Е.П.Валуева, В.Г.Свиридов

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ ЖИДКОСТИ

Допущено Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по направлению 651100 "Техническая физика",
специальности 070700 "Теплофизика"
и по направлению 650800"Теплоэнергетика"



Москва Издательство МЭИ 2001

УДК 532 (075.8)
ББК 22.253я73
В 158

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензенты: доктор техн. наук, проф. В.В. Рыбаков
[кафедра теории воздушно-реактивных двигателей МГАИ (ТУ)];
академик РАН А.И. Леонтьев

Валуева Е.П., Свиридов В.Г.

В 158 Введение в механику жидкости: Учебное пособие. — М.: Издательство МЭИ, 2001. — 212 с.: ил.

ISBN 5-7046-0666-0

Учебное пособие содержит основы механики жидкости: кинематики, гидростатики и динамики. Представлены важные для практики задачи течения идеальной и вязкой жидкости. Наиболее подробно рассматриваются вопросы турбулентных течений.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов теплофизических и теплоэнергетических специальностей, а также на специалистов, работающих в области технической гидромеханики и конвективного теплообмена.

УДК 532 (075.8)
ББК 22.253я73

Учебное издание

ВАЛУЕВА Елена Петровна, СВИРИДОВ Валентин Георгиевич

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ ЖИДКОСТИ

Учебное пособие для вузов

Редактор *И.П. Березина*
Художник *А.Ю. Землеруб*
Технический редактор *З.Н. Ратникова*
Корректор *В.В. Сомова*
Компьютерная верстка *Н.В. Пустошиновой*

ЛР № 020528 от 05.06.97

Подписано в печать с оригинала-макета 19.12.01		Формат 60×90/16.
Бумага офсетная.	Гарнитура Times.	Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,25	Усл. кр.-отт. 13,25	Уч.-изд. л. 11,3
Тираж 1000 экз.	Заказ № 685т	С-004

Издательство МЭИ, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.

Типография НИИ «Геодезия», Московская обл., г. Красноармейск, ул. Центральная, д. 16

ISBN 5-7046-0666-0

© Валуева Е.П., Свиридов В.Г., 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
Введение 10
В.1. Место механики жидкости и газа в науке о движении материальных тел 10
В.2. Предмет механики жидкости и газа 12
В.3. Метод механики жидкости и газа. Основные особенности феноменологического метода 14
В.4. Классификация моделей жидкости в механике жидкости и газа 16
В.4.1. Модели сжимаемой и несжимаемой жидкости 16
В.4.2. Модели идеальной и вязкой жидкости 17

Глава первая. **КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ** 18

1.1. Способы описания движения среды. Методы Лагранжа и Эйлера 18
1.1.1. Метод Лагранжа 18
1.1.2. Метод Эйлера 19
1.1.3. Траектории частиц и линии тока 20
1.1.4. Струи и трубки тока 23
1.2. Поступательное, вращательное и деформационное движение жидкой частицы 24
1.2.1. Виды движения жидких частиц 24
1.2.2. Вращательное движение 26
1.2.3. Деформационное движение. Первая теорема Гельмгольца 28
1.3. Кинематика вихревого и безвихревого течений 29
1.3.1. Определения вихревого и безвихревого движений 29
1.3.2. Вихревое движение. Вихревые линии и трубки. Вторая теорема Гельмгольца 30
1.3.3. Безвихревое (потенциальное) движение. Потенциал скорости 32
1.4. Субстанциональная (полная) производная 34

Глава вторая. **УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ** 37

2.1. Уравнение неразрывности 37
2.2. Уравнение движения 39
2.2.1. Силы, действующие в жидкости 39
2.2.2. Уравнение движения в напряжениях 40

Глава третья. **ГИДРОСТАТИКА** 43

3.1. Предмет гидростатики. Абсолютное и относительное равновесие 43
3.2. Закон Паскаля 45

3.3. Абсолютное равновесие жидкости 46
3.3.1. Условия абсолютного равновесия 46
3.3.2. Абсолютное равновесие в поле силы тяжести 47
3.3.3. Закон Архимеда. Давление жидкости на замкнутую твердую поверхность 48
3.3.4. Устойчивое и неустойчивое абсолютное равновесие в поле силы тяжести 49
3.4. Относительное равновесие. Условия относительного равновесия 51

Глава четвертая. **ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ** 53

4.1. Особенности идеальной жидкости 53
4.2. Уравнения динамики идеальной жидкости 54
4.2.1. Система уравнений движения в форме Эйлера 54
4.2.2. Условия однозначности в задачах течения идеальной жидкости. 56
4.3. Уравнения движения в форме Громеки—Лэмба 58
4.4. Стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Теорема Бернулли 59
4.5. Примеры практического использования теоремы Бернулли 60
4.5.1. Анализ течений жидкостей 60
4.5.2. Расходомер типа «труба Вентури» 61
4.5.3. Трубка Пито — прибор для измерения скорости потока 64
4.6. Движение идеальной сжимаемой жидкости 65
4.6.1. Обобщенная теорема Бернулли 65
4.6.2. Критерий сжимаемости 66

Глава пятая. **ПЛОСКОЕ СТАЦИОНАРНОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ** 69

5.1. Определение и особенности плоского движения 69
5.2. Метод суперпозиции 72
5.2.1. Сущность метода 72
5.2.2. Потенциалы и функции тока для некоторых простых потоков 72
5.2.3. Плоский диполь — пример суперпозиции 75
5.3. Поперечное обтекание круглого цилиндра поступательным потоком 77
5.3.1. Наложение поступательного потока на плоский диполь 77
5.3.2. Распределение скорости по поверхности цилиндра 80
5.3.3. Распределение давления по поверхности цилиндра 80
5.3.4. Парадокс Даламбера 82
5.4. Поперечное обтекание с циркуляцией 83
5.4.1. Обтекание круглого цилиндра 83
5.4.2. Обтекание крылового профиля. Подъемная сила крыла. Постулат Чаплыгина—Жуковского 86

Глава шестая. **ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ** 89

6.1. Особенности описания движения вязкой жидкости 89
6.2. Обобщенный закон Ньютона 89
6.3. Уравнения Навье—Стокса 92

6.3.1. Уравнения динамики вязкой сжимаемой жидкости с переменными свойствами ... 92
6.3.2. Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами ... 94
6.4. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости ... 96
6.4.1. Сущность теории подобия ... 96
6.4.2. Безразмерная форма уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами ... 97
6.4.3. Условия подобия ... 101
6.5. Гидравлическое сопротивление при течении вязкой жидкости ... 102

Глава седьмая. **ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ** ... 105

7.1. Течение Куэтта ... 105
7.2. Ламинарное стационарное течение в круглой трубе ... 106
7.2.1. Понятие гидродинамической стабилизации ... 106
7.2.2. Стабилизированное течение в круглой трубе ... 109
7.2.3. Течение на начальном гидродинамическом участке ... 112
7.2.4. Коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном течении жидкости в трубе ... 115
7.3. Ламинарный пограничный слой ... 116
7.3.1. Понятие пограничного слоя ... 116
7.3.2. Уравнения пограничного слоя ... 118
7.3.3. Продольное обтекание тонкой полубесконечной пластины (задача Блазиуса) ... 122
7.3.4. Пограничный слой при наличии продольного градиента давления. Отрыв пограничного слоя ... 127

Глава восьмая. **ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ** ... 132

8.1. Определение турбулентности ... 132
8.2. Потеря устойчивости и переход от ламинарного течения к турбулентному ... 136
8.2.1. Переход от ламинарного течения к турбулентному в трубах ... 136
8.2.2. Переход в пограничном слое на плоской пластине ... 142
8.3. Элементы теории устойчивости ... 145
8.3.1. Энергетический метод ... 145
8.3.2. Метод малых возмущений ... 147
8.4. Уравнения Рейнольдса — осредненные уравнения турбулентного движения ... 149
8.4.1. Статистический подход к описанию турбулентных течений ... 149
8.4.2. Уравнения динамики для осредненных величин ... 154
8.4.3. Турбулентная вязкость. Гипотеза Прандтля о длине пути перемешивания ... 156
8.5. Стационарное гидродинамически стабилизированное турбулентное течение в круглой трубе жидкости с постоянными свойствами ... 160
8.5.1. Касательные напряжения в потоке ... 160

8.5.2 Профиль осредненной скорости 162
8.5.3. Практические расчеты профиля скорости и коэффициента сопротивления 166
8.5.4. Коэффициент гидравлического сопротивления 171
8.6. Важнейшие статистические характеристики турбулентности 174
8.6.1. Математическое ожидание 174
8.6.2. Дисперсия и интенсивность турбулентных пульсаций 175
8.6.3. Корреляционные функции пульсаций 176
8.6.4. Энергетический спектр стационарного случайного процесса 179
8.6.5. Тензор пространственных корреляций турбулентного поля скорости 180
8.7. Анализ турбулентных течений методами энергетического баланса 181
8.7.1. Баланс полной энергии турбулентности 181
8.7.2. Баланс энергии осредненного движения 185
8.7.3. Баланс энергии пульсационного движения 186
8.8. Моделирование турбулентных течений 191
8.8.1. Моделирование напряжений Рейнольдса 192
8.8.2. Прямое численное моделирование 196

Приложение. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ** 199

П.1. Скаляры, векторы, тензоры 199
П.2. Обобщение понятия тензор 202
П.3. Некоторые свойства тензоров второго ранга 204
П.4. Операции с векторами в тензорной алгебре 208
П.5. Векторные тождества в тензорной алгебре 210
Список литературы 211

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение вопросов гидродинамики и конвективного теплообмена занимает большое место в подготовке студентов технических вузов по учебным направлениям «Теплоэнергетика» и «Техническая физика». В основу данной монографии положены материалы лекционного курса «Механика жидкости и газа» (МЖГ), на протяжении нескольких десятилетий читаемого студентам-теплофизикам третьего курса Московского энергетического института. У истоков этого курса стояли крупнейшие специалисты: чл.-корр. РАН Б.С. Петухов и докт. техн. наук, проф. В.Н. Попов. Большой вклад в совершенствование данного курса внесли и другие ведущие преподаватели кафедры инженерной теплофизики МЭИ, прежде всего докт. техн. наук, проф. Л.Г. Генин, канд. техн. наук, доц. Л.Д. Нольде, канд. техн. наук, доц. И.В. Кураева, учениками которых являются авторы настоящей монографии.

При написании книги необходимо было принять во внимание некоторые обстоятельства, накладывающие отпечаток на преподавание дисциплины МЖГ в вузе. Начнем с того, что в школьном курсе физики раздел МЖГ представлен очень слабо: учащиеся в лучшем случае получают сведения о законах гидростатики и уравнении Бернулли. Такое положение сложилось еще в те времена, когда в школьную программу не входили основы высшей математики. Действительно, без элементарных сведений о пределе и производной трудно постичь основополагающие понятия МЖГ, скажем, понятие об «элементарной жидкой частице».

Гораздо труднее понять и объяснить тот факт, что и в курсе общей физики технического вуза изучению закономерностей движения жидкостей отведено весьма скромное место. Студент, прослушавший курс общей физики, скорее всего, сможет рассчитать движение заряженной частицы в электромагнитном поле, но он вряд ли представляет, как подойти к решению задачи о гидравлическом сопротивлении участка водопроводной трубы.

Таким образом, в настоящее время изучение специальной дисциплины «Механика жидкости и газа» студенту приходится начинать фактически с нуля. С учетом этого обстоятельства данная книга начинается с введения, в котором обсуждаются основные понятия механики жидкости. Первые три главы посвящены изложению кинематики жидкости,

выводу и обсуждению уравнений динамики жидкости, гидростатике. В двух следующих главах рассмотрены вопросы динамики идеальной несжимаемой жидкости, в том числе важные для практики задачи плоского течения. Далее рассматривается динамика вязкой жидкости. Приведены конкретные примеры описания ламинарного движения несжимаемой жидкости в каналах и пограничном слое. Последняя глава посвящена турбулентным течениям. Обсуждаются вопросы потери устойчивости и перехода от ламинарного течения к турбулентному. Закономерности турбулентного течения рассматриваются с позиций статистической теории турбулентности. Приведены вывод и физический анализ уравнений Рейнольдса, а также уравнений для старших моментов поля скорости, рассмотрено пристенное турбулентное течение, содержатся сведения о современных методах моделирования турбулентных течений.

Основой для значительной части материала, изложенного в учебном пособии, послужила известная монография Л.Г. Лойцянского [1]. Одной из причин, обусловивших появление нашей книги, является то, что указанная монография представляется слишком объемной и сложной для первоначального ознакомления с рассматриваемым предметом студентов, обучающихся в технических вузах. В ряде случаев в пособии используются сведения из учебников Н.Е. Кочина, И.А. Кибеля, Н.В. Розе [2] и Б.Т. Емцева [3].

Читатель несомненно обратит внимание на некоторые особенности данного учебного пособия.

Во-первых, книга посвящена изучению движения *несжимаемых* жидкостей, что нашло отражение в ее названии. В книге фактически отсутствует раздел *Газодинамика* (если не считать одного небольшого § 4.6). Это объясняется особой позицией авторов, которая заключается в следующем. Газодинамика, т.е. наука о движении сжимаемого газа при относительно высоких скоростях, является одним из важнейших самостоятельных направлений МЖГ со своей системой понятий, терминологией, специфическим математическим аппаратом и широким спектром прикладных задач. Поэтому проблемы газодинамики должны составлять содержание отдельного курса, тем более что имеются отличные учебные пособия, в числе которых можно назвать книги М.Е. Дейча [4] и Г.Н. Абрамовича [5]. Существуют и другие самостоятельные направления МЖГ, например «Магнитная гидродинамика», «Гидродинамика двухфазных потоков», содержание которых также выходит за рамки нашего базового курса.

Другой особенностью данного пособия является то, что значительная его часть посвящена течениям вязких жидкостей — ламинарным и турбулентным. Это обусловлено его направленностью на проблемы

энергетики. Действительно, только в рамках модели вязкой жидкости можно решать задачи о гидравлических сопротивлениях трактов энергетических установок и рассматривать вопросы конвективного теплообмена.

В заключение отметим, что все главы написаны авторами совместно. Считаем своим долгом выразить глубокую благодарность научному сотруднику В. Б. Тонконогову за большую помощь в подготовке и редактировании рукописи. Будем весьма признательными читателям за любые критические замечания и предложения, направленные на совершенствование текста учебного пособия.

Книга издана при финансовой поддержке Научно-производственной фирмы АОЗТ ЦАТИ.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

В.1. МЕСТО МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В НАУКЕ О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

Механика — наука, изучающая механическое движение, т.е. изменение с течением времени взаимного расположения тел в пространстве, а также взаимодействие между телами, связанное с их относительным движением.

В механике, как и во всякой науке, используются абстрактные понятия, например массы, скорости, силы, ускорения, энергии и др. Для характеристики движущихся материальных тел вводятся абстрактные *модели* этих тел. Модели обладают теми *свойствами реальных тел*, которые наиболее существенны для рассматриваемой задачи.

В механике используются следующие модели тел.

1) **Материальная точка** — тело конечной массы, но пренебрежимо малых размеров. Роль материальной точки играет *центр тяжести* тела, в котором считается сосредоточенной вся масса тела. Модель используют, когда рассматривается лишь *траектория* движения тела — $s[x(t), y(t), z(t)]$ на рис. В.1. С помощью этой модели можно рассчитать, например, полет снаряда.

2) **Абсолютно твердое тело** — совокупность материальных точек, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга. Это модель *недеформируемого тела* неизменных размеров. В процессе движения расстояния между любыми точками тела (A, B, C, D на рис. В.2)

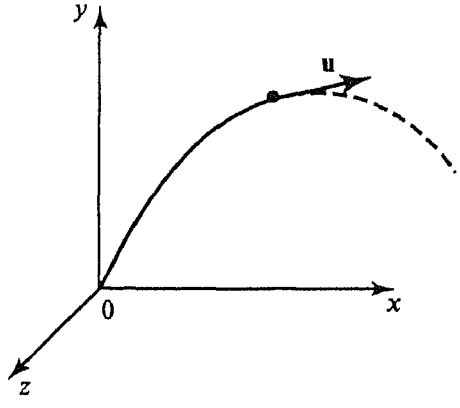


Рис. В.1. Движение материальной точки

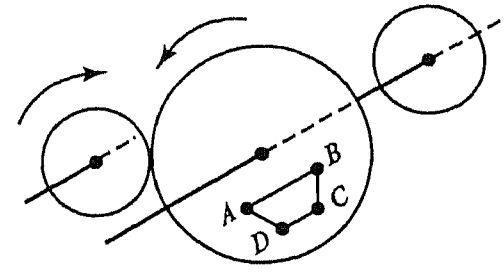


Рис. В.2. Движение абсолютно твердого тела

не меняются. Модель используется, если существенны форма, размеры и положение тела в пространстве. С помощью нее можно рассмотреть, например, движение деталей машин.

3) **Сплошная среда** — модель, в которой:

во-первых, учитывается *деформация* тела под действием приложенных сил;

во-вторых, полагается, что тело обладает свойством *сплошности*: отвлекаются от дискретного строения вещества (молекул, атомов) и считают, что масса тела распределена по пространству непрерывно.

Гипотеза сплошности введена в XVIII в. Даламбером (в 1744 г.).

К сплошным средам могут быть отнесены тела в любом агрегатном состоянии:

твердые тела,

жидкости (вода, масла, растворы, расплавы),

газы (газ, пар, газовые смеси),

плазма.

Следует отметить, что для газов и плазмы гипотеза сплошности применима не всегда. Она неприменима для разреженной среды (например, в верхних слоях атмосферы). Критерием сплошности может служить значение числа Кнудсена

$$\mathrm{Kn} = l/L,$$

где l — длина свободного пробега молекул; L — характерный размер тела.

Для сплошной среды должно выполняться условие

$$\mathrm{Kn} \ll 1.$$

Например, для кубического объема воздуха с ребром длиной 1 мм при атмосферном давлении $l/L \approx 10^{-5}$, т.е. среду можно считать сплошной.

Сплошные среды подразделяются на два класса по *характеру деформации*, которую они испытывают под действием приложенных сил. Существуют два типа деформации:

сжатия (растяжения),

сдвига (скашивания).

Упругие сплошные тела хорошо сопротивляются обоим типам деформации. К этому классу относятся твердые тела.

Подвижные (или *текучие*) тела слабо сопротивляются деформации сдвига. К этому классу относятся жидкости, газы, плазма.

Подвижные сплошные тела, в свою очередь, подразделяются на сжимаемые и несжимаемые.

Несжимаемой сплошная среда считается тогда, когда можно пренебречь деформациями растяжения (сжатия), приводящими к изменению объема тела. Это — капельные жидкости, газы и плазма при относительно невысоких скоростях движения.

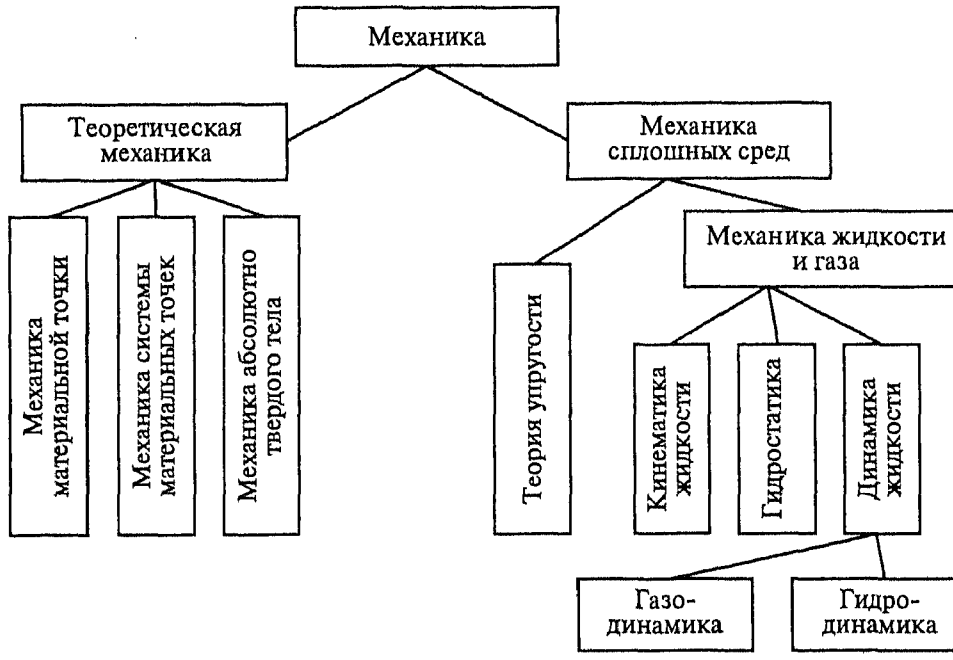


Рис. В.3. Место МЖГ в механике

Для *сжимаемой* сплошной среды движение сопровождается изменением удельного объема. Сжимаемость проявляется при высоких скоростях движения.

В соответствии со сказанным выше представим схему деления механики на отдельные разделы (рис. В.3).

Данный курс посвящен, в основном, изучению различных разделов *механики жидкости и газа*. Однако будут рассмотрены и некоторые общие закономерности, которые в равной мере справедливы как для жидкости и газа, так и для упругих твердых тел.

В.2. ПРЕДМЕТ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Механика жидкости и газа изучает законы механического движения и равновесия жидкой или газообразной сплошной среды и возникающие при этом силовые взаимодействия в среде и на ее границах. Механика жидкости и газа включает:

кинематику жидкости, в которой изучают изменение формы, размеров и пространственного расположения жидких объемов, отвлекаясь от причин, вызвавших это изменение;

гидростатику, в которой изучают условия равновесия жидкости в силовом поле;

динамику, в которой изучают законы движения жидкости.

Динамика, в свою очередь, подразделяется на **гидродинамику** — динамику несжимаемой жидкости и **газодинамику** — динамику сжимаемой жидкости.

Следует отметить, что в МЖГ термин «жидкость» используют для любой текучей сплошной среды — капельной жидкости, газа, плазмы, — так как многие закономерности МЖГ являются для этих сред общими. Обычно специально оговариваются случаи, когда рассматривается какая-либо частная модель среды (например, несжимаемая жидкость).

Итак, в МЖГ исследуются поле скоростей в потоке жидкости, обтекающем твердое тело, и распределение сил, действующих в жидкости и на границе с твердым телом. При этом различают три типа задач:

внешняя задача, когда твердое тело обтекается снаружи потоком жидкости. В качестве примера можно привести обтекание потоком воздуха крыла самолета. На крыло действует результирующая сила, вектор которой равен сумме векторов подъемной силы и силы сопротивления (рис. В.4):

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{\text{под}} + \mathbf{F}_{\text{сопр}};$$

внутренняя задача, когда жидкость движется внутри канала, образованного твердыми стенками. В качестве примера можно привести течение жидкости в круглой трубе (рис. В.5). С помощью методов МЖГ рассчитывают распределение скорости по сечению трубы и силу, которая будет действовать со стороны жидкости на трубу. Равная по величине, но противоположно направленная — это сила сопротивления движению потока (сила трения);

свободные потоки при отсутствии твердых границ, например струя (рис. В.6, *а*), истекающая из сопла в неподвижную или движущуюся жидкость (слой смешения), или аэродинамический след за обтекаемым телом (рис. В.6, *б*).

Течение теплоносителей, которое, в частности, рассматривается теплофизикой, может проходить в условиях как внешней, так и внутренней задачи. Если течение сопровождается теплообменом, то для исследования этого процесса используют систему уравнений конвективного теплообмена, в которую входят уравнения гидродинамики. Поэтому изучение механики сплошных сред важно и для решения задач теплообмена.

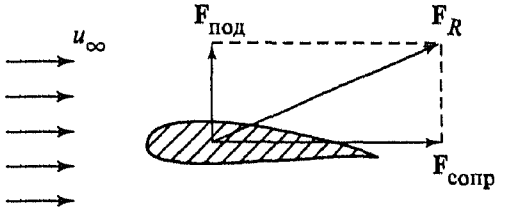


Рис. В.4. Пример внешней задачи: обтекание крылового профиля

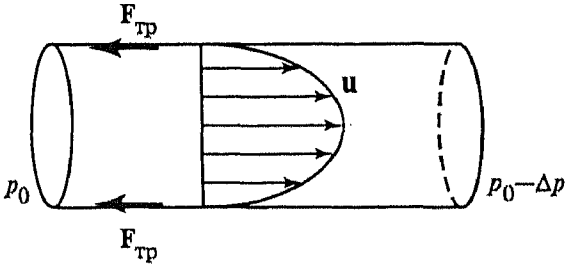


Рис. В.5. Пример внутренней задачи: течение в трубе

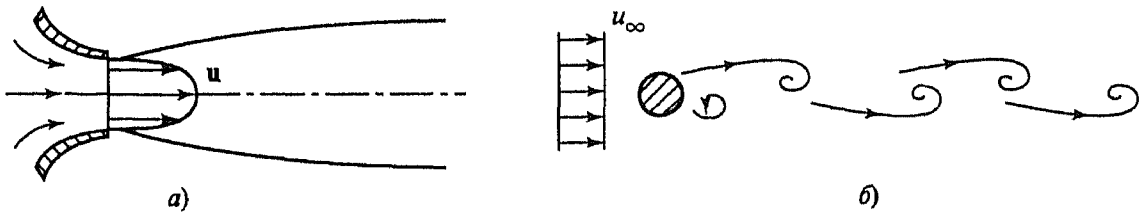


Рис. В.6. Примеры свободных потоков:

а — струя, истекающая из сопла; *б* — аэродинамический след за поперечно обтекаемым цилиндром

В.3. МЕТОД МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА

Изучение процессов движения (в частном случае, покоя) жидкости в МЖГ ведется *феноменологическим методом* (ФМ). При этом, прежде всего, отказываются от рассмотрения дискретной микроструктуры среды. Феноменологический метод является в определенной степени противоположным *статистическому методу*, когда рассматриваются атомы и молекулы и силы взаимодействия между ними. В результате статистического осреднения можно определить свойства жидкости — плотность, вязкость, теплоемкость и т.п.

Феноменологический метод применяется не только в МЖГ. Его используют, например в термодинамике.

Рассмотрим основные особенности феноменологического метода.

1) Первая особенность ФМ. Среда, как уже указывалось выше, рассматривается как сплошная (непрерывная, неразрывная). В рамках гипотезы о сплошности состояние движущейся среды в каждой точке потока можно охарактеризовать *макропараметрами.* Такими параметрами в МЖГ являются:

вектор скорости	$\mathbf{u}(x, y, z, t)$,
давление	$p(x, y, z, t)$,
температура	$T(x, y, z, t)$,
плотность	$\rho(x, y, z, t)$,
динамический коэффициент вязкости	$\mu = \mu(x, y, z, t)$,
кинематический коэффициент вязкости	$\nu = \mu / \rho = \nu(x, y, z, t)$,

где x, y, z — пространственные координаты; t — время.

Давление p и температура T — термодинамические параметры, которые подробно изучаются в курсе термодинамики. *Массовая плотность* сплошной среды в данной точке A (рис. В.7) есть

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V},$$

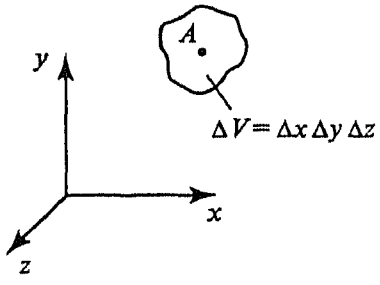


Рис. В.7. К определению понятия плотности сплошной среды в точке $A(x, y, z)$

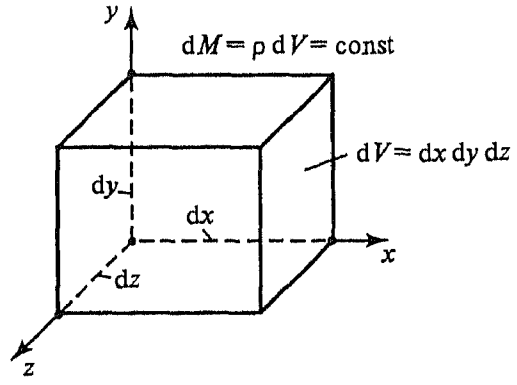


Рис. В.8. К определению понятия «элементарный жидкий объем» (частица)

где ΔV — объем в окрестности точки A; ΔM — масса, содержащаяся в ΔV. Понятие плотности, таким образом, можно ввести *только в сплошной среде.*

Коэффициенты вязкости — это параметры, характеризующие способность жидкости сопротивляться деформации сдвига, т.е. проскальзыванию соседних слоев жидкости. Свойство вязкости проявляется только при наличии относительного движения слоев жидкости.

2) Вторая особенность ФМ. Предполагается *непрерывное распределение макропараметров* по рассматриваемому объему жидкости V. Это означает, что все макропараметры имеют *конечные значения* и при переходе от точки к точке внутри V *не могут изменяться скачкообразно*, т.е. *производные по пространственным координатам конечны.*

С учетом первой и второй особенностей ФМ можно ввести одно из важнейших понятий МЖГ — понятие об *элементарном жидком объеме* (частице) $dV = dx\, dy\, dz$ (рис. В.8). Объем dV хотя и мал, но содержит достаточное число молекул, чтобы считать среду в пределах этого объема сплошной, а линейные размеры dx, dy, dz велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями. С другой стороны, объем dV должен быть достаточно мал, чтобы все макропараметры ($\mathbf{u}$, p, ρ, μ) в его пределах изменялись лишь на бесконечно малую величину. Это означает, что состояние механического движения рассматриваемого объема (частицы) можно охарактеризовать *одним* значением каждого из этих параметров.

Заметим, что в силу сплошности (неразрывности) среды жидкая частица при своем движении может изменить форму из-за деформаций, но масса частицы $dM = \rho\, dV$ остается неизменной.

3) Третья особенность ФМ. Для составления дифференциальных уравнений, на которых основано *математическое описание движения жидкости*, делается допущение о справедливости в отношении жидких частиц основных законов физики: законов сохранения массы, импульса,

энергии. Можно, например, выделить в жидкости жидкую частицу и применить к ней второй закон Ньютона $\mathrm{d}M\mathbf{a} = \sum_j \mathbf{F}_j$.

Замечание. Что значит выделить жидкую частицу? При движении частица вступает во взаимодействие с окружающей жидкостью. Выделяя из жидкости частицу $\mathrm{d}V$ и рассматривая ее отдельно, мы обязаны задать на ее поверхности силы, характеризующие это взаимодействие (*так называемые поверхностные силы*).

4) Четвертая особенность ФМ. Значения физических параметров ρ и μ, их зависимости от p и T задаются заранее и в рамках ФМ считаются известными. Действительно, физические свойства жидкости, такие, как, например, плотность ρ и вязкость μ определяются микроструктурой вещества и механизмом взаимодействия молекул. В рамках ФМ мы не можем определить ρ и μ; эти свойства берутся либо из экспериментов, либо вычисляются статистическими методами.

В.4. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЖИДКОСТИ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Как уже отмечалось, в МЖГ принято называть жидкостью как собственно капельные жидкости, так и газы и плазму. Этим подчеркивается их основное отличие от твердого тела — обладание *текучестью*.

В.4.1. Модели сжимаемой и несжимаемой жидкости

Сжимаемость — способность тела изменять свой объем под воздействием давления. Коэффициент сжимаемости определяется как

$$\varkappa_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s,$$

ρ — плотность вещества, кг/м^3; v — удельный объем, м^3; p — давление, Па (Н/м^2); s — условия, при которых определяется коэффициент сжимаемости.

Если это изотермические условия (T = const), то $\varkappa_T$ — изотермический коэффициент сжимаемости, если это адиабатические условия, то $\varkappa_a$ — адиабатический коэффициент сжимаемости.

Капельные жидкости отличаются чрезвычайно малой сжимаемостью. Так, для воды при комнатной температуре и атмосферном давлении $\varkappa_T \approx 5 \cdot 10^{-5}$ бар$^{-1}$. Течение капельных жидкостей обычно рассматривают в рамках модели *несжимаемой* жидкости.

Для *газов* сжимаемость во много раз выше. Известно, что состояние газов при не слишком больших давлениях описывается уравнением Менделеева—Клапейрона

$$p = \rho RT.$$

Замечание. Такие газы в термодинамике называются идеальными. Но в МЖГ термин «идеальный» используется в другом смысле; это будет рассмотрено ниже. Поэтому газ, для которого справедливо приведенное уравнение состояния, в МЖГ называют *совершенным*.

Для совершенного газа

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{RT}, \quad \varkappa_T = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}.$$

Легко видеть, что сжимаемость газа выше, чем капельной жидкости (например, при $p = 1$ бар — примерно в $2 \cdot 10^4$ раз). Несмотря на это, во многих случаях и газы можно рассматривать в рамках модели несжимаемой жидкости. Если поток газа движется со скоростями u, не превышающими ~0,3 скорости звука a, то изменение давления в потоке невелико и высокая сжимаемость газа не проявляется: газ можно считать несжимаемой жидкостью. При более высоких скоростях ($u > 0{,}3a$) изменение давления в потоке существенно возрастает, поэтому пренебречь сжимаемостью нельзя.

Отношение $M = u/a$ называется *числом Маха*[1]. Используя число Маха, можно предыдущие рассуждения подытожить следующим образом:

модель несжимаемой жидкости применима к капельным жидкостям и газам при $M < 0{,}3$;

модель сжимаемой жидкости — к газам при $M > 0{,}3$.

Важно отметить, что дифференциальные уравнения, описывающие движение сжимаемой жидкости, сложнее, чем в случае несжимаемой жидкости.

В.4.2. Модели идеальной и вязкой жидкости

Идеальная жидкость — жидкость с нулевой вязкостью, совершенно лишенная внутреннего трения и не оказывающая никакого сопротивления сдвигу. Свойства идеальной жидкости можно приписать и несжимаемой, и сжимаемой жидкости. Пользуясь моделью идеальной жидкости, можно найти, например, распределения скорости и давления в потоке жидкости, обтекающем тело. Однако невозможно определить эффекты, связанные с вязкостью, и, прежде всего, силы сопротивления.

Вязкая жидкость — близкая к реальности модель несжимаемой или сжимаемой жидкости. Однако при учете вязкости дифференциальные уравнения, описывающие течение, значительно сложнее, чем в случае идеальной жидкости.

---

[1] Мах Эрнст (1838—1916 гг.) — австрийский физик и философ.

Глава первая

КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

1.1. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ. МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ЭЙЛЕРА

Кинематика рассматривает способы описания движения материальных тел, отвлекаясь от причин этого движения.

Для описания движения *материальной точки* задают ее скорость. Для описания движения *абсолютно твердого тела* достаточно задать линейную скорость некоторой точки этого тела (называемой полюсом) и угловую скорость вращения тела вокруг полюса.

Проблема описания движения *сплошной среды* представляется гораздо более сложной. Тем не менее эта проблема разрешима, причем в кинематике сплошной среды предложены два принципиально различных подхода к ее решению — методы Лагранжа[1] и Эйлера[2].

1.1.1. МЕТОД ЛАГРАНЖА

В этом методе изучается *сама жидкость*, движущаяся в неподвижной системе координат. Обычно рассмотрение начинается с изучения движения отдельных жидких частиц. Выбирается некоторая частица A (рис. 1.1). Координаты этой частицы в начальный момент времени $\{x_0, y_0, z_0\}$ отличают эту частицу от других частиц; задав эти координаты, мы как бы «пометили» частицу. Далее определяется зависимость координат этой частицы от времени, т.е. ищется *траектория* движения частицы:

---

[1] Лагранж Жозеф Луи (1736—1813 гг.) — французский математик и механик.

[2] Эйлер Леонард (1707—1783 гг.) родился в Швейцарии, в 1727—1741 гг. и после 1766 г. жил в России, академик Петербургской академии наук.

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t), \\ y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t), \\ z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

где x, y, z — определяемые величины; x_0, y_0, z_0, t — независимые переменные, называемые *переменными Лагранжа*.

По соотношению (1.1) можно в любой момент времени t найти скорость жидкой частицы.

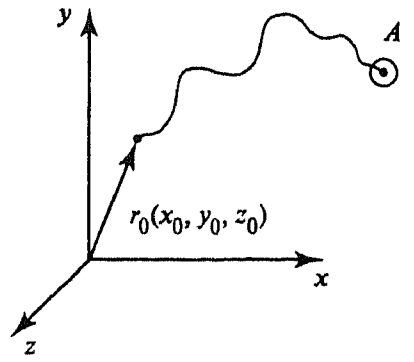


Рис. 1.1. Движение «помеченной» лагранжевой частицы

Метод Лагранжа используется в тех практических задачах, когда нужно исследовать траектории движения отдельных частиц, т.е. проследить за движением отдельных частиц во времени. Рассматривая частицу как носитель какого-либо свойства (например, температуры), можно исследовать процесс переноса в пространстве этого свойства (процесс теплообмена).

Однако на практике часто интересует не движение отдельных частиц, не положение конкретной частицы в разные моменты времени, а скорость движения *всех частиц* (иными словами, любой частицы) *в данный момент времени*. Например, силы сопротивления на границе твердого тела и обтекающей его жидкости определяются *одновременным воздействием* большого числа частиц на это тело. В таких случаях более удобно пользоваться другим методом — методом Эйлера.

1.1.2. МЕТОД ЭЙЛЕРА

В методе Эйлера объектом изучения является не сама движущаяся жидкость, а связанное с системой координат *неподвижное пространство*, заполненное движущейся жидкостью. Изучение движения по методу Эйлера начинается с исследования распределения скоростей в пространстве и его изменения во времени, т.е. с изучения поля скоростей

$$u_x = F_1(x, y, z, t),$$
$$u_y = F_2(x, y, z, t),$$
$$u_z = F_3(x, y, z, t),$$

где u_x, u_y, u_z — определяемые (зависимые) переменные; x, y, z, t — независимые переменные Эйлера.

Если говорят, что в точке $M(x, y, z)$ пространства в данный момент времени t скорость равна $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, это означает, что частица жидкости, находящаяся в момент времени t в этой точке, будет иметь такую

скорость. В следующий момент $t + \Delta t$ в точке M окажется другая частица, которая будет иметь скорость $\mathbf{u}(x, y, z, t + \Delta t)$.

Поле скорости называется *стационарным*, если скорости в каждой точке не зависят от времени (но могут изменяться в пространстве):

$$u_x = u_x(x, y, z),$$

$$u_y = u_y(x, y, z),$$

$$u_z = u_z(x, y, z).$$

Поле скорости называется *однородным*, если вектор скорости не зависит от пространственных координат (но может зависеть от времени):

$$u_x = u_x(t),$$

$$u_y = u_y(t),$$

$$u_z = u_z(t).$$

1.1.3. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ И ЛИНИИ ТОКА

Траектория — линия в пространстве, по которой происходит движение рассматриваемой частицы с течением времени. Этот геометрический образ соответствует описанию движения по методу Лагранжа. Траектория частицы A на рис. 1.2 показывает положение одной и той же частицы A в разные моменты времени t_0, t_1, t_2, ...

Примеры траекторий: линия, вычерчиваемая мелом на доске, — это траектория кусочка мела; след, оставляемый в небе высотным самолетом, — это траектория самолета.

Чтобы найти скорость частицы A, имеющей координаты x, y, z в некоторый момент времени t, учтем, что за время $\mathrm{d}t$ частица переместится на $\mathrm{d}l = \{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$:

$$u_x(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad u_y(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad u_z(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Отсюда можно записать

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z(x, y, z, t)} = \mathrm{d}t, \qquad (1.2)$$

где x, y, z — координаты данной частицы в данный момент времени; t — независимая переменная, по которой ведется интегрирование, если надо определить путь, пройденный частицей, по ее скорости.

Уравнение (1.2) — *дифференциальное уравнение траектории.*

Линия тока — векторная линия поля вектора скорости, т.е. линия, в каждой точке которой вектор скорости *в данный момент времени* на-

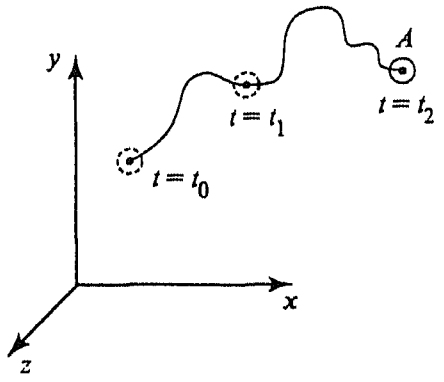


Рис. 1.2. Метод Лагранжа: траектория жидкой частицы. Текущий момент времени на рисунке $t = t_2$

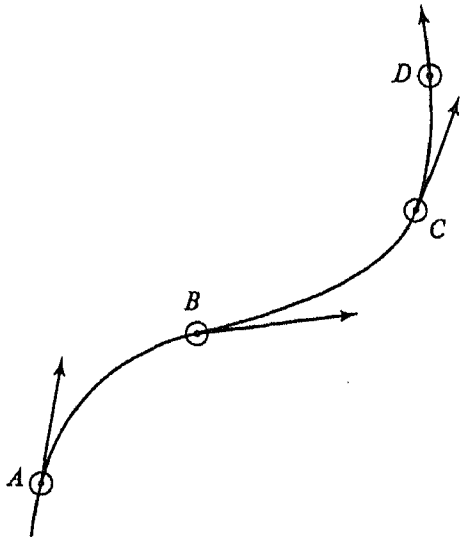


Рис. 1.3. Метод Эйлера: линия тока в данный момент времени

правлен по касательной (рис. 1.3). Этот геометрический образ соответствует описанию движения по методу Эйлера. Линия тока — это линия в пространстве. На нее *в данный момент времени* как бы «нанизано» много частиц A, B, C, ... Все эти «нанизанные» частицы одновременно перемещаются вдоль линии тока, например, как бусинки вдоль нитки или как вагоны вдоль рельсов.

Для вывода дифференциального уравнения линии тока воспользуемся тем обстоятельством, что в любой точке $\{x, y, z\}$ в любой момент времени t элементарный вектор линии тока

$$\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k}$$

и вектор скорости

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$$

параллельны. Тогда их векторное произведение равно нулю

$$[\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{u}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0;$$

$$(u_z\mathrm{d}y - u_y\mathrm{d}z)\mathbf{i} - (u_z\mathrm{d}x - u_x\mathrm{d}z)\mathbf{j} + (u_y\mathrm{d}x - u_x\mathrm{d}y)\mathbf{k} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z}; \quad \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z},$$

и получаем *дифференциальное уравнение линии тока*

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z(x, y, z, t)}. \qquad (1.3)$$

Итак, различие траектории и линии тока состоит в том, что траектория — это совокупность положений *одной и той же частицы* в разные моменты времени, линия тока — линия, на которой расположены *разные частицы* в один и тот же момент времени.

Если течение *стационарно*, линии тока не меняют своего положения в пространстве. Поэтому частица, перемещаясь по своей траектории, движется вдоль линии тока.

Траектории и линии тока совпадают только в случае стационарного течения. Математически это выражается в том, что время t в выражениях (1.2), (1.3) исключается из числа независимых переменных, и различия между этими выражениями исчезают.

Чтобы еще раз подчеркнуть принципиальное различие подходов Лагранжа и Эйлера, рассмотрим, какую роль в этих методах играет время.

По Лагранжу время t — это время наблюдения за движением выделенной частицы.

Путь, пройденный частицей за время T, иными словами, ее траекторию в пространстве, можно вычислить интегрированием скорости частицы по времени

$$L_x = \int_0^T u_x(x, y, z, t)\,\mathrm{d}t,$$

$$L_y = \int_0^T u_y(x, y, z, t)\,\mathrm{d}t,$$

$$L_z = \int_0^T u_z(x, y, z, t)\,\mathrm{d}t.$$

По Эйлеру время t — это время наблюдения за точкой пространства, через которую постоянно проходят разные частицы.

При интегрировании скорости в данной точке пространства $\{x_0, y_0, z_0\}$ находят среднюю во времени скорость в этой точке

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T}\int_0^T u_x(x_0, y_0, z_0, t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\bar{u}_y = \frac{1}{T}\int_0^T u_y(x_0, y_0, z_0, t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\bar{u}_z = \frac{1}{T}\int_0^T u_z(x_0, y_0, z_0, t)\,\mathrm{d}t,$$

где T — временно́й интервал, в течение которого мы наблюдаем за точкой пространства.

В заключение отметим некоторые свойства линий тока. Через каждую точку пространства в данный момент времени может проходить только одна линия тока, т.е. линии тока не пересекаются. Это понятно, так как пересечение линий тока означало бы, что одна частица имеет не единственную скорость. Однако существуют так называемые *особые точки*, в которых это правило нарушается. В этих точках скорость равна либо нулю, либо бесконечности. Примеры течений с особыми точками будут рассмотрены ниже.

1.1.4. СТРУИ И ТРУБКИ ТОКА

Часть жидкости, ограниченная поверхностью, образованной траекториями, проходящими через замкнутый контур, называется **струей** (рис. 1.4, где продольные линии — это траектории). Понятие струи используется в *методе Лагранжа*.

Часть заполненного жидкостью пространства, которая ограничена поверхностью, образованной линиями тока, проходящими через замкнутый контур, называется **трубкой тока** (рис. 1.5, где продольные линии — это линии тока). Понятие трубки тока используется в *методе Эйлера*.

Если течение *стационарное*, струя совпадает с трубкой тока.

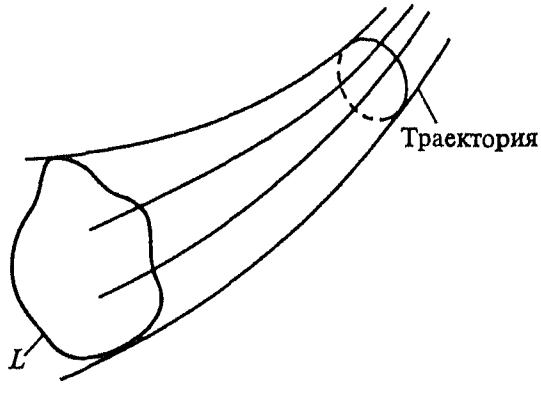


Рис. 1.4. Струя:

L — замкнутый контур; линии — траектории жидких частиц

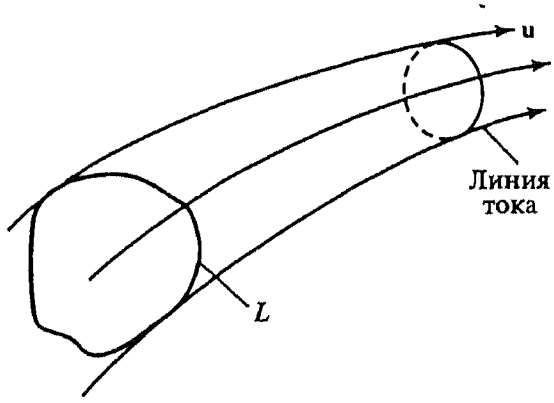


Рис. 1.5. Трубка тока:

L — замкнутый контур; линии — линии тока

1.2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ, ВРАЩАТЕЛЬНОЕ И ДЕФОРМАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

1.2.1. ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

Выделим в объеме жидкости некоторую жидкую частицу в форме параллелепипеда с полюсом M_0, расположенным в одном из углов частицы (рис. 1.6). Эта частица участвует в следующих движениях:

поступательном вместе с точкой M_0 со скоростью $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$,

вращательном вокруг M_0,

деформационном: растяжения-сжатия и сдвига (скашивания).

Чтобы абстрагироваться от поступательного движения, будем рассматривать движение в системе координат $\{x', y', z'\}$, начало которой находится в точке M_0 и которая движется поступательно вместе с этой точкой. В новой системе координат остается лишь вращательное и деформационное движение.

Движение частицы относительно системы координат $\{x', y', z'\}$ будем называть *относительным*; таким образом относительное движение — это совместное вращательное и деформационное движение.

Для описания относительного движения жидкой частицы достаточно описать относительное движение граней, ограничивающих частицу. Покажем, что описание движения граней сводится к описанию движения

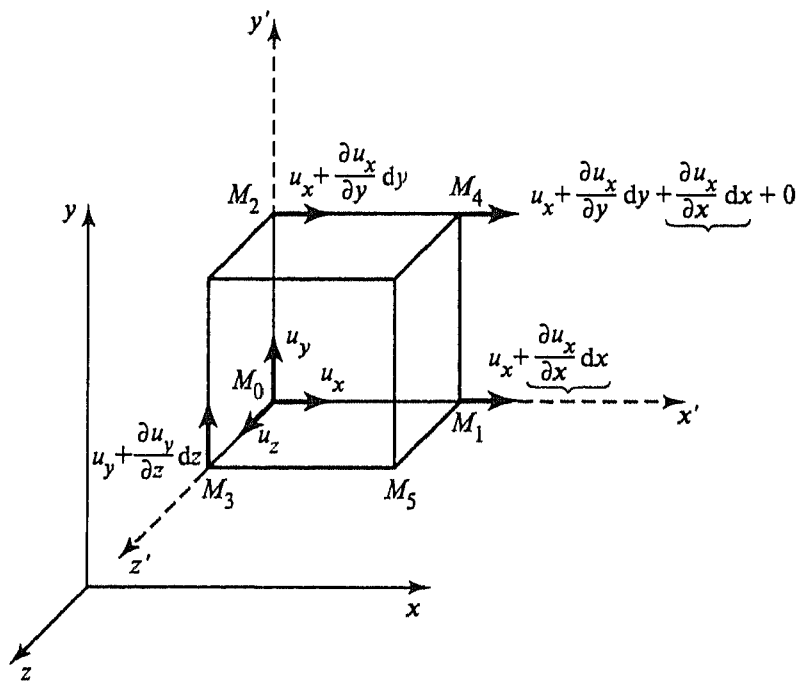


Рис. 1.6. Описание движения жидкой частицы можно свести к описанию движения ее главных ребер

трех взаимно перпендикулярных ребер, проходящих через полюс (*главных ребер*). Действительно, ребро M_0M_1 удлиняется вдоль оси x' с той же скоростью, что и вся грань $M_0M_2M_4M_1$, поскольку разница составляющей скорости вдоль x в точках M_1, M_0 и M_4, M_2 одинакова и равна $(\partial u_x/\partial x)\,\mathrm{d}x$ (см. рис. 1.6).

Скорость относительного удлинения ребра $\mathrm{d}x$ по оси x

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Аналогично можно показать, что грань $M_0M_1M_5M_3$ поворачивается вокруг оси x' с такой же угловой скоростью Ω_x, что и ребро M_0M_3 (см. рис. 1.6):

$$\Omega_x = -\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)/\mathrm{d}z = -\frac{\partial u_y}{\partial z},$$

где знак «–» выбран по правилу правого винта.

Итак, скорости относительного удлинения главных ребер

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Угловые скорости вращения ребер

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Относительное движение жидкой частицы (рис. 1.7) описывает тензор «векторной градиент». Другое название этого тензора — «дифференциальная диада» — см. приложение формулу (П. 16):

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{\partial u_x}{\partial y} & \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial x} & \dfrac{\partial u_z}{\partial y} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Девять компонент этого тензора определяют относительное движение трех главных ребер, а следовательно, и жидкой частицы в целом. При этом, как видно, элементы главной диагонали тензора —

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

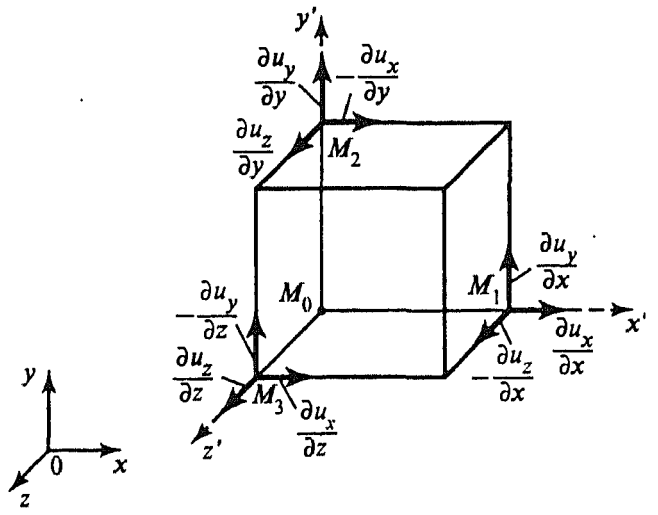


Рис. 1.7. Относительное движение жидкой частицы

— описывают скорости относительного удлинения главных ребер (и частицы в целом) вдоль осей x, y, z. Для дальнейшего рассмотрения полезно представить векторный градиент как сумму симметричного и антисимметричного тензоров (см. приложение, § П.3):

$$V_{ij}^{s} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad (1.4)$$

$$V_{ij}^{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

1.2.2. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим угловую скорость жидкой частицы

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}.$$

Если бы тело было абсолютно твердым, то каждая компонента угловой скорости вращения для всех ребер (так же как и всего тела) была бы одинаковой. Для жидкости это не так. Гельмгольц[1] предложил брать в качестве компоненты угловой скорости в направлении данной оси полусумму угловых скоростей двух граней, проходящих через эту ось. С учетом знаков угловых скоростей имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с антисимметричной частью V_{ij}^{A} тензора V_{ij} [см. выражение (1.5)].

Выражение (1.6) можно записать в векторной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u},$$

где $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ — вектор, «сопутствующий антисимметричному тензору» V_{ij}^{A}, или в тензорной форме

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Согласно данному выше определению угловая скорость является *общей для всего объема жидкой частицы*. Иными словами, жидкая частица вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, определенной выражением (1.6), как *«квазитвердая», «замороженная»* частица. В отношении поступательного и вращательного движения можно считать частицу твердой, двигающейся поступательно вместе с полюсом M_0 со скоростью $\mathbf{u}$ и вращающейся как целое вокруг этого полюса с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Выражение (1.6) известно из механики абсолютно твердого тела. Там оно справедливо *глобально*, т.е. для всего тела. В МЖГ это выражение справедливо *локально*, для выделенной жидкой частицы.

---

[1] Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (1821—1894 гг.) — немецкий ученый, работавший в области механики жидкости, термодинамики, физиологии и психологии.

1.2.3. ДЕФОРМАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Отличие жидкой частицы от твердой проявляется в деформационном движении.

Выше были даны выражения для компонент скорости **линейной деформации** ε_x, ε_y, ε_z. Получим выражение для скорости **относительной объемной деформации**

$$\varepsilon_V = \frac{1}{\Delta V}\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathrm{d}\Delta V = (\Delta x + \mathrm{d}\Delta x)(\Delta y + \mathrm{d}\Delta y)(\Delta z + \mathrm{d}\Delta z) - \Delta x\Delta y\Delta z =$$

$$= \Delta y\Delta z\,\mathrm{d}\Delta x + \Delta x\Delta z\,\mathrm{d}\Delta y + \Delta x\Delta y\,\mathrm{d}\Delta z + 0(\delta^2).$$

Тогда с учетом (1.4)

$$\mathrm{d}\Delta V = \Delta y\Delta z\varepsilon_x\Delta x\,\mathrm{d}t + \Delta x\Delta z\varepsilon_y\Delta y\,\mathrm{d}t + \Delta x\Delta y\varepsilon_z\Delta z\,\mathrm{d}t$$

и

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

или

$$\varepsilon_V = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

что можно записать в векторной и тензорной форме как

$$\varepsilon_V = \operatorname{div}\mathbf{u},$$

$$\varepsilon_V = \frac{\partial u_m}{\partial x_m}.$$

Деформация сдвига — это изменение угла между взаимно перпендикулярными соседними гранями, проходящими через общую ось (x', y' или z'). Скорость деформации сдвига пропорциональна *разности угловых скоростей* этих граней или соответствующих ребер (так как выше было показано, что угловая скорость грани с точностью до бесконечно малых высших порядков равна угловой скорости соответствующего ребра). Тогда скорость деформации сдвига равна (с учетом знаков угловых скоростей граней)

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right),$$

$$\gamma_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right).$$

Таким образом, деформационное движение характеризуется

тремя скоростями линейной деформации ε_x, ε_y, ε_z;

тремя скоростями деформации сдвига γ_x, γ_y, γ_z.

Этим шести величинам соответствуют шесть компонент записанного выше (1.4) симметричного тензора V_{ij}^s, который носит название — **тензор скоростей деформации**. Следует заметить, что формальная процедура разложения тензора векторный градиент V_{ij} на симметричную V_{ij}^s и антисимметричную V_{ij}^A части имеет ясный физический смысл: мы разлагаем движение на деформационное движение (без вращения) и квазитвердое вращение (без деформации).

В заключение сформулируем **первую теорему Гельмгольца.**

Любое движение элементарного объема жидкости можно в данный момент времени рассматривать как результат сложения двух движений: а) квазитвердого, состоящего из поступательного вместе с выбранным полюсом и вращательного вокруг полюса, и б) деформационного.

1.3. КИНЕМАТИКА ВИХРЕВОГО И БЕЗВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЙ

1.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЕВОГО И БЕЗВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЙ

Движение жидкости называется **вихревым**, если

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \neq 0.$$

При вихревом движении частицы жидкости помимо поступательного движения и деформации еще и вращаются вокруг некоторой оси, *проходящей через частицу.*

Движение жидкости называется **безвихревым**, если

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0.$$

При этом вращение частицы вокруг оси, *проходящей через эту частицу*, отсутствует.

В качестве примера вихревого движения можно привести течение вязкой жидкости в плоском канале. Хотя линии тока прямолинейны (рис. 1.8), частицы, двигаясь по прямой, вращаются вокруг своей оси. Ниже будет показано, что действие сил вязкости приводит к появлению

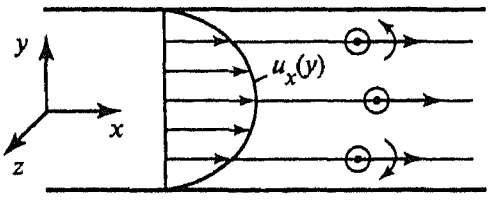


Рис. 1.8. Пример вихревого течения: течение вязкой жидкости в канале

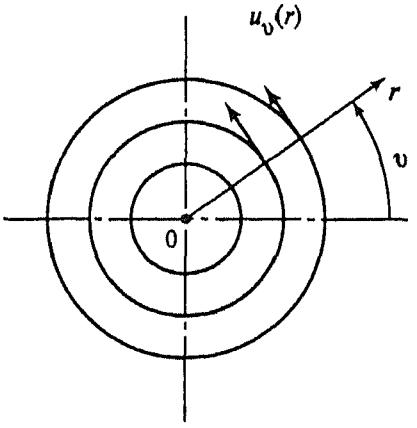


Рис. 1.9. Пример безвихревого течения: плоский потенциальный вихрь

поперечного градиента скорости $\partial u_x/\partial y$. Поэтому в любой точке потока M по крайней мере

$$\omega_z = 0{,}5\ \partial u_x/\partial y \neq 0.$$

Примером безвихревого движения может служить так называемый *плоский потенциальный вихрь* — круговое движение жидкости вокруг центра вращения 0 (рис. 1.9). Сам центр 0 — особая точка; остальные частицы жидкости, двигаясь поступательно по круговым траекториям, тем не менее не вращаются вокруг собственной оси. Это любопытное течение будет подробно рассмотрено ниже.

1.3.2. ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ. ВИХРЕВЫЕ ЛИНИИ И ТРУБКИ. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Вихревая линия — векторная линия поля вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, в каждой точке которой в данный момент времени вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по касательной. Вихревая линия — это мгновенная ось вращения частичек жидкости, расположенных в данный момент времени на этой линии (рис. 1.10).

Вихревая поверхность — совокупность вихревых линий, проходящих через некоторый жидкий контур.

Вихревая трубка — часть пространства, заполненного жидкостью, ограниченная вихревой поверхностью, проходящей через замкнутый контур (рис. 1.11).

Вихревые линии и трубки вводятся по аналогии с линиями и трубками тока, рассмотренными выше.

Поток вектора угловой скорости через сечение вихревой трубки равен:

$$i = \int_S \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{rot}\mathbf{u}\, d\mathbf{S}.$$

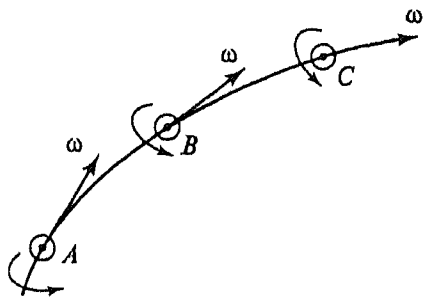


Рис. 1.10. Вихревая линия

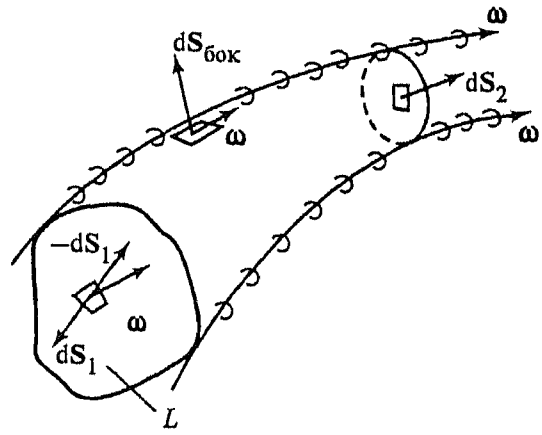


Рис. 1.11. Вихревая трубка

Вторая теорема Гельмгольца: *поток вектора угловой скорости через произвольное поперечное сечение вихревой трубки одинаков в данный момент времени.*

Докажем эту теорему. Рассмотрим замкнутый объем V, ограниченный поверхностями S_1, S_2 и боковой поверхностью $S_{бок}$ (см. рис. 1.11). По теореме Остроградского—Гаусса

$$\int_S \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{\omega}\, dV, \tag{1.7}$$

где dS — внешняя нормаль к поверхности.

Левая часть (1.7) равна

$$\int_S \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_2 + \int_{S_{бок}} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_{бок} - \int_{S_1} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_1 = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_1 .$$

Правая часть (1.7) равна нулю. Действительно,

$$\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{\omega}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{u})\, dV = 0,$$

поскольку

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) = 0.$$

Поэтому

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_1 = \int_{S_2} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_2 = \int_{S_3} \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S}_3 = \ldots = i = \text{const}.$$

Величина i, сохраняющаяся постоянной вдоль вихревой трубки в данный момент времени, называется **интенсивностью вихревой трубки** и является важной характеристикой вихревой трубки.

Следствие из второй теоремы Гельмгольца: вихревые трубки не могут начинаться и заканчиваться в жидкости. Они могут (рис. 1.12):

замыкаться сами на себя,

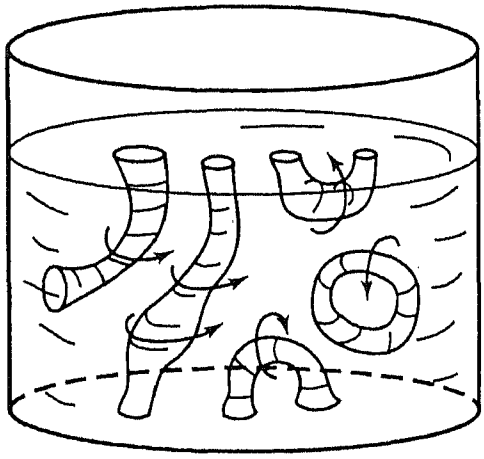


Рис. 1.12. Вихревые трубки в жидкости

оканчиваться на твердых границах, оканчиваться на свободной поверхности.

На рис. 1.12 изображено лишь несколько вихревых трубок. На самом деле вся жидкость пронизана вихревыми линиями и состоит из вихревых трубок.

Для вычисления интенсивности вихревой трубки i можно воспользоваться следующей **теоремой Стокса**:

циркуляция скорости по замкнутому контуру, расположенному на поверхности вихревой трубки и один раз ее опоясывающему, равна удвоенной интенсивности этой вихревой трубки.

Действительно, на основании теоремы Остроградского—Стокса

$$\oint_L \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\, d\mathbf{S} = 2\int_S \boldsymbol{\omega}\, d\mathbf{S} = 2i.$$

Теорему Стокса можно обобщить и сформулировать в следующем виде:

Циркуляция скорости по замкнутому контуру равна удвоенной сумме интенсивностей вихревых трубок при условии, что контур охватывает трубки 1 раз

$$\Gamma_L = \oint_L \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = 2\sum_{k=1}^{n} i_k$$

(для n трубок).

1.3.3. БЕЗВИХРЕВОЕ (ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ) ДВИЖЕНИЕ. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ

Безвихревое движение — это движение, при котором поле скорости подчиняется условию $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$ (или $\boldsymbol{\omega} = 0$).

Используя определение $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ (см. приложение), получаем для безвихревого движения

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Из этих равенств следует, что тензор V_{ij} — симметричный, а $V_{ij}^{A} = 0$.

Безвихревое движение является *потенциальным*. Это означает, что существует некая скалярная функция $\varphi(x, y, z, t)$, называемая *потенциалом скорости*, которая связана с полем вектора скорости соотношением

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi, \qquad (1.8)$$

т.е.

$$u_x = \partial\varphi/\partial x, \quad u_y = \partial\varphi/\partial y, \quad u_z = \partial\varphi/\partial z.$$

С другой стороны, потенциальное течение всегда является безвихревым. Действительно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi) \equiv 0.$$

Поэтому термины «безвихревое» и «потенциальное» движение являются синонимами.

Заметим, что безвихревое (потенциальное) движение может быть как стационарным, так и нестационарным.

Свойства потенциального движения.

1) Линии тока ортогональны к поверхностям постоянного потенциала (рис. 1.13). Это следует из определения потенциала по (1.8).

2) Контурный интеграл вектора скорости потенциального потока по некоторому контуру не зависит от формы и протяженности контура, а зависит только от положений начальной и конечной его точек.

Для доказательства возьмем произвольный замкнутый контур, проходящий через точки A и B на рис. 1.14. По теореме Стокса для потенциального движения

$$\oint_L \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = 2i = 0.$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, можно представить как

$$\oint_L \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \int_{ACB} \mathbf{u}\, d\mathbf{l} + \int_{BDA} \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \int_{ACB} \mathbf{u}\, d\mathbf{l} - \int_{ADB} \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = 0.$$

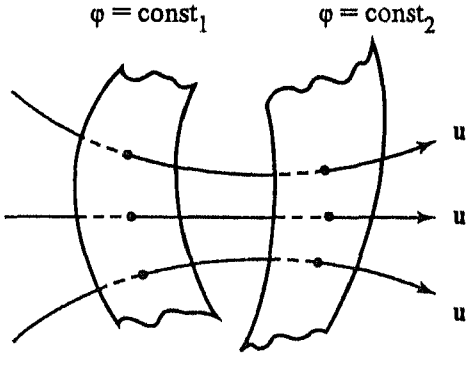


Рис. 1.13. Эквипотенциальные поверхности и линии тока ортогональны

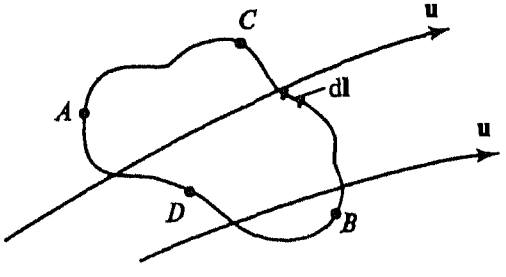


Рис. 1.14. Произвольный замкнутый контур в поле вектора скорости

Последние два интеграла равны между собой и являются интегралами по двум произвольным контурам между точками A и B.

Исследование потенциального течения является более простым, чем вихревого, поскольку вместо трех компонент скорости u_x, u_y, u_z достаточно определить лишь только одну величину — поле потенциала $\varphi(x, y, z, t)$.

Когда течение можно считать потенциальным? Оказывается, тогда, когда можно пренебречь *вязкостью* и полагать жидкость *идеальной*. Часто это можно сделать вдали от твердых границ тела, обтекаемого потоком жидкости. Вязкость существенна только в узкой области вблизи поверхности, называемой пограничным слоем. Важно подчеркнуть, что именно благодаря вязкости жидкие частицы вращаются вокруг своих осей; *течение вязкой жидкости всегда вихревое*.

1.4. СУБСТАНЦИОНАЛЬНАЯ (ПОЛНАЯ) ПРОИЗВОДНАЯ

При рассмотрении движения жидкости по методу Эйлера определяются поля различных величин, характеризующих движение: скорости $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, давления $p(x, y, z, t)$, плотности $\rho(x, y, z, t)$ и т.п. Пусть $a = a(x, y, z, t)$ — поле некоторой интересующей нас величины. Это значит, что некоторая частица с координатами $\{x, y, z\}$ в момент времени t имеет определенное значение этой величины.

Как найти *изменение во времени* величины a *для данной частицы*? Очевидно, это изменение может быть обусловлено двумя причинами:

1) *нестационарностью поля* a, т.е. изменением a во времени в данной точке пространства;

2) изменением пространственного положения частицы [для нее $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$]: при движении по траектории она приходит в другую точку пространства, в которой будет другое значение a, если *поле* a *неоднородно по пространству*.

Таким образом, для движущейся частицы можно записать

$$a = a[t, x(t), y(t), z(t)].$$

Скорость изменения величины a можно получить, дифференцируя a как сложную функцию

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial a}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Но $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u_x$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = u_y$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = u_z$, поэтому

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial a}{\partial t} + u_x\frac{\partial a}{\partial x} + u_y\frac{\partial a}{\partial y} + u_z\frac{\partial a}{\partial z}. \qquad (1.9)$$

Производная da/dt (иногда ее обозначают Da/dt), определенная по (1.9), носит название **субстанциональной (полной) производной.**

Она представляет собой скорость изменения некоторой величины *для данной частицы* (т.е. находящейся в данный момент t в данной точке пространства $\{x, y, z\}$) в процессе движения частицы по траектории. Таким образом субстанциональная производная определяет скорость изменения величины a для лагранжевой частицы, но записанную в переменных Эйлера.

Рассмотрим кинематический смысл слагаемых в (1.9):

$\partial a/\partial t$ — локальная производная, которая берется при x, y, z — константах. Она характеризует скорость изменения величины a в данной точке пространства, т.е. в точке, где находится частица. Локальная производная характеризует *нестационарность поля* величины a. Если поле стационарное, $\partial a/\partial t = 0$;

$u_x \dfrac{\partial a}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial a}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial a}{\partial z}$ — конвективные слагаемые. Они определяют ту часть скорости изменения величины a, которая обусловлена движением частицы в пространстве от точки с одним значением a к точке с другим значением. Конвективная часть производной характеризует *неоднородность поля* a в данный момент времени. Если поле однородно, то $\partial a/\partial x = \partial a/\partial y = \partial a/\partial z = 0$ и конвективные члены равны нулю.

Часто используют более краткую запись (1.9). С учетом того, что

$$\nabla = \operatorname{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

можно записать:

если a — скалярная величина (например, плотность $a \equiv \rho$),

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\rho, \tag{1.10}$$

или с использованием тензорной символики

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}; \tag{1.10a}$$

если a — векторная величина (например, скорость $\boldsymbol{a} \equiv \mathbf{u}$),

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}, \tag{1.11}$$

или в тензорном виде

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \tag{1.11a}$$

или в проекциях на оси координат:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z},\\
\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z},\\
\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.11б)$$

Итак, мы рассмотрели описание движения жидкой среды. Это дает возможность в следующей главе перейти к рассмотрению уравнений динамики жидкости.

Глава вторая

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

К уравнениям динамики сплошной среды относятся уравнение неразрывности (сплошности) и уравнение движения.

2.1. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Дифференциальное уравнение неразрывности — это *закон сохранения массы*, записанный для элементарной частицы жидкости. Масса частицы $\Delta M = \rho \Delta V$, содержащаяся в элементарном объеме $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, не изменяется, поэтому

$$\frac{\mathrm{d}(\rho \Delta V)}{\mathrm{d}t} = 0;$$

$$\Delta V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{\mathrm{d}(\Delta V)}{\mathrm{d}t} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{1}{\Delta V} \frac{\mathrm{d}(\Delta V)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \varepsilon_V = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Уравнение неразрывности может быть записано в различных формах. Часто его записывают так:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \mathbf{u} = 0. \tag{2.1}$$

Вместе с тем, раскрывая субстанциональную производную

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{u} = 0,$$

приходим к другой форме записи уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{2.2}$$

Хотя уравнения (2.1) и (2.2) выражают один и тот же закон сохранения массы, физическая трактовка их различна.

Согласно (2.1) $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div}\mathbf{u}$ — скорость относительного изменения плотности *жидкой частицы* определяется скоростью относительного изменения объема.

Согласно (2.2) $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})$ — скорость изменения плотности среды в *данной точке пространства* определяется притоком (уносом) массы в данную точку (из данной точки).

Приведем также запись (2.2) в тензорной форме

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0$$

и в проекциях на оси координат

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \qquad (2.3)$$

Для *стационарного* течения жидкости $\partial\rho/\partial t = 0$, тогда

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0,$$

или

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0.$$

Для *несжимаемой* жидкости $\rho = \text{const}$, тогда

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

или

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

или

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Последнее уравнение справедливо как для стационарного, так и для нестационарного течения.

Тот факт, что в несжимаемой жидкости $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$, означает, что частица не изменяет свой объем ΔV, но, деформируясь, может изменять форму.

Приведем запись уравнения неразрывности для стационарного движения сжимаемой жидкости в интегральной (по трубке тока) форме (рис. 2.1):

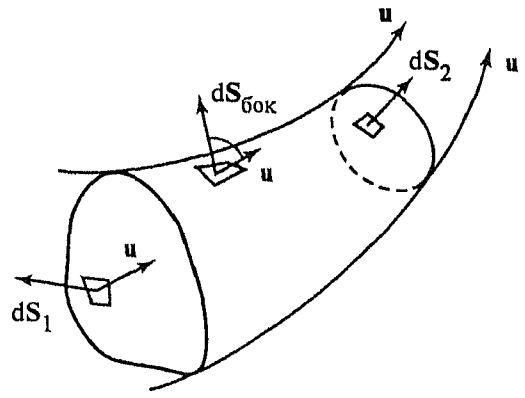


Рис. 2.1. К выводу уравнения неразрывности в интегральной форме

$$\int_V \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\, dV = \int_{S_2} \rho\mathbf{u}\, d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \rho\mathbf{u}\, d\mathbf{S}_1 +$$

$$+ \int_{S_{бок}} \rho\mathbf{u}\, d\mathbf{S}_{бок} = \int_{S_2} \rho\mathbf{u}\, d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \rho\mathbf{u}\, d\mathbf{S}_1 .$$

Из этого равенства следует, что $\int_S \rho\mathbf{u}\, d\mathbf{S}$ вдоль трубки тока не изменяется:

$$\rho_1 u_{n1} S_1 = \rho_2 u_{n2} S_2,$$

т.е. массовый расход $G = \rho u_n S$ постоянен в любом сечении трубки.

2.2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

2.2.1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЖИДКОСТИ

Силы, действующие в жидкости, делятся на *массовые* и *поверхностные*.

Массовые силы — силы, действие которых обусловлено внешним силовым полем (полем тяжести, электрическим, магнитным). Поле массовых сил является внешним по отношению к потоку, действие этих сил на данный объем не зависит от того, окружен ли этот объем другими жидкими объемами. Массовые силы действуют одинаково на каждую материальную точку жидкой частицы, следовательно, не могут вызвать ее деформацию, а только ускорение (замедление) частицы. Количественно массовую силу характеризуют **вектором напряжения массовой силы f** — пределом отношения массовой силы $\Delta\mathbf{F}$, действующей на частицу, к массе частицы ΔM (рис. 2.2) (Н/кг = м/с^2):

$$\mathbf{f}(x, y, z, t) = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta M}.$$

В МЖГ чаще всего массовой силой является сила тяжести

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести, м/с^2.

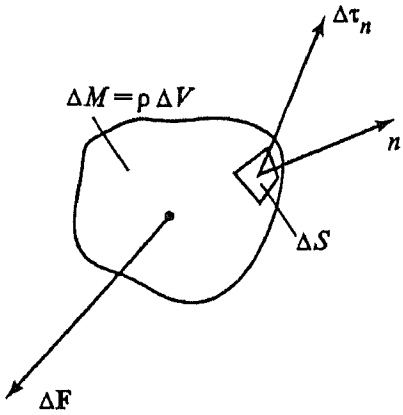


Рис. 2.2. Массовые и поверхностные силы, действующие на жидкую частицу. (Вектор массовой силы ΔF приложен к центру масс частицы)

Силу, действующую на конечный объем V, можно вычислить интегрированием

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}\rho \, dV.$$

Поверхностные силы — силы воздействия окружающей жидкости на выделенную частицу. К поверхностным силам в МЖГ относятся сила давления и сила вязкости.

Количественно поверхностную силу характеризуют **вектором напряжения поверхностной силы.** Если на площадку ΔS с нормалью **n** действует сила $\Delta\boldsymbol{\tau}_n$ (рис. 2.2), то вектор напряжения поверхностной силы (Н/м^2) равен:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\tau}_n}{\Delta S}.$$

Напряженное состояние жидкости в данной точке можно охарактеризовать тремя векторами $\boldsymbol{\tau}_x$, $\boldsymbol{\tau}_y$, $\boldsymbol{\tau}_z$, приложенными к трем взаимно перпендикулярным площадкам, или их девятью компонентами, образующими тензор II ранга, называемый **тензором напряжений поверхностных сил** (см. приложение):

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

где τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} — нормальные напряжения; τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{zx}, τ_{zy}, τ_{yz} — касательные напряжения. Тензор τ_{ij} симметричен и

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

2.2.2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ[1]

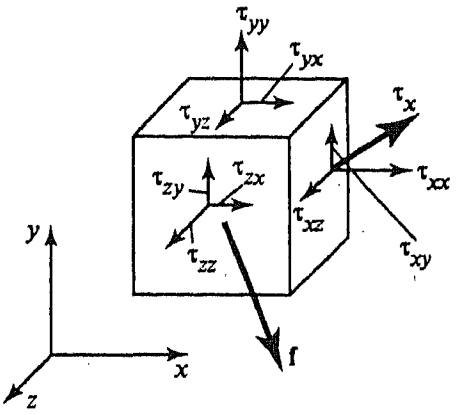
Выделим в потоке жидкую частицу объема $dV = dxdydz$ массы $dM = \rho dV$ (рис. 2.3). На эту частицу действуют следующие силы:

1) массовая, имеющая напряжение **f**:

$$\rho \mathbf{f} \, dV;$$

[1] Выведено в 1822 г. Анри Навье (1785—1836 гг.), французским инженером и ученым.

Рис. 2.3. К выводу уравнения движения в напряжениях



2) поверхностные силы, приложенные к каждой грани. Их направление неизвестно, но примем условно, что они действуют в направлении внешних нормалей (но не обязательно параллельно им). Суммируя их, найдем равнодействующую

$$-\tau_y\,dxdz+\left(\tau_y+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}\,dy\right)dxdz+(-\tau_x)\,dydz+\left(\tau_x+\frac{d\tau_x}{dx}\,dx\right)dydz+$$

$$+(-\tau_z)\,dydx+\left(\tau_z+\frac{d\tau_z}{dz}\,dz\right)dydx=\left(\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial z}\right)dV.$$

Применяя к жидкой частице массы $dM=\rho\,dV$ второй закон Ньютона, получаем

$$\rho\,dV\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\rho\mathbf{f}\,dV+\left(\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial z}\right)dV.$$

Разделив обе части этого уравнения на dV, получим так называемое уравнение движения «в напряжениях», записанное для единицы объема жидкости

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\rho\mathbf{f}+\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial z},\qquad(2.5)$$

где $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\,\mathrm{grad})\mathbf{u}$ — субстанциональная (полная) производная, поскольку рассматривается изменение скорости *движущейся частицы*. Уравнение (2.5) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\,\mathrm{grad})\mathbf{u}=\mathbf{f}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial z}\right),$$

или в проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=f_x+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}=f_y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=f_z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(2.6)$$

Более компактной является запись этих уравнений в тензорной форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} .$$

Важно подчеркнуть следующее обстоятельство. Система уравнений динамики жидкости состоит из четырех уравнений: уравнения неразрывности (2.3) и трех уравнений движения (2.6). В этих уравнениях фигурируют неизвестные величины: три компоненты вектора скорости u_x, u_y, u_z и шесть компонент тензора напряжений поверхностных сил τ_{ij} — итого девять неизвестных величин (компоненты напряжения массовой силы f_x, f_y, f_z обычно считаются заданными). Кроме того, в уравнения движения входит плотность ρ — еще одна неизвестная величина. Для ее определения используют некоторое уравнение состояния $\rho = \rho(p, T)$, которое считается известным. В частности, для несжимаемой жидкости плотность ρ — константа, которая должна быть задана.

Таким образом, система уравнений динамики жидкости является *незамкнутой*, поскольку неизвестных величин больше, чем уравнений. Причина незамкнутости — «слишком большое» число неизвестных компонент тензора τ_{ij}. Вообще говоря, чтобы замкнуть систему, нужно привлечь дополнительные уравнения для τ_{ij}. Эти уравнения рассмотрим ниже.

Вместе с тем существуют некоторые частные задачи МЖГ, для которых большинство компонент τ_{ij} заведомо равны нулю, поэтому число неизвестных уменьшается. Следовательно, система уравнений становится замкнутой. Такие задачи рассматриваются в гидростатике и динамике идеальной жидкости.

Глава третья

ГИДРОСТАТИКА

3.1. ПРЕДМЕТ ГИДРОСТАТИКИ. АБСОЛЮТНОЕ И ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Гидростатика — раздел МЖГ, в котором изучаются условия *равновесия* жидкости и силовое воздействие жидкости на погруженные в нее тела.

Равновесие — это состояние покоя жидкости по отношению к некоторой системе координат. Иными словами — это такое состояние жидкости, при котором ее частицы неподвижны друг относительно друга и по отношению к системе координат, в которой они рассматриваются.

Различают *абсолютное* и *относительное* равновесие (абсолютный и относительный покой).

Абсолютное равновесие — состояние равновесия (покоя) жидкости по отношению к *инерциальной системе координат.*

Относительное равновесие — состояние равновесия жидкости по отношению к системе координат, движущейся с постоянным ускорением относительно инерциальной системы координат.

Инерциальная система координат — это система координат, в которой выполняются законы Ньютона. Такой системой координат является система, связанная с Землей или движущаяся относительно нее с постоянной скоростью.

В качестве примера абсолютного равновесия можно привести равновесие жидкости, налитой в неподвижную емкость или емкость, перемещающуюся с постоянной скоростью. На рис. 3.1 $\{x, y, z\}$ и $\{x', y', z'\}$ — инерциальные системы координат.

Если емкость перемещается с постоянным ускорением $a = \text{const}$ (рис. 3.2), жидкость находится в относительном равновесии.

Рассмотрим различие между абсолютным и относительным равновесием.

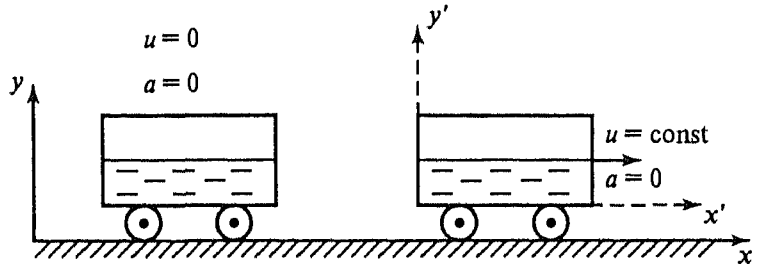


Рис. 3.1. Примеры абсолютного равновесия жидкости

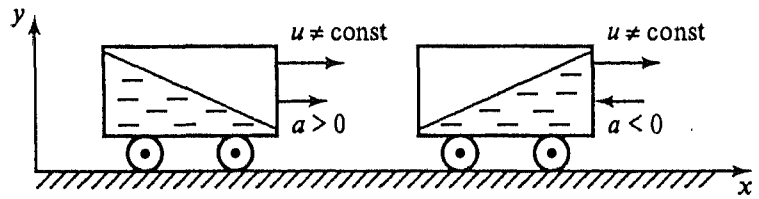


Рис. 3.2. Примеры относительного равновесия жидкости

В инерциальной системе координат закон Ньютона для жидкой частицы массой ΔM имеет следующий вид:

$$\Delta M \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \Delta\mathbf{F} + \Delta\boldsymbol{\tau}, \tag{3.1}$$

где $\Delta M = \rho \Delta V$ — масса частицы; $\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t$ — субстанциональная производная (ускорение частицы); $\Delta\mathbf{F} = \rho\mathbf{f}\Delta V$ — массовая сила; $\Delta\tau = \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}\right) \Delta V$ — равнодействующая поверхностных сил.

При абсолютном равновесии $\mathbf{u} = \text{const}$, поэтому $\mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t = 0$, и из (3.1) следует

$$\Delta\mathbf{F} + \Delta\boldsymbol{\tau} = 0. \tag{3.2}$$

Таким образом, при *абсолютном равновесии* все силы, массовые и поверхностные, действующие на частицу, уравновешены.

При *относительном равновесии* массовые и поверхностные силы не уравновешены, так как $\Delta M \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} \neq 0$, но можно записать

$$\Delta\mathbf{F} + \Delta\boldsymbol{\tau} + \Delta\mathbf{F}_{\text{ин}} = 0, \tag{3.3}$$

где $\Delta\mathbf{F}_{\text{ин}} = -\Delta M \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$ — сила инерции.

Таким образом, при относительном равновесии сумма всех сил, действующих на частицу, включая силу инерции, равна нулю.

Замечание. Сила инерции относится к классу массовых сил. Вектор напряжения силы инерции равен

$$\mathbf{f}_{\text{ин}} = \lim_{\Delta M \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_{\text{ин}}}{\Delta M} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}.$$

3.2. ЗАКОН ПАСКАЛЯ

Ранее отмечалось, что действие поверхностных сил на элемент движущейся жидкости характеризуется *тензором напряжений поверхностных сил* (2.4).

Если жидкость находится в равновесии, то касательные напряжения, приложенные к *любой площадке, равны нулю*. Действительно, отличные от нуля касательные напряжения вызвали бы относительное движение жидких частиц, т.е. вывели бы жидкость из состояния равновесия. Следовательно, *любая система координат* в покоящейся жидкости является *системой главных осей симметричного тензора* τ_{ij} (см. приложение). При этом из свойств симметричного тензора следует, что $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$.

Закон Паскаля. *Если жидкость находится в состоянии равновесия (абсолютного или относительного), то нормальные напряжения, приложенные в какой-либо точке к элементарной площадке, проходящей через эту точку, не зависят от ориентации площадки.*

Проведенные рассуждения позволяют ввести понятие *гидростатического давления* p, которое определяется как

$$-p = \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz},$$

где знак «–» означает, что частицы жидкости в равновесии испытывают *сжимающие усилия* со стороны окружающей жидкости (рис. 3.3).

Таким образом, тензор напряжений поверхностных сил в гидростатике имеет следующий вид:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\delta_{ij}.$$

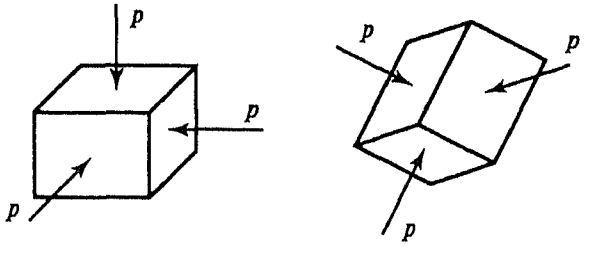


Рис. 3.3. Давление в покоящейся жидкости не зависит от ориентации площадки (закон Паскаля)

3.3. АБСОЛЮТНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ

3.3.1. УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОГО РАВНОВЕСИЯ

Запишем систему уравнений неразрывности и движения для случая $\rho \neq \text{const}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0,$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \rho f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z},$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}.$$

В состоянии абсолютного равновесия $\mathbf{u} = 0$, $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p$, $\tau_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Тогда из уравнений неразрывности и движения следуют два условия абсолютного равновесия.

1-е условие:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3.4}$$

2-е условие:

$$\left.\begin{aligned} \rho f_x &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho f_y &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho f_z &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Условие (3.4) получено из уравнения неразрывности, а условие (3.5) — из уравнения движения. Его можно записать в векторной форме

$$\rho \mathbf{f} = \operatorname{grad} p. \tag{3.6}$$

Очевидно, (3.5) — другая форма записи общего условия абсолютного равновесия (3.2).

Условие (3.4) означает, что абсолютное равновесие возможно только в двух случаях:

а) поле плотности стационарно $\partial \rho / \partial t = 0$;

б) жидкость несжимаема $\rho = \text{const}$.

Условие (3.6) означает, что при абсолютном равновесии массовые силы и сила давления уравновешивают друг друга. Если массовые силы заданы, то второе условие позволяет определить поле давления в покоящейся жидкости.

Часто массовые силы являются *потенциальными*. Это значит, что существует функция П, называемая *потенциалом* массовой силы, такая, что

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} П.$$

Тогда условие (3.6) принимает вид:

$$-\rho \operatorname{grad} П = \operatorname{grad} p.$$

В дальнейшем будем полагать, что массовые силы потенциальны (как, например, сила тяжести, для которой $\mathbf{f} = \mathbf{g}$).

Если жидкость *несжимаема* ($\rho = \text{const}$), то

$$\operatorname{grad}(p + \rho П) = 0$$

или

$$p + \rho П = \text{const}$$

по всему объему покоящейся жидкости.

Из уравнения (3.6) следует, что изобарические поверхности (поверхности $p = \text{const}$) ортогональны силовым линиям поля напряжения массовых сил $\mathbf{f}$.

Если жидкость *сжимаема*, то последнее утверждение, разумеется, тоже справедливо. Кроме того, в сжимаемой жидкости поверхности постоянной плотности (изостеры) также ортогональны силовым линиям $\mathbf{f}$. Изобарические поверхности и изостеры совпадают. Для доказательства применим операцию rot к выражению (3.6)

$$\operatorname{rot}(\rho\mathbf{f}) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} p) = 0.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rot}(\rho\mathbf{f}) = \rho \operatorname{rot}\mathbf{f} + \operatorname{grad}\rho \times \mathbf{f} = -\rho \operatorname{rot}(\operatorname{grad} П) + \operatorname{grad}\rho \times \mathbf{f}.$$

Поэтому $\operatorname{grad}\rho \times \mathbf{f} = 0$, что и означает взаимную перпендикулярность поверхностей $\rho = \text{const}$ и силовых линий $\mathbf{f}$.

Если температура по объему жидкости не постоянна, изотермические поверхности $T = \text{const}$ совпадают с поверхностями $\rho = \text{const}$ и $p = \text{const}$ (поскольку плотность связана уравнением состояния с давлением и температурой $\rho = \rho(p, T)$).

3.3.2. АБСОЛЮТНОЕ РАВНОВЕСИЕ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Рассмотрим абсолютное равновесие жидкости в декартовой системе координат, ось z которой направлена вертикально вверх (рис. 3.4).

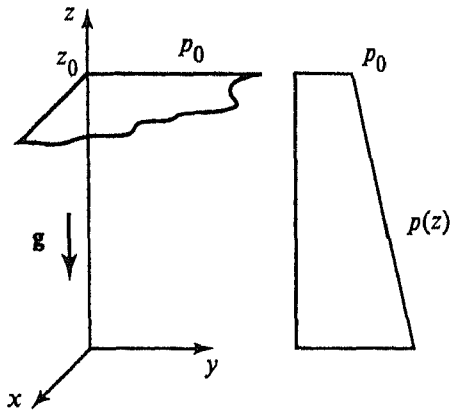


Рис. 3.4. Абсолютное равновесие жидкости в поле силы тяжести

При абсолютном равновесии вектор напряжения силы тяжести $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$ связан с полем давления соотношением

$$\rho\mathbf{g} = \operatorname{grad} p,$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{3.7}$$

Таким образом, изобарические (и изотермические) поверхности являются «горизонтальными плоскостями» (принято считать эти поверхности плоскостями, хотя очевидно, что Земля — шар и форма поверхности воды в океане близка к сферической!). Следовательно, при абсолютном равновесии в поле силы тяжести изменение p, ρ, T возможно только по вертикали.

Если жидкость состоит из двух несмешивающихся жидкостей (в частности, если над жидкостью имеется свободная поверхность), то поверхность раздела должна быть горизонтальной, поскольку на свободной поверхности $p = \text{const}$).

Покажем, что сила тяжести имеет потенциал $\Pi = gz$:

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad}\Pi = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\Pi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial\Pi}{\partial z}\mathbf{k} = -g\mathbf{k} = \mathbf{g}.$$

Зная изменение плотности по высоте $\rho(z)$, можно найти изменение давления. Интегрируя (3.7), получаем

$$p = p_0 - g\int_{z_0}^{z} \rho(z)\,dz, \tag{3.8}$$

где p_0 — давление на высоте z_0. Решение (3.8) справедливо в общем случае, когда $\rho = \rho(p, T)$. Для несжимаемой жидкости при $T = \text{const}$ (3.8) примет вид

$$p = p_0 - g\rho(z - z_0),$$

т.е. давление по высоте линейно убывает.

3.3.3. ЗАКОН АРХИМЕДА. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ЗАМКНУТУЮ ТВЕРДУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Рассмотрим тело с плотностью $\rho_т$, объемом V, поверхностью S, погруженное в жидкость с плотностью ρ (рис. 3.5). Жидкость неподвижна, находится в равновесии в поле силы тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.

Равнодействующая сил давления, действующих на тело, равна

$$\mathbf{R} = -\int_S p\mathbf{n}\,\mathrm{d}S.$$

Применим известную в векторном анализе формулу

$$\int_S a\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{grad} a\,\mathrm{d}V,$$

где, в отличие от формулы Гаусса—Остроградского, a — не векторная, а скалярная величина. Далее, на основании (3.6) имеем

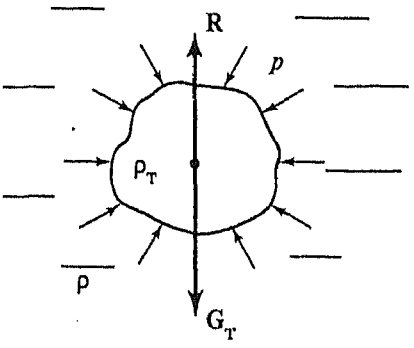


Рис. 3.5. К выводу закона Архимеда

$$\mathbf{R} = \int_V \operatorname{grad} p\,\mathrm{d}V = -\int_V \rho\mathbf{f}\,\mathrm{d}V = -\int_V \rho\mathbf{g}\,\mathrm{d}V.$$

В результате получили **закон Архимеда**: *равнодействующая сил гидростатического давления, приложенная к погруженному в жидкость твердому телу, равна весу жидкости, вытесненной телом, и направлена в сторону, противоположную силе тяжести*:

$$\mathbf{R} = -\int_V \rho\mathbf{g}\,\mathrm{d}V.$$

В левой части этого равенства стоит сила Архимеда $\mathbf{R}$, в правой стоит $-\mathbf{G}$, где $\mathbf{G} = \mathbf{g}\int_V \rho\,\mathrm{d}V$ — вес вытесненной жидкости.

Сумма силы тяжести $\mathbf{G}_т = \mathbf{g}\int_V \rho_т\,\mathrm{d}V$ и силы Архимеда $\mathbf{R}$, т.е. равнодействующая сил, действующих на погруженное в жидкость тело, называется **силой плавучести** $\mathbf{F}_b = \mathbf{G}_т + \mathbf{R}$ (индекс b в $\mathbf{F}_b$ — от английского слова *buoyancy* — плавучесть).

При $|\mathbf{G}_т| > |\mathbf{R}|$ тело тонет, сила плавучести направлена вниз;

при $|\mathbf{G}_т| = |\mathbf{R}|$ тело находится в равновесии, $\mathbf{F}_b = 0$;

при $|\mathbf{G}_т| < |\mathbf{R}|$ погруженное тело всплывает, сила плавучести направлена вверх; оказавшись на поверхности, тело плавает в частично погруженном состоянии.

3.3.4. УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ АБСОЛЮТНОЕ РАВНОВЕСИЕ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Равновесие является *устойчивым*, если оно восстанавливается после устранения причин, вызвавших нарушение равновесия.

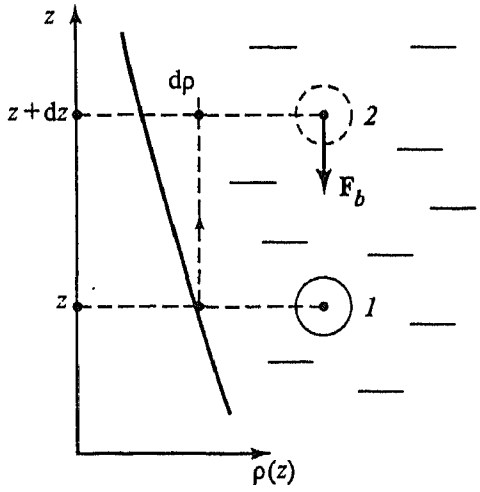


Рис. 3.6. Случайное возмущение в покоящейся жидкости

В противном случае равновесие является *неустойчивым*.

Покажем, что для устойчивого равновесия в поле силы тяжести плотность должна возрастать в направлении действия силы тяжести (т.е. сверху вниз).

Пусть жидкость находится в абсолютном равновесии (рис. 3.6). Предположим, в силу каких-то случайных причин частица жидкости объемом dV с плотностью ρ переместится из точки *1* вертикально вверх на расстояние dz в точку *2*, *сохраняя свой объем и плотность*. В точке *2* на частицу действует равнодействующая сила — сила плавучести

$$\mathbf{F}_b = \rho g\, dV - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z}\, dz\right) g\, dV = -\, g\, \frac{\partial \rho}{\partial z}\, dz dV.$$

Сила $\mathbf{F}_b$ направлена:

вниз, если $\partial\rho / \partial z < 0$; она стремится вернуть частицу в исходное положение, т.е. способствует сохранению равновесия;

вверх, если $\partial\rho / \partial z > 0$; она способствует уходу частицы дальше от состояния равновесия.

Вывод: если плотность возрастает в направлении силы тяжести — равновесие *устойчивое*, в противном случае — равновесие *неустойчивое* и возникают условия для развития *свободной конвекции*.

Пусть сосуд заполнен жидкостью, плотность которой зависит от температуры (убывает с увеличением температуры). Если дно сосуда

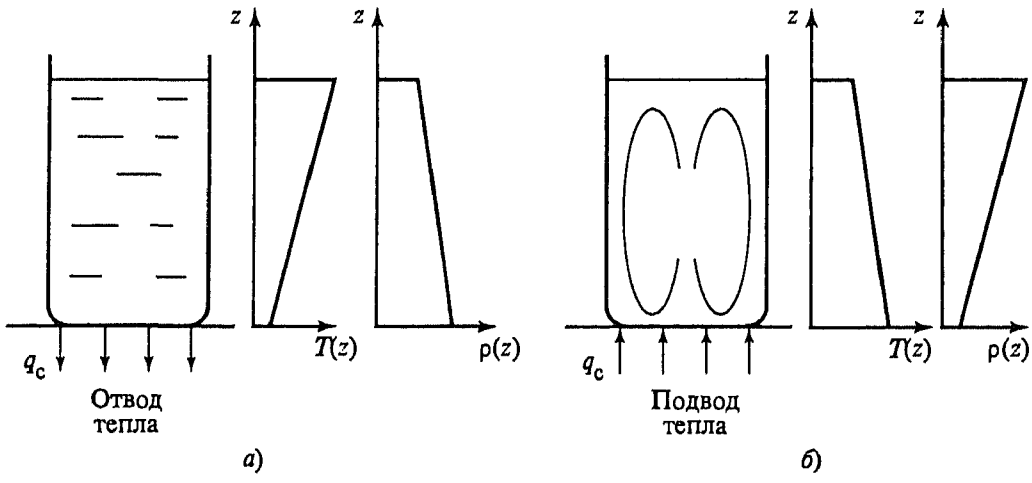


Рис. 3.7. Устойчивое (*а*) и неустойчивое (*б*) равновесие жидкости в поле силы тяжести

охлаждается (рис. 3.7, *а*), равновесие будет устойчивым, если подогревается (рис. 3.7, *б*) — неустойчивым, и в сосуде возникнет свободноконвективное движение жидкости.

3.4. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ. УСЛОВИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

В относительном равновесии жидкость покоится в *неинерциальной* системе координат $\{x', y', z'\}$, а в *инерциальной* $\{x, y, z\}$ — движется с ускорением. Условия относительного равновесия в неинерциальной системе координат можно записать, добавив к действующей массовой силе с вектором напряжения $\mathbf{f}$ силу инерции с вектором напряжения $\mathbf{f}_{ин} = -\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$:

$$\rho(\mathbf{f} + \mathbf{f}_{ин}) = \operatorname{grad} p. \qquad (3.9)$$

Если массовая сила и сила инерции имеют потенциалы П и $П_{ин}$, то

$$\rho(П + П_{ин}) + p = \text{const}. \qquad (3.10)$$

В случае относительного равновесия поверхности постоянного давления (p = const) *ортогональны сумме векторов* $\mathbf{f} + \mathbf{f}_{ин}$.

Рассмотрим конкретный пример. На рис. 3.8 цистерна с жидкостью движется равноускоренно. Поэтому $d\mathbf{u}/dt = a$ = const. На жидкость действуют следующие массовые силы:

сила тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g} = -g\mathbf{k}$, которая имеет потенциал $П = gz$;

сила инерции $\mathbf{f}_{ин} = -a\,\mathbf{j}$, которая имеет потенциален $П_{ин} = ay$.

В соответствии с (3.10)

$$p + \rho(gz + ay) = c = \text{const},$$

или

$$p/\rho = c/\rho - gz - ay.$$

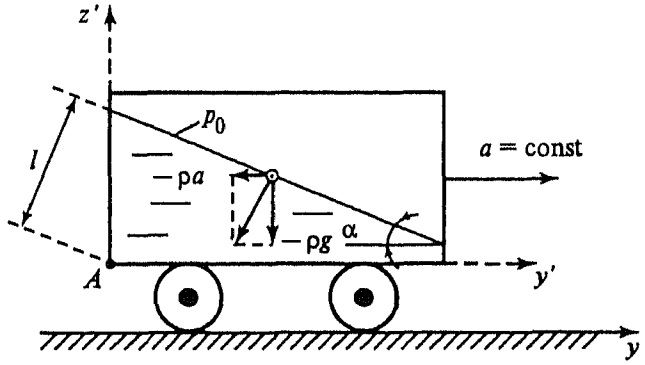


Рис. 3.8. Относительное равновесие: цистерна движется с постоянным ускорением

Если положить в этом уравнении p = const, получим уравнение для поверхности постоянного давления

$$z = -ay/g + c_1,$$

где $c_1 = (c - p)/(\rho g)$.

Пусть давление на свободной поверхности равно p_0, тогда получим уравнение для свободной поверхности

$$z_{\text{св.п}} = -ay/g + c_1^0,$$

где $c_1^0 = (c - p_0)/(\rho g)$.

Поверхности постоянного давления представляют собой плоскости, расположенные под углом α к горизонтальной плоскости; тангенс α равен a/g.

Направление и величину градиента давления можно определить, используя (3.9):

$$\text{grad}\, p = \rho\,(-g\mathbf{k} - a\,\mathbf{j}),$$

$$|\text{grad}\, p| = \rho\sqrt{g^2 + a^2}.$$

Градиент давления направлен по нормали к плоскости p = const.

Пользуясь полученными соотношениями, можно найти давление в любой точке цистерны с жидкостью, движущейся как равноускоренно, так и равнозамедленно (см. рис. 3.2). Максимальное давление будет в точке A (рис. 3.8)

$$p_A = p_0 + \rho l\sqrt{g^2 + a^2}.$$

Глава четвертая

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. ОСОБЕННОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В соответствии со своим определением *идеальная жидкость* не имеет внутреннего (молекулярного) трения, поэтому не оказывает сопротивления скольжению (сдвигу) друг относительно друга соседних слоев жидкости. Идеальная жидкость — жидкость с *нулевой вязкостью*.

Идеальная жидкость обладает следующими особенностями.

1. Касательные напряжения в ней равны нулю, так как отсутствует сопротивление сдвигу. В любой системе координат тензор напряжений имеет вид

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\delta_{ij}.$$

Как и в гидростатике,

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p,$$

т.е. нормальные напряжения в любой точке идеальной жидкости не зависят от ориентации площадки.

Скалярная величина p — это гидродинамическое давление в данной точке потока. Оно зависит от скорости потока и не равно гидростатическому давлению.

2. Идеальная жидкость не обладает и молекулярной теплопроводностью, поскольку теплопроводность, как и вязкость, обусловлена взаимодействием между молекулами. Движение идеальной жидкости всегда является *адиабатическим*. Жидкость не обменивается энергией (в том числе теплом) с обтекаемыми поверхностями, и параметры потока (давление, температура) определяются только самим движением.

3. В рамках теории идеальной жидкости нельзя ставить задачи о гидравлическом сопротивлении и теплообмене при обтекании жидко-

стью твердых тел, т.е. задачи, для которых роль молекулярных свойств реальной жидкости — вязкости и теплопроводности — особенно велика.

Тем не менее модель идеальной жидкости является весьма полезной и широко используется при решении многих теоретических и практических задач.

4.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

4.2.1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ ЭЙЛЕРА

Для математического описания любого физического процесса, в том числе течения идеальной жидкости, необходимо иметь:

уравнения, описывающие процесс;

условия однозначности, которые выделяют данную конкретную задачу из целого класса задач, описываемых данными уравнениями.

Движение идеальной жидкости описывается системой дифференциальных уравнений динамики сплошной среды, состоящей из уравнений неразрывности и движения.

Напомним, что уравнение *неразрывности* имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

или в тензорной записи

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0,$$

или в проекциях на оси координат

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0.$$

Разумеется, уравнение неразрывности справедливо для идеальной жидкости (как и для вязкой), поскольку выражает общий закон сохранения массы.

Уравнения движения для идеальной жидкости получим из уравнений движения Навье в напряжениях (2.6) с учетом того, что

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = -p.$$

Тогда

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

или в символической записи

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\ \mathrm{grad})\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p, \qquad (4.1)$$

или в тензорной записи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Уравнения движения идеальной жидкости впервые получены Эйлером и называются *уравнениями Эйлера.*

Поясним физический смысл этих уравнений. Уравнение Эйлера выражает второй закон Ньютона для частицы идеальной жидкости: изменение количества движения жидкой частицы (левая часть уравнения) определяется действием массовых сил и сил давления (правая часть). Такая трактовка справедлива, если движение жидкой частицы рассматривается в инерциальной системе координат (поскольку только в инерциальных системах справедлив второй закон Ньютона).

Если рассматривать движение частицы в неинерциальной системе координат, связанной с самой частицей, то уравнение (4.1) правильнее трактовать как баланс сил, действующих на частицу: сил инерции (левая часть уравнения), массовой силы и силы давления (правая часть).

В системе уравнений динамики идеальной жидкости, состоящей из четырех уравнений неразрывности и движения, — пять неизвестных:

три компоненты вектора скорости u_x, u_y, u_z;

давление p;

плотность ρ

(вектор напряжения массовых сил $\mathbf{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$ считается заданным).

Для замыкания системы необходимо привлечь уравнение состояния

$$\rho = \rho\ (p, T).$$

Так как течение *адиабатическое*, для *сжимаемой жидкости* плотность и давление связаны уравнением адиабаты

$$\frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const},$$

где $k = c_p / c_v$ — показатель адиабаты.

Именно уравнение адиабаты удобно использовать для замыкания системы уравнений динамики идеальной сжимаемой жидкости. Для несжимаемой жидкости $\rho = \mathrm{const}$, поэтому нет работы расширения — сжатия. Поскольку условия являются адиабатическими (нет подвода тепла), то

отсутствует и изменение температуры. Отсюда следует вывод: для идеальной несжимаемой жидкости течение является одновременно *адиабатическим, изохорическим* ($\rho = \text{const}$) и *изотермическим* ($T = \text{const}$).

4.2.2. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Система дифференциальных уравнений динамики, приведенная выше, применима к любому течению идеальной жидкости, т.е. эти уравнения обладают большой степенью общности. Отличают же *конкретное течение* от любого другого течения *условия однозначности.* С физической точки зрения эти условия описывают геометрию течения и состояние потока в начальный момент времени. С математической точки зрения эти условия нужны для определения значений констант, которые получаются при интегрировании исходных уравнений.

Условия однозначности делятся на *начальные* и *граничные.*

Начальные условия состоят в задании полей скорости, давления и плотности во всей области течения (включая границы) в *начальный момент времени* t_0:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t_0),$$

$$p = p(x, y, z, t_0),$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t_0).$$

Если движение стационарно, необходимость в начальных условиях отпадает, так как интегрирование по времени не проводится.

Граничные условия определяют геометрическую форму твердого тела, обтекаемого жидкостью, и условия движения жидкости *на границах течения* в любой момент времени. Границы могут быть «твердыми» и «жидкими».

Рассмотрим граничные условия в случае *внешнего обтекания* тела *идеальной жидкостью* (рис. 4.1). Обычно выделяют условную жидкую

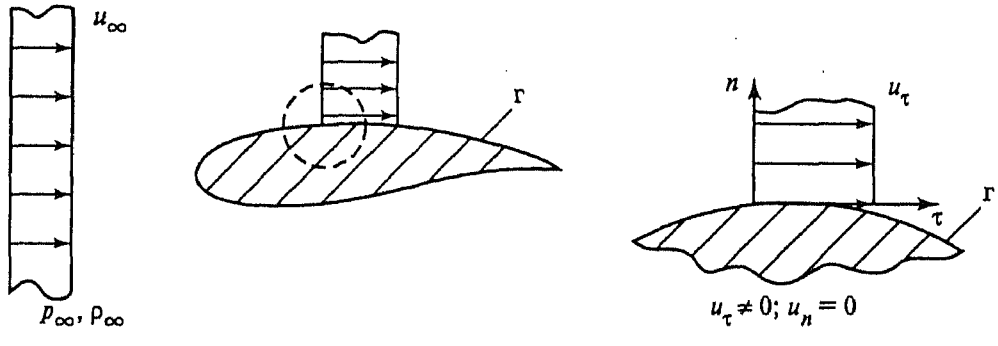


Рис. 4.1. Граничные условия в задачах внешнего обтекания тела идеальной жидкостью

границу вдали от тела, ограничивающую область, за пределами которой нет воздействия тела на поток; параметры потока на этой границе обозначают $\mathbf{u}_\infty$, p_∞, ρ_∞. Кроме того, необходимо задать условия для скорости на твердой поверхности. Очевидно, что на поверхности должно выполняться условие *непроницаемости твердого тела*

$$(u_n)_\Gamma = 0$$

— составляющая вектора скорости, нормальная к поверхности, равна нулю. При этом составляющая вектора скорости в плоскости, касательной к обтекаемой поверхности:

$$(u_\tau)_\Gamma \neq 0,$$

поскольку жидкость не обладает вязкостью и может скользить вдоль границы тела. («Скорость проскальзывания» u_τ обычно является искомой величиной в задачах внешнего обтекания.)

Замечание. Реальная жидкость обладает вязкостью, поэтому для нее должны выполняться условия прилипания: поток на границе с твердой поверхностью имеет скорость, равную скорости поверхности. В системе координат, связанной с твердым телом, для реальной жидкости граничные условия имеют вид:

$$u_n = 0, \quad u_\tau = 0.$$

Рассмотрим граничные условия в случае *внутренней задачи* (рис. 4.2). Хотя для течения в канале модель идеальной жидкости является достаточно грубой (в каналах влияние вязкости распространяется *на все сечение*), иногда рассмотрение такой задачи оказывается полезным. Здесь твердыми границами являются стенки канала, а жидкими — входное и выходное сечения. Обычно задают граничные условия *во входном сечении* u_0, p_0, ρ_0. Поскольку течение идеальной жидкости в канале, как правило, рассматривают в *одномерном приближении* (скорость постоянна по сечению и может меняться только в одном направлении — вдоль канала), необходимость в добавлении граничного условия на стенке канала (условия непроницаемости) отпадает.

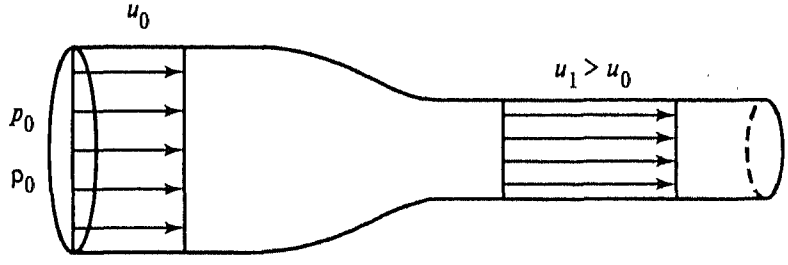


Рис. 4.2. Граничные условия для внутренних задач течения идеальной жидкости (течение считается одномерным)

4.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ ГРОМЕКИ—ЛЭМБА

Рассмотрим уравнение Эйлера (4.1) и воспользуемся векторным тождеством

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = [\nabla \times \mathbf{u}] \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathrm{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right),$$

где $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 2\boldsymbol{\omega}$; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения частицы.

Уравнение движения примет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}p - \mathrm{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right). \tag{4.2}$$

Это уравнение получено независимо Громекой[1] и Лэмбом.

Отметим, что левая часть (4.2) содержит только кинематические характеристики — скорость и угловую скорость. Рассмотрим подробнее правую часть этого уравнения.

Пусть *массовые силы имеют потенциал* П:

$$\mathbf{f} = -\nabla\Pi.$$

Если жидкость несжимаема, $\rho = \mathrm{const}$, то ρ можно внести под знак градиента:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right).$$

Тогда уравнение (4.2) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla E, \tag{4.3}$$

где

$$E = \frac{p}{\rho} + \Pi + \frac{u^2}{2}.$$

В частном случае, когда движение жидкости происходит *в поле силы тяжести*, выражение

$$E = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{u^2}{2}$$

и его разновидность

$$\mathscr{E} = E\rho = p + \rho gz + \rho\frac{u^2}{2}$$

получили название «*интеграл Бернулли*».

---

[1] Громека Ипполит Степанович (1851—1889 гг.) — русский физик, гидромеханик.

Величина $\mathscr{E}$ состоит из следующих слагаемых:

p — *гидродинамического давления*,

$\rho\frac{u^2}{2}$ — *динамического (скоростного) напора*,

ρgz — *гидростатического (геометрического) напора*, и поэтому называется «*полным напором*».

4.4. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим уравнение движения в форме Громеки—Лэмба.

Для стационарного течения $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$, поэтому (4.3) примет следующий вид:

$$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u} = -\nabla E. \qquad (4.4)$$

Очевидно, величина E является *постоянной* ($\nabla E = 0$, $E = \text{const}$), когда выражение в левой части уравнения $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u} = 0$.

Это всегда справедливо, если течение безвихревое ($\boldsymbol{\omega} = 0$) либо «винтовое» (векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}$ параллельны). При «винтовом» течении жидкие частицы движутся, вращаясь вокруг осей, параллельных векторам скорости этих частиц (рис. 4.3). Однако условие $E = \text{const}$ может выполняться и в других случаях.

Умножим скалярно (4.4) на вектор скорости $\mathbf{u}$.

Левая часть полученного уравнения обратится в нуль:

$$2\mathbf{u}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}] = 0,$$

как скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов.

Тогда $\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad} E = 0$, т.е. $E = \text{const}$ вдоль линии тока или траектории (при стационарном течении они совпадают).

Аналогично, умножая скалярно (4.4) на $\boldsymbol{\omega}$, получаем, что $E = \text{const}$ вдоль вихревой линии.

Таким образом, мы доказали **теорему Бернулли**[1]:

при стационарном движении идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести полный напор, равный сумме

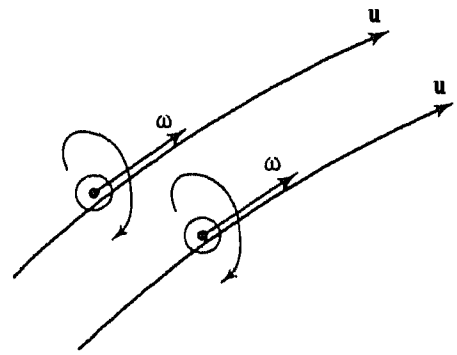


Рис. 4.3. «Винтовое» течение

[1] Бернулли Даниил (1700—1782 гг.) — академик Петербургской академии наук (1725—1733 гг.), из семьи швейцарских ученых. Отец — Бернулли Иоганн — математик, занимался дифференциальным исчислением; брат Иоганна — Бернулли Якоб (1654—1705 гг.) — математик, занимался теорией вероятностей.

скоростного напора $\rho u^2/2$, *гидродинамического давления* p *и гидростатического напора* ρgz, *есть величина постоянная вдоль линии тока или вихревой линии*:

$$p + \frac{\rho u^2}{2} + \rho gz = \text{const}. \qquad (4.5)$$

Замечания. 1. Если движение безвихревое, то (4.5) справедливо для любой точки потока, причем в любой точке значение константы одинаково. Если $\omega \neq 0$, то вдоль каждой линии тока или вихревой линии константы могут быть различными.

2. Для движения, происходящего в горизонтальной плоскости, $\rho gz = \text{const}$, поэтому интеграл Бернулли имеет вид

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = \text{const}. \qquad (4.6)$$

Выражение (4.6) справедливо также вдоль вихревой линии или линии тока, если влиянием силы тяжести можно пренебречь.

Интересно, что интегралу Бернулли можно придать энергетический смысл. С энергетической точки зрения $\rho u^2/2$ — кинетическая энергия, приходящаяся на единицу объема; ρgz — потенциальная энергия, определяемая пространственным положением в поле силы тяжести; p — «энергия давления». Размерность всех этих величин — Дж/м^3.

Таким образом, теорема Бернулли выражает закон сохранения механической энергии в стационарном потоке идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести.

4.5. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ БЕРНУЛЛИ

4.5.1. АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ

Теорема Бернулли позволяет проанализировать и объяснить многие физические явления, связанные с течением жидкостей.

С помощью интеграла Бернулли можно, например, оценить соотношение между давлениями в различных сечениях при движении жидкости в трубке переменного сечения (рис. 4.4). Привлекая уравнение неразрывности, легко показать, что с уменьшением площади проходно-

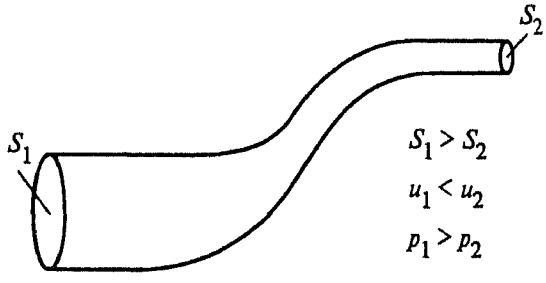


Рис. 4.4. К анализу течений в каналах с помощью интеграла Бернулли

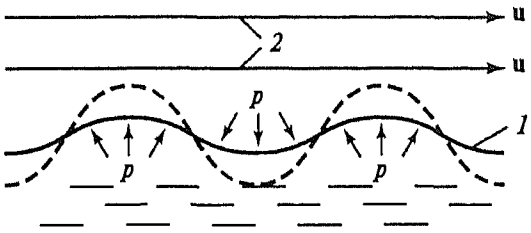


Рис. 4.5. Модель развития волн на поверхности воды при ветре:

1 — поверхность воды; *2* — линии тока ветра

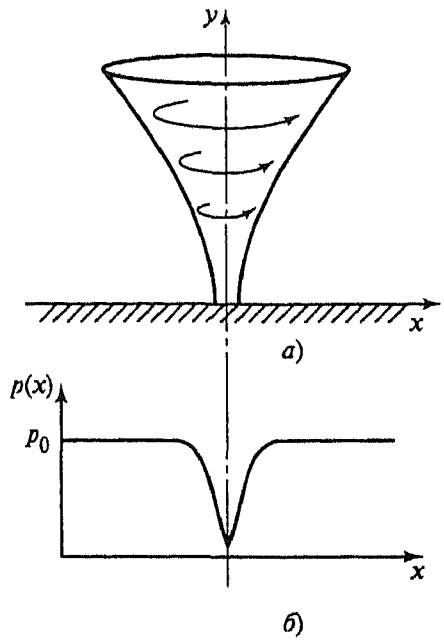


Рис. 4.6. Смерч (*а*), область пониженного давления у основания смерча (*б*)

го сечения скорость возрастает. Тогда из (4.6) (изменением геометрического напора пренебрегаем) следует, что в сечении с большей площадью и гидродинамическое давление больше.

Развитие волн на поверхности воды при ветре (рис. 4.5) также можно приближенно объяснить, используя интеграл Бернулли: благодаря изменению площади поперечного сечения со стороны воздуха давление во впадине волны больше, чем в гребне.

В область пониженного давления смерча (рис. 4.6), находящуюся у его основания, засасываются предметы с поверхности Земли и переносятся на значительные расстояния.

Ниже еще не раз будем использовать интеграл Бернулли при анализе конкретных течений. Отметим, что теорема Бернулли положена в основу принципа действия множества приборов и технических устройств. Рассмотрим некоторые из них.

4.5.2. РАСХОДОМЕР ТИПА «ТРУБА ВЕНТУРИ»

Труба Вентури служит для измерения расхода жидкости (средней по сечению скорости). Пусть по прямой трубе постоянного сечения S течет идеальная жидкость с параметрами u, p, $\rho = \text{const}$ (рис. 4.7). Скорость и давление по сечению трубы постоянны. В некотором месте трубы имеется сужение, минимальная площадь которого S_1. Примем, что труба, включая сужение, представляет собой одну трубку тока.

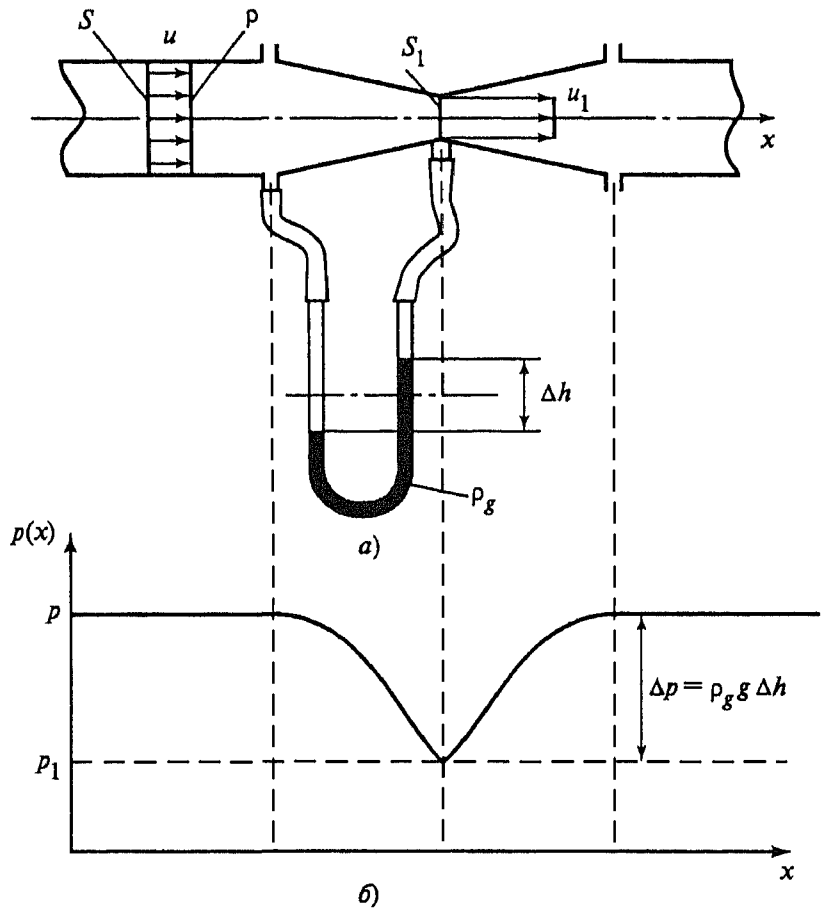


Рис. 4.7. Труба Вентури: принцип действия расходомера (*а*) и распределение давления (*б*); ρ_g — плотность рабочей жидкости (обычно — ртути) в дифманометре

Пренебрегая изменением гидростатического напора, запишем уравнение Бернулли для двух сечений трубы

$$\frac{\rho u^2}{2} + p = \frac{\rho u_1^2}{2} + p_1 .$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности по сечению трубы (см. рис. 2.1), получим закон сохранения расхода (уравнение неразрывности в интегральной форме)

$$\rho u S = \rho u_1 S_1,$$

откуда

$$\frac{u_1}{u} = \frac{S}{S_1} .$$

Тогда перепад давления между сечениями S и S_1 будет определяться следующим выражением:

$$\Delta p = p - p_1 = \frac{\rho u^2}{2}\left[\left(\frac{u_1}{u}\right)^2 - 1\right] = \frac{\rho u^2}{2}\left[\left(\frac{S}{S_1}\right)^2 - 1\right],$$

откуда

$$u = \frac{\sqrt{\dfrac{2(p-p_1)}{\rho}}}{\sqrt{\left(\dfrac{S}{S_1}\right)^2 - 1}} = C\sqrt{\frac{2(p-p_1)}{\rho}}, \qquad (4.7)$$

где величины S/S_1 и ρ должны быть известны, а $\Delta p = p - p_1$ измеряется дифференциальным манометром.

Замечания. 1. Реальная жидкость является вязкой, и ее скорость меняется по сечению. Труба Вентури измеряет *среднюю по сечению скорость*.

2. Вязкое трение приведет к некоторому дополнительному перепаду давления между сечениями S и S_1. Для учета этого фактора константу C в (4.7) надо умножить на некоторый поправочный коэффициент ξ. Однако трубы Вентури изготовляют так, чтобы изменение давления за счет скорости было во много раз больше, чем за счет трения, при этом $\xi \approx 1$. Тем не менее значение константы в (4.7) обычно не рассчитывают, а определяют экспериментально, с помощью тарировочных опытов.

Расходомеры типа «труба Вентури» обладают рядом достоинств, среди которых:

1) простота конструкции, надежность и долговечность, невысокая стоимость;

2) отсутствие вращающихся частей или элементов, выступающих в поток и его существенно деформирующих;

3) относительно малое собственное гидравлическое сопротивление.

Недостатки расходомеров «труба Вентури»:

1. Как видно из формулы (4.7), показания трубы Вентури нелинейно зависят от скорости: $\Delta p \sim u^2$. Поэтому каждый расходомер данного типа может работать с приемлемой точностью только в некотором ограниченном диапазоне скоростей (расходов).

2. Нетрудно понять, что перепад давления Δp однозначно связан со скоростью (расходом) формулой (4.7) только в том случае, если в трубу Вентури поступает *установившийся* (*стабилизированный* — см. п. 7.2.1) поток. Для выполнения этого условия трубы Вентури можно устанавливать только на достаточно длинных участках трубопроводов.

Практические рекомендации по проектированию труб Вентури и других расходомеров можно найти, например в [6].

4.5.3. ТРУБКА ПИТО — ПРИБОР ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА

Трубка Пито (трубка полного напора) измеряет скорость в точке в потоке жидкости. Этот датчик был предложен Пито в 1832 г.

Пусть через точку A, в которой надо измерить скорость, проходит линия тока. Поставим ей навстречу трубку с открытым концом, связанную с дифманометром (рис. 4.8). Будем считать жидкость идеальной и $\gamma = \text{const}$. Тогда вдоль линии тока справедливо *уравнение Бернулли* (4.6), а поскольку в точке A поток полностью тормозится,

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = p_0,$$

где p и u — давление и скорость в точке A при отсутствии трубки; p_0 — *давление торможения*.

Тогда для скорости в точке A получим выражение

$$u = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}.$$

Перепад давления Δp измеряется дифманометром, один отбор которого помещен в рассматриваемую точку A, а другой находится на стенке трубы в том же сечении, где расположена точка A. При этом учитывается то обстоятельство, что перепад гидродинамического давления *по сечению трубы*, как правило, пренебрежимо мал. Для повышения точности измерений приведенное выше выражение для скорости корректируют путем введения *поправочного коэффициента*, определяемого тарировкой и учитывающего неидеальность жидкости и, возможно, конструктивные особенности трубки Пито.

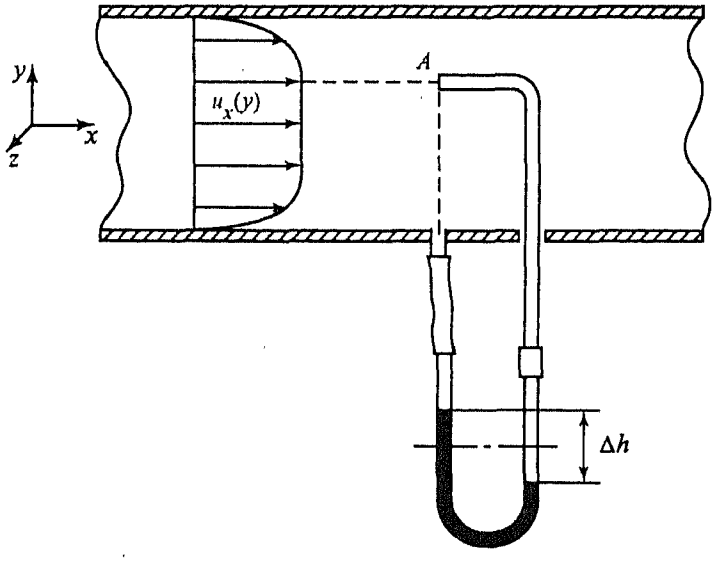


Рис. 4.8. Принципиальная схема трубки Пито

Важные преимущества трубки Пито:

1. Простота конструкции, надежность и невысокая стоимость.

2. Трубку Пито можно сделать миниатюрной, чтобы не вносить существенных искажений в естественную структуру потока. Трубкой Пито можно провести измерения в пристенной области потока, представляющие наибольший интерес.

Недостатки трубки Пито:

1. Как уже отмечалось, прибор можно использовать только в тех случаях, когда давление в поперечном сечении потока постоянно. Это условие выполняется не всегда.

2. Показания прибора нелинейны: $\Delta p \sim u^2$, что ограничивает диапазон измеряемых скоростей.

Более подробно о трубке Пито и других датчиках скорости см. в работе [6].

4.6. ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

4.6.1. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Выше отмечалось, что течение идеальной жидкости всегда *адиабатическое*, поэтому для *сжимаемой жидкости* плотность и давление связаны уравнением адиабаты

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \tag{4.8}$$

а для *несжимаемой* — $\rho(p) = \text{const}$. Поэтому плотность для течения идеальной жидкости всегда можно выразить как функцию только давления $\rho = \rho(p)$.

Такие течения называются **баротропными**. Заметим, что для баротропного течения плотность может *зависеть не только* от p [например, для совершенного газа $\rho = p/(RT)$], хотя и выражается как *функция только* p.

Для баротропного течения можно ввести **функцию давления**

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + P_0(p_0),$$

где можно положить $P_0(p_0) = 0$, выбрав для этого соответствующее давление p_0.

Из приведенного выше выражения следует

$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}p}{\rho},$$

или

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla P.$$

Запишем с учетом этого соотношения уравнение Громеки—Лэмба (4.2), полагая массовые силы потенциальными с потенциалом П:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla\left(P + \Pi + \frac{u^2}{2}\right).$$

Повторяя то же доказательство, что в § 4.4, сформулируем **обобщенную теорему Бернулли**.

При стационарном течении идеальной жидкости в поле потенциальных массовых сил сумма кинетической энергии единицы массы жидкости $u^2/2$, *функции давления* P *и потенциала массовых сил* Π *сохраняет постоянное значение вдоль линии тока или вдоль вихревой линии.*

Величина $E = P + \Pi + \frac{u^2}{2}$ называется обобщенным интегралом Бернулли; $E = \text{const}$ вдоль вихревой линии или линии тока.

4.6.2. КРИТЕРИЙ СЖИМАЕМОСТИ

Сжимаемость — способность жидкости изменять объем (плотность) под воздействием изменения давления. *Коэффициент сжимаемости* определяется как (см. п. В. 4.1):

$$\varkappa_s = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s,$$

где индекс s обозначает условие, при котором определяется коэффициент сжимаемости (например, изотермическое, адиабатическое).

Еще одной количественной характеристикой сжимаемости является *степень сжимаемости*. Поскольку давление, а следовательно, и плотность сильнее всего изменяются в окрестности той точки потока, где жидкость полностью заторможена (например, вблизи передней критической точки при обтекании тела), степень сжимаемости можно определить как

$$\varepsilon_\rho = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = 1 - \frac{\rho}{\rho_0},$$

где ρ_0 — плотность в точке полного торможения.

Жидкость считается несжимаемой, если ее плотность вдоль линии тока изменяется слабо, т.е. $\varepsilon_\rho << 1$, например, если везде в потоке выполняется условие

$$\varepsilon_\rho < 0{,}05.$$

Можно предположить, что указанное условие не реализуется при больших скоростях потока, поскольку в этом случае изменения давления в потоке должны быть велики: $\Delta p \sim u^2$.

Введем понятие **скорости звука** — скорости распространения малых возмущений в сжимаемой среде:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

Используя уравнение адиабаты (4.8) и уравнение состояния совершенного газа $p = \rho RT$, для скорости звука при адиабатическом течении газа получаем:

$$a = \sqrt{kRT},$$

т.е. адиабатическая скорость звука в газе зависит от его температуры. Например, при $T = 293$ К скорость звука в воздухе $a = 344$ м/с.

При исследовании течения сжимаемой среды используют *число Маха*

$$\mathrm{M} = u/a,$$

которое является безразмерной скоростью течения.

При $\mathrm{M} < 1$ течение является дозвуковым, при $\mathrm{M} > 1$ — сверхзвуковым, при $\mathrm{M} = 1$ — скорость течения равна скорости звука.

Для изучения движения сжимаемой жидкости воспользуемся обобщенным интегралом Бернулли, полагая, что изменением потенциала силы тяжести $\Pi = gz$ можно пренебречь (это предположение оправдано при больших скоростях потока):

$$P + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \qquad (4.9)$$

Используя уравнения адиабаты (4.8), получаем для функции давления

$$P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_1^{p/p_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{-1}{k}} \mathrm{d}\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right].$$

В точке полного торможения потока ($p = p_0$, $u = 0$) функция давления P обращается в нуль, поэтому константа в (4.9) равна нулю. Подставив найденное выражение для $P(p)$ в (4.9), получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = 0.$$

Использовав дополнительно уравнение адиабаты, уравнение состояния совершенного газа, а также определение числа Маха, можно вывести соотношения между параметрами потока и параметрами в точке торможения, которые зависят только от числа Маха:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2,$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Таким образом, степень сжимаемости $\varepsilon_\rho = 1 - \rho/\rho_0$ связана с числом Маха, и именно *число Маха может служить в качестве критерия сжимаемости.*

Рассмотрим приведенные ниже данные для воздуха:

M.....	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ε_ρ, %.....	0,5	2,0	4,5	8,0	12,9	18,6	26,3	35,0	45,3	57,2

Отсюда видно, что при $M < 0{,}3$ значение $\varepsilon_\rho < 5$ %, т.е. в этом случае газ в потоке можно считать несжимаемой жидкостью.

При больших числах Маха температура и давление в потоке сильно меняются, особенно в окрестности точки торможения. Это обстоятельство необходимо учитывать при проведении измерений в потоках. Нужно помнить, что вводимые в поток датчики температуры или давления всегда, в принципе, фиксируют *параметры торможения*, которые могут очень сильно отличаться от значений температуры и давления в невозмущенном потоке.

Заметим, что существуют случаи, когда жидкость нельзя полагать несжимаемой даже при малых числах Маха. Это относится, например, к исследованию нестационарных течений или процесса распространения волн давления в сплошной среде.

Глава пятая

ПЛОСКОЕ СТАЦИОНАРНОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСОБЕННОСТИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Плоское движение — это движение жидкости, при котором все ее частицы перемещаются параллельно некоторой одной плоскости, причем во всех плоскостях, параллельных этой плоскости, поля скорости, давления и плотности тождественно одинаковы.

На практике с достаточно хорошим приближением можно, например, считать плоским обтекание крылового профиля (рис. 5.1). Здесь движение будет плоским в плоскости x-0-y, и во всех других плоскостях, параллельных этой плоскости, поля всех параметров потока будут такими же. Поэтому достаточно рассмотреть движение в плоскости x-0-y.

При *плоском течении* задача является *двумерной*. Каждый из параметров потока f зависит лишь от двух пространственных координат — x, y, а производная по третьей координате $\partial f / \partial z = 0$.

Замечание. Мы рассматриваем *безвихревое движение*, а следовательно, *жидкость считается идеальной*, поскольку для вязкой жидкости течение всегда вихревое.

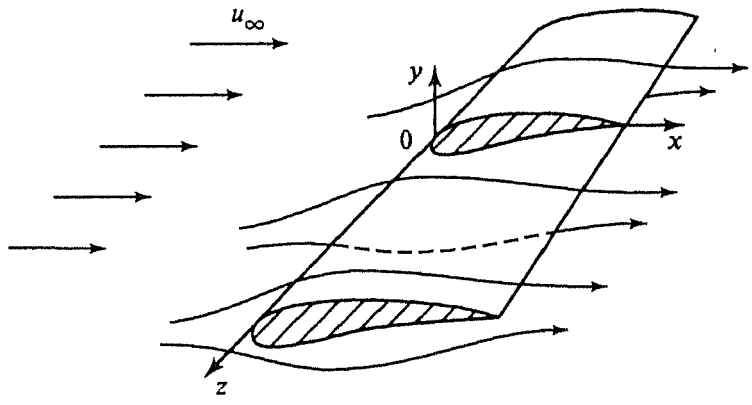


Рис. 5.1. Пример плоского течения: обтекание крылового профиля

Для безвихревого течения всегда существует *потенциал скорости — скалярная функция* $\varphi(x, y)$, для которой справедливо:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{5.1}$$

Поскольку рассматривается к тому же *несжимаемая жидкость*, из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

и определения потенциала (5.1) следует

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = 0. \tag{5.2}$$

Таким образом, для потенциала несжимаемой жидкости справедливо уравнение Лапласа.

Плоское движение жидкости обладает той особенностью, что для него (только для плоского течения!) можно ввести *функцию тока* $\psi(x, y)$:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

При использовании функции тока уравнение неразрывности обращается в тождество

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Функция тока называется так потому, что ψ сохраняет *постоянное значение вдоль линии тока*. Действительно, уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y},$$

т.е. вдоль линии тока

$$u_x\, \mathrm{d}y - u_y\, \mathrm{d}x = 0.$$

Выразив в этом уравнении скорость через функцию тока, получим *вдоль линии тока*

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\, \mathrm{d}y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}\psi = 0,$$

а это и означает, что значение функции тока не меняется на линии тока.

Напомним, что мы рассматриваем *безвихревое движение*, для которого выполняется

$$\mathrm{rot}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Из этого соотношения, воспользовавшись определением функции тока, получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta\psi = 0, \tag{5.3}$$

т.е. функция тока для рассматриваемого движения, как и потенциал, подчиняется уравнению Лапласа.

Связь между потенциалом и функцией тока следует из их определений

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Было показано, что линии тока — это линии $\psi = \mathrm{const}$. В то же время, поскольку $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$, линии тока перпендикулярны эквипотенциальным линиям (рис. 5.2). В каждой точке линии $\psi = \mathrm{const}$ и эквипотенциальные линии $\varphi = \mathrm{const}$ *ортогональны*.

Введение потенциала или функции тока существенно упрощает расчет движения жидкости.

Действительно, при условии, что течение плоское, стационарное, безвихревое и жидкость несжимаема, поля трех неизвестных величин u_x, u_y, p определяются решением *трех* дифференциальных уравнений (двух нелинейных уравнений Эйлера и уравнения неразрывности).

Вместе с тем, поле потенциала (или функции тока) рассчитывается путем решения *одного* уравнения (Лапласа), а затем можно найти поле скорости (из определения φ или ψ) и распределение давления (из интеграла Бернулли).

Уравнение Лапласа необходимо дополнить граничными условиями для идеальной жидкости. На твердой границе «г» должно выполняться условие непроницаемости, которое в рассматриваем случае имеет вид (см. рис. 4.1):

$$u_n = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_г = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)_г = 0,$$

а также условие проскальзывания

$$u_\tau = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_г = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_г \neq 0.$$

Решение уравнения Лапласа представляется весьма сложным и, как правило, вы-

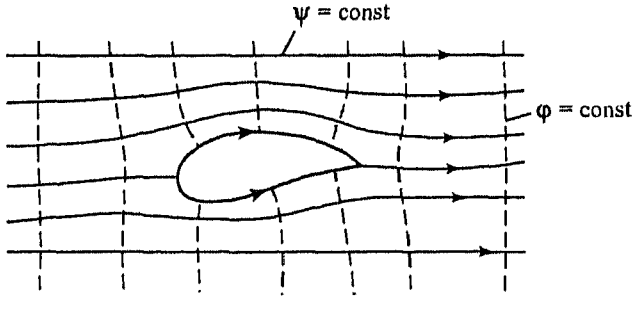


Рис. 5.2. Линии тока ортогональны эквипотенциальным линиям (пунктирные линии)

полняется численно с использованием ЭВМ. Однако для ряда интересных случаев можно получить выражения для φ или ψ *аналитическим путем*, не решая уравнение Лапласа, а применяя *метод суперпозиции*.

5.2. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ

5.2.1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА

Уравнения Лапласа (5.2) или (5.3) — линейные. Это означает, что справедливо

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \ldots + \Delta\varphi_k,$$

если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k$.

Аналогично

$$\Delta\psi = \Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 + \ldots + \Delta\psi_n,$$

если $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n$.

Следовательно, если функции φ_i представляют собой потенциалы скорости некоторых i-х потоков, то их сумма φ также удовлетворяет уравнению Лапласа и представляет собой потенциал скорости некоторого нового потока — результата наложения (суперпозиции, геометрической суммы) всех i-х потоков.

Аналогичный вывод справедлив в отношении функций тока ψ_i и их суммы ψ, представляющей собой функцию тока нового потока, результата суперпозиции всех i-х потоков.

Метод суперпозиции состоит в представлении рассматриваемого сложного потока в виде суммы нескольких простых потоков, потенциалы (или функции тока) которых известны.

5.2.2. ПОТЕНЦИАЛЫ И ФУНКЦИИ ТОКА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ПОТОКОВ

Прямолинейный поступательный поток

Пусть задан поток с постоянным вектором скорости $\mathbf{u}_0$, составляющим угол α с осью x (рис. 5.3). Тогда

$$u_x = u_0 \cos\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$u_y = u_0 \sin\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

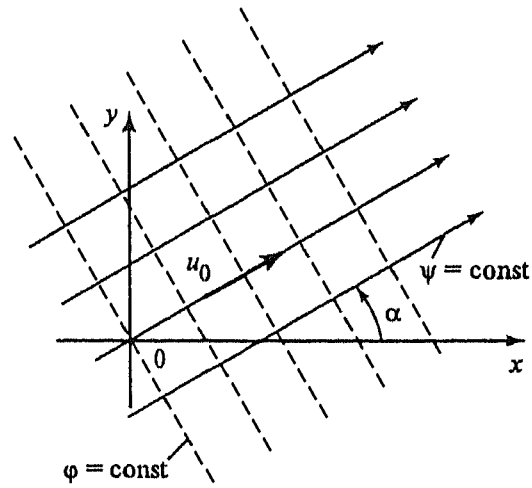


Рис. 5.3. Прямолинейный поступательный поток

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\varphi = (u_0 \cos\alpha)x + (u_0 \sin\alpha)y + c_1,$$

$$\psi = -(u_0 \sin\alpha)x + (u_0 \cos\alpha)y + c_2.$$

Заметим, что при нахождении скорости по φ или ψ константы c_1 или c_2 (и вообще константы в выражениях для любых φ или ψ) можно опустить, так как компоненты скорости находят дифференцированием φ или ψ.

Точечный источник (сток)

Точечный источник (сток) представляет собой точку, из которой равномерно во все стороны истекает (втекает в точку) жидкость. Поместим в эту точку начало координат (рис. 5.4). Как видно из рис. 5.4, на котором изображены линии тока, эти линии выходят из источника (входят в сток). Выше уже отмечалось, что существуют особые точки, в которых может находиться более одной линии тока. Точечный источник (сток) является именно такой особой точкой.

Источник (сток) характеризуется производительностью V [м^2/с] — объемом жидкости, истекающим в единицу времени и приходящимся на единицу длины вдоль оси z, перпендикулярной плоскости течения. При $V > 0$ имеем источник, при $V < 0$ — сток.

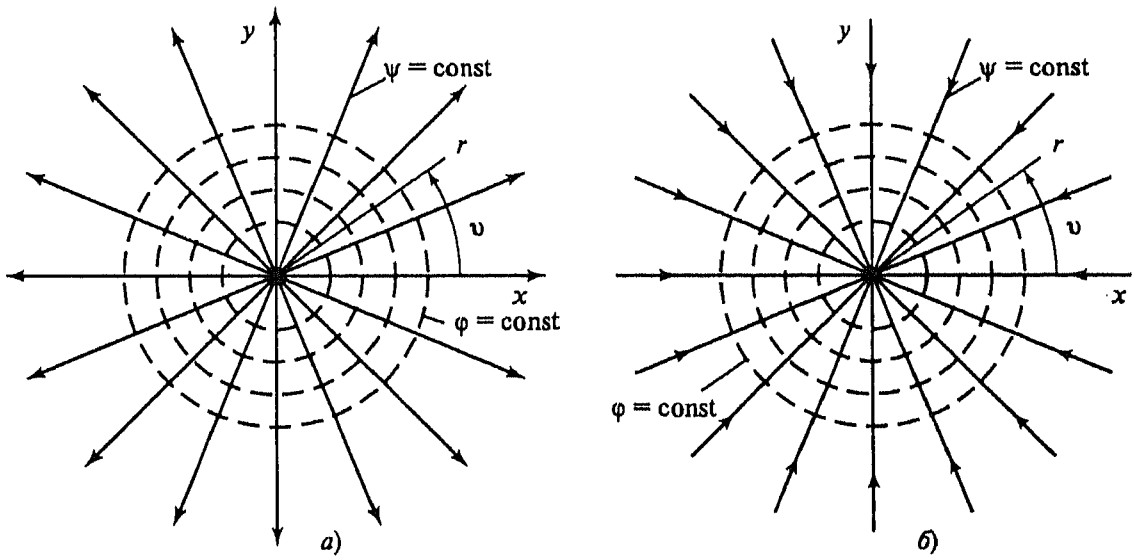


Рис. 5.4. Точечный источник (*а*) и сток (*б*)

Запишем уравнение неразрывности для плоского течения в полярной системе координат

$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0.$$

В силу симметрии $u_\vartheta = 0$ и второй член в левой части этого уравнения равен нулю.

Проинтегрируем уравнение неразрывности по радиусу

$$u_r r = c.$$

Константу c можно получить, воспользовавшись определением производительности источника (стока)

$$V = \int_0^{2\pi} u_r r \, \partial\vartheta = c2\pi,$$

откуда $c = V/(2\pi)$, $u_r = V/(2\pi r)$.

Из определения потенциала и функции тока

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \frac{V}{2\pi r},$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

В результате интегрирования получим

$$\varphi = \frac{V}{2\pi}\ln r, \quad \psi = \frac{V}{2\pi}\vartheta.$$

Перейдем от полярных координат к декартовым. При этом

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

следовательно,

$$\varphi = \frac{V}{2\pi}\ln\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \psi = \frac{V}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{5.4}$$

Если источник (сток) расположен не в начале координат, а в точке $\{x_0, y_0\}$, выражения для функции тока и потенциала примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{V}{2\pi}\ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \\ \psi &= \frac{V}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4a}$$

Плоский потенциальный вихрь

Плоский потенциальный вихрь — такое стационарное плоское безвихревое движение, при котором частицы жидкости перемещаются по концентрическим окружностям вокруг центральной точки — центра вихря (рис. 5.5). Несмотря на название, «вихрь» — это *циркуляционное безвихревое* движение.

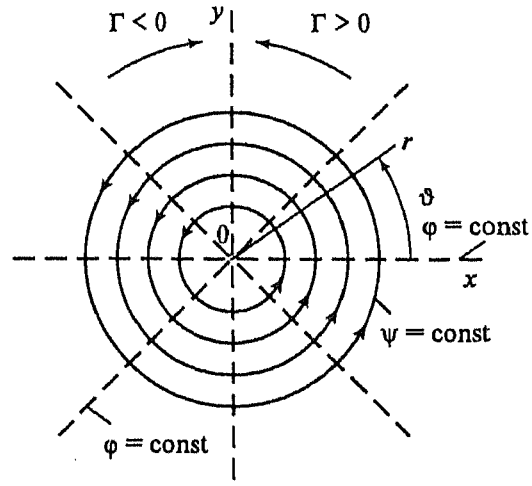


Рис. 5.5. Плоский потенциальный вихрь

Составляющие скорости этого движения

$$u_r = 0, \quad u_\vartheta = \frac{c}{r}.$$

Найдем циркуляцию по круговому замкнутому контуру произвольного радиуса r

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} u_\vartheta r \, d\vartheta = c2\pi \neq 0.$$

Следовательно, движение безвихревое везде, кроме точки 0, через которую вдоль оси z, перпендикулярной плоскости течения, проходит «вихревая нить» (бесконечно тонкая вихревая трубка), интенсивность которой i согласно теореме Стокса равна: $i = \Gamma/2$.

Легко получить

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\vartheta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r,$$

или в декартовых координатах

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Из сопоставления этих выражений с (5.4) следует вывод, что задачи о точечном источнике и плоском вихре являются сопряженными.

5.2.3. ПЛОСКИЙ ДИПОЛЬ — ПРИМЕР СУПЕРПОЗИЦИИ

Пусть на оси x расположены имеющие одинаковую производительность $\pm V$ точечные источник и сток, координаты которых $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$ соответственно (рис. 5.6).

Просуммируем потенциалы и функции тока источника и стока:

$$\varphi = \varphi_{\text{ист}} + \varphi_{\text{ст}} = \frac{V}{2\pi}\ln\sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \frac{V}{2\pi}\ln\sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{V}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+\varepsilon)^2 + y^2}{(x-\varepsilon)^2 + y^2}};$$

$$\psi = \psi_{\text{ист}} + \psi_{\text{ст}} = \frac{V}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x+\varepsilon} - \frac{V}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x-\varepsilon} = \frac{V}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{-2\varepsilon y}{x^2 + y^2 - \varepsilon^2}.$$

Линии тока и эквипотенциальные линии ортогональны и представляют собой окружности (см. рис. 5.6).

Рассмотрим предельный случай при $\varepsilon \to 0$.

Если при этом $V = \text{const}$, то $\varphi = 0$, $\psi = 0$: сток полностью поглощает источник, и никакого движения жидкости нет.

Если же $V \to \infty$ и выполняется условие

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\ V \to \infty} (2\varepsilon V) = M = \text{const},$$

где M — момент диполя, из приведенных выше выражений получаем потенциал и функцию тока *плоского диполя*

$$\varphi_{\text{дип}} = \lim_{\varepsilon \to 0,\ V \to \infty} \varphi = \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\psi_{\text{дип}} = \lim_{\varepsilon \to 0,\ V \to \infty} \psi = -\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2},$$

или в полярных координатах

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi}\frac{\cos\vartheta}{r}, \quad \psi_{\text{дип}} = -\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\vartheta}{r}.$$

Замечание. При $M > 0$ источник находится (на бесконечно малом расстоянии) слева от стока, при $M < 0$ — справа.

Получим уравнение для эквипотенциальных линий

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \text{const} = \frac{1}{2c_1},$$

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c_1^2.$$

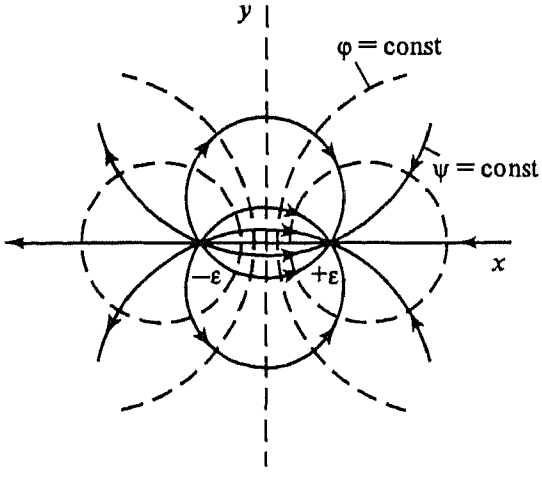


Рис. 5.6. Суперпозиция точечного источника и точечного стока

Эквипотенциальные линии представляют собой семейство окружностей радиуса c_1, центр которых находится на оси x (рис. 5.7). *Ось y* тоже является *эквипотенциальной линией*, соответствующей $c_1 \to \infty$.

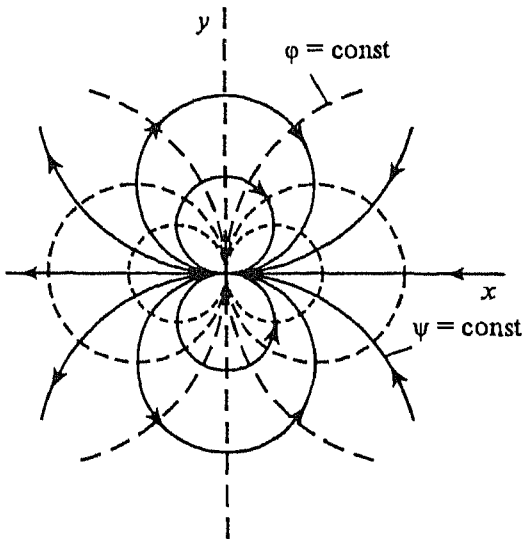


Рис. 5.7. Плоский диполь

Получим уравнение для линий тока

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \text{const} = \frac{1}{2c_2},$$

$$x^2 + (y - c_2)^2 = c_2^2.$$

Линии тока — семейство окружностей радиуса c_2, центр которых находится на оси y. Ось x тоже является *линией тока*, соответствующей $c_2 \to \infty$.

Частицы жидкости вытекают из точки, являющейся одновременно и источником, и стоком, описывают окружности и втекают в ту же точку.

Понятно, что плоский диполь — это искусственный математический образ, используемый для иллюстрации метода суперпозиции. Однако построение плоского диполя является промежуточным шагом при решении важнейшей для практики задачи о поперечном обтекании цилиндра.

5.3. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА ПОСТУПАТЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ

5.3.1. НАЛОЖЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПОТОКА НА ПЛОСКИЙ ДИПОЛЬ

Наложим поступательный поток, скорость которого u_0 направлена вдоль оси x, на плоский диполь с моментом $M > 0$, расположенный в начале координат, просуммировав соответствующие функции тока и потенциалы:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= u_0 y - \frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= u_0 x + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

или в полярных координатах

$$\left.\begin{aligned} \psi &= u_0\left(1 - \frac{M}{2\pi u_0}\,\frac{1}{r^2}\right) r\sin\vartheta, \\ \varphi &= u_0\left(1 + \frac{M}{2\pi u_0}\,\frac{1}{r^2}\right) r\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

Рассмотрим ось x, которая является линией тока. В плоскопараллельном потоке скорость постоянна $u_0 > 0$. В плоском диполе скорость на оси x отрицательна и при увеличении $|x|$ уменьшается по абсолютному значению от ∞ до 0. Следовательно, на оси x должны быть две точки (A и D), в которых суммарная скорость u_x равна нулю. Найдем координаты x этих точек.

Для плоского диполя

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u_0 - \frac{M}{2\pi}\left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right].$$

Приравняем нулю это выражение, учитывая, что $y = 0$ на оси x. Тогда

$$u_0 = \frac{M}{2\pi x^2},$$

$$x_A = -\sqrt{\frac{M}{2\pi u_0}}, \quad x_D = +\sqrt{\frac{M}{2\pi u_0}}.$$

Уравнение для линии тока, проходящей через точки A и D, найдем, подставив в (5.5) значение $y = 0$. Для этих точек $\psi = 0$. Приравнивая нулю выражение (5.5) и подставляя в него соотношения для x_A и x_D, получаем

$$x^2 + y^2 = r_0^2. \qquad (5.7)$$

где $r_0 = \sqrt{M/(2\pi u_0)}$.

Уравнение (5.7) — это уравнение для линии тока $\psi = 0$, представляющей собой окружность с центром в начале координат и проходящей через точки A и D. Заметим, что точки A и D являются особыми точками: в них пересекаются две линии тока, одна из которых представляет собой окружность, описываемую уравнением (5.7), а вторая — прямую линию $y = 0$ (т.е. ось x), которая также является линией тока.

В потоке, полученном при наложении плоского поступательного потока на диполь, имеется некоторая линия тока $ABDB'A$ (рис. 5.8), которая делит поток на две области — *внутреннюю* и *наружную*. Жидкость в наружной области обтекает контур $ABDB'A$ так же, как обтекается *цилиндр*

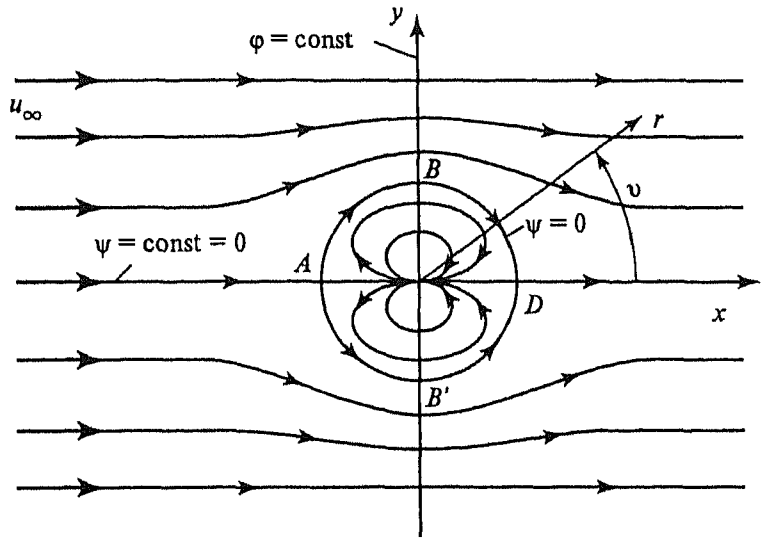


Рис. 5.8. Линии тока при поперечном обтекании цилиндра идеальной жидкостью

поперечным потоком идеальной жидкости. Струя (или линия тока — для стационарного течения они совпадают), идущая вдоль оси x из $-\infty$, в точке A делится на две струи, которые описывают две полуокружности вокруг поверхности цилиндра и вновь соединяются в точке D. Как уже было отмечено выше, точки A и D являются особыми. Скорость в них равна нулю. Точка A называется передней критической точкой, D — задней критической точкой.

Использовав в (5.6) выражение для r_0 и изменив обозначение скорости набегающего на цилиндр потока u_0 на u_∞, для функции тока и потенциала получим

$$\psi = u_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) r\sin\vartheta,$$

$$\varphi = u_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) r\cos\vartheta$$

и для скорости в полярных координатах

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\vartheta, \\ u_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -u_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

5.3.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Подставим в (5.8) $r = r_0$.

Получим:

1. $u_r = 0$. Нормальная составляющая скорости на поверхности цилиндра равна нулю. Это соответствует граничному условию непроницаемости.

2. $u_\vartheta = -2u_\infty \sin\vartheta$. Касательная составляющая скорости изменяется по синусоидальному закону.

Заметим, что:

1) значение скорости u_ϑ на поверхности цилиндра зависит только от ϑ и не зависит от радиуса цилиндра;

2) максимальное значение скорости $u_\vartheta = 2u_\infty$ достигается в точках $\pm\pi/2$.

5.3.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Поскольку рассматривается безвихревое движение, для *любой точки потока* справедливо уравнение Бернулли, из которого следует

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2}. \qquad (5.9)$$

Введем безразмерную величину $\tilde{P} = \dfrac{p - p_\infty}{\rho u_\infty^2/2}$, которая называется *коэффициентом давления*. Из (5.9) получим

$$\tilde{P} = \left[1 - \left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2\right].$$

На поверхности цилиндра $u/u_\infty = -2\sin\vartheta$ и $\tilde{P} = 1 - 4\sin^2\vartheta$.

Давление на поверхности цилиндра, как и скорость, зависит только от угла ϑ и не зависит от размера цилиндра.

Найдем значение коэффициента давления в нескольких характерных точках на поверхности цилиндра (рис. 5.9).

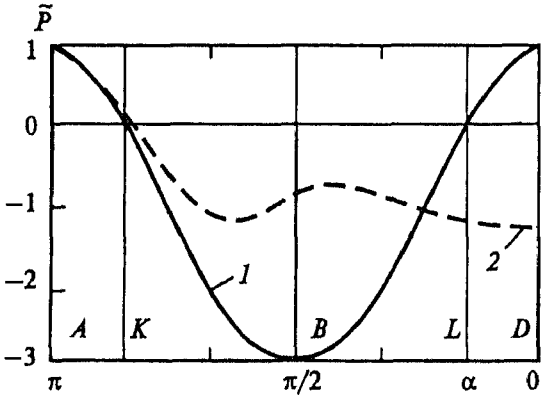


Рис. 5.9. Коэффициент давления на поверхности поперечно обтекаемого цилиндра:

1 — идеальной жидкостью; *2* — вязкой жидкостью

В точках A и D ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) $\tilde{P} = 1$, в точке B ($\vartheta = \pi/2$) $\tilde{P} = -3$, в точках L и K ($\vartheta = \pi/6$ и $\vartheta = \pi - \pi/6$) $\tilde{P} = 0$.

Давление в точках A и D равно давлению торможения p_0:

$$p_0 = p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2}.$$

Для дальнейшего анализа введем следующие понятия.

Конфузорное течение, или течение с отрицательным градиентом давления вдоль потока, — это течение, в котором давление падает вдоль потока.

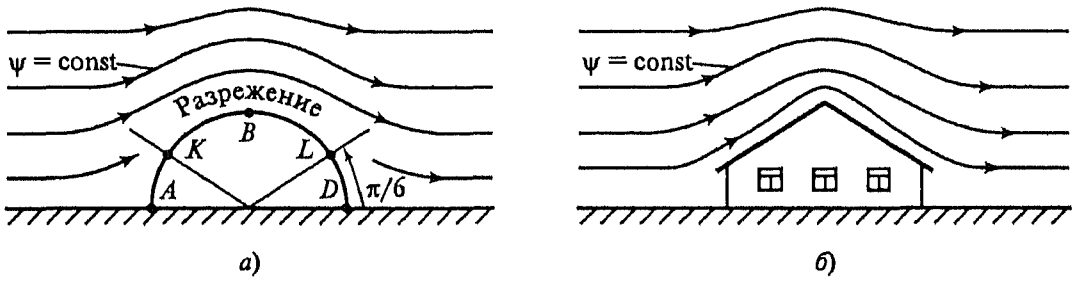
Диффузорное течение, или течение с положительным градиентом давления вдоль потока, — это течение, в котором давление возрастает вдоль потока.

При движении от точки A к B давление уменьшается. В этой области течение конфузорное. В точке K давление равно давлению на бесконечности. В точке B давление минимально

$$p_B = p_\infty - 3\frac{\rho u_\infty^2}{2}.$$

При движении от точки B к точке D давление увеличивается, и в точке D снова достигается давление торможения. В этой области течение диффузорное.

Заметим, что на большей части поверхности обтекаемого цилиндра имеет место разрежение (т.е. $p < p_\infty$), причем абсолютная величина разрежения в точке B значительно превышает максимальное избыточное давление в точках A и D. Этим, в частности, можно объяснить тот факт, что во время урагана — потока воздуха, набегающего на объекты на поверхности Земли с большой скоростью, — крыши домов не продавливает, а срывает (рис. 5.10).



а) *б*)

Рис. 5.10. Иллюстрация действия урагана:

а — на большей части поверхности обтекаемого тела разрежение; *б* — крыши домов срывает ураганом, а не продавливает

Следует также отметить, что распределение коэффициента давления, представленное на рис. 5.9, получено для идеальной жидкости. При поперечном обтекании цилиндра вязкой жидкостью распределение давления изменяется, особенно в области *BLD*. На рис. 5.9 пунктиром (кривая *2*) показаны результаты экспериментов для реальной жидкости.

5.3.4. ПАРАДОКС ДАЛАМБЕРА

Силу сопротивления, которая возникает при обтекании цилиндра, можно получить, проинтегрировав давление по поверхности (других сил, кроме силы давления, в идеальной жидкости нет). Поскольку распределение давления симметрично относительно оси *y*, что видно из рис. 5.9, проекция результирующей силы на ось *x* равна нулю.

Парадокс Даламбера. *Любые тела при движении в идеальной жидкости не испытывают сопротивления.*

Замечание. Мы получили этот вывод для частного случая — поперечного обтекания цилиндра. Однако можно показать, что он справедлив для обтекания тел произвольной формы идеальной жидкостью.

Для реальной жидкости этот вывод несправедлив, о чем свидетельствует опыт. Отличие реальной вязкой жидкости от идеальной проявляется в следующем.

Во-первых, на твердой поверхности, обтекаемой жидкостью, за счет вязкости возникают силы сопротивления трения.

Во-вторых, обтекание тел, как правило, является не плавным (рис. 5.11, *а*), а *отрывным* (рис. 5.11, *б*). В некоторой точке *s* на контуре — точке отрыва — линии тока отходят от контура. За контуром образуется застойная зона, в которой осуществляется интенсивное вихревое движение. Давление в этой области остается приблизительно постоянным и существенно ниже, чем в окрестности точки торможения *A*

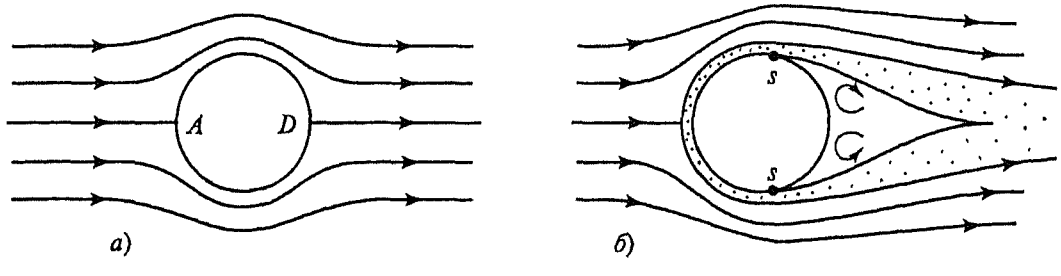


Рис. 5.11. Поперечное обтекание цилиндра:

а — безотрывное обтекание идеальной жидкостью; *б* — обтекание вязкой жидкостью; *s* — точки отрыва пограничного слоя

(см. пунктирную линию на рис. 5.9). Появляется результирующая сила сопротивления давления.

5.4. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ

5.4.1. ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

Наложим на поле скорости при обтекании круглого цилиндра поле скорости плоского вихря (рис. 5.12):

$$\varphi = u_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi}\vartheta,$$

$$\psi = u_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r.$$

При сложении этих двух потоков получаем обтекание цилиндра того же радиуса r_0, поскольку в каждом из потоков есть линия тока, совпадающая с контуром цилиндра r_0 (рис. 5.12).

Распределение скоростей суммарного потока имеет следующий вид:

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_\infty\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\vartheta,$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta} = -u_\infty\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Заметим, что из этих выражений следует симметрия течения относительно оси y, поскольку $u_\vartheta(\vartheta) = u_\vartheta(\pi - \vartheta)$.

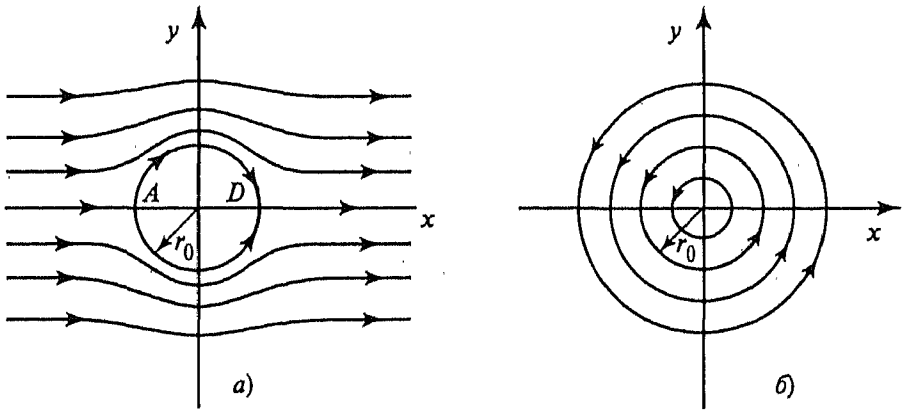


Рис. 5.12. Наложение на поле скорости при обтекании цилиндра (*а*) поля скорости плоского потенциального вихря (*б*)

На поверхности цилиндра при $r = r_0$

$$u_r = 0, \quad u_\vartheta = -2u_\infty \sin\vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \tag{5.10}$$

Найдем положение критических точек $\vartheta_{кр}$ на поверхности цилиндра из условия $u_\vartheta = 0$. Получим уравнение

$$\sin\vartheta_{кр} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 u_\infty}.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решения при $\Gamma^* = \dfrac{\Gamma}{4\pi r_0 u_\infty} > 1$;

в этом случае скорость на поверхности цилиндра не обращается в нуль (рис. 5.13, *а*).

При $\Gamma^* = 0$ имеем бесциркуляционное обтекание, рассмотренное выше.

При $0 < \Gamma^* \le 1$ существуют две критические точки, симметричные относительно оси y (рис. 5.13, *в*), причем при $\Gamma^* = 1$ эти точки сливаются в одну: $\sin\vartheta_{кр} = \pi/2$ (рис. 5.13, *б*).

Наложенный плоский вихрь, называемый *присоединенным вихрем*, изменил картину течения, что видно из сравнения рис. 5.12 и 5.13. Наличие присоединенного вихря не означает, что в потоке имеются частицы, которые циркулируют вокруг цилиндра. Они обтекают его в направлении, определяемом u_∞.

Распределение давления по поверхности цилиндра можно найти, воспользовавшись уравнением Бернулли (5.9) и подставив в него выражение для скорости (5.10). Проинтегрировав полученное распределение

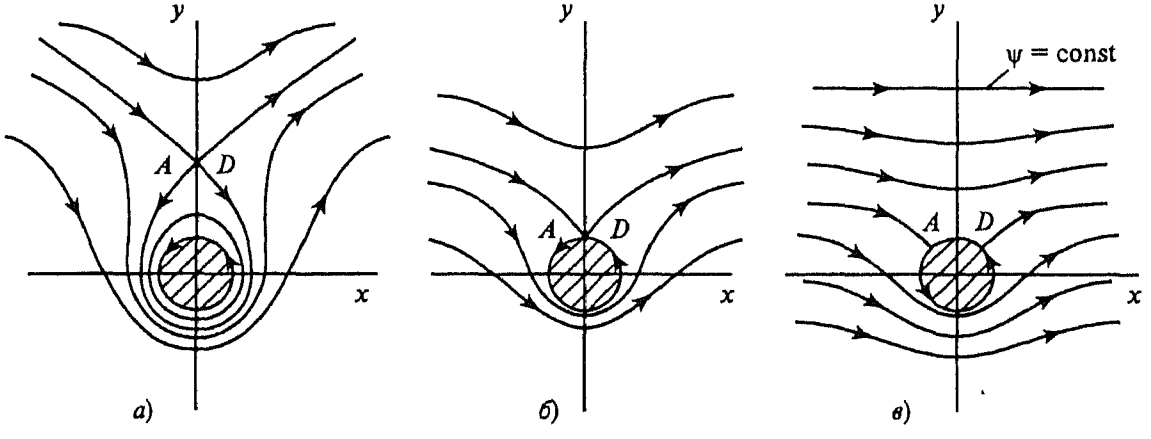


Рис. 5.13. Поперечное обтекание цилиндра с циркуляцией:
а — $\Gamma/(4\pi r_0 u_\infty) > 1$; *б* — $\Gamma/(4\pi r_0 u_\infty) = 1$; *в* — $0 < \Gamma/(4\pi r_0 u_\infty) < 1$

по поверхности цилиндра, найдем результирующую силу, действующую на цилиндр:

$$\mathbf{R} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\mathbf{R}\,\mathrm{d}\vartheta,$$

где $\mathrm{d}\mathbf{R}(\vartheta) = -p\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ — сила, действующая на элементарную площадку (рис. 5.14). Проекции элементарной силы на оси x и y можно записать как

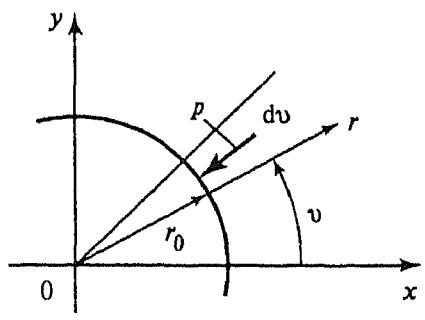


Рис. 5.14. К расчету силы, действующей на обтекаемый цилиндр

$$\mathrm{d}R_x = -p\cos\vartheta r_0\,\mathrm{d}\vartheta,$$

$$\mathrm{d}R_y = -p\sin\vartheta r_0\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Проинтегрировав эти выражения по поверхности (углу ϑ), получим силу сопротивления R_x и подъемную силу R_y.

Как и в случае бесциркулярного обтекания, справедлив парадокс Даламбера

$$R_x = 0;$$

этот результат очевиден, поскольку распределение давления симметрично относительно оси y.

Для подъемной силы в результате интегрирования получаем выражение

$$R_y = -\rho u_\infty \Gamma. \qquad (5.11)$$

Оказывается, что выражение для подъемной силы (5.11), полученное нами для случая циркуляционного обтекания круглого цилиндра, справедливо при обтекании любого тела.

Теорема Жуковского[1]. *Величина подъемной силы при циркуляционном обтекании произвольного профиля идеальной жидкостью пропорциональна плотности и скорости набегающего потока, а также циркуляции скорости по любому контуру, охватывающему профиль.*

Направление подъемной силы зависит от знака циркуляции и направления скорости набегающего потока. Можно воспользоваться следующим мнемоническим правилом: направление подъемной силы получается, если совместить вектор скорости набегающего потока с центром цилиндра и повернуть этот вектор на $\pi/2$ в сторону, противоположную циркуляционному движению (рис. 5.15).

---

[1] Жуковский Николай Егорович (1847—1921 гг.) — основоположник аэродинамики; труды по МЖГ, математике, астрономии, теории регулирования. Член-корреспондент Петербургской академии наук (с 1894 г.). Основатель и первый руководитель ЦАГИ с 1918 г.

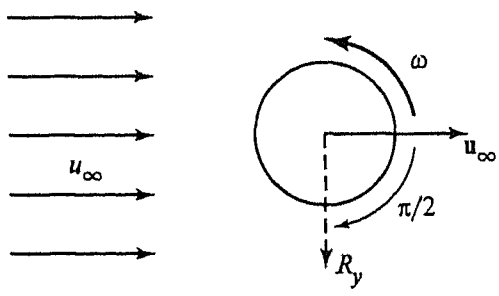


Рис. 5.15. Эффект Магнуса. Определение направления боковой силы при движении вращающегося тела

Отметим одно важное обстоятельство. Рассмотренная нами в рамках модели *идеальной жидкости* задача о циркуляционном обтекании цилиндра может показаться абстрактной, далекой от реальности. Однако результаты решения этой задачи имеют большое практическое значение. Полученная картина обтекания весьма близка к той, которая имеет место при поперечном обтекании *вязкой жидкостью* вращающихся тел, когда вращающаяся твердая поверхность благодаря вязкости вовлекает частицы жидкости в циркуляционное движение.

Сила R_y направлена перпендикулярно к скорости набегающего потока. Появление поперечной силы при движении вращающегося тела называется *эффектом Магнуса*. Этот эффект используется, например, в спорте — при подаче футбольных, теннисных мячей. Осуществлен на практике проект морского судна с «турбопарусами»[1]. На судне имеются вертикально расположенные высокие цилиндры, которые с помощью не слишком мощного двигателя приводятся во вращение. Таким образом создается циркуляция в потоке набегающего на цилиндры воздуха (ветра), и благодаря эффекту Магнуса судно движется.

Замечание. Для идеальной жидкости вращение тела не передается частицам жидкости, поскольку вязкость отсутствует. Поэтому в рамках теории идеальной жидкости циркуляция полагается заданной и вопрос о ее происхождении не рассматривается.

5.4.2. ОБТЕКАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КРЫЛА. ПОСТУЛАТ ЧАПЛЫГИНА—ЖУКОВСКОГО

Типичный крыловой профиль с плавной носовой частью и острой задней кромкой показан на рис. 5.16. Характерные параметры крыла: b — хорда, h — толщина, h/b — относительная толщина, α — угол атаки.

Рассмотрим обтекание при следующих условиях.

1. Жидкость идеальная и несжимаемая. Поэтому в потоке действуют только силы давления.

---

[1] По-видимому, первое судно с «турбопарусами» построил Жак-Ив Кусто, великий французский инженер и ученый, исследователь океана, изобретатель акваланга и глубоководных обитаемых аппаратов.

2. Течение стационарное.

3. Течение безвихревое (потенциальное) везде, кроме узкого вихревого слоя вблизи поверхности, благодаря которому имеется циркуляция $\Gamma \neq 0$.

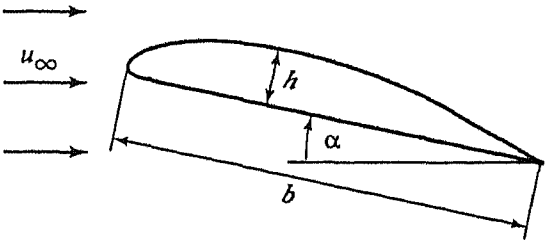


Рис. 5.16. Крыловой профиль

Замечание. В реальной жидкости тонкий слой вблизи поверхности тела с отличной от нуля циркуляцией — это так называемый пограничный слой. Существование циркуляции является следствием механизма вязкости.

Гипотетически можно представить множество картин бесциркуляционного обтекания крылового профиля, отличающихся величинами u_∞ и Γ (рис. 5.17). Однако в случаях, показанных на рис. 5.17, *а* и *б*, жидкость должна была бы перетекать с одной поверхности крыла на другую. При этом на задней кромке либо градиент скорости должен быть бесконечно большим, что в реальной жидкости невозможно, либо должен происходить срыв потока с образованием вихрей.

Постулат Чаплыгина[1]**—Жуковского.** *Среди бесконечного числа циркуляционных обтеканий профиля с острой задней кромкой в действительности осуществляется лишь такое, при котором поток плавно, с конечной скоростью сходит с задней кромки.*

Из этого постулата следует, что реализуется лишь одна картина обтекания (рис. 5.17, *в*). Соответствующее этой картине значение циркуляции Γ и следует подставить в формулу Жуковского (5.12) для расчета подъемной силы.

На практике подъемную силу крыла обычно определяют по формуле

$$R_y = c_y \frac{\rho u_\infty^2}{2} b,$$

где c_y — коэффициент подъемной силы.

Аналогичным образом для вязкой жидкости, в которой существует сила сопротивления, рассчитывают эту силу:

$$R_x = c_x \frac{\rho u_\infty^2}{2} h,$$

где c_x — коэффициент лобового сопротивления.

---

[1] Чаплыгин Сергей Александрович (1869—1942 гг.) — один из основоположников аэродинамики. Академик АН СССР. Участвовал в организации ЦАГИ, с 1921 г. (после смерти Н.Е. Жуковского) — научный руководитель ЦАГИ.

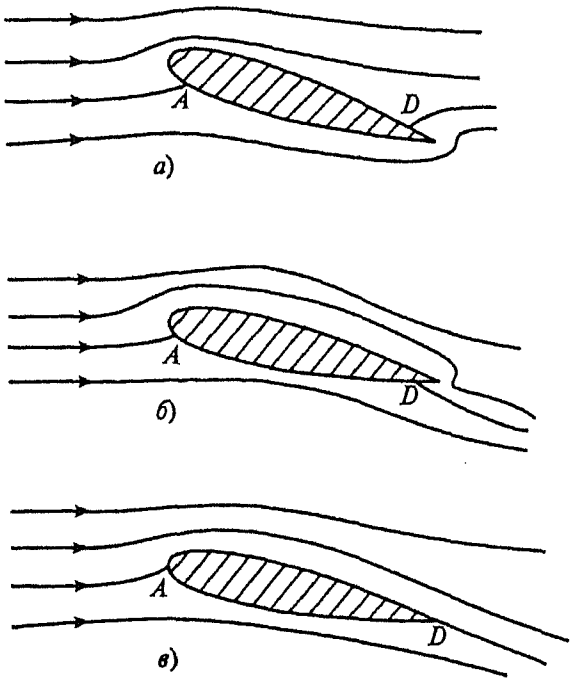


Рис. 5.17. Иллюстрация постулата Чаплыгина—Жуковского

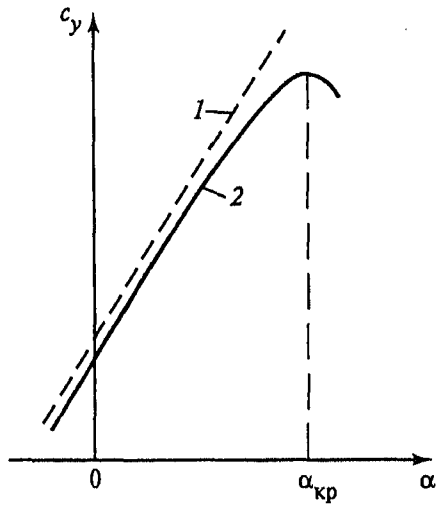


Рис. 5.18. Характерный вид зависимости коэффициента подъемной силы крыла от угла атаки:

1 — расчет в рамках модели идеальной жидкости; *2* — эксперимент

Коэффициенты c_y и c_x обычно определяют экспериментально для конкретных крыловых профилей при различных режимах обтекания.

Зная зависимость этих коэффициентов от режимных параметров обтекания, можно рассчитать подъемную силу и силу сопротивления. Например, при небольших углах атаки, когда обтекание крыла безотрывное, c_y почти линейно зависит от α (рис. 5.18), хотя и наблюдается некоторое различие случаев обтекания вязкой (сплошная линия *2* на рис. 5.18) и идеальной (пунктирная линия *1* на рис. 5.18) жидкостью. При увеличении угла атаки в вязком потоке происходит отрыв и c_y резко падает.

Глава шестая

ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

6.1. ОСОБЕННОСТИ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Система уравнений динамики жидкости, в которую входят уравнение неразрывности (2.3) и уравнения движения в напряжениях (2.6), является незамкнутой. Для замыкания эту систему необходимо дополнить соотношениями для компонент тензора напряжений τ_{ik}.

В гидростатике, когда полагается $u_k = 0$, $\tau_{ik} = -p\delta_{ik}$, эта система преобразуется в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\rho f_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}.$$

В динамике идеальной жидкости соотношения для напряжений такие же, как в гидростатике: $\tau_{ik} = -p\delta_{ik}$, и для нахождения поля скорости необходимо решить уже замкнутую систему уравнений неразрывности и Эйлера (2.3), (4.1), дополненную уравнением состояния и условиями однозначности.

Однако реальные жидкости являются вязкими. Как уже отмечалось, вязкость жидкости проявляется в области течения вблизи твердых границ. Для практики важно найти *сопротивление*, возникающее при обтекании поверхности, которое обусловлено вязкостью. Естественно, что и при решении задач *конвективного теплообмена* поле скорости следует определять, пользуясь моделью вязкой жидкости.

6.2. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Рассмотрим связь тензора напряжений поверхностных сил с *деформационным движением*.

Ранее было показано, что жидкая частица участвует в деформационном движении, которое приводит к изменению ее формы и размеров

(но масса при этом остается постоянной). Деформационное движение жидкости описывает симметричный *тензор скоростей деформации* V_{ij}^{S}, соответствующий линейной деформации и деформации сдвига (который вместе с *антисимметричным тензором* V_{ij}^{A}, отвечающим за вращательное движение, составляет тензор векторный градиент V_{ij}).

Заметим, что частица может деформироваться только за счет *поверхностных сил*; массовые силы не вызывают деформации, так как действуют одинаково на каждую материальную точку внутри частицы и могут только ускорять (замедлять) жидкую частицу как целое.

I гипотеза. Предположим, что существует пропорциональная связь между компонентами двух симметричных тензоров: тензора напряжений поверхностных сил и тензора скоростей деформации

$$\tau_{ij} \approx V_{ij}^{S}.$$

Запишем выражения для составляющих тензора напряжений поверхностных сил [8], используя в качестве коэффициента пропорциональности удвоенный *динамический коэффициент вязкости* μ:

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$\tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \quad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Просуммировав нормальные напряжения, получим

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 2\mu \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

В левой части этого уравнения стоит инвариант тензора напряжений поверхностных сил

$$\tau_{jj} = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz},$$

а в правой — инвариант тензора скоростей деформации

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Как известно (см. приложение), инвариант тензора является величиной изотропной, т.е. не меняется при произвольном вращении декартовой системы координат.

Давление в потоке *идеальной жидкости*, как было показано выше, также является изотропной величиной. В связи с этим становится по-

нятным смысл еще одной гипотезы, которая вводится для давления в *вязкой жидкости*.

II гипотеза. Предположим, что давление можно представить как

$$-p = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}.$$

Тогда $-p = \frac{2}{3}\mu \mathrm{div}\mathbf{u}$ и для нормальных напряжений можно записать тождество

$$\tau_{kk} = -p + \mu\left(2\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\mathbf{u}\right).$$

В этом выражении индекс «k» принимает значение x, y или z (т.е. не проводится суммирование по k).

С учетом полученных выше соотношений для касательных напряжений тензор напряжений поверхностных сил представляется в виде

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]. \qquad (6.1)$$

Выражение (6.1) называют **обобщенным законом Ньютона**. Впервые оно было записано Стоксом[1], а гипотезу о пропорциональности напряжений поверхностных сил скоростям деформации высказывал еще Ньютон.

Запишем выражение (6.1) в проекциях на оси координат:

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \tau_{xx} = -p + \mu\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\mathbf{u}\right),$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = -p + \mu\left(2\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\mathbf{u}\right), \qquad (6.1a)$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right), \quad \tau_{zz} = -p + \mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\mathbf{u}\right).$$

Полезно наряду с тензором напряжений поверхностных сил ввести **тензор вязких напряжений** σ_{ij}

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij},$$

[1] Стокс Джордж (1819—1903 гг.) — английский физик и математик; труды по гидродинамике, оптике, спектроскопии, векторному анализу и в других областях.

где

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right). \qquad (6.1б)$$

Обобщенный закон Ньютона устанавливает дополнительные связи для неизвестных τ_{ij}, которые нужны для замыкания уравнений динамики вязкой жидкости.

Динамический коэффициент вязкости μ [кг/(м · с)], входящий в эти соотношения, является одним из важнейших свойств жидкости. Он практически не зависит от давления, но сильно меняется с изменением температуры. Часто используют также *кинематический коэффициент вязкости* $\nu = \mu/\rho$ (м^2/с).

6.3. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА

6.3.1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Подставив в уравнения движения в напряжениях (2.6) выражения для τ_{ij} согласно обобщенному закону Ньютона (6.1), получим [8]

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\right] + \\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]; \\
&\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] + \\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right]; \\
&\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right] + \\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

Эта система уравнений называется **уравнениями Навье—Стокса**[1] для течения вязкой сжимаемой жидкости с переменными свойствами.

[1] Уравнения выведены Стоксом в 1845 г. примерно тем же путем, который воспроизведен выше.

Уравнения обладают большой степенью общности. Они выражают второй закон Ньютона, записанный для элементарной частицы вязкой сжимаемой жидкости с переменными свойствами. Слагаемые (6.2) могут трактоваться следующим образом: изменение количества движения частицы (левая часть) определяется действием массовых сил, сил давления и сил вязкости (слагаемые в правой части). Вместе с тем уравнения (6.2) могут рассматриваться как баланс сил инерции (левая часть), массовых сил, сил давления и сил вязкости (правая часть), действующих на жидкую частицу.

Вместе с уравнением неразрывности уравнения Навье—Стокса образуют замкнутую систему. Запишем ее в компактном тензорном виде:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} = 0,$$

уравнения Навье—Стокса

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k},$$

где

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right).$$

Решать эту систему необходимо совместно с условиями однозначности, которые, как уже указывалось выше, состоят из начальных и граничных условий. Граничные условия ставятся на пространственных границах области, в которой рассматривается движение жидкости. Эти границы могут быть жидкими и твердыми.

Существенное отличие вязкой жидкости от идеальной состоит в том, что если для идеальной жидкости на твердой поверхности выполняется условие проскальзывания, то для вязкой — условие *прилипания*: скорость на поверхности (и нормальная, и касательная ее составляющие) в системе координат, связанной с поверхностью, равна нулю

$$u_n = 0, \quad u_\tau = 0.$$

Замечания. 1. Условие прилипания — это гипотеза, которая подтверждается опытами по измерению скорости вблизи стенки.

2. Условие прилипания справедливо только тогда, когда среду можно считать сплошной. Для разреженных сред оно не выполняется.

6.3.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами, т.е. при $p = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, уравнение динамики существенно упрощается:

1) уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

или в тензорной форме

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0; \tag{6.3}$$

2) коэффициент μ в правой части уравнений (6.2) можно вынести из-под знака дифференциала.

Тогда (6.2) с учетом (6.3) можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt} &= f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right),\\
\frac{du_y}{dt} &= f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right),\\
\frac{du_z}{dt} &= f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \tag{6.4а}$$

или в тензорной форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}. \tag{6.4б}$$

Дальнейшее упрощение уравнений (6.4), (6.4а), (6.4б) связано с массовой силой. В качестве примера рассмотрим силу тяжести с вектором напряжения $\mathbf{f} = \mathbf{g}$. Описание движения жидкости в полях других массовых сил (кориолисовых, электромагнитных) выходит за рамки данной книги.

Если плотность жидкости постоянна, то сила тяжести уравновешивается градиентом гидростатического давления $p_{\text{гс}}$ (см. § 3.3):

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\rho}\nabla p_{\text{гс}}.$$

Действительно, градиент давления во втором слагаемом в правой части (6.4а) можно рассматривать как сумму гидростатической и гидродинамической составляющих:

$$\nabla p = \nabla p_{\text{гс}} + \nabla p_{\text{гд}}.$$

Поэтому из уравнения движения можно исключить вектор напряжения силы тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, полагая, что член ∇p в уравнении (6.4а) описывает изменение только гидродинамического давления в потоке.

К такому же выводу можно прийти, используя понятие о силе Архимеда. Если плотность жидкости постоянна, сила тяжести, действующая на элемент жидкости, уравновешивается архимедовой выталкивающей силой:

$$\mathbf{g} + \mathbf{f}_{\text{A}} = 0,$$

напряжение которой определяется величиной градиента гидростатического давления $\mathbf{f}_{\text{A}} = \frac{1}{\rho}\nabla p_{\text{гс}}$. Вследствие этого частицы несжимаемой жидкости движутся так, как если бы они были невесомыми. Следовательно, при нахождении поля скорости жидкости с постоянной плотностью сила тяжести может не приниматься во внимание, а соответствующий член в уравнении движения может быть опущен. Так и будем поступать при дальнейшем рассмотрении.

Следует, однако, отметить, что сила тяжести может оказывать существенное влияние на движение жидкости при неоднородном распределении плотности. Например, при смешении двух горизонтальных потоков с разными плотностями на поверхности раздела образуются волны, обусловленные влиянием силы тяжести. В задачах свободной конвекции, возникающей при наличии перепада температуры ΔT в потоке и зависимости плотности жидкости от температуры [7], часто можно положить постоянным коэффициент термического расширения $\beta_t = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$. Тогда задача может быть рассмотрена (несмотря на зависимость плотности от температуры) в рамках модели жидкости с постоянными свойствами; при этом в уравнении движения присутствует член $-\beta_t g \Delta T$, учитывающий влияние силы тяжести.

В заключение приведем уравнения движения и неразрывности для жидкости с постоянными свойствами, записанные в цилиндрических координатах [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_r\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \varphi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u_x,\\
&\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_r}{\partial x}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}-\frac{u_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right),\\
&\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_\varphi}{\partial x}+u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u_r u_\varphi}{r}=\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\Delta u_\varphi-\frac{u_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(6.5)$$

$$\frac{\partial (ru_x)}{\partial x}+\frac{\partial (ru_r)}{\partial r}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}=0.\quad(6.6)$$

Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

6.4. ПОДОБИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

6.4.1. СУЩНОСТЬ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Рассмотрим пример из практики. Пусть требуется исследовать два течения: течение жидкого натрия на участке трубопровода контура АЭС и течение крови в капиллярном сосуде. При этом заданы: давление на входе, расход каждой жидкости и ее физические свойства ρ, μ при заданной температуре, а также геометрические размеры:

	Трубопровод АЭС	Капиллярный сосуд
Диаметр трубы d, м	1	$5\cdot10^{-4}$
Длина трубы l, м	20	0,1

Характерные размеры и условия проведения экспериментов для этих двух задач существенно различны. Казалось бы, для этих исследований необходимо создать две совсем разные опытные установки, что является сложной проблемой, для решения которой к тому же требуются большие материальные затраты.

Однако *теория подобия* позволяет изучить обе эти задачи (как и многие другие) либо опытным путем на одной и той же лабораторной установке разумных размеров, используя в качестве рабочего вещества

любую доступную жидкость с известными свойствами, либо расчетным путем, решая безразмерные уравнения динамики, справедливые для любой жидкости и любых геометрических размеров подобного течения.

Сущность теории подобия заключается в том, что все многообразие течений жидкости можно разбить на классы подобных процессов, например:

течения в трубах (к этому классу относятся две упомянутые выше задачи),

внешнее обтекание геометрически подобных тел,

свободные струи и т.п.

При этом, имея результаты исследования одного процесса, можно, выполнив требования теории подобия, распространить эти результаты на *весь класс подобных процессов.*

6.4.2. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Ранее уже упоминалось, что уравнения динамики обладают большой общностью, т.е. справедливы для любого течения любой жидкости (в частности, для рассматриваемой здесь модели вязкой несжимаемой жидкости). Однако в эти уравнения входят физические свойства ρ и μ, что отличает эти уравнения для одной жидкости от уравнений для другой жидкости (с другими свойствами). Кроме того, уравнения решаются совместно с начальными и граничными условиями, в которые входят размерные параметры для каждой конкретной задачи.

Чтобы придать уравнениям динамики (6.3) и (6.4) еще большую общность, их (и условия однозначности) приводят к безразмерному виду. Эта процедура включает три этапа.

1. Записывают уравнения динамики *в размерном виде* и для каждой входящей в уравнения величины выбирают характерные масштабы. В рассматриваемом нами случае несжимаемой жидкости с постоянными свойствами значения ρ и μ (или $\nu = \mu/\rho$) — константы, которые являются естественными масштабами плотности и вязкости жидкости. Выберем два независимых масштаба — обычно выбирают масштабы длины l_0 и скорости u_0. Следует иметь в виду, что численные значения независимых масштабов можно выбирать произвольно; конечный результат от этого не зависит. Однако на практике в качестве масштабов, как правило, выбирают значения, характерные для рассматриваемой задачи. Например, для течения жидкости в трубе масштаб скорости u_0 целесообразно положить равным средней по сечению скорости, а линейный масштаб l_0 — равным диаметру трубы.

Таблица 6.1

Величина	Масштаб	Безразмерная величина	Размерная величина
Длина	l_0	Координаты	Координаты
		$X=\frac{x}{l_0},\ Y=\frac{y}{l_0},\ Z=\frac{z}{l_0}$	$x=Xl_0,\ y=Yl_0,\ z=Zl_0$
		Размеры	Размеры
		$L_1=\frac{l_1}{l_0},\ L_2=\frac{l_2}{l_0},\ \ldots$	$l_1=L_1l_0,\ l_2=L_2l_0,\ \ldots$
Скорость	u_0	$U_x=\frac{u_x}{u_0},\ U_y=\frac{u_y}{u_0},\ U_z=\frac{u_z}{u_0}$	$u_x=U_xu_0,\ u_y=U_yu_0,$ $u_z=U_zu_0$
Время	$t_0=l_0/u_0$	$\mathrm{Ho}=tu_0/l_0=t/t_0$	$t=\mathrm{Ho}\,l_0/u_0$
Перепад давления	ρu_0^2	$\mathrm{Eu}=\frac{p_0-p}{\rho u_0^2}$	$p_0-p=\mathrm{Eu}\rho u_0^2$

2. Выражают размерные величины в уравнениях неразрывности и движения через безразмерные (табл. 6.1). Заметим, что безразмерное время в этой таблице Но называют **числом гомохронности**, а безразмерное давление Eu (отношение перепада давления к динамическому напору ρu_0^2) — **числом Эйлера**.

Тогда уравнения (6.3), (6.4) примут следующий вид:

$$\frac{u_0}{l_0}\frac{\partial U_k}{\partial X_k}=0,$$

$$\frac{u_0^2}{l_0}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \mathrm{Ho}}+U_k\frac{\partial U_i}{\partial X_k}\right)=\frac{u_0^2}{l_0}\left(\frac{\partial \mathrm{Eu}}{\partial X_i}+\frac{\nu}{l_0u_0}\frac{\partial^2U_i}{\partial X_k\partial X_k}\right).$$

Очевидно, что полученные уравнения остались *размерными*, поскольку они содержат размерные комплексы, составленные из масштабов u_0/l_0 в уравнении неразрывности и u_0^2/l_0 в уравнении движения.

3. Сокращают постоянные множители в левой и правой частях этих уравнений, после чего уравнения становятся *безразмерными*.

Заметим, что в уравнении движения появился безразмерный комплекс u_0l_0/ν, который называется **числом Рейнольдса** Re.

В результате получим уравнения неразрывности и движения в безразмерной форме

$$\frac{\partial U_k}{\partial X_k} = 0\,, \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \mathrm{Ho}} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial X_k} = \frac{\partial \mathrm{Eu}}{\partial X_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_k \partial X_k}\,. \tag{6.8}$$

Следует отметить, что подобным способом приводят к безразмерному виду и условия однозначности. В частности, получают безразмерные геометрические характеристики области течения жидкости $L_1, L_2, \ldots, L_N$.

Числа Рейнольдса и Эйлера, входящие в уравнения движения, характеризуют соотношение между силами инерции и силами вязкости (Re), силами давления и силами инерции (Eu). Действительно, оценивая порядок соответствующих членов в уравнении движения и учитывая, что порядок производной есть отношение выбранных масштабов, получаем

$$\frac{F_{\text{ин}}}{F_{\text{вязк}}} = \left(\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right) \Big/ (\mu \Delta \mathbf{u}) \approx \left(\frac{\rho u_0^2}{l_0}\right) \Big/ \left(\frac{\mu u_0}{l_0^2}\right) = \frac{u_0 l_0}{\nu} = \mathrm{Re}\,,$$

$$\frac{F_{\text{давл}}}{F_{\text{ин}}} = \nabla p \Big/ \left(\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right) \approx \left(\frac{p_0 - p}{l_0}\right) \Big/ \left(\frac{\rho u_0^2}{l_0}\right) = \frac{p_0 - p}{\rho u_0^2} = \mathrm{Eu}\,.$$

Проведем классификацию входящих в уравнения (6.7), (6.8) безразмерных величин, называемых **числами подобия**.

1. Определяемые числа подобия (зависимые переменные):
$$U_x,\ U_y,\ U_z,\ \mathrm{Eu}.$$
2. Определяющие числа подобия (независимые переменные):
$$\mathrm{Ho},\ X,\ Y,\ Z.$$
3. Критерии подобия — числа подобия, состоящие из констант:
$$\mathrm{Re},\ L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_N.$$

В результате решения системы уравнений (6.7), (6.8) определяемые числа подобия выражаются через определяющие числа и критерии подобия

$$\left.\begin{aligned} U_x &= f_1(\mathrm{Ho}, X, Y, Z, \mathrm{Re}, L_1, L_2, \ldots, L_N),\\ U_y &= f_2(\mathrm{Ho}, X, Y, Z, \mathrm{Re}, L_1, L_2, \ldots, L_N),\\ U_z &= f_3(\mathrm{Ho}, X, Y, Z, \mathrm{Re}, L_1, L_2, \ldots, L_N),\\ \mathrm{Eu} &= f_4(\mathrm{Ho}, X, Y, Z, \mathrm{Re}, L_1, L_2, \ldots, L_N). \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Замечания. 1. Количество чисел подобия зависит от исходных уравнений движения. Если в этих уравнениях необходимо учитывать массовые силы, то в безразмерных уравнениях движения появляются соответствующие новые критерии. Например, силе тяжести соответствует *число Фруда* $\mathrm{Fr} = u_0^2/(gl_0)$, а электромагнитной силе — *число Стюарта* $\mathrm{N} = B^2 l_0 \sigma/(u_0 \rho)$ (B — магнитная индукция, σ — электропроводность жидкости).

Напротив, в некоторых случаях в безразмерных уравнениях движения определенные выше числа подобия могут не присутствовать. Так, для стационарного течения в уравнениях движения отсутствует число гомохронности, а для идеальной жидкости (с пренебрежимо малыми силами вязкости) — число Рейнольдса.

2. Конкретный вид чисел подобия зависит от выбора масштабов. При другом наборе масштабов получим их другие комбинации и другой набор чисел подобия. Например, если дополнительно ввести независимый масштаб времени t_0 (а не использовать $t_0 = l_0/u_0$), в уравнении движения появится *число Струхала* $\mathrm{Sh} = l_0/(u_0 t_0)$.

3. Уравнения (6.7), (6.8) и их решение (6.9) обладают большой общностью. Они описывают не один конкретный процесс, а *целый класс процессов.* Для разных задач будут меняться лишь составляющие безразмерных параметров (например, в числе Re для каждой задачи будут свои значения u_0, ν, l_0).

Определение. Процессы течения жидкости называются **подобными**, если они описываются *тождественно одинаковыми* безразмерными уравнениями, связывающими определяемые числа подобия с определяющими:

$$\left.\begin{aligned} U_x &= f_1(\mathrm{Ho}, X, Y, Z), \\ U_y &= f_2(\mathrm{Ho}, X, Y, Z), \\ U_z &= f_3(\mathrm{Ho}, X, Y, Z), \\ \mathrm{Eu} &= f_4(\mathrm{Ho}, X, Y, Z). \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Из сопоставления (6.9) и (6.10) видно, что различия в этих решениях могут быть, если различны *критерии подобия.* Если критерии подобия идентичны

$$\mathrm{Re} = \mathrm{idem}, \quad L_1 = \mathrm{idem}, \quad L_2 = \mathrm{idem}, \ldots, \quad L_N = \mathrm{idem},$$

то для всех процессов система уравнений и ее решение (6.10) тождественно одинаковы.

Определения.

1. Моменты времени в подобных процессах, для которых Ho = idem, называются **сходственными моментами времени.**

2. Точки пространства подобных процессов, для которых $X = \text{idem}$, $Y = \text{idem}$, $Z = \text{idem}$, называются **сходственными точками пространства**.

В подобных процессах в сходственных точках в сходственные моменты времени определяемые числа подобия равны

$$U_x = \text{idem}, \quad U_y = \text{idem}, \quad U_z = \text{idem}, \quad \text{Eu} = \text{idem}.$$

Вывод. Если обеспечить *условия подобия*, то можно *смоделировать* интересующий нас процесс с помощью *подобного* ему *процесса*.

6.4.3. УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ

С учетом предыдущих рассуждений становится возможным сформулировать следующие **условия подобия**:

1. Безразмерные дифференциальные уравнения, описывающие процессы, должны быть тождественно одинаковы.
2. Безразмерные граничные условия должны быть одинаковы.
3. Должно обеспечиваться геометрическое подобие областей, в которых рассматривается решение уравнений.
4. Критерии подобия должны быть тождественно равны.

При выполнении этих условий в сходственных точках в сходственные моменты времени определяемые числа подобия будут одинаковыми

$$U_x = \text{idem}, \quad U_y = \text{idem}, \quad U_z = \text{idem}, \quad \text{Eu} = \text{idem}.$$

Это означает, что один процесс можно моделировать с помощью другого подобного ему процесса. Поэтому условия подобия можно назвать **правилами моделирования**.

Пусть требуется исследовать некоторый процесс I течения жидкости. Вместо него рассмотрим подобный ему процесс II, для которого известны (измерены или вычислены) поля скорости u_x^{II}, u_y^{II}, u_z^{II} и давления p_x^{II}. Учтем, что в сходственных точках, где $X^I = X^{II}$, $Y^I = Y^{II}$, $Z^I = Z^{II}$, в сходственные моменты времени $\text{Ho}^I = \text{Ho}^{II}$, определяемые числа подобия одинаковы

$$U_x^I = \frac{u_x^I}{u_0^I} = U_x^{II} = \frac{u_x^{II}}{u_0^{II}}, \quad \frac{p_0^I - p^I}{\rho^I (u_0^I)^2} = \frac{p_0^{II} - p^{II}}{\rho^{II} (u_0^{II})^2}.$$

Отсюда получим

$$u_x^I = u_x^{II} c_u,$$

$$p_0^I - p^I = (p_0^{II} - p^{II}) c_p,$$

где $c_u = \frac{u_0^{\mathrm{I}}}{u_0^{\mathrm{II}}}$, $c_p = \frac{\rho^{\mathrm{I}}}{\rho^{\mathrm{II}}} c_u^2$ — константы подобия, которые позволяют пересчитать параметры одного процесса на параметры другого, подобного ему процесса.

Вернемся к примеру, рассмотренному в п. 6.4.1. Очевидно, что и течение жидкого натрия в контуре АЭС, и течение крови в капилляре можно смоделировать на экспериментальной установке, реализующей течение некоторой модельной жидкости в трубе (например, воды). Однако при этом необходимо выполнить условия подобия (правила моделирования).

Важно также отметить, что, как следует из условия подобия 1, один физический процесс можно смоделировать с помощью другого физического процесса, если они описываются одинаковыми уравнениями (например, потенциальное течение жидкости и электрический ток). Это открывает широкие возможности для моделирования.

6.5. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

При движении идеальной жидкости относительно произвольного твердого тела гидравлическое сопротивление не возникает (парадокс Даламбера). Напротив, *всегда возникает* гидравлическое сопротивление при течении *вязкой жидкости*.

В задачах *внешнего обтекания*, говоря о сопротивлении, имеют в виду силу лобового сопротивления. Например, при поперечном обтекании потоком со скоростью u_∞ цилиндра длиной l и диаметром d эта сила равна

$$R_x = c_x \frac{\rho u_\infty^2}{2} ld,$$

где $c_x = \tau_c \Big/ \left(\frac{\rho u_\infty^2}{2} \right)$ — коэффициент лобового сопротивления; τ_c — касательное напряжение на стенке.

Силы, действующие на тело при обтекании его внешним потоком, подробно рассмотрены ниже в п. 7.3.4.

Для течения вязкой жидкости в *каналах* под гидравлическим сопротивлением подразумевают перепад давления вдоль канала.

Рассмотрим течение жидкости в канале длиной l, площадью поперечного сечения S и периметром Г в системе координат, ось x которой на-

правлена вдоль потока. Проинтегрируем по сечению канала уравнение Навье—Стокса (6.2) для u_x и после некоторых преобразований получим:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{\Gamma}{S}\bar{\tau}_c - \frac{1}{S}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_S \rho u_x \, dS + \frac{\partial}{\partial x}\int_S \rho u_x^2 \, dS\right] + \rho g \cos\psi, \qquad (6.11)$$

где $\bar{p} = \frac{1}{S}\int_S p \, dS$ — среднее по сечению давление жидкости; $\bar{\tau}_c =$

$= \frac{1}{\Gamma}\int_\Gamma \tau_c \, d\Gamma = \frac{1}{\Gamma}\int_\Gamma \left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial n}\right)_{n=0} d\Gamma$ — среднее по периметру значение касательного напряжения; ψ — угол между осью и вектором ускорения силы тяжести ($g_x = g\cos\psi$).

Из (6.11) видно, что изменение давления по длине канала (т.е. гидравлическое сопротивление единицы длины канала) вызывается:

затратой энергии на трение между жидкостью и стенкой;

изменением скорости потока во времени;

изменением кинетической энергии потока по длине канала (вследствие перестройки профиля скорости);

действием силы тяжести.

Обычно при расчетах потерь гидродинамического давления потока не учитывают действие силы тяжести (исключая особые случаи, когда необходимо знать гидростатическое давление в жидкости).

В случае стационарного течения (6.11) принимает вид

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{\Gamma}{S}\bar{\tau}_c - \frac{1}{S}\frac{d}{dx}\int_S \rho u_x^2 \, dS. \qquad (6.12)$$

В данном случае гидравлическое сопротивление связано с потерями на трение и на перестройку профиля скорости.

Если продольная составляющая скорости u_x не изменяется по длине, что имеет место при движении несжимаемой жидкости с постоянными свойствами в прямом канале постоянного поперечного сечения вдали от входа в канал, то выражение (6.12) максимально упрощается:

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{\Gamma}{S}\bar{\tau}_c. \qquad (6.12а)$$

Таким образом, в данном случае потери на трение остаются единственной причиной гидравлического сопротивления.

Проинтегрировав одно из выражений (6.12) или (6.12а) в пределах от $x = 0$ до $x = l$, можно найти падение давления на участке трубы длиной l.

На практике для расчетов падения давления Δp в случае стационарных течений используют формулу Дарси—Вайсбаха:

$$\Delta p = \overline{\xi}\rho\frac{U^2}{2}\frac{l}{d_{\text{экв}}}, \qquad (6.13)$$

где $U = \frac{1}{S}\int_S u_x \, \mathrm{d}S$ — средняя по сечению скорость; $d_{\text{экв}} = 4S/\Gamma$ — «эквивалентный диаметр» канала; $\overline{\xi}$ — коэффициент гидравлического сопротивления (средний по длине l).

Величина $\overline{\xi}$, которая определяется как $\overline{\xi} = \frac{\Delta p}{\rho U^2/2}\frac{d_{\text{экв}}}{l}$, представляет собой безразмерное падение среднего по сечению давления на единицу длины канала. Она может быть вычислена из проинтегрированного по длине канала уравнения (6.11). Касательное напряжение на стенке, входящее в это уравнение, в общем случае зависит от режима течения (числа Рейнольдса), геометрии канала, состояния его поверхности и других факторов (см. пп. 7.2.4, 8.5.4).

Глава седьмая

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ

7.1. ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА

Рассмотрим плоское стационарное течение жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами, одна из которых движется по отношению к другой со скоростью u_0 (рис. 7.1). Поскольку пластины бесконечны вдоль x, поле скорости в продольном направлении не должно изменяться, т.е. $\partial u_x / \partial x = 0$.

Тогда из уравнения неразрывности (6.3)

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 .$$

Решая это уравнение с граничным условием прилипания на стенке $y = 0$: $u_y = 0$, получаем, что везде в потоке $u_y = 0$. При этом из уравнения движения (6.4) для u_y следует, что давление не изменяется в поперечном направлении, т.е. не зависит от координаты y.

Уравнение движения (6.4) примет следующий вид:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \mu \frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}y^2} = 0 .$$

Из приведенного выше уравнения следует, что градиент давления является постоянной величиной $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = c_1$. Решение этого уравнения записывается как

$$u_x = c_1 \frac{y^2}{\mu} + c_2 y + c_3 .$$

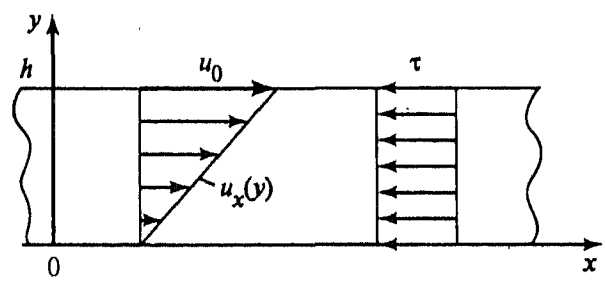


Рис. 7.1. Ламинарное стационарное течение Куэтта

Константы c_2 и c_3 найдем из граничных условий прилипания

$$y = 0: \quad u_x = 0,$$

$$y = h: \quad u_x = u_0.$$

В результате получим

$$u_x(y) = -c_1 \frac{h^2}{\mu}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] + u_0 \frac{y}{h}.$$

В случае *безградиентного* или *простого течения Куэтта*, когда $c_1 = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$, профиль скорости является линейной функцией y и не зависит от вязкости μ

$$\frac{u_x(y)}{u_0} = \frac{y}{h}.$$

Касательное напряжение τ_{yx}, действующее вдоль оси x на площадку с нормалью y, найдем из его выражения согласно обобщенному закону Ньютона (6.1)

$$\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \mu \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} = \mu \frac{u_0}{h}.$$

Как видно, касательное напряжение является постоянной величиной, пропорциональной вязкости. Касательные напряжения называют еще *сдвиговыми напряжениями*, а простое течение Куэтта — *течением чистого сдвига.*

Аналогичным образом можно рассмотреть *цилиндрическое течение Куэтта* — течение в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами, один из которых вращается относительно другого с постоянной угловой скоростью. Для этого надо решить уравнение движения, записанное в цилиндрической системе координат. В предельном случае, когда радиусы цилиндров намного превышают ширину зазора, получим приведенные выше выражения для скорости и касательного напряжения. Цилиндрическое течение Куэтта рассматривается в гидродинамической теории смазки.

7.2. ЛАМИНАРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

7.2.1. ПОНЯТИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассмотрим прямую круглую трубу (рис. 7.2), на входе в которую задан равномерный профиль скорости

$$x = 0: \quad \text{при } r < r_0 \qquad u_x = U,$$

$$\text{при } r = r_0 \qquad u_x = 0,$$

где $U = \mathrm{const}$ — средняя по сечению скорость.

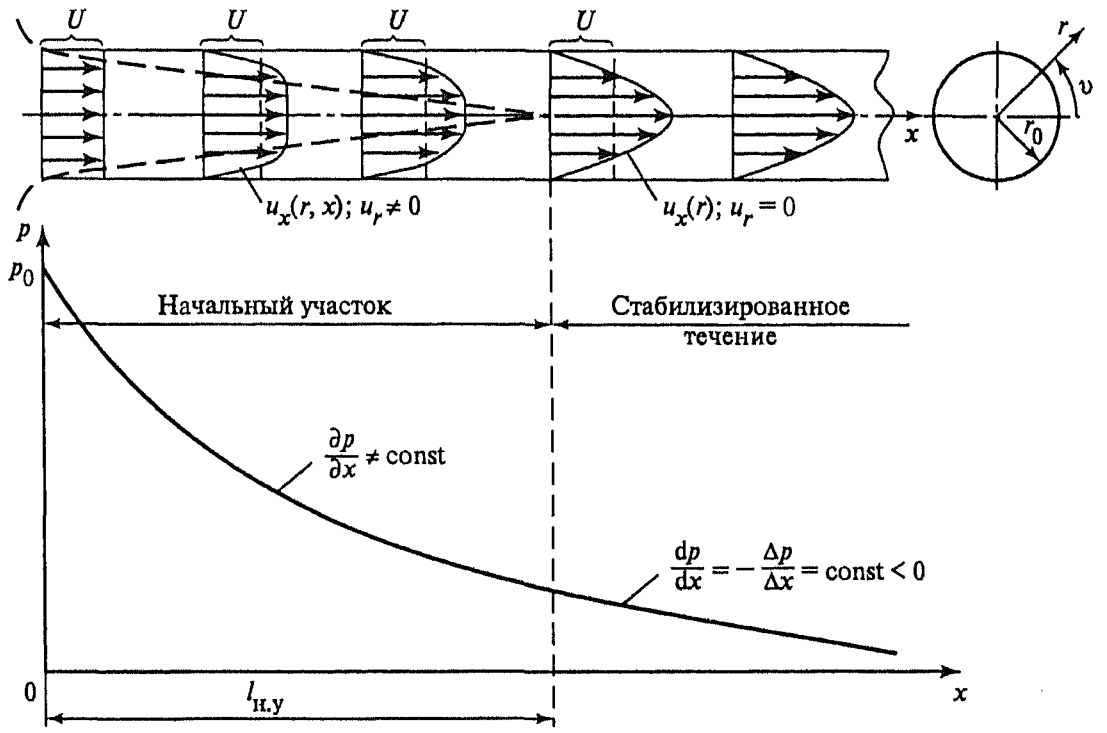


Рис. 7.2. Картина гидродинамической стабилизации ламинарного течения в трубе

Очевидно, течение осесимметричное, поэтому u_φ и все производные по φ равны нулю.

По мере продвижения по x течение не может оставаться стержневым. Из-за действия сил вязкости скорость у стенки будет уменьшаться. Образуется *пограничный слой* — слой подторможенной жидкости у стенки, в котором проявляется вязкость. Толщина пограничного слоя будет увеличиваться до тех пор, пока слои не сомкнутся в центре трубы. По мере нарастания пограничного слоя часть жидкости будет вытесняться из него в центральную часть потока — так называемое *ядро потока*. Следовательно, в потоке радиальная компонента скорости $u_r \neq 0$. Поскольку объемный расход жидкости $V = \pi r_0^2 U$ сохраняется постоянным в любом сечении трубы, в ядре потока u_x будет увеличиваться.

Определения.

1. Процесс формирования по длине трубы профиля скорости, форма которого не зависит от условий на входе, называется **процессом гидродинамической стабилизации.**

2. Входной участок, на котором формируется профиль скорости, называется **участком гидродинамической стабилизации** (иначе — **входным**, или **начальным**, участком).

На расстоянии от входа, большем длины начального участка $x > l_{н.у}$, формирование профиля скорости заканчивается. Поскольку u_x перестает зависеть от x, из уравнения неразрывности (6.6) (с учетом, что $u_\varphi = 0$) следует, что $u_r = 0$.

Система уравнений движения (6.5) в случае стационарного течения жидкости в круглой трубе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r\frac{\partial u_x}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u_x, \\ u_x\frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2}\right). \end{aligned} \qquad (7.1)$$

На начальном участке левые части этих уравнений, представляющие собой силы инерции, отличны от нуля. Имеет место равновесие сил инерции, вязкости и давления. Иными словами, перепад давления Δp расходуется на преодоление сил трения на стенках трубы $\Delta p_{тр}$ и перестройку профиля скорости $\Delta p_{ин}$:

$$\Delta p = \Delta p_{тр} + \Delta p_{ин}.$$

Заметим, что понятия процесса гидродинамической стабилизации и начального участка, которые мы рассмотрели на примере течения в круглой трубе, а также особенности гидродинамики на начальном участке и в стабилизированной области справедливы и для течения в каналах с любой формой поперечного сечения (если эта форма остается неизменной по длине канала).

В области стабилизированного течения перепад давления расходуется только на преодоление сил трения, следовательно, можно предположить, что в этой области градиент давления будет меньше, чем на начальном участке, где перепад давления затрачивается и на перестройку профиля скорости.

Если для течения на начальном участке важно, какой профиль скорости был на входе, то в стабилизированной области течение уже не зависит от предыстории потока.

С математической точки зрения задача расчета течения в стабилизированной области является более простой. Например, для круглой трубы, как будет видно в дальнейшем, вместо системы уравнений в частных производных имеем одно обыкновенное дифференциальное уравнение.

В заключение перечислим признаки течения в гидродинамически стабилизированной области и на начальном участке (см. рис. 7.2).

В стабилизированной области:

профиль скорости не меняется по длине $u_x = u_x(r)$; $u_r = 0$;

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0;$$

давление линейно падает по длине трубы

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} = \text{const} < 0; \quad \Delta p = \Delta p_{\text{тр}}.$$

На начальном участке:

профиль скорости меняется по длине $\frac{\partial u_x}{\partial x} \neq 0$, $u_r \neq 0$;

давление является функцией x, r — $p(x, r)$ — и падает нелинейно по длине трубы; $\Delta p = \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{ин}}$.

7.2.2. СТАБИЛИЗИРОВАННОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Уравнение движения для продольной составляющей скорости u_x (для этого случая $u_r = 0$) имеет следующий вид [8]:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_x}{dr}\right) = 0.$$

Это уравнение надо решить с граничными условиями прилипания на стенке

$$r = r_0: \qquad u_x = 0$$

и симметрии в центре трубы

$$r = 0: \qquad du_x/dr = 0.$$

Учитывая, что градиент давления является постоянной величиной, проинтегрируем приведенное выше уравнение 2 раза, а две константы интегрирования найдем из граничных условий. В результате получим

$$u_x = -\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}(1 - R^2), \tag{7.2}$$

где $R = r/r_0$ — безразмерный радиус трубы; знак «–» очевиден, поскольку $dp/dx < 0$.

Выражение (7.2) носит название **параболы Пуазейля**[1].

---

[1] Пуазейль Жан-Луи Мари (1799—1869 гг.) — французский врач и физик-экспериментатор. Впервые применил ртутный манометр для измерения кровяного давления у животных. Моделировал на воде течение крови в капиллярных сосудах.

Градиент давления в (7.2) можно связать со *средней по сечению скоростью* жидкости U или *объемным расходом* V [м^3/с].

По определению

$$U = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u_x(r) 2\pi r \, dr = 2\int_0^1 u(R) R \, dR, \tag{7.3}$$

$$V = \pi r_0^2 U. \tag{7.4}$$

Подставляя в (7.3) выражение (7.2), получаем

$$U = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \tag{7.5}$$

Тогда параболу Пуазейля можно представить в виде

$$\frac{u_x(R)}{U} = 2(1 - R^2). \tag{7.6}$$

График этой функции показан на рис. 7.3. Заметим, что на оси трубы при $R = 0$ скорость максимальна; она в 2 раза превышает среднюю скорость: $u_{x\,\max} = 2U$.

Рассмотрим распределение касательных напряжений по сечению трубы. Согласно обобщенному закону Ньютона, для стабилизированного течения в круглой трубе

$$\tau_{x\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0,$$

$$\tau_{rx} = \tau = \mu \frac{du_x}{dr}.$$

Продифференцировав параболу Пуазейля, получим

$$\tau = -\frac{4\mu UR}{r_0},$$

т.е. касательное напряжение линейно изменяется по сечению трубы. В центре трубы оно равно нулю, а на стенке достигает максимального (по абсолютной величине) значения τ_c (рис. 7.4).

На стенке при $R = 1$

$$\tau_c = -\frac{4\mu U}{r_0}.$$

Отсюда

$$\frac{\tau}{\tau_c} = R.$$

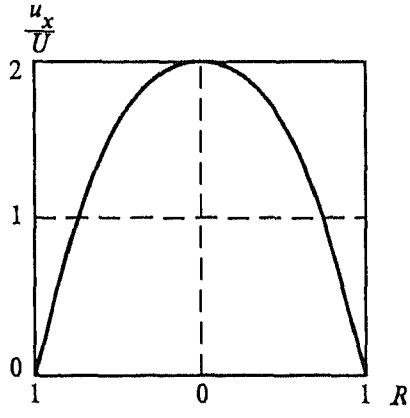


Рис. 7.3. Парабола Пуазейля

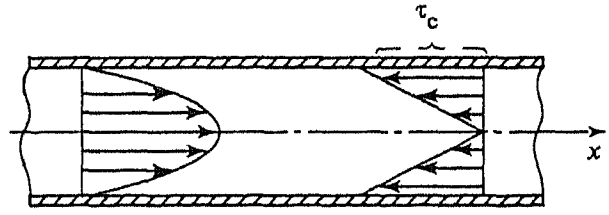


Рис. 7.4. Профиль скорости и касательное напряжение при стабилизированном ламинарном течении в трубе

В § 6.5 было показано, что в гидравлическое сопротивление в общем случае вносят вклад составляющие, обусловленные трением на стенке, изменением скорости жидкости в продольном направлении и во времени, действием массовой силы. Для нахождения составляющей, связанной с трением на стенке, удобно использовать *коэффициент сопротивления трения*, который определяется как

$$\xi^{\tau} = -\frac{8\tau_c}{\rho U^2}.$$

Гидравлическое сопротивление обычно характеризуется *локальным коэффициентом гидравлического сопротивления*, который определяется как

$$\xi = -\frac{dp}{dx} 2d/(\rho U^2). \qquad (7.7)$$

Для рассматриваемого нами случая течения в гидродинамически стабилизированной области коэффициент $\xi = \xi^{\tau}$, а градиент давления в (7.7) является постоянной величиной: $-dp/dx = -\Delta p/l$. Тогда падение давления Δp на участке трубы длиной l вдали от входа можно представить в виде формулы Дарси—Вайсбаха

$$\Delta p = \xi_{\infty} \frac{\rho U^2}{2} \frac{l}{d}, \qquad (7.8)$$

где индекс ∞ означает принадлежность к стабилизированной области.

Для круглой трубы, используя связь градиента давления со средней скоростью (7.5), согласно (7.7) получаем

$$\xi_{\infty} = \frac{64\mu}{\rho U d} = \frac{64}{\mathrm{Re}}. \qquad (7.9)$$

Эта зависимость называется формулой Пуазейля.

Очевидно, что $\xi_\infty = \xi^\tau$, поскольку в перепад давления входят только потери на трение.

Выводы. Для *гидродинамически стабилизированного течения*:

1) коэффициенты гидравлического сопротивления и сопротивления трения *совпадают*;

2) коэффициент сопротивления *зависит только* от числа Рейнольдса (*обратно пропорционален* Re).

Используя связь объемного расхода и средней скорости (7.4), а также выражение (7.9), представим (7.8) в виде

$$\Delta p = \frac{V 8 \mu l}{\pi r_0^4}.$$

Как видно, перепад давления, необходимый для обеспечения заданного объемного расхода жидкости V через участок длиной l гидродинамически стабилизированного течения, прямо пропорционален V, l, вязкости жидкости, и обратно пропорционален *четвертой степени* радиуса трубы. Расход жидкости через участок трубы с заданным перепадом давления сильно зависит от радиуса трубы: $V \sim r_0^4$.

7.2.3. ТЕЧЕНИЕ НА НАЧАЛЬНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ УЧАСТКЕ

В этом случае необходимо решить систему уравнений (7.1) совместно с уравнением неразрывности и граничными условиями прилипания на стенке и симметрии в центре трубы. Кроме того, необходимо задать скорость на входе и, в общем случае, на выходе из трубы. Ряд авторов (Л. Шиллер, Ж. Буссинеск) получили приближенные аналитические решения этих уравнений, введя некоторые упрощающие допущения. Наиболее строго задача решена С.М. Таргом [9], хотя и ему пришлось использовать упрощения.

Перечислим допущения Тарга:

1) $$\frac{\partial p}{\partial r} = 0;$$

2) $$u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} << u_x \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

3) $$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} << \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u_x}{\partial r}\right);$$

4) $$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = U \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Первое допущение (которое предполагает малость u_r в уравнении для этой составляющей скорости, что является грубым упрощением, по крайней мере в непосредственной близости от входа в трубу) означает, что давление — функция только переменной x.

На основании второго допущения (тоже достаточно грубого) можно не рассматривать уравнение движения для u_r.

Третье допущение позволяет вместо уравнения эллиптического типа для u_x решать уравнение параболического типа, что является более простой математической задачей. При этом необходимо задать профиль скорости $u_x(r)$ только на входе в трубу. Тарг полагал этот профиль равномерным.

Четвертое допущение означает линеаризацию уравнения движения для u_x.

В результате Таргом получено решение этого уравнения в виде зависимости безразмерной аксиальной скорости $U_x = \frac{u_x}{U}(R, \chi)$ от безразмерных радиуса $R = r/r_0$ и расстояния от входа $\chi = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{x}{d}$:

$$U_x = 2(1 - R^2) - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} \left[1 - \frac{J_0(\beta_k R)}{J_0(\beta_k)} \right] e^{-4\beta_k^2 \chi}, \qquad (7.10)$$

а также зависимости безразмерного перепада давления $\mathrm{Eu} = \frac{p_0 - p}{\rho U^2}(\chi)$ от χ:

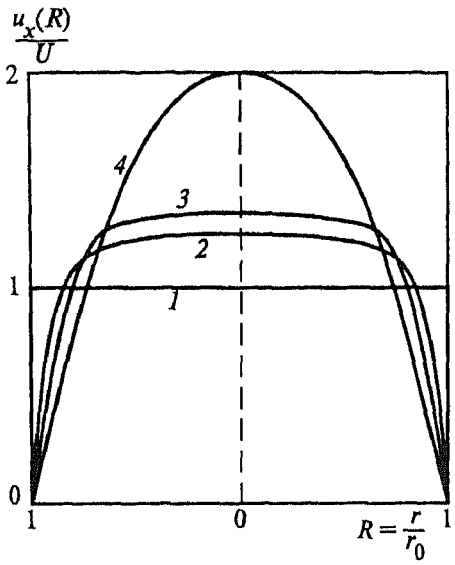
$$\mathrm{Eu} = 32\chi + \frac{1}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} e^{-4\beta_k^2 \chi}, \qquad (7.11)$$

где J_0 — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка; β_k — корни функции Бесселя 1-го рода второго порядка.

Для функций Бесселя и их корней имеются таблицы.

Из (7.10) следует, что при $\chi \to \infty$ профиль скорости стремится к параболе Пуазейля (7.6).

Графики $U_x(R/\chi)$ представлены на рис. 7.5 и 7.6. Из этих рисунков видно, что при увеличении χ профиль скорости вытягивается, приближаясь к параболе Пуазейля. Вблизи оси скорость монотонно возрастает,



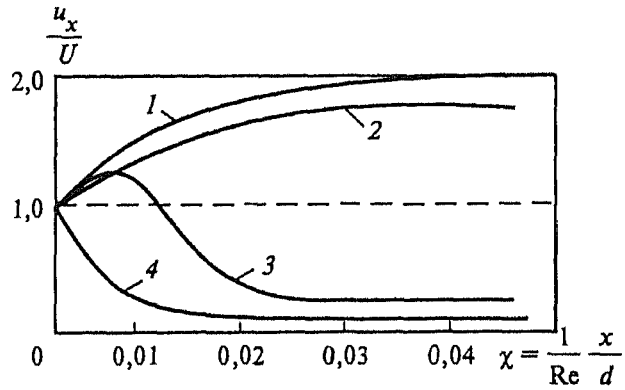


Рис. 7.6. Развитие поля скорости по длине трубы при фиксированных значениях радиальной координаты (решение Тарга) R:
1 — $R = 0{,}0$; *2* — $R = 0{,}4$; *3* — $R = 0{,}8$; *4* — $R = 0{,}95$

↑

Рис. 7.5. Развитие профиля скорости по длине начального участка трубы при ламинарном течении (решение Тарга) $\chi = (1/\mathrm{Re})(x/d)$:
1 — $\chi = 0{,}0$; *2* — $\chi = 0{,}005$; *3* — $\chi = 0{,}01$; *4* — $\chi = \infty$

а вблизи стенки — уменьшается, причем стабилизация здесь наступает раньше, чем на оси.

Интересно, что имеется область вблизи $R = 0{,}8$, где скорость меняется немонотонно — сначала растет, а потом несколько падает.

Результаты решения Тарга хорошо согласуются с известными экспериментальными данными Никурадзе. Однако при больших x/d более точное решение получено Буссинеском.

Длина начального участка, на которой заканчивается стабилизация профиля скорости, очевидно, является условной величиной. Прандтль[1] предложил принять за $l_{\text{н.у}}$ такое расстояние от входа, при котором значение скорости на оси трубы отличается от ее стабилизированного значения лишь на 1 %. Из (7.10) следует, что при $2U_x(R = 0) = 0{,}99$

$$\chi_{\text{н.у}} = 0{,}04 \quad \text{или} \quad \frac{l_{\text{н.у}}}{d} = 0{,}04\mathrm{Re}\,.$$

Заметим, что в литературе можно встретить вместо коэффициента 0,04 в выражении для $l_{\text{н.у}}$ коэффициент 0,05 или 0,06. Это нетрудно объяснить асимптотическим характером процесса стабилизации и несколько другими критериями для определения $l_{\text{н.у}}$.

[1] Прандтль Людвиг (1875—1953 гг.) — выдающийся немецкий ученый в области МЖГ, конвективного теплообмена, теории турбулентности.

7.2.4. КОЭФФИЦИЕНТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Чтобы получить выражение для коэффициента гидравлического сопротивления, продифференцируем уравнение (7.11) по χ

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu U}{r_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\beta_k^2\chi}\right).$$

Подставим это выражение в определение коэффициента гидравлического сопротивления (7.7). В результате получим

$$\xi = \frac{64}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-4\beta_k^2\chi}\right). \qquad (7.12)$$

Как видно, на начальном участке ξ зависит не только от числа Re (как для стабилизированного течения), но и от расстояния от входа χ. На рис. 7.7 зависимость коэффициента сопротивления от χ представлена в удобной *универсальной форме* $\xi\mathrm{Re}$.

При $\chi \to \infty$ ξ стремится к зависимости (7.9) для стабилизированного течения.

Выше уже отмечалось, что часто возникает необходимость вычислить перепад давления на длине l, необходимый для обеспечения заданной средней скорости течения U (или объемного расхода V). Проинтегрировав выражение (7.7) по x от $x = 0$ до $x = l$, получим

$$\Delta p = \bar{\xi}\frac{\rho U^2}{2}\frac{l}{d}, \qquad (7.13)$$

где

$$\bar{\xi} = \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)\,dx \qquad (7.14)$$

— средний на длине l коэффициент гидравлического сопротивления.

Выражение (7.13) — та же формула Дарси—Вайсбаха (7.8), но относящаяся ко всей длине трубы l, включая начальный участок. Нетрудно убедиться в том, что (7.13) по существу является **определением среднего коэффициента гидравлического сопротивления**. В отличие от среднего, коэффициент сопротивления, определяемый по (7.7), называют **местным**, или **локальным**.

Средний коэффициент гидравлического сопротивления так же, как и местный, зависит от числа Рейнольдса и, на некотором входном участке

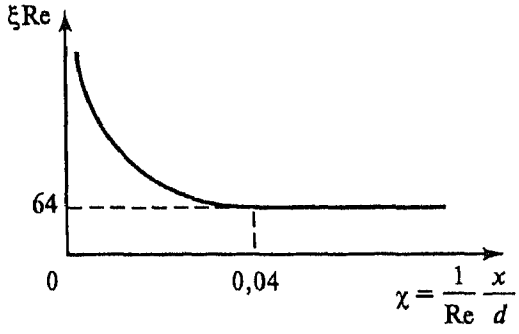


Рис. 7.7. Местный коэффициент сопротивления при ламинарном течении в трубе (универсальное представление)

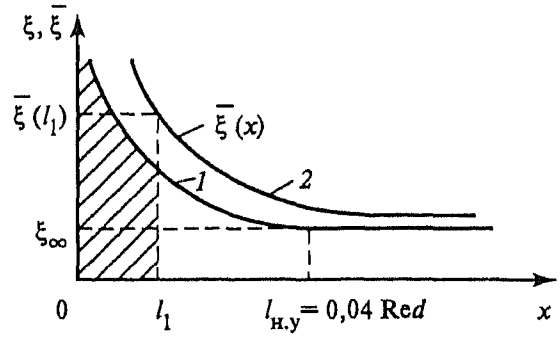


Рис. 7.8. Зависимость местного (*1*) и среднего (*2*) коэффициентов сопротивления при ламинарном течении в трубе от продольной координаты

трубы — от расстояния от входа. На рис. 7.8 приведены зависимости среднего и местного коэффициентов сопротивления для ламинарного течения в круглой трубе. При $\chi \to 0$ значения коэффициентов $\bar{\xi}$, $\xi \to \infty$.

Поскольку $\xi(\chi)$ — убывающая функция, $\bar{\xi} > \xi$. При больших χ величина $\bar{\xi}$ стремится к $\xi_\infty = 64/\mathrm{Re}$.

Ранее отмечалось, что особенности процесса гидродинамической стабилизации качественно одинаковы для прямых каналов с разной формой поперечного сечения, если она сохраняется постоянной по длине канала. Это же относится к коэффициенту гидравлического сопротивления, в определение которого (7.7) вместо d включается эквивалентный диаметр $d_{экв} = 4S/\Gamma$ (S — площадь поперечного сечения; Γ — периметр канала).

При этом для прямых каналов некруглой формы сечения справедлива зависимость, качественно аналогичная выражению для круглых труб (7.9):

$$\xi_\infty = A/\mathrm{Re},$$

где A — константа, зависящая от формы канала (например, для плоского канала $A = 96$).

7.3. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

7.3.1. ПОНЯТИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим обтекание тела стационарным плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами (рис. 7.9). Обычно можно пренебречь кривизной поверхности тела, поэтому запишем для

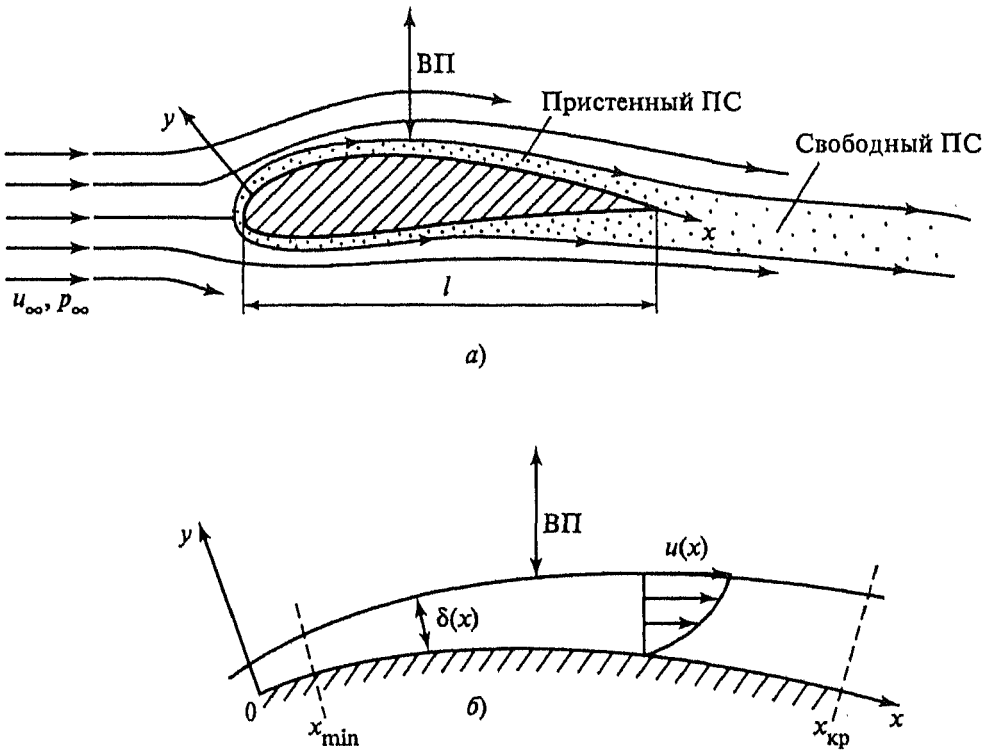


Рис. 7.9. Пограничный слой и внешний поток (*а*); к выводу уравнений пограничного слоя (*б*)

данного случая систему безразмерных уравнений Навье—Стокса и неразрывности (6.7), (6.8) в прямоугольной системе координат:

$$U_x\frac{\partial U_x}{\partial X}+U_y\frac{\partial U_x}{\partial Y}=\frac{\partial \mathrm{Eu}}{\partial X}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial Y^2}\right), \tag{7.15}$$

$$U_x\frac{\partial U_y}{\partial X}+U_y\frac{\partial U_y}{\partial Y}=\frac{\partial \mathrm{Eu}}{\partial Y}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial Y^2}\right), \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial X}+\frac{\partial U_x}{\partial Y}=0. \tag{7.17}$$

Здесь в качестве масштаба длины выбран характерный размер обтекаемого тела l, а масштаба скорости и начала отсчета давления — параметры набегающего потока вдали от обтекаемого тела (на бесконечности)

$$U_x=\frac{u_x}{u_\infty},\quad U_y=\frac{u_y}{u_\infty},\quad \mathrm{Eu}=\frac{p-p_\infty}{\rho u_\infty^2},\quad X=\frac{x}{l},\quad Y=\frac{y}{l},\quad \mathrm{Re}=\frac{u_\infty l}{\nu}.$$

Уравнения (7.15)—(7.17) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, решение которой является весьма сложной задачей. Какие пути можно предложить для ее упрощения?

1. Пренебрежем левой частью уравнений (7.15), (7.16), что можно сделать при малых числах Рейнольдса (Re << 1), когда силы инерции малы по сравнению с силами вязкости. Тогда уравнения станут линейными, что упростит их решение. Однако случай малых Re — так называемые *ползущие течения*, осуществляющиеся при малых скоростях движения и для жидкостей с большой вязкостью, — имеет ограниченную область практического применения (гидродинамическая теория смазки).

2. Пусть Re >> 1, т.е. силы инерции велики по сравнению с силами вязкости. Но если в этом случае пренебречь силами вязкости в (7.15), (7.16), получим уравнения Эйлера для идеальной жидкости, которые не позволяют рассчитать касательное напряжение на поверхности обтекаемого тела и силу сопротивления, действующую на тело, обтекаемое потоком вязкой (реальной) жидкости.

По-видимому, при Re >> 1 *не везде в потоке* можно пренебречь вязкими членами в уравнении движения. *Вблизи стенки* есть область течения, где вязкостью пренебречь нельзя.

Следуя подходу, предложенному Прандтлем, всю область течения разобьем на две области: пограничный слой (ПС) и внешний поток (ВП) (рис. 7.9, *а*).

Определения.

Пограничным слоем называется область течения, где силы вязкости соизмеримы с силами инерции. (Заметим, что различают *пристенный ПС* — слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердой поверхности, и *свободный ПС* — аэродинамический след за обтекаемым телом, в котором силы вязкости существенны.)

Внешний поток — это область течения, где можно пренебречь силами вязкости и считать жидкость идеальной.

Уравнения, описывающие движение жидкости во внешнем потоке, — это более простые, чем уравнения Навье—Стокса, уравнения Эйлера.

7.3.2. УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнения движения в пограничном слое тоже можно упростить. Теория пограничного слоя разработана Прандтлем (1904 г.). Предложенные им допущения позволяют получить из уравнений Навье—Стокса

более простые уравнения. Рассмотрим основные положения теории Прандтля [10] (рис. 7.9, *б*).

Полагаем, что толщина пограничного слоя мала по сравнению с характерным размером l: $\delta / l = \varepsilon << 1$. Очевидно, это предположение выполняется при $\mathrm{Re} >> 1$ и на достаточно большом расстоянии от передней кромки, при $x < x_{\min}$. (Область $x < x_{\min}$ не рассматриваем.) Положим также, что порядок производных в (7.15)—(7.17) равен отношению соответствующих масштабов. Оценим порядок членов в уравнениях (7.15)—(7.17):

$$\Pi(X) = 1, \quad \Pi(Y) = \varepsilon, \quad \Pi(U_x) = 1.$$

Из уравнения неразрывности (7.17)

$$U_y = -\int \frac{\partial U_x}{\partial X}\, \mathrm{d}Y,$$

тогда

$$\Pi(U_y) = \Pi\left(\frac{\partial U_x}{\partial X}\right)\Pi(Y) = \varepsilon.$$

Члены, соответствующие силам инерции в уравнении (7.15), одного порядка

$$\Pi\left(U_x \frac{\partial U_x}{\partial X}\right) = \Pi\left(U_y \frac{\partial U_x}{\partial Y}\right) = 1.$$

Члены, соответствующие силам вязкости, имеют порядки:

$$\Pi\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial X^2}\right) = 1, \quad \Pi\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial Y^2}\right) = 1/\varepsilon^2 >> 1.$$

Следовательно, можно пренебречь переносом количества движения за счет вязкости в продольном направлении по сравнению с этим переносом в поперечном направлении.

Из определения пограничного слоя, в котором силы инерции и силы вязкости одного порядка, получим

$$1/(\mathrm{Re}\varepsilon^2) = l^2/(\mathrm{Re}\delta^2) \sim 1,$$

откуда

$$\frac{\delta}{l} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}.$$

Если рассматривать течение достаточно далеко от передней кромки, то в качестве характерного размера можно принять расстояние от пе-

редней кромки $l \approx x$. Отсюда следует *закон нарастания толщины ламинарного пограничного слоя*

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \tag{7.18}$$

где

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}.$$

Закономерность (7.18) имеет фундаментальное значение в теории ПС. Будем называть ее **первым основным свойством пограничного слоя**.

Из аналогичной оценки порядка членов в уравнении (7.16) следует, что порядок всех членов равен $\varepsilon << 1$. Поэтому можно, во-первых, исключить из рассмотрения уравнение (7.16) для U_y, а, во-вторых, поскольку $\Pi\left(\frac{\partial \mathrm{Eu}}{\partial Y}\right) = \varepsilon << 1$, пренебречь изменением давления в поперечном направлении и полагать $\mathrm{Eu} = \mathrm{Eu}(X)$.

Итак, давление поперек пограничного слоя не меняется. Это важнейшее свойство любого ПС (пристенного и свободного) мы будем называть **вторым основным свойством пограничного слоя**.

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} U_x\frac{\partial U_x}{\partial X} + U_y\frac{\partial U_x}{\partial Y} &= \frac{\mathrm{dEu}}{\mathrm{d}X} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U_x}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\partial U_y}{\partial Y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.19}$$

Приведем эту систему уравнений в размерном виде

$$\left.\begin{aligned} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.19a}$$

Эти уравнения называются **уравнениями пограничного слоя**.

Подчеркнем, что эти уравнения могут применяться не только для задач внешнего обтекания, но и для внутренних задач — в этом случае говорят, что используется приближение пограничного слоя. Нетрудно убедиться, что решение Тарга задачи о течении на начальном участке трубы основывалось на приближении пограничного слоя (1-е и 3-е допущения в п. 7.2.3).

Единственным допущением при выводе уравнений пограничного слоя из уравнений Навье—Стокса является *допущение о малости относительной толщины ПС, которое справедливо при достаточно больших значениях числа* Re. Признаком возможности применения приближения пограничного слоя при рассмотрении конкретной задачи является малость поперечной составляющей скорости по сравнению с продольной $u_y << u_x$.

Отличия уравнений пограничного слоя от уравнений Навье—Стокса:

1) *отсутствие аксиального изменения количества движения*

$$\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2};$$

2) *отсутствие изменения давления в поперечном направлении*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

В результате с математической точки зрения задача упрощается: вместо двух уравнений движения эллиптического типа для u_x, u_y имеем одно уравнение параболического типа для u_x (u_y находится интегрированием уравнения неразрывности).

Система уравнений (7.19) или (7.19а) справедлива *только в пределах ПС*. Система является *незамкнутой*, поскольку в нее входят два уравнения и три неизвестных: u_x, u_y, p. Кроме того, пока неясно, как задать граничное условие на внешней границе ПС. Разумеется, можно формально записать это граничное условие:

$$y = \delta: \quad u_x(\delta) = u(x),$$

где $u(x)$ — скорость на внешней границе ПС. Однако эта величина пока неизвестна. Кроме того, остается неопределенной сама толщина пограничного слоя δ, хотя известен ее порядок: $\delta(x) \sim x / \sqrt{\mathrm{Re}_x}$.

Для преодоления этих трудностей Прандтль предложил с учетом малой толщины пограничного слоя:

считать, что внешняя граница ПС обтекается жидкостью так же, как идеальная жидкость обтекала бы саму поверхность данного тела.

Следовательно, за распределение скорости вдоль внешней границы ПС $u(x)$ можно принять распределение скорости вдоль поверхности тела при обтекании его идеальной жидкостью.

Дифференцируя интеграл Бернулли, записанный для линии тока на внешней границе ПС

$$p(x) + \frac{\rho u^2(x)}{2} = \mathrm{const},$$

получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp(x)}{dx} = -u(x)\frac{du(x)}{dx}.$$

Таким образом, получено уравнение для градиента давления, делающее систему (7.19) или (7.19а) замкнутой. При этом предполагается, что величина $u(x)$ задана или может быть вычислена как скорость обтекания данного тела идеальной жидкостью («скорость проскальзывания»).

Система уравнений (7.19) или (7.19а) решается со следующими граничными условиями, которые мы запишем в размерном виде:

условие прилипания на поверхности тела:

$$y = 0: \quad u_x = 0, \quad u_y = 0;$$

условие на внешней границе пограничного слоя:

$$y = \infty: \quad u_x = u(x).$$

Замечание. Мы помним, что уравнения пограничного слоя справедливы *только в пределах ПС*. Записанное выше условие на внешней границе ПС при $y = \infty$, несмотря на физически конечную толщину пограничного слоя δ, означает с математической точки зрения *асимптотическое приближение* u_x к $u(x)$ — скорости на внешней границе ПС.

Из вышесказанного следует, что задача внешнего обтекания в приближении пограничного слоя решается в два этапа.

На первом этапе рассматривается обтекание тела идеальной жидкостью и определяются: скорость проскальзывания $u(x)$ и давление на поверхности тела $p(x)$ с помощью уравнения Бернулли.

На втором этапе переходят к интегрированию уравнения (7.19а), используя результаты первого этапа: dp/dx — в уравнении движения и $u(x)$ — в записи граничного условия на внешней границе ПС.

7.3.3. ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ (ЗАДАЧА БЛАЗИУСА)

Поле скорости при продольном обтекании пластины

Рассматривается плоское стационарное течение жидкости с постоянными свойствами. Пластина распространяется от $x = 0$ до $x = \infty$ (рис. 7.10).

Решаем задачу в два этапа.

Первый этап заключается в нахождении $u(x)$ из решения задачи обтекания тела *идеальной жидкостью*. В данном случае, при продольном обтекании тонкой пластины идеальной жидкостью, мы имеем ситуацию, когда пластина не влияет на поле скорости потока, т.е. жидкость «*не замечает*» пластину.

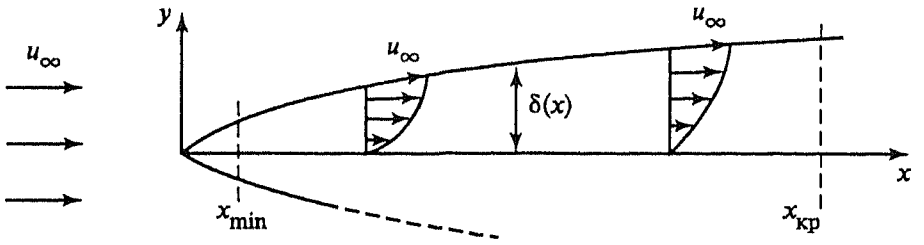


Рис. 7.10. Продольное обтекание пластины (задача Блазиуса). Схема течения

Тогда скорость на внешней границе ПС

$$u(x) = u_\infty = \text{const},$$

следовательно, *обтекание — безградиентное*:

$$\frac{dp}{dx} = 0\,, \quad p = p_\infty = \text{const}\,.$$

Второй этап — решение соответствующих уравнений пограничного слоя. Для рассматриваемого случая безградиентного обтекания уравнения (7.19а) несколько упрощаются:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0\,.$$

Эта система решается со следующими граничными условиями:

$$y = 0: \quad u_x = 0, \quad u_y = 0;$$

$$y = \infty: \quad u_x = u_\infty.$$

Как отмечалось выше, решение задачи проводится для области, расположенной достаточно *далеко от передней кромки*: вблизи передней кромки отношение δ/x немало́ и уравнения ПС несправедливы.

Обратим внимание на то, что вид граничных условий одинаков для любого x. Следуя рассуждениям *Блазиуса*, предположим, что форма профиля скорости в явном виде не зависит от x, а зависит только от переменной y/δ, т.е. $U_x = u_x/u_\infty = F(y/\delta)$. Толщину пограничного слоя оценим из (7.18)

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}\,.$$

Введем новую переменную $\eta \approx \frac{y}{\delta} = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$, которая является безразмерной поперечной координатой.

Тогда $U_x = F(\eta)$. Задачи, для которых форма профиля скорости непосредственно не зависит от продольной координаты x (автомодельна по x), а зависит только от безразмерной поперечной координаты y/δ, относятся к классу *автомодельных* задач. Задачу можно свести к автомодельной только тогда, когда, во-первых, отсутствует влияние входных условий (при $x = 0$), т.е. решение рассматривается вдали от передней кромки, а, во-вторых, вид граничных условий по x не меняется.

Уравнение движения для автомодельной задачи упрощается: дифференциальное уравнение в частных производных заменяется на обыкновенное дифференциальное уравнение.

Автомодельное решение для случая обтекания пластины получено Блазиусом в 1907 г. Если ввести функцию тока

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

то для безразмерной функции тока $\Psi(\eta) = \psi(x, y)/\sqrt{\nu x u_\infty}$ уравнение движения преобразуется к виду

$$\Psi''' + \Psi\Psi'' = 0,$$

с граничными условиями:

$$\eta = 0: \ \Psi = 0, \quad \Psi' = 0;$$
$$\eta \to \infty: \quad \Psi' = 2.$$

Здесь знак «штрих» означает дифференцирование по η.

Блазиус решил это уравнение с помощью разложения в ряды по малым и большим η и последующим сращиванием этих рядов.

Позднее решение получено численными методами.

Результаты решения приведены на рис. 7.11. При заданном x = const график показывает зависимость $U_x(y)$; *продольная составляющая скорости* возрастает с увеличением y от 0 до u_∞. При y = const график показывает зависимость $U_x(x)$. Поскольку $\eta \approx 1/\sqrt{x}$, с увеличением x значение U_x уменьшается; с ростом толщины пограничного слоя жидкость внутри ПС *подтормаживается*.

Поперечная составляющая скорости $u_y \approx u_x(\delta/x)$. При $\eta \to \infty$ *на внешней границе* ПС u_y стремится к некоторому *конечному значению*

$$u_y = 0{,}8604 u_\infty / \sqrt{\mathrm{Re}_x}.$$

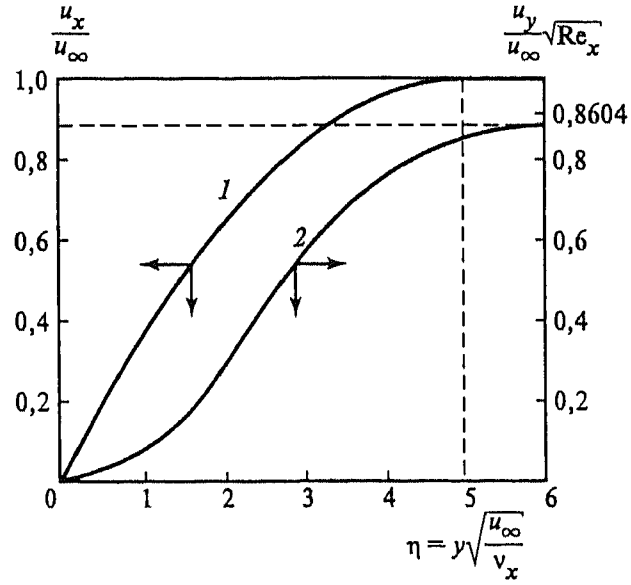


Рис. 7.11. Результаты решения задачи Блазиуса: продольная (*1*) и поперечная (*2*) составляющие скорости в ламинарном пограничном слое на пластине

На основании результатов расчета можно ввести понятие *условной толщины пограничного слоя*. В качестве нее принимают такое расстояние от стенки, на котором достигается относительное отличие u_x от u_∞ меньшее, чем заданная величина. Тогда можно вычислить коэффициент пропорциональности в (7.18). Если указанное отличие u_x от u_∞ взять равным 0,01, т.е. $u_x = 0{,}99\ u_\infty$, получим

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \quad \text{или} \quad \delta = 5\sqrt{\frac{x\nu}{u_\infty}}. \tag{7.20}$$

Оценить минимальное расстояние от передней кромки, на котором начинают выполняться уравнения ПС, можно, сравнив перенос количества движения за счет вязкости в продольном $\nu\ \partial^2 u_x/\partial x^2$ и поперечном $\nu\ \partial^2 u_x/\partial y^2$ направлениях. Отношение этих величин пропорционально $(\delta/x)^2$ и должно быть мало в пределах ПС: $(\delta/x)^2 << 1$. Например, при $(\delta/x)^2 = 0{,}01$ имеем $\delta/x = 0{,}1$. Тогда из (7.20) получим

$$(\mathrm{Re}_x)_{\min} = \frac{u_\infty x_{\min}}{\nu} = 2500.$$

Еще раз подчеркнем, что толщина пограничного слоя — малая величина. Например, при обтекании пластины воздухом ($\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^2/с)

со скоростью u_∞ = 10 м/с на расстоянии x = 15 см от передней кромки получим: $\mathrm{Re}_x = 10^5$; из (7.20) δ = 2,4 мм.

Замечание. Расстояние от передней кромки, на котором справедливо решение Блазиуса для обтекания пластины ламинарным потоком, имеет не только *нижний предел* $x_{\min}$, но и *верхний* $x_{\text{кр}}$, поскольку при числах Рейнольдса, превышающих $\mathrm{Re}_{x_{\text{кр}}} = 3 \cdot 10^5 — 10^6$, в пограничном слое происходит переход от ламинарного течения к турбулентному.

Гидравлическое сопротивление при продольном обтекании пластины

Как уже отмечалось, внешняя граница ПС обтекается внешним потоком так же, как идеальная жидкость обтекала бы саму твердую поверхность. При этом гидравлическое сопротивление не возникает (парадокс Даламбера).

Поэтому единственная причина возникновения гидравлического сопротивления — силы трения на стенке, т.е. проявление вязкости жидкости.

Рассмотрим зависимость для сопротивления трения. По определению касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_c = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Найдя производную из решения Блазиуса, получим

$$\tau_c = 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu u_\infty^3}{x}}.$$

Касательное напряжение на стенке убывает с ростом x как $1/\sqrt{x}$.

Для описания сопротивления трения используют безразмерную величину — *коэффициент сопротивления трения*. Местный коэффициент сопротивления трения c_f при обтекании поверхности (коэффициент Фаннинга) определяется из соотношения

$$\tau_c = c_f \frac{\rho u_\infty^2}{2},$$

$$c_f = \frac{\tau_c}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}.$$

При ламинарном обтекании плоской пластины из решения Блазиуса следует:

$$c_f = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Средний коэффициент сопротивления при обтекании с двух сторон пластины длиной l по определению равен

$$\bar{c}_f = \frac{2}{l}\int_0^l c_f(x)\,\mathrm{d}x.$$

В результате интегрирования получим

$$\bar{c}_f = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_l}},$$

где $\mathrm{Re}_l = u_\infty l/\nu$.

С помощью среднего коэффициента сопротивления вычисляется сила, действующая со стороны жидкости на двустороннюю поверхность длиной l шириной b и площадью S:

$$R^\tau = 2\int_0^l \tau_c b\,\mathrm{d}x = \bar{c}_f \frac{\rho u_\infty^2}{2} S,$$

где $S = 2bl$.

Подчеркнем, что полученные формулы для расчета гидравлического сопротивления справедливы для случая продольного обтекания тонкой плоской пластины ламинарным пограничным слоем.

Вообще говоря, средний коэффициент сопротивления так же, как и местный, зависит от формы обтекаемого тела и режима течения.

7.3.4. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ. ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Пограничный слой можно считать безградиентным ($\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = 0$) только на очень тонкой пластине. Для тел, имеющих не слишком малую толщину, существуют области

конфузорная: $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} > 0;$

диффузорная: $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} > 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} < 0.$

Положение этих областей зависит от формы обтекаемого тела. Например, для обтекания крылового профиля расположение этих областей

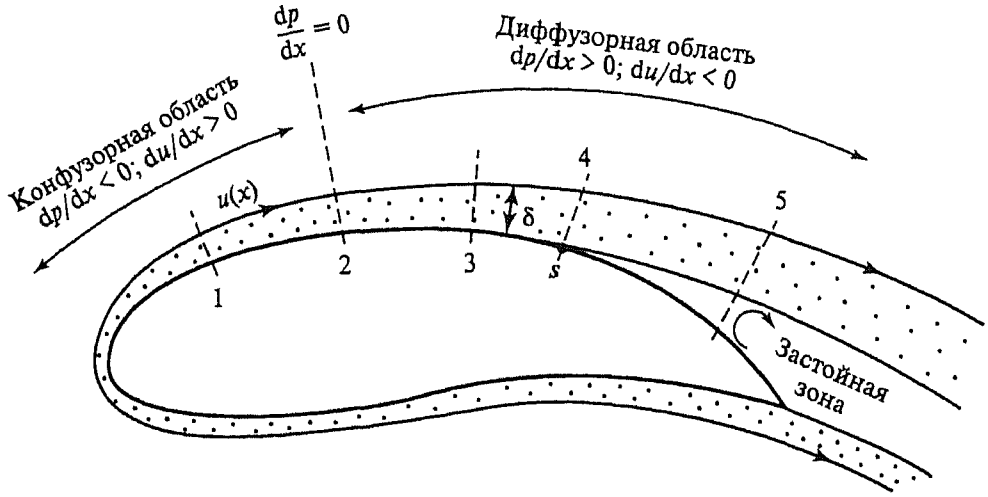


Рис. 7.12. Схема пограничного слоя при наличии продольного изменения давления:

s — точка отрыва пограничного слоя; *1—5* — характерные сечения пограничного слоя

показано на рис. 7.12. Конфузорная область находится в лобовой части профиля, диффузорная — в кормовой.

Можно предположить, что продольный градиент давления, входящий в уравнение движения (7.19), будет влиять, во-первых, на закономерность нарастания толщины пограничного слоя $\delta(x)$, а во-вторых, на форму профиля скорости $u_x(y)$.

Действительно, из уравнения движения следует, что *на стенке* ($u_x = u_y = 0$) знак второй производной $\partial^2 u_x / \partial y^2$ определяется знаком градиента давления. При этом в конфузорной области *на стенке* $\partial^2 u_x / \partial y^2 = \mathrm{d}p / \mathrm{d}x < 0$, а в диффузорной области $\partial^2 u_x / \partial y^2 = \mathrm{d}p / \mathrm{d}x > 0$. Вместе с тем *на внешней границе ПС* всегда $\partial^2 u_x / \partial y^2 < 0$. Следовательно, в диффузорной области течения вторая производная $\partial^2 u_x / \partial y^2$ меняет знак по толщине ПС, т.е. профиль скорости $u_x(y)$ имеет точку перегиба. Форма профиля скорости при изменении $p(x)$ будет меняться, как показано на рис. 7.13.

Если положительный градиент давления достигнет достаточно большой величины, в непосредственной близости от стенки может появиться область *возвратных течений* с $u_x < 0$, где касательное напряжение на стенке $\tau_c = \mu \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ становится отрицательным. Точка *s* на обтекаемом теле, в которой $\tau_c = 0$, называется *точкой отрыва*, а область с $\tau_c < 0$ — *зоной отрыва*. Экспериментальным путем обнаружено, что зона отрыва

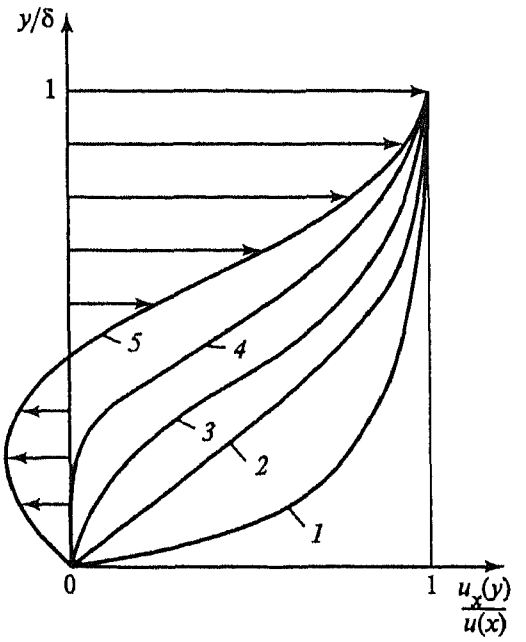


Рис. 7.13. Изменение формы профиля скорости в пограничном слое с продольным градиентом давления:

1—5 — сечения пограничного слоя, отмеченные на рис. 7.12

отделяется от остальной массы жидкости линией тока, отходящей от поверхности тела по касательной (см. рис. 7.12). В зоне отрыва *неприменимы уравнения ПС*, поскольку характерные поперечные масштабы соизмеримы с продольными.

Причиной отрыва можно назвать недостаточно высокий уровень кинетической энергии вязкой жидкости для преодоления сил давления. Эти силы остаются практически такими же, как и при обтекании идеальной жидкостью. Однако профиль скорости менее заполнен из-за потерь кинетической энергии потока за счет вязкости.

При наличии отрыва *возрастает сила лобового сопротивления.* В случае безотрывного обтекания эта сила равна силе сопротивления трения $R = R_x^{\tau}$. Действительно, поскольку распределение давления такое же, как и при обтекании тела идеальной жидкостью, то силы давления согласно парадоксу Даламбера не дают вклада в лобовое сопротивление. При отрывном течении к сопротивлению трения добавляется сопротивление формы: $R_x = R_x^{\tau} + R_x^{p}$. На практике стремятся создать условия для безотрывного обтекания или уменьшить зону отрыва.

Закономерности нарастания толщины пограничного слоя различны для диффузорной и конфузорной областей. Зависимость продольной скорости на границе ПС от x можно представить в виде $u(x) \approx x^n$, $n < 0$ для диффузорной области, $n > 0$ — для конфузорной. Поскольку из

(7.19) $\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{u(x)x/\nu}}$, то в *диффузорной области* δ *возрастает по* x *быстрее*, а в конфузорной — медленнее, чем для безградиентного обтекания тонкой плоской пластины. В последнем случае, как мы помним, $u(x) = u_\infty = \text{const}$ и $\delta \sim \sqrt{x}$.

На примере обтекания цилиндра диаметром d рассмотрим разные *режимы обтекания* в зависимости от $\mathrm{Re}_d = u_\infty d/\nu$ (рис. 7.14, 7.15) [10].

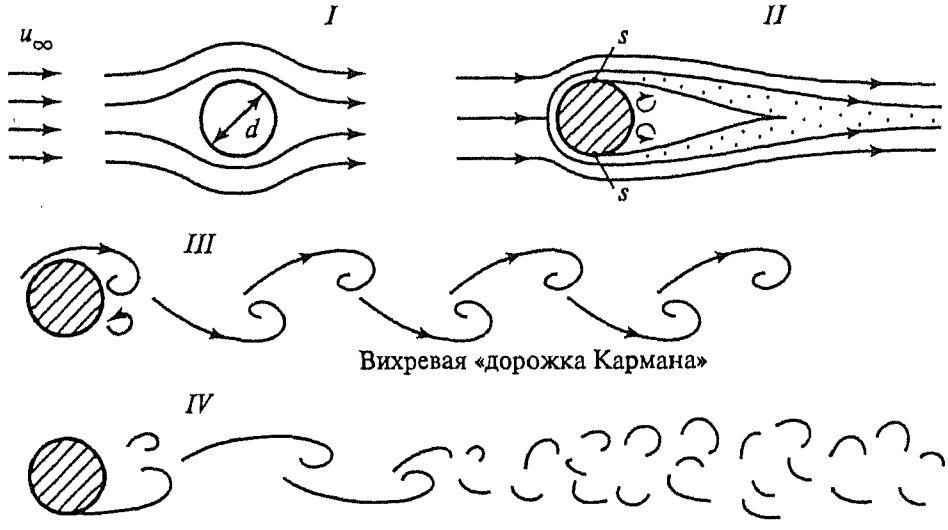


Рис. 7.14. Режимы поперечного обтекания цилиндра вязкой жидкостью:

$\mathrm{Re} = u_\infty d/\nu$: *I* — $\mathrm{Re} \le 5$; *II* — $\mathrm{Re} = 5$—50; *III* — $\mathrm{Re} = 50$—$5 \cdot 10^3$; *IV* — $\mathrm{Re} > 5 \cdot 10^3$

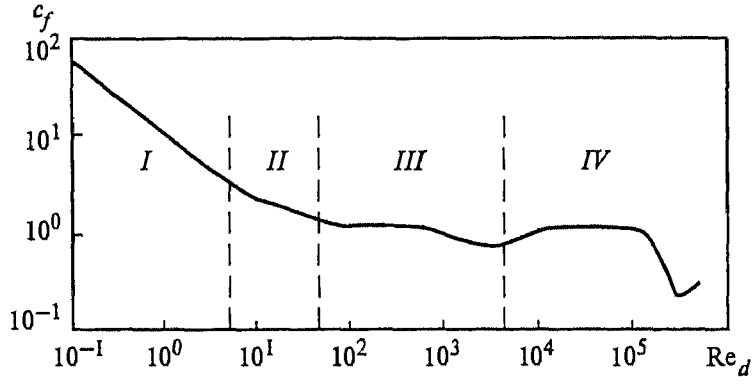


Рис. 7.15. Коэффициент лобового сопротивления при поперечном обтекании цилиндра. Кривая построена по опытным данным (приведена в [10]):

I—*IV* — режимы обтекания (см. рис. 7.14)

I режим: $\mathrm{Re}_d < 5$ — *ползущее течение*; соответствует безотрывному обтеканию. Силами инерции можно пренебречь по сравнению с силами вязкости, влияние которой распространяется на всю область течения. Понятие пограничного слоя в данном случае неприменимо. Для этого режима в силу лобового сопротивления дает вклад только *сопротивление трения* $R_x = R_x^\tau$, причем коэффициент сопротивления трения обратно пропорционален числу Рейнольдса: $c_f = \mathrm{const}/\mathrm{Re}_d$ (формула Стокса).

II режим: $5 \le \mathrm{Re}_d \le 50$. В точке *s* происходит отрыв ПС. В кормовой части за точкой отрыва образуется застойная («мертвая») зона, в которой устойчиво существуют два симметричных *стационарных вихря*. Давление в кормовой части не возрастает, как это происходит при обтекании идеальной жидкостью, а остается низким. Вследствие этого наря-

ду с сопротивлением трения становится очень существенным *сопротивление формы*:

$$R_x = R_x^{\tau} + R_x^{p}.$$

III режим: $50 \le \mathrm{Re}_d \le 5000$. Поочередно то из одной, то из другой области кормовой застойной зоны часть жидкости (вихрь) отрывается от цилиндра и движется вслед за потоком. Образуется вихревая **дорожка Кармана**. Частота отрыва вихрей f сначала возрастает с ростом Re_d, а при $\mathrm{Re}_d > 10^3$ становится постоянной и соответствует числу Струхала $\mathrm{Sh} = fd/u_\infty = 0{,}21$. Интересно, что частота отрыва f часто находится в звуковом диапазоне частот, воспринимаемых человеком на слух. (Например, характерное гудение проводов высоковольтной линии, обдуваемых ветром.) Несмотря на сложную картину течения, оно остается упорядоченным, ламинарным. Сила лобового сопротивления складывается из сопротивлений *трения, формы и индуктивного (вихревого) сопротивления*:

$$R_x = R_x^{\tau} + R_x^{p} + R_x^{\text{инд}}.$$

Необходимо учитывать, что вихри отрываются под некоторым углом к продольной оси, поэтому возникающая при отрыве реактивная сила имеет отличную от нуля проекцию R_y поперек потока. Эта знакопеременная сила стремится раскачивать обтекаемое тело в поперечном направлении с частотой отрыва f. В ряде случаев сила R_y может быть существенной. Например, она может вызывать вибрацию стержня зонда, вводимого в поток для измерения локальных характеристик течения.

IV режим. При более высоких числах Рейнольдса упорядоченность дорожки Кармана нарушается и она турбулизируется, а при $\mathrm{Re}_d > 2 \cdot 10^5$ в пограничном слое на поверхности тела происходит *переход к турбулентному режиму*. За счет турбулентного перемешивания импульс от внешнего потока передается в пограничный слой, скорости в пограничном слое возрастают, а профиль скорости становится более заполненным. Точка отрыва смещается вниз по потоку, вследствие чего «мертвая зона» позади тела становится уже. Сопротивление формы резко снижается — это так называемый *кризис сопротивления*.

Глава восьмая

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В 1983 г. научный мир отметил 100-летие с момента опубликования результатов опытов английского ученого О. Рейнольдса* [12], положивших начало науке о турбулентности. Экспериментируя с потоком воды в стеклянной трубке, в которую через капилляр вводилась краска (рис. 8.1), О. Рейнольдс наблюдал существование двух режимов течения жидкости — ламинарного и турбулентного. При сравнительно небольших скоростях течения, соответствующих малым значениям безразмерного критерия Рейнольдса $\mathrm{Re} = Ud/\nu$, жидкость движется ламинарно, т.е. упорядоченно, слои жидкости не перемешиваются, вследствие чего тонкая струйка краски сохраняется вдоль потока на большой длине.

Но если Re превысит некоторое критическое значение, для круглых труб равное приблизительно $\mathrm{Re}_{кр} = 2 \cdot 10^3$, то картина течения кардинальным образом меняется: ламинарный режим течения сменяется турбулентным (по терминологии О. Рейнольдса — «извилистым»). При этом структура течения становится весьма сложной, частички жидкости интенсивно перемешиваются, о чем свидетельствует быстрое размывание струйки краски и равномерное окрашивание всего потока.

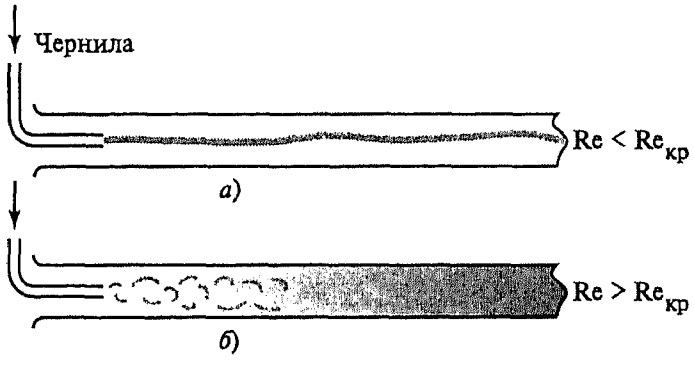


Рис. 8.1. Опыт Рейнольдса. Режимы течения:
а — ламинарный; *б* — турбулентный

* Рейнольдс Осборн (1842—1912 гг.) — выдающийся английский физик и инженер, профессор Манчестерского университета, основоположник теории турбулентности.

Казалось бы, не составляет труда дать определение турбулентности, отражающее наиболее существенные особенности этой формы движения жидкости. Однако практика показала, что данный вопрос нередко вызывает затруднения. Действительно, часто можно услышать высказывания типа: «Турбулентные течения — это течения, которые имеют сложную вихревую структуру». Такое определение турбулентности нельзя признать удачным, хотя может показаться, что оно вытекает из опыта О. Рейнольдса. Действительно, существуют течения, имеющие весьма сложную структуру, которые, тем не менее, являются течениями ламинарными. Примером может служить хорошо известная «дорожка Кармана» в следе за обтекаемым телом, в которой отчетливо видны вихри Кармана (см. рис. 7.14).

Каковы же наиболее существенные отличительные признаки турбулентного течения? Ответить на этот вопрос поможет следующий эксперимент.

Представим себе некий экспериментальный стенд, например круглую трубу, по которой движется жидкость (рис. 8.2). Полагаем, что можно с очень высокой точностью задавать идентичные режимные параметры эксперимента: давление на входе и выходе, расход жидкости, температуру, свойства жидкости. Это означает, что с высокой степенью точности заданы начальные и граничные условия моделируемой в опыте задачи. Проведем какой-либо эксперимент, в ходе которого в трубе реализуется определенное поле скорости $u(x, t)$. При этом в произвольно выбранной точке A можно наблюдать реализацию процесса $[u(t)]_A$. Повторяя опыт N раз в строго идентичных условиях, можно получить N

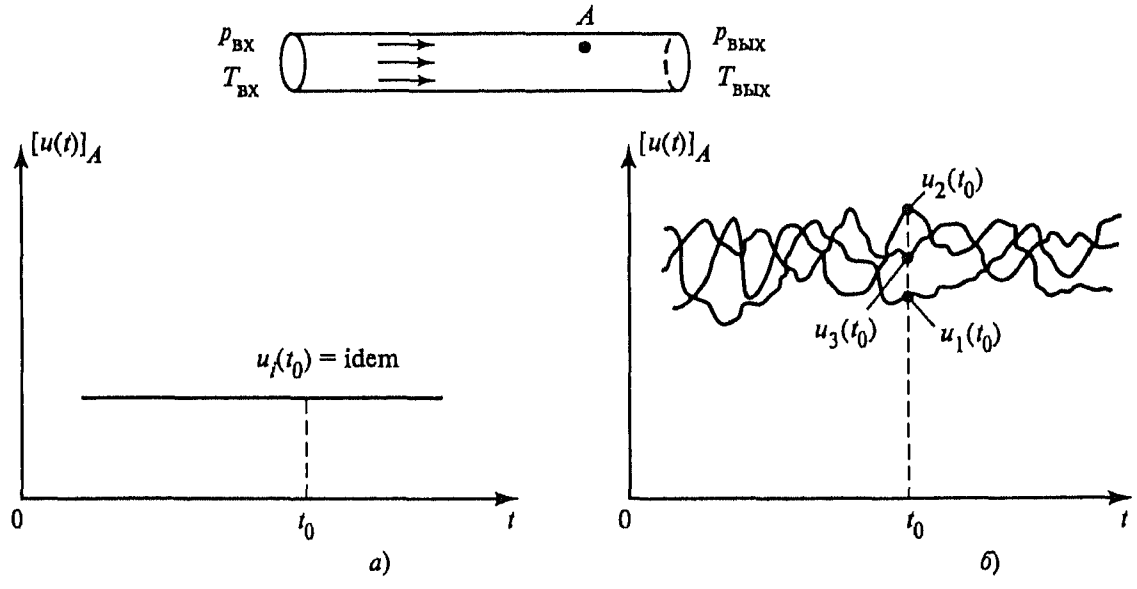


Рис. 8.2. К определению турбулентности: схема «мысленного эксперимента» [18]

реализаций интересующего нас процесса $[u_i(t)]_A$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$ Сопоставление этих реализаций между собой позволяет понять принципиальную разницу между ламинарным и турбулентным течениями [18].

При ламинарном течении все реализации процесса $[u_i(t)]_A$ будут одинаковыми. Действительно, ламинарное течение полностью определяется задаваемыми начальными и граничными условиями, а они, как мы договорились, не изменяются от опыта к опыту. Правда, всегда существуют малые возмущения поля скорости, которые мы контролировать не можем. Причины этих малых возмущений могут быть различными: вибрации, нестабильности источника питания, состояние обтекаемых жидкостью поверхностей и др. Однако *ламинарное течение устойчиво по отношению к малым возмущениям* — они подавляются, диссипируют в ламинарном потоке под действием молекулярной вязкости.

Итак, все реализации ламинарного течения одинаковы. В частности, в стационарных условиях эти реализации в точке A выражаются формулой $[u_i(t)]_A = \text{const}$ и изображаются прямой на графике рис. 8.2, *а*.

Теперь изменим параметры эксперимента так, чтобы течение в трубе стало турбулентным. Вновь проведем опыт N раз в идентичных условиях, чтобы получить N реализаций турбулентного поля скорости. Убеждаемся, что все реализации турбулентного течения различны! Причина различий заключается в том, что задаваемые нами режимные параметры, неизменные от опыта к опыту, в случае турбулентного течения не полностью определяют поле скорости, поскольку *турбулентное течение неустойчиво к малым возмущениям поля скорости.* При течении вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами в отсутствие внешних массовых сил (будем рассматривать только такие течения) критерием устойчивости является число Рейнольдса. Критерий Re может быть интерпретирован как соотношение характерных значений сил инерции и вязкости. Силы инерции, связанные с перемешиванием различных объемов жидкости, движущихся с разными скоростями, способствуют образованию в потоке структурных неоднородностей, характерных для турбулентного течения. Силы вязкости, наоборот, приводят к сглаживанию неоднородностей, возмущающих плавное движение жидкости. Поэтому очевидно, что течения с достаточно малыми значениями Re будут ламинарными, а с достаточно большими — турбулентными. Этот принципиальный вывод и был сформулирован О. Рейнольдсом.

Поскольку в каждом из N опытов «набор» спонтанно возникающих возмущений различен, эти возмущения, развиваясь в потоке, по-разному влияют на его структуру в каждом из опытов, и мы наблюдаем N различных реализаций турбулентного поля скорости (рис. 8.2, *б*). Попытаться выявить и учесть все случайные возмущения — дело бесперспективное. В данном случае целесообразно, абстрагируясь от сложных причинно-

следственных связей, возникающих в ходе развития возмущений, обратиться к изучению результата — развитого турбулентного поля скорости. При таком подходе турбулентное поле следует рассматривать как случайную функцию пространственных координат и времени. (Очевидно, представление о «случайном» характере физического процесса в данном случае отнюдь не противоречит общему философскому принципу детерминизма.) Каждую наблюдаемую в опыте реализацию процесса следует трактовать как одного «представителя» из бесконечного ансамбля возможных реализаций случайного процесса в данной точке. Как видно из рис. 8.2, *б*, осциллограммы реализаций имеют весьма нерегулярный, непериодический вид, что является отражением неупорядоченного и хаотического характера турбулентного движения. Именно неупорядоченность, хаотичность движения является тем существенным признаком, который отличает турбулентное течение от ламинарного.

Будем называть величины $[u_1(t_0)]_A$, $[u_2(t_0)]_A$, ..., $[u_N(t_0)]_A$ «выборочными значениями» случайной функции $[u(t)]_A$, наблюдаемыми в конкретных опытах в данной точке A в моменты времени t_0 (рис. 8.2, *б*). Очевидно, что при ламинарном течении все выборочные значения $[u_i(t_0)]_A$ одинаковы, а при турбулентном течении — различны, причем мы не в состоянии предсказать точно, какое выборочное значение будет наблюдаться в данном эксперименте, а можем лишь говорить о вероятности его появления. Анализируя выборочные значения, можно сделать вывод, что они подчиняются некоторым статистическим закономерностям. Например, при достаточно большом объеме выборки N выборочное среднее $\tilde{u}(t_0)$, определяемое как среднее арифметическое выборочных значений

$$\tilde{u}(t_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i(t_0),$$

становится устойчивым, мало зависящим от N. В пределе при $N \to \infty$ выборочное среднее $\tilde{u}(t_0)$ стремится к статистически точному результату осреднения по бесконечному ансамблю случайных величин $u_i(t_0)$, называемому «математическим ожиданием» $\bar{u}(t_0)$. Заметим, что математическое ожидание и другие осредненные величины уже не зависят от случайных факторов, а определяются режимными параметрами эксперимента.

Все вышесказанное позволяет сформулировать следующее определение [11]:

Турбулентность — движение жидкости, предполагающее неупорядоченность течения, в котором все величины (скорость, температура, давление и т.п.) претерпевают хаотические изменения по времени и пространственным координатам, но при этом могут быть выделены статистически точные их осредненные значения.

Таким образом, турбулентное поле вектора скорости, а также скалярные поля (температуры, давления, концентрации и т.п.) рассматривают как случайные поля, применяя при их исследовании аппарат теории вероятностей и математической статистики.

8.2. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ

8.2.1. ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ В ТРУБАХ

Если $Re > Re_{кр}$, то различные возмущения, например возмущения на входе, растут, но на некотором расстоянии от входа это незаметно, и течение остается ламинарным. С удалением от входа рост возмущений приводит к образованию «турбулентных пятен» — областей хаотичного, неупорядоченного течения в ламинарном потоке. На больших расстояниях от входа «пятна» растут, сливаются, образуя «турбулентные пробки» (рис. 8.3). Линдгрен экспериментально установил, что передний фронт пробки движется быстрее, чем задний, т.е. пробки растут по длине и, наконец, сливаются, занимая почти все сечение трубы. Однако вблизи стенки *всегда* сохраняется очень тонкий *вязкий подслой.*

Рассмотрим осциллограммы скорости в точках A, B, C, C', D (рис. 8.4). Если проследить за изменением скорости в течение некоторого, достаточно большого, интервала времени T, то на каких-то временны́х отрезках этого интервала скорость не меняется, а на других — Δt_i — происходит хаотическое изменение скорости во времени. Это явле-

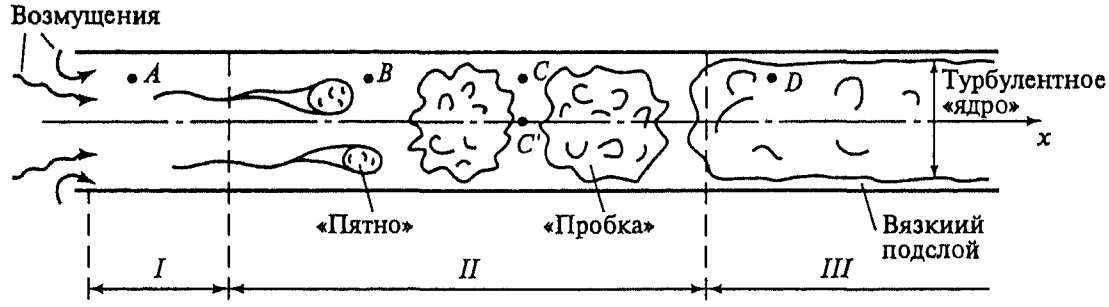


Рис. 8.3. Развитие турбулентности по длине трубы:

I — область ламинарного течения; *II* — переходная область; *III* — область турбулентного течения

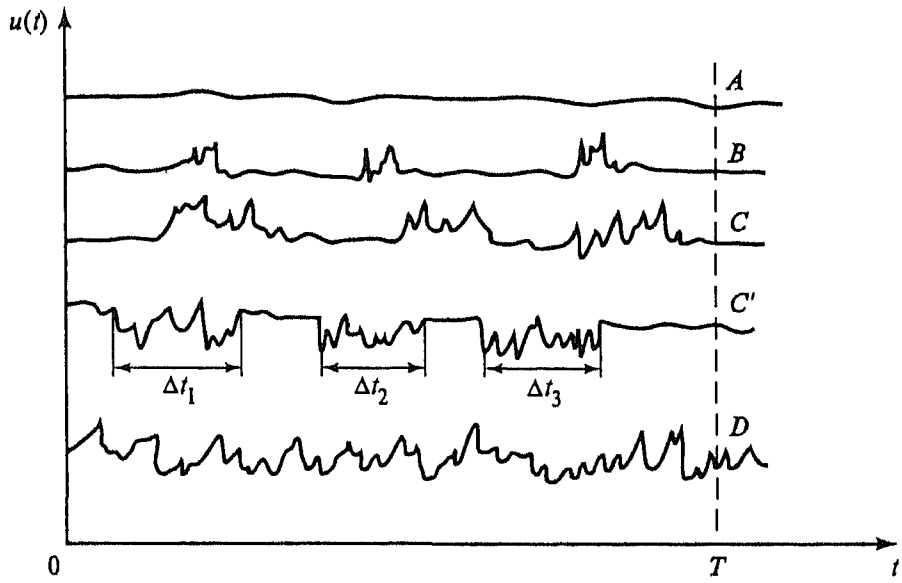


Рис. 8.4. Характерные осциллограммы скорости в точках *A*, *B*, *C*, *C′* и *D* потока, изображенного на рис. 8.3

ние носит название *перемежаемости* и характеризуется **коэффициентом перемежаемости**

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i}{T},$$

где N — число временны́х отрезков Δt_i, на которых существует турбулентная форма движения за время наблюдения T.

Коэффициент перемежаемости — это *вероятность* появления *турбулентной* формы движения *в данной точке потока.*

Очевидно, что $0 \le \gamma \le 1$, причем:

$\gamma = 0$ — полностью ламинарное течение,

$\gamma = 1$ — полностью турбулентное течение.

Коэффициент перемежаемости может быть различен для разных точек потока. Например, согласно рис. 8.4, в точке A значение γ близко к нулю, в точках C и C' $\gamma \approx 0{,}5$, в точке D $\gamma = 1$.

Интересно отметить различие осциллограмм в точках C и C'. В турбулентной фазе скорость в точке C выше, чем в ламинарной, а в точке C' — наоборот. Причина этого различия заключается в разном расположении точек в сечении трубы: точка C находится вблизи стенки, а C' — в центре. Как увидим в дальнейшем, профиль скорости при турбулентном течении является более заполненным, чем при ламинарном (рис. 8.5). Поэтому в турбулентной фазе у стенки скорость выше, чем в ламинарной, а у оси — наоборот.

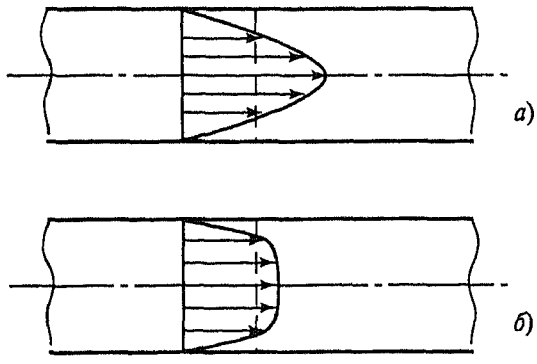


Рис. 8.5. Сопоставление формы профиля скорости ламинарного (*а*) и турбулентного (*б*) течения в трубе. Вертикальная пунктирная линия — эпюра средней по сечению скорости

Коэффициент перемежаемости при течении в круглой трубе был экспериментально изучен Ротта (1956 г.) [13]. Рассмотрим эти опытные данные (рис. 8.6).

При $Re < Re_{кр} \approx 2300$ все возмущения в трубе затухают ($\gamma \to 0$).

При $Re > Re_{кр}$ возмущения развиваются вдоль трубы (коэффициент γ возрастает), поэтому рано или поздно на некотором расстоянии от входа поток станет полностью турбулентным ($-\gamma = 1$).

Следовательно, на *бесконечном расстоянии от входа* возможны только два состояния течения: ламинарное ($Re < Re_{кр}$) либо полностью турбулентное ($Re > Re_{кр}$). Однако в трубах конечной длины могут наблюдаться области перемежающегося течения ($0 \le \gamma \le 1$), протяженность которых убывает с ростом числа Re. При достаточно больших числах Рейнольдса (скажем, $Re > 10^4$) область перемежаемости вырождается и течение становится полностью турбулентным ($\gamma = 1$) практически сразу во входном сечении трубы. С другой стороны, если число Re лишь немного превышает $Re_{кр}$ (скажем, $Re = 2500$), то область перемежаемости может быть весьма протяженной, занимая многие десятки и даже сотни калибров.

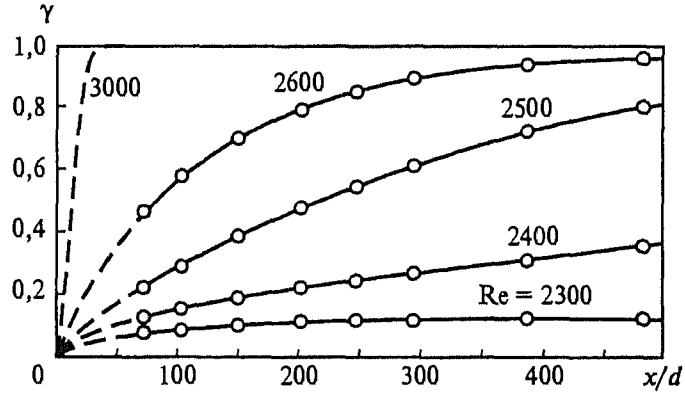


Рис. 8.6. Изменение коэффициента перемежаемости по длине трубы. Эксперименты Ротта [13]

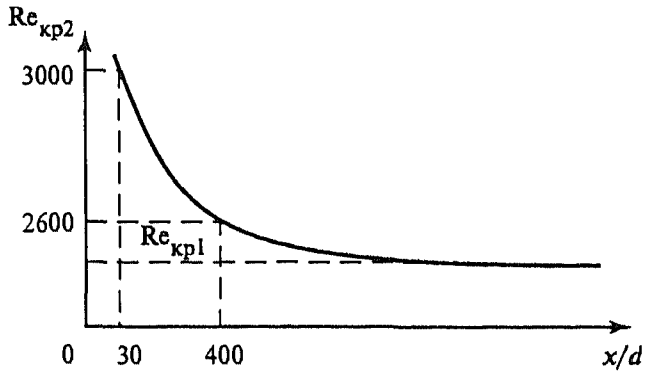


Рис. 8.7. Качественная картина зависимости $Re_{кр2}$ от продольной координаты (см. рис. 8.6, 8.8)

Таким образом, одного критического числа $Re_{кр}$ недостаточно для определения режима течения, если имеем дело с трубами конечной длины. Поэтому целесообразно ввести два критических числа Рейнольдса — *первое* и *второе*.

Первое: $Re_{кр1}$ — число Рейнольдса, при котором поток теряет устойчивость к малым возмущениям. Обычно $Re_{кр1} \approx 2100—2300$.

Второе: $Re_{кр2}$ — число Рейнольдса, при котором для данного расстояния от входа x/d поток уже становится полностью турбулентным, т.е. $\gamma = 1$.

Понятно, что $Re_{кр2} > Re_{кр1}$.

Зависимость $Re_{кр2}$ от x/d для круглой трубы приведена на рис. 8.7.

Эта зависимость была получена на основании измерений коэффициента гидравлического сопротивления в области перехода от ламинарного течения к турбулентному (рис. 8.8). Чем меньше расстояние от вхо-

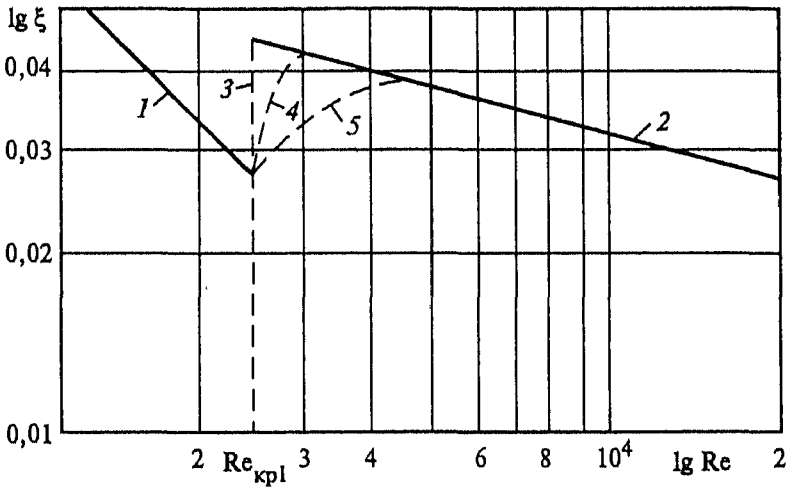


Рис. 8.8. Коэффициент гидравлического сопротивления при течении в круглой трубе: переход от ламинарного режима течения к турбулентному

1 — $\xi_л = 64/Re$; *2* — $\xi_г = 0{,}3164/Re^{0{,}25}$; *3* — $x/d = \infty$; *4* — $x/d = 30$; *5* — $x/d < 30$

да, тем большую протяженность по Re имеет эта область. Например, для $x/d = 30$ выход на известную зависимость $\xi(\mathrm{Re})$ для турбулентного течения осуществляется лишь при $\mathrm{Re}_{кр2} \approx 3000$.

Перечислим наиболее существенные факторы, влияющие на $\mathrm{Re}_{кр}$ в трубах. (Если специально не оговаривается иное, то под $\mathrm{Re}_{кр}$ подразумевают $\mathrm{Re}_{кр1}$.)

1. *Диффузорность или конфузорность* потока.

Конфузорность ($dp/dx < 0$) увеличивает $\mathrm{Re}_{кр}$, поскольку профиль скорости в этих условиях становится более заполненным, устойчивым. Диффузорность ($dp/dx > 0$), напротив, уменьшает $\mathrm{Re}_{кр}$, так как профиль скорости при этом имеет точку перегиба, что понижает устойчивость.

2. *Возмущения поля скорости на входе в трубу.*

Надо сказать, что $\mathrm{Re}_{кр_2} \approx 2 \cdot 10^3$ в «обычных» условиях, когда не предпринимают специальных мер по снижению уровня возмущений в потоке.

Если постараться свести к минимуму эти возмущения, значение $\mathrm{Re}_{кр}$ увеличивается. Так, Рейнольдс в своих опытах для трубы с плавным входом получил $\mathrm{Re}_{кр} = 1{,}3 \cdot 10^4$. В опытах Экмана [14] течение оставалось ламинарным до $\mathrm{Re}_{кр} \approx 5 \cdot 10^4$, но при малейшем возмущении наблюдался лавинообразный переход к турбулентному режиму. Нет никаких оснований утверждать, что нельзя затянуть ламинарный режим течения до еще бóльших $\mathrm{Re}_{кр}$.

Заметим, что влияние возмущений на входе оказывается преобладающим по сравнению с влиянием других возмущений (например, из-за вибрации, шероховатости стенок). Так, шероховатость стенок сказывается лишь при больших Re, когда вязкий подслой становится очень тонким. При малых Re возмущения от шероховатости подавляются, и критическое число Рейнольдса не изменяется: $\mathrm{Re}_{кр} \approx 2 \cdot 10^3$.

3. *Термогравитационная конвекция*, возникающая в неизотермических условиях при существенном влиянии силы тяжести.

При подъемном движении в условиях нагрева (или опускном движении в условиях охлаждения) профиль скорости становится более заполненным, что повышает устойчивость и увеличивает $\mathrm{Re}_{кр}$. Это случай (рис. 8.9) так называемой *устойчивой стратификации плотности* (плотность в направлении вектора силы тяжести возрастает). *Неустойчивая стратификация плотности*, когда плотность в направлении вектора силы тяжести падает (опускное движение при нагреве или подъемное — при охлаждении), приводит к появлению на профиле скорости точки перегиба (рис. 8.10), что понижает устойчивость и уменьшает $\mathrm{Re}_{кр}$.

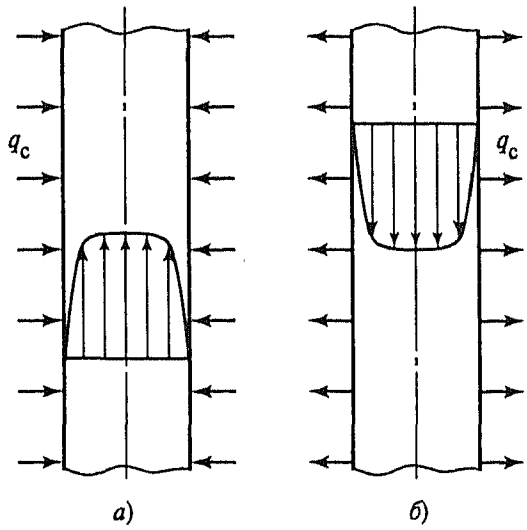


Рис. 8.9. Устойчивая стратификация плотности при течении в вертикальной трубе:

а — подъемное течение в условиях нагревания; *б* — опускное течение в условиях охлаждения

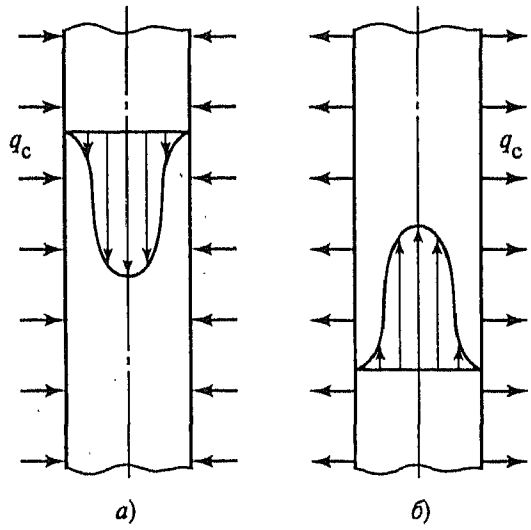


Рис. 8.10. Неустойчивая стратификация плотности при течении в вертикальной трубе:

а — опускное течение в условиях нагревания; *б* — подъемное течение в условиях охлаждения

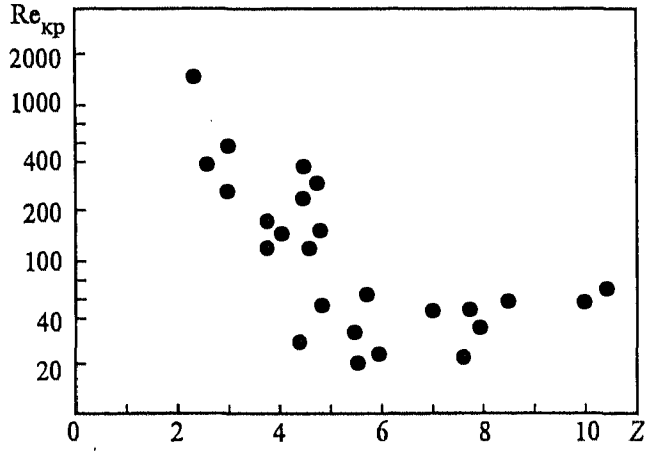


Рис. 8.11. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра вертикальной стратификации при течении воды в трубе. Эксперименты Броуна [32]

На рис. 8.11 показаны результаты измерений $Re_{кр}$, выполненных Броуном [32], в зависимости от «параметра вертикальной стратификации» $Z = (Gr \cdot Pr)^{0,25}$, характеризующего степень влияния термогравитационной конвекции. Здесь $Gr = g\beta q_c d^4/(\lambda\nu^2)$ — число Грасгофа, $Pr = \nu/a$ — число Прандтля.

4. *Другие массовые силы.*

Влияние массовых сил может быть очень существенным, в чем мы убедились на примере термогравитационной конвекции. Так, $Re_{кр}$ изме-

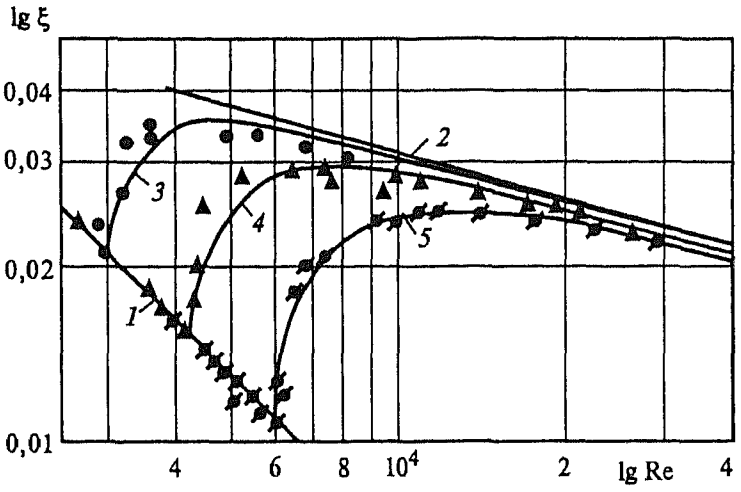


Рис. 8.12. Затягивание перехода от ламинарного режима к турбулентному при течении жидкого металла в продольном магнитном поле. Эксперимент [33]:

1 — $\xi_л = 64/Re$; *2* — $\xi_т = 0{,}3164/Re^{0{,}25}$; *3* — Ha = 52; *4* — Ha = 98,5; *5* — Ha = 158

няется при течении *электропроводной жидкости в магнитном поле.* Например, при течении в трубе в продольном магнитном поле переход к турбулентному режиму затягивается, что видно из рис. 8.12, на котором приведены результаты измерений коэффициента гидравлического сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса. Степень влияния магнитного поля характеризуется числом Гартмана

$$Ha = Bd\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}},$$

где B — индукция магнитного поля; σ — электропроводность жидкости.

8.2.2. ПЕРЕХОД В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ

Опыты показывают, что в пограничном слое при обтекании плоской пластины можно выделить три области течения (рис. 8.13): область ламинарного пограничного слоя, переходная область и область турбулентного пограничного слоя [10].

В *ламинарной области* на течение по всей длине накладываются возмущения, во-первых, от внешнего потока, а во-вторых, из-за шероховатостей поверхности.

В этой области можно выделить два участка. На первом из них *I*, примыкающем к передней кромке, возмущения не возрастают, но превращаются в синусоидальные волны (так называемые волны Толмина—Шлихтинга), даже если первоначальные возмущения — несинусоидальные. Второй участок *II* начинается с некоторого значения продольной координаты $x_{п.у}$ — *координаты потери устойчивости*, которой соответствует

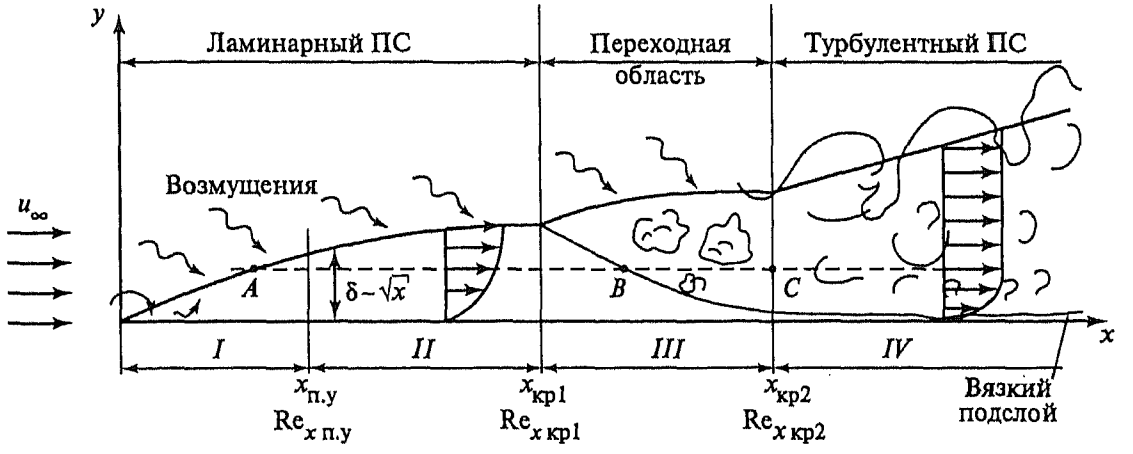


Рис. 8.13. Потеря устойчивости и переход к турбулентному режиму в пограничном слое на пластине

«число Рейнольдса потери устойчивости» ($\text{Re}_{x\text{п.у}} = u_\infty x_{\text{п.у}}/\nu$). Волны, оставаясь синусоидальными, начинают возрастать по амплитуде. Течение на этом участке еще ламинарное, с характерным для этого режима незаполненным профилем скорости. Жидкость при движении вдоль поверхности подтормаживается, а толщина пограничного слоя нарастает по закону для ламинарного пограничного слоя $\delta \approx \sqrt{x}$.

Переходная область — это участок *III*, начинающийся с некоторого значения $x_{\text{кр1}}$ ($\text{Re}_{x\,\text{кр1}}$), $\text{Re}_{x\,\text{кр1}}$ — критическое число Рейнольдса, соответствующее *началу перехода*. Течение в переходной области — перемежающееся, с появлением «пятен» и «пробок». Коэффициент перемежаемости на этом участке изменяется в пределах $0 \le \gamma \le 1$.

Турбулентная область IV начинается с некоторой координаты $x_{\text{кр2}}$ ($\text{Re}_{x\,\text{кр2}}$), когда течение в пограничном слое становится полностью турбулентным везде, кроме тонкого *вязкого подслоя* у стенки.

Изменение продольной составляющей скорости по длине пластины (поперечное расстояние от поверхности остается одинаковым) показано на рис. 8.14. В области ламинарного пограничного слоя *I, II* происходит падение скорости, в переходной области *III* она восстанавливается, а в турбулентной *IV* — снова начинается уменьшение по длине, но менее интенсивное, чем на участках *I, II*.

Критическое число Рейнольдса, соответствующее началу перехода, под влиянием ряда факторов может изменяться в довольно широких пределах: $\text{Re}_{x\text{кр1}} = u_\infty x_{\text{кр1}}/\nu \approx 3 \cdot 10^5$—$10^6$. Заметим, что критическое число Рейнольдса, определенное по толщине пограничного слоя, имеет тот же порядок, что и при течении в трубе: $\text{Re}_{\delta\text{кр1}} = u_\infty \delta(x_{\text{кр1}})/\nu \approx 10^3$.

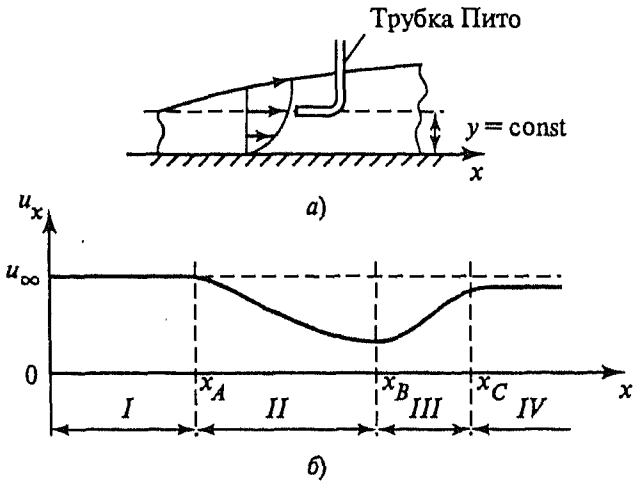


Рис. 8.14. «Мысленный эксперимент»: исследование изменения скорости по длине ПС при фиксированной поперечной координате зонда:

а — схема эксперимента; *б* — характер изменения скорости: *I* — набегающий поток; *II* — ламинарный пограничный слой; *III* — переходная область; *IV* — турбулентный пограничный слой

На величину $\mathrm{Re}_{x\ кр1}$ влияют многие факторы. Укажем наиболее существенные из них.

1. *Конфузорность или диффузорность* течения. Направление этого влияния такое же, как и при течении в каналах.

2. *Шероховатость* поверхности, в отличие от течения в трубах, влияет более существенно и способствует уменьшению $\mathrm{Re}_{x\ кр1}$.

3. *Степень турбулентности внешнего потока.* Эта величина (%) определяется как

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{(u'_\infty)^2}}}{u_\infty},$$

где u'_∞ — характерное значение пульсаций скорости внешнего потока.

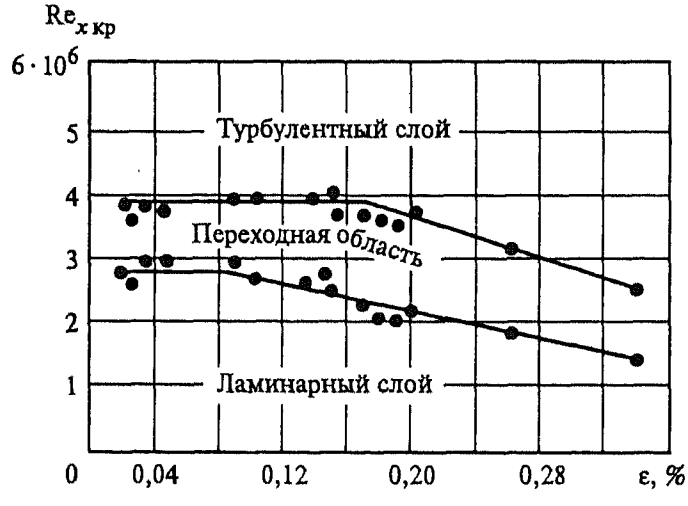


Рис. 8.15. Влияние степени турбулентности набегающего потока на критические числа Рейнольдса для продольно обтекаемой плоской пластины [15]

Согласно имеющимся опытным данным Шубауэра и Скрэмстеда [15] для ε = (1—1,5) % (эти значения считаются достаточно высокими и обычно имеют место на практике) $Re_{x\ кр1} \approx (3—5) \cdot 10^5$. В области малых значений степени турбулентности (0,1 % < ε < 0,4 %) критические числа $Re_{x\ кр1}$, $Re_{x\ кр2}$ возрастают при уменьшении ε (рис. 8.15), а при ε < 0,1 % они выходят на постоянное значение: $Re_{x\ кр1} \approx 2{,}8 \cdot 10^6$, $Re_{x\ кр2} \approx 4 \cdot 10^6$.

По-видимому, в опытах Шубауэра и Скрэмстеда обнаружены максимально возможные значения критических чисел Рейнольдса для пограничного слоя на пластине. Интересно, что пока неизвестно, существует ли предел увеличения $Re_{кр}$ для течений в трубах.

8.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Выше были изложены результаты в основном экспериментальных исследований перехода от ламинарного течения жидкости к турбулентному. Аналитическим изучением явления потери устойчивости ламинарного потока занимается теория устойчивости.

Методы теории устойчивости можно подразделить на следующие три основных метода [10]:

1) энергетический метод;
2) метод малых возмущений;
3) метод конечных возмущений.

8.3.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Представим в системе нестационарных уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \tag{8.1}$$

каждую из трех компонент скорости и давление в виде суммы двух составляющих, одна из которых соответствует основному, а другая — возмущенному потоку:

$$u_i = u_i^0 + u'_i, \quad p = p^0 + p'.$$

Будем считать, что основной поток удовлетворяет уравнениям Навье—Стокса, т.е.

$$\rho\left(\frac{\partial u_i^0}{\partial t} + u_k^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p^0}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_k \partial x_k}. \tag{8.2}$$

Вычтем из уравнений (8.1) уравнения (8.2). В результате получим уравнения для возмущенного потока

$$\rho\left(\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overset{0}{u_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_k'\frac{\partial \overset{0}{u_i}}{\partial x_k} + u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k}. \qquad (8.3)$$

Умножим (8.3) на $\rho u_i'$ и в левой части полученного таким образом уравнения оставим только член

$$\rho u_i'\frac{\partial u_i'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{u_i' u_i'}{2}\right).$$

Величина $K_в = \rho\dfrac{u_i' u_i'}{2}$ представляет собой энергию возмущений.

Осреднив некоторым способом упомянутое выше уравнение, получим для *средней энергии возмущений* $K_в = \rho\dfrac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$ *в рассматриваемой точке потока* уравнение, которое в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial K_в}{\partial t} = \Gamma - \varepsilon + D,$$

где Γ — генерация (порождение) энергии возмущений; ε — вязкая диссипация (всегда положительна, поэтому с учетом знака «минус» всегда дает отрицательный вклад в баланс энергии); D — диффузия, т.е. перенос возмущений в пространстве. Если $D > 0$, энергия поступает в данную точку из других точек пространства, при $D < 0$ энергия отводится.

Проинтегрируем приведенное выше уравнение по всему объему, занимаемому жидкостью. Поскольку диффузия не изменяет суммарную энергию в объеме, а только перераспределяет ее по пространству в пределах этого объема, $\int\limits_V D\,\mathrm{d}V = 0$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V K_в\,\mathrm{d}V = \int\limits_V \Gamma\,\mathrm{d}V - \int\limits_V \varepsilon\,\mathrm{d}V.$$

При $\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_V K_в\,\mathrm{d}V < 0$ (диссипация преобладает над порождением) возмущения затухают во времени, поток является устойчивым. При $\dfrac{\partial}{\partial t}\int\limits_V K_в\,\mathrm{d}V > 0$ (порождение преобладает над диссипацией) возмущения

развиваются и поток неустойчив. Из анализа выражений для Γ и ε делают вывод, что при некотором соотношении между силами инерции и вязкости (которое и характеризует число Рейнольдса) величина $\frac{\partial}{\partial t}\int_V K_в \, dV$ меняет знак с отрицательного на положительный, что означает потерю устойчивости. Однако значение числа Рейнольдса, при котором это происходит (и даже его порядок), на основании энергетического метода установить, насколько нам известно, не удается. По-видимому, с помощью этого метода можно провести лишь качественный физический анализ, что является, тем не менее, весьма полезным.

8.3.2. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Метод основан на пренебрежении в уравнениях (8.3) членом, содержащим две возмущенные величины u_i', поскольку предполагается $u_i' << u_i^0$. Заметим, что в методе *конечных возмущений* этот член учитывается.

Обычно рассматривается плоское течение, точнее, основное течение полагается стационарным гидродинамически стабилизированным течением в плоской щели, т.е.

$$\mathbf{u}^0 = \{u^0(y),\ 0,\ 0\};\quad p^0 = p^0(x),$$

а возмущения — плоскими, т.е.

$$u^0 = \{u_x'(x, y, t),\ \ u_y'(x, y, t),\ \ 0\};\quad p' = p'(x, y, t).$$

Плоские возмущения рассматриваются потому, что согласно *теореме Сквайра* поток к ним *менее устойчив* и именно под действием плоских, а не трехмерных возмущений теряет устойчивость.

Тогда система уравнений движения и неразрывности для возмущений примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x'}{\partial t} + u^0(y)\frac{\partial u_x'}{\partial x} + u_y'\frac{u^0(y)}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x'}{\partial y^2}\right);\\
&\frac{\partial u_y'}{\partial t} + u^0(y)\frac{\partial u_y'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y'}{\partial y^2}\right);\\
&\frac{\partial u_x'}{\partial x} + \frac{\partial u_y'}{\partial t} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

Поскольку течение плоское, можно ввести функцию тока для возмущений:

$$u_x' = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Используя функцию тока, зададим возмущения в виде плоской волны

$$\psi(x, y, t) = A(y)e^{i(kx - \omega t)},$$

где $A(y)$ — амплитуда колебаний в начальный момент времени $t = 0$; k — волновое число, связанное с длиной волны λ в направлении x соотношением $k = 2\pi/\lambda$; ω — круговая частота.

Круговая частота является комплексной величиной $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Используя действительную ее часть $\omega_r = 2\pi / T$, приходим к выражению для *фазовой скорости волны* $c_r = \omega_r / k = \lambda / T$ (где T — период колебаний).

Используя мнимую часть ω_i, введем *коэффициент затухания* $c_i = \omega_i / k$.

В результате выражение для функции тока преобразуется к виду

$$\psi(x, y, t) = A(y)e^{c_i k t}\, e^{ik(x - c_r t)}.$$

Благодаря сомножителю $\exp(c_i k t)$ возмущение может:

экспоненциально возрастать при $c_i > 0$ (неустойчивость),

экспоненциально затухать при $c_i < 0$ (устойчивость).

Нечто похожее наблюдают в экспериментах (волны Толмина—Шлихтинга).

Далее, скорости возмущений

$$u_x' = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}A(y)}{\mathrm{d}y}e^{c_i k t}\, e^{ik(x - c_r t)},$$

$$u_y' = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = -ikA(y)e^{c_i k t}\, e^{ik(x - c_r t)}$$

подставим в (8.4) и после некоторых преобразований получим дифференциальное уравнение для амплитуды колебаний $A(y)$, называемое *уравнением Орра—Зоммерфельда*:

$$(u^0 - c)(A'' - k^2 A) - (u^0)'' A = -i\frac{\nu}{k}(A'''' - 2k^2 A'' + k^4 A).$$

В данном уравнении штрихами обозначены производные по координате y, например $A'' = \mathrm{d}^2 A(y) / \mathrm{d}y^2$. Поле скорости невозмущенного течения $u^0(y)$ считается заданным.

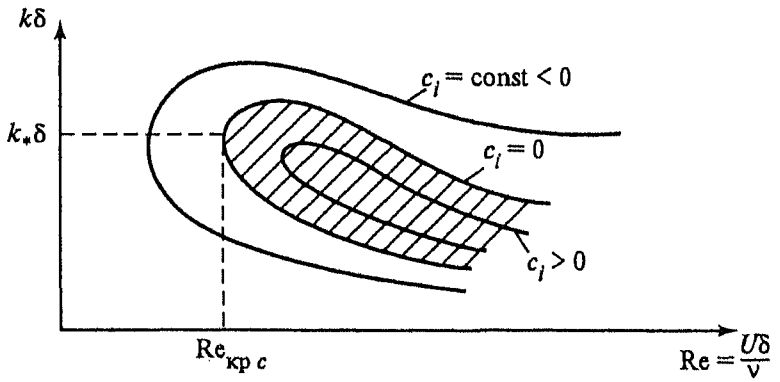


Рис. 8.16. Иллюстрация теории устойчивости

Граничные условия для этого уравнения записываются как условия прилипания на стенке при $y = 0$:

$$u_x' = 0\,, \quad u_y' = 0\,, \text{ т.е. } A = 0,\ \mathrm{d}A/\mathrm{d}y = 0.$$

В качестве параметров в это уравнение, если его привести к безразмерному виду, входят число Re, волновое число k, а также фазовая скорость волны возмущения c_r и коэффициент затухания c_i (где $\mathrm{Re} = U\delta/\nu$; U — средняя по сечению скорость невозмущенного потока; δ — поперечный размер канала). Для заданных Re и k из уравнения можно найти собственную функцию $A(y)$ и собственное значение $c = c_r + ic_i$. Зависимость собственных значений c_i от Re и $k\delta$ представлена на рис. 8.16. Линиями соединены значения $c_i = \mathrm{const}$. В области, где $c_i < 0$, возмущение убывает со временем, если $c_i > 0$ — возрастает. Линия $c_i = 0$ — это нейтральная кривая. Заштрихованная область внутри нее — область неустойчивости. Проведя вертикальную касательную к нейтральной кривой $c_i = 0$, получим $\mathrm{Re}_{\text{кр}\,c}$ потери устойчивости. Всегда найдется некоторое возмущение с волновым числом k_*, которое при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}\,c}$ будет развиваться.

8.4. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА — ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ

8.4.1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Поскольку в случае турбулентного движения поля всех величин хаотически изменяются по пространству и времени, для описания турбулентных течений пользуются не мгновенными значениями этих величин, а статистически *осредненными*.

О. Рейнольдс предложил для турбулентных полей скорости u_i, давления p и других полей φ физических величин следующее представление:

$$u_i = \bar{u} + u',$$

$$p = \bar{p} + p',$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi',$$

где u_i, p, φ — мгновенные (актуальные) значения физических величин; $\bar{u}$, $\bar{p}$, $\bar{\varphi}$ — осредненные величины; u', p', φ' — пульсационные величины.

Очевидно, что наибольший интерес представляют осредненные (статистические) характеристики турбулентности. Поэтому вопрос о способах получения осредненных величин заслуживает подробного обсуждения.

Способы осреднения. Понятие об эргодичности

Осреднение по ансамблю реализаций. Основой статистического подхода к теории турбулентности, как мы уже говорили, является представление о статистическом ансамбле. Допустим, что зафиксировано N реализаций некоторого случайного процесса (рис. 8.17). Индекс i указывает порядковый номер реализации. В любой момент времени, например t_1, можно найти выборочное среднее $\tilde{u}(t_1)$ как среднее арифметическое N соответствующих выборочных значений:

$$\tilde{u}(t_1) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i(t_1). \qquad (8.5)$$

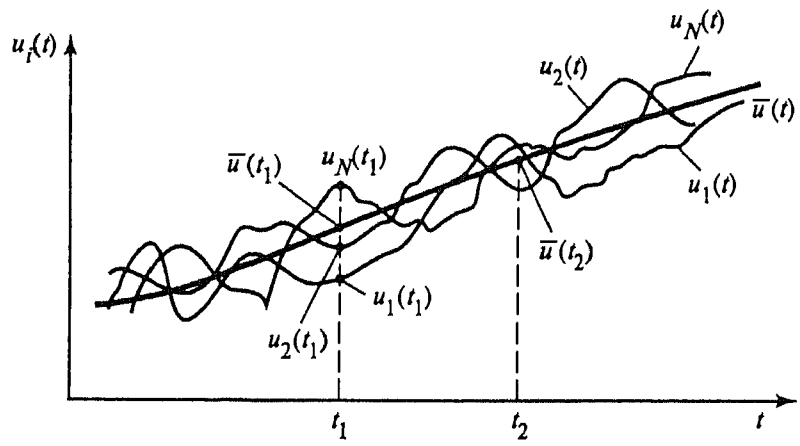


Рис. 8.17. Осреднение по ансамблю реализации

Нетрудно показать, что предел этого выражения при $N \to \infty$, представляющий собой операцию осреднения по бесконечному ансамблю выборочных значений, есть не что иное, как теоретико-вероятностное определение среднего:

$$\lim_{N \to \infty} \tilde{u}(t_1) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) \rho(u)\, du = \bar{u}(t_1). \quad (8.5a)$$

Действительно, сумму в выражении (8.5) можно переписать так:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i(t_1) = \lim_{N \to \infty} \sum^{j} \frac{N_j}{N} u_j(t_1),$$

где N_j — количество выборочных значений $u_j(t_1)$, близких по величине, попадающих в некоторый j-й интервал $\{u, u + du\}$. Тогда N_j/N — вероятность попадания выборочного значения в этот интервал — равна

$$\frac{N_j}{N} = P\{u < u_j(t_1) < u + du\} = \rho(u)\, du,$$

вследствие чего справедливость (8.5а) становится очевидной.

На практике N всегда конечно, поэтому среднее значение $\bar{u}(t_1)$ может быть определено с той или иной степенью приближения

$$\bar{u}(t_1) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i(t_1), \quad (8.6)$$

зависящей от объема выборки N. Во всяком случае алгоритм (8.6) осреднения по ансамблю реализаций является вполне статистически обоснованным. Важно подчеркнуть, что способ осреднения по ансамблю применим как для стационарных, так и для нестационарных процессов. В последнем случае, проводя операцию осреднения (8.6) в различные моменты времени t_1, t_2, ... (рис. 8.17), можно установить зависимость среднего значения от времени (жирная линия на графике).

Однако на практике осреднение по ансамблю применяется редко и только тогда, когда другие способы осреднения непригодны, например при анализе существенно нестационарных процессов. Дело в том, что получить ансамбль реализаций многократным повторением опытов в условиях лаборатории, как правило, сложно и дорого, а при изучении природной турбулентности атмосферы или океана просто невозможно.

Осреднение по времени. Данный способ осреднения позволяет получить искомую статистическую характеристику по одной реализации процесса. Пусть мы имеем отрезок реализации $u(t)$ некоторой длины T

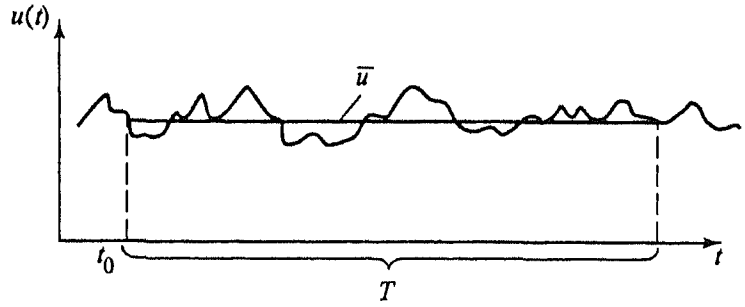


Рис. 8.18. Осреднение по времени

(рис. 8.18). Очевидным является следующий способ осреднения по времени:

$$\overline{u(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} u(t)\, \mathrm{d}t, \tag{8.7}$$

или в общем виде

$$\overline{F[u(t)]} = \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{t_0 + T} F[u(t)]\, \mathrm{d}t. \tag{8.8}$$

Естественно, хотелось бы, чтобы результат осреднения по времени при увеличении интервала осреднения T сходился к результату осреднения по бесконечному ансамблю реализаций, т.е. к соответствующему теоретико-вероятностному значению (8.5). При этом технически сложное осреднение по ансамблю реализаций можно заменить несравненно более простым осреднением одной реализации по времени. Процессы, для которых это условие выполняется, называются **эргодическими случайными процессами**, а само условие — условием **эргодичности**.

Оказывается, что многие (но не все) физические процессы являются эргодическими. Очевидно, что эргодический процесс прежде всего должен быть стационарным, так как способ осреднения (8.8) имеет смысл только применительно к стационарным процессам, поскольку результат осреднения не зависит от времени. Однако не всякий стационарный процесс обладает эргодическим свойством. Помимо стационарности процесс $u(t)$ должен удовлетворять некоторым условиям эргодичности, которые могут быть различными в зависимости от того, какую именно статистическую характеристику $\overline{F[u(t)]}$ требуется определить [18]. Таким образом, один и тот же процесс $u(t)$ может быть эргодическим по отношению к одним статистическим характеристикам и не обладать этим свойством по отношению к другим. В последнем случае попытка применить (8.8) привела бы к недостоверному результату. Забегая впе-

ред, отметим, что стационарная турбулентность эргодична по отношению ко многим осредненным характеристикам, среди которых особое место занимают так называемые «статистические моменты» различных порядков: математическое ожидание (8.7), дисперсия, корреляционные функции и т.п. Поэтому ниже будут часто использоваться формулы осреднения по времени без дополнительных оговорок.

На практике всегда располагают реализациями конечной длины, поэтому искомые статистические характеристики временны́м осреднением могут быть определены лишь с той или иной степенью приближения. Чрезвычайно важен вопрос оптимального выбора времени интегрирования T. С одной стороны, интервал T из соображений экономии рабочего времени и удобства хотелось бы уменьшить. Кроме того, в течение большого промежутка времени трудно соблюсти условие стационарности. С другой стороны, интуиция подсказывает, что для обеспечения требуемой точности этот интервал должен быть велик по сравнению с характерным периодом турбулентных пульсаций. Конкретные количественные рекомендации даны, например в [17].

Осреднение как по ансамблю, так и по времени (для эргодических процессов) обеспечивает выполнение ряда формальных правил, известных как **правила осреднения Рейнольдса**:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \\ &\overline{af} = a\bar{f}, \\ &\bar{a} = a, \\ &\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\,\bar{g}, \\ &\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial}{\partial s}\bar{f}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.9)$$

где s — это x_1, x_2, x_3 или t; a = const; f и g — случайные функции.

Из (8.9) вытекают важные следствия:

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}\,; \quad \overline{f'} = \overline{f - \bar{f}} = 0\,; \quad \overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}\,; \quad \overline{\bar{f}g'} = \bar{f}\,\overline{g'} = 0\,. \qquad (8.10)$$

Применение правил Рейнольдса к дифференциальным уравнениям гидродинамики позволяет получить уравнения для средних значений случайных гидродинамических полей.

Замечание. Еще раз подчеркнем, что здесь и ниже чертой мы обозначаем операцию *статистического осреднения* случайных гидродинамических полей и процессов, в результате которой получаем локальные характеристики. Например,

$\bar{u}_x(\mathbf{x}_0)$ — *локальная осредненная скорость потока в точке* $\mathbf{x}_0$. Подобные характеристики не следует путать, скажем, со *средней по сечению скоростью потока*

$$U = \frac{1}{S}\int_S u_x(S)\,\mathrm{d}S,$$

представляющей собой результат осреднения профиля локальной скорости по пространственным координатам.

8.4.2. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДЛЯ ОСРЕДНЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Проведем осреднение системы уравнений неразрывности и Навье—Стокса для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами ($\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$), использовав правила осреднения Рейнольдса (8.9), (8.10). В результате получим

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho F_i + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\overline{u_i' u_k'}).$$

Приведенные уравнения движения называются **уравнениями Рейнольдса**. Кроме вязких напряжений

$$\bar{\sigma}_{ik} = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}\right),$$

в них входят дополнительные напряжения, связанные с пульсационным хаотическим движением: $\tau^{\mathrm{т}}_{ik} = -\rho\overline{u_i' u_k'}$. Это — **турбулентные напряжения**, или **напряжения Рейнольдса**. Они так же, как и вязкие, образуют симметричный тензор второго ранга

$$\tau^{\mathrm{т}}_{ik} = \begin{pmatrix} -\rho\overline{u_x' u_x'} & -\rho\overline{u_x' u_y'} & -\rho\overline{u_x' u_z'} \\ -\rho\overline{u_y' u_x'} & -\rho\overline{u_y' u_y'} & -\rho\overline{u_y' u_z'} \\ -\rho\overline{u_z' u_x'} & -\rho\overline{u_z' u_y'} & -\rho\overline{u_z' u_z'} \end{pmatrix}.$$

Можно ввести **тензор суммарных напряжений**

$$\tau^{\Sigma}_{ik} = \bar{\sigma}_{ik} + \tau^{\mathrm{т}}_{ik}.$$

Нетрудно заметить, что уравнения Рейнольдса для осредненной скорости имеют точно такой же вид, что и уравнения Навье—Стокса, только вместо вязких напряжений в них входят суммарные напряжения.

Однако имеются принципиальные различия. Система уравнений Рейнольдса является *незамкнутой*. В нее входят дополнительно шесть неизвестных величин — компоненты тензора турбулентных напряжений Рейнольдса.

Замечания. 1. Анализ показывает, что незамкнутость системы осредненных уравнений Рейнольдса — принципиальная проблема. Она не может быть разрешена строго математически. Если попытаться замкнуть систему путем построения дополнительных математически строгих уравнений для неизвестных напряжений Рейнольдса $\tau^{т}_{ij} = -\rho\overline{u'_i u'_j}$, то оказывается [18], что в этих новых уравнениях содержится еще большее количество неизвестных величин. Попытка строго описать новые величины приводит к появлению более сложных неизвестных компонент (тензоров более высокого ранга) и в еще больших количествах, т.е. «степень незамкнутости» системы уравнений при таких попытках возрастает.

2. Подчеркнем, что причина незамкнутости — применение процедуры осреднения к нелинейным по скорости слагаемым в левой части уравнения Навье—Стокса, представляющим собой конвективную часть субстанциональной производной. Именно при осреднении этих слагаемых появляются новые неизвестные — компоненты тензора турбулентных напряжений Рейнольдса.

У читателя может возникнуть вопрос: нельзя ли пренебречь в уравнениях Рейнольдса слагаемыми, содержащими $\tau^{т}_{ik} = -\rho\overline{u'_i u'_k}$, и тем самым уйти от проблемы незамкнутости? Казалось бы, это можно сделать, поскольку данные выражения содержат произведения относительно малых величин — пульсаций скорости u'_i, u'_k, амплитуды которых обычно на один-два порядка меньше осредненной скорости потока. На самом деле в развитых турбулентных течениях напряжения Рейнольдса $\tau^{т}_{ik}$ не только не малы по сравнению с вязкими напряжениями $\bar{\sigma}_{ik}$, а значительно (в десятки—сотни раз) их превосходят.

Остается единственный путь: для замыкания уравнений Рейнольдса привлекать какие-либо приближенные теоретические *модели турбулентности*. Все такие модели являются *полуэмпирическими*, поскольку их построение базируется не только на умозрительных представлениях о физике турбулентности, но также обязательно и на результатах экспериментов. Обычно опытные данные используются для определения коэффициентов пропорциональности и констант, входящих в модельные соотношения. Важно помнить, что любая теория турбулентности, предполагающая интегрирование замкнутой системы осредненных уравне-

ний, *всегда является полуэмпирической.* К настоящему времени многими авторами (среди них — Буссинеск, Прандтль, Карман, Дайслер, Ван-Дрист и др.) предложено множество разнообразных полуэмпирических моделей турбулентности, некоторые из которых рассмотрены ниже.

8.4.3. ТУРБУЛЕНТНАЯ ВЯЗКОСТЬ. ГИПОТЕЗА ПРАНДТЛЯ О ДЛИНЕ ПУТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Чтобы замкнуть уравнения Рейнольдса, необходимо определить турбулентные напряжения. Одним из первых подход к моделированию этих напряжений предложил французский ученый Буссинеск. Согласно *гипотезе Буссинеска* выражение для турбулентных напряжений можно записать аналогично выражению для вязких напряжений, только в качестве коэффициента пропорциональности между напряжением и скоростью деформации здесь будет присутствовать не молекулярная, а турбулентная вязкость

$$\tau_{ik}^{\tau} = \rho\varepsilon_{\tau}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}\right),$$

где ε_{τ} — **кинематический коэффициент турбулентной вязкости.**

Нетрудно видеть, что коэффициент ε_{τ} — это аналог кинематического коэффициента вязкости ν. Однако аналогия между коэффициентами ν и ε_{τ} является формальной, поскольку они имеют разную физическую природу. Действительно, кинематический коэффициент вязкости ν характеризует вязкость как свойство жидкости, обусловленное хаотическим движением микрочастиц (молекул, атомов). В рамках модели жидкости с постоянными свойствами полагается, что ν = const. Коэффициент турбулентной вязкости ε_{τ} связан с хаотическим движением макрочастиц («молей») жидкости. Как будет показано ниже, ε_{τ} — отнюдь не константа, а переменная величина, являющаяся функцией, по крайней мере, числа Рейнольдса и пространственных координат.

С использованием коэффициента турбулентной вязкости суммарные напряжения, входящие в уравнения Рейнольдса, записываются в виде

$$\tau_{ik}^{\Sigma} = \rho\left[(\nu + \varepsilon_{\tau})\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}\right)\right].$$

Как уже отмечалось, в развитых турбулентных течениях турбулентная вязкость значительно превосходит молекулярную ($\varepsilon_{\tau} >> \nu$) везде в пото-

ке, кроме вязкого подслоя у стенки, так что турбулентное движение характеризуется высокой суммарной (или эффективной) вязкостью $\nu + \varepsilon_\tau$.

Вообще говоря, турбулентные напряжения Рейнольдса $\tau^{\text{т}}_{ik}$ представляют собой симметричный тензор второго ранга, шесть компонент которого *подлежат определению*. Однако при рассмотрении пристеночного течения в канале или пограничном слое, как правило, можно ограничиться одной компонентой турбулентного напряжения $\tau^{\text{т}} = \tau^{\text{т}}_{yx}$, поскольку остальные слагаемые уравнения Рейнольдса, содержащие другие компоненты $\tau^{\text{т}}_{ik}$, строго равны нулю или пренебрежимо малы. При этом

$$\tau^{\text{т}} = -\rho\overline{u_x' u_y'} = \rho\varepsilon_\tau \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y}. \qquad (8.11)$$

Из (8.11) следует

$$\varepsilon_\tau = \frac{-\overline{u_x' u_y'}}{\mathrm{d}\bar{u}_x / \mathrm{d}y}.$$

Это соотношение можно рассматривать как определение коэффициента турбулентной вязкости. Разумеется, использование ε_τ не решает проблему незамкнутости уравнения Рейнольдса, поскольку вместо одной неизвестной величины $\tau^{\text{т}} = -\rho\overline{u_x' u_y'}$ вводится другая неизвестная — ε_τ.

Как найти коэффициент турбулентной вязкости ε_τ? Иными словами, как решить проблему незамкнутости? Для этого необходимо привлечь ту или иную модель, позволяющую записать дополнительные соотношения для турбулентного напряжения $\tau^{\text{т}}$ или турбулентной вязкости ε_τ. Имеется достаточно много различных моделей турбулентного переноса (см., например, [18—21]). Однако наиболее удачной по праву считается одна из первых моделей, предложенная Прандтлем и получившая в литературе название **«гипотеза Прандтля о длине пути перемешивания»**.

Рассмотрим осредненное плоское течение в пограничном слое, когда отлична от нуля только продольная составляющая скорости $\bar{u}_x(y)$ (рис. 8.19). Прандтль предположил, что частица («турбулентный моль») жидкости, участвуя в хаотическом движении, не изменяет значения своей скорости на некотором участке пути l, который он назвал **длиной пути перемешивания (смешения)**. При переходе из слоя с координатой y в слой с координатой $y + l$ или в слой с координатой $y - l$ скорость $\bar{u}_x$

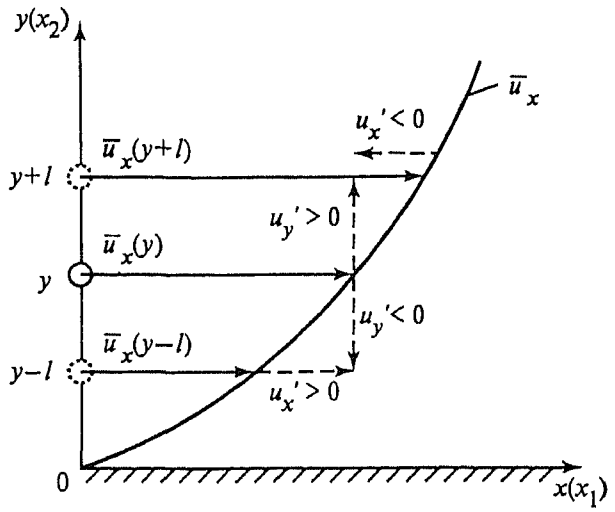


Рис. 8.19. Иллюстрация гипотезы Прандтля о длине пути перемешивания

в этом слое изменяется скачком, причем величина этого скачка рассматривается как пульсация скорости. Итак,

$$u_x' \approx \left|\bar{u}_x(y+l) - \bar{u}_x(y)\right| \approx \left|\bar{u}_x(y-l) - \bar{u}_x(y)\right| .$$

Раскладывая $\bar{u}_x(y \pm l)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членом, пропорциональным l (l — малая величина), получаем

$$u_x' = l \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} . \qquad (8.12)$$

Далее Прандтль предположил, что пульсация поперечной составляющей скорости имеет тот же порядок, что и продольной, т.е.

$$u_y' \approx u_x' = l \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} . \qquad (8.12a)$$

Тогда из (8.12) и (8.12а) после операции осреднения получим выражение для турбулентного напряжения Рейнольдса:

$$\tau^{\mathrm{T}} = -\rho\overline{u_x' u_y'} = \rho l_\tau^2 \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y}\left|\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y}\right| ,$$

где $l_\tau = \bar{l}$ — осредненное значение величины l, поскольку последняя является случайной величиной. Именно осредненную величину l_τ мы впредь будем называть *длиной пути перемешивания*. Очевидно, что в рассуждениях Прандтля о хаотическом движении турбулентных молей просматривается аналогия с представлениями молекулярно-кинети-

ческой теории о хаотическом движении молекул идеального газа, так, что длина пути перемешивания l_τ является некоторым аналогом средней длины свободного пробега молекул.

Модуль в этом соотношении появился для того, чтобы учесть, что знаки корреляции $\overline{u_x' u_y'}$ и производной $\mathrm{d}\bar{u}_x/\mathrm{d}y$ всегда противоположны, т.е.

$$\overline{u_x' u_y'} < 0, \text{ если } \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} > 0,$$

$$\overline{u_x' u_y'} > 0, \text{ если } \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} < 0$$

(этот вопрос рассматривается более подробно в § 8.7).

Сопоставив приведенное выше выражение для τ^T с (8.11), для турбулентной вязкости получим

$$\varepsilon_\tau = l_\tau^2 \left| \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}y} \right|. \tag{8.13}$$

Это — *известная формула Прандтля для коэффициента турбулентной вязкости.* Для того чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо иметь формулу для длины пути перемешивания l_τ.

Обратимся к соотношению (8.12). Величина производной $\mathrm{d}\bar{u}_x/\mathrm{d}y$ на стенке максимальна и *убывает* в направлении от стенки. Пульсации скорости на стенке $u_x' = 0$ (гипотеза прилипания), и их характерное значение *возрастает* в направлении от стенки. Учитывая эти обстоятельства, можно сделать вывод, что длина пути перемешивания должна достаточно сильно возрастать по *у. Прандтль* предположил, что l_τ *вблизи стенки линейно зависит от расстояния от стенки*:

$$l_\tau = \varkappa y, \tag{8.14}$$

где $\varkappa$ — константа, которая может быть определена *только из опыта.* В этом заключается «полуэмпиризм» модели Прандтля. По опытным данным Никурадзе[1] и других авторов $\varkappa \approx 0{,}4$.

---

[1] Никурадзе Иван Ильич (1894—1979 гг.) родился в Грузии, учился и работал в Германии, где был аспирантом Л. Прандтля.

8.5. СТАЦИОНАРНОЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ СТАБИЛИЗИРОВАННОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Рассмотрим течение в прямой круглой трубе диаметра $d = 2r_0$ в цилиндрической системе координат $\{x, r, \varphi\}$ [22]. Учтем, что в гидродинамически стабилизированном потоке для осредненной скорости и осредненного давления справедливо:

$$\bar{u}_r = \bar{u}_\varphi = 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} = 0; \quad \bar{p} = \bar{p}(x).$$

Тогда уравнение Рейнольдса принимает вид:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau_{xr}^{\Sigma}), \tag{8.15}$$

где

$$\tau_{xr}^{\Sigma} = \rho\nu\frac{d\bar{u}_x}{dr} - \rho\overline{u_x' u_r'} \tag{8.16}$$

— суммарное касательное напряжение.

8.5.1. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОТОКЕ

Проинтегрируем уравнение (8.15) по r:

$$r\tau_{xr}^{\Sigma} = \frac{r^2}{2}\frac{d\bar{p}}{dx} + c.$$

Положив $r = 0$, получим $c = 0$.

Тогда суммарное касательное напряжение на стенке (при $r = r_0$) равно

$$\tau_c = \frac{r_0}{2}\frac{d\bar{p}}{dx}, \tag{8.17}$$

а *профиль суммарного касательного напряжения — линейный*:

$$\frac{\tau_{xr}^{\Sigma}}{\tau_c} = \frac{r}{r_0} = R. \tag{8.18}$$

(Заметим, что при стабилизированном *ламинарном* течении в трубе по линейному закону изменяется *вязкое* напряжение.)

Продолжим анализ турбулентного течения в трубе. Сделаем замену системы координат. Дело в том, что наиболее существенные процессы происходят в пристеночной области потока, где практически не ощущается кривизна поверхности стенки. В связи с этим удобно перейти от

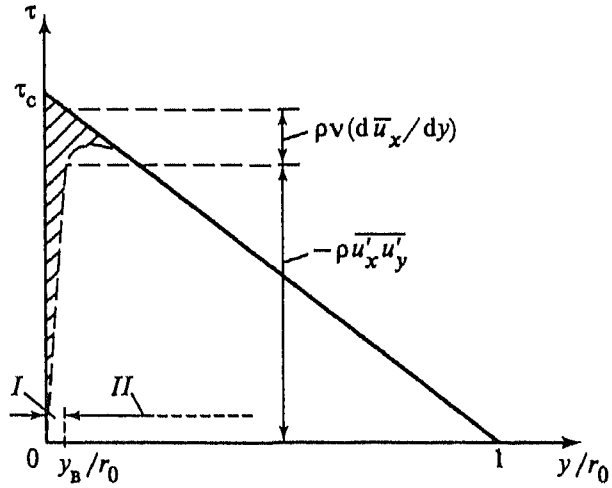


Рис. 8.20. Касательные напряжения в пристенном турбулентном потоке (эпюра вязких напряжений заштрихована):

I — вязкий подслой; *II* — турбулентное ядро

цилиндрической системы координат к прямоугольной декартовой, связав начало координат со стенкой.

Тогда с учетом очевидных соотношений $u_r = -u_y$; $\partial/\partial r = -\partial/\partial y$ формулы (8.16) и (8.17) для суммарного касательного напряжения $\tau = -\tau^{\Sigma}_{xr}$ преобразуются к виду:

$$\tau = \rho\nu\frac{d\bar{u}_x}{dy} - \rho\overline{u_x' u_y'}, \tag{8.19}$$

$$\frac{\tau}{\tau_c} = 1 - \frac{y}{r_0}. \tag{8.20}$$

Полученные соотношения иллюстрирует качественная схема (рис. 8.20), которая подтверждается опытными данными разных авторов. Как видно:

1. Молекулярное (вязкое) касательное напряжение $\rho\nu\frac{d\bar{u}_x}{dy}$ преобладает в узкой пристенной области течения — **вязком подслое**.

На стенке вязкое напряжение максимально и равно $\tau_c = \rho\nu\left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)_{y=0}$, а при увеличении координаты y оно резко падает, так что за пределами вязкого подслоя вклад вязкого напряжения в τ становится пренебрежимо малым.

2. Турбулентное касательное напряжение Рейнольдса $\tau^{T} = -\rho\overline{u_x' u_y'}$ на стенке равно нулю (на стенке $u_x' = u_y' = 0$ — гипотеза прилипания). Оно

возрастает в направлении от стенки, однако в пределах тонкого вязкого подслоя остается малым по сравнению с вязким напряжением. В **турбулентном ядре потока** иная ситуация: турбулентное напряжение абсолютно преобладает над вязким, превышая последнее в десятки — сотни раз.

3. Разумеется, между вязким подслоем и турбулентным ядром нет резкой границы, а существует так называемая **«переходная область»**, толщина которой в несколько раз превышает толщину вязкого подслоя.

8.5.2. ПРОФИЛЬ ОСРЕДНЕННОЙ СКОРОСТИ

Суммарное касательное напряжение согласно гипотезе Буссинеска можно представить как

$$\tau = \rho(\nu + \varepsilon_\tau)\frac{d\bar{u}_x}{dy}. \qquad (8.21)$$

Если известны τ и ε_τ, из (8.21) можно найти профиль скорости.

Для решения этой задачи Прандтлем была предложена **двухслойная модель** потока. Прандтль, по-видимому, впервые провел рассуждения, воспроизведенные выше (см. рис. 8.20), и пришел к выводу, что в первом приближении турбулентный поток по сечению можно разделить на две области:

вязкий подслой ($0 \le y \le y_в$), где $y_в$ — толщина вязкого подслоя, малая по величине;

турбулентное ядро ($y_в \le y \le r_0$).

Профиль скорости в вязком подслое

Вязкий подслой весьма тонок. Поэтому в выражении (8.20) можно пренебречь величиной y/r_0 по сравнению с единицей и считать, что в пределах вязкого подслоя $\tau = \tau_c = \text{const}$. Кроме того, мы уже знаем, что в вязком подслое турбулентное напряжение мало по сравнению с вязким ($\varepsilon_\tau << \nu$), поэтому можно положить $\varepsilon_\tau = 0$. Тогда уравнение (8.21) принимает вид

$$\tau_c = \rho\nu\frac{d\bar{u}_x}{dy}.$$

Интегрируя его с учетом граничного условия прилипания на стенке ($\bar{u}_x = 0$ при $y = 0$), получаем

$$\bar{u}_x = \frac{\tau_c}{\rho\nu}y.$$

Скорость в вязком подслое *линейно возрастает* с увеличением расстояния от стенки. Последнее выражение полезно привести к безраз-

мерному виду. Введем масштаб скорости — так называемую **динамическую скорость** (м/с):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}}. \qquad (8.22)$$

Нетрудно показать, что динамическая скорость имеет величину порядка пульсаций скорости. Действительно, вблизи стенки (но не на самой стенке!) $\tau^T = -\rho\overline{u_x' u_y'} \approx \tau_c$ (см. рис. 8.20).

Но $u_x' \approx u_y' \approx u'$, тогда $u' \approx \sqrt{\tau_c/\rho} = u_*$.

Введем безразмерные величины:

$\varphi = \dfrac{\bar{u}_x}{u_*}$ — безразмерную скорость;

$\eta = \dfrac{u_* y}{\nu}$ — безразмерное расстояние от стенки;

$\eta_в = \dfrac{u_* y_в}{\nu}$ — безразмерную толщину вязкого подслоя;

$\eta_0 = \dfrac{u_* r_0}{\nu}$ — безразмерную координату оси трубы.

Тогда в вязком подслое ($0 \le \eta \le \eta_в$) профиль скорости будет определяться выражением

$$\varphi = \eta. \qquad (8.23)$$

Профиль скорости в турбулентном ядре потока

Турбулентное ядро занимает почти все сечение трубы, кроме узкого пристенного вязкого подслоя. (Двухслойная модель Прандтля игнорирует переходную область между вязким подслоем и турбулентным ядром.) В турбулентном ядре потока молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной ($\nu << \varepsilon_\tau$), так что можно положить $\nu = 0$.

Далее Прандтль принял суммарное касательное напряжение в ядре потока постоянным и равным касательному напряжению на стенке $\tau = \tau_c = \text{const}$. Если для тонкого вязкого подслоя аналогичное допущение не вызывало возражений, то для турбулентного ядра потока оно представляется весьма странным, поскольку на самом деле τ в соответствии с (8.20) изменяется линейно по радиусу трубы. Однако столь грубое допущение оказалось вполне оправданным, так как оно не приводит

к существенным ошибкам и позволяет получить достоверные результаты. Действительно, из (8.20) и (8.21) получим выражения для расчета профиля скорости:

$$\bar{u}_x = \int_0^y \frac{\tau}{\rho(\nu + \varepsilon_\tau)}\,dy = \frac{\tau_c}{\rho}\int_0^y \frac{(1 - y/r_0)}{\nu + \varepsilon_\tau}\,dy. \qquad (8.24)$$

Как видно, при увеличении координаты y числитель подынтегрального выражения уменьшается, а знаменатель быстро растет за счет увеличения ε_τ. Поэтому основной вклад в интеграл дает подынтегральное выражение при малых y, где $\tau \approx \tau_c$.

Итак, с учетом допущений из (8.21) для турбулентного ядра потока имеем

$$\tau_c = \rho\varepsilon_\tau \frac{d\bar{u}_x}{dy}.$$

Уравнение содержит две неизвестные величины (проблема незамкнутости!). Для описания одной из них — коэффициента турбулентной вязкости — воспользуемся моделью Прандтля о пути перемешивания (8.13), (8.14) и получим

$$\tau_c = \rho\varkappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2,$$

откуда после перехода к безразмерным координатам φ и η и интегрирования имеем

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa}\ln\eta + A. \qquad (8.25)$$

Скорость в турбулентном ядре ($\eta_в \le \eta \le \eta_0$) изменяется по *логарифмическому закону*. Константа интегрирования A определяется из условия сращивания решения (8.23) и (8.25) на границе вязкого подслоя при $\eta = \eta_в$:

$$\varphi = \eta_в,$$

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa}\ln\eta_в + A,$$

откуда

$$A = \eta_в - \frac{1}{\varkappa}\ln\eta_в. \qquad (8.26)$$

Значения $\eta_в$ и $\varkappa$ можно найти только из опыта. Измерения, проведенные Никурадзе для течения в круглой трубе, свидетельствуют, что при

$Re > 10^4$ эти величины представляют собой универсальные константы, не зависящие от Re:

$$\eta_в = 11{,}7; \quad \varkappa = 0{,}4.$$

Тогда из (8.26) имеем $A = 5{,}5$.

Объединяя результаты, записанные для вязкого подслоя и турбулентного ядра, получим профиль скорости при турбулентном течении в трубе по Прандтлю—Никурадзе (рис. 8.21):

$$\begin{aligned} &\varphi = \eta; && 0 \le \eta \le 11{,}7; \\ &\varphi = 2{,}5 \ln \eta + 5{,}5; && 11{,}7 \le \eta \le \eta_0, \end{aligned} \qquad (8.27)$$

где $\eta_0 = \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} \frac{r_0}{\nu}$ — безразмерная координата оси трубы.

Профиль скорости (8.27) при $Re > 10^4$ (по мнению ряда авторов — при $Re > 2 \cdot 10^4$) *является универсальным, т.е. в переменных* $\varphi(\eta)$ *не зависит от* Re.

Отклонения этого профиля скорости от опытных данных Никурадзе (рис. 8.21) наблюдаются в следующих областях:

при $5 \le \eta \le 30$ — в этой области $\varepsilon_\tau \approx \nu$ и нельзя пренебрегать любой из этих величин;

при $0{,}15\eta_0 \le \eta \le \eta_0$ — здесь начинает сказываться наше грубое допущение $\tau = \tau_c = \text{const}$.

В целом указанные отклонения невелики.

Универсальность профиля скорости проявляется не только в независимости от числа Рейнольдса. Существование вблизи стенки вязкого

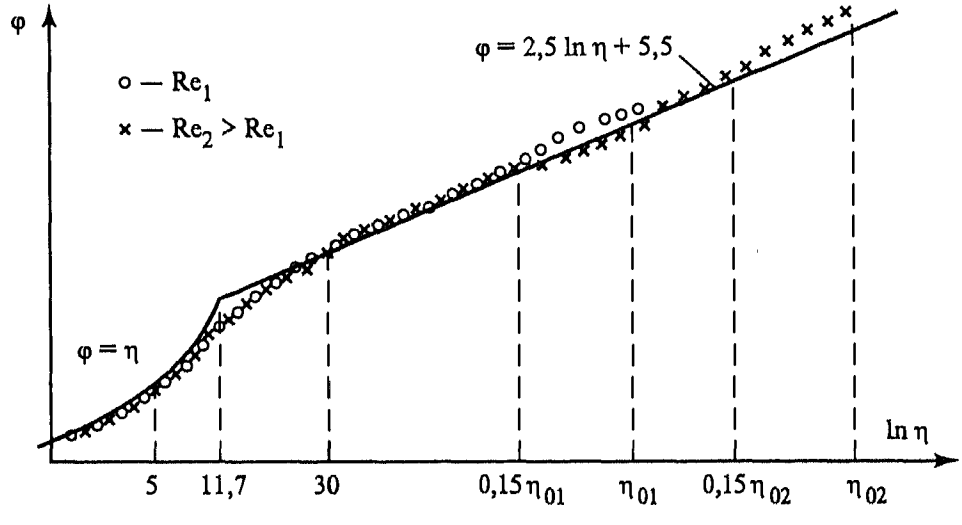


Рис. 8.21. Универсальный логарифмический профиль осредненной скорости турбулентного течения в трубе по Прандтлю—Никурадзе. $\eta_0 = f(\mathrm{Re})$

подслоя, в котором скорость линейно возрастает с увеличением расстояния от стенки, и логарифмического слоя характерно для всех турбулентных течений типа пограничного слоя: течения в каналах произвольной формы, обтекания поверхностей. В этом смысле зависимость $\varphi(\eta)$ вблизи стенки — в вязком и логарифмическом слое (ее еще называют «*законом стенки*») является универсальной для любых пристеночных течений.

Недостатками двухслойной модели Прандтля являются, во-первых, неравенство нулю градиента скорости на оси трубы

$$\left(\frac{\delta\varphi}{\delta\eta}\right)_{\eta=\eta_0} \approx \frac{1}{\varkappa\eta_0}$$

(хотя эта величина и достаточно малая), и, во-вторых, излом $\varphi(\eta)$ при $\eta = \eta_в$. Последний недостаток преодолен **в трехслойной модели Кармана**, в которой кроме вязкого подслоя и турбулентного ядра рассматривается переходная область между этими областями

$$\left.\begin{aligned} &\varphi=\eta; && 0 \le \eta \le 5;\\ &\varphi=5\left(1+\ln\frac{\eta}{5}\right); && 5 \le \eta \le 30;\\ &\varphi=2{,}5\ln\eta + 5{,}5; && 30 \le \eta \le \eta_0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.28)$$

Некоторые авторы пытались описать профиль скорости по всему сечению трубы, от стенки до оси, единой зависимостью. Наилучшей среди них считается **формула Рейхардта**, отлично совпадающая с опытными данными:

$$\varphi = \frac{1}{\varkappa}\ln\left[(1+\varkappa\eta)\frac{1{,}5(1+R)}{1+2R^2}\right] + 7{,}8\left(1 - e^{\eta/\eta_в} - \frac{\eta}{\eta_в}e^{-0{,}33\eta}\right); \qquad (8.29)$$

$$\varkappa = 0{,}4; \quad \eta_в = 11{,}0; \quad R = \frac{r}{r_0}.$$

8.5.3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ

Имеются два пути таких расчетов.

Первый путь: использование формул для расчета профилей скорости, например (8.27)—(8.29).

Рассмотрим **пример**.

Дано: круглая труба диаметра $d = 2r_0$; массовый расход жидкости G; свойства жидкости –ν, ρ.

Требуется рассчитать: профиль скорости $\bar{u}_x = f(R)$.

Порядок расчета.

1. Определяем среднюю по сечению скорость

$$U = 4G/(\pi d^2 \rho),$$

и число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = 4G/(\pi d \rho \nu).$$

Если $\mathrm{Re} > 10^4$ (лучше $\mathrm{Re} > 2 \cdot 10^4$), то можно воспользоваться одной из универсальных зависимостей (8.27)—(8.29). Если $\mathrm{Re} < 10^4$, то универсальный «закон стенки» нарушается, и следует использовать специальные методы расчета, например модель Попова—Беляева (8.35). Выберем модель Прандтля—Никурадзе (8.27) как наиболее простую.

2. Чтобы воспользоваться формулами (8.27), необходимо определить динамическую скорость $u_* = \sqrt{\tau_c/\rho}$ и безразмерную координату оси трубы $\eta_0 = u_* r_0/\nu$. Используя выражение для коэффициента сопротивления трения

$$\xi_\tau = \frac{8\tau_c}{\rho U^2},$$

который для гидродинамически стабилизированного течения равен коэффициенту гидравлического сопротивления $\xi_\tau = \xi_\infty$, получим

$$u_* = U\sqrt{\frac{\xi_\infty}{8}}, \tag{8.30}$$

$$\eta_0 = \frac{\mathrm{Re}}{2}\sqrt{\frac{\xi_\infty}{8}} = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{\xi_\infty}{32}}. \tag{8.31}$$

Следовательно, чтобы воспользоваться *универсальным профилем скорости*, необходимо знать *зависимость* $\xi_\infty(\mathrm{Re})$, для чего приходится привлекать *эмпирические соотношения*, о которых речь пойдет ниже, в п. 8.5.4.

3. По формулам (8.27) рассчитываем таблицу функции профиля скорости $\varphi_i(\eta_i)$ в вязком подслое ($0 \le \eta \le 11{,}7$) и турбулентном ядре ($11{,}7 \le \eta \le \eta_0$). При этом необходимо помнить, что функция $\varphi(\eta)$ изменяется тем сильнее, чем меньше величина η. Поэтому следует приме-

нять неравномерное (например, логарифмическое) разбиение оси координат η_i.

Последняя операция — переход от универсального представления скорости $\varphi(\eta)$ к требуемому виду $\bar{u}_x(R)$. Для этого используем очевидные преобразования:

$$\bar{u}_x = \varphi U, \quad R = 1 - y/r_0 = 1 - \eta/\eta_0.$$

Второй путь расчета профиля скорости, более точный — интегрирование уравнения (8.24) с использованием той или иной зависимости для турбулентной вязкости ε_τ. Укажем некоторые наиболее часто используемые модельные соотношения для коэффициента турбулентной вязкости:

по Прандтлю

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\tau &= 0, && 0 \le \eta \le 11{,}7; \\ \varepsilon_\tau &= l_\tau^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy}, && 11{,}7 \le \eta \le \eta_0, \end{aligned}\right\} \qquad (8.32)$$

где $l_\tau = \varkappa y$;

по Прандтлю с поправкой Ван-Дриста

$$\varepsilon_\tau = l_\tau^2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \quad (0 \le \eta \le \eta_0), \qquad (8.33)$$

где $l_\tau = \varkappa y[1 - \exp(-\eta/26)]$;

по Рейхардту

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} &= 0{,}4\left(\eta - 11\,\mathrm{th}\frac{\eta}{11}\right), && 0 \le \eta \le 50; \\ \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} &= 0{,}133\eta(0{,}5 + R^2)(1 + R), && 50 \le \eta \le \eta_0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.34)$$

Среди перечисленных выражений для ε_τ модель Рейхардта, на наш взгляд, предпочтительней. Однако она, как и формулы (8.32), (8.33), может быть использована при достаточно больших числах Рейнольдса, когда справедлив универсальный «закон стенки» $\varphi(\eta)$.

Для сравнительно малых чисел Рейнольдса турбулентного течения $\mathrm{Re} = (3—20) \cdot 10^3$, как уже было отмечено, можно рекомендовать соотношения, предложенные В.Н. Поповым и В.М. Беляевым [23]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} &= \varkappa[\eta - \eta_в \mathrm{th}(\eta/\eta_в)], && 0 \le \eta \le \eta_\delta; \\ \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} &= \frac{\varkappa}{3}(\eta - \eta_{в1})(0{,}5 + R^2)(1 + R), && \eta_\delta \le \eta \le \eta_0, \end{aligned}\right\} \qquad (8.35)$$

где

$$\varkappa = 0{,}41;\ \eta_в = 11{,}1 + \left(\frac{396}{\eta_0 + 100}\right)^{3{,}3};$$

$$\eta_\delta = 9{,}2\left|\lg(\eta_0/237) - 0{,}17\,\mathrm{th}\left(\frac{\lg(\eta_0/237)}{0{,}17}\right)\right| + 18{,}7;$$

$$\eta_{в1} = \eta_\delta - 3[\eta_\delta - \eta_в \mathrm{th}(\eta_\delta/\eta_в)]\Big/\left\{[0{,}5 + (1 - \eta_\delta/\eta_0)^2](2 - \eta_\delta/\eta_0)\right\}.$$

При $\mathrm{Re} > 20 \cdot 10^3$ соотношения (8.35) переходят в формулы Рейхардта (8.34).

Итак, выберем то или иное выражение для ε_τ, которое должно быть подставлено в формулу (8.24). Последняя с учетом (8.18), (8.31) преобразуется к виду

$$\frac{\bar{u}_x(R)}{U} = \frac{\xi_\infty \mathrm{Re}}{16} \int_R^1 \frac{R\,\mathrm{d}R}{1 + \varepsilon_\tau/\nu}. \qquad (8.36)$$

Поскольку η_0 и ξ_∞ неизвестны, расчет ведется методом последовательных приближений и состоит из следующих этапов.

1. В первом приближении задается $\xi_\infty(\mathrm{Re})$ (например, по эмпирической зависимости).

2. Рассчитывается η_0 по (8.31) и ε_τ/ν.

3. Находится профиль скорости по (8.36).

4. По вычисленному профилю скорости (дифференцированием на стенке при $R = 1$) находится новое значение ξ_∞. Действительно, согласно определению касательного напряжения на стенке

$$\tau_c = -\mu\left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}r}\right)_{r=r_0}$$

и

$$\xi_\infty = \frac{16}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\mathrm{d}(\bar{u}_x/U)}{\mathrm{d}R}\right]_{R=1}. \qquad (8.37)$$

Далее вычисления повторяются с п. 2 до п. 4 до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Коэффициент сопротивления в п. 4 можно найти не по (8.37), а другим способом. Согласно определению средней по сечению скорости

$$U = 2\int_0^1 \bar{u}_x(R) R \, dR,$$

откуда имеем:

$$\int_0^1 \frac{\bar{u}_x}{U} R \, dR = 0{,}5 .$$

Интегрируя по сечению (8.36), получаем

$$\frac{\xi_\infty \mathrm{Re}}{16} \int_0^1 R \left(\int_R^1 \frac{R \, dR}{1 + \varepsilon_\tau / \nu} \right) dR = 0{,}5 ,$$

откуда

$$\xi_\infty = \frac{8/\mathrm{Re}}{\int_0^1 R \left(\int_R^1 \frac{R \, dR}{1 + \varepsilon_\tau / \nu} \right) dR} .$$

При выполнении п. 3 в правую часть (8.36) вместо ξ_∞ следует подставить приведенное выше выражение. Это увеличит скорость схождения итераций.

Профили скорости показаны на рис. 8.22. В координатах $\frac{\bar{u}_x(R)}{U}$ профиль скорости зависит от числа Рейнольдса, и чем *больше* Re, тем *более заполненным* он становится. Основное изменение скорости происходит в узком слое вблизи стенки, и, в отличие от параболы Пуазейля для ламинарного течения, при турбулентном течении профиль скорости — равномерный практически по всему сечению трубы.

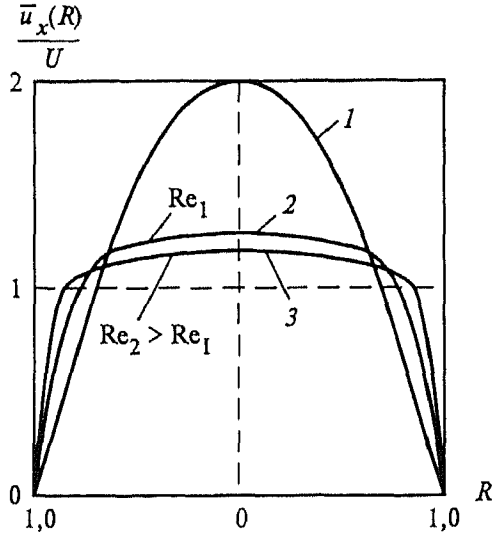


Рис. 8.22. Сравнение формы профилей скорости при стабилизированных ламинарном и турбулентном течениях в трубе: *1* — парабола Пуазейля; *2*, *3* — турбулентные профили осредненной скорости

Значения безразмерной скорости в центре трубы уменьшаются с увеличением Re, приближаясь к единице.

8.5.4. КОЭФФИЦИЕНТ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

На рис. 8.23 показана зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса при ламинарном и турбулентном течении в трубе. Для турбулентного течения характерны *более высокие значения* ξ_∞ и менее интенсивное его уменьшение при увеличении Re. Существуют эмпирические зависимости, по которым можно рассчитать ξ_∞ с погрешностью в несколько процентов:

формула Блазиуса

$$\xi_\infty = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}^{0{,}25}}, \quad 4 \cdot 10^3 \le \mathrm{Re} < 10^5; \tag{8.38}$$

формула Филоненко

$$\xi_\infty = \frac{1}{(1{,}82 \lg \mathrm{Re} - 1{,}64)^2}, \quad 10^4 < \mathrm{Re} < 3{,}2 \cdot 10^6. \tag{8.39}$$

Зная зависимость $\xi_\infty(\mathrm{Re})$, можно вычислить перепад давления на участке трубы вдали от входа длиной l при заданном значении средней ско-

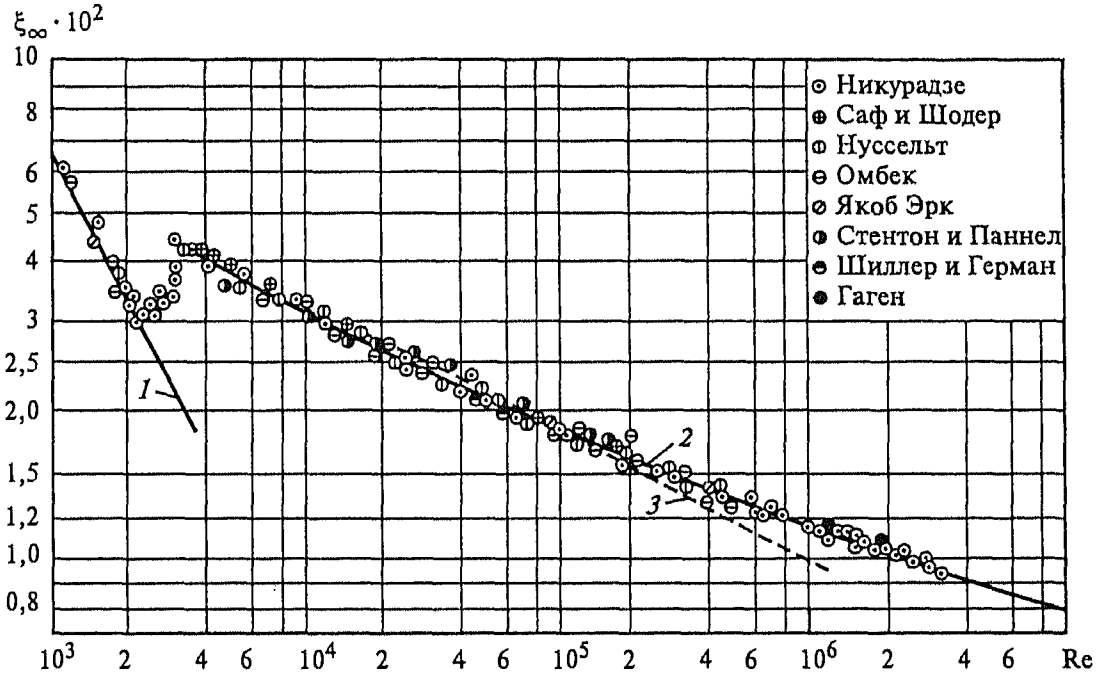


Рис. 8.23. Зависимость коэффициента сопротивления при ламинарном и турбулентном течении в гладкой трубе (цитируется по [18]):

1— $\xi_л = 64/\mathrm{Re}$; *2* — по формуле (8.39); *3* — $\xi_т = 0{,}3164/\mathrm{Re}^{0{,}25}$

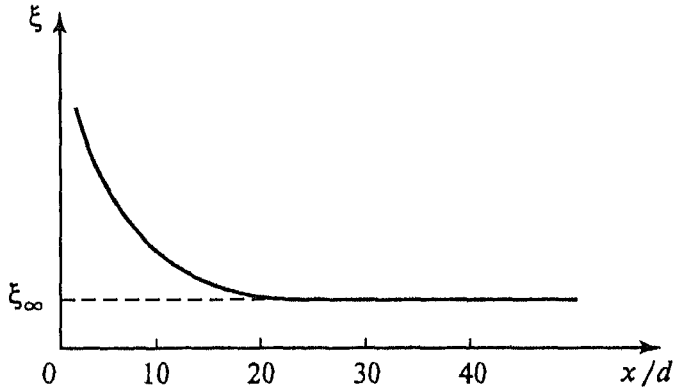


Рис. 8.24. Характер изменения коэффициента сопротивления по длине гладкой трубы при развитом турбулентном течении ($Re > 2 \cdot 10^4$)

рости $\bar{u}$: $\Delta p = \xi_\infty \frac{\rho U^2}{2} \frac{l}{d}$. Для ламинарного течения $\xi_\infty \sim \frac{1}{Re^{0,25}} \sim \frac{1}{U}$ и $\Delta p \sim \bar{U}$. Для турбулентного течения $\xi_\infty \sim \frac{1}{Re^{0,25}} \sim \frac{1}{U^{0,25}}$ и $\Delta p \sim U^{1,75} \approx \approx U^2$, т.е. почти квадратичная зависимость вместо линейной при ламинарном течении.

На участке *гидродинамической стабилизации* изменение коэффициента гидравлического сопротивления по длине трубы имеет тот же характер, что и при ламинарном течении (рис. 8.24).

Однако длина участка гидродинамической стабилизации оказывается существенно меньшей: для $Re > 10^4$ эта длина $l_{н.у} = 20—30$ и практически не зависит от Re.

Выше были приведены зависимости для гладких труб. Однако на практике трубы всегда **шероховатые**. Причины шероховатости:

технология обработки;

отложения в теплоносителе;

коррозия, повреждения труб;

искусственная шероховатость различного типа («песочная», винтовая нарезка и т.п.).

Считается, что шероховатость не сказывается при ламинарном режиме течения и не влияет на критическое число Рейнольдса [10].

При турбулентном течении шероховатость по разному будет влиять на гидравлическое сопротивление в зависимости от значений безразмерной высоты выступов $k_s u_* / \nu$. Эта величина характеризует отношение средней высоты выступов k_s к толщине вязкого подслоя $y_в \approx \nu / u_*$. Согласно опытным данным различных авторов, различают три режима (рис. 8.25).

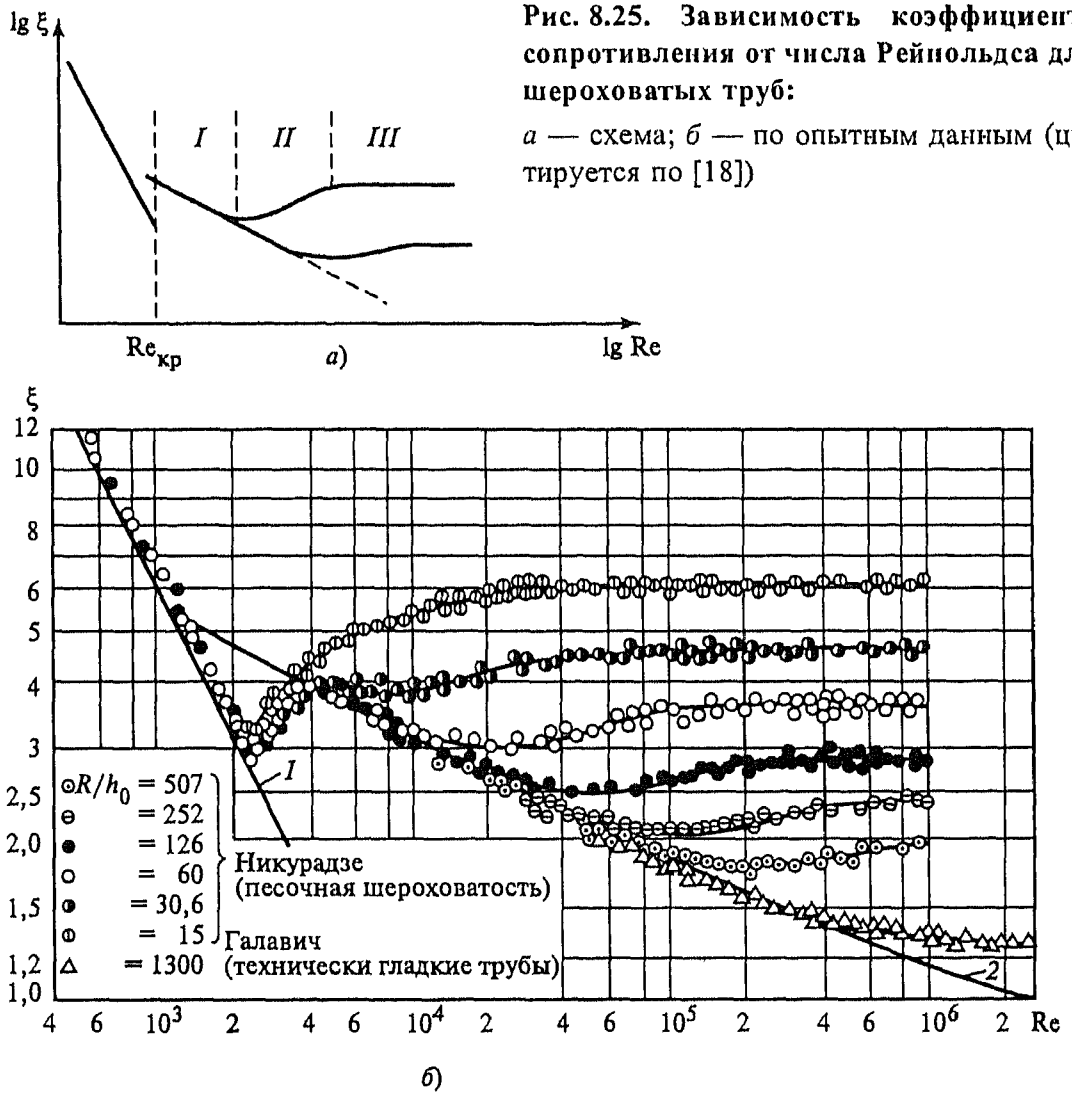


Рис. 8.25. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для шероховатых труб:

а — схема; *б* — по опытным данным (цитируется по [18])

I режим осуществляется при $0 \le k_s u_* / \nu \le 5$ — это режим гидравлически гладкой трубы. Гидродинамические характеристики в этом случае такие же, как и для гладких труб, поскольку шероховатости тонут в вязком подслое.

II режим — переходный, $5 \le k_s u_* / \nu \le 70$; в этом режиме $\xi_\infty = f(\mathrm{Re},\ k_s u_* / \nu)$. Выступы дополнительно турбулизируют поток, что приводит к увеличению гидравлического сопротивления по сравнению с закономерностью для гладких труб.

III режим осуществляется при $k_s u_* / \nu > 70$; в этом режиме коэффициент сопротивления перестает зависеть от числа Рейнольдса: $\xi_\infty = f(k_s u_* / \nu)$. Для конкретной трубы с определенной шероховатостью перепад давления пропорционален квадрату средней скорости $\Delta p \approx U^2$.

В этом случае благодаря высоким выступам, по-видимому, достигается предельная турбулизация потока, и увеличение числа Рейнольдса перестает сказываться на гидродинамических характеристиках.

Несколько иное объяснение экспериментального факта независимости ξ_∞ от Re на *III* режиме приводится в монографии Г. Шлихтинга [10]. По мнению автора, закономерности обтекания крупных выступов должны быть близки к закономерностям внешнего обтекания тел. В последнем случае сопротивление почти не зависит от скорости набегающего потока в широком интервале чисел Рейнольдса, вплоть до возникновения кризиса сопротивления (см. рис. 7.15).

Поскольку безразмерную высоту выступов можно представить как $\frac{k_s u_*}{\nu} = \frac{k_s}{r_0}\mathrm{Re}\sqrt{\frac{\xi_\infty}{32}}$ и она возрастает с увеличением Re (толщина вязкого подслоя падает), то одна и та же труба может быть гидравлически гладкой при малых Re и шероховатой при больших Re.

На рис. 8.25 показано изменение коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса при разной относительной шероховатости. Чем больше k_s/r_0, тем при меньших Re наступает переходный режим и тем выше ξ_∞ в режимах *II*, *III*.

8.6. ВАЖНЕЙШИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Пусть $u(\mathbf{x}; t)$ — некоторое стационарное случайное поле, обладающее свойством эргодичности (см п. 8.4.1). В роли $u(\mathbf{x}; t)$ может, например, выступать поле температурных пульсаций или i-я компонента пульсаций скорости.

В ходе многочисленных экспериментальных исследований структуры турбулентности сложился некий «стандартный перечень» наиболее важных для практики статистических характеристик [11, 16, 18, 24]. Перечислим некоторые из них.

8.6.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Математическое ожидание определяется следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (8.40)$$

Строго говоря, выражение (8.40) дает точное значение математического ожидания стационарного эргодического процесса только при $T \to \infty$,

а для конечных значений T правильнее говорить об *оценке* математического ожидания.

Математическое ожидание характеризует средний уровень, вокруг которого пульсирует случайный процесс. Если $u(t)$ — поле скорости, то математическое ожидание есть осредненное значение скорости в данной точке турбулентного потока (см. график профиля осредненной скорости на рис. 8.22).

8.6.2. ДИСПЕРСИЯ И ИНТЕНСИВНОСТЬ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

Дисперсия σ_u^2 — среднее значение квадрата *центрированного* (пульсационного) процесса:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (u(t) - \bar{u})^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T [u'(t)]^2 \, dt. \qquad (8.41)$$

В турбулентном потоке каждая компонента пульсаций скорости u_x', u_y', u_z' характеризуется своим значением дисперсии:

$$\sigma_{u_x}^2 = \overline{(u_x')^2}, \quad \sigma_{u_y}^2 = \overline{(u_y')^2}, \quad \sigma_{u_z}^2 = \overline{(u_z')^2}.$$

Дисперсия является одной из важнейших характеристик турбулентности, поскольку пропорциональна энергии пульсаций. Так, величина турбулентной энергии $K_т$ (см. § 8.7), очевидно, равна:

$$K_т = \frac{\overline{\rho u_j' u_j'}}{2} = \frac{\rho}{2}\left(\sigma_{u_x}^2 + \sigma_{u_y}^2 + \sigma_{u_z}^2\right).$$

Величина $\sigma_u = +\sqrt{\sigma_u^2}$ в гидромеханике носит название **интенсивность пульсаций**. Размерность σ_u совпадает с размерностью самого пульсационного процесса, поэтому σ_u можно трактовать как «средний размах пульсаций».

На рис. 8.26 приведены профили интенсивности всех трех компонент пульсаций скорости для пристенной области турбулентного потока в трубе. Кривые на этом рисунке получены обобщением большого количества опытных данных разных авторов, но сами опытные точки не нанесены, чтобы не загромождать графики. Характер зависимости интенсивности компонент пульсаций скорости от поперечной координаты подробно обсуждается в п. 8.7.3.

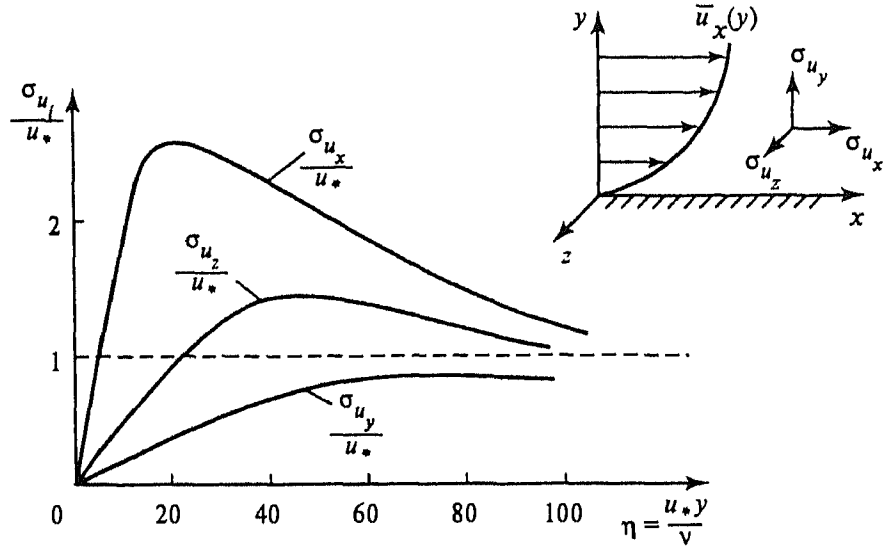


Рис. 8.26. Интенсивность турбулентных пульсаций скорости пристенного течения (по опытным данным разных авторов)

В теории турбулентности также широко используется понятие «**степень турбулентности**» ε (%):

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\sigma_{u_x}^2 + \sigma_{u_y}^2 + \sigma_{u_z}^2}}{\bar{u}_x}. \qquad (8.42)$$

В выражении (8.42) предполагается, что ось x совпадает с направлением осредненного течения.

8.6.3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПУЛЬСАЦИЙ

Корреляционная функция, вообще говоря, представляет собой осредненное произведение вида

$$B_{uv}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) = \overline{u'(\mathbf{x}_1, t_1) v'(\mathbf{x}_2, t_2)}, \qquad (8.43)$$

где $u'(\mathbf{x}_1, t_1) = u(\mathbf{x}_1, t_1) - \bar{u}(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $v(\mathbf{x}_2, t_2) = v(\mathbf{x}_2, t_2) - \bar{v}(\mathbf{x}_2, t_2)$ — случайные поля пульсационных величин.

Практическая и научная значимость корреляционной функции заключается в том, что она является мерой статистической связи (correlation—взаимосвязь) между пульсациями в разных точках пространства и (или) в разные моменты времени.

Различают следующие разновидности корреляционных функций.

1. Если u и v — случайные поля различных физических величин (скорости и температуры, различных компонент скорости и т.п.), то функцию B_{uv} будем называть **взаимно-корреляционной функцией**.

2. Если $t_1 = t_2$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, т.е. рассматривается процесс в один и тот же момент времени, но в разных пространственных точках, то $B_{uv}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ называется **пространственной корреляционной функцией**.

3. Если $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, $t_1 \neq t_2$, то $B_{uv}(t_1, t_2)$ будем называть **временной корреляционной функцией**.

4. Если $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, $t_1 \neq t_2$, то корреляционную функцию называют **пространственно-временной**.

Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса

Эта функция представляет собой частный случай временной корреляционной функции, если $u(t)$ и $v(t)$ — один и тот же процесс (например, одна и та же компонента скорости):

$$B_{uu}(t_1, t_2) = \overline{[u(t_1) - \bar{u}(t_1)][u(t_2) - \bar{u}(t_2)]} = \overline{u'(t_1)u'(t_2)},$$

т.е. автокорреляционная функция характеризует статистическую связь пульсационного процесса $u'(t)$ «с самим собой» в другие моменты времени.

Обозначим $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$ и учтем, что для стационарного процесса автокорреляционная функция не должна зависеть от t и зависит только от τ, т.е. $B_{uu}(t_1, t_2) = B_{uu}(t, \tau) = B_{uu}(\tau)$. Тогда можно записать:

$$B_{uu}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T u'(t)u'(t+\tau)\,dt. \qquad (8.44)$$

Рассмотрим основные свойства автокорреляционной функции стационарного случайного процесса:

1. $B_{uu}(\tau) = B_{uu}(-\tau)$ — автокорреляционная функция является четной.

2. Из сопоставлений (8.44) и (8.41) очевидно, что автокорреляционная функция при нулевом значении аргумента τ равна дисперсии

$$B_{uu}(0) = \sigma_u^2.$$

3. При любом τ

$B_{uu}(0) \geq B_{uu}(\tau)$, т.е. автокорреляционная функция не превосходит своего значения при $\tau = 0$.

4. $B_{uu}(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$,

т.е. случайный процесс «помнит» свою предысторию только некоторый конечный промежуток времени.

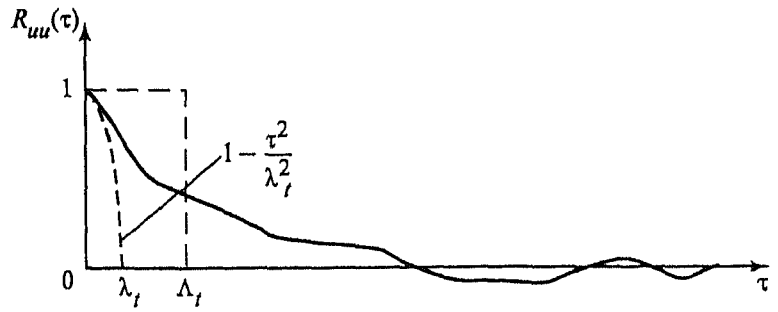


Рис. 8.27. Типичная кривая коэффициента автокорреляции турбулентных пульсаций. λ_t, Λ_t — тейлоровские временные микро- и макромасштаб

Часто используют **коэффициент автокорреляции** — автокорреляционную функцию, нормированную делением на ее значение при $\tau = 0$:

$$R_{uu}(\tau) = \frac{B_{uu}(\tau)}{B_{uu}(0)} = \frac{B_{uu}(\tau)}{\sigma_u^2}.$$

Очевидно, что $0 \le R_{uu}(\tau) \le 1$, причем единица соответствует 100 %-ной корреляции, а нуль — отсутствию какой-либо статистической связи. На рис. 8.27 представлен характерный вид коэффициента автокорреляции турбулентных пульсаций. Форма кривой $R_{uu}(\tau)$ содержит информацию о характере и темпе протекания данного случайного процесса.

В частности, можно определить **временны́е масштабы**, впервые введенные Д. Тейлором:

тейлоровский временно́й микромасштаб λ_t

$$\frac{1}{\lambda_t^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R_{uu}(\tau)}{\partial \tau^2}\right]_{\tau=0}; \qquad (8.45)$$

тейлоровский временно́й макромасштаб (интегральный масштаб) Λ_t

$$\Lambda_t = \int_0^\infty R_{uu}(\tau)\, d\tau. \qquad (8.46)$$

Физический смысл λ_t и Λ_t заключается в следующем. Стационарный случайный процесс $u(t)$ может быть представлен как суперпозиция гармонических колебаний разных частот (спектральное представление). На осциллограмме турбулентных пульсаций обычно можно выделить и высокочастотные колебания, и колебания большого периода. Принято считать [11], что микромасштаб λ_t по порядку величины равен периоду

характерных высокочастотных колебаний, а макромасштаб Λ_t — периоду колебаний низкой частоты.

8.6.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Стационарный случайный процесс может быть разложен в спектр [16, 24]. При этом для энергии процесса справедливо:

$$\sigma_u^2 = \int_0^\infty E(\omega)\, d\omega,$$

где $E_{uu}(\omega)$ — **временная спектральная плотность.**

Функция $E_{uu}(\omega)$, которую для краткости называют временны́м (частотным) спектром, показывает, как распределена по частотам ω энергия данного процесса $u(t)$ (рис. 8.28).

В соответствии с **теоремой Винера—Хинчина** [17, 24] *автокорреляционная функция и частотный спектр стационарного случайного процесса связаны взаимными преобразованиями Фурье:*

$$\left.\begin{aligned} B(\tau) &= \int_0^\infty E(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega, \\ E(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (8.47)$$

Используя (8.47), нетрудно получить соотношения, связывающие временные микро- и макромасштабы с частотным спектром:

$$\frac{1}{\lambda_t^2} = \frac{1}{2\sigma_u^2}\int_0^\infty \omega^2 E(\omega)\, d\omega; \qquad (8.48)$$

$$\Lambda_t = \frac{\pi}{2\sigma_u^2}\lim_{\omega\to 0} E(\omega). \qquad (8.49)$$

Соотношения (8.48) и (8.49) интересно сопоставить соответственно с (8.45) и (8.46). Как видно, микромасштаб удобнее и точнее оценивать с использованием функции $E(\omega)$ по

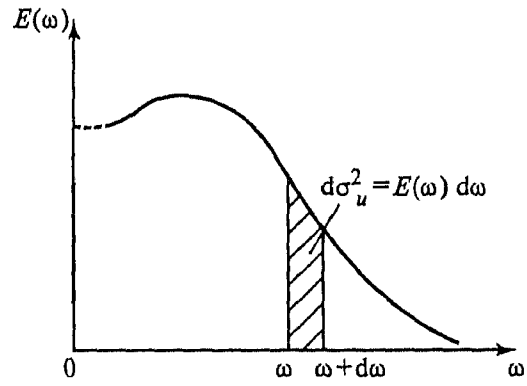


Рис. 8.28. Временная спектральная плотность турбулентного процесса

формуле (8.48), а интегральный масштаб, напротив, — по формуле (8.46) на основании данных о коэффициенте автокорреляции.

Если объектом исследования является турбулентное поле скорости, то, очевидно, вышеуказанные статистические характеристики должны определяться для каждой компоненты пульсаций u_x', u_y' и u_z'. При этом для разных компонент пульсаций автокорреляционные функции, частотные спектры и временны́е масштабы, вообще говоря, могут существенно различаться.

Автокорреляционная функция и частотный спектр дают возможность получить и другую интересную информацию о временны́х статистических связях, характерных для рассматриваемого случайного процесса. Однако они не позволяют непосредственно судить о пространственной структуре турбулентного потока, поскольку вид функций $B_{uu}(\tau)$ и $E_{uu}(\omega)$ определяется не только формой, размером и временем жизни турбулентных структурных образований, но и величиной местной осредненной скорости течения [18].

Сведения о пространственной структуре турбулентности можно получить из **пространственных корреляционных функций и пространственных спектров** [24].

8.6.5. ТЕНЗОР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОЛЯ СКОРОСТИ

Среди важнейших статистических характеристик турбулентности особое место занимают пространственные корреляционные функции пульсационного поля скорости, имеющие вид

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i'(\mathbf{x}, t)u_j'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}. \qquad (8.50)$$

Данная функция характеризует статистическую связь между i-й компонентой пульсации скорости в точке пространства с координатой $\mathbf{x}$ и j-й компонентой в точке $(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ (рис. 8.29). Поскольку в выражении (8.50) индексы могут принимать значения $i, j = 1, 2$ или 3, то (8.50) представляет собой общее выражение любой компоненты тензора второго ранга типа «диада» (см. приложение), называемого **тензором пространственных корреляций поля скорости**. В общем случае компоненты этого тензора зави-

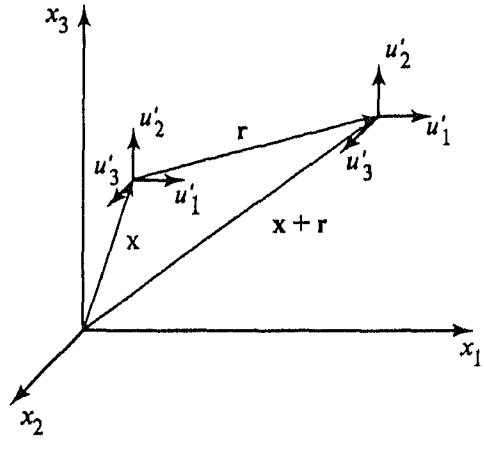


Рис. 8.29. К определению тензора пространственных корреляций турбулентных пульсаций скорости

сят от координаты **x** и пространственного сдвига **r** между точками, а для нестационарных полей — и от времени:

$$B_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} B_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) & B_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) & B_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \\ B_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) & B_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) & B_{23}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \\ B_{31}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) & B_{32}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) & B_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \end{pmatrix}.$$

Исследования пространственных корреляционных функций (а в случае пространственно-однородных полей и пространственных спектров) оказываются весьма плодотворными, так как позволяют установить закономерности внутренних процессов, протекающих в турбулентных полях, оценить пространственные масштабы, характеризующие форму и размеры турбулентных «вихрей».

8.7. АНАЛИЗ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДАМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА

8.7.1. БАЛАНС ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Следуя подходу О. Рейнольдса, представим актуальные величины как сумму осредненных значений и пульсаций скорости:

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'.$$

Соответственно различают [11, 16, 18]:

$K = \rho \dfrac{\overline{u_i u_i}}{2}$ — **полную (суммарную) энергию турбулентного течения;**

$K_{\text{оср}} = \rho \dfrac{\bar{u}_i \bar{u}_i}{2}$ — **энергию осредненного течения;**

$K_{\text{т}} = \rho \dfrac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$ — **энергию турбулентных пульсаций скорости.**

Вначале получим уравнение сохранения для полной энергии турбулентного течения, включающей в себя энергию и осредненного, и пульсационного движений [16].

Для этого уравнение движения для актуальных величин (уравнение Навье—Стокса для i-й компоненты скорости)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

где $\sigma_{ik} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ — вязкие напряжения, домножим на u_j:

$$u_j\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}u_j\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j\frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{8.51}$$

Запишем также уравнение движения для j-й компоненты скорости, домноженное на u_i:

$$u_i\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i u_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}. \tag{8.52}$$

Сложив (8.51) и (8.52), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_j u_k) = -\frac{1}{\rho}\left(u_j\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{\rho}\left(u_j\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + u_i\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}\right). \tag{8.53}$$

Проведя осреднение уравнения (8.53), положив $i = j$ и умножив на $\rho/2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\overline{u_i u_i}}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{\overline{u_i u_i}}{2}u_k\right) = -\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}. \tag{8.54}$$

Все слагаемые этого уравнения имеют энергетический смысл. В частности, величина

$$K = \rho\frac{\overline{u_i u_i}}{2} = \rho\frac{\overline{u}_i\overline{u}_i}{2} + \rho\frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} = K_{\text{оср}} + K_{\text{т}} \tag{8.55}$$

представляет собой суммарную кинетическую энергию турбулентного потока в единице объема. Равенство (8.55) показывает, что полная энергия турбулентности K есть сумма энергии осредненного движения

$$K_{\text{оср}} = \rho\frac{\overline{u}_i\overline{u}_i}{2}$$

и энергии пульсационного движения:

$$K_{\text{т}} = \rho\frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} = \rho\left(\overline{(u_1')^2} + \overline{(u_2')^2} + \overline{(u_3')^2}\right).$$

Преобразуем слагаемые в правой части уравнения (8.54). К первому из них добавим равное нулю выражение $p(\partial u_i/\partial x_i)$:

$$\overline{-u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{pu_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{pu_k}). \tag{8.56}$$

Чтобы лучше понять смысл второго слагаемого в правой части (8.54), воспользуемся очевидным соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\sigma_{jk}u_i}) = u_i\overline{\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}} + \overline{\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}. \qquad (8.57)$$

Левая часть этого выражения представляет собой полную работу сил вязкости, задаваемых тензором вязких напряжений σ_{ik}. Слагаемые правой части (8.57) показывают, на что затрачивается эта работа. Первое из них — $\overline{u_i \partial \sigma_{ik}/\partial x_k}$ — та часть работы вязких сил, которая затрачивается на изменение кинетической энергии жидкой частицы. Действительно, $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$, как известно, есть равнодействующая сил вязкости, приложенных к жидкой частице. Если эта равнодействующая равна нулю, то вязкие силы не оказывают влияния на ускорение жидкой частицы.

Второе слагаемое $\overline{\sigma_{ik}(\partial u_i/\partial x_k)}$ описывает ту часть работы вязких сил, которая превращается в тепло. Эту величину обычно называют **скоростью вязкой диссипации** и обозначают $\rho\varepsilon$:

$$\rho\varepsilon = \overline{\sigma_{ik}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} = \mu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}}.$$

Нетрудно показать, что выражение, описывающее вязкую диссипацию $\rho\varepsilon$, всегда положительно.

Рассмотрим явно неотрицательную величину

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2} > 0.$$

Произведя несложные преобразования, получим

$$\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2} = \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + 2\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}} = 2\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)},$$

откуда для вязкой диссипации получим выражение

$$\rho\varepsilon = \frac{\mu}{2}\sum_{i,k}\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2}. \qquad (8.58)$$

Воспользовавшись выражениями (8.56) и (8.57), запишем уравнение баланса энергии (8.54) в виде

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{\overline{u_i u_i u_k}}{2} + \overline{p u_k} - \overline{\sigma_{ik} u_i}\right) = -\rho\varepsilon. \qquad (8.59)$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения определяет скорость изменения суммарной кинетической энергии турбулентного течения в произвольной точке потока. Остальные слагаемые описывают причины, по которым происходит это изменение.

$$\underset{A}{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{\overline{u_i u_i u_k}}{2}\right.} + \underset{B}{\left.\overline{p u_k}\right.} - \underset{C}{\left.\overline{\sigma_{ik} u_i}\right)}$$

— слагаемые дивергентного типа. Они характеризуют перераспределение энергии по пространству за счет соответственно конвективного переноса осредненной скоростью A, работы сил давления B и молекулярной диффузии C благодаря вязкости. Правая часть (8.59) содержит слагаемые $\rho\varepsilon$ — скорость вязкой диссипации, которая, очевидно, всегда дает отрицательный вклад в энергетический баланс.

Проинтегрируем уравнение (8.59) по объему V, ограниченному замкнутой твердой поверхностью S. При этом учтем, что на основании теоремы Остроградского—Гаусса интегрирование слагаемых дивергентного типа по объему сводится к интегрированию по поверхности:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\frac{\overline{u_i u_i u_k}}{2} + \overline{p u_k} - \overline{\sigma_{ik} u_i}\right) dV = \int_S \left(\rho\frac{\overline{u_i u_i u_k}}{2} + \overline{p u_k} - \overline{\sigma_{ik} u_i}\right) dS_k = 0\,. \qquad (8.60)$$

Равенство нулю здесь следует из граничного условия $u_k = 0$ на твердой поверхности. Уравнение (8.60) показывает, что члены дивергентного типа не могут изменить суммарную энергию в объеме V, а лишь перераспределяют ее по пространству в пределах этого объема. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V K\, dV = -\int_V \rho\varepsilon\, dV.$$

Суммарная кинетическая энергия в объеме V уменьшается, необратимо преобразуясь в тепло механизмом вязкой диссипации. Этот вывод очевиден и свидетельствует о том, что уравнение (8.59) не слишком информативно, поскольку является чересчур общим. Описывая баланс суммарной энергии, оно не дает возможности судить о сложных процессах обмена энергией между осредненным и пульсационным движением, в которых заключена природа турбулентности.

8.7.2. БАЛАНС ЭНЕРГИИ ОСРЕДНЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Если аналогичные операции проделать с уравнение Рейнольдса, то получим [16]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_i\bar{u}_j)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i\bar{u}_j\bar{u}_k)=-\frac{1}{\rho}\left(\bar{u}_i\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j}+\bar{u}_j\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\bar{u}_j\frac{\partial\overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k}+\bar{u}_i\frac{\partial\overline{\sigma_{jk}}}{\partial x_k}\right)-$$

$$-\left[\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_i'u_k'})+\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_j'u_k'})\right]. \qquad (8.61)$$

При $i=j$, обозначив $K_{\text{оср}}=\rho\dfrac{\bar{u}_i\bar{u}_i}{2}$, получим

$$\frac{\partial K_{\text{оср}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_kK_{\text{оср}})=-\bar{u}_k\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_k}+\bar{u}_i\frac{\partial\overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k}-\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u_j'u_k'}).$$

Выражая два последних слагаемых этого уравнения с помощью соотношений, аналогичных (8.57):

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_i\frac{\partial\overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k}&=\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i\overline{\sigma_{ik}})-\overline{\sigma_{ik}}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k},\\ \bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_k'}&=\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i\overline{u_i'u_k'})-\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_i),\end{aligned}\right\} \qquad (8.62)$$

получаем уравнение баланса энергии осредненного течения

$$\frac{\partial K_{\text{оср}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[(\bar{u}_kK_{\text{оср}})+\bar{u}_k\bar{p}-\bar{u}_i\overline{\sigma_{ik}}+\frac{\rho}{2}\bar{u}_i\overline{u_i'u_k'}\right]=$$

$$I \qquad\qquad II$$

$$=-\overline{\sigma_{ik}}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}+\rho\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}. \qquad (8.63)$$

$$III \qquad\qquad IV$$

Слагаемое *I* этого уравнения — скорость изменения энергии осредненного движения, слагаемые *II* — перенос этой энергии по пространству, *III* — вязкая диссипация энергии осредненного движения. Последнее слагаемое этого уравнения *IV* описывает обмен энергией осредненного и пульсационного движений. Наиболее убедительным подтверждением правильности подобной трактовки физического смысла этого слагаемого является то, что в уравнении баланса турбулентной энергии $K_{\text{т}}$ (см. п. 8.7.3) имеется точно такой же член, но с противоположным зна-

ком. Если это слагаемое в уравнении (8.63) отрицательно, то осредненное течение отдает энергию пульсационному движению, если положительно — перенос энергии происходит в обратном направлении.

8.7.3. БАЛАНС ЭНЕРГИИ ПУЛЬСАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ

Получим вначале уравнение, описывающее динамику моментов второго порядка $\overline{u_i' u_j'}$. Осредним уравнение (8.53) и вычтем из него (8.61), в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i' u_j'}) + \frac{\partial}{\partial x_k}[\bar{u}_i \overline{u_j' u_k'} + \bar{u}_j \overline{u_i' u_k'} + \bar{u}_k \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' u_j' u_k'}] =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i' \frac{\partial \sigma_{jk}'}{\partial x_k}} + \overline{u_j' \frac{\partial \sigma_{ik}'}{\partial x_k}}\right) + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_j' u_k'} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i' u_k'}.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i' u_j'}) + \frac{\partial}{\partial x_k}[\bar{u}_k \overline{u_i' u_j'} + \overline{u_i' u_j' u_k'}] = -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i' \frac{\partial \sigma_{jk}'}{\partial x_k}} + \overline{u_j' \frac{\partial \sigma_{ik}'}{\partial x_k}}\right) - \left(\overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right). \qquad (8.64)$$

Уравнение (8.64) описывает динамику компонент тензора турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса) и, в принципе, как об этом уже упоминалось, его можно использовать для замыкания уравнения Рейнольдса (см. § 8.8). Однако не трудно видеть, что уравнение (8.64) содержит новые моменты второго и третьего порядка:

$\overline{u_i' u_j' u_k'}$, $\overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j}}$, $\overline{u_j' \frac{\partial \sigma_{ik}'}{\partial x_k}}$ и, следовательно, система уравнений вновь оказывается незамкнутой.

И, наконец, полагая в (8.64) $i = j$, выражая первое и второе слагаемые в правой части аналогично (8.62) и домножая на $\rho/2$, получаем уравнение баланса энергии пульсационного движения:

$$\underset{A}{\frac{\partial K_т}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\left[\bar{u}_k K_т + \overline{u_k p'} - \overline{u_i \sigma_{ik}'} + \rho \overline{u_k' \frac{u_i' u_i'}{2}}\right]}_{B\quad C\quad D} = \underbrace{-\overline{\sigma_{ik}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}}_{D} - \underbrace{\rho \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{C}, \qquad (8.65)$$

где, как отмечалось ранее, $K_т$ — кинетическая энергия всех компонент пульсаций скорости:

$$K_т = \frac{\rho}{2}\overline{u_i' u_i'} = \frac{\rho}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}\right).$$

Физический смысл слагаемых этого уравнения достаточно очевиден. Выражение $\partial K_т/\partial t$ — скорость изменения турбулентной энергии в рассматриваемой точке пространства. Остальные слагаемые описывают причины этого изменения. Слагаемые $(A + B + C + D)$ характеризуют подвод (отвод) турбулентной энергии в данную точку пространства благодаря конвективному переносу пульсационной энергии осредненной скоростью A, диффузии по пространству за счет пульсации давления B, молекулярной диффузии, т.е. переносу турбулентной энергии по пространству механизмом молекулярной вязкости C, турбулентной диффузии D, которая представляет собой перенос турбулентной энергии по пространству турбулентными пульсациями и определяется одноточечными тройными моментами пульсации скорости. Слагаемое $\rho\varepsilon_т = \overline{\sigma_{ik}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}$ характеризует скорость вязкой диссипации турбулентной энергии [сравним с соответствующими членами в уравнениях (8.59) и (8.63)]. Вязкая диссипация всегда дает отрицательный вклад в баланс кинетической энергии.

Второе слагаемое в правой части уравнения (8.65) совпадает с последним слагаемым уравнения (8.63) и имеет противоположный знак. Очевидно, что эти слагаемые описывают обмен энергией между осредненным и пульсационным движениями. Надо сказать, что обычно в пристенной турбулентности это слагаемое в уравнении (8.63) отрицательно, а в уравнении (8.65) положительно. Это означает, что энергия передается от осредненного движения пульсационному. По этой причине обычно говорят, что рассматриваемое слагаемое описывает *генерацию (порождение)* турбулентной энергии в данной точке потока.

Если при переходе от уравнения (8.64) к уравнению (8.65) не производить суммирования по i, то получим уравнение для энергии одной компоненты пульсационного движения $(K_т)_i = \frac{\rho}{2}\overline{u_i' u_j'}$, где $i = 1, 2$ или 3:

$$\frac{\partial (K_т)_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\bar{u}_k (K_т)_i + \overline{u_k p_i'}\delta_{ik} - \overline{u_i \sigma_{ik}'} + \rho \overline{u_k' \frac{u_i' u_i'}{2}}\right] =$$

$$= -\overline{\sigma_{ik}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} - \rho \overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}. \qquad (8.66)$$

Это уравнение отличается от уравнения (8.65) наличием слагаемого $\overline{p'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_i}}$, описывающего обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости за счет пульсаций давления. При суммировании по i вследствие того, что $\partial u_i/\partial x_i = 0$, эти слагаемые в сумме дают нуль, т.е. обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости не изменяет суммарной энергии пульсационного движения.

Интересный результат дает применение уравнения (8.66) к стабилизированному стационарному течению в плоском канале, в котором отлична от нуля только одна компонента осредненной скорости — $\bar{u}_1$, изменяющаяся по координате x_2 (см. рис. 8.26):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\rho u_2'\frac{\overline{u_1'u_1'}}{2} - \overline{\sigma_{12}'u_1'}\right] = -\rho\varepsilon_{1т} - \rho\overline{u_1'u_2'}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}},\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\rho u_2'\frac{\overline{u_2'u_2'}}{2} + \overline{u_2'p'} - \overline{\sigma_{22}'u_2'}\right] = -\rho\varepsilon_{2т} + \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}},\\
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\rho u_2'\frac{\overline{u_3'u_3'}}{2} - \overline{\sigma_{32}'u_3'}\right] = -\rho\varepsilon_{3т} + \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}.
\end{aligned}\right\} \quad (8.67)$$

Суммируя уравнения (8.67), получаем уравнение баланса суммарной энергии всех трех пульсационных компонент

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho u_2'\frac{\overline{u_i'u_i'}}{2}\right)}_{ДТ} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_2'p'})}_{ДР} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}(\overline{u_i'\sigma_{2i}'})}_{ДМ} = \underbrace{-\rho\varepsilon_т}_{Д} \underbrace{-\rho\overline{u_1'u_2'}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}}_{Г}. \quad (8.68)$$

В уравнении (8.68) слагаемое *ДТ* — турбулентная диффузия, *ДР* — диффузия за счет пульсаций давления, *ДМ* – вязкая (молекулярная) диффузия, *Д* — вязкая диссипация, *Г* — генерация энергии турбулентности.

Анализ уравнений (8.67) и (8.68) позволяет сделать следующие выводы.

1. Слагаемое — $\rho\overline{u_1'u_2'}\dfrac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}$, описывающее генерацию турбулентной энергии, присутствует только в уравнении баланса энергии продольных пульсаций.

Обычно в пристенной турбулентности $\left(-\rho\overline{u_1' u_2'}\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}\right) > 0$. Это утверждение можно пояснить следующим образом. Считаем, что осредненная скорость монотонно возрастает в направлении от стенки: $(\partial \bar{u}_1 / \partial x_2) > 0$ (см. рис. 8.19). Следуя рассуждениям Прандтля, полагаем, что пульсации скорости в данной точке вызываются тем, что в эту точку попадают вследствие своего хаотического движения моли жидкости из соседних областей течения, где осредненная скорость $\bar{u}_1$ имеет другое значение. Логика рассуждений Прандтля читателю уже известна (см. п. 8.4.3). Итак, следуя Прандтлю, нетрудно убедиться, что положительным поперечным пульсациям u_2' соответствуют отрицательные продольные пульсации u_1' и наоборот (см. рис. 8.19). Поэтому в среднем $\overline{u_1' u_2'} < 0$, откуда с учетом $(\partial \bar{u}_1 / \partial x_2) > 0$ следует $(-\overline{u_1' u_2'} \partial \bar{u}_1 / \partial x_2) > 0$ в уравнении (8.68), а в уравнении баланса энергии осредненного движения соответствующее слагаемое $(\overline{u_1' u_2'} \partial \bar{u}_1 / \partial x_2) < 0$. Это означает, что генерация турбулентности в рассматриваемом течении происходит следующим образом. Энергия отбирается от осредненного движения и передается только продольной компоненте пульсации. Этим объясняется тот экспериментальный факт (см. рис. 8.26), что интенсивность продольной компоненты пульсаций вблизи стенки существенно выше, чем поперечных.

2. Поперечные пульсации u_2' и u_3' получают энергию не непосредственно от осредненного течения, а опосредованно. Энергия, воспринятая продольной компонентой, перераспределяется между всеми тремя компонентами пульсаций скорости благодаря пульсациям давления. Пульсации давления не могут изменить суммарную турбулентную энергию $K_т$ в данной точке, о чем свидетельствует то, что в уравнении баланса (8.68) отсутствует равная нулю сумма

$$\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} + \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} + \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} = 0.$$

Роль пульсаций давления заключается в том, что они стремятся равномерно перераспределить энергию между тремя компонентами пульсаций, т.е. приблизить турбулентность к *изотропии*, при которой

$$K_{т1} = K_{т2} = K_{т3}.$$

3. Генерируемая в данной точке потока турбулентная энергия частично диссипирует за счет молекулярной вязкости, а остальная ее часть переносится в другие точки пространства. Этот перенос описывают слагаемые вида $\frac{\partial}{\partial x_2}(\ldots)$ в левых частях уравнений (8.67) и (8.68). В свою очередь из других точек энергия может вноситься в данную точку и здесь диссипировать.

С развитием техники измерения пульсаций скорости с помощью термоанемометра с нагретой нитью [11] представилась возможность измерить экспериментально почти все величины, входящие в уравнение баланса турбулентной энергии (8.68). Подобные измерения впервые были выполнены в 50-е годы Лауфером (описание опытов Лауфера приводится в [11]), что позволило ему составить энергетический баланс по опытным данным, который был несколько скорректирован Таунсендом. Рассмотрим рис. 8.30, на котором приведена диаграмма баланса турбулентной энергии по Лауферу—Таунсенду для пристенной области течения, где эта диаграмма в равной степени справедлива для круглой трубы и плоского канала.

Как видно, максимум генерации турбулентной энергии находится у стенки, но за пределами вязкого подслоя, т.е. в переходной области. Большая часть энергии здесь же и диссипирует, о чем свидетельствует

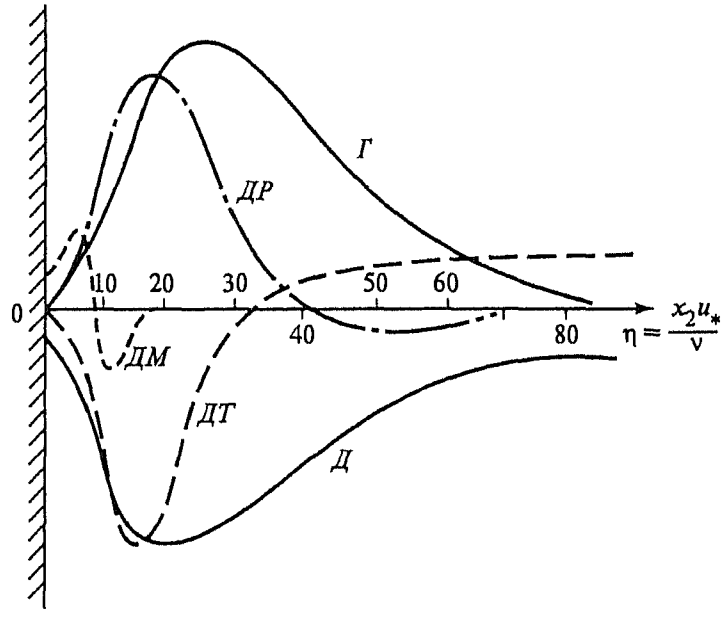


Рис. 8.30. Схема баланса турбулентной энергии пристенного течения по Лауферу—Таунсенду [16]:

Г — генерация; *Д* — диссипация; *ДТ* — турбулентная диффузия; *ДМ* — молекулярная диффузия; *ДР* — диффузия пульсациями давления

тот факт, что координата максимума диссипации энергии турбулентности приблизительно совпадает с положением максимума генерации. Кроме того, и по величине эти слагаемые в рассматриваемой области течения близки. В то же время часть порожденной энергии выносится из области максимальной генерации. Причем молекулярная диффузия выносит энергию пульсаций преимущественно в направлении стенки, в вязкий подслой, где эта энергия диссипирует, необратимо преобразуясь в тепло. Гораздо большая доля турбулентной энергии выносится из области максимальной генерации турбулентной диффузией, причем этот диффузионный механизм создает перенос энергии в направлении ядра турбулентного потока, где, как показывает анализ, существует динамическое равновесие между притоком энергии благодаря турбулентной диффузии и вязкой диссипацией (на рис. 8.30 область больших значений η не показана). И только одно слагаемое уравнения (8.68), содержащее пульсации давления, Лауферу не удалось определить непосредственными измерениями, поэтому оно было рассчитано как величина, замыкающая баланс. Отметим, что, насколько нам известно, до сих пор никому не удалось выполнить подобные измерения.

Пусть точность измерений была не слишком высокой, однако в качественном отношении правильность рассмотренной схемы не вызывает сомнений. Важно отметить, что вблизи стенки генерация приближенно уравновешивается диссипацией, и можно записать приближенное выражение баланса турбулентной энергии в «бездиффузионном приближении»:

$$\overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \approx \varepsilon_т = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right)}. \qquad (8.69)$$

Таким образом, мы рассмотрели уравнения энергетического баланса вида (8.68), содержащие неизвестные корреляции $\overline{u_i' u_j'}$. Подобные уравнения или их модификации, упрощения, в том числе и (8.69), часто используют как основу при построении модельных уравнений для замыкания системы осредненных уравнений Рейнольдса. Одной из таких моделей является широко известная K-ε-модель, которая будет рассмотрена ниже.

8.8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Методы, позволяющие расчетным путем моделировать турбулентные течения, можно разделить на два основных направления: моделирование напряжений Рейнольдса и прямое численное моделирование. Рассмотрим их подробнее.

8.8.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Расчет напряжений Рейнольдса, замыкающих уравнения Рейнольдса, можно провести двумя методами, основанными на использовании:

гипотезы Буссинеска [см. (8.11)] и концепции турбулентной вязкости;

уравнений динамики напряжений Рейнольдса.

В первом методе для вычисления турбулентной вязкости, входящей в (8.11), применяются различные модели.

В **алгебраических моделях турбулентной вязкости** используются различные зависимости для ε_τ. Например, в случае течения в круглой трубе может быть использована *зависимость Рейхардта* $\varepsilon_\tau = f(\eta, R)$ (8.34). Часто, если течение осложняется различными факторами, например оно неизотермично, значение η вычисляется по *локальным* (в данной точке потока) параметрам u_*, ν.

Более универсальная модель турбулентной вязкости, применимая к различным течениям типа пограничного слоя, основана на гипотезе Прандтля о *длине пути перемешивания* (8.13). Входящая в выражение (8.13) l_τ, в свою очередь, может быть вычислена по различным зависимостям, например по *формуле Прандтля* $l_\tau = \varkappa y$ (8.14). В случае течения в круглой трубе можно использовать эмпирическую зависимость Никурадзе

$$\frac{l_\tau}{r_0} = 0{,}14 - 0{,}08\left(1 - \frac{y}{r_0}\right)^2 - 0{,}06\left(1 - \frac{y}{r_0}\right)^4.$$

Достаточно распространенной является упомянутая выше *зависимость Ван-Дриста*, согласно которой в формулу Прандтля вводится демпфирующая функция, замедляющая рост l_τ в вязком подслое:

$$l_\tau = \varkappa y(1 - e^{-\eta/26}).$$

В.Н. Попов [25] на основе гипотезы Прандтля и предположения о локальном характере зависимости длины пути перемешивания от параметров y, u_*, ν получил формулу

$$\left(\frac{l}{r_0}\right)^2 = \frac{(\varepsilon_\tau/\nu)_0[1 + (\varepsilon_\tau/\nu)_0]}{\eta_0^2(\tau/\tau_c)_0},$$

где $(\varepsilon_\tau/\nu)_0$ и $(\tau/\tau_c)_0$ — относительные турбулентная вязкость и касательное напряжение в случае простого турбулентного течения при отсутствии осложняющих воздействий.

Например, при течении в круглой трубе значение $(\varepsilon_\tau/\nu)_0$ можно рассчитать по зависимости Рейхардта (в которой η вычисляется по локальным параметрам), а $(\tau/\tau_c)_0 = R$. Формула Попова успешно применялась для расчета теплоотдачи и сопротивления при течении с различными воздействиями: жидкости с переменными свойствами, в поле массовых сил, нестационарном течении.

В отличие от алгебраических моделей турбулентной вязкости, **одно- и двухпараметрические модели** включают дополнительные дифференциальные уравнения переноса для одного или двух параметров турбулентности. Турбулентная вязкость выражается через эти параметры.

Однопараметрическая *K*-модель турбулентности содержит дополнительное уравнение для кинетической энергии турбулентности K. При этом турбулентная вязкость вычисляется согласно *гипотезе Колмогорова*

$$\varepsilon_\tau = cl\sqrt{K}, \tag{8.70}$$

где c — эмпирическая константа, а для масштаба турбулентности l можно использовать те же зависимости, что для длины пути перемешивания.

Как было отмечено выше, уравнение для кинетической энергии турбулентности K (8.65) содержит члены, соответствующие конвективному переносу K, ее генерации (порождению), диссипации и диффузии. Для представления трех последних членов используются различные модельные соотношения [21].

Известна **двухпараметрическая *K*-*l*-модель турбулентности**, однако наиболее распространена ***K*-ε-модель**, включающая два уравнения для энергии турбулентности K и ее диссипации ε.

Уравнение для ε можно получить из уравнений Навье—Стокса. Оно включает слагаемые, аналогичные слагаемым в уравнении для кинетической энергии турбулентности. Генерацию, диссипацию и диффузию необходимо моделировать [21].

Турбулентную вязкость находят по отношению

$$\varepsilon_\tau = c'K^2/\varepsilon, \tag{8.71}$$

где c' — эмпирическая константа.

Эта зависимость получается, если оценить диссипацию как

$$\varepsilon \sim \frac{K^{3/2}}{l}$$

и использовать (8.70).

Существуют и модели с уравнениями для трех и более параметров. Например, для неизотермических течений уравнения для K и ε дополняются уравнениями для среднеквадратичных пульсаций температуры и их диссипации [21].

Все упомянутые выше модели являются *полуэмпирическими*. Во-первых, как отмечалось выше, только некоторые члены в уравнении для энергии турбулентности записываются точно, а для представления остальных применяются аппроксимации, включающие эмпирические константы. Еще в большей степени это относится к уравнению для ε (особенно проблематично представление «диссипации» диссипации). Во-вторых, вблизи стенки эти уравнения корректируются путем введения некоторых пристеночных функций, а граничные условия ставятся с учетом эмпирических законов стенки. Определенные трудности возникают при постановке граничных условий для диссипации.

Мы рассмотрели подход к моделированию турбулентных течений, когда все описанные выше модели используются совместно с гипотезой Буссинеска. Следует отметить, что предположение о пропорциональности турбулентных напряжений градиенту скорости с коэффициентом пропорциональности ε_τ, одинаковым для всех направлений, не всегда оправдано, особенно при наличии анизотропии турбулентного переноса или массовых сил (это подтверждают экспериментальные данные). Для более адекватного описания турбулентного переноса в случае сложных турбулентных течений были разработаны модели, основанные на использовании уравнений для «вторых моментов» поля скорости — напряжений Рейнольдса (8.64). Очевидно, что уравнения для вторых моментов являются *незамкнутыми*. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, пользуются *модельными аппроксимациями слагаемых*, соответствующих *диссипации, диффузии и обмену за счет пульсаций давления*. В аппроксимирующие выражения входят эмпирические константы; таким образом, все эти модели *полуэмпирические*.

Одной из наиболее распространенных является **модель для турбулентных напряжений Лаундера, Риса, Роди** [26]. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений для $\overline{u_i' u_j'}$, которые решаются совместно с дифференциальными уравнениями для K и ε (последние величины входят в аппроксимации членов уравнений для $\overline{u_i' u_j'}$).

Известна также **алгебраическая модель для напряжений Лаундера** [27]. Она отличается от упомянутой выше тем, что вместо дифференциальных уравнений для $\overline{u_i' u_j'}$ решаются алгебраические уравнения, что существенно упрощает процедуру решения. Переход к алгебраической системе сделан на основе предположения о пропорциональности конвективных и диффузионных слагаемых (содержащих дифференциалы) соответствующим слагаемым в уравнении энергии турбулентности.

Модели, основанные на уравнениях для турбулентных напряжений, являются моделями более высокого класса, чем модели, основанные

на гипотезе Буссинеска и понятии турбулентной вязкости. Эти модели позволяют получить хорошие результаты при расчете сложных турбулентных течений. Общий недостаток, присущий, впрочем, всем моделям — это *отсутствие универсальности*. Часто для каждого типа течений приходится подбирать свои эмпирические константы и функции.

Отметим еще одно обстоятельство. Стремление к более детальному описанию пульсационного движения путем построения сложных аппроксимирующих выражений не только непомерно усложняет модели, но может привести к отходу от физической реальности. За нагромождением уточняющих деталей теряется исходная физическая сущность явлений. Например, одной из особенностей *пристеночных течений* типа пограничного слоя, подтвержденной экспериментально, является *равенство* вблизи стенки *генерации и диссипации* энергии турбулентности, причем эти величины значительно превышают остальные члены в уравнении для K. Заметим, что из этого равенства можно получить гениально предугаданную Прандтлем зависимость для турбулентной вязкости от длины пути перемешивания (масштаб турбулентности l). Действительно, диссипация имеет порядок [см. (8.70), (8.71)]

$$\varepsilon \approx \varepsilon_\tau^3 / l^4 .$$

Для генерации $\Gamma = -\rho\overline{u_x' u_y'}\dfrac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$, представив турбулентное напряжение по (8.11), получим

$$\Gamma = \varepsilon_\tau \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}\right)^2 .$$

Нетрудно видеть, что из равенства $\Gamma = \varepsilon$ следует формула Прандтля (8.13).

В начале 90-х годов прошлого столетия в Стэнфордском университете (США) по инициативе известных ученых в области моделирования турбулентных течений — Ламли, Лаундера, Брэдшоу — была организована международная программа по комплексному исследованию возможностей существующих моделей турбулентности для описания сложных турбулентных течений различного типа [28]. Результаты этого анализа свидетельствуют, что ни одна из моделей не обладает универсальностью, т.е. нельзя с помощью единой модели прогнозировать любые сложные турбулентные течения (несколько более совершенными в этом смысле являются модели, основанные на уравнениях для рейнольдсовых напряжений). По-видимому, по этой причине в настоящее время все чаще при моделировании турбулентных течений обращаются к про-

стым моделям, имеющим больше возможностей для адекватного описания физического процесса, связанного с пульсационным движением.

8.8.2. ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В основе методов прямого численного моделирования лежит непосредственное решение системы уравнений Навье—Стокса и уравнения неразрывности. В случае *турбулентного* течения уравнения Навье—Стокса *всегда нестационарные и трехмерные* (даже если осредненное течение стационарное и одномерное в пространстве); аналитическое решение этих уравнений отсутствует, и они решаются численно. Поэтому решения, полученные с помощью методов прямого моделирования, являются *приближенными*. Следует также отметить, что реализация этих методов связана с большим объемом вычислений и стала возможной только при современном, достаточно высоком, уровне развития компьютерной техники.

Для получения решения уравнения Навье—Стокса должны быть дополнены начальными и граничными условиями. Вид граничных условий зависит от рода задачи. Например, для течений со свободными границами обычно задаются периодические граничные условия. Если рассматривается пристеночное течение, то на стенке ставятся условия прилипания и непроницаемости. Вид начальных условий также зависит от рода задачи. Часто в начальный момент времени задаются поля вектора скорости и давления, соответствующие осредненному течению с наложенными на него возмущениями. Возмущения могут быть заданы либо в виде пространственных вихрей, либо случайным образом (например, с помощью датчика случайных чисел). В результате решения получают поля скорости и давления в зависимости от времени, а характеристики осредненного течения — путем осреднения по некоторому (достаточно большому) промежутку времени. Для нестационарных (в среднем) задач осреднение должно проводиться по ансамблю.

При проведении численного решения уравнения Навье—Стокса подвергаются *процедуре разделения пространственных масштабов* на разрешимые и неразрешимые; в пределах последних информация о полях скорости и давления не может быть получена. По характеру этой процедуры методы прямого численного моделирования делятся на следующие группы:

методы, основанные на теории фильтрации;

спектральные методы;

методы, основанные на интегрировании по контрольному объему.

Теория фильтрации развита Леонардом [29]. К уравнениям динамики применяется сглаживающий оператор-фильтр, предназначенный для отделения мелкомасштабного движения. В отфильтрованных урав-

нениях это движение учитывается так называемыми напряжениями Леонарда, которые, в принципе, должны моделироваться.

В основе **спектрального метода** лежит стандартный математический аппарат, позволяющий приближенно решать дифференциальные уравнения в частных производных. Решение ищется в виде разложения по ряду базисных функций от пространственных переменных с конечным числом членов ряда n. Эффективный способ применения спектральных методов к решению нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих гидродинамические процессы, предложен Орсегом [30]. Преимуществом спектрального метода является возможность точного удовлетворения граничных условий при правильном подборе базисных функций, впрочем, только для областей с простой геометрией. Кроме того, этот метод в определенных условиях позволяет получить более точное решение по сравнению с методом, основанным на интегрировании по контрольному объему. Однако применение спектрального метода к решению системы уравнений Навье—Стокса встречает значительные трудности. Число базисных функций n вычисляется как отношение наибольшего характерного геометрического масштаба поля течения к наименьшему. Например, в случае течения в ограниченной области пространства наибольший масштаб имеет порядок размеров этой области, а наименьший определяется толщиной вязкого слоя вблизи стенки. Для сложных пространственных задач и течения с большими числами Рейнольдса указанное отношение может быть достаточно велико. Очевидно, ошибка численного решения уменьшается с ростом числа базисных функций n. Приемлемая точность решения часто не может быть достигнута из-за непомерно возрастающего с ростом n объема вычислений. Кроме того, при применении спектрального метода ошибка решения носит глобальный характер (т.е. появление погрешности решения в какой-либо точке приводит к распространению ошибки на всю область независимых переменных). С увеличением степени нелинейности уравнений эффективность спектральных методов снижается. Поэтому спектральные методы используются в основном для исследования однородной или изотропной турбулентности или для расчета течения в областях простой формы.

Метод, основанный на **интегрировании по контрольному объему**, разработан Шуманном [21]. Уравнения Навье—Стокса и уравнения неразрывности аппроксимируются на сетке в пространстве независимых переменных (x_1, x_2, x_3, t) путем интегрирования по выделенному в пространстве малому (контрольному) объему. Полученная в результате такой аппроксимации система конечно-разностных уравнений оказывается незамкнутой. В уравнениях появляются дополнительные члены, которые можно интерпретировать как напряжения, соответствующие

турбулентности с масштабами, меньшими шага расчетной сетки, и в какой-то степени аналогичные турбулентным напряжениям Рейнольдса.

Иногда используют комбинированный метод решения уравнений Навье—Стокса: по одним пространственным направлениям — спектральный, а по другим проводится осреднение по ячейке сетки.

Итак, применение всех описанных трех способов разделения масштабов ведет к появлению в уравнениях движения подсеточных напряжений. Для моделирования этих напряжений — так называемого **подсеточного моделирования** — используются различные **модели мелкомасштабной турбулентности**. Применение этих моделей позволяет при численном решении уравнений Навье—Стокса увеличить разрешимые масштабы. Такие методы моделирования носят название «моделирование крупных вихрей», или LES (от английского large eddy simulation). Если схема прямого численного моделирования позволяет разрешить все важные масштабы турбулентного течения без применения подсеточных моделей (например, при достаточно большом числе базисных функций или при малых шагах сетки, когда подсеточные напряжения стремятся к нулю), то такой метод называется непосредственно прямым численным моделированием (DNS — direct numerical simulation).

Одна из первых моделей мелкомасштабной турбулентности была предложена Смагоринским [31]. В настоящее время эти модели все более усложняются, одновременно становясь менее универсальными. Хотя авторы, применяющие подсеточное моделирование, полагают, что модели мелкомасштабной турбулентности более адекватно описывают турбулентность, чем модели для обычных напряжений Рейнольдса (замыкающих уравнения Рейнольдса для осредненного течения), некоторые аргументы говорят не в пользу этого утверждения. Так, во все эти модели входит ряд констант, значения которых подбираются путем численных расчетов, по выражению одного из авторов, «численно-эмпирической подгонкой» [21]. Тем не менее для исследования ряда задач LES моделирование крупных вихрей одновременно с моделированием мелкомасштабной турбулентности является полезным инструментом.

В последние годы в связи с совершенствованием компьютерной техники активно развивается направление DNS. Применение мелких сеток позволяет рассчитывать течения не только с относительно низкими, но и с большими числами Рейнольдса. Имеются примеры расчета неизотермического течения в большом диапазоне чисел Прандтля. Конечно, такие расчеты требуют больших затрат вычислительных ресурсов. Однако эти затраты оправданы, поскольку результаты, полученные с помощью DNS, могут служить основой для проверки и усовершенствования моделей замыкания уравнений Рейнольдса или моделей мелкомасштабной турбулентности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

П.1. СКАЛЯРЫ, ВЕКТОРЫ, ТЕНЗОРЫ

Среди многообразия физических величин по сложности их математического описания различают *скаляры, векторы, тензоры* [1, 34].

Скаляр (плотность ρ, температура T, дивергенция скорости $\operatorname{div}\mathbf{u}$ и др.) в каждой рассматриваемой точке может быть охарактеризован одним численным значением, не зависящим от выбора системы координат.

Вектор (сила **F**, ускорение **a**, градиент давления ∇P и др.) характеризуется тремя величинами (компонентами), чаще всего — тремя проекциями на оси декартовой системы координат (рис. П.1).

Важно подчеркнуть, что вектор (например, скорость потока), являясь *физически объективной величиной*, инвариантен по отношению к системе координат, которую мы можем выбирать произвольно. Однако компоненты вектора от выбора системы координат зависят, причем при переходе от «старой» системы $\{x, y, z\}$ к «новой» $\{x', y', z'\}$ проекции вектора **A** преобразуются следующим образом (рис. П.1):

$$\left.\begin{aligned} A_x' &= A_x\cos(x'x) + A_y\cos(x'y) + A_z\cos(x'z),\\ A_y' &= A_x\cos(y'x) + A_y\cos(y'y) + A_z\cos(y'z),\\ A_z' &= A_x\cos(z'x) + A_y\cos(z'y) + A_z\cos(z'z). \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.1})$$

Выражения (П.1) выглядят громоздкими. Для сокращения объема записи часто оказывается удобным вместо буквенных обозначений осей координат применять числовую индексацию:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$

$$u_x, = u_1, \quad u_y = u_2, \quad u_z = u_3.$$

Тогда выражение (П.1) можно записать:

$$A_j' = \sum_{i=1}^{3} A_i e_{ij},$$

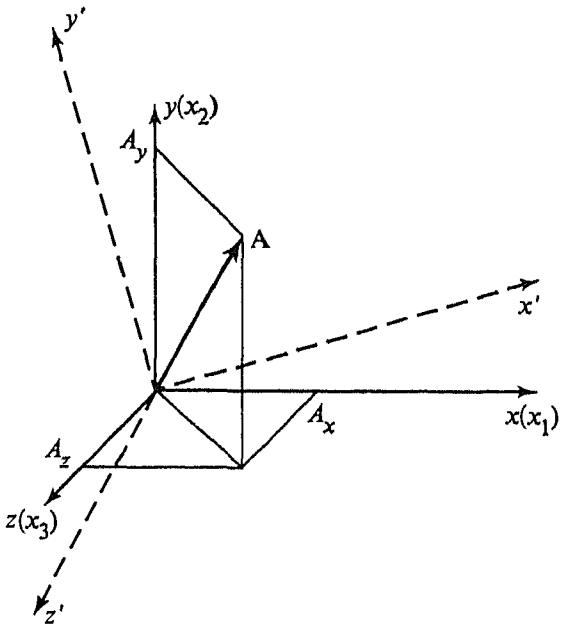


Рис. П.1. Вектор и его компоненты

где $i = 1, 2, 3$ (или x, y, z); e_{ij} — направляющие косинусы j оси «новой» системы координат относительно «старой» системы.

Кроме того, следуя приему, предложенному Эйнштейном, будем опускать знак суммы Σ перед суммируемыми одночленами, если индекс, по которому производится суммирование, повторяется в одночленах дважды:

$$A'_j = A_i e_{ij} = A_k e_{kj}. \qquad (П.2)$$

Повторяющиеся 2 раза индексы, по которым производится суммирование, называются *немыми*, для их обозначения можно использовать любую букву, как это сделано в (П.2). Остальные индексы (например, j в предыдущей формуле) называются *свободными*.

Из предыдущих рассуждений вытекают важные правила компактной «тензорной» записи:

1. Никакой индекс не может повторяться в выражении более чем 2 раза.

2. Количество и буквенные обозначения свободных индексов в любом слагаемом правой и левой части уравнения должны быть одинаковыми.

Уравнения (П.1), равно как и их компактную форму (П.2), можно рассматривать как определение вектора, т.е. вектор — это величина, определяемая тремя проекциями, которые при переходе от одной системы координат к другой меняются по закону (П.1).

Замечание. Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что используется *правовинтовая прямоугольная декартова система координат.*

Для описания движения материальной точки или абсолютно твердого тела вполне достаточно скалярных и векторных величин. Однако для описания динамики сплошной среды (упругой или текучей) необходимо использовать более сложные величины — тензоры.

Тензор (тензор напряжений τ_{ij}, тензор скоростей деформации V^s_{ij} и др.) — это величина, характеризуемая в общем случае девятью компонентами, которые при переходе от одной системы координат к другой меняются в соответствии с выражением

$$T'_{ij} = T_{kl} e_{ik} e_{jl}, \qquad (П.3)$$

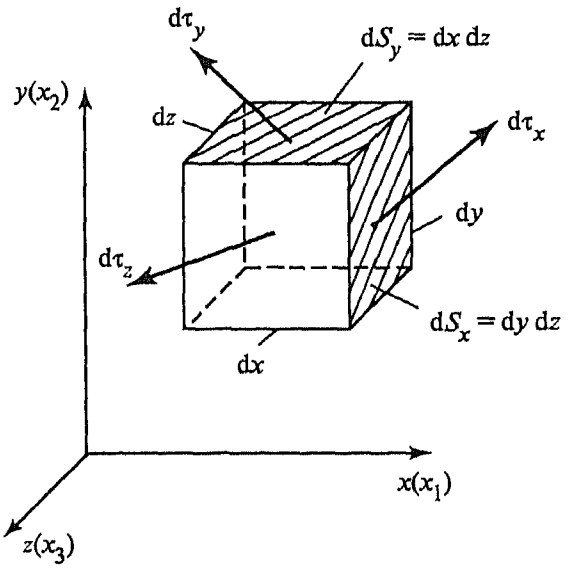


Рис. П.2. Элементарные поверхностные силы, действующие на частицу сплошной среды

где e_{ik}, e_{ij} — направляющие косинусы осей «новой» системы координат относительно «старой».

Впервые понятие тензор появилось в связи с необходимостью количественно описать напряжения поверхностных сил, приложенных к граням частицы сплошной среды (tension — напряжение).

На грань dS_x частицы сплошной среды (рис. П.2) действует элементарная поверхностная сила $d\tau_x$. Вводим напряжение поверхностной силы (Н/м^2): $\tau_x = \dfrac{d\tau_x}{dS_x}$.

Аналогично, к двум другим граням частицы dS_y и dS_z, перпендикулярным соответственно осям y и z, приложены силы $d\tau_y$ и $d\tau_z$, напряжения которых равны:

$$\tau_y = \frac{d\tau_y}{dS_y}; \quad \tau_z = \frac{d\tau_z}{dS_z}.$$

Разложим напряжения поверхностных сил по координатным осям (см. рис. 2.3):

$$\tau_x = \{\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}\},$$

$$\tau_y = \{\tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}\},.$$

$$\tau_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}\}.$$

Для обозначения компонент разложения применяем двойную индексацию вида τ_{ij}, где первый индекс i указывает направление нормали к площадке, к которой приложено напряжение, а второй индекс — направление действия данной компоненты (вдоль оси j).

Только все девять компонент, взятые в совокупности, определяют «напряженное состояние» рассматриваемой частицы сплошной среды. Подобно тому как три компоненты вектора полностью определяют вектор, можно считать, что девять вышеуказанных компонент полностью определяют некоторую более сложную, чем вектор, величину, получившую название «тензор напряжений поверхностных сил».

Компоненты тензора обычно записываются в виде матрицы:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}. \qquad (П.4)$$

Элементы главной диагонали матрицы τ_{11}, τ_{22}, τ_{33}, — характеризуют *нормальные напряжения*, приложенные к «главным граням» частицы. Остальные шесть компонент — *касательные напряжения* (τ_{ij} при $i \neq j$).

П.2. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ТЕНЗОР

Рассмотрим табл. П.1, которая позволяет понять закономерность возрастания сложности описания величин.

Таблица П.1

Величина	Количество независимых компонент	Обобщение
Скаляр	$1 = 3^0$	Тензор «0» ранга
Вектор	$3 = 3^1$	Тензор «1» ранга
Тензор	$9 = 3^2$	Тензор «2» ранга
Тензор	$27 = 3^3$	Тензор «3» ранга
Тензор	$81 = 3^4$	Тензор «4» ранга

В механике жидкости встречаются различные тензоры, в том числе третьего, четвертого и даже более высоких рангов. Для определения ранга тензора достаточно подсчитать количество свободных индексов в его выражении. Например, $T_{ijjkkllmmn}$ — тензор второго ранга, поскольку только два индекса свободные — i и n.

При переходе к новой системе координат компоненты произвольного тензора преобразуются в соответствии с формулой

$$T'_{pgr\ldots} = e_{ip} e_{jq} e_{kr} \cdots T_{ijk\ldots},$$

являющейся обобщением формулы (П.3).

Рассмотрим некоторые тензорные операции [34].

1. **Сложение тензоров.** Сложение соответствующих компонент двух тензоров *одинакового ранга* дает третий тензор того же ранга, который называется *суммой* первых двух тензоров:

$$T_{ij} = R_{ij} + S_{ij}.$$

Замечание. Сложение тензоров разных рангов не имеет смысла (например, бессмысленно говорить о сложении скаляра и вектора).

2. **Умножение тензоров.** Совокупность всех произведений, содержащих по одной компоненте каждого из двух тензоров, образует третий тензор, называемый *произведением* первых двух тензоров.

Например:

произведение тензора на скаляр дает тензор того же ранга: $T_{ij} = \lambda S_{ij}$;

произведение двух тензоров первого ранга (диадное произведение векторов) дает тензор второго ранга (тензор-диада): $T_{ij} = u_i v_j$;

произведение тензора второго ранга и вектора представляет собой тензор третьего ранга: $T_{ijk} = R_{ij} S_k$.

3. **Свертывание.** Операция приравнивания двух буквенных индексов тензора ранга n и суммирования по образовавшемуся немому индексу дает тензор ранга $(n - 2)$ и называется свертыванием исходного тензора по этим индексам. Например, свертывание тензора второго ранга T_{ij} дает скаляр $T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$, который представляет собой сумму диагональных компонентов тензора и называется *следом* тензора T'_{ij}.

4. **Образование изомеров.** Перестановка двух индексов тензора дает другой тензор того же ранга, называемый *изомером* первого тензора. Тензор называется **симметричным** относительно двух индексов, если он равен своему изомеру, полученному при перестановке этих индексов. Тензор называется **антисимметричным** относительно двух индексов, если он равен своему изомеру с обратным знаком.

Если тензор $S_{pqij\ldots}$ симметричный, а тензор $A_{pqmn\ldots}$ антисимметричный относительно индексов p и q, то справедливо равенство:

$$S_{pqij\ldots} T_{pqmn\ldots} = 0. \qquad (\text{П.5})$$

Действительно, сумма, определяемая немыми индексами p и q, содержит, например, слагаемое с индексами $p = 1$, $q = 2$, а также слагаемое, соответствующее $p = 2$, $q = 1$. Таким образом, сумма разбивается на пары слагаемых, равных по величине, но противоположных по знаку.

Введем некоторые специальные тензоры.

1. **δ-тензор** (дельта Кронекера) — симметричный единичный тензор второго ранга.

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k = 1, 2 \text{ или } 3; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Матрица тензора, очевидно, выглядит так:

$$\delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а след тензора $\delta_{kk} = 3$.

2. **ε-тензор** (тензор Леви—Чивита) — антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \textit{если хотя бы два индекса одинаковы}; \\ 1, & \textit{если индексы образуют «четную» перестановку} \\ & (123—231—312); \\ -1, & \textit{если индексы образуют «нечетную» перестановку} \\ & (132—321—213), \end{cases}$$

т.е. большинство из 27 компонент тензора равны нулю:

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{122} = \ldots = 0.$$

Отличны от нуля компоненты:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1. \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.6})$$

Очевидно, что справедливо тождество

$$\delta_{ik}\varepsilon_{ikl} = 0 \qquad (\text{П.7})$$

как частный случай формулы (П.5) — произведение симметричного тензора на антисимметричный равно нулю.

Запишем еще несколько полезных тождеств [34]:

$$\left.\begin{aligned} a_i\delta_{ik} = a_k, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\delta_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{pqj} = 2\delta_{ij}, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}. \end{aligned}\right\}. \qquad (\text{П.8})$$

П.3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА

Рассмотрим произвольный тензор:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.9})$$

При переходе к новой системе координат все компоненты тензора, разумеется, меняются в соответствии с соотношением (П.3), однако след тензора $J_1 = T_{jj} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$, будучи скаляром, остается величиной неизменной. По этой причине J_1 получил название **первый инвариант тензора**. Существуют и другие инварианты [1, 34].

Произвольный тензор второго ранга, как мы знаем, определяется *девятью* независимыми компонентами.

Если тензор S_{ij} *симметричный*, т.е. его компоненты удовлетворяют условию $S_{ij} = S_{ji}$, то он определяется *шестью* компонентами, поскольку компоненты, симметрично расположенные по отношению к главной диагонали матрицы, попарно равны.

Если тензор A_{ij} *антисимметричный*, т.е. $A_{ij} = -A_{ji}$, то для его полного определения достаточно знать *три* компоненты, лежащие по одну сторону от главной диагонали. При этом компоненты главной диагонали равны нулю:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0.$$

Для произвольного тензора справедливо тождество:

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \qquad (\text{П.10})$$

Очевидно, что первое слагаемое правой части — тензор, обладающий свойством симметрии:

$$T^S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \qquad (\text{П.11})$$

а второе — антисимметричный тензор:

$$T^A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \qquad (\text{П.12})$$

Таким образом, произвольный тензор может быть разложен на симметричную и антисимметричную части:

$$T_{ij} = T^S_{ij} + T^A_{ij}.$$

Используя (П.11), запишем матрицу симметричного тензора:

$$T^S_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & \frac{1}{2}(T_{12} + T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13} + T_{31}) \\ \frac{1}{2}(T_{21} + T_{12}) & T_{22} & \frac{1}{2}(T_{23} + T_{32}) \\ \frac{1}{2}(T_{31} + T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32} + T_{23}) & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что элементы главной диагонали тензора T^S_{ij} точно те же, что у исходного тензора T_{ij}.

Матрица полученного антисимметричного тензора, согласно (П.12), имеет вид

$$T^A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(T_{12} - T_{21}) & \frac{1}{2}(T_{13} - T_{31}) \\ \frac{1}{2}(T_{21} - T_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{23} - T_{32}) \\ \frac{1}{2}(T_{31} - T_{13}) & \frac{1}{2}(T_{32} - T_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражением

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk} \qquad (П.13)$$

тензору T_{jk} ставится в соответствие вектор ω_i. Он называется **вектор, сопутствующий тензору** T_{ij} [1].

Запишем в явном виде компоненты вектора ω_i. При этом учтем, что в правой части (П.13) индексы j и k — немые и по ним проводится суммирование, однако отличны от нуля только слагаемые, перечисленные в (П.6).

Положим $i = 1$: $\omega_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{123}T_{23} + \varepsilon_{132}T_{32})$,

т.е. $$\omega_1 = \frac{1}{2}(T_{23} - T_{32}).$$

Аналогично

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(T_{31} - T_{13}),$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(T_{12} - T_{21}).$$

Как видно, сопутствующий вектор ω_i определяют те же три компоненты, которые определяют и антисимметричный тензор T^A_{ij}. (Разумеется, нельзя говорить о равенстве тензоров разных рангов ω_i и T^A_{ij}.) Вектор, сопутствующий симметричному тензору, всегда равен нулю.

В механике жидкости доказывается [1], что тензор напряжений поверхностных сил τ_{ij} (П.4) является симметричным. На примере этого тензора приведем без доказательств некоторые свойства симметричных тензоров второго ранга [34].

1. Если тензор симметричен в какой-то системе координат, то он симметричен и в любой другой системе координат. (Напомним, что мы рассматриваем только правовинтовые декартовы прямоугольные системы координат!)

2. Существует, по крайней мере, одна система координат $\{x_I, x_{II}, x_{III}\}$, в которой матрица симметричного тензора приобретает диагональный вид:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_I & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{III} \end{pmatrix}. \qquad (П.14)$$

Оси x_I, x_{II}, x_{III} этой системы координат носят название **главные оси симметричного тензора.**

Диагональные компоненты τ_I, τ_{II}, τ_{III} называются **главными значениями симметричного тензора.** Разумеется, их сумма есть первый инвариант тензора:

$$J_1 = \tau_{jj} = \tau_I + \tau_{II} + \tau_{III}.$$

Справедливо и обратное утверждение: если существует система координат, в которой матрица тензора приобретает диагональный вид (П.14), то данный тензор является симметричным.

Возможны три ситуации:

а) Если $\tau_I \neq \tau_{II} \neq \tau_{III}$, т.е. все главные значения различны по величине (рис. П.3, *а*), то система главных осей $\{x_I, x_{II}, x_{III}\}$ — единственная и все ее оси жестко закреплены в пространстве.

б) Если $\tau_I \neq \tau_{II} = \tau_{III}$, т.е. из трех главных значений два одинаковы, то любая правовинтовая декартова система координат, у которой одна

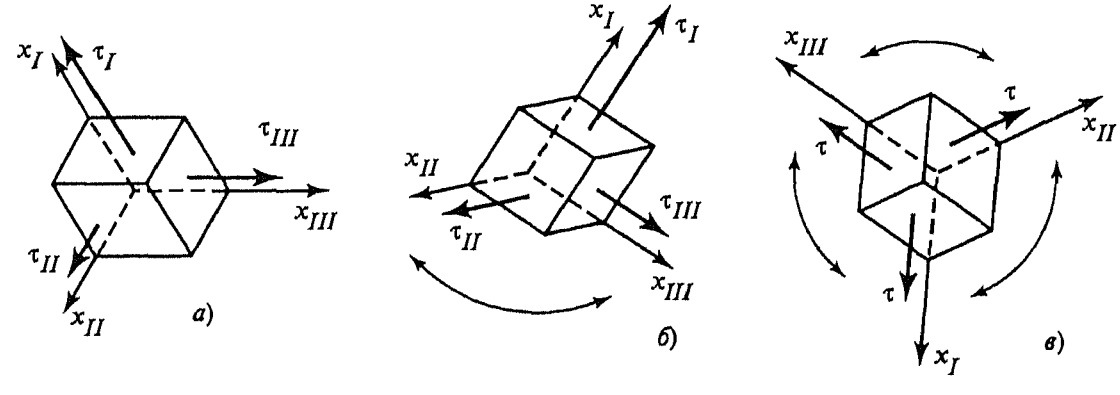


Рис. П.3. Главные оси и главные значения симметричного тензора:
а — $\tau_I \neq \tau_{II} \neq \tau_{III}$; *б* — $\tau_I \neq \tau_{II} = \tau_{III}$; *в* — $\tau_I = \tau_{II} = \tau_{III} = \tau$

ось, в данном случае x_I, жестко зафиксирована в пространстве, а положение других осей произвольно, будет системой главных осей тензора (рис. П.3, *б*).

в) Если $\tau_I = \tau_{II} = \tau_{III} = \tau$, т.е. все три главные значения одинаковы, то любая декартова система координат будет системой главных осей такого тензора (рис. П.3, *в*).

Из физических соображений можно сделать вывод, что в задачах гидростатики и течения идеальной жидкости тензор напряжений поверхностных сил может быть записан как $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$. *При этом в любой системе координат*:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

П.4. ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ В ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЕ

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. **Скалярное произведение**, результатом является скаляр:

$$c = \mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Тензорная запись более компактна: $c = a_j b_j$.

Дивергенция вектора div **u** может рассматриваться как скалярное произведение двух векторов: div $\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}$, один из которых — дифференциальный оператор $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$, обладающий всеми свойствами вектора.

В тензорной записи: $\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

2. **Векторное произведение**, результат — вектор. В символической записи:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \qquad (П.15)$$

В частности, ротор вектора rot **u** представляет собой векторное произведение вида

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

В тензорной алгебре для записи векторного произведения используют ε-тензор. Так, выражение (П.15) запишется следующим образом:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Последнее соотношение позволяет с учетом (П.6) расписать любую компоненту вектора **c**:

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad c_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad c_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Аналогично для любой i-й компоненты ротора запишем:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно расписать три компоненты ротора.

3. **Диадное произведение** векторов, результат — тензор второго ранга типа «диада». О диадном произведении упоминалось в § П.2.

В кинематике жидкости важную роль играет диадное произведение дифференциального оператора ∇ на вектор скорости **u** — так называемая «**дифференциальная диада**»:

$$V_{ij} = \nabla_i u_j = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.16})$$

Тензор V_{ij} описывает *относительное* движение дифференциально малой частицы жидкости, т.е. движение частицы относительно системы координат, связанной с самой частицей.

Разложим тензор V_{ij} на симметричную и антисимметричную части, используя соотношения (П.11) и (П.12).

Симметричная часть

$$V_{ij}^S = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

называется **тензором скоростей деформации** и описывает «чисто» деформационное движение жидкой частицы (деформацию без вращения).

Антисимметричная часть дифференциальной диады

$$V_{ij}^{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

описывает «чисто» вращательное движение жидкой частицы (вращение без деформации).

П.5. ВЕКТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА В ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЕ

В векторной алгебре существует большое число тождеств, например:

$$\text{div rot } \mathbf{a} = 0,$$

$$\text{rot grad } \rho = 0,$$

$$\text{div grad } \rho = \nabla^2 \rho,$$

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}) \text{ и т.д.}$$

Доказать подобные тождества средствами тензорной алгебры, как правило, весьма несложно. Для примера докажем первое из них.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{rot } \mathbf{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k = 0\,.$$

Скалярная величина (все индексы — немые) равна нулю, поскольку в ее записи присутствует произведение симметричного тензора-диады $\nabla_i \nabla_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ и антисимметричного тензора ε_{ijk}.

Докажем более сложное последнее тождество. Обозначим $\mathbf{d} = [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ и воспользуемся тензорными тождествами (П.8):

$$\varepsilon_{ijk}\, a_j\, d_k = \varepsilon_{ijk}\, a_j \varepsilon_{klm}\, b_l c_m = \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{klm}\, a_j b_l c_m = (\delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j b_l c_m =$$

$$= b_i a_m c_m - c_i a_l b_l,$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. — 6-е изд. М.: Наука, 1987.
2. **Кочин Н.Е., Кибель И.А, Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Часть I. — 6-е изд. Часть II. — 4-е изд. М.: Наука, 1963.
3. **Емцев Б.Т.** Техническая гидромеханика. — 2-е изд. М.: Машиностроение, 1987.
4. **Дейч М.Е.** Техническая газодинамика. — 4-е изд. М.: Энергия, 1974.
5. **Абрамович Г.Н.** Прикладная газовая динамика. — 3-е изд. М.: Наука, 1969.
6. **Преображенский В.П.** Теплотехнические измерения и приборы. М.: Энергия, 1978.
7. **Петухов Б.С., Поляков А.Ф.** Теплообмен при смешанной турбулентной конвекции. М.: Наука, 1986.
8. **Петухов Б.С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967.
9. **Тарг С.М.** Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
10. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
11. **Хинце И.О.** Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.
12. **Reynolds O.** On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluid and the Determination of the Criterion // Phyl. Trans. of the Royal Soc. 1895. № 186A. P. 935—982. Имеется русский перевод в кн.: Проблемы турбулентности. М.: ОНТИ, 1936.
13. **Rotta J.C.** Experimenteller Beitrag zur Entstehung Turbulenter Strömung in Rohr // Ing. Arch. 1956. № 24. S. 258—281.
14. **Ekman V.W.** On the Change from Steady to Turbulent Motion of Liquids // Ark. f. Mat. Astron. Och Fys. 1910. V. 6. № 12.
15. **Schubauer G.B., Skramstad H.K.** Laminar Boundary-Layer Oscilllations and Transition on a Flat Plate // NACA Rep. 1948. V. 909.
16. **Гении Л.Г., Свиридов В.Г.** Введение в статистическую теорию турбулентности. М.: Моск. энерг. ин-т, 1987.
17. **Бендатт Д., Пирсол А.** Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.
18. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.
19. **Иевлев В.М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975.
20. **Турбулентность**: Сборник / Под ред. П. Брэдшоу. М.: Машиностроение, 1984.

21. **Методы** расчета турбулентных течений: Сборник / Под ред. В. Коллмана. М.: Мир, 1984.
22. **Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А.** Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Энергоатомиздат, 1986.
23. **Попов В.П., Беляев В.М.** Теплообмен при переходном и турбулентном с малыми числами Рейнольдса режимах течения жидкости в круглой трубе // Теплофизика высоких температур. 1975. № 2. С. 370—378.
24. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967.
25. **Попов В.Н.** К расчету процессов теплообмена и турбулентного течения сжимаемой жидкости в круглой трубе // Теплофизика высоких температур. 1977. № 4. С. 795—801.
26. **Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.** Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 137—177.
27. **Gibson M.M., Launder B.E.** On the Calculation of Horisontal, Turbulent Free Shear Flow under Gravitational Influence // Trans. ASME. J. Heat Transfer 1976. V. 98. P. 81—87.
28. **Lumly J.L., Launder B.E., Bradshaw P.** Collaborative Testing of Turbulen: Models // Trans. ASME. J. Fluid Eng. 1996. V. 118. № 2. P. 243—247.
29. **Leonard A.** On the Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows // Adv. in Geophysics. 1974. V. 18A. P. 237—248.
30. **Gottlieb D., Orsazag S.A.** Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. NSP-CBMS Monograph 26, SIAM, Philadelphia, 1977.
31. **Smagorinsky J.S.** General Circulation Experiments with the Primitive Equations // Mon. Weather Rev. 1963. V. 91. P. 99—164.
32. **Brown W.G.** Uberlagerung von Erzwunder und Nturlieher Konvection bei Medrigen Durchsatzen in Einem Lotrechten Rohu // VDI-Forschungsh. 1960. B. 126. № 480. S. 1—21.
33. **Красильников Е.Ю., Лущик В.Г., Николаенко В.С., Паневин И.Г.** Экспериментальное исследование течения электропроводной жидкости в круглой трубе в продольном магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 151—155.
34. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница, строка	Напечатано	Следует читать
16, 10-я снизу	$м^3$	$м^3/кг$
28, 11-я сверху (в формуле)	$\ldots + \Delta x \Delta y dz + 0(\delta^2)$	$\ldots + \Delta x \Delta y dz + 0(d^2)$
94, 4-я сверху	$p = \text{const}$	$\rho = \text{const}$
95, 5-я снизу	$\beta_t g \Delta T$	$\beta_t g \Delta T$
138, 7-я сверху (в тексте)	$(-\gamma = 1)$	$(\gamma = 1)$
139, 1-я снизу (в подрисуночной подписи)	$\xi_г$	$\xi_т$
160, в формуле (8.15)	$\frac{dp}{dx} = \ldots$	$\frac{d\bar{p}}{dx} = \ldots$
176, 10-я снизу	$v(x_2, t_2) = \ldots$	$v'(x_2, t_2) = \ldots$
183, в формуле (8.57)	$(\overline{\sigma_{jk} u_i})$	$(\overline{\sigma_{ik} u_i})$
185, в формуле без номера между формулами (8.61) и (8.62)	$-\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_j u'_k})$	$-\bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_k})$
187, 1-я снизу (в тексте)	$\ldots = \frac{\rho}{2} \overline{u'_i u'_j}$	$\ldots = \frac{\rho}{2} \overline{u'_i u'_i}$