i\vartheta}, \quad \frac{1}{u - iv} = \frac{1}{V} e^{i\vartheta}.$$

Выражение

$$\frac{d\omega}{w} = \frac{1}{V} e^{i\vartheta} d(\varphi + i\psi)$$

можно разбить на действительную и мнимую части, и тогда получим:

$$z = x + iy = \int \frac{1}{V} (\cos\vartheta\, d\varphi - \sin\vartheta\, d\psi) + i \int \frac{1}{V} (\sin\vartheta\, d\varphi + \cos\vartheta\, d\psi). \tag{8.2}$$

Вдоль линии тока $d\psi = 0$, а потому линия тока плоскости z определится уравнениями

$$x = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\cos\vartheta}{V} d\varphi, \quad y = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\sin\vartheta}{V} d\varphi. \tag{8.3}$$

Вдоль эквипотенциалей $d\varphi = 0$, и поэтому уравнения линии равного потенциала на плоскости течения будут:

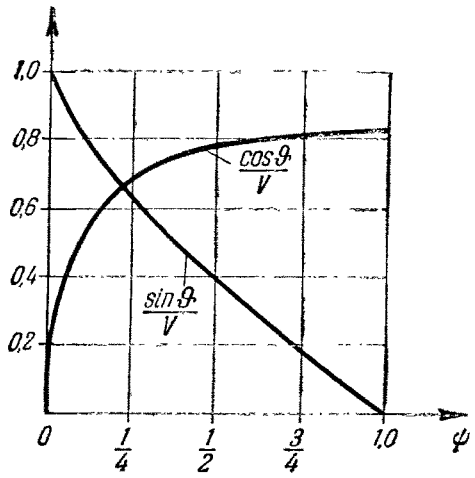
$$x = -\int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\sin\vartheta}{V} d\psi, \quad y = \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\cos\vartheta}{V} d\psi. \tag{8.4}$$

Здесь φ_1, ψ_1 — некоторые произвольно выбранные значения φ и ψ.

Если на плоскости годографа у нас построена сетка линий $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, то, производя графическое или численное

интегрирование по формулам (8.3) и (8.4), можем построить сетку движения на плоскости z.

В качестве примера возьмем эквипотенциаль $\varphi = 0$ фиктивного течения (фиг. 333). Взяв на ней точки со значениями $\psi = 0, {}^1/_4, {}^2/_4, {}^3/_4, 1$, снимем в этих точках значения V и ϑ и построим графики линий $\frac{\cos\vartheta}{V}$ и $\frac{\sin\vartheta}{V}$ как функции от ψ (фиг. 334). Произведя численное интегрирование, получим значения x и y для эквипотенциали $\varphi = 0$. Интеграл для y в пределах от 0 до 1 даст приведенную длину промежутка высачивания:



Фиг. 334.

$$\overline{h}_0 = \int_0^1 \frac{\cos\vartheta}{V}\, d\psi.$$

Проведенные реальные вычисления [12] дают для величины $\overline{h}_0$ значение 0,744. На самом деле, как было показано в § 10 главы VII, должно быть $\overline{h}_0 = 0{,}7425$. Полученное графоаналитическим расчетом значение 0,744 отличается от действительного на $0{,}2\%$. Если произвести интегрирование по другим изолиниям φ и ψ плоскости годографа, то получим сетку плоскости z (фиг. 332). В частности, интегрируя вдоль полуокружности годографа скорости, получим координаты точек депрессионной кривой. Условие $\varphi + k(y - h_0) = 0$ на свободной поверхности может служить для проверки правильности построения этой кривой.

§ 9. Изоклины и изотахи фиктивного течения [13]. Рассматривая комплексный потенциал ω как функцию от w, мы можем взять производную от нее по w:

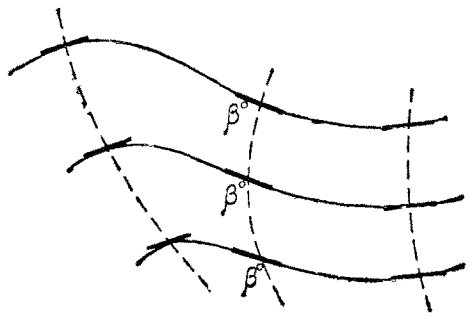
$$\frac{d\omega}{dw} = \widetilde{W} = \widetilde{V} e^{-i\widetilde{\vartheta}}, \tag{9.1}$$

которая будет представлять комплексную скорость фиктивного течения. При этом $\widetilde{V}$ будет величиной скорости, $\widetilde{\vartheta}$ — углом, образованным вектором скорости с осью u. Взяв $\ln \widetilde{W}$ и отделив в нем действительную часть от мнимой, получим:

$$\ln \widetilde{W} = \ln \widetilde{V} - i\widetilde{\vartheta}.$$

Линии $\widetilde{V} = \text{const}$ и $\widetilde{\vartheta} = \text{const}$ образуют ортогональную сетку изотах и изоклин фиктивного течения. С помощью этой сетки можно уточнять построение линий тока и линий равного потенциала фиктивного течения.

Допустим, что у нас грубо построена сетка фиктивного течения (желательно построить густую сетку). Будем проводить касательные к линиям тока под одним и тем же углом $\beta°$ к оси абсцисс и соединим плавной линией точки, отвечающие этому углу. Это будет изоклина $\beta°$ (фиг. 335). Построив систему изоклин, отвечающих, например, значениям $\beta° = 0°, 5°, 10°, \ldots$, проведем ортогональные к ним линии $\tilde{V} = \text{const}$. Если мы получили изотермическую сетку, то значения $\tilde{V}$ вдоль соседних изотах, n и $n+1$, будут удовлетворять соотношению



Фиг. 335.

$$\ln \frac{\tilde{V}_{n+1}}{\tilde{V}_n} = \text{arc } 5° = \frac{\pi}{36}$$

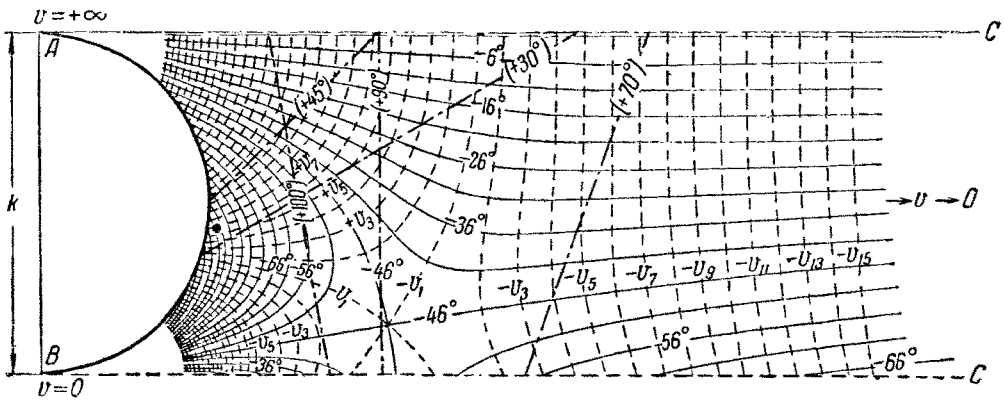
или

$$\tilde{V}_{n+1} = e^{\frac{\pi}{36}} \tilde{V}_n = 1{,}091 \tilde{V}_n.$$

При этом значение $\tilde{V}_1$, вначале произвольное, может быть определено в конце всех построений.

Полученную таким образом сетку надо выравнивать до тех пор, пока не получится правильная система квадратов.

Внутри области годографа встречаются точки, в которых пересекаются изоклины с одинаковым значением, обычно под прямым углом.



Фиг. 336.

В этой же точке пересекутся и изотахи, также под прямым углом, составив с изоклинами углы в 45°. Такая особая точка является точкой разветвления. Для примера, который мы рассматривали в предыдущем параграфе, изоклины и изотахи фиктивного течения изображены на фиг. 336 [14]. Они имеют одну точку разветвления.

Проведя касательную в какой-нибудь точке полукруга годографа скорости, мы найдем угол, соответствующий той изоклине, которая

проходит через эту точку. Изоклины выходят из полукруга и частью уходят на бесконечность, частью втекают в нижнюю часть полукруга.

От системы изоклин и изотах фиктивного течения можно перейти к системе линий $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ на плоскости годографа, если проинтегрировать уравнение (9.1) по произвольному пути в плоскости w. Положим

$$\omega = \int \widetilde{V} e^{-i\widetilde{\vartheta}}\, dw \tag{9.2}$$

и пусть

$$dw = e^{i\vartheta_s}\, ds,$$

где ds — элемент дуги выбранной кривой, ϑ_s — угол касательной к этой дуге с осью абсцисс. Тогда будем иметь:

$$\omega = \int_{s_0}^{s} \widetilde{V} e^{i(\vartheta_s - \widetilde{\vartheta})}\, ds,$$

или

$$\varphi = \int_{s_0}^{s} \widetilde{V} \cos(\vartheta_s - \widetilde{\vartheta})\, ds, \quad \psi = \int_{s_0}^{s} \widetilde{V} \sin(\vartheta_s - \widetilde{\vartheta})\, ds. \tag{9.3}$$

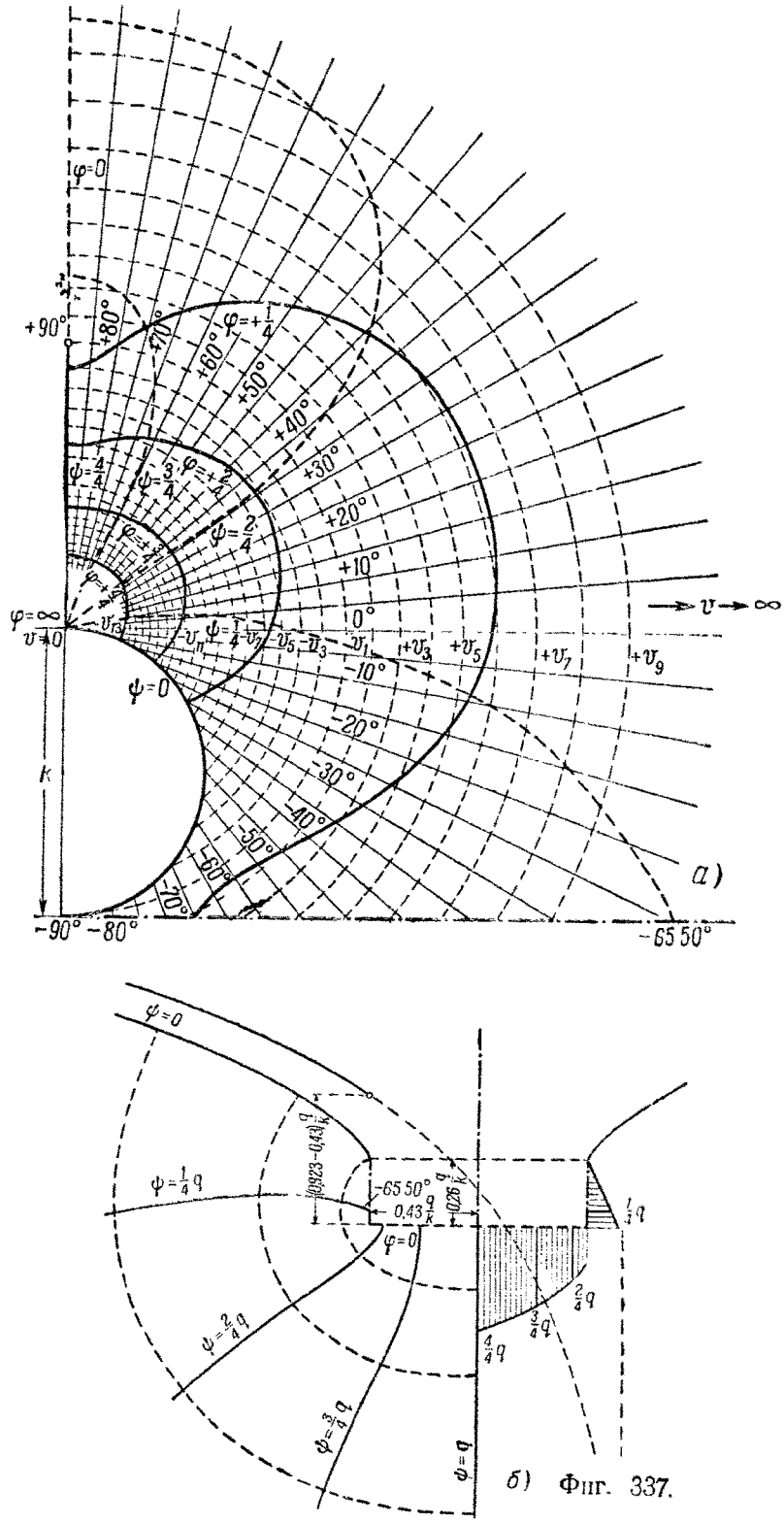
Здесь s_0 — начальное, s — конечное значение длины дуги пути интегрирования. Значения φ и ψ в какой-нибудь точке, полученные по различным путям интегрирования, должны совпадать.

С помощью интегралов (9.3) можно найти значения потенциала скорости и функции тока в различных точках области годографа и таким образом уточнить построение сетки.

С помощью такого приема Вейнигом и Шильдсом [13], а затем Брейтенодером [14] было рассмотрено несколько примеров. Фиг. 337, *а* и *б* изображают построение течения в случае притока грунтовых вод к канаве прямоугольного сечения.

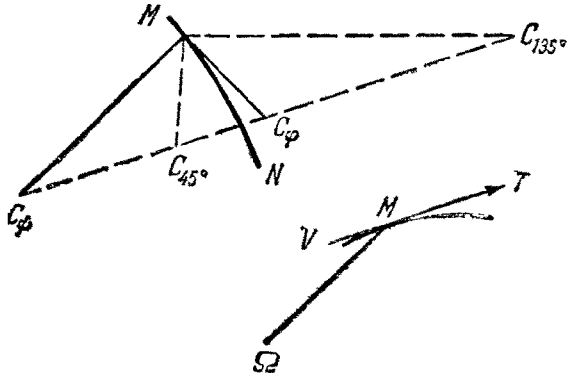
Можно указать [15] способ определения радиусов кривизны линий $\psi = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, что дает возможность более точного построения этих линий, как состоящих из дуг окружностей кривизны. Способ основан на теореме:

Пусть имеем линии $\varphi = C_1$, $\psi = C_2$ и диагональные к ним линии. Тогда центры кривизны диагональных линий находятся на одной прямой с центрами кривизны линии тока и эквипотенциали (фиг. 338). При этом направление этой прямой совпадает с направлением касательной к контуру *видоизмененного* годографа скорости, — под ним понимается линия, описанная концом вектора, исходящего из произвольного полюса Ω, величина которого равна величине вектора скорости, но который составляет прямой угол с направлением скорости.


φ=0
+90°
+80°
+70°
+60°
+50°
+40°
+30°
+20°
+10°
0°
-10°
-20°
-30°
-40°
-50°
-60°
-70°
-90°
-80°
-65 50°
φ=+1/4
φ=+2/4
φ=+3/4
φ=+4/4
ψ=1/4
ψ=2/4
ψ=3/4
ψ=4/4
φ=∞
v=0
v→∞
+v9
+v7
+v5
+v3
+v1
-v1
-v3
-v5
-v7
-v9
ψ=0
K
a)
ψ=0
ψ=1/4 q
0,923-0,43 q/K
-65 50°
0,43 q/K
0,26 q/K
φ=0
1/4 q
2/4 q
3/4 q
1/4 q
ψ=2/4 q
ψ=3/4 q
ψ=q
б)

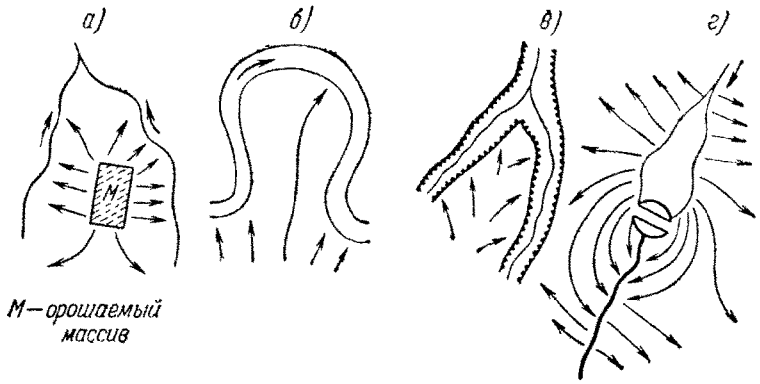
Фиг. 337.

Так, на фиг. 338 линия MN есть линия тока, Ω — полюс видоизмененного годографа. Если известен центр кризизны C_ψ и если мы знаем направление касательной к видоизмененному годографу MT, то, проведя через точку C_ψ прямую, параллельную MT, найдем ось, на которой лежат C_φ, $C_{45°}$, $C_{135°}$.



Фиг. 338.

§ 10. Графоаналитический метод расчета пространственных движений. В естественных условиях плоские течения грунтовых вод встречаются очень редко, действительные движения бывают трехмерными. На фиг. 339 приведены примеры пространственных движений. На схеме *а*) показан грунтовый поток, образованный просачиванием



Фиг. 339.

воды, являющейся следствием фильтрационных потерь оросительной системы. Схема *б*) представляет типичный случай выклинивания грунтового потока в пойму реки. На схеме *в*) изображен грунтовый поток, образующийся от инфильтрации атмосферных осадков и выходящий на склоны оврагов. Чертеж *г*) изображает фильтрацию из водохранилищ и обтекание плотины.

С. Ф. Аверьянов [16], приводя эти схемы, указывает, какие задачи встают при их рассмотрении. Для схемы *а*) возникает вопрос о подъеме грунтовых вод и возможном засолении сельскохозяйственных земель. Дело в том, что если поверхность грунтовых вод близка к поверхности земли, то могут наступить интенсивное испарение грунтовых вод и поднятие их по капиллярам грунта; при этом из почвы выносятся соли на поверхность земли (см. литературу к главе XIV [11]).

Для случая *б*) возникает вопрос о возможности улучшения сельскохозяйственного использования поймы реки и ее осушения.

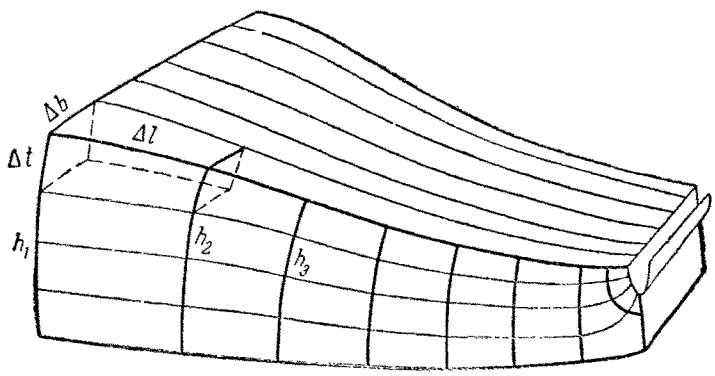
Для схемы *в*) бывает важно установить место наиболее интенсивного выхода грунтового потока и определить необходимые мероприятия по борьбе с оползнями.

Для случая *г*) важно суметь определить потери на фильтрацию из водохранилища и найти меры борьбы с подъемом грунтовых вод на прилегающих к нему сельскохозяйственных землях.

Для численного расчета пространственных установившихся движений С. Ф. Аверьянов предложил следующий метод.

В пространстве вместо линий тока нужно рассматривать поверхности тока, образующие трубки тока или шнуры течения, вместо линий равного напора (или потенциала) — поверхности равного напора (или потенциала). Последние ортогональны линиям тока.

Вдоль каждой трубки тока расход является постоянным. Можно провести поверхности равного напора так, чтобы падения напора



Фиг. 340.

между соседними поверхностями были равны. Если n — число проведенных таким образом поверхностей, то $n\,\Delta h = H$, где H — разность напоров начальной и конечной эквипотенциальных поверхностей, а Δh есть падение напора между соседними поверхностями (фиг. 340).

Рассмотрим элементарный шнур течения с элементарным расходом ΔQ. Для элемента этого шнура, отсеченного соседними эквипотенциальными поверхностями, элементарный расход выражается так:

$$\Delta Q = \frac{k\,\Delta h}{\Delta l} \cdot \Delta t \cdot \Delta b. \qquad (10.1)$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, Δl — длина элемента шнура, Δb — ширина, Δt — глубина этого элемента.

Заменяя Δh равным ему выражением $\frac{H}{n}$, получим:

$$\Delta Q = \frac{kH}{n} \frac{\Delta t \cdot \Delta b}{\Delta l} = \text{const}. \tag{10.2}$$

Разобьем область движения на такие шнуры, расходы вдоль которых равны между собой, т. е. для которых $\Delta Q = \text{const}$. Так как $\frac{kH}{n}$ постоянно, то мы должны иметь:

$$\frac{\Delta t \cdot \Delta b}{\Delta l} = \text{const}. \tag{10.3}$$

Это условие вместе с условием ортогональности линий тока к поверхностям равного напора дает критерий правильности построения пространственной решетки.

Для потоков, занимающих большую площадь и имеющих слабо изменяющуюся свободную поверхность, как мы уже указывали в главе X, можно принять, что поверхности равного напора являются цилиндрическими поверхностями с вертикальными образующими. Суммируя в этом случае шнуры по вертикали, получим для расхода ΔQ через *пачку шнуров* следующее выражение:

$$\Delta Q = k \Delta h \frac{t \cdot \Delta b}{\Delta l}. \tag{10.4}$$

Здесь t — средняя глубина потока для пачки шнуров, расположенных на одной вертикали.

При этом для одной пачки шнуров должно быть соблюдено условие

$$\frac{\Delta Q}{k \Delta h} = t \frac{\Delta b}{\Delta l} = \tau = \text{const}. \tag{10.5}$$

Можно назвать τ *коэффициентом формы* пространственной сетки.

Полный расход потока при $\tau = \text{const}$ для всей сетки равен

$$Q = k \Delta h \cdot m \cdot \tau = \frac{kH}{n} m\tau, \tag{10.6}$$

где m — число пачек шнуров по ширине потока, n — число эквипотенциальных поверхностей.

Отсюда следует, что если мы построим в плане сетку с соблюдением постоянства коэффициента формы τ, то по ней можем получить всю характеристику потока. Эквипотенциальные поверхности в плане будут линиями равного напора для напорного потока и *гидроизогипсами*, т. е. линиями равной высоты свободной поверхности, для свободного — безнапорного — потока. По ним можно определить расходы и скорости отдельных элементов потока. При этом элементы

сетки будут криволинейными прямоугольниками с переменным отношением сторон, так как для пространственного потока соблюдается условие (10.3), но не условие

$$\frac{\Delta b}{\Delta l} = \text{const},$$

имеющее место для плоского потока. Лишь при постоянной глубине потока t пространственная сетка обращается в плоскую.

При больших значениях по сравнению с t величин B и L — общей ширины и длины потока — в качестве первого приближения можно взять сетку плоского потока для постоянной глубины потока $t_{ср}$, равной среднему значению глубин t потока. Затем эту сетку можно исправить сдвиганием эквипотенциалей и линий тока при сохранении их ортогональности и при соблюдении для каждого параллелепипеда сетки условия (10.5).

В общем случае, когда поверхности равного напора не являются цилиндрическими поверхностями с вертикальными образующими, полный расход потока получается суммированием выражений (10.2):

$$Q = \frac{kH}{n} \sum_{1}^{m} \sum_{1}^{r} \frac{\Delta t \cdot \Delta b}{\Delta l}, \qquad (10.7)$$

где m и r — число шнуров по ширине и глубине потока.

В случае, когда образование потока происходит только за счет инфильтрации постоянной интенсивности ε, для любого параллелепипеда сетки получаем:

$$\Delta Q = \varepsilon S = k \Delta h \frac{t \Delta b}{\Delta l},$$

где S — площадь питания, равная площади всех квадратов сетки от рассматриваемого места до водораздела (истока потока); ΔQ уже не будет постоянным по длине шнура. Критерием правильности построения пространственной сетки будет теперь соблюдение равенств

$$\frac{\varepsilon}{k} \frac{1}{\Delta h} = \frac{t \cdot \Delta b}{S \Delta l} = \text{const}.$$

Если грунт неоднороден (т. е. коэффициент фильтрации не является постоянным), то напор

$$h = -\frac{\varphi}{k} = \frac{p}{\rho g} + z$$

не будет удовлетворять уравнению Лапласа. Но если уравнения Дарси

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad w = -k \frac{\partial h}{\partial z}$$

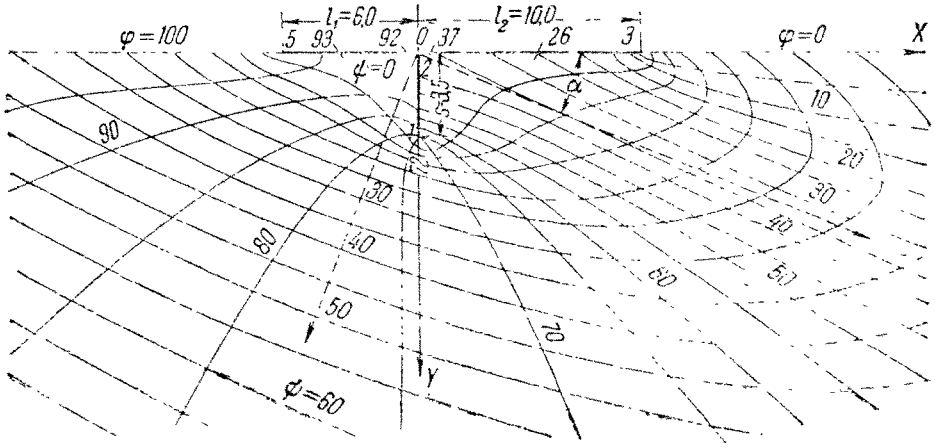
имеют место, то они показывают, что расход ΔQ попрежнему будет выражаться формулой (10.4). Однако условие (10.5) не будет выпол-

няться; вместо него будем иметь соотношение

$$\frac{\Delta Q}{\Delta h} = k\,\frac{t\cdot\Delta b}{\Delta l} = \text{const},$$

где k — осредненный по вертикали коэффициент фильтрации.

§ 11. Применение метода сеток в случае анизотропных грунтов. Рассмотрим следующий пример [7]. Задан флютбет, для которого (фиг. 341) $l_1 = 6$ *м*, $l_2 = 10$ *м*, $s = 3{,}5$ *м*.



Фиг. 341.

Коэффициенты фильтрации в направлении главных осей фильтрации имеют следующие значения:

$$k_1 = 0{,}000049\ \textit{м/сек}, \quad k_2 = 0{,}000004\ \textit{м/сек},$$

так что «коэффициент анизотропии»

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1} = 0{,}0816.$$

Угол между осью X и главной осью фильтрации μ, который характеризует наклон слоистости, пусть будет $\alpha = 19°7'$, разность уровней воды в бьефах $H = 3$ *м*.

Требуется построить сетку движения. Вспоминая результаты § 6 главы VIII, перейдем от координат X, Y к координатам μ, ν (мы здесь меняем обозначения, принимая $\lambda = \frac{1}{\nu^2}$ и вводя μ, ν вместо x_1, y_1), связанным уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \mu &= X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \\ \nu &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

Прямая $Y = 0$ перейдет в прямую

$$\frac{\nu}{\mu} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\lambda}}.$$

Если обозначить через δ угол новой прямой с осью μ, то получим:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\lambda}}, \tag{11.2}$$

и для нашего примера найдем: $\operatorname{tg}\delta = -1$, $\delta = -45°$.

Точно так же найдем, что старая ось ординат $X = 0$ перейдет в прямую

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\lambda}},$$

угол которой β с осью μ определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\lambda}}. \tag{11.3}$$

Для нашего примера получаем $\beta = 84°20'$.

Подставляя в (11.1) заданные значения α и λ, найдем:

$$\mu = 0{,}9453X + 0{,}3279Y,$$
$$\nu = -1{,}148X + 3{,}309Y.$$

Отсюда можно найти длины преобразованных отрезков (фиг. 342) флютбета: 8,92 и 14,87 *м* и преобразованного шпунта: 11,64 *м*.

В осях координат μ, ν построена ортогональная сетка линий тока и эквипотенциалей.

Решая уравнения (11.1) относительно X и Y, получим:

$$X = \mu\cos\alpha - \nu\sqrt{\lambda}\sin\alpha, \quad Y = \mu\sin\alpha + \nu\sqrt{\lambda}\cos\alpha. \tag{11.4}$$

Эти уравнения позволяют сделать пересчет полученной сетки, перенеся ее на плоскость X, Y. Новая, уже не ортогональная сетка представлена на фиг. 341. Такова картина обтекания флютбета со шпунтом в рассматриваемом примере.

Отметим, что сетка фиг. 342 может строиться указанными выше графическими методами, но может быть получена и иначе. В. С. Козловым она была построена по методу электродинамических аналогий, о котором говорится ниже (§§ 12—14).

В качестве второго примера возьмем трехшпунтовый флютбет, представленный на фиг. 343. Для него $l_1 = 6$ *м*, $l_2 = 15$ *м*, $s_1 = 3$ *м*, $s_2 = 4$ *м*, $s_3 = 2$ *м*. Флютбет лежит на анизотропном грунте, мощность (глубина) которого $T = 24{,}5$ *м*.

Коэффициенты фильтрации в направлении главных осей выбраны так: $k_1 = 0{,}00001$ *м/сек*, $k_2 = 0{,}0000019$ *м/сек*, так что $\lambda = \frac{k_2}{k_1} = 0{,}19$. Угол между осями X и μ равен $\alpha = 15°$. Напор $H = 5$ *м*.

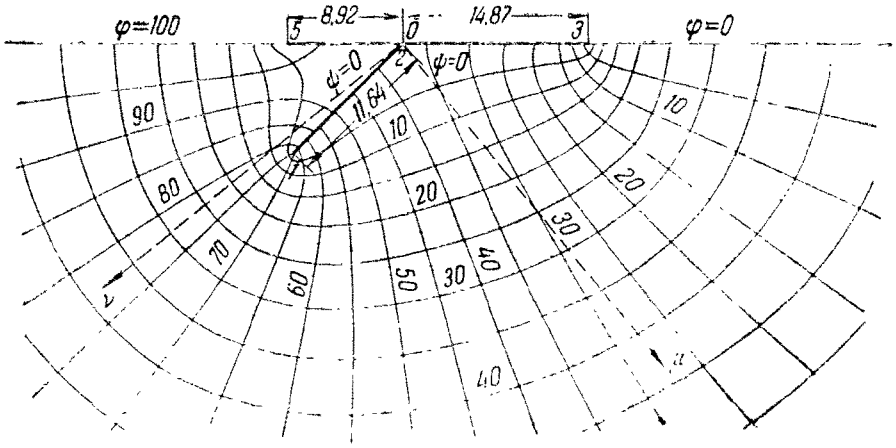
Получаем уравнения преобразования осей координат:

$$\mu = 0{,}9659X + 0{,}2588Y, \quad \nu = -0{,}5942X + 2{,}222Y.$$

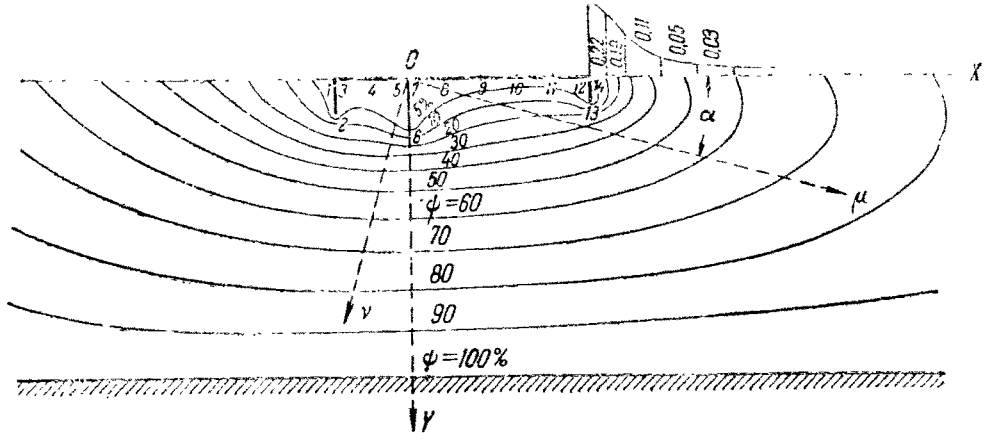
По ним определяем координаты точек, являющихся вершинами области движения:

X, Y	—5; 3	—6; 0	0; 0	0; 4	15; 0	15; 2	0; 24,5
μ	—5,019	—5,795	0	1,035	14,49	15,01	6,341
ν	10,23	3,565	0	8,886	—8,913	—13,36	54,43

Последняя точка таблицы — произвольно взятая точка действительной оси.

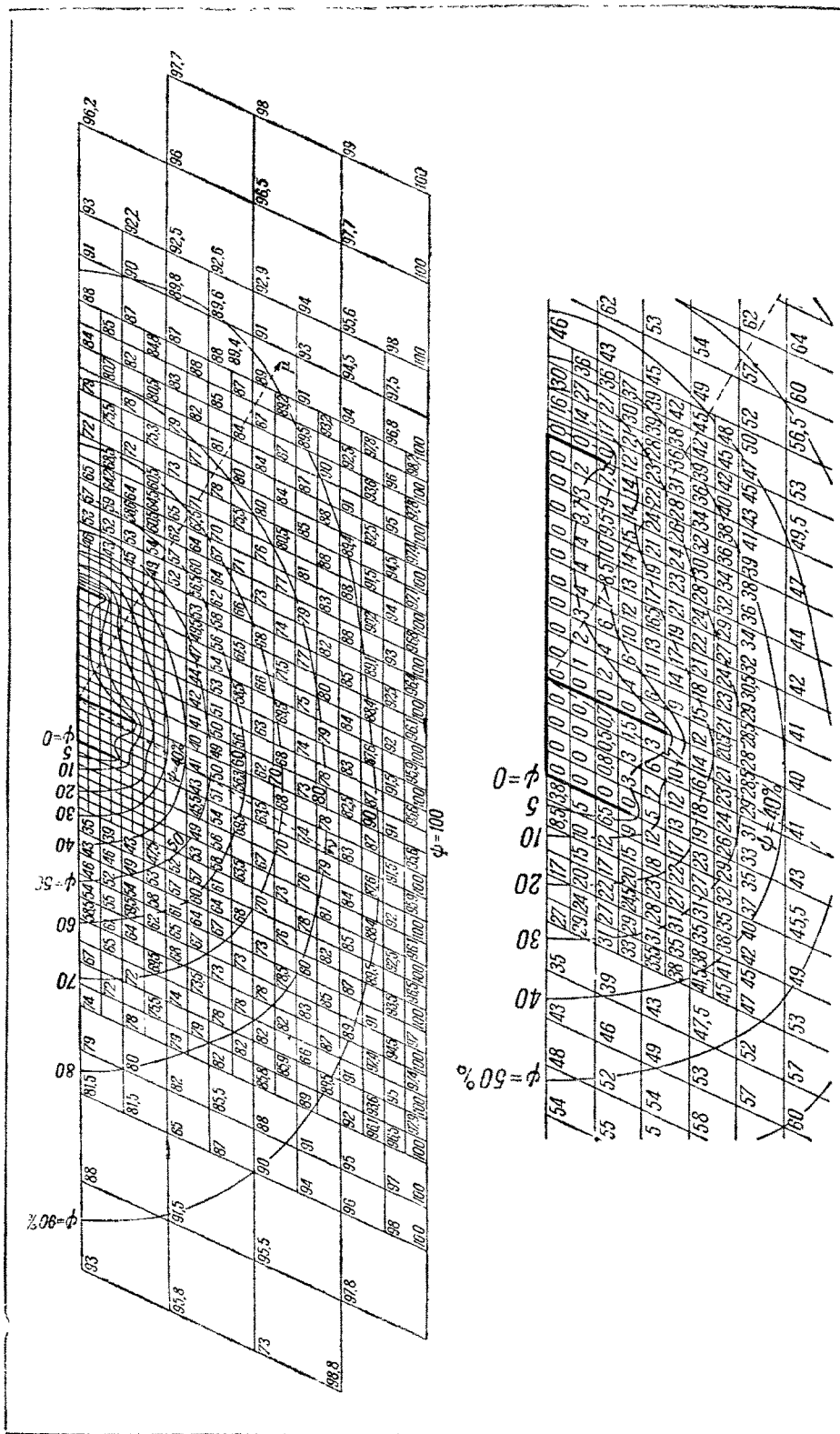


Фиг. 342.



Фиг. 343.

Область движения в плоскости μ, ν разбита на параллелограммы, стороны которых параллельны линии флютбета и направлениям шпунтов (фиг. 344).



Фиг. 344.

Функции тока ψ приписаны значения: 0 вдоль контура сооружения и 100 вдоль непроницаемого основания. Если провести на-глаз промежуточные линии тока, то можно будет расставить в вершинах параллелограммов приближенные значения функции ψ.

Для параллелограммной сетки значение гармонической функции ψ в центре параллелограмма можно определить по формуле, данной Д. Ю. Пановым [4] (фиг. 345):

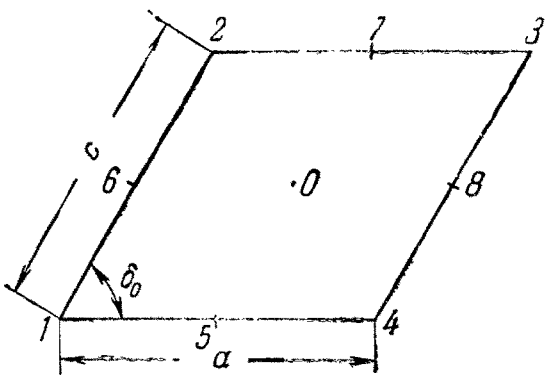
$$\psi = \frac{\sigma_1\lambda_1 + \sigma_2\lambda_2 + \sigma_3\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \tag{11.5}$$

Здесь

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\psi_5 + \psi_7),\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(\psi_6 + \psi_8),\ \sigma_3 = \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_4),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos\delta_0}{ac},\quad \lambda_2 = \frac{1}{a^2} - \frac{\cos\delta_0}{ac},\quad \lambda_3 = \frac{\cos\delta_0}{ac},$$

причем a и c суть длины сторон ячейки сетки, δ_0 — угол между сторонами параллелограмма. Этот угол определяется как разность углов δ и β, для которых имеют место формулы (11.2) и (11.3). Поэтому получаем:



Фиг. 345.

$$\operatorname{tg}\delta_0 = \frac{\sqrt{\lambda}}{(1-\lambda)\sin\alpha\cos\alpha}.$$

В рассматриваемом нами примере $\delta_0 = 65°$.

Для первых приближений при вычислении ψ можно пользоваться не формулой (11.5), но просто средним арифметическим:

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4}{4},$$

а в дальнейших приближениях переходить к формуле (11.5).

С плоскости μ, ν линии тока переносятся затем на плоскость X, Y (фиг. 343).

Из рассмотрения фиг. 341 и 343 ясно видно, что линии тока не ортогональны к границам водоемов.

На фиг. 343 построена эпюра скоростей вдоль границы нижнего бьефа, деленных на коэффициент фильтрации.

Б. МЕТОД ЭЛЕКТРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ (ЭГДА)

§ 12. Основные соотношения. Между установившимся движением грунтовых вод и движением электрического тока существует аналогия, выражающаяся в том, что оба явления описываются с помощью дифференциальных уравнений одного и того же вида с оди-

наковыми граничными условиями. Эта аналогия была использована Н. Н. Павловским, который еще в 1918 г. применил ее для экспериментального решения ряда задач, встречающихся при изучении движения грунтовых вод.

Предположим, что у нас имеется тонкий слой жидкого или твердого проводника, толщина которого z может быть переменной. Дифференциальные уравнения установившегося движения электрического тока имеют вид

$$i_x = -c\frac{\partial V}{\partial x}, \quad i_y = -c\frac{\partial V}{\partial y}, \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial (zi_x)}{\partial x} + \frac{\partial (zi_y)}{\partial y} = 0, \tag{12.2}$$

где i_x, i_y — компоненты плотности тока, V — электрический потенциал или функция напряжения, c — коэффициент электропроводности, x, y — координаты точек электрической модели.

Введем функцию тока Ψ с помощью равенств

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -zi_y, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = zi_x. \tag{12.3}$$

Сравнивая эти выражения с (12.1), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{cz}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{cz}\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{12.4}$$

Обратимся теперь к уравнениям теории фильтрации

$$u = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{12.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{12.6}$$

где h — напор. Введя функцию тока ψ, найдем зависимость между h и ψ:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{12.7}$$

Сравнение (12.7) и (12.4) показывает, что линиям тока грунтового потока отвечают линии электрического тока, а линиям равного напора — линии равного электрического потенциала. Если смоделировать дно по условию

$$k = cz$$

и построить область, заполненную проводником, подобную в плане области грунтового потока (фиг. 346), то, измеряя электрический потенциал в различных точках, будем знать пропорциональную ему величину напора, измерение же плотности тока в отдельных точках даст величину скорости, а величина силы тока будет пропорциональна расходу потока.

С. А. Христианович [17] указал применение способа ЭГДА для случаев, когда движение грунтовых вод не удовлетворяет линейному закону Дарси, т. е. когда k является функцией скорости.

В случае движения в однородной среде, когда $k = \text{const}$ и $c = \text{const}$, уравнения для V и h будут уравнениями Лапласа:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \tag{12.8}$$

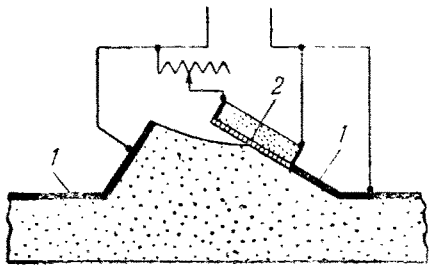
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \tag{12.9}$$

При рассмотрении основных задач теории фильтрации мы имели граничные условия такого рода: на границах водоемов $h = \text{const}$, на твердых стенках и депрессионной кривой $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$.

На электрической модели нетрудно осуществить на заданной линии условия вида

$$V = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Модели фильтрационных областей изготовляются из проводников, имеющих большое сопротивление: это пластинки из станиоля толщиной 0,01—0,02 *мм*, электролиты—жидкости или растворы солей, графит или смесь его с мрамором, студнеобразная масса из желатина или агар-агара в растворе поваренной соли, электропроводная бумага и т. д. Для осуществления контура равного напряжения устанавливают латунные шины с ничтожно малым сопротивлением (по отношению к сопротивлению проводника, из которого сделана область движения). На фиг. 346 такие шины обозначены цифрой *1*.



Фиг. 346.

Для получения на модели линии, соответствующей линии тока данного движения, нужно вдоль соответствующего участка контура поставить изоляцию — парафин, воск, стекло и т. п. Для проводящей бумаги изолятором является воздух, поэтому линия тока — просто край обрезанной соответствующим образом бумаги.

Вдоль промежутка высачивания, как мы знаем, потенциал скорости и напор являются линейными функциями ординаты:

$$h = y + \text{const}.$$

Для задания напряжения по закону прямой линии применяют коллекторную шину (*2* на фиг. 346). В простейшем виде эта шина может состоять из ряда чередующихся латунных и эбонитовых пластинок.

На свободной поверхности, как мы знаем, также должно выполняться условие $h = y + \text{const}$. Кроме того, свободная поверхность является (без учета инфильтрации или испарения) линией тока. Однако форма этой линии заранее не известна и ее приходится подбирать так, чтобы выполнялись два условия:

$$V = ay + b, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Поэтому обычно поступают так: верхнюю часть модели обрезают по предполагаемой форме кривой депрессии, но с запасом. Получив для этой области линии равного напряжения, отыскивают точки пересечения этих линий с прямыми $y = \text{const}$ и соединяют их плавной линией. Делают обрез по новой линии (с запасом) и т. д.

Когда модель движения готова, то параллельно ей в электрическую сеть включается потенциометр, т. е. проводник, в каждой точке которого заранее известно напряжение, если величина силы тока вдоль него не изменяется. Модель и агометр (потенциометр) соединяются между собой мостиком Уитстона. В случае отсутствия в соединительной ветви электрического тока напряжение в потенциометре равно напряжению в модели.

Прибор ЭГДА может работать как на постоянном, так и на переменном токе.

В состав установки ЭГДА входит телефон (или другой индикатор — в последнее время обычно световой); отсутствие или минимум звука указывает на то, что в данной точке модели напряжение такое же, какое установлено на потенциометре. Можно просто следить за стрелкой гальванометра.

Определив на модели ряд точек одного и того же напряжения, их соединяют плавной линией и получают линию равного напряжения.

Линии тока можно строить как ортогональные к линиям равного потенциала. Однако можно строить их и независимо, поставив задачу так, чтобы линии тока и эквипотенциали поменялись местами.

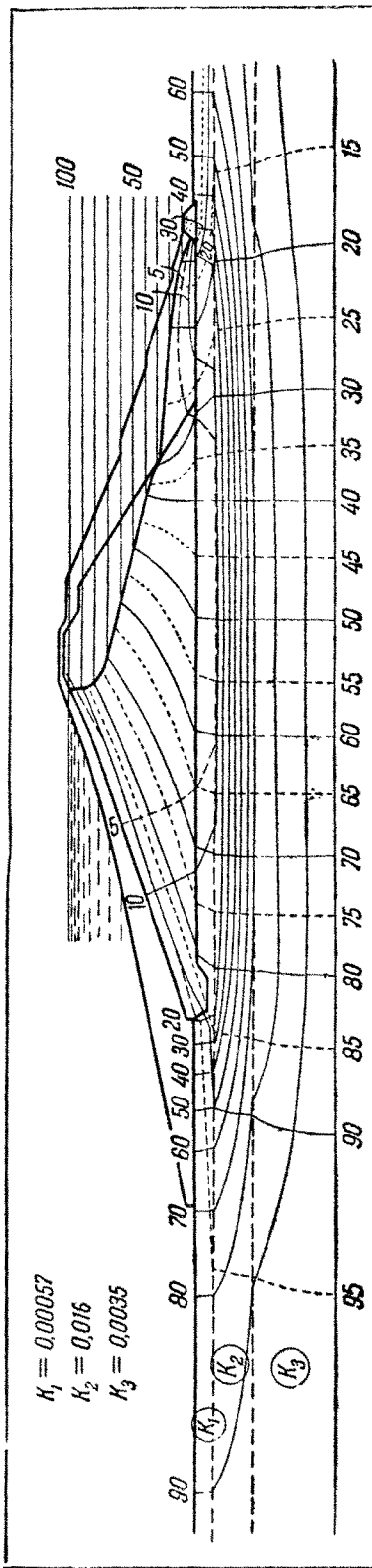
Для определения фильтрационного расхода Q вдоль дуги линии равного напора нужно сопоставить формулу

$$Q = -k \int_L \frac{\partial h}{\partial s} dl,$$

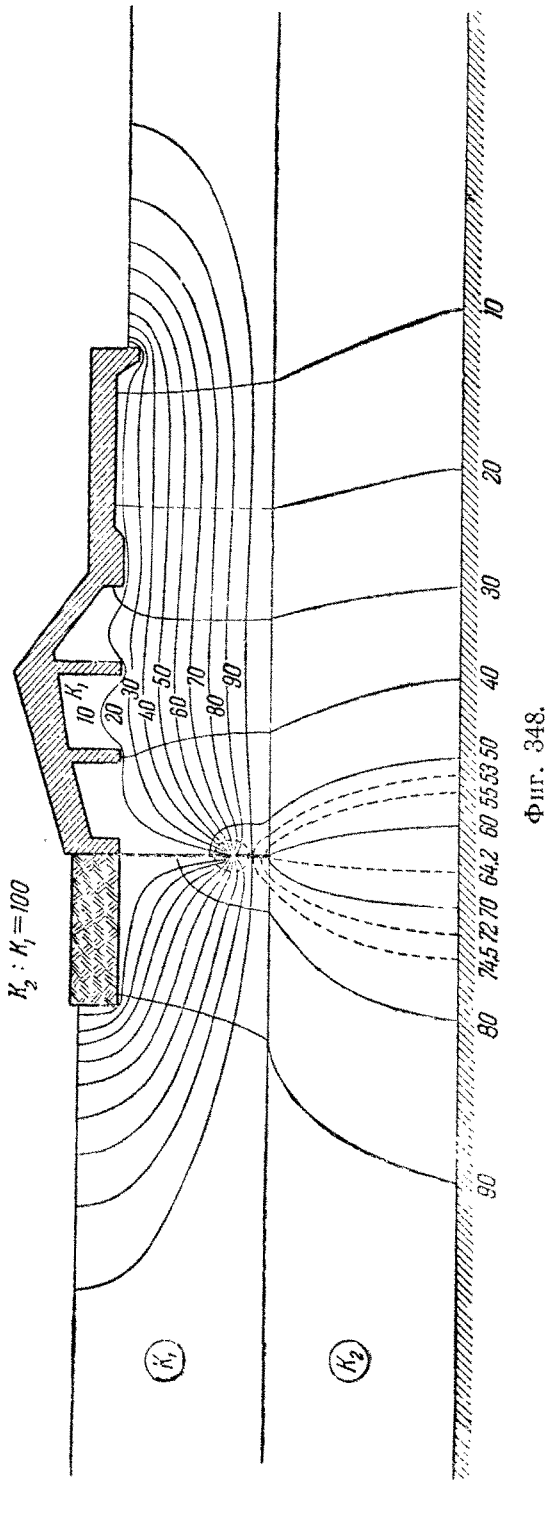
где l — длина дуги линии равного напора, с формулой для силы тока I, проходящего через дугу равного напряжения:

$$I = -c \int_L \frac{\partial V}{\partial s} dl.$$

Некоторыми авторами [17] рекомендуются методы, осиованные на измерении плотности тока, а не потенциала в различных точках модели.



Фиг. 347.



Фиг. 348.

В случае, если нужно смоделировать область, состоящую из нескольких участков с различными проницаемостями, пользуются различными электролитами или, как мы уже указывали, одним и тем же электролитом различной глубины. Удобно использование бумаги различной электропроводности.

В настоящее время находит также широкое применение моделирование методом ЭГДА пространственных движений [18, 19]. Мы не останавливаемся на этом вопросе, ограничиваясь пояснением его на одном примере (§ 14).

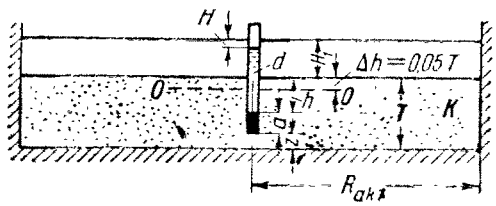
В последнее время находит применение прибор, называемый электроинтегратором [20, 21], — главным образом в области гидравлики нефтяного пласта.

§ 13. Применение метода ЭГДА к плоским задачам. Метод ЭГДА получил широкое распространение в различных научно-исследовательских институтах и проектных организациях. С его помощью строят сетки движения для моделей реальных гидротехнических сооружений. На фиг. 347 и 348 приведены примеры такого рода [22]. На фиг. 348 видно, как велико влияние щели, которая может образоваться в шпунте.

Существуют применения метода ЭГДА к упрощенным схемам фильтрации. Так, С. М. Проскурниковым [23] приведены результаты исследования фильтрации через перемычки и трапецоидальные плотины, — причем получены зависимости расхода и высоты промежутка высачивания от уклона наклонного откоса (другой откос вертикальный), — а также через плотины с двумя наклонными откосами.

П. Ф. Фильчаков [24] рассматривал модели течения через прямоугольную перемычку и другие плотины при разнородных грунтах.

§ 14. Применение метода ЭГДА к определению коэффициента фильтрации. При возведении гидротехнических сооружений очень важно знать коэффициент фильтрации грунтов, залегающих в русле реки. Для этого применяются откачки из скважин. Н. И. Дружинин [25] с помощью пространственной модели ЭГДА исследовал 120 схем притока воды к перфорированной трубе, погруженной в грунт. Это дало возможность построить графики зависимости приведенного расхода от места расположения фильтра и его длины (фиг. 349 и 350).

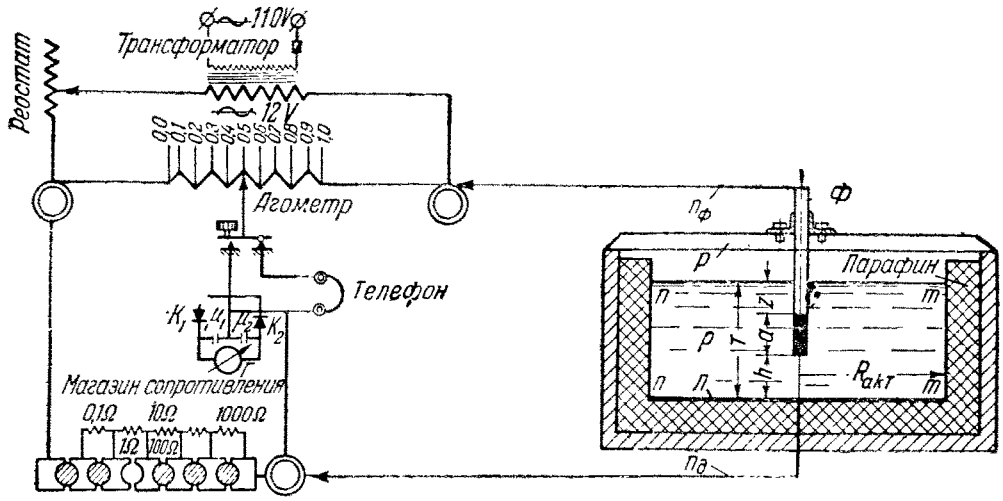


Фиг. 349.

Дадим краткое описание опытов. Считают, что существует активная зона фильтрационного потока, характеризуемая величиной радиуса $R_{акт}$, который определяется при заданной глубине потока и не превышает трех глубин потока. Если мы выделим в потоке вокруг

скважины цилиндр радиуса $R_{акт}$ и получим при этом некоторое значение расхода Q, то при увеличении радиуса выделенной области Q будет настолько мало изменяться, что этим изменением можно пренебречь.

Модель грунтового потока устраивается таким образом. С помощью электролита ρ (фиг. 350) в ванночке *пптт*, образованной в парафине, моделируется в масштабе 1 : 100 активная зона грунтового потока глубиной T и радиусом $R_{акт}$. На дне ванночки укладывается медный лист $Л$, изображающий дно водоема. К нему подводится электрический ток с помощью провода $п_д$. В центре ванночки на



Фиг. 350.

раме $Р$ установлен подвижной медный стержень $Ф$, изолированный по всему периметру бакелитовым лаком. При этом участок стержня a, представляющий длину фильтра, очищается от лака. К верхнему концу стержня припаян провод $п_ф$, по которому отводится из модели электрический ток. Стержень передвигается по вертикали; изменяя при этом длину a, создают различные размеры фильтра при различных его положениях. Модель приключается к прибору ЭГДА (фиг. 350), с помощью которого определяется ее электрическое сопротивление.

Фильтрационный расход Q определяется по формуле

$$Q = \frac{\rho}{R_0 M} kH. \qquad (14.1)$$

Здесь ρ — удельное электрическое сопротивление, т. е. сопротивление 1 $см^3$ материала модели ($ом \cdot см$), R_0 — полное электрическое сопротивление модели (в омах), M — масштаб модели, k — коэффициент фильтрации, H — напор.

Называя *приведенным расходом* q_r значение расхода при $k=1$, $H=1$ и $T=1$, перепишем формулу (13.1) так:

$$Q=\frac{\rho}{R_c MT}\,kHT=kHTq_r.$$

Отсюда коэффициент фильтрации равен

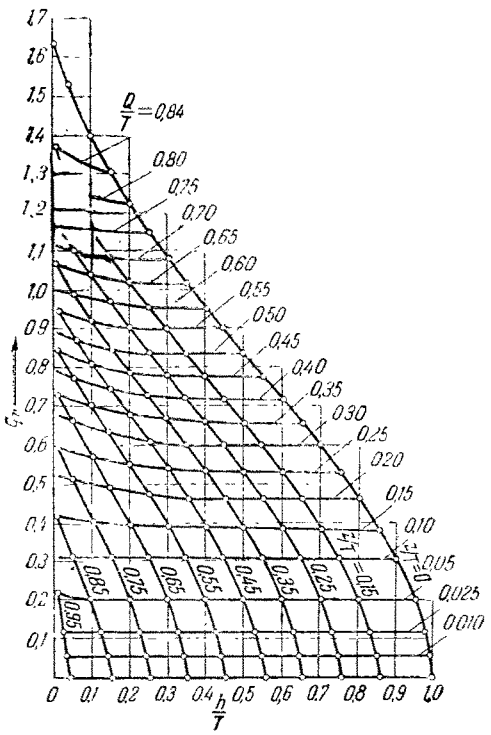
$$k=\frac{Q}{HTq_r}=\frac{\rho}{R_c T_м}.$$

Здесь

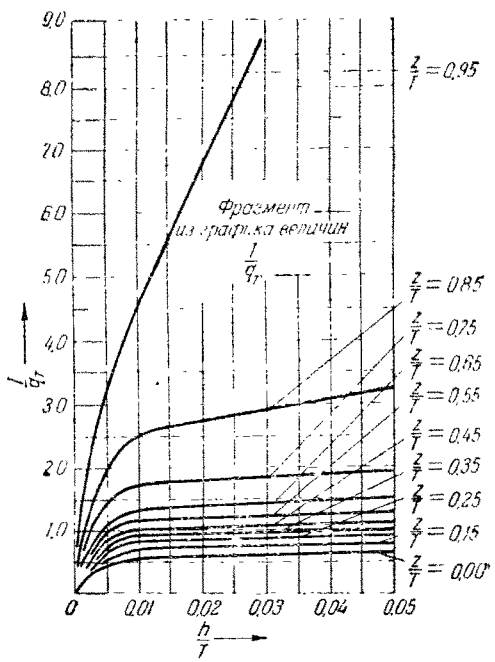
$$T_м=MT$$

есть глубина электропроводящего слоя модели в сантиметрах.

На фиг. 351 и 352 приведены результаты опытов. Второй график величины $\frac{1}{q_r}$ построен, чтобы иметь возможность определять q_r для



Фиг. 351.



Фиг. 352.

малых значений $\frac{h}{T}$. Дело в том, что q_r резко возрастает, когда верхняя граница фильтра перейдет горизонтальную линию (*OO* на фиг. 349), отстоящую от дна водоема на расстоянии $\Delta h=0{,}05T$.

Графики составлены при $\frac{R_{акт}}{T}=3{,}25$ и $\frac{d}{T}=0{,}025$. Для случая, когда

$$d\neq 0{,}025T,$$

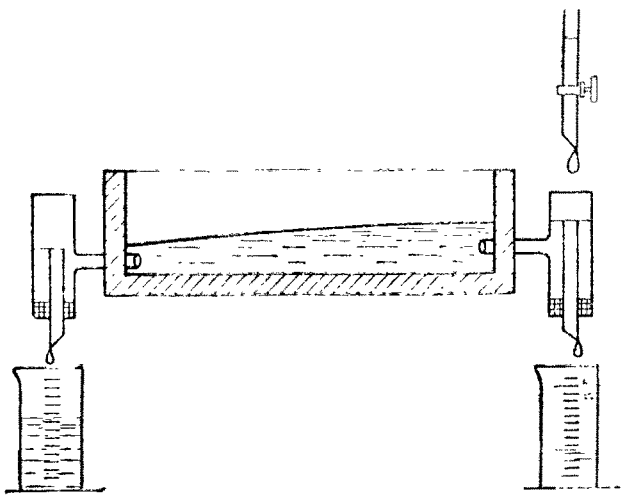
В. И. Аравиным и С. Н. Нумеровым предложена следующая приближенная формула для вычисления k:

$$k = \frac{Q}{q_r HT\left[1 + 0{,}37\,\frac{Tq_r}{a} - \lg_{10}\left(\frac{40d}{T}\right)\right]}.$$

Мы видим, таким образом, что прибор ЭГДА может служить не только для изучения фильтрации в случае сложной формы области течения в реальных условиях, моделируя некоторые индивидуальные течения. Он может также применяться и для изучения типовых схем, когда в результате проведения целой серии опытов составляются таблицы или графики, полезные для практики. Другими словами, прибор ЭГДА может в некоторых случаях заменять счетные приборы.

В. ОПЫТЫ В ЩЕЛЕВЫХ ЛОТКАХ

§ 15. Теория щелевого лотка. Известно, что плоское безвихревое движение хорошо воспроизводится посредством пропускания жидкости между двумя параллельными пластинками, достаточно близкими друг к другу.



Фиг. 353.

Аналогия между ламинарным движением жидкости в щели между параллельными пластинками и движением воды в грунте с постоянным коэффициентом фильтрации была использована Е. А. Замариным. Прибор, названный *щелевым лотком* (фиг. 353), в настоящее время широко распространен в научно-исследовательских и учебных лабораториях. Щелевой лоток удобен тем, что дает наглядную картину движения, легко позволяет воспроизводить неустановившееся движение. В противоположность прибору ЭГДА свободная поверхность образуется автоматически.

Теория щелевого лотка изложена в работе [26].

В курсах гидродинамики рассматривается задача о движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскими стенками (фиг. 354). Пусть движение будет «одномерным», происходящим параллельно оси x, так что $v = w = 0$.

Как известно [32], в этом случае имеет место уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{15.1}$$

где μ — вязкость жидкости, причем $\frac{\partial p}{\partial x}$ здесь будет величиной постоянной.

Интегрирование уравнения (15.1) по z в пределах от a до z, принимая во внимание условия прилипания жидкости к стенкам, т. е. условия $u = 0$ при $z = \pm a$, дает:

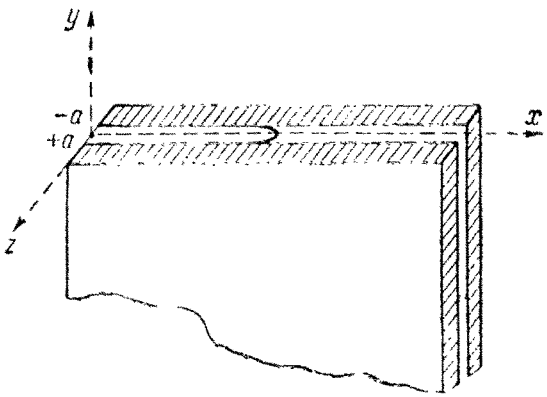
$$u(z) = -\frac{1}{2\mu}(a^2 - z^2)\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Интегрируя полученное выражение скорости по z в пределах от $-a$ до a, найдем расход жидкости через поперечное сечение щели (считая толщину слоя в направлении, параллельном оси y фиг. 354, равной единице):

$$q = -\frac{2a^3}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Отсюда средняя скорость $\bar{u}$ движения параллельно оси x получается равной

$$\bar{u} = -\frac{a^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{15.2}$$



Фиг. 354.

Если учитывать действие силы тяжести, то в формуле (15.2) вместо давления нужно взять величину

$$P = p + \rho g y$$

или пропорциональную ей величину — напор

$$h = y + \frac{p}{\rho g}.$$

В последнем случае уравнение (15.2) примет вид

$$\bar{u} = -\frac{a^2 g}{3\nu}\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{15.3}$$

Обратимся теперь к двумерному течению между параллельными стенками, т. е. такому, в котором составляющая скорости по оси z, т. е. перпендикулярно к параллельным стенкам, равна нулю, но u и v отличны от нуля. Тогда будем иметь систему уравнений

движения вязкой жидкости

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-g,\end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Движение вязкой жидкости в узкой щели, так же как движение жидкости в пористой среде, относится к числу «ползущих» движений [27]. Эти движения характеризуются малыми скоростями, такими, что можно пренебречь в левой части уравнений (15.4) инерционными членами, а в правых частях этих уравнений — значениями производных по координатам x и y по сравнению с производными по z [1]). Тогда получим уравнения

$$\left.\begin{aligned}0&=-g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ 0&=-g\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=0\left(h=y+\frac{p}{\rho g}\right).\end{aligned}\right\} \tag{15.5}$$

Так же как и в случае одномерного движения, будем иметь для средних значений составляющих скорости $\bar{u}$ и $\bar{v}$ выражения

$$\bar{u}=-\frac{a^2 g}{3\nu}\frac{\partial h}{\partial x},\quad \bar{v}=-\frac{a^2 g}{3\nu}\frac{\partial h}{\partial y} \tag{15.6}$$

$$\left(\nu=\frac{\mu}{\rho}\right).$$

Отсюда видно, что средние скорости движения жидкости в узкой щели при выполнении принятых нами допущений обладают потенциалом.

Полагая

$$m=\frac{ga^2}{3\nu} \tag{15.7}$$

и называя m *коэффициентом проницаемости щели*, мы можем написать уравнения для средних скоростей установившегося движения жидкости в щелевом лотке

$$\bar{u}=-m\frac{\partial h}{\partial x},\quad \bar{v}=-m\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{15.8}$$

---

[1]) В некоторых случаях, например для вывода соотношений подобия, мы будем сохранять в уравнениях (15.4) члены $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

приводит к уравнению Лапласа для h:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Сопоставляя уравнения (15.8) с уравнениями теории фильтрации

$$u = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -k\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{15.9}$$

мы видим полную аналогию между ними. Граничные условия в щелевом лотке такие же, как для грунтового потока, а именно: вдоль непроницаемых границ $\psi = \text{const}$, вдоль границ водоемов $h = \text{const}$, на свободных поверхностях и на промежутках высачивания давление $p = \text{const}$.

Следует отметить, что по законам движения вязкой жидкости эта жидкость прилипает к стенкам, на которых скорости равны нулю, образуя пограничный слой. Однако этот слой чрезвычайно тонок, и, как показывают опыты по обтеканию профилей, в щелевом лотке картина линий тока совпадает с той, которая получается при теоретическом решении задачи об обтекании плоского профиля.

Заметим еще, что выведенные формулы для движения в щели предполагают ламинарный характер течения, а не турбулентный, поэтому число Рейнольдса для щели

$$\mathrm{R} = \frac{Va}{\nu},$$

где V — характерная скорость течения, не должно превосходить критического значения, для какового В. И. Аравин [26] предлагает брать

$$\mathrm{R}_{кр} = 500.$$

Далее для очень узких щелей закон распределения скоростей (15.8) становится несправедливым. Однако для обычных опытов с глицерином при размерах щели порядка 1 *мм* или долей *мм* этой опасности не возникает.

Наконец, отметим, что установившаяся картина ламинарного течения наблюдается на некотором расстоянии l от входа в модель. Имеется указание, что $l = 0{,}1a\mathrm{R}$.

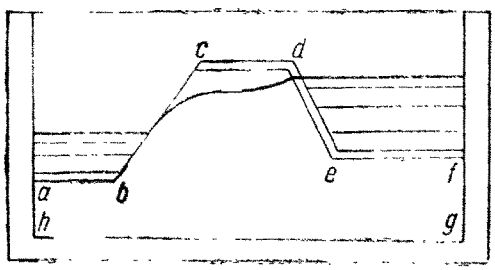
§ 16. Определение картины фильтрации. Для того чтобы построить модель фильтрационного потока в щелевом лотке, тело земляной плотины делают из парафина, верхний и нижний бьефы моделируют с помощью коробок, более широких, чем щель лотка.

Фильтрация через тело плотины моделируется так: в широкую коробку с глицерином вставляется из парафина модель плотины (*abcdefgh* фиг. 355), причем слой парафина должен быть таким, чтобы щель между стеклом и парафином была достаточно узкой. На фиг. 355 дан вид щелевого лотка. Стеклянные цилиндры по бокам лотка служат для поддержания желаемых уровней жидкости на границах лотка.

Формула

$$m = \frac{ga^2}{3\nu} \tag{16.1}$$

показывает, что если мы хотим получить определенное значение проницаемости, то ширину щели $2a$ нужно брать тем меньшей, чем меньше вязкость жидкости, с которой проводится эксперимент. Если пропускать воду, то нужно брать щель порядка 0,1—0,3 *мм*, для глицерина можно брать 1—2 *мм*.



Фиг. 355.

Предположим теперь, что мы имеем одинаковых размеров грунтовый лоток (например, с песком) и щелевой лоток (с глицерином или водой). Расход грунтового потока в лотке на единицу его ширины (перпендикулярно к плоскости чертежа, т. е. по оси z) обозначим через $q_л$. Расход щелевой модели — через всю ширину $2a$ щели — обозначим через $q_щ$. Имеем:

$$q_л = -k\frac{dh}{ds}, \tag{16.2}$$

где s — направление линии тока.

В грунтовом и щелевом лотках мы устанавливаем одинаковые действующие напоры и все геометрические размеры берем одинаковыми. Поэтому для расхода $q_щ$ через щель ширины $2a$ можем написать:

$$q_щ = -m\frac{dh}{ds}2a. \tag{16.3}$$

Сопоставляя формулы для $q_л$ и $q_щ$, получаем:

$$\frac{q_л}{q_щ} = \frac{k}{2am}. \tag{16.4}$$

Предположим теперь, что на щелевом лотке грунтовый поток выполняется в масштабе λ. Это значит, что все длины грунтового потока в натуре в λ раз больше длин щелевого лотка. Тогда, так как скорости потока в грунтовом лотке и в натуре одинаковы, то расход натуры $q_н$ будет в λ раз больше расхода грунтового лотка $q_л$.

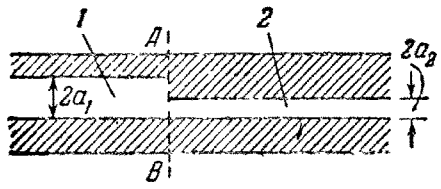
Следовательно, получаем:

$$\frac{q_н}{q_щ} = \frac{\lambda k}{2am}.$$

Принимая во внимание (16.1), получим формулу перехода от расхода в щелевом лотке $q_щ$ к расходу в натуре $q_н$:

$$q_н = \frac{3\lambda k\nu}{2ga^3} q_щ. \qquad (16.5)$$

§ 17. Моделирование неоднородных грунтов. Пусть имеется лоток, состоящий из двух частей с различными проницаемостями, т. е. с различными ширинами щелей, причем AB (фиг. 356) является линией раздела. Для выяснения законов фильтрации здесь удобнее рассматривать не средние скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$, но расходы через ширину каждой щели.



Фиг. 356.

Пусть в первой области полуширина щели будет a_1, во второй a_2. Введем вектор расхода W с составляющими W_x, W_y:

$$W_x = q_x = 2a\bar{u} = -n\frac{\partial h}{\partial x}, \quad W_y = q_y = 2a\bar{v} = -n\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Здесь через n обозначена величина

$$n = 2am,$$

называемая *второй проницаемостью щели*. Тогда будем иметь соответственно для областей *1* и *2*, обозначая значками t и n касательную и нормальную составляющие:

$$W_{t1} = -n_1\frac{\partial h_1}{\partial t}, \quad W_{n1} = -n_1\frac{\partial h_1}{\partial n},$$

$$W_{t2} = -n_2\frac{\partial h_2}{\partial t}, \quad W_{n2} = -n_2\frac{\partial h_2}{\partial n}.$$

Вдоль границы AB напор меняется непрерывно, так что $\frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{\partial h_2}{\partial t}$. Поэтому получаем:

$$\frac{W_{t1}}{n_1} = \frac{W_{t2}}{n_2}.$$

Вследствие непрерывности движения нормальные составляющие расхода должны быть равными, т. е.

$$W_{n1} = W_{n2}.$$

Как и в § 3 главы II, нетрудно усмотреть, что имеет место соотношение

$$\frac{W_{t1}}{W_{t2}} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

где θ_1, θ_2 — углы, образованные векторами W_1 и W_2 с нормалью к линии раздела. Полученная формула выражает закон преломления линий тока.

Для неоднородных грунтов мы имели в главе II закон преломления в виде

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

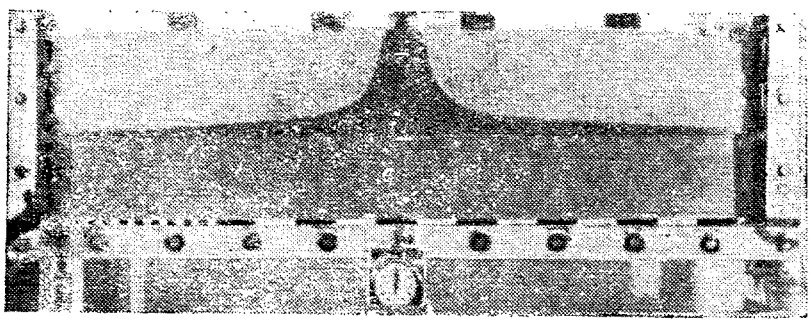
Таким образом, получаем:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

или, имея в виду равенство (16.1) и то, что $n = 2am$,

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{(2a_1)^3}{(2a_2)^3}. \tag{17.1}$$

Мы видим, что отношение коэффициентов фильтрации пропорционально отношению кубов ширин щелей. Это дает возможность



Фиг. 357.

моделировать грунты, довольно сильно различающиеся по проницаемости: так если $a_1 : a_2 = 2$, то $k_1 : k_2 = 8$. Если имеем несколько разнородных грунтов, то, обозначая через k_i, a_i соответственно коэффициент фильтрации i-го грунта и полуширину щели i-й области щелевой модели, будем иметь для расхода q грунтового потока то же самое уравнение

$$q = \frac{3\lambda k_i \nu}{2ga_i^3} q_{\text{щ}}. \tag{17.2}$$

Заметим, что и в случае однородного грунта мы можем ограничиться рассмотрением лишь второй проницаемости модели, если вместо ско-

ростей $\bar{u}$, $\bar{v}$ будем брать расходы W_x, W_y и сравнивать их со скоростями фильтрации натуры u, v.

На фиг. 357 дана фотография картины установившегося движения при фильтрации из канала, когда проницаемость верхнего слоя грунта меньше проницаемости нижнего.

§ 18. Неустановившиеся движения. Пренебрегая квадратичной частью инерционных членов в уравнениях движения, мы можем написать дифференциальные уравнения плоского движения грунтовых вод:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{g}{k}u, \\ \frac{1}{\sigma}\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{g}{k}v - g. \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

Предположим, что мы переходим от натуры к грунтовой модели, вводя масштабные коэффициенты таким образом:

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda_V u_м, \quad v = \lambda_V v_м, \\ t &= \lambda_t t_м, \quad \sigma = \lambda_\sigma \sigma_м, \end{aligned}\right\} \tag{18.2}$$

$$k = \lambda_k k_м.$$

Масштаб пьезометрических высот, т. е. величины $\frac{p}{\rho g}$, и линейный масштаб обозначим через λ:

$$\frac{p}{\rho g} = \lambda \frac{p_м}{\rho g}, \qquad x = \lambda x_м. \tag{18.3}$$

Подставляя во второе из уравнений (18.1) выражения (18.2) и (18.3), получим:

$$\frac{\lambda_V}{\lambda_\sigma \lambda_t \sigma_м}\frac{\partial u_м}{\partial t_м} = -\frac{1}{\rho_м}\frac{\partial p_м}{\partial x_м} - \frac{g}{\lambda_k k_м}\lambda_V u_м - g. \tag{18.4}$$

Для того чтобы уравнение (18.4) имело тот же вид, что уравнение (18.1), необходимо выполнение равенств

$$\frac{\lambda_V}{\lambda_\sigma \lambda_t} = \frac{\lambda_V}{\lambda_k} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_k = \lambda_V, \qquad \lambda_t = \frac{\lambda_V}{\lambda_\sigma}. \tag{18.5}$$

Теперь вместо (18.4) будем иметь:

$$\frac{1}{\sigma_м}\frac{\partial u_м}{\partial t_м} = -\frac{1}{\rho_м}\frac{\partial p_м}{\partial x_м} - \frac{g}{k_м}u_м - g. \tag{18.6}$$

Эти соотношения показывают, что чем больше мы возьмем λ_k, т. е. чем мелкозернистее возьмем грунт для модели, тем меньшие скорости будем получать на модели и тем меньшие промежутки времени будем получать на ней (если $\sigma_м = \sigma$, т. е. если порозность грунта и модели одна и та же).

Напишем теперь уравнения неустановившегося движения для щелевой модели, снабжая все соответствующие величины значком «щ»:

$$\frac{\partial u_{щ}}{\partial t_{щ}} = -\frac{1}{\rho_{щ}}\frac{\partial p_{щ}}{\partial x} - \frac{g}{m}u_{щ},$$

$$\frac{\partial v_{щ}}{\partial t_{щ}} = -\frac{1}{\rho_{щ}}\frac{\partial p_{щ}}{\partial y} - \frac{g}{m}v_{щ} - g.$$

Допустим, что грунтовая и щелевая модели у нас выполнены в одинаковом масштабе.

Сравним грунтовый поток в натуре с потоком в щелевом лотке; для этого в формулах (18.2) заменим индекс «м» на индекс «щ», принимая во внимание, что

$$\sigma_{щ} = 1.$$

Получим:

$$u = \lambda_V u_{щ}, \quad v = \lambda_V v_{щ},$$

$$t = \lambda_t t_{щ}, \quad \sigma = \lambda_\sigma,$$

$$k = \lambda_k m.$$

Мы видим, что λ_σ не может быть выбрано произвольно; этот масштаб равен величине порозности грунта.

Ширину щели можно рассчитать, задавшись каким-нибудь из масштабов, например λ_t. Имеем:

$$m = \frac{k}{\lambda_k}.$$

Но согласно (18.5)

$$\lambda_k = \lambda_V = \lambda_t\lambda_\sigma = \lambda_t\sigma;$$

следовательно,

$$m = \frac{k}{\sigma\lambda_t}, \quad \lambda_t = \frac{k}{m\sigma}.$$

Принимая во внимание формулу (16.1), получим для масштаба времени выражение

$$\lambda_t = \frac{3k\nu}{ga^2\sigma}, \tag{18.7}$$

откуда полуширина щели

$$a = \sqrt{\frac{3\nu k}{\sigma\lambda_t}}.$$

Последняя формула позволяет найти ширину щели, если мы знаем k и σ для данного грунта и ν для щелевой модели и задаемся определенным масштабом времени λ_t, желая получить на модели более быстрое движение, чем в натуре.

Формула (18.7) дает возможность найти масштаб времени, если имеем лоток с полушириной щели a, глицерин вязкости ν и заданные постоянные грунта k и σ. Тогда, если мы на щелевом лотке получили длительность некоторого процесса $t_{щ}$, то для натуры соответствующая продолжительность времени будет:

$$t = \lambda_t t_{щ} = \frac{3k\nu}{ga^2\sigma}t_{щ}.$$

Для зависимости между расходом потока в натуре (на единицу ширины потока) и расходом через щель лотка $q_{щ}$ имеем попрежнему формулу (16.5).

Примеры применения щелевого лотка к неустановившимся движениям даны в главах XIII и XVI.

§ 19. Учет капиллярности грунта. Отметим, что на щелевом лотке можно учитывать капиллярность грунта.

Если нам известна высота капиллярного поднятия грунта $h_к$, то на щелевой модели должны иметь высоту капиллярного поднятия

$$\frac{h_к}{\lambda},$$

где λ — линейный масштаб модели. Пусть будет $h_{кщ}$ высота капиллярного поднятня щели. По формуле Лапласа

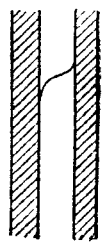
$$h_{кщ} = \frac{c}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

где c — капиллярная постоянная, зависящая от жидкости и твердых стенок, между которыми она протекает, γ — объемный вес жидкости, r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны меннска. В щели один нз радиусов кривизны равен бесконечности; пусть $r_2 = \infty$. Приближенно можно считать $r_1 = a$, тогда

$$h_{кщ} = \frac{c}{\gamma a}.$$

Для воды и стекла имеем $c = 0{,}075$ *г/см* при температуре 15° С. Поэтому для воды, протекающей между стеклянными пластинками,

$$h_{кщ} = \frac{0{,}075}{a}\ см.$$



Фнг. 358.

Если в щелевом лотке одна стенка стеклянная, а другая металлическая или сделана из парафина или воска, то мениск может быть более сложной формы (фиг. 358). Зависимость между $h_{кщ}$ и a определяется экспериментально для данной модели.

§ 20. Моделирование анизотропного грунта. Моделирование в искаженном масштабе. Анизотропный грунт можно моделировать, делая на пластинках выемки, так, чтобы ширнна щели имела два значения, $2a_1$ и $2a_2$, которым соответствуют вторые коэффициенты проницаемости n_1 и n_2.

Допустим, что анизотропность грунта происходит от того, что у нас перемежаются слои одинаковой толщины, имеющие коэффициенты фильтрации k_1 и k_2. Тогда вдоль этих слоев параллельное установившееся течение, как мы видели в главе VIII, будет таким, как если бы мы имели коэффициент фильтрации

$$k_x = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Поперечное течение, перпендикулярное к этим слоям, будет обладать (см. главу VIII) средним коэффициентом фильтрации

$$k_y = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}.$$

Как известно, среднее арифметическое больше среднего гармонического [1])

$$\frac{k_1+k_2}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}}.$$

Считая k_1 и k_2 разными, будем всегда иметь:

$$k_x > k_y.$$

Поэтому примем обозначения

$$k_x = k_{\max}, \quad k_y = k_{\min}.$$

Полагая

$$\frac{k_1}{k_2} = t, \quad \frac{k_{\max}}{k_{\min}} = d,$$

нетрудно найти:

$$d = \frac{1}{4}\left(2+t+\frac{1}{t}\right),$$

откуда для определения t в зависимости от d получаем:

$$t = 2d-1+2\sqrt{d(d-1)}. \tag{20.1}$$

С другой стороны, отношение коэффициентов фильтрации перемежающихся слоев равно отношению проницаемостей щелей лотка

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = t.$$

Задаваясь значением d, по формуле (20.1) найдем t. Если назначим, исходя из условий опыта, одну из полуширин щели равной a_2, то другую получим из равенства

$$a_1 = a_2\sqrt[3]{t}.$$

В анизотропном грунте, как мы видели, уравнение Лапласа для напора h заменяется таким:

$$k_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \tag{20.2}$$

причем оси x, y взяты в направлении максимального и минимального коэффициентов фильтрации k_x и k_y.

Уравнение (20.2) позволяет рассмотреть вопрос о моделировании в искаженном масштабе. Дело в том, что в натуре обычно протяжен-

---

[1]) В самом деле, из этого неравенства вытекает следующее:

$$(k_1+k_2)^2 \geqslant 4k_1k_2,$$

которое справедливо, так как его можно переписать таким образом:

$$(k_1-k_2)^2 \geqslant 0.$$

ность области грунтового потока в вертикальном направлении значительно меньше, чем в горизонтальном, а потому моделирование таких потоков бывает затруднено. Введем масштабы коэффициентов фильтрации K_x, K_y, масштаб напоров λ_h и линейные масштабы λ_x, λ_y, различные для двух осей координат.

Будем считать, что уравнение (20.2) соответствует модели движения в щелевом лотке, с помощью которого мы хотим изобразить движение в натуре, с коэффициентом фильтрации k, напором $h_н$, координатами X, Y. Имеем:

$$k = K_x k_x = K_y k_y, \quad h_н = \lambda_h h, \quad X = \lambda_x x, \quad Y = \lambda_y y.$$

Подставляя эти выражения в (20.2), получим:

$$\frac{K_x}{k}\frac{\lambda_h}{\lambda_x^2}\frac{\partial^2 h_н}{\partial x^2} + \frac{K_y}{k}\frac{\lambda_h}{\lambda_y^2}\frac{\partial^2 h_н}{\partial y^2} = 0.$$

Отсюда получаем, так как $K_x : K_y = k_x : k_y$:

$$\frac{K_x}{\lambda_x^2} = \frac{K_y}{\lambda_y^2}, \quad \frac{k_y}{k_x} = \frac{\lambda_x^2}{\lambda_y^2}.$$

Положим:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \Delta;$$

тогда

$$\frac{k_y}{k_x} = \Delta^2,$$

и для

$$t = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

получаем, заменяя в формуле (20.1) d на Δ^2:

$$t = 2\Delta^2 - 1 + 2\Delta\sqrt{\Delta^2 - 1}.$$

Задавшись величиной Δ, находим t, а по формуле $a_1 = a_2\sqrt[3]{t}$ найдем и отношение ширин щели для анизотропного грунта, дающего модель изотропного грунта в искаженном масштабе. При этом для увеличения вертикального масштаба нужно в щелевом лотке выступы и борозды расположить вертикально.

§ 21. Замечания по поводу опытов с щелевыми лотками. В. И. Аравин [26] указывает другие применения щелевого лотка. Так, радиальный поток можно моделировать, делая щель переменной ширины, в виде сектора, образованного двумя пластинками с малым углом ϑ между ними.

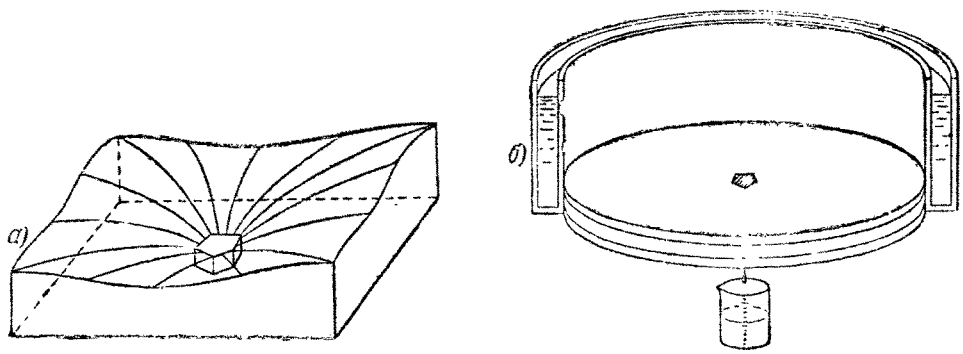
Изучение пространственных движений со слабо изогнутой свободной поверхностью можно производить с помощью моделирования напорного движения, соответствующего данному безнапорному (фиг. 359). Так для притока воды к котловану наряду с грунтовым потоком (фиг. 359, *а*) берется

вспомогательный артезианский поток в пласте глубины t, причем форма колодца в плане та же, что форма котлована. Для пласта в различных точках измеряется напор $h_{щ}$. Ординаты свободной поверхности безнапорного потока обозначаем через h. Тогда существует зависимость

$$\frac{1}{2}(h^2 - h_0^2) = \frac{nt}{k}(h_{щ} - h_{щ0});$$

h_0 — глубина воды в котловане, $h_{щ0}$ — пьезометрическая высота в артезианском водоприемнике.

На некотором удалении от центра котлована — уже на $1\frac{1}{2}$ наибольших размера котлована в плане — *гидроизогипсы*, т. е. линии равных высот или



Фиг. 359.

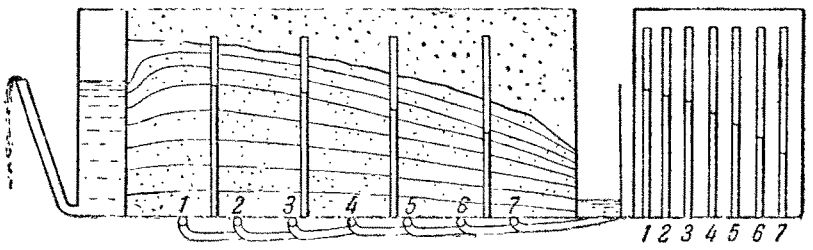
соответствующие им линии равных напоров $h_{щ}$, можно заменить окружностями, поэтому можно сделать щелевой лоток из двух круглых горизонтальных пластинок. На фиг. 359, *б* представлен в разрезе такого рода щелевой лоток.

Г. НАБЛЮДЕНИЯ НАД ФИЛЬТРАЦИЕЙ ВОДЫ В ГРУНТЕ

§ 22. Опыты в грунтовых лотках. Для изучения особенностей движения грунтовых вод в различных условиях устраивают грунтовые лотки — коробки, наполненные грунтом. В стенках лотков проделывают отверстия, которые соединяют с помощью резиновых трубок со стеклянными трубками — *пьезометрами*. Последние показывают, какой напор имеется в той точке грунта, в которую введен конец трубки.

На фиг. 360 представлен грунтовый лоток, в котором вода просачивается под влиянием разности напоров. Пьезометры показывают значения напора в точках *1*, *2*, ..., помещенных на дне лотка. При слабо изменяющейся свободной поверхности эти значения были бы близкими к ординатам свободной поверхности потока, если бы в грунте не было капиллярного поднятия. Но в верхней части грунта всегда наблюдается капиллярная кайма большей или меньшей ширины. Если поместить в грунте частицы марганцевокислого калия, то они дадут во время

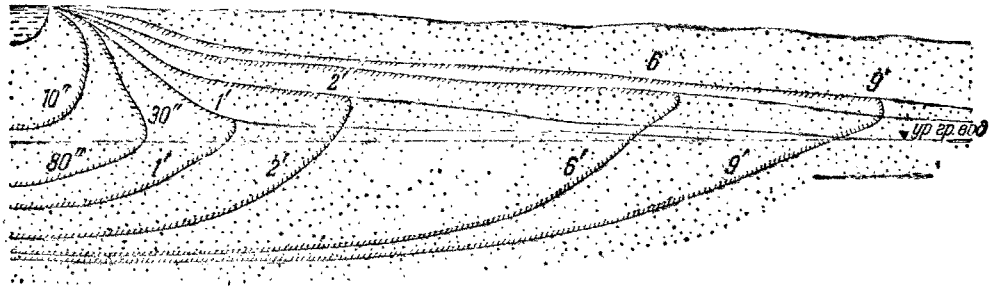
движения воды в грунте следы в виде окрашенных полос, соответствующих линиям тока. Такие линии тока будут наблюдаться и в капиллярной кайме (фиг. 360). Однако если мы вставим прозрачные перфорированные (т. е. с отверстиями вдоль стенок) трубки в грунт, то уровни воды в них не будут доходить до конца смоченного грунта,



Фиг. 360.

а будут примерно соответствовать границе смоченной области при отсутствии капиллярности. Отметим, что самое введение таких трубок несколько нарушает первоначальное движение.

На фиг. 361 приведены линии свободной поверхности для движения воды из половины «канала» в песок для последовательных моментов времени, выраженных в секундах и минутах. Длина лотка 1 *м*.



Фиг. 361.

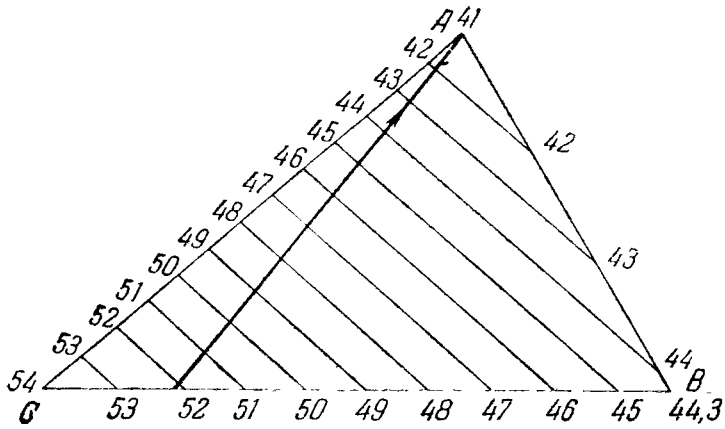
§ 23. Натурные наблюдения. Большое значение имеет постановка натурных наблюдений над уровнем грунтовых вод в области проектируемых сооружений и в области уже построенных. Работы [28, 29] посвящены натурным наблюдениям.

В книге [29] можно найти изложение основных методов наблюдений грунтового потока в натуре.

Для того чтобы определить отметки зеркала грунтовых вод, закладывают в ряде точек буровые скважины. В них опускают рейку, штангу или стальную рулетку, на конце которых имеется то или иное устройство, позволяющее наблюдать момент соприкосновения его с водой: хлопушка, свисток, контактный цилиндр, дающий за-

мыкание контакта, которое вызывает световой или звуковой сигнал, и т. д. При этом скважины или шурфы (ямы, вырываемые при близком к поверхности земли залегании грунтовых вод) должны быть занивеллированы.

Допустим, что получены замеры залегания поверхности грунтового потока в трех точках: A, B, C (расстояния между ними берутся порядка 100 *м*). Тогда строят треугольник ABC, делят его стороны на пропорциональные отрезки в соответствии с отметками уровней



Фиг. 362.

и через точки с одинаковыми отметками проводят гидроизогипсы, т. е. линии равных высот воды. Линия, ортогональная к гидроизогипсам, проведенная в сторону их падения, определяет направление движения грунтового потока (фиг. 362).

Для нахождения средней скорости движения грунтовых вод можно в выработку опустить индикатор (красящее вещество, соль и т. п.), который затем улавливать в наблюдательном пункте, беря пробы воды через определенные промежутки времени. Расстояние между выработками, деленное на время прохождения, дает среднюю скорость движения.

В книгах [29, 30] указаны различные способы определения коэффициента фильтрации грунтов.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

ГЛАВА XII

ОБ ИНЕРЦИОННЫХ ЧЛЕНАХ В НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЯХ. НАПОРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. О напорных движениях при действующих напорах, зависящих от времени. В главе I, § 11 мы уже давали оценку линейной части инерционных членов и выяснили, что при тех значениях коэффициента фильтрации, которые имеют место в реальных условиях, членами

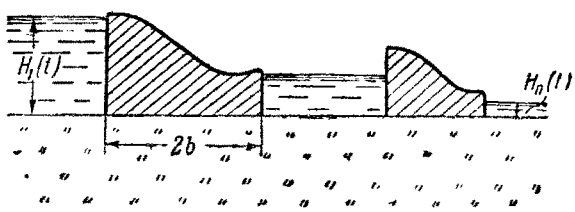
$$\frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.1}$$

следует, как правило, пренебрегать.

В связи с этим простое решение получает задача о напорном движении при неустановившемся движении, возникающем за счет того, что в водоемах изменяется уровень воды со временем. А именно, допустим, что имеем n водоемов, в которых уровень воды соответственно равен

$$H_1(t),\ H_2(t),\ldots,\ H_n(t),$$

где $H_1(t), H_2(t),\ldots, H_n(t)$— заданные функции времени.



Фиг. 363.

Между водоемами находятся основания гидротехнических сооружений (фиг. 363). Тогда, если мы имеем решение такой же задачи с постоянными значениями $H_1, H_2,\ldots, H_n$, то это же решение годится и для переменных $H_m(t)$, в которых время t следует рассматривать как параметр.

Возьмем простейший случай обтекания плоского флютбета ширины $2b$ в проницаемом слое бесконечной глубины, причем будем считать, что в верхнем бьефе имеем постоянный уровень $H_1 = h_1$, а в нижнем бьефе отметка уровня меняется по закону синусоиды

$$H_2(t) = h_2 + a\sin\lambda t,$$

причем $h_2 > a$, $h_1 > h_2 + a$.

Тогда достаточно в полученные нами в главе III формулы для комплексного потенциала и скорости

$$\omega = \varphi + i\psi = \frac{k(H_1 - H_2)}{\pi} \arcsin \frac{z}{b}, \quad w = u - iv = \frac{k(H_1 - H_2)}{\pi \sqrt{b^2 - z^2}}$$

подставить заданные значения $H_1(t)$ и $H_2(t)$. Получим:

$$w = u - iv = \frac{k(h_1 - h_2 - a \sin \lambda t)}{\pi \sqrt{b^2 - z^2}}. \tag{1.2}$$

Обратимся теперь к другому решению этой же задачи [1, 2], когда учитываются члены вида (1.1) в уравнениях движения, и покажем иллюзорность этого учета.

Если напишем уравнения плоского движения с учетом членов (1.1), но с отброшенными квадратичными членами в выражении ускорения, то будем иметь следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{gu}{k}, \\ \frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{gv}{k} - g, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.4}$$

Если ввести вектор $W(U, V)$, где

$$U = u + \frac{k}{mg}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad V = v + \frac{k}{mg}\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{1.5}$$

то уравнения (1.3) и (1.4) напишутся так:

$$U = -k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho g} + y\right), \quad V = -k\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho g} + y\right), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{1.7}$$

Введем обозначение

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) + \text{const}. \tag{1.8}$$

Тогда будем иметь:

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{1.9}$$

причем функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Если нам известны U, V, то составляющие скорости фильтрации u, v определятся как решения линейных уравнений (1.5) в следующем

виде $\left(\alpha = \frac{mg}{k}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 e^{-\alpha(t-t_0)} + \alpha e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha t} U(t)\,dt, \\ v &= v_0 e^{-\alpha(t-t_0)} + \alpha e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha t} V(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Выражение комплексной скорости можно будет написать так:

$$w = u - iv = w_0 e^{-\alpha(t-t_0)} + \alpha e^{-\alpha t}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha t} W(t)\,dt, \tag{1.11}$$

где $W = U - iV$, w_0 — значение w при $t = t_0$.

При этом для величины W мы будем иметь такое выражение, какое получается по теории установившихся движений, т. е. для нашего примера

$$W = U - iV = \frac{k(H_1 - H_2)}{\pi\sqrt{b^2 - z^2}}.$$

Поэтому для скорости $u - iv$ находим:

$$w = w_0 e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{\alpha k}{\pi}\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{b^2 - z^2}}\int_{t_0}^{t} e^{\alpha t}(h_1 - h_2 - a\sin\lambda t)\,dt,$$

где попрежнему

$$\alpha = \frac{mg}{k}. \tag{1.12}$$

Произведя интегрирование, получим решение Девисона

$$w = w_0 e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{k}{\pi\sqrt{b^2 - z^2}}\left[(h_1 - h_2)\left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right) - a\left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right)\frac{\sin\lambda t - \frac{\lambda}{\alpha}\cos\lambda t}{1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2}}\right]. \tag{1.13}$$

Оценим члены, входящие в это выражение. Чтобы получить по возможности большое влияние членов, содержащих параметр α, нам нужно взять такие значения k и m, при которых этот параметр по возможности мал. Поэтому примем:

$$k = 100\,\frac{м}{сутки} = \frac{100}{86\,400}\,\frac{м}{сек} = \frac{1}{864}\,\frac{м}{сек}, \quad m = \frac{1}{10}, \quad g \approx 10\,\frac{м}{сек^2}.$$

Тогда будем иметь:

$$\alpha = \frac{mg}{k} \approx 800 \frac{1}{сек}$$

и член $e^{-800(t-t_0)}$ будет порядка 0,001 уже при $t - t_0 = 0{,}01$ *сек*.

Следовательно, мы можем выбросить из решения члены, содержащие множитель $e^{-\alpha(t-t_0)}$. Получим выражение

$$w = \frac{k}{\pi \sqrt{b^2 - z^2}} \left[h_1 - h_0 - a \frac{\sin \lambda t - \frac{\lambda}{\alpha} \cos \lambda t}{1 + \frac{\lambda^2}{\alpha^2}} \right],$$

которое Девисон считал соответствующим значению $t_0 = -\infty$, т. е. соответствующим «устанавливающемуся» процессу через достаточно большой промежуток времени. Мы видим, что t_0 имеет в сущности порядок малых долей секунды.

Но и в остающемся теперь выражении члены, содержащие α, чрезвычайно малы. В самом деле, λ есть частота колебания воды в нижнем бьефе; она обратна периоду колебаний T:

$$\lambda = \frac{2\pi}{T}.$$

Если принять период колебаний порядка долей минуты, например, считать

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = 10 \; сек, \quad \lambda = \frac{2\pi}{10} \frac{1}{сек},$$

то будем иметь:

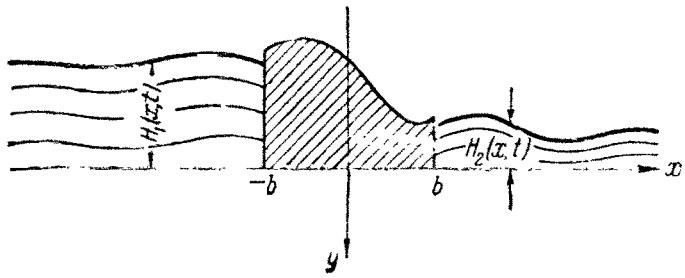
$$\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{2\pi}{10 \cdot 800} \approx \frac{1}{1000}.$$

Следовательно, член $\frac{\lambda}{\alpha} \cos \lambda t$ может быть ощутимым лишь при очень малых периодах колебаний, имеющих порядок одной секунды для сильно проницаемого грунта и еще меньших для слабо проницаемых грунтов. При обычных же условиях членами с $\frac{\lambda}{\alpha}$ также можно пренебречь, и мы возвращаемся к формуле, полученной без учета инерционных членов.

§ 2. О влиянии волнения на фильтрацию под гидротехническими сооружениями. В задачах об установившихся движениях грунтовых вод под гидротехническими сооружениями мы предполагали, что вода в бассейнах, граничащих с областью фильтрации, неподвижна, т. е. что поверхность воды, находящейся в водоеме, представляет горизонтальную плоскость. Однако в действительности часто наблюдается волнение свободной поверхности бассейнов. Это обстоятельство изменяет картину фильтрации под плотиной, причем влияние волнения особенно сказывается в нижнем бьефе.

Остановимся на простейшем случае, когда имеется плоский флютбет в грунте бесконечной глубины. Предположим, что уровни воды в верхнем и нижнем бьефах суть заданные функции x и t (фиг. 364), которые мы обозначим через $H_1(x, t)$ и $H_2(x, t)$.

Выберем $\psi = 0$ вдоль основания плотины. Тогда мы получим задачу об определении комплексного потенциала $\omega(z, t)$, для которого



Фиг. 364.

известна мнимая часть на отрезке $(-b, b)$ и действительная часть на отрезках $(-\infty, -b)$ и (b, ∞): на первом из них

$$\varphi = -kH_1(x, t),$$

на втором

$$\varphi = -kH_2(x, t).$$

Тогда мы можем воспользоваться методом, изложенным в начале главы VI, а именно, применим формулу, аналогичную формуле (1.6) главы VI, к функции

$$\frac{\omega(z)}{\sqrt{z^2 - b^2}}.$$

Получим, считая $\sigma(\zeta) = 0$ для $-b < \zeta < b$, $\sigma(\zeta) = +kH_1$ для $-\infty < \zeta < -b$, $\sigma(\zeta) = -kH_2$ для $b < \zeta < \infty$:

$$\frac{\omega(z)}{\sqrt{z^2 - b^2}} = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - b^2}\,(\zeta - z)} \tag{2.1}$$

(знак минус перед интегралом появился в силу того, что мы ищем значения функции в нижней, а не в верхней полуплоскости).

Постоянная, входящая в качестве слагаемого в правую часть этого равенства, в данном случае равна нулю, так как вблизи $z = \infty$

$$\omega(z) = O(\ln z), \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{\omega(z)}{\sqrt{z^2 - b^2}} = 0.$$

Подставляя значения $\sigma(\zeta)$ на соответствующих отрезках, будем иметь:

$$\omega(z) = -\frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{\pi i}\int_{-\infty}^{-b} \frac{kH_1(\zeta, t)\, d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - b^2}\,(\zeta - z)} + \frac{\sqrt{z^2 - b^2}}{\pi i}\int_{b}^{\infty} \frac{kH_2(\zeta, t)\, d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - b^2}\,(\zeta - z)}. \tag{2.2}$$

В качестве примера возьмем случай, когда

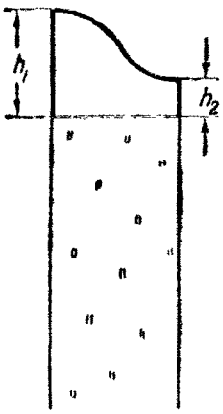
$$H_1(\zeta, t) = H_1,\ H_2(\zeta, t) = H_2 + a \sin \omega t \sin \frac{\pi\zeta}{c},$$

что соответствует стоячим волнам в области нижнего бьефа. Получим:

$$\omega(z) = -\frac{k\sqrt{z^2-b^2}}{\pi i}\left\{H_1 \int_{-\infty}^{-b} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-b^2}(\zeta - z)} + \right.$$

$$\left. + a \sin \omega t \int_b^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi\zeta}{c}\, d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-b^2}(\zeta - z)} + H_2 \int_b^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-b^2}(\zeta - z)} \right\}.$$

Первый и третий члены после интегрирования и приведения должны дать такое выражение, которое получается для комплексного потенциала при обтекании плоского флютбета в полуплоскости при уровнях воды в верхнем и нижнем бьефах H_1 и H_2, т. е.



Фиг. 365.

$$-k\frac{H_1 - H_2}{\pi} \arcsin \frac{z}{b} + k\frac{H_1 + H_2}{2}.$$

Поэтому получаем:

$$\omega(z, t) = -k\frac{H_1 - H_2}{\pi} \arcsin \frac{z}{b} + k\frac{H_1 + H_2}{2} +$$

$$+ \frac{ka\sqrt{z^2-b^2}}{\pi i} \sin \omega t \int_b^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi\zeta}{c}\, d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-b^2}(\zeta - z)}.$$

В. И. Аравин рассматривал эту задачу в упрощенной постановке [3], считая, что вдоль всей действительной оси x напор изменяется по синусоиде (множитель $\sin \omega t$ он опускает во всех формулах):

$$h = \frac{h_1 - h_2}{2} \sin \frac{\pi x}{c} + \frac{h_1 + h_2}{2}, \qquad (2.3)$$

где h_1 и h_2 — соответственно наибольшая и наименьшая ординаты полуволны синусоиды (фиг. 365). При этом для потенциала скорости можно написать аналогичное равенство

$$\varphi = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\pi x}{c} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \qquad (2.4)$$

где

$$\varphi_1 = -kh_1, \quad \varphi_2 = -kh_2.$$

Но тогда можно будет взять готовое решение из гидродинамики, где рассматривается волновое движение с потенциалом скорости и

функцией тока [5]

$$\varphi = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} e^{-\frac{\pi y}{c}} \sin\frac{\pi x}{c} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

$$\psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} e^{-\frac{\pi y}{c}} \cos\frac{\pi x}{c}.$$

Комплексный потенциал будет иметь вид

$$\omega = +i\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} e^{\frac{\pi z i}{c}} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Скорости фильтрации будут:

$$u = -\frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c} e^{-\frac{\pi y}{c}} \cos\frac{\pi x}{c}, \quad v = \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c} e^{-\frac{\pi y}{c}} \sin\frac{\pi x}{c}.$$

Вдоль границы водоема, при $y = 0$, получим:

$$u_0 = -\frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c} \cos\frac{\pi x}{c}, \quad v_0 = \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c} \sin\frac{\pi x}{c}.$$

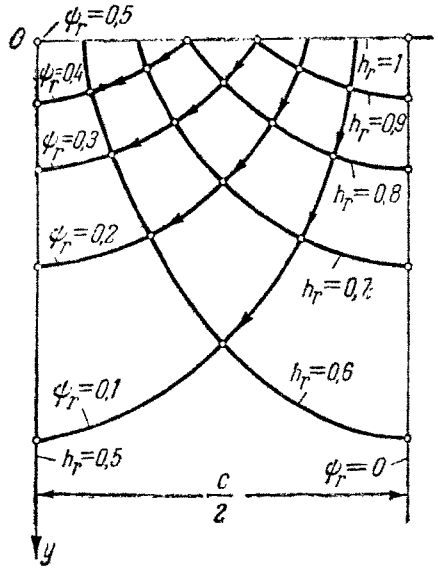
Как видно из формулы для составляющих скорости, величина скорости равна

$$V = \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c} e^{-\frac{\pi y}{c}}.$$

Линии $y = \text{const}$ являются изотахами, т. е. линиями равной скорости, прямые $x = \text{const}$ суть изоклины, т. е. линии равного направления скорости. При $y = 0$ скорость наибольшая, равная $\frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c}$.

Формула для ψ показывает, что на протяжении четверти волны синусоиды (фиг. 366) расход потока, движущегося из правой части фрагмента в левую, равен

$$q = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = k\frac{h_1 - h_2}{2}.$$



Фиг. 366.

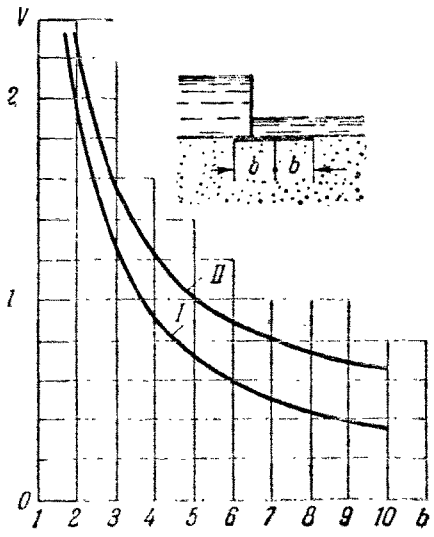
Для иллюстрации влияния волнения в нижнем бьефе на выходные скорости, т. е. скорости вдоль границы нижнего бьефа, В. И. Аравин рассматривает следующий пример. Пусть имеется плотина, в верхнем бьефе которой отметка воды 15 *м*, в нижнем — 4 *м*. Пусть высота волн в нижнем бьефе (в сущности, считается, что волны всюду) равна 2 *м*, длина волн $2c = 20$ *м*. Ширина флюбета $2b$, причем $2b$ —

произвольное число, коэффициент фильтрации k принят равным единице. Тогда кривая *I* фиг. 367 представляет эпюру выходных скоростей (она соответствует правой ветви фиг. 50), причем единица длины вдоль оси абсцисс отвечает полуширине флютбета b.

Далее, по формуле для максимальной скорости

$$V_{\max} = \frac{\pi(\varphi_2 - \varphi_1)}{2c}$$

вычислена максимальная скорость фильтрации, возникающая при волнении в нижнем бьефе. В каждой точке линии дна к основной скорости фильтрации прибавлена скорость, возникающая только от волнения. В результате получена эпюра максимальных возможных скоростей (кривая *II* на фиг. 367). Она показывает, что возможны значительные изменения скорости под влиянием волнения. На фиг. 366 даны линии равного напора и равного приведенного расхода.



Фиг. 367.

§ 3. Одномерные движения по вертикали при постоянном действующем напоре. Будем рассматривать просачивание воды в грунт по вертикали, считая коэффициент фильтрации k и порозность m постоянными величинами.

Возьмем общее уравнение движения с инерционными членами (ось y направлена вниз)

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g - \frac{mg}{k} v_y. \tag{3.1}$$

Остальные уравнения у нас отсутствуют, так как мы считаем движение одномерным, происходящим параллельно оси y. При этом уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Это показывает, что v_y зависит только от времени (что было отмечено Н. Н. Павловским). Поэтому (1.1) можно переписать, вводя вместо v_y скорость фильтрации v согласно соотношению

$$v_y = \frac{1}{m} v,$$

следующим образом:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g - \frac{g}{k} v. \tag{3.2}$$

Но мы показали в главе I (а также в главе II), что членом $\frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial t}$ можно пренебречь во всех практически интересных случаях. Поэтому, вводя обозначение

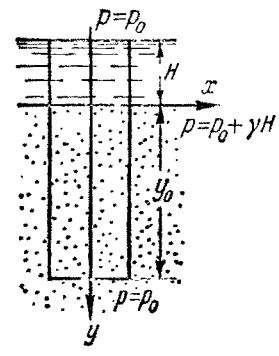
$$h = \frac{p}{\rho g} - y, \tag{3.3}$$

мы возвращаемся к закону Дарси

$$v = -k\frac{dh}{dy}, \tag{3.4}$$

применимому, следовательно, и в случае неустановившихся движений.

Предположим теперь, что вода просачивается в грунт под постоянным напором H (фиг. 368), причем в момент времени t она просочилась на глубину y_0 от границы водоема. Ось y будем считать направленной по вертикали вниз. В начальный момент времени $t=0$ пусть $y_0=0$.



Фиг. 368.

Так как у нас $v=v(t)$ зависит только от времени и не зависит от y, то h есть линейная функция y:

$$h = a(t)\,y + b(t).$$

При $y=0$ напор равен H:

$$h(0) = b(t) = H. \tag{3.5}$$

При $y=y_0$, считая атмосферное давление равным нулю, имеем по (3.3):

$$h(y_0) = -h_k - y_0 = ay_0 + b, \tag{3.6}$$

где через $h_к$ обозначена высота капиллярного поднятия:

$$h_к = -\frac{p_к}{\rho g}.$$

Поэтому для a можем написать такое выражение [по (3.5) и (3.6)]:

$$a = \frac{dh}{dy} = -\frac{h_к + y_0 + H}{y_0}. \tag{3.7}$$

Скорость фильтрации v связана с производной $\frac{dy_0}{dt}$ соотношением

$$v = m\frac{dy_0}{dt}. \tag{3.8}$$

Сопоставление (3.7) и (3.8) приводит к уравнению для y_0:

$$m\frac{dy_0}{dt} = k\,\frac{H + h_к + y_0}{y_0}. \tag{3.9}$$

Отметим, что согласно полученному уравнению капиллярная высота прибавляется к действующему напору так, как будто вместо напора H мы имели напор $H + h_к$.

Для интегрирования уравнения (3.9) достаточно переписать его в виде

$$\frac{y_0\,dy_0}{y_0 + H + h_к} = \frac{k}{m}\,dt$$

или

$$dy_0 - \frac{H + h_к}{y_0 + H + h_к}\,dy_0 = \frac{k}{m}\,dt,$$

после чего, считая $y_0 = 0$ при $t = 0$, найдем:

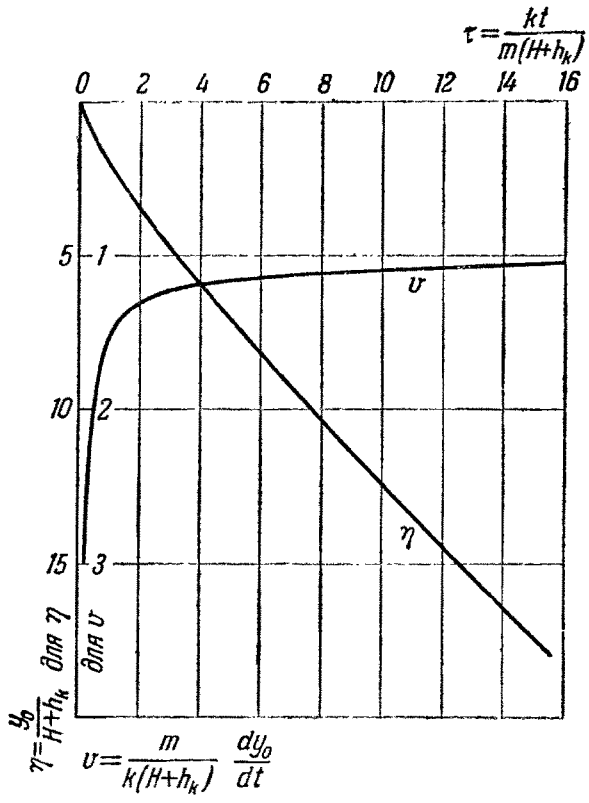
$$\frac{y_0}{H + h_к} - \ln\left(1 + \frac{y_0}{H + h_к}\right) = \frac{kt}{m(H + h_к)}. \quad (3.10)$$

Введя безразмерные величины

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_0}{H + h_к} &= \eta, \\ \frac{kt}{m(H + h_к)} &= \tau, \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

перепишем (3.10) следующим образом:

$$\tau = \eta - \ln(1 + \eta). \quad (3.12)$$



Фиг. 369.

График зависимости η от τ изображен на фиг. 369. Здесь же представлена зависимость скорости v от τ.

Для малых значений η можно произвести обращение уравнения (3.12), если разложить в степенной ряд $\ln(1 + \eta)$. Получим:

$$\tau = \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} + \frac{\eta^4}{4} - \ldots = \frac{\eta^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \ldots\right), \quad (3.13)$$

откуда найдем, извлекая квадратный корень:

$$\sqrt{2\tau} = \eta\left(1 - \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \ldots\right)^{1/2} = \eta - \frac{1}{3}\eta^2 + \frac{7}{36}\eta^3 + \ldots \quad (3.14)$$

Положим

$$\sqrt{2\tau} = \mu \quad (3.15)$$

и будем искать η в виде ряда по степеням μ:

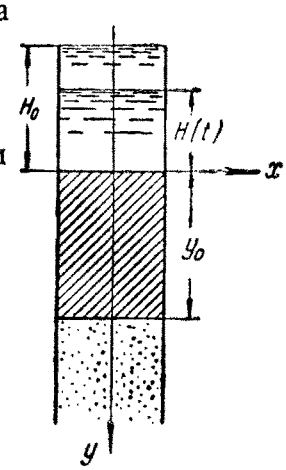
$$\eta = \mu + A\mu^2 + B\mu^3 + \ldots, \quad (3.16)$$

где A, B, ... — неизвестные пока коэффициенты. Подставив выражение (3.16) в ряд (3.14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, найдем, что

$$\eta = \mu + \frac{1}{3}\mu^2 + \frac{1}{36}\mu^3 + \ldots = \sqrt{2\tau} + \frac{2}{3}\tau + \frac{\sqrt{2}}{18}\tau^{3/2} + \ldots \quad (3.17)$$

§ 4. Фильтрация при заданном постоянном расходе. Рассмотрим теперь такую задачу. Допустим, что мы взяли некоторое количество воды Q и быстро вылили его в трубку (поперечное сечение которой имеет площадь, равную единице), причем в дальнейшем больше воды не подливается. Тогда в момент времени t величина Q пойдет на напор $H(t)$ и смачивание грунта на глубину y_0, так что будем иметь (фиг. 370):

$$Q = H(t) + my_0.$$



Фиг. 370.

Если теперь в уравнение (3.9) подставим вместо H его значение

$$H = Q - my_0,$$

то получим уравнение

$$m\frac{dy_0}{dt} = k\frac{Q + h_к + (1-m)y_0}{y_0} = k(1-m)\frac{y_0 + \frac{Q+h_к}{1-m}}{y_0}. \quad (4.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид (3.12), если положить

$$\eta = \frac{1-m}{Q+h_к}y_0, \quad \tau = \frac{k(1-m)^2}{m(Q+h_к)}t \quad (4.2)$$

(считаем $y_0 = 0$ при $t = 0$).

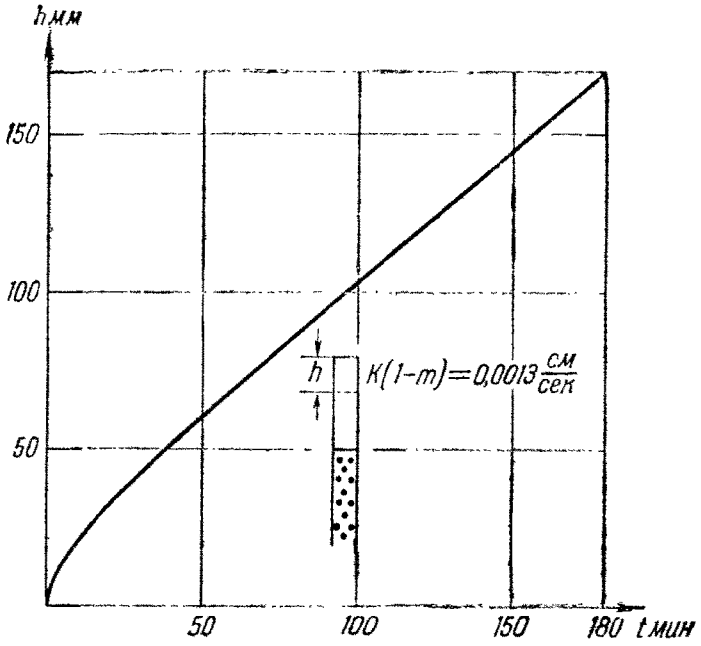
Движение такого рода можно осуществить следующим образом. Забьем в грунт вертикальную трубу. В верхнюю часть этой трубы, выступающую над поверхностью грунта, быстро вольем некоторое количество воды. Если теперь будем следить за изменением со временем уровня $H(t)$ воды в верхней части трубы, то будем знать и изменение со временем y_0; сравнивая кривую $H(t)$ или $y_0(t)$, получаемую в натуре, с теоретической, можем определить некоторые параметры, характеризующие грунт, например параметры

$$\frac{1-m}{Q+h_к}, \quad \frac{k(1-m)^2}{m(Q+h_к)}.$$

Отсюда, зная Q и $h_к$, можем найти k и m.

Такого рода опыты проводились рядом исследователей, в том числе М. М. Протодьяконовым [4]. Однако он лишь слегка заглублял в грунт

цилиндр, так что фильтрация получалась не одномерной, а пространственной. Для того чтобы сделать движение более близким к вертикальному, М. М. Протодьяконов брал второй цилиндр, концентричный с первым, большего диаметра, причем наливал воду и в кольцо между цилиндрами. На фиг. 371 представлена одна из



Фиг. 371.

кривых, полученных при таком эксперименте. Полагая $h = H(0) - H(t)$, из (4.1) для больших t найдем: $\frac{dh}{dt} \approx k(1-m)$. Поэтому уклон линии фиг. 371 при больших t даст значение $k(1-m)$.

§ 5. Постепенная подача воды. В действительности невозможно точно осуществить внезапное наполнение верхней части трубки на заданную высоту H. А если бы это и было возможно, то мы имели бы разрыв давления в начальный момент времени, когда $y_0 = 0$. В самом деле, при этом получается, что столб воды высоты H оказывает на горизонтальную площадку в плоскости $y = 0$ давление, равное весу этого столба. С другой стороны, в грунте, на границе со смоченной областью, т. е. при $y = 0$, давление равно нулю (или соответствует капиллярному вакууму при учете капиллярности). Этим разрывом давления и объясняется то, что в рассмотренных нами задачах в начальный момент времени получается бесконечная скорость.

В связи с тем, что в действительности всегда вода подливается в трубку постепенно (это же имеет место и при наполнении канала), мы рассмотрим следующую задачу.

Предположим, что в трубку все время подается постоянный расход $q \frac{м^3}{м^2 сек}$ (кубические метры в секунду на единицу площади), так что в момент времени t количество поданной жидкости будет:

$$Q = qt. \tag{5.1}$$

Это количество жидкости идет на образование высоты воды $H(t)$ и на смачивание грунта на глубину y_0, т. е. имеем:

$$qt = H(t) + my_0.$$

Подставляя это выражение $H(t)$ в уравнение (3.9), получим:

$$m\frac{dy_0}{dt} = k\frac{qt + h_к + (1-m)y_0}{y_0}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим прежде всего частный случай $h_к = 0$, т. е. пренебрежем влиянием капиллярности. Уравнение

$$my_0\frac{dy_0}{dt} = k[qt + (1-m)y_0] \tag{5.3}$$

имеет частное решение вида

$$y_0 = ct. \tag{5.4}$$

Для определения значения постоянной c подставим (5.4) в (5.3), тогда получим квадратное уравнение для c

$$mc^2 = k[q + (1-m)c].$$

Из двух корней этого уравнения возьмем положительный, так как интересующее нас течение направлено вниз:

$$c = \frac{k(1-m)}{2m} + \sqrt{\frac{k^2(1-m)^2}{4m^2} + \frac{kq}{m}}.$$

Так как полученное решение удовлетворяет начальному условию $y_0(0) = 0$, то оно является как раз тем решением, которое нам нужно.

Отсюда видно, что если подавать в трубку постоянный расход q, то вода будет просачиваться в грунт с постоянной скоростью (напомним, что мы не учитываем капиллярности грунта). При этом уровень воды над поверхностью грунта $H(t)$ будет линейной функцией времени

$$H(t) = (q - mc)t. \tag{5.5}$$

Очевидно, что для возможности движения должно выполняться неравенство

$$q \geqslant mc.$$

В случае знака равенства будем иметь просачивание при отсутствии слоя воды над поверхностью грунта. Это просачивание будет происходить со скоростью $c = \frac{k}{m}$.

Если мы обратимся к общему случаю уравнения (5.2), когда учитывается капиллярность грунта, то увидим, что решение его имеет более сложный вид. А именно, подстановка

$$t+\frac{h_к}{q}=\tau$$

приводит уравнение (5.2) к однородному

$$m\frac{dy_0}{dt}=k\,\frac{q\tau+(1-m)y_0}{y_0}.$$

Общий интеграл его можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} C\tau&=(A-u)^{-\frac{1}{2}-\alpha}(B+u)^{-\frac{1}{2}+\alpha},\\ y_0&=u\tau, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A=\frac{k}{2m}+\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}+\frac{kq}{m}},\quad B=-\frac{k}{2m}+\sqrt{\frac{k^2}{4m^2}+\frac{kq}{m}},\\ \alpha=-\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{4mq}{k}}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Уравнения (5.6) представляют τ и y_0 в параметрической форме, в функциях параметра u. Исключая u, можно написать общий интеграл (5.6) в виде

$$(A\tau-y_0)^{\frac{1}{2}+\alpha}(B\tau+y_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}=C_1.$$

Условие $y_0=0$ при $t=0$ дает начальное значение $\tau=\tau_0$:

$$\tau_0=\frac{h_к}{q}.$$

Поэтому находим для произвольной постоянной C_1 следующее выражение:

$$C_1=A^{\frac{1}{2}+\alpha}B^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{h_к}{q}.$$

§ 6. Фильтрация в двуслойном грунте. Рассмотрим задачу о фильтрации воды в двуслойном грунте, когда в верхнем слое коэффициент фильтрации и порозность имеют соответственно значения k_1 и m_1, в нижнем слое — значения k_2 и m_2 (фиг. 372). Над грунтом находится слой воды глубины H. Глубину воды, просочившейся в грунт к моменту времени t, обозначим попрежнему через y_0. Из условия неразрывности потока мы получаем, что скорости фильтрации v_1 и v_2 наших слоев равны и зависят только от времени:

$$v_1=v_2=v(t). \tag{6.1}$$

Положим, что

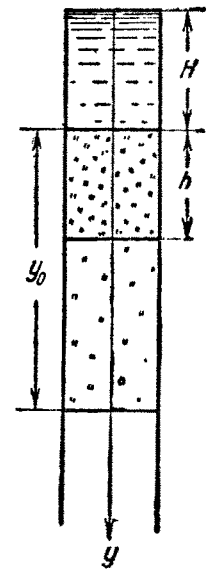
$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y},$$

причем

$$\varphi_1 = -k_1\left(\frac{p_1}{\rho g} - y\right), \quad \varphi_2 = -k_2\left(\frac{p_2}{\rho g} - y\right). \tag{6.2}$$

Так как φ_1 и φ_2 должны удовлетворять уравнению Лапласа по y, то имеем, как и для h в случае однородного грунта, для φ_1 и φ_2 линейные функции от y:

$$\varphi_1 = v(t)\,y + b_1(t), \quad \varphi_2 = v(t)\,y + b_2(t).$$



Фиг. 372.

На границе двух грунтов при $y = h$ имеем из условия равенства давлений соотношение

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2},$$

которое приводится к виду

$$\frac{vh + b_1}{k_1} = \frac{vh + b_2}{k_2}.$$

Далее, при $y = 0$ имеем:

$$\varphi_1 = b_1 = -k_1 H,$$

при $y = y_0$:

$$\varphi_2 = vy_0 + b_2 = k\,(h_к + y_0).$$

Исключая из последних уравнений b_1 и b_2, получим для просачивания в нижнем слое грунта

$$v = m_2 \frac{dy_0}{dt} = \frac{H + h_к + y_0}{\frac{h}{k_1} + \frac{y_0 - h}{k_2}} \tag{6.3}$$

или

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{k_2}{m_2} \frac{H + h_к + y_0}{y_0 + \left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right)h}. \tag{6.4}$$

Интегрирование последнего уравнения дает:

$$\frac{y}{H + h_к} - \left(1 - A\right)\ln\frac{y + H + h_к + h}{H + h_к + h} = \frac{k_2 t}{m_2 (H + h_к)}. \tag{6.5}$$

Здесь введены обозначения

$$y = y_0 - h, \quad A = \left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right)\frac{h}{H + h_к}.$$

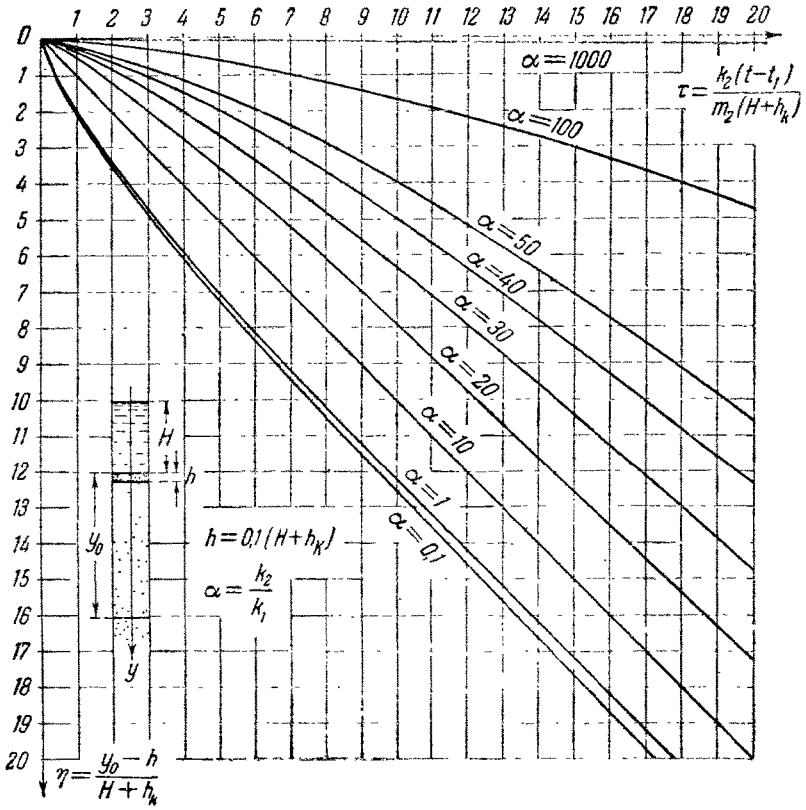
За начальный момент времени $t = 0$ принят момент начала просачивания в нижний слой. Очевидно, что просачивание в верхнем слое

грунта при наших предположениях рассчитывается по формулам предыдущих пунктов.

При $k_1 = k_2$ имеем $A = 0$.

Выделим случай, когда верхний слой грунта тонок. Это имеет место в случае *кольматажа* (глава IV, § 13).

Часто создают искусственные условия для такого уплотнения грунта на дне канала, вводя в канал мутную воду, содержащую мел-



Фиг. 373.

кие глинистые частицы. Закольматированный слой может иметь толщину порядка 10—20 *см*.

Предположим, что h мало по сравнению с величиной $H + h_к$. Тогда, отбрасывая h под знаком логарифма (но сохраняя его в выражении для A), введем обозначения

$$\frac{y}{H + h_к} = \eta, \quad \frac{k_2}{m_2}\frac{t}{H + h_к} = \tau.$$

Получим уравнение

$$\tau = \eta - (1 - A)\ln(1 + \eta).$$

Давая здесь A различные значения, можем построить графики зависимости η от τ. На фиг. 373 приведены такие кривые для $\frac{h}{H+h_к}=0{,}1$. Мы видим, что кольматаж может в значительной степени уменьшить скорость просачивания воды в грунт.

Следует отметить, что если бы вода, пройдя через слой малопроницаемого грунта, попадала в достаточно сухой грунт, то просачивание в этом последнем происходило бы отдельными струйками, не образующими сплошного грунтового потока, и изложенная теория была бы неприменимой. Она применима лишь в случае достаточно влажного грунта, и в этом случае под m нужно понимать «эффективную» пористость или дефицит влажности.

Заметим, что мы можем применить формулу (6.3) к случаю скорости установившегося движения воды в двуслойной среде, если будем считать y_0 постоянным. Положим

$$y_0 - h = h_2, \quad h = h_1$$

и перепишем (6.3) в виде

$$v = \frac{H + h_к + h_1 + h_2}{\frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2}}.$$

Если ввести, как это было сделано у нас в главе VIII, «приведенный» коэффициент фильтрации k с помощью равенства

$$\frac{h_1 + h_2}{k} = \frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2},$$

то выражение скорости фильтрации можно написать в виде

$$v = k\frac{H + h_к + h_1 + h_2}{h_1 + h_2}.$$

Это выражение имеет такой вид, как если бы фильтрация происходила в трубке длины $h_1 + h_2$ с коэффициентом фильтрации k.

Отметим, что в изложенной теории не учитывается переменность насыщенности грунта водой.

ГЛАВА XIII

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

§ 1. Вывод основных соотношений. В общем случае, если не учитывать инерционных членов в уравнениях движения, движение грунтовых вод определяется уравнениями (глава I, § 11)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.2}$$

причем

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + z\right). \tag{1.3}$$

Здесь u, v, w — проекции скорости фильтрации, так что

$$u = m\frac{dx}{dt}, \quad v = m\frac{dy}{dt}, \quad w = m\frac{dz}{dt}, \tag{1.4}$$

где $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ — проекции скорости частицы жидкости, m — пористость грунта. Величина k есть коэффициент фильтрации, p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести. Ось z направлена вверх.

Мы будем рассматривать движение со свободной поверхностью. Если уравнение последней записать в форме $F(x, y, z, t)$, то, дифференцируя его по времени и пользуясь равенствами (1.4), получим:

$$m\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial z}w = 0. \tag{1.5}$$

Если уравнение свободной поверхности написать в виде

$$z = \delta(x, y, t) \quad \text{или} \quad \delta(x, y, t) - z = 0,$$

то вместо (1.5) будем иметь:

$$m\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial \delta}{\partial x}u + \frac{\partial \delta}{\partial y}v - w = 0. \tag{1.6}$$

На свободной поверхности, где давление p постоянно, из (1.3) следует уравнение

$$\varphi(x, y, z, t) + kz = \text{const}. \tag{1.7}$$

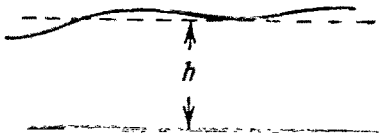
Первое допущение. Будем считать, что свободная поверхность слабо изогнута (фиг. 374) и колеблется около средней высоты h. Тогда, разлагая функцию φ в ряд по степеням $z-h$ и пренебрегая членами высшего порядка, будем иметь на свободной поверхности:

$$\varphi(x, y, z, t)=\varphi(x, y, h, t)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=h}(z-h)+\ldots\approx\varphi(x, y, h, t),$$

и уравнение (1.7) можно переписать так:

$$z=\delta(x, y, t)=-\frac{\varphi(x, y, h, t)}{k}. \tag{1.8}$$

Постоянную, входящую в уравнение (1.7), можно считать включенной в функцию φ. Таким образом, если бы мы нашли потенциал скорости, то уравнение (1.8) было бы уравнением свободной поверхности.



Фиг. 374.

Второе допущение. Будем считать, что в нашем движении горизонтальные скорости не зависят от высоты z. Тогда уравнение неразрывности (1.2) можно проинтегрировать по z. Получим:

$$w-w_0=-\int_0^z\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]dz$$

или

$$w(x, y, z, t)=-z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+w_0(x, y, t). \tag{1.9}$$

Здесь w_0 есть вертикальная скорость на нижнем основании пласта при $z=0$. Но так как мы в сущности осреднили наше движение по высоте, то мы можем включить в выражение w_0 и другие факторы, создающие вертикальную скорость, например выражения, учитывающие инфильтрацию или испарение со свободной поверхности.

Уравнение (1.9) дает линейную зависимость вертикальной скорости w от z.

§ 2. Вывод нелинейного уравнения. Покажем, что из уравнения (1.6) при сделанных двух допущениях мы можем получить нелинейное уравнение Буссинеска [1]. Введем в рассмотрение функцию $H(x, y, t)$, связанную с потенциалом скорости $\varphi(x, y, h, t)$ соотношением

$$H=-\frac{\varphi}{k}. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение свободной поверхности примет вид

$$z=H(x, y, t), \tag{2.2}$$

а для горизонтальных скоростей мы будем иметь выражения

$$u=-k\frac{\partial H}{\partial x},\quad v=-k\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{2.3}$$

Уравнение (1.6), в которое мы вместо δ подставим H, даст:

$$m\frac{\partial H}{\partial t}-k\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]-w=0. \tag{2.4}$$

Для w возьмем (1.9), положив $z=H$. Тогда (2.4) при учете (2.3) даст:

$$m\frac{\partial H}{\partial t}-k\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]-kH\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)-w_0=0,$$

что можно также переписать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{k}{m}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right]+\frac{w_0}{m}. \tag{2.5}$$

§ 3. Метод малого параметра. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\lambda f(x,t), \tag{3.1}$$

в котором λ будем считать некоторым малым параметром; $f(x,t)$ — функция, учитывающая внешние воздействия на поток: инфильтрацию, испарение и т. д.

Если положить

$$H(x,t)=H_0+\lambda H_*(x,t)+\lambda^2 H_{**}(x,t)+\ldots, \tag{3.2}$$

где H_0 — некоторая постоянная, то, подставляя ряд (3.2) в уравнение (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим для определения H_*, H_{**} и т. д. систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_*}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 H_*}{\partial x^2}+f(x,t),\\
&\frac{\partial H_{**}}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 H_{**}}{\partial x^2}+a^2H_0\frac{\partial}{\partial x}\left(H_*\frac{\partial H_*}{\partial x}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\left(a^2=\frac{kH_0}{m}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Пусть даны начальное и граничные условия уравнения (3.1):

$$H(x,0)=\varphi(x), \tag{3.4}$$

$$H(0,t)=F_1(t),\quad H(l,t)=F_2(t). \tag{3.5}$$

Предлагаемый метод применим в том случае, если одно из выражений (3.4) или (3.5) сводится к постоянной, т. е. если одна из функций $\varphi(x)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ есть постоянная.

Пусть, например, $H(x,0)=C$. Тогда мы принимаем $H_0=C$. Далее, можно считать, что функции H_{**}, H_{***} и т. д. удовлетворяют нулевым граничным условиям, так что условия (3.5) выполняются для

первых двух членов ряда (3.2):

$$\left.\begin{gathered} H_*(x, 0) = H_{**}(x, 0) = \ldots = 0, \\ H_0 + \lambda H_*(0, t) = F_1(t), \quad H_0 + \lambda H_*(l, t) = F_2(t), \\ H_{**}(0, t) = H_{***}(0, t) = \ldots = 0, \\ H_{**}(l, t) = H_{***}(l, t) = \ldots = 0. \end{gathered}\right\} \tag{3.6}$$

Таким образом, в некоторых случаях задача об интегрировании нелинейного уравнения (3.1) может быть сведена к интегрированию последовательности уравнений теплопроводности. Практически вычисление большого числа членов ряда (3.2) невозможно, но второе приближение иногда удается без труда. Примером является случай фильтрации из водохранилища, рассматриваемый ниже, когда вычислены члены до третьего порядка включительно.

§ 4. Фильтрация при измеиении уровня воды в водохранилище. Мы рассмотрим здесь подробно простейшую задачу, а именно, задачу об интегрировании нелинейного уравнения

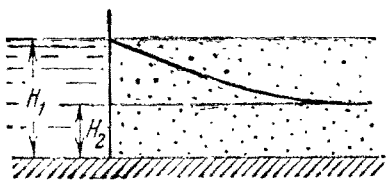
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial H}{\partial x}\right) \tag{4.1}$$

при начальном и граничном условиях:

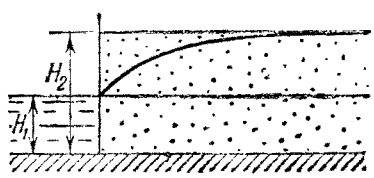
$$H(x, 0) = H_2, \quad H(0, t) = H_1, \tag{4.2}$$

где H_1, H_2 — постоянные, что соответствует двум случаям (фиг. 375, 376).

Подробный разбор этой задачи интересен потому, что он дает возможность сравнения решений, получаемых после линеаризации



Фиг. 375.



Фиг. 376.

уравнения (4.1), с точным решением уравнения (4.1). При этом существуют два способа линеаризации этого уравнения, которые мы будем называть соответственно первым и вторым.

Первый способ состоит в том, что множитель H в круглой скобке уравнения (4.1) заменяется некоторым постоянным значением $\bar{h}$. Тогда получается линейное уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{4.3}$$

где положено

$$a^2 = \frac{k\bar{h}}{m}.$$

При втором способе, применяемом рядом авторов (см., например, [13]), в качестве неизвестной функции принимается не H, а H^2. Полагая

$$H^2 = u, \tag{4.4}$$

получим такое уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{m}\sqrt{u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Теперь заменим в нем $\sqrt{u}$ некоторым постоянным значением $\tilde{h}$. Тогда будем иметь линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.5}$$

где принято

$$a^2 = \frac{k\tilde{h}}{m}. \tag{4.6}$$

Доводом в пользу введения второго вида линеаризации является то обстоятельство, что при переходе от неустановившегося движения к установившемуся при первом способе линеаризации получаем для H уравнение

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0,$$

дающее в качестве решения линейную функцию

$$H = C_1 x + C_2.$$

При втором же способе линеаризации имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} = 0,$$

общее решение которого дает:

$$H^2 = C_1 x + C_2.$$

Другими словами, при первом способе для установившегося движения уравнение свободной поверхности получается в виде прямой $y = C_1 x + C_2$, что годится только при $C_1 = 0$ (и при больших значениях H_2 по сравнению с $H_1 - H_2$), в то время как при втором способе для свободной поверхности получаем параболу $y^2 = C_1 x + C_2$ (парабола Дюпюи).

Далее мы увидим, что в некоторых случаях более близкие к точному решению результаты будут получаться при первом способе линеаризации, в других случаях — при втором.

В нашей задаче x изменяется в пределах от нуля до бесконечности, и граничное и начальное условия таковы, что можно сделать известную подстановку, применяемую в уравнении теплопроводности,

теории пограничного слоя и т. д., а именно:

$$\eta = \frac{x}{\alpha \sqrt{t}}, \tag{4.7}$$

где α — постоянная, которую мы выберем в дальнейшем.

Эта подстановка была указана Винером и Больцманом для уравнения диффузии с переменным коэффициентом диффузии, применена Буссинеском [1] в теории фильтрации и Л. С. Лейбензоном [4] к уравнению движения газа в пористой среде, однако дальнейших вычислений с получаемыми таким образом уравнениями не производилось. (Имеются результаты расчета [2] для случая, несколько отличного от нашего.)

При этом уравнение (4.1) перейдет в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2H^2}{d\eta^2} + \frac{m\alpha^2}{k}\eta\frac{dH}{d\eta} = 0.$$

Введя еще такие подстановки:

$$H = H_0 u, \quad \eta = \frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_0 t}}, \quad \alpha = 2\sqrt{\frac{kH_0}{m}},$$

получим уравнение [6]

$$\frac{d^2u^2}{d\eta^2} + 4\eta\frac{du}{d\eta} = 0. \tag{4.8}$$

Наряду с этим уравнением будем рассматривать уравнение, получаемое из (4.8) подстановкой [5]

$$u^2 = v,$$

т. е. уравнение

$$\frac{d^2v}{d\eta^2} + \frac{2\eta}{\sqrt{v}}\frac{dv}{d\eta} = 0. \tag{4.9}$$

Будем искать решение каждого из уравнений (4.8), (4.9) в виде рядов по степеням параметров l и λ соответственно:

$$u = 1 + lu_1 + l^2u_2 + l^3u_3 + \ldots, \tag{4.10}$$

$$v = 1 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda^3 v_3 + \ldots \tag{4.11}$$

При этом мы можем за H_0 принять по произволу как H_1, так и H_2. Если мы хотим получить пучок кривых, проходящих через начальную точку, то положим $H_0 = H_1$, если же хотим получить кривые, отвечающие понижению уровня воды в канале, когда получается пучок кривых, сходящихся на бесконечности, то примем $H_0 = H_2$.

В том и другом случаях для определения коэффициентов рядов (4.10) и (4.11) получаем такие системы уравнений для u:

$$\left.\begin{aligned} &u_1'' + 2\eta u_1' = 0, \\ &u_2'' + 2\eta u_2' = -\frac{1}{2}(u_1^2)'', \\ &u_3'' + 2\eta u_3' = -(u_1u_2)'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Для коэффициентов ряда (4.11) получаются более простые уравнения, с более простыми правыми частями:

$$\left.\begin{aligned} &v_1'' + 2\eta v_1' = 0,\\ &v_2'' + 2\eta v_2' = \eta v_1 v_1',\\ &v_3'' + 2\eta v_3' = \eta (v_1 v_2)' - \frac{3}{4}\eta v_1^2 v_1',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Обратимся к первому случаю, когда мы принимаем $H_0 = H_1$. Здесь мы подчиним функции u_s и v_s условиям

$$u_1(0) = u_2(0) = \ldots = 0, \qquad v_1(0) = v_2(0) = \ldots = 0,$$
$$u_2(\infty) = u_3(\infty) = \ldots = 0, \qquad v_2(\infty) = v_3(\infty) = \ldots = 0.$$

Чтобы удовлетворить условиям на бесконечности

$$u(\infty) = \frac{H_2}{H_1}, \quad v(\infty) = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2,$$

мы должны принять соответственно:

$$1 + l u_1(\infty) = \frac{H_2}{H_1}, \quad 1 + \lambda v(\infty) = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2,$$

откуда для параметров l и λ получаем значения

$$l = \frac{H_2 - H_1}{H_1}, \quad \lambda = \frac{H_2^2 - H_1^2}{H_1^2} \tag{4.14}$$

(ниже мы увидим, что $u_1(\infty) = v_1(\infty) = 1$).

Первое приближение дает как для u_1, так и для v_1 функцию вероятности, т. е.

$$u_1(\eta) = v_1(\eta) = \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\lambda^2} d\lambda. \tag{4.15}$$

Для вторых приближений получаем соответственно:

$$u_2(\eta) = \frac{1}{\pi}(1 - e^{-2\eta^2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} u_1 - \frac{1}{2}u_1^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)u_1, \tag{4.16}$$

$$v_2(\eta) = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\eta^2}) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} v_1 - \frac{1}{2\pi}v_1. \tag{4.17}$$

Наконец, для третьих приближений находим такие выражения:

$$u_3(\eta) = \frac{1}{2}u_1^3 + \frac{9}{4\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} u_1^2 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta^3 e^{-\eta^2} u_1^2 + \frac{3}{\pi}e^{-\eta^2} u_1 -$$
$$- \frac{1}{\pi}\eta^2 e^{-2\eta^2} u_1 - \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} - \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\eta e^{-3\eta^2} - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\Phi(\eta\sqrt{3}) +$$
$$+ \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)u_2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{2}\right)u_1, \tag{4.18}$$

$$v_3(\eta)=\left(\frac{5\eta}{16\sqrt{\pi}}-\frac{\eta^3}{8\sqrt{\pi}}\right)e^{-\eta^2}v_1^2+\left(\frac{1}{2\pi^2}+\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}+\frac{e^{-2\eta^2}}{2\pi}-\frac{\eta^2e^{-2\eta^2}}{4\pi}\right)v_1-$$
$$-\frac{1}{\pi}v_2-\frac{\eta e^{-\eta^2}}{4\pi\sqrt{\pi}}-\frac{\eta e^{-3\eta^2}}{8\pi\sqrt{\pi}}-\frac{3\sqrt{3}}{16\pi}\Phi(\eta\sqrt{3}). \quad (4.19)$$

Укажем для примера, как может быть найдено выражение v_2. Второе из уравнений (4.13) перепишем так:

$$e^{-\eta^2}(v_2'e^{\eta^2})'=\eta v_1v_1'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}v_1.$$

Отсюда, интегрируя по частям, найдем:

$$v_2'e^{\eta^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\eta v_1\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta^2v_1-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}v_1+\frac{1}{\pi}\eta e^{-\eta^2}.$$

Наконец, для v_2 получаем:

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\eta^2e^{-\eta^2}v_1\,d\eta-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int v_1e^{-\eta^2}\,d\eta+\frac{1}{\pi}\int\eta e^{-2\eta^2}\,d\eta=$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}v_1-\frac{1}{2\pi}e^{-2\eta^2}+c_1v_1+c_2.$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий.

Если обратимся ко второму случаю — пучку линий, сходящихся на бесконечности, т. е. примем $H_0=H_2$, то удобнее будет ввести другие обозначения, отыскивая решение уравнения (4.9) в виде ряда

$$v=1+\mu w_1+\mu^2w_2+\ldots \quad (4.20)$$

Функции w_1, w_2 и т. д. удовлетворяют уравнениям (4.13), но при других граничных условиях. Выпишем эти уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&w_1''+2\eta w_1'=0,\\
&w_2''+2\eta w_2'=\eta w_1w_1',\\
&w_3''+2\eta w_3'=\eta(w_1w_2)'-\frac{3}{4}\eta w_1^2w_1',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (4.21)$$

Граничные условия для w_1, w_2 и т. д. выбираем таким образом:

$$w_1(\infty)=w_2(\infty)=\ldots=0,$$
$$w_2(0)=w_3(0)=\ldots=0.$$

Тогда получим:

$$w_1(\eta)=1-\Phi(\eta)=1-v_1,$$
$$w_2(\eta)=\frac{1}{2\pi}(1-e^{-2\eta^2})-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}v_1-\frac{1}{2\pi}v_1+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}=$$
$$=v_2(\eta)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}.$$

Значение параметра μ определяется из условия

$$1 + \mu w_1(0) = \frac{H_1^2}{H_2^2},$$

так что

$$\mu = \frac{H_1^2 - H_2^2}{H_2^2}.$$

С помощью полученных формул были произведены вычисления (таблица 16). При этом оказалось, что для крайних случаев — вытекания

Таблица 16

Таблица коэффициентов рядов (4.10) и (4.11)

η	$u_1 = v_1$	u_2	u_3	v_2	v_3
0	0,	0	0	0	0
0,1	0,1125	+0,0141	—0,0039	—0,0179	+0,0084
0,2	0,2227	+0,0160	—0,0081	—0,0353	+0,0165
0,3	0,3286	+0,0073	—0,0090	—0,0515	+0,0241
0,4	0,4284	—0,0092	—0,0049	—0,0658	+0,0307
0,5	0,5205	—0,0300	+0,0039	—0,0774	+0,0358
0,6	0,6039	—0,0519	+0,0159	—0,0858	+0,0390
0,7	0,6778	—0,0718	+0,0280	—0,0905	+0,0401
0,8	0,7421	—0,0874	+0,0373	—0,0915	+0,0389
0,9	0,7969	—0,0975	+0,0422	—0,0892	+0,0357
1,0	0,8427	—0,1017	+0,0418	—0,0840	+0,0310
1,1	0,8802	—0,1004	+0,0368	—0,0766	+0,0254
1,2	0,9103	—0,0946	+0,0281	—0,0677	+0,0194
1,3	0,9340	—0,0855	+0,0194	—0,0581	+0,0136
1,4	0,9523	—0,0744	+0,0078	—0,0486	+0,0085
1,5	0,9661	—0,0626	—0,0011	—0,0395	+0,0043
1,6	0,9764	—0,0510	—0,0079	—0,0313	+0,0012
1,7	0,9838	—0,0394	—0,0125	—0,0241	—0,0010
1,8	0,9891	—0,0310	—0,0147	—0,0182	—0,0022
1,9	0,9928	—0,0232	—0,0151	—0,0133	—0,0029
2,0	0,9953	—0,0169	—0,0141	—0,0096	—0,0030
2,5	0,9996	—0,0024	—0,0047	—0,0013	—0,0011
3,0	0,9999	—0,0002	—0,0006	—0,0001	—0,0002
3,5	1	—0,0000	—0,0001	0	0
4,0	1	—0,0000	—0,0001	0	0

в грунт при нулевом уровне грунтовых вод и фильтрации в пустой бассейн — принятая степень приближения, при которой мы ограничиваемся членами до третьего порядка включительно, недостаточна. Эти случаи были исследованы отдельно с помощью численного интегрирования.

§ 5. Численное интегрирование. Введя подстановку

$$\eta\sqrt{2}=\xi, \tag{5.1}$$

приведем уравнение (4.8) к следующему:

$$\frac{d^2u^2}{d\xi^2}+2\xi\frac{du}{d\xi}=0,$$

или в развернутом виде к такому:

$$uu''+u'^2+\xi u'=0. \tag{5.2}$$

Будем искать решение (5.2) для малых значений ξ в виде ряда

$$u=1+u_0'\xi+\frac{u_0''}{1\cdot 2}\xi^2+\ldots \tag{5.3}$$

Положим

$$u_0'=\alpha,$$

где α будет нами выбираться произвольно. Тогда найдем:

$$u_0''=-\alpha^2,\quad u_0'''=3\alpha^3-\alpha,\quad u_0^{IV}=-15\alpha^4+6\alpha^2,$$

$$u_0^{V}=105\alpha^5-49\alpha^3+3\alpha,\quad u_0^{VI}=-945\alpha^6+504\alpha^4-52\alpha^2,$$

$$u_0^{VII}=10\,395\alpha^7-6237\alpha^5+882\alpha^3-15\alpha.$$

Давая α ряд значений, можно построить семейство интегральных кривых уравнения (5.2). Начиная с некоторых значений ξ, ряд (5.3) перестает годиться для вычислений, и приходится обращаться к численному интегрированию уравнения (5.2). Таким способом было построено семейство интегральных кривых уравнения (5.2) для $\alpha=\pm 0{,}1;\ \pm 0{,}2;\ldots;\ \pm 0{,}6$. Все эти кривые имеют асимптотами прямые, параллельные оси ξ (см. ниже фиг. 381). С помощью интерполирования кривые были пересчитаны так, чтобы асимптотами оказались равноотстоящие прямые: $u=\pm 0{,}1;\ \pm 0{,}2,\ldots$ Кривой, доходящей до оси абсцисс, соответствует значение $\alpha=-0{,}628$.

§ 6. Фильтрация в пустой бассейн. Этот частный случай уравнения (4.8) мы сведем к такой системе двух уравнений, чтобы можно было использовать частично результаты вычислений, проведенных в теории пограничного слоя пластинки, причем получим затем в явной форме решение нашей задачи для малых значений независимой переменной η.

Будем исключать из уравнения (4.8) дифференцирование по переменной η. Для этого перепишем уравнение в виде

$$\frac{d(uu')}{du}+2\eta=0.$$

Теперь введем новую, вспомогательную переменную ξ и будем считать u и η функциями от ξ, причем переменную ξ определим

равенством

$$\frac{d\eta}{d\xi} = u.$$

Следовательно, если бы мы нашли u как функцию от ξ, то получили бы η в виде

$$\eta = \int_0^{\xi} u\, d\xi.$$

Теперь имеем:

$$u = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad u' = \frac{du}{d\eta} = \frac{1}{u}\frac{du}{d\xi} = \frac{1}{u}\frac{d^2\eta}{d\xi^2},$$

откуда

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)\frac{d\xi}{du} + 2\eta = 0$$

и, наконец,

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + 2\eta\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0. \tag{6.1}$$

Такое же уравнение встречается в теории пограничного слоя пластинки [14]. Мы можем искать его решение в виде степенного ряда

$$\eta = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots$$

при условиях

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 0, \quad \eta'(\infty) = 1.$$

Такое решение мы можем взять непосредственно из теории пограничного слоя. Для η как функции от ξ получим ряд

$$\eta = \alpha\xi^2\left(1 - \frac{\alpha}{120}\xi^3 + \frac{11\alpha^2}{2\cdot 8!}\xi^6 - \frac{375\alpha^3}{4\cdot 11!}\xi^9 + \ldots\right) \quad (\alpha = 0{,}33206). \tag{6.2}$$

Взяв от него производную по ξ, получим u в функции от ξ:

$$u = 2\alpha\xi - \frac{1}{4!}\alpha^2\xi^4 + \frac{11}{2\cdot 7!}\alpha^3\xi^7 - \frac{375}{4\cdot 10!}\alpha^4\xi^{10} + \ldots \tag{6.3}$$

Пусть

$$Y = \sqrt{\eta\alpha^{-1/3}(5!)^{-2/3}}, \quad X = \alpha^{1/3}(5!)^{-1/3}\xi.$$

Тогда получим вместо (6.2):

$$Y = X(1 - X^3 + \ldots)^{\frac{1}{2}} = X - \frac{1}{2}X^4 + \ldots$$

Обращение этого ряда дает:

$$X = Y + \frac{1}{2}Y^4 + \frac{1}{7}Y^7 - \frac{4}{11}Y^{10} + \ldots$$

Подставляя это выражение для X в ряд для u, окончательно найдем:

$$u = B\left(Y - 2Y^4 + 3Y^7 - \frac{4}{11}Y^{10} - 4{,}77Y^{13} + \ldots\right). \tag{6.4}$$

Здесь для краткости введены обозначения

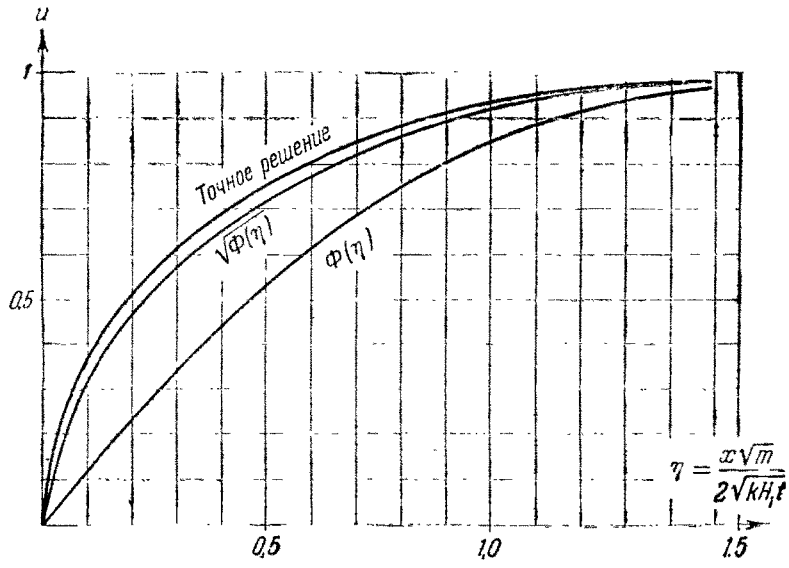
$$B = \alpha^{2/3}(5!)^{1/3} = 2{,}3652, \quad \alpha = 0{,}33206\ldots, \quad Y = \frac{\sqrt{\eta}}{\alpha^{1/6}(5!)^{1/3}} = 0{,}4873\sqrt{\eta}.$$

С помощью ряда (6.4) произведены вычисления до $\eta = 0{,}6$. Дальнейшие точки найдены с помощью численного интегрирования:

$$\eta = \int_0^{\xi} u(\xi)\, d\xi$$

и построен график (фиг. 377).

Далее интересно сравнить найденное точное решение с приближенными, получаемыми посредством первого и второго (см. § 4) способов



Фиг. 377.

линеаризации. В обоих случаях мы принимаем:

$$\bar{h} = \tilde{h} = H_2.$$

Для первого способа линеаризации решение имеет вид

$$u = \tilde{u} = \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Для второго способа линеаризации получаем:

$$u = \tilde{\tilde{u}} = \sqrt{\Phi(\eta)}.$$

На фиг. 377 нанесены наряду с точным решением указанные два приближенных. Мы видим, что первый способ линеаризации дает очень плохой результат, в то время как второй способ дает решение, довольно близкое к точному.

§ 7. Вытекание в грунт с нулевым уровнем грунтовых вод [7, 14]. Другой крайний случай, для которого принятая степень точности — до третьих степеней параметра включительно — недостаточна, есть случай вытекания в грунт, в котором раньше, т. е. до наполнения водой водохранилища, не было грунтовых вод (но который мог, конечно, быть влажным; в этом случае порозность будет заменена «недостатком насыщенности» или «активной» пористостью — см. гл. I, § 2).

Для этого случая недостаточная точность при ограничении числа членов до третьего порядка включительно обнаруживается и ходом членов, содержащих третью степень l, и графиком кривой $u(\eta)$, на котором на некотором участке получаются небольшие отрицательные ординаты (фиг. 378). Поэтому для этого случая была построена интегральная кривая с помощью следующего разложения в ряд.

Если в уравнении (5.2) положить $u=0$, то, считая $u''\neq\infty$, будем иметь:

$$u'(u'+\xi)=0.$$

Отсюда, если $u'\neq 0$, получим:

$$u'+\xi=0. \tag{7.1}$$

Предполагая, что в рассматриваемом случае точка пересечения интегральной кривой с осью абсцисс существует, обозначим ее абсциссу буквой c. В этой точке мы имеем:

$$u=0,\quad u'=-c. \tag{7.2}$$

Дифференцируя последовательно (5.2) и используя (7.2), найдем разложение в ряд по степеням разности $\xi-c$:

$$u=-c(\xi-c)-\frac{1}{4}(\xi-c)^2-\frac{1}{72c}(\xi-c)^3+\frac{(\xi-c)^4}{576c^3}+\ldots \tag{7.3}$$

Положим в полученном равенстве $\xi=0$. Будем иметь:

$$1=c^2\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\ldots\right).$$

Сложив быстро убывающие члены ряда, стоящего в скобках, найдем c^2, а затем c:

$$c=1{,}14277\ldots \tag{7.4}$$

С помощью ряда (7.3) получена таблица 17 зависимости u от ξ

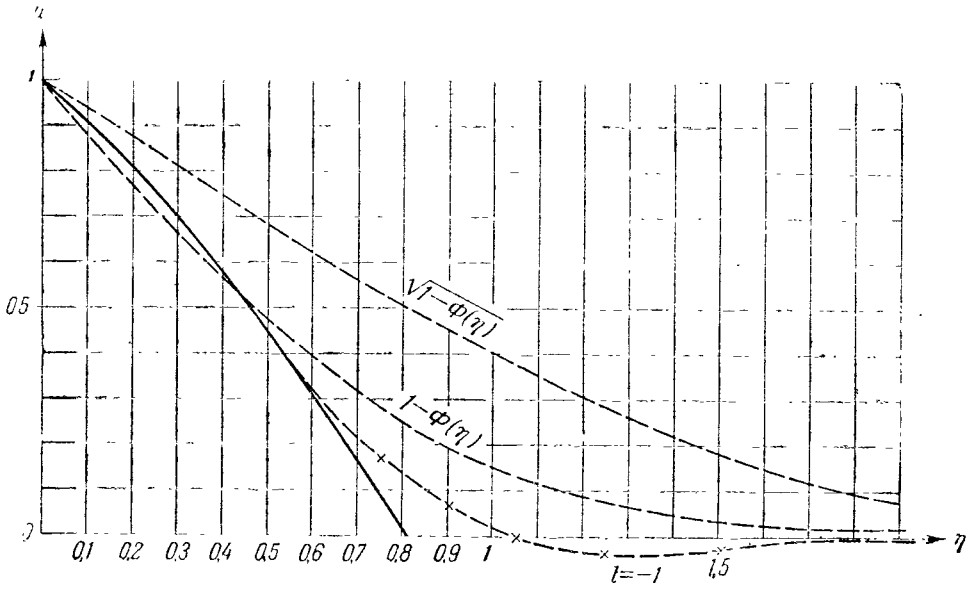
Таблица 17

Зависимость u от ξ для случая вытекания воды из канала в грунт с нулевым уровнем грунтовых вод

$\xi=$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,143
$u=$	1	0,936	0,867	0,794	0,716	0,635	0,549	0,458	0,363	0,263	0,158	0,0487	0

Нетрудно пересчитать эту таблицу, перейдя от независимой переменной ξ к переменной η, где $\eta=\frac{\xi}{\sqrt{2}}$. Не приводя этого пересчета, мы даем график (фиг. 378), где построена зависимость u от η, а

также приведены кривые $1-\Phi(\eta)$ и $\sqrt{1-\Phi(\eta)}$, являющиеся соответственно решениями уравнения теплопроводности, линеаризированного по первому и по второму способам. Мы видим, что второй способ линеаризации, когда за неизвестную функцию в уравнении



Фиг. 378.

теплопроводности принимается H^2, дает значительно худший результат. Кривая $l=-1$ получена в результате вычислений по формуле (4.10).

Возвращаясь к точному уравнению (7.3) линии свободной поверхности, заметим, что мы взяли лишь часть этой линии, для $0 \leqslant \xi \leqslant c$, так как отрицательные значения u для нас не имеют смысла. Для $\xi > c$ мы должны принять $u=0$. При этом u' будет претерпевать разрыв непрерывности, но величина uu', пропорциональная расходу в различных сечениях потока, остается непрерывной.

Интересно, что в рассматриваемом крайнем случае язык грунтовых вод перемещается с конечной скоростью (при $t>0$). Из уравнения $\xi=c$ находим, принимая во внимание, что $\xi=\eta\sqrt{2}=\dfrac{x\sqrt{m}}{\sqrt{2kH_1 t}}$, абсциссу переднего фронта языка: $x=c\sqrt{\dfrac{2kH_1 t}{m}}$. Следовательно, скорость распространения переднего фронта $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{c\sqrt{kH_1}}{\sqrt{2mt}}$.

Нужно иметь в виду, что интегрирование нелинейного уравнения дает нам форму депрессионной кривой более точно, чем интегрирование линеаризированного уравнения, однако все же мы получаем лишь *гидравлическое* решение, т. е. осредненное по высоте. Точное

решение двумерной задачи нам не известно. Г. К. Михайлов [8] обратил внимание на то, что уравнение Буссинеска для перемещающегося языка грунтовых вод (случай этого параграфа) точно соответствует анизотропному грунту с $k_y = \infty$.

Для случая $k_y = 0$ все линии тока горизонтальны и поэтому уравнение депрессионной кривой принимает вид

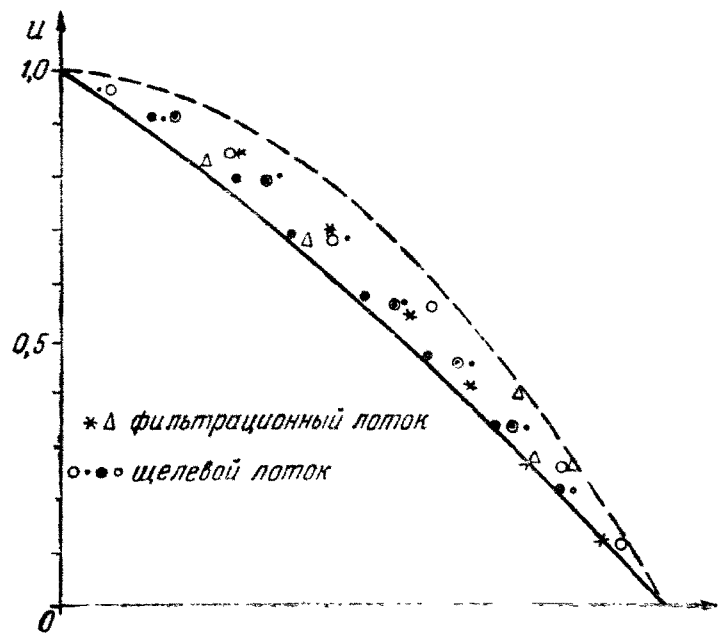
$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m}\frac{H_1 - y}{x}. \tag{7.5}$$

Интегрирование его при условии $x = 0$, когда $t = 0$, дает для депрессионной кривой:

$$y = H_1 - \frac{mx^2}{2kt} \tag{7.6}$$

или, в предыдущих обозначениях, $u = 1 - \xi^2$.

Проведенные эксперименты [9] показали, что форма депрессионной кривой в плоской задаче является промежуточной между формами



Фиг. 379.

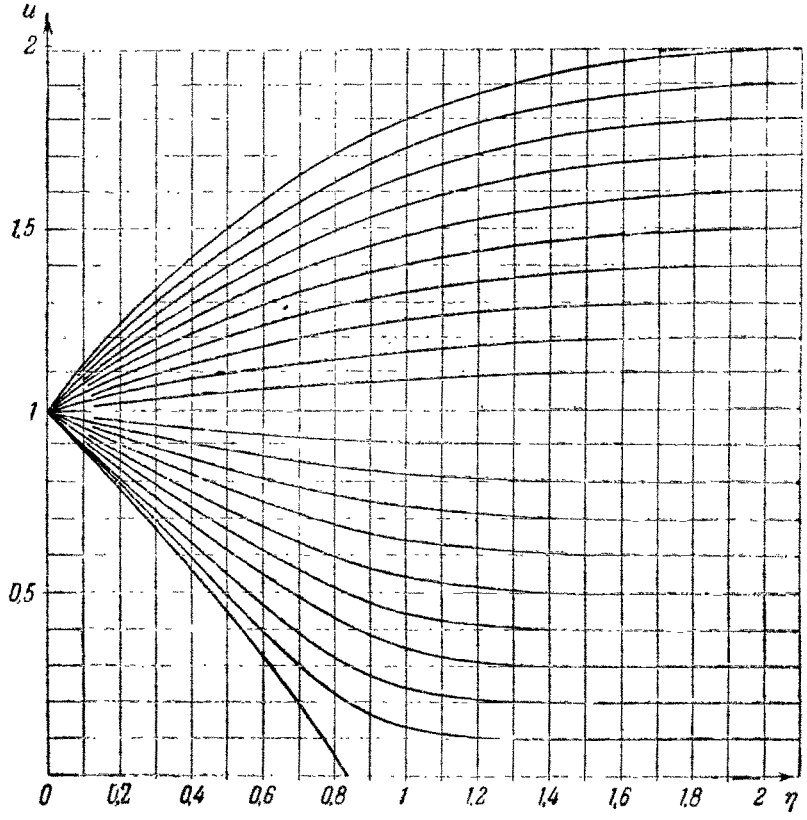
кривых (7.3) и (7.6). На фиг. 379 приведены обе теоретические кривые, нижние концы которых совмещены в одной точке.

Точки, полученные в результате ряда экспериментов [9], укладываются в области, ограниченной кривыми (7.3) и (7.6) (фиг. 379).

§ 8. Построение других кривых. Для построения других кривых был применен сначала метод численного интегрирования уравнения (5.3) при заданных значениях $\alpha = \pm 0{,}1; \pm 0{,}2; \ldots; -0{,}6$. При этом можно найти значения y_∞, т. е. ординаты прямых, к которым

асимптотически стремятся интегральные линии. Интерполированием была найдена таблица зависимости α от y_∞ для равноотстоящих значений y_∞ и проведены вычисления для новых значений α. Результаты представлены на фиг. 380, где по оси абсцисс отложены значения величины $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{m}}{2\sqrt{kH_1 t}}$.

Допустим, что мы построили свободную поверхность $u = u(\eta)$ для какого-нибудь момента времени t_1. Возьмем на ней точку (η_1, u_1).



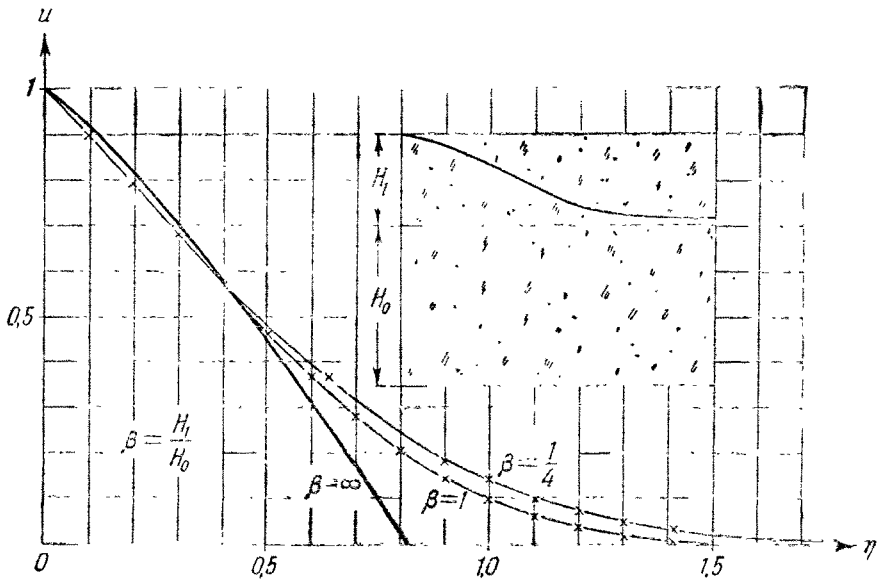
Фиг. 380.

Ей отвечает абсцисса $x_1 = 2\sqrt{\frac{kH_1}{m}}\,\eta_1\sqrt{t_1}$. Та же ордината u_1 будет в момент времени t_2 достигаться при значении $x = x_2$, причем $x_2 = 2\sqrt{\frac{kH_1}{m}}\,\eta_1\sqrt{t_2}$. Имеем соотношение

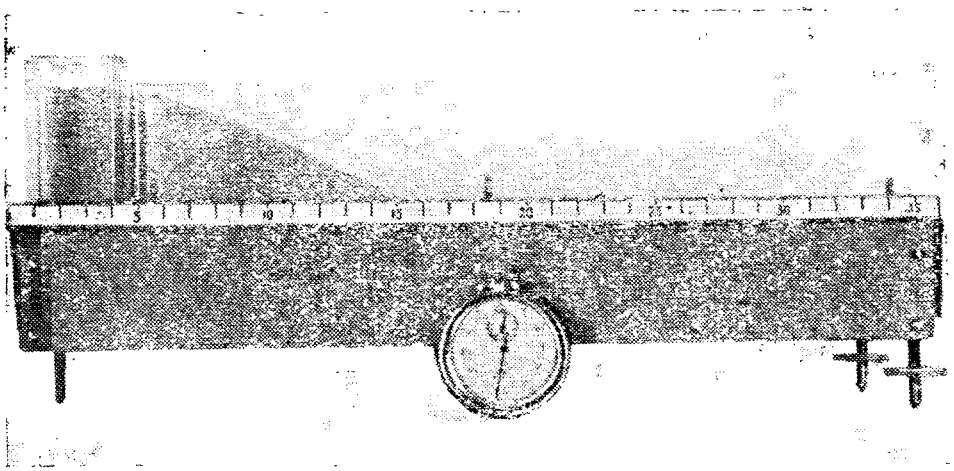
$$x_1 : x_2 = \sqrt{t_1} : \sqrt{t_2},$$

которое показывает, что для получения свободной поверхности в различные моменты времени нужно, беря ординаты с графиков фиг. 380, изменять их абсциссы в заданном отношении.

Можно перестроить графики фиг. 380 для такой задачи. Обозначим через H_0 глубину грунтового потока, отсчитываемую от водоупора (фиг. 381), через H_1 — высоту воды в канале над этим потоком. Обозначая отношение H_1/H_0 буквой β, можем построить гра-



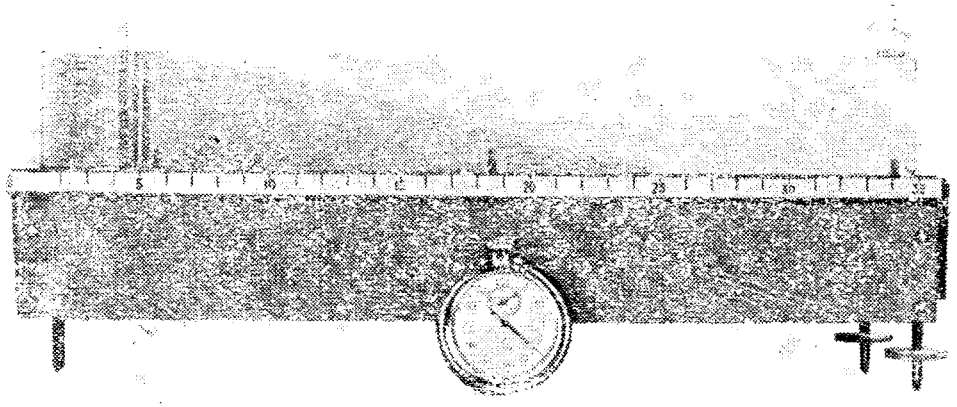
Фиг. 381.



Фиг. 382.

фики для величины $u = \frac{H - H_0}{H_1}$, где H — глубина потока, отсчитываемая от водоупора. Несколько случаев дано на фиг. 381. Если бы мы линеаризировали уравнение (4.1), то получили бы одну кривую для всех β (см. главу XIV).

На фиг. 382, 383 даны фотографии опытов в щелевом глицериновом лотке, соответствующие фильтрации из канала с вертикальной стенкой (для моментов времени $t = 92$ *сек* и $t = 322$ *сек*).



Фиг. 383.

§ 9. Равномерный подъем уровня воды в канале. Решения нелинейного уравнения типа источника. Можно обобщить задачу, рассмотренную в предыдущих параграфах этой главы [10]. Показано, что нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h^k}{\partial x^2} \quad \left(a^2 = \frac{\varkappa}{2m}\right) \tag{9.1}$$

в случае, если ищется его решение, удовлетворяющее условиям

$$h(x, 0) = 0, \quad h(0, t) = \sigma t^p \quad (p \geqslant 0), \tag{9.2}$$

с помощью подстановок

$$h = \sigma t^p f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{a\sqrt{\sigma^{k-1} t^{1+p(k-1)}}} \tag{9.3}$$

приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f^k}{d\xi^2} + \frac{1 + p(k-1)}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - pf = 0. \tag{9.4}$$

При этом для f должны выполняться условия

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \tag{9.5}$$

Если решение уравнения (9.1) должно удовлетворять условиям

$$h(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial h^k(0, t)}{\partial x} = -\tau t^q \quad (q \geqslant 0), \tag{9.6}$$

то подстановка

$$h=(a\tau)^{\frac{2}{k+1}}t^{\frac{2q+1}{k+1}}f_1(\xi),\quad \xi=x\tau^{\frac{1-k}{1+k}}a^{\frac{2(k+1)}{k}}t^{\frac{q(1-k)-k}{k+1}} \tag{9.7}$$

приводит к уравнению

$$\frac{d^2f_1^k}{d\xi^2}+\frac{1}{2}\left[1+\frac{(2q+1)(k-1)}{k+1}\right]\xi\frac{df_1}{d\xi}-\frac{2q+1}{k+1}f_1=0, \tag{9.8}$$

причем

$$\frac{df_1^k(0)}{d\xi}=-1.$$

Для нас специальный интерес представляет частный случай

$$k=2,\ p=1,$$

соответствующий равномерному подъему воды в канале. При этом уравнение (9.4) приводится к такому:

$$\frac{d^2f^2}{d\xi^2}+\xi\frac{df}{d\xi}-f=0,\quad \xi=\frac{x}{a\sqrt{\sigma t}}. \tag{9.9}$$

Нетрудно обнаружить, что это уравнение имеет решение вида

$$f=1+b\xi.$$

Подстановка в уравнение (9.9) дает для постоянной b значения $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, из которых мы выбираем $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Если рассмотрим функцию, заданную следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} f&=1-\frac{\xi}{\sqrt{2}} \quad \text{для} \quad 0\leqslant\xi\leqslant\sqrt{2},\\ f&=0 \qquad\quad \text{для} \quad \sqrt{2}<\xi<\infty, \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

то это будет непрерывное решение уравнения (9.9) с непрерывным значением величины ff', пропорциональной расходу. Оно соответствует поставленной задаче.

Возвращаясь к функции h, получим решение, отвечающее условиям

$$h(x,0)=0,\ h(0,t)=\sigma t$$

для уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{2m}\frac{\partial^2h^2}{\partial x^2} \tag{9.11}$$

в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} h &= \sigma t - x\sqrt{\frac{m\sigma}{k}} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{k\sigma}{m}}\, t, \\ h &= 0 \qquad\qquad \text{при} \quad t\sqrt{\frac{k\sigma}{m}} < x. \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

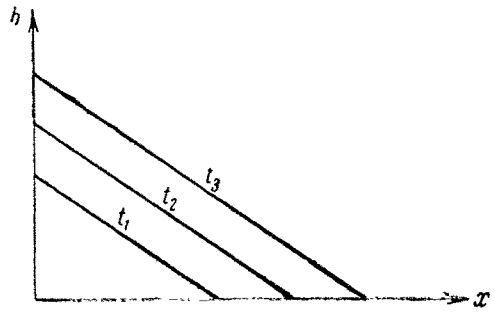
Следовательно, депрессионная линия представляет отрезок прямой, перемещающейся параллельно самой себе (фиг. 384) с постоянной скоростью распространения переднего фронта

$$v_0 = \sqrt{\frac{k\sigma}{m}}.$$

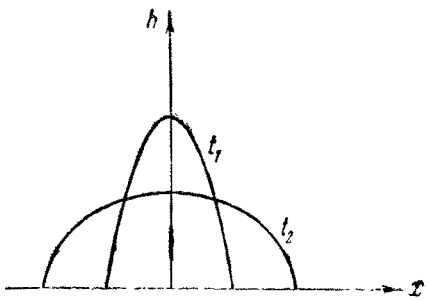
Можно получить также решение типа источника для уравнения (9.11) в случае симметрии относительно оси ординат [10]. Имеем:

$$h = \frac{m}{6kt}(\tau_0^2 - x^2), \quad \tau_0 = \left(\frac{9kt}{m}\right)^{1/3}. \tag{9.13}$$

Его можно рассматривать как схему растекания бугра грунтовых вод по поверхности водоупора (фиг. 385; задачу о растекании бугра см. в § 5 главы XIV).



Фиг. 384.



Фиг. 385.

В случае цилиндрической симметрии вместо (9.11) имеем уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h^2}{\partial r}\right) \quad \left(a^2 = \frac{k}{2m}\right). \tag{9.14}$$

Решение типа мгновенного источника здесь имеет вид

$$h = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{m}{kt}\right)^{3/2}\left(\frac{2k}{m\pi}t - r^2\right). \tag{9.15}$$

Оно представляет схему растекания осесимметричного бугра грунтовых вод при сосредоточенном поливе по поверхности водоупора.

В обоих случаях свободная поверхность имеет в сечении вид параболы, расширяющейся со временем. Однако наибольшая абсцисса увеличивается по различным законам: в плоской задаче — пропорционально $t^{1/3}$, в осесимметричной — пропорционально $t^{1/2}$.

§ 10. Задача Буссинеска. Буссинеск [1] искал решение уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{10.1}$$

в виде произведения двух функций

$$h = T(t)X(x), \tag{10.2}$$

из которых одна зависит от времени, другая от координаты.

Подставляя (10.2) в (10.1) и разделяя переменные, получим:

$$\frac{T'}{T^2} = \frac{k}{m}\frac{(XX')'}{X} = -A, \tag{10.3}$$

где A — произвольная постоянная. Уравнение (10.3) распадается на два — для T и для X. Интегрирование каждого из них дает:

$$T = \frac{1}{At + C}, \tag{10.4}$$

$$x = \int \frac{X\,dX}{\sqrt{C_1 - \frac{2}{3}\frac{Am}{k}X^3}} + C_2. \tag{10.5}$$

В выражении для X заменим произвольные постоянные новыми постоянными, полагая

$$x = D\int_0^X \frac{X\,dX}{\sqrt{H^3 - X^3}}, \quad D = \sqrt{\frac{3k}{2mA}}.$$

Считая X изменяющимся от нуля до H, будем вести интегрирование в пределах от нуля до H, выбирая постоянную D так, чтобы $x = L$ при $X = H$. Будем иметь:

$$x = \frac{3L}{B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)\sqrt{H}}\int_0^X \frac{X\,dX}{\sqrt{H^3 - X^3}}, \tag{10.6}$$

где $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ обозначает функцию бета. Равенство (10.6) можно получить, преобразуя интеграл

$$\int_0^H \frac{X\,dX}{\sqrt{H^3 - X^3}} = \frac{\sqrt{H}}{3}\int_0^1 \tau^{-\frac{1}{3}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\,d\tau = \frac{\sqrt{H}}{3}B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

с помощью подстановки $X^3 = H^3\tau$. При этом, очевидно,

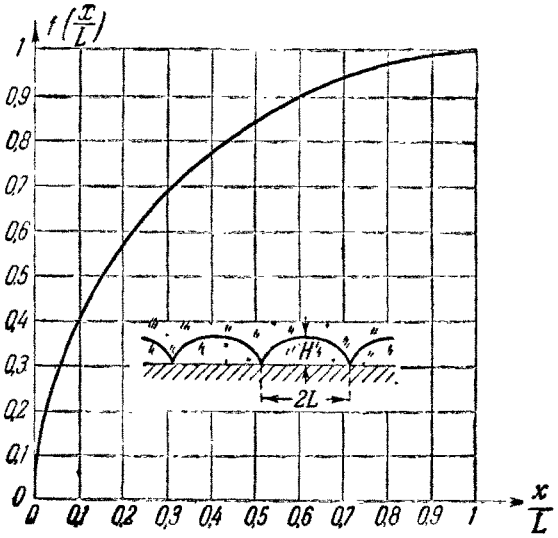
$$D = \frac{3L}{B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)\sqrt{H}} = \frac{L}{0{,}86236\sqrt{H}}.$$

В выражении для T выберем постоянную C равной единице так, чтобы $T = 1$ при $t = 0$.

Обозначая через $f\left(\frac{x}{L}\right) = X$ обращение уравнения (10.6) и учитывая зависимость A от D, можем переписать (10.2) в виде

$$h(x, t) = \frac{Hf\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + 1{,}115\frac{kHt}{mL^2}}. \tag{10.7}$$

График функции $y = f\left(\frac{x}{L}\right)$ представлен на фиг. 386. Его можно рассматривать как начальную форму кривой депрессии, которая затем



Фиг. 386.

будет понижаться согласно (10.7). Эта схема соответствует задаче о бесконечном ряде дрен, лежащих на водоупоре, причем начальная поверхность имеет уравнение

$$y = Hf\left(\frac{x}{L}\right).$$

Для расхода каждой из дрен найдем выражение, составляя произведение

$$2kh\frac{\partial h}{\partial x}$$

и переходя к пределу при $h \to 0$. Будем иметь:

$$q = \frac{1{,}725kH^2}{L\left(1+1{,}115\frac{kH}{mL^2}t\right)^2}. \tag{10.8}$$

Буссинеск пытался доказать устойчивость рассмотренного движения, называемого «упорядоченным режимом». Однако он лишь обнаружил существование класса возмущений, которые стремятся к нулю при $t \to \infty$ быстрее, чем h, что недостаточно для полного доказательства устойчивости.

Заканчивая на этом рассмотрение нелинейного уравнения (4.1), отметим, что нелинейные уравнения в частных производных встречаются и в других важных разделах теории фильтрации.

Мы не затрагиваем здесь вопросов механической и химической суффозии, вопросов консолидации земляной среды [11]. Эти вопросы имеют очень важное практическое значение, но математическая часть их теории еще мало разработана.

Также мы оставляем в стороне теорию неустановившихся движений с полным учетом инерционных членов [12]. Здесь получается система нелинейных уравнений в частных производных, похожая на ту, которая имеет место для неустановившегося движения воды в призматическом русле. Она может быть проинтегрирована с помощью метода характеристик.

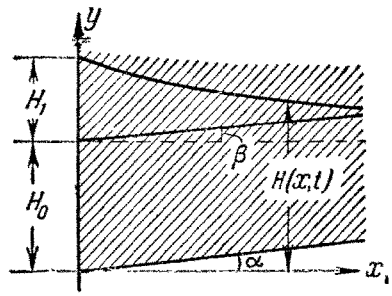
ГЛАВА XIV

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГРУНТОВЫХ ВОД

А. ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ КАНАЛА ПРИ НАКЛОННОМ ВОДОУПОРЕ

§ 1. Просачивание из канала при горизонтальном водоупоре и отсутствии инфильтрации. Прежде чем исследовать влияние уклона водоупора, рассмотрим задачу о просачивании грунтовых вод из канала при горизонтальном водоупоре.

В этой главе мы будем рассматривать линеаризированное уравнение неустановившегося движения, что допустимо, если мы хотим получить грубо ориентировочные результаты.



Фиг. 387.

Пусть уровень грунтовых вод в начальный момент времени $t=0$ был H_0 (фиг. 387). В дальнейшем в канале поддерживается уровень H_0+H_1. Тогда, принимая, что ордината свободной поверхности $H(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

где

$$a = \frac{k\bar{h}}{m}$$

(здесь k — коэффициент фильтрации, m — пористость или недостаток насыщения, $\bar{h}$ — средняя глубина просачивающейся воды), получаем известное из теории теплопроводности решение

$$H(x, t) = H_0 + H_1\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]. \tag{1.2}$$

Здесь $\Phi(\xi)$ есть интеграл вероятности

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-\xi_1^2}\, d\xi_1. \tag{1.3}$$

В практических задачах обычно представляет особый интерес промежуток времени, в течение которого ордината свободной поверхности достигает той или иной величины. Обозначим через y заданное значение ординаты кривой депрессии, отсчитываемое от H_0 (фиг. 388):

$$y = H(x, t) - H_0. \tag{1.4}$$

Тогда из (1.2) получим:

$$\frac{H_1 - y}{H_1} = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \tag{1.5}$$

По таблицам функции $\Phi(\xi)$ можно найти аргумент $\xi = \frac{x}{2\sqrt{at}}$, а затем и t.

С. Ф. Аверьяновым рассмотрена следующая задача. В какой момент времени уровень грунтовых вод достигает высоты, составляющей заданную долю от высоты H_1 (т. е. добавочной высоты к первоначальной высоте H_0)?

Обозначим через z понижение уровня грунтовых вод (по сравнению с $H_0 + H_1$), т. е. высоту, отсчитываемую от окончательного уровня грунтовых вод $H_0 + H_1$ (фиг. 388):

$$z = H_1 - y.$$

По формуле (1.5) получим:

$$\frac{z}{H_1} = \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \tag{1.6}$$

При заданном z отсюда получим для t выражение вида

$$t = \mu_1 \frac{x^2}{4a} = \mu \frac{mx^2}{k\bar{h}}. \tag{1.7}$$

Коэффициент μ, зависящий от $\frac{z}{H_1}$, можно назвать «коэффициентом достижения величины $\frac{z}{H_1}$». Так, если положим $\frac{z}{H_1} = 0{,}05$, т. е. если считать, что z составляет 5% от H_1, то можно найти:

$$\mu_{5\%} = 125,$$

$$t_{5\%} = \frac{125\, mx^2}{k\bar{h}}. \tag{1.8}$$

Формула (1.8) дает возможность для любого расстояния от канала при заданных k, $\bar{h}$ и m найти тот момент времени, в который поднимающаяся грунтовая вода будет иметь уровень, на 5% меньший наибольшего возможного (т. е. горизонтального уровня). Приводим таблицу 18 значений μ.

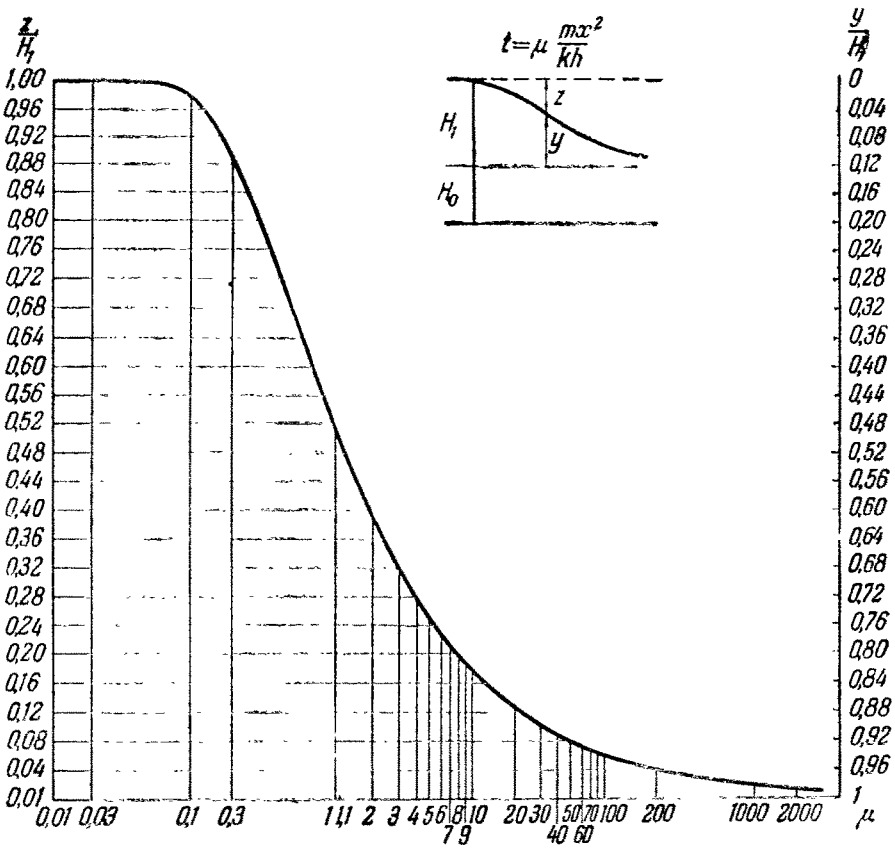
Таблица 18

Значения коэффициента μ достижения величины $\frac{z}{H_1}$

$\frac{z}{H_1}$	0,01	0,03	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
μ	3190	353	127	31,5	7,69	3,26	1,81	1,10
$\lg \mu$	3,504	2,548	2,104	1,50	0,886	0,526	0,258	0,041

$\frac{z}{H_1}$	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,99
μ	0,704	0,463	0,305	0,184	0,130	0,0752
$\lg \mu$	—0,141	—0,334	—0,516	—0,735	—0,886	—1,124

Рассмотрим эту же задачу в несколько иной форме: найти момент времени, когда высота свободной поверхности, отсчитываемая от



Фиг. 388.

первоначального уровня грунтовых вод, достигнет того или иного процента от высоты H_1. Положим

$$t = \nu \frac{mx^2}{kh}.$$

Вычисление ν аналогично вычислению μ.

Результаты представлены на фиг. 388.

Эти задачи имеют важное значение в вопросах засоления почв, которое может иметь место при высоком подъеме грунтовых вод. Именно, если грунтовые воды будут находиться на глубине 2—3 *м* от поверхности земли, то вода при наличии интенсивного испарения будет подниматься вверх и выносить с собой растворенные в ней соли [11]. Высокое стояние грунтовых вод может вызвать также заболачивание почвы.

Как видно из формулы (1.7), важное значение для определения времени достижения того или иного подъема воды имеет знание величины m.

§ 2. Фильтрация из канала при наклонном водоупоре со слабым уклоном. Пусть

$$i_1 = \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha \tag{2.1}$$

есть уклон водоупора, α — угол между линией водоупора и горизонтальной осью.

Пусть искомое уравнение свободной поверхности будет:

$$y = H(x, t). \tag{2.2}$$

Считаем изменение H по x настолько малым, что скорости течения являются почти горизонтальными. При этом горизонтальная скорость выражается таким образом:

$$u = -k\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2.3}$$

где k — коэффициент фильтрации.

Расход через вертикальное сечение, соответствующее абсциссе x, будет равняться скорости u, умноженной на высоту z слоя воды, т. е.

$$\left.\begin{aligned} q &= -kz\frac{\partial H}{\partial x}, \\ z &= H - i_1 x. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Изменение расхода вдоль оси x компенсируется со временем изменением высоты H, умноженной на пористость, и возможным поступлением воды сверху или снизу по вертикали:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial (Hm)}{\partial t} - w, \tag{2.5}$$

где через w обозначена вертикальная скорость.

Подставляя (2.4) в уравнение (2.5), найдем:

$$m\frac{\partial H}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left[(H - i_1 x)\frac{\partial H}{\partial x}\right] + w. \tag{2.6}$$

В случае «обратного» уклона, как у нас на фиг. 387, число i_1 является положительным, в случае «прямого» — отрицательным. Для

упрощения уравнения (2.6), произведя дифференцирование по x, заменим переменную величину

$$z = H + H_0 - i_1 x$$

постоянным числом

$$h = H_1 + H_0. \tag{2.7}$$

Погрешность от такой замены не должна быть большой, если x не очень велико. Так, если $i_1 = 0{,}0003$, то на расстоянии 30 *км* получим $i_1 x = 0{,}009$ *км* $= 9$ *м*, на расстоянии 15 *км* $i_1 x = 4{,}5$ *м* и т. д.

Теперь уравнение (2.6) можно переписать так:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{kh}{m}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{ki_1}{m}\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Введем вместо t переменную τ, положив

$$\frac{m}{kh} t = \tau. \tag{2.9}$$

Тогда коэффициент при $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ будет равен единице, и мы можем написать:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2.10}$$

где обозначено

$$2\alpha = \frac{i_1}{h}. \tag{2.11}$$

Теперь нам нужно решить уравнение (2.10) при граничном условии

$$H(0, \tau) = H_1 + H_0. \tag{2.12}$$

Мы считаем, что к начальному моменту движения имелся грунтовый поток с постоянным уклоном свободной поверхности, равным величине i_2. Тогда в качестве начального условия мы принимаем:

$$H(x, 0) = i_2 x. \tag{2.13}$$

Будем искать решение уравнения (2.8) при условиях (2.12) и (2.13) операционным методом. Для этого умножим (2.8) почленно на $e^{-p\tau} d\tau$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до ∞. Интегрируя по частям, имеем:

$$\int_0^\infty \frac{\partial H}{\partial \tau} e^{-p\tau} d\tau = He^{-p\tau}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty He^{-p\tau} d\tau =$$

$$= -H(x, 0) + p\int_0^\infty He^{-p\tau} d\tau. \tag{2.14}$$

Введем обозначение

$$\bar{H}(x, p) = \int_0^\infty H e^{-p\tau}\, d\tau \tag{2.15}$$

и будем называть $\bar{H}(x, p)$ *преобразованием Лапласа функции* $H(x, t)$. Тогда (2.14) перепишется следующим образом:

$$\int_0^\infty \frac{\partial H}{\partial \tau} e^{-p\tau}\, d\tau = -H(x, 0) + p\bar{H}(x, p). \tag{2.16}$$

Преобразование $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ дает:

$$\int_0^\infty \frac{\partial H}{\partial x} e^{-p\tau}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty H e^{-p\tau}\, d\tau = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x},$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} e^{-p\tau}\, d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty H e^{-p\tau}\, d\tau = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2}.$$

Так как производная по τ у нас исчезла, остаются лишь производные по x, то мы можем вместо частных производных писать обыкновенные, т. е. $\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}$ заменить на $\frac{d\bar{H}}{dx}$ и $\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x^2}$ на $\frac{d^2\bar{H}}{dx^2}$.

Таким образом, преобразование уравнения (2.10) нам дает такое уравнение для $\bar{H}$:

$$-H(x, 0) + p\bar{H} = \frac{d^2\bar{H}}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\bar{H}}{dx}.$$

Согласно (2.13) $H(x, 0) = i_2 x$. Поэтому получаем:

$$\frac{d^2\bar{H}}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\bar{H}}{dx} - p\bar{H} = -i_2 x. \tag{2.17}$$

Это — линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для него характеристическое уравнение есть

$$s^2 - 2\alpha s - p = 0.$$

Его корни суть $\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + p}$. Частное решение уравнения (2.17) можно взять в виде

$$H^* = Ax + B.$$

Определив постоянные A и B, получим:

$$H^* = \frac{i_2 x}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2}.$$

Общее решение (2.17) имеет вид

$$\bar{H} = (C_1 e^{x\sqrt{\alpha^2+p}} + C_2 e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}})\, e^{\alpha x} + \frac{i_2 x}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2}. \qquad (2.18)$$

Для того чтобы $\bar{H}$ не возрастало безгранично с возрастанием x, положим $C_1 = 0$. Теперь найдем значение $\bar{H}$ при $x = 0$. По формуле (2.15) имеем:

$$\bar{H}(0,\ p) = \int_0^\infty H(0,\ \tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau.$$

На основании (2.12) получаем далее:

$$\bar{H}(0,\ p) = (H_0 + H_1) \int_0^\infty e^{-p\tau}\, d\tau = \frac{H_0 + H_1}{p}. \qquad (2.19)$$

Положим теперь $x = 0$ в (2.18). Будем иметь:

$$\frac{H_0 + H_1}{p} = C_2 - \frac{2\alpha i_2}{p^2},$$

откуда

$$C_2 = \frac{H_0 + H_1}{p} + \frac{2\alpha i_2}{p^2}. \qquad (2.20)$$

Следовательно, для $\bar{H}(x,\ p)$ окончательно получаем:

$$\bar{H}(x,\ p) = \left(\frac{H_0 + H_1}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2}\right) e^{\alpha x} e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}} + \frac{i_2 x}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2}. \qquad (2.21)$$

Теперь нам нужно вернуться к функции $H(x,\ t)$. По таблице преобразований Лапласа находим, что функции

$$\frac{e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}}}{p}$$

соответствует функция [1]

$$F(x,\ \tau) = \frac{1}{2}\left\{ e^{\alpha x}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha x}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}, \qquad (2.22)$$

где $\Phi(x)$ — функция вероятности, определяемая согласно (1.3).

Тогда функции

$$\frac{e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}}}{p^2}$$

будет соответствовать интеграл

$$\int_0^\tau F(x,\tau)\,d\tau = \tau \operatorname{ch}\alpha x - \frac{1}{2}e^{\alpha x}\int_0^\tau \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}\right)d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\alpha x}\int_0^\tau \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}-\alpha\sqrt{\tau}\right)d\tau. \qquad (2.23)$$

Введем обозначения

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}, \qquad (2.24)$$

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}-\alpha\sqrt{\tau}. \qquad (2.25)$$

Из этих равенств находим выражения $\sqrt{\tau}$ через ξ и через η:

$$\sqrt{\tau} = \frac{\xi}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4\alpha^2}-\frac{x}{2\alpha}}, \qquad (2.26)$$

$$\sqrt{\tau} = -\frac{\eta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\eta^2}{4\alpha^2}+\frac{x}{2\alpha}}. \qquad (2.27)$$

Если построить ξ, как функцию от τ, то будем иметь две ветви. Для

$$\tau \leqslant \tau_1, \qquad (2.28)$$

где $\tau_1 = \frac{x}{2\alpha}$, нужно брать левую ветвь функции ξ, для $\tau > \tau_1$ — правую. Результат получится одинаковым для обеих ветвей.

Будем пока считать, что $\tau < \tau_1$. Тогда в формуле (2.26) перед корнем нужно взять знак минус, а в (2.17) — плюс, т. е.

$$\sqrt{\tau} = \frac{\xi}{2\alpha} - \sqrt{\frac{\xi^2}{4\alpha^2}-\frac{x}{2\alpha}},$$

$$\sqrt{\tau} = -\frac{\eta}{2\alpha} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4\alpha^2}+\frac{x}{2\alpha}}.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{\xi^2}{2\alpha^2} - \frac{x}{2\alpha} - \frac{\xi}{\alpha}\sqrt{\frac{\xi^2}{4\alpha^2}-\frac{x}{2\alpha}} \qquad (2.29)$$

и

$$\tau = \frac{\eta^2}{2\alpha^2} + \frac{x}{2\alpha} - \frac{\eta}{\alpha}\sqrt{\frac{\eta^2}{4\alpha^2}+\frac{x}{2\alpha}}. \qquad (2.30)$$

Переходим к вычислению интегралов

$$J_1 = \int_0^\tau \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right) d\tau, \quad J_2 = \int_0^\tau \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}\right) d\tau. \tag{2.31}$$

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\tau \Phi(\xi)\, d\tau = \tau\Phi(\xi)\Big|_0^\tau - \int_\infty^\xi \tau\Phi'(\xi)\, d\xi = \\ &= \tau\Phi(\xi) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\xi^\infty e^{-\xi^2}\left(\frac{\xi^2}{2\alpha^2} - \frac{x}{2\alpha} - \frac{\xi}{2\alpha^2}\sqrt{\xi^2 - 2\alpha x}\right) d\xi, \\ J_2 &= \int_0^\tau \Phi(\eta)\, d\tau = \tau\Phi(\eta)\Big|_0^\tau - \int_\infty^\tau \tau\Phi'(\eta)\, d\eta = \\ &= \tau\Phi(\eta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-\eta^2}\left(\frac{\eta^2}{2\alpha^2} + \frac{x}{2\alpha} - \frac{\eta}{2\alpha^2}\sqrt{\eta^2 + 2\alpha x}\right) d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Воспользуемся формулами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \Phi(x), \\ &\int_x^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} x e^{-x^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}[1 - \Phi(x)], \\ &\int_x^\infty x\sqrt{x^2 + m}\, e^{-x^2} dx = \\ &\quad = \frac{e^{-x^2}}{2}\sqrt{x^2 + m} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^m [1 - \Phi(\sqrt{x^2 + m})]. \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

Тогда получим:

$$J_1 = \tau\Phi(\xi) + \frac{1}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}\left[\xi e^{-\xi^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - \Phi(\xi))\right] - \frac{x}{2\alpha}(1 - \Phi(\xi)) -$$
$$- \frac{1}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}\left[e^{-\xi^2}\sqrt{\xi^2 - 2\alpha x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha x}(1 - \Phi(\sqrt{\xi^2 - 2\alpha x}))\right].$$

Заметив, что $\xi^2 - 2\alpha x = \eta^2$, напишем:

$$J_1 = \tau\Phi(\xi) + \frac{\xi - \eta}{2\alpha^2\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} + \frac{1 - 2\alpha x}{4\alpha^2}(1 - \Phi(\xi)) - \frac{e^{-2\alpha x}}{4\alpha^2}(1 - \Phi(\eta)).$$

Таким же образом найдем J_2:

$$J_2 = \tau\Phi(\eta) + \frac{1}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}\left[\eta e^{-\eta^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\Phi(\eta))\right] + \frac{x}{2\alpha}(1-\Phi(\eta)) -$$

$$-\frac{1}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}\left[e^{-\eta^2}\sqrt{\eta^2+2\alpha x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{2\alpha x}(1-\Phi(\sqrt{\eta^2+2\alpha x}))\right] =$$

$$= \tau\Phi(\eta) + \frac{\eta-\xi}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2} + \frac{1+2\alpha x}{4\alpha^2}(1-\Phi(\eta)) - \frac{e^{2\alpha x}}{4\alpha^2}(1-\Phi(\xi)).$$

Теперь на основании формулы (2.23) находим:

$$\int_0^\tau F(x,\tau)\,d\tau = \tau\,\mathrm{ch}\,\alpha x + \frac{x}{2\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha x - \frac{1}{4\alpha}e^{\alpha x}(x+2\alpha\tau)\Phi(\xi) +$$

$$+\frac{1}{4\alpha}e^{-\alpha x}(x-2\alpha\tau)\Phi(\eta) =$$

$$= \frac{x+2\alpha\tau}{4\alpha}e^{\alpha x} - \frac{x-2\alpha\tau}{4\alpha}e^{-\alpha x} - \frac{x+2\alpha\tau}{4\alpha}e^{\alpha x}\Phi(\xi) + \frac{x-2\alpha\tau}{4\alpha}e^{-\alpha x}\Phi(\eta) =$$

$$= \frac{x+2\alpha\tau}{4\alpha}e^{\alpha x}[1-\Phi(\xi)] - \frac{x-2\alpha\tau}{4\alpha}e^{-\alpha x}[1-\Phi(\eta)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\tau+\frac{x}{2\alpha}\right)e^{\alpha x}[1-\Phi(\xi)] + \left(\tau-\frac{x}{2\alpha}\right)e^{-\alpha x}[1-\Phi(\eta)]\right\}. \qquad (2.34)$$

Возвращаясь к формуле (2.21), заметим, что преобразованию $\frac{1}{p}$ соответствует единица, а $\frac{1}{p^2}$ соответствует τ. Поэтому получим для $H(x, t)$:

$$H(x,t) = \frac{(H_1+H_0)e^{\alpha x}}{2}\{e^{\alpha x}(1-\Phi(\xi)) + e^{-\alpha x}(1-\Phi(\eta))\} -$$

$$-2\alpha i_2 e^{\alpha x}\left\{\frac{x+2\alpha\tau}{4\alpha}e^{\alpha x}(1-\Phi(\xi)) - \frac{x-2\alpha\tau}{4\alpha}e^{-\alpha x}(1-\Phi(\eta))\right\} -$$

$$-i_2 x - 2\alpha i_2\tau$$

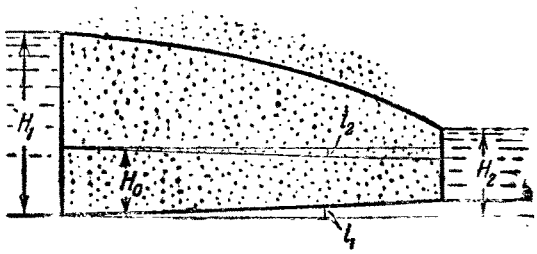
или

$$H(x,t) = \frac{e^{2\alpha x}}{2}[H_1+H_0+i_2(x+2\alpha\tau)](1-\Phi(\xi)) +$$

$$+\frac{1}{2}[H_1+H_0-i_2(x-2\alpha\tau)](1-\Phi(\eta)) - i_2(2\alpha\tau-x). \qquad (2.35)$$

§ 3. Просачивание из одного канала в другой по наклонному водоупору. До сих пор мы рассматривали такую задачу, когда грунтовые воды, вытекая из канала, могут уходить сколь угодно

далеко от канала, не встречая никаких преград на пути. На самом деле эти воды рано или поздно дойдут до другого канала или реки. Поэтому мы рассмотрим здесь такую задачу, являющуюся обобщением изученной нами в § 2. Из канала, в котором все время поддерживается постоянный уровень H_1, происходит просачивание воды в другой канал с постоянным уровнем H_2 (фиг. 389). Водоупор имеет уклон i_1, достаточно малый для того, чтобы можно было считать i_1 равным как тангенсу угла линии водоупора с осью x, так и самому углу. Начальный уровень грунтовых вод имеет высоту H_0 у первого канала и имеет малый уклон i_2.



Фиг. 389.

Возьмем наше прежнее уравнение (2.10):

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3.1}$$

где

$$\tau = \frac{k\bar{h}}{m} t, \qquad \alpha = \frac{i_1}{2\bar{h}}, \tag{3.2}$$

и найдем его решение при условиях для $H(x, t)$:

$$H(0, t) = H_1, \qquad H(L, t) = H_2, \tag{3.3}$$

$$H(x, 0) = H_0 + i_2 x. \tag{3.4}$$

Обозначая, как и раньше, через $\bar{H}(x, p)$ преобразование функции $H(x, t)$:

$$\bar{H}(x, p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} H(x, \tau)\, d\tau, \tag{3.5}$$

получим уравнение для $\bar{H}$:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\bar{H}}{dx} - p\bar{H} = -H(0, x) = -H_0 - i_2 x. \tag{3.6}$$

Для $\bar{H}$ на основании (3.5) имеем такие граничные условия:

$$\bar{H}(0, p) = H_1 \int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau = \frac{H_1}{p}, \tag{3.7}$$

$$\bar{H}(L, p) = H_2 \int_0^\infty e^{-p\tau} d\tau = \frac{H_2}{p}. \tag{3.8}$$

Общее решение уравнения (3.6) имеет вид (A, B — произвольные постоянные)

$$\overline{H} = [A \operatorname{ch}(x\sqrt{\alpha^2+p}) + B \operatorname{sh}(x\sqrt{\alpha^2+p})]\, e^{\alpha x} + \frac{i_2 x}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2} + \frac{H_0}{p}. \quad (3.9)$$

Полагая здесь $x=0$, $H=\frac{H_1}{p}$ и $x=L$, $H=\frac{H_2}{p}$, получим:

$$\frac{H_1}{p} = A - \frac{2\alpha i_2}{p^2} + \frac{H_0}{p},$$

$$\frac{H_2}{p} = (A \operatorname{ch} L\sqrt{\alpha^2+p} + B \operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p})\, e^{\alpha L} + \frac{i_2 L}{p} + \frac{H_0}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2}.$$

Отсюда найдем:

$$A = \frac{H_1 - H_0}{p} + \frac{2\alpha i_2}{p^2},$$

$$B = \frac{\left(\frac{H_2 - H_0 - i_2 L}{p} + \frac{2\alpha i_2}{p^2}\right) e^{-\alpha L} - \left(\frac{H_1 - H_0}{p} + \frac{2\alpha i_2}{p^2}\right) \operatorname{ch} L\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}}.$$

Подставляя эти значения A и B в (3.9), получим после некоторых преобразований:

$$\overline{H}(x, p) = e^{\alpha x}\left(\frac{H_1 - H_0}{p} + \frac{2\alpha i_2}{p^2}\right)\frac{\operatorname{sh}(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}} +$$

$$+ e^{-\alpha(L-x)}\left(\frac{H_2 - H_0 - i_2 L}{p} + \frac{2\alpha i_2}{p^2}\right)\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}} + \frac{H_0 + i_2 x}{p} - \frac{2\alpha i_2}{p^2}. \quad (3.10)$$

Для того чтобы построить решение $H(x, t)$, мы прежде всего найдем корни уравнения

$$\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p} = i \sin iL\sqrt{\alpha^2+p} = 0. \quad (3.11)$$

Имеем:

$$iL\sqrt{\alpha^2+p} = k\pi \qquad (k \text{ — целое}), \quad (3.12)$$

откуда, обозначая через p_k корни этого уравнения, получим:

$$p_k = -\alpha^2 - \frac{k^2\pi^2}{L^2}. \quad (3.13)$$

Теперь воспользуемся формулой обращения для отношения двух целых трансцендентных функций [1]:

$$L^{-1}\left[\frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(p_n)}{\Psi'(p_n)} e^{p_n \tau}, \quad (3.14)$$

где $\Phi(p)$ при разложении в ряд по степеням p имеет свободный член, отличный от нуля, а $\Psi(p)$ начинается с первой степени p. При этом предполагается, что корни знаменателя простые.

Применим (3.14) к функции $\dfrac{\operatorname{sh} x\sqrt{\alpha^2+p}}{p\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}} = \dfrac{\sin(ix\sqrt{\alpha^2+p})}{p\sin(iL\sqrt{\alpha^2+p})}$.
Кроме корней (3.13), знаменатель имеет еще корень $p=0$. Полагая

$$\left.\begin{aligned}\Phi(p) &= \sin(x\sqrt{\alpha^2+p}\,i),\\ \Psi(p) &= p\sin(L\sqrt{\alpha^2+p}\,i),\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

найдем:

$$\Psi'(p) = \sin(L\sqrt{\alpha^2+p}\,i) + \frac{Lpi}{2\sqrt{\alpha^2+p}}\cos(L\sqrt{\alpha^2+p}\,i).$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}\Psi'(0) &= i\operatorname{sh}\alpha L,\\ \Psi'(p_n) &= \frac{Lp_n i}{2\sqrt{\alpha^2+p_n}}\cos L\sqrt{\alpha^2+p_n} = \frac{(-1)^n(L^2\alpha^2+h\pi^2)}{2n\pi}.\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Кроме того, имеем на основании (3.12):

$$\left.\begin{aligned}\Phi(p_n) &= \sin(ix\sqrt{\alpha^2+p}) = \sin\frac{n\pi x}{L},\\ \Phi(0) &= \sin(xi\alpha) = i\operatorname{sh}\alpha x.\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Поэтому согласно формуле (3.14) можно написать:

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{\alpha^2+p}}{p\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}}\right] = \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha L} + 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\dfrac{n\pi x}{L}}{L^2\alpha^2+n^2\pi^2}\,e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}. \tag{3.18}$$

Так как $\dfrac{1}{p}$ соответствует интегрированию по τ в пределах от 0 до τ, то получаем далее формулу обращения

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{\alpha^2+p}}{p^2\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}}\right] =$$

$$= \tau\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha L} + 2\pi L^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\dfrac{n\pi x}{L}\left[1-e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]}{(L^2\alpha^2+n^2\pi^2)^2}. \tag{3.19}$$

Таким же образом найдем:

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}{p\operatorname{sh} L\sqrt{\alpha^2+p}}\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)}{\operatorname{sh}\alpha L} - 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\dfrac{\pi n x}{L}}{L^2\alpha^2+n^2\pi^2}\,e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau} \tag{3.20}$$

и

$$L^{-1}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}{p^2\operatorname{sh}L\sqrt{\alpha^2+p}}\right]=$$

$$=\tau\frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)}{\operatorname{sh}\alpha L}-2\pi L^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi x}{L}\left[1-e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]}{(L^2\alpha^2+n^2\pi^2)^2}. \quad (3.21)$$

Вспоминая также, что

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)=1, \quad L^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right)=\tau \quad (3.22)$$

и собирая выражения (3.18)—(3.21), получим, обращая равенство (3.10):

$$H(x,t)=(H_1-H_0)\,e^{\nu x}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha L}+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{n\pi x}{L}}{L^2\alpha^2+n^2\pi^2}e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]+$$

$$+(H_2-H_0-i_2L)e^{-\alpha(L-x)}\left[\frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)}{\operatorname{sh}\alpha L}-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi x}{L}}{L^2\alpha^2+n^2\pi^2}e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]-$$

$$-2\alpha i_2 e^{\nu x}\left[\tau\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha L}+2\pi L^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{n\pi x}{L}\left[1-e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]}{(L^2\alpha^2+n^2\pi^2)^2}\right]-$$

$$-2\alpha i_2 e^{-\alpha(L-x)}\left[\tau\frac{\operatorname{sh}\alpha(L-x)}{\operatorname{sh}\alpha L}-2\pi L^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{\pi n x}{L}\left[1-e^{-\left(\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]}{(L^2\alpha^2+n^2\pi^2)^2}\right]+$$

$$+H_0+i_2x-2\alpha i_2\tau. \quad (3.23)$$

Можно несколько преобразовать это выражение, представив его в виде

$$H(x,t)=\left(H_1-H_0-\frac{i_1i_2\tau}{h}\right)\frac{e^{-\frac{i_1x}{h}}-1}{2\operatorname{sh}\frac{i_1L}{2h}}+$$

$$+\left(H_2-H_0-i_2L-\frac{i_1i_2\tau}{h}\right)\frac{1-e^{\frac{i_1(L-x)}{h}}}{2\operatorname{sh}\frac{i_1L}{2h}}+$$

$$+2\pi(H_1-H_0)e^{-\frac{i_1x}{2h}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{n\pi x}{L}}{L^2\frac{i_1^2}{4h^2}+n^2\pi^2}e^{-\left(\frac{i_1^2}{4h^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}-$$

$$-2\pi(H_2-H_0-i_2L)\,e^{\frac{i_2(L-x)}{2h}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi x}{L}}{\frac{L^2i_1^2}{4h^2}+n^2\pi^2}\,e^{-\left(\frac{i_1^2}{4h^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}-$$

$$-\frac{2\pi L^2 i_1 i_2}{h}\,e^{-\frac{i_1 x}{2h}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{L^2i_1^2}{4h^2}+n^2\pi^2\right)^2}\left[1-e^{-\left(\frac{i_1^2}{4h^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]-$$

$$-\frac{2\pi L^2 i_1 i_2}{h}\,e^{-\frac{i_1(L-x)}{2h}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi x}{L}\left[1-e^{-\left(\frac{i_1^2}{4h^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\tau}\right]}{\left(\frac{L^2i_1^2}{4h^2}+n^2\pi^2\right)^2}+$$

$$+H_0+i_2x-2\alpha i_2\tau. \quad (3.24)$$

Введем некоторые упрощения в полученную формулу для малых значений величин i_1, i_2 и большого значения L. Для малых значений времени τ можно дать другое представление решения нашей задачи. Для этого мы вернемся к выражению (3.10) для функции $\overline{H}$ и представим входящие в него функции

$$\frac{\operatorname{sh}(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh}L\sqrt{\alpha^2+p}},\qquad \frac{\operatorname{sh}x\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh}L\sqrt{\alpha^2+p}}$$

в виде следующих рядов:

$$\frac{\operatorname{sh}x\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh}L\sqrt{\alpha^2+p}}=\frac{e^{x\sqrt{\alpha^2+p}}(1-e^{-2x\sqrt{\alpha^2+p}})}{e^{L\sqrt{\alpha^2+p}}(1-e^{-2L\sqrt{\alpha^2+p}})}=$$

$$=e^{-(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}[1+e^{-2L\sqrt{\alpha^2+p}}+\ldots-e^{-2x\sqrt{\alpha^2+p}}-e^{-2(x+L)\sqrt{\alpha^2+p}}+\ldots]=$$

$$=e^{-(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}-e^{-(L+x)\sqrt{\alpha^2+p}}+e^{-(3L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}-e^{-(3L+x)\sqrt{\alpha^2+p}}+\ldots,$$

$$\frac{\operatorname{sh}(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}{\operatorname{sh}L\sqrt{\alpha^2+p}}=e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}}\,\frac{1-e^{-2(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}}{1-e^{-2L\sqrt{\alpha^2+p}}}=$$

$$=e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}}(1+e^{-2L\sqrt{\alpha^2+p}}+\ldots-e^{-2(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}-$$

$$-e^{-2(2L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}-\ldots)=e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}}+e^{-(2L+x)\sqrt{\alpha^2+p}}-e^{-2L\sqrt{\alpha^2+p}}-\ldots$$

Сохраняя лишь первые члены этих рядов, перепишем равенство (3.10) в виде

$$\overline{H}(x,p)\approx e^{\alpha x}\left(\frac{H_1-H_0}{p}+\frac{2\alpha i_2}{p^2}\right)e^{-x\sqrt{\alpha^2+p}}+$$

$$+e^{-\alpha(L-x)}\left(\frac{H_2-H_0-i_2L}{p}+\frac{2\alpha i_2}{p^2}\right)e^{-(L-x)\sqrt{\alpha^2+p}}+\frac{H_0+i_2x}{p}-\frac{2\alpha i_2}{p^2}.$$

Окончательно получим для малых τ:

$$H(x, t) \approx \frac{e^{2\alpha x}}{2}\left\{\left(H_1 - H_0 - \frac{i_1 i_2}{h}\tau + x i_2\right)(1 - \Phi(\xi))\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(H_1 - H_0 - \frac{i_1 i_2}{h}\tau - i_2 x\right)(1 - \Phi(\eta)) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[H_2 - H_0 - i_2 L - \frac{i_1 i_2}{h}\tau + i_2(L - x)\right](1 - \Phi(\tilde{\xi})) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[H_2 - H_0 - i_2 L - \frac{i_1 i_2}{h}\tau - i_2(L - x)\right](1 - \Phi(\tilde{\eta}))\, e^{-2\alpha(L-x)} +$$
$$+ H_0 + i_2 x + \frac{i_1 i_2}{h}\tau,$$

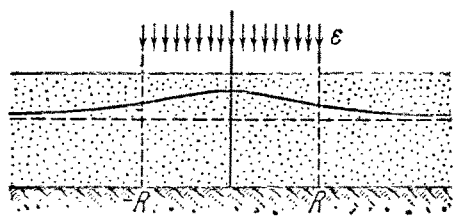
где

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau},$$
$$\tilde{\xi} = \frac{L - x}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}, \quad \tilde{\eta} = \frac{L - x}{2\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}.$$

Б. ДИНАМИКА ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ПОЛИВАХ

§ 4. Полосообразный полив при непроницаемом водоупоре. Поверхность грунтовых вод в области, которая подвергается искусственному орошению, имеет сложный вид, состоя из бугров и впадин, деформирующихся с течением времени.

В настоящей главе рассматриваются некоторые задачи о неустановившихся движениях грунтовых вод, обусловленных поливами. В качестве первых основных схем мы можем взять случай полосообразного полива и последующую стадию — выравнивание бугра грунтовых вод.



Фиг. 390.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ поверхность грунтовых вод является горизонтальной плоскостью. В дальнейшем над полосой $-R < x < R$ подается постоянный расход $\varepsilon \frac{м^3}{м^2\, сутки}$. Это соответствует равномерному поливу или выпадению дождя на полосообразной площади (фиг. 390). Спрашивается, как будет происходить подъем грунтовых вод в зависимости от времени в различных точках рассматриваемой области [2].

Мы все время рассматриваем задачу в «гидравлической» постановке, т. е. поток считаем осредненным по высоте.

Тогда наша задача свелется к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{w}{m}, \tag{4.1}$$

где

$$a^2 = \frac{kh}{m}.$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, h — средняя глубина потока (можно принять ее равной начальной глубине), m — активная пористость грунта. H означает напор, связанный с потенциалом скорости φ соотношением

$$\varphi = -kH = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right).$$

Начальное условие мы примем в виде

$$H(x, 0) = H_0,$$

где H_0 — постоянный первоначальный уровень грунтовых вод.

Положим $w = \varepsilon$ при $|x| < R$, $w = 0$ при $|x| > R$. Введем новую переменную

$$H - H_0 = u. \tag{4.2}$$

Тогда для u будем иметь нулевое начальное значение

$$u(x, 0) = 0. \tag{4.3}$$

Решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{4.4}$$

при начальном условии $u = 0$ имеет вид [14]

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}} f(\zeta, \tau)\, d\zeta. \tag{4.5}$$

Подставив в (4.5) вместо $f(\zeta, \tau)$ выражение $\frac{\varepsilon}{m}$ для $|\zeta| < R$ и нуль для $|\zeta| > R$, получим:

$$H(x, t) = \frac{\varepsilon}{2ma\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\zeta + H_0.$$

Подстановка

$$\frac{\zeta - x}{2a\sqrt{t-\tau}} = \lambda$$

дает:

$$u = \frac{\varepsilon}{m\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{r_1}^{r_2} e^{-\lambda^2} d\lambda \left(r_1 = -\frac{R+x}{2a\sqrt{t-\tau}},\quad r_2 = \frac{R-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \tag{4.6}$$

Пользуясь обозначением функции вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda, \tag{4.7}$$

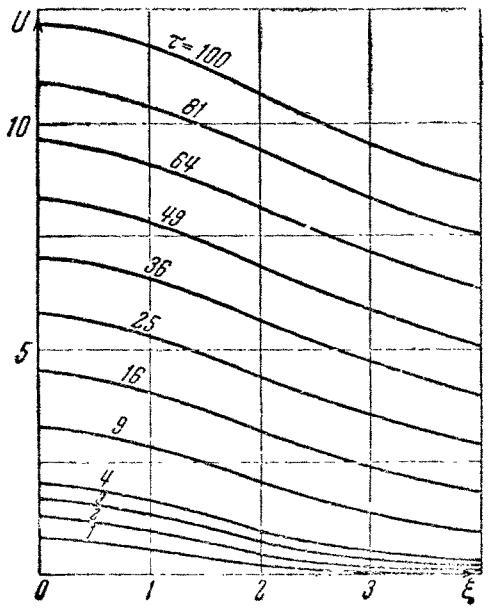
перепишем выражение для u так:

$$u(x, t) = \frac{\varepsilon}{2m} \int_0^t \left[\Phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) + \Phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t-\tau}} \right) \right] d\tau. \tag{4.8}$$

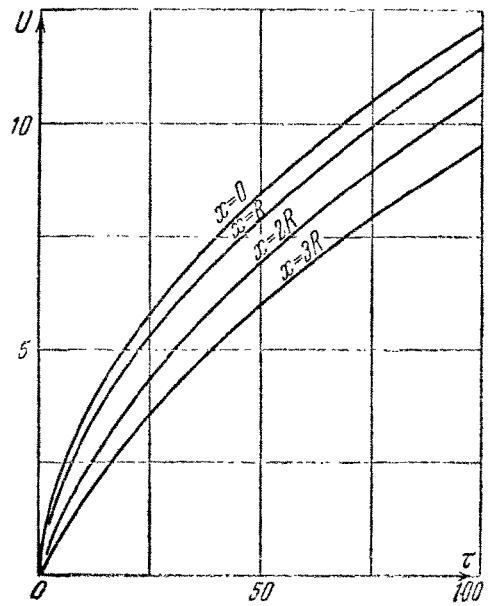
Проинтегрируем по частям каждое слагаемое в формуле (4.8), причем примем во внимание нечетность функции $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x). \tag{4.9}$$

Для u получим разные выражения для участков $|x| < R$ и $|x| > R$.



Фиг. 391.



Фиг. 392.

Напишем окончательный результат в безразмерных величинах, полагая

$$U = \frac{hk}{R^2\varepsilon} u = \frac{hk}{R^2\varepsilon}(H - H_0), \quad \xi = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{a^2 t}{R^2} = \frac{hk}{mR^2} t. \tag{4.10}$$

Для $|\xi| < 1$ будем иметь:

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\tau}\Phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) + \frac{(1-\xi)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(1-\xi)^2}{4\tau}} - \frac{(1-\xi)^2}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\tau}\Phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) + \frac{(1+\xi)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}} - \frac{(1+\xi)^2}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}; \tag{4.11}$$

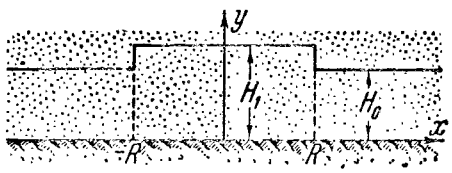
для $|\xi|>1$

$$U=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\tau\Phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)+\frac{(1+\xi)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(1+\xi)^2}{4\tau}}-\frac{(1+\xi)^2}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\tau\Phi\left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}}\right)-\frac{(\xi+1)\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(1-\xi)^2}{4\tau}}+\frac{(\xi-1)^2}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\xi-1}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]\right\}. \quad (4.12)$$

На фиг. 391 даны графики зависимости U от ξ при различных значениях τ. На фиг. 392 дана зависимость U от τ при $\xi=0, 1, 2, 3$. Были рассмотрены [11] случаи, когда полив имеет место в течение конечного промежутка времени T, после чего полив прекращается, а через промежуток времени T_1 опять начинается и т. д.

§ 5. Растекание бугра грунтовых вод. Предположим теперь, что полив прекращен; образовавшийся бугор грунтовых вод будет растекаться. Спрашивается, с какой скоростью будет происходить это растекание. Для решения этой задачи нужно знать начальную форму бугра.



Фиг. 393.

Прежде всего мы рассмотрим случай прямоугольного бугра. Такую форму бугра можно представить себе образованной при совершенном заполнении грунта водой в средней части поливаемого участка (фиг. 393). Нам нужно найти решение уравнения (4.1) при начальном условии

$$H(x, 0)=H_0 \text{ при } |x|>R, \quad H(x, 0)=H_1 \text{ при } |x|<R. \quad (5.1)$$

Граничным условием у нас будет условие конечности H на ∞.

Как известно, решение однородного уравнения (4.4) (при $f(x, t)=0$), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0)=f(x),$$

имеет вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}}f(\zeta)\,d\zeta. \quad (5.2)$$

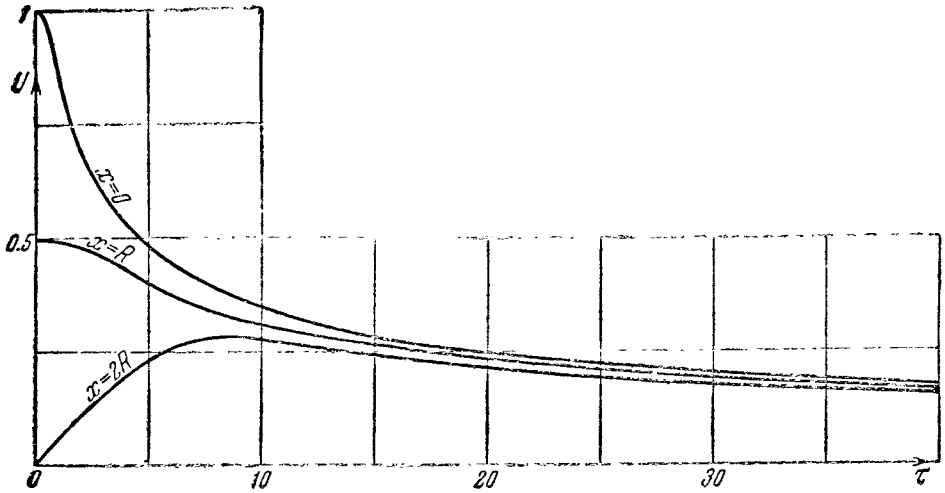
В нашем случае, принимая $u=H-H_0$, имеем, что $u=H_1-H_0$ при $|x|<R$, $u=0$ при $|x|>R$. Поэтому

$$H(x, t)=H_0+\frac{H_1-H_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-R}^{R}e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\zeta.$$

С помощью функции вероятности (4.7) это решение представляется в виде

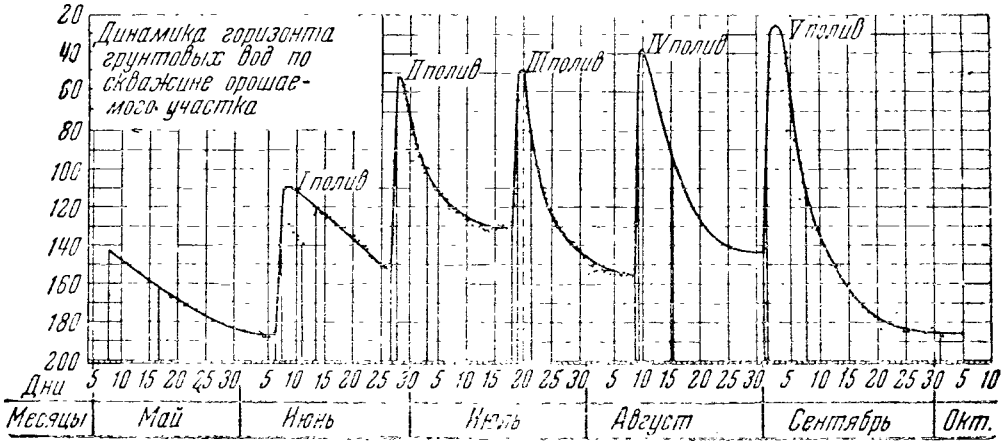
$$H(x, t)=H_0+\frac{H_1-H_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \quad (5.3)$$

На фиг. 394 даны графики зависимости высот грунтовых вод от времени для середины бугра и для значений $x = R$, $2R$. Мы видим, что уровень воды в точке $x = 0$ сначала круто падает, затем стремится к невозмущенному уровню, причем это происходит чрезвычайно медленно.



Фиг. 394.

На фиг. 395 представлены кривые подъема грунтовых вод и их дальнейшего опускания для натурных наблюдений одного из участков [3] (по оси ординат отложены глубины в сантиметрах, отсчитываемые от



Фиг. 395.

поверхности земли). Сравнивая с ними теоретические кривые графиков фиг. 394, мы видим, что общий характер тех и других одинаков.

Отметим, что наблюдения над уровнем грунтовых вод во время полива и в следующий за ним период могут дать возможность вы-

числить важную численную характеристику грунта — величину

$$a^2 = \frac{kh}{m}.$$

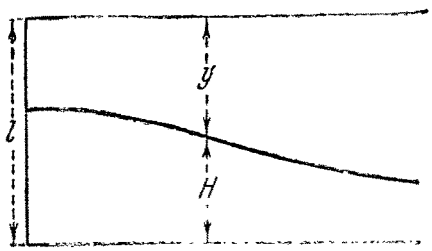
Эта величина учитывает суммарно водопроницаемость грунта и глубину слоя грунтовых вод.

Заметим еще, что можно было бы рассмотреть другие начальные формы бугра грунтовых вод. Например, взяв $H(x, 0) = Ae^{-\alpha x^2}$, получим решение в виде

$$H(x, t) = \frac{A}{(1+4\alpha a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{\alpha x^2}{1+4\alpha a^2 t}}.$$

Но в качестве первого приближения можно использовать прямоугольный бугор, эквивалентный (в смысле площади) данному бугру.

§ 6. Учет испарения и транспирации воды растениями. В летнее время большую роль в режиме грунтовых вод играет испарение воды, причем оно может происходить или непосредственно с поверхности грунтовых вод, или через посредство растений, которые впитывают из почвы влагу, испаряющуюся затем с поверхности листьев (транспирация).



Фиг. 396.

На основании ряда наблюдений на орошаемых участках М. М. Крыловым [3] выведена зависимость интенсивности испарения и транспирации от глубины залегания свободной поверхности грунтовых вод. Эта зависимость оказалась близкой к линейной.

Обозначив интенсивность испарения через $c\left(\frac{м^3}{м^2\ сутки}\right)$, можем написать эту зависимость в виде

$$c = \beta - \alpha y,$$

где y — ордината, отсчитываемая от поверхности земли (фиг. 396).

Полагая

$$y + H = l,$$

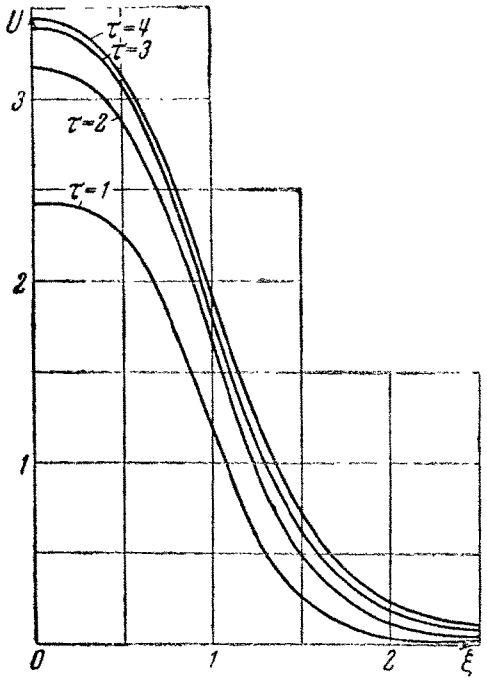
получим:

$$c = \alpha H + \beta - \alpha l.$$

Обращаясь теперь к уравнению (4.1), заметим, что в случае испарения нужно считать вертикальный приток отрицательным, т. е. следует в уравнение (4.1) ввести величину (ε — интенсивность инфильтрации)

$$\frac{w}{m} = -\frac{c}{m} + \frac{\varepsilon}{m} = -b^2(H - H^*) + \frac{\varepsilon}{m}. \qquad (6.1)$$

Здесь b^2 — новая постоянная, введенная нами вместо $\frac{\alpha}{m}$, $H^* = l - \frac{\beta}{\alpha}$.



Фиг. 397.

Вместо (4.1) получим теперь уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - b^2 (H - H^*) + \frac{\varepsilon}{m}. \tag{6.2}$$

Это же самое уравнение, лишь с другими значениями постоянных b и H^*, получается при учете вертикальной скорости, которая имеет место на границе со слабо проницаемым водоупором. Приведем решение уравнения (6.2) для случая полосообразного дождя (или полива) [4].

Выпишем здесь без вывода соответствующие формулы, введя безразмерные величины

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{4b^2 m}{\varepsilon}(H - H^*), \quad \xi = \frac{x}{R}, \\ \tau^2 &= b^2 t, \quad \alpha = \frac{bR}{2a}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Для $U(\xi, \tau)$ будем иметь при полосообразном поливе с учетом испарения (или слабого просачивания в нижележащий грунт) при $|\xi| < 1$:

$$U = 4 - 2e^{-\tau^2}\left[\Phi\left(\frac{\alpha(1+\xi)}{\tau}\right) + \Phi\left(\frac{\alpha(1-\xi)}{\tau}\right)\right] -$$

$$- e^{-2\alpha(1+\xi)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(1+\xi)}{\tau} - \tau\right)\right] - e^{-2\alpha(1-\xi)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(1-\xi)}{\tau} - \tau\right)\right] -$$

$$- e^{2\alpha(1+\xi)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(1+\xi)}{\tau} + \tau\right)\right] - e^{2\alpha(1-\xi)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(1-\xi)}{\tau} + \tau\right)\right]. \tag{6.4}$$

Для $|\xi| > 1$

$$U = -2e^{-\tau^2}\left[\Phi\left(\frac{\alpha(\xi+1)}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha(\xi-1)}{\tau}\right)\right] -$$

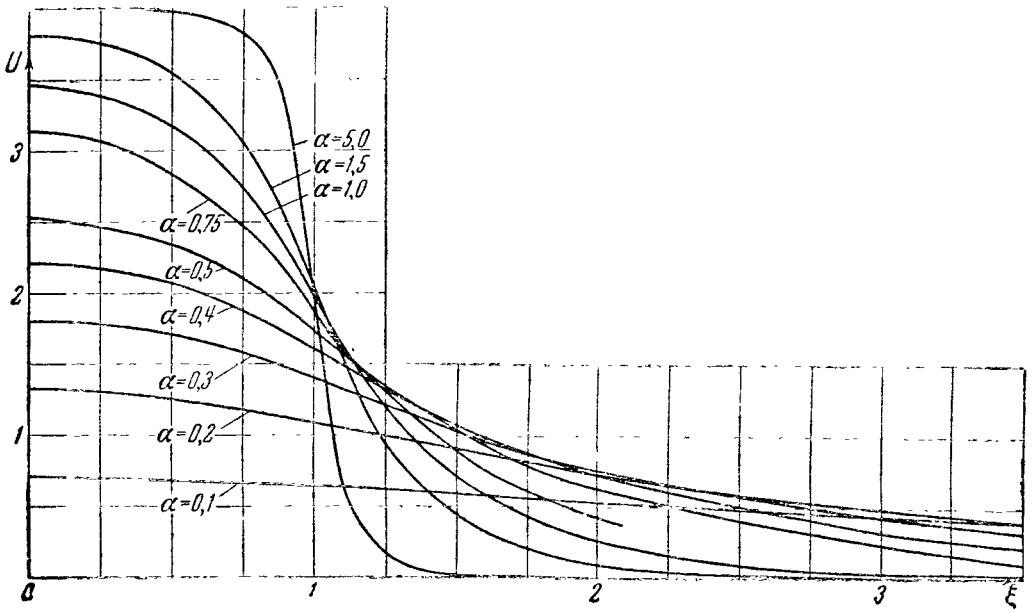
$$- e^{-2\alpha(\xi+1)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(\xi+1)}{\tau} - \tau\right)\right] - e^{2\alpha(\xi+1)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(\xi+1)}{\tau} + \tau\right)\right] +$$

$$+ e^{-2\alpha(\xi-1)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(\xi-1)}{\tau} - \tau\right)\right] + e^{2\alpha(\xi-1)}\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha(\xi-1)}{\tau} + \tau\right)\right]. \tag{6.5}$$

В рассматриваемом случае линии свободной поверхности не будут неограниченно подниматься вверх, как это имело место в случае отсутствия испарения; они будут стремиться к предельному положению. Именно, при $t \to \infty$ функция U внутри и вне участка $|\xi| < 1$ стремится соответственно к

$$4\,[1 - e^{-2\alpha}\,\mathrm{ch}\,2\alpha\xi] \quad \text{и} \quad 4\,\mathrm{sh}\,2\alpha e^{-2\alpha\xi}. \tag{6.6}$$

На фиг. 397 даны графики зависимости U от ξ при $\alpha = 1$ для нескольких моментов времени: $\tau = 1, 2, 3, 4$. На фиг. 398 показаны предельные положения свободной поверхности для ряда значений параметра α.



Фиг. 398.

§ 7. Растекание бугра грунтовых вод при наличии испарения [2]. В этом случае задача сводится к интегрированию уравнения (6.2) при начальном условии (5.1), причем считаем $\varepsilon = 0$. Подстановка

$$H - H^* = e^{-\nu^2 t} U \tag{7.1}$$

приводит уравнение (6.2) к простейшему уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Для функции U начальные условия таковы:

$$\left.\begin{aligned} U(x,\ 0) &= H_1 - H^* = U_1 \quad \text{при} \quad |x| < R, \\ U(x,\ 0) &= H_0 - H^* = U_0 \quad \text{при} \quad |x| > R. \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Для определения $U(x, t)$ можем воспользоваться формулой (5.3), заменив в ней соответственно H_0, H_1 на U_0, U_1. Получим:

$$U(x, t) = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Возвращаясь к $H(x, t)$, будем иметь:

$$H(x, t) = H^* + e^{-b^2 t}\left\{H_0 - H^* + \right.$$
$$\left. + \frac{H_1 - H_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{R-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{R+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\right\}. \quad (7.3)$$

Мы видим, что при $t \to \infty$ уровень грунтовых вод стремится к постоянному значению H^*.

В. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ. ДВИЖЕНИЯ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 8. Неустановившиеся движения при коэффициенте фильтрации, слабо меняющемся с высотой. Некоторые задачи об установившихся движениях в неоднородных грунтах мы рассматривали в главе X. Там же у нас была приведена функция, данная Н. К. Гиринским [5],

$$\Phi(x, y) = \int_0^h (z - h)\, k(z)\, dz. \quad (8.1)$$

В ней h — напор, который мы можем рассматривать как функцию от x, y и t; k — коэффициент фильтрации, зависящий от высоты. При этом считается, что k мало меняется с высотой. Для безнапорного движения h принимается за ординату свободной поверхности.

В случае неустановившегося движения можно составить уравнение движения следующим образом.

Обозначим через m порозность грунта, которую будем считать постоянной во времени. Тогда, выражая условие, что изменение расхода по координатам компенсируется изменением по времени величины mh, можем написать:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial (mh)}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Далее имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi'(h)\frac{\partial h}{\partial t}. \quad (8.3)$$

Исключая $\frac{\partial h}{\partial t}$ из (8.2) и (8.3), получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\Phi'(h)}{m}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right]. \tag{8.4}$$

Если считать, что величина

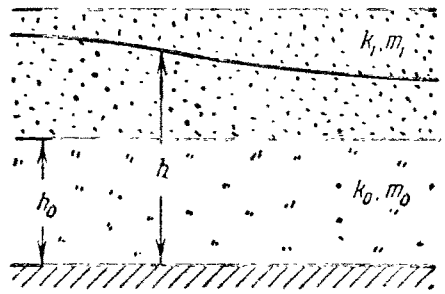
$$\frac{1}{m}\Phi'(h) = -\frac{1}{m}\int_0^h k(z)\,dz$$

мало изменяется и заменить ее постоянным значением, полагая

$$-\frac{1}{m}\Phi'(h) \approx \frac{1}{m}\int_0^h k(z)\,dz = a^2, \tag{8.5}$$

то получим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right). \tag{8.6}$$



Фиг. 399.

Возьмем в качестве примера двуслойный грунт, в нижнем слое которого глубины h_0 коэффициент фильтрации равен k_0, активная порозность m_0, в верхнем — соответствующие величины обозначены через k_1, m_1 (фиг. 399). Свободную поверхность будем считать находящейся в верхнем слое грунта.

Тогда будем иметь, обозначая через c отношение коэффициентов фильтрации

$$\frac{k_0}{k_1} = c,$$

следующее выражение для Φ в верхнем слое:

$$\Phi = k_0\int_0^{h_0}(z-h)\,dz + k_1\int_{h_0}^{h}(z-h)\,dz =$$

$$= -\frac{k_1}{2}\{[h+(c-1)h_0]^2 + c(c-1)h_0^2\}. \tag{8.7}$$

При этом в качестве a^2 можно принять величину

$$a^2 = \frac{k_0 h_0 + k_1 \bar{h}_1}{m_1}, \tag{8.8}$$

где $\bar{h}_1$ есть среднее значение $h - h_0$.

В случае фильтрации из канала с вертикальной стенкой, принимая

$$h(x, 0) = H_2, \quad h(0, t) = H_1$$

и считая h ограниченным при $x=\infty$, напишем начальное и граничное условия для Φ:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,\ 0)&=-\frac{1}{2}k_1\{[H_2+(c-1)h_0]^2+c(c-1)h_0^2\}=\Phi_2,\\ \Phi(0,\ t)&=-\frac{1}{2}k_1\{[H_1+(c-1)h_0]^2+c(c-1)h_0^2\}=\Phi_1.\end{aligned}\right\}\quad(8.9)$$

Для $\Phi(x,\ t)$ получим известное решение

$$\Phi(x,\ t)=(\Phi_2-\Phi_1)\,\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi_1,\qquad(8.10)$$

где

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\lambda^2}\,d\lambda.\qquad(8.11)$$

При этом

$$\Phi_2-\Phi_1=-\frac{1}{2}k_1\left\{\frac{1}{2}(H_1+H_2)+(c-1)h_0\right\}(H_2-H_1).\qquad(8.12)$$

Выражение расхода в сечении x имеет вид

$$q(x,\ t)=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

При $x=0$ получаем:

$$q(0,\ t)=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{a\sqrt{\pi t}}=-\frac{k_1(H_2-H_1)}{a\sqrt{\pi t}}\left[\frac{H_1+H_2}{2}+(c-1)h_0\right].\qquad(8.13)$$

Для однородного грунта, полагая $k_0=k_1$, $h_0+\bar{h}_1=\bar{h}$, имеем для расхода, который мы обозначим через $q_0(0,\ t)$, выражение

$$q_0(0,\ t)=-\frac{k_1(H_2-H_1)(H_2+H_1)}{2a_0\sqrt{\pi t}},\qquad(8.14)$$

где

$$a_0^2=\frac{k_1\bar{h}}{m_1}.$$

Составив отношение расходов, получим:

$$\frac{q}{q_0}=\left[1+(c-1)\frac{2h_0}{H_1+H_2}\right]\sqrt{\frac{h_0+\bar{h}_1}{ch_0+\bar{h}_1}}\quad\left(c=\frac{k_0}{k_1}\right).\qquad(8.15)$$

Заметим, что в уравнение теплопроводности, а следовательно, и в решение этого уравнения время входит со множителем a^2. Для однородного грунта мы обозначили этот множитель через a_0^2. Составив отношение

$$\frac{a^2}{a_0^2}=1+(c-1)\frac{h_0}{\bar{h}_1},$$

мы видим, что при $c < 1$ имеет место неравенство

$$a^2 < a_0^2,$$

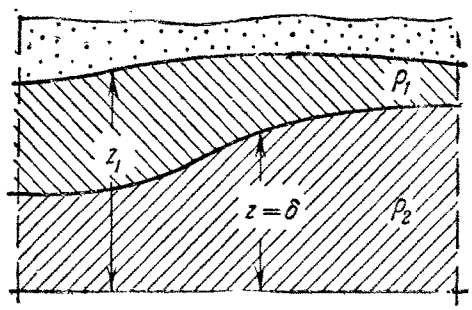
а при $c > 1$ — обратное неравенство

$$a^2 > a_0^2.$$

Это показывает, что в первом случае длительность процесса (при прочих равных условиях) будет для неоднородного грунта более медленной, чем для однородного (такого, как верхний грунт), во втором случае будем иметь обратное явление.

Чтобы найти форму свободной поверхности в различные моменты времени, напишем выражение для Ф, подставив в него правую часть (8.7).

§ 9. Перемещение поверхности раздела между двумя жидкостями разной плотности. Мы уже говорили о существующих в природе движениях двух жидкостей различной плотности, в частности пресной и соленой воды (глава VIII). Здесь мы рассмотрим вопрос об уравнениях, позволяющих определять положение линии раздела таких жидкостей в различные моменты времени, при обычном условии, которое мы ставим все время — слабой изменяемости этой поверхности.



Фиг. 400.

Пусть имеем две жидкости: верхнюю, для которой все определяющие ее величины обозначим индексом 1, и нижнюю, с большей плотностью, которой соответствует индекс 2 (фиг. 400). Для потенциалов скорости будем иметь соответственно:

$$\varphi_1 = -k_1\left(\frac{p_1}{\rho_1 g} + z\right), \tag{9.1}$$

$$\varphi_2 = -k_2\left(\frac{p_2}{\rho_2 g} + z\right). \tag{9.2}$$

Условие непрерывности давления на линии раздела ($p_1 = p_2$) дает:

$$\rho_1\left(\frac{\varphi_1}{k_1} + z\right) = \rho_2\left(\frac{\varphi_2}{k_2} + z\right),$$

откуда получаем приближенное уравнение линии раздела

$$z = \alpha_1\varphi_1(x, y, h, t) - \alpha_2\varphi_2(x, y, h, t) = \delta(x, y, t), \tag{9.3}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{k_1(\rho_2 - \rho_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{k_2(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Дифференцируя это уравнение вдоль линии раздела и подставляя в него один раз скорости u_1, v_1, w_1, другой раз u_2, v_2, w_2, получим два уравнения на поверхности раздела:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\partial\delta}{\partial x}u_1+\frac{\partial\delta}{\partial y}v_1-w_1=0,\\ m\frac{\partial\delta}{\partial t}+\frac{\partial\delta}{\partial x}u_2+\frac{\partial\delta}{\partial y}v_2-w_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Предположим, как и раньше, что горизонтальные скорости не зависят от z. Тогда из уравнения неразрывности получаем для нижнего грунта:

$$w_2=-z\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+w_{20}=-\delta\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)+w_{20}, \tag{9.5}$$

где w_{20} — скорость при $z=0$, и для верхнего грунта

$$w_1=-(z-\delta)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+w_{10}. \tag{9.6}$$

Здесь z — высота свободной поверхности, на которой мы принимаем:

$$z=-\frac{\varphi_1}{k}.$$

Поэтому для w_1 можно еще написать:

$$w_1=\left(\frac{\varphi_1}{k}+\delta\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)+w_{10}. \tag{9.7}$$

Величина w_{10} — вертикальная скорость на свободной поверхности, происходящая от действия осадков, испарения и т. д.

Подставляя полученные выражения для w_1 и w_2 в уравнения (9.4), получим систему двух нелинейных уравнений в частных производных относительно функций φ_1 и φ_2 (величина δ может быть исключена из этих уравнений с помощью уравнения $\delta=\alpha_1\varphi_1-\alpha_2\varphi_2$).

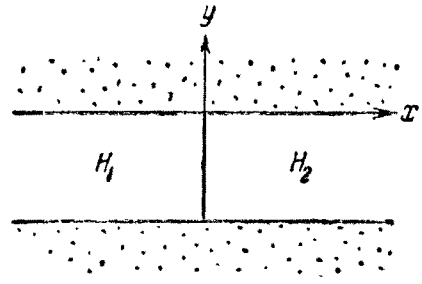
Возможна линеаризация этих уравнений, на чем мы не останавливаемся. Нелинейная однородная система может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для случая перемещения языка нижней жидкости в напорном пласте [6].

Была рассмотрена [7] задача о перемещении поверхности раздела между пресной и соленой водой под флютбетом, причем учитывались линейные инерционные члены, вследствие чего задача была сведена к телеграфному уравнению. На основании изложенного в главе XII не имеет смысла учитывать эти члены, а тогда вместо телеграфного уравнения получится более простое уравнение теплопроводности. Задачу о двухжидкостной системе рассматривал также Н. К. Гиринский [9].

Г. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 10. Пример пространственной задачи [4]. Пусть имеем канал с вертикальными стенками, основание которого непроницаемо. В начальный момент времени имеется постоянный уровень грунтовых вод высоты H_0. Канал внезапно наполняется водой так, что в одной части его, при $x<0$, получается уровень воды H_1, в другой, при $x>0$, уровень H_2, которые затем поддерживаются постоянными (фиг. 401 дает вид сверху). Требуется найти уравнение свободной поверхности для верхней полуплоскости

$$z=H(x,\ y,\ t).$$



Фиг. 401.

Искомая функция H удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)\quad\left(a^2=\frac{k\bar{h}}{m}\right). \tag{10.1}$$

Решение уравнения теплопроводности (10.1) при начальном условии

$$H(x,\ y,\ 0)=f(x,\ y) \tag{10.2}$$

и граничном условии

$$H(x,\ 0,\ t)=F(x,\ t) \tag{10.3}$$

имеет вид [16]

$$H(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{0}^{\infty}f(\xi,\ \eta)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\frac{y}{4a^2\pi}\int_{0}^{t}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\xi,\tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi. \tag{10.4}$$

В нашем случае

$$f(x,\ y)=H_0,\quad F(x,\ t)=\begin{cases}H_1 & \text{при}\quad x<0,\\ H_2 & \text{при}\quad x>0.\end{cases} \tag{10.5}$$

Так как у нас граничная функция F не зависит от времени, то предварительно преобразуем второй интеграл, выполнив в нем интегрирование по τ. Получим:

$$H(x,y,t)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{0}^{\infty}f(\xi,\ \eta)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta+$$

$$+\frac{y}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{F(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{10.6}$$

Подставим теперь в эту формулу выражения (10.5) и примем во внимание равенство

$$\frac{1}{4a^2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4a^2t}}\right]d\eta=\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Получим:

$$H(x,\ y,\ t)=H_0\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)+\frac{H_1y}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2t}}}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi+$$

$$+\frac{H_2y}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4a^2t}}}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi.$$

Подстановка $\xi-x=\eta$ дает:

$$H(x,\ y,\ t)=H_0\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)+\frac{H_1y}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2}+$$

$$+\frac{H_2y}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2},\qquad(10.7)$$

что можно переписать еще так:

$$H(x,\ y,\ t)=H_0\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)+$$

$$+\frac{(H_1+H_2)\,y}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2}-\frac{(H_1-H_2)\,y}{\pi}\int_0^{x}e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2}.\qquad(10.8)$$

Интеграл с постоянными пределами, входящий в последнюю формулу, приводится к функции ошибок, а именно,

$$\frac{2y}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2}=1-\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right).\qquad(10.9)$$

Для вывода равенства (10.9) заметим, что

$$\frac{h}{u^2+h^2}=\int_0^{\infty}e^{-h\xi}\cos u\xi\,d\xi,\qquad\int_0^{\infty}e^{-mu^2}\cos u\xi\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m}}e^{-\frac{\xi^2}{4m}}.$$

Поэтому можно произвести такие преобразования интеграла:

$$J=\frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-m(u^2+h^2)}}{u^2+h^2}\,du=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}e^{-m^2h^2-h\xi-mu^2}\cos u\xi\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{\xi}{2\sqrt{m}}+h\sqrt{m}\right)}d\xi.$$

Подстановка $\frac{\xi}{2\sqrt{m}}+h\sqrt{m}=\lambda$ дает $J=1-\Phi(h\sqrt{m})$.

Использовав (10.9), приведем выражение (10.8) к виду

$$H(x, y, t)=H_0\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)+\frac{H_1+H_2}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)\right]-$$

$$-\frac{(H_1-H_2)\,y}{\pi}\int_0^x e^{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2}. \qquad (10.10)$$

Из (10.10) следует, что напорная функция H состоит из трех слагаемых: первое получается от первоначального уровня грунтовых вод, второе соответствует одномерной задаче с постоянным напором $\frac{1}{2}(H_1+H_2)$, а третье, зависящее от x, определяет асимметрию течения вследствие разности напоров в верхнем и нижнем бьефах.

При $t=\infty$ получаем установившееся движение, для которого уравнение свободной поверхности имеет вид

$$z=\frac{H_1+H_2}{2}-\frac{H_1-H_2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=H_2+\frac{H_1-H_2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}. \qquad (10.11)$$

Это — уравнение винтовой поверхности: она образована из прямых — лучей, исходящих из различных точек оси z и лежащих в горизонтальных плоскостях, и имеет форму веера, развернутого на 180°.

Вдоль оси y (при $x=0$) получаем $z=\frac{1}{2}(H_1+H_2)$, при $y=0$, $x>0$ получаем $z=H_2$, для $y=0$, $x<0$ имеем $z=H_1$.

Теперь мы рассмотрим ту же задачу в предположении, что область движения подстилается слабопроницаемым грунтом толщины h_0 с коэффициентом фильтрации k_0 (см. § 8 главы IX). Тогда можно принять уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)-b^2(H-H_0),\quad b^2=\frac{k_0}{mh_0}. \qquad (10.12)$$

Положим, считая H_0 начальной высотой уровня воды в канале и уровня грунтовой воды:

$$H-H_0=e^{-b^2t}u. \qquad (10.13)$$

Требуется определить движение в полуплоскости $y>0$, если дано, что при $t=0$ $H=H_0$, а при $t>0$

$$\left.\begin{aligned} H&=H_1 \quad \text{при} \quad x<0,\quad y=0,\\ H&=H_2 \quad \text{при} \quad x>0,\quad y=0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.14)$$

Для функции u эти условия принимают вид

$$\left.\begin{aligned} u&=0 && \text{при} \quad t=0,\\ u&=(H_1-H_0)\,e^{b^2t} && \text{при} \quad x<0,\quad y=0,\\ u&=(H_2-H_0)\,e^{b^2t} && \text{при} \quad x>0,\quad y=0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.15)$$

Поэтому в формуле (10.4) надо подставить

$$f(\xi, \eta) = 0$$

и

$$F(\xi, \tau) = \begin{cases} (H_1 - H_0)\, e^{b^2\tau} & (\xi < 0), \\ (H_2 - H_0)\, e^{b^2\tau} & (\xi > 0). \end{cases}$$

Тогда получаем:

$$u = (H - H_0)\, e^{b^2 t} = \frac{y\,(H_1 - H_0)}{4a^2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^0 \frac{e^{b^2\tau - \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau\, d\xi + \\ + \frac{(H_2 - H_0)\, y}{4a^2\pi} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{b^2\tau - \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau\, d\xi. \qquad (10.16)$$

Отсюда

$$H = H_0 + \frac{(H_1 - H_0)\, y}{4a^2\pi} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-b^2(t-\tau) - \frac{(x+\xi)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau\, d\xi + \\ + \frac{(H_2 - H_0)\, y}{4a^2\pi} \int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-b^2(t-\tau) - \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau\, d\xi. \qquad (10.17)$$

Введем подстановки

$$\frac{(x+\xi)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)} = v, \qquad \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{4a^2(t-\tau)} = w \qquad (10.18)$$

соответственно для первого и второго из интегралов формулы (10.17). Получим, переставляя пределы:

$$H = H_0 + \frac{b^2(H_1 - H_0)\, y}{4a^2\pi} \int_0^\infty \int_{v_1}^\infty e^{-v - \frac{\alpha}{v}}\, \frac{dv\, d\xi}{\alpha} + \\ + \frac{b^2(H_2 - H_0)\, y}{4a^2\pi} \int_0^\infty \int_{w_1}^\infty e^{-w - \frac{\beta}{w}}\, \frac{dw\, d\xi}{\beta}. \qquad (10.19)$$

Здесь введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{(\xi+x)^2 + y^2}{4a^2 t}, \qquad w_1 = \frac{(\xi-x)^2 + y^2}{4a^2 t}, \\ \alpha &= \frac{b^2}{4a^2}\,[(x+\xi)^2 + y^2], \quad \beta = \frac{b^2}{4a^2}\,[(x-\xi)^2 + y^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.20)$$

Найдем форму свободной поверхности в предельном случае, при $t = \infty$. Это будет форма свободной поверхности в установившемся

движении. Нам нужно вычислить интеграл

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-v-\frac{\alpha}{v}}\, dv. \tag{10.21}$$

Подстановка

$$v = \sqrt{\alpha}\, e^{-t}$$

приводит этот интеграл к такому:

$$J_1 = \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sqrt{\alpha}\operatorname{ch} t - t}\, dt. \tag{10.22}$$

Существует следующее представление модифицированной функции Бесселя второго рода:

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin p\pi} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch} t - pt}\, dt. \tag{10.23}$$

Интеграл (10.22) с помощью (10.23) выражается через функцию $K_1(2\sqrt{\alpha})$:

$$J_1 = 2\sqrt{\alpha}\, K_1(2\sqrt{\alpha}) = \frac{b}{a}\sqrt{(x+\xi)^2+y^2}\, K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{(x+\xi)^2+y^2}\right).$$

Точно так же найдем:

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-w-\frac{\beta}{w}}\, dw = \frac{b}{a}\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\, K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right).$$

Подставив эти выражения в формулу (10.19), получим:

$$H(x, y, \infty) = H_0 + \frac{(H_1 - H_0)\, y}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{(x+\xi)^2+y^2}\right)}{\sqrt{(x+\xi)^2+y^2}}\, d\xi +$$

$$+ \frac{(H_2 - H_0)\, y}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}\, d\xi.$$

Положим в первом из полученных интегралов

$$\xi + x = \zeta,$$

во втором

$$\xi - x = \zeta.$$

Перепишем последнее равенство так:

$$H(x, y, \infty) = H_0 + \frac{(H_1 - H_0)\, y}{\pi} \int_x^\infty \frac{K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{\zeta^2 + y^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2 + y^2}}\, d\zeta + $$

$$+ \frac{(H_2 - H_0)\, y}{\pi} \int_0^x \frac{K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{\zeta^2 + y^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2 + y^2}}\, d\zeta + \frac{(H_2 - H_0)\, y}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1\left(\frac{b}{a}\sqrt{\zeta^2 + y^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2 + y^2}}\, d\zeta. \tag{10.24}$$

В частном случае $H_1 = H_2$ получаем одномерную задачу о вытекании воды из канала. Решение будет зависеть лишь от координаты y, и вместо (10.12) будем иметь:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - b^2 (H - H_0).$$

Подстановка (10.13) приводит это уравнение к обычному уравнению теплопроводности, решение которого, удовлетворяющее условиям $u(y, 0) = f(y)$, $u(0, t) = F(t)$, имеет вид

$$u(y, t) =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\lambda) \left[e^{-\frac{(y-\lambda)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(y+\lambda)^2}{4a^2 t}} \right] d\lambda + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_X^\infty F\left(t - \frac{y^2}{4a^2 \lambda^2}\right) e^{-\lambda^2}\, d\lambda \tag{10.25}$$

$$\left(X = \frac{y}{2a\sqrt{t}}\right).$$

В нашем случае $f(y) = H_0$, $F(t) = e^{b^2 t}(H_1 - H_0)$, и (10.25) дает:

$$H(y, t) = H_0 + (H_2 - H_0)\, e^{-b^2 t}\, \Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right) +$$

$$+ (H_1 - H_0) \left[\operatorname{ch} \frac{by}{a} - \frac{1}{2} e^{\frac{by}{a}}\, \Phi(\xi) + \frac{1}{2} e^{-\frac{by}{a}} \Phi(\eta) \right] \tag{10.26}$$

$$\left(\xi = b\sqrt{t} + \frac{y}{2a\sqrt{t}},\quad \eta = b\sqrt{t} - \frac{y}{2a\sqrt{t}}\right).$$

При выводе формулы (10.26) использовано выражение интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_m^\infty e^{-\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}}\, d\lambda = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \left[1 - \Phi\left(m - \frac{\alpha}{m}\right)\right] + \frac{1}{2} e^{2\alpha} \left[1 - \Phi\left(m + \frac{\alpha}{m}\right)\right].$$

Для установившегося движения при $t = \infty$ получаем из (10.26) простую форму свободной поверхности: $H(y, \infty) = H_0 + (H_1 - H_0)\, e^{-\frac{by}{a}}$. Она же может быть получена из уравнения (10.24) при $H_1 = H_2$.

§ 11. Неустановившийся приток к скважинам в напорном пласте. Напишем уравнение (10.1) в полярных координатах r, θ, где

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Будем иметь:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}\right). \tag{11.1}$$

Для осесимметричной задачи это уравнение напишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right). \tag{11.2}$$

Будем искать решение этого уравнения, зависящее лишь от комбинации переменных r и t:

$$\eta = \frac{r^2}{4a^2t}.$$

Переходя к переменной η, получим вместо (11.2) уравнение

$$\eta\frac{d^2H}{d\eta^2} + (1+\eta)\frac{dH}{d\eta} = 0. \tag{11.3}$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$H = C_1\int\frac{e^{-\eta}}{\eta}d\eta + C_2.$$

Вводя обозначение интегральной показательной функции

$$\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) = -\int\limits_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty}\frac{e^{-\eta}}{\eta}d\eta, \tag{11.4}$$

можем написать полученное решение в виде

$$H = C\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right) + C_2.$$

Рассмотрим скважину радиуса r_0 и вычислим расход Q на единицу длины этой скважины. Он равен скорости, умноженной на длину окружности радиуса r_0:

$$Q = -2\pi r_0 k\frac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = 4\pi k C e^{-\frac{r_0^2}{4a^2t}}.$$

Полагая

$$4\pi k C = Q_0,$$

получим:

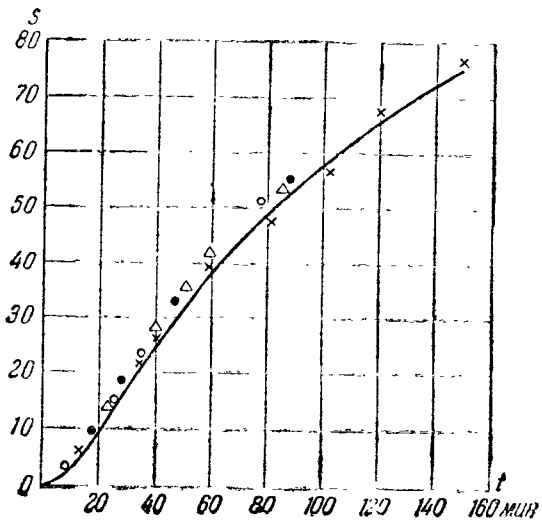
$$Q = Q_0 e^{-\frac{r_0^2}{4a^2t}} \tag{11.5}$$

и

$$H(r, t) = -\frac{Q_0}{4\pi} \int_{\frac{r^2}{4a^2t}}^{\infty} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta + C. \qquad (11.6)$$

Мы видим, что дебит скважины в начальный момент времени равен нулю, затем он чрезвычайно быстро возрастает и стремится к постоянному значению Q_0. В многочисленных примерах неустановившегося движения в нефтяном пласте [12] практически можно принять, что дебит скважины в движении, определяемом уравнением (11.5), является постоянным. Напор, определяемый формулой (11.6), при $t \to \infty$ стремится к бесконечности.

В. Н. Щелкачев применил указанные формулы к следующей задаче. Была остановлена действовавшая нефтяная скважина, в которой



Фиг. 402.

давление начало возрастать. Результаты наблюдений были сопоставлены с результатами вычислений. На фиг. 402 по оси ординат отложены значения повышения давления S в сантиметрах водяного столба, вычисленные по формуле (11.6). При этом коэффициент a^2 имеет не то значение, какое обычно мы рассматриваем (в задачах о напорном движении у нас $a^2 = \frac{kh}{m}$), — это величина, учитывающая сжимаемость жидкости и упругость пласта. Значение ее определялось из наблюдений.

В случае группы скважин можно складывать потенциалы скорости, соответствующие отдельным скважинам. Так, при рассмотрении нагнетательной и эксплоатируемой скважин складываются потенциалы

скорости, в которых берутся множители $+Q_0$ и $-Q_0$. Если перейти от напорных движений к безнапорным, то можно таким путем получить приближенное решение задачи о действии скважины возле реки.

§ 12. Орошение круглой площадки. Мы уже рассматривали задачу о поливе полосообразной площади. Приведем здесь формулы, позволяющие решать аналогичные задачи, когда инфильтрация сверху попадает на круглую площадку радиуса R. А именно, решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right) - b^2 H + f(r, t) \tag{12.1}$$

при начальном условии $H(r, 0) = 0$ представляется в виде [13]

$$H(r, t) = \int_0^t \frac{d\tau e^{-b^2(t-\tau)}}{2a^2(t-\tau)} \int_0^\infty f(\rho, \tau)\, e^{-\frac{r^2+\rho^2}{4a^2(t-\tau)}} I_0\left(\frac{r\rho}{2a^2(t-\tau)}\right)\rho\, d\rho \tag{12.2}$$

($I_0(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента). Для вывода последней формулы можно исходить из решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t),$$

отвечающего начальному условию $u(x, y, 0) = 0$:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \tau)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi\, d\eta. \tag{12.3}$$

Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\xi = \rho\cos\theta_0$, $\eta = \rho\sin\theta_0$ и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{r\rho\cos(\theta-\theta_0)}{2a^2(t-\tau)}} d\theta = 2\pi I_0\left(\frac{r\rho}{2a^2(t-\tau)}\right),$$

получим формулу (12.2).

Если $f(r, t) = \frac{w}{m}$ при $r \leqslant R$ и $f(r, t) = 0$ при $r > R$, то, выразив множитель при $f(\rho, \tau)$ в (12.2) с помощью формулы Вебера-Сонина и выполнив в получающемся тройном интеграле два интегрирования, найдем:

$$H(r, t) = \frac{w}{mR}\left[\int_0^\infty \frac{I_0(\lambda r)\, I_1(\lambda R)}{b^2 + a^2\lambda^2} d\lambda - e^{-b^2 t}\int_0^\infty \frac{I_1(\lambda R)\, I_0(\lambda r)\, e^{-b^2\lambda t}}{b^2 + a^2\lambda^2} d\lambda\right]. \tag{12.4}$$

ГЛАВА XV

ПЛОСКИЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

§ 1. Введение. До сих пор мы занимались изучением неустановившихся движений грунтовых вод со слабо изменяющейся свободной поверхностью, происходящих в слое конечной глубины. Такие движения мы рассматривали «гидравлически», т. е. считая горизонтальные скорости не меняющимися по высоте (вертикальные скорости при этом считаются малыми) и тем самым уменьшая число независимых переменных на единицу.

В случае, когда нужно учесть форму границ области движения, когда в пласте есть особенности — например, имеются дренажные трубы, — когда поток простирается вниз на большую глубину и т. д., такой метод рассмотрения задач является недостаточным.

Здесь мы даем изложение основных существующих в настоящее время результатов по изучению плоских неустановившихся движений грунтовых вод в вертикальной плоскости. Исследования такого рода начались с задачи, которая была названа задачей о стягивании контура нефтеносности. Этой задаче посвящен § 7 настоящей главы.

§ 2. Условие на свободной поверхности. В главе XII мы пришли к заключению, что в неустановившихся движениях грунтовых вод можно полностью пренебрегать инерционными членами и принять, что вектор скорости фильтрации имеет потенциал $\varphi(x, y, t)$:

$$v = \operatorname{grad} \varphi, \tag{2.1}$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.2}$$

Функция φ связана с давлением равенством

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\rho g} + y\right) + C \tag{2.3}$$

(ось y направлена вверх).

Мы видим, что $\varphi(x, y, t)$ содержит время t лишь в качестве параметра. В неустановившемся движении со свободной поверхностью зависимость φ от времени входит в условие на этой поверхности, которое нам предстоит вывести.

Принимая давление на депрессионной кривой постоянным, из (2.3) получаем условие на линии свободной поверхности (постоянная C принята равной нулю)

$$\varphi + ky = 0. \tag{2.4}$$

Предположим, что на линии L свободной поверхности грунтового потока некоторая функция остается все время равной нулю:

$$F(x, y, t) = 0. \tag{2.5}$$

Если в момент времени $t+\Delta t$ линия L перешла в L', то некоторая точка $M(x, y)$ линии L перейдет в точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ линии L'. (Можно рассматривать L как линию разрыва, причем мы рассматриваем этот разрыв как *стационарный* [1].) Получим:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y, t+\Delta t) = 0. \tag{2.6}$$

Вычитая (2.5) из (2.6), деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t = 0$, получим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{2.7}$$

С помощью (2.1) имеем:

$$m\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad m\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{2.8}$$

(m — пористость или недостаток насыщения грунта). Подставив эти выражения в (2.7), найдем условие на свободной поверхности

$$m\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{2.9}$$

В частности, приняв

$$F = \varphi + ky$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k,$$

найдем уравнение для φ

$$m\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + k\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{2.10}$$

которое должно выполняться на свободной поверхности [2].

Перейдем к преобразованию этого условия к комплексным переменным [3]. Будем рассматривать одновременно комплексный потенциал $\omega = \varphi + i\psi$ и функцию Жуковского

$$\theta = \omega - ikz = \varphi + ky + i(\psi - kx). \tag{2.11}$$

Переписав уравнение (2.10) в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\left(k + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + m\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

нетрудно обнаружить, что его можно заменить следующим уравнением:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\overline{\frac{\partial\theta}{\partial z}}\right)+m\operatorname{Re}\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t}=0,$$

что можно также представить в форме

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\overline{\frac{\partial\theta}{\partial z}}+\overline{\frac{\partial\omega}{\partial z}}\,\frac{\partial\theta}{\partial z}+m\left[\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t}+\overline{\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t}}\right]=0. \tag{2.12}$$

Здесь чертой наверху отмечается сопряженная величина.

Предположим, что область, занятая движущейся жидкостью, отображена конформно на полуплоскость вспомогательного комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$ так, чтобы свободная поверхность все время соответствовала действительной оси. Обозначая отображающие функции соответственно через $z=z(\zeta,\ t)$ и $\zeta=\zeta(z,\ t)$ и переходя к переменным ζ и t, будем иметь:

$$\frac{\partial\theta(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial\theta(\zeta,t)}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\dot{\zeta}\quad\left(\dot{\zeta}=\frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial t}\right). \tag{2.13}$$

Замечая затем, что на депрессионной кривой при $\zeta=\xi$

$$\theta(\zeta,\ t)+\overline{\theta(\zeta,\ t)}=0,\quad \frac{\partial\theta(\zeta,t)}{\partial t}+\overline{\frac{\partial\theta(\zeta,t)}{\partial t}}=0, \tag{2.14}$$

перепишем условие (2.12) в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\,\overline{\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}}\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,\overline{\frac{\partial\zeta}{\partial z}}+\overline{\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}}\,\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\,\frac{\partial\zeta}{\partial z}\,\overline{\frac{\partial\zeta}{\partial z}}+m\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\dot{\zeta}+\overline{\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}}\,\overline{\dot{\zeta}}\right)=0.$$

Так как при дифференцировании по действительной переменной $\zeta=\xi$ имеет место равенство

$$\frac{\partial\theta(\zeta,t)}{\partial\zeta}+\overline{\frac{\partial\theta(\zeta,t)}{\partial\zeta}}=0$$

и так как

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z}=1:\frac{\partial z}{\partial\zeta},\quad \overline{\frac{\partial\zeta}{\partial z}}=1:\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}},$$

то получаем:

$$\overline{\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}}-\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}+m\,\frac{\partial z}{\partial\zeta}\,\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\,(\dot{\zeta}-\overline{\dot{\zeta}})=0. \tag{2.15}$$

Далее, если мы в уравнение $z=f(\zeta,\ t)$ подставим $\zeta=\zeta(z,\ t)$, то получим тождество $z=f(\zeta(z,\ t),\ t)$, дифференцируя которое частным образом по t найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial\zeta}\dot{\zeta}=0.$$

Отсюда имеем:

$$\dot{\zeta}=-\frac{\partial z}{\partial t}:\frac{\partial z}{\partial\zeta}, \tag{2.16}$$

что дает возможность переписать (2.15) в виде

$$\overline{\frac{d\omega}{d\zeta}}-\frac{d\omega}{d\zeta}-m\left(\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial \zeta}}-\overline{\frac{\partial z}{\partial t}}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)=0, \tag{2.17}$$

или в других обозначениях

$$m\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial \zeta}}\right)=-\mathrm{Im}\left(\frac{d\omega}{d\zeta}\right). \tag{2.18}$$

Если вернуться к функции Жуковского, то условиями на линии свободной поверхности будут уравнения

$$\mathrm{Im}\left(i\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\right)=0,\quad \mathrm{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\right)=-\frac{1}{m}\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}\right)+\frac{k}{m}\mathrm{Im}\left(i\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}\right). \tag{2.19}$$

Для отдельных групп задач бывает известно выражение функций $\theta(\zeta)$ или $\omega(\zeta)$, что дает возможность привести уравнения (2.18) и (2.19) к условию для функции $z(\zeta, t)$ на свободной поверхности.

§ 3. Задача о растекании бугров грунтовых вод в полуплоскости. После дождя, после прекращения полива и т. п. поверхность грунтовых вод принимает бугристую форму, которая затем постепенно выравнивается. Такого рода задача — о деформации депрессионной кривой, уравнение которой в начальный момент времени задано, для области потока, простирающейся вниз на бесконечность, — является простейшей задачей с граничным условием (2.19).

Здесь функция Жуковского просто пропорциональна ζ, а именно, $\theta=-ki\zeta$. В самом деле, вспомним, что θ пропорциональна комплексному давлению:

$$\theta=-\frac{k}{\rho g}(p+ip'). \tag{3.1}$$

При $\eta=0$ имеем $p=0$, $\mathrm{Re}\,\theta=0$; на бесконечности давление ведет себя, как в случае невозмущенной поверхности, т. е. как $\rho g\eta$. Поэтому

$$\theta=-ki\zeta. \tag{3.2}$$

При этом мы считаем, что функция, отображающая область движения на полуплоскость ζ, имеет вид

$$z=\zeta+\Phi(\zeta, t), \tag{3.3}$$

где $\Phi(\zeta, t)$ голоморфна в нижней полуплоскости.

Подставляя (3.2) во второе из уравнений (2.19), получим условие на свободной поверхности для $z(\zeta, t)$:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial\zeta}}-\frac{ki}{m}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)=\frac{k}{m}\quad\text{при}\quad\zeta=\xi. \tag{3.4}$$

Условие (3.4) можно переписать несколько иначе:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{k}{m}\frac{\partial z}{\partial\zeta}+i\frac{\partial z}{\partial\zeta}\overline{\frac{\partial z}{\partial t}}\right)=\frac{k}{m}\quad\text{при}\quad\zeta=\xi. \tag{3.5}$$

Теперь нетрудно также получить условие для комплексного потенциала ω на свободной поверхности. На основании (2.11) и (3.2) имеем:

$$z(\zeta, t) = \zeta - \frac{i}{k}\omega(\zeta, t), \tag{3.6}$$

так что

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 - \frac{i}{k}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{i}{k}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}.$$

Подставляя эти выражения в (3.5), после простых преобразований получим:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{k}\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\right) \quad \text{при} \quad \zeta = \xi. \tag{3.7}$$

В левой части имеем линейное выражение относительно производных, в правой стоит произведение производных. Если отбросить правую часть, то условие (3.7) значительно упрощается. Для оценки возможности такого упрощения и получения более точных решений Л. А. Галин [4] предложил применять метод последовательных приближений в следующей форме.

Примем первое приближение $\omega^{(1)}(\zeta, t)$ удовлетворяющим линейному условию

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=\xi} = 0 \tag{3.8}$$

и начальному условию ($\omega_0(\zeta)$ — заданная функция)

$$\omega^{(1)}(\zeta, 0) = \omega_0(\zeta). \tag{3.9}$$

Найдя $\omega^{(1)}(\zeta, t)$ и подставив его в правую часть (3.7), будем считать, что $\omega^{(2)}(\zeta, t)$ удовлетворяет граничному условию

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \zeta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{i}{k}\frac{\partial \bar{\omega}^{(1)}}{\partial t}\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \zeta}\right) \quad \text{при} \quad \zeta = \xi \tag{3.10}$$

и начальному условию

$$\omega^{(2)}(\zeta, 0) = \omega_0(\zeta).$$

Этот процесс можно продолжить.

Рассмотрим пример. Пусть при $t = 0$ грунтовые воды занимают область, отображаемую на полуплоскость посредством функции

$$z_0(\zeta) = \zeta + \frac{a}{\zeta - i}, \tag{3.11}$$

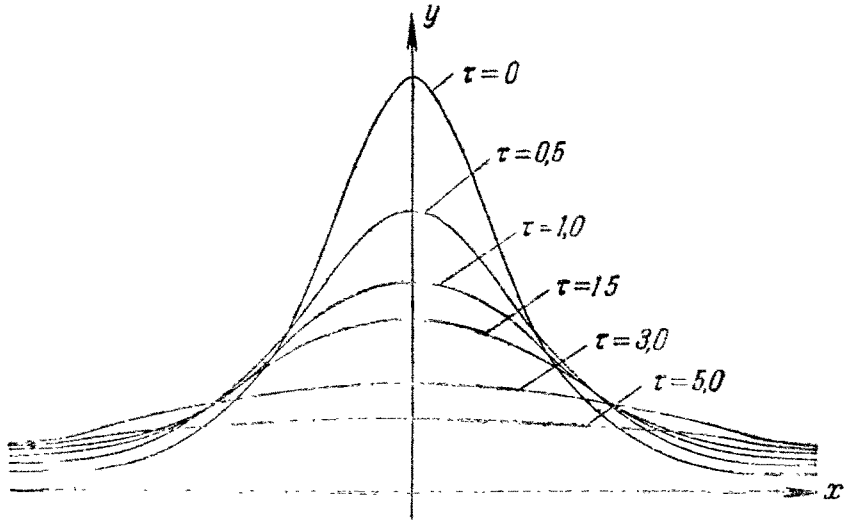
так что при $\zeta = \xi$ имеем уравнения депрессионной кривой (на фиг. 403 это кривая $\tau = 0$)

$$x_0 = \xi + \frac{a\xi}{\xi^2 + 1}, \quad y_0 = \frac{a}{\xi^2 + 1}.$$

Тогда на основании (3.6) для начального значения $\omega(\zeta, 0) = \omega_0$ будем иметь:

$$\omega_0(\zeta) = \frac{ki\alpha}{\zeta - i}. \tag{3.12}$$

Отыскивая первое приближение $\omega^{(1)}$ по условию (3.8), заметим, что если мы имеем функцию $F(\zeta)$, регулярную в нижней полуплоскости, для которой действительная часть равна нулю на



Фиг. 403.

действительной оси: $\operatorname{Re} F(\zeta) = 0$ при $\zeta = \xi$, то такая функция имеет постоянное значение на всей полуплоскости.

На основании этого замечания из (3.8) вытекает, что

$$\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial \zeta} = 0$$

на всей нижней полуплоскости. Отсюда следует, что $\omega^{(1)}$ есть функция одного аргумента $\zeta - \frac{ki}{m}t$:

$$\omega^{(1)} = \Phi\left(\zeta - \frac{kit}{m}\right).$$

А так как при $t = 0$

$$\omega^{(1)}(\zeta, 0) = \Phi(\zeta) = \omega_0(\zeta),$$

то сразу находим:

$$\omega^{(1)}(\zeta, t) = \omega_0\left(\zeta - \frac{kit}{m}\right).$$

В нашем примере

$$\omega^{(1)}(\zeta, t) = \frac{ki\alpha}{\zeta - i\left(1 + \frac{kt}{m}\right)} \tag{3.13}$$

и, следовательно, на основании (3.6)

$$z^{(1)}(\zeta, t) = \zeta + \frac{\alpha}{\zeta - i\left(1 + \frac{kt}{m}\right)}. \tag{3.14}$$

На фиг. 403 построено семейство кривых, изображающих положение бугра грунтовых вод в различные моменты времени. При этом принято $\alpha = \frac{1}{2}$, $\tau = \frac{kt}{m}$.

Переходя ко второму приближению, составим выражение

$$\operatorname{Re}\left[\frac{i}{k}\frac{\overline{\partial\omega^{(1)}}}{\partial t}\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi} = \operatorname{Re}\left[\frac{i}{k}\omega_0'\left(\xi + \frac{kit}{m}\right)\frac{ki}{m}\omega_0'\left(\xi - \frac{kit}{m}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{m}\left|\omega_0'\left(\xi - \frac{kit}{m}\right)\right|^2, \tag{3.15}$$

и условие (3.10) для $\omega^{(2)}$ принимает вид

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\xi} = -\frac{1}{m}\frac{k^2\alpha^2}{\left[\xi^2 + \left(1 + \frac{kt}{m}\right)^2\right]^2}.$$

Применяя к функции

$$F(\zeta, t) = \frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial\zeta}$$

формулу (1.6) главы VI и учитывая, что $F(\zeta, t) = 0$ при $\zeta = \infty$, напишем:

$$F(\zeta, t) = -\frac{1}{m\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\omega_0'\left(\xi - \frac{kit}{m}\right)\right|^2\frac{d\xi}{\xi - \zeta},$$

что дает:

$$\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial t} + \frac{ki}{m}\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial\zeta} =$$

$$= -\frac{k^2\alpha^2}{2m\left(1 + \frac{kt}{m}\right)^2\left(\zeta - i - \frac{ki}{m}t\right)^2} + \frac{k^2\alpha^2 i}{2m\left(1 + \frac{kt}{m}\right)^3\left(\zeta - i - \frac{kit}{m}\right)}. \tag{3.16}$$

Заметим, что можно найти выражение (3.16) не путем интегрирования, но с помощью приема, который у нас будет применен ниже (§ 5) при решении задачи о дренажной трубе.

Чтобы найти решение уравнения (3.16), Л. А. Галин рассматривает уравнение вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \beta\frac{\partial U}{\partial\zeta} = f(t)\Phi(\beta t - \zeta),$$

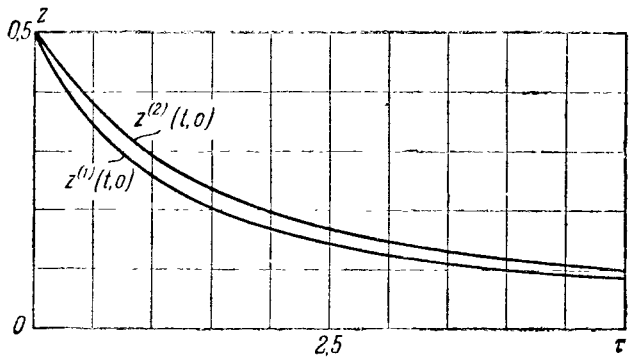
для которого указывает частное решение в форме

$$U(t, \zeta) = \Phi(\beta t - \zeta) \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Это выражение обращается в нуль при $t = 0$. Прибавив к нему решение однородного уравнения

$$\frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial t} + \frac{kl}{m} \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial \zeta} = 0,$$

удовлетворяющее условию $\omega^{(2)}(\zeta, 0) = \omega_0(\zeta)$ и, следовательно, совпа-



Фиг. 404.

дающее с найденным уже для $\omega^{(1)}(\zeta, t)$, получим второе приближение для ω:

$$\omega^{(2)}(\zeta, t) = \frac{ki\alpha}{\zeta - i\left(1 + \frac{kt}{m}\right)} + \alpha^2 k \left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{kt}{m}}\right) \frac{1}{\left[\zeta - \left(1 + \frac{kt}{m}\right) i\right]^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{kt}{m}\right)^2}\right) \frac{i}{\zeta - \left(1 + \frac{kt}{m}\right) i} \right\}. \quad (3.17)$$

Второе приближение для z будет:

$$z^{(2)}(\zeta, t) = \zeta - \frac{i}{k} \omega^{(2)}(\zeta, t) = \zeta + \left[\alpha + \frac{\alpha^2}{4}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{kt}{m}\right)^2}\right)\right] \times$$
$$\times \frac{1}{\zeta - \left(1 + \frac{kt}{m}\right) i} - \frac{\alpha^2}{2}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{kt}{m}}\right) \frac{i}{\left[\zeta - \left(1 + \frac{kt}{m}\right) i\right]^2}.$$

Можно построить графики зависимости от времени максимальных ординат депрессионной кривой, вычисленных по первому и второму

приближениям:

$$z^{(1)}(0,\ t)=\frac{\alpha i}{1+\frac{kt}{m}},$$

$$z^{(2)}(0,\ t)=\frac{\alpha i}{1+\frac{kt}{m}}+\alpha^2 i\left[\frac{1}{4\left(1+\frac{kt}{m}\right)}+\frac{1}{2\left(1+\frac{kt}{m}\right)^2}-\frac{3}{4\left(1+\frac{kt}{m}\right)^3}\right].$$

Они приведены на фиг. 404, причем принято $\alpha=\frac{1}{2}$, $\tau=\frac{kt}{m}$.

§ 4. Та же задача при линеаризованном условии. Отбросив в уравнении (2.10) члены $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2$, получим линейное условие на депрессионной кривой

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+c\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\quad\left(c=\frac{k}{m}\right).\tag{4.1}$$

Считая свободную поверхность слабо изогнутой, перенесем граничное условие на ось абсцисс. При этом уравнение свободной поверхности будем определять из условия (2.4); переписав его в виде

$$y=-\frac{\varphi(x,\ y,\ t)}{k}$$

и полагая в правой части его $y=0$, окончательно примем уравнение свободной поверхности в форме

$$y=-\frac{\varphi(x,\ 0,\ t)}{k}.\tag{4.2}$$

Сделанные допущения соответствуют тем, которые принимаются в гидродинамике в теории длинных волн.

Рассмотрим задачу: грунтовые воды занимают нижнюю полуплоскость $y<0$. В начальный момент времени линия свободной поверхности имеет форму кривой, заданной уравнением

$$y=f(x).\tag{4.3}$$

Сопоставляя (4.2) и (4.3), найдем граничное значение для $\varphi(x, y, t)$ при $t=0$:

$$\varphi(x,\ 0,\ 0)=-kf(x).\tag{4.4}$$

Зная значение гармонической функции на действительной оси и задавшись условием, что φ равняется нулю на бесконечности, мы можем построить начальное значение функции $\omega=\varphi+i\psi$ с помощью интеграла

$$\omega(z,\ 0)=-\frac{k}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}.\tag{4.5}$$

Теперь сделаем замечание по поводу равенства (4.1). Так как функция φ является гармонической, то такой же будет и функция

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

в нижней полуплоскости. Из условия, что значение $\Phi(x, y)$ есть нуль на оси x и $\Phi(x, y)$ ограничена на бесконечности, вытекает, что $\Phi(x, y)$ равна нулю на всей полуплоскости, т. е. уравнение (4.1) имеет место для всей полуплоскости. Отсюда вытекает, что $\varphi(x, y, t)$ зависит от линейной комбинации y и t:

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y - ct).$$

Это же относится и к комплексному потенциалу (см. аналогичное замечание в § 3). Поэтому для нахождения $\omega(z, t)$ достаточно в полученном выражении для $\omega(z)$ заменить $z = x + iy$ на $x + i(y - ct)$. Получим:

$$\omega(x, y, t) = \varphi + i\psi = -\frac{k}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - x - i(y - ct)}. \tag{4.6}$$

Отделив действительную часть, найдем $\varphi(x, y, t)$. Положив в нем $y = 0$, по формуле (4.2) найдем уравнение свободной поверхности

$$y(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ctf(\xi)\, d\xi}{(\xi - x)^2 + c^2t^2}. \tag{4.7}$$

Эти же результаты можно получить другим путем [5], дающим сразу наглядную геометрическую картину движения.

Сначала рассмотрим случай, когда начальное возмущение сосредоточено в бесконечно малой окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. Пусть Q будет величиной площади, заключенной между профилем начального возмущения свободной поверхности и осью x.

По примеру Н. Е. Кочина [6] составим безразмерное выражение

$$\frac{\varphi(0, y, t)}{Q} \cdot \frac{y}{c} = U(u),$$

которое должно быть функцией U от безразмерной переменной

$$u = \frac{ct}{y}.$$

Условие (4.1) должно удовлетворяться не только на границе, но и во всей области движения, так как функция

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и обращается в нуль при $y = 0$. Функция $\varphi(0, y, t)$ также удовлетворяет уравнению (4.1). Подставляя

выражение

$$\varphi(0, y, t) = \frac{cQ}{y} U(u)$$

в уравнение (4.1), получим уравнение для U

$$U'(1-u) = U,$$

общее решение которого имеет вид (A — произвольная постоянная)

$$U = \frac{A}{1-u} = \frac{Ay}{y-ct}.$$

Следовательно, для $\varphi(0, y, t)$ получаем выражение

$$\varphi(0, y, t) = \frac{cQA}{y-ct}.$$

Заменив в нем y на $y - ix$, получим комплексный потенциал $\omega(z, t)$ рассматриваемого неустановившегося движения

$$\omega(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \frac{cQAi}{z-ict}.$$

Отделив в нем действительную часть от мнимой, найдем:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{cQA(y-ct)}{(y-ct)^2 + x^2}, \quad \psi = \frac{cQAx}{(y-ct)^2 + x^2}.$$

Чтобы получить уравнение свободной поверхности, нужно в выражении для $\varphi(x, y, t)$ положить $y = 0$. Получим:

$$y = \frac{Qc^2At}{k(c^2t^2 + x^2)}.$$

Определим произвольную постоянную A так, чтобы площадь, ограниченная осью абсцисс и линией свободной поверхности, равнялась Q. Найдем:

$$A = \frac{k}{c\pi}$$

и, следовательно,

$$\omega(z, t) = \frac{Qki}{\pi(z-ict)}, \quad \varphi = \frac{kQ(y-ct)}{\pi[(y-ct)^2 + x^2]}. \tag{4.8}$$

Уравнение свободной поверхности окончательно запишется так:

$$y = \frac{Qct}{\pi(x^2 + c^2t^2)}.$$

Как видно из выражения для комплексного потенциала, мы имеем течение с диполем в точке $z = ict$. В начальный момент времени диполь находится в начале координат, затем он перемещается вверх по оси ординат со скоростью $c = \frac{k}{m}$. Таким образом, для момен-

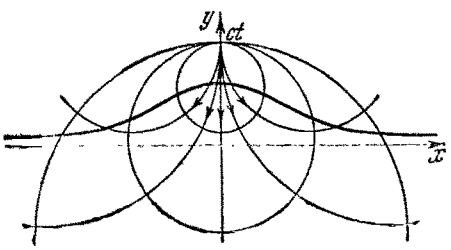
тов времени, близких к начальному, диполь попадает в область движения. Найдем момент времени, когда диполь окажется в вершине свободной поверхности. Для этого нужно максимальную ординату свободной поверхности $\frac{Q}{\pi ct}$ приравнять величине ct. Получим:

$$t = t_1 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

Для $t > t_1$ область движения уже не будет содержать особенностей. Если принять за начальный момент времени значение $t_0 > t_1$, то получим движение без особенностей с начальной формой свободной поверхности

$$y = \frac{Qct_0}{\pi(x^2 + c^2 t_0^2)}.$$

Мгновенные линии тока суть окружности (фиг. 405), проходящие через точку $x = 0$, $y = ct$ и касающиеся оси ординат, мгновенные линии равного потенциала — ортогональные к ним окружности.



Фиг. 405.

Перейдем теперь к общему случаю, когда начальная форма свободной поверхности задана уравнением

$$y = F(x).$$

Покажем, что решение задачи, т. е. значение потенциала скорости, получим, заменив в выражении для (4.8) Q на $F(\zeta)$, x на $x - \zeta$ и проинтегрировав по ζ в пределах от $-\infty$ до ∞. Будем иметь:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)(y - ct)\,d\zeta}{(y - ct)^2 + (x - \zeta)^2}.$$

Положив $y = 0$ и воспользовавшись уравнением свободной поверхности

$$y = -\frac{\varphi(x, 0, t)}{k},$$

найдем для формы свободной поверхности в момент времени t выражение

$$y(x, t) = \frac{ct}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{c^2t^2 + (x - \zeta)^2}.$$

Если сделать подстановку

$$\zeta - x = ct \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

то получим другое выражение для $y(x, t)$:

$$y(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x + ct \cdot \operatorname{tg} \alpha)\, d\alpha.$$

Из него видно, что при $t = 0$ форма свободной поверхности приводится к заданной начальным условием, т. е. уравнением

$$y(x, 0) = F(x).$$

Рассмотрим в качестве примера случай прямоугольного в начальный момент времени бугра, когда начальная форма свободной поверхности задается уравнениями (фиг. 406)

$$F(x) = y(x, 0) = \begin{cases} \varepsilon & \text{при } |x| < R, \\ 0 & \text{при } |x| > R. \end{cases}$$

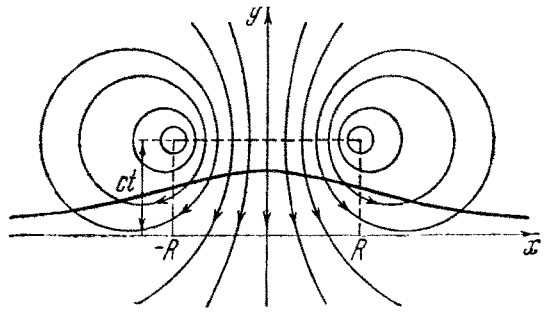
Форма свободной поверхности в последующие моменты времени определится уравнением

$$y = \frac{\varepsilon}{\pi} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x + R}{ct} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x - R}{ct} \right].$$

Комплексный потенциал течения

$$\omega(z, t) = \frac{ik\varepsilon}{\pi} \ln \frac{z + R - ict}{z - R - ict}$$

представляет плоскопараллельное течение с парой вихрей в точках



Фиг. 406.

$(\pm R, ct)$. Эти точечные вихри перемещаются вверх параллельно оси ординат со скоростью

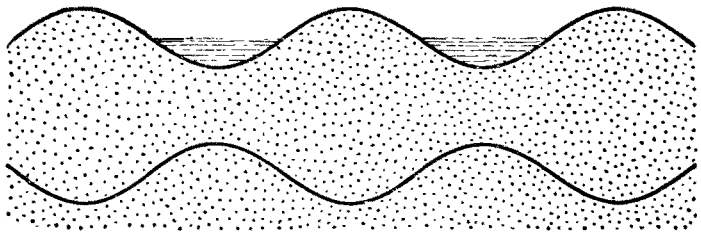
$$c = \frac{k}{m}.$$

В начальный момент времени особые точки $(\pm R, 0)$ находятся на свободной поверхности. Они сходят с нее в момент времени t_1, определяемый уравнением

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2R}{ct_1} = ct_1.$$

Если рассматривать уравнение свободной поверхности в момент времени $t > t_1$, то особые точки течения будут уже находиться вне области, занятой движущейся жидкостью.

Мгновенные линии тока здесь — аполлониевы окружности, мгновенные линии равного потенциала — ортогональные к ним окружности.



Фиг. 407.

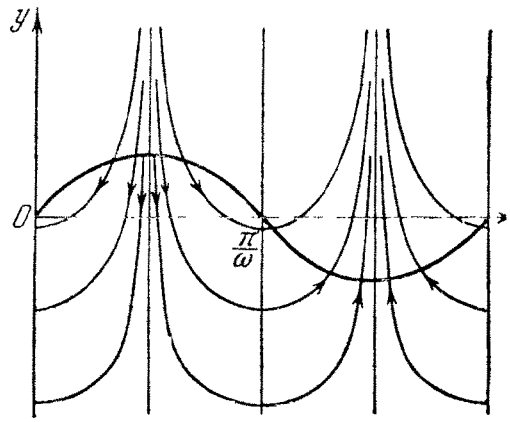
Если полив производится по бороздам, то поверхность грунтовых вод приобретает волнистый характер, причем непосредственно под бороздой получается бугор грунтовой воды (фиг. 407). Поэтому мы зададимся начальной формой свободной поверхности в виде синусоиды

$$y = a \cdot \sin \omega x.$$

Тогда нетрудно получить уравнение депрессионной кривой для последующих моментов времени

$$y = ae^{-\omega ct} \sin \omega x.$$

Линии тока имеют вид, показанный на фиг. 408.



Фиг. 408.

§ 5. Задача о растекании бугра грунтовых вод в слое конечной глубины. Для случая, представленного на фиг. 409, имеем такие условия (в линеаризованной форме):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{k}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad &\text{при } y = h, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad &\text{при } y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Кроме того, должно быть удовлетворено начальное условие

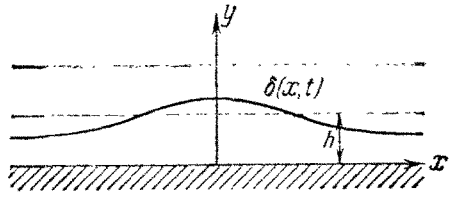
$$t = 0,\ y = h,\ \varphi = -k\delta_0(x). \tag{5.2}$$

Здесь $\delta_0(x)$ — начальное возвышение уровня грунтовых вод [4].

Будем искать гармоническую функцию $\varphi(x, y, t)$ в случае симметричной задачи в форме интеграла Фурье

$$\varphi(x, y, t) = \int_0^\infty A(\alpha, t) \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha x \, d\alpha. \tag{5.3}$$

Построенная функция удовлетворяет, как нетрудно видеть, второму



Фиг. 409.

из условий (5.1). Чтобы выполнялось первое из этих условий, необходимо выполнение равенства

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{k}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=h} = \int_0^\infty \left[\operatorname{ch} \alpha h \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{k\alpha}{m} A \operatorname{sh} \alpha h\right] \cos \alpha x \, d\alpha = 0. \tag{5.4}$$

Отсюда следует, что функция $A(\alpha, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\operatorname{ch} \alpha h \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{k}{m} A \alpha \operatorname{sh} \alpha h = 0. \tag{5.5}$$

Так как $\varphi(x, h, 0) = -k\delta_0(x)$ при $t = 0$, то из (5.3) получаем:

$$-k\delta_0(x) = \int_0^\infty A(\alpha, 0) \operatorname{ch} \alpha h \cos \alpha x \, d\alpha. \tag{5.6}$$

Решение уравнения (5.5) можно написать в виде

$$A(\alpha, t) = A(\alpha, 0) \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\}$$

и, следовательно, для $\varphi(x, y, t)$ будем иметь:

$$\varphi(x, y, t) = \int_0^\infty A(\alpha, 0) \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha x \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\} d\alpha. \tag{5.7}$$

Функция $A(\alpha, 0)$ находится обращением уравнения (5.6):

$$A(\alpha, 0) = -\frac{2k}{\pi \operatorname{ch} \alpha h} \int_0^\infty \delta_0(\beta) \cos \alpha\beta \, d\beta. \tag{5.8}$$

В частном случае, когда $\delta_0(x)$ равно постоянной δ_0 на участке $-a<x<a$ и нулю вне этого участка, получим для $A(\alpha, 0)$:

$$A(\alpha, 0) = -\frac{2k\delta_0}{\pi \operatorname{ch} \alpha h} \int_0^a \cos \alpha\beta \, d\beta = -\frac{2k\delta_0}{\pi \operatorname{ch} \alpha h} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}.$$

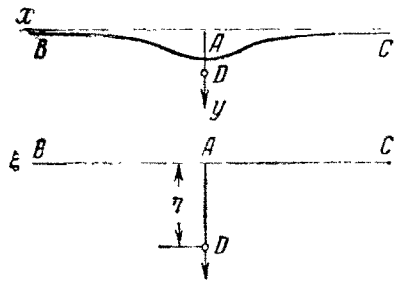
Отсюда найдем значение потенциала скоростей

$$\varphi(x, y, t) = -\frac{2k\delta_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha a \operatorname{ch} \alpha y \cos \alpha x}{\alpha \operatorname{ch} \alpha h} \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\} d\alpha$$

и возвышения уровня

$$\delta(x, t) = \frac{2\delta_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a\alpha \cos \alpha x}{\alpha} \exp\left\{-\frac{k\alpha \operatorname{th} \alpha h}{m} t\right\} d\alpha.$$

§ 6. Приток грунтовых вод к дрене в слое бесконечной глубины. Рассмотрим понижение уровня грунтовых вод под действием дренажной трубы. Пусть при $t=0$ уровень грунтовых вод горизонтален и совпадает с осью x (фиг. 410), а грунтовая вода занимает всю нижнюю полуплоскость. Центр дрены поместим на оси y в точке с аффиксом $h_0 i$. По истечении промежутка времени t уровень грунтовых вод понизится и будет представлять кривую BAC (фиг. 410). Область, расположенную ниже BAC, отобразим на нижнюю полуплоскость области ζ. Точка D плоскости z перейдет при этом в точку плоскости ζ с аффиксом $\zeta = hi$, где h — величина, изменяющаяся (уменьшающаяся) со временем, которую мы будем искать в виде ряда



Фиг. 410.

$$h = h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots, \tag{6.1}$$

где $h_1, h_2, \ldots$ — постоянные, подлежащие определению. Отображающую функцию будем искать в виде ряда по степеням t

$$z = \zeta + z_1(\zeta)\, t + z_2(\zeta)\, t^2 + \ldots, \tag{6.2}$$

где $z_1, z_2, \ldots$ — искомые функции, регулярные в полуплоскости $\eta>0$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие граничным условиям, получаемым из (2.19). Таким образом, мы рассматриваем нелинейное условие на депрессионной кривой.

Остановимся на построении функции, входящей в (2.19). На основании равенств

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=\infty}=1, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=\infty}=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \zeta}=\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}+ki\frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{6.3}$$

находим, что

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=\infty}=ki.$$

Кроме того, в точке $\zeta=hi$ эта функция имеет полюс первого порядка вида $-\frac{q}{2\pi(\zeta-ih)}$, где q — расход дрены, т. е. количество жидкости, поглощаемое дреной в единицу времени. Эта величина зависит от разности давлений на свободной поверхности и на поверхности дрены и от радиуса дрены и является функцией времени, которую мы будем искать в виде ряда

$$q=q_0+q_1t+q_2t^2+\ldots, \tag{6.4}$$

где q_0, $q_1,\ldots$ — постоянные, подлежащие определению. Учитывая условия для $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}$, найдем, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}=ki-\frac{q}{2\pi}\left(\frac{1}{\zeta-ih}-\frac{1}{\zeta+ih}\right). \tag{6.5}$$

Обратимся теперь к граничному условию (2.19). Приведем его правую часть к виду, содержащему только функции, регулярные в полуплоскости $\eta>0$. Замечая, что

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \zeta}-\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}+m\frac{\partial z}{\partial \zeta}\cdot\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}(\zeta-\bar{\zeta})=0,$$

$$\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta-ih}=-\operatorname{Im}\frac{1}{\zeta+ih} \qquad \text{при } \zeta=\xi,$$

будем иметь при $\zeta=\xi$:

$$\operatorname{Im}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}=k+\operatorname{Im}W, \qquad W=\frac{q}{\pi(\zeta+ih)}. \tag{6.6}$$

Теперь условие (2.19) можно записать в виде

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\right)=-\frac{k}{m}-\frac{1}{m}\operatorname{Im}W+\frac{k}{m}\operatorname{Im}\left(i\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right). \tag{6.7}$$

На основании (6.2), (6.4), (6.5), (6.6) имеем разложение

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial z}{\partial t}=z_1+2z_2t+3z_3t^2+\ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta}=1+\frac{\partial z_1}{\partial \zeta}t+\frac{\partial z_2}{\partial \zeta}t^2+\ldots,\\ W=W_0+W_1t+W_2t^2+\ldots,\end{gathered}\right\} \tag{6.8}$$

где

$$W_0 = \frac{q_0}{\pi(\zeta + ih_0)}, \quad W_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{q_1}{\zeta + ih_0} - \frac{iq_0h_1}{(\zeta + ih_0)^2}\right],$$

$$W_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{q_2}{\zeta + ih_0} - \frac{iq_1h_1 + iq_0h_2}{(\zeta + ih_0)^2} + \frac{q_0h_1^2}{(\zeta + ih_0)^3}\right].$$

Подставляя эти ряды в (6.7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему граничных условий для определения функций $z_1(\zeta)$, $z_2(\zeta)$. Так, для z_1 условие будет иметь вид

$$\operatorname{Im} z_1 = -\frac{1}{m}\operatorname{Im} W_0 \text{ при } \zeta = \xi. \tag{6.9}$$

Так как z_1 и W_0 регулярны в полуплоскости $\eta > 0$ и исчезают при $\zeta \to \infty$, то из (6.9) сразу находим:

$$z_1 = -\frac{1}{m} W_0 = -\frac{q_0}{\pi m} \cdot \frac{1}{\zeta_0 + h_0 i}. \tag{6.10}$$

Для определения z_2 имеем условие: при $\zeta = \xi$

$$\operatorname{Im}(2z_2) + \operatorname{Im}\left(z_1 \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \zeta}\right) = -\frac{1}{m}\operatorname{Im} W_1 + \frac{k}{m}\operatorname{Im}\left(i\frac{\partial z_1}{\partial \zeta}\right). \tag{6.11}$$

Положив $z_2 = z_{21} + z_{22}$, разобьем его на два условия:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im}(2z_{21}) &= -\frac{1}{m}\operatorname{Im} W_1 + \frac{k}{m}\operatorname{Im}\left(i\frac{\partial z_1}{\partial \zeta}\right), \\ \operatorname{Im}(2z_{22}) &= -\operatorname{Im}\left(z_1\frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \zeta}\right) = \operatorname{Im}\left(\bar{z}_1\frac{\partial z_1}{\partial \zeta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

Из (6.11) сразу находим, что

$$z_{21} = -\frac{1}{2m} W_1 + \frac{ki}{2m}\frac{\partial z_1}{\partial \zeta} = -\frac{q_1}{2m\pi}\frac{1}{\zeta + h_0 i} + \frac{iq_0(mh_1 + k)}{2m^2\pi(\zeta + ih_0)^2}. \tag{6.13}$$

Сюда вошли постоянные q_0, q_1 и h_1, подлежащие определению. Для этого воспользуемся условием, что при $\zeta = ih$ должно быть $z = h_0 i$:

$$h_0 i = z(ih) = ih + z_1(ih)\,t + z_2(ih)\,t^2 + \ldots \tag{6.14}$$

Но

$$z_1(ih) = -\frac{q_0}{m\pi} \cdot \frac{1}{ih + ih_0} = \frac{iq_0}{(m\pi h_0)\left[2 + \frac{h_1}{h_0}t + \frac{h_2}{h_0}t^2 + \ldots\right]} =$$

$$= \frac{iq_0}{2m\pi h_0} - \frac{iq_0h_1}{4m\pi h_0^2}t + \ldots$$

Поэтому (6.14) дает:

$$h_0 i = i(h_0 + h_1 t + \ldots) + \frac{iq_0}{2m\pi h_0} t - \frac{iq_0 h_1}{4m\pi h_0^2} t^2 + \ldots$$

Приравнивая нулю коэффициент при t, найдем:

$$h_1 = -\frac{q_0}{2m\pi h_0}. \tag{6.15}$$

Определим величины q_0 и q_1. Из (6.5), интегрируя, находим:

$$\theta = P_к + ki\zeta + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\zeta + ih}{\zeta - ih}, \tag{6.16}$$

где $P_к = -\frac{p_к k}{\gamma}$, а $p_к$ — давление на контуре области, т. е. линии свободной поверхности. В точках поверхности трубы, где можно положить $z = ih_0 + \delta e^{i\vartheta}$, давление равно постоянной величине $p_{тр}$. В частности, $p = p_{тр}$ в точке $ih_0 + \delta$, т. е. при $\theta = 0$. Так как

$$\zeta(ih_0 + \delta) = \zeta(ih_0) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \delta + \ldots,$$

то в точке трубы $z = ih_0 + \delta$

$$\theta_{тр} \approx p_к + ki\left[ih_0 + \frac{\delta}{\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)_{ih}}\right] + \frac{q_0}{2\pi} \ln \frac{2ih_0}{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_{ih} \cdot \delta}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_{ih} = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)_{ih}},$$

получим:

$$P_{тр} = \operatorname{Re} \theta_{тр} = P_к - kh_0 + \frac{q_0}{2\pi} \ln \frac{2h_0}{\delta}. \tag{6.17}$$

Таким образом, найдем начальный расход трубы

$$q_0 = \frac{2\pi\left(kh_0 + \frac{k\,\Delta p}{\gamma}\right)}{\ln\left(\frac{2h_0}{\delta}\right)}, \tag{6.18}$$

где

$$\Delta p = p_к - p_{тр}. \tag{6.19}$$

Если собрать в уравнении для $\theta_{тр}$ члены при первой степени t, то найдем:

$$q_1 = \frac{q_0(3a_0 - 4k\pi h_0)}{4m\pi h_0^2 \ln \frac{2h_0}{\delta}}. \tag{6.20}$$

Теперь выражение (6.13) для z_{21} полностью определено. Перейдем к отысканию z_{22} по условию (6.12). Приведем его к виду, при котором в правой части стояла бы функция, регулярная в полуплоскости $\eta > 0$:

$$z_1 \overline{\frac{\partial z_1}{\partial \zeta}} = \frac{q_0^2}{m^2\pi^2} \cdot \frac{1}{\zeta + ih_0} \cdot \overline{\frac{1}{(\zeta - ih_0)^2}} =$$

$$= \frac{q_0^2}{h_0^2 m^2 \pi^2} \left[-\frac{1}{4(\zeta + ih_0)} + \frac{h_0}{2i(\zeta - ih_0)^2} + \frac{1}{4(\zeta - ih_0)} \right].$$

Поэтому из (6.12) получаем:

$$\operatorname{Im} 2z_{22} = -\frac{q_0^2}{2m^2\pi^2 h_0^2} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2(\zeta + ih_0)} - \frac{h_0}{i(\zeta + ih_0)^2} - \frac{1}{2(\zeta + ih_0)} \right].$$

Пользуясь тем, что $\operatorname{Im}[f(\zeta)] = -\operatorname{Im}[\overline{f(\zeta)}]$ при $\zeta = \xi$, перепишем последнее равенство так:

$$\operatorname{Im}(2z_{22}) = -\frac{q_0^2}{2m^2\pi^2 h_0^2} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2(\zeta + ih_0)} - \frac{h_0}{i(\zeta + ih_0)^2} + \frac{1}{2(\zeta + ih_0)} \right] =$$

$$= \frac{q_0^2}{2m^2\pi^2 h_0^2} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\zeta + ih_0} - \frac{h_0}{i(\zeta + ih_0)^2} \right].$$

Отсюда найдем z_{22}:

$$z_{22} = \frac{q_0^2}{4m^2\pi^2 h_0^2} \cdot \left[\frac{1}{\zeta + ih_0} - \frac{h_0}{i(\zeta + ih_0)^2} \right]. \tag{6.21}$$

Складывая выражения (6.13) и (6.21), получим:

$$z_2 = -\frac{1}{(2m\pi h_0)^2} \left[-\frac{q_0^2 + 2m\pi q_1 h_0^2}{\zeta + ih_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{iq_0 h_0 (-q_0 - 2k\pi h_0 - 2m\pi h_1 h_0)}{(\zeta + ih_0)^2} \right]. \tag{6.22}$$

Аналогичным образом можно вычислить следующие коэффициенты разложения z по степеням t, однако с каждым следующим членом вычислительные трудности сильно увеличиваются.

Чтобы проследить за перемещением со временем точки A свободной поверхности, положим $\zeta = 0$ в формулах (6.10), (6.22) для z_1, z_2. Тогда найдем для y_A приближенное выражение

$$y_A = \frac{q_0}{m\pi h_0} t + \frac{q_0^2 + m\pi(q_1 h_0 - q_0 h_1) h_0 - 2k\pi q_0 h_0}{2m^2\pi^2 h_0^3} t^2 + \ldots \tag{6.23}$$

Рассмотрим теперь выражение дебита трубы (6.23). Для q_0 и q_1 мы нашли соответственно (6.18) и (6.20). Приведем еще выражение

$$q_2 \ln \frac{2h_0}{\delta} = \frac{q_1(9q_0 - 4k\pi h_0)}{8m\pi h_0^2} + \frac{q_0^2(27q_0 - 28k\pi h_0)}{8(2m\pi)^2 h_0^4} + \frac{(k\pi)^2 q_0}{(2m\pi)^2 h_0^2}. \quad (6.24)$$

Из формулы (6.18) для q_0 видно, что если перепад давления $\Delta p = 0$, то q_0 все же отлично от нуля, так как движение происходит под действием силы тяжести. Далее, выражение (6.20) для q_1 может быть как положительным, так и отрицательным. Значит, для моментов времени, близких к начальному, расход q может оказаться как возрастающим, так и убывающим. Составим величину

$$F = \frac{1}{2\pi k}\sqrt{\ln \frac{2h_0}{\delta}}\,(3q_0 - 4k\pi h_0)_{h_0=1} = 3 + 3\frac{\Delta p}{\gamma} - 2\ln\frac{2}{\delta}.$$

Положив $\gamma \approx 0{,}001\ \frac{\kappa Г}{см^3}$, найдем следующую таблицу значений δ — радиуса трубы, при котором $F = 0$:

Δp	0	0,001	0,002	0,003
δ_1	0,45	0,11	0,022	0,005

при $\delta > \delta_1$ будет $q_1 > 0$.

Аналогичным способом может быть рассмотрен случай дренажной трубы на водоупоре [7]. Следует отметить, что ряды, получаемые с помощью изложенного метода, сходятся лишь для малых значений t.

§ 7. Задача о стягивании контура нефтеносности. Несколько более простой и более изученной является следующая задача. В горизонтальной плоскости в начальный момент времени задана площадь, занятая жидкостью (нефтью). Внутри контура L, ограничивающего эту область, заданы скважины в виде точечных источников. Спрашивается, как будет деформироваться со временем контур L, если считать, что на нем давление остается все время постоянным.

Это есть упрощенная схема задачи о передвижении нефти, окруженной водой в напорном пласте [8]. Дело в том, что для уравнений плоского движения воды и нефти можно принять такие уравнения:

$$v = -\frac{k_0}{\mu}\operatorname{grad} p, \qquad v_1 = -\frac{k_{01}}{\mu_1}\operatorname{grad} p_1. \quad (7.1)$$

Здесь буквы без индекса 1 относятся к области, занятой нефтью, с индексом 1 — к области, занятой окружающей нефть водой. Если считать, что вязкость воды очень мала по сравнению с вязкостью нефти, так что коэффициент μ_1 можно принять равным нулю, то следует принять $p_1 = \text{const}$ (иначе v_1 будет равно бесконечности). Отсюда следует, что давление на контуре L не должно зависеть от координат и может быть функцией только времени, в частности, быть постоянным. Тогда и потенциал скорости, про-

порциональный в данном случае давлению, должен сохранять постоянное значение на контуре. Дифференцируя уравнение

$$\varphi(x, y, t) = \text{const на } L$$

по времени так, как мы это делали в § 2, получим уравнение

$$m\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \tag{7.2}$$

которое должно выполняться на L во все время движения.

В работах П. П. Куфарева [11–14] получены в замкнутой форме решения задач об одной скважине и рядах равноотстоящих скважин для полуплоскости, полосы и окружности в качестве контура L. Простейшей задачей является задача о кардиоиде [9], уравнение которой в начальный момент времени задано в виде

$$z = \zeta + a\zeta^2, \quad \zeta = \xi,$$

причем считается, что $0 < a < \frac{1}{2}$, т. е. что кардионда не имеет угловой точки. Тогда, если центр скважины находится в точке $z = 0$, в последующие моменты времени уравнение контура L имеет вид

$$z = A_1(t)\zeta + A_2(t)\zeta^2,$$

где A_1, A_2 являются функциями времени.

Когда A_1 станет равным $2A_2 = (2a)^{1/3}$, кардиоида получит точку возврата, решение задачи станет многолистным и не будет уже годиться. Это же обстоятельство — появление угловых точек на контуре и одновременно многолистности решения раньше, чем точки контура дойдут до контура скважин (последние считаются близкими к окружностям, радиус которых мал по сравнению с размерами области), имеет место во всех указанных выше задачах [10–14]. Существование решения для малых t доказано при довольно общих предположениях о начальной форме контура [14].

Указанное свойство — потеря однолистности — ограничивает интерес теории. Возможно, что следует учитывать инерционные члены, которые мы выбросили в уравнениях движения при рассмотрении задач §§ 6 и 7.

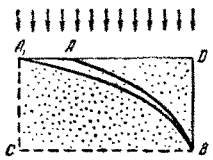
ГЛАВА XVI

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГРУНТОВЫХ ВОД

§ 1. Метод последовательной смены стационарных состояний. В некоторых случаях возможно применение приближенного метода, при котором движение в каждый момент времени рассматривается как установившееся, но граница области движения, относительно которой делаются те или иные упрощающие предположения, перемещается. При этом расход за элементарный промежуток времени равен изменению площади, занятой жидкостью, за этот промежуток времени.

Повидимому, К. Э. Лембке [1] принадлежит первое исследование такого рода (1886). Он рассмотрел задачи об осушении водоносного слоя при наличии горизонтальной дрены и при наличии вертикальной скважины. Мы остановимся на первой из этих задач.

Предположим, что над рассматриваемой площадью имеет место инфильтрация с постоянной интенсивностью ε. В точке B (фиг. 411) имеется дренажное устройство. В моменты времени t и $t+dt$ осушенная площадь пусть будет соответственно ABD, A_1BD. Предположим, что линия AB является параболой $y^2 = \frac{H^2}{L}x$, где L—длина, меняющаяся со временем, а H—мощность водоносного слоя (BD). Тогда расход рассматриваемого потока в единицу времени будет $q = ky\frac{dy}{dx} = k\frac{H^2}{2L}$. За промежуток времени dt, с одной стороны, количество воды, полученной из части водоносного слоя, осушенного эксплоатацией, равно $q\,dt$, с другой стороны, оно равно умноженному на пористость изменению площади A_1BD (которая равна $\frac{HL}{3}$), сложенному с количеством жидкости, принятым поверхностью A_1B за счет инфильтрации.



Фиг. 411.

В результате будем иметь уравнение

$$q\,dt = k\frac{H^2}{2L}\,dt = \frac{m}{3}H\,dL + L\varepsilon\,dt$$

или, по разделении переменных,

$$\frac{L\,dL}{\frac{H^2k}{2} - L^2\varepsilon} = \frac{3}{Hm}\,dt. \tag{1.1}$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание начальное условие $L(0) = 0$, получим:

$$L(t) = \frac{H\sqrt{k}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{1 - e^{-\alpha t}} \quad \left(\alpha = \frac{6\varepsilon}{H}\right). \tag{1.2}$$

При $t \to \infty$ получаем предельное значение длины водосборного сооружения, соответствующей установившемуся движению:

$$L_\infty = H\sqrt{\frac{k}{2\varepsilon}}. \tag{1.3}$$

Лембке назвал L_∞ пределом радиуса водосборного сооружения. Изменение расхода со временем выражается формулой

$$q = \frac{H\sqrt{k\varepsilon}}{\sqrt{2(1 - e^{-\alpha t})}}. \tag{1.4}$$

При $t = \infty$ получаем значение расхода в установившемся движении, когда весь он образуется за счет инфильтрации

$$q = H\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2}} = L_\infty\varepsilon. \tag{1.5}$$

Лембке рассмотрел также случай, когда размеры водоносного слоя не позволяют линии депрессии достичь длины, соответствующей нормальному действию дренажа, и различает две стадии движения, во второй из которых депрессионная кривая понижается, сохраняя длину.

В частном случае, когда инфильтрация отсутствует, уравнение (1.1) после интегрирования дает:

$$L = \sqrt{\frac{3kH}{m}}\,t = 1{,}732\sqrt{\frac{kH}{m}}\,t. \tag{1.6}$$

С помощью такого же приема можно получить приближенное решение задачи о продвижении языка грунтовых вод, вытекающих из канала с вертикальной стенкой, при наличии испарения со свободной поверхности с постоянной интенсивностью c. Так как теперь нужно будет рассматривать смоченную площадь A_1BC, величина ко-

торой равна $^2/_3\,HL$, то в решениях задачи (1.1) и (1.6) нужно будет $^1/_3$ заменить на $^2/_3$. Получим:

$$L=\frac{H\sqrt{k}}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{1-e^{-\alpha t}}\quad\left(\alpha=-\frac{3c}{H}\right),\tag{1.7}$$

а при отсутствии испарения

$$L=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{kH}{m}}\,t=1{,}225\sqrt{\frac{kH}{m}}\,t.\tag{1.8}$$

Последняя задача, о языке грунтовых вод при наличии испарения, рассматривалась В. М. Маккавеевым [2]. Он делает предположение, что уравнение кривой депрессии выражается в виде

$$h=H\left(\frac{L-x}{L}\right)^n,\tag{1.9}$$

где n — показатель, выбором которого можно распоряжаться.

Можно при этом рассматривать показатель n как изменяющийся со временем, но достаточно медленно, так что можно пренебречь величиной производной $\frac{dn}{dt}$. Для определения этого показателя делается подстановка выражения (1.9) в дифференциальное уравнение Буссинеска.

При отсутствии испарения получается случай $n=\frac{1}{2}$, рассмотренный выше. Для установившегося движения, когда весь расход, проходящий через A_1C, идет на испарение с A_1B, В. М. Маккавеев считает, что нужно принять линию A_1B за прямую, чтобы скорость фильтрации u была постоянной. Уравнение прямой будет:

$$h=\frac{H}{L_0}(L_0-x),\tag{1.10}$$

где L_0 — предельное значение L. Для скорости фильтрации получаем:

$$u=\frac{kH}{L_0}.$$

При этом для любой абсциссы x равенство расхода через ординату h и расхода испарения с участка прямой L_0-x (фиг. 411) дает:

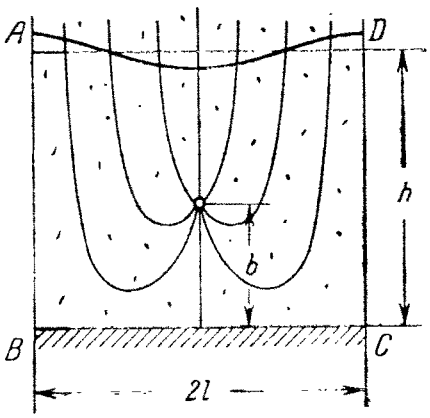
$$\frac{kH}{L_0}h=c(L_0-x),$$

откуда получаем значение L_0:

$$L_0=H\sqrt{\frac{k}{c}}.\tag{1.11}$$

Отметим, что формулы (1.10) и (1.11) дают точное гидромеха-

ническое решение задачи об установившейся фильтрации из канала с вертикальной стенкой при наличии испарения (глава VII, § 11; на фиг. 229 годограф скорости вырождается в точку C). Что же касается формулы (1.8), то в ней коэффициент 1,225 значительно отличается от коэффициента 1,616, который может быть получен из решения нелинейного уравнения Буссинеска (глава XIII, § 7). Поэтому заранее трудно сказать, какую степень точности даст применение метода последовательной смены стационарных состояний. Этот метод применяется в теории фильтрации нефти.



Фиг. 412.

Укажем здесь на примере возможность применения этого метода для решения некоторых задач, рассматриваемых как двумерные.

Пусть имеем систему равноотстоящих горизонтальных дрен. Линия BC представляет границу водоупора, центры дрен расположены на расстоянии b от водоупора (фиг. 412). Поместим в центры дрен точечные стоки интенсивности Q и рассмотрим бесконечную цепочку стоков в точках

$$z = bi, \quad \pm 2l + bi, \quad \pm 4l + bi, \ldots$$

Такую же цепочку стоков поместим в симметричных относительно оси абсцисс точках

$$z = -bi, \quad \pm 2l - bi, \quad \pm 4l - bi, \ldots$$

Комплексный потенциал такого течения, как известно из курса гидродинамики [5], имеет вид

$$\omega = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left[\sin\frac{\pi}{2l}(z - bi)\sin\frac{\pi}{2l}(z + bi)\right] + C =$$
$$= -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\cos\frac{\pi z}{l} - \operatorname{ch}\frac{\pi b}{l}\right) + C.$$

Отделив действительную часть от мнимой, получим выражение потенциала скорости

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \ln\left\{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y-b)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(y+b)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right]\right\} + C. \quad (1.12)$$

Сделаем предположение, что выражение (1.12) имеет место и при неустановившемся движении, причем расход будет функцией времени, подлежащей определению. В начальный момент времени уравнение свободной поверхности пусть будет $y = h_0$. В дальнейшем свободная поверхность будет изменять свою форму. Но мы сначала сделаем

предположение, что она представляет все время горизонтальный отрезок $y = h(t)$, понижающийся с течением времени. Другими словами, мы принимаем прямую $y = h(t)$ за некоторую среднюю линию, около которой колеблется действительная свободная поверхность.

Расход скважины за промежуток времени dt равен изменению за этот же промежуток времени площади, занятой водой, в пределах области влияния одной скважины. Это дает уравнение

$$Q\,dt = -2l\,dh. \tag{1.13}$$

Для того чтобы найти выражение расхода Q, поступим так. Сначала возьмем на свободной поверхности точку $x = 0$. Для нее $y = h - \eta_1$. Считая, что на свободной поверхности имеет место капиллярное поднятие высоты $h_к$, мы будем иметь условие $\varphi = -k(y - h_к)$, что дает $\varphi = -k(h - \eta_1 - h_к)$.

Подставим эти выражения в (1.12), причем в правой части уравнения пренебрежем величиной η_1 по сравнению с h; получим:

$$-k(h - \eta_1 - h_к) = -\frac{Q}{4\pi}\ln\left[\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(h-b)}{l} - 1\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(h+b)}{l} - 1\right)\right] + C.$$

Точно так же, полагая $x = l$, $y = h + \eta_2$, $\varphi = -k(h + \eta_2 - h_к)$, получим уравнение

$$-k(h + \eta_2 - h_к) = -\frac{Q}{4\pi}\ln\left[\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(h-b)}{l} + 1\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(h+b)}{l} + 1\right)\right] + C.$$

Возьмем полусумму левых и правых частей последних уравнений и пренебрежем в левой части величиной $\eta_1 - \eta_2$ по сравнению с h. Получим после некоторых преобразований:

$$-k(h - h_к) = -\frac{Q}{4\pi}\ln\left[\operatorname{sh}\frac{\pi(h-b)}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi(h+b)}{l}\right] + C. \tag{1.14}$$

Теперь предположим, что на контуре дрены, которую мы будем считать окружностью радиуса δ (этот радиус считаем малым по сравнению с основными размерами области движения: l, h), напор равен величине h_c и, следовательно, потенциал скорости равен $-kh_c$. Окружность радиуса δ с центром в точке $x = 0$, $y = b$, собственно говоря, не будет эквипотенциалью, но мы приближенно принимаем ее за таковую. В частности, мы можем считать, что в точке $x = 0$, $y = b + \delta$ потенциал скорости равен $-kh_c$. Подстановка в уравнение (1.12) дает:

$$-kh_c = -\frac{Q}{4\pi}\ln\left\{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi\delta}{l} - 1\right)\left[\operatorname{ch}\frac{\pi(\delta+2b)}{l} - 1\right]\right\} + C. \tag{1.15}$$

Вычитая (1.15) из (1.14), мы исключим постоянную C и получим выражение расхода дренажной трубы (единицы ее длины)

$$Q = \frac{4k\pi(h - h_к - h_c)}{\ln\left[\operatorname{sh}\frac{\pi(h-b)}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi(h+b)}{l}\right] - \gamma}. \tag{1.16}$$

Здесь через γ обозначено выражение

$$\gamma = \ln\left(4 \operatorname{sh}\frac{\pi\delta}{2l}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{l}\right) \approx \ln\left(\frac{2\pi\delta}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi b}{l}\right). \tag{1.17}$$

Подставим полученное выражение для расхода в формулу (1.13) и разделим в полученном таким образом уравнении переменные. Получим, интегрируя, после некоторых преобразований:

$$t = -\frac{l}{2\pi k}\int_{h_0}^{h} \frac{\ln\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi h}{l} - \operatorname{ch}\frac{2\pi b}{l}\right)\right] - \gamma}{h - h_к - h_e}\,dh. \tag{1.18}$$

Выражение, стоящее в числителе под знаком логарифма, можно преобразовать так:

$$\ln\left(\frac{e^{\frac{2\pi h}{l}} + e^{-\frac{2\pi h}{l}}}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{2\pi b}{l}\right) =$$

$$= \frac{2\pi h}{l} - \ln 4 + \ln\left(1 + e^{-\frac{4\pi h}{l}} - e^{-\frac{2\pi(h-b)}{l}} - e^{-\frac{2\pi(h+b)}{l}}\right).$$

Во все время движения имеет место неравенство

$$h \geqslant b + h_к + h_e;$$

поэтому, если $h_к + h_e > 0$, показатели всех трех выражений, стоящих рядом с единицей под знаком логарифма, будут отрицательными, и можно применить разложение логарифма в ряд. В начальной стадии движения, когда h еще велико, этот член будет малым, и для t будем иметь приближенное выражение

$$t \approx -\frac{l}{2\pi k}\int_{h_0}^{h} \frac{\frac{2\pi h}{l} - \ln 4 - \gamma}{h - h_к - h_e}\,dh =$$

$$= \frac{h_0 - h}{k} - \frac{h_к + h_e - \ln 4 - \gamma}{k}\ln(h - h_к - h_e). \tag{1.19}$$

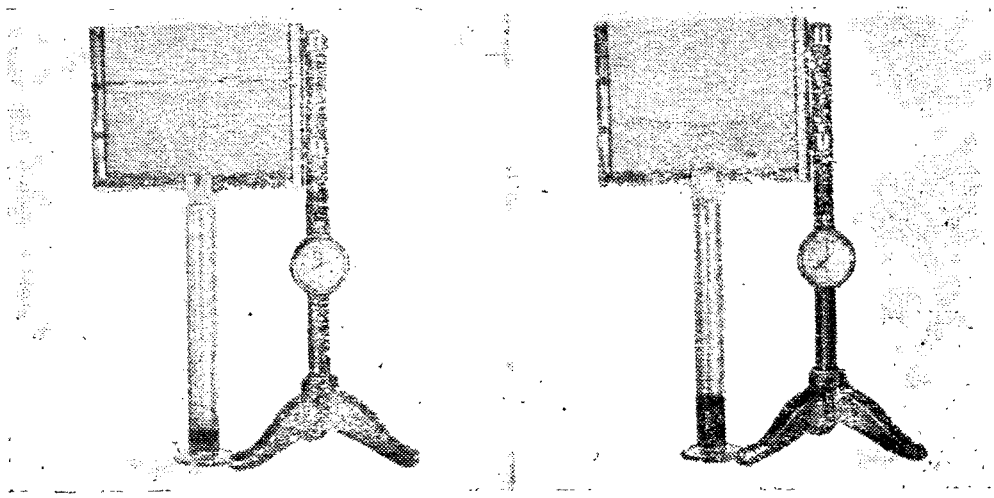
После того как найдена зависимость h от t, с помощью равенства (1.16) можно вычислить значения Q в функции от t.

Для того чтобы получить приближенное уравнение свободной поверхности, воспользуемся уравнением для потенциала скорости (1.12), из которого исключим произвольную постоянную с помощью (1.14). Принимая во внимание, что на свободной поверхности $\varphi = -k(y - h_к)$, получим:

$$y = h + \frac{Q}{4\pi k}\ln\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(h-b)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right)\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(y+b)}{l} - \cos\frac{\pi x}{l}\right)}{\operatorname{sh}\frac{\pi(h-b)}{l}\operatorname{sh}\frac{\pi(h+b)}{l}}. \tag{1.20}$$

Полагая $b = 0$, получим частный случай дрены на водоупоре. На фиг. 413 даны два положения свободной поверхности в глицериновом щелевом лотке, соответствующие дрене на водоупоре.

Для этого случая было произведено сравнение результатов вычислений с результатами экспериментов в щелевом лотке [6].



Фиг. 413.

§ 2. Метод конечных разностей. В главе XIII мы имели дифференциальное уравнение грунтового потока со свободной поверхностью

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\varkappa}{2m}\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{w}{m}. \tag{2.1}$$

Здесь w — инфильтрация сверху, m — порозность, или недостаток насыщения. Ордината свободной поверхности h отсчитывается от водоупора.

Уравнение (2.1) можно заменить уравнением в конечных разностях

$$\frac{h_{i,\,k+1} - h_{i,\,k}}{\Delta t} = \frac{\varkappa}{2m}\,\frac{h^2_{i+1,\,k} - 2h^2_{i,\,k} + h^2_{i-1,\,k}}{\Delta x^2} + \frac{w}{m}, \tag{2.2}$$

где индексы $i-1$, i, $i+1$ обозначают последовательные сечения грунтового потока, Δx — расстояния между сечениями (фиг. 414), числа k, $k+1$ — порядковые индексы для моментов времени, Δt — расчетные промежутки времени.

Величины $\varkappa$, m и w можно здесь считать переменными. Г. Н. Каменский [7] приводит результаты вычислений для участка канала Москва-Волга и сравнение их с наблюденными уровнями. Интересно,

что промежутки Δx и Δt можно брать довольно крупными. Так Г. Н. Каменский принимал $\Delta x = 100$ *м*, $\Delta t = 5$ суткам.

Для вычислений формула (1.2) переписывается в виде, решенном относительно $h_{i,\,k+1}$:

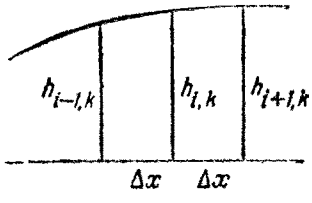
$$h_{i,\,k+1} = h_{i,\,k} + \frac{\varkappa\,\Delta t}{2m\,\Delta x^2}\left(h^2_{i+1,\,k} - 2h^2_{i,\,k} + h^2_{i-1,\,k}\right) + \frac{w\,\Delta t}{m}, \quad (2.3)$$

причем нужно исходить из заданных начальных и граничных условий.

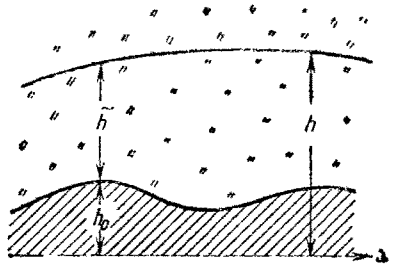
С помощью конечных разностей можно вести расчет и для случая, когда граница водоупора не является горизонтальной плоскостью, но является криволинейной поверхностью. Пусть уравнение этой поверхности имеет вид

$$z = h_0(x).$$

Отсчитывая ординату свободной поверхности от некоторой горизонтальной линии, обозначим разность $h - h_0$, т. е. глубину потока,



Фиг. 414.



Фиг. 415.

отсчитываемую от водоупора, через $\tilde{h}$. Тогда уравнение (2.1) нужно будет заменить таким (фиг. 415):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\varkappa}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{w}{m}, \quad (2.4)$$

а уравнение (2.3) — следующим уравнением:

$$h_{i,\,k+1} = h_{i,\,k} + \frac{\varkappa\,\Delta t}{m\,\Delta x^2}\tilde{h}_{i,\,k}\left(h_{i+1,\,k} - 2h_{i,\,k} + h_{i-1,\,k}\right) + \frac{w}{m}\Delta t. \quad (2.5)$$

§ 3. Графический способ интегрирования уравнения теплопроводности. Можно указать [8] графический способ интегрирования уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Для него формула, соответствующая (2.3), имеет вид

$$u_{i,\,k+1} = \left(1 - \frac{2a^2\,\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_{i,\,k} + \frac{a^2\,\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i-1,\,k} + u_{i+1,\,k}\right). \quad (3.2)$$

Можно выбирать различные соотношения между Δt и Δx [9]. При специальном выборе Δt и Δx, а именно, при

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2a^2} \tag{3.3}$$

уравнение упрощается и принимает вид

$$u_{i,\,k+1} = \frac{u_{i-1,\,k} + u_{i+1,\,k}}{2}. \tag{3.4}$$

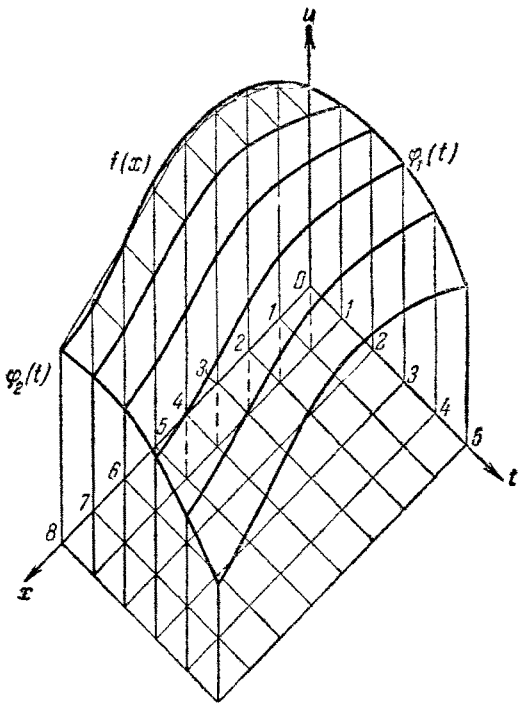
Введем систему координат $(x,\ t,\ u)$. Допустим, что нам нужно найти решение уравнения (3.1) при начальном условии

$$u(x,\ 0) = f(x) \tag{3.5}$$

и граничных условиях

$$u(0,\ t) = \varphi_1(t), \quad u(l,\ t) = \varphi_2(t). \tag{3.6}$$

На оси x отложим длину l и разделим ее на n частей, каждая из которых будет равна $\Delta x = \frac{l}{n}$. На плоскости $t = 0$ построим линию $u = f(x)$, а на плоскостях $x = 0$ и $x = l$ построим соответственно линии $u = \varphi_1(t)$ и $u = \varphi_2(t)$. Вдоль оси t будем откладывать отрезки Δt, вычисленные по формуле (3.3).



Фиг. 416.

Теперь, рассматривая ординаты начальной кривой u_{00} и u_{20}, возьмем согласно формуле (3.4) их полусумму. Получим ординату u_{11}. Можно полусумму ординат определять с помощью приложения линейки к точкам u_{00} и u_{20} и проведения средней ординаты.

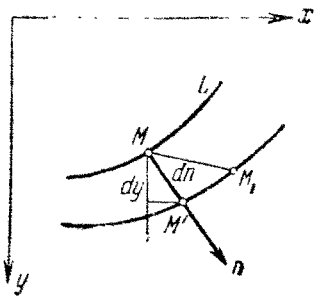
Приложив линейку к концам ординат u_{10} и u_{30}, отмечаем точку пересечения этой прямой на ординате u_{20}, отрезок которой от оси x до отмеченной точки дает ординату u_{21}, и т. д. Полученные ординаты переносим параллельно оси u в точки $(1,\ 1), (2,\ 1), \ldots, (n-1,\ 1)$ первого слоя. Соединив концы ординат $u_{01}, u_{11}, \ldots, u_{n1}$ плавной линией, получим кривую для момента времени $t_1 = \Delta t$.

Построив средние арифметические ординат этой кривой и перенеся их в точки $(1,\ 2), (2,\ 2), \ldots, (n-1,\ 2)$, будем знать величины

ординат $u_{02}, u_{12}, \ldots, u_{n2}$, по которым построим кривую для следующего момента времени $t_2 = 2\Delta t$, и т. д.

При построении рекомендуется изображать область (x, t) в виде прямоугольника (фиг. 416), а ординаты u — в виде вертикальных отрезков. В цитированной статье [8] рассматривается уравнение теплопроводности для трех независимых переменных (x, y, t), а также для четырех (x, y, z, t).

§ 4. Графический способ расчета плоских неустановившихся движений грунтовых вод. Как мы уже видели, на свободной поверхности грунтового потока давление принимается постоянным, равным атмосферному давлению или уменьшенному на величину давления, соответствующего капиллярному поднятию.



Фиг. 417.

Линия свободной поверхности является, таким образом, линией равного давления или изобарой, уравнение которой есть ($p_0 = \text{const}$)

$$p(x, y, t) = p_0. \tag{4.1}$$

Возьмем точку $M(x, y)$ на депрессионной кривой в момент времени t. В момент $t + \Delta t$ она займет положение M_1 (фиг. 417). Проведем отрезок нормали $\Delta n = MM'$ к линии L в точке M. Предел отношения $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ при $\Delta t = 0$

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt} \tag{4.2}$$

называется скоростью перемещения линии L. Эта скорость связана с нормальной составляющей v_n скорости фильтрации в точке M равенством

$$\frac{dn}{dt} = \frac{v_n}{m} = \frac{1}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial n}. \tag{4.3}$$

С помощью соотношения

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} - y\right) \tag{4.4}$$

($\gamma = \rho g$ — объемный вес жидкости), имеющего место при направленной вниз оси y, получаем:

$$N = \frac{k}{m}\left(\frac{dy}{dn} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n}\right). \tag{4.5}$$

Как видно из фиг. 417,

$$\frac{dy}{dn} = \cos(n, y),$$

где n — нормаль, направленная в сторону перемещения линии L. Поэтому получаем:

$$\frac{dn}{dt} = N = \frac{k}{m}\left(\cos(n, y) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n}\right). \tag{4.6}$$

Заметим, что формула (4.6) имеет место и для трехмерного пространства.

В случае установившегося движения $N = 0$, а потому имеет место соотношение

$$\cos(n, y) = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим частный случай, когда вода просачивается по вертикали под напором H (фиг. 368). Так как давление p является гармонической функцией, зависящей только от координаты y, то оно является линейной функцией от y, и, следовательно, Δp формулы (4.6) есть величина постоянная:

$$\Delta p = (\gamma H + p_0) - p_0 = \gamma H.$$

За Δn нужно принять все расстояние y, т. е.

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{H}{y}.$$

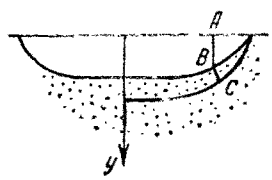
Так как направление нормали совпадает с направлением оси y, то

$$\cos(n, y) = 1, \quad \frac{dn}{dt} = \frac{dy}{dt},$$

и (3.6) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{H}{y}\right).$$

Мы получили уравнение (3.12) главы XII, для решения которого у нас были приведены график и таблица. В нашем случае имеем:



Фиг. 418.

$$\tau = \eta - \ln(1 + \eta), \quad \tau = \frac{kt}{mH}, \quad \eta = \frac{y}{H}. \tag{4.8}$$

Начальную стадию движения можно рассчитывать по формуле (4.8) или приближенным формулам § 3 главы XII, принимая отрезок BA (фиг. 418) за глубину канала H, изменяющуюся от одного сечения канала к другому.

§ 5. Примеры графического расчета. Допустим, что форма свободной поверхности в некоторый момент времени t_1 известна. Пусть требуется определить форму этой поверхности к моменту времени $t_1 + \Delta t$, где Δt — достаточно малая величина для того, чтобы можно было считать скорость перемещения $\frac{dn}{dt}$ свободной поверхности постоянной в течение промежутка времени Δt. Для этого по

формуле (4.6) достаточно вычислить косинус угла между нормалью к поверхности и осью y и найти $\frac{\Delta p}{\Delta n}$ в момент времени t_1. Если поле изобар известно в момент времени t_1, то Δp можно вычислить по изобаре $p = p_0$ и по изобаре $p = p_1$, ближайшей к p_0. Таким образом, рассматриваемая задача приводится к построению системы изобар в данный момент времени.

Так как давление удовлетворяет уравнению Лапласа, то $p(x, y)$ есть гармоническая функция. Обозначим сопряженную с нею функцию через p'. Тогда величина

$$P = p + p'$$

будет лишь множителем отличаться от функции Жуковского θ.

Между функцией тока и потенциалом скорости, с одной стороны, и величинами p и p', с другой стороны, имеем зависимости

$$\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} - y\right), \quad \psi = -k\left(\frac{p'}{\gamma} + x\right).$$

Удобнее ввести две другие функции вместо φ и ψ, а именно, напор

$$h = \frac{p}{\gamma} - y = -\frac{\varphi}{k} \tag{4.9}$$

и функцию, определяемую формулой

$$q = -\frac{\psi}{k} = \frac{p'}{\gamma} + x. \tag{4.10}$$

Эту функцию можно назвать *приведенным расходом*.

Приняв для случая фильтрации воды $\gamma = 1$, перепишем последние равенства в виде (p измеряется в метрах)

$$h = p - y, \quad q = p' + x. \tag{4.11}$$

Мы имеем три семейства ортогональных линий:

$$p = \text{const}, \quad p' = \text{const}; \quad h = \text{const}, \quad q = \text{const}; \quad x = \text{const}, \quad y = \text{const}.$$

Нам нужны линии $p = \text{const}$, но для контроля полезно использовать свойства остальных линий.

Сделаем некоторые указания по поводу различных случаев.

Случай 1. Пусть дано поперечное сечение канала произвольной формы (фиг. 419). Будем считать давление на свободной поверхности равным нулю. Можно разметить значения давления вдоль периметра канала, считая, что в канале давление распределяется по гидростатическому закону.

Пусть линия ABC есть линия $p = 0$ в момент времени t. Можно на-глаз провести линии $p = 1$, $p = 0{,}25$, $p = 0{,}50$, ... и построить ортогональные к ним линии $p' = \text{const}$. Полученную сетку нужно

выровнять, пользуясь существующими приемами выравнивания ортогональных изотермических сеток (см. главу XI). Вдоль изобары $p = p_1$ из (4.4) имеем:

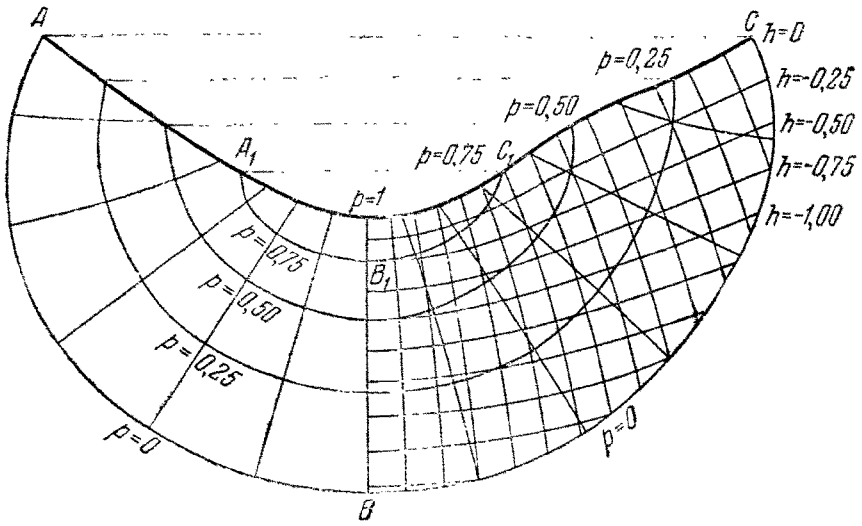
$$h = -y + p_1,$$

т. е. вдоль изобары h является линейной функцией от y. Точно так же вдоль линии тока $q = q_1$ имеем, что p' есть линейная функция x:

$$p' = -x + q_1.$$

Построим поверхности $h = \text{const}$ и $q = \text{const}$.

С этой целью разметим значения h вдоль контура $p = 0$ (фиг. 420) и проведем семейство линий $y = \text{const}$. Построив соответствующие диагонали этой сетки, мы найдем семейство линий $h = \text{const}$.



Фиг. 419.

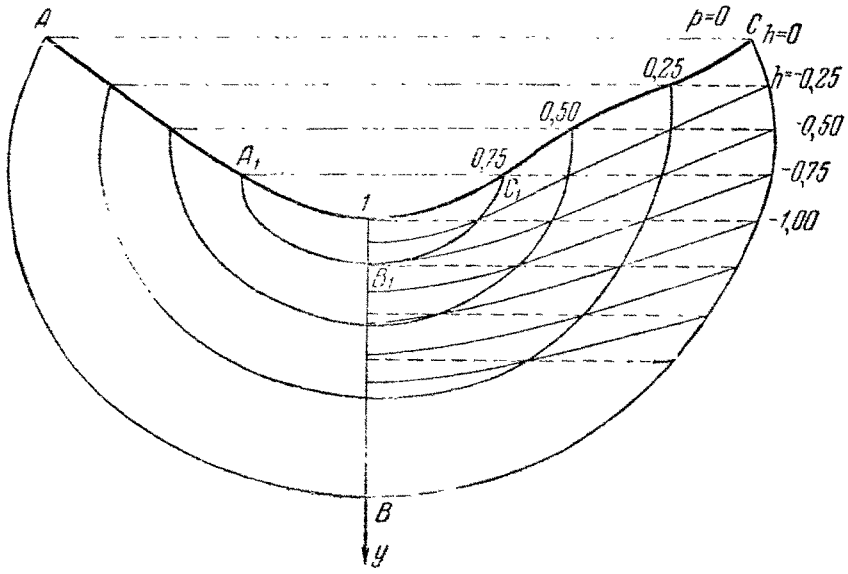
Точно так же, построив диагонали сетки, составленной из линий $p' = \text{const}$, $x = \text{const}$ (фиг. 421), найдем семейство линий $q = \text{const}$.

Линии $h = \text{const}$ и $q = \text{const}$ должны получиться взаимно ортогональными, если первоначальная сетка $p = \text{const}$, $p' = \text{const}$ была правильна. Сетка, представленная на фиг. 419, должна получиться наложением фиг. 420 и 421.

Наоборот, имея сетку линий $h = \text{const}$, $q = \text{const}$ и проведя соответственно семейства линий $y = \text{const}$, $x = \text{const}$, графическим сложением можно построить семейства линий $p = \text{const}$, $p' = \text{const}$ (семейство $p' = \text{const}$ играет лишь вспомогательную роль).

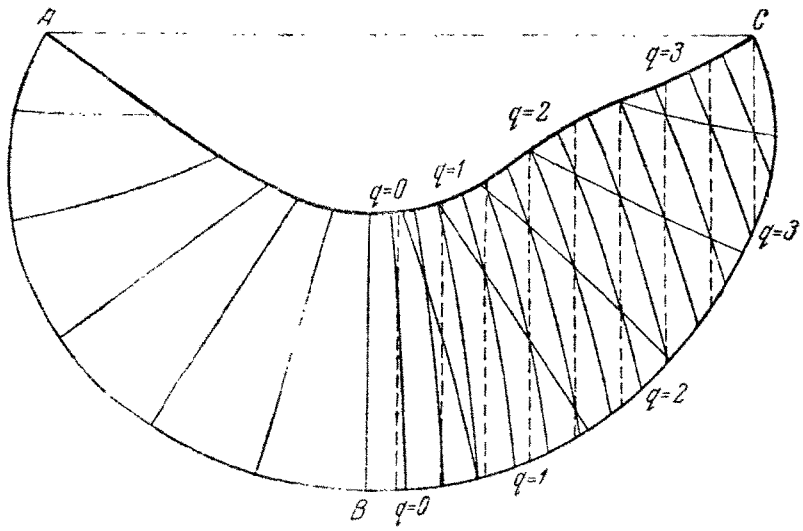
Когда установлено положение изобары $p = p_1$, ближайшей к изобаре $p = p_0$, по формуле (4.6) можно вычислить $N = \frac{\Delta n}{\Delta t}$ в различных

точках поверхности $p=0$ и затем отложить по нормали к этой поверхности отрезки $\Delta n = N\,\Delta t$ для данного значения Δt.



Фиг. 420.

Построив свободную поверхность для момента времени $t_2 = t_1 + \Delta t$, нужно провести процесс построения изобар для этого момента вре-



Фиг. 421.

мени и т. д. Расход можно определять по числу делений вдоль канала для q или посредством измерения смоченной площади.

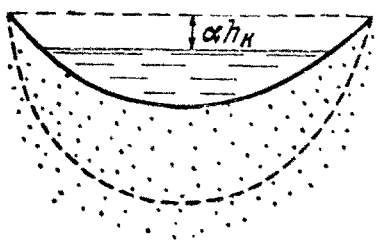
Отметим, что учет капиллярности грунта можно произвести изменением уровня воды в канале на высоту действующего капиллярного

поднятия (фиг. 422), равного некоторой доле высоты $h_к$ капиллярного поднятия в трубке (см. главу V).

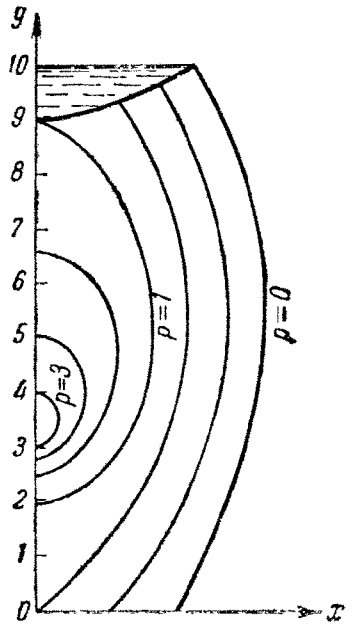
Случай 2. Если вода, просочившаяся из канала, достигла водоупора, который является твердой стенкой, то построение изолиний усложняется. Линии тока изменяют свое направление вблизи водоупора.

Линии равного напора h ортогональны линиям тока, следовательно, некоторые из линий $h = \text{const}$ должны быть нормальны к горизонтальной линии тока, другие — к вертикальной линии фиг. 423.

На фиг. 424 изображены линии равного напора для случая, когда вода просачивается полосой с поверхности земли, на которой слой воды бесконечно тонок ($p = 0$), в тот момент, когда эта полоса воды дойдет до водоупора; ось y проходит через середину полосы. Линии $h(x, y) = \text{const}$ построены по методу выравнивания с помощью средних



Фиг. 422.



Фиг. 423.

арифметических значений функции $h(x, y)$. Линии равного приведенного расхода проведены на этом чертеже на-глаз.

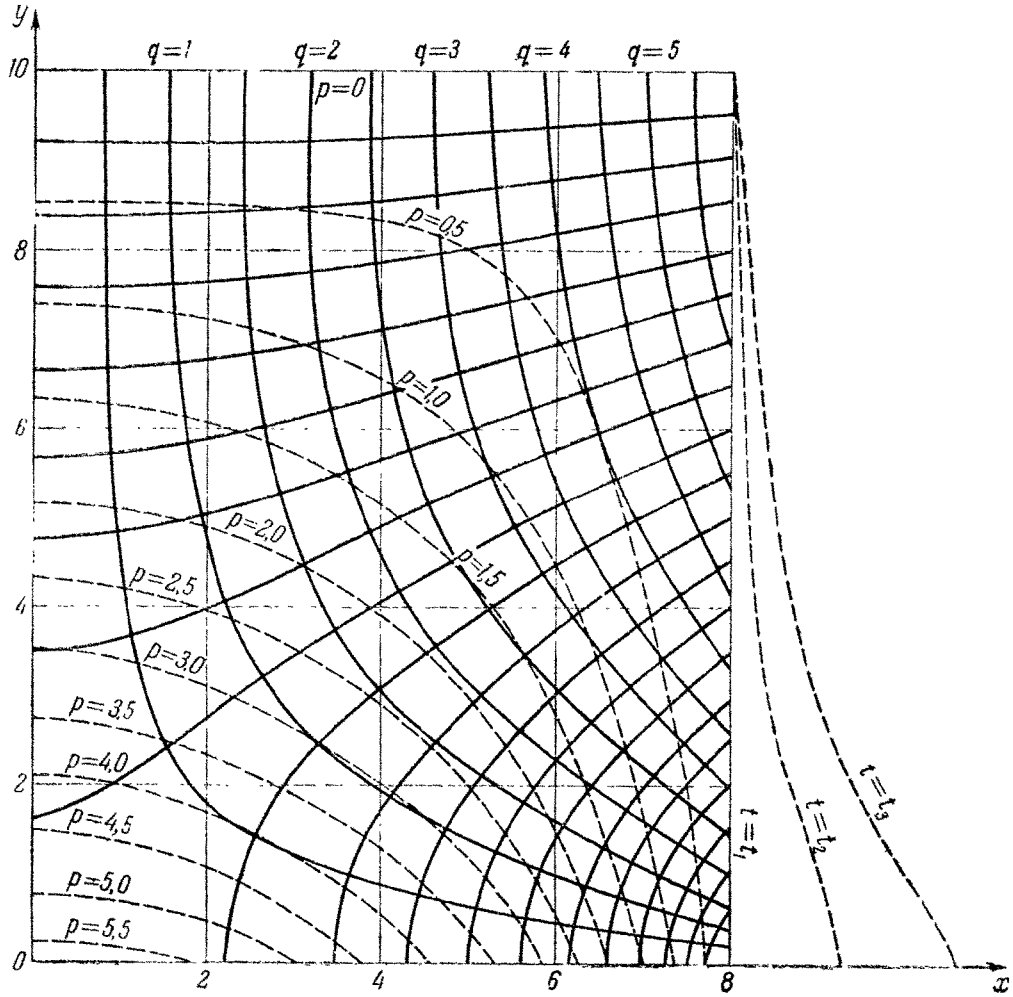
На той же фиг. 424 построены для этого случая изобары для момента соприкосновения просачивающейся полосы воды с водоупором. При построении использовано соотношение $p = h - y$. Линии $t = t_2$ и $t = t_3$ — положения языка воды в два последующих момента времени.

На фиг. 425 представлен схематично случай, когда вода, фильтрующаяся из канала, соприкасается с поверхностью неподвижных грунтовых вод. Мы видим, что вблизи места соприкосновения образуется область повышенного давления.

Наблюдения над движением глицерина в щелевом лотке показывают, что если жидкость, текущая сверху, соприкасается с нижележащей жидкостью, то свободная поверхность «грунтовых вод» сразу приподнимается вблизи точки соприкосновения (фиг. 426). Это проис-

ходит от того, что изобары, первоначально горизонтальные в области неподвижной грунтовой воды, теперь поднимаются (в левой части фиг. 426) и сгущаются под максимумом давления, давая здесь большие градиенты давления.

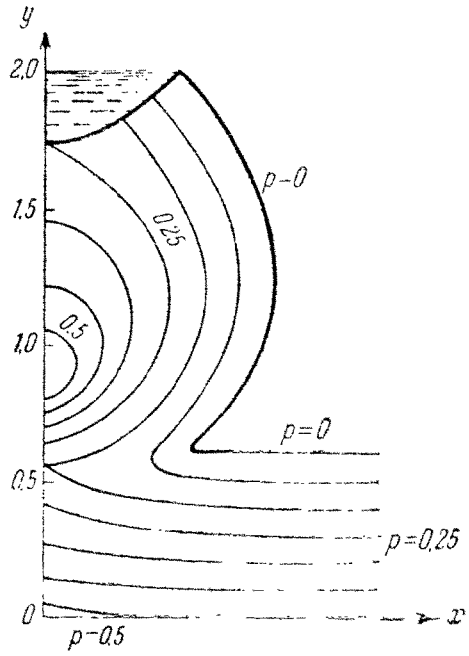
То обстоятельство, что первоначально горизонтальная изобара поверхности грунтовых вод должна мгновенно приподняться вблизи



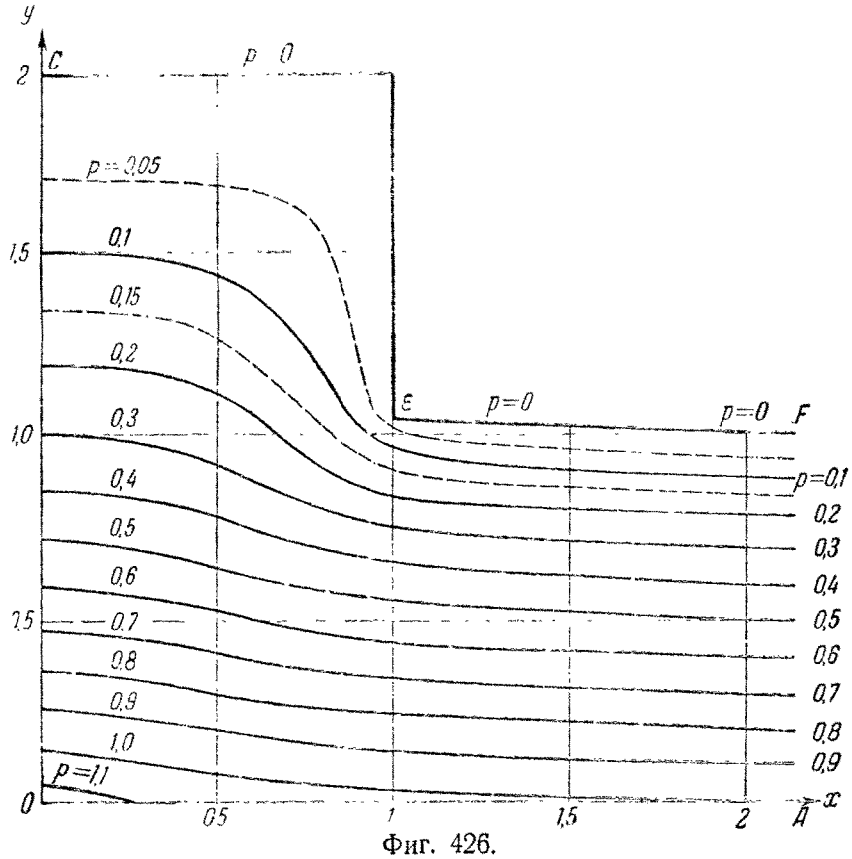
Фиг. 424.

места соприкосновения с притекающими из канала грунтовыми водами, следует из того, что иначе равенство $p = h + y$ привело бы к противоречию: если бы мы имели $y = \text{const}$, $p = \text{const}$, то было бы $h = \text{const}$, т. е. горизонтальная прямая была бы линией равного напора во время движения грунтового потока.

Следует обратить внимание на то, что изобары (фиг. 425) сильно сгущаются около области максимума давления и притом в нижней ее

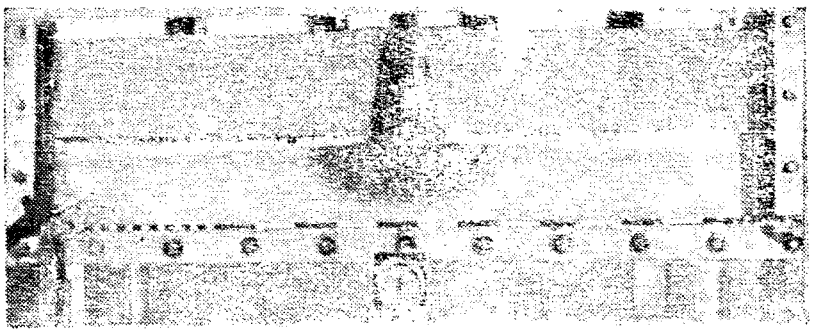


Фиг. 425.



Фиг. 426.

части. Это означает, что в области под максимумом образуются большие градиенты давления и, следовательно, большие скорости, направленные вниз и вправо. Поэтому можно ожидать, что просачивающаяся из канала вода будет продавливаться в нижележащие грунтовые воды и выдавливать их так, что на некотором расстоянии от канала мы будем иметь поднимающиеся грунтовые воды. Такое именно представление о явлении фильтрации было выработано гидрогеологами на основании их наблюдений над изменением уровня грунтовых вод при фильтрации из канала и замеров степени засоленности воды. Дело в том, что грунтовые воды бывают сильнее минерализованы, чем воды, поступающие из канала, — это и позволяет судить о картине



Фиг. 427.

фильтрации. Эксперименты в щелевом лотке и в фильтрационном лотке подтвердили и уточнили представления гидрогеологов.

На фиг. 427 дан фотоснимок следующего опыта в глицериновом лотке. В верхней полосе виден слой парафина, заложенный для уменьшения ширины щели. Таким образом, две полосы щелевого лотка отвечают двум слоям грунта с различными проницаемостями. В нижнем слое налит глицерин, что соответствует первоначальному залеганию грунтовых вод. В середине верхней части лотка сделана выемка, изображающая поперечное сечение канала. Она все время пополняется глицерином, цвет которого отличается от цвета нижнего глицерина; поэтому легко наблюдать за границей раздела между двумя жидкостями: вытекающей из канала и находящейся в нижней области. Видно, как верхняя жидкость выдавливает нижнюю, заставляя ее приподниматься на границе соприкосновения двух жидкостей (при этом часть нижней жидкости вытекает через боковые стенки лотка).

§ 6. Задача с осевой симметрией. Этот случай может представиться, когда изучается растекание воды при поливе небольшого участка почвы, фильтрация из колодца и т. д. Введем цилиндрические координаты r, z, принимая за ось z ось вращения; тогда можно написать уравнение свободной поверхности в виде

$$p(z, r, t) = p_0. \tag{6.1}$$

Мы рассматриваем движение с потенциалом скорости $\varphi(r, z, t)$. Как известно, в случае осевой симметрии существует функция тока $\psi(r, z, t)$, определяемая с помощью уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

При этом φ и ψ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0.$$

Потенциал скорости связан с давлением уравнением

$$\varphi=-k\left(\frac{p}{\gamma}-z\right) \tag{6.3}$$

(ось z направлена вниз).

Дифференцируя по времени (6.1) и принимая во внимание (6.3), а также то, что

$$m\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$m\frac{dr}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

получим условие для давления на свободной поверхности в виде следующего уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{\gamma m}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2\right]-\frac{k}{m}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Это уравнение, как и для плоского случая, можно привести к виду

$$N=\frac{dn}{dt}=\frac{k}{m}\left[\cos(n, z)-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial n}\right].$$

Давление удовлетворяет такому же уравнению, как функция φ:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=0.$$

Если считать функции φ и ψ, связанные соотношениями (6.2), «сопряженными», то можно к функции p подобрать «сопряженную» функцию p', определяемую уравнением

$$\frac{k}{\gamma}p'=-\psi-\frac{kr^2}{2}$$

или

$$\psi = -k\left(\frac{p'}{\gamma} + \frac{r^2}{2}\right).$$

Функции p и p' удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial r}$$

и p' удовлетворяет тому же уравнению, что и ψ:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial r} = 0.$$

Семейства линий $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ взаимно ортогональны, так же как семейства линий $p = \text{const}$ и $p' = \text{const}$. Но эти системы, как мы видели (глава XI, § 4), не изотермичны, т. е. не могут составить квадратную сетку.

ЛИТЕРАТУРА

К введению

1. Данилевский В. В., Русская техника. Ленинград, 1947. История гидросиловых установок в России до XIX в. М., 1940.

2. Гордеев Д. И., Подземная вода по воззрениям М. В. Ломоносова. Труды Лаборатории гидрогеологических проблем им. Ф. П. Саваренского. АН СССР, т. 1, 1948.

3. Лембке К. Э. 1) Инженер, Журнал Министерства путей сообщения, 1886, № 2. 2) Журнал Министерства путей сообщения, 1887, №№ 17—19, 1888, № 5.

4. Евневич И. А., Несколько слов о законах движения подпочвенных вод. Инженерный журнал, 1890, № 7 и 8, Спб.

5. Краснопольский А. А., Грунтовые и артезианские колодцы СПБ, 1912. См. также Горный журнал, №№ 3—6 (1912).

К главе I

1. Жуковский Н. Е., Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод (1889). Собрание сочинений, т. III, Гостехиздат, 1949.

2. Жуковский Н. Е., О влиянии давления на насыщенные водою пески (1890). Собрание сочинений, т. III, Гостехиздат, 1949.

3. Жуковский Н. Е., Просачивание воды через плотины (1920). Собрание сочинений, т. VII, Гостехиздат, 1950.

4. Павловский Н. Н., Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. Петроград, 1922 (литогр.).

5. Лебедев А. Ф., Почвенные и грунтовые воды. Изд. АН СССР, 1936.

6. Лейбензон Л. С., Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, М., 1947.

7. Пузыревская Т. Н., Просачивание воды через песчаные грунты Изв. Научно-исследовательского ин-та гидротехники (НИИГ), т. 1 (1931).

8. Сергеев Е. М., Избранные главы общего грунтоведения. Изд. Моск. гос. ун-та, М., 1946. Общее грунтоведение, Изд. МГУ, 1952.

9. Васильев А. М., Природа и формы влажности в почвах и грунтах. Советская геология, сборник № 35, Госгеолиздат, 1948.

10. Иванова М. В., Зависимость некоторых физических свойств грунтов от количества коллоидов, Труды Ин-та сооружений. вып. 1, М., 1928.

11. Приклонский В. А., Общее грунтоведение, ч. 1. М.—Л., 1948.

12. Качинский Н. А., Почва, ее свойства и жизнь. Изд-во АН СССР, 1951.

13. Вильямс В. Р., Почвоведение, ч. I и II.

14. Цытович Н. А., Механика грунтов, изд. 3-е. Гос. изд-во лит-ры по стр-ву и архитектуре, М.—Л., 1951.

15. Черкасов А. А. Мелиорация и сельскохозяйственное водоснабжение. Сельхозгиз, М., 1950.

16. Замарин Е. А. Расчет движения грунтовых вод. Ташкент, 1928.

17. Ведерников В. В., Результаты опытов по свободной фильтрации. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 8, 1947; см. также Доклады АН СССР, т. 55 (1947), № 3.

18. Аравин В. И. и Нумеров С. Н., Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Госстройиздат, М., 1948.

19. Ломизе Г. М., Фильтрация в трещиноватых породах. Госэнергоиздат, М. — Л., 1951.

20. Аверьянов С. Ф., О водопроницаемости почво-грунтов при неполном их насыщении. Инженерный сборник, т. VII (1950); см. также: Зависимость водопроницаемости почво-грунтов от содержания в них воздуха. Доклады АН СССР, т. 69 (1949), № 2.

21. Горбунов Б. П., О водопроницаемости лессовидных грунтов с нарушенной структурой. Труды Ин-та сооружений, АН УзССР, вып. 2, Ташкент, 1951.

22. Darcy H., Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856.

23. Dupuit J., Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables. 2-е изд., Paris, 1863.

24. Каменский Г. Н., Основы динамики подземных вод, изд. 2-е. Госгеолиздат, М., 1943.

25. Христианович С. А., Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. Прикл. матем. и мех., т. IV (1940), вып. 1.

26. Ризенкампф Б. К., Гидравлика грунтовых вод. Учен. зап. Саратовского гос. ун-та, Серия ФМН, т. I (XIV) (1938), вып. 1.

27. Михайлов Г. К., К геометрии фиктивного грунта. Прикл. матем. и мех., т. XVI (1952), вып. 4.

28. Гильберт Д. и Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, изд. 2-е, Гостехиздат, 1951.

29. Гиринский Н. К., Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология, Сб. статей № 9, М.—Л., 1947.

30. Определение геотехнических характеристик грунта. Всесоюзный научно-исслед. ин-т гидротехники, Госстройиздат, Ленинград, 1941.

31. Технические условия и нормы проектирования земляных насыпных плотин. Госстройиздат, 1941.

32. Кочин Н. Е., Кнбель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидродинамика, ч. I, II. Гостехиздат, 1948.

33. Прандтль Л., Гидроаэромеханика, изд. 2-е. Гос. изд-во иностр. лит-ры, М., 1951.

34. Соколовский В. В., О нелинейной фильтрации грунтовых вод. Прикл. матем. и мех., т. XIII (1949), вып. 5.

35. Роде А. А., Почвенная влага. Изд-во АН СССР, М. 1952.

36. Гришин М. М., Гидротехнические сооружения, ч. I. Госстройиздат, М., 1947.

К главе II

1. Жуковский Н. Е., Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод (1889). Собрание сочинений, т. III, Гостехиздат, 1949.

2. Павловский Н. Н., О притоке воды к горизонтальным фильтрам. Изв. НИИГ, т. 21 (1937).

3. Ведерников В. В., Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Госстройиздат, 1939.

4. Ризенкампф Б. К., Гидравлика грунтовых вод. Уч. зап. Саратовского гос. ун-та; ч. 1 (т. I, вып. 1, 1938), ч. 2 (т. I, вып. 2, 1938).

5. Полубаринова-Кочина П. Я., О непрерывном изменении годографа скорости в плоском установившемся движении грунтовых вод. Доклады АН СССР, т. 24 (1939), № 4.

6. Полубаринова-Кочина П. Я., Некоторые задачи плоского двнжения грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1942.

7. Девисон Б. Б., Движение грунтовых вод. В книге: Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б., Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1938.

8. Гришин М. М., Гидротехнические сооружения, ч. I. Стройиздат, М., 1947.

9. Замарин Е. А., Попов А. В., Гиринский Н. К., Кобек Д. Н., Курс гидротехнических сооружений, ч. I. Сельхозгиз, М., 1940.

10. Мелещенко Н. Т., Движение грунтовых вод под гидротехническими сооружениями. (Методы расчета.) ГОНТИ, М. — Л., 1937.

11. Полубаринова-Кочина П. Я., К вопросу о движении грунтовых вод в дренированной плотине. Учен. зап. МГУ, вып. 39 (1940).

12. Дискуссия по вопросам противодавления. Изв. ВНИИГ, т. 41, 1949.

13. Данилевский В. В., История гидросиловых установок в России до XIX века. М., 1940 «Козьма Дмитриевич Фролов» в книге «Люди русской науки», т. 2, Гостехиздат.

14. Смирнов В. И, Курс высшей математики, т. III, ч. II, Гостехиздат, 1951.

15. Форхгеймер Ф., Гидравлика. ОНТИ, 1935.

К главе III

1. Павловский Н. Н., Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. Петроград, 1922.

2. Замарин Е. А., Расчет движения грунтовых вод. Ташкент, 1928.

3. Замарин Е. А., Шипенко П. И., Номографические расчеты гидросооружений М., 1934.

4. Козлов В. С., Гидромеханический расчет флютбетов. Госэнергоиздат, М. — Л., 1941.

5. Козлов В. С., Гидромеханический расчет шпунтовых перемычек. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1939, № 6

6. Аравин В. И. и Нумеров С. Н., Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Стройиздат. М., 1948.

7. Базанов М. И., О фильтрации под перепадами в условиях плоской задачи. Изв. НИИГ, т. 28 (1940).

8. Мелещенко Н. Т., Приближенный метод расчета фильтрации под сооружениями, расположенными на безграничном проницаемом основании. Изв НИИГ, т. 28 (1940).

9. Фильчаков П. Ф., Механические основы гидромеханического расчета плотин. Диссертация, Матем. ин-т АН УССР, 1951.

10 Фильчаков П. Ф., Приближенный метод гидромеханического расчета плотин, Изд. АН УССР, 1951.

11. Harza L. F., Uplift and seepage under Dams on sand. Proc. Amer. Soc. of Civil Eng., т. 60 (1934), № 7.

12. Hoffmann R., Grundwasserströmung unter Wehren, Wasserwirtschaft, № 18—19, 20—21, 1934.

13. Маскет М., Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, М.—Л., 1949.

14. Гиринский Н. К., Основы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями при наличии по нижней поверхности грунта напора постоянной величины. Гидротехническое строительство. № 6, 1936.

15. Веригин Н. Н., Фильтрации в основании плотин с наклонными завесами и шпунтами. Гидротехническое строительство, 1940, № 2.

16. Мелещенко Н. Т., Расчет движения грунтовых вод под сооружениями, имеющими дренажные отверстия. Изв. НИИГ, т. XIX (1936).

17. Мхитарян А. М., К расчету фильтрации через земляную перемычку. Инженерный сборник, т. XIV (1952).
18. Девисон Б. Б., К вопросу об одном приеме упрощенного расчета напорного движения грунтовых вод. Труды Гос. гидрол. ин-та, 1937, № 5.
19. Мелещенко Н. Т., Движение грунтовых вод под гидротехническими сооружениями (методы расчета). М., 1937.
20. Гришин М. М., Гидротехнические сооружения, ч. 1. Госстройиздат, 1947.
21. Известия Всесоюзного научно-исследовательского института гидротехники, т. 41, 1949. Статьи Б. Ф. Рельтова, Р. Р. Чугаева, О. В. Вяземского о давлении воды на грунт.
22. Лаврентьев М. А., Конформные отображения. Гостехиздат, М., 1946.
23. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного. Гостехиздат, М., 1951.
24. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1941.
25. Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ, М.—Л., 1936.
26. Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного. Гостехиздат, 1948.
27. Положий Г. Н., Украинский матем. журнал, т. 6 (1952), № 1.
28. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. I. М., 1948.

К главе IV

1. Жуковский Н. Е., Просачивание воды через плотины (1920). Собрание сочинений, т. VII, Гостехиздат, 1950.
2. Павловский Н. Н., Свободная фильтрация на бесконечность из открытых русел с круговой основой формы. Известия НИИГ, т. XIX (1936).
3. Павловский Н. Н., Основы метода гидромеханического решения задачи о свободной фильтрации из открытых русел. Изв. НИИГ, т. XIX (1936).
4. Ведерников В. В., Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Госстройиздат, 1939.
5. Ризенкампф Б. К., Гидравлика грунтовых вод. Учен. зап. Саратовского гос. ун-та, т. XV (1940), вып. 5.
6. Аравин В. И., Приток грунтовых вод к водосборам. Изв. НИИГ, т. 18 (1936).
7. Нумеров С. Н., Об одном способе решения фильтрационных задач при наличии инфильтрации или испарения жидкости со свободной поверхности. Изв. ВНИИГ, т. 38 (1948).
8. Вощинин А. П., Движение грунтовых вод в теле и основании однородной земляной плотины с горизонтальным фильтром при конечной глубине проницаемого основания. Доклады АН СССР, т. 25 (1939), № 9.
9. Мхитарян А. М., К расчету фильтрации через земляную плотину со шпунтом и дренажем. Инженерный сборник, т. XV.
10. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Фильтрация в однородной среде. М., 1947, изд. 2-е, 1949.
11. Базанов М. И., Исследование фильтрации для случая притока воды к осушительным каналам. Прикл. матем. и мех., т. 2 (1938), вып. 2.
12. Ведерников В. В., Фильтрация через земляную плотину на проницаемом основании. Доклады АН СССР, т. 50 (1945), Гидротехническое строительство, 1947, № 1.

13. Герсеванов Н. М., Приложение функционального анализа при решении задач по фильтрации грунтовых вод. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1943, № 7. Книга: Итерационное исчисление и его приложения. Машстройиздат, М., 1950.

14. Аравин В. И., Приток грунтовых вод к котловану, огражденному шпунтами. Изв. НИИГ, т. XX (1937).

15. Аптекарь Л. Д., Вопросы фильтрационного расчета горизонтального дренажа судоходных шлюзов и сухих доков. Изв. ВНИИГ, т. 44 и 46 (1951).

16. Полубаринова-Кочина П. Я. и Фалькович С. В., Теория фильтрации жидкостей в пористых средах. Прикл. матем. и мех., т. XI (1947), вып. 6.

17. Нумеров С. Н., О фильтрации из каналов деривационных ГЭС и ирригационных систем. Изв. ВНИИГ, т. 34 (1947).

18. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Гидромеханическое решение для плотины с диафрагмой на проницаемом основании конечной глубины. Изв. АН СССР, ОТН, № 9—10 (1943).

19. Аравин В. И., О фильтрации из резервуаров. Изв. НИИГ, т. 16 (1935).

К главе V

1. Жуковский Н. Е., Просачивание воды через плотины (1923). Собрание сочинений, т. VII.

2. Ведерников В. В., Гидромеханические методы расчета движения грунтовых вод со свободной поверхностью. Научные записки Московск. гидромелиор. ин-та (МГМИ), вып. IV, 1937.

3. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Госстройиздат, 1939.

4. Соколов Ю. Д., О притоке грунтовых вод к дренажной канаве трапецоидального сечения. Прикл. матем. и мех., т. XV (1951), вып. 6.

5. Соколов Ю. Д., О расчете фильтрации из канала трапецоидального сечения. Доклады АН СССР, т. 79 (1951), № 5.

6. Ризенкампф Б. К., Гидравлика грунтовых вод, часть третья. Учен. зап. Саратовского гос. ун-та, т. XV (1940), вып. 5.

7. Ведерников В. В., Учет влияния капиллярности грунта на фильтрацию из каналов. Доклады АН СССР, т. 28 (1940), № 5.

8. Аверьянов С. Ф., Приближенная оценка роли фильтрации в зоне «капиллярной каймы». Доклады АН СССР, т. 69 (1949), № 3.

9. Веригин Н. Н., Фильтрация воды из оросителя ирригационной системы. Доклады АН СССР, т. 66 (1949), № 4.

10. Ведерников В. В. К теории дренажа, Доклады АН СССР, т. 59 (1948), № 6.

11. Ведерников В. В., Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя. Доклады АН СССР, т. 69 (1949), № 5.

12. Нумеров С. Н. Приближенные способы расчета фильтрации через земляные плотины на водопроницаемых основаниях. Труды Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1947, № 4.

13. Хомовская Е. Д., Гидромеханическое решение задачи о притоке грунтовых вод к водосборной трубе при наличии весьма мощного водонепроницаемого слоя. Труды Гос. гидролог. ин-та, 1937, вып. 5.

14. Вощинин А. П., О применении обтекаемых и ребристых подземных контуров при постройке гидротехнических сооружений на проницаемом основании. Инженерный сборник, т. VII (1950).

15. Кочина И. Н. и Полубаринова-Кочина П. Я., О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений. Прикл. матем. и мех., т. XVI (1952), вып. 1.

К главе VI

1. Нумеров С. Н., О фильтрации в земляных плотинах с дренажем на водонепроницаемых основаниях. Изв. НИИГ, т. 25 (1939).

2. Нумеров С. Н., Об учете инфильтрации или испарения воды со свободной поверхности при расчете движения грунтовых вод. Прикл. матем. и мех., т. IV (1940), вып. 5—6.

3. Нумеров С. Н., О фильтрации через земляные плотины с дренажем на водопроницаемых основаниях. Изв. НИИГ, т. 27 (1940).

4. Нумеров С. Н., К вопросу о фильтрации через земляные плотины. Изв. НИИГ, т. 28 (1940).

5. Нумеров С. Н., Гидромеханический метод расчета береговой дрены. Изв. НИИГ, т. 28 (1940).

6. Нумеров С. Н., Практический способ фильтрационного расчета земляных плотин с дренажем на водонепроницаемых основаниях. Изв. НИИГ, т. 28 (1940).

7. Нумеров С. Н., Решение задач о фильтрации без промежутков высачивания и инфильтрации или испарения воды со свободных поверхностей. Прикл. матем. и мех., т. VI (1942), вып. 1.

8. Нумеров С. Н., Практический способ фильтрационного расчета земляных плотин с дренажем на водонепроницаемых основаниях при наличии воды в нижнем бьефе. Изв. НИИГ, т. 31 (1946).

9. Нумеров С. Н., Фильтрационные расчеты горизонтального дренажа гидростанций и промышленных сооружений (при конечной глубине водопроницаемого слоя). Изв. ВНИИГ, т. 34 (1947).

10. Нумеров С. Н., О фильтрации к горизонтальной дрене в случае наклонного водоупора. Изв. ВНИИГ, т. 46 (1951).

11. Нумеров С. Н., О притоке грунтовых вод к прямоугольной траншее. Изв. ВНИИГ, т. 46 (1951).

12. Аравин В. И. и Нумеров С. Н., Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Стройиздат, М., 1948.

13. Шанкин П. А., Расчет фильтрации в земляных плотинах. М. — Л., 1947.

14. Веригин Н. Н., Расчет дрены в потоке грунтовых вод с учетом высоты высачивания. Доклады АН СССР, т. LXX (1950), № 4.

15. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М. — Л., 1951.

16. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.—Л. 1946.

17. Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, 1950.

18. Положий Г. Н., Украинский матем. журнал, т. 6 (1952), № 1.

К главе VII

1. Полубаринова-Кочина П. Я., Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды. Изв. АН СССР, серия мат., № 3, 1938.

2. Полубаринова-Кочина П. Я., Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (случай трех особых точек). Там же, № 3, 1939.

3. Полубаринова-Кочина П. Я., То же название (число особых точек больше трех). Там же, № 5—6, 1939.

4. Полубаринова-Кочина П. Я., Пример движения грунтовых вод через земляную плотину при наличии испарения. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1939, № 7.

5. Полубаринова-Кочина П. Я., Расчет фильтрации через земляную перемычку. Прикл. матем. и мех., т. IV (1940), вып. 1.

6. Полубаринова-Кочина П. Я., Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М., 1942.

7. Полубаринова-Кочина П. Я. и Фалькович С. В., Теория фильтрации жидкостей в пористых средах. Прикл. матем. и мех., т. XI (1947), № 6.

8. Ризенкампф Б. К., Гидравлика грунтовых вод, ч. 3, гл. IV. Уч. зап. Саратовского гос. ун-та, т. XV (1940), вып. 5.

9. Калинин Н. К., К методу П. Я. Полубариновой-Кочиной решения задач на движение грунтовых вод. Доклады АН СССР, т. 45 (1944), № 3.

10. Михайлов Г. К., К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапецоидального профиля на горизонтальном водоупоре. Доклады АН СССР, т. 80 (1951), № 4.

11. Михайлов Г. К., О фильтрации в трапецоидальных плотинах на горизонтальном водоупоре. Гидротехника и мелиорация, 1952, № 1.

12. Чарный И. А., Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания. Доклады АН СССР, т. 79 (1951), № 6.

13. Девисон Б. Б., Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины, Зап. Гос. гидрол. ин-та, т. VI (1932). См. также Труды гидрологической конференции балтийских стран, 1933.

14. Hamel G., Ueber Grundwasserströmung, ZAMM, т. 14 (1936), вып. 3.

15. Проскурников С. М., Новые расчетные данные по фильтрации через земляные перемычки. Труды Гос. гидрол. ин-та, № 5, 1937.

16. Мелещенко Н. Т., О расчете фильтрации через земляные плотины по методу проф. Н. Н. Павловского. Гидротехническое строительство, № 2—3, 1932.

17. Павловский Н. Н., О фильтрации воды через земляные плотины. Л., Кубуч, 1931.

18. Мхитарян А. М., К расчету фильтрации через земляные плотины. Инженерный сборник, т. 14.

19. Нельсон-Скорняков Ф. Б., Фильтрация в однородной среде, изд. 2-е, М., 1949.

20. Смирнов В. И., Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками. Петроград, 1918 (литогр.).

21. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III. Гостехиздат, 1951.

22. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, М., 1934.

23. Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, изд. 2-е. Гостехиздат, 1950.

24. Goursat E., Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss. Paris, 1936.

25. Gauss K., Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\ldots$ Berlin, 1888.

К главе VIII

1. Полубаринова-Кочина П. Я., Простейшие случаи движения грунтовой воды в двух слоях с различными коэффициентами фильтрации. Известия АН СССР, Отд. техн. наук, № 6, 1939.

2. Полубаринова-Кочина П. Я., Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М., 1942, главы II, VI—VIII.

3. Ризенкампф Б. К., Об одном случае фильтрации воды в многослойном грунте. Уч. зап. Саратовского гос. ун-та, т. XV (1940), вып. 5.

4. Калинин Н. К., Некоторые приближенные приемы решения задачи о фильтрации в двуслойной среде. Доклады АН СССР, т. 30 (1941), № 7.

5. Калинин Н. К., Сведение некоторых задач о фильтрации в двуслойной среде к задачам о фильтрации в однородном грунте. Доклады АН СССР, т. 10 (1943), № 5.

6. Калинин Н. К., Фильтрация через двуслойный клин. Прикл. матем. и мех., т. XVI (1952), вып. 2.

7. Аравин В. И., К вопросу о фильтрации в анизотропно-водопроницаемых грунтах. Труды Ленингр. индустриальн. ин-та, Л., 1937, № 9.

8. Полубаринова-Кочина П. Я., О фильтрации в анизотропном грунте. Прикл. матем. и мех., т. IV (1940), вып. 2.

9. Козлов В. С., К вопросу о расчете движения воды под гидротехническими сооружениями в анизотропно-проницаемых грунтах. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1940, № 3.

10. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 6, 1940.

11. Брагинская В. А., Некоторые задачи фильтрации в анизотропном грунте. Прикл. матем. и мех., т. VI (1942), вып. 2—3.

12. Павлов А. Т., Установившееся движение грунтовых вод при двух слоях жидкости различной плотности. Прикл. матем. и мех., т. VI (1942), вып. 2—3.

13. Гиринский Н. К., Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрология и инженерная геология, Сборник № 9, 1947.

14. Гиринский Н. К., Комплексный потенциал потока пресных вод со слабо наклонными струйками, фильтрующего в водопроницаемой толще морских побережий. Доклады АН СССР, т. 58 (1947), № 4.

15. Силин-Бекчурин А. И., О влиянии кинематической плотности, приведенных давлений и проницаемости пород на скорость фильтрации рассолов в нефтеносных горизонтах Урало-Волжской области. Доклады АН СССР, т. 58 (1947), № 6.

16. Силин-Бекчурин А. И., Метод приближенного расчета скоростей фильтрации и подземного стока рассолов по пьезометрам. Труды лаборатории гидрогеол. проблем, т. II, 1949.

17. Патрашев А. Н. и Арутюнян Н. Х., Диффузия солей при одномерной фильтрации. Изв. НИИГ, т. 30 (1941).

18. Нумеров С. Н. и Патрашев А. Н., Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений. Труды Ленингр. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1947, № 4.

19. Каменский Г. Н., Корчебоков Н. А., Разин К. И., Движение подземных вод в неоднородных пластах, ОНТИ, 1935.

20. Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНТИ, 1937.

21. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. II, Гостехиздат, 1948.

К главе IX

1. Щелкачев В. Н. и Пыхачев Г. Б., Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. Аз. ГОНТИ, 1939.

2. Полубаринова-Кочина П. Я., О прямой и обратной задачах гидравлики нефтяного пласта. Прикл. матем. и мех., т. VII (1943), вып. 5.

3. Щелкачев В. Н., Основы подземной нефтяной гидравлики. Гостоптехиздат, М., 1945.

4. Полубаринова-Кочина П. Я., О притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде. Доклады АН СССР, 34 (1942), № 2.

5. Ведерников В. В., Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Госстройиздат, М., 1939.

6. Веригин Н. Н., К вопросу о расчете подземных водозаборов в условиях плоского движения грунтовых вод. Доклады АН СССР, т. LXIV, № 2, 1949.

7. Мятиев А. Н., Действие колодца в напорном бассейне подземных вод. Изв. Туркменского филиала АН СССР, №3—4, 1946,

8. Гиринский Н. К., Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология, Сборник статей, № 9, М.—Л., 1947.

9. Мятиев А. Н., Напорный комплекс подземных вод и колодцы. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 9, 1947.

10. Мятиев А. Н., Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 3, 1948.

11. Силин-Бекчурин А. И., Специальная гидрогеология. Госгеолиздат, М., 1951.

12. Ризенкампф Б. К. и Калинин Н. К., Движение грунтовых вод в трех измерениях с эллипсоидальной свободной поверхностью. Прикл. матем. и мех., т. V (1941), вып. 2.

13. Гиринский Н. К., Определение коэффициента фильтрации. Госгеолиздат, 1950.

14. Маскет М., Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, М., 1949.

15. Повало-Швейковский Н. Т., Решение задачи об определении коэффициента фильтрации путем откачивания воды. Труды Центр. ин-та эксперим. гидрологии и метеорологии, вып. 11 (44), М., 1935.

16. Чарный И. А., Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.

17. Сегал Б. И., Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения. Изв. АН СССР, серия матем., т. 10 (1946), № 4.

18. Ивакин В. В., О фильтрации при нагнетании в ненасыщенный водой грунт. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1947. № 6.

19. Насберг В. М., О нагнетании в ненасыщенный водой грунт. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 9, 1951.

20. Полубаринова-Кочина П. Я., Об источниках и стоках на поверхности. Прикл. матем. и мех., т. XIV, вып. 1, 1950.

21. Голубева О. В., Уравнения двумерных движений идеальной жидкости по криволинейной поверхности и их применение в теории фильтрации. Прикл. матем. и мех., т. XIV (1950), вып. 3.

22. Полубаринова-Кочина П. Я., К гидравлической теории колодцев в многослойной среде. Прикл. матем. и мех., т. XI (1947), вып. 3.

23. Матвеенко Т. И., Задача о фильтрации в колодец из одного и двух пластов. Инж. сборник, т. XIV.

К главе X

1. Dupuit J., Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux, изд. 2-е. Paris, 1863.

2. Павловский Н. Н., 1) Неравномерное движение грунтовых вод. Л., 1930. 2) Неравномерное движение грунтовых вод. Дальнейшее развитие вопроса. Л., 1932.

3. Аравин В. И., Приближенные способы фильтрационного расчета флютбетов в случаях пространственной фильтрации. Труды Ленингр. политехнич. ин-та им. М. И. Калинина, № 4, 1947.

4. Аравин В. И., Приток грунтовых вод к котлованам, основанным на горизонтальном водонепроницаемом слое. Изв. НИИГ, т. XXI (1937).

5. Аравин В. И., Расчет фильтрации в обход гидротехнических сооружений. Изв. НИИГ, т. 27 (1940).

6. Гиринский Н. К., Комплексный потенциал потока со свободной поверхностью в пласте относительно малой мощности при $k = f(z)$. Доклады АН СССР, т. 51 (1946), № 5, стр. 337—338.

7. Гиринский Н. К., Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология, сборник статей № 9, 1947.

8. Каменский Г. Н., Корчебоков Н. А., Разин К. И., Движение подземных вод в неоднородных пластах, ОНТИ, 1935.

9. Аравин В. И. и Нумеров С. Н., Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Стройиздат, М., 1948.

10. Недрига В. П., Расчет фильтрации в обход гидротехнических сооружений. Гидротехническое строительство, № 5, 1947.

11. Веригин Н. Н., Фильтрация в обход плотин и эффективность противофильтрационных завес. Гидротехническое строительство, № 5, 1947.

12. Полубаринова-Кочина П. Я., О фильтрации в двух грунтах с наклонной линией раздела. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 1, 1952.

К главе XI

1. Замарин Е. А., Гидродинамические сетки движения. Научные записки МГМИ, вып. IV, 1937.

2. Гиринский Н. К., Графическое построение гидродинамических сеток. Научные записки МГМИ, т. VII (1939), вып. 11.

3. Гиринский Н. К., Основы теории движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями в неоднородных грунтах. Научные записки МГМИ, вып. 5, 1938.

4. Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, изд. 5-е. Гостехиздат, 1951.

5. Проскура Г. Ф., Гидродинамика турбомашин. ОНТИ, 1934.

6. Николаева М. В., О релаксационном методе Сауселла. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. XXVIII, 1949.

7. Козлов В. С., Гидромеханический расчет флютбетов. Госэнергоиздат, М. — Л., 1941.

8. Айвазьян В., Графический метод расчета земляных плотин. Гидротехническое строительство, 1933, № 7.

9. Мелентьев П. В., Методика расчета лопастей гидротурбомашин, Изд. АН СССР, М. — Л., 1939.

10. Насберг В. М., Гидродинамическая сетка при фильтрации без подпора из скважины и применение сетки для определения водопроницаемости грунта. Изв. Тбилисского НИИ сооружений и гидроэнергетики, т. III (1950).

11. Корсунцев В. А., Подсобная номограмма для построения электрических полей с осевой симметрией. Электричество, № 14, 1937.

12. Southwell R. V., Relaxation Methods in theoretical Physics. Oxford, 1946.

13. Weinig F. und Shields A., Graphisches Verfahren zur Ermittlung der Sickerströmung durch Staudämme. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 1936, № 18.

14. Breitenöder M., Ebene Grundwasserströmungen mit freier Oberfläche. Berlin, 1942.

15. Barillon E. G., Note sur les rayons de courbure intervenant dans la construction des réseaux hydrodynamiques. Revue générale de l' Hydraulique, 1936, № 8.

16. Аверьянов С. Ф., Об изучении режима грунтовых вод методом построения сеток движения. Доклады ВАСХНИЛ, вып. 4, 1949.

17. Христианович С. А., Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси, Прикл. матем. и мех., т. IV (1940), вып. 1.

18. Рельтов Б. Ф., Исследование фильтрации в условиях пространственной задачи по методу ЭГДА акад. Н. Н. Павловского, Изв. НИИГ, т. XV, 1935.

19. Аравин В. И. и Дружинин Н. И., Некоторые вопросы методики экспериментальных исследований пространственной фильтрации методом ЭГДА, Изв. ВНИИГ, т. 40, 1949.

20. Толстов Ю. Г., Применение метода электрического моделирования физических явлений к решению некоторых задач подземной гидравлики. Журнал технической физики, т. XII, вып. 10, 1942.

21. Гутенмахер Л. И., Электрические модели. Изд. АН СССР, 1949.

22. Фильчаков П. Ф., Механические основы расчета плотин. Киев, 1952.

23. Проскурников С. М., Применение метода ЭГДА к расчету фильтраций через земляные валы и плотины. Труды Гос. гидрол. ин-та, вып. 8 (62), 1948; см. также вып. 5, 1937.

24. Фильчаков П. Ф., Электромоделирование задач фильтрации в разнородном грунте. Доклады АН СССР, т. 66 (1949), № 4.

25. Дружинин Н. И., О точности определения фильтрационного расхода при исследовании пространственной фильтрации методом ЭГДА. Изв. ВНИИГ, т. 44 (1951). [(См. также Изв. ВНИИГ, т. 37 (1948), т. 38 (1948), т. 40 (1949), т. 42 (1950).]

26. Аравин В. И., Основные вопросы экспериментального исследования движения грунтовых вод в щелевом лотке. Изв. НИИГ, т. 23 (1938).

27. Прандтль Л., Гидроаэромеханика, изд. 2-е. Гос. изд-во иностр. лит-ры, М., 1951.

28. Шанкин П. А., Исследование фильтрации в построенных гидротехнических сооружениях, Речиздат, М., 1947.

29. Силин-Бекчурин А. И., Специальная гидрогеология. Госгеолиздат. М., 1951.

30. Гиринский Н. К., Определение коэффициента фильтрации. Госгеолиздат, 1950.

31. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. I и II, Гостехиздат, 1948.

32. Лукьянов А. В., Об электролитическом моделировании пространственных задач. Доклады АН СССР, т. LXXV (1950), № 5.

К главе XII

1. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б., Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Ч. 3, Движение грунтовых вод. Изд. АН СССР, 1938.

2. Нумеров С. Н., Применение метода фрагментов при расчетах плоской, напорной, неустановившейся фильтрации. Труды Политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 1948, № 5.

3. Аравин В. И., О влиянии волнения на фильтрацию под гидротехническими сооружениями. Изв. НИИГ, т. 28 (1940).

4. Протодьяконов М. М., Теория стока поверхностных вод. Главжелдорстрой, 1932.

5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. I, гл. VIII. Гостехиздат, 1948.

К главе XIII

1. Boussinesq J., Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol. J. de math. pures et appl., sér. 5, t. X (1904), fasc. 1.

2. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.

3. Boltzmann, Annalen der Physik, 53, 959 (1894).

4. Лейбензон Л. С., Движение газированной жидкости в пористой среде. Изв. АН СССР, серия геофизическая, 1941, № 4—5.

5. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. Прикл. матем. и мех., т. XIII (1949), вып. 2.

6. Полубаринова-Кочина П. Я., Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. Доклады АН СССР, 1948, т. 63, № 6.

7. Полубаринова-Кочина П. Я., О перемещении языка грунтовых вод при фильтрации из канала. Доклады АН СССР, т. 82 (1952), № 6.

8. Михайлов Г. К., Применение модели предельно-анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору. Инж. сб., т. 16.

9. Семчинова М. М., Сравнение опытных данных с теорией для случая неустановившейся фильтрации из канала, расположенного на горизонтальном водоупоре. Инж. сб., т. 15.

10. Баренблатт Г. И., О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. Прикл. матем. и мех., т. XVI (1952), вып. 1.

11. Флорин В. А., Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1951, № 11.

12. Нумеров С. Н., Медленно изменяющаяся неустановившаяся фильтрация. Изв. ВНИИГ, т. 37 (1948).

13. Веригин Н. Н., О неустановившемся движении грунтовых вод вблизи водохранилищ. Доклады АН СССР, т. 66 (1949), № 6.

14. Веригин Н. Н., О фильтрации из каналов в сухой грунт. ДАН СССР, т. 79 (1951), № 4.

15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, т. II, стр. 29. Гостехиздат, 1948.

К главе XIV

1. Лыков А. В., Теплопроводность нестационарных процессов, М. — Л., 1948.

2. Полубаринова-Кочина П. Я., О динамике грунтовых вод при поливах. Прикл. матем. и мех., т. XV (1951), вып. 6.

3. Крылов М. М., К изучению динамики баланса грунтовых вод в целях гидрогеологического прогноза. Изв. АН УзССР, вып. 2, 1947, стр. 106—117.

4. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. Прикл. матем. и мех., т. XIII (1949), вып. 2.

5. Гиринский Н. К., Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология, сборник № 9, 1947.

6. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившейся фильтрации с поверхностями раздела. Доклады АН СССР, т. 66 (1949), № 2.

7. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившемся движении грунтовых вод в двух слоях различной плотности. Известия АН СССР, Отд. техн. наук, № 6, 1940.

8. Полубаринова-Кочина П. Я., Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд. АН СССР, М. — Л., 1942.

9. Гиринский Н. К., Комплексный потенциал потока пресных вод со слабо наклонными струйками, фильтрующего в водопроницаемой толще морских побережий. Доклады АН СССР, т. LVIII (1947), № 4.

10. Силин-Бекчурин А. И., Метод приближенного расчета скоростей фильтрации и подземного стока рассолов по пьезометрам. Труды лаборатории гидрогеологических проблем АН СССР, т. 11, 1949.

11. Ковда В. А., Происхождение и режим засоленных почв, ч. I и II, М., 1946.

12. Щелкачев В. Н., Некоторые приложения теории упругого режима водо-нефтеносных пластов. Доклады АН СССР, т. 52 (1946), № 5. См. также: Доклады АН СССР, т. 79 (1951), № 4.

13. Амосов С. И., Труды Ленингр. индустриального ин-та, 1937, вып. II, № 4 (физ.-мат. науки).

14. Соболев С. Л., Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1947.

15. Полубаринова-Кочина П. Я., О влиянии уклона водоупора и инфильтрации на неустановившееся движение грунтовых вод. Доклады АН СССР, т. 75 (1950), № 4.

16. Карслоу Х. С., Теория теплопроводности. Гостехиздат, М., 1947.

К главе XV

1. Кочин К. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. II, Гостехиздат, 1948.

2. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившихся движениях в теории фильтрации. Прикл. матем. и мех., т. IX (1945), вып. 1.

3. Калинин Н. К. и Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившихся движениях грунтовых вод со свободной поверхностью. Прикл. матем. и мех., т. XI (1947), вып. 2.

4. Галин Л. А., Некоторые задачи неустановившегося движения грунтовых вод. Прикл. матем. и мех., т. XV (1951), вып. 6.

5. Кочина Н. Н., Плоская задача о растекании бугра грунтовых вод в слое бесконечной глубины. Прикл. матем. и мех., т. XV (1951), вып. 6.

6. Кочин Н. Е., К теории волн Коши-Пуассона. Собр. соч., т. II, изд. АН СССР, М.—Л., 1949.

7. Калинин Н. К., О неустановившейся фильтрации в случае дрены в водопроницаемом слое конечной глубины. Прикл. матем. и мех., т. XII (1948), № 2.

8. Лейбензон Л. С., Нефтепромысловая механика, ч. II, 1934.

9. Полубаринова-Кочина П. Я., К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Доклады АН СССР, т. 47 (1945), № 4.

10. Галин Л. А., Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Доклады АН СССР, т. 47 (1945), № 4.

11. Куфарев П. П. и Виноградов Ю. П., О некоторых частных решениях задачи фильтрации. Доклады АН СССР, т. 57 (1947), № 4.

12. Куфарев П. П., Решение задачи о контуре нефтеносности для полосы с цепочной скважиной. Доклады АН СССР, т. 75 (1950), № 3.

13. Куфарев П. П., Задача о контуре нефтеносности для круга при любом числе скважин. Доклады АН СССР, т. 75 (1950), № 4.

14. Виноградов Ю. П. и Куфарев П. П., Об одной задаче фильтрации. Прикл. матем. и мех., т. XII (1948), вып. 2.

К главе XVI

1. Лембке К. Э., Движение грунтовых вод и теория водосборных сооружений. Инженер, Журнал Министерства путей сообщения, Спб, 1886, вып. 2; Журнал Министерства путей сообщения, 1887, №№ 17—19.

2. Маккавеев В. М., Частный случай неустановившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью (к вопросу о заболачивании поймы). Труды Гос. гидрологич. ин-та, вып. 5. 1937.

3. Чарный И. А., Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.

4. Полубаринова-Кочина П. Я., О некоторых неустановившихся движениях грунтовых вод. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 6, 1949.

5. Каменский Г. Н., Уравнения неустановившегося движения грунтовых вод в конечных разностях и применение их к исследованию явлений подпора. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 4, 1940.

6. Харкеевич Ю. Ф., Графическое решение уравнений в частных производных параболического вида. Прикл. матем. и мех., т. XIV (1950), вып. 3.

7. Панов Д. Ю., Справочник по численному интегрированию уравнений в частных производных, изд. 5-е. Гостехиздат, 1951.

8. Лукьянов В. С., Гидравлические приборы для технических расчетов. Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1939, № 2.

9. Полубаринова-Кочина П. Я., Графический способ расчета неустановившихся движений грунтовых вод, Инженерный сборник, т. IX (1951).

10. Коньков Б. С. и Петров Г. Н., Режим грунтовых вод в условиях Голодной степи. Ташкент, 1929.

11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. I, Гостехиздат, 1948.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анализ крупности фракций грунта 14
— функциональный 171
Аналогия электро-гидродинамическая (ЭГДА) 518 и д.
Анизотропность грунта 394 и д.

Вектор главный сил давления на основание плотины 131 и д.
Вихрь точечный в многослойной области 385
Вода гигроскопическая 21
— гравитационная 21
— грунтовая 21
— капиллярная 21
— пленочная 21
— подпочвенная 13
— прочно связанная 20
— рыхло связанная 20
Водобой 46
Водопроницаемость грунтов при неполном их насыщении 33
Водоупор 46
— наклонный 172, 253—269, 471, 584—596
Волнение, влияние на фильтрацию под сооружениями 544
Высачивание 40
Высота геометрическая 26
— действующая 73
— —, зависящая от времени 541
— приведенная 396, 478
— пьезометрическая 26
— скоростная 26
Вязкость жидкости кинематическая 30

Гидроизогипса 512, 538
Глина 13
— тяжелая 14
— физическая 14
Глубина нормальная потока 471
Годограф скорости 50 и д., 55 и д.
— — видоизмененный 508
— —, фиктивное течение в его области 503 и д.
Градиент (пьезометрического) напора 27
— — — начальный 28
Граница водного бассейна 47
— непроницаемая 46
Границы области фильтрации 321
Грунт 13
— анизотропный 353, 394 и д.
— —, моделирование с помощью щелевого лотка 535
— —, применение метода сеток 514
— двуслойный 475
— неоднородный 358 и д., 465, 475, 604 и д.
— —, моделирование в щелевом лотке 531
— —, условия на границе раздела двух грунтов 49
— несвязный 13
— нескальный (рыхлый) 13
— связный 13
— скальный 13
— структурный 32

Движение грунтовых вод—см. Фильтрация
— ползущее 37
— полунапорное 66
— — пространственное 481 и д.
— пространственное, графоаналитический метод 510
— установившееся при наливе воды в скважину 495
— фиктивное в области годографа скорости 503
Диаметр частиц эффективный 15, 16
Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений 408
Дрена 66
— в анизотропном грунте 399
— в слое бесконечной глубины 69, 147, 196, 211, 426
— горизонтальная 66, 147, 253, 426
— Жуковского 147
— затопленная 150
— на водоупоре 66, 399, 503
— при инфильтрации или испарении 150, 211
— при наклонном водоупоре 253
— при неустановившемся движении 561, 578
— с вертикальными стенками 207, 503, 561
— сечения криволинейного 168
— — прямоугольного 248
— — трапецоидального 196—207
—, система дрен 150, 578

Единственность решения задач напорной фильтрации 92

Завеса противофильтрационная 482
Задача Буссинеска 578
— Гильберта 272
— Дирихле 93
— Неймана 93
— пространственная теории фильтрации 449 и д., 609 и д.
— смешанная теории потенциала 92
— — — функций 232 и д.
Закон фильтрации линейный (закон Дарси) 27, 30, 35, 429
— — —, пределы применимости 30
— — нелинейный 30, 31, 39—41
Засоление почв 511, 584
Зуб 46

Изобара 69, 499
Изовела (изотаха) 70
— фиктивного течения в области годографа скорости 506
Изоклина 70
— фиктивного течения в области годографа скорости 506
Изотермичность сетки 487
Ил 14
Инверсия 177
Интерференция скважин 420
Инфильтрация 48, 150, 211, 234, 462, 464, 596, 617, 640

Испарение 52, 211, 345, 464, 601, 633
Источник между двумя горизонтальными плоскостями 452

Канава—см. Дрена
Канал сечения криволинейного 163
— — трапецоидального 178, 183
— — треугольного 187
— с водоприемником с одной стороны 158
— с водоупором горизонтальным при отсутствии инфильтрации 581
— — — наклонным 253, 584, 590
— с малым уровнем воды в нем 192
— с симметрично расположенными водоприемниками 155
—, фильтрация с подпором 157, 166
—, — с учетом капиллярности 188 и д., 192
Капиллярность 31
—, учет в щелевом лотке 535
—, — при обтекании шпунта 144—147
—, — при фильтрации из каналов 185 и д., 192
Керн 25
Коагуляция 23
Коллоиды 14, 22
Колодец—см. Скважина
Кольматаж 169, 556
Контур нефтеносности 638
— питания 414
— постоянной скорости 218 и д.
Котлован 121, 154, 479
Коэффициент проницаемости щели (в щелевом лотке) 528
— устойчивости на всплывание 136
— фильтрации 27, 28 и д.
— —, зависимость от степени увлажнения грунта 33
— —, определение с помощью метода ЭГДА 523
— формы пространственной сетки 512
Кривая гранулометрического (механического) анализа грунта 15, 16
— депрессии 47
— подпора 471
— спада 471

Лемма Шварца 138
Линия свободной поверхности 47
Лоток грунтовый 538
— щелевой 526 и д.

Метод гидравлический 459
— гидродинамический 459
— графический 487 и д., 649
— — интегрирования уравнения теплопроводности 647
— графоаналитический расчета пространственных движений 510
— инверсии 177 и д.
— источников, применение к задачам теории фильтрации 426
— полугидравлический 459
— полуобратный в задачах теории фильтрации 163 и д., 214
— последовательной смены стационарных состояний 640
— разворачивания шпунтов 129
— фрагментов 128
— электродинамических аналогий (ЭГДА) 518 и д.
Моделирование грунта 518 и д.
— — анизотропного 535
— — в искаженном масштабе 536
— — неоднородного 531
— — по методу ЭГДА 518 и д.
— — с помощью щелевого лотка 526 и д.
Модуль формы фрагмента 128
Момент главный сил давления на основание плотины 136

Наблюдение над фильтрацией воды в грунте 538 и д.
Нагнетание воды в грунт 456
Налив воды в скважину 495
Напор 26
— действующий 73
— —, зависящий от времени 541
— приведенный 306, 478
— пьезометрический 26
— скоростной 26
Насыщение грунта неполное 33
Недостаток насыщенности 570

Область высачивания 445
— питания 445
— — колодца 415
Ороситель при наличии испарения или инфильтрации 211
Отображение конформное на полуплоскость многоугольника 85
— — — — — —, все стороны которого проходят через одну точку 102
— — — — прямоугольника 89

Параметры акцессорные 317
Пар водяной 21
Пептизация 23
Перемычка прямоугольная 326 и д.
— трапецоидальная с вертикальным верховым откосом 345, 349
Перепад 126
Песок 13, 14
— физический 14
Пласт дренирующий 99, 107, 207
Плотина земляная на непроницаемом основании 56—60, 269—280
— — на проницаемом основании бесконечной глубины 169, 290
— — — — — конечной глубины 60, 159, 214, 499
— — прямоугольная 326 и д., 500
— — с водою в нижнем бьефе 59, 214
— — с криволинейными очертаниями 169, 214
— — со шпунтом (диафрагмой) 161
— — трапецоидальная с вертикальным верховым откосом 345
— Зеленогорская К. Д. Фролова 55, 60
Поверхность равного напора 511
— — потенциала 511
— свободная 47
— — при инфильтрации или испарении 464
Подъем равномерный уровня воды в канале 575
Показатель гранулометрический 15
Полив 596 и д. см. также Инфильтрация
— круглой площадки 617
— полосообразный при непроницаемом водоупоре 596
Понур 46
Пористость (порозность) 16
— активная 19, 570
— поверхностная 24
Постоянная Каталана 337
Потенциал комплексный 45
— приведенный 291
— скорости фильтрации 38
Почва 15
Почво-грунт 15
Преобразование обратными радиусами-векторами 177
Промежуток высачивания 49
Проницаемость грунта 30, 414
— щели 525
— — вторая 531

Просачивание — см. Фильтрация
Прямоугольник основной задач напорной фильтрации 90
Пьезометр 538

Радиус влияния 413, 439
Разворачивание шпунтов 129
Растекание бугра грунтовых вод 599
— — — — в полуплоскости 621 и д.
— — — — в слое конечной глубины 631
— — — — при испарении 603
Расход приведенный 91, 487, 651
Реакции гидродинамические 131 и д.
Режим водонапорный нефтеносного пласта 414
Рисберма 46

Сетка гидродинамическая (сетка движения) 487
— — в осесимметричном движении 493
— — изотермическая 487
— — пространственная 510 и д.
Сеть направляющая 146
— образующая 146
Сила фильтрационная 64
Силы, действующие на гидродинамические сооружения при фильтрации 131 и д.
—, — на грунт при фильтрации 63, 81
— электромолекулярные в грунтах 19
Скважина 412 и д.
—, интерференция скважин 420
— несовершенная 412
— — в пласте конечной глубины 455
— — в полупространстве 449
— совершенная 412
— — в неоднородной среде 424
— — в потоке безнапорном 328
— — — — напорном 412 и д., 433, 615
— — в центре пласта 412
— —, эксцентрично расположенная в круговом контуре 415
— со слабо проницаемым водоупором, безнапорный приток 447
—, установившееся движение при наливе воды 495
Скважность грунта см. Пористость
Скорость комплексная 50
— фильтрации 24
Сложение графическое 499
Слой дренирующий в основании 99, 107, 207
Соотношение Фукса 311
Суглинки 14
— легкие 14
— средние 14
— тяжелые 14
Супесь 14
Суффозия 70, 290

Теорема единственности решения задач напорной фильтрации 92 и д.
Теория гидравлическая 459 и д.
Течение — см. Движение
Точка особая регулярная 54, 308
— — устранимая 322
Транспирация 601
Треугольник модулярный 332
— фильтрации 62
Трещиноватость 19

Уклон пьезометрический 27
Уравнения движения грунтовых вод 32 и д., 45
— — — — неустановившегося 558 и д.
Условия граничные в плоском установившемся движении 46
— на границе раздела двух грунтов 49

Фильтрация 13, 22
— безнапорная 66
— — пространственная 477 и д.
— в грунте анизотропном 391 и д.
— — — двуслойном 475, 554
— — — неоднородном 358 и д.
— — — —, гидравлическая теория 465
— — — слоистом горизонтальная напорная 391
— — — — по вертикали 392
— в обход сооружений 482
— в перемычках 326 и д., 345 и д., 349
— в пластах, граничащих со слабо проницаемыми пластами 430 и д.
— в пустой бассейн 567
— двух жидкостей разной плотности 403, 607
— напорная 66, 84 и д.
— — при действующих напорах, зависящих от времени 541
— неравномерная 471
— неустановившаяся 541 и д.
— — одномерная по вертикали при постоянном действующем напоре 548
— осесимметричная 493, 495, 657
— плоская в вертикальной плоскости 45 и д.
— — неустановившаяся 618 и д.
— при заданном постоянном расходе 551
— при измерении уровня воды в водохранилище 561
— при наклонном водоупоре 172, 471
— при наличии дренирующего или водоносного слоя 207
— равномерная 471
Фильтр обратный 267, 290
Флютбет 46
— в двух слоях одинаковой толщины 358 и д.
— «обтекаемый» 226
— плоский в грунте бесконечной глубины 71 и д.
— — — — конечной глубины 94 и д., 101
— — — — — — двухшпунтовый 112, 121
— — — — — — одношпунтовый 108
— при наличии дренирующего основания 99
— прямоугольный (толстый заглубленный) 124
— разрезной 101
— с дренажным отверстием (сквозной) 82
Формула Дюпюи для колодца 329, 479
— — для плоского потока 69, 326, 461
— Козени 30
— Кристоффеля-Шварца 85 и д.
Фрагмент 128
Функция гипергеометрическая 312
— Жуковского 143

Число Рейнольдса критическое 30
— — — для щелевого лотка 529
Члены инерционные в уравнениях движения 541

Шпунт 46, 128 и д.
— в двух слоях одинаковой толщины 370 и д.
— в проницаемом грунте бесконечной глубины 79 и д.
— Жуковского 144
— наклонный 104
— «обтекаемый» 229
— при наличии водоупора или дренирующего основания 105
— точечный в двуслойном грунте 381 и д.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
38	6 сн.	$\frac{f}{\rho g}$	$\frac{p}{\rho g}$
94	12 сн.	т. е. порядок	т. е. $\frac{\partial w}{\partial n}$ имеет порядок
129	2 сн.	С. В.	В. С.
274	17 св.	то для	то
397	2 св.	$y = \nu y$	$y_1 = \nu y$
407	11 сн.	$\varphi = 0$	$\psi = 0$
425	3 сн.	$\frac{\lambda}{z - z_0}$	$\frac{1}{z - z_0}$
544	6 св.	$-h_0$	$-h_2$
562	1 св.	способе	способе, предложенном Н. А. Багровым в 1937 г. и
639	12 св.	$\zeta = \xi$	$\zeta = e^{i\varphi}$

В списке литературы к главам III и VII следует добавить:

Стр. 663: 29. Павловский Н. Н., Гидромеханический расчет плотин системы Сенкова. ОНТИ, 1937.

Стр. 666: 26. Гахов Ф. Д., Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения. Известия Казанск. физ.-мат. об-ва при Казанск. гос. ун-те, т. XIV (1949), сер. 3.