# INVERSE HEAT CONDUCTION

## ILL-POSED PROBLEMS

JAMES V. BECK
Department of Mechanical Engineering
Michigan State University

BEN BLACKWELL
Sandia National Laboratories
Albuquerque, New Mexico

CHARLES R. ST. CLAIR, JR.
Department of Mechanical Engineering
Michigan State University

A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION
NEW YORK . CHICHESTER . BRISBANE . TORONTO . SINGAPORE

Дж. Бек, Б. Блакуэлл,
Ч. Сент-Клэр, мл.

# Некорректные обратные задачи теплопроводности

Перевод с английского
д-ра техн. наук Е. А. Артюхина,
И. И. Павловца

под редакцией
академика В. П. Мишина,
д-ра техн. наук, проф. О. М. Алифанова

Москва «Мир» 1989

ББК 22.12
Б42
УДК 510.5

**Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл.**

Б42 Некорректные обратные задачи теплопроводности: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 312 с., ил.
ISBN 5-03-000914-0

В книге авторов из США изложены методы и вычислительные алгоритмы решения обратных задач нестационарной теплопроводности, состоящих в восстановлении тепловых граничных условий на поверхности твердого тела по данным внутренних измерений температуры. Описаны линейные и нелинейные задачи с привлечением для их решения аналитических соотношений и различных численных схем аппроксимации. Приведены результаты решения большого числа контрольных примеров.

Для научных работников и инженеров, а также студентов старших курсов и аспирантов.

Б $\frac{2303010000 - 052}{041(01) - 89}$ 162—88

ББК 22.12

*Редакция литературы по новой технике и космическим исследованиям*

ISBN 5-03-000914-0 (русск.)
ISBN 0-471-08319-4 (англ.)

© 1985 by John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.
© перевод на русский язык, с исправлениями, «Мир», 1989

# Предисловие редакторов перевода

Предлагаемая вниманию читателей книга является первой зарубежной монографией, в которой дается систематическое изложение методов и алгоритмов решения одного класса обратных задач нестационарной теплопроводности, заключающихся в определении зависящей от времени плотности теплового потока на поверхности твердого теплопроводного тела по результатам измерений температуры внутри его. Данная область исследований развивается уже три десятилетия, причем наиболее интенсивный период приходится на последние 15—20 лет. Экспериментально-теоретические методы, основанные на решении обратных задач теплопроводности, широко используются при исследовании и отработке тепловых режимов различных объектов авиационной, ракетно-космической техники, в энергетике и ряде других отраслей.

Основу представленных в монографии материалов составляют главным образом результаты исследований, выполненных признанным ведущим специалистом США в данной области профессором Мичиганского университета Джеймсом Беком и под его руководством. Он одним из первых начал и активно продолжает разрабатывать методы решения обратных задач теплопроводности и использовать их в практике тепловых исследований.

Монография имеет прикладной характер и ориентирует читателя на применение вычислительной техники. Достаточно подробное описание алгоритмов дает возможность использовать материал книги для решения конкретных практических задач.

В СССР по вопросам теории и практики решения обратных задач теплопроводности издано несколько монографий, опубликовано много оригинальных статей. Однако зарубежные работы в них не отражены в должной степени, так как рассеяны по различным, иногда труднодоступным источникам. Настоящая книга, отражающая современное состояние этих вопросов за рубежом, содержащая важный, интересный и обширный материал, восполняет существующий пробел. В ней убедительно показано, что обратные задачи теплопроводности являются неустойчивыми задачами и требуют разработки специальных методов и приемов решения. Имеются такие подходы и рассматриваются далее в книге применительно к линейным и нелинейным задачам. При этом предпочтение отдается более универсальным алгоритмам, основанным на функциональной аппроксимации и регуляризации. Одно из главных требований, которые авторы обоснованно предъявляют к методам решения обратных задач, — это высокая вычислительная эффективность. Стремление к максимальному снижению затрат машинного времени заставляет отдать предпочтение последовательным вычислительным процедурам.

Книга написана на высоком научно-техническом уровне и с большим педагогическим мастерством, легко читается. Авторы много внимания уделяют физическим аспектам, поясняющим особенности обратных задач и методов решения. Приведенные примеры и упражнения способствуют активному усвоению материала. Полезны библиографические справки и замечания.

Книга представляет интерес для теплофизиков, теплотехников, специалистов в области прикладной математики. Изложенные в ней сведения доступны для студентов старших курсов университетов и технических вузов соответствующих специальностей.

В. П. Мишин
О. М. Алифанов

Жене Барбаре, детям Шерону и Дугласу, отцу Питеру и матери Луизе Бек.

Дж. В. Б.

Жене Бетти и детям Джеффри и Грегори Блакуэлл.

Б. Б.

Выдающимся инженерам в нашей семье Чарльзу Р. Сент-Клэру-старшему и Деборе Шорт (моей дочери). И тем, для кого инженеры живут и творят: матери Эрле, жене Жанетте и нашим детям и внукам от мала до велика и несомненно выдающимся Чарльзу III Скотту, Джуди, Тимоти Б. Шорт, Грегори, Кевину и жившим своей семьей Джону и Анне Поломски.

Ч. Р. С.

# Предисловие

Книга посвящена обратной задаче теплопроводности (ОЗТ), которая заключается в оценивании изменения по времени плотности теплового потока на поверхности теплопроводного тела. При этом в методике расчета используются измерения нестационарной температуры *внутри* тела. Наличие погрешностей в измерениях, а также некорректность постановки задачи приводят скорее к «оценке», нежели к определению «истинной» плотности теплового потока на поверхности и (или) температуры.

Основанием для написания данной книги послужили вкжность и практическая направленность ОЗТ, а также то, что к моменту ее написания отсутствовали книги на английском изыке по даниой теме. Из большого числа некорректно поставленных задач анализируется лишь одна частная задача, однако рассматриваемые методы могут применяться для решения многих других задач. Основная цель состоит в том, чтобы оценить некоторую функцию по даным измерений, которые проводятся не в даниой точке, а на некотором расстоянии от нее. Среди других приложений можно назвать дистанционные измерения, разведку нефти, неразрушающий контроль материалов, определение внутреннего строения Земли.

Авторы начали интересоваться обратными задачами теплопроводности более двух десятилетий тому назад во время работы в аэрокосмической промышленности. Одна из практических задач состояла в определении изменения по времени плотности теплового потока на поверхности теплозащитиого покрытия спускаемого аппарата.

Книга написана как учебник для студентов инженерных специальностей, в ней приводятся числовые примеры и упражнения, которые будут полезны также и инженерам, использующим книгу для знакомства с указанной проблемой и методами ее решения. Справочная книга (Beck J. V., Arnold K. J., Parameter Estimation in Engineering and Science, Wiley, 1977) посвящена оцениванию некоторых постоянных или параметров, а не оцениванию функций, как это требуется в данной ОЗТ. Хотя многие понятив, связанные с методом наименьших квадратов и коэффици-

ентами чувствительности, излагаются в обеих книгах, от читателя данной книги не требуется владения методами оценивания параметров.

Книга написана на уровне курса для студентов и аспирантов. В качестве предварительного материала рекомендуется курс теплопроводиости для студентов или курсы по дифференциальным уранненим в частных производных и численным методам.

При написании книги основное внимание уделялось общим методам решения обратных задач и в меньшей мере — специальным методам, подходящим лишь для решения отдельных ОЗТ. Например, приведенные в гл. 4 основные методы могут быть использованы как для описания явления тепловой диффузии интегральным уравнением, так и для конечно-разностной (или конечно-элементной) аппроксимации уравнения теплопроводности. Эти методы позволяют не только учитывать нестационарность процесса теплопроводности, но также исследовать нелиейные задачи, случаи размещения нескольких датчиков, процесс теплопроводиости в неоднородных средах, многомерных телах, а также случаи решения системы многих уравнений.

Используются два общих метода: функциональной аппроксимации и регуляризации. На основе их объединения предложен также метод пробных функций. Одна из важных особенностей книги заключается в том, что показана возможность реализации всех этих методов в виде последовательных алгоритмов. Такой подход в ряде случаев дает результаты, близкие к тем, которые соответствуют оцениванию во всей временно́й области, и в то же время обеспечивает более высокую вычислительную эффективность.

Одна из целей авторов состояла в том, чтобы разъяснить читателям суть основных методов и предоставить им аналитический инструмент для сравнения различных методов между собой. Для этого используются понятия коэффициентов чувствительности, базовые контрольные примеры и среднеквадратичная ошибка. Читателям также показывается, что оптимальная оценка соответствует компромиссу между минимальной чувстантельностью к случайным погрешностям измерений и минимальным смещением.

Первоначальные заметки по материалу книги использовались при чтении краткого курса в Американском обществе инженеров-механиков (ASME) и курса для выпускников Мичиганского государственного университета.

Авторы выражают признательность всем, кто участвовал в подготовке данной книги. Среди них Д. Мьюрио, М. Райно, другие коллеги и ученики, ознакомившиеся с предварительными заметками и сделавшие критические замечания. Авторы также благодарят Джудн Данкан, Филляс Мэрф, Терезу Штукман, Алису Монтойа и Жаниу Пиво, которые оказали помощь в перепечатке рукописи.

Джеймс В. Бек желает выразить признательность своим учителям Кеннету Астиллу из Туфтского университета, Уоррену Розеноу из Массачусетского технологического иистутута и А. М. Данаку из Мичиганского государственного университета.

Бен Блакуэлл хотел бы поблагодарить тех, кто оказал неоценимую помощь в изучении проблем теплопередачи: Х. Вольфа из Арканзасского университета,

М. У. Вилдива из университета шт. Нью-Мексико и У. М. Кейза из Стэнфордского университета.

Особав и глубокав признательность выражается Георгу А. Хаукинсу за знания и методологические принципы, которым он обучил Чарльза Р. Сент-Клэра, своего бывшего аспиранта.

Ист-Лансинг,
Мичиган
август 1985

Джеймс Бек
Бен Блакуэлл
Чарльз Р. Сент-Клэр-мл.

# Обозначения

$a, b, c, d, e, f$ — коэффициенты в алгоритме с трехдиагональной матрицей, см. (6.3.9), (6.3.10);

$a$ — радиус цилиндра или сферы;

$c$ — удельная теплоемкость;

$\mathrm{cov}(.,.)$ — оператор ковариации, см. (1.4.8);

$e_i$ — невязка погрешности температуры, см. (1.4.7);

erf — функция ошибок;

erfc — дополнительная функция ошибок;

$E$ — глубина расположения датчика от нагреваемой поверхности;

$E(\cdot)$ — оператор математического ожилания;

$f_j$ — коэффициент фильтра, см. (4.7.2);

$f_j^+$ — безразмерный коэффициент фильтра;

$G$ — функция Грина;

$h$ — коэффициент теплоотдачи;

$h_c$ — контактная проводимость;

$\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1, \ldots$ — регуляризирующие матрицы, см. (4.5.16);

ierfc — интегральная функция ошибок;

$\mathbf{1}$ — единичный вектор;

$\mathbf{I}$ — единичная матрила;

$J$ — число датчиков температуры;

$J_0, J_1, \ldots$ — функции Бесселя первого рода порядка 0, 1, ...;

$k$ — коэффициент теплопроводности;

$K_i$ — коэффициент усиления в момент времени $t_i$, см. (4.4.25);

$K_i^+$ — $= (q_c L/k)K_i$, в последовательных элементах $q_c = 1$; безразмерный коэффициент усиления;

$K_{ji}$ — коэффициент усиления для $j$-го датчика в момент времеин $t_i$;

$L$ — толщина пластины;

$M$ — общий номер шага по времени;

$p$ — $= \alpha\Delta t/\Delta x^2$ — число Фурье для пространственно-временной сетки;

$q$ — плотность теплового потока;

$q_c$ — постоянное значение плотности теплового потока;

$q_i$ — плотность теплового потока в момент времени $t_i$;

$\hat{q}_i$ — оценка величины $q_i$;

$\tilde{q}_i$ — плотность теплового потока, точно соответствующего измеренной температуре $Y_i$ в момент времени $t_i$, см. (4.4.3.3);

$\hat{q}_M$ — оценка плотности теплового потока для интервала времени от $t_{M-1}$ до $t_M$;

$\tilde{\mathbf{q}}$ — вектор плотности теплового потока, см. (4.6.4);
$\tilde{\mathbf{q}}^f$ — вектор плотности теплового потока, см. (4.6.4);
$q^*$ — пробное значение $q$;
$r$ — число последующих шагов по времени;
$r$ — радиальная координата;
$r_a^+$ $= r/a$;
$S$ — функция наименьших квадратов;
$t$ — время;
$t^+$ $= \alpha t/L^2$ — безразмерное время;
$t_a^+$ $= \alpha t/a^2$;
$T$ — температура;
$T_0$ — начальная температура;
$T_\infty$ — температура внешней среды, при которой имеют место конвекция или радиация;
$T^+$ $= (T - T_0)/(qL/k)$;
$\hat{T}$ — оценка величины $T$;
$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}$ — оценка вектора температур при $\mathbf{q} = 0$;
$\hat{T}^*$ — температура, соответствующая $q = q^*$, см. (6.3.8);
$u(x, t)$ — функция изменения температуры тела при нулевом начальном значении температуры и при ступенчатом единичном изменении температуры поверхности, см. (2.4.1);
$V(\cdot)$ — оператор дисперсии;
$w_l$ — весовой множитель для плотности теплового потока, см. (4.4.40c);
$W_0$, $W_1$, ... — константы регуляризации, см. (4.5.1);
$x$ — пространственная координата;
$x^+$ $= x/L$;
$X$ — коэффициент чувствительности относительно импульса плотности теплового потока;
$X^+$ $= (k/x)\partial T/\partial q_c$;
$\mathbf{X}$ — матрица коэффициентов чувствительности;
$Y_i$ — измеренное значение температуры в момент времени $t_i$;
$Z$ — коэффициеит чувствительности при ступенчатом изменении плотности теплового потока;
$\alpha$ — коэффициент температуропроводности; параметр регуляризации;
$\alpha^+$ — см. (5.6.14);
$\beta_1$, $\beta_2$, ... — параметры, см. (4.4.1)—(4.4.5);
$\gamma$ — скорость тепловой волны;
$\delta q_r$ — импульс плотности теплового потока;
$\delta Y_r$ — импульс температуры, погрешность;
$\dfrac{\delta q_M}{\delta Y_j}$ — погрешность плотности теплового потока при единичной погрешности температуры;
$\Delta t$ — шаг по времени;
$\Delta t_M$ $= t_{M+1} - t_M$;
$\Delta x$ — шаг пространственной сетки в конечно-разностном методе;

$\Delta\phi(\mathrm{r},\ t_n)$ $= \phi(\mathrm{r},\ t_{n+1}) - \phi(\mathrm{r},\ t_n)$;

$\Delta\tau_E$ $= \alpha\Delta t/E^2$;

$\varepsilon_i$ — погрешность температуры, см. (1.4.1);

$\theta$ — весовой параметр в разностной аппроксимации по времени;

$\lambda$ — переменная интегрирования;

$\rho$ — плотность;

$\sigma$ — среднеквадратичное отклонение;

$\phi(x,\ t)$ — реакция температуры на единичное ступенчатое изменение плотности теплового потока;

$\omega$ — коэффициент трехдиагональной матрицы, см. (6.3.10).

# Глава 1.
# О постановке обратной задачи теплопроводности

## 1.1. Введение

Если на границе твердого тела известна зависимость от времени теплового потока или температуры, то можно определить распределение температуры во всем теле. Это так называемая прямая задача. Во многих случаях при анализе динамических процессов теплообмена закон изменения теплового потока или температуры поверхности должен быть определен по данным измерений температуры в одной или нескольких внутренних точках твердого тела. Это — обратная задача. В частности, в течение последних двух десятилетий конкретная задача оценивания теплового граничного условия по результатам измерений внутренней температуры называется обратной задачей теплопроводности. При анализе нестационарных процессов теплопроводности и диффузии возникает целый ряд других обратных задач, однако такое название получила именно указанная выше задача, и она является главным объектом рассмотрения настоящей книги.

Получить аналитическое решение обратной задачи теплопроводности гораздо сложнее, чем отыскать аналитическое решение прямой задачи. Однако в прямой задаче при измерении или реализации заданных граничных условий может возникнуть много препятствий экспериментального характера. Физические условия бывают такими, что невозможна установка датчика на поверхности тела или существенно снижается точность измерений вследствие размещения датчиков. Поэтому часто трудно измерить закон изменения температуры нагреваемой поверхности твердого тела. Гораздо проще выполнить достаточно точные измерения временных зависимостей температуры во внутренних точках или на теплоизолированной поверхности тела. Таким образом, приходится выбирать между относительно неточными измерениями и сложной аналитической задачей. В то же время достаточно точное и легко реализуемое решение обратной задачи позволило бы одновременно свести обе трудности к минимуму.

Задачи определения законов изменения температуры и теплового потока на нагреваемой поверхности эквивалентны в том смысле, что если одна из этих величин известна, то другую можно достаточно просто определить [1]. Их нельзя определить независимо друг от друга, поскольку в прямой задаче теплопроводности может быть задано только одно граничное условие в данный момент времени на данной границе. Однако при этом справедливо противоречивое на первый взгляд утверждение: точно вычислить тепловой поток сложнее, чем температуру поверхности. По этой причине основное внимание в книге уделено

[1] Здесь следует заметить, что если задача определения температуры поверхности по известной плотности теплового потока является корректной и для ее решения есть хорошо отработанные алгоритмы, то другая (обратная) задача — нахождение градиента температуры на границе тела — не всегда является корректной, а следовательно, и простой для решения. — *Прим. ред.*

определению зависимости от времени граничного теплового потока (при определении теплового потока с помощью разностных методов граничные температуры являются промежуточным результатом вычислений).

Для целей данной книги обратная задача теплопроводности (ОЗТ) формулируется следующим образом: ОЗТ представляет собой оценивание временной зависимости теплового потока на нагреваемой поверхности по данным измерений нестационарных температур в одной или нескольких точках внутри теплопроводного тела. Термин «оценивание» используется потому, что измерения внутренней температуры всегда содержат погрешности, которые влияют на точность вычисления теплового потока. Более того, даже если используются точные, но дискретно заданные температуры и при этом учитывается большое, но конечное число значащих цифр, тепловой поток не может быть точно определен.

Одна из первых статей по ОЗТ была опубликована Штольцем в 1960 г. [1]. В ней приводился метод расчета тепловых потоков при резком охлаждении тел простой геометрической формы конечных размеров. Штольц [1] датирует первое применение своего метода июнем 1957 г. Для полубесконечного тела тот же самый подход использовался Мирсепасси в течение нескольких лет, вплоть до 1960 г. При этом применялись как численные [2, 3], так и графические [3] методы. Изданная в СССР статья Шумакова [4] по ОЗТ была переведена в 1957 г. Программа освоения космического пространства, начавшаяся приблизительно в 1956 г., существенно продвинула изучение обратной задачи теплопроводности. В рамках этой программы практическое применение ОЗТ относилось к головным частям ракет и космических зондов, соплам ракетных двигателей и другим устройствам. Бек также начал работать по тематике ОЗТ приблизительно тогда же и разработал основные подходы [5—11], позволявшие использовать значительно меньшие по сравнению с методом Штольца [1] шаги по времени. В космической программе использовались также работы Блакуэлла [12, 13], Имбера [16—23], Мулхолланда [24—27], а также Уильямса и Карри [31]. Еще одна область, в которой настоятельно требовалось применение методов ОЗТ, связана с испытаниями элементов ядерных реакторов [32—38]. Многие программы для ЭВМ, получившие распространение в США, построены на основе метода, описанного в опубликованной в 1970 г. статье [9]. Другие приложения ОЗТ включают: 1) периодический нагрев в камерах сгорания двигателей внутреннего сгорания [39], 2) затвердевание стекла [40], 3) косвенное калориметрирование в лабораторных условиях [4] и 4) исследование переходного режима кипения. На сегодняшний день по ОЗТ или близко связанной тематике опубликовано около 300 статей [1].

[1] В этой краткой исторической справке авторы книги недостаточно отразили исследования в данной области, проводившиеся в СССР. В результате в книге не всегда правильно указаны приоритеты по тем или иным подходам к решению обратных задач, а также отсутствуют упоминания о целом ряде разработанных в СССР методов, которые давно и успешно применяются на практике, например о широком классе методов, основанных на принципе итерационной регуляризации, методе динамической фильтрации и др.

Читатель может в известной степени восполнить этот пробел, ознакомившись с монографиями: Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач теплообмена). — М.: Машиностроение, 1979; Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. — М.: Наука, 1988; Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. — Киев: Наукова думка, 1982; Машевитый Ю. М., Мулткаовский А. В. Идентификация в задачах теплопроводности. — Киев: Наукова думка, 1982; Симбирский Д. Ф. Температурная диагностика двигателей. — Киев: Техника, 1979; Шумаков Н. В. Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов. — М.: Атомиздат, 1979. С учетом работ советских авторов библиография по ОЗТ в настоящее время насчитывает более тысячи работ. — *Прим. ред.*

Для решения обратной задачи теплопроводности предложен ряд совершенно различных подходов. Эти подходы включают использование теоремы Дюамеля (или интеграла свертки), применение которой ограничено линейными задачами [1—3, 5—7, 10, 28, 58]. Используются также численные методы конечных разностей [8, 9, 11—13, 29—31, 35—38] и конечных элементов [35, 36] вследствие их пригодности для решения нелинейных задач. Алгоритмы, основанные на точных решениях, предложены Бургграфом [43], Имбером и Кханом [23], Лэнгфордом [14] и другими. Для реальных задач эти алгоритмы имеют ограниченное применение (данный вопрос обсуждается в гл. 2), однако они чрезвычайно полезны для понимания сути ОЗТ. В некоторых алгоритмах использовалось преобразование Лапласа, и они также применимы только к линейным задачам [41, 44].

ОЗТ — одна из многих задач, которые в математическом смысле являются некорректно поставленными. Это обычно обратные задачи, и их решение крайне чувствительно к погрешностям измерений (дальнейшее обсуждение некорректных задач приведено в разд. 4.2). Существует ряд общих методов решения некорректных задач. Один из них разработан Тихоновым в 1963 г. [45]. Он назван методом регуляризации и позволяет снизить чувствительность решения к погрешностям измерений. В книге представлена модификация этого метода, позволяющая более эффективно решать ОЗТ (разд. 4.5). Представлена также многочисленная группа других общих методов решения некорректных задач, включая хорошо известный геофизикам метод Бэкуса — Гильберта [28, 46, 47]. Для решения ОЗТ могут быть также использованы математические методы решения плохо обусловленных систем алгебраических уравнений, называемые методами сингулярных разложений [48, 57].

Цель данной главы — ввести понятия обратной задачи теплопроводности и других связанных с ней задач, а также дать общее описание различных аспектов ОЗТ. Содержание разделов данной главы следующее. В разд. 1.2 представлены некоторые примеры ОЗТ и относящихся к ней задач. Связь ОЗТ с оцениванием функций и параметров рассматривается в разд. 1.3. В разд. 1.4 анализируется природа погрешностей измерений. В разд. 1.5 поясняется, почему ОЗТ является сложной задачей. Важный вопрос о коэффициентах чувствительности обсуждается в разд. 1.6. Краткая классификация методов решения ОЗТ представлена в разд. 1.7. Критерии оценки качества различных методов решения ОЗТ предлагаются в разд. 1.8. В заключительном разделе дается краткое описание содержания книги.

## 1.2. Примеры обратных задач

### 1.2.1. Обратные задачи теплопроводности

Примером обратной задачи является оценивание закона изменения нагрева по времени космического самолета или баллистической ракеты, совершающих спуск в атмосфере Земли. Необходимо определить плотность теплового потока на нагреваемой поверхности. На рис. 1.1 показаны движущийся в атмосфере аппарат и в увеличенном виде часть его оболочки. Хотя в общем случае плотность теплового потока, обозначаемая $q$, может зависеть как от пространственной координаты $y$, так и от времени $t$, будем предполагать, что поток тепла в продольном направлении пренебрежимо мал по сравнению с потоком тепла по нормали к

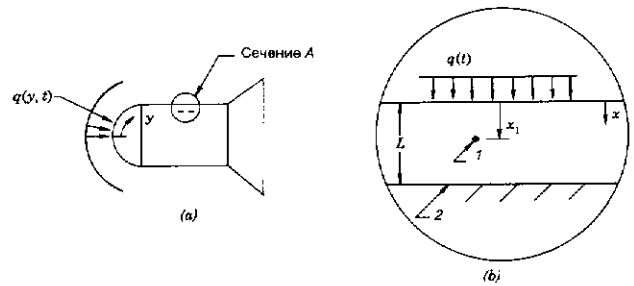



Рис. 1.1. Пример вычисления плотности теплового потока на поверхности спускаемого аппарата. *a* — схема спускаемого аппарата; *b* — сечение *A*; $q(t)$ — плотность теплового потока; *1* — датчик температуры; *2* — известное граничное условие.

поверхности. Таким образом, плотность суммарного граничного теплового потока как функция времени оценивается по данным измерений, полученным от внутреиняего датчика температуры, расположениого в точке с координатой $x_1$, как показано на рис. 1.1,*b*. Измерения производятся дискретно в моменты времени $t_1$, $t_2$, ... или в общем случае в моменты времени $t_i$, которым соответствуют измереияые значения температуры $Y_i$. (Слово «дискретно» означает, что, измерения производятся в отдельные моменты времени, например 1, 2, 3 с и т. д., а не непрерывно.) Измеряемые величины показаны на рис. 1.2.

Оцениваемая величиа плотности теплового потока, обозначаемая $\hat{q}_i$, связана с моментом времени $t_i$, в который осуществляется измерение температуры $Y_i$. *Истинное* значение плотности теплового потока обозначается $q_i$. Закон изменения плотности теплового потока $q(t)$ может быть произвольной функцией времени. Вычисленные значения $q(t)$ в моменты времени $t_i$ показаны на рис. 1.3. В общем случае плотность теплового потока может резко возрастать и убывать, быть как положительной, так и отрилательной величиной; при этом отрицательное значение означает отвод тепла от поверхности.

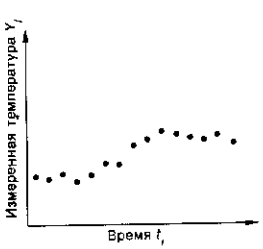



Рис. 1.2. Измереняые температуры в отдкальные моменты времени.

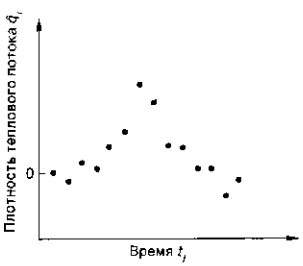



Рис. 1.3. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности.

В процедуре решения обратной задачи источник нагрева не имеет сколько-нибудь существенного значения. Источниками конвективного нагрева могут быть высокотемпературные потоки в теплообменниках реакторов, при обтекании поверхности спускаемых аппаратов или лопаток турбин. Может также осуществляться радиационный нагрев от какого-либо источника излучения или кондуктивный нагрев от твердого тела, находящегося в тепловом контакте с рассматриваемой границей.

Оценивать закон изменения плотности теплового потока по времени необходимо для того, чтобы иметь математическую модель процесса теплопередачи. Например, в случае спускаемого аппарата, показанного на рис. 1.1,*б*, предполагается, что оболочка выполнена из одного однородного изотропного материала и приближенно представляется в виде плоской пластины (аналогичным образом могут быть рассмотрены радиальный сегмент цилиндра или какого-либо другого одномерного тела). В этом случае возможная математическая модель распределения температуры в пластине имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.2.1}$$

$$T(x,0)=T_0(x), \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \text{ при } x=L, \tag{1.2.3a}$$

$$T(x_1,t_i)=Y_i. \tag{1.2.3b}$$

Цель состоит в оценке плотности теплового потока на поверхности в дискретные моменты времени $t_i$ в соответствии с формулой

$$q(t_i)=-k\left.\frac{\partial T(x,t_i)}{\partial x}\right|_{x=0}. \tag{1.2.4}$$

Данная обратная задача существенно отличается от прямой задачи. Здесь граничное условие при $x = 0$ не определено, однако вместо этого известно полученное на основании измерений изменение по времени температуры в одной или нескольких *внутренних* точках. Дополнительные трудности обусловлены тем, что измерения температуры осуществляются только в дискретные моменты времени и неизбежно содержат погрешности. Несомненно, что внутренние измерения дают значительно меньше информации, чем известно в классической прямой задаче, когда условия на поверхности задаются в виде непрерывных точных соотношений.

Предполагается, что коэффициент теплопроводности $k$, плотность $\rho$ и удельная теплоемкость $c$ являются известными функциями температуры. Если хотя бы одна из этих тепловых характеристик изменяется с изменением температуры, то обратная задача теплопроводности становится нелинейной. Начальное распределение температуры $T_0(x)$ считается известным. Также предполагается, что координата расположения датчика $x_1$ измерена и что погрешность ее определения пренебрежимо мала. Точно известна толщина пластины $L$.

Условие теплоизолированности, определяемое соотношением (1.2.3а), пред-

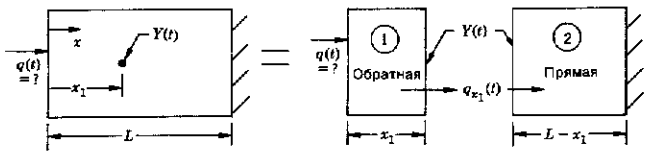



Рис. 1.4. Разделение обратной задачи с одиночным внутренним датчиком на прямую и обратную.

ставляет собой лишь одно из различных условий, которые могут быть заданы на границе $x = L$. Может, в частности, рассматриваться условие конвективного и (или) радиационного теплообмена. Для обратной задачи с единственной неизвестной — плотностью теплового потока важно только, чтобы граничное условие при $x = L$ было задано. Если коэффициент теплоотдачи $h$ зависит от температуры или задано условие теплообмена излучением, то обратная задача теплопроводности также становится нелинейной.

В случае измерения зависимости температуры от времени в одной внутренней точке обратная задача может быть разделена на две отдельные задачи, одна из которых представляет собой прямую задачу, как это показано на рис. 1.4. Для части тела от $x = x_1$, до $x = L$ (тело 2) задача может считаться прямой, так как известны условия на обеих границах [$T(t) = Y(t)$ при $x = x_1$, $\partial T/\partial x = 0$ при $x = L$]. Из решения этой прямой задачи с заданным распределением температуры в области $x_1 \leqslant x \leqslant L$ может быть определена плотность теплового потока на границе $x = x_1$ с использованием уравнения

$$\hat{q}_{x_1}(t) = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_1}. \qquad (1.2.5)$$

Тепловой поток с такой же плотностью должен *выходить* из тела 1 ($0 \leqslant x \leqslant x_1$). Поэтому на границе $x = x_1$ тела 1 определены два условия, а при $x = 0$ не задано ни одного. Такая формулировка граничных условий уравнения нестационарной теплопроводности (1.2.1) приводит к математически некорректно поставленной задаче.

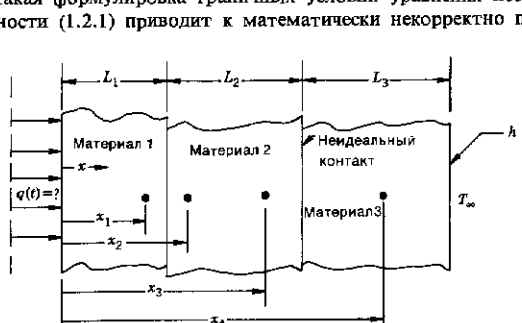



Рис. 1.5. Составная пластина с несколькими термодатчиками. $T_\infty$ — температура окружающей среды.

Обратная задача теплопроводности с неизвестной плотностью теплового потока на одной из границ тела может рассматриваться в более сложных постановках. Некоторые такие усложнения показаны на рис. 1.5. Наличие четырех датчиков температуры исключает возможность простого разделения области, которое показано на рис. 1.4. Это обусловлено тем, что вычисленная плотность теплового потока, выходящего из одной области, в общем случае будет не равна вычисленной плотности теплового потока, поступающего в следующую область. Другая сложность возникает при рассмотрении составного тела, выполненного из трех различных материалов, между которыми возможен как идеальный, так и неидеальный контакт. Кроме того, пластины могут быть не плоскими, а представлять собой, например, части цилиндрической стенки. Приемлемая методика решения обратной задачи теплопроводности должна позволять учитывать каждый из этих усложняющих факторов.

### 1.2.2. Другие обратные задачи, связанные с оцениванием функций

Имеются некоторые другие задачи, родственные обратной задаче теплопроводности. В ОЗТ осуществляется оценивание плотности теплового потока на поверхности как функции времени с использованием измеренных зависимостей температуры от времени во внутренних точках. Если тепловые свойства не зависят от температуры и граничное условие на «известной» границе линейно, то обратная задача является линейной. Весьма близкан к этой задача включает граничное условие конвективного теплообмена:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h[T_\infty(t) - T(0,t)]. \qquad (1.2.6)$$

Если коэффициент теплоотдачи $h$ известен либо в виде константы, либо в виде функции времени, то задача оценивания температуры окружающей среды $T_\infty(t)$ по данным внутренних измерений температуры является линейной. Если же $h$ — известная функция температуры, то обратная задача определения функции $T_\infty(t)$ становится нелинейной [49].

Другая важная задача оценивания функциональной зависимости, связанная с условием (1.2.6), заключается в определении $h$ как функции времени. Это *нелинейная* задача даже в том случае, когда дифференциальное уравнение является линейным. Более подробно нелинейность анализируется в разд. 1.6. Определение нестационарного коэффициента теплоотдачи представляет собой важную задачу при анализе, например, сложной кривой кипения [42]. Оценивание $h(t)$ рассматривается в гл. 8.

При моделировании неидеального контакта часто используется величина контактной проводимости $h_c(t)$ на поверхности раздела. На такой поверхности, показанной на рис. 1.5, плотность теплового потока связана с $h_c$ соотношением

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=(L_1+L_2)^-} = h_c[T|_{x=(L_1+L_2)^-} - T|_{x=(L_1+L_2)^+}] = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=(L_1+L_2)^+} \qquad (1.2.7)$$

где знак плюс относится к поверхности раздела со стороны материала 3, а знак минус — к поверхности раздела со стороны материала 2. Задача оценивания $h_c(t)$ подобна задаче определения конвективного коэффициента теплоотдачи.

Внутри материалов возможны эндотермические и экзотермические химические реакции, причем тепловые эффекты этих реакций могут быть неизвестны. Источники тепла могут быть также связаны с электрическим нагревом, ядерными реакциями, выделением тепла за счет трения. В этих случаях одномерное уравнение, описывающее соответствующие процессы в телах плоской геометрической формы, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+g(x,\,t)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.2.8}$$

где $g(x,\,t)$ — интенсивность тепловыделения в единице объема. Если $g$ зависит только от времени, то задача оценивания $g(t)$ по данным внутренних измерений нестационарной температуры совершенно аналогична одномерной обратной задаче теплопроводности. Если уравнение (1.2.8) и граничные условия являются линейными, то задача оценивания $g(t)$ линейна. Однако если $k = k(T)$, то задача оценивания функции $g(t)$ становится нелинейной. В случае зависимости $g$ от двух переменных, $x$ и $t$, оценивание $g(x,\,t)$ аналогично решению двумерной обратной задачи теплопроводности.

Большое внимание со стороны математиков было уделено двум типам обратных задач оценивания функций, которые называются некорректно поставленной задачей Коши [45, 53—55] и начально-краевой обратной по времени задачей для уравнения теплопроводности [53—56].

Одна из постановок задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{1.2.9}$$

заключается в том, что граничные условия определены не полностью, однако имеются данные измерений температуры во внутренних точках. Задача заключается в получении оценки $T(x,\,t)$ во всей области, включая границы.

Примером обратной по времени задачи теплопроводности является определение начального распределения температуры $T_0(x)$ в теле конечных размеров по известным граничным условиям и результатам внутренних измерений температуры (см. задачу (1.26)).

Перечисленные обратные задачи становятся более сложными, если одновременно определяется несколько функций. Например, можно поставить задачу од-

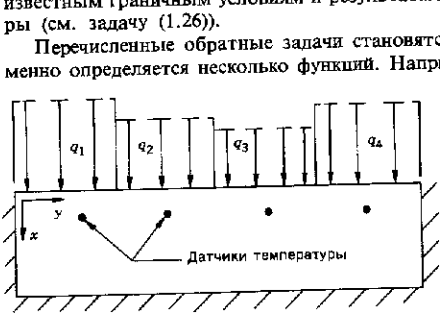



Рис. 1.6. Плотность теплового потока на поверхности плоской пластины как функция координаты.

новременного оценивания плотности теплового потока $q(t)$ на левой границе и $T_\infty(t)$ на правой границе для тела, показанного на рис. 1.5. В этом случае требуется получить оценки двух функций времени.

Если плотность теплового потока на поверхности зависит от координаты вдоль этой поверхности (рис. 1.6), то предполагается одновременное оценивание нескольких составляющих плотности теплового потока. Такая обратная задача теплопроводности является двумерной, и она подробно рассматривается в гл. 7.

## 1.3. Оценивание функций и оценивание параметров

Применительно к обратной задаче теплопроводности в предыдущем разделе был использован термин «оценивание функции». В ОЗТ плотность теплового потока отыскивается в виде произвольной функции времени. Плотность теплового потока может быть положительной или отрицательной, постоянной или резко меняющейся, периодической или непериодической и т. д. Она может зависеть и от действий человека. Например, пилот космического самолета может изменить траекторию спуска в атмосфере. В ОЗТ плотность теплового потока на поверхности является функцией времени, и может потребоваться оценка сотен отдельных компонент плотности теплового потока $\hat{q}_i$, чтобы точно описать искомую функцию.

Задачи, известные под названием «оценивание параметров», связаны с рассмотренными выше. Они также являются обратными, но в них оцениваются некоторые «параметры», или константы, или физические свойства. Применительно к задачам теплопроводности можно рассматривать определение коэффициента теплопроводности твердого тела по данным внутренних измерений изменения температуры по времени при известной плотности теплового потока на поверхности или других граничных условиях [49]. Например, коэффициент теплопроводности железа армко при близких к комнатной температурах может рассматриваться как параметр, а не как функция, для описания которой требуются сотни значений $k_i$. Задачи оценивания параметра и оценивания функции становятся весьма близкими по сути, если осуществляется оценивание коэффициента теплопроводности $k$ как функции температуры $T$. Однако зависимость $k(T)$ не может быть произвольной и не регулируется человеком.

Оценивание параметров является родственной проблемой. Этой проблеме посвящена книга Бека и Арнольда [49]. Для понимания материала настоящей книги не требуется знать основные подходы оценивания параметров. Оценивание параметров было построено на статистической основе, однако такой подход неприемлем при оценивании функций. В данной книге при оценивании функций основное внимание уделяется вычислительным и математическим, а не статистическим аспектам. При этом некоторые статистические вопросы рассматриваются в разд. 1.4, где анализируются погрешности измерений.

## 1.4. Измерения

### 1.4.1. Погрешности измерений

В обратной задаче теплопроводности наряду с температурой используется еще ряд измеряемых величин. Это такие величины, как время, координата датчика, толщина образца. Предполагается, что все они, за исключением температуры,

известны точно. Если это не так, то может потребоваться, например, одновременное оценивание координаты датчика и плотности теплового потока на поверхности. Последняя задача объединяет в себе и обратную задачу теплопроводности, и задачу оценивания параметра. Подобные задачи выходят за рамки данной книги. Если тепловые свойства известны с недостаточной точностью, то их необходимо определить как можно точнее, используя методы оценивания параметров.

Предполагается, что измерения температуры являются основным источником погрешностей и неопределенностей. При этом считается, что известные систематические погрешности, обусловленные ошибками тарировки, присутствием датчика, потерями вследствие теплопроводности и конвекции и другими факторами, могут быть учтены. Тогда остальные виды погрешностей можно рассматривать как *случайные* и использовать для их описания методы математической статистики.

Информалия, получаемая с помощью датчиков, расположенных в теплопроводном теле, является неполной по различным причинам. Во-первых, эти измерения производятся в отдельных точках. При этом имеется ограниченное число датчиков, а иногда только один. Следовательно, пространственное изменение температуры полностью неизвестно. Кроме того, измерения датчиком осуществляются не непрерывно, а лишь в отдельные моменты времени. Однако в силу природы погрешностей измерений *непрерывная* запись температур не намного увеличивает объем полезной информации по сравнению с дискретными измерениями.

### 1.4.2. Статистические характеристики погрешностей

В данном разделе формулируются восемь стандартных статистических предположений относительно измерений температуры. Эти предположения являются *стандартными* и в частном случае могут не выполняться. Эти восемь предположений [49] вводятся для того, чтобы получить критерии сравнения с реальными условиями. Случайные погрешности в измерениях температуры вызывают случайные ошибки в значениях плотности теплового потока на поверхности. Стандартные предположения позволяют упростить анализ случайных погрешностей. Все восемь стандартных предположений рассматривались в книге [49] и заключаются в следующем.

1. Первое стандартное предположение состоит в том, что погрешности являются аддитияными, или

$$Y_i = T_i + \varepsilon_i \quad \text{(аддитияные погрешности)}, \tag{1.4.1}$$

где $Y_i$ — измеренное значение температуры в момент времени $t_i$, $T_i$ — «истинная» температура в момент времени $t_i$, $\varepsilon_i$ — случайная погрешность в момент $t_i$.

2. Второе стандартное предположение заключается в том, что погрешность измерения температуры $\varepsilon_i$ имеет нулевое среднее математическое ожидание (теоретическая величина)

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad \text{(ошибки с нулевым средним)}, \tag{1.4.2}$$

где $E(\cdot)$ — оператор математического ожидания [49]. Случайная погрешность изменяется при повторных измерениях, но теоретически математическое ожидание

не обязательно должно быть равно нулю. Возможно *смещение*, при котором погрешности обычно положительны. Смещение часто можно вычислить и учесть.

По реальным измерениям определяется среднее значение *выборки*. Истинное среднее значение погрешности $\varepsilon_i$ определить нельзя, так как $\varepsilon_i$ неизвестна. Для нахождения среднего значения выборки случайной переменной $Y_i$ обычно используется соотношение

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{ji}, \tag{1.4.3}$$

где $Y_{ji}$ — $j$-е измерение в момент времени $t_i$, $J$ — число измерений в момент $t_i$. Если выполняется условие (1.4.2), то ожидаемое значение $\overline{Y_i}$ равно $T_i$. Величина, определяемая уравнением (1.4.3), называется средним значением выборки. Она иногда используется для проверки предположения (1.4.2).

3. Третье стандартное предположение касается постоянства дисперсия

$$V(Y_i) = \sigma^2 \text{ (ошибка с постоянной дисперсией)}, \tag{1.4.4}$$

где $V(\cdot)$ — оператор дисперсии, который связан с оператором математического ожидания соотношением

$$V(Y_i) = E\{[Y_i - E(Y_i)]^2\}. \tag{1.4.5}$$

Символ $\sigma^2$ не имеет индекса $i$. Следовательно, уравнение (1.4.4) означает, что дисперсия $Y_i$ не зависит от времени $t_i$ и постоянна. Если содержащееся в уравнении (1.4.4) предположение о постоянстве дисперсии справедливо и имеется только один датчик, то оценка дисперсии $Y_i$ обозначается $s^2$ и для $n$ измерений по времени определяется выражениями

$$s^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} e_i^2, \tag{1.4.6}$$

где $p$ — число параметров, используемых для оценивания $T_i$, а сама оценка обозначается $\hat{Y}_i$, $e_i$ — невязка, определяемая выражением

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i. \tag{1.4.7}$$

Выражения типа (1.4.6) могут быть использованы при анализе справедливости предположения о постоянстве дисперсии (1.4.4).

4. Четвертое стандартное предположение относится к корреляции измерений. Две погрешности измерений $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_j$ являются некоррелированными при $i \neq j$, если ковариация $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_j$ равна нулю, т. е.

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \equiv E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = 0 \text{ при } i \neq j \text{ (некоррелированные ошибки)}. \tag{1.4.8}$$

Различные погрешности $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_j$ некоррелированы в том случае, если они не влияют друг на друга. В качестве примера корреляции погрешностей можно привести соотношение $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i$, где погрешность $u_i$ некоррелирована с погрешностью $\varepsilon_i$ и $\rho$ — постоянная. С увеличением частоты дискретизации при автоматической выборке данных погрешности становятся все более коррелированными. Сильная корреляция между последовательными значениями измеряемой температуры свидетельствует о том, что каждое новое измерение обеспечивает существенно меньше информации, чем в случае некоррелированных измерений. При очень высоких частотах дискретизации, когда реализуются почти непрерывные

измерения, может быть получено значительно меньше информации, чем при существенно меньших частотах, т. е. при больших шагах по времени $\Delta t$ между измерениями.

Мерой корреляции между соседними величинами $Y_i$ и $Y_{i+1}$ является коэффициент корреляции выборки $\hat{\rho}$, определяемый по формуле

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} e_i e_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1} e_i^2}. \tag{1.4.9}$$

(Это соответствующая оценка для $\rho$ в случае $\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i$, который упоминался выше.) При слабой корреляции значение $\hat{\rho}$ близко к нулю, а при сильной — к $\pm 1$. (Более полное рассмотрение коррелированных погрешностей приведено в работе [49], с. 301—326.)

5. Пятое стандартное предположение состоит в том, что погрешности измерений температуры имеют нормальное (гауссово) распределение.

$\varepsilon_i$ имеет нормальное распределение. (1.4.10)

Если второе, третье и четвертое стандартные предположения выполняются, то плотность вероятности величины $\varepsilon_i$ определяется формулой

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1.4.11}$$

Предположение о нормальности часто выполняется даже тогда, когда не выполняются предположения 2, 3 и 4. В этом случае для погрешностей необходима совместная плотность вероятности [49].

6. Шестое стандартное предположение заключается в том, что известны статистические параметры $\sigma^2$ и $\rho$.

Известны статистические параметры. (1.4.12)

7. Седьмое стандартное предположение состоит в том, что моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, координаты $x_1, x_2, \ldots, x_J$, размеры образца и теплофизические свойства точно известны.

Время, размеры, конфигурация анализируемого объекта и теплофизические свойства точно известны. (1.4.13)

Другими словами, единственным источником погрешности являются измеренные температуры. В статистических терминах это означает, что дисперсии времени и других величин равны нулю.

8. Последнее стандартное предположение подразумевает отсутствие какой-либо предварительной информации относительно формы плотности теплового потока на поверхности.

Предварительная информация о плотности теплового потока на поверхности отсутствует. (1.4.14)

Предварительная информация — это информация, известная в конкретном случае до проведения измерений температуры. Если такая информация имеется, то ее можно использовать для получения лучших оценок. Например, если из опы-

та предыдущих аналогичных экспериментов известно, что плотность теплового потока на протяжении некоторого периода времени является постоянной или периодической величиной, то эта информация может быть использована для улучшения алгоритмов оценивания, рассматриваемых в данной книге. Здесь предполагается, что о плотности теплового потока на поверхности известно лишь то, что она может резко изменяться по времени. Однако высокочастотные колебания $\hat{q}_i$, при которых происходит существенное изменение плотности в соседние моменты времени, не допускаются.

## 1.5. Трудности решения обратных задач

### 1.5.1. Чувствительность к погрешностям

Обратная задача теплопроводности представляет собой сложную задачу вследствие ее чрезвычайно большой чувствительности к погрешностям измерений. Трудности увеличиваются при стремлении получить максимальное количество информации из имеющихся данных. Для одномерной обратной задачи, в которой оцениваются дискретные значения зависимости $q$, получение максимального объема информации подразумевает использование малых шагов по времени между $q_i$ (рис. 1.3). Однако малые шаги по времени часто приводят к неустойчивости решения обратной задачи, если при этом не использовать ограничения, которые рассматриваются в последующих главах. Заметим, что в обратной задаче теплопроводности использование малых шагов по времени дает противоположный эффект по сравнению с численным решением краевой задачи теплопроводности. В последнем случае устойчивость решения часто может быть увеличена за счет уменьшения величин шагов по времени.

### 1.5.2. Примеры демпфирования и запаздывания. Точные решения

Нестационарное изменение температуры в некоторой внутренней точке непрозрачного теплопроводного тела существенно отличается от изменения температуры в точке на поверхности. Отклонения температуры во внутренних точках значительно меньше, чем на поверхности. Это эффект демпфирования. Кроме того, во внутренних точках наблюдается большое время запаздывания изменения температуры. Эти эффекты демпфирования и запаздывания, имеющие место в прямой задаче теплопроводности, являются важными, поскольку позволяют с инженерной точки зрения оценить трудности, возникающие при решении обратной задачи.

В качестве одного из примеров рассмотрим полубесконечное тело, нагреваемое тепловым потоком, плотность которого изменяется по синусоидальному закону с частотой $\omega$:

$$q = q_0' \cos(\omega t), \tag{1.5.1}$$

где $q_0'$ — максимальное значение плотности теплового потока. Через достаточно длительный промежуток времени распределение температуры в теле также становится периодическим и определяется уравнением

$$T = T_0 + \frac{q_0'}{k}\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{1/2} \exp\left[-x\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2}\right] \cos\left[\omega t - x\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} - \frac{\pi}{4}\right], \tag{1.5.2}$$

где $\alpha$ — коэффициент температуропроводности, $k$ — коэффициент теплопроводности, $T_0 = \text{const}$ — начальное распределение температуры. Огибающая кривой, описываемой уравнением (1.5.2), имеет вид

$$(T - T_0)_{\text{огиб}} = q_0' k^{-1} \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^{1/2} \exp\left[-x\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2}\right]. \qquad (1.5.3)$$

С увеличением частоты $\omega$ амплитуда огибающей уменьшается. Максимальная скорость изменения температуры имеет место при $x = 0$ и пропорциональна $\omega^{-1/2}$. Для внутренних точек выполняется соотношение

$$\frac{(T - T_0)\,\text{огиб}}{(T - T_0)_{\text{огиб},\, x=0}} = \exp\left[-x\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2}\right], \qquad (1.5.4)$$

которое показывает, что амплитуда огибающей внутренних температур резко уменьшается с увеличением координаты $x$. Наличие экспоненты в выражении (1.5.4) также указывает на большое влияние $\omega$. Рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1.5.4) меньше 0,01, или

$$x\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^{1/2} > 4{,}6\,.$$

Для стали, у которой $\alpha = 10^{-5}$ м$^2$/с при $\omega = 2\pi$ рад/с = 1 Гц, пренебрежимо малая реакция соответствует $x \geqslant 0{,}82$ см. Демпфирование весьма велико, но если $\omega$ еще больше увеличить, например в 100 раз, то пренебрежимо малая реакция будет соответствовать $x > 0{,}08$ см.

С помощью выражения (1.5.2) можно также проанализировать эффект запаздывания. Изменение температуры поверхности отстает от изменения плотности теплового потока на $\pi/4$ рад, или 45°, а во внутренних точках отставание еще больше. Например, при $\alpha = 10^{-5}$ м$^2$/с, $\omega = 2\pi$ рад/с и $x = 0{,}82$ см задержка име-

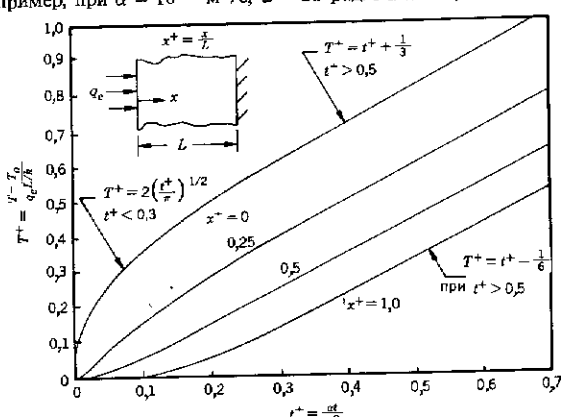



Рис. 1.7. Температуры во внутренних точках пластины, нагреваемой на границе $x = 0$ тепловым потоком постоянной плотности и теплоизолированной при $x = L$.

ет величину 4,6 рад, или 264°, что соответствует задержке внутренней температуры относительно температуры поверхности на 0,73 с.

Возвращаясь теперь к обратной задаче теплопроводности, рассмотрим изменение по времени температуры во внутренней точке при наличии малых флуктуаций температуры. Такие флуктуации могут быть обусловлены высокочастотными синусоидальными составляющими плотности теплового потока или случайными ошибками измерений. При известной чувствительности датчика температуры можно определить много различных зависимостей плотности теплового потока от времени, которые имеют высокочастотные составляющие и обеспечивают практически неотличимые друг от друга температуры в заданной внутренней точке. Это означает, что обратная задача не имеет единственного решения. Однако при правильно поставленном эксперименте можно с помощью рассматриваемых далее методов с приемлемой точностью определить изменение по времени плотности теплового потока, вызывающее некоторое изменение температуры.

Аналогичные эффекты можно выявить, рассматривая задачу для плоской пластины, нагреваемой при $x = 0$ тепловым потоком постоянной плотности $q_c$ и теплоизолированной при $x = L$, (рис. 1.7, табл. 1.1). В этом случае решение для распределения температур дается выражением

$$T^+(x^+, t^-) = t^+ + \frac{1}{3} - x^+ + \frac{1}{2}(x^+)^2 - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\, e^{-n^2\pi^2 t^+}\cos(n\pi x^+)\,, \qquad (1.5.5)$$

где

$$T^- \equiv \frac{T - T_0}{q_c L/k}, \quad t^+ \equiv \frac{\alpha t}{L^2}, \quad x^- \equiv \frac{x}{L}. \qquad (1.5.6a,b,c)$$

Безразмерное время, определяемое соотношением (1.5.6b), иногда называется числом Фурье. При $x^+ = 1$, т. е. в случае теплоизолированной поверхности, время $t^+ = 0{,}05$ может рассматриваться как малое, а времена $t^+ > 0{,}5$ — как большие, поскольку слабая реакция температуры имеет место при $t^+ < 0{,}05$, а «полностью развитая» линейная по времени реакция наблюдается при $t^+ > 0{,}5$. Для малых времен реакция при $x^+ = 0$ очень быстрая. Безразмерная температура в этом случае выражается формулой

$$T^+(0, t^-) = 2\left(\frac{t^+}{\pi}\right)^{1/2} \quad \text{при } t^+ < 0{,}3. \qquad (1.5.7)$$

При $t^+ \to 0$ производная безразмерной температуры по времени стремится к бесконечности, свидетельствуя о мгновенном изменении температуры поверхности в момент начала действия теплового потока. Для внутренних точек реакция замедляется. При этом проявляется как запаздывание, так и демпфирование. В качестве примера рассмотрим выражение для $T^+$ при $x^+ = 1$ и малых значениях времени [51]:

$$T^+(1, t^-) \approx 4(t^+)^{1/2}\,\mathrm{ierfc}[(4t^+)^{-1/2}] \approx 8\left[\frac{(t^+)^3}{\pi}\right]^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{4t^+}\right). \qquad (1.5.8)$$

Эти выражения дают малые значения температур в начальные моменты времени, а производная по времени стремится к нулю при $t^+ \to 0$ (см. также рис. 1.7 для случая $x^+ = 1$ и малых значений $t^+$).

*Таблица 1.1.* Безразмерная температура $T^+(x^+, t^+)$ при различных значениях безразмерных координат и времени для плоской пластины конечной толщины, нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$.

$T^+(x^+, t^+) = [T(x, t) - T_0]/(q_c L/k)$; $x^+ = x/L$; $t^+ = \alpha t/L^2$

| $t^+$ | $x^+ = 0{,}0$ | $x^+ = 0{,}25$ | $x^+ = 0{,}50$ | $x^+ = 0{,}75$ | $x^+ = 1{,}0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0,112838 | 0,004377 | 0,000014 | 0,000000 | 0,000000 |
| 0,02 | 0,159577 | 0,020235 | 0,000802 | 0,000008 | 0,000000 |
| 0,03 | 0,195441 | 0,039238 | 0,003722 | 0,000150 | 0,000005 |
| 0,04 | 0,225676 | 0,058510 | 0,008754 | 0,000702 | 0,000057 |
| 0,05 | 0,252313 | 0,077297 | 0,015366 | 0,001879 | 0,000269 |
| 0,06 | 0,276395 | 0,095405 | 0,023074 | 0,003764 | 0,000786 |
| 0,07 | 0,298541 | 0,112807 | 0,031528 | 0,006360 | 0,001735 |
| 0,08 | 0,319154 | 0,129537 | 0,040486 | 0,009630 | 0,003207 |
| 0,09 | 0,338514 | 0,145644 | 0,049784 | 0,013523 | 0,005251 |
| 0,10 | 0,356826 | 0,161180 | 0,059311 | 0,017986 | 0,007885 |
| 0,11 | 0,374245 | 0,176198 | 0,068992 | 0,022969 | 0,011104 |
| 0,12 | 0,390892 | 0,190745 | 0,078777 | 0,028422 | 0,014887 |
| 0,13 | 0,406863 | 0,204865 | 0,088632 | 0,034302 | 0,019205 |
| 0,14 | 0,422240 | 0,218598 | 0,098535 | 0,040569 | 0,024024 |
| 0,15 | 0,437089 | 0,231980 | 0,108469 | 0,047187 | 0,029306 |
| 0,16 | 0,451466 | 0,245044 | 0,118425 | 0,054123 | 0,035017 |
| 0,17 | 0,465422 | 0,257820 | 0,128395 | 0,061347 | 0,041121 |
| 0,18 | 0,479000 | 0,270335 | 0,138375 | 0,068831 | 0,047584 |
| 0,19 | 0,492236 | 0,282614 | 0,148361 | 0,076553 | 0,054375 |
| 0,20 | 0,505165 | 0,294679 | 0,158352 | 0,084488 | 0,061464 |
| 0,25 | 0,566146 | 0,352432 | 0,208336 | 0,126735 | 0,100516 |
| 0,30 | 0,622842 | 0,407165 | 0,258334 | 0,172002 | 0,143824 |
| 0,35 | 0,676928 | 0,460054 | 0,308333 | 0,219112 | 0,189738 |
| 0,40 | 0,729423 | 0,511818 | 0,358333 | 0,267348 | 0,237244 |
| 0,45 | 0,780946 | 0,562895 | 0,408333 | 0,316271 | 0,285721 |
| 0,50 | 0,831876 | 0,613553 | 0,458333 | 0,365614 | 0,334791 |
| 0,55 | 0,882444 | 0,663954 | 0,508333 | 0,415212 | 0,384223 |
| 0,60 | 0,932790 | 0,714199 | 0,558333 | 0,464967 | 0,433877 |
| 0,65 | 0,983002 | 0,764349 | 0,608333 | 0,514818 | 0,483665 |
| 0,70 | 1,033131 | 0,814440 | 0,658333 | 0,564726 | 0,533536 |
| 0,75 | 1,083210 | 0,864496 | 0,708333 | 0,614671 | 0,583457 |
| 0,80 | 1,133258 | 0,914530 | 0,758333 | 0,664637 | 0,633409 |
| 0,85 | 1,183287 | 0,964551 | 0,808333 | 0,714616 | 0,683379 |
| 0,90 | 1,233305 | 1,014563 | 0,858333 | 0,764603 | 0,733351 |
| 0,95 | 1,283316 | 1,064571 | 0,908333 | 0,814595 | 0,783351 |
| 1,00 | 1,333323 | 1,114576 | 0,958333 | 0,864591 | 0,833344 |

Некоторые значения $T^+$ представлены в табл. 1.1. Например, при $t^+ = 0{,}05$ $T^+(0, t^+) = 0{,}2523$, в то время как $T^+(1, t^+) = 0{,}000269$, т. е. почти в 1000 раз меньше. С уменьшением $t^+$ это отношение еще больше возрастает. С другой стороны, для достаточно больших времен отношение приближается к единице, что можно объяснить следующим образом. Для больших времен из (1.5.5) получим

$$T^+(x^+, t^+) \approx t^+ + \tfrac{1}{3} - x^+ + \tfrac{1}{2}(x^+)^2,\ t^+ > 0{,}5, \tag{1.5.9}$$

Откуда

$$T^+(0, t^+) \approx t^+ + \tfrac{1}{3}\ , \tag{1.5.10a}$$

$$T^+(1, t^+) \approx t^+ - \tfrac{1}{6}\ . \tag{1.5.10b}$$

Следовательно, отношение температур равно

$$\frac{T^+(0, t^+)}{T^+(1, t^+)} \approx \frac{t^+ + \frac{1}{3}}{t^+ - \frac{1}{6}} \approx 1 + \frac{1}{2t^+}\ \text{ при } t^+ \gg 1. \tag{1.5.11}$$

Данный результат соответствует «тонкой» пластине, которая имеет пренебрежимо малую разность температур по сечению в сравнении с изменением температуры по времени.

В табл. 1.1 приведены результаты вычислений по формуле (1.5.5), которые будут использоваться в качестве исходных данных для примеров и задач, рассматриваемых в последующих главах.

Случай полубесконечного тела при постоянной плотности теплового потока на границе $x = 0$ анализируется в разд. 1.6.2.2, а соответствующие числовые значения представлены в табл. 1.2. В качестве двух других тел рассматриваются сплошной цилиндр и сплошная сфера, на которые действует тепловой поток по-

*Таблица 1.2.* Безразмерная температура $T^+(t_x^+)$ для полубесконечного тела при различных значениях безразмерного времени.

$T^+(t_x^+) = [T(x, t) - T_0]/(q_0 x/k);\ t_x^+ \equiv \alpha t/x^2$

| $t_x^+$ | $T^+(t_x^+)$ | $t_x^+$ | $T^+(t_x^+)$ | $t_x^+$ | $T^+(t_x^+)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,05 | 0,000135 | 1,25 | 0,50579 | 80,0 | 9,1241 |
| 0,06 | 0,000393 | 1,50 | 0,60612 | 90,0 | 9,7345 |
| 0,10 | 0,003943 | 1,75 | 0,70101 | 100,0 | 10,3120 |
| 0,12 | 0,007444 | 2,00 | 0,79119 | 200,0 | 14,9776 |
| 0,15 | 0,014653 | 2,50 | 0,95962 | 300,0 | 18,5604 |
| 0,18 | 0,023792 | 3,00 | 1,11505 | 400,0 | 21,5817 |
| 0,20 | 0,030732 | 3,50 | 1,26002 | 500,0 | 24,2439 |
| 0,24 | 0,046147 | 4,00 | 1,39635 | 600,0 | 26,6510 |
| 0,25 | 0,050254 | 5,00 | 1,64825 | 700,0 | 28,8648 |
| 0,30 | 0,071893 | 6,00 | 1,87832 | 800,0 | 30,9254 |
| 0,35 | 0,094800 | 7,00 | 2,09140 | 900,0 | 32,8608 |
| 0,40 | 0,118437 | 8,00 | 2,29076 | 1000,0 | 34,6914 |
| 0,45 | 0,142456 | 9,00 | 2,47874 | | |
| 0,50 | 0,166631 | 10,00 | 2,65708 | | |
| 0,55 | 0,190810 | 12,00 | 2,98997 | | |
| 0,60 | 0,214891 | 15,00 | 3,44283 | | |
| 0,65 | 0,238808 | 20,00 | 4,10921 | | |
| 0,70 | 0,262515 | 25,00 | 4,69822 | | |
| 0,75 | 0,285982 | 30,00 | 5,23182 | | |
| 0,80 | 0,309190 | 35,00 | 5,72321 | | |
| 0,85 | 0,332128 | 40,00 | 6,18105 | | |
| 0,90 | 0,354791 | 50,00 | 7,01871 | | |
| 0,95 | 0,377175 | 60,00 | 7,77678 | | |
| 1,00 | 0,399282 | 70,00 | 8,47439 | | |

стоянной плотиостн. В обоих случаях наибольшие запаздывание и демпфнрование имеют место в центральной точке тела. Соответственно в табл. 1.3 для цилиндра, а в табл. 1.4 для сферы представлены только температуры в их центре. Уравнение, описывающее распределенне температуры в цилиндре [51], имеет внд

$$T_a^+(r^+, t_a^+) = 2t_a^+ + \frac{1}{2}(r^+)^2 - \frac{1}{4} - 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t_a^+} \frac{J_0(r^+\beta_n)}{\beta_n^2 J_0(\beta_n)}, \qquad (1.5.12)$$

где $\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — положительные корни функции Бесселя,

$$J_1(\beta_n) = 0, \qquad (1.5.13)$$

$a$ — раднус цилиндра н

$$T_a^+(r^+, t_a^+) \equiv \frac{[T(r, t) - T_0]k}{q_c a}, \quad t_a^+ \equiv \frac{\alpha t}{a^2}, \quad r^+ \equiv \frac{r}{a}. \qquad (1.5.14)$$

Для сферы распределение температуры определяется выражением [51]

$$T_a^+(r^+, t_a^+) \equiv 3t_a^+ + \frac{1}{2}(r^+)^2 - \frac{3}{10} - \frac{2}{r^+}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(r^+\beta_n)}{\beta_n^2 \sin\beta_n} e^{-\beta_n^2 t_a^+}, \qquad (1.5.15)$$

где $\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\beta_n = \beta_n \qquad (1.5.16)$$

Первые три из них: $\beta_1 = 4{,}4934$, $\beta_2 = 7{,}7253$ и $\beta_3 = 10{,}9041$. В табл. 1.3 и 1.4 представлены расчетные данные, иллюстрнрующие тот же эффект запаздывання, что и прн $x^+ = 1$ в табл. 1.1.

*Таблица 1.3.* Безразмерная температура в центре сплошного цилиндра.

$T^+(0, t_a^+) \equiv [T(0,t) - T_0]/(q_c a/k)$; $t_a^+ \equiv \alpha t/a^2$

| $t_a^+$ | $T^+(0, t_a^+)$ | $t_a^+$ | $T^+(0, t_a^+)$ |
|---|---|---|---|
| 0,010 | 0,00000 | 0,100 | 0,02692 |
| 0,020 | 0,00000 | 0,150 | 0,08731 |
| 0,030 | 0,00003 | 0,200 | 0,16794 |
| 0,040 | 0,00028 | 0,250 | 0,25861 |
| 0,050 | 0,00120 | 0,300 | 0,35413 |
| 0,060 | 0,00325 | 0,350 | 0,45198 |
| 0,070 | 0,00676 | 0,400 | 0,55095 |
| 0,080 | 0,01187 | 0,450 | 0,65046 |
| 0,090 | 0,01862 | 0,500 | 0,75022 |
| 0,100 | 0,02692 | 0,550 | 0,85011 |
| 0,110 | 0,03667 | 0,600 | 0,95005 |
| 0,120 | 0,04771 | 0,650 | 1,05002 |
| 0,130 | 0,05993 | 0,700 | 1,15001 |
| 0,140 | 0,07317 | 0,750 | 1,25001 |
| 0,150 | 0,08731 | 0,800 | 1,35000 |
| 0,160 | 0,10223 | 0,850 | 1,45000 |
| 0,170 | 0,11784 | 0,900 | 1,55000 |
| 0,180 | 0,13405 | 0,950 | 1,65000 |
| 0,190 | 0,15077 | 1,000 | 1,75000 |
| 0,200 | 0,16794 | | |

*Таблица 1.4.* Безразмерная температура в центре сплошной сферы

| $t_a^+$ | $T^+(0, t_a^+)$ | $t_a^+$ | $T^+(0, t_a^+)$ |
|---|---|---|---|
| 0,010 | 0,00000 | 0,100 | 0,05988 |
| 0,020 | 0,00000 | 0,150 | 0,17203 |
| 0,030 | 0,00009 | 0,200 | 0,30804 |
| 0,040 | 0,00088 | 0,250 | 0,45293 |
| 0,050 | 0,00342 | 0,300 | 0,60107 |
| 0,060 | 0,00865 | 0,350 | 0,75039 |
| 0,070 | 0,01699 | 0,400 | 0,90014 |
| 0,080 | 0,02848 | 0,450 | 1,05005 |
| 0,090 | 0,04288 | 0,500 | 1,20002 |
| 0,100 | 0,05988 | 0,550 | 1,35001 |
| 0,110 | 0,07911 | 0,600 | 1,50000 |
| 0,120 | 0,10023 | 0,650 | 1,65000 |
| 0,130 | 0,12293 | 0,700 | 1,80000 |
| 0,140 | 0,14694 | 0,750 | 1,95000 |
| 0,150 | 0,17203 | 0,800 | 2,10000 |
| 0,160 | 0,19801 | 0,850 | 2,25000 |
| 0,170 | 0,22472 | 0,900 | 2,40000 |
| 0,180 | 0,25203 | 0,950 | 2,55000 |
| 0,190 | 0,27983 | 1,000 | 2,70000 |
| 0,200 | 0,30804 | | |

## 1.6. Коэффициенты чувствительности

### 1.6.1. Определение коэффициентов чувствительности и линейность

Понять суть задачи оценивания как функций, так и параметров помогает анализ коэффициентов чувствительности. В результате могут быть выявлены соответствующие трудности и указаны пути совершенствования постановки эксперимента. Коэффициент чувствительности определяется как первая производная зависимой переменной, например температуры, по неизвестному параметру, например составляющей плотности теплового потока. Если коэффициенты чувствительности малы или коррелированы между собой, то задача оценивания является трудной и очень чувствительной к погрешностям измерений.

Для обратной задачи теплопроводности коэффициенты чувствительности представляют собой первые производные температуры $T$ в точке с координатой $x_j$ и моменте времени $t_i$ по составляющей плотности теплового потока $q_M$ и определяются выражением

$$X_{jM}(x_j, t_i) \equiv \frac{\partial T(x_j, t_i)}{\partial q_M} \tag{1.6.1a}$$

для $j = 1, 2, \ldots, J$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $M = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что число моментов времени $t_i$ равно числу составляющих плотности теплового потока. Составляющая $q_M$ показана на рис. 1.8 и 1.9 и представляет собой постоянное значение плотности теплового потока в интервале времени между $t_{M-1}$ и $t_M$. Если имеется только одна внутренняя точка, т. е. $J = 1$, то коэффициент чувствительности равен

$$X_M(t_i) \equiv \frac{\partial T_i}{\partial q_M}. \tag{1.6.1b}$$

В обратных задачах нестационарной теплопроводности при $M > i$ коэффициенты чувствительности равны нулю. Другими словами, температура в момент времени $t_i$ не зависит от компонент плотности теплового потока $q_M$ в будущие моменты времени $M > i$.

Одна из важных характеристик обратной задачи теплопроводности заключается в том, что задача является линейной, если уравнение теплопроводности и

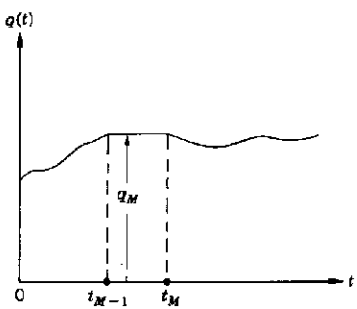



Рис. 1.8. Изменение плотности теплового потока при постоянной величине $q_M$ и произвольных значениях $q(t)$ в остальной области.

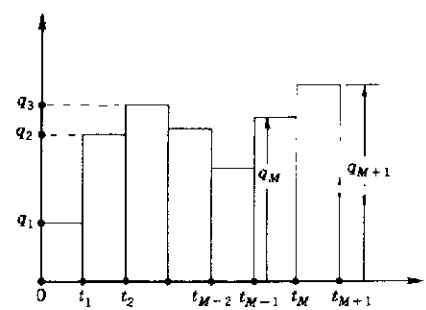



Рис. 1.9. Компоненты плотности теплового потока.

граннчные условия лннейны. Теплофизические характернстики ($k$, $\rho$ н $c$) могут зависеть от пространственной координаты, и в этом случае свойство лннейности сохраняется. Однако в линейной обратной задаче теплофизические характеристики не могут быть функциями температуры. Лииейность, если она имеет место, является важным свойством, поскольку позволяет использовать различные способы суперпозицин и обычно исключает необходимость итераций в процессе решения. В том случае, когда *линейная* обратная задача решается как нелинейная, из-за нтераций неоправданно увелнчивается используемое машинное время.

Одни из путей установить, является ли задача оценивання линейной, состоит в анализе коэффициентов чувствительности. Если коэффнцненты чувствительности *не* зависят от оцениваемых параметров, то задача оценивания лннейна. Если же зависят, то задача нелинейна. Это можно проиллюстрировать, используя выражение (1.5.7) н дифференцируя $T$ по $q_c$. В результате нмеем

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial q_c}=\frac{L}{k}2\left(\frac{\alpha t}{\pi L^2}\right)^{1/2}, \quad t^+<0{,}3\,. \tag{1.6.2}$$

Это уравнение не завнсит от $q_c$. В более общем случае, чтобы сделать подобное заключение, можно использовать уравнение (1.5.5).

Примером нелннейной задачи является оцениваиие $\alpha$. Дифференцированне $T$ по $\alpha$ в формуле (1.5.7) приводит к выраженню

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial \alpha}=\frac{q_c L}{k}\left(\frac{t}{\pi\alpha L^2}\right)^{1/2}, \quad t^+<0{,}3. \tag{1.6.3}$$

Правая часть уравнення (1.6.3) зависит от $\alpha$. Таким образом, оцениваиие $\alpha$ по данным измерений нестацноиарной температуры представляет собой нелинейную задачу. Тот же самый вывод можно сделать, используя более общее уравнеиие (1.5.5).

Принцип незавнсимостн коэффициентов чувствительностн от оцениваемого параметра может быть использован н в тех случаях, когда явная форма решения неизвестиа. Например, запишем краевую задачу теплопроводности для плоской пластины, свойства которой не зависят от температуры:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right]=\rho c(x)\frac{\partial T}{\partial t}\,, \tag{1.6.4}$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=\begin{cases}q_M=\text{const}, & t_{M-1}<t<t_M,\\ q(t),\ t>t_M\,,\end{cases} \tag{1.6.5}$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=q_{\text{пот}}\,, \tag{1.6.6}$$

$$T(x,t_{M-1})=T_{M-1}(x), \tag{1.6.7}$$

где $T_{M-1}(x)$ — распределенне температуры в момент времеии $t_{M-1}$, а $q_{\text{пот}}$ — зависимость от времени плотности теплового потока вследствие тепловых потерь, не зависящих от $q_M$. Плотность теплового потока $q(t)$ при $t>t_M$ является произвольиой функцией времеин. Теплофизические свойства могут зависеть от $x$. Определяемым параметром является плотность теплового потока $q_M$, которая

постоянна в интервале времени между $t_{M-1}$ и $t_M$ (рис. 1.9). Распределение температур в момент времени $t_{M-1}$ известно и определяется равенством (1.6.7).

Требуется получить дифференциальное уравнение и граничные условия для определения коэффициента чувствительности относительно $q_M$:

$$X_M(x, t) \equiv \frac{\partial T(x, t)}{\partial q_M} . \tag{1.6.8}$$

При $t < t_{M-1}$ решение имеет вид $X_M(x, t) = 0$, т. е. тело еще не подвергалось воздействию $q_M$. Для времен, больших $t_{M-1}$, после дифференцирования соотношений (1.6.4) — (1.6.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial X_M}{\partial x}\right] = \rho c(x)\frac{\partial X_M}{\partial t} , \tag{1.6.9}$$

$$-k\left.\frac{\partial X_M}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} 1, & t_{M-1} < t < t_M , \\ 0, & t > t_M , \end{cases} \tag{1.6.10}$$

$$\left.\frac{\partial X_M}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 , \tag{1.6.11}$$

$$X_M(x, t_{M-1}) = 0 . \tag{1.6.12}$$

Уравнения (1.6.9) — (1.6.12) определяют математическую задачу для коэффициента чувствительности $X_M$, который может быть найден в явном виде, если известны функции $k(x)$ и $\rho c(x)$. Следует отметить, что для определения коэффициента чувствительности $X_M(x, t)$ не обязательно знать $q_M$, $q(t)$ и $T_{M-1}(x)$, так как уравнения (1.6.9) — (1.6.12) не зависят от этих величин.

Из соотношений (1.6.9) — (1.6.12) можно сделать важный вывод о линейности задачи оценивания $q_M$, что является следствием независимости $X_M(x, t)$ от $q_M$. Это означает, что для определения коэффициента чувствительности не требуется знать (неизвестную) величину $q_M$. Также существенным является тот факт, что уравнение (1.6.9) для определения $X_M(x, t)$ аналогично уравнению (1.6.4) для $T(x, t)$. При этом граничные условия имеют тот же тип, то есть заданные соотношениями (1.6.5) и (1.6.6) условия для градиента температуры сохраняют свой вид для $X_M(x, t)$ в форме соотношений (1.6.10) и (1.6.11). Главные отличия состоят в более простых значениях граничных условий и равенстве нулю начального условия. В силу отмеченного подобия задач для $T(x, t)$ и $X_M(x, t)$ их решение может быть найдено с использованием одних и тех же методов и программ для ЭВМ, а это приводит к значительному повышению эффективности работ при программировании и вычислениях.

### 1.6.2. Примеры использования коэффициентов чувствительности в одномерных задачах

#### 1.6.2.1. Бесконечно тонкое тело

При рассмотрении коэффициентов чувствительности в задачах нестационарной теплопроводности простейшим примером является случай бесконечно тонкого тела, для которого процесс описывается дифференциальным уравнением и началь-

ным условием

$$q(t)A=\rho cV\frac{dT}{dt},\quad T(0)=T_0, \tag{1.6.13a,b}$$

где $\rho c$, $A$ и $V$ — постоянные. Функция $q(t)$ может, например, иметь вид, показанный на рис. 1.8 или 1.9. Дифференцируя уравнение (1.6.13a) по $q_M$, получим выражение для коэффициента чувствительности $X_M \equiv \partial T/\partial q_M$:

$$\rho c\frac{V}{A}\frac{dX_M}{dt}=\begin{cases}1, & t_{M-1}<t<t_M,\\ 0, & \text{при остальных } t\end{cases} \tag{1.6.14}$$

и, следовательно, $X_M(t) = 0$ при $t \leqslant t_{M-1}$. Начальное условие для $X_M(t)$ при $t > t_{M-1}$ имеет вид

$$X_M(t_{M-1})=0. \tag{1.6.15}$$

Полное решение для $X_M$ записывается следующим образом:

$$X_M(t)=0,\quad t\leqslant t_{M-1}, \tag{1.6.16a}$$

$$X_M(t)=\frac{A(t-t_{M-1})}{\rho cV},\quad t_{M-1}<t<t_M, \tag{1.6.16b}$$

$$X_M(t)=\frac{A(t_M-t_{M-1})}{\rho cV},\quad t>t_M, \tag{1.6.16c}$$

Это решение представлено на рис. 1.10, *a*. Коэффициенты чувствительности $X_1, \ldots, X_4$ показаны на рис. 1.10, *b*.

В общем случае в хорошо подготовленных для оценивания компонент плотности теплового потока $q_M$ экспериментах следует обеспечить большие величины коэффициента чувствительности $X_M(t)$. Уравнение (1.6.16b) показывает, что для этой цели отношение площади поверхности $A$ к теплоемкости $\rho cV$ должно быть как можно больше, т. е. необходимо использовать тонкую фольгу.

Анализируя рис. 1.10, можно высказать несколько соображений. Во-первых, поскольку выполняется условие (1.6.16a), измерения в моменты времени, меньшие чем $t_{M-1}$, не несут никакой информации относительно компоненты $q_M$ плотности теплового потока. Следовательно, для оценивания $q_M$ необходимы измерения в моменты времени после $t_{M-1}$. Так как при $t > t_{M-1}$ величина $X_M$ сохраняет

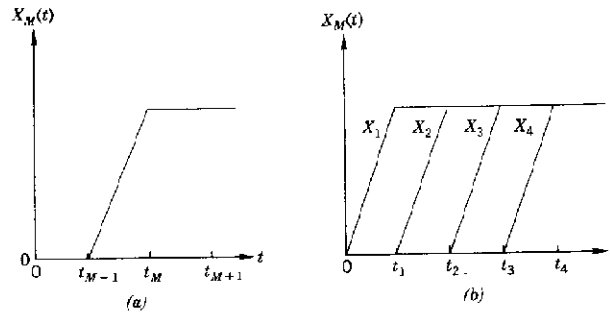



Рис. 1.10. Коэффициенты чувствительности для бесконечно тонкого тела.

положительные значения, то «память» по отношению к $q_M$ бесконечна. Другими словами, $q_M$ влияет на температуру в любой момент времени $t > t_{M-1}$.

Второе соображение относится к случаю оценивания нескольких компонент $q_M$, например $q_1$, $q_2$ и $q_3$. Для одновременного оценивания нескольких параметров необходимо, чтобы их коэффициенты чувствительности были линейно независимы [49]. Это означает, что по крайней мере один из коэффициентов не равен нулю ($C_i \neq 0$) и что постоянные $C_1$, $C_2$ и $C_3$ не могут удовлетворять условию

$$C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + C_3 X_3(t) = 0 \qquad (1.6.17a)$$

во всей области измерений. Из рис. 1.10,*б* видно, что если измерения $T$ осуществляются в моменты времени $t_1$, $t_2$ и $t_3$, то не существует такого набора постоянных коэффициентов, при котором удовлетворялось бы уравнение (1.6.17а). Следовательно, $q_1$, $q_2$ и $q_3$ могут быть оценены, если известны $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$, а также температуры в начальный момент времени.

Другой способ анализа линейной зависимости коэффициентов чувствительности $X_1$, $X_2$ и $X_3$ состоит в записи уравнения (1.6.17а) в матричной форме для трех различных моментов времени $t_i$, $t_j$ и $t_k$:

$$\begin{bmatrix} X_1(t_i) & X_2(t_i) & X_3(t_i) \\ X_1(t_j) & X_2(t_j) & X_3(t_j) \\ X_1(t_k) & X_2(t_k) & X_3(t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.6.17b)$$

В случае линейной зависимости это уравнение должно удовлетворяться при произвольных $C_i$, но при этом не все $C_i$ должны обращаться в нуль. Уравнение (1.6.17b) выполняется в том и только том случае, если детерминант квадратной матрицы этого уравнения равен нулю. Например, для $t_2$, $t_{2,5}$ и $t_3$ такая матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.6.17c)$$

и ее детерминант равен нулю. Заметим, что первые два столбца матрицы (1.6.17с) одинаковы и, следовательно, линейная зависимость устанавливается простой проверкой. Уравнение (1.6.17а) удовлетворяется при $C_1 = -C_2$ и $C_3 = 0$. Если выполняется уравнение (1.6.17b), то компоненты плотности теплового потока $q_1$, $q_2$ и $q_3$ не могут быть одновременно оценены единственным образом по данным $Y_i$, $Y_j$ и $Y_k$.

Последнее соображение касается показанных на рис. 1.10 коэффициентов чувствительности и состоит в том, что, хотя и существует бесконечная память по отношению к $q_M$, для времен, бо́льших $t_{M+1}$, имеет место сильная корреляция между $q_M$ и $q_{M+1}$. Это обусловлено тем, что коэффициенты чувствительности $X_M$ и $X_{M+1}$ при $t > t_{M+1}$ равны между собой (рис. 1.10,*б*). Другими словами, измерение $Y_{100}$ несет информацию о $q_1$, однако использование этой информации может оказаться неэффективным. $Y_{100}$ содержит также информацию и о $q_2, \ldots, q_{100}$, и изменения каждой из этих компонент $q$ оказывают на $Y_{100}$ абсолютно одинаковое влияние. С другой стороны, $Y_1$ не зависит от $q_2, \ldots, q_{100}$ так же, как и $Y_{100}$ не зависит от $q_{101}, \ldots$. Следовательно, схема оценивания, при кото-

рой *одновременно* оцениваются $q_1, \ldots, q_{100}$ с использованием $Y_1, \ldots, Y_{100}$, не может быть намного лучше, чем схема последовательного оценивания $q_i$ главным образом по предыдущим моментам времени. (Последовательно — это значит, что $q_{M-1}$ оценивается раньше и совершенно независимо от $q_M$.) Хотя температура при больших временах и содержит информацию о компоненте плотности теплового потока в более ранний момент времени, ее использование для оценивания компоненты $q$ в предыдущий момент времени может быть нецелесообразным. Данный вывод является следствием сильной корреляции между отдельными $q_i$ в силу указанной пропорциональности коэффициентов чувствительности друг другу на больших интервалах времени, что показано на рис. 1.10,*b*.

#### 1.6.2.2. Полубесконечное тело

Решение для температуры в плоском полубесконечном теле (определенном условием $x \geqslant 0$), которое подвергается воздействию теплового потока постоянной плотности, имеет вид

$$T(x, t) = T_0 + 2\frac{q_c}{k}(\alpha t)^{1/2}\,\mathrm{ierfc}\left[\left(\frac{4\alpha t}{x^2}\right)^{-1/2}\right]. \tag{1.6.18a}$$

Его можно представить в безразмерной форме:

$$T^+(t_x^+) = 2(t_x^+)^{1/2}\,\mathrm{ierfc}[(4t_x^+)^{-1/2}]\ , \tag{1.6.18b}$$

$$T^+ \equiv \frac{k[T(x, t) - T_0]}{q_c x}, \quad t_x^+ \equiv \frac{\alpha t}{x^2}\ . \tag{1.6.18c,d}$$

Эта безразмерная температура для ряда значений $t_x^+$ представлена в табл. 1.2. Функция $\mathrm{ierfc}\,(z)$ определена уравнением

$$\mathrm{ierfc}(z) = \pi^{-1/2}\exp(-z^2) - z\,\mathrm{erfc}(z). \tag{1.6.19}$$

Температура нагреваемой поверхности равна

$$T(0, t) = T_0 + 2\left(\frac{q_c}{k}\right)\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2}. \tag{1.6.20}$$

Это уравнение аналогично уравнению (1.5.7) для плоской пластины при малых временах. Для соотношений (1.6.19) и (1.6.20) коэффициент чувствительности по $q_c$

$$X(x, t) \equiv \frac{\partial T(x, t)}{\partial q_c} \tag{1.6.21}$$

равен изменению температуры при $q_c = 1$. Случаи $x = 0$ и $x \neq 0$ удобно рассматривать отдельно. При $x = 0$

$$X(0, t) = \frac{2}{k}\left(\frac{\alpha t}{\pi}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{t}{\pi k \rho c}\right)^{1/2}, \tag{1.6.22a}$$

а при $x \neq 0$

$$X(x, t_x^+) \equiv 2\frac{x}{k}(t_x^+)^{1/2}\,\mathrm{ierfc}[(4t_x^+)^{-1/2}]. \tag{1.6.22b}$$

Безразмерный коэффициент чувствительности

$$X^+ \equiv \frac{k}{x}\frac{\partial T}{\partial q_c} = T^+ \tag{1.6.23}$$

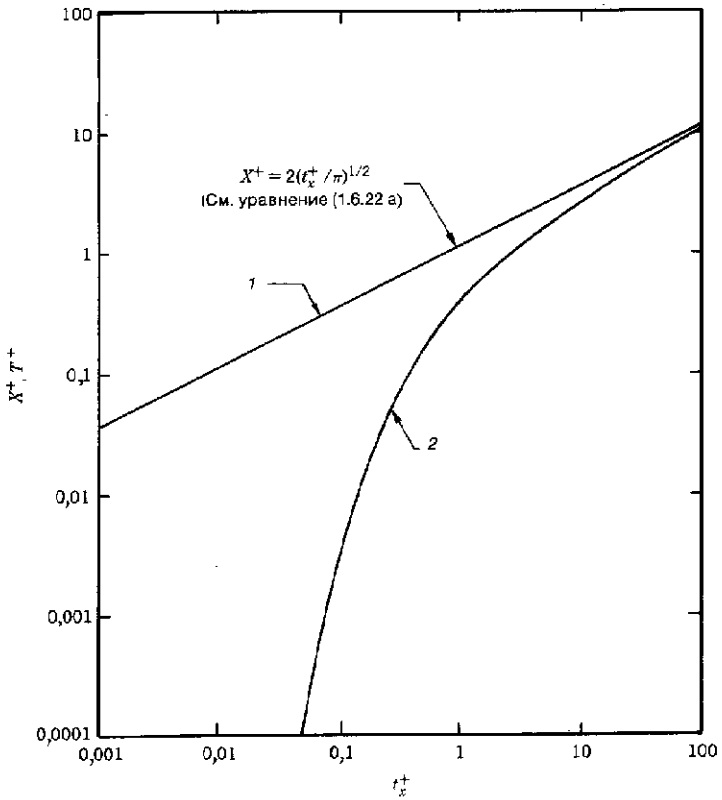



Рис. 1.11. Коэффициенты чувствительности для полубесконечного тела, нагреваемого тепловым потоком постоянной плотности. На поверхности значение $x$ в $X^+$ и $t^+$ является произвольным и может быть, в частности, равным единице (см. уравнения (1.6.18 c, d) и (1.6.22 а). *1* — поверхность; *2* — внутренняя точка ($x \neq 0$).

представлен в табл. 1.2 и на рис. 1.11. Для сравнения показан график при $x = 0$. В соотношениях (1.6.18d) и (1.6.23) при $x = 0$ величину $x$ следует рассматривать как координату внутренней точки. [Это приводит к некоторой путанице, однако позволяет на одном графике анализировать оба случая, $x = 0$ и $x \neq 0$. Заметим, что уравнение (1.6.22а) может быть нормировано умножением на $k/x$, если только $x \neq 0$.] При постоянной плотности теплового потока коэффициент чувствительности изменяется так же, как и температура. Повышение температуры полубесконечного тела аналогично повышению температуры тела конечных размеров при малых значениях времени. Температуры поверхности (и коэффициенты чувствительности) конечного и полубесконечного тел численно равны при малых временах и отличаются только на 1% при $t^+ = t_x^+ = 0{,}3$ (см. задачу 1.20). Вследствие подобия между изменениями температуры и коэффициентов чувствительности для пластины конечной толщины и полубесконечного тела многие из высказанных в разд. 1.5 соображений по поводу эффектов запаздывания и демпфирования справедливы в равной степени для этих тел.

В обратной задаче теплопроводности отыскивается вся зависимость плотности теплового потока от времени. Поэтому необходимо рассмотреть коэффициенты чувствительности относительно некоторой промежуточной компоненты $q_M$, показанной на рис. 1.9. Из рис. 1.11 видно, что изменение температуры поверхности сильно отличается от изменения температуры во внутренней точке. Чтобы подтвердить такое отличие, рассмотрим отдельно случаи $x = 0$ и $x \neq 0$. Вначале остановимся на ситуации, когда $x = 0$. Для $t < t_{M-1}$ коэффициент чувствительности при $x = 0$, определяемый соотношением

$$X_M(0, t) \equiv \frac{\partial T(0, t)}{\partial q_M} \tag{1.6.24}$$

равен нулю, а для $t > t_{M-1}$ справедливы выражения

$$\begin{aligned} X_M(0, t) &= \frac{2}{k}\left[\frac{\alpha(t - t_{M-1})}{\pi}\right]^{1/2}, \quad t_{M-1} < t < t_M, \\ X_M(0, t) &= \frac{2}{k}\left\{\left[\frac{\alpha(t - t_{M-1})}{\pi}\right]^{1/2} - \left[\frac{\alpha(t - t_M)}{\pi}\right]^{1/2}\right\}, \quad t > t_M. \end{aligned} \tag{1.6.25}$$

Второе выражение в (1.6.25) получается с использованием принципа суперпозиции (см. задачи 1.21 и 1.22). Соотношения (1.6.25) можно представить в виде единой кривой, если положить $\Delta t = t_M - t_{M-1}$ и преобразовать (1.6.25) к виду

$$\begin{aligned} kX_M(0, t)\left(\frac{\Delta t}{\alpha}\right)^{1/2} &= \frac{2}{\pi^{1/2}}\left(\frac{t - t_{M-1}}{\Delta t}\right)^{1/2}, \quad t_{M-1} < t < t_M, \\ kX_M(0, t)\left(\frac{\Delta t}{\alpha}\right)^{1/2} &= \frac{2}{\pi^{1/2}}\left[\left(\frac{t - t_{M-1}}{\Delta t}\right)^{1/2} - \left(\frac{t - t_{M-1}}{\Delta t} - 1\right)^{1/2}\right], \quad t > t_M. \end{aligned} \tag{1.6.26}$$

Такие кривые изображены на рис. 1.12 для $M = 1, 2, 3$ и 4. График сохраняет свой вид при любой положительной и постоянной величине $\Delta t$.

Коэффициенты чувствительности, представленные на рис. 1.12, соответствуют границе полубесконечного тела и в некотором отношении подобны коэффициентам чувствительности для бесконечно тонкого тела, показанным на рис. 1.10. Подобие заключается в мгновенной реакции на изменение плотности теплового потока на поверхности. Отличие же состоит в том, что полубесконечное тело «реагирует» быстрее к влиянию нагрева в течение данного интервала времени по-

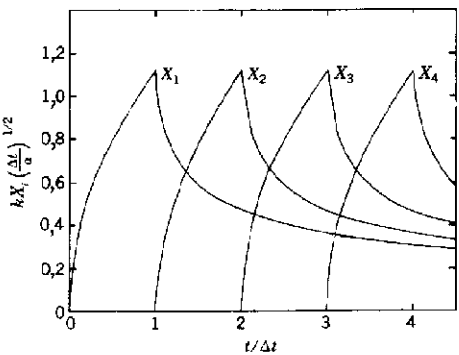
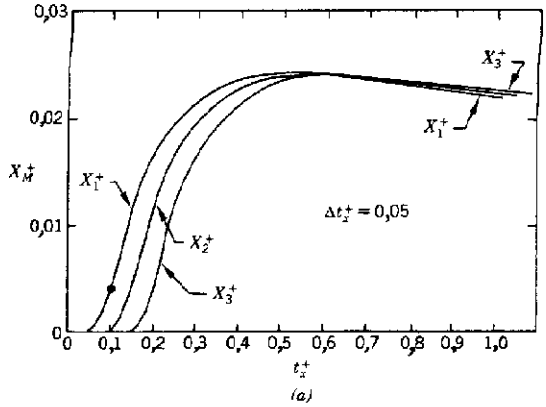
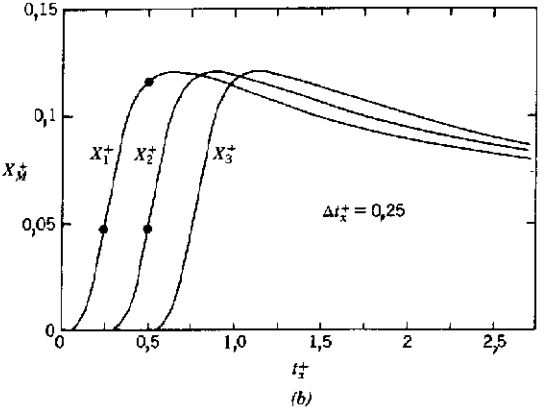


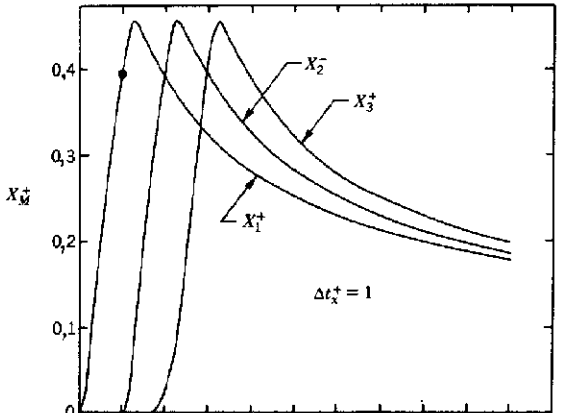

Рис. 1.12. Коэффициенты чувствительности относительно составляющих плотности теплового потока на поверхности ($x = 0$) полубесконечного тела.




*(a)*




*(b)*




*(c)*

Рис. 1.13. Безразмерные коэффициенты чувствительности относительно $q_1$, $q_2$ и $q_3$ во внутренней точке полубесконечного тела; $\Delta t_x^+ = 0{,}05$; 0,25 и 1.

степенно умеиьшается. Имеет место «бесконечная память» в том смысле, что коэффициент чувствительиостн, определяемый соотношениями (1.6.26) для $t > t_M$, становится равным нулю только при $t - t_M \to \infty$.

Прн оценивании некоторых параметров выбор моментов времени, в которые следует пронзводить измерения, называется планированием эксперимента. Раиее отмечалось, что, поскольку $X_M(0, t) = 0$ при $t < t_{M-1}$, измерення в моменты времени, предшествующие $t_{M-1}$, не могут быть использованы для оценивания $q_M$. С другой стороны, если прн оцеииванин $q_M$ используются только те измерения, которые проведены в моменты времени, зиачительно большие по сравнению с $t_{M-1}$, то возникают трудиостн по следующим двум причинам. Во-первых, величина $X_M$ в этом случае отиосительно мала, что указывает на слабую чувствительность к $q_M$ и, следовательно, на малый объем имеющейся информацни. Во-вторых, функцин $X_M$, $X_{M+1}$, ... становятся коррелированиыми, т. е. имеют приблизительно одинаковую форму и, следовательно, становятся линейно-завнсимыми. Таким образом, иаилучшая для оцеиивания $q_M$ совокупность моментов времеии измереиия температуры поверхности полубесконечиого тела должна включать $t_M$, $t_{M+1}$ н немного бо́льшие зиачения времени.

При измерении завнсимости температуры от временн во виутренней точке возиикают существеиные отлнчия от рассмотренного выше случая $x = 0$. Безразмерные коэффнциенты чувствительности для $q_1$, $q_2$ и $q_3$ показаны на рнс. 1.13. В отличие от случая $x = 0$ результаты для $x \neq 0$ нельзя представить едииой кривой. Безразмерные коэффициненты чувствительности относительно $q_1$, $q_2$ и $q_3$ обозначены соответственно $X_1^+$, $X_2^+$ н $X_3^+$, кривые функций $X_4^+$, $X_5^+$ имеют ту же форму, но смещены вправо от $X_M^+$ к $X_{M+1}^+$ на величину $\Delta t_x^+$.

Анализируя рис. 1.13, можно указать иа несколько важиых положеиий. Во-первых, кривые $X_M^+$ указывают на запаздываиие, которое наиболее ясно видно на рис. 1.13,*а* для кривой $X_1^+$. Несмотря иа то что $q_1$ начинает действовать в момент времени $t = 0$ (рис. 1.9), рост величины $X_1^+$ на рнс. 1.13,*а* ие заметен до $t^+ > 0{,}05$. Такое поведение кривой $X_1^+$ совершенно отличается от поведения кривой $X_1^+$ для полубесконечного тела прн $x = 0$, когда максимальный градиент $X_1^+$ достнгается при $t \to 0$ (рис. 1.12).

Во-вторых, величнна $X_i^+$ увеличивается с возрастанием $\Delta t_x^+$. Малые шаги $\Delta t_x^+$ прнводят к малым значениям $X_i^+$, вызывая снижение точностн оценивания плотности теплового потока на поверхности.

В-третьих, каждая кривая $X_i$ имеет максимум, который по мере уменьшения $\Delta t_x^+$ смешается дальше от момента окончания действия импульса теплового потока. Например, для $\Delta t_x^+ = 1$ функция $X_1^+$ имеет максимальное значение при $t_x^+ = 1{,}3$, а в момеит $t_x^+$, равиый одному шагу $\Delta t_x^+$, величина $X_1^+$ составляет около 87% максимума $X_1^+$ при $\Delta t_x^+ = 1$. В отличие от этого случая для $\Delta t_x^+ = 0{,}05$ максимум $X_1^+$ реализуется в момент $t_x^+ = 0{,}45$, т. е. спустя $8\Delta t_x^+$ после прекращения нагрева. Более того, при $t_x^+ = \Delta t_x^+$ величина $X_1^+$ составляет только 0,7% максимального значения $X_1^+$.

В-четвертых, с увеличением $t_x^+$ все $X_M^+$ становятся коррелированными.

Отмеченные особенности коэффициентов чувствительности способствуют пониманию сутн вопроса при разработке алгоритмов оценивания применительно к обратным задачам теплопроводностн, в которых используются показания внутренних цатчиков. Одно из наиболее очевидных утверждений состоит в том, что

для оценивания $q_M$ требуется использовать измерения температуры в моменты времени, бо́льшие $t_M$, особенно когда $\Delta t_x^+$ становится малой величиной. Так как функция $X_1^+$ при $\Delta t_x^+ = 0{,}05$ приблизительно равна нулю в момент времени $t_x^+ = 0{,}05$ (в конце действия $q_1$), то $Y_1$ несет незначительную информацию о $q_1$. В то же время измерение $Y_2$ сильно зависит от $q_1$ и слабо — от $q_2$. Поэтому в случае $\Delta t_x^+ = 0{,}05$ для оценивания $q_M$ более эффективным явилось бы использование и $Y_M$, и $Y_{M+1}$, а не исключение $Y_{M+1}$. В алгоритме можно использовать и большее число *будущих* (относительно $t_M$) измерений температуры, а не только $Y_{M+1}$. Однако если учитывается большое количество последующих измерений температуры, например $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_{100}$ при оценивании $q_1$, то алгоритм может быть и неэффективным из-за сильной корреляции между коэффициентами чувствительности.

При использовании для оценивания $q_M$ некоторого числа $r$ последующих температур $Y_M$, $Y_{M+1}$, ..., $Y_{M+r-1}$ появляется избыток информации, который приводит к переопределенной системе алгебраических уравнений относительно $q_M$. Такая информация необходима, однако из-за погрешностей измерений она оказывается не полностью согласованной. Один из путей использования всей этой информации заключается в применении метода наименьших квадратов, который рассматривается в гл. 4 (см. также задачи 1.9 — 1.14).

#### 1.6.2.3. Теплоизолированная с одной стороны пластина

В данном разделе рассматриваются коэффициенты чувствительности относительно плотности теплового потока для плоской пластины, нагреваемой с одной стороны и теплоизолированной с другой (рис. 1.7). Для плотности теплового потока, который может действовать во времени сколь угодно долго, распределение температуры дается уравнением (1.5.5); соответствующие результаты представлены в табл. 1.2 и на рис. 1.7. Эти результаты можно рассматривать также как безразмерный коэффициент чувствительности относительно плотности теплового потока

$$X^+(x^+, t^+) \equiv \frac{k}{L}\frac{\partial T}{\partial q_c}. \tag{1.6.27}$$

Коэффициент чувствительности относительно $q_1$, когда

$$q = \begin{cases} q_1, & 0 < t < t_1 = \Delta t, \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \tag{1.6.28}$$

легко можно определить, используя уравнение (1.5.5). Поскольку все коэффициенты относительно $q_2$ имеют такую же форму, но смещены на интервал $\Delta t$, то достаточно рассмотреть $X_1^+$, определяемый соотношением

$$\begin{aligned} X_1^+ &\equiv \frac{k}{L}\frac{\partial T}{\partial q_c} = T^+(x^+, t^+), \quad 0 < t^+ < \Delta t^+, \\ X_1^+ &= T^+(x^+, t^+) - T^+(x^+, t^+ - \Delta t^+), \quad t^+ > \Delta t^+, \end{aligned} \tag{1.6.29}$$

где

$$\Delta t^+ \equiv \frac{\alpha\, \Delta t}{L^2} \tag{1.6.30}$$

н $\Delta t$ — продолжительность нагрева. Этот результат является более сложным, чем для полубесконечного тела, так как $X_1^+$ зависит от $t^+$, $\Delta t^+$ и $x^+$.

Для больших безразмерных времен

$$t^+ - \Delta t^+ > 0{,}5 \tag{1.6.31}$$

второе выражение в соотношениях (1.6.29) стремится к независящей от времени и пространственной координаты величине

$$X_{1,\max}^+ = \Delta t^+. \tag{1.6.32}$$

Это выражение указывает на зависимость $X_1^+$ от продолжительности нагрева. Следовательно, чем больше оценивается компонент $q$ для заданного периода времени, тем меньшими по величине становятся коэффициенты чувствительности и тем более трудной будет задача оценивания зависимости $q(t)$. Заметим, что с ростом $t^+$ происходит увеличение температуры (рис. 1.7), однако этого не происходит с коэффициентами чувствительности.

Коэффициент чувствительности $X_1^+$, нормированный по отношению к $X_{1,\max}^+$, показан на рис. 1.14. Для компактности представления результатов время также было нормировано относительно продолжительности нагрева $\Delta t$.

### 1.6.3. Примеры использования коэффициентов чувствительности в двумерных задачах

В этом разделе анализируется процедура оценивания изменения плотности теплового потока, которая, как и ранее, является функцией времени и еще зависит от координаты вдоль поверхности. Для дальнейшего рассмотрения плотность теплового потока разбивается на ряд простых однотипных элементов малой продолжительности и на малой области. Как и ранее, каждая компонента плотности теплового потока предполагается независящей ни от координаты, ни от времени. Пространственное изменение показано на рис. 1.6, а изменение по времени — на рис. 1.9. Возможна аппроксимация с помощью других функциональных зависи-

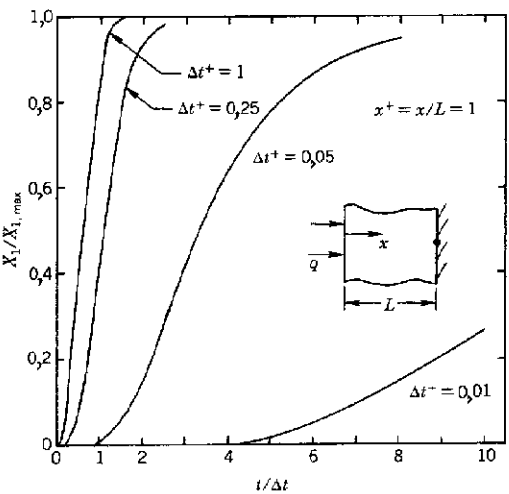



Рис. 1.14. Коэффициенты чувствительности относительно плотности теплового потока, вычисленные на теплоизолированной поверхности плоской пластины.

мостей, например линейной, параболической, синусоидальной и т. д. Однако наиболее простой является кусочно-постоянная аппроксимация.

Двумерная (зависящая и от времени) плотность теплового потока $q(y, t)$ аппроксимируется следующим образом (см. задачу 1.2.3):

$$q(y, t)=\sum_i \sum_j f_{ji}(y, t), \tag{1.6.33}$$

где индекс $i$ относится к времени, а $j$ — к пространству. Для кусочно-постоянных аппроксимирующих элементов функция $f_{ji}(y, t)$ имеет вид

$$f_{ji}(y, t)=\begin{cases} q_{ji}, & t_{i-1}\leqslant t<t_i \quad \text{и} \quad y_{j-1/2}\leqslant y<y_{j+1/2}, \\ 0 & \text{при остальных } t \text{ и } y. \end{cases} \tag{1.6.34}$$

Коэффициент чувствительности для $q_{ji}$ равен

$$X_{ji}(x, y, t)\equiv\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial q_{ji}}. \tag{1.6.35}$$

Например, двумерным является полубесконечное тело, нагреваемое зависящим от пространственной координаты тепловым потоком, как это показано на рис. 1.15. Координата $x$ направлена от поверхности внутрь тела, а $y$ — вдоль поверхности и при этом не имеет естественного начала отсчета. Плотность теплового потока $q(y, t)$ обычно является непрерывной функцией как времени, так и координаты, но, как было показано выше, аппроксимируется рядом отдельных постоянных импульсов малой продолжительности и на малом интервале по координате. Коэффициенты чувствительности для этой задачи можно получить из решения $T(x, y, t)$ для полубесконечного тела, равномерно нагреваемого при отрицательных значениях $y$. Математически данная задача описывается уравнением

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{1.6.36}$$

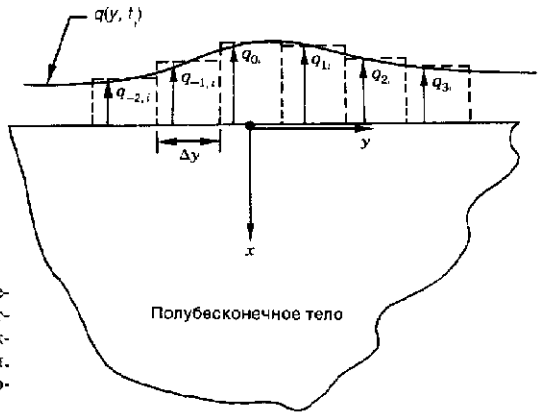



Рис. 1.15. Полубесконечное тело при переменной по времени и пространству плотности теплового потока, которая аппроксимирована постоянными элементами. $q(y, t_i)$ — распределение плотности теплового потока в момент времени $t_i$.

При
$$x=0\begin{cases}-k\dfrac{\partial T}{\partial x}=q_0, & y<0\ ,\\ \dfrac{\partial T}{\partial x}=0, & y>0\ ,\end{cases} \tag{1.6.37}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\to 0 \text{ при } y\to\pm\infty\ , \tag{1.6.38a}$$

$$T\to T_0 \text{ при } x\to\infty\ , \tag{1.6.38b}$$

$$T(x, y, 0)=T_0\ . \tag{1.6.38c}$$

Решение для любых $x$ дано в работе [50], однако с целью упрощения анализа остановимся только на случае $x = 0$, который рассмотрен в работе [51].

Решение задачи (1.6.36)—(1.6.38) при $x = 0$ и $y \neq 0$ имеет вид [51]

$$T_y^+(y^+)\equiv\frac{T(0, y, t)-T_0}{q_0(\alpha t/\pi)^{1/2}/k}=\operatorname{erfc}\left(\frac{y^+}{2}\right)-\frac{y^+}{2\pi^{1/2}}E_1\left[\frac{(y^+)^2}{4}\right],\quad y>0\ , \tag{1.6.39a}$$

$$T_y^+(y^+)=2-\operatorname{erfc}\left(\frac{|y^+|}{2}\right)+\frac{|y^+|}{2\pi^{1/2}}E_1\left[\frac{(y^-)^2}{4}\right],\quad y<0\ , \tag{1.6.39b}$$

где $y^+$ и $E_1(z)$ определены тождествами [52]:

$$y^+\equiv\frac{y}{(\alpha t)^{1/2}},\quad E_1(z)\equiv\int_z^\infty u^{-1}e^{-u}du\ . \tag{1.6.40a, b}$$

Выражения (1.6.39) можно представить в графической форме раздельно для положительных и отрицательных значений $y^+$. График зависимости $T_y^+$ от $|y^+|/2$ при положительных и отрицательных значениях $y$ представлен на рис. 1.16. Для характерных случаев $y \to -\infty$, $y = 0$ и $y \to \infty$ температура поверхности равна

$$T=T_0+2q_0\left(\frac{t}{\pi k\rho c}\right)^{1/2},\quad y\to-\infty\ , \tag{1.6.41a}$$

$$T=T_0+q_0\left(\frac{t}{\pi k\rho c}\right)^{1/2},\quad y=0\ , \tag{1.6.41b}$$

$$T=T_0,\quad y\to\infty\ . \tag{1.6.41c}$$

Коэффициент чувствительности для различных составляющих $q_{ji}$ можно получить, используя соотношения (1.6.39) и принцип суперпозиции. В частности, рассмотрим показанную на рис. 1.15 поверхность, на которую в момент времени $t_i$ действует ряд компонент теплового потока, имеющих одинаковую протяженность по пространству. Пусть длина участков нагрева равна $\Delta y = 2a$. В качестве прототипа коэффициента чувствительности используем коэффициент относительно компоненты $q_{01}$, которая соответствует области $-a < y < a$ и продолжительности нагрева $0 < t < \Delta t$. Требуется получить безразмерный коэффициент чувствительности для координат $x = 0$, $y = 2sa$ ($s = 0, 1, \ldots$) и времени $t = n\Delta t$ ($n = 1, 2, \ldots$). Введем обозначение

$$X_{01,sn}^+,$$

где первые два индекса относятся к пространственной области действия компоненты теплового потока (т. е. $j = 0$) и времени ее действия ($i = 1$), а последние два

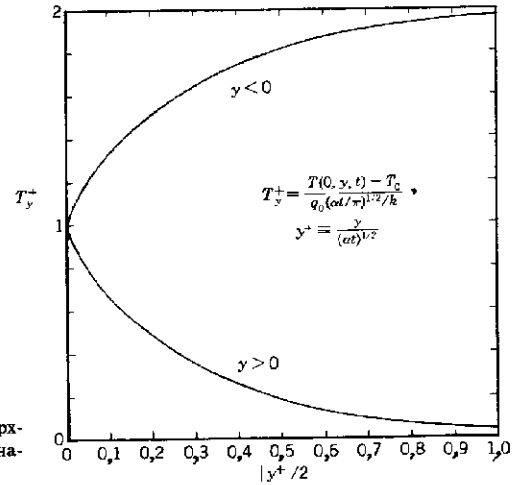



Рис. 1.16. Безразмерная температура поверхности полубесконечного тела, равномерно нагреваемого на половине поверхности.

индекса соответствуют пространственной области и времени оценивания. Первые два индекса относятся к причине (т. е. импульсу), а вторые — к следствию (т. е. реакции). Коэффициент чувствительности для момента времени $t = \Delta t$ ($n = 1$) и координаты $y_s = 2sa$ получается суперпозицией двух решений (1.6.39):

$$X^+_{01,s1} \equiv \frac{k}{a}\frac{\partial T(0, y_s, \Delta t)}{\partial q_{01}} = 2\left(\frac{t_a^+}{\pi}\right)^{1/2}\left\{T_y^+\left[\frac{2s-1}{(t_a^+)^{1/2}}\right] - T_y^+\left[\frac{2s+1}{(t_a^+)^{1/2}}\right]\right\}, \quad (1.6.42)$$

где

$$t_a^+ \equiv \frac{\alpha\,\Delta t}{a^2}. \quad (1.6.43)$$

Обозначение $T_y^+[(2s-1)/(t_a^+)^{1/2}]$ означает, что в выражениях (1.6.39) $y^+$ необходимо заменить на $(2s-1)/(t_a^+)^{1/2}$. При положительных значениях $2s-1$ (или $2s+1$) используется выражение (1.6.39a), тогда как при отрицательных их значениях используется выражение (1.6.39b). Для времени $t = n\Delta t$, $n = 2, 3, \ldots$, коэффициент чувствительности относительно $q_{01}$ равен

$$X^-_{01,sn} = 2\left(\frac{nt_a^+}{\pi}\right)^{1/2}\left\{T_y^+\left[\frac{2s-1}{(nt_a^+)^{1/2}}\right] - T_y^-\left[\frac{2s+1}{(nt_a^+)^{1/2}}\right]\right\} -$$
$$-2\left(\frac{(n-1)t_a^+}{\pi}\right)^{1/2}\left\{T_y^+\left[\frac{2s-1}{((n-1)t_a^+)^{1/2}}\right] - T_y^+\left[\frac{2s+1}{((n-1)t_a^+)^{1/2}}\right]\right\}. \quad (1.6.44)$$

Коэффициент чувствительности относительно произвольной компоненты $q_{ji}$ при $y_s$ и $t_n$ связан с коэффициентом чувствительности относительно $q_{01}$ соотношением

$$X^+_{ji,sn} = \begin{cases} 0, & n < i, \\ X^+_{01,|s-j|,n-i+1}, & n \geqslant i. \end{cases} \quad (1.6.45)$$

Следовательно, зная коэффициенты чувствительности $X^+_{01,sn}$ при $s = 0, 1, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots$ на поверхности полубесконечного тела, можно получить и все остальные коэффициенты на поверхности $X^+_{ji,sn}$.

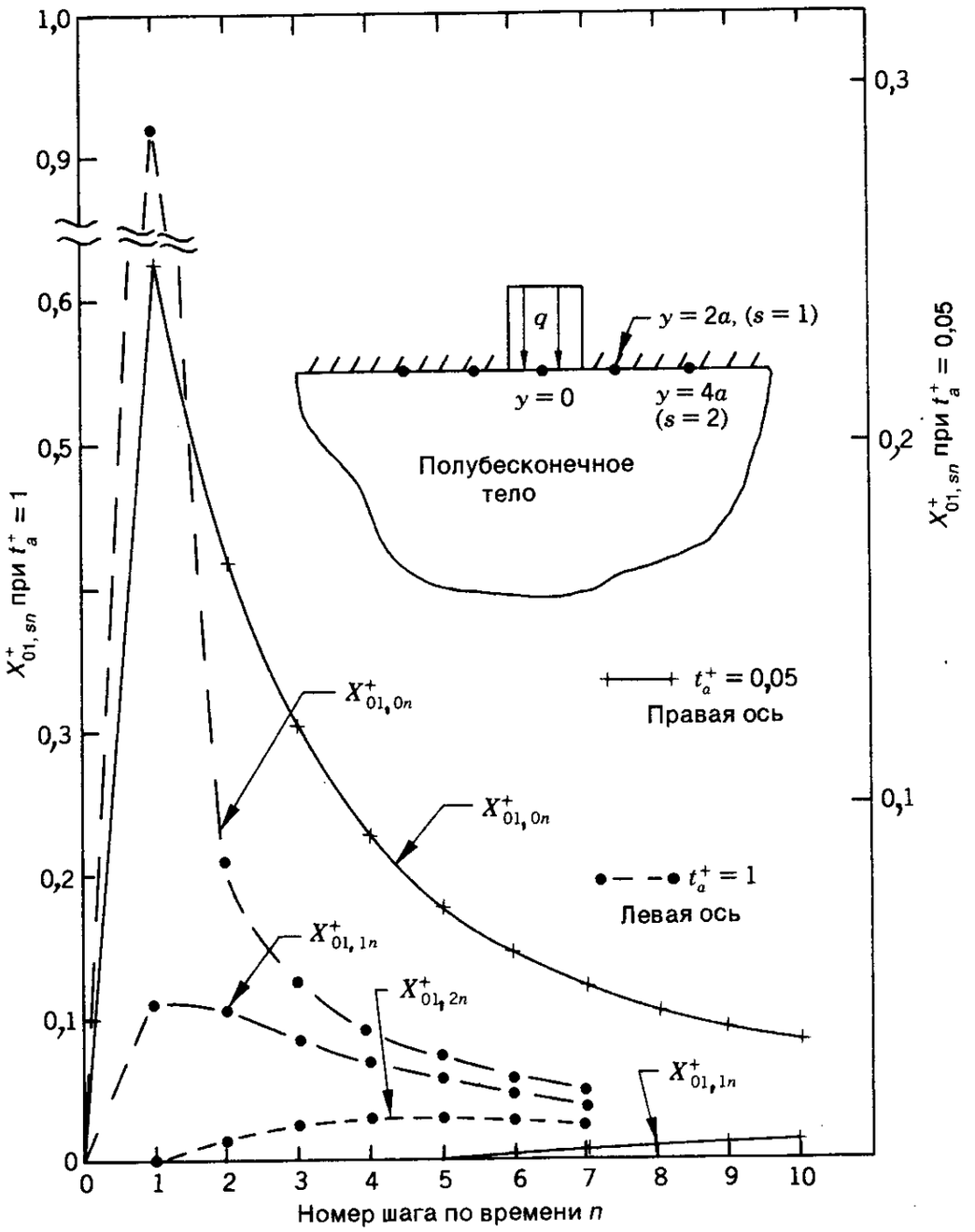



Рис. 1.17. Коэффициенты чувствительности относительно составляющих плотности теплового потока вдоль поверхности полубесконечного тела.

На рис. 1.17 показаны графики $X^+_{01,0n}$, $X^+_{01,1n}$ и $X^+_{01,2n}$ при $t_a^+ = 1$. Эти кривые проведены штриховыми линиями, отмеченными точками, и для них используется левая ось координат. По сравнению с остальными кривая $X^+_{01,0n}$ достигает наибольших значений, так как она соответствует реакции на непосредственное воздействие импульса теплового потока. Максимум достигается при $n = 1$, т. е. в конце действия импульса, а затем кривая спадает. Кривая $X^+_{01,2n}$ расположена гораздо ниже кривой $X^+_{01,0n}$, и ее максимум смещен во времени. На рис. 1.17 представлены также два графика при относительно малом значении $t_a^+ = 0,05$. Эти кривые проведены сплошными линиями с крестиками, и для них используется правая ось. В этом случае кривая $X^+_{01,0n}$ сходна с такой же кривой для $t_a^+ = 1$, а зависимость $X^+_{01,1n}$ очень мала по величине и реакция имеет большое запаздывание. Это означает, что тепловой импульс для малых шагов по времени и при $t_a^+ = 0,05$ влияет главным образом на изменение температуры в зоне действия импульса. Между отдельными импульсами имеется слабая корреляция (перекрестная связь).

Свойство некоррелированности пространственного изменения коэффициентов чувствительности в случае измерения температуры поверхности и использования малых шагов по времени имеет применение в планировании эксперимента. Например, если требуется определить коэффициенты теплоотдачи для лопатки газотурбинного двигателя (что эквивалентно определению плотности тепловых потоков при известных температурах внешней среды), можно использовать нестационарный эксперимент с размещением термопар на поверхности. При этом шаг вычислений по времени следует уменьшать с целью снижения пространственной корреляции между компонентами коэффициента теплоотдачи.

## 1.7. Классификация методов

Методы решения обратной задачи теплопроводности могут быть классифицированы различными способами. Некоторые из них рассматриваются ниже [1)].

Один из способов классификации связан с применимостью метода к решению как нелинейных, так и линейных обратных задач. В настоящей книге внимание уделяется основным алгоритмам, которые применимы для решения линейных и нелинейных задач. Рассматриваются два основных подхода: метод функциональной аппроксимации и метод регуляризации. Оба метода можно использовать для решения нелинейных задач (при условии, что нелинейное уравнение теплопроводности решено). Некоторые методы ОЗТ по своей природе относятся к линейным, например основанные на преобразовании Лапласа. Такие методы здесь не рассматриваются, так как наиболее важными для технических приложений являются нелинейные задачи.

В основу другого способа классификации может быть положен метод решения уравнения теплопроводности. Методы решения могут базироваться на использовании теоремы Дюамеля, методов конечных разностей, конечных элементов и конечных контрольных объемов. При использовании теоремы Дюамеля алгоритмы решения применимы только к линейным задачам ОЗТ, в то время как остальные методы позволяют анализировать и нелинейные задачи. В книге теорема Дюамеля используется часто, так как алгоритмы решения в этом случае легче использовать и программировать для простых вычислений по сравнению с методом конечных разностей и другими численными методами. Более того, в линейных задачах решения, получаемые для плотности теплового потока на поверхности тела, практически совпадают при использовании всех упомянутых методов при условии, что уравнение теплопроводности решено точно. Следовательно, опыт, приобретаемый при использовании в основном алгоритме решения ОЗТ теоремы Дюамеля, оказывается полезным применительно и к другим методам решения линейных обратных задач теплопроводности.

Временна́я область, принятая при решении ОЗТ, также может быть использована для классификации методов. Предлагаются три области по времени: 1) только до текущего момента времени, 2) до текущего момента и дополнитель-

---

[1)] Главной особенностью ОЗТ является некорректность исходной постановки задачи. Поэтому естественно в качестве основного классификационного признака для методов их решения привлекать общие принципы получения устойчивых приближенных решений. Однако данный аспект не нашел в книге необходимого отражения, что, как следствие, привело к не совсем правильной расстановке акцентов при анализе различных подходов к решению обратных задач теплопроводности. — *Прим. ред.*

2. Метод должен иметь слабую чувствительность к погрешностям измерений.

3. Метод должен быть устойчивым при малых шагах или интервалах по времени. Это позволяет получить больше информации об изменении по времени граничных условий, чем при использовании больших временны́х шагов.

4. Должна быть обеспечена возможность использования данных как от одного, так и от нескольких датчиков.

5. Метод не должен иметь ограничений в виде требования непрерывности первой производной плотности теплового потока на поверхности. Более того, нужно допускать возможность ступенчатого или даже более резкого изменения плотности теплового потока.

6. Не следует требовать знания точного момента времени начала действия теплового потока на поверхности. Начало нагрева часто не синхронизировано с моментами времени измерения температуры. Данное требование вызвано тем, что начальный момент времени точно неизвестен или его трудно измерить, Точные значения моментов времени, в которые происходит резкое изменение плотности теплового потока, также могут быть неизвестны.

7. Метод не должен иметь ограничения по числу наблюдений.

8. Должна быть обеспечена возможность рассмотрения составных твердых тел.

9. Должна допускаться зависимость теплофизических свойств от температуры.

10. Не должна исключаться из рассмотрения контактная проводимость.

11. Метод должен легко программироваться.

12. Стоимость машинного времени должна быть умеренной.

13. При использовании метода или при адаптировании его к другим геометрическим формам не должна требоваться высокая математическая квалификация.

14. Метод должен позволять решать задачи в различных одномерных системах координат.

15. Метод должен допускать возможность учета нескольких поверхностей нагрева.

16. Метод должен иметь статистическую основу и допускать использование различных статистических предположений о погрешностях измерений.

Всем перечисленным критериям удовлетворяют методы функциональной аппроксимации и регуляризации при условии, что нелинейное уравнение теплопроводности аппроксимируется с помощью методов конечных разностей, конечных элементов или конечного контрольного объема [1)].

Если уравнение теплопроводности решается с помощью теоремы Дюамеля и при этом используется метод функциональной аппроксимации или метод регуляризации, то могут быть удовлетворены все критерии кроме критерия, допускающего возможность применения этих методов к нелинейным задачам (девятый критерий).

---

[1)] Указанные методы, как они трактуются в книге, не позволяют учитывать априорную информацию достаточно широкого вида. (Особенно это относится к методу функциональной аппроксимации.) Кроме того, следует отметить, что метод функциональной аппроксимации обладает устойчивостью только при определенных ограничениях на минимальный шаг дискретизации искомой функции. — *Прим. ред.*

## 1.9. Содержание книги

В рамках книги рассматривается главным образом только один класс некорректных задач — обратные задачи теплопроводности. Однако многие из изложенных в книге подходов могут быть использованы для решения широкого круга некорректных задач. Представлено несколько методов. При этом основное внимание уделяется тем из них, которые соответствуют перечисленным в разд. 1.8 критериям.

Глава 1 является введением в предмет.

В главе 2 представлены некоторые точные решения, одно из которых принадлежит Бургграфу [43]. Хотя практическое применение последнего весьма ограничено, его рассмотрение и анализ представляются очень важными.

В главе 3 рассматриваются два основных алгоритма решения прямых задач нестационарной теплопроводности. Первый из них основан на численной аппроксимации интеграла Дюамеля. Во втором методе дифференциальное уравнение в частных производных, каким является уравнение нестационарной теплопроводности, аппроксимируется системой алгебраических или разностных уравнений. Второй метод является более мощным, так как применим к нелинейным задачам.

Глава 4 начинается с обсуждения некорректных задач, а затем в ней описан ряд методов решения обратных задач теплопроводности. В разработку этих методов внесли свой вклад многие исследователи. Два основных класса методов представляют методы функциональной аппроксимации и регуляризации. Эти подходы объединяет алгоритм, названный методом пробных функций. Два способа использования методов функциональной аппроксимации и регуляризации называются соответственно последовательным оцениванием и оцениванием во всей области. Рассматриваются их различные модификации. В каждом из этих методов можно использовать и теорему Дюамеля, и представление в виде разностных уравнений, поэтому эти методы применимы как к линейным, так и к нелинейным задачам. Важной частью данной главы является обсуждение вопроса о применении для решения обратных задач цифровой фильтрации. Такой подход может быть использован при разработке эффективных алгоритмов решения линейных задач. В заключительном разделе главы обсуждаются некоторые критерии сравнения различных алгоритмов оценивания.

В главе 5 приводится несколько контрольных примеров. Используя численную аппроксимацию интеграла Дюамеля для решения уравнения теплопроводности, на этих примерах исследуют различные алгоритмы решения ОЗТ. Изучению алгоритмов способствует использование численного аналога интеграла Дюамеля, поскольку в этом случае в каждый момент времени требуется только одно уравнение, а не система разностных уравнений. Заканчивается глава обсуждением вопросов оптимального выбора параметров в методах функциональной аппроксимации и регуляризации.

Глава 6 посвящена применению метода конечного контрольного объема для аппроксимации уравнения теплопроводности при решении одномерной обратной задачи теплопроводности. Используются методы последовательной функциональной аппроксимации и регуляризации, рассмотренные в четвертой главе. Кроме того, обсуждаются некоторые маршевые методы продвижения по пространственной координате. Эти методы являются в своем роде единственными при ап-

проксимации разностными уравнениями, так как аналогичные уравнения, основанные на интеграле Дюамеля, непригодны. В заключение главы дается перечень программ для ЭВМ, предназначенных для решения обратных задач теплопроводности.

В главе 7 рассматривается задача оценивания нескольких тепловых потоков. Одновременно может быть оценено две или несколько зависимостей плотностей тепловых потоков от времени. Этот случай часто встречается при рассмотрении двух- и трехмерных обратных задач теплопроводности.

В последней, восьмой главе обсуждаются методы оценивания коэффициента теплоотдачи. Один путь заключается в использовании методов обратных задач для вычисления плотности теплового потока на поверхности; другой способ состоит в непосредственном вычислении коэффициента теплоотдачи.

## Литература


1. Stolz, G., Jr., Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes, *J. Heat Transfer* **82**, 20–26 (1960).
2. Mirsepassi, T. J., Heat-Transfer Charts for Time-Variable Boundary Conditions, *Br. Chem. Eng.* **4**, 130–136 (1959).
3. Mirsepassi, T. J., Graphical Evaluation of a Convolution Integral, *Mathematical Tables and Other Aides to Computation* **13**, 202–212 (1959).
4. Shumakov, N. V., A Method for the Experimental Study of the Process of Heating a Solid Body, *Soviet Physics–Technical Physics* (Translated by American Institute of Physics) **2**, 771 (1957).
5. Beck, J. V., Correction of Transient Thermocouple Temperature Measurements in Heat-Conducting Solids, Part II, The Calculation of Transient Heat Fluxes Using The Inverse Convolution, AVCO Corp., Res. and Adv. Dev. Div., Wilmington, MA., Tech. Report RAD-TR-7-60-38 (Part II), March 30, 1961.
6. Beck, J. V., Calculation of Surface Heat Flux From an Internal Temperature History, ASME Paper 62-HT-46 (1962).
7. Beck, J. V., "Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method," *Nucl. Eng. Des.* **7**, 170–178 (1968).
8. Beck, J. V. and Wolf, H., The Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem, ASME Paper, 65-HT-40 (1965).
9. Beck, J. V., Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Heat Conduction Problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 703–716 (1970).
10. Beck, J. V., Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problem, *Nucl. Eng. Des.* **53**, 11–22 (1979).
11. Beck, J. V., Litkouhi, B., and St. Clair, C. R., Jr., Efficient Sequential Solution of the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem, *Numer. Heat Transfer* **5**, 275–286 (1982).
12. Blackwell, B. F., A New Iterative Technique for Solving the Implicit Finite-Difference Equations for the Inverse Problem of Heat Conduction, unpublished technical report, Sandia Laboratories, Albuquerque, NM (1968).
13. Blackwell, B. F., An Efficient Technique for the Numerical Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction, *Numer. Heat Transfer* **4**, 229–239 (1981).
14. Langford, D., New Analytic Solutions of the One-Dimensional Heat Equation for Temperature and Heat Flow Rate Both Prescribed at the Same Fixed Boundary (with Applications to the Phase Change Problem), *Q. Appl. Math.* **24**, 315–322 (1967).
15. Woo, K. C. and Chow, L. C., Inverse Heat Conduction by Direct Inverse Laplace Transform, *Numer. Heat Transfer* **4**, 499–504 (1981).

16. Imber, M., A Temperature Extrapolation Method for Hollow Cylinders, *AIAA J.* **11**, 117–118 (1973).
17. Imber, M., Comments on "On Transient Cylindrical Surface Heat Flux Predicted from Interior Temperature Responses," *AIAA J.* **14**, 542–543 (1975).
18. Imber, M., Inverse Problem for a Solid Cylinder, *AIAA J.* **17**, 91–94 (1979).
19. Imber, M., Nonlinear Heat Transfer in Planar Solids: Direct and Inverse Applications, *AIAA J.* **17**, 204–212 (1979).
20. Imber, M., A Temperature Extrapolation Mechanism for Two-Dimensional Heat Flow, *AIAA J.* **12**, 1087–1093 (1974).
21. Imber, M., The Two Dimensional Inverse Problem in Heat Conduction, Fifth International Heat Transfer Conference, Tokyo, Japan (1974).
22. Imber, M., Two-Dimensional Inverse Conduction Problem—Further Observations," *AIAA J.* **13**, 114–115 (1975).
23. Imber, M. and Khan, J., Prediction of Transient Temperature Distributions with Embedded Thermocouples, *AIAA J.* **10**, 784–789 (1972).
24. Mulholland, G. P., Gupta, B. P., and San Martin, R. L., Inverse Problem of Heat Conduction in Composite Media, ASME Paper, 75-WA/HT-83 (1975).
25. Mulholland, G. P. and San Martin, R. L., Inverse Problem of Heat Conduction in Composite Media, Third Canadian Congress of Applied Mechanics, Calgary, Alberta, Canada (May 1971).
26. Mulholland, G. P. and Cobble, M. H., Diffusion Through Composite Media, *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, 147–152 (1972).
27. Mulholland, G. P. and San Martin, R. L., Indirect Thermal Sensing In Composite Media, *Int. J. Heat Mass Transfer* **16**, 1056–1060 (1973).
28. Hills, R. G. and Mulholland, G. P., Accuracy and Resolving Power of One-Dimensional Transient Inverse Heat Conduction Theory as Applied to Discrete and Inaccurate Measurements, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 1221–1229 (1979).
29. Randall, J. D., Embedding Multidimensional Ablation Problems in Inverse Heat Conduction Problems Using Finite Differences, 6th Int. Heat Transfer Conf., Toronto, Ont., Aug. 7–11, 1978. Publ. by Natl. Res. Council of Can., Toronto, Ont., 1978. Available from Hemisphere Publ. Corp, Washington, D.C., Vol. 3, 129–134.
30. Randall, J. D., Finite Difference Solution of the Inverse Heat Conduction Problem and Ablation, Technical Report, Johns Hopkins University, Laurel, Maryland (1976), Proceedings of the 25th Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Univ. of California, Davis (1976).
31. Williams, S. D. and Curry, D. M., An Analytical Experimental Study for Surface Heat Flux Determination, *J. Spacecraft* **14**, 632–637 (1977).
32. France, D. M., Chiang, T., Carlson, R. D., and Minkowycz, W. J., Measurements and Correlation of Critical Heat Flux in a Sodium Heated Steam Generator Tube, Technical Memorandum, ANL-CT-78-15, Argonne National Laboratory, Argonne, IL (1978).
33. France, D. M., Carlson, R. D., Chiang, T., and Priemer, R., CHF-Induced Thermal Oscillations Measured in an LMFBR Steam Generated Tube Wall, Technical Report, ANL-CT-78-1, Argonne National Laboratory Argonne, IL (1977).
34. France, D. M. and Chiang, T., Analytical Solution to Inverse Heat Conduction Problems with Periodicity, *J. Heat Transfer* **102**, 579–581 (1980).
35. Bass, B. R., Applications of the Finite Element to the Inverse Heat Conduction Problem Using Beck's Second Method, *J. Eng. Ind.* **102**, 168–176 (1980).
36. Bass, B. R., Incap: A Finite Element Program for One-Dimensional Nonlinear Inverse Heat Conduction Analysis, Technical Report NRC/NUREG/CSD/TM-8, Oak Ridge National Laboratory (1979).
37. Muzzy, R. J., Avila, J. H. and Root, R. E., Topical Report: Determination of Transient Heat Transfer Coefficients and the Resultant Surface Heat Flux from Internal Temperature Measurements, General Electric, GEAP-20731 (1975).

38. Snider, D. M., INVERT 1.0—A Program for Solving the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem for One-Dimensional Solids, EG&G Idaho, Inc., Idaho Falls, Idaho, EGG-2068 (1981).
39. Alkidas, A. L., Heat Transfer Characteristics of a Spark-Ignition Engine," *J. Heat Transfer* **102**, 189–193 (1980).
40. Howse, T. K. J., Kent, R., and Rawson, H., The Determination of Glass-Mould Heat Fluxes from Mould Temperature Measurements, *Glass Technol.* **12**, 91–93 (1971).
41. Sparrow, E. M., Haji-Sheikh, A., and Lundgren, T. S., The Inverse Problem in Transient Heat Conduction, *J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E*, **86**, 369–375 (1964).
42. Lin, D. Y. T., and Westwater, J. W., Effect of Metal Thermal Properties on Boiling Curves Obtained by the Quenching Method, *Heat Transfer 1982—Munchen Conference Proceedings*, Hemisphere Publ. Corp., New York, 1982, pp. 155–160, Vol. 4.
43. Burggraf, O. R., An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Applications, *J. Heat Transfer* **86C**, 373–382 (1964).
44. Grysa, K., Cialkowski, M. J. and Kaminski, H., An Inverse Temperature Field Problem of the Theory of Thermal Stresses, *Nucl. Eng. Des.* **64**, 169–184 (1981).
45. Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., *Solutions of Ill-Posed Problems*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1977.
46. Backus, G. and Gilbert, F., Uniqueness in the Inversion of Inaccurate Gross Earth Data, *Phil. Trans. R. Soc. London Ser. A* **266**, 123–192 (1970).
47. Nolet, G., Simultaneous Inversion of Seismic Data, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **55**, 679–691 (1978).
48. Mandrel, J., Use of the Singular Value Decomposition in Regression Analysis, *Am. Stat.* **36**, 15–24 (1982).
49. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1977.
50. Litkouhi, B. and Beck, J. V., Temperatures in Semi-Infinite Body Heated by Constant Heat Flux Over Half Space, *Heat Transfer 1982—Munchen Conference Proceedings*, Hemisphere Publ. Corp., New York, 1982, pp. 21–27, Vol. 2.
51. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1959.
52. Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, Vol. 55, 1964.
53. Payne, L. E., *Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, PA., 1975.
54. Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.
55. Cannon, J. R. and Douglas, J., The Cauchy Problem for the Heat Equation, *SIAM J. Numer. Anal.* **3**, 317–336 (1967).
56. John, F., Numerical Solution of the Heat Equation for Preceeding Times, *Ann. Mat. Para. Appl.* **40**, 129–142 (1955).
57. Lawson, C. L. and Hanson, R. J., *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
58. Murio, D. A., The Mollification Method and the Numerical Solution of an Inverse Heat Conduction Problem, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **2**, 17–34 (1981).

## Имеются на русском языке

4. Шумаков Н. В. Метод экспериментального изучения процесса нагрева твердого тела. — Журнал технической физики, 1957, т. 27, № 7, с. 844—855.

16. Имбер М. Экстраполяционный метод расчета температуры полого цилиндра. — Ракетная техника и космонавтика, 1973, № 1, с. 137—138.
17. Имбер М. Замечание к статье «Определение нестационарных тепловых потоков через поверхность полого цилиндра по измерению температуры на его внутренней поверхности». — Ракетная техника и космонавтика, 1976, № 4, с. 152—153.
18. Имбер М. Обратная задача теплопроводности для сплошного цилиндра. — Ракетная техника и космонавтика, 1979, № 1, с. 107—111.
19. Имбер М. Нелинейные задачи теплопроводности в плоских твердых телах: прямая и обратная задачи. — Ракетная техника и космонавтика, 1979, № 2, с. 96—107.
20. Имбер М. Метод экстраполяции температуры в случае двумерных тепловых потоков. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, № 8, с. 107—112.
22. Имбер М. Некоторые замечания по поводу двумерной обратной задачи теплопроводности. — Ракетная техника и космонавтика, 1975, № 1, с. 149—150.
23. Имбер М., Кхан Дж. Расчет нестационарного распределения температуры на основании показаний термопар, расположенных внутри тела. — Ракетная техника и космонавтика, 1972, № 6, с. 83—90.
31. Вильямс С. Д., Карри Д. М. Определение теплового потока к поверхности: теоретическое и экспериментальное исследование. — Ракетная техника и космонавтика, 1978, № 1, с. 161—169.
34. Франс, Цзян. Аналитическое решение обратных задач теплопроводности при периодических граничных условиях. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1980, № 3, с. 216.
39. Алкидас. Характеристики теплоотдачи карбюраторного двигателя. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1980, № 2, с. 1.
41. Спэрроу, Хаджи-Шейх, Лундгрен. Обратная задача нестационарной теплопроводности. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. Е, Прикладная механика, 1964, № 3, с. 107—108.
43. Бургграф. Точное решение обратной задачи в теории теплопроводности и ее приложениях. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1964, № 3, с. 94.
45. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1975.
51. Карслоу У., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. — М.: Наука, 1964.
57. Лоуссон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов: Пер. с англ. — М.: Наука, 1986.

## Задачи

1.1. Дайте математическую постановку обратной задачи теплопроводности для сплошной однородной сферы при измерении температуры в центре. Радиус сферы обозначьте $a$. Нарисуйте сферу и укажите на ней характерные величины. Постройте типичный график температуры, измеренной дискретно с шагом по времени $\Delta t$ при начальном значении $T_0 = \text{const}$. Постройте также график соответствующей зависимости от времени плотности теплового потока на поверхности.

1.2. Тормоз автомобиля состоит из литого чугунного барабана и двух тормозных колодок. Вращающийся барабан имеет внутренний радиус 10 см и внешний 10,7 см. Предполагается, что перенос тепла в барабане происходит только в радиальном направлении и на внешней границе барабана имеет место граничное условие конвективного теплообмена. Тормозные колодки толщиной 0,5 см расположены внутри барабана и прижаты. Зона контакта составляет лишь 75% внутренней поверхности барабана. На внутренней поверхности тормозных колодок (не контактирующей с барабаном) также имеет место граничное условие конвективного теплообмена.

Сформулируйте обратную задачу (или задачи) для определения плотности теплового потока на поверхности барабана. Дайте математическую постановку задачи и сделайте необходимые эскизы.

1.3. Распределение температуры в полубесконечном теле ($x \geqslant 0$) определяется соотношением

$$T - T_0 = (T_s - T_0)\,\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right],$$

где $T_s$ — температура поверхности, $T_0$ — начальная температура.

a. Получите выражение для плотности теплового потока при произвольном $x$. Выведите такое выражение для $x = 0$.
*Ответ*: $k(T_s - T_0)(\pi\alpha t)^{-1/2}$ для $x = 0$.

b. Постройте график плотности теплового потока в зависимости от $\alpha t/E^2$ при $x = E$ и на этом же графике постройте зависимость для $x = 0$.

1.4. *Для полубесконечного тела, температура поверхности которого задана в виде*

$$T(0, t) = 0, \quad t < 0,$$

$$T(0, t) = Ct^{n/2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad t \geqslant 0$$

распределение температуры имеет вид [51]

$$T = C\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)(4t)^{n/2} i^n\,\mathrm{erfc}\left[\frac{x}{(4\alpha t)^{1/2}}\right],$$

где [51]

$$i^n\,\mathrm{erfc}(z) = \int_z^\infty i^{n-1}\,\mathrm{erfc}(u)\,du, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i^0\,\mathrm{erfc}(z) = \mathrm{erfc}(z).$$

Получите выражение для плотности теплового потока на поверхности

$$q(0, t) = k\alpha^{-1/2} C t^{(n-1)/2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Получите выражение для $T(0, t)/q(0, t)$ и поясните результат. Получается ли соотношение, которое можно использовать для обратной задачи? Дайте пояснения.

1.5. Используйте соотношение для $T$ из задачи 1.3 для отличных от нуля $x$ и оцените

$$q(0, t) \approx k\,\frac{T_s - T(x, t)}{x}$$

при значениях $\alpha t/x^2$, равных 0,01; 0,1; 1; 10; 100. Сравните с точным результатом из задачи 1.3 и сделайте соответствующие выводы.

1.6. Сплошная медная заготовка длиной 46,2 мм и диаметром 25,4 мм нагревается в печи и затем вынимается. Удельная объемная теплоемкость меди равна 3,42 МДж/(м$^3$·К). Некоторые результаты измерений температуры приведены ниже. Модель теплообмена имеет вид

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = qA,$$

где $V$ — объем, $A$ — площадь нагреваемой поверхности (цилиндрической части и плоских торцов).

a. Используя аппроксимацию правыми разностями

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta t}$$

и данные измерений, вычислите плотность теплового потока с шагом по времени $\Delta t = 96$ с и постройте график.

b. Повторите вычисления с использованием левых разностей и постройте график.

c. Повторите вычисления, используя центральные разности:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_i} = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2\,\Delta t}.$$

d. Какая схема аппроксимации дает лучшие результаты?

| $i$ | Время, с | $Y_i$, К | $i$ | Время, с | $Y_i$, К |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1632 | 334,62 | 8 | 2304 | 323,25 |
| 2 | 1728 | 332,63 | 9 | 2400 | 321,99 |
| 3 | 1824 | 330,80 | 10 | 2496 | 320,80 |
| 4 | 1920 | 329,08 | 11 | 2592 | 319,65 |
| 5 | 2016 | 327,48 | 12 | 2688 | 318,63 |
| 6 | 2112 | 325,99 | 13 | 2784 | 317,64 |
| 7 | 2208 | 324,60 | | | |

1.7. Используйте правые разности для аппроксимации первой производной функции $e^{-t}$ для $t = 2$ при $\Delta t = 0{,}001$; 0,01; 0,1 и 1. Вначале используйте точные значения $e^{-t}$, а затем повторите вычисления, прибавляя к $e^{-t}$ случайные погрешности, равные 0,000464; 0,000137; 0,002455; $-0{,}000323$ и $-0{,}000068$ для $t = 2$; 2,001; 2,01; 2,1 и 3,0 соответственно. Например, $Y_1 = e^{-2} + 0{,}000464 = 0{,}135799$. (Приведенные случайные величины имеют среднеквадратичное отклонение 0,001 и взяты из первых пяти строк табл. 5.2.) Какие выводы можно сделать из результатов, полученных при $\Delta t \to 0$, исходя из точных данных и при наличии погрешностей?

1.8. Найдите среднее значение заданных в задаче 1.6 температур. Вычислите и постройте график невязок, определяемых по формуле

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

где $\hat{Y}_i$ — средняя температура. Какова главная причина отсутствия случайных колебаний невязок?

1.9. Метод обычных наименьших квадратов заключается в минимизации суммы

$$S=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-T_i)^2$$

относительно параметров. Для модели

$$T_i=\beta_1+\beta_2(t_i-\bar{t}),$$

где

$$\bar{t}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

выведите формулы оценок $\beta_1$ и $\beta_2$, которые обозначаются соответственно $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$:

$$\hat{\beta}_1=\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum(t_i-\bar{t})Y_i}{\sum(t_i-\bar{t})^2}.$$

1.10. Используя линейную модель из задачи 1.9, оцените $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ по данным задачи 1.6. Затем вычислите невязки и постройте их график. Поясните характер изменения невязок по времени.

1.11. Для равномерно распределенных по времени измерений при оценивании методом наименьших квадратов могут использоваться ортогональные полиномы [49]. Полиноминальная модель имеет вид

$$T_i=\beta_0+\beta_1 t_i+\beta_2 t_i^2+\cdots+\beta_r t_i^r, \qquad \text{(a)}$$

где $t_{i+1}=t_i+\Delta t$. Эту модель можно представить следующим образом:

$$T_i=\alpha_0 p_0(t_i)+\alpha_1 p_1(t_i)+\alpha_2 p_2(t_i)+\cdots+\alpha_r p_r(t_i), \qquad \text{(b)}$$

где $p_0(t_i)$, $p_1(t_i)$ и $p_2(t_i)$ равны

$$p_0(t_i)=1,$$

$$p_1(t_i)=\frac{t_i-\bar{t}}{\Delta t}=i-\frac{n+1}{2},\quad \bar{t}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i,$$

$$p_2(t_i)=\left(\frac{t_i-\bar{t}}{\Delta t}\right)^2-\frac{n^2-1}{12}. \qquad \text{(c)}$$

Докажите, что функции $p_j(t_i)$ при $r=2$ ортогональны, т. е. покажите, что

$$\sum_{j=1}^{n}p_j(t_i)p_k(t_i)=0 \text{ при } j\neq k,$$

$$\sum_{j=1}^{n}p_j(t_i)p_k(t_i)\neq 0 \text{ при } j=k,$$

$j,\ k=0,\ 1,\ 2.$

Выведите

$$\hat{\alpha}_M = \sum_{i=1}^{n} Y_i p_M(t_i) \left[ \sum_{j=1}^{n} p_M^2(t_j) \right]^{-1} \qquad \text{(d)}$$

для $m = 0, 1, \ldots, r$.

1.12. Для моделей в виде полинома и ортогонального полинома из задачи 1.11 докажите, что при $r = 1$

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\alpha}_1}{\Delta t}$$

и при $r = 2$

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 \frac{\bar{t}}{\Delta t} + \hat{\alpha}_2 \left[ \left( \frac{\bar{t}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{n^2 - 1}{12} \right],$$

$$\hat{\beta}_1 = \left( \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2 \frac{2\bar{t}}{\Delta t} \right) \frac{1}{\Delta t}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\alpha}_2}{(\Delta t)^2}.$$

1.13. Для модели в виде ортогонального полинома из задачи 1.11 при $r = 2$ оцените параметры в уравнении (b) задачи 1.11 обычным методом наименьших квадратов по данным задачи 1.6. Вычислите осредненную оценку среднеквадратичного отклонения и выборочный коэффициент корреляции. Проанализируйте полученные результаты.

1.14. Получите формулы для оценок $\beta_1$ и $\beta_2$ в модели

$$T_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}$$

с использованием обычного метода наименьших квадратов, который заключается в минимизации суммы

$$S = \sum (Y_i - T_i)^2$$

относительно $\beta_1$ и $\beta_2$.

*Ответ*:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{d_1 c_{22} - d_2 c_{12}}{\Delta}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{d_2 c_{11} - d_1 c_{12}}{\Delta},$$

$$c_{kl} = \sum_{i=1}^{n} X_{ik} X_{il}, \quad d_k = \sum_{i=1}^{n} Y_i X_{ik},$$

$$\Delta = c_{11} c_{22} - c_{12}^2.$$

1.15. Покажите, что при использовании обычного метода наименьших квадратов формула для оценки $\hat{\beta}$ в модели $T = \beta$ имеет вид

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Также покажите, что при выполнении стандартных статистических предположений дисперсия $\hat{\beta}$ равна

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

1.16. Покажите, что для случайных переменных $Y_i$ и $Y_j$ справедливы соотношения

a) $V(Y_j)=E(Y_j^2)-E^2(Y_j)$,

b) $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j)=E(Y_iY_j)-E(Y_i)E(Y_j)$.

1.17. Чему равно математическое ожидание случайной переменной $\varepsilon$, плотность вероятности которой имеет вид

$$f_\varepsilon(y)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<y<1,\\ 0 & \text{при остальных } y.\end{cases}$$

Чему равна дисперсия $\varepsilon$?

1.18. Чему равны среднее значение и дисперсия случайной переменной $\varepsilon$, плотность вероятности которой равна

$$f_\varepsilon(y)=a\exp[-(y-5)^2], \quad -\infty<y<\infty.$$

Каково значение $a$?

1.19. Используя первую строку случайных чисел в табл. 5.2, получите набор из 10 коррелированных случайных чисел по формуле

$$\varepsilon_{i+1}=0{,}5\varepsilon_i+u_{i+1}, \quad i=1, 2, \ldots, 9,$$

где $u_i$ — входные величины в табл. 5.2, причем $\varepsilon_1 = u_1$. Вычислите среднее значение выборки и соответствующие невязки. Затем вычислите выборочный коэффициент корреляции. Повторите вычисления для следующих двух строк табл. 5.2. Сделайте выводы.

1.20. a. Постройте график отношения изменения температуры в точке $x = 0$ плоской пластины, подверженной воздействию теплового потока постоянной плотности при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$, к изменению температуры в точке $x = 0$ полубесконечного тела, нагреваемого при $x = 0$ тепловым потоком с той же самой плотностью. Оцените это отношение (по крайней мере) для $\alpha t/L^2 = 0{,}05$; 0,1; 0,15; 0,5; 1,0 и 5,0. Постройте графики в полулогарифмическом масштабе.

b. Повторите п. a для изменения температуры при $x = L$ в обоих телах.

c. Повторите п. a для изменения температуры при $x = L/2$ в обоих телах.

d. Сравните результаты для различных случаев, в особенности при малых значениях $\alpha t/L^2$.

e. При одних и тех же аддитивных погрешностях измерений в обоих телах для каких значений $x$ и $t$ метод обратной задачи дает одни и те же результаты? А различные результаты?

1.21. Покажите, что для задачи

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \alpha=\text{const},$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=q_1(t)+q_2(t), \quad k=\text{const},$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=0,$$

$$T(x, 0)=F(x)$$

решение $T(x, t)$ складывается из решения трех задач, т. е.

$$T(x, t)=T_0(x, t)+T_1(x, t)+T_2(x, t),$$

где указанные три задачи записываются следующим образом:

$$\alpha \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}=\frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i=0, 1, 2,$$

задача 0:

$$\frac{\partial T_0}{\partial x}=0 \text{ при } x=0 \text{ и при } x=L$$

$$T_0(x, 0)=F(x),$$

задачи 1 и 2:

$$-k \left.\frac{\partial T_i}{\partial x}\right|_{x=0}=q_i(t),$$

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial x}\right|_{x=L}=0,$$

$$T_i(x, 0)=0.$$

При этом $i = 1$ для задачи 1 и $i = 2$ для задачи 2.

1.22. Для проверки уравнения (1.6.25) используйте соотношение в виде суммы из задачи 1.21. Чему равны $q_1(t)$ и $q_2(t)$ для уравнения (1.6.25)?

1.23. Нарисуйте трехмерный график $q(y, t)$ в зависимости от $y$ (горизонтальная ось) и $t$ (проведена под углом 30° к оси $y$) для значений

$$q_{11}=3, \quad q_{12}=5, \quad q_{13}=7,$$

$$q_{21}=2, \quad q_{22}=3, \quad q_{23}=4,$$

$$q_{31}=1, \quad q_{32}=2, \quad q_{33}=3.$$

1.24. Выведите уравнение (1.6.44).

1.25. Выведите уравнение (1.6.45).

1.26. Решение для температуры в бесконечном теле определяется выражением

$$T=T_0+\frac{T_1-T_0}{2}\left[\operatorname{erf} \frac{a-x}{2(\alpha t)^{1/2}}+\operatorname{erf} \frac{a+x}{2(\alpha t)^{1/2}}\right],$$

где $-\infty < x < \infty$, а начальное распределение температуры равно [51]

$$T=T_0, \quad |x|>a,$$

$$T=T_1, \quad |x|<a.$$

Используя принцип суперпозиции, получите выражение для температуры в полубесконечном теле при следующем начальном распределении температуры:

$$T=T_1, \quad |x|<a,$$

$$T=T_2, \quad a<x<3a,$$

$$T=T_0 \text{ при остальных } x.$$

Постройте графики коэффициентов чувствительности

$$X_1=\frac{\partial T(0,t)}{\partial T_1}, \qquad X_2=\frac{\partial T(0,t)}{\partial T_2}$$

в зависимости от $t$ в диапазоне значений $\alpha t/a^2$ от 0 до 5 [51]. Обратная по времени задача теплопроводности состоит в оценивании начального распределения температуры по ее измерениям в более поздние моменты времени. Прокомментируйте соответствующие трудности восстановления $T_1$ и $T_2$ по результатам измерений температуры в точках $x = 0$ и $x = 2a$ для двух случаев измерений, когда $\alpha t/a^2$ равно a) 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0 и b) 2, 4, 6, 8, 10.

1.27. a. Для уравнений (1.6.4), (1.6.5), (1.6.7) и граничного условия конвективного теплообмена при $x = L$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_L=h[T(L,t)-T_\infty(t)],$$

где $h$ = const, выведите дифференциальное уравнение и граничные условия для коэффициента чувствительности, который определен соотношением (1.6.8).

b. Установите связь (устно) между результатами п. a и задачей с единичным ступенчатым увеличением плотности теплового потока на поверхности.

c. Для случая $x = L$, $t_{M-1} = 0$, $t < t_M$, $k(x)$ = const, $c(x)$ = const, $hL/k = 1$ найдите числовые значения $kX_M/L$ при $t^+ = 0{,}25$; 0,5 и 1. Сравните полученные значения с приведенными для $x/L$ в табл. 1.1.

# Глава 2
# Точные решения обратной задачи теплопроводности

## 2.1. Введение

Точные решения обратной задачи теплопроводности очень важны, так как они 1) дают выражения для плотности теплового потока относительно измеренной температуры в замкнутой форме, 2) позволяют разобраться в особенностях обратных задач и 3) дают эталон сравнения для приближенных методов [1]. Обратные задачи теплопроводности можно разделить на стационарные и нестационарные. Стационарная обратная задача несколько проще, так как единственной необходимой в этом случае теплофизической характеристикой является коэффициент теплопроводности $k$, а изменение температуры по времени не учитывается. Нестационарные обратные задачи теплопроводности можно разделить на две категории: с сосредоточенной и распределенной теплоемкостью. В нестационарных задачах требуется много дискретных измерений температуры. Для сосредоточенной теплоемкости важной теплофизической характеристикой является объемная теплоемкость $\rho c$. В случае распределенной теплоемкости кроме объемной теплоемкости необходимо еще знать коэффициент теплопроводности $k$. В гл. 2 предполагается, что тепловые свойства не зависят от температуры. Такое допущение является одним из недостатков точных решений.

В разд. 2.2 рассматриваются одномерные стационарные задачи, в которых температура известна в двух или более точках тела. В разд. 2.3 анализируется случай сосредоточенной теплоемкости и дается несколько численных аппроксимаций точного решения. В разд. 2.4 рассматривается плоское полубесконечное тело, для которого известно изменение температуры поверхности по времени. Предоставлен приближенный метод вычисления результирующего интеграла и приводится пример конкретной задачи. В разд. 2.5 получено точное решение для плоского тела при расположении датчика температуры на произвольном расстоянии $E$ от нагреваемой поверхности. Это решение требует существования производных всех порядков как для экспериментальных значений температуры $Y(t)$, так и для плотности теплового потока $q_E$, проходящего через сечение на расстоянии $E$. Представлены также результаты для сплошных сфер и цилиндров.

## 2.2. Решение стационарной задачи

Одно из наиболее простых решений обратной задачи соответствует случаю стационарного одномерного переноса тепла в плоском теле с постоянными теплофи-

[1] Точные решения имеют весьма ограниченную область применения, и, за немногими исключениями, их нельзя непосредственно использовать в силу неограниченности соответствующих операторов, поэтому требуется их регуляризация. Для оценки качества приближенного решения обычно достаточно иметь аналитическое или приемлемое численное решение соответствующей прямой задачи, полученное для некоторой эталонной функции граничного условия.— *Прим. ред.*

зическими свойствами. В этом случае закон Фурье

$$q = -k\frac{dT}{dx} \tag{2.2.1}$$

представляет собой дифференциальное уравнение, которое можно непосредственно проинтегрировать. Плотность поступающего в тело теплового потока $q$ одинакова для любого значения координаты $x$. Предположим, что стационарное значение температуры известно в двух точках тела, расположенных на расстоянии $x_1$ и $x_2$ от нагреваемой поверхности, как показано на рис. 2.1. Проинтегрировав уравненне (2.2.1) в пределах от $x_1$ до $x_2$ и разрешив относнтельно $q$, получим

$$\hat{q} = k\frac{(Y_1 - Y_2)}{x_2 - x_1}\ , \tag{2.2.2}$$

где $Y_i$ — экспериментально измеренное значение температуры на расстоянии $x_i$. Уравнение (2.2.2) показывает, что для определенння плотностн теплового потока должны быть известны экспериментальные значения температуры по крайней мере в двух точках и их соответствующие координаты, а также коэффициент теплопроводности. Заметим, что плотиость теплового потока линейно зависит от экспернментальных значений температуры $Y_i$. Эта линейность всегда имеет место в обратных задачах прн постоянных теплофизнческих характеристиках.

Итак, для определения плотностн стационарного теплового потока необходнмы по крайней мере два измерения температуры. Предположим, что в плоском теле расположено $J$ датчнков температуры н процесс теплопереноса является одномерным. Несмотря на то что имеется $J$ датчиков, число координат установки датчиков может быть меньше $J$ из-за размещения по нескольку датчиков на одном и том же расстоянии от поверхности. Плотность стационарного теплового потока можно рассчитать, минимизируя сумму квадратов невязок между расчетными и экспериментально полученными значениями температуры. Для придания решению общего характера предположим, что некоторые датчнкн более точны, чем другие, и учтем это путем введення весовых коэффицнентов $w_i$. Критерий в методе взвешенных наименьших квадратов определяется следующнм образом:

$$S = \sum_{j=1}^{J} w_j^2 (Y_j - T_j)^2 \cdot \tag{2.2.3}$$

Согласно закону Фурье, профиль температуры должен быть линейным, т. е.

$$T(x) = ax + b = -q\frac{x}{k} + T_0 \cdot \tag{2.2.4}$$

В уравнении (2.2.4) прнсутствуют два параметра, $q$ и $T_0$, которые определяются из условия минимума отклонения $S$. ($T_0$ — температура при $x = 0$). Продиффе-

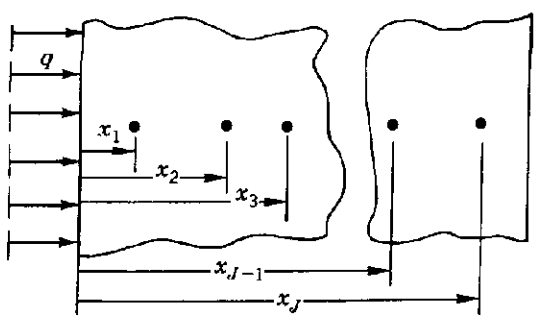



Рис. 2.1. Измерения стационарных значений температур в $J$ точках.

ренцировав выражение (2.2.3) по этим двум нензвестным параметрам, получим:

$$\frac{\partial S}{\partial T_0}=-2\sum_{i=1}^{J} w_j^2(Y_j-T_j)\frac{\partial T_j}{\partial T_0}=0 \ , \tag{2.2.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q}=-2\sum_{j=1}^{J} w_j^2(Y_j-T_j)\frac{\partial T_j}{\partial q}=0 \ . \tag{2.2.6}$$

В уравнениях (2.2.5) и (2.2.6) содержатся два коэффициента чувствительности, которые можно определить из соотношения (2.2.4):

$$\frac{\partial T_j}{\partial T_0}=1, \quad \frac{\partial T_j}{\partial q}=-\frac{x_j}{k} \ . \tag{2.2.7}$$

Подставляя (2.2.4) и (2.2.7) в (2.2.5), (2.2.6) и заменяя $q$ на ее оценку $\hat{q}$, после преобразований получим два следующих нормальных уравнения:

$$T_0\sum_{j=1}^{J} w_j^2-\frac{\hat{q}}{k}\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_j=\sum_{j=1}^{J} w_j^2Y_j \ , \tag{2.2.8}$$

$$\frac{-T_0}{k}\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_j+\frac{\hat{q}}{k^2}\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_j^2=\frac{-1}{k}\sum_{j=1}^{J} w_j^2Y_jx_j \ . \tag{2.2.9}$$

Решив эту систему уравнений относительно неизвестной плотности теплового потока $\hat{q}$, получим

$$\hat{q}=-k\frac{\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_jY_j\right)-\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2Y_j\right)}{\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{J} w_j^2x_j\right)^2} \ . \tag{2.2.10}$$

Можно показать, что при $J = 2$ и $w_1$, $w_2 \neq 1$ выражение (2.2.10) сводится к равенству (2.2.2). Вновь заметим, что нензвестная плотность теплового потока линейно зависит от результатов измерений температуры. Выражение (2.2.10) можно также получить следующим образом: 1) определяя две константы, $a$ и $b$, в уравнении (2.2.4) подгонкой кривой к эксперимментальным значениям температуры по методу взвешенных наименьших квадратов и 2) дифференцируя эту зависимость для определения плотностн теплового потока (см. задачу 2.1). Однако подход, основанный на применении коэффициентов чувствительности, больше соответствует направленности данной книги. Результаты, подобные выражению (2.2.10), можно также получить и для тел цилиндрической и сферической формы (см. задачи 2.2 и 2.3).

## 2.3. Решения нестационарных задач для тел с малым внутренним тепловым сопротивлением

### 2.3.1. Точное решение

Для тел, коэффицнент теплопроводности которых очень велнк и(или) характерный масштаб длины $L$ (= объем/площадь поверхности) мал, внутренним термическим сопротивлением можно пренебречь. Такие тела обычно называют телами

с сосредоточенной теплоемкостью. Энергетический баланс для тела пронзвольной формы, имеющего площадь поверхности $A$, объем $V$ н постоянную температуру $T$, имеет вид

$$q(t)=\rho c\frac{V}{A}\frac{dT}{dt}\cdot \tag{2.3.1}$$

Заметим, что $q(t)$ завнсит от скорости нзменения температуры в момент времени $t$ и не зависит от температуры ни в прошедшие, ни в будущие моменты времени. Если плотность теплового потока нзвестна, то измененне температуры тела можно рассчнтать, проинтегрировав уравнение (2.3.1).

$$T(t)=T_0+\int_0^t q(\lambda)\frac{A}{\rho cV}\,d\lambda\cdot \tag{2.3.2}$$

Заметим, что при любом значении времени температура завнсит только от предысторнн нагрева н совсем не завнсит от последующих значений $q(t)$. Приборы для измерения плотности теплового потока, прнцип действия которых основан на допущенни о малости внутреннего теплового сопротивления, часто называют калориметрическими зондами.

### 2.3.2. Приближенные решения

Хотя уравнение (2.3.2) н дает точное выражение для плотности теплового потока, его практическое применение обычно ограничено в связн с тем, что нзмеренные значения температуры известны только в дискретные моменты временн. Поэтому необходимо использовать некоторые разностные аппроксимации производной $dT/dt$. В последующем анализе измеренные температуры $Y_i$ считаются равномерно распределенными по времени с шагом $\Delta t$. Обычно используются следующие три двухточечные разностные аппроксимации $dT/dt$:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M}=\frac{Y_M-Y_{M-1}}{\Delta t}+O(\Delta t).\quad\text{Левая разность (ЛР).} \tag{2.3.3}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M}=\frac{Y_{M+1}-Y_M}{\Delta t}+O(\Delta t).\quad\text{Правая разность (ПР).} \tag{2.3.4}$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M}=\frac{Y_{M+1}-Y_{M-1}}{2\Delta t}+O(\Delta t^2).\text{Центральная разность (ЦР).} \tag{2.3.5}$$

Символ $O(\cdot)$ означает порядок велнчины погрешности вследствне отбрасывания членов в ряде Тейлора. Заметим, что аппроксимация центральными разностямн обеспечивает более высокий порядок и, таким образом, для малых $\Delta t$ имеет меньшую погрешность аппроксимацин, чем аппроксимации левымн и правыми разностями. Оценку погрешности в двух последних случаях можно получить, проводя прямую линию через две точки, а в первом — с помощью параболы, проходящей через три точки. Результаты более высокого порядка можно получить, увеличивая число точек и аппроксимируя нх полнномом. Например, полином четвертого порядка, аппроксимирующий функцию по пяти равноотстоящим точкам, дает

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M} = \frac{Y_{M-2} - 8Y_{M-1} + 8Y_{M+1} - Y_{M+2}}{12\Delta t} + O(\Delta t^4) . \tag{2.3.6}$$

Так как с увеличением порядка полинома погрешность аппроксимации становится меньше, можно предположнть, что пятиточечная аппроксимация предпочтительнее трехточечной (ЦР). Это было бы верно, еслн бы данные не содержали погрешностей. Однако далее будет показано, что погрешности результатов измерения температуры играют определяющую роль при анализе точности вычисления плотностн теплового потока. Вместо того чтобы требовать точной аппроксимацин полиномом четвертого порядка в случае пяти точек, можно по методу наименьших квадратов аппроксимировать этн пять точек прямой лннией и оценить ее наклон в центральной точке. Эту аппроксимацию можно получить из соотношения (2.2.10), выбрав все весовые коэффициенты равными единице и рассмотрев пять равноотстоящих точек: $x_i = -2\Delta t,\ -\Delta t,\ 0,\ \Delta t,\ 2\Delta t$. В результате получим

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M} = \frac{-2Y_{M-2} - Y_{M-1} + Y_{M+1} + 2Y_{M+2}}{10\Delta t} . \tag{2.3.7}$$

Заметнм, что при использовании любой из рассмотренных аппроксимаций пронзводной в сочетании с точным решением уравнения (2.3.1) плотность теплового потока получается линейной относительно нзмеренных значенний температуры при условни, что объемная теплоемкость $\rho c$ постоянна. Все эти результаты нмеют характер цифрового фильтра.

### 2.3.3. Погрешности измерения температуры и приближенные решения

Прн измерении температуры неизбежны погрешности, и эти погрешности влняют на вычнсленное значение плотности теплового потока. В данной книге нспользуется удобное для анализа предположение о том, что погрешности измерения температуры являются аддитивными (разд. 1.4.2). Это позволяет записать измеренную температуру $Y_i$ в виде суммы истинной температуры $T_i$ и соответствующей погрешности $\delta Y_i$:

$$Y_i = T_i + \delta Y_i . \tag{2.3.8}$$

Определим погрешность в аппроксимацнн производной, обусловленную погрешностями измерения температуры. Используя левую разностную аппроксимацию, получим

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M} \approx \frac{T_M - T_{M-1}}{\Delta t} + \frac{\delta Y_M - \delta Y_{M-1}}{\Delta t} . \tag{2.3.9}$$

Влиянне погрешностей измерения температуры проявляется в члене $(\delta Y_M - \delta Y_{M-1})/\Delta t$. В линейных задачах с адднтивнымн погрешностями форма члена, содержащего погрешность, такая же, как и сама разностная аппроксимация. Подобные результаты можно записать и для других рассмотренных разностных аппроксимаций.

Важно понять, каким образом одиночная погрешность нзмерения температуры влияет на значение плотности теплового потока, вычисленное в тот же момент временн, в который делается погрешность, и каким образом эта

погрешность влияет на любые последующие значения плотности теплового потока. Предположим, что используется разностная аппроксимация левыми разностями и все погрешности измерений температуры равны нулю, кроме $\delta Y_M$. Из уравнений (2.3.1) и (2.3.9) следует

$$q(t_M) = q_M = \rho c \frac{V}{A}\left(\frac{T_M - T_{M-1}}{\Delta t} + \frac{\delta Y_M}{\Delta t}\right), \tag{2.3.10}$$

$$q_{M+1} = \rho c \frac{V}{A}\left(\frac{T_{M+1} - T_M}{\Delta t} - \frac{\delta Y_M}{\Delta t}\right), \tag{2.3.11}$$

$$q_{M+2} = \rho c \frac{V}{A}\left(\frac{T_{M+2} - T_{M+1}}{\Delta t}\right). \tag{2.3.12}$$

При использовании левой разности одиночная погрешность $\delta Y_M$ влияет только на вычисленные значения $q_M$ и $q_{M+1}$, не оказывая влияния на остальные расчетные значения $q$. При использовании правой разности одиночная погрешность $\delta Y_M$ влияет только на $q_{M-1}$ и $q_M$. На первый взгляд исследование погрешности, возникающей только в один момент времени, может показаться нецелесообразным, поскольку все измерения температуры имеют погрешности. Однако в линейных задачах при постоянных свойствах влияние всех погрешностей температуры может анализироваться с помощью суперпозиции. Если все погрешности $\delta Y_i$ одинаковы, то ошибки в плотности теплового потока не возникнет, так как на каждом шаге по времени погрешности будут взаимно уничтожаться. Это следует из того, что наклон кривой температуры не меняется, если все измеренные ее значения сдвигаются на одну и ту же величину. В общем виде все разностные аппроксимации можно записать следующим образом:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t_M} \approx \sum_{i=1}^{n} a_i Y_{M-j+i}, \tag{2.3.13}$$

где $n$ — число точек, используемых в разностной аппроксимации. Выражение (2.3.13) позволяет в компактной форме записать соотношения (2.3.3)—(2.3.7).

*Таблица 2.1.* Среднеквадратичное отклонение погрешности аппроксимации производной для погрешностей измерения температуры, которые независимы, аддитивны и имеют постоянную дисперсию $\sigma^2$

| Разностная аппроксимация | Номер уравнения | Среднеквадратичное отклонение погрешности аппроксимации производной |
|---|---|---|
| Левая | (2.3.3) | $\sqrt{2}\sigma/\Delta t = 1{,}414\sigma/\Delta t$ |
| Правая | (2.3.4) | $\sqrt{2}\sigma/\Delta t = 1{,}414\sigma/\Delta t$ |
| Центральная | (2.3.5) | $\sqrt{2}\sigma/(2\Delta t) = 0{,}707\sigma/\Delta t$ |
| Пятиточечная аппроксимация полиномом четвертого порядка | (2.3.6) | $0{,}95\sigma/\Delta t$ |
| Метод наименьших квадратов, пятиточечная аппроксимация прямой линией | (2.3.7) | $\sigma/(\sqrt{10}\,\Delta t) = 0{,}316\sigma/\Delta t$ |

*Таблица 2.2.* Измеренные значения температуры для примера 2.1

| Номер наблюдения | Время, с | Температура заготовки $Y_i$, К |
|---|---|---|
| 9 | 768 | 361,69 |
| 10 | 864 | 357,69 |
| 11 | 960 | 353,91 |
| 12 | 1056 | 350,45 |
| 13 | 1152 | 346,91 |
| 14 | 1248 | 344,05 |
| 15 | 1344 | 341,44 |
| 16 | 1440 | 338,99 |
| 17 | 1536 | 336,71 |

Для всех разностных аппроксимаций, рассмотренных в данном разделе, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, и именно этим свойством объясняется тот факт, что равномерный сдвиг всех $Y_i$ не оказывает влияния на результаты вычисления наклона.

При определенных статистических допущениях относительно погрешностей измерения температуры становится возможным рассчитать среднеквадратичное отклонение погрешности разностной аппроксимации. Например, если погрешности независимы, аддитивны и обладают постоянной дисперсией $\sigma^2$, то, используя

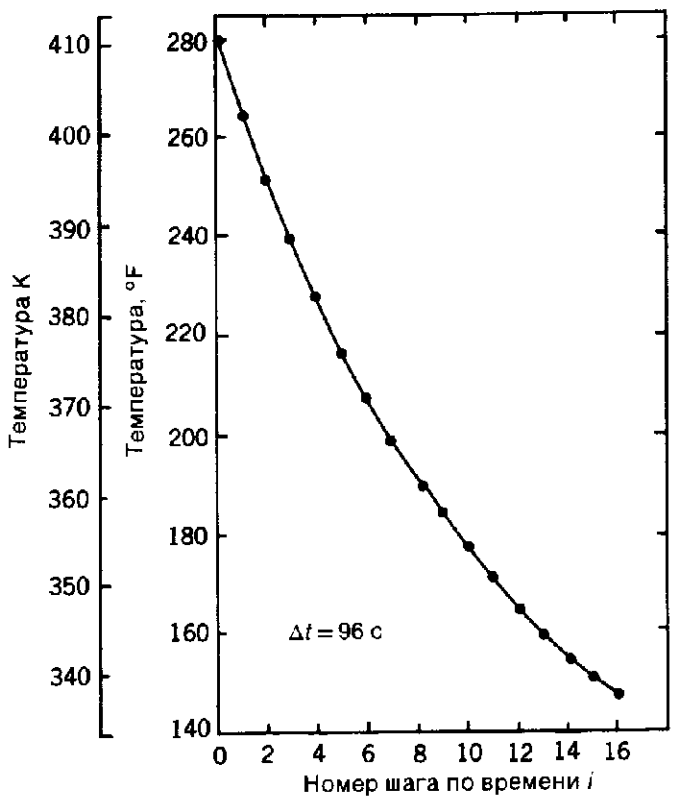



Рис. 2.2. Температура охлаждаемой заготовки (пример 2.1).

*Таблица 2.3.* Среднне разности температур ($\Delta\overline{T}$) для примера 2.1. $q_M = (\rho cV/A\Delta t)\Delta\overline{T}$ ($\Delta T$ — в кельвинах)

| $M$ | $Y_M - Y_{M-1}$ | $Y_{M+1} - Y_M$ | $\frac{1}{2}(Y_{M+1} - Y_M)$ | Пятнточечная аппроксимация полиномом четвертого порядка | Метод иаимеиьших квадратов, пятнточечная аппроксимацня прямой линией |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | — | − 4,00 | — | — | — |
| 10 | − 4,00 | − 3,78 | − 3,89 | — | — |
| 11 | − 3,78 | − 3,46 | − 3,62 | − 3,59 | − 3,68 |
| 12 | − 3,46 | − 3,54 | − 3,50 | − 3,52 | − 3,42 |
| 13 | − 3,54 | − 2,80 | − 3,20 | − 3,22 | − 3,13 |
| 14 | − 2,80 | − 2,61 | − 2,74 | − 2,69 | − 2,84 |
| 15 | − 2,61 | − 2,45 | − 2,53 | − 2,52 | − 2,54 |
| 16 | − 2,45 | − 2,28 | − 2,37 | — | — |
| 17 | − 2,28 | — | — | — | — |

методы Бека и Арнольда [1], можно получить результаты, приведенные в табл. 2.1 (см. также разд. 1.4). Эти теоретические результаты говорят в пользу метода нанменьшнх квадратов, так как он дает наименьшее среднеквадратичное отклонение оценки плотности теплового потока.

*Пример 2.1.* Сплошная медная заготовка длиной 46,2 мм и диаметром 25,4 мм нагревается в печи и затем выннмается. На ней размещены две термопары. Некоторые температуры $Y_i$, измеренные с помощью одиой из термопар, приведены в табл. 2.2 в завнсимости от времени. (См.

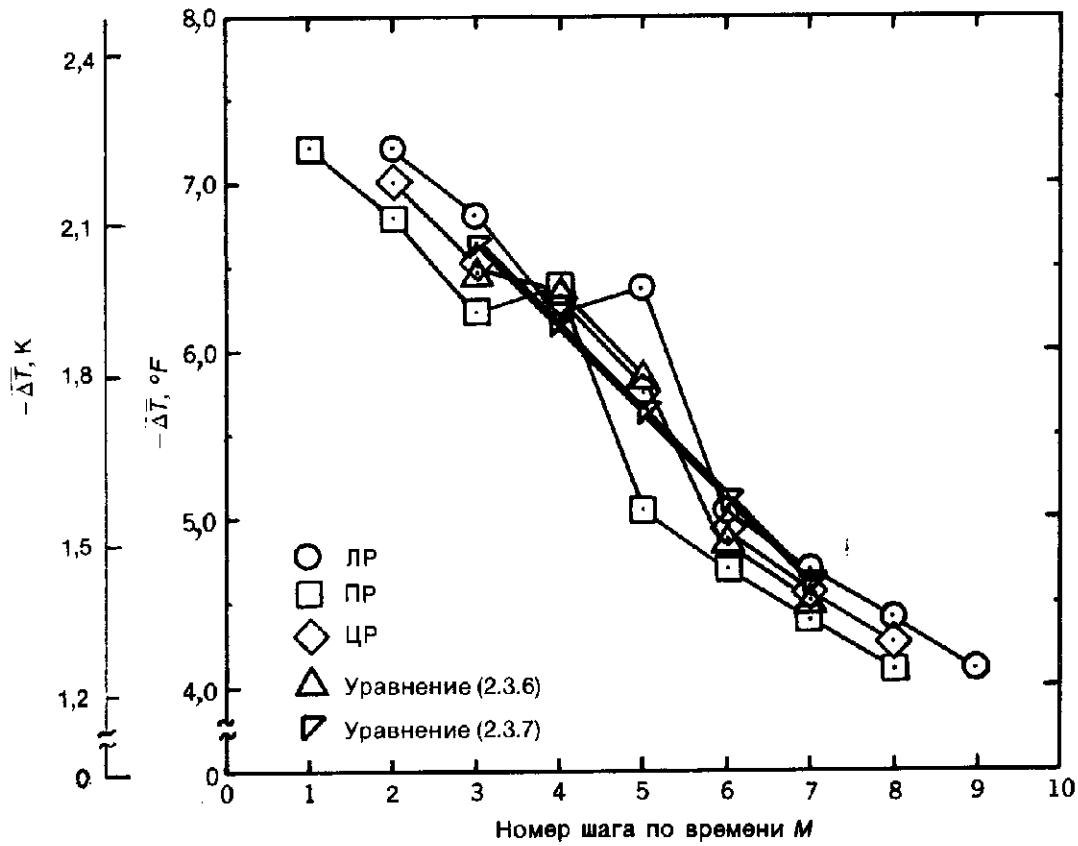



Рис. 2.3. Средняя разность температур ($\Delta\overline{T}$) для примера 2.1.

также график изменения $Y_i$ по времени на рис. 2.2) В данном опыте $\rho cV/(A\Delta t)$ = 200 Вт/(м$^2$ · К). Сравним пять методов, представленных в этом разделе, для расчета производной $dT/dt$. Приведенные данные взяты из реального эксперимента, описанного в работе [1].

*Решение.* Результаты примера 2.1 объединены в табл. 2.3 и на рис. 2.3. Из этого примера можно сделать несколько выводов.

1. Как левая, так и правая разности дают одинаковые числовые результаты, которые, однако, смещены по времени на $\Delta t$.

2. Для всех методов аппроксимации, кроме метода левой разности, используются измеренные значения температуры в моменты времени, следующие за расчетным временем. Будем называть этот прием использованием «последующей информации (о температуре)».

3. Все методы, кроме методов правой и левой разностей, демонстрируют непрерывное убывание наклона по времени. Из физического смысла задачи следует, что величина средней разности температур должна непрерывно уменьшаться по времени.

4. Используя большее количество данных (дополнительные измерения температуры) для расчета плотности теплового потока в данный момент времени, некоторые значения нельзя вычислить как для предыдущих, так и последующих моментов времени.

5. Результат, полученный по методу наименьших квадратов при аппроксимации прямой линией, представляется наиболее удачным, так как наклон непрерывно и плавно убывает по времени.

## 2.4. Вычисление плотности теплового потока по измеренной зависимости температуры поверхности от времени

### 2.4.1. Точные результаты при непрерывном изменении температуры поверхности по времени

Для случая, когда известна температура поверхности тела $Y(t)$ в виде непрерывной функции времени, существует несколько относительно простых точных решений, определяющих изменение по времени плотности теплового потока. Задание температуры поверхности упрощает обратную задачу, так как известную температуру поверхности можно рассматривать как граничное условие в традиционном смысле. Один из способов решения этой задачи состоит в вычислении распределения температур внутри тела и последующем вычислении градиента температуры на поверхности для определения плотности теплового потока. Если тепловые свойства считаются постоянными, то для расчета поля температур удобно использовать теорему Дюамеля. Решение для температуры, полученное с помощью этой теоремы, имеет вид [2—4]

$$T(x, t) = T_0 + \int_{t_0}^{t} u(x, t-\lambda)\frac{dY(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda + \sum_{i=0}^{N-1} u(x, t-\lambda_i)\Delta Y_i\,, \qquad (2.4.1)$$

где $u(x, t)$ — функция изменения температуры тела при начальной температуре, равной нулю, и единичном ступенчатом изменении температуры поверхности, $Y(t)$ — изменение по времени температуры поверхности, $T_0$ — начальная постоянная (при $t \leqslant t_0$) температура. В соотношении (2.4.1) интеграл учитывает непрерывную зависимость по времени температуры поверхности, а член со знаком суммы учитывает $N$ дискретных ступенчатых изменений температуры поверхности, происходящих в момент времени $\lambda_i = i\Delta t$. Теорему Дюамеля можно полу-

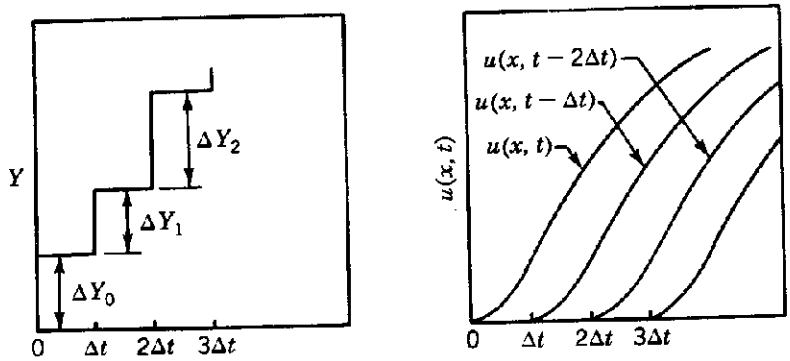



Рис. 2.4. Изменение температуры согласно теореме Дюамеля.

нить, рассматривая дискретный аналог соотношения (2.4.1). Если происходит несколько ступенчатых изменений температуры поверхности, как это показано на рис. 2.4, то температура в точке с координатой $x$ в момент времени $t$ при $2\Delta t < t < 3\Delta t$ определяется выражением

$$T(x, t) = T_0 + u(x, t)\Delta Y_0 + u(x, t-\Delta t)\Delta Y_1 + u(x, t-2\Delta t)\Delta Y_2 \ . \qquad (2.4.2)$$

Величина фактического ступенчатого изменения температуры поверхности умножается на величину реакции $u(x, t)$, вызванной единичным скачком в температуре поверхности. Единичная ступенчатая реакция $u$ должна быть смещена по времени, чтобы соответствовать моменту времени, в который фактически происходит скачок температуры. Дополнительную информацию о теореме Дюамеля можно найти в работах [2—4], а также в гл. 3 данной книги.

Если нас интересует только плотность теплового потока, то рассчитывать все поле температур нет необходимости. Плотность теплового потока на «активной» (нагреваемой) поверхности можно определить из закона Фурье. Дифференцируя соотношение (2.4.1) [при непрерывной в момент времени $t$ зависимости $Y(t)$], получим

$$q(t) = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = -k\int_{t_0}^{t}\left.\frac{\partial u(x, t-\lambda)}{\partial x}\right|_{x=0} Y'(\lambda)d\lambda \ , \qquad (2.4.3)$$

где $Y'(\lambda) \equiv dY/d\lambda$. В рамках принятых в теореме Дюамеля ограничений выражение (2.4.3) является точным. Для его применения необходимо знать производную единичной ступенчатой реакции. Простейший вид эта функция имеет для полубесконечного плоского твердого тела

$$u(x, t) = 1\text{-erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{-1}{\sqrt{\pi\alpha t}} \ . \qquad (2.4.4)$$

Другим простым случаем является бесконечная пластина толщиной $L$, у которой ступенчатое изменение температуры поверхности происходит при $x = 0$, а «неактивная» поверхность теплоизолирована

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}e^{-\alpha\gamma_n^2 t/L^2}\sin\frac{\gamma_n x}{L}, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= -\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\alpha\gamma_n t/L^2}, \\ \gamma_n &= (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} . \qquad (2.4.5)$$

В литературе имеются и другие решения для единичной ступенчатой реакции температуры тел различной геометрической формы и(или) с различными граничными условиями на «неактивной» поверхности. В дальнейшем анализе ограничимся рассмотрением полубесконечного плоского твердого тела. В этом случае соотношение (2.4.3) принимает вид

$$q(t)=\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{Y'(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\,d\lambda= \tag{2.4.6}$$

$$=\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}[Y(t)-Y(t_0)]+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{Y(t)-Y(\lambda)}{(t-\lambda)^{3/2}}\,d\lambda\right\}. \tag{2.4.7}$$

Выражение (2.4.7) получается путем интегрирования по частям выражения (2.4.6). Заметим, что обе эти формы при $\lambda = t$ имеют сингулярность. При использовании только численного метода эта сингулярность может вызывать определенные затруднения. Поэтому рассмотрим процедуру аналитического интегрирования. Напомним, что выражения (2.4.6) и (2.4.7) получены в предположении постоянной температуры $Y(t_0)$ при $t \leqslant t_0$.

Для учета сингулярности можно использовать квадратурную формулу Гаусса [5], однако этот способ лишил бы экспериментатора возможности выбора моментов времени регистрации температуры поверхности. В следующем разделе рассматривается комбинированная аналитико-численная процедура.

### 2.4.2. Приближенные результаты для полубесконечного тела при дискретных измерениях температуры поверхности по времени

Предположим, что температура поверхности $Y_j$ измеряется лишь дискретно в моменты времени $t_j$, а в промежутке между этими моментами изменение температуры происходит по линейному закону. При сделанных допущениях выражение (2.4.6) можно проинтегрировать аналитически. В результате получим

$$\hat{q}(t_M)=\hat{q}_M=2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi}}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{Y_i-Y_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)(\sqrt{t_M-t_{i-1}}-\sqrt{t_M-t_i})= \tag{2.4.8a}$$

$$=2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi}}\sum_{i=1}^{M}\frac{Y_i-Y_{i-1}}{\sqrt{t_M-t_i}+\sqrt{t_M-t_{i-1}}}, \tag{2.4.8b}$$

где символ $\hat{}$ означает оценку искомой величины.

Важной характеристикой, определяющей теплофизические свойства материала, является комплекс $(k\rho c)^{1/2}$. Значения этого параметра приведены в табл. 2.4. При заданной величине плотности теплового потока, поступающего в полубесконечное тело, в случае малых значений $k\rho c$ температура поверхности изменяется более интенсивно, чем в случае больших значений $k\rho c$. С физической точки зрения это происходит потому, что тело с большим значением $k$ обладает способностью быстрее передавать тепло от поверхности в глубь тела. Заметим, что если комплекс $(k\rho c)^{1/2}$ не зависит от температуры, то плотность теплового потока линейна относительно измеренных значений температуры.

*Таблица 2.4.* Теплофизическая характеристика $\sqrt{k\rho c}$

| Материал | Дж/(м$^2$ · К·$\sqrt{\text{с}}$) |
|---|---|
| Медь чистая | 1150 |
| Серебро чистое | 1000 |
| Алюминий чистый | 703 |
| Сталь малоуглеродистая | 442 |
| Сталь, 20% Cr | 282 |
| Сталь, 40% Ni | 198 |
| Стекло листовое | 42 |

*Пример 2.2.* Чтобы проиллюстрировать применение соотношений (2.4.8), была выбрана задача, для которой имеется точное решение. Рассмотрим плотность теплового потока, изменяющегося во времени по параболическому закону:

$$\frac{q}{q_{\max}} = 4\frac{t}{t_{\max}}\left(1-\frac{t}{t_{\max}}\right). \tag{2.4.9}$$

Используя аналитическое решение Карслоу и Егера [2] для $q \sim t^n$ и принцип суперпозиции, получим выражение для изменения температуры поверхности (см. также задачу 1.4):

$$T_s(t)-T_0 = \frac{4q_{\max}}{\sqrt{\frac{k\rho c}{t_{\max}}}}\left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)}\left(\frac{t}{t_{\max}}\right)^{3/2} - \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{t}{t_{\max}}\right)^{5/2}\right], \tag{2.4.10}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция [$\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\Gamma(5/2) = 3\pi^{1/2}/4$ и $\Gamma(7/2) = 15\pi^{1/2}/8$]. Результаты, полученные с помощью приведенного выше аналитического решения, представлены на рис. 2.5 для следующих параметров:

$q_{\max}$ = 136280 кВт/(м$^2$ · с), $T_0$ = 300 К,

$k\rho c$ = 1372,7(кВт/(м$^2$ · К))$^2$ · с (медь при повышенной температуре).

Эти условия характерны для высокотемпературных газодинамических установок с электродуговым подогревом газа и возникают при перемещении медного калориметра поперек газовой струи. Точные значения температуры, вычисленные с применением выражения (2.4.10) при величине шага по времени $\Delta t$ = 0,001 с, использовались затем для решения обратной задачи с помощью соотношений (2.4.8). Полученные результаты представлены на рис. 2.6. В начальные моменты времени погрешность вычисления плотности теплового потока превышает −15%. Начиная с момента времени 0,01 с погрешность составляет приблизительно −2% и остается примерно постоянной до момента времени около 0,065 с. По мере приближения к конечному значению времени 0,07 с погрешности возрастают и становятся положительными. Это происходит потому, что при $t$ = 0,07 с плотность теплового потока стремится к нулю.

Хотя результаты рассмотренного примера весьма убедительны, использование точных значений температуры не является достаточно надежным способом проверки любого метода решения обратной задачи. Чтобы смоделировать влияние на вычисляемые значения плотности теплового потока погрешностей измерения температуры, к рассчитанным по формуле (2.4.10) температурам были добавлены случайные погрешности

$$Y_m = T_s(t_m) + \theta \cdot \Delta T,$$

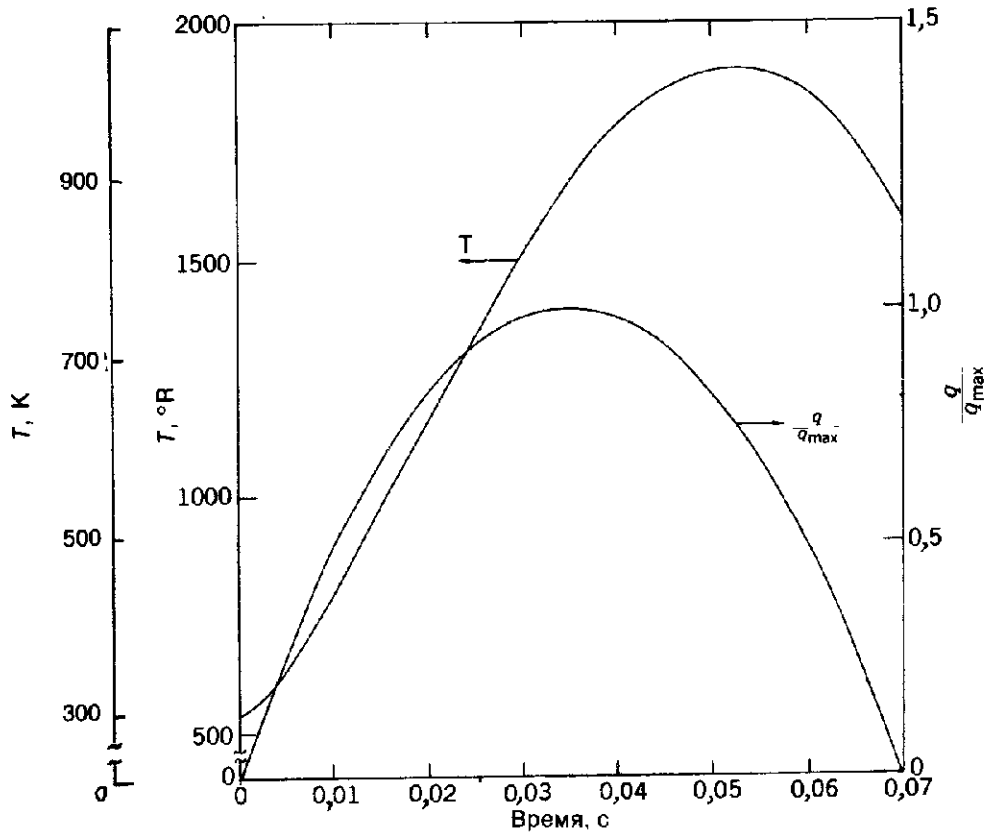



Рис. 2.5. Параболический закон изменения плотности теплового потока по времени и соответствующее изменение температуры поверхности.

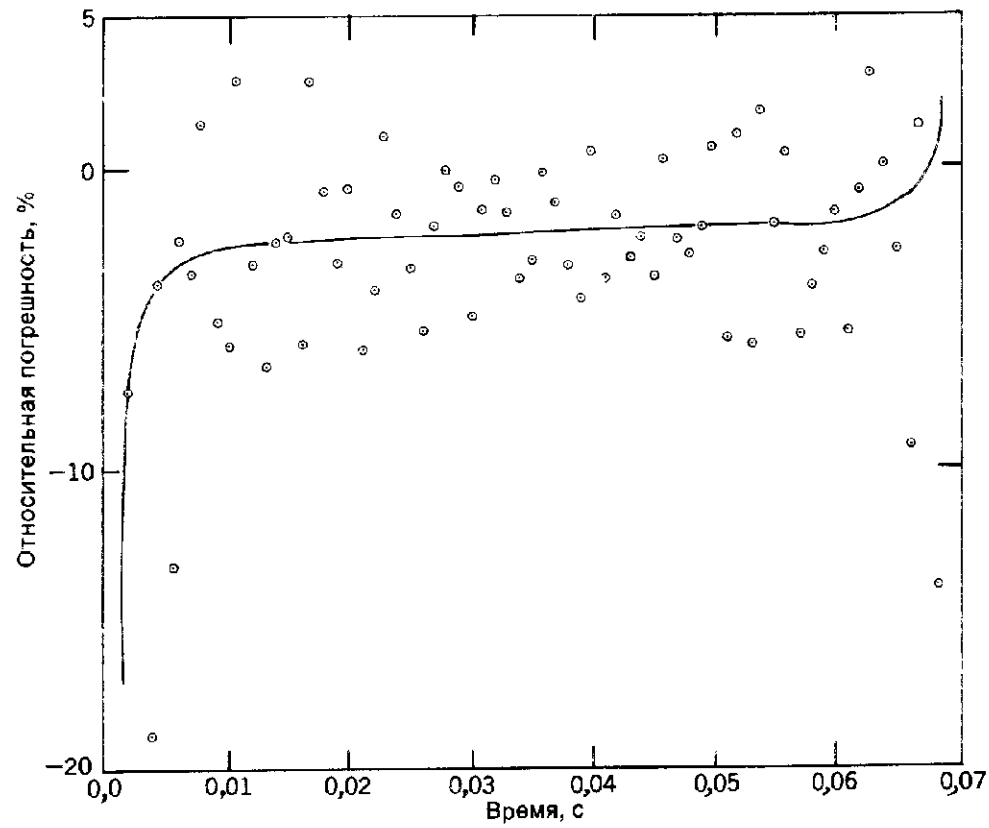



Рис. 2.6. Относительная погрешность определения плотности теплового потока при использовании точных и приближенных значений измеренных температур; — точные значения измеренной температуры: ⊙ приближенные значения измеренной температуры (погрешность 2,8 K).

где $\theta$ — случайная переменная, равномерно распределенная в интервале $[-1, 1]$, $\Delta T$ — максимальная величина погрешности измерения температуры. В последующих расчетах предполагается, что $\Delta T = 2{,}8$ К. Получаемые при этом погрешности показаны на рис. 2.6. Видно, что вычисленные с учетом моделируемых погрешностей значения имеют разброс относительно результатов, полученных с использованием точных значений температуры. При этом реальные значения температуры приводят к гораздо бо́льшим погрешностям определения плотности теплового потока.

### 2.4.3. Влияние погрешностей измерения температуры на результаты расчета по формулам (2.4.8)

В разд. 2.3.3 было показано, что если погрешность $\delta Y_i$ сделана при одиночном измерении температуры $Y_i$, то соответствующая погрешность определения плотности теплового потока через $n$ шагов по времени становится равной нулю, где $n$ — число точек измерения, используемых в аппроксимации производной $dT/dt$. Чтобы погрешность определения плотности теплового потока, соответствующая одиночной погрешности измерения температуры, уменьшилась до нуля в случае полубесконечного тела, имеющего конечное внутреннее термическое сопротивление, необходимо учесть бесконечное число шагов по времени. Покажем это, рассмотрев первые несколько членов соотношения (2.4.8)

$$\hat{q}_M = 2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi\Delta t}}\left[(Y_1 - Y_0)(\sqrt{M} - \sqrt{M-1}) + (Y_2 - Y_1)(\sqrt{M-1} - \sqrt{M-2}) + \cdots\right],$$

$$M = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.11}$$

где данные брались с равными приращениями $\Delta t$. Заметим, что в выражении (2.4.11) начальное значение измеренной температуры $Y_0$ появляется только один раз. Предположим, что погрешность $\delta Y_0$ имеет только температура $Y_0 (= T_0 + \delta Y_0)$, а все другие измерения температуры являются точными. Соответствующую погрешность плотности теплового потока определим из выражения (2.4.11)

$$\hat{q}_M = 2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi\Delta t}}\left[(Y_1 - T_0)(\sqrt{M} - \sqrt{M-1}) + (Y_2 - Y_1)(\sqrt{M-1} - \sqrt{M-2}) + \cdots\right] -$$

$$-2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi\Delta t}}\,\delta Y_0(\sqrt{M} - \sqrt{M-1}). \tag{2.4.12}$$

В формуле (2.4.12) выражение в квадратных скобках характеризует плотность теплового потока для точных данных, а член, содержащий погрешность $\delta Y_0$, определяет соответствующую погрешность плотности теплового потока. Обозначим через $\delta q_M^{(0)}$ погрешность $\hat{q}_M$, вызванную погрешностью $\delta Y_0$. Надстрочный индекс у величины $\delta q_M^{(0)}$ указывает момент времени, в который возникла погрешность температуры. Тогда выражение

$$-\frac{1}{2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi\Delta t}}}\frac{\delta q_M^{(0)}}{\delta Y_0} = \sqrt{M} - \sqrt{M-1}, \quad M = 1, 2, \ldots \tag{2.4.13}$$

определяет безразмерную погрешность теплового потока и показывает, как она убывает в последущие моменты времени. Для удобства выбрана такая нормировка, при которой первое значение равно единице. В табл. 2.5 представлены результаты, показывающие, как убывает со временем безразмерная погрешность плотности теплового потока, обусловленная погрешностью измерения начальной температуры $\delta Y_0$. Данные табл. 2.5 показывают, что положительная погрешность измерения температуры $\delta Y_0$ вызывает отрицательную погрешность плотности теплового потока и эта погрешность очень медленно уменьшается по времени. Даже через 100 временны́х шагов безразмерная погрешность плотности теплового потока все еще составляет 5% своего первоначального значения. Если погрешность плотности теплового потока в начальный момент времени была большой, то этот тепловой поток может быть определен очень неточно. При заданном значении погрешности температуры $\delta Y_0$ погрешность плотности теплового потока пропорциональна $(k\rho c)^{1/2}$ и обратно пропорциональна $1/(\Delta t)^{1/2}$; как малые шаги по времени, так и большие значения $k\rho c$ приводят к большим погрешностям плотности теплового потока.

Из выражения (2.4.11) видно, что влияние погрешности в $Y_1$ может сильно отличаться от влияния погрешности в $Y_0$, так как в формуле для плотности теплового потока $Y_1$ появляется в двух местах. В случае одиночной погрешности температуры $\delta Y_M$ результирующая погрешность плотности теплового потока и ее затухание в последующие моменты времени определяются соотношениями

$$\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{k\rho c}{\pi\Delta t}}}\frac{\delta q_M^{(M)}}{\delta Y_M}=1{,}0\ , \qquad (2.4.14a)$$

*Таблица 2.5.* Погрешиость определеиия плотности теплового потока при погрешности измереиня температуры $\delta Y_0$ в начальный момент времени

| $M$ (номер шага по времени) | $\dfrac{-1}{2\sqrt{\dfrac{kpc}{\pi\Delta t}}}\dfrac{\delta q_M^{(0)}}{\delta Y_0}$ |
|---|---|
| 1 | 1,000 |
| 2 | 0,414 |
| 3 | 0,318 |
| 4 | 0,268 |
| 5 | 0,236 |
| 6 | 0,213 |
| 7 | 0,196 |
| 8 | 0,183 |
| 9 | 0,172 |
| 10 | 0,162 |
| 100 | 0,050 |

*Таблица 2.6.* Уменьшение погрешности определения плотности теплового потока, вызванной погрешностью измерения температуры $\delta Y_M$ в момент времени $t_M = M\Delta t$

| $i$ (номер шага по времени) | $\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{k\rho c}{\pi\Delta t}}}\dfrac{\delta_{M+i}^{(M)}}{\delta Y_M}$ |
|---|---|
| 0 | 1,00000 |
| 1 | −0,58579 |
| 2 | −0,09638 |
| 3 | −0,04989 |
| 4 | −0,03188 |
| 5 | −0,02265 |
| 6 | −0,01716 |
| 7 | −0,01359 |
| 8 | −0,01110 |
| 9 | −0,00930 |
| 10 | −0,00793 |
| 100 | −0,00025 |

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{k\rho c}{\pi\Delta t}}}\frac{\delta q_{M+i}^{(M)}}{\delta Y_M}=\sqrt{i+1}-2\sqrt{i}+\sqrt{i-1}\qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots, \\ M=1,2,\ldots. \end{matrix} \tag{2.4.14b}$$

Подстрочный индекс у величины $q$ указывает расчетный момент времени $t_M = M\Delta t$, а надстрочный индекс — момент времени, в который возникает погрешность температуры. Заметим, что при $M \neq 0$ безразмерная погрешность плотности теплового потока в соотношениях (2.4.14) не зависит от момента времени ($M$), в который возникает погрешность температуры. Результаты вычислений по формулам (2.4.14) приведены в табл. 2.6.

Погрешность плотности теплового потока, соответствующая $\delta Y_M (M \neq 0)$, убывает значительно быстрее, чем погрешность, вызванная $\delta Y_0$. Это означает, что температуру $Y_0$ необходимо измерять более тщательно, чем другие значения $Y$.

Следует напомнить, что все измерения температуры обязательно имеют погрешности. Так как рассматриваемая задача является линейной, то полный анализ погрешностей может быть выполнен с использованием принципа суперпозиции погрешностей вычисления плотности теплового потока, вызванных отдельными погрешностями измерения температуры.

## 2.5. Точные решения обратных задач теплопроводности

### 2.5.1. Обзор литературы

В литературе описано несколько точных решений обратной задачи теплопроводности при произвольном расположении датчика температуры.. Для прямой задачи теплопроводности известно гораздо больше решений. Одно из первых точных решений обратной задачи предложил Бургграф [6][1]. Он решил задачу в предположении, что в точке расположения датчика известны и температура $Y(t)$, и плотность теплового потока $q_E(t)$. Поле температуры определялось в виде бесконечных рядов по производным всех порядков от $Y(t)$ и $q_E(t)$. Если датчик температуры размещен в центре сплошного цилиндра или сферы, то $q_E(t) = 0$ (при одномерной радиальной теплопроводности). Лэнгфорд [7] независимо получил результаты, аналогичные решению Бургграфа. Коверьянов [9] нашел решения для полых цилиндров и сфер. Плотность теплового потока на нагреваемой поверхности определялась дифференцированием поля температур. Имбер и Кхан [8], используя преобразования Лапласа, получили точное решение для поля температур по известным температурам в двух различных внутренних точках. Их решение для температуры можно экстраполировать в обоих направлениях вплоть до границ. Расстояние экстраполяции ограничено расстоянием между двумя датчиками температуры. При этом для более сложной задачи вычисления плотности теплового потока не было представлено никаких численных результатов.

---

[1] Впервые рассматриваемая здесь формула решения обратной задачи (задачи Коши) была опубликована Стефаном в 1890 г. (Stefan I. On the Theory of Ice Formation, Especially on Ice Formation in Polar Seas (Über die Theorie dir Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere). Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie Wiss., Wien., Math. — naturwiss. Kl., 1890, v. 98 (2a), p. 965—973.) Бургграф получил аналогичное решение, но другим путем.— *Прим. ред.*

### 2.5.2. Точное решение для тел плоской геометрической формы

Описанное ниже решение близко примыкает к решению, предложенному Бургграфом [6]. Тело делится на две области: 1) область обратного решения и 2) область прямого решения, как это показано на рис. 1.4. Область прямого решения имеет обычные граничные условия: известны температура $Y(t)$ на левой границе и произвольные граничные условия на «неактивной» поверхности $L$. Необходимо каким-либо способом получить решение для поля температур в области 2. Затем решение дифференцируется в точке расположения датчика температуры и вычисляется плотность теплового потока $q_E$ при $x_1 = E$. Теперь в обратной задаче на одной и той же границе известны два граничных условия. В решении Бургграфа требуется, чтобы функция $q_E(t)$ и все ее производные были известны.

Записав уравнение энергии для случая постоянных тепловых свойств

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\nabla^2 T \tag{2.5.1}$$

и продифференцировав его по времени, получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}(\alpha\nabla^2 T)=\alpha\nabla^2\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\nabla^2(\alpha\nabla^2 T)\,, \tag{2.5.2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=\alpha^2\nabla^4 T.$$

Обобщая на произвольный порядок производной по времени, получим

$$\frac{\partial^n T}{\partial t^n}=\alpha^n\nabla^{2n}T. \tag{2.5.3}$$

Такую же процедуру применим к закону Фурье:

$$q=-k\nabla T\,, \tag{2.5.4}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-k\nabla\frac{\partial T}{\partial t}=-k\nabla(\alpha\nabla^2 T)=\alpha\nabla^2(-k\nabla T)=\alpha\nabla^2 q\,. \tag{2.5.5}$$

Для производных плотности теплового потока по времени произвольного порядка имеем

$$\frac{\partial^n q}{\partial t^n}=\alpha^n\nabla^{2n}q=-k\alpha^n\nabla^{2n+1}T \tag{2.5.6}$$

Предполагая, что выражение для поля температур имеет вид бесконечного ряда по градиентам температуры в точке размещения датчика $r = E$, запишем

$$T(r,t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(r)\nabla^n T\Big|_{r=E}\,. \tag{2.5.7}$$

В последующем анализе ограничимся рассмотрением тел одномерной геометрии. В этом случае имеем

$$\nabla^2 T=\frac{1}{r^m}\frac{d}{dr}\left(r^m\frac{dT}{dr}\right)\quad\begin{array}{l}m=0,\ \text{плоская}\,,\\ m=1,\ \text{цилиндрическая}\,,\\ m=2,\ \text{сферическая}\,.\end{array} \tag{2.5.8}$$

Удобно выделить в рядах уравнения (2.5.7) четные и нечетные члены:

$$T(r,t)=\sum_{i=0}^{\infty}H_{2i}(r)\nabla^{2i}T\Big|_{r=E}+\sum_{i=0}^{\infty}H_{2i+1}(r)\nabla^{2i+1}T\Big|_{r=E}\,. \tag{2.5.9}$$

Подставляя соотношения (2.5.3) и (2.5.5) в уравнение (2.5.8), получим

$$T(r,t)=\sum_{i=0}^{\infty} H_{2i}(r)\frac{1}{\alpha^i}\frac{\partial^i T}{\partial t^i}\bigg|_{r=E}+\sum_{i=0}^{\infty} H_{2i+1}(r)\frac{1}{(-k\alpha^i)}\frac{\partial^i q}{\partial t^i}\bigg|_{r=E}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} f_i(r)\frac{d^iY}{dt^i}-\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{\infty} g_i(r)\frac{d^iq_E}{dt^i}\,, \qquad (2.5.10)$$

где

$$f_i(r)=\frac{H_{2i}(r)}{\alpha^i},\quad g_i(r)=\frac{H_{2i+1}(r)}{\alpha^i},\quad \frac{\partial^i T}{\partial t^i}\bigg|_{r=E}=\frac{\partial^i Y}{\partial t^i},\quad \frac{\partial^i q}{\partial t^i}\bigg|_{r=E}=\frac{\partial^i q_E}{\partial t^i}\Bigg\}\,. \qquad (2.5.11)$$

Уравнение (2.5.10) представляет собой общее решение для поля температур в обратной области.

Остается определить функции $f(r)$ и $g(r)$. Найдем их, подставив выражение (2.5.10) в дифференциальное уравнение (2.5.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\frac{d^nY}{dt^n}-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} g_n(r)\frac{d^nq_E}{dt^n}\right]=\alpha\nabla^2\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\frac{d^nY}{dt^n}-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} g_n(r)\frac{d^nq_E}{dt^n}\right].$$

Объединив одинаковые порядки $d^nY/dt^n$ и $d^nq_E/dt^n$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n-1}-\alpha\nabla^2 f_n)\frac{d^nY}{dt^n}=\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(g_{n-1}-\alpha\nabla^2 g_n)\frac{d^nq_E}{dt^n}\,. \qquad (2.5.12)$$

Решение получается из условия, что каждый член в скобках в уравнении (2.5.12) тождественно равен нулю:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 f_0=0,\qquad \nabla^2 g_0=0\,,\\ &\nabla^2 f_n=\frac{1}{\alpha}f_{n-1}\\ &\nabla^2 g_n=\frac{1}{\alpha}g_{n-1}\end{aligned}\right\}n=1,2,\ldots\,. \qquad (2.5.13)$$

Граничные условия для функций $f$ и $g$ определяются, исходя из требования, что решение должно соответствовать измеренным значениям температуры

$$T(E,t)=Y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(E)\frac{d^nY}{dt^n}-\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} g_n(E)\frac{d^nq_E}{dt^n}\,,$$

$$f_0(E)=1,\quad g_0(E)=0,\quad f_n(E)=g_n(E)=0,\quad n=1,2,\ldots\,. \qquad (2.5.14)$$

Тепловой поток определяется тогда выражением

$$q_E=-k\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=E}=-k\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(E)\frac{d^nY}{dt^n}+\sum_{n=0}^{\infty} g_n'(E)\frac{d^nq_E}{dt^n}\,,$$

$$g_0'(E)=1,\quad f_0'(E)=0,\quad f_n'(E)=g_n'(E)=0,\quad n=1,2,\ldots\,. \qquad (2.5.15)$$

Решение уравнений (2.5.13) при граничных условиях (2.5.14) и (2.5.15) полностью определяет функции $f$ и $g$. Заметим, что эти функции необходимо определять последовательно, начиная с $f_0$ и $g_0$.

*Замечания*

1. Для теплоизолированной поверхности при $r = E$ профиль температуры определяется только $f$-рядами.

2. Для изотермической поверхности при $r = E$ профиль температуры определяется только $g$-рядами.

3. Функции $f_0$ и $g_0$ представляют собой стационарные решения.

4. $Y(t)$ и $q_E(t)$ должны иметь производные всех порядков.

*Решение для плоской геометрической формы тела* ($r = x$). Прямой подстановкой можно показать, что решением задач (2.4.13)—(2.4.15) являются выражения

$$f_n = \frac{1}{(2n)!}\frac{(E-x)^{2n}}{\alpha^n}, \quad g_n = \frac{-1}{(2n+1)!}\frac{(E-x)^{2n+1}}{\alpha^n} . \tag{2.5.16}$$

Распределение температуры запишем в виде

$$T(x, t) = Y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\frac{(E-x)^{2n}}{\alpha^n}\frac{d^nY}{dt^n} + \\ + \frac{(E-x)}{k}\left[q_E(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\frac{(E-x)^{2n}}{\alpha^n}\frac{d^nq_E}{dt^n}\right] . \tag{2.5.17}$$

Решение для плоской геометрической формы тела по виду похоже на разложение температуры в ряд Тейлора относительно координаты (по глубине) датчика температуры.

Главный интерес представляет плотность теплового потока на активной поверхности. Она определяется с помощью закона Фурье и соотношения (2.5.17) при $x = 0$:

$$q(t) = q_E + k\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{\alpha^n}\frac{d^nY}{dt^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n}}{(2n)!}\frac{d^nq_E}{dt^n} . \tag{2.5.18}$$

Удобно нормировать плотности тепловых потоков и ввести безразмерное время:

$$Q = \frac{qE}{k}, \quad Q_E = \frac{q_E E}{k}, \quad \tau_E = \frac{\alpha t}{E^2} . \tag{2.5.19}$$

Заметим, что $Q$ имеет размерность температуры. Нормированная плотность теплового потока записывается в виде

$$Q = Q_E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}\frac{d^nY}{d\tau_E^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\frac{d^nQ_E}{d\tau_E^n} . \tag{2.5.20}$$

Этот результат очень важен, так как для непрерывных измерений температуры он является точным и имеет простую форму записи. Полученное решение ясно указывает на зависимость плотности теплового потока на поверхности от производных по времени всех порядков, взятых от измеренной температуры и соответствующей плотности теплового потока в точке $x = E$. Сам уровень температуры не имеет значения, так как необходимо учитывать только производные. В решении (2.5.20) удивляет отсутствие явной зависимости от начального распределения температуры в теле. Однако Бургграф [6] указал на то, что при аппроксимации экспериментальных значений температуры $Y(t)$ полиномом конечного порядка предполагается, что начальный профиль температуры должен быть неравномерным.

Так как решение обратной задачи (2.5.20) является точным, может возникнуть сомнение в целесообразности дальнейшего исследования. Однако это необходимо сделать, поскольку точное решение имеет несколько ограничений.

1. Производные высокого порядка от дискретных значений температуры $Y(t)$ и от плотности теплового потока $Q_E$ должны определяться численно.

2. Метод неудобен для составных тел и непригоден в случае зависящих от температуры теплофизических свойств.

3. Для решения прямой задачи и определения $Q_E(t)$ может потребоваться численная процедура.

4. Метод нельзя применить для переопределенных задач при двух и более внутренних датчиках температуры.

5. Метод не приспособлен для определения нескольких плотностей тепловых потоков, например в двумерном случае.

Несмотря на ограниченное практическое применение описанного выше точного решения, оно является весьма важным, так как обеспечивает глубокое понимание обратной задачи.

### 2.5.3. Решения для цилиндра и сферы

Для сплошных цилиндров и сфер, в которых тепловой поток одномерен в радиальном направлении и датчик температуры размещен в центре, имеются простые точные решения ОЗТ. Соответственно плотность теплового потока на внешней поверхности зависит только от температурной реакции и ее производных. Следуя Бургграфу [6] и Лэнгфорду [7], запишем выражения для изменения температуры в сплошном цилиндре и сфере:

$$T(x, t) = Y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(R-x)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2\alpha^n} \frac{d^nY}{dt^n} \quad \text{(цилиндр)} \quad , \tag{2.5.21}$$

$$T(x, t) = Y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(R-x)^{2n}}{(2n+1)!\alpha^n} \frac{d^nY}{dt^n} \quad \text{(сфера)} \quad . \tag{2.5.22}$$

Заметим, что координата $x$ отсчитывается от внешней поверхности, а $R$ — радиус тела. Плотность теплового потока оценивается с применением закона Фурье и соотношений (2.5.21) и (2.5.22). В результате получим

$$q = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nR^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2\alpha^n} \frac{d^nY}{dt^n} \quad \text{(цилиндр)} \quad , \tag{2.5.23}$$

$$q = -k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nR^{2n-1}}{(2n+1)!\alpha^n} \frac{d^nY}{dt^n} \quad \text{(сфера)} \, . \tag{2.5.24}$$

Замечания по поводу полых цилиндров и сфер можно найти в работах Бургграфа [6], Лэнгфорда [7] и Коверьянова [9].

### 2.5.4. Пример расчета для тела плоской геометрической формы

Чтобы использовать точное решение, необходимо численно аппроксимировать производные по времени. Для простоты предположим, что датчик температуры установлен на теплоизолированной границе, и воспользуемся схемой централь-

ных разностей. Рассмотрим только пять первых производных. Чтобы анализируемый метод можно было использовать практически, ряды должны быть усечены до разумного предела. Применив соотношение (2.5.20), получим

$$Q=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{d^nY}{d\tau_E^n}\,. \tag{2.5.25}$$

Первые пять производных аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{dY_j}{d\tau_E}\approx\frac{Y_{j+1}-Y_{j-1}}{2\Delta\tau_E}\,, \tag{2.5.26}$$

$$\frac{d^2Y_j}{d\tau_E^2}\approx\frac{Y_{j-1}-2Y_j+Y_{j+1}}{\Delta\tau_E^2}\,, \tag{2.5.27}$$

$$\frac{d^3Y_j}{d\tau_E^3}\approx\frac{-Y_{j-2}+2Y_{j-1}-2Y_{j+1}+Y_{j+2}}{2\Delta\tau_E^3}\,, \tag{2.5.28}$$

$$\frac{d^4Y_j}{d\tau_E^4}\approx\frac{Y_{j-2}-4Y_{j-1}+6Y_j-4Y_{j+1}+Y_{j+2}}{\Delta\tau_E^4}\,, \tag{2.5.29}$$

$$\frac{d^5Y_j}{d\tau_E^5}\approx\frac{-Y_{j-3}+4Y_{j-2}-5Y_{j-1}+5Y_{j+1}-4Y_{j+2}+Y_{j+3}}{2\Delta\tau_E^5}\,. \tag{2.5.30}$$

Рассмотрим коэффициенты в выражениях для разностей различных порядков. Для этой цели проанализируем формулу

$$\frac{1}{(2n-1)!\Delta\tau_E^n}\,. \tag{2.5.31}$$

Результаты расчетов по формуле (2.5.31) при различных значениях безразмерного шага по времени представлены в табл. 2.7. При каждом значении $\Delta\tau_E$ максимальный коэффициент подчеркнут. Заметим, что по мере того, как $\Delta\tau_E$ уменьшается, производные более высокого порядка начинают играть все большую роль. Если $\Delta\tau_E$ велико ($>10^2$), то доминирующей является первая производная. Если же $\Delta\tau_E$ гораздо меньше единицы, то существенными становятся несколько членов более высокого порядка. Используя приближенные разностные аппроксимации (2.5.26)—(2.5.30) и приводя подобные члены, равенство (2.5.25) можно представить в другой форме:

$$Q_j=D_{-3}Y_{j-3}+D_{-2}Y_{j-2}+D_{-1}Y_{j-1}+D_0Y_j+D_1Y_{j+1}+D_2Y_{j+2}+D_3Y_{j+3}, \tag{2.5.32}$$

где значения $D$ не зависят от индекса времени $j$ и могут быть записаны в виде

$$D_{-3}=\frac{1}{2\cdot 9!\Delta\tau_E^5},$$

$$D_{-2}=\frac{4}{2\cdot 9!\Delta\tau_E^5}+\frac{1}{7!\Delta\tau_E^4}-\frac{1}{2\cdot 5!\Delta\tau_E^3},$$

$$D_{-1}=\frac{-5}{2\cdot 9!\Delta\tau_E^5}-\frac{4}{7!\Delta\tau_E^4}+\frac{1}{5!\Delta\tau_E^3}+\frac{1}{3!\Delta\tau_E^2}-\frac{1}{2\Delta\tau_E},$$

*Таблица 2.7.* Коэффициенты в разностных выражениях в точном решении Бургграфа $1/(2n-1)!(\Delta\tau_E)^n$

| $n$ | $\Delta\tau_E=10^2$ | $\Delta\tau_E=1$ | $\Delta\tau_E=0{,}5$ | $\Delta\tau_E=0{,}25$ | $\Delta\tau_E=0{,}125$ | $\Delta\tau_E=0{,}0625$ | $\Delta\tau_E=0{,}03125$ | $\Delta\tau_E=0{,}01$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01 | 1,0 | 2,0 | 4,0 | 8,0 | 16,0 | 32,0 | 100 |
| 2 | $1{,}6667\times10^{-5}$ | 0,166667 | 0,666667 | 2,666667 | 10,666667 | 42,666667 | 170,666667 | $1{,}66667\times10^{3}$ |
| 3 | $8{,}3333\times10^{-9}$ | 0,008333 | 0,066667 | 0,533333 | 4,266667 | 34,133333 | 273,066667 | $8{,}3333\times10^{3}$ |
| 4 | $1{,}9841\times10^{-12}$ | 0,000198 | 0,003175 | 0,050794 | 0,812698 | 13,003175 | 208,050794 | $1{,}9841\times10^{4}$ |
| 5 | $2{,}7557\times10^{-16}$ | 0,000003 | 0,000088 | 0,002822 | 0,090300 | 2,889594 | 92,467019 | $2{,}7557\times10^{4}$ |
| 6 | | | 0,000002 | 0,000103 | 0,006567 | 0,420305 | 26,899497 | $2{,}5052\times10^{4}$ |
| 7 | | | | 0,000003 | 0,000337 | 0,043108 | 5,517845 | $1{,}6059\times10^{4}$ |

*Таблица 2.8.* Весовые множители для температуры в уравнении (2.5.32). Учитываются только первые пять производиых в уравнении (2.5.25)

| $\Delta\tau_E$ | $D_{-3}$ | $D_{-2}$ | $D_{-1}$ | $D_0$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^2$ | $1{,}3779\times10^{-16}$ | $-4{,}1647\times10^{-9}$ | $-4{,}9833\times10^{-3}$ | $-3{,}3333\times10^{-5}$ | $5{,}0167\times10^{-3}$ | $4{,}1687\times10^{-9}$ | $1{,}3779\times10^{-16}$ |
| 8 | $4{,}2049\times10^{-11}$ | $-8{,}0894\times10^{-6}$ | $-5{,}9880\times10^{-2}$ | $-5{,}2080\times10^{-3}$ | $6{,}5088\times10^{-2}$ | $8{,}1863\times10^{-6}$ | $4{,}2049\times10^{-11}$ |
| 4 | $1{,}3456\times10^{-9}$ | $-6{,}4324\times10^{-5}$ | $-1{,}1446\times10^{-1}$ | $-2{,}0829\times10^{-2}$ | $1{,}3528\times10^{-1}$ | $6{,}5874\times10^{-5}$ | $1{,}3456\times10^{-9}$ |
| 2,0 | $4{,}3058\times10^{-8}$ | $-5{,}0826\times10^{-4}$ | $-2{,}0734\times10^{-1}$ | $-8{,}3259\times10^{-2}$ | $2{,}9058\times10^{-1}$ | $5{,}3306\times10^{-4}$ | $4{,}3058\times10^{-8}$ |
| 1,0 | $1{,}3779\times10^{-6}$ | $-3{,}9627\times10^{-3}$ | $-3{,}2580\times10^{-1}$ | $-3{,}3214\times10^{-1}$ | $6{,}5755\times10^{-1}$ | $4{,}3596\times10^{-3}$ | $1{,}3779\times10^{-6}$ |
| 0,5 | $4{,}4092\times10^{-5}$ | $-2{,}9982\times10^{-2}$ | $-2{,}7959\times10^{-1}$ | $-1{,}3143\times10^{0}$ | $1{,}5875\times10^{0}$ | $3{,}6332\times10^{-2}$ | $4{,}4092\times10^{-5}$ |
| 0,25 | $1{,}4109\times10^{-3}$ | $-2{,}1023\times10^{-1}$ | $9{,}8977\times10^{-1}$ | $-5{,}0286\times10^{0}$ | $3{,}9372\times10^{0}$ | $3{,}1182\times10^{-1}$ | $1{,}4109\times10^{-3}$ |
| 0,125 | $4{,}5150\times10^{-2}$ | $-1{,}1400\times10^{0}$ | $7{,}4568\times10^{0}$ | $-1{,}6457\times10^{1}$ | $7{,}3750\times10^{0}$ | $2{,}7654\times10^{0}$ | $4{,}5150\times10^{-2}$ |
| 0,0625 | $1{,}4448\times10^{0}$ | $1{,}7157\times10^{0}$ | $9{,}5633\times10^{0}$ | $-7{,}3143\times10^{0}$ | $-2{,}8255\times10^{1}$ | $2{,}4291\times10^{1}$ | $1{,}4448\times10^{0}$ |
| 0,03125 | $4{,}6234\times10^{1}$ | $2{,}5645\times10^{2}$ | $-6{,}3564\times10^{2}$ | $9{,}0697\times10^{2}$ | $-6{,}8744\times10^{2}$ | $1{,}5965\times10^{2}$ | $4{,}6234\times10^{1}$ |
| $10^{-3}$ | $1{,}3779\times10^{9}$ | $5{,}7057\times10^{9}$ | $-7{,}6745\times10^{9}$ | $1{,}1901\times10^{9}$ | $6{,}0875\times10^{9}$ | $-5{,}3089\times10^{9}$ | $1{,}3779\times10^{9}$ |

$$D_0=\frac{6}{7!\Delta\tau_E^4}-\frac{2}{3!\Delta\tau_E^2}, \tag{2.5.33}$$

$$D_1=\frac{5}{2\cdot 9!\Delta\tau_E^5}-\frac{4}{7!\Delta\tau_E^4}-\frac{1}{5!\Delta\tau_E^3}+\frac{1}{3!\Delta\tau_E^2}+\frac{1}{2\Delta\tau_E},$$

$$D_2=\frac{-4}{2\cdot 9!\Delta\tau_E^5}+\frac{1}{7!\Delta\tau_E^4}+\frac{1}{2\cdot 5!\Delta\tau_E^3},$$

$$D_3=\frac{1}{2\cdot 9!\Delta_E^5}.$$

Выражение (2.5.32) имеет вид семиточечного перемещающегося осредняющего фильтра с суммой коэффициентов, равной нулю. Снова заметим, что $q$ линейно зависит от измеренной температуры. Коэффициенты несимметричны, т. е. $D_{-i}\neq D_i$, кроме отдельных значений $i$. Весовые множители, определенные соотношениями (2.5.33), приведены в табл. 2.8 в зависимости от безразмерного шага по времени $\Delta\tau_E$. При больших значениях безразмерных шагов по времени ($>10^2$) $D_1$ и $D_{-1}$ являются доминирующими; при этом только $D_{-1}$ и $D_1$ содержат члены $1/\Delta\tau_E$. В свою очередь это наводит на мысль, что для больших шагов по времени может быть пригодной двухточечная центральная разность. Для малых шагов по времени имеет место противоположная ситуация: все значения $D$ оказываются величинами примерно одного порядка. Следовательно, семиточечная формула, рассмотренная в этом примере, для малых шагов по времени может оказаться непригодной.

В заключение отметим, что выше представлено точное решение обратной задачи теплопроводности для постоянных теплофизических свойств. Это решение требует, чтобы существовали производные бесконечного порядка от экспериментальных данных $Y(t)$. При малых безразмерных шагах по времени производные высокого порядка могут играть главную роль. С практической точки зрения решение Бургграфа полезно и облегчает понимание обратных задач теплопроводности.

## Литература


1. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1977.
2. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press, London, 1959.
3. Schneider, P. J., *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1955.
4. Meyers, G. E., *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1971.
5. Carnahan, B., Luther, H. A., and Wilkes, J. O., *Applied Numerical Methods*, Wiley, New York, 1969.
6. Burggraf, O. R., An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Applications, *ASME J. Heat Transfer*, **86C**, 373–382, August 1964.
7. Langford, D., New Analytical Solutions of the One-Dimensional Heat Equation for Temperature and Heat Flow Rate Both Prescribed at the Same Fixed Boundary (with applications to the phase change problem), *Q. Appl. Math.* **24** (4), 315–322 (1976).
8. Imber, M. and Khan, J., Prediction of Transient Temperature Distributions with Embedded Thermocouples, *AIAA J.* **10** (6), 784–789 (1972).

9. Kover'yanov, V. A., Inverse Problem of Nonsteady-State Thermal Conductivity, *Teplofizika Vysokikh Temperatur*, **5** (1), 141–143 (1967).

Имеются на русском языке

2. Карслоу У., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ.—М.: Наука, 1964.
6. Бургграф. Точное решение обратной задачи в теорнн теплопроводности и ее приложеннях.— Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1964, №3, с.94—106.
8. Имбер М., Кхан Дж. Расчет нестационарного распределения температуры на основании показаний термопар, расположенных внутри тела. — Ракетная техника и космонавтика, 1972, №2, с. 83—90.
9. Коверьянов В.А. Обратная задача нестационарной теплопроводности. — Теплофизика высоких температур, 1967, т.5, №1, с. 141—148.

## Задачи

2.1. Выведите уравнение (2.2.10): а) используя метод взвешенных наименьших квадратов, при котором экспериментальные значения температуры аппроксимируются линейным уравнением, b) дифференцируя аппроксимирующую кривую для определения среднего градиента температуры, с) используя для получения плотности теплового потока закон Фурье.

2.2. Для цилиндрических тел профиль температуры является линейным относительно переменной $\ln r$: $T - T_i = [-Q\ln(r/r_i)]/(2\pi kL)$, $Q = q(2\pi rL)$, где $Q$ — постоянная. Выведите уравнение для оценки плотности теплового потока, аналогичное соотношению (2.2.10), из условия минимума суммы квадратов взвешенных невязок между вычисленными и экспериментально полученными значениями температуры. Плотность теплового потока необходимо определить при $r = r_i$. Является ли этот результат таким же, как и для случая линейного относительно $r$ профиля температуры?

2.3. Для сферических тел профиль температуры линеен относительно переменной $1/r$: $T - T_i = (Q/4\pi k)[(1/r) - (1/r_i)]$, $Q = q(4\pi r^2) = \text{const}$. Выведите уравнение для плотности теплового потока, аналогичное соотношению (2.2.10), из условия минимума суммы квадратов взвешенных невязок между рассчитанными и измеренными значениями температуры. Является ли этот результат таким же, как и для случая линейного относительно $r$ профиля температуры?

2.4. Выведите соотношение (2.3.7). Можно начать с соотношения (2.2.10), как предложено в описании, приведенном непосредственно над соотношением (2.3.7).

2.5. Покажите, что если через пять значений температуры, соответствующих пяти значениям времени, проводится с помощью метода наименьших квадратов прямая линия, то одиночная погрешность измерения температуры $\varepsilon_M$ вызовет погрешности при вычислении $q_{M-2}$, $q_{M-1}$, $q_M$, $q_{M+1}$ и $q_{M+2}$. Каковы погрешности плотности теплового потока?

2.6. Проверьте числовые результаты, приведенные в табл. 2.3.

2.7. Используя интегрирование по частям, получите выражение (2.4.7) из выражения (2.4.6).

*Указание.* Представьте подынтегральное выражение в виде

$$\frac{Y'(\lambda)+Y'(t)-Y'(t)}{\sqrt{t-\lambda}}$$

и запишите как сумму двух интегралов.

2.8. Проверьте, что соотношения (2.5.16) являются решением уравнений (2.5.13)—(2.5.15.).

2.9. Докажите, что сумма членов в соотношениях (2.4.14a)—(2.4.14b) равна нулю. Каков физический смысл этого результата?

2.10. Плотность теплового потока для сферы определяется выражением (2.5.24). Составьте таблицу, аналогичную табл. 2.7. Какие можно сделать выводы?

2.11. Начиная с выражения (2.4.7) и предполагая, что изменение температуры поверхности описывается кусочно-линейной функцией, покажите, что выражение для плотности теплового потока имеет вид

$$\hat{q}(t_M)=\hat{q}_M=\left(\frac{k\rho c}{\pi}\right)^{1/2}\left\{\frac{Y_M-Y_0}{(t_M-t_0)^{1/2}}+\frac{Y_M-Y_{M-1}}{(t_M-t_{M-1})^{1/2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{M+1}\left[\frac{Y_M-Y_i}{(t_M-t_i)^{1/2}}-\frac{Y_M-Y_{i-1}}{(t_M-t_{i-1})^{1/2}}+\frac{2(Y_i-Y_{i-1})}{(t_M-t_i)^{1/2}+(t_M-t_{i-1})^{1/2}}\right]\right\}.$$

2.12. Приведенное в задаче 2.11 выражение часто встречается в литературе и алгебраически является более сложным, чем (2.4.8). Покажите, что приведенное выше выражение можно упростить до выражения (2.4.8b).

*Указание.* Разложите в ряды первые два слагаемых в сумме и покажите, что большинство членов исключается.

# Глава 3
# Приближенные методы решения прямых задач теплопроводности

## 3.1. Введение

В данной главе рассматриваются некоторые приближенные методы решения прямых задач нестационарной теплопроводности. Эти методы используются в качестве первого этапа процедуры решения обратных задач теплопроводности. Второй этап, который включает в себя специальные алгоритмы решения обратных задач, анализируется в гл. 4. В гл. 5 и 6 приближенные методы решения прямых задач рассматриваются совместно с алгоритмами решения обратных задач из гл. 4.

### 3.1.1. Различные численные методы

Решение дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе уравнения нестационарной теплопроводности, может быть получено различными точными и численными методами. К точным методам относятся классические методы разделения переменных и преобразования Лапласа.

В данной главе обсуждаются численные методы двух типов. Один из них основан на представлении анализируемой математической модели в интегральной форме, а второй — на представлении модели в дифференциальной форме.

Уравнение нестационарной теплопроводности может быть линейным и нелинейным. В линейном случае дифференциальное уравнение в частных производных может быть заменено эквивалентным интегральным уравнением. Преимущество представления в интегральной форме состоит в том, что зависимость решения от пространственной переменной учитывается точно и необходима только аппроксимация по времени.

Два различных подхода, в которых для решения задач нестационарной теплопроводности используются интегральные уравнения, базируются на применении теоремы Дюамеля и функций Грина. Оба подхода приводят к интегралам типа свертки. Эти методы весьма схожи. В этой связи рассматривается применение только теоремы Дюамеля. Далее анализируется численная аппроксимация интегрального уравнения. Теплопроводное тело может иметь произвольную геометрическую форму и может быть выполнено из неоднородного материала. Хотя возможны двух- и трехмерный процессы теплообмена, в данной главе рассматриваются тепловые воздействия, зависящие только от времени.

Новый, использующий теорему Дюамеля метод решения задач в связанных областях простой геометрической формы называется нестационарным методом поверхностных элементов [1—5]. Этот метод также может быть использован для решения обратной задачи, однако он не позволяет учесть погрешности измерений. Кроме того, измерения должны проводиться на *поверхности*, а не во внутренних точках рассматриваемого тела.

При решении нелинейных задач нестационарной теплопроводности используются методы, основанные на дискретизации уравнения в частных производных. Двумя такими методами решения нелинейного уравнения нестационарной теплопроводности являются методы конечных разностей и конечных элементов. В данной главе используется другой метод, в котором для конечных контрольных объемов непосредственно применяется закон сохранения энергии. Он называется методом конечного контрольного объема.

Задачи, в которых либо уравнение теплопроводности, либо граничные условия зависят от температуры, являются нелинейными. В качестве примера нелинейного уравнения в частных производных запишем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\ , \tag{3.1.1}$$

где $k$ и(или) $\rho c$ зависят от температуры $T$. Если $k$ и $\rho c$ являются функциями только координаты $x$, то уравнение (3.1.1) становится линейным. Примером нелинейного граничного условия может служить граничное условие с учетом излучения:

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\sigma\varepsilon[T_\infty^4-T^4(0,t)]\ . \tag{3.1.2}$$

### 3.1.2. Содержание главы

В данной главе даются вывод интеграла Дюамеля (разд. 3.2) и его численная аппроксимация. В разд. 3.3 анализируются решения уравнения нестационарной теплопроводности методом конечного контрольного объема. При этом рассматриваются как линейные, так и нелинейные случаи.

В разд. 3.3.5 показано, что линейный метод конечного контрольного объема приводит к соотношениям, аналогичным получаемым с помощью теоремы Дюамеля. Это весьма важно, так как, используя различные методы аппроксимации уравнения теплопроводности и граничных условий, можно получить одни и те же линейные алгоритмы решения обратных задач. К таким методам относятся численная аппроксимация теоремы Дюамеля, метод конечных разностей и метод конечных элементов.

## 3.2. Теорема Дюамеля

### 3.2.1 Вывод

Теорему Дюамеля можно рассматривать как следствие принципа суперпозиции, и поэтому она справедлива только для линейных задач. Существует несколько способов ее вывода. В одном из них используется преобразование Лапласа [6, 7], в другом — принцип суперпозиции [8, 9]. Дальнейшее изложение базируется на принципе суперпозиции, что также позволяет получить удобную численную аппроксимацию.

В теореме Дюамеля температура в некоторой точке в некоторый момент времени в соответствии с принципом суперпозиции определяется из отдельных блоков решения. Одно такое решение $\phi(r, t)$ соответствует изменению температуры в точке $r$ теплопроводного тела, которое подвергается воздействию теплового

потока с плотностью

$$q(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}, \tag{3.2.1}$$

Иногда это условие называют единичным ступенчатым изменением плотности теплового потока или постоянной единичной плотностью. Теплофизические свойства тела не зависят от температуры, но могут быть функциями кординаты, при этом распределение температуры не обязательно должно быть одномерным. Единственное требование при выводе теоремы состоит в том, что плотность теплового потока на поверхности представляется в виде произведения

$$q(s, t)=f(t)g(s) ,$$

где $s$ — измеряемая вдоль поверхности координата. Для удобства изложения будем рассматривать плотность теплового потока, зависящую только от времени.

Плотность теплового потока на поверхности аппроксимируется таким образом, как это показано на рис. 3.1. На интервалах времени

$$\lambda_{1/2},\quad \lambda_{3/2},\ldots,\lambda_{M-1/2}$$

используются значения плотности теплового потока в моменты времени

$$0 \text{ до } \lambda_1,\quad \lambda_1 \text{ до } \lambda_2,\ldots,\quad \lambda_{M-1} \text{ до } t_M$$

соответственно. Эти значения плотности обозначаются $q_1$, $q_2$, ..., $q_M$, или в общем виде

$$q_M=q(\lambda_{M-1/2})=q[(M-\tfrac{1}{2})\Delta\lambda]. \tag{3.2.2}$$

Начальная температура тела постоянна и равна $T_0$. С использованием принципа суперпозиции температура в точке $\mathbf{r}$ в момент времени $t_M$ определяется вкладом отдельных компонент, каждая из которых соответствует той или иной компоненте плотности теплового потока от $q_1$ до $q_M$ включительно:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{r}, t_M)= T_0 &+q_1[\phi(\mathbf{r}, t_M-\lambda_0)-\phi(\mathbf{r}, t_M-\lambda_1)]+\\ &+q_2[\phi(\mathbf{r}, t_M-\lambda_1)-\phi(\mathbf{r}, t_M-\lambda_2)]+\\ &\vdots\\ &+q_M[\phi(\mathbf{r}, t_M-\lambda_{M-1})-\phi(\mathbf{r}, t_M-\lambda_M)] ,\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

где $\phi(\mathbf{r},\ t_M-\lambda_M)=\phi(\mathbf{r},\ 0)=0$.

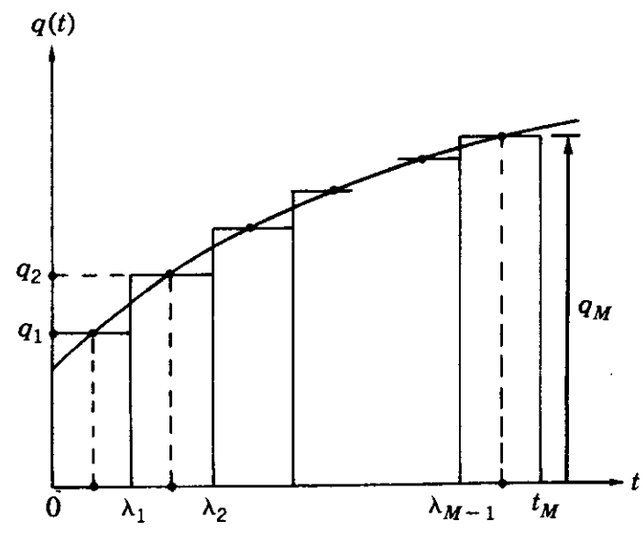



Рис. 3.1. Приближенное представление плотности теплового потока $q(t)$ $M$ значениямн.

Используя равные шаги по времени и значения времени

$$\lambda_i = i\Delta\lambda, \quad i = 0, 1, \ldots, M \ , \tag{3.2.4}$$

получим

$$\lambda_j - \lambda_i = j\Delta\lambda - i\Delta\lambda = (j-i)\Delta\lambda = \lambda_{j-i} \ . \tag{3.2.5}$$

После этого выражение (3.2.3) можно записать в виде

$$T(\mathbf{r}, t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^{M} q_n \frac{\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n)}{\Delta\lambda} \Delta\lambda \ . \tag{3.2.6}$$

В пределе при $\Delta\lambda \to 0$ из выражения (3.2.6) для момента времени $t_M = t$ получим интеграл

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \int_0^t q(\lambda) \left[ - \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t-\lambda)}{\partial\lambda} \right] d\lambda \ . \tag{3.2.7}$$

С помощью соотношения

$$- \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t-\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t-\lambda)}{\partial t} \tag{3.2.8}$$

теорема Дюамеля (иногда ее называют интегралом Дюамеля) принимает вид

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \int_0^t q(\lambda) \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t-\lambda)}{\partial t} d\lambda \ . \tag{3.2.9}$$

Соотношение (3.2.9) представляет собой формулировку теоремы Дюамеля применительно к плотности теплового потока. Оно имеет вид свертки, так как под интегралом стоит произведение двух функций, одна из которых зависит от $\lambda$, а другая — от $t - \lambda$. Таким образом, имеет место свертывание одной функции относительно другой. Теорема Дюамеля применительно к температуре записывается в виде соотношения (2.4.1) (см. также работы [6—10]).

### 3.2.2. Численная аппроксимация

Для численной аппроксимации выражения (3.2.9) используется соотношение (3.2.6). Учитывая, что

$$\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n) = \phi(\mathbf{r}, t_{M-n+1}) - \phi(\mathbf{r}, t_{M-n}) = \Delta\phi(\mathbf{r}, t_{M-n}), \tag{3.2.10}$$

соотношение (3.2.6) можно представить в виде

$$T(\mathbf{r}, t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^{M} q_n \Delta\phi(\mathbf{r}, t_{M-n}) \ . \tag{3.2.11}$$

Опуская зависимость от $\mathbf{r}$, это выражение можно записать в более простой форме:

$$\boxed{T_M = T_0 + \sum_{n=1}^{M} q_n \Delta\phi_{M-n}, \quad \Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i} \ , \tag{3.2.12}$$

где $q_n$ лучше всего оценивать в момент времени $\left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta t$, как это следует из соотношения (3.2.2). Если на протяжении каждого шага по времени плотность действительного теплового потока постоянна, то с помощью уравнения (3.2.12) температура $T_M$ определяется точно. С другой стороны, если плотность действительного теплового потока изменяется в течение шага по времени, то уравнение

(3.2.12) позволяет получить приближенные результаты. При анализе обратных задач теплопроводности это выражение является крайне важным, так как оно обеспечивает удобную связь между температурой и компонентами плотности теплового потока. Запоминанию уравнения (3.2.12) способствует тот факт, что сумма подстрочных индексов в его правой части равна $M$.

*Пример 3.1.* Требуется вычислить температуру на глубине 1 см внутри толстой стальной пластины ($k$ = 40 Вт/(м · °С), $\alpha = 10^{-5}$ м$^2$/с, которая первоначально находится при температуре 30°С, а затем, начиная с нулевого момента времени, подвергается воздействию теплового потока плотностью $q = \dot{q}_0 t$, $\dot{q}_0 = 10^6$ Вт/(м$^2$ · °С), где время $t$ выражено в секундах. Значения температуры нужно определить в моменты времени 1, 2 и 3 с. Для вычисления приближенных значений температур используйте формулу (3.2.12) и сравните результаты с точными значениями.

*Решение.* Температуры, соответствующие моментам времени 1, 2 и 3 с, обозначим через $T_1$, $T_2$ и $T_3$. С помощью формулы (3.2.12) находим

$$T_1 = T_0 + q_1 \Delta\phi_0 \ , \tag{a}$$

$$T_2 = T_0 + q_1 \Delta\phi_1 + q_2 \Delta\phi_0 \ , \tag{b}$$

$$T_3 = T_0 + q_1 \Delta\phi_2 + q_2 \Delta\phi_1 + q_3 \Delta\phi_0 \ . \tag{c}$$

Величины $\phi_i$ вычисляются для полубесконечного тела при единичном ступенчатом увеличении плотности теплового потока на поверхности. Значения $\phi_i$ можно найти, используя табл. 1.2, где значения $T^+$ определены по формуле (1.6.18c), и полагая $q_c = 1$, $T(x, t) = \phi$ и $T_0 = 0$. Следовательно,

$$\phi = \left(\frac{x}{k}\right) T^+ = \left(\frac{0{,}01}{40}\right) T^+ \ .$$

Связь между временем $t$ и величиной $t_x^+$ определяется соотношением (1.6.18d), из которого получим

$$t_x^+ = \frac{\alpha t}{x^2} = \frac{10^{-5}}{10^{-4}} = 0{,}1t \ .$$

После этого для определения величин $\Delta\phi_i$ используются значения $T^+$ при $t_x^+ = 0{,}1$; 0,2 и 0,3:

$$\Delta\phi_0 = \phi_1 = \frac{x}{k}\phi_1^+ = \frac{0{,}01}{40}(0{,}003943) = 9{,}8575 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{°С/Вт},$$

$$\Delta\phi_1 = \phi_2 - \phi_1 = \frac{x}{k}(\phi_2^+ - \phi_1^+) = 6{,}6972 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{°С/Вт},$$

$$\Delta\phi_2 = \phi_3 - \phi_2 = \frac{x}{k}(\phi_3^+ - \phi_2^+) = 1{,}029025 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \cdot \text{°С/Вт}.$$

Компоненты $q$ оцениваются при $t$ = 0,5; 1,5 и 2,5 с. Так что имеем

$$q_1 = 0{,}5 \cdot 10^6, \ q_2 = 1{,}5 \cdot 10^6, \ q_3 = 2{,}5 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2.$$

Таким образом, вычисляемые с помощью соотношений (a), (b) и (c) температуры равны

$$T_1 = 30 + 0{,}5 \cdot 10^6(9{,}8575 \cdot 10^{-7}) = 30{,}493\text{°С},$$

$$T_2 = 30 + 0{,}5 \cdot 10^6(6{,}69725 \cdot 10^{-6}) + 1{,}5 \cdot 10^6(9{,}8575 \cdot 10^{-7}) = 34{,}827\text{°С},$$

$$T_3 = T_0 + 0{,}5 \cdot 10^6(1{,}029025 \cdot 10^{-5}) + 1{,}5 \cdot 10^6(6{,}69725 \cdot 10^{-6}) + 2{,}5 \cdot 10^6(9{,}8575 \cdot 10^{-7}) = 47{,}655\text{°С}.$$

Точные значения температуры получаются из решения Карслоу и Егера [10]:

$$T = T_0 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\alpha k}\right)(4\alpha t)^{3/2} \, i^3\text{erfc}[(4t_x^+)^{-1/2}] \ , \tag{3.2.13}$$

где

$$i^3\text{erfc}(z) = [(1 + z^2)\pi^{-1/2} e^{-z^2} - z(1{,}5 + z^2)\,\text{erfc}(z)]/6 \ . \tag{3.2.14}$$

Температуры $T_1$, $T_2$ и $T_3$ вычисляются по формуле (3.2.13) в моменты времени 1, 2 и 3 с, что эквивалентно значениям $t_x^+$ = 0,1; 0,2 и 0,3. Полученные в результате точные значения равны

$$T_1 = 30{,}1876\text{°С}, \quad T_2 = 34{,}0743\text{°С}, \quad T_3 = 46{,}7255\text{°С} \ .$$

Следовательно, погрешности приближенного вычисления температур составляют +0,305, 0,753 и 0,930 соответственно. Эти погрешности увеличиваются, однако относительно точиого *изменения* температуры они уменьшаются и составляют, в частиости, 16,3; 18,5 и 5,6% соответственно.

### 3.2.3. Матричная форма

Алгебраические преобразования часто удобно производить с использованием матричной формы представления модели. В данном разделе матричная форма применяется для численной формулировки теоремы Дюамеля.

Обобщение уравнения (3.2.12), определяющего аппроксимацию интеграла Дюамеля при постоянных составляющих плотности теплового потока, обеспечивается заменой $M$ на $M + r - 1$. В этом случае имеем соотношения

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_0 + q_1\Delta\phi_0 \,, \\
T_2 &= T_0 + q_1\Delta\phi_1 + q_2\Delta\phi_0 \,, \\
T_3 &= T_0 + q_1\Delta\phi_2 + q_2\Delta\phi_1 + q_3\Delta\phi_0 \,, \\
&\vdots \\
T_M &= T_0 + q_1\Delta\phi_{M-1} + q_2\Delta\phi_{M-2} + \cdots + q_{M-1}\Delta\phi_1 + q_M\Delta\phi_0 \,, \\
T_{M+1} &= T_0 + q_1\Delta\phi_M + q_2\Delta\phi_{M-1} + \cdots + q_M\Delta\phi_1 + q_{M+1}\Delta\phi_0 \,, \\
&\vdots \\
T_{M+r-1} &= T_0 + q_1\Delta\phi_{M+r-2} + \cdots + q_{M+r-2}\Delta\phi_1 + q_{M+r-1}\Delta\phi_0 \,,
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

которые можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_M \\ T_{M+1} \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & & & \\ \Delta\phi_2 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \Delta\phi_{M-1} & \Delta\phi_{M-2} & \Delta\phi_{M-3} & \cdots & \Delta\phi_0 & & \\ \Delta\phi_M & \Delta\phi_{M-1} & \Delta\phi_{M-2} & \cdots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \Delta\phi_{M+r-2} & \Delta\phi_{M+r-3} & \Delta\phi_{M+r-4} & \cdots & \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2} & \cdots \quad \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix} + T_0\mathbf{1} \,, \tag{3.2.16}$$

где $\mathbf{1}$ — единичный вектор. Более компактная запись уравнения (3.2.16) имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{q} + T_0\mathbf{1} \,, \tag{3.2.17}$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{q}$ — представленные в уравнении (3.2.16) соответствующие векторы, а $\mathbf{X}$ — нижняя треугольная матрица,

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}
\Delta\phi_0 & & & & & & \\
\Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & & & \\
\Delta\phi_2 & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\Delta\phi_{M-1} & \Delta\phi_{M-2} & \Delta\phi_{M-3} & \cdots & \Delta\phi_0 & & \\
\Delta\phi_M & \Delta\phi_{M-1} & \Delta\phi_{M-2} & \cdots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\Delta\phi_{M+r-2} & \Delta\phi_{M+r-3} & \Delta\phi_{M+r-4} & \cdots & \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2}\cdots & \Delta\phi_0
\end{bmatrix} \tag{3.2.18a}$$

Матрица **X** называется матрицей импульсных коэффициентов чувствительности относительно **q**. По структуре она является нижней треугольной матрицей, на главной диагонали которой расположены элементы $\Delta\phi_0$, на следующей диагонали — элементы $\Delta\phi_1$ и т. д. Элементы матрицы **X** называются коэффициентами чувствительности, поскольку они равны первым производным температуры по компонентам плотности теплового потока. Используя соотношения (3.2.15), можно убедиться, что $ij$-й элемент матрицы **X** равен

$$X_{ij}=\frac{\partial T_i}{\partial q_j}=\begin{cases}\Delta\phi_{i-j}, & i\geqslant j\ ,\\ 0, & i<j\ .\end{cases} \tag{3.2.18b}$$

Это соотношение показывает, что в линейных задачах $X_{ij}$ зависит только от разности между $i$ и $j$.

При использовании анализируемых в гл. 4 последовательных методов решения обратных задач теплопроводности предполагается, что компоненты плотности теплового потока $q_1, q_2, \ldots, q_{M-1}$ уже оценены ранее и их оценки обозначаются $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_{M-1}$. Далее необходимо оценить $q_M, q_{M+1}, \ldots, q_{M+r-1}$. При этом на границе $x = L$ может быть известна плотность теплового потока, задано условие конвективного теплообмена или же известна мощность внутреннего объемного источника тепла. В таких случаях удобно использовать модифицированную форму уравнения (3.2.17):

$$\mathbf{T}=\mathbf{X}\mathbf{q}+\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}\ . \tag{3.2.19}$$

Это выражение называется стандартной формой представления температуры для линейных ОЗТ. Данное уравнение представляет собой не только численную форму теоремы Дюамеля. Для линейной обратной задачи теплопроводности его можно получить и с использованием рядов Тейлора. Составляющие уравнения (3.2.19) имеют вид

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}T_M\\ T_{M+1}\\ \vdots\\ T_{M+r-1}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{q}=\begin{bmatrix}q_M\\ q_{M+1}\\ \vdots\\ q_{M+r-1}\end{bmatrix}, \tag{3.2.20a,b}$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\Delta\phi_0 & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2} & \cdots & \Delta\phi_0\end{bmatrix}, \tag{3.2.21}$$

$$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}=\begin{bmatrix}\hat{T}_M|_{q_M=0}\\ \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0}\\ \vdots\\ \hat{T}_{M+r-1}|_{q_M=q_{M+1}=\cdots=q_{M+r-1}=0}\end{bmatrix}. \qquad (3.2.22)$$

Соотношения (3.2.19)—(3.2.22) применяются для численного определения свертки, а также в методах конечных разностей. В случае если оценивается не $q$, а мощность источников тепла или энергии, необходимо четко определить $\mathbf{X}$ и $\mathbf{T}\,|_{q=0}$.

Требуемые для вычисления элементов $\mathbf{X}$ величины $\phi_i$ представляют собой прирост температуры в точке размещения датчика при единичном ступенчатом изменении плотности теплового потока на поверхности в момент времени $t = 0$. Эти величины определяются для дифференциального уравнения в частных производных и граничных условий того же вида, что и исходная задача, за исключением того, что дифференциальные уравнения и граничные условия (кроме условий при $x = 0$) являются однородными. В качестве примера рассмотрим задачу для полого цилиндра:

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{g(r,t)}{k},\quad a<r<b\ , \qquad (3.2.23)$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a}=q(t),\ \text{неизвестная плотность теплового потока}, \qquad (3.2.24a)$$

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=b}=h[T(b,t)-T_\infty(t)]\ , \qquad (3.2.24b)$$

$$T(r,0)=F(r)\ . \qquad (3.2.25)$$

Задача для $\phi(r, t)$ является решением задачи для $\partial T/\partial q_c$, где $q(t) = q_c$, и имеет вид

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=\rho c\frac{\partial\phi}{\partial t}\ , \qquad (3.2.26)$$

$$-k\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a}=1\ , \qquad (3.2.27a)$$

$$-k\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=b}=h\phi(b,t)\ , \qquad (3.2.27b)$$

$$\phi(r,0)=0\,. \qquad (3.2.28)$$

Заметим, что единственное неоднородное условие имеет место на нагреваемой поверхности при $r = a$. Величина $\phi_i$ определяется из решения задачи (3.2.26)—(3.2.28) для точки размещения датчика и момента времени $t_i$.

Символом $\hat{T}_M|_{q=0}$ обозначается вычисленная температура для модели в момент времени $t_M$ при оцененных значениях компонент плотности теплового потока $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, ..., $\hat{q}_{M-1}$ и при нулевом значении $q_M$. Например, для модели, определяемой уравнениями (3.2.23)—(3.2.25), в уравнении (3.2.23) используются известные значения $g(r, t)$, в (3.2.24 b) — известные значения $T_\infty(t)$, а также заданное начальное распределение температуры $F(r)$. Температура в точке расположе-

ния датчика вычисляется в момент времени $t_M$ при указанных условиях и при значении плотности теплового потока, равном $\hat{q}_1$ на интервале $0 < t < \Delta t$, $\hat{q}_2$ для $\Delta t < t < 2\Delta t$, ..., $\hat{q}_{M-1}$ для $t_{M-2} < t < t_{M-1}$ и $\hat{q}_M = 0$ для $t_{M-1} < t < t_M$. Температура $\hat{T}_{M+1}|_{q_M = q_{M+1} = 0}$ в точке размещения датчика и в момент времени $t_{M+1}$ вычисляется аналогичным образом при известных значениях $\hat{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M-1$ и при $q_M = q_{M+1} = 0$. В случае если в уравнении (3.2.23) $g(r, t) = 0$, в (3.2.24b) — $T_\infty(t) = T_0$ и в (3.2.25) — $T(r, 0) = T_0$, вектор $\hat{T}|_{q=0}$ выражается следующим образом:

$$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} + T_0 \\ \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i+1} + T_0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i+r-1} + T_0 \end{bmatrix}. \qquad (3.2.29)$$

Уместно сравнить уравнения (3.2.17) и (3.2.19). Хотя используемые в этих двух уравнениях обозначения очень похожи, на самом деле уравнения совершенно различны. Уравнение (3.2.17) в более явной форме имеет вид (3.2.16), где представлены значения температуры, начиная с момента времени $t_1$ до $t_{M+r-1}$. Более того, учитывается только одно тепловое воздействие на тело, а именно тепловой поток на поверхности с неизвестной плотностью. При этом начальное распределение температуры равно постоянной величине $T_0$. Уравнение (3.2.19) является более общим и охватывает как частный случай уравнение (3.2.16) или (3.2.17) при $M = 1$ и $\hat{T}_1|_{q_1=0} = T_0$ соответственно. С помощью уравнения (3.2.19) можно также рассматривать случай произвольного распределения температуры в момент времени $t_{M-1}$ и известной плотности теплового потока при $x = L$ [или другие неоднородные условия, как это показано в уравнениях (3.2.23) и (3.2.24)].

## 3.3. Разностные методы

Теорема Дюамеля является мощным методом решения широкого круга линейных задач теплопроводности. К сожалению, существует много ситуаций, в которых применение этого метода затруднительно или его совсем нельзя применять. Наиболее жесткие ограничения возникают при анализе нелинейных задач, когда теплофизические свойства тел зависят от температуры. Во многих тепловых задачах изменение температуры тела, на которое воздействует тепловой поток, достаточно велико, и поэтому теплофизические свойства изменяются существенно. К счастью, можно использовать численные методы и преобразовать нелинейное уравнение теплопроводности в частных производных в систему линейных алгебраических уравнений относительно температуры в дискретных точках тела.

### 3.3.1. Метод конечного контрольного объема для тел плоской геометрической формы с постоянными свойствами

Существует много способов дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных. Наиболее распространенными являются метод конечных раз-

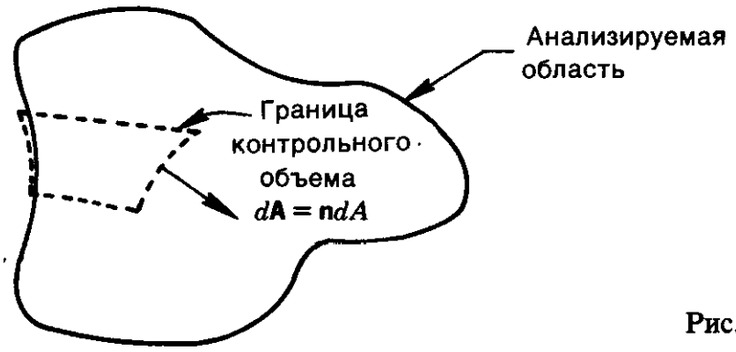



Рис. 3.2. Типичный коиечиый контрольный объем.

ностей и метод конечных элементов. Здесь используется другой подход, в котором для контрольных объемов непосредственно применяется закон сохранения энергии. В методе конечного контрольного объема (ККО) используется контрольный объем произвольной формы и конечных размеров, как показано на рис. 3.2, и для этого объема записывается уравнение энергии в интегральной форме. В случае неподвижного твердого тела закон сохранения энергии требует, чтобы сумма тепловых потоков через ограничивающие поверхности контрольного объема и скорости изменения энергии внутри контрольного объема была равна скорости выделения энергии внутри этого объема. Закон сохранения энергии можно записать в следующей форме:

$$\iint_A \mathbf{q}\cdot d\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathscr{V}} \rho e\, d\mathscr{V} = \iiint_{\mathscr{V}} e'''\, d\mathscr{V}, \tag{3.3.1}$$

где $A$ и $\mathscr{V}$ — площадь ограничивающей поверхности и объем контрольного объема соответственно, $\mathbf{q}$ — вектор плотности выходящего через поверхность контрольного объема теплового потока, $e$ — удельная энергия (энергия на единицу массы), $e'''$ — скорость выделения на единицу объема. У показанного на рис. 3.2 контрольного объема часть границы совпадает с границей тела, а остальная часть находится внутри тела. Следовательно, поверхностный интеграл от плотности теплового потока может включать в себя как плотность теплового потока от внешних источников (граничные условия), так и тепло, подводимое к данному контрольному объему от граничащих с ним контрольных объемов.

Для того чтобы показать особенности метода конечного контрольного объема, уравнение (3.3.1) в записанной выше форме является слишком общим. Сосредоточим наше внимание на одномерных плоских задачах и разделим рассматриваемое тело на одинаковые участки (называемые элементами) (рис. 3.3). Каждый элемент имеет свои теплофизические характеристики, а граница элемента может также соответствовать и поверхности раздела материалов. Границы контрольных объемов выбраны таким образом, чтобы они находились в средней плоскости каждого элемента, хотя эти границы могут выбираться до некоторой степени произвольно. Сделанный выбор границ контрольных объемов позволяет располагать два различных материала внутри одного контрольного объема. Каждый элемент содержит два узла, по одному на каждой границе элемента.

Вначале общее уравнение сохранения энергии (3.3.1) применяется для контрольного объема, окружающего узел 1. В увеличенном виде этот контрольный объем показан на рис. 3.4, *а*. В результате получим

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{\Delta x/2} - q(t) + \frac{d}{dt}\int_0^{\Delta x/2} \rho c T\, dx = 0\,, \tag{3.3.2}$$

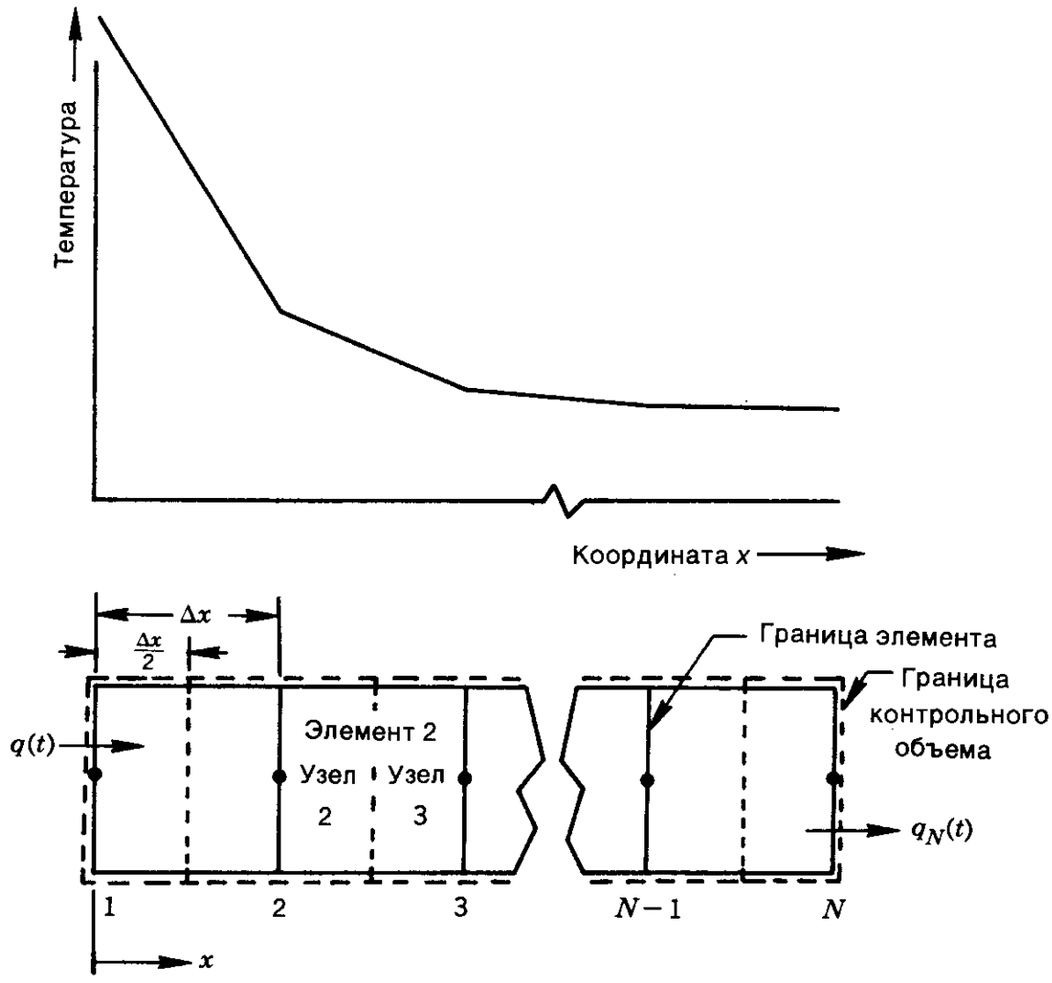



Рис. 3.3. Элементы и контрольные объемы для одномерной модели плоской геометрической формы.

где содержание энергии определяется по формуле $e = cT$ и $e''' = 0$. Для произвольного внутреннего узла $j$ и находящегося на задней поверхности узла $N$ (рис. 3.4, *b* и 3.4, *c* соответственно) уравнение сохранения энергии приводит к соотношениям

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_j+\Delta x/2}+k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_j-\Delta x/2}+\frac{d}{dt}\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j+\Delta x/2}\rho cT\,dx=0\,, \tag{3.3.3}$$

$$q_N(t)+k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_N-\Delta x/2}+\frac{d}{dt}\int_{x_N-\Delta x/2}^{x_N}\rho cT\,dx=0\,. \tag{3.3.4}$$

В методе контрольного объема гарантируется поступление вытекающего из одного контрольного объема тепла в соседний. Для определения интегралов и производных в соотношениях (3.3.2)—(3.3.4) и построения для них удобных вы-

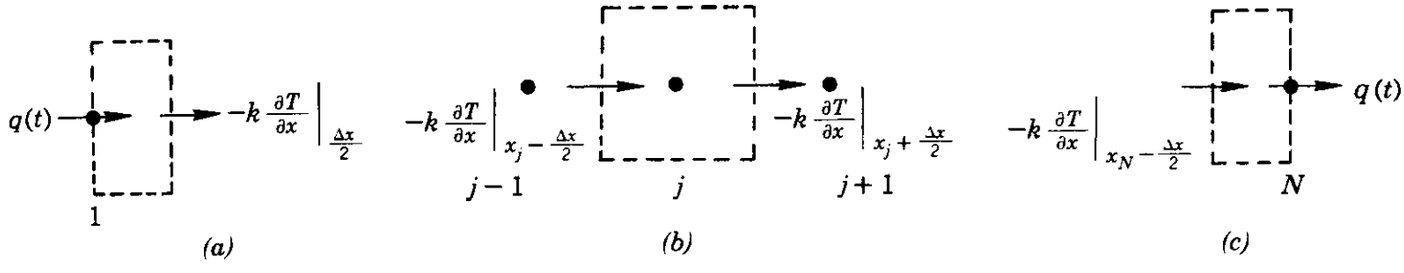



Рис. 3.4. Различные контрольные объемы: *a* — для узла 1 на нагреваемой поверхности; *b* — для произвольного внутреннего узла *j*; *c* — для узла *N* на задней поверхностн.

числительных алгоритмов необходимо сделать некоторые предположения относительно профиля температуры внутри каждого элемента. Можно сделать различные предположения, однако лучшим оказывается то, которое наиболее соответствует физическому смыслу. Например, в стационарном случае в плоском теле при заданных на границах температурах и постоянном значении $k$ профиль температуры является линейным. В нестационарном случае профиль температуры предполагается линейным для элемента. Для имеющего размеры $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$ элемента предполагаемый профиль температуры имеет вид

$$T(x)=T_{j-1}\frac{(x-x_j)}{(x_{j-1}-x_j)}+T_j\frac{(x-x_{j-1})}{(x_j-x_{j-1})}, \quad x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j\ , \tag{3.3.5}$$

где $T_j = T(x_j)$ — значение температуры в узле. Выражение (3.3.5) записано в форме интерполяционного полинома Лагранжа. Локальная плотность теплового потока вычисляется путем дифференцирования выражения (3.3.5) и использования закона Фурье.

$$q(x)=-k\frac{\partial T}{\partial x}=-k\frac{(T_j-T_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}, \quad x_{j-1}<x<x_j\ . \tag{3.3.6}$$

Поскольку профиль температуры в элементе линеен, плотность теплового потока в элементе постоянна, однако она изменяется при переходе от одного элемента к другому.

Предполагая, что объемная теплоемкость $\rho c$ в каждом элементе постоянна, для получения численного выражения для члена, определяющего накопление тепла, требуется вычислить интегралы вида $\int T(x)dx$. Эти интегралы удобно записать для отдельных частей элементов, а затем учесть соответствующую долю в балансе энергии для всего контрольного объема. Используя выражение (3.3.5), вычислим два отдельных интеграла

$$\int_{x_j}^{x_j+\Delta x/2} T\,dx=\frac{\Delta x}{2}\left(\tfrac{3}{4}T_j+\tfrac{1}{4}T_{j+1}\right)\ , \tag{3.3.7}$$

$$\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j} T\,dx=\frac{\Delta x}{2}\left(\tfrac{1}{4}T_{j-1}+\tfrac{3}{4}T_j\right)\cdot \tag{3.3.8}$$

Заметим, что величины интегралов (3.3.7) и (3.3.8) пропорциональны средней температуре *половины* элемента.

С учетом линейности профилей температуры в элементах баланс энергии для конечных контрольных объемов, соответствующих узлам 1, $j$ и $N$, имеет вид

$$k\frac{(T_1-T_2)}{\Delta x}-q(t)+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{3}{4}T_1+\tfrac{1}{4}T_2\right)=0\ , \tag{3.3.9}$$

$$k\frac{(T_j-T_{j+1})}{\Delta x}-k\frac{(T_{j-1}-T_j)}{\Delta x}+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{4}T_{j-1}+\tfrac{3}{4}T_j\right)+$$

$$+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{3}{4}T_j+\tfrac{1}{4}T_{j+1}\right)=0, \quad j=2,3,\ldots,\ N-1\ , \tag{3.3.10}$$

$$q_N(t)-k\frac{(T_{N-1}-T_N)}{\Delta x}+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{4}T_{N-1}+\tfrac{3}{4}T_N\right)=0\ . \tag{3.3.11}$$

Эти уравнения представляют собой систему $N$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по времени. Таким образом, после сделанного предположения о профиле температуры в элементе и интегрирования по пространственной переменной метод конечного контрольного объема приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (в противоположность одному дифференциальному уравнению в частных производных). Заметим, что в уравнениях (3.3.9)—(3.3.11) каждый из характеризующих накопление тепла членов содержит соответствующую долю от узла, расположенного вне рассматриваемого контрольного объема. Это объясняется тем, что линейный профиль температуры элемента определяется температурами в двух узлах, один из которых расположен за пределами рассматриваемого контрольного объема. Приведенные выше результаты иногда относят к так называемым эффектам распределенной теплоемкости, поскольку теплоемкость контрольного объема может распределяться по крайней мере между тремя узлами.

Другим способом получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для описания процесса теплопроводности в твердом теле является метод конечных разностей (КР). Этот способ связывают также с сосредоточенной теплоемкостью (СТ), так как в этом случае вся теплоемкость каждого внутреннего контрольного объема сосредоточивается в центральной узловой точке данного объема. Последнее достигается заменой в уравнении (3.3.10) $\left(\frac{1}{4}T_{j-1}+\frac{3}{4}T_j\right)$ на $T_j$ и $\left(\frac{3}{4}T_j+\frac{1}{4}T_{j+1}\right)$ на $T_j$. Для контрольных объемов, прилегающих к поверхности, $\left(\frac{3}{4}T_1+\frac{1}{4}T_2\right)$ заменяется на $T_1$, а $\left(\frac{1}{4}T_{N-1}+\frac{3}{4}T_N\right)$ — на $T_N$. Более подробное изложение разностных методов можно найти в работах [9, 15, 21—23].

Еще одним методом, используемым для численного решения задач теплопроводности, является метод конечных элементов (КЭ) [11—14]. Для получения системы дифференциальных уравнений в этом методе могут применяться различные подходы. Среди них наиболее простым является метод взвешенных невязок Галеркина, в котором требуется равенство нулю величины интегрального взвешенного среднего для дифференциального уравнения в частных производных в некоторой области. Например, для пластины

$$\int_0^L w(x)\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)dx=0\,, \tag{3.3.12}$$

где $L$ — толщина пластины, а $w(x)$ — подлежащая определению весовая функция. Существует бесконечное число возможных весовых функций. Суть приема состоит в выборе такой весовой функции, которая обеспечивала бы наилучшие результаты. Широкое распространение получила показанная на рис. 3.5 весовая функция

$$\begin{aligned} w(x)=w_j(x)&=\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, \quad x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j\,,\\ w(x)=w_j(x)&=\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, \quad x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}\,,\\ w(x)=w_j(x)&=0 \quad \text{при остальных } x\,. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

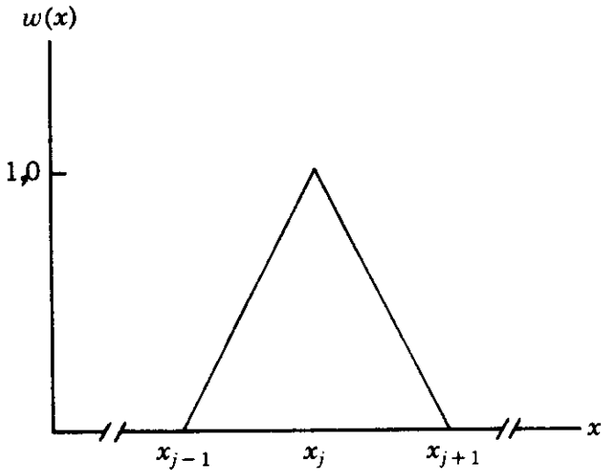



Рис. 3.5. Весовая функция для метода взвешенных невязок Галеркина.

Следует указать на сходство между весовой функцией $w(x)$ и интерполяционным полиномом Лагранжа в выражении (3.3.5), а также на то, что каждый узел $j$ имеет свою весовую функцию. Так как весовая функция $w_j(x)$ на большей части области $0 \leqslant x \leqslant L$ равна нулю, уравнение (3.3.12) можно записать в виде

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} w_j(x)\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)dx=0\,. \tag{3.3.14}$$

Используя предположение о линейности профиля температуры в элементе и формулы (3.3.13) для определения $w_j(x)$, можно записать конечно-элементное уравнение для произвольного внутреннего узла в виде

$$k\frac{(T_j-T_{j+1})}{\Delta x}-k\frac{(T_{j-1}-T_j}{\Delta x}+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{3}T_{j-1}+\tfrac{2}{3}T_j\right)+$$

$$+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{2}{3}T_j+\tfrac{1}{3}T_{j+1}\right)=0,\quad j=2,3,\ldots,N-1\,. \tag{3.3.15}$$

Единственное различие между результатами, полученными методами конечного контрольного объема и конечных элементов, состоит в разных весовых коэффициентах в содержащих теплоемкость членах. В методе контрольного объема температура $T_j$ в центре обладает бóльшим весом. Для узлов, расположенных на поверхности, конечно-элементные уравнения имеют вид

$$k\frac{(T_1-T_2)}{\Delta x}-q(t)+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{2}{3}T_1+\tfrac{1}{3}T_2\right)=0\,, \tag{3.3.16}$$

$$q_N(t)-k\frac{(T_{N-1}-T_N)}{\Delta x}+\rho c\frac{\Delta x}{2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{3}T_{N-1}+\tfrac{2}{3}T_N\right)=0\,. \tag{3.3.17}$$

В работе [16] Леммон и Хитон показали, что если весовую функцию $w(x)$ выбрать в виде дельта-функции Дирака

$$w_j(x)=\delta(x-x_j)=\begin{cases}1, & x=x_j\,,\\ 0 & \text{при остальных } x\,,\end{cases} \tag{3.3.18}$$

то результаты, полученные методом конечных элементов и для сосредоточенной теплоемкости, идентичны. Этот метод называют также методом коллокации. Дополнительные подробности, касающиеся метода конечных элементов, можно найти в работах [12—14, 24].

Результаты, полученные для методов конечного контрольного объема, сосре-

доточенной теплоемкости и конечных элементов, можно представить в единой форме:

$$\frac{d}{dt}(\beta T_1+\gamma T_2)=-\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1-T_2)+\frac{q(t)}{\rho c\Delta x}\ , \tag{3.3.19}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma T_{j-1}+2\beta T_j+\gamma T_{j+1})=-\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_j-T_{j+1})+\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{j-1}-T_j)\ , \tag{3.3.20}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma T_{N-1}+\beta T_N)=\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{N-1}-T_N)-\frac{q_N(t)}{\rho c\Delta x}\ , \tag{3.3.21}$$

где $\beta$ и $\gamma$ имеют следующие значения:

| | $\beta$ | $\gamma$ | $\beta+\gamma$ |
|---|---|---|---|
| СТ | 1/2 | 0 | 1/2 |
| ККО | 3/8 | 1/8 | 1/2 |
| КЭ | 2/6 | 1/6 | 1/2 |

(3.3.22)

Уравнения (3.3.19)—(3.3.21) применимы в случае, когда теплофизические характеристики не зависят от температуры, однако их легко распространить на задачи с учетом зависимости теплофизических свойств от температуры.

### 3.3.2. Другие граничные условия и учет поверхностей раздела материалов

В разд. 3.3.1 рассмотрено имеющее постоянные свойства плоское тело при граничном условии с заданной плотностью теплового потока. Весьма часто используется также граничное условие, в котором плотность теплового потока выражается через коэффициент теплоотдачи и действующий потенциал в форме разности температур. В последнем случае баланс энергии для контрольного объема, окружающего узел 1, можно получить непосредственно из уравнения

$$\frac{d}{dt}(\beta T_1+\gamma T_2)=-\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1-T_2)+\frac{h}{\rho c\Delta x}(T_\infty-T_1)\ . \tag{3.3.23}$$

Заметим, что в граничные условия конвективного теплообмена входит температура поверхности.

Метод конечного контрольного объема можно легко распространить и на элементы, имеющие неодинаковые размеры и различные теплофизические свойства материалов. Такой контрольный объем показан на рис. 3.6. Два соседних элемента обозначены ($e$) и ($e$ + 1), при этом каждый из них имеет свои собственные,




Рис. 3.6. Контрольный объем для поверхности раздела материалов.

зависящие от температуры свойства $(\rho c)^{(e)}$ и $k^{(e)}$. Запишем баланс энергии

$$k^{(e+1)}\frac{T_j-T_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}-k^{(e)}\frac{T_{j-1}-T_j}{x_j-x_{j-1}}+(\rho c)^{e}(x_j-x_{j-1})\frac{d}{dt}(\gamma T_{j-1}+\beta T_j)+$$

$$+(\rho c)^{(e+1)}(x_{j+1}-x_j)\frac{d}{dt}(\beta T_j+\gamma T_{j+1})=0\,. \qquad (3.3.24)$$

Коэффициент теплопроводности вычисляется в средней плоскости каждого элемента. В случае линейного температурного профиля в элементе $(e)$ соответствующая температура равна $\overline{T}^{(e)} = (T_{j-1} + T_j)/2$. Выбор температуры, при которой вычисляется объемная теплоемкость, осуществляется несколькими способами. Самый простой способ заключается в использовании для вычисления $(\rho c)^{(e)}$ средней температуры элемента и присвоении этой величины обеим половинам элемента. Немного более сложный способ состоит в вычислении средней температуры для каждой половины элемента и последующем расчете объемной теплоемкости при этой температуре. Например, правая половина элемента $(e)$ входит в контрольный объем $j$ и средняя температура этой половины равна

$$\bar{T}_R^{(e)}=\tfrac{1}{2}[\bar{T}^{(e)}+T_j]=\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(T_{j-1}+T_j)+T_j]=\tfrac{3}{4}T_j+\tfrac{1}{4}T_{j-1}\,, \qquad (3.3.25)$$

где подстрочный индекс $R$ означает правую половину элемента $(e)$. Аналогично получим среднюю температуру левой половины элемента $(e + 1)$:

$$\bar{T}_L^{(e+1)}=\tfrac{3}{4}T_j+\tfrac{1}{4}T_{j+1}\,. \qquad (3.3.26)$$

Необходимо отметить, что при вычислении значений, зависящих от температуры теплофизических свойств, требуется некоторая осторожность. Большинство теплофизических характеристик известно в лучшем случае с точностью $\pm 5\%$. Следовательно, нет никакой необходимости разрабатывать слишком сложные способы точного вычисления зависящих от температуры теплофизических свойств, которые известны весьма неточно. Во многих случаях более чем достаточно использовать простейшие способы.

### 3.3.3. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

В принципе возможно аналитическое решение системы уравнений энергетического баланса (3.3.19)—(3.3.21). Однако применение численных методов обеспечивает решение более общих задач и они легко могут быть использованы в случае зависящих от температуры теплофизических свойств. На сегодняшний день существует большое многообразие численных методов.

Одним из простейших является метод Эйлера (или правой разности, ПР), который можно получить, исходя из разложения в ряд Тейлора. Пусть $u(t)$ — функция времени, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du}{dt}=f(u,t)\,. \qquad (3.3.27)$$

Разлагая $u(t + \Delta t)$ в ряд Тейлора в окрестности момента времени $t$, получим

$$u(t+\Delta t)=u(t)+\frac{du(t)}{dt}\Delta t+\cdots \qquad (3.3.28)$$

Если пренебречь членами $O(\Delta t^2)$, то для $u(t+\Delta t)$ имеет место соотношение

$$u(t+\Delta t) \approx u(t) + f[u(t), t]\Delta t. \tag{3.3.29}$$

Обозначим $u(t_n)$ через $u_n$. Тогда выражение (3.3.28) можно записать в виде

$$u_{n+1} = u_n + f(u_n, t_n)\Delta t = u_n + \left.\frac{du}{dt}\right|_n \Delta t \quad \text{(ПР)}. \tag{3.3.30}$$

Построенный в соответствии с формулой (3.3.30) алгоритм иллюстрируется на рис. 3.7. Он состоит в простой экстраполяции наклона из точки $(u_n, t_n)$ в точку $(u_{n+1}, t_{n+1})$. Например, метод Эйлера применяется для уравнения (3.3.19) при $\beta = 1/2$, $\gamma = 0$ (сосредоточенная теплоемкость). Нижний индекс у $T$ обозначает номер узла, а верхний индекс используется для обозначения момента времени

$$T_1^{n+1} = T_1^n - 2p(T_1^n - T_2^n) + \frac{2q^n \Delta t}{\rho c \Delta x}, \tag{3.3.31}$$

где $p = \alpha\Delta t/\Delta x^2$ — число Фурье для пространственно-временно́й сетки. Метод Эйлера для сосредоточенной теплоемкости известен также как явный метод, так как в уравнении (3.3.31) $T_1^{n+1}$ можно выразить в явном виде относительно известных только в момент времени $n$ температур. Он имеет и другое название — метод правой разности, поскольку производная по времени заменяется правой разностью. Для сосредоточенной теплоемкости явные результаты можно получить и из уравнений (3.3.20) и (3.3.21).

На рис. 3.7. показано, что если кривая, описывающая точное решение, вогнута вверх, то метод Эйлера дает заниженные значения температуры. С целью улучшения устойчивости часто применяется левая разность по времени (ЛР). Уравнение для этого случая получается так же, как и (3.3.28), и имеет вид

$$u_n = u_{n+1} - u'_{n+1}\Delta t + u''_{n+1}\frac{\Delta t^2}{2!} - \cdots. \tag{3.3.32}$$

Пренебрегая членами $O(\Delta t^2)$ и используя левую разность, получим

$$u_{n+1} \approx u_n + u'_{n+1}\Delta t \quad \text{(ЛР)}. \tag{3.3.33}$$

Интегрирование с помощью левой разности известно также, как полностью неявный метод, так как в правой части содержится неизвестная величина $u_{n+1}$. Центральная разность (ЦР) обеспечивает (при определенных условиях) более высокую точность вычисления производной по времени, чем правая и левая разности. Уравнение для этого случая можно получить, используя следующие разложения

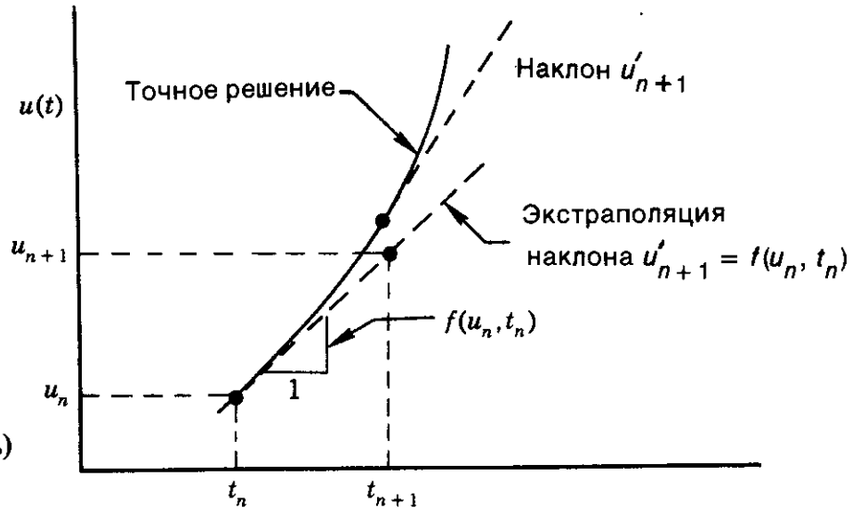



Рис. 3.7. Метод Эйлера (правая разность) и неявный метод (левая разность).

в ряд Тейлора:

$$u_{n+1/2}=u_n+u'_n\frac{\Delta t}{2}+\frac{u''_n}{2!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2+\cdots\ , \tag{3.3.34}$$

$$u_{n+1/2}=u_{n+1}-u'_{n+1}\frac{\Delta t}{2}+\frac{u''_{n+1}}{2!}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2-\cdots\ . \tag{3.3.35}$$

Приравнивая эти два выражения и разрешая относительно $u_{n+1}$, получим формулу интегрирования с центральной разностью:

$$u_{n+1}\approx u_n+(u'_n+u'_{n+1})\frac{\Delta t}{2}\ , \tag{3.3.36}$$

которая известна как метод Кранка — Николсона. В работе [18] Розенберг описывает метод Кранка — Николсона как последовательное применение формулы интегрирования с правой и левой разностями. Интегрирование с помощью правой, левой и центральной разностей можно записать в виде общей формулы:

$$u_{n+1}=u_n+[\theta u'_{n+1}+(1-\theta)u'_n]\Delta t\ . \tag{3.3.37}$$

Три частных случая определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}&\theta=0,\quad \text{правая разность (Эйлера)}\ ,\\ &\theta=\frac{1}{2},\ \text{центральная разность (Кранка—Николсона)}\ ,\\ &\theta=1,\quad \text{левая разность (полностью неявная схема)}\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

### 3.3.4. Общая форма разностных уравнений для теплопроводности плоского тела

Общая формула интегрирования (3.3.37) для уравнений первого порядка позволяет преобразовать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в одно разностное уравнение. Следующий шаг заключается в преобразовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений в систему алгебраических разностных уравнений. Процедура применения общей формулы интегрирования (3.3.37) состоит в получении решения дифференциального уравнения в моменты времени $n+1$ и $n$, умножении полученных уравнений на $\theta$ и $(1-\theta)$ соответственно и сложении окончательных двух уравнений. Используя в качестве примера соотношение (3.3.19), получим

$$\theta\frac{d}{dt}(\beta T_1+\gamma T_2)^{n+1}=-\theta\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n+1}-T_2^{n+1})+\theta\frac{q^{n+1}}{\rho c\Delta x}\ ,$$

$$\theta'\frac{d}{dt}(\beta T_1+\gamma T_2)^{n}=-\theta'\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n}-T_2^{n})+\theta'\frac{q^{n}}{\rho c\Delta x}\ ,$$

где $\theta'=(1-\theta)$ и верхний индекс $n$ означает вычисление в момент времени $t_n$. Сложение этих двух уравнений дает

$$\theta\frac{d}{dt}(\beta T_1+\gamma T_2)^{n+1}+\theta'\frac{d}{dt}(\beta T_1+\gamma T_2)^{n}=-\theta\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n+1}-T_2^{n+1})-$$

$$-\theta'\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n}-T_2^{n})+\frac{1}{\rho c\Delta x}(\theta q^{n+1}+\theta' q^{n}). \tag{3.3.39}$$

Общую формулу интегрирования можно применить непосредственно к левой части уравнения (3.3.39). В результате имеем

$$\beta\frac{(T_1^{n+1}-T_1^n)}{\Delta t}+\gamma\frac{(T_2^{n+1}-T_2^n)}{\Delta t}=-\theta\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n+1}-T_2^{n+1})-$$

$$-\theta'\frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^n-T_2^n)+\frac{q^{n+\theta}}{\rho c\Delta x}\,, \qquad (3.3.40)$$

где для удобства используется следующее обозначение:

$$q^{n+\theta}\equiv\theta q^{n+1}+\theta' q^n. \qquad (3.3.41)$$

Уравнение (3.3.40) можно записать в более простом виде:

$$(p\theta+\beta)T_1^{n+1}-(p\theta-\gamma)T_2^{n+1}=-(p\theta'-\beta)T_1^n+(p\theta'+\gamma)T_2^n+\frac{\Delta t}{\rho c\Delta x}q^{n+\theta}. \qquad (3.3.42)$$

Применяя общую формулу интегрирования к уравнениям (3.3.20) и (3.3.21), получим

$$-(p\theta-\gamma)T_{j-1}^{n+1}+2(p\theta+\beta)T_j^{n+1}-(p\theta-\gamma)T_{j+1}^{n+1}=(p\theta'+\gamma)T_{j-1}^n+$$
$$+2(\beta-p\theta')T_j^n+(p\theta'+\gamma)T_{j+1}^n,\quad j=2,3,\ldots,N-1\,, \qquad (3.3.43)$$

$$-(p\theta-\gamma)T_{N-1}^{n+1}+(p\theta+\beta)T_N^{n+1}=(p\theta'+\gamma)T_{N-1}^n+(\beta-p\theta')T_N^n-\frac{\Delta t}{\rho c\Delta x}q_N^{n+\theta}\,. \qquad (3.3.44)$$

Уравнение (3.3.42)—(3.3.44) образуют систему $N$ линейных алгебраических уравнений с $N$ неизвестными. Эти алгебраические уравнения имеют весьма специфическую структуру, известную как трехдиагональная, которую можно наглядно представить, записав уравнения для постоянных теплофизических свойств в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} p\theta+\beta & -(p\theta-\gamma) & & & & \\ -(p\theta-\gamma) & 2(p\theta+\beta) & -(p\theta-\gamma) & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -(p\theta-\gamma) & p\theta+\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n+1} \\ T_N^{n+1} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \beta-p\theta' & \gamma+p\theta' & & & \\ \gamma+p\theta' & 2(\beta-p\theta') & \gamma+p\theta' & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma+p\theta' & \beta-p\theta' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{N-1}^n \\ T_N^n \end{bmatrix}+\frac{\Delta t}{\rho c\Delta x}\begin{bmatrix} q^{n+\theta} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -q_N^{n+\theta} \end{bmatrix}. \qquad (3.3.45)$$

Трехдиагональная матрица коэффициентов имеет ненулевые члены только на трех диагоналях. Такая трехдиагональная структура позволяет использовать для решения системы линейных алгебраических уравнений очень эффективный, специально приспособленный алгоритм исключения Гаусса. Детально этот алгоритм, известный как алгоритм Томаса, рассматривается в разд. 6.3.2. Уравнение (3.3.45) указывает на явную зависимость новых значений температуры от ста-

рых, а также от граничных условий. С вычислительной точки зрения правую часть уравнения (3.3.45) более компактно можно представить в виде постоянного вектора.

Интегрирование методом Эйлера (правая разность, $\theta = 0$) для сосредоточенной теплоемкости ($\beta = 1/2$, $\gamma = 0$) заслуживает специального рассмотрения. В этом случае матрица коэффициентов при неизвестных температурах становится диагональной. Следовательно, каждую неизвестную температуру $T_i^{n+1}$ можно выразить в явном виде через известные температуры $T_{i-1}^n$, $T_i^n$, $T_{i+1}^n$. При использовании метода конечного контрольного объема ($\beta = 3/8$, $\gamma = 1/8$) или метода конечных элементов ($\beta = 2/6$, $\gamma = 1/6$) в сочетании с методом интегрирования Эйлера ($\theta = 0$) все три диагонали матрицы коэффициентов являются ненулевыми, и, следовательно, термин «явное» интегрирование для этих случаев не подходит.

*Пример. 3.2.* Получите разностные уравнения с использованием аппроксимации Кранка — Николсона для плоской пластины, нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$. Положите $\Delta x = L/3$ и используйте модель сосредоточенной теплоемкости. Теплофизические характеристики не зависят от температуры.

*Решение.* Разностные уравнения можно получить, используя уравнение (3.3.45) при $N = 4$ (рис. 3.5). В этом случае имеются два граничных узла и два внутренних узла. Из соотношений (3.3.22) для случая сосредоточенной теплоемкости $\beta = 1/2$ и $\gamma = 0$, а из соотношений (3.3.38) для аппроксимации Кранка — Николсона $\theta = 1/2$. На теплоизолированной границе $q_4^{n+1/2} = 0$.

Подставляя указанные величины в уравнение (3.3.45) и умножая первое и последнее уравнения на 2, получим четыре разностных уравнения, которые в матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} p+1 & -p & 0 & 0 \\ -p/2 & p+1 & -p/2 & 0 \\ 0 & -p/2 & p+1 & -p/2 \\ 0 & 0 & -p & p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p/2 & 1-p & p/2 & 0 \\ 0 & p/2 & 1-p & p/2 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ T_3^n \\ T_4^n \end{bmatrix} + \frac{2\Delta t}{\rho c \Delta x} \begin{bmatrix} q^{n+1/2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Замечания по точности.* Для получения требуемой точности необходимо использовать достаточное число узлов $N$ и «малый» шаг по времени. Во многих случаях величина $N$, равная 20, является достаточной. Шаги по времени должны быть по крайней мере такими же, как и при измерениях температуры, но могут быть и существенно меньше. Удобно так выбрать вычислительный шаг по времени $\Delta t$, чтобы шаг между измерениями $\Delta t_{\text{изм}}$ удовлетворял соотношению

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{\text{изм}}}{i}, \tag{3.3.46}$$

где $i$ — положительное целое число. Чтобы выбрать пространственный шаг $\Delta x$, так же как и шаг по времени $\Delta t$, для каждого конкретного случая необходимо накопить некоторый опыт, поскольку на эти величины влияют многие факторы, включая рассматриваемый период времени, изменение теплофизических свойств в зависимости от температуры и изменение по времени плотности теплового потока. Для более детального рассмотрения этих вопросов следует обратиться к книгам по численным методам, например [6, 8, 9, 15].

### 3.3.5. Стандартная форма уравнений относительно температуры для обратной задачи теплопроводности

Цель данного раздела — показать, что разностные уравнения, получаемые с помощью методов конечных разностей, конечных элементов и конечного контрольного объема, можно использовать для получения такого же стандартного уравнения вида (3.2.19), которое было получено с применением теоремы Дюамеля. Здесь ограничимся рассмотрением линейной обратной задачи, однако почти такой же подход может быть использован и для квазилинейной задачи, которая анализируется в разд. 6.2.

Анализ можно проводить с применением как алгебраической, так и матричной формы записи, однако в силу большей общности и компактности матричная форма предпочтительнее. Если индекс $n+1$ заменить на $M$, то уравнение (3.3.45) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^M = \mathbf{B}\mathbf{T}^{M-1} + C\mathbf{q}^M + \mathbf{g}^M , \tag{3.3.47}$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица в левой части уравнения (3.3.45), $\mathbf{B}$ — квадратная матрица в правой части уравнения (3.3.45) и $C = \Delta t/\rho c\Delta x$. Векторы $\mathbf{T}^M$ и $\mathbf{q}^M$ имеют вид

$$\mathbf{T}^M = \begin{bmatrix} T_1^M \\ \vdots \\ T_N^M \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}^M = \begin{bmatrix} q^{M+\theta-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \tag{3.3.48}$$

где подстрочные индексы связаны с пространственными узлами, а надстрочные — со временем. Вектор $\mathbf{g}^M$ включает в себя любые *заданные* источники энергии, например, вследствие действия теплового потока при $x = L$, объемного тепловыделения или конвективного теплообмена. Если выбран метод решения Кранка — Николсона, то $\theta = 1/2$ и имеет место равенство

$$q^{M+\theta-1} = q^{M-1/2} ,$$

которое означает, что плотность теплового потока на поверхности вычисляется в момент времени $t_{M-1/2} = (M - 1/2)\Delta t$. Заметим, что $q^{M-1/2}$ является точно такой же компонентой плотности теплового потока, как и обозначаемая $q_M$ в методе Дюамеля [уравнение (3:2.2)].

Умножением на $\mathbf{A}^{-1}$ уравнение (3.3.47) разрешается относительно $\mathbf{T}^M$, при этом получим

$$\mathbf{T}^M = \mathbf{D}\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{E}\mathbf{q}^M + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M , \tag{3.3.49a}$$

где

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \equiv C\mathbf{A}^{-1} . \tag{3.3.49b,c}$$

(Хотя при вычислении $\mathbf{T}^M$ нахождение обратной $\mathbf{A}$ матрицы не является достаточно хорошей численной процедурой, здесь это удобно сделать чисто символически.) Заметим, что $\mathbf{T}^M$ линейно зависит от $\mathbf{q}^M$. Заменяя в уравнении (3.3.49a) $M$ на $M+1$, имеем

$$\mathbf{T}^{M+1} = \mathbf{D}\mathbf{T}^M + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1} , \tag{3.3.50}$$

а затем, используя соотношение (3.3.49a) для $\mathbf{T}^M$, получим

$$\mathbf{T}^{M+1} = \mathbf{D}^2\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^M + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1} . \tag{3.3.51}$$

Это выражение линейно относительно $\mathbf{q}^M$ и $\mathbf{q}^{M+1}$. Процедура замены $M$ в уравнении (3.3.49a) на $M+2$ дает выражение

$$\mathbf{T}^{M+2}=\mathbf{D}^3\mathbf{T}^{M-1}+\mathbf{D}^2\mathbf{E}\mathbf{q}^M+\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1}+\mathbf{E}\mathbf{q}^{M+2}+$$
$$+\mathbf{D}^2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+2}, \tag{3.3.52}$$

которое линейно относительно $\mathbf{q}^M$, $\mathbf{q}^{M+1}$ и $\mathbf{q}^{M+2}$.

Вследствие линейности уравнений (3.3.49a), (3.3.51) и (3.3.52) их можно записать в виде

$$\mathbf{T}^M=\hat{\mathbf{T}}^M|_{\mathbf{q}^M=0}+\mathbf{E}\mathbf{q}^M, \tag{3.3.53a}$$

$$\mathbf{T}^{M+1}=\hat{\mathbf{T}}^{M+1}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=0}+\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^M+\mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1}, \tag{3.3.53b}$$

$$\mathbf{T}^{M+2}=\hat{\mathbf{T}}^{M+2}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=\mathbf{q}^{M+2}=0}+\mathbf{D}^2\mathbf{E}\mathbf{q}^M+\mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1}+\mathbf{E}\mathbf{q}^{M+2}, \tag{3.3.53c}$$

где вычисляемые при равных нулю $\mathbf{q}^M$ температуры определяются следующим образом:

$$\hat{\mathbf{T}}^M|_{\mathbf{q}^M=0}=\mathbf{D}\mathbf{T}^{M-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M, \tag{3.3.53d}$$

$$\hat{\mathbf{T}}^{M+1}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=0}=\mathbf{D}^2\mathbf{T}^{M-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1}, \tag{3.3.53e}$$

$$\hat{\mathbf{T}}^{M+2}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=\mathbf{q}^{M+2}=0}=\mathbf{D}^3\mathbf{T}^{M-1}+\mathbf{D}^2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+2}. \tag{3.3.53f}$$

Заметим, что определяемые уравнениями (3.3.53d)—(3.3.53f) компоненты температуры линейно зависят только от распределения температуры в момент времени $t_{M-1}$ и от известных источников тепла в моменты времени $t_M$, $t_{M+1}$, $t_{M+2}$. Если векторы плотности теплового потока в последующие моменты времени равны нулю, то температуры равны соответствующим величинам, вычисляемым по уравнениям (3.3.53a)—(3.3.53c). В уравнениях (3.3.53a)—(3.3.53c) отражается важное свойство линейности относительно температур, определенных по уравнениям (3.3.53d)—(3.3.53f), а также плотностей тепловых потоков $\mathbf{q}^M$, $\mathbf{q}^{M+1}$ и $\mathbf{q}^{M+2}$.

Уравнения (3.3.53a)—(3.3.53c) представляют собой векторные уравнения относительно температур в каждом узле тела. В общем случае датчики температур расположены лишь в некоторых из этих узлов. Для простоты ниже рассматривается одиночный датчик, и его пространственное положение указывается с помощью нижнего индекса $K$. Для $K$-го узла уравнения (3.3.53a)—(3.3.53c) можно записать в виде

$$T_K^M=\hat{T}_K^M|_{q^M=0}+X_{11}q^M, \tag{3.3.54a}$$

$$T_K^{M+1}=\hat{T}_K^{M+1}|_{q^M=q^{M+1}=0}+X_{21}q^M+X_{11}q^{M+1}, \tag{3.3.54b}$$

$$T_K^{M+2}=\hat{T}_K^{M+2}|_{q^M=q^{M+1}=q^{M+2}=0}+X_{31}q^M+X_{21}q^{M+1}+X_{11}q^{M+2}, \tag{3.3.54c}$$

где для упрощения обозначения величина $\theta$ в $q^{M+\theta-1}$ выбрана равной единице. Символами $X_{11}$, $X_{21}$ и $X_{31}$ обозначены коэффициенты чувствительности в точке $K$. Как видно из выражений для элементов соответствующих матриц **E**, **DE** и $\mathbf{D}^2\mathbf{E}$, эти коэффициенты не зависят от номера шага по времени $M$. Коэффициен-

ты чувствительности $X_{11}$, $X_{21}$ и $X_{31}$ определяются следующим образом:

$$E_{K1}=\frac{\partial T_K^M}{\partial q^M}=\frac{\partial T_K^{M+1}}{\partial q^{M+1}}=\frac{\partial T_K^{M+2}}{\partial q^{M+2}}=X_{11}\ , \tag{3.3.54d}$$

$$\frac{\partial T_K^{M+1}}{\partial q^M}=\frac{\partial T_K^{M+2}}{\partial q^{M+1}}=X_{21}\ , \tag{3.3.54e}$$

$$\frac{\partial T_K^{M+2}}{\partial q^M}=X_{31}\ . \tag{3.3.54f}$$

Опуская нижний индекс $K$ у $\mathbf{T}$ и $\hat{\mathbf{T}}|_{q=0}$ уравнения (3.3.54), можно записать в стандартной матричной форме

$$\mathbf{T}=\mathbf{X}\mathbf{q}+\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}\ , \tag{3.3.55a}$$

где

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}T^M\\T^{M+1}\\T^{M+2}\end{bmatrix},\qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_{11}&&\\X_{21}&X_{11}&\\X_{31}&X_{21}&X_{11}\end{bmatrix}, \tag{3.3.55b, c}$$

$$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}=\begin{bmatrix}\hat{T}^M|_{q^M=0}\\\hat{T}^{M+1}|_{q^M=q^{M+1}=0}\\\hat{T}^{M+2}|_{q^M=q^{M+1}=q^{M+2}=0}\end{bmatrix}\ . \tag{3.3.55d}$$

Тогда как в уравнениях (3.3.47)—(3.3.53) векторы температуры относятся к узлам в один и тот же момент времени $t_M$, в уравнении (3.3.55) векторы температуры относятся к различным моментам времени. Уравнение (3.3.55a) называется стандартной формой уравнения для температуры, так как с помощью теоремы Дюамеля было выведено точно такое же уравнение (3.2.19). В уравнениях (3.3.55b)—(3.3.55d) верхний индекс $M$ обозначает *ту же самую* зависимость от времени, что и индекс $M$ в уравнениях (3.2.20a)—(3.2.20b) и (3.2.22a). Коэффициенты $X_{11}$, $X_{21}$ и $X_{31}$ соответствуют величинам, используемым в теореме Дюамеля

$$X_{11}=\Delta\phi_0,\quad X_{21}=\Delta\phi_1,\qquad X_{31}=\Delta\phi_2\ .$$

Если вычисления с помощью метода конечных разностей (или конечных элементов, или конечного контрольного объема) производятся достаточно точно, то числовые значения $X_{11}$ и $\Delta\phi_0$, $X_{21}$ и $\Delta\phi_1$ и т. д. будут почти одинаковы. Символ $\phi_i$ означает изменение температуры в момент времени $t_i$ и узле $x_k$, полученное при численном решении уравнения (3.3.47) для $q^{M+\theta-1}=1$, $i=M=1, 2, 3\ldots$ и $\mathbf{q}^M=0$.

Так как для $\mathbf{T}$ получается одна и та же стандартная форма уравнения (3.2.19) или (3.3.55), то для решения обратных задач теплопроводности можно разработать алгоритмы, которые не зависят от типа численной аппроксимации уравнения нестационарной теплопроводности. Вытекающие из этого обстоятельства преимущества используются в гл. 4 при построении общих алгоритмов. В гл. 5 для реализации алгоритмов из гл. 4 применяется теорема Дюамеля, а в гл. 6 — метод конечного контрольного объема.

# Литература


1. Keltner, N. R. and Beck, J. V., Unsteady Surface Element Method, *J. Heat Transfer* **103**, 759–764 (1981).
2. Beck, J. V. and Keltner, N. R., Transient Thermal Contact of Two Semi-Infinite Bodies Over a Circular Area, in *Spacecraft Radiative Transfer and Temperature Control*, T. E. Horton, ed., Vol. 83 of *Progress in Astronautics and Aeronautics* (1982), AIAA, 61–82.
3. Beck, J. V., Schisler, I. P. and Keltner, N. R., Simplified Laplace Transform Inversion for Unsteady Surface Element Method for Transient Conduction, *AIAA Journal*, **22**, 1328–1333, (1984).
4. Keltner, N. R. and Beck, J. V., Surface Temperature Measurement Errors, *J. Heat Transfer*, **105**, 312–318 (1983).
5. Litkouhi, B. and Beck, J. V., Intrinsic Thermocouple Analysis Using Multinode Unsteady Surface Element Method, AIAA Paper No. 83–1937. (To be published in AIAA Journal.)
6. Ozisik, M. N. *Heat Conduction*, Wiley, New York, 1980.
7. Luikov, A. V., *Analytical Heat Diffusion Theory*, Academic Press, New York, 1968.
8. Arpaci, V. S., *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
9. Myers, G. E., *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1971.
10. Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford, London, 1959.
11. Bathe, Klaus-Jurgen, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
12. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1977.
13. Norrie, D. H. and deVries, G., *An Introduction to Finite Element Analysis*, Academic Press, New York, 1978.
14. Becker, E. B., Carey, G. F., and Oden, J. T., *Finite Elements an Introduction*, Vol. 1, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
15. Smith, G. D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, New York, 1965.
16. Lemmon, E. C. and Heaton, H. S., Accuracy, Stability, and Oscillation Characteristics of Finite Element Method for Solving Heat Conduction Equation, ASME Paper No. 69-WA/HT-35.
17. Myers, G. E., The Critical Time Step for Finite Element Solutions to Two-Dimensional Heat Conduction Transients, *ASME J. Heat Transfer* **100**, 120–127, (1978)
18. von Rosenberg, D. U., *Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Americal Elsevier, New York, 1969.
19. Richtmyer, R. D. and Morton, K. W., *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2nd ed., Interscience Publishers, New York, 1967.
20. Beck, J. V., Green's Function Solution for Transient Heat Conduction Problems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **27**, 1235–1244 (1984).
21. Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington, 1980.
22. Anderson, D. A., Tannehill, J. C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere, Washington, 1984.
23. Shih, T. M., *Numerical Heat Transfer*, Hemisphere, Washington, 1984.
24. Baker, A. J., *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, Hemisphere, 1983.


## Имеются на русском языке


1. Келтнер, Бек. Нестационарный метод элементов поверхности.— Труды амер. о-ва инж.-мех., сер, С, Теплопередача, 1981, № 4, с. 171.
4. Кельтнер, Бек. Погрешность измерения температур поверхности.— Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1983, № 2, с. 98.
7. Лыков А.В. Теория теплопроводности.— М.: Высшая школа, 1967.

10. Карслоу У., Егер Д. Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ.— М.: Наука, 1964.
12. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. со 2-го англ. изд.— М.: Мир, 1975.
13. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.
17. Майерс. Критическая величина шага по времени, используемого при решении двумерных нестационарных задач теплопроводности методом конечных элементов.— Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1978, № 1, с. 130.
19. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.У. Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.
21. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ.— М.: Энергоиздат, 1984.
23. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена: Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.

## Задачи

3.1. Получите математические выражения для температуры поверхности полубесконечного тела, которое первоначально находится при постоянной температуре $T_0$, а затем подвергается воздействию теплового потока, плотность которого изменяется следующим образом:

$$q(t)=\begin{cases} q_0, & 0<t<t_1 \ , \\ -q_0, & t_1<t<2t_1 \ , \\ 0, & t<0 \quad \text{и} \quad t>2t_1 \ . \end{cases}$$

Для каждого интервала времени требуется получить свое выражение. Постройте график величины

$$\frac{T-T_0}{q_0}\left(\frac{k\rho c}{t_1}\right)^{1/2}$$

в зависимости от $t/t_1$ при значениях $t/t_1$ от 0 до 4. Почему при $t > 2t_1$ температура изменяется, несмотря на то, что суммарная подводимая энергия равна нулю?

3.2. Закон изменения плотности теплового потока на поверхности тела имеет вид

$$q(t)=\begin{cases} 10\ \text{Вт/м}^2 \ , & 2\text{с} < t < 4\text{с}, \\ 0 & \text{при остальных } t \ . \end{cases}$$

В точке $x_1$ температура равна 400 К до $t = 2$с, 401 К при $t = 4$ с и 406 К при $t = 6$с. Задача теплопроводности линейна. Определите изменение температуры в точке $x_1$ в моменты времени 2 и 4с для единичного ступенчатого изменения при $t = 0$ плотности теплового потока на нагреваемой поверхности.

3.3. Получите точные выражения для температуры поверхности полубесконечного тела, которое первоначально находится при постоянной температуре $T_0$, а затем подвергается воздействию теплового потока, плотность которого имеет вид треугольной функции времени и задана соотношением

$$q(t)=\begin{cases} \dot{q}_0 t, & 0<t<t_1 \ , \\ \dot{q}_0(2t_1-t), & t_1<t<t_2=2t_1 \ , \\ 0 & \text{при остальных } t \ , \end{cases}$$

где $\dot{q}_0$ — постоянная. Выражения получите для каждой из трех областей по времени: $0 < t < t_1$, $t_1 < t < 2t_1$ и $t > 2t_1$.

Постройте график изменения температуры поверхности в безразмерной форме в зависимости от $t/t_1$ для диапазона значений от 0 до 3.

3.4. Плотность теплового потока задана в виде

$$q(t)=\begin{cases} q_a, & 0<t<t_a\,, \\ q_a+\dfrac{q_b-q_a}{t_b-t_a}(t-t_a), & t_a<t\leqslant t_b=2t_a\,. \end{cases}$$

Для полубесконечного тела, первоначально находящегося при температуре $T_0$, вычислите температуру поверхности в момент времени $t_b$, используя выражение (3.2.12). При этом используйте величины $\Delta t = 0{,}5$, $t_a = 1$, $q_a = 1$, $q_b = 2$, $k\rho c = 1$. Сравните полученные результаты с точными значениями.

3.5. Выведите приближенное выражение теоремы Дюамеля

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^{M} q_n a_{M-n+1}\,,$$

где $q_i = q(t_i)$,

$$a_i = (\phi_i^{(1)} - 2\phi_{i-1}^{(1)} + \phi_{i-2}^{(1)})/\Delta t$$

и $\phi_i^{(1)}$ — изменение температуры в момент времени $t_i$ для плотности теплового потока $q = t$. Плотность теплового потока представляется последовательностью связанных между собой линейных элементов, начиная с $q_0 = 0$. (Верхний индекс 1 означает, что для плотности теплового потока используются линейные элементы.)

3.6. Напишите машинную программу для вычисления свертки по формуле (3.2.12). При этом учтите по меньшей мере десять компонент $q_n$ и $\Delta\phi_i$. В качестве входных данных используйте $T_0$, $q_n$ и $\Delta\phi_i$. Выходными данными являются

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{10}\,.$$

Проверьте программу 3.1.

3.7. Полубесконечное тело, первоначально находящееся при постоянной нулевой температуре, в момент времени $t = 0$ подвергается воздействию теплового потока, плотность которого равна

$$q = (\pi t)^{-1/2}\,.$$

Пусть $\alpha = 1$, $k = 1$ и $\Delta t = 1$. Используя соотношение (3.2.12), вычислите температуру при $x = 0$. Учтите по меньшей мере десять шагов по времени. Точное значение температуры равно 1. Прокомментируйте точность метода.

*Промежуточные результаты:* 0,900; 0,784; 0,841; 0,865 и 0,880.

3.8. Одной из форм записи интеграла свертки является выражение

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k}\int_0^t q(\lambda)G(x, t-\lambda)d\lambda\,, \qquad \text{(a)}$$

где $G(x, t) = (k/\alpha)\partial\phi(x, t)/\partial t$ — функция Грина [20].

a. Можно ли использовать численную аппроксимацию выражения (a), если требуется вычислить $G(0, t)$ при $t = 0$? Обоснуйте свой ответ.
b. Получите численную аппроксимацию для (a) в форме

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^{M} q_n H_{M-n+1} \Delta t, \tag{b}$$

где $T_M \equiv T(x, t_M)$, $q_M \equiv q(t_{M-1/2})$ и

$$H_i \equiv G(x, t_{i-1/2}) \frac{\alpha}{k} .$$

c. Примените выражение (b) для случая линейной зависимости плотности теплового потока от времени из примера 3.1 и сравните результаты.

3.9. Покажите, что если $\phi_i$ имеет вид

$$\phi_i = Be^{-ci},$$

то сумма

$$T'_M = \sum_{n=1}^{M-m-1} q_n \Delta\phi_{M-n}$$

может быть представлена в следующей форме:

$$T'_{M+1} = e^{-1} T'_M + B(e^{-c} - 1) q_{M-m} e^{-(m+1)c} .$$

3.10. Пусть изменение температуры для неизвестной плотности теплового потока на поверхности равно $\Delta T(\mathbf{r}, t)$ и является известной функцией. Используя преобразование Лапласа для уравнения (3.2.9), выведите соотношение

$$q(t) = \mathscr{L}^{-1} \frac{\mathscr{L}[\Delta T(\mathbf{r}, t)]}{s\mathscr{L}[\phi(\mathbf{r}, t)]} ,$$

где $s$ — параметр преобразования Лапласа. Определите $q(t)$ с использованием величин

$$\phi = 2\left(\frac{t}{\pi k \rho c}\right)^{1/2}, \quad \Delta T = \frac{4\dot{q}_0 (\alpha t)^{3/2}}{3\alpha k (\pi)^{1/2}} .$$

3.11. Используя преобразование Лапласа, покажите, что изменение температуры в теле, на которое воздействует тепловой поток с линейно изменяющейся по времени плотностью

$$q(t) = \dot{q}_0 t$$

равно

$$\Delta T(\mathbf{r}, t) = \dot{q}_0 \int_0^t \phi(\mathbf{r}, t')dt' ,$$

где $\phi(\mathbf{r}, t)$ — вычисляется для единичного ступенчатого изменения плотности теплового потока при $t = 0$.

3.12. Используя теорему Гаусса о дивергенции, покажите, что уравнение (3.3.1) преобразуется к виду

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \frac{\partial e}{\partial t} = e''' .$$

3.13. Для одномерных (в радиальном направлении) цилиндрических тел в качестве профиля температуры в элементе используйте стационарный профиль и получите соотношения, аналогичные формулам (3.3.9)—(3.3.11). Предположите, что границы контрольных объемов проходят посередине элементов.

3.14. Повторите задачу 3.13 для одномерных (в радиальном направлении) сферических тел.

3.15. Проверьте конечно-элементное уравнение (3.3.15)

3.16. Для плоской пластины, подвергающейся при $x = 0$ воздействию теплового потока с изменяющейся по времени плотностью, и граничным условием конвективного теплообмена при $x = L$ представьте разностные уравнения в матричной форме при $\Delta x = L/4$. Теплофизические свойства не зависят от температуры. Используйте левые разности при аппроксимации по времени и модель с сосредоточенной теплоемкостью.

3.17. a. Для двух узлов в плоской пластине, один из которых расположен в плоскости $x = 0$, а в другой — в плоскости $x = L$, запишите уравнения с использованием схемы Кранка — Николсона и модели с сосредоточенной теплоемкостью. Тепловой поток действует на поверхности $x = 0$, а поверхность $x = L$ теплоизолирована.

b. Получите выражение для температуры в узле 2, аналогичное (3.3.54a). Представьте $T_2^M\big|_{q^M=0}$ в виде зависимости от $T_1^{M-1}$, $T_2^{M-1}$, $p$ и $\Delta t/\rho c\Delta x$.

c. Представьте $X_{11}$ как функцию $p$ и $\Delta t/\rho c\Delta x$.

3.18. В одномерном случае выражение для функции Грина аналогично выражению, полученному с помощью теоремы Дюамеля, и приведено в задаче 3.8. Представьте это выражение в виде

$$T(x, t_M) = T_0 + \frac{\alpha}{k}\int_0^{t_M} q(\lambda)G(x, t_M - \lambda)d\lambda = T_0 + \frac{\alpha}{k}\sum_{i=1}^{M}\int_{t_{i-1}}^{t_i} q(\lambda)G(x, t_M - \lambda)d\lambda\ .$$

Аппроксимируйте $q(t)$ при $t_{i-1} < \lambda < t_i$ следующим образом:

$$q(\lambda) = q_{i-1}\frac{t_i - \lambda}{\Delta t} + q_i\frac{\lambda - t_{i-1}}{\Delta t}\ ,$$

где $q_i = q(t_i)$, $t_i = i\Delta t$. Выведите аппроксимирующее соотношение

$$T(x, t_M) = T_0 + \sum_{i=1}^{M}\ [iq_{i-1}I_1(x, M, i) -$$

$$- q_{i-1}I_2(x, M, i) + q_iI_2(x, M, i) - (i-1)q_iI_1(x, M, i)]\ , \qquad \text{(a)}$$

где

$$I_1(x, M, i) \equiv \frac{\alpha}{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} G(x, t_M - \lambda)d\lambda\ , \qquad I_2(x, M, i) \equiv \frac{\alpha}{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\lambda}{\Delta t}G(x, t_M - \lambda)d\lambda.$$

Покажите, что выражение (а) можно представить в виде

$$T(x, t_M) = T_0 + \sum_{i=0}^{M} a_{iM}(x)q_{M-i}\ .$$

По каким формулам вычисляются $a_{iM}(x)$?

# Глава 4

# Методы решения обратных задач теплопроводности

## 4.1. Введение

Обратная задача теплопроводности является одной из многих некорректно поставленных задач. Понятие «хорошо» или «корректно» сформулированной математической задачи впервые появилось в 1923 г. в работе Адамара [1]. Условия корректной постановки требуют выполнения таких достаточно общих свойств, как *существование, единственность и* (косвенно) *устойчивость* решения. В разд. 4.2 показано, что обратная задача теплопроводности не удовлетворяет условиям корректности и поэтому называется некорректной.

По Тихонову и Арсенину [2] некорректные задачи можно разделить на два подкласса: задачи оценивания по известным входным данным и задачи проектирования систем автоматического управления [1)]. Обратная задача теплопроводности относится к первому подклассу. Вообще говоря, к этому подклассу относятся задачи математической обработки и интерпретации данных из различных областей, где требуется оценивание функций. Сюда входят ядерная физика, радиофизика, электроника, интерпретация геофизических наблюдений, разведка минеральных и органических ресурсов, ракетостроение, разработка ядерных реакторов. Ко второму подклассу относятся многие задачи оптимизации, такие, как задачи оптимального управления и оптимального экономического планирования. В данной книге рассматриваются только задачи оценивания по экспериментальным данным, причем особое внимание уделяется обратной задаче теплопроводности, однако предлагаемые методы решения могут применяться и для многих других задач.

К числу некорректных относятся математические задачи решения сингулярных или плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, дифференцирование функций, известных лишь приближенно, решение дифференциальных уравнений в частных производных с использованием результатов «внутренних» измерений, а также решение интегральных уравнений первого рода с использованием результатов измерений. В то время как многие задачи такого типа весьма важны в технических приложениях, некорректность этих задач не только вызывает серьезные трудности их решения, но и является причиной существенного снижения активности их изучения по сравнению с прямыми или корректно поставленными задачами.

Одна из трудностей решения некорректных задач состоит в определении того,

---

[1)] В книге [2] рассматривается значительно более широкая номенклатура некорректных задач, включающая кроме названных также задачи дифференцирования, численного суммирования рядов Фурье, аналитического продолжения функций, решения вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и т. д. — Прим. ред.

что понимать под «решением», поскольку решение не удовлетворяет общим условиям существования, единственности и устойчивости. Этот вопрос анализируется в данной главе.

План главы следующей. В разд. 4.2. рассматриваются основные понятия, связанные с некорректными задачами. В разд. 4.3—4.7 представлен ряд алгоритмов решения обратных задач теплопроводности. В разд. 4.8. рассмотрено понятие среднеквадратичной погрешности, которая может использоваться для сравнения различных алгоритмов. Здесь же анализируются две взаимоисключающие цели.

Чтобы лучше понять приведенные в разд. 4.3—4.8 различные алгоритмы, кратко рассмотрим содержание. В этих разделах ограничимся оцениванием только зависимости изменения плотности теплового потока от времени и рассмотрением линейной обратной задачи. В разд. 4.3 представлены алгоритмы для одного последующего шага по времени. При одном только датчике температуры плотность теплового потока в любой момент времени находится из условия равенства рассчитанной температуры ее измеренному в этот момент времени значению. Такой способ называется «точной» подгонкой, так как обеспечивается равенство вычисленной и измеренной температур. Алгоритм называется последовательным, поскольку $q_M$ оценивается после $q_{M-1}$ при $M = 2,3, \ldots$. Если для получения расчетных температур используется теорема Дюамеля, то алгоритм точной подгонки называется алгоритмом Штольца [9]. По обратным задачам теплопроводности работа Штольца (1960 г.) была одной из первых. В разд. 4.3.3 рассмотрен случай нескольких датчиков при одном последующем шаге по времени. Для получения приближенного соответствия между расчетными и измеренными температурами используется метод наименьших квадратов.

В разд. 4.4 предложен метод функциональной аппроксимации, в котором функциональная форма неизвестной плотности теплового потока предполагается заранее. Функциональная форма содержит ряд неизвестных параметров, которые оцениваются по методу наименьших квадратов. В разд. 4.4.2 описан метод функциональной аппроксимации во всей области, в котором все параметры определяются одновременно для всего рассматриваемого интервала времени. Первыми этот метод предложили Фрэнк в 1963 г. [10] и Дэвис в 1966 г. [11]. В разд. 4.4.3 описывается метод последовательной функциональной аппроксимации, впервые предложенный Беком в 1961 г. [12—15]. Другая интерпретация метода последовательной функциональной аппроксимации, предложенная Блакуэллом [16], приводится в разд. 4.4.3.2.

В разд. 4.5 представлен метод регуляризации. Процедура регуляризации во всей области (разд. 4.5.3) анализировалась рядом авторов, среди которых — Тихонов и Арсенин [2], Алифанов [17—19], Коздоба и Круковский [20], Белл и Уордлоу [21, 22]. Метод регуляризации нулевого порядка во всей области родствен методу гребневой регрессии [6, 24—29]. Метод последовательной регуляризации рассматривается в разд. 4.5.3. Родственный ему метод предложили Бек и Мьюрио [23].

Обобщение методов функциональной аппроксимации и регуляризации, называемое методом пробных функций, излагается в разд. 4.6. Вариант этого метода, обобщенного на всю временну́ю область, был предложен Туми [33, 34], однако для решения обратных задач теплопроводности он ранее не использовался.

В разд. 4.7 показано, что алгоритмы, рассмотренные в разд. 4.3—4.6, могут

быть представлены в форме цифрового фильтра. Эта форма важна по ряду причин. Одной из них является вычислительная эффектность фильтра, а другой — удобная форма получения дисперсии компонент плотности теплового потока.

Разд. 4.8 посвящен анализу двух взаимоисключающих критериев, характеризующих несмещенность и минимальную дисперсию оценок плотности теплового потока. Вводится общий критерий среднеквадратичной погрешности, который содержит две составляющие: 1) дисперсию, связанную с погрешностями измерений, и 2) детерминированную погрешность. Приводятся методы расчета этих двух составляющих. Среднеквадратичная погрешность дает возможность сравнивать различные алгоритмы решения обратных задач теплопроводности.

## 4.2. Некорректные задачи

В данном разделе показано, что обратная задача теплопроводности является некорректной. Эту задачу можно анализировать в виде задачи для дифференциального уравнения в частных производных, интегрального уравнения или системы линейных алгебраических уравнений, которая получается с помощью метода конечных разностей или конечных элементов. Каждая из указанных формулировок рассматривается ниже отдельно.

### 4.2.1 Дифференциальное уравнение в частных производных

Рассмотрим точное решение обратной задачи для пластины, полученное в разд. 2.5 с использованием дифференциального уравнения теплопроводности в частных производных. Свойства постоянны, а температура и градиент температуры заданы при $x = 0$:

$$T(0, t) = f(t)\ , \tag{4.2.1}$$

$$\left.\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = g(t), \tag{4.2.2}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — известные функции.

Требуется найти решение для распределения температуры и плотности теплового потока ($q = -k\,\partial T/\partial x$) при $x > 0$. В разд. 2.5 показано, что точное решение для $T(x, t)$ при условии, что $f$ и $g$ бесконечно дифференцируемы, определяется выражением

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x^2}{\alpha}\right)^n f^{(n)}(t) - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{x^2}{\alpha}\right)^n g^{(n)}(t), \tag{4.2.3}$$

где верхний индекс $(n)$ означает $n$-ю производную по времени:

$$f^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n f(t)}{dt^n}\ . \tag{4.2.4}$$

Чтобы задача была корректной, необходимо, чтобы решение 1) существовало, 2) было единственным и 3) непрерывно зависело от исходных данных или, что равнозначно, было устойчивым. Рассмотрим каждое из этих положений.

*Существование* приведенного выше решения было доказано Уиддером [3] (см.

также [4]) [1]. При ограниченных значениях $t$ содержащиеся в выражении (4.2.3) ряды сходятся равномерно, если $f$ и $g$ удовлетворяют условиям

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant M \frac{(2n)!}{L^{2n}} , \tag{4.2.5}$$

$$|g^{(n)}(t)| \leqslant P \frac{(2n)!}{L^{2n}}, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{4.2.6}$$

для некоторых постоянных $M$ и $P$ и где $x = L$ — нагреваемая поверхность. Следовательно, при этих условиях решение существует, если $n$-е производные $f$ и $g$ по времени возрастают медленнее, чем $2n$-факториал.

*Единственность* решения (4.2.3) следует из того, что любые два решения должны быть равны правой части выражения (4.2.3) и, следовательно, друг другу.

Рассмотрим теперь вопрос *устойчивости*. Для этого необходимо определить меру различия между соответствующими решениями. С этой целью на интервалах по времени $0 \leqslant t \leqslant t_f$ и по пространству $0 < x < L$ введем следующие нормы:

$$\|f\| \equiv \max_{0 \leqslant t \leqslant t_f} |f(t)| , \tag{4.2.7a}$$

$$\|g\| \equiv \max_{0 \leqslant t \leqslant t_f} |g(t)| , \tag{4.2.7b}$$

$$\|T\| \equiv \max_{\substack{0 < x < L \\ 0 \leqslant t \leqslant t_f}} |T(x, t)| . \tag{4.2.7c}$$

[Одинарная черта означает абсолютную величину, а двойная — норму, определенную соотношениями (4.2.7).] Обозначим через $T_i(x, t)$ решение вида (4.3.3), соответствующее $f_i(x, t)$ и $g_i(x, t)$, где $i = 1,2$. Необходимое условие устойчивости заключается в том, что за счет выбора $f_1$, $f_2$, $g_1$ и $g_2$, для которых нормы $\|f_1 - f_2\|$ и $\|g_1 - g_2\|$ достаточно малы, можно обеспечить сколь угодно малую норму $\|T_1 - T_2\|$. Как показано далее, в общем случае это условие не выполняется.

Чтобы доказать, что решение не всегда устойчиво, рассмотрим только один частный случай, а именно

$$g_1 = g_2 = 0 , \tag{4.2.8}$$

$$f_2(t) = f_1(t) + \frac{1}{\beta} \cos(\beta^2 t), \quad \beta > 0 , \tag{4.2.9}$$

где $f_1(t)$ — произвольная аналитическая функция. Характеризующий ошибку член $\beta^{-1}\cos\beta^2 t$ можно сделать малым за счет увеличения $\beta$. При этом $f_1$ и $f_2$ становятся сколь угодно близкими по норме

$$\|f_1 - f_2\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant t_f} \left| \frac{1}{\beta} \cos \beta^2 t \right| = \frac{1}{\beta} ,$$

---

[1] Заметим, что свойство существования (и единственности) аналитического решения нехарактеристической задачи Коши для аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$ следует из общеизвестной теоремы Коши — Ковалевской.— *Прим. ред.*

а соответсвующие решения $T_1$ и $T_2$ могут совсем и не быть близкими.

Разность между $T_1$ и $T_2$ определяется соотношениями

$$T_1 - T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{\alpha}\right)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\beta} \cos \beta^2 t\right) = \tag{4.2.10a}$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n)!} \left(\frac{x^2}{\alpha}\right)^{2n} \beta^{4n} \cos \beta^2 t + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n+2)!} \left(\frac{x^2}{\alpha}\right)^{2n+1} \beta^{4n+2} \sin \beta^2 t \,. \tag{4.2.10b}$$

В частном случае, когда $x^2/\alpha = 1$ с и $t = 0$, выражение (4.2.10b) принимает вид

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n)!} \beta^{2n} = \tag{4.2.11a}$$

$$= \frac{1}{\beta} \text{ ch } (2^{-1/2}\beta) \cos(2^{-1/2}\beta) \,. \tag{4.2.11b}$$

Равенство соотношений (4.2.11a) и (4.2.11b) доказано в работе [4]. Используя соотношение (4.2.11b), получим выражение для нормы

$$\|T_1 - T_2\| \geqslant \frac{1}{\beta} |\text{ ch } (2^{-1/2}\beta) \cos(2^{-1/2}\beta)| \,. \tag{4.2.12}$$

При $\beta \to \infty$ правая часть равна $(2\beta)^{-1} \exp(2^{-1/2}\beta)$ и стремится к бесконечности. Другими словами, в рассматриваемом частном случае произвольно малая разность исходных температур может приводить к сколь угодно большей разности температур поверхности. Следовательно, решение (4.2.3) неустойчиво. Неустойчивость имеет место несмотря на то, что выражение (4.2.3) является *точным* решением обратной задачи с непрерывными исходными данными. Таким образом, даже при выполнении условий существования и единственности условие устойчивости не выполняется. Итак, доказано, что обратная задача теплопроводности, решаемая с помощью уравнения в частных производных, является некорректной, поскольку она не удовлетворяет всем трем условиям корректности.

### 4.2.2. Интегральное уравнение

Как было показано в разд. 3.2, решение линейных задач нестационарной теплопроводности можно получить с использованием интеграла свертки. В одномерном случае выражение для изменения температуры в некоторой точке $x$ имеет вид

$$T(x, t) = \frac{\alpha}{k} \int_0^t G(x, t-\lambda) q(\lambda) d\lambda, \quad G(x, t) = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \frac{k}{\alpha} \,, \tag{4.2.13}$$

где $G(x, t)$ — функция Грина, $\lambda$ — переменная интегрирования. Цель обратной задачи состоит в оценивании функции плотности теплового потока $q(t)$ по данным измерений $T(x, t)$, $0 < x < L$. Далее показано, что при малых изменениях $T(x, t)$ решение (4.2.13) не обладает свойством устойчивости.

Чтобы продемонстрировать неустойчивость, рассмотрим функцию

$$q_2(t)=q_1(t)+N\sin\omega t\,, \tag{4.2.14}$$

где $N=N(\omega)$ — монотонно возрастающая функция $\omega$. Подставив (4.2.14) в (4.2.13), получим

$$T_2(x,t)=T_1(x,t)+\frac{\alpha}{k}\int_0^t G(x,t-\lambda)N\sin(\omega\lambda)d\lambda\,, \tag{4.2.15}$$

где $T_1(x,\ t)$ — функция $T(x,\ t)$, определяемая по формуле (4.2.13) при $q=q_1(t)$. Мерой разности между $T_1(x,\ t)$ и $T_2(x,\ t)$ в интервале $0<x<L$ в момент времени $t$ является величина

$$\rho_T(T_1,\ T_2)=|N|\left\{\int_0^L\left[\frac{\alpha}{k}\int_0^t G(x,t-\lambda)\sin\omega\lambda d\lambda\right]^2 dx\right\}^{1/2}, \tag{4.2.16}$$

которую можно сделать сколь угодно малой, назначая $\omega$ достаточно большой (при условии, что функция $G$ непрерывна по $x$) и правильно выбирая $N(\omega)$. (Значение внутреннего интеграла можно сделать близким к нулю, если принять значение $\omega$ достаточно большим, что следует из теоремы Римана — Лебега [5]). Аналогичная мера разности между $q_1(t)$ и $q_2(t)$ определяется выражением

$$\rho_q(q_1,q_2)=\left\{\int_0^t[q_1(\lambda)-q_2(\lambda)]^2 d\lambda\right\}^{1/2}=$$

$$=|N|\left(\int_0^t\sin^2\omega\lambda d\lambda\right)^{1/2}=|N|\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]^{1/2}. \tag{4.2.17}$$

Таким образом, при произвольно малой разности между $T_1(x,\ t)$ и $T_2(x,\ t)$ можно так выбрать $\omega$ и $N(\omega)$, что определенная выражением (4.2.17) разность между $q_1(t)$ и $q_2(t)$ станет произвольно большой. Проведенный анализ показывает, что задача оценивания $q(t)$ в интегральном уравнении (4.2.13) является неустойчивой и поэтому некорректной.

### 4.2.3. Разностное уравнение

Решение задачи нестационарной теплопроводности можно получить с использованием методов конечных разностей или конечных элементов. В линейном случае применение этих методов приводит к системам линейных алгебраических уравнений, которые можно преобразовать к виду [см. уравнение (3.3.55а)]

$$\mathbf{Xq}=\mathbf{Y}\,, \tag{4.2.18}$$

где $\mathbf{X}$ — матрица $n\times n$, $\mathbf{q}$ — вектор $n$ элементов плотности теплового потока, $\mathbf{Y}$ — вектор измерений, состоящий из $n$ элементов. Для внутреннего расположения точки измерения температуры и «малых» шагов по времени решение уравнения (4.2.16) относительно $\mathbf{q}$ является плохо обусловленным, т. е. малые изменения вектора $\mathbf{Y}$ вызовут большие изменения вектора $\mathbf{q}$.

Если при решении обратной задачи теплопроводности для решения дифференциального уравнения теплопроводности в частных производных используются разностные уранения, то так же, как и при решении уравнения свертки, задача сводится к решению системы уравнений, имеющей вид (4.2.18), что показано в разд. 3.3.5.

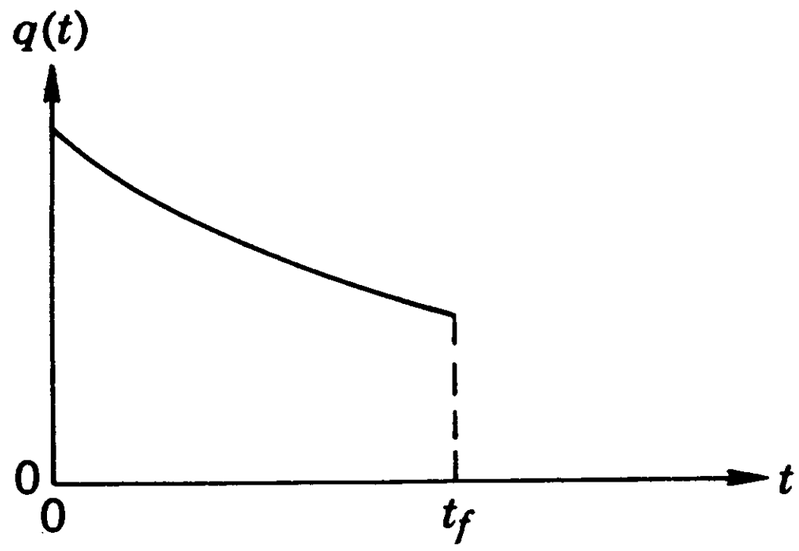



Рис. 4.1. Постепенно изменяющаяся плотность теплового потока.

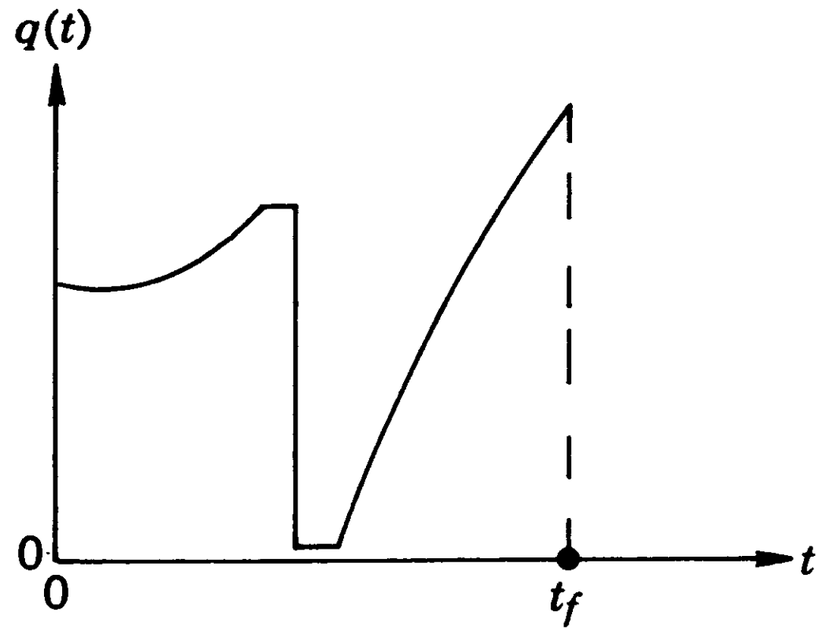



Рис. 4.2. Резко изменяющаяся плотность теплового потока.

При обычном решении системы алгебраических уравнений на неизвестные не накладывается никаких ограничений. Не вводится дисциплинирующих условий относительно увеличения или уменьшения искомых значений некоторым систематическим образом. Однако в ОЗТ составляющие плотности теплового потока $q_1$, $q_2$, ..., $q_n$ представляют собой значения функции $q(t)$. Как показано на рис. 4.1 или даже на рис. 4.2, эти функции изменяются более или менее плавно по времени. Составляющие плотности теплового потока $q_1$, ..., $q_n$ не могут принимать абсолютно произвольные, не связанные друг с другом значения. Например, неприемлемым является случай, когда значения плотности теплового потока колеблются относительно нуля с возрастающей амплитудой.

В некоторых случаях прямое решение уравнения (4.2.18) дает сильно колеблющееся решение. Более того, если немного изменится только одна составляющая **Y**, то расчетные значения $q_1$, ..., $q_n$ могут измениться весьма существенно. В таких случаях для получения удовлетворительного решения относительно $q_1$, ..., $q_n$ необходимо так ограничить значения $q$, чтобы получить плавно изменяющуюся функцию. Различные процедуры оценивания плотности теплового потока на поверхности рассматриваются в разд. 4.3.—4.7.

## 4.3. Метод с одним последующим шагом по времени

### 4.3.1. Введение

В первых из предложенных методов решения ОЗТ использовался только один последующий шаг по времени. На каждом шаге оценивалась только одна составляющая плотности теплового потока и тем самым формировался *последовательный* алгоритм. Эти методы можно было использовать только при единственном датчике температуры.

В данном разделе вначале рассматривается случай одного последующего шага по времени и единственного датчика температуры (разд. 4.3.2). Далее анализируется решение для одного последующего шага по времени и нескольких датчиков температуры (разд. 4.3.3). Для простоты изложения рассматривается только линейная обратная задача теплопроводности, а нелинейная задача решается в разд. 6.3, где описано применение метода конечного контрольного объема.

### 4.3.2. Точная подгонка к измеренным температурам (одиночный датчик)

При использовании для оценивания плотности теплового потока на поверхности как функции времени дискретных нестационарных температур от одиночного датчика температуры рассчитанные температуры приравниваются измеренным значениям. (Это называется «точной подгонкой» в отличие от приближенного соответствия, обеспечиваемого методом наименьших квадратов.) Точное соответствие можно получить, используя численную форму теоремы Дюамеля или метод конечного контрольного объема (метод конечных разностей или метод конечных элементов). В общем случае для линейной ОЗТ используется процедура, включающая либо теорему Дюамеля, либо метод конечного контрольного объема. В обоих случаях температура в точке расположения датчика в момент времени $t_M$ может быть записана, согласно (3.2.19) или (3.3.55а), в виде

$$T_M = \hat{T}_M|_{q_M=0} + \Delta\phi_0 q_M, \tag{4.3.1}$$

где $\Delta\phi_0$ — изменение температуры в точке расположения датчика в момент времени $t_1$ для единичного ступенчатого изменения в момент $t = 0$ плотности теплового потока на поверхности. Величина $\Delta\phi_0$ представляет собой также коэффициент чувствительности $T_M$ относительно $q_M$:

$$\Delta\phi_0 = \frac{\partial T_M}{\partial q_M}. \tag{4.3.2}$$

При точной подгонке $T_M$ приравнивается измеренной в момент времени $t_M$ температуре, которая обозначается $Y_M$. Затем уравнение (4.3.1) решается относительно оцениваемой составляющей плотности теплового потока, которая обозначается $\hat{q}_M$:

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \hat{T}_M|_{q_M=0}}{\phi_1}, \text{ так как } \Delta\phi_0 = \phi_1 - \phi_0 = \phi_1. \tag{4.3.3}$$

Это выражение остается справедливым при решении краевой задачи теплопроводности как с помощью теоремы Дюамеля, так и методом конечного контрольного объема. Его применение ограничено случаем одиночного датчика и только одной последующей температурой для $t_M$.

Преимуществом выражения (4.3.3) является его простота, позволяющая легко понять метод и получить относительно простые и эффективные в вычислительном отношении алгоритмы. Основной его недостаток заключается в чрезвычайно высокой чувствительности к погрешностям измерений, особенно при *малых,* а не больших шагах по времени, когда применение конечных методов (контрольного объема или конечных элементов) связано с известными трудностями. Вследствие чувствительности выражения (4.3.3) к погрешностям измерений и даже неустойчивости при малых значениях $\Delta t$ оно редко применяется для решения ОЗТ. (Понятие малого значения $\Delta t$ рассматривается в разд. 5.3.)

При использовании в выражении (4.3.3) интеграла Дюамеля величина $\hat{T}_M|_{q=0}$ в этом выражении представляет собой первый элемент соотношения (3.2.29):

$$\hat{T}_M|_{q_M=0} = \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} + T_0 \tag{4.3.4}$$

и таким образом выражение (4.3.3) принимает вид

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \sum_{i=1}^{M-1} \hat{q}_i \Delta\phi_{M-i} - T_0}{\phi_1} . \tag{4.3.5}$$

Это выражение называется алгоритмом Штольца, так как Штольц [9] первым применил теорему Дюамеля для решения ОЗТ при одиночном датчике температуры и одной единственной последующей температуре. Название работы Штольца предполагает, что применение его метода ограничено простыми геометрическими формами, однако этот метод можно использовать для гораздо более широкого круга задач, о чем упоминается в гл. 5. Важной особенностью выражения (4.3.5) является его последовательный характер, т. е. $\hat{q}_M$ зависит от $Y_M$ и предыдущих значений $\hat{q}(\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_{M-1})$, а $M$ на каждом шаге по времени последовательно увеличивается на единицу. В этом состоит отличие от одновременного оценивания всех составляющих $q$, которое используется в процедуре оценивания во всей области по времени.

Другая важная особенность выражений (4.3.3) и (4.3.5) состоит в их линейности относительно измеренных величин $Y_1$, $Y_2$, .... Чтобы показать это, запишем выражение (4.3.5) относительно $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_3$:

$$\hat{q}_1 = \frac{Y_1 - T_0}{\phi_1} , \tag{4.3.6}$$

$$\hat{q}_2 = \frac{Y_2 - \hat{q}_1 \Delta\phi_1 - T_0}{\phi_1} , \tag{4.3.7}$$

$$\hat{q}_3 = \frac{Y_3 - \hat{q}_1 \Delta\phi_2 - \hat{q}_2 \Delta\phi_1 - T_0}{\phi_1} . \tag{4.3.8}$$

Выражение (4.3.6) является линейной функцией $Y_1$. Подставляя (4.3.6) в (4.3.7), получим

$$\hat{q}_2 = \frac{Y_2 - (Y_1 - T_0)\Delta\phi_1/\phi_1 - T_0}{\phi_1} , \tag{4.3.9}$$

откуда видно, что $\hat{q}_2$ представляет собой линейную функцию $Y_1$ и $Y_2$. Если выражения (4.3.6) и (4.3.9) подставить в выражение (4.3.8), то $\hat{q}_3$ окажется функцией $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$, хотя полученное при этом выражение достаточно сложное. Эту процедуру можно продолжить и показать, что $q_M$ линейно зависит от $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_M$. Эта линейность ведет к ряду важных соображений, связанных с пониманием ОЗТ, анализом устойчивости, а также получением важных алгоритмов фильтрации (разд. 4.7 и 5.5).

*Пример 4.1.* Температура на глубине 1 см внутри полубесконечной стальной пластины ($k = 40$ Вт/(м · °С), $\alpha = 10^{-5}$ м$^2$/с), первоначально находящейся при 30°С, равна 37,608, 73,226 и 136,321°С при $t = 5$, 10 и 15 с соответственно. Вычислите значения плотности теплового потока на поверхности $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_3$ по методу Штольца.

*Решение.* Значения $\hat{q}_i$ можно получить, используя выражение (4.3.5) или (4.3.6)—(4.3.8). Значения $\phi_i$ получают из решения задачи для полубесконечного тела при ступенчатом изменении плотности теплового потока на поверхности. Безразмерные шаги по времени равны

$$\Delta t_x^+ = \frac{\alpha \Delta t}{x^2} = (10^{-5}\text{м}^2/\text{с})(5\text{с})/(0{,}01\text{м})^2 = 0{,}5 ,$$

а значения времени $t_1^+ = 0{,}5$, $t_2^+ = 1$, $t_3^+ = 1{,}5$ используют для получения из табл. 1.2 соответствующих значений $T^+$, задавая $q_0 = 1$ и используя соотношения

$$\phi_1 = T^+(t_1)\frac{x}{k} = 0{,}166631\,\frac{0{,}01}{40} = 4{,}1658 \cdot 10^{-5}(\text{м}^2 \cdot {}^\circ\text{C})/\text{Вт},$$

$$\phi_2 = T^+(t_2)\frac{x}{k} = 0{,}399282\,\frac{0{,}01}{40} = 9{,}9821 \cdot 10^{-5}(\text{м}^2 \cdot {}^\circ\text{C})/\text{Вт},$$

$$\phi_3 = T^+(t_3)\frac{x}{k} = 0{,}60612\,\frac{0{,}01}{40} = 1{,}5153 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2 \cdot {}^\circ\text{C}))/\text{Вт},$$

$$\Delta\phi_1 = \phi_2 - \phi_1 = 5{,}8163 \cdot 10^{-5},\quad \Delta\phi_2 = \phi_3 - \phi_2 = 5{,}1710 \cdot 10^{-5}.$$

Для $\hat{q}_1$, используя выражение (4.3.6), получим

$$\hat{q}_1 = \frac{Y_1 - T_0}{\phi_1} = \frac{37{,}608 - 30}{4{,}1658 \cdot 10^{-5}} = 182630\ \text{Вт/м}^2.$$

Для $\hat{q}_2$ из выражения (4.3.7) имеем

$$\hat{q}_2 = \frac{Y_2 - \hat{q}_1\Delta\phi_1 - T_0}{\phi_1} = \frac{73{,}226 - 182630(5{,}8163 \cdot 10^{-5}) - 30}{4{,}1658 \cdot 10^{-5}} = 782650\ \text{Вт/м}^2,$$

а $\hat{q}_3$ получим из выражения (4.3.8):

$$\hat{q}_3 = 1\,232\,800\ \text{Вт/м}^2.$$

Эти значения $\hat{q}_i$ можно сравнить с точными значениями. Точное значение исходной плотности теплового потока линейно увеличивается по времени и вычисляется по формуле

$$q(t) = 10^5 t,\quad t \text{ в секундах}.$$

Точное решение для температуры дается выражением (3.2.12). Вычисленные значения плотности теплового потока лучше всего соответствуют (рис. 4.3) моментам времени $t = 2{,}5$; 7,5 и 12,5 с соответственно, так что точные значения компонент плотности теплового потока равны $q_i = 250000$, 750000 и 1250000 Вт/м$^2$. Погрешности в $\hat{q}_i$, $i = 1, 2, 3$, составляют $-27$, $+4{,}4$ и $-1{,}4\%$ соответственно. Эти вычисленные значения являются относительно точными, однако если уменьшить шаги по времени и в данном примере сделать их менее 3 с, то метод Штольца станет неустойчивым.

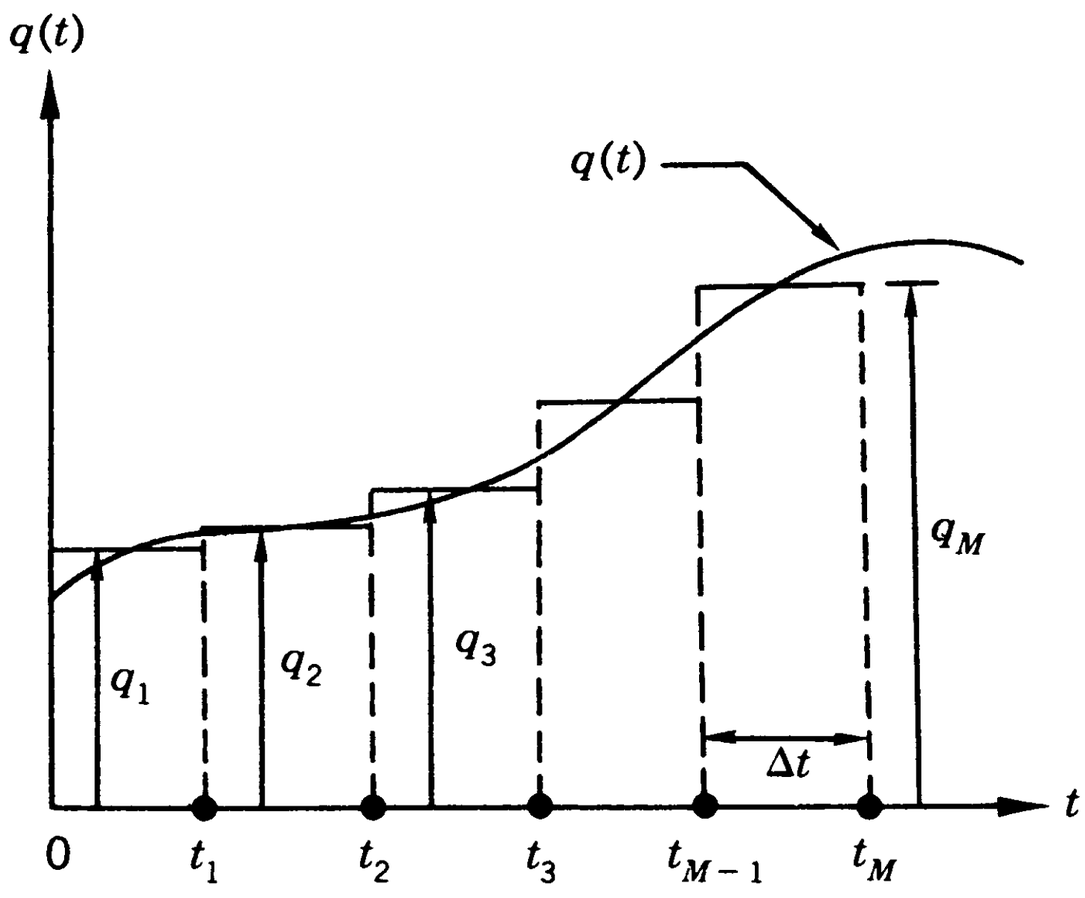



Рис. 4.3. Аппроксимация плотности теплового потока $q(t)$ постоянными элементами.

### 4.3.3. Несколько датчиков температуры

Для $J$ датчиков расчетные значения температуры можно получить из соотношений

$$\begin{aligned} T_{1M} &= \hat{T}_{1M}|_{q_M=0} + \phi_{11}q_M\ , \\ T_{2M} &= \hat{T}_{2M}|_{q_M=0} + \phi_{21}q_M, \\ &\vdots \\ T_{JM} &= \hat{T}_{JM}|_{q_M=0} + \phi_{J1}q_M, \end{aligned} \qquad (4.3.10)$$

где первый нижний индекс показывает номер датчика, второй — время в соответствии с обычным обозначением $T(x, t)$. Соответствующие измеренные температуры обозначаются

$$Y_{jM}, \quad j=1, 2, \ldots, J.$$

При $J$, большем 1, единственная составляющая теплового потока $q_M$ в общем случае не может быть выбрана так, чтобы

$$T_{jM}=Y_{jM}, \quad j=1, 2, \ldots, J.$$

Поэтому согласование возможно только в некотором среднем смысле.

Одним из способов оценивания $q_M$ является использование метода наименьших квадратов, когда сумма квадратов

$$S=\sum_{j=1}^{J}(Y_{jM}-\hat{T}_{jM}|_{q_M=0}-\phi_{j1}q_M)^2 \tag{4.3.11}$$

минимизируется относительно составляющей плотности теплового потока $q_M$. Это достигается путем дифференцирования $S$ относительно $q_M$, замены $q_M$ величиной $\hat{q}_M$ и приравниванием полученного выражения нулю:

$$\left.\frac{dS}{dq_M}\right|_{q_M}=0=-2\sum(Y_{jM}-\hat{T}_{jM}|_{q_M=0}-\phi_{j1}\hat{q}_M)\phi_{j1}=0. \tag{4.3.12}$$

Решая это уравнение относительно $\hat{q}_M$, получим

$$\hat{q}_M=\sum_{j=1}^{J}[(Y_{jM}-\hat{T}_{jM}|_{q_M=0})\phi_{j1}]\left(\sum_{k=1}^{J}\phi_{k1}^2\right)^{-1}. \tag{4.3.13}$$

Если $J=1$, выражение (4.3.13) преобразуется к виду (4.3.3). Использование нескольких датчиков гораздо менее эффективно для уменьшения погрешностей измерения, чем использование последующих значений температур, которое рассматривается ниже. При использовании нескольких датчиков ближайший к нагреваемой поверхности датчик имеет преобладающее влияние, так как, если $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$, то $\phi_{11} > \phi_{21} > \phi_{31} \ldots$, где $x_j$ — расстояние от нагреваемой поверхности до $j$-го датчика.

## 4.4. Метод функциональной аппроксимации

### 4.4.1. Введение

Один из способов решения ОЗТ состоит в задании функциональной зависимости изменения по времени плотности теплового потока на поверхности. Этот способ называется методом функциональной аппроксимации. Аппроксимирующая функция может задаваться в виде кусочно-постоянной, кусочно-линейной зависимостей или же в виде парабол, кубических полиномов, экспонент и т. д.

Другими возможными вариантами метода функциональной аппроксимации являются: 1) метод одновременного оценивания всех параметров для всего интервала времени и 2) метод последовательного оценивания параметров. В первом методе, называемом также методом оценивания во всей области, функциональная форма определяется полностью как единое целое. Во втором методе последовательно оцениваются участки кривой в направлении возрастания времени. Ниже рассматриваются различные функциональные зависимости, а также метод оцени-

вания во всей области (разд. 4.4.2) и метод последовательного оценивания (разд. 4.4.3). Метод последовательного оценивания в вычислительном отношении является более эффективным для решения ОЗТ, чем метод оценивания во всей области [1)].

### 4.4.2. Метод оценивания во всей области

Одним из первых метод оценивания во всей области для решения линейной обратной задачи теплопроводности предложил Фрэнк [10]. Он предложил аппроксимировать плотность теплового потока полиномом и использовать для оценивания коэффициентов метод наименьших квадратов. В другой статье того же периода [11], в которой анализировалась задача оценивания плотности теплового потока во всей области по данным измерений температуры внутри исследуемого материала, внутренние температуры рассматривались как нелинейная функция некоторых параметров. В этих работах авторы исходили из двух различных основных предпосылок. В первой работе плотность теплового потока на поверхности аппроксимировалась полиномами независимо от ее фактического изменения. Полиномы применялись для *всех* условий без учета условий на поверхности. Во второй работе считалось, что некоторые особенности теплового потока на поверхности известны. В данном разделе рассматриваются принципы построения алгоритмов, исходящие из обеих предпосылок, однако основное внимание уделяется методам, не учитывающим условия на поверхности.

#### 4.4.2.1. Случай плавно изменяющейся плотности теплового потока

Рассмотрим ОЗТ, в которой необходимо найти функцию теплового потока на поверхности $q(t)$ на конечном интервале времени $0 < t < t_f$. В данном примере предполагается, что истинная плотность теплового потока имеет вид, показанный на рис. 4.1. Плотность теплового потока $q(t)$ начинается с некоторого неизвестного значения и уменьшается одновременно с уменьшением $|dq/dt|$. При такой информации об особенностях кривой уравнение функциональной аппроксимации можно выбрать так, чтобы оно соответствовало постепенно изменяющемуся характеру функции. Для случая, когда функция $q(t)$ подобна показанной на рис. 4.1, рассмотрим следующие функциональные формы:

$$q(t)=\beta_1 \ , \tag{4.4.1}$$

$$q(t)=\beta_1+\beta_2 t \ , \tag{4.4.2}$$

$$q(t)=\beta_1+\beta_2 t+\beta_3 t^2 \ , \tag{4.4.3}$$

$$q(t)=\beta_1(1-e^{-\beta_2 t}) \ , \tag{4.4.4}$$

$$q(t)=\beta_1[1-\beta_2 \sin(\beta_3 t)], \quad 0<\beta_3 t<\frac{\pi}{2} \ . \tag{4.4.5}$$

---

[1)] Это утверждение справедливо, если иметь в виду только простоту машинной реализации алгоритмов, требуемые объемы памяти и затраты машинного времени: если же в понятие вычислительной эффективности вкладывать еще и точность решения задачи, то тогда это утверждение вызывает сомнения.— *Прим. ред.*

Из них только три последних учитывают все упомянутые выше особенности, но выражение (4.4.4) является нелинейным относительно $\beta_2$, а выражение (4.4.5) — нелинейным относительно $\beta_3$. Эти выражения используются для всего временно́го интервала. Неизвестные параметры $\beta_1$, ... определяются по математической модели, которая связывает температуру с $q(t)$, с использованием всех измеренных внутренних температур в интервале времени от $t = 0$ до $t = t_f$.

Чтобы пояснить принцип оценивания во всей области, рассмотрим тело, которое подвергается воздействию теплового потока с изменяющейся по линейному закону (4.4.2) плотностью. Начальная температура постоянна и равна $T_0$. Теплофизические свойства не зависят от температуры. Также известно, что тепловой поток приложен в момент времени $t = 0$. Дифференциальное уравнение в частных производных можно записать следующим образом:

$$\frac{k}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{4.4.6}$$

где $n = 0$ соответствует прямоугольной системе координат, $n = 1$ — цилиндрической и $n = 2$ — сферической. Граничное условие при $r = r_1$ имеет вид

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r_1}=\beta_1+\beta_2 t=q(t), \tag{4.4.7}$$

а граничное условие при $r = r_2$ является «неактивным» и записывается в форме одного из условий:

$$T(r_2, t)=T_0, \quad \frac{\partial T(r_2, t)}{\partial r}=0 \quad \text{или} \quad -k\frac{\partial T(r_2, t)}{\partial t}=h(T(r_2, t)-T_0). \tag{4.4.8}$$

Для этой линейной задачи прямая подстановка показывает, что распределение температуры, выражаемое формулой

$$T(r, t)=T_0+\beta_1\phi(r, t)+\beta_2\phi^{(1)}(r, t), \tag{4.4.9}$$

удовлетворяет уравнениям (4.4.6) и (4.4.7), где $\phi(r, t)$ — решение $T(r, t)$ уравнения (4.4.6) при соответствующем условии (4.4.8), $\beta_1 + \beta_2 t$ в граничном условии (4.4.7) заменено на единицу, а значение $T_0$ принято равным нулю; надстрочный индекс 1 обозначает линейное изменение $q(t)$ по времени; $\phi^{(1)}(r, t)$ — решение $T(r, t)$, аналогичное решению $\phi(r, t)$, однако теперь правая часть граничного условия (4.4.7) равна просто $t$.

Если имеются две температуры, измеренные в различные моменты времени или в разных точках, то простейшее решение (4.4.9) можно использовать для точной подгонки. Это приводит к системе двух уравнений относительно двух неизвестных $\beta_1$ и $\beta_2$.

Другой способ состоит в применении метода наименьших квадратов. Предположим, что в точке $r = r_E$ измерены температуры в момент времени $t_1$, $t_2$, ... ..., $t_n$ и обозначены $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_n$. В методе наименьших квадратов минимизируется сумма

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i-T_0-\beta_1\phi_i-\beta_2\phi_i^{(1)}\right]^2 \tag{4.4.10}$$

относительно $\beta_1$ и $\beta_2$; при этом используются следующие обозначения: $\phi_i \equiv \equiv \phi(r_E, t_i)$ и $\phi_i^{(1)} \equiv \phi^{(1)}(r_E, t_i)$. Взяв первые производные $S$ по $\beta_1$ и $\beta_2$, заменив

$\beta_1$ на $\hat{\beta}_1$, а $\beta_2$ на $\hat{\beta}_2$ и приравняв оба полученных выражения нулю, получим

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - T_0 - \hat{\beta}_1 \phi_i - \beta_2 \phi_i^{(1)}] \phi_i = 0 \ , \tag{4.4.11a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - T_0 - \hat{\beta}_1 \phi_i - \beta_2 \phi_i^{(1)}] \phi_i^{(1)} = 0 \ , \tag{4.4.11b}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \ , \tag{4.4.12}$$

где

$$C_{11} = \sum \phi_i^2, \quad C_{12} = \sum \phi_i \phi_i^{(1)}, \quad C_{22} = \sum [\phi_i^{(1)}]^2 , \tag{4.4.13}$$

$$d_1 = \sum (Y_i - T_0) \phi_i, \quad d_2 = \sum (Y_i - T_0) \phi_i^{(1)} .$$

Решение уравнения (4.4.12) имеет вид

$$\hat{\beta}_1 = \frac{d_1 C_{22} - d_2 C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} \ , \tag{4.4.14a}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{d_2 C_{11} - d_1 C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} \ . \tag{4.4.14b}$$

Обобщение описанной выше процедуры для полинома $k$-й степени дано в работе [10].

Удобные выражения для $\phi_i$ и $\phi_i^{(1)}$ получаются в случае полубесконечного тела, когда в уравнении (4.4.6) $r = x > 0$ и $n = 0$. В этом случае $\phi_i$ определяются из соотношения (1.6.18а) при $q_c = 1$ и $T_0 = 0$, а $\phi_i^{(1)}$ — из соотношения (3.2.13) при $\dot{q}_0 = 1$ и $T_0 = 0$.

#### 4.4.2.2. Случай резко изменяющейся плотности теплового потока

Если зависимость $q(t)$ имеет характер, представленный на рис. 4.2, то использование функциональных форм вида (4.4.1)—(4.4.5) не подходит для описания всей кривой. Участок скачкообразного изменения кривой, за которым следуют постоянный и затем восходящий участки, весьма трудно описать с помощью таких выражений, как (4.4.1)—(4.4.5). Поскольку плотность теплового потока может меняться и таким образом, как показано на рис. 4.2, необходим метод решения, пригодный и для подобных условий.

Один из простейших способов аппроксимации произвольной зависимости $q(t)$ состоит в делении кривой $q(t)$ на ряд временны́х интервалов с постоянным шагом $\Delta t$ и замене действительной зависимости $q(t)$ в пределах каждого из этих малых интервалов на постоянные величины $q$ (рис. 4.3), где $q_M$ представляет собой приближение к $q(t)$ в интервале между $t_{M-1}$ и $t_M$. Наилучшим значением $q_M$ является среднее значение $q(t)$ в интервале между $t_{M-1}$ и $t_M$:

$$\bar{q}_M = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{M-1}}^{t_M} q(t) dt \ . \tag{4.4.15}$$

Обычно найденное значение, обозначаемое через $\hat{q}_M$, не равно истинному среднему $\bar{q}_M$. Если $\hat{q}_M$ представить значением в точке, а не горизонтальным отрезком,

показанным на рис. 4.3, то $\hat{q}_M$ лучше всего определять в момент времени $t_{M-1/2} = (t_{M-1} + t_M)/2$.

Второй тип аппроксимации $q(t)$ заключается в применении линейных элементов, изображенных на рис. 4.4, с помощью которых зависимость $q(t)$ можно представить более точно, чем постоянными отрезками, показанными на рис. 4.3. Однако эта точность достигается за счет более сложной процедуры решения.

Другие возможные аппроксимации могут быть получены с использованием параболических зависимостей в интервалах между $t_{M-1}$ и $t_M$, например,

$$q(t) = q_{M-1} + \beta_1(t - t_{M-1}) + (q_M - q_{M-1} - \beta_1 \Delta t)\left(\frac{t - t_{M-1}}{\Delta t}\right)^2, \qquad (4.4.16)$$

где $\beta_1$ — дополнительный параметр, или с помощью кубических сплайнов, являющихся кубическими полиномами, для которых величины $q(t)$, $dq(t)/dt$ и $d^2q(t)/dt^2$ непрерывны на границе каждого элемента [8].

Рассмотрим, однако, простейший случай, а именно аппроксимацию постоянными отрезками (рис. 4.3). Этот случай соответствует решениям методами конечных разностей и конечных элементов, в которых такая аппроксимация используется на каждом расчетном шаге по времени.

В методе функциональной аппроксимации приближенное выражение для $q(t)$ должно содержать меньше неизвестных постоянных параметров, чем моментов времени, в которые производятся измерения температуры. Это обычно приводит к сглаживанию функции $q(t)$, в частности при увеличении отношения числа измеренных температур к числу неизвестных постоянных параметров. В свою очередь это приводит к искусственному исключению высокочастотных колебаний в $q(t)$. Итак, пусть имеется $r$ измеренных температур и $p$ параметров в приближенном представлении $q(t)$, где $r > p$. При наличии последнего условия задача определения $p$ параметров становится переопределенной, поскольку уравнений больше, чем неизвестных. Оценки можно получить с использованием метода наименьших квадратов. Другая процедура оценивания приведена в работе [6].

В случае линейной обратной задачи теплопроводности при постоянном на-

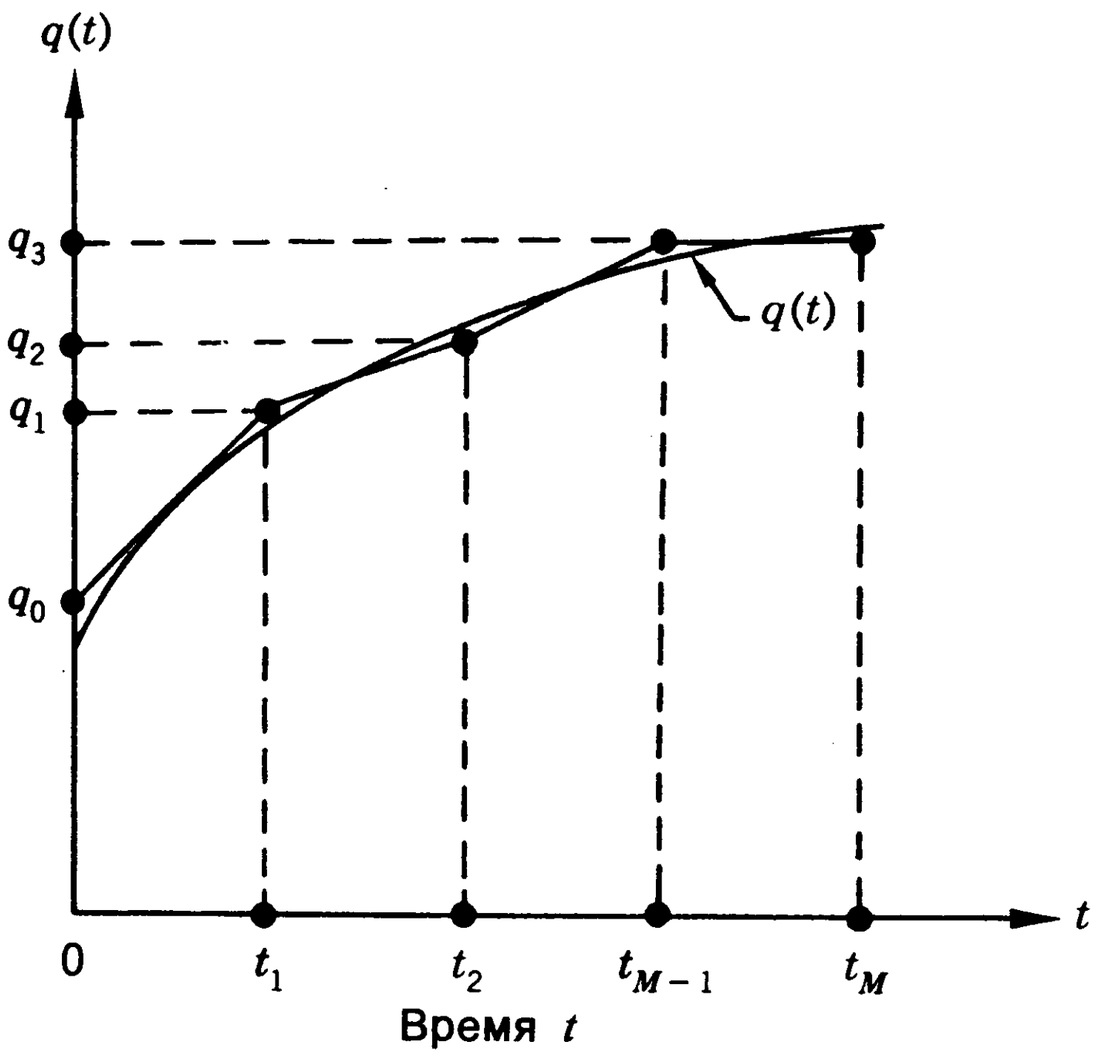



Рис. 4.4. Кусочно – линейная аппроксимация плотности теплового потока $q(t)$.

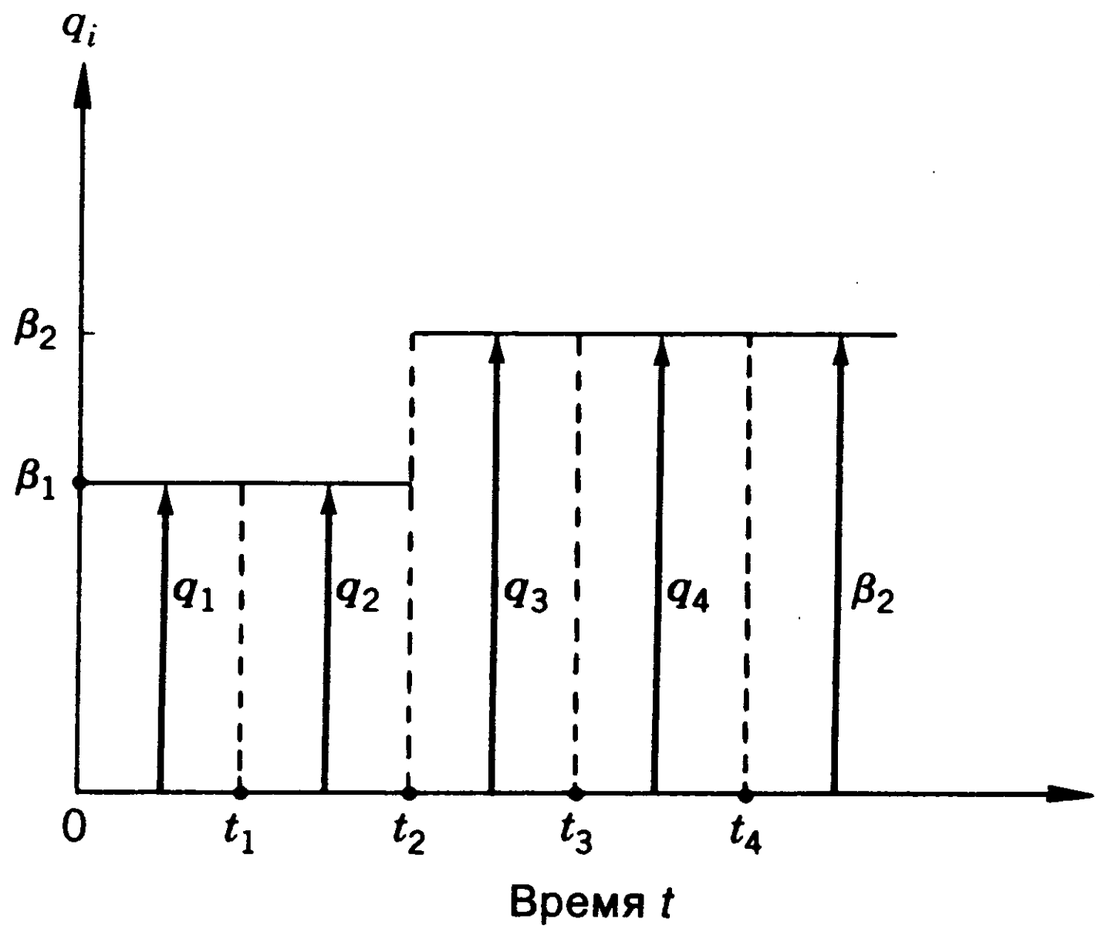



Рис. 4.5. Функциональная аппроксимация плотности теплового потока $q(t)$ при $q_1 = q_2 = \beta_1$ и $q_3 = q_4 = \beta_2$.

чальном распределении температуры $T_0$, одиночном внутреннем датчике и единственной неизвестной функции $q(t)$ математическую модель для внутренней температуры можно получить из соотношений (3.2.15). [Как указано в разд. 3.3.5, соотношения (3.2.15) можно получить с помощью интеграла Дюамеля или конечных разностей.]

Применим формулу (3.2.15) для функции $q(t)$, постоянной на каждом интервале времени между моментами измерения температур, при этом $q(t)$ может изменяться при каждом новом измерении. Один из способов уменьшения колебаний $q_M$ состоит в том, чтобы связать $q_i$ постоянными значениями на протяжении нескольких интервалов времени, например на $r$ шагах, где $r$ — любое целое число, большее единицы. В качестве простого примера рассмотрим значения $n = 4$ и $r = 2$. В этом случае имеем

$$q_1 = q_2 = \beta_1 \,, \qquad q_3 = q_4 = \beta_2 \,, \tag{4.4.17a,b}$$

где $\beta$ — параметры плотности теплового потока, которые нужно оценить (рис. 4.5). Тогда соотношения (3.2.15) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_2 & 0 \\ \phi_3 - \phi_1 & \phi_1 \\ \phi_4 - \phi_2 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 \\ T_0 \\ T_0 \end{bmatrix} \,, \tag{4.4.18}$$

поскольку $\Delta\phi_0 = \phi_1$, $\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1 = \phi_2$, $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \phi_3 - \phi_1$, а $\Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 = \phi_4 - \phi_2$. Заметим, что система (4.4.18) содержит четыре уравнения, а неизвестных параметров только два: $\beta_1$ и $\beta_2$. Один из способов получения решения системы (4.4.18) заключается в минимизации суммы квадратов $S$

$$S = \sum_{i=1}^{4} (Y_i - T_i)^2 \tag{4.4.19}$$

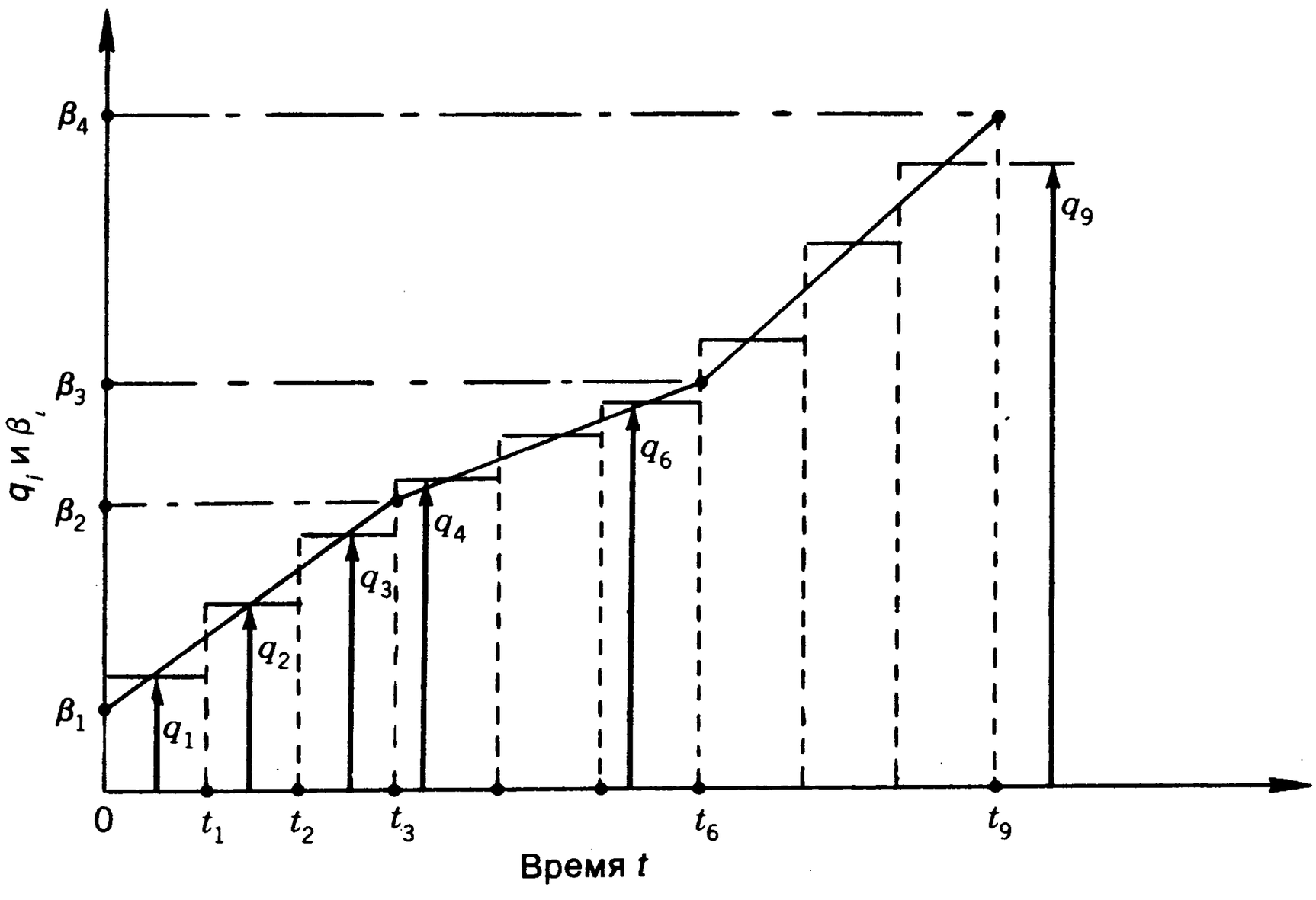



Рис. 4.6. Аппроксимация линейной функцией при $r = 3$.

по параметрам $\beta_1$ и $\beta_2$. Значения $Y_i$ представляют собой измеренные температуры в моменты времени $t_i$, $i = 1, 2, 3$ и 4, а $T_i$ — соответствующие расчетные температуры, полученные из уравнений (4.4.18).

Вместо постоянных отрезков плотности теплового потока (рис. 4.5) может использоваться последовательность связанных линейных отрезков, показанных на рис. 4.6.

### 4.4.3. Метод последовательного оценивания

В гл. 1 приведено несколько соображений, основанных на свойствах коэффициентов чувствительности относительно составляющих плотности теплового потока. Одно из них состоит в том, что процесс нестационарной теплопроводности по своей природе является «диффузионным», т. е. по сравнению с нагреваемой поверхностью передача теплового воздействия во внутренние точки тела в момент времени $t = C$ сопровождается как запаздыванием, так и демпфированием. Другой аспект диффузионного характера нестационарного процесса теплопроводности проявляется в том, что влияние на температуру двух тепловых потоков с близкими по величине плотностями и временами действия (см., например, рис. 4.3) практически неразличимо (рис. 1.10,*b*, 1.12, 1.13 и 1.14). Благодаря этим особенностям в наиболее эффективной (в вычислительном отношении) процедуре оценивания не должны одновременно определяться все компоненты плотности теплового потока $q_M$, $M = 1,2, \ldots n$. Вместо этого для обратной задачи теплопроводности рекомендуется последовательная процедура, которая и рассматривается в данном разделе.

В этом разделе представлены методы последовательной функциональной аппроксимации. Основные принципы разработаны в таком виде, который позволяет использовать интегральные модели, такие, как интеграл Дюамеля, а также разностные уравнения, полученные, например, с применением методов конечных разностей или конечных элементов.

Основные положения метода последовательной функциональной аппроксимации заключаются в следующем.

1. Для моментов времени $t_M$, $t_{M+1}$, ..., $t_{M+r-1}$ задается функциональная форма для $q(t)$ (при $t < t_{M-1}$ плотность теплового потока известна).

2. Для этих значений времени используется функция суммы квадратов, которая включает квадраты разностей между измеренными и соответствующими расчетными температурами.

3. Для принятой функциональной формы оцениваются составляющие плотности теплового потока.

4. Сохраняется только первая составляющая плотности теплового потока $q_M$.

5. $M$ увеличивается на единицу, и процедура повторяется.

Такова общая процедура решения *линейной* ОЗТ. В нелинейном случае может потребоваться несколько итераций. Методы функциональной аппроксимации как для линейного, так и для нелинейного случаев впервые были предложены Беком [12—15].

#### 4.4.3.1. Функциональная форма для постоянной плотности теплового потока

Простейшая последовательная процедура основана на *вре́менном* предположении, что несколько составляющих плотности теплового потока в последующие

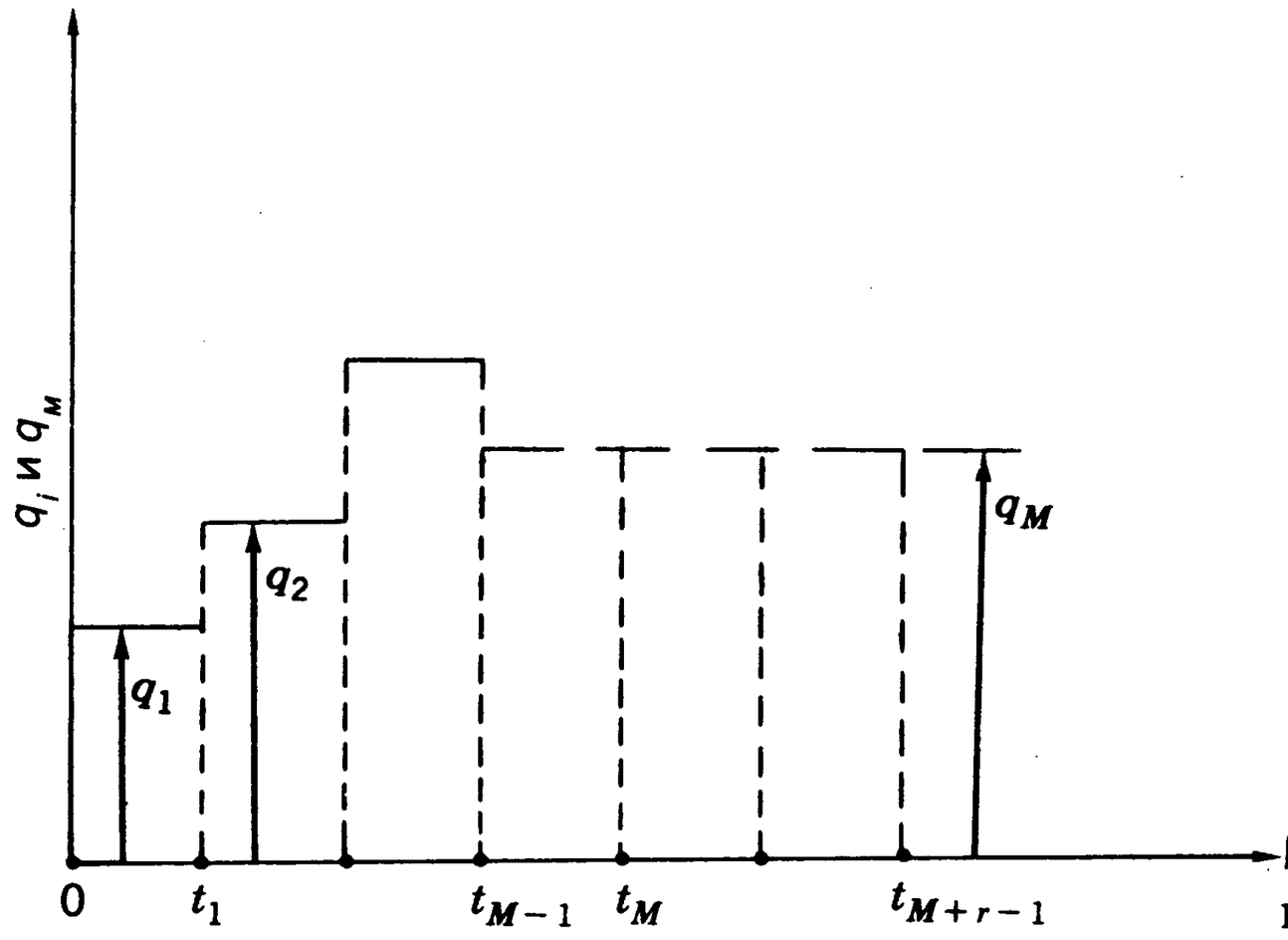



Рис. 4.7. Кусочно-постоянная аппроксимация плотности теплового потока в методе последовательного оценивания.

моменты времени постоянны по времени, как это показано на рис. 4.7. Составляющие плотности теплового потока $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, ..., $\hat{q}_{M-1}$ считаются известными, и задача заключается в том, чтобы оценить составляющую $\hat{q}_M$. Для придания алгоритмам решения обратной задачи устойчивости предполагается, что плотности теплового потока $q_M$, $q_{M+1}$, ..., $q_{M+r-1}$ равны между собой, т. е.

$$q_{M+1} = q_{M+2} = \cdots = q_{M+r-1} = q_M. \tag{4.4.20}$$

Таким образом, $r$ «последующие» составляющие теплового потока временно считаются равными между собой.

Если $r = 1$, то в случае одиночного внутреннего датчика температуры никакой «дополнительной» информации не вводится и на каждом шаге по времени вычисленная температура точно соответствует измеренному значению (для одиночного датчика), см. разд. 4.3.

Для последовательного определения $q_M$ с использованием сформулированного в виде соотношения (4.4.20) допущения необходимы модели для $T_M$, $T_{M+1}$, ... ..., $T_{M+r-1}$. Выражения для этих температур в стандартной форме имеют вид (3.2.19), где составляющие определяются соотношениями (3.2.20)—(3.2.22). При допущении (4.4.20) о постоянстве плотности теплового потока составляющие уравнения (3.2.19) имеют вид

$$T_M = \hat{T}_M|_{q_M=0} + \phi_1 q_M, \tag{4.4.21a}$$

$$T_{M+1} = \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} + \phi_2 q_M, \tag{4.4.21b}$$

$$T_{M+r-1} = \hat{T}_{M+r-1}|_{q_M=\ldots q_{M+r-1}=0} + \phi_r q_M, \tag{4.4.21c}$$

где используется соотношение

$$\phi_j = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta\phi_i. \tag{4.4.22}$$

При использовании метода наименьших квадратов для определения $q_M$ по результатам измерения температур $Y_M$, $Y_{M+1}$, ..., $Y_{M+r-1}$ необходимо минимизировать сумму

$$S = \sum_{i=1}^{r} (Y_{M+i-1} - T_{M+i-1})^2 = \sum_{i=1}^{r} (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}|_{q=0} - \phi_i q_M)^2 \tag{4.4.23}$$

относительно $q_M$. Продифференцируем выражение (4.4.23) по $q_M$, приравняем нулю и заменим $q_M$ на оценку этой величины. В результате получим уравнение функциональной аппроксимации при временном предположении о постоянстве $q$:

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^{r} (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}|_{q_M = \cdots = 0})\phi_i}{\sum_{i=1}^{r} \phi_i^2} . \tag{4.4.24}$$

Это уравнение дает алгоритм, который используется последовательно с увеличением $M$ на единицу на каждом шаге по времени. Значение $r$ обычно выбирают равным 3 или 4. Если $r$ принять равным единице, то, используя интеграл Дюамеля, получим уравнение для метода Штольца (см. также разд. 4.3.2 и 5.3.2).

Сделаем несколько замечаний по поводу соотношения (4.4.24). Использование нескольких последующих температур ($r > 1$) значительно повышает устойчивость уравнения (4.4.24) и существенно снижает чувствительность к погрешностям измерений. Полнее этот вопрос рассматривается в гл. 5 и 6. Кроме того, как и в методе Штольца, соотношение (4.4.24) представляет собой *линейную* функцию измеренной температуры. Наконец, соотношение (4.4.24) иногда записывают в виде

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{r} K_i (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}|_{q_M = \cdots = 0}) , \tag{4.4.25a}$$

где $K_i$ называется коэффициентом усиления и определяется по формуле

$$K_i \equiv \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^{r} \phi_j^2} . \tag{4.4.25b}$$

Заметим, что $K_i$ имеет размерность обратной $\phi$ величины. При $r = 2$ $\hat{q}_M$ определяется следующим образом:

$$\hat{q}_M = K_1 (Y_M - \hat{T}_M|_{q_M = 0}) + K_2 (Y_{M+1} - \hat{T}_{M+1}|_{q_M = q_{M+1} = 0}) , \tag{4.4.25c}$$

$$K_1 \equiv \frac{\phi_1}{\phi_1^2 + \phi_2^2} ; \quad K_2 \equiv \frac{\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} . \tag{4.4.25d}$$

Такая форма записи соотношения (4.4.24) позволяет провести сравнение с некоторыми другими последовательными процедурами.

Безразмерные коэффициенты усиления $K_i^+$ при расположении датчика на границе $x = L$ теплоизолированной пластины конечной толщины представлены в табл. 4.1. Значения $\phi$ численно равны безразмерным температурам, взятым из табл. 1.1 для безразмерных шагов по времени, равных 0,05, 0,2 и 0,5. Заметим, что значения $K_i^+$ [1)] уменьшаются с увеличением значений $\Delta t^+$, указывая на уменьшение чувствительности к погрешностям измерений при увеличении $\Delta t^+$. Большое снижение чувствительности к погрешностям измерений достигается так-

---

[1)] Безразмерные значения $K_i$ можно обозначить $K_i^+$. Они связаны с $\phi_i$ (размерными величинами) соотношением $K_i^+ = (L/k)\phi_i \left( \sum \phi_j^2 \right)^{-1}$.

*Таблица 4.1.* **Безразмерный коэффициент усиления в уравнении (4.4.25) при расположении датчика на теплоизолированной поверхности $x = L$ плоской пластины конечной толщины. Метод функциональной аппроксимации, $q_M$ = const.**

| Коэффициент усиления | $r=1$ | $r=2$ | $r=3$ | $r=4$ | $r=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta t^+ = 0{,}05$ | | | |
| $K_1^+$ | 3720 | 4,33 | 0,292 | 0,057 | 0,018 |
| $K_2^+$ | | 127 | 8,56 | 1,68 | 0,533 |
| $K_3^+$ | | | 31,8 | 6,24 | 1,98 |
| $K_4^+$ | | | | 13,08 | 4,15 |
| $K_5^+$ | | | | | 6,79 |
| | | $\Delta t^+ = 0{,}2$ | | | |
| $K_1^+$ | 16,3 | 1,02 | 0,248 | 0,095 | 0,046 |
| $K_2^+$ | | 3,95 | 0,955 | 0,365 | 0,176 |
| $K_3^+$ | | | 1,75 | 0,668 | 0,323 |
| $K_4^+$ | | | | 0,975 | 0,471 |
| $K_5^+$ | | | | | 0,620 |
| | | $\Delta t^+ = 0{,}5$ | | | |
| $K_1^+$ | 2,9869 | 0,41509 | 0,129 | 0,056 | 0,029 |
| $K_2^+$ | | 1,0332 | 0,322 | 0,140 | 0,073 |
| $K_3^+$ | | 0,516 | 0,224 | 0,117 | |
| $K_4^+$ | | | | 0,308 | 0,161 |
| $K_5^+$ | | | | | 0,205 |

же при фиксированном $\Delta t^+$ за счет увеличения $r$, т. е. числа учитываемых последующих шагов по времени.

В некоторых экспериментах используется несколько датчиков температуры, поскольку дополнительные данные могут способствовать более точному оцениванию условий на нагреваемой поверхности. В этом случае по $q_M$ минимизируется функция суммы квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{J} (Y_{j,M+i-1} - T_{j,M+i-1})^2. \tag{4.4.26}$$

Здесь первый подстрочный индекс означает номер датчика, а второй — время. Имеется $r$ значений будущего времени и $J$ датчиков температуры. При временном допущении $q_M$ = const выражение для $T_{j,M+i-1}$ можно записать в виде

$$T_{j,M+i-1} = \hat{T}_{j,M+i-1}|_{q_M = \cdots = q_{M+i-1} = 0} + \phi_{ji} q_M. \tag{4.4.27}$$

Подставив выражение (4.4.27) в выражение (4.4.26) и проведя обычные операции дифференцирования по $q_M$, приравнивания результата нулю и замены $q_M$ на $\hat{q}_M$, получим

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{J} (Y_{j,M+i-1} - \hat{T}_{j,M+i-1}|_{q_M = \cdots = 0}) \phi_{ji}}{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{J} \phi_{ji}^2}. \tag{4.4.28}$$

Используя коэффициент усиления, преобразуем это уравнение к виду

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{J} K_{ji}(Y_{j,M+i-1} - \hat{T}_{j,M+i-1}|_{q_M = \cdots = 0}) , \tag{4.4.29a}$$

$$K_{ji} \equiv \frac{\phi_{ji}}{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{J} \phi_{ji}^2} . \tag{4.4.29b}$$

Приведенные выше выражения при $J = 1$ сводятся к соотношениям (4.4.24) и (4.4.25) для одиночного датчика и $r$ последующих шагов по времени, а при $r = 1$ они сводятся к соотношению (4.3.13) для нескольких датчиков и одного единственного последующего шага по времени. Как и только что упомянутые выражения, соотношения (4.4.28) и (4.4.29) являются линейными функциями измеренных температур.

Некоторые коэффициенты усиления для случая двух последующих шагов по времени ($r = 2$) и двух датчиков ($J = 2$) представлены в табл. 4.2. Использованы безразмерные шаги по времени 0,05 и 0,5. Рассматриваемое тело представляет собой плоскую пластину, нагреваемую при $x = 0$ и теплоизолированную при $x = L$, для которой значения $\phi$ приведены в табл. 1.1. Рассматриваются три варианта расположения датчиков: $x = 0$ и $L$, $x = 0{,}5L$ и $L$ и $x = L$ и $L$. Последний вариант аналогичен случаю с одиночным датчиком ($x = L$), данные для которого приведены в табл. 4.1. Значения $K_{ji}^{+}$ в табл. 4.2 при $x = L$ и $L$ равны половине соответствующих значений в табл. 4.1 Наиболее существенное отличие между данными табл. 4.1 и 4.2 состоит в большом уменьшении коэффициентов усиления при малых шагах по времени, когда датчик расположен на нагреваемой поверхности или возле нее. Это означает, что составляющая плотности теплового потока $q_M$ гораздо менее чувствительна к погрешностям измерений, если датчики размещены около нагреваемой поверхности (разд. 4.8). Заметим также, что при $\Delta t^+ = 0{,}05$ коэффициенты усиления при $x = L$ (для расположения датчиков при $x = 0$ и $L$) довольно малы. Отсюда следует, что при таком малом значении $\Delta t^+$ датчик при $x = L$ слабо влияет на оценку плотности теплового потока на поверх-

*Таблица 4.2.* Безразмерный коэффициент усиления в уравнении (4.4.29) при установке двух датчиков в плоской пластине конечной толщины, теплоизолированной при $x = L$. Метод функциональной аппроксимации, $q_M = \text{const}$. Два последующих шага по времени, $r = 2$ ($\Delta t^+ \equiv \equiv \alpha t / L^2$)

| $i$ | $x = 0$ ($j = 1$) | $x = L$ ($j = 2$) | $x = 0{,}5L$ ($j = 1$) | $x = L$ ($j = 2$) | $x = L$ ($j = 1$) | $x = L$ ($j = 2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Значения $K_{ji}^{+}$ при $\Delta t^+ = 0{,}05$ | | | |
| 1 | 1,32 | 0,001 | 4,03 | 0,071 | 2,16 | 2,16 |
| 2 | 1,87 | 0,041 | 15,5 | 2,07 | 63,3 | 63,3 |
| | | | Значения $K_{ji}^{+}$ при $\Delta t^+ = 0{,}5$ | | | |
| 1 | 0,254 | 0,102 | 0,237 | 0,173 | 0,208 | 0,208 |
| 2 | 0,407 | 0,254 | 0,495 | 0,431 | 0,517 | 0,517 |

ности. При относительно большом шаге по времени $\Delta t^+ = 0{,}5$ расположение датчиков температуры становится гораздо менее важным. Коэффициенты усиления (табл. 4.2) показывают, что при малых значениях безразмерного времени датчики следует размещать как можно ближе к нагреваемой поверхности. (Как указано в гл. 5, эти «малые значения» безразмерного времени должны определяться по расстоянию $E$ от нагреваемой поверхности до ближайшего к ней датчика. Заметим, однако, что отношение $\alpha\Delta t/E^2$ всегда велико, если $E$ приближается к нулю.)

*Пример 4.2* Для той же пластины и тех же данных, что и в примере 4.1, рассчитайте значения плотности теплового потока на поверхности $q_1$ и $q_2$, используя метод функциональной аппроксимации при временном предположении $q$ = const и учитывая две последующих температуры.

*Решение.* Используем уравнение (4.4.25) при $r = 2$. Значения $\phi_i$ такие же, как и в примере 4.1. Следовательно,

$$K_1 = \frac{\phi_1}{\phi_1^2 + \phi_2^2} = 3560{,}6 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}, \qquad K_2 = \frac{\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2} = 8552{,}0 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}.$$

Используя соотношение (4.4.25) при $M = 1$, получим

$$\hat{q}_1 = (Y_1 - T_0)K_1 + (Y_2 - T_0)K_2 = 395\,900 \text{ Вт/м}^2,$$

а повторив вычисления при $M = 2$, найдем

$$\hat{q}_2 = (Y_2 - \hat{q}_1\Delta\phi_1 - T_0)K_1 + (Y_3 - \hat{q}_1\Delta\phi_2 - T_0)K_2 = 804\,400 \text{ Вт/м}^2.$$

Эти значения $\hat{q}$ больше, чем точные значения 250000 и 750000 Вт/м$^2$, и имеют погрешности 58 и 7% соответственно. Эти погрешности немного больше, чем полученные в примере 4.1 для метода Штольца, однако используемый здесь алгоритм гораздо менее чувствителен к погрешностям измерений и допускает применение существенно меньших шагов по времени.

*Пример 4.3.* Для плоской пластины конечной толщины, имеющей $\alpha = 1$ м$^2$/с, $k = 1$ Вт/(м · °С) и $L = 1$ м, измеренные температуры на теплоизолированной поверхности ($x = L$) равны 16, 45, 99 и 179°С для моментов времени 0,5; 1; 1,5 и 2 с соответственно. Начальная температура 10°С. Рассчитайте $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$, $\hat{q}_3$, используя соотношения (4.4.25) при $r = 1$ и 2.

*Решение.* Безразмерный шаг по времени равен 0,5, значения $\phi_i$ даны в табл. 1.1, а значения $K_i$ для данного случая приведены в табл. 4.1 при $\Delta t^+ = 0{,}5$. В результате получим

| $t_i$, с | $\hat{q}_i$, $r=1$ | $\hat{q}_i$, $r=2$ | $q_i$, точное |
|---|---|---|---|
| 0,5 | 17,92 | 38,65 | 25 |
| 1 | 77,85 | 78,52 | 75 |
| 1,5 | 123,1 | 126,8 | 125 |

Размерность величин в таблице — Вт/м$^2$. После первого шага по времени приемлемые результаты можно получить как при $r = 1$, так и при $r = 2$, однако для данного примера, если $\Delta t$ уменьшить до 0,25 с, пригодные результаты получаются только при $r = 2$. Погрешности в вычисленных значениях вызваны неточностями алгоритмов и неточными значениями $Y_i$.

#### 4.4.3.2. Функциональная форма для плотности теплового потока, изменяющейся по линейному закону

Другой алгоритм метода последовательной функциональной аппроксимации использует вре́менное допущение о линейном изменении плотности теплового потока. На рис. 4.8 показаны линейно-связанные отрезки, начиная с известного

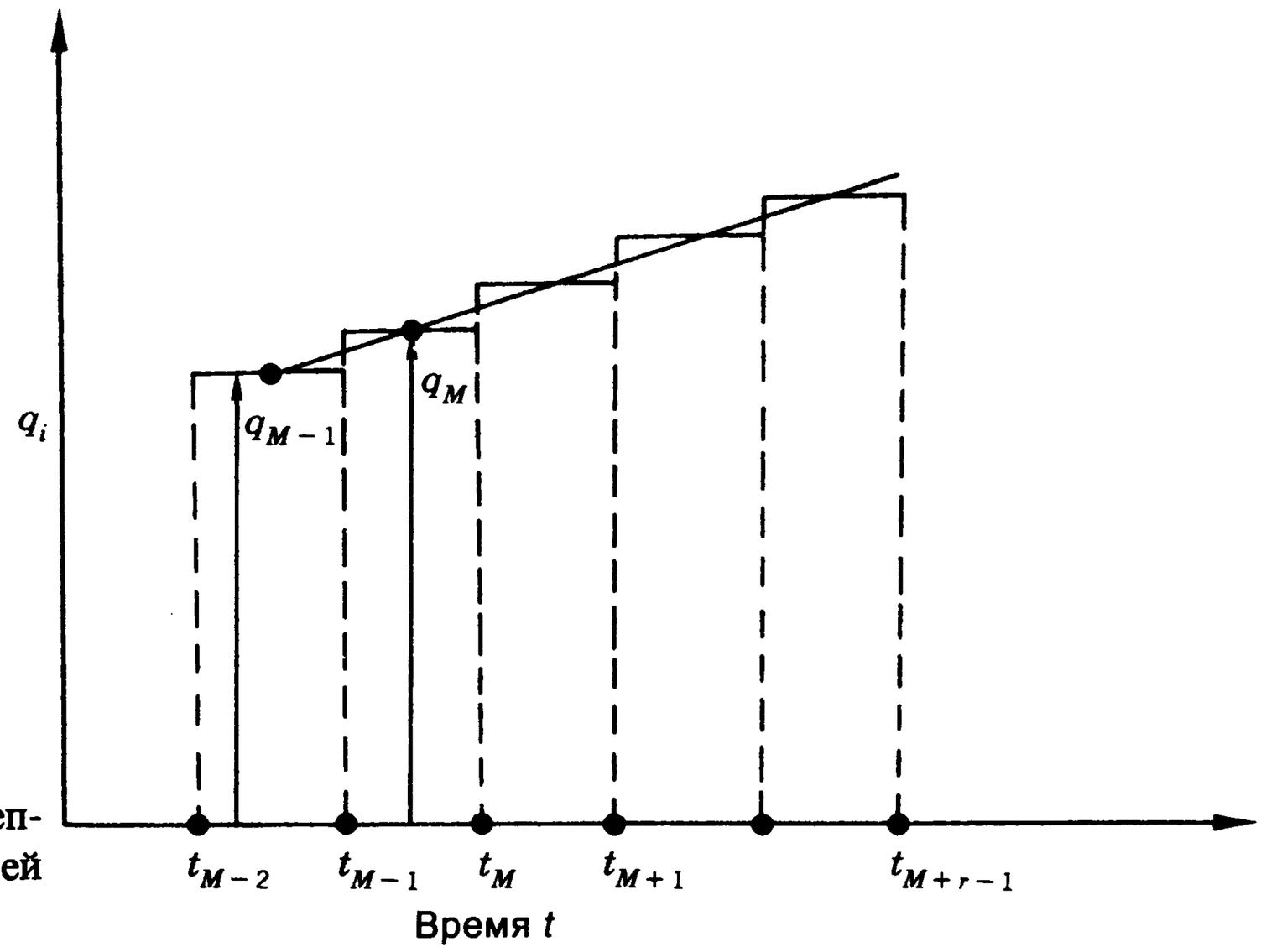



Рис. 4.8. Аппроксимация плотности теплового потока линейной функцией $q_{M+j-1} = (1-j)\hat{q}_{M-1} + j\hat{q}_M$.

значения $\hat{q}_{M-1}$. Плотность теплового потока на каждом $\Delta t$, как и ранее, считается постоянной.

Для показанных на рис. 4.8 связанных линейных отрезков единственным неизвестным является $q_M$, поскольку $q_1, \ldots, q_{M-1}$ были предварительно рассчитаны, а $q_{M+1}, \ldots, q_{M+r-1}$ можно выразить через $q_M$. Следовательно, можно записать

$$q_{M+1} = q_M + (q_M - \hat{q}_{M-1}) = 2q_M - \hat{q}_{M-1}\,, \tag{4.4.30a}$$

$$q_{M+2} = q_M + 2(q_M - \hat{q}_{M-1}) = 3q_M - 2\hat{q}_{M-1}\,, \tag{4.4.30b}$$

$$q_{M+3} = 4q_M - 3\hat{q}_{M-1}\,, \tag{4.4.30c}$$

$$\vdots$$

$$q_{M+j-1} = jq_M - (j-1)\hat{q}_{M-1}\,. \tag{4.4.30d}$$

Температуры в моменты времени $t_M, \ldots$ определяются из уравнения (3.2.19). В результате получим

$$T_M = \hat{T}_M|_{q_M=0} + q_M\Delta\phi_0 = \hat{T}_M|_{q_M=0} + q_M\phi_1\,, \tag{4.4.31a}$$

$$T_{M+1} = \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} + q_M\Delta\phi_1 + q_{M+1}\Delta\phi_0 =$$

$$= \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} - \hat{q}_{M-1}\phi_1 + q_M(\phi_1+\phi_2)\,, \tag{4.4.31b}$$

$$T_{M+2} = \hat{T}_{M+2}|_{q_M=\cdots=0} + q_M\Delta\phi_2 + q_{M+1}\Delta\phi_1 + q_{M+2}\Delta\phi_0 =$$

$$= \hat{T}_{M+2}|_{q_M=\cdots=0} - \hat{q}_{M-1}(\phi_1+\phi_2) + q_M(\phi_1+\phi_2+\phi_3)\,. \tag{4.4.31c}$$

Общее выражение имеет вид

$$T_{M+j} = \hat{T}'_{M+j}|_{q_M=\cdots=0} + q_M\sum_{k=1}^{j+1}\phi_k\,, \tag{4.4.32a}$$

$$\hat{T}'_{M+j}|_{q_M=\cdots=0} \equiv \hat{T}_{M+j}|_{q_M=\cdots=0} - \hat{q}_{M-1}\sum_{k=1}^{j}\phi_k\,. \tag{4.4.32b}$$

Алгоритм для определения $q_M$ включает минимизацию суммы

$$S=\sum_{i=1}^{r}\left(Y_{M+i-1}-\hat{T}'_{M+i-1}|_{q_M=\cdots=0}-q_M\sum_{k=1}^{i}\phi_k\right)^2. \tag{4.4.33}$$

В соответствии с обычной процедурой дифференцирования $S$ по $q_M$ и т. д. имеем

$$\hat{q}_M=\frac{\sum_{i=1}^{r}(Y_{M+i-1}-\hat{T}'_{M+i-1}|_{q_M=\cdots=0})\sum_{k=1}^{i}\phi_k}{\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{i}\phi_k\right)^2}, \tag{4.4.34}$$

или

$$\hat{q}_M=\sum_{i=1}^{r}K_i(Y_{M+i-1}-\hat{T}'_{M+i-1}|_{q_M=\cdots=0}), \tag{4.4.35a}$$

$$K_i\equiv\left(\sum_{k=1}^{i}\phi_k\right)\left[\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{k}\phi_l\right)^2\right]^{-1}. \tag{4.4.35b}$$

Как и в случае временного предположения о постоянстве $q_M$, уравнение (4.4.35) сводится к алгоритму Штольца ($r = 1$):

$$\hat{q}_M=K_1(Y_M-\hat{T}_M|_{q_M=0});\quad K_1\equiv\frac{1}{\phi_1}. \tag{4.4.36}$$

*Таблица 4.3.* Безразмерный коэффициент усиления в уравнении (4.4.35) при расположении датчика на теплоизолированной поверхности $x = L$ плоской пластины конечной толщины. Метод функциональной аппроксимации; $q_M$ изменяется по линейной зависимости.

| Коэффициент усиления | $r=1$ | $r=2$ | $r=3$ | $r=4$ | $r=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\Delta t^+=0{,}05$ | | | |
| $K_1^+$ | 3720 | 4,05 | 0,18 | 0,024 | 0,005 |
| $K_2^+$ | | 122 | 5,54 | 0,724 | 0,160 |
| $K_3^+$ | | | 25,5 | 3,33 | 0,734 |
| $K_4^+$ | | | | 8,79 | 1,84 |
| $K_5^+$ | | | | | 3,91 |
| | | $\Delta t^+=0{,}2$ | | | |
| $K_1^+$ | 16.3 | 0,66 | 0,098 | 0,025 | 0,008 |
| $K_2^+$ | | 3,21 | 0,47 | 0,120 | 0,041 |
| $K_3^+$ | | | 1,16 | 0,294 | 0,100 |
| $K_4^+$ | | | | 0,547 | 0,186 |
| $K_5^+$ | | | | | 0,300 |
| | | $\Delta t^+=0{,}5$ | | | |
| $K_1^+$ | 2.99 | 0,227 | 0,043 | 0,013 | 0,005 |
| $K_2^+$ | | 0,791 | 0,151 | 0,044 | 0,017 |
| $K_3^+$ | | | 0,323 | 0,094 | 0,035 |
| $K_4^+$ | | | | 0,163 | 0,061 |
| $K_5^+$ | | | | | 0,094 |

При $r = 2$ соотношение (4.4.35) принимает вид

$$\hat{q}_M = K_1(Y_M - \hat{T}_M|_{q_M=0}) + K_2(Y_{M+1} - \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} + \hat{q}_{M-1}\phi_1) \ , \quad (4.4.37a)$$

$$K_1 \equiv \frac{\phi_1}{\Delta}, \quad K_2 \equiv \frac{\phi_1 + \phi_2}{\Delta}, \quad \Delta \equiv \phi_1^2 + (\phi_1 + \phi_2)^2 . \quad (4.4.37b)$$

Коэффициенты усиления в соотношении (4.4.35) для плоской пластины, теплоизолированной при $x = L$ и нагреваемой при $x = 0$, приведены в табл. 4.3. Датчик находится на границе $x = L$. Сравним приведенные значения со значениями из табл. 4.1. При $r = 1$ значения совпадают, так как $q = C$ и алгоритмы с линейным изменением $q$ сводятся к методу Штольца. По мере увеличения $r$ коэффициенты усиления при линейном изменении $q$ уменьшаются быстрее, чем при $q = C$. Для определения условий, при которых приближение линейного изменения плотности теплового потока лучше, чем приближение постоянной плотности, могут потребоваться численные эксперименты.

#### 4.4.3.3. Альтернативная интерпретация

Существует несколько альтернативных интерпретаций алгоритма решения ОЗТ, основанного на применении соотношения (4.4.24). Рассмотрим одну такую полезную интерпретацию, способствующую лучшему пониманию линейных обратных задач. В общей форме типичный член в уравнении (3.2.19) можно записать следующим образом:

$$T_{M+j-1} = \hat{T}_{M+j-1}|_{q_M=\cdots=q_{M+j-1}=0} + \sum_{i=1}^{j} q_{M+i-1}\Delta\phi_{j-i+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, r \quad (4.4.38)$$

Предположим, что в течение $r$ последующих шагов по времени вычисленные температуры точно соответствуют измеренным ее значениям. Тогда $T_{M+j-1} = Y_{M+j-1}$ при $j = 1,2,\ldots\ r$. Соответствующую плотность теплового потока обозначим через $\tilde{q}_{M+j-1}$. С учетом предыдущих условий соотношение (4.4.38) принимает вид

$$Y_{M+j-1} = \hat{T}_{M+j-1}|_{q_M=\cdots=q_{M+j-1}=0} + \sum_{i=1}^{j} \tilde{q}_{M+i-1}\Delta\phi_{j-i+1} . \quad (4.4.39)$$

Подставив (4.4.39) в (4.4.24), получим

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{j=1}^{r} \phi_j \sum_{i=1}^{j} \tilde{q}_{M+i-1}\Delta\phi_{j-i+1}}{\sum_{j=1}^{r} \phi_j^2} . \quad (4.4.40a)$$

Раскрывая в соотношении (4.4.40a) двойное суммирование и объединяя коэффициенты при $\tilde{q}_{M+j-1}$, соотношение (4.4.40a) преобразуем к виду

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{r} w_i \tilde{q}_{M+i-1} , \quad (4.4.40b)$$

где весовые коэффициенты при составляющих плотности теплового потока определяются следующим образом:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{r} \phi_j \Delta\phi_{j-i+1}}{\sum_{j=1}^{r} \phi_j^2}, \qquad \sum_{i=1}^{r} w_i = 1. \tag{4.4.40c}$$

Соотношение (4.4.40b) показывает, что решение ОЗТ можно интерпретировать как средневзвешенную величину $r$ значений плотности теплового потока $\tilde{q}_{M+j-1}$, $j = 1,2, \ldots, r$, определяемых из условия точного соответствия $r$ последующим температурам. Заметим, что профиль температуры в начале процедуры соответствует $\hat{q}_{M-1}$. Весовые коэффициенты $w_i$ для каждой задачи могут быть вычислены заранее.

Используя соотношение (4.4.40b), можно получить формулу для вычисления $q_{M+i-1}$, записав в явном виде последнее ($i = j$) слагаемое в выражении (4.4.39):

$$\tilde{q}_{M+j-1} = \frac{Y_{M+j-1} - \hat{T}_{M+j-1}|_{q_M = \cdots = q_{M+j-1} = 0}}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_1} \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{q}_{M+i-1} \Delta\phi_{j-i+1}. \tag{4.4.41}$$

Более подробное изложение этой интерпретации алгоритма ОЗТ приведено в работе [35].

*Пример 4.4.* Повторите пример 4.3 при $r = 2$ (две последующие температуры), используя для вычисления весовых коэффициентов составляющих плотности теплового потока соотношения (4.4.40c).

*Решение.* Сначала с помощью соотношений (4.4.40c) найдем $w_1 = 0{,}65409$ и $w_2 = 0{,}34591$. Затем для вычисления $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$ используем (4.4.41), после чего по формуле (4.4.40b) определим $\hat{q}_1$. Результаты расчетов сведем в таблицу

| $M$ | $\tilde{q}_M$ | $\tilde{q}_{M+1}$ | $\hat{q}_M$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 17,9216 | 77,8549 | 38,6534 |
| 2 | 46,9823 | 138,148 | 78,5176 |
| 3 | 91,8682 | 194,013 | 126,7559 |

## 4.5. Метод регуляризации

### 4.5.1. Введение

Метод регуляризации представляет собой модифицированный метод наименьших квадратов, в котором вводятся дополнительные слагаемые с целью уменьшения колебаний искомой функции, в частности плотности теплового потока на поверхности. Эти колебания или флуктуации не связаны с физическими процессами, а обусловлены некорректностью обратной задачи, и для их устранения требуются специальные меры.

Метод регуляризации имеет несколько вариантов и изучался многими исследователями. Различные регуляризующие алгоритмы решения обратных задач теплопроводности разработаны советскими исследователями, среди которых — Тихонов и Арсенин [2], Алифанов [17—19], Коздоба и Круковский [20]. Из американских авторов метод регуляризации использовали Белл и Уордлоу [21, 22], а также Бек и Мурио [23]. В большинстве случаев при решении ОЗТ метод регуляризации применялся для всей области. Единственное исключение представляет

работа [23], в которой рассматривались как алгоритм во всей области, так и последовательное решение [1)]. Было установлено, что метод последовательного оценивания дает почти такие же результаты, что и метод оценивания во всей области, но при значительно меньших затратах машинного времени.

Метод регуляризации родствен некоторым приближенным методам наименьших квадратов. Один из них называется методом гребневой регрессии или демпфированным методом наименьших квадратов [24, 25]. Этот метод связан также с процедурами, которые использовались при решении нелинейных задач методом наименьших квадратов Левенбергом [26] и Марквардтом [27, 28]. Подробное изложение методов гребневой регрессии и нелинейных наименьших квадратов дано в работе [6]. Отличная книга по методу наименьших квадратов выпущена Лоусоном и Хенсоном, где также рассматривается гребневая регрессия [29].

План данного раздела — рассмотреть физический смысл регуляризующих членов (разд. 4.5.2), проанализировать регуляризацию во всей области (разд. 4.5.3) и, наконец, кратко изложить последовательный метод регуляризации (разд. (4.5.4)).

### 4.5.2. Физический смысл регуляризующих членов

В методе регуляризации при решении обратной задачи теплопроводности минимизируется расширенная функция суммы квадратов отклонений $S$. В алгебраической форме для $J$ датчиков температуры $S$ можно записать в виде

$$S=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{J}(Y_{j,M+i-1}-T_{j,M+i-1})^2+$$
$$+\alpha\left[W_0\sum_{i=1}^{r}q_{M+i-1}^2+W_1\sum_{i=1}^{r-1}(q_{M+i}-q_{M+i-1})^2+\right.$$
$$\left.+W_2\sum_{i=1}^{r-2}(q_{M+i+1}-2q_{M+i}+q_{M+i-1})^2\right]. \qquad (4.5.1)^{2)}$$

Если $M=1$ и $r=n$, то выражение (4.5.1) можно использовать для процедуры оценивания во всей области, тогда как в данной форме его можно применить для последовательного оценивания $q_M$. В выражении (4.5.1) предполагается, что составляющие плотности теплового потока $q_1, q_2, \ldots, q_n$ используются для описания закона изменения плотности теплового потока $q(t)$ по времени. Составляющие $q_i$, $i=1, \ldots, n$ могут быть постоянными элементами (рис. 4.3) или быть связанными с линейной поинтервальной аппроксимацией (рис. 4.4) или иметь другие интерпретации. Число $\alpha$ в выражении (4.5.1) называется параметром регуляризации. Для выбора $\alpha$ можно применять различные методы и, к счастью, можно использовать относительно большую область его значений [3)]. Параметр $\alpha$ имеет размерность $((м^2 \cdot К)/Вт)^2$.

---

[1)] Метод последовательной регуляризации (в терминологии авторов книги) был предложен также О.М. Алифановым в работе: О регуляризованных схемах приближенного решения нелинейной обратной задачи теплопроводности. — Инженерно-физический журнал, 1974, т. 26, №1, с. 116—121 и описан также под названием метода поинтервальной регуляризации в монографии [19].— *Прим. ред.*

[2)] $\alpha > 0$.— *Прим. ред.*

[3)] Можно привести много примеров решения ОЗТ, когда область приемлемых значений $\alpha$ оказывается достаточно узкой.— *Прим. ред.*

Сумма в выражении (4.5.1), перед которой стоит $W_0$, называется регуляризующим членом нулевого порядка [1)]. Если $W_1 = W_2 = 0$ и $W_0 \neq 0$, то минимизация выражения (4.5.1) называется регуляризацией нулевого порядка. Член, которому предшествует $W_1$, называется регуляризующим членом первого порядка, и если $W_0 = W_2 = 0$, $W_1 \neq 0$, то метод регуляризации первого порядка включает в себя минимизацию соответствующей функции $S$. Аналогичным образом член, которому предшествует $W_2$, называется членом регуляризации второго порядка, и т. д. Заметим, что член нулевого порядка не содержит разности компонент $q$, член первого порядка содержит разности $q$ первого порядка и член второго порядка — разности $q$ второго порядка. В выражение (4.5.1) могут быть включены члены, имеющие порядок выше второго, однако наиболее употребительным является нулевой порядок, первый порядок используется редко, а последующие — еще реже [2)]. Процедура регуляризации нулевого порядка во всей области подобна процедуре гребневой регрессии [6, 24, 28, 29]. Аллини и Сгаллари [36] в работе о восстановлении образов по проекциям используют сочетание регуляризации нулевого, первого и второго порядков.

Процедура регуляризации нулевого порядка во всей области для одиночного датчика включает минимизацию суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - T_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n} q_i^2 \tag{4.5.2}$$

по $q_i$, $i = 1,2, \ldots, n$. Если $\alpha \to 0$, то можно обеспечить точное соответствие между $Y_i$ и $T_i$, но при этом для малых шагов по времени сумма членов $q_i^2$ становится большой. В противоположном случае, при очень большом $\alpha$, величины $q_i$ уменьшаются и в пределе достигается условие

$$q_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4.5.3}$$

С увеличением $\alpha$ уменьшается модуль величины $q_i$. Для малых шагов по времени и расположенного внутри датчика при $\alpha \approx 0$ можно получить неустойчивое решение, когда величина $q_i$ колеблется с переменой знака и возрастающими амлитудами. Однако правильным выбором $\alpha$ неустойчивость можно устранить, так как регуляризующий член в выражении (4.5.2) уменьшает максимальные абсолютные значения оцениваемых величин $q_i$.

Процедура регуляризации *первого* порядка во всей области для одиночного датчика включает минимизацию суммы

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - T_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} (q_{i+1} - q_i)^2. \tag{4.5.4}$$

И опять, если $\alpha$ стремится к нулю, то получим точную «подгонку». При большом $\alpha$ в экстремальной точке величина $q_i$ удовлетворяет условию

$$q_i = \text{const}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{4.5.5}$$

где константа может иметь любое положительное или отрицательное значение. Абсолютная величина $q_i$ не играет роли. При умеренных значениях $\alpha$ значения

---

[1)] Понятия и терминология, используемые в книге, к сожалению, не всегда соответствуют понятиям и терминологии, предложенным автором этого метода А.Н. Тихоновым.— *Прим. ред.*

[2)] Существенно чаще используется регуляризация первого и второго порядков.— *Прим. ред.*

*разностей* $q_i$ уменьшаются. Путем уменьшения колебаний значений $q_i$ при переходе от одного шага по времени к другому в процессе минимизации выражения (4.5.4) обеспечивается устойчивость решения $\hat{q}_i$, $i = 1,2, \ldots, n$. Заметим, что второе слагаемое в выражении (4.5.4) аналогично интегралу

$$\alpha' \int_0^{t_n} \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 dt\,, \tag{4.5.6}$$

который учитывает первую производную от $q(t)$, где $\alpha' = \alpha\Delta t$.

Аналогично соотношениям (4.5.2) и (4.5.4) в процедуре регуляризации второго порядка минимизируется выражение

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - T_i)^2 + \alpha \sum_{i=1}^{n-2} (q_{i+2} - 2q_{i+1} + q_i)^2, \tag{4.5.7}$$

где второе слагаемое аналогично интегралу

$$\alpha'' \int_0^{t_n} \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)^2 dt\,. \tag{4.5.8}$$

С увеличением $\alpha$ значения $q_i$ все больше приближаются к прямой линии

$$q_i = q_0 + iq'\Delta t, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{4.5.9}$$

где $q_0$ и $q'$ — произвольные постоянные, т. е. при большом значении $\alpha$ $q(t)$ аппроксимируется прямой линией с двумя неизвестными: начальным значением и наклоном. Умеренные значения $\alpha$ приводят к уменьшению разностей второго порядка между оцениваемыми значениями $q_i$. Другими словами, скорость изменения $\hat{q}(t)$ уменьшается.

Проведенный выше анализ показывает, что влияние регуляризующих членов разных порядков проявляется по-разному. Нулевой порядок уменьшает абсолютную величину $q_i$, при первом порядке уменьшаются по абсолютной величине колебания $q_i$ при переходе от одного $i$ к другому, а учет регуляризующего члена второго порядка приводит к уменьшению частоты колебаний в оцениваемой плотности теплового потока.

### 4.5.3. Метод регуляризации во всей области

#### 4.5.3.1. Алгебраическая формулировка

В качестве примера оценивания во всей области рассмотрим простой случай регуляризации нулевого порядка только с двумя измерениями по времени. В этом случае в выражении (4.5.2) $n = 2$. Используя первые два уравнения (3.2.15), получим

$$S = (Y_1 - q_1\phi_1 - T_0)^2 + (Y_2 - q_1\Delta\phi_1 - q_2\phi_1 - T_0)^2 + \alpha(q_1^2 + q_2^2)\,. \tag{4.5.10}$$

Это выражение сначала продифференцируем по $q_1$ и приравняем нулю, а затем $S$ продифференцируем по $q_2$ и также приравняем нулю. В матричной форме полученные два уравнения запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \phi_1^2 + \Delta\phi_1^2 + \alpha & \phi_1\Delta\phi_1 \\ \phi_1\Delta\phi_1 & \phi_1^2 + \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_1 - T_0)\phi_1 + (Y_2 - T_0)\Delta\phi_1 \\ (Y_2 - T_0)\phi_1 \end{bmatrix}. \tag{4.5.11}$$

Эти уравнения решаются совместно относительно $\hat{q}_1$ и $\hat{q}_2$, однако подробности рассмотрим в задачах. Заметим только, что если $\alpha$ стремится к бесконечности, то решение системы (4.5.11) имеет вид $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = 0$.

Параметр регуляризации $\alpha$ играет ключевую роль. Как указано в разд. 4.5.2, если $\alpha \to 0$, то получается точная подгонка, тогда как при $\alpha \to \infty$ $\hat{q}_1$ и $\hat{q}_2$ стремятся к нулю. Чтобы пояснить роль малых и больших значений $\alpha$, диагональные члены квадратной матрицы системы (4.5.11) запишем следующим образом:

$$C_{11} = \phi_1^2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{\phi_1^2} + \left( \frac{\Delta\phi_1}{\phi_1} \right)^2 \right], \tag{4.5.12a}$$

$$C_{22} = \phi_1^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{\phi_1^2} \right). \tag{4.5.12b}$$

Один из способов выбора умеренного значения $\alpha$ состоит в том, чтобы сделать выражение $\alpha/\phi_1^2$ примерно равным 1. Тогда параметр регуляризации равен

$$\alpha = \phi_1^2. \tag{4.5.13}$$

Следует указать, что данное соотношение не является рекомендуемым, однако оно представляет собой простой критерий, который к тому же показывает действительную размерность $\alpha$. На практике $\alpha$ может быть гораздо больше, например, $\alpha = 1000\ \phi_1^2$. Более подробно этот вопрос изложен в разд. 4.5.3.3 и 5.6.2.

#### 4.5.3.2. Матричная запись

При разработке процедуры оценивания во всей области для $n$ моментов времени и $n$ компонент плотности теплового потока используется матричный подход. Функция суммы квадратов принимает вид

$$S = (\mathbf{Y} - \mathbf{T})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}) + \alpha [W_0 (\mathbf{H}_0 \mathbf{q})^T \mathbf{H}_0 \mathbf{q} + W_1 (\mathbf{H}_1 \mathbf{q})^T \mathbf{H}_1 \mathbf{q} + W_2 (\mathbf{H}_2 \mathbf{q})^T \mathbf{H}_2 \mathbf{q}], \tag{4.5.14}$$

где для метода оценивания во всей области при одиночном датчике

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \tag{4.5.15a, b, c}$$

Величины $W_i$ представляют собой весовые коэффициенты для методов регуляризации нулевого, первого и второго порядков. Матрицы $\mathbf{H}_i$ квадратные и связаны с процедурами регуляризации нулевого, первого и второго порядков. По аналогии с алгебраическими выражениями (4.5.2), (4.5.4) и (4.5.7) матрицы $\mathbf{H}_i$ представим в виде

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}, \tag{4.5.16a}$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5.16b}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5.16c}$$

где $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ записаны для $n = 5$.

Компоненты $q$ в выражении (4.5.14) находятся путем минимизации $S$. Взяв матричную производную первого порядка по $n$ составляющим плотности теплового потока, заменив $\mathbf{q}$ на $\hat{\mathbf{q}}$ и приравняв полученное выражение нулевому вектору, получим

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}. \tag{4.5.17}$$

Модель для температуры $\mathbf{T}$ имеет вид уравнения (3.2.17) и используется в соотношении (4.5.14). Раскрывая матричную производную в уравнении (4.5.17), имеем

$$[\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha(W_0\mathbf{H}_0^T\mathbf{H}_0 + W_1\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1 + W_2\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2)]\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - T_0\mathbf{1}), \tag{4.5.18}$$

поскольку [6]

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{X}\mathbf{q})^T\mathbf{X}\mathbf{q} = 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{q}. \tag{4.5.19}$$

Заметим, что $\mathbf{1}$ — это единичный вектор.

Уравнение (4.5.18) называется матричным нормальным уравнением. Оно содержит $n$ неизвестных компонент $\mathbf{q}$. Если $n$ больше трех или четырех, то следует использовать машинную программу для решения линейных алгебраических уравнений. Известно много таких программ, некоторые из них имеются в библиотеке IMSL [30], а некоторые приведены в книге Лоусона и Хенсона [29].

Решение уравнения (4.5.18) относительно вектора $\mathbf{q}$ можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{q}} = [\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha(W_0\mathbf{I} + W_1\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1 + W_2\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2)]^{-1}\mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - T_0\mathbf{1}). \tag{4.5.20}$$

Вводимые в процедуре регуляризации члены появляются только как аддитивная добавка к $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$. Эти члены уменьшают или устраняют плохую обусловленность некорректной обратной задачи теплопроводности.

Если в уравнении (4.5.18) $\alpha = 0$, то получается уравнение «точной подгонки». Для $n$ измерений матрица $\mathbf{X}$ имеет размерность $n \times n$ и

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{X}^{-1})^T. \tag{4.5.21}$$

Таким образом, при $\alpha = 0$ из уравнения (4.5.20) получим соотношение

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Y} - T_0\mathbf{1}), \tag{4.5.22}$$

которое можно также получить из уравнения (3.2.17), заменив $\mathbf{T}$ на $\mathbf{Y}$. Как указывалось ранее, точная подгонка обычно не позволяет получить удовлетворительные результаты.

Регуляризующий член первого порядка $\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$ в соотношениях (4.5.18) и (4.5.20) имеет вид

$$\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.5.23}$$

Заметим, что коэффициенты $-1$, 2, $-1$ во всех строках (за исключением первой и последней) такие же, как и для *вторых* разностей.

#### 4.5.3.3. Выбор параметра регуляризации

Тихонов [2] назвал скалярную величину $\alpha$ «параметром регуляризации». Он предложил определять $\alpha$ из условия приближенного равенства суммы квадратов невязок численному значению математического ожидания, которое вычисляется на основании известных погрешностей измерений. Сумма квадратов невязок равна

$$\mathscr{R} = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}})^T(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}), \tag{4.5.24}$$

где $\hat{\mathbf{T}}$ — оценка вектора температуры.

Это выражение равно нулю в том случае, когда $\alpha$ в соотношении (4.5.1) равно нулю и имеется одиночный внутренний датчик температуры. С увеличением $\alpha$ величина $\mathscr{R}$ также увеличивается.

Тихонов рекомендует выбирать величину $\alpha$ из условия приближенного равенства $\mathscr{R}$ сумме квадратов погрешностей измерений [1]. При $\alpha = 0$ сумма квадратов $S$

$$S_0 = (\mathbf{Y} - \mathbf{T})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{T}) \tag{4.5.25}$$

имеет значение математического ожидания $n\sigma^2$, если выполняются первые четыре стандартных предположения из разд. 1.4.2, где $\mathbf{T}$ — «истинное» значение, $\sigma^2$ — дисперсия $Y_i$ и $n$ — число измерений. Однако математическое ожидание $\mathscr{R}$ меньше, чем величина $n\sigma^2$, так как $\mathscr{R}$ может приближаться к нулю. Грэхем [31], следуя рекомендации Рейнша [32], предложил, чтобы величина параметра $\alpha$ находилась в интервале между $[n - (2n)^{1/2}]\sigma^2$ и $[n + (2n)^{1/2}]\sigma^2$.

Выбирая значение $\mathscr{R}$, равное $n\sigma^2$, которое обозначим $\mathscr{R}_s$, задачу оценивания можно записать как задачу минимизации суммы $S$, определяемой выражением (4.5.1). Необходимым является условие $\mathscr{R} = \mathscr{R}_s$. Тихонов [2] предлагает ряд методов для выполнения этого условия, одним из которых является метод проб и ошибок. Применяя на практике метод регуляризации, можно использовать одно и то же значение параметра регуляризации $\alpha$ для решения однотипных обратных задач теплопроводности. Другой способ выбора $\alpha$ состоит в использовании принципа минимальной квадратичной погрешности и рассматривается в разд. 4.8 и 5.6.

---

[1] Речь идет о так называемом принципе невязки для выбора параметра регуляризации, который был предложен в работе: Морозов В.А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации. Журнал вычислит. матем. и математ. физики.—1968, т. 8, №2, с. 295—309.— *Прим. ред.*

### 4.5.4. Метод последовательной регуляризации

Процедуру регуляризации можно осуществить и последовательным образом. При таком подходе получаются аналогичные результаты, однако по сравнению с процедурой регуляризации во всей области требуемое машинное время значительно уменьшается [1].

В данном разделе рассматривается алгебраическая формулировка алгоритма для случая нескольких датчиков. Матричные соотношения используются в более общей процедуре, которая называется методом пробной функции и анализируется в разд. 4.6.

Процедуру последовательной регуляризации в алгебраической форме можно начать с рассмотрения выражения (4.5.1). Предположим, что компоненты $q_1$, $q_2$, ..., $q_{M-1}$ уже оценены. Тогда выражение дя температуры $T_{j,M+i-1}$ можно представить в виде [см. соотношения (3.2.19)—(3.2.22)]

$$T_{j,M+i-1} = \hat{T}_{j,M+i-1}|_{q_M = \cdots = q_{M+i-1} = 0} + q_M \Delta\phi_{j,i-1} + \cdots + q_{M+i-1}\Delta\phi_{j,0}. \tag{4.5.26}$$

Для простоты изложения рассмотрим только методы регуляризации нулевого и первого порядков, т. е. в выражении (4.5.1) $W_2 = 0$.

Проанализируем простейший случай, когда $r = 1$ или учитывается один последующий шаг по времени и имеется $J$ датчиков температуры. Запишем сумму квадратов

$$S = \sum_{j=1}^{J} (Y_{jM} - \hat{T}_{jM}|_{q_M = 0} - q_M \Delta\phi_{j0})^2 + \alpha q_M^2 , \tag{4.5.27}$$

где $W_0$ учтено в $\alpha$. Заметим, что при $r = 1$, член первого порядка не появляется. Следуя обычной процедуре минимизации $S$ по $q_M$, получим

$$\hat{q}_M = \sum_{j=1}^{J} K_{1j}(Y_{jM} - \hat{T}_{jM}|_{q_M = 0}) , \tag{4.5.28a}$$

$$K_{1j} \equiv \Delta\phi_{j0}\left(\alpha + \sum_{k=1}^{J} \Delta\phi_{k0}^2\right)^{-1} . \tag{4.5.28b}$$

Если $\alpha$ устремить к нулю, то соотношения (4.5.28) преобразуются к соотношениям (4.3.13) для одного последующего шага по времени. Если, кроме того, имеется только один датчик, т. е. $J = 1$, то получается точная подгонка измеренных и расчетных температур. Чтобы параметр регуляризации имел существенное влияние, он должен быть того же или большего порядка, что и квадрат наибольшего $\Delta\phi_{k0}$.

Рассмотрим теперь два последующих шага по времени ($r = 2$), $J$ датчиков и регуляризацию нулевого и первого порядков. В этом случае функция суммы ква-

---

[1] Точность решения ОЗТ таким способом может оказаться ниже, чем в случае метода регуляризации во всей области, в частности, из-за того, что потребуется многократное на каждом последовательном расчетном шаге определение значений параметра регуляризации в условиях приближенного задания погрешностей измерений температуры. Кроме того, многократная реализация на ЭВМ процедуры поиска нужных значений $\alpha$ ведет к появлению дополнительных вычислительных затрат, и тогда выигрыш по машинному времени может оказаться не столь существенным.— *Прим. ред.*

дратов равна

$$S=\sum_{j=1}^{J}(Y_{jM}-\hat{T}_{jM}|_{q_M=0}-q_M\Delta\phi_{j0})^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{J}(Y_{j,M+1}-\hat{T}_{j,M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0}-q_M\Delta\phi_{j1}-q_{M+1}\Delta\phi_{j0})^2+$$

$$+\alpha W_0(q_M^2+q_{M+1}^2)+\alpha W_1(q_{M+1}-q_M)^2\,. \tag{4.5.29}$$

Оценка $q_M$ вычисляется по формуле

$$\hat{q}_M=\frac{d_1C_{22}-d_2C_{12}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2}\,, \tag{4.5.30}$$

где

$$C_{11}=\alpha(W_0+W_1)+\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{J}\Delta\phi_{jk}^2\,, \tag{4.5.31a}$$

$$C_{22}=\alpha(W_0+W_1)+\sum_{j=1}^{J}\Delta\phi_{j0}^2\,, \tag{4.5.31b}$$

$$C_{12}=-\alpha W_1+\sum_{j=1}^{J}\Delta\phi_{j0}\Delta\phi_{j1}\,, \tag{4.5.31c}$$

$$d_1=\sum_{k=0}^{1}\sum_{j=1}^{J}(Y_{j,M+k}-\hat{T}_{j,M+k}|_{q_M=q_{M+1}=0})\Delta\phi_{jk}\,, \tag{4.5.32a}$$

$$d_2=\sum_{j=1}^{J}(Y_{j,M+1}-\hat{T}_{j,M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0})\Delta\phi_{j0}\,. \tag{4.5.32b}$$

Для случая с одним датчиком температуры ($J=1$) выражение для оценки $q_M$ (4.5.30) можно записать в виде

$$\hat{q}_M=K_1(Y_M-\hat{T}_M|_{q_M=0})+K_2(Y_{M+1}-\hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0})\,, \tag{4.5.33a}$$

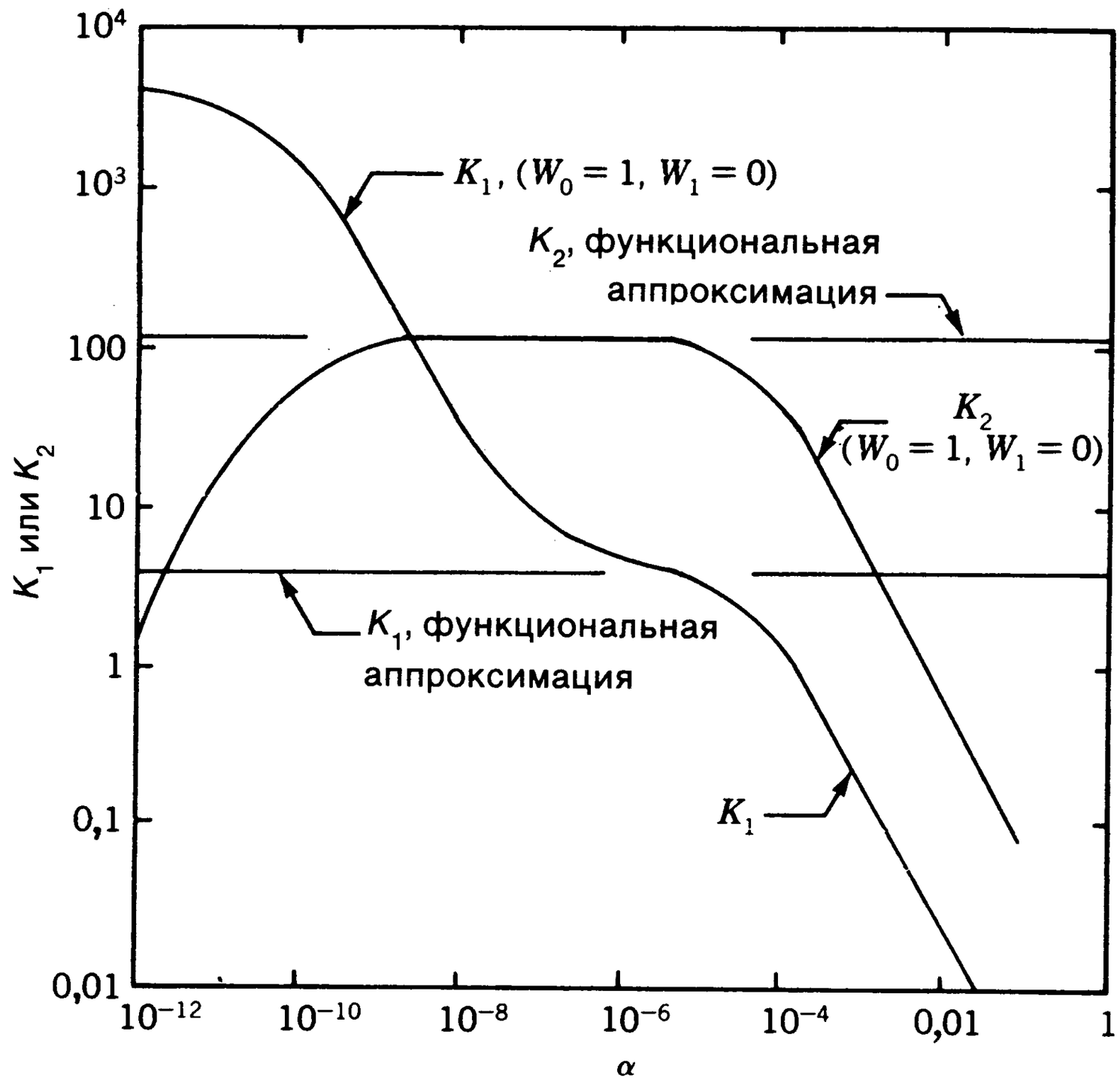
$$K_1=\frac{[\alpha(W_0+W_1)+\Delta\phi_0^2]\Delta\phi_0}{\Delta}\,, \tag{4.5.33b}$$

$$K_2=\frac{[\alpha(W_0+W_1)\Delta\phi_1+\alpha W_1\Delta\phi_0]}{\Delta}\,, \tag{4.5.33c}$$

$$\Delta=[\alpha(W_0+W_1)+\Delta\phi_0^2+\Delta\phi_1^2][\alpha(W_0+W_1)+\Delta\phi_0^2]-(\alpha W_1-\Delta\phi_0\Delta\phi_1)^2\,, \tag{4.5.33d}$$

где $K_1$ и $K_2$ — коэффициенты усиления. Можно показать, что этот алгоритм при $\alpha\to 0$ сводится к алгоритму Штольца, а при $\alpha\to\infty$ — к алгоритму функциональной аппроксимации $q=C$ (см. задачу 4.16).

Соотношения (4.5.33) имеют точно такой же вид, как и для метода последовательной функциональной аппроксимации при $r=2$ [см. уравнение (4.4.25c)], и их можно использовать точно таким же образом. Единственное различие заключается в значениях коэффициентов усиления. Последовательная процедура, в которой используются соотношения (4.5.33), иллюстрируется в примере 4.2.



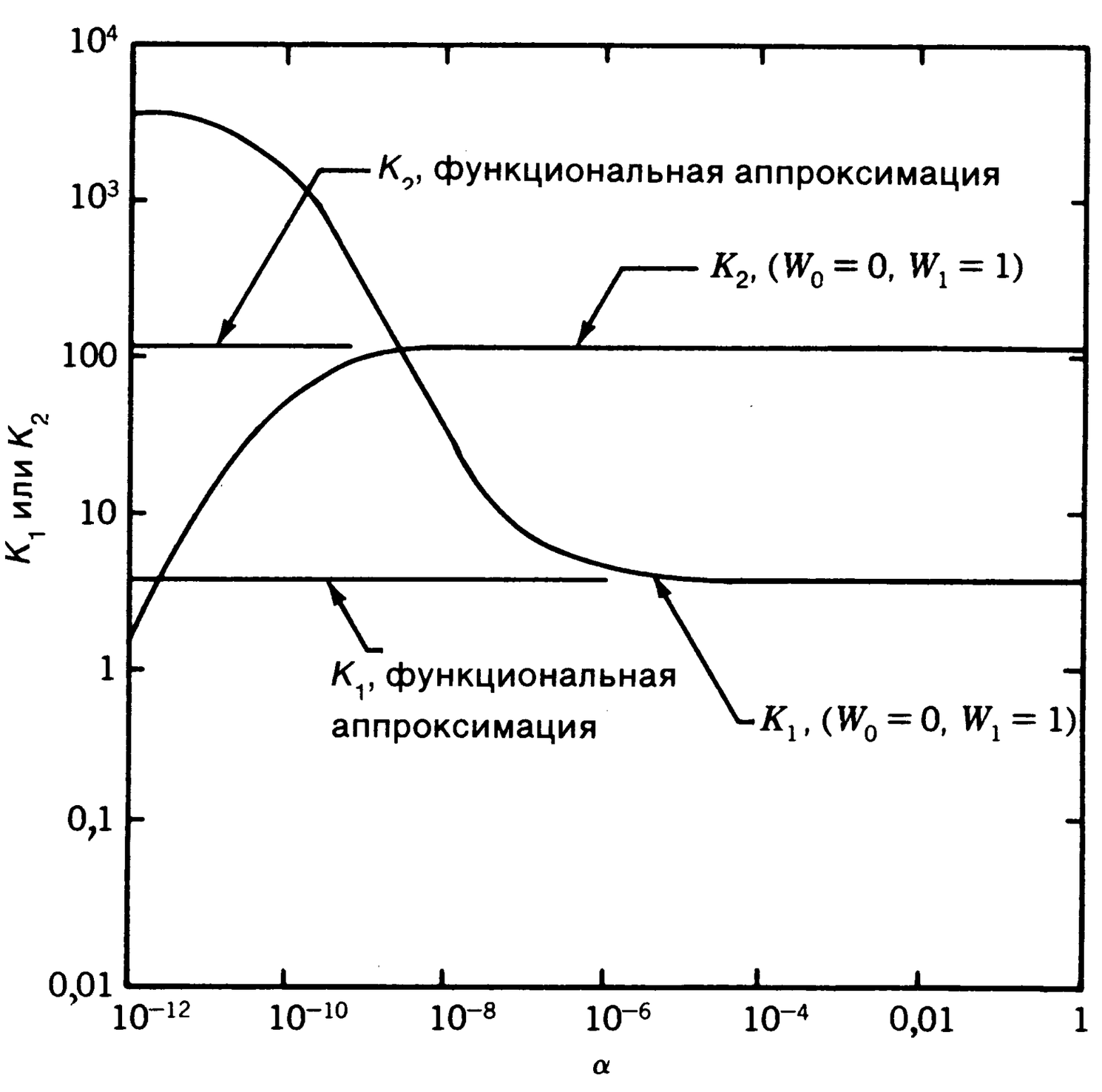




Рис. 4.9а. Коэффициенты усиления для алгоритма последовательной регуляризации нулевого порядка, построенного по формуле (4.5.33); $\Delta t^+ = 0{,}05$ при установке датчика в точке $x = L$ пластины, теплоизолированной при $x = L$; $r = 2$; $W_0 = 1$; $W_1 = 0$.

Рис. 4.9*б*. Коэффициенты усиления для алгоритма последовательной регуляризации первого порядка, построенного по формуле (4.5.33); $r = 2$, $W_0 = 0$, $W_1 = 1$.

Диапазон возможных значений $\alpha$ определяется в зависимости от величин $\Delta\phi_0^2$ и $\Delta\phi_1^2$. На рис. 4.9a и 4.9b показаны коэффициенты усиления для соотношений (4.5.33) в случае плоской пластины, нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$. Датчик находится в точке $x = L$, безразмерный шаг по времени $\Delta t^+ = 0{,}05$. Значения $\phi_i$ взяты из табл. 1.1. Величины $\phi_0^2$ и $\phi_1^2$ равны

$$\Delta\phi_0^2 = \phi_1^2 = (0{,}000269)^2 = 7{,}2 \times 10^{-8} \quad ,$$

$$\Delta\phi_1^2 = (\phi_2 - \phi_1)^2 = (0{,}007885 - 0{,}000269)^2 = 5{,}8 \times 10^{-5}.$$

Это означает, что диапазон возможных значений $\alpha$ составляет $10^{-7}$ — $10^{-4}$. Из рис. 4.9a и 4.9b видно, что именно в этой области происходят наиболее интересные изменения $K_1$ и $K_2$.

На рис. 4.9a и 4.9b показаны коэффициенты усиления для трех различных алгоритмов: на рис. 4.9a — для алгоритма нулевого порядка, на рис. 4.9b — для алгоритма первого порядка, и на обоих рисунках приведены результаты для алгоритма функциональной аппроксимации. Коэффициенты усиления в методе функциональной аппроксимации не зависят от $\alpha$, и соответствующие значения равны: $K_1 = 4{,}33$, $K_2 = 127$. Эти значения приведены также в табл. 4.1 для $\Delta t^+ = 0{,}05$. В методе нулевого порядка $W_0 = 1$ и $W_1 = 0$, а в методе первого порядка $W_0 = 0$ и $W_1 = 1$. При последовательной регуляризации начальное значение $K_1$ ($\alpha \to 0$) составляет 3720 и равно тому же значению, что и в методе Штольца ($r = 1$, см. также табл. 4.1). Это начальное значение одинаково относится и к регуляризации нулевого порядка (рис. 4.9a), и к регуляризации первого порядка (4.9b). Однако в случае нулевого порядка при увеличении $\alpha$ величина $K_1$ уменьшается до нуля. В окрестности $\alpha = 10^{-6}$ кривая $K_1$ в случае нулевого порядка имеет точку перегиба, а кривая в случае первого порядка достигает значения 4,33, т. е. того же значения, что и в методе функциональной аппроксимации. Коэффициенты $K_2$ для случаев и нулевого, и первого порядка при малых значениях $\alpha$ (меньше $10^{-12}$) близки к нулю, а затем увеличиваются приблизительно до 127. После этого $K_2$ для нулевого порядка при $\alpha > 10^{-6}$ начинает уменьшаться, в то время как $K_2$ для первого порядка при $\alpha > 10^{-9}$ остается постоянным и равным 127. Примечательно, что процедура последовательной регуляризации первого порядка (рис. 4.9b) в широком диапазоне изменения $\alpha$ ($\alpha > 10^{-7}$) при $r = 2$ и $\Delta t^+ = 0{,}05$ дает практически те же результаты, что и процедура функциональной аппроксимации для $q = \text{const}$. Метод регуляризации нулевого порядка приводит к аналогичным результатам в диапазоне значений $\alpha$ между $10^{-7}$ и $10^{-5}$.

При больших значениях $\alpha$ (в данном примере $\alpha > 10^{-4}$) и регуляризации нулевого порядка величины $K_1$ и $K_2$ уменьшаются до нуля. Это согласуется с предыдущим утверждением, что при больших $\alpha$ в методе нулевого порядка значения $\hat{q}_M$ уменьшаются. Поскольку при $\alpha > 10^{-6}$ коэффициенты $K_1$ и $K_2$ в методе регуляризации первого порядка приближаются к тем же значениям, что и в методе функциональной аппроксимации, то метод регуляризации первого порядка будет менее чувствительным к выбору $\alpha$, чем метод нулевого порядка. На основании приведенного краткого анализа можно сделать заключение, что метод регуляризации первого порядка дает лучшие результаты по сравнению с методом нулевого порядка, однако для подтверждения этого вывода необходимы дальнейшие исследования.

## 4.6. Метод пробной функции

### 4.6.1. Введение

Метод, который объединяет в себе методы функциональной аппроксимации и регуляризации, Туми [33, 34] назвал методом пробного решения. Мы будем называть его методом пробной функции [1]. По форме последующее изложение отличается от предложенного Туми, однако основная идея остается той же самой. Минимизируемая функция складывается из суммы квадратов отклонений и дополнительного члена, который представляет собой обобщение регуляризующего члена в выражении (4.5.14). В этом члене вектор $\mathbf{q}$ заменяется на разность между $q$ и предварительно определенной «пробной» функцией. Пробная функция может включать в себя первоначальную информацию относительно предполагаемой формы кривой изменения плотности теплового потока или же может быть некоторой заданной функцией, например константой.

Метод пробной функции — потенциально мощный метод, но в нем остается необходимость выбора $\alpha$ и функциональной формы $q$. Чтобы подобрать их удачное сочетание, могут потребоваться численные эксперименты.

Ниже производные записываются в матричной форме и могут раскрываться различными способами. Рассматриваются как последовательное оценивание, так и оценивание во всей области (вариант, предложенный Туми). Кроме того, анализируется возможность учета нескольких датчиков температуры. При формулировке метода используется обобщенный критерий наименьших квадратов, что позволяет рассматривать переменное значение дисперсии и(или) коррелированные погрешности измеренных температур.

План данного раздела: дать общую матричную форму метода и затем рассмотреть частные случаи, в том числе представленные в алгебраической форме.

### 4.6.2. Матричный анализ

Минимизируемая функция имеет вид

$$S=(\mathbf{Y}-\mathbf{T})^T\psi^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{T})+$$
$$+\alpha\{[\mathbf{H}_0(\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}})]^T\mathbf{W}_0[\mathbf{H}_0(\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}})]+[\mathbf{H}_1(\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}})]^T\mathbf{W}_1[\mathbf{H}_1(\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}})]\} \qquad (4.6.1)$$

и аналогична функции $S$ в выражении (4.5.14) для метода регуляризации. Для простоты изложения в выражение (4.6.1) не включен член, аналогичный регуляризующему члену второго порядка. Симметричная квадратная матрица $\psi$ представляет собой ковариационную матрицу случайных погрешностей измерений в $Y$ (см. [6], гл. 6). Это известная матрица. Если выполняются первые четыре стандартные статистические предположения, то для $\psi$ и $\psi^{-1}$ имеют место соотношения

$$\psi=\sigma^2\mathbf{I}, \quad \psi^{-1}=\sigma^{-2}\mathbf{I}, \qquad (4.6.2)$$

где $\sigma^2$ — дисперсия $Y_i$.

---

[1] В таком виде метод регуляризации для решения операторных уравнений был предложен В.А. Морозовым в 1967 г. Применительно к обратным задачам теплопроводности он рассматривался О.М. Алифановым, например, в работе: Применение принципа регуляризации для построения приближенных решений обратных задач теплопроводности.— Инженерно-физический фурнал, 1972, т. 23, №6, с. 1084—1091.— *Прим. ред.*

Функцию (4.6.1) можно использовать как для метода оценивания во всей области, так и для метода последовательного оценивания. В случае одиночного датчика и применения процедуры оценивания во всей области векторы **Y**, **T**, **q** и $\tilde{\mathbf{q}}$ имеют $n$ элементов:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}=\begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}}=\begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix}, \tag{4.6.3}$$

где $\tilde{\mathbf{q}}$ — вектор пробной функции. В процедуре последовательного оценивания подстрочные индексы в соотношениях (4.6.3) изменяются от $M$ до $M+r-1$, что видно из уравнения (3.2.20).

В соответствии с уравнением (4.5.16a) квадратная матрица $\mathbf{H}_0$ равна **I**, а $\mathbf{H}_1$ моделирует первые разности, и ее вид определяется равенством (4.5.16b).

Вектор плотности теплового потока **q** в выражении (4.6.1) неизвестен и подлежит оцениванию. Символом $\tilde{\mathbf{q}}$ обозначается вектор пробной функции, который представляет собой линейную функцию **q**, и другой функции $\tilde{\mathbf{q}}^f$:

$$\tilde{\mathbf{q}}=\mathbf{B}\mathbf{q}+\tilde{\mathbf{q}}^f. \tag{4.6.4}$$

Матрица **B** — квадратная и выбирается в соответствии с задачами проводимого анализа. Матрицу **B** рассмотрим несколько позже. Вектор $\tilde{\mathbf{q}}^f$ можно сформировать заранее, до применения алгоритма оценивания, учитывая при этом имеющуюся информацию о $q$. Если, например, известно, что плотность теплового потока почти постоянна и находится в окрестности некоторой величины, то $\tilde{\mathbf{q}}^f$ можно выбрать равным этой величине. В другом случае может быть известно, то **q** изменяется по времени определенным образом, например в виде убывающей экспоненты; тогда $\tilde{\mathbf{q}}^f$ и будет формироваться с использованием этой убывающей экспоненциальной функции. В методе регуляризации **B** и $\tilde{\mathbf{q}}^f$ являются нулевыми матрицами.

В общем алгоритме пробной функции для оценивания **q**, в котором $\tilde{\mathbf{q}}$ имеет вид (4.6.4), требуется записать матричную производную от выражения (4.6.1) по **q**. Кроме того, необходимы соотношения для определения **T**. В случае линейной ОЗТ выражение для $T$ можно записать в виде

$$\mathbf{T}=\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}+\mathbf{X}\mathbf{q}. \tag{4.6.5}$$

Как показано в гл. 3, это выражение можно получить как с помощью численного аналога теоремы Дюамеля, так и методом конечных разностей. Уравнение (4.6.5) можно использовать и для процедуры оценивания во всей области и при последовательном оценивании. Для процедуры во всей области имеем

$$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}=T_0\mathbf{1}, \tag{4.6.6}$$

где $T_0$ — начальная температура. При последовательном оценивании используется уравнение (3.2.22). Записывая матричную производную функции (4.6.1) с учетом соотношений (4.6.4) и (4.6.5) и приравнивая полученное выражение нулю, после преобразований получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}^T\boldsymbol{\psi}^{-1}\mathbf{X}+\alpha\{[\mathbf{H}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})]^T\mathbf{W}_0[\mathbf{H}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})]+[\mathbf{H}_1(\mathbf{I}-\mathbf{B})]^T\mathbf{W}_1[\mathbf{H}_1(\mathbf{I}-\mathbf{B})]\})\hat{\mathbf{q}}= \\ =\mathbf{X}^T\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0})+\alpha\{[\mathbf{H}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})]^T\mathbf{W}_0\mathbf{H}_0\tilde{\mathbf{q}}^f+[\mathbf{H}_1(\mathbf{I}-\mathbf{B})]^T\mathbf{W}_1\mathbf{H}_1\tilde{\mathbf{q}}^f\}.\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

Для процедуры оценивания во всей области это матричное уравнение представляет собой систему совместных линейных алгебраических уравнений относительно $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n$. При последовательном оценивании неизвестными являются $\hat{q}_M, \ldots, \hat{q}_{M+r-1}$, однако требуется только $\hat{q}_M$. Уравнение (4.6.7) применимо как для одиночного, так и для нескольких датчиков.

Для ускорения анализа уравнения (4.6.7) введем несколько упрощающих предположений. Пусть $\psi = \sigma^2\mathbf{I}$, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{W}_0 = \mathbf{I}$ и $\mathbf{W}_1 = 0$; тогда в символической форме для $\hat{\mathbf{q}}$ можно записать

$$\hat{\mathbf{q}} = [\sigma^{-2}\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha(\mathbf{I}-\mathbf{B})^T(\mathbf{I}-\mathbf{B})]^{-1}[\sigma^{-2}\mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}) + \alpha(\mathbf{I}-\mathbf{B})^T\tilde{\mathbf{q}}^f]. \quad (4.6.8)$$

С помощью этого уравнения можно проанализировать многие конкретные случаи, некоторые из них рассматриваются ниже.

### 4.6.3. Метод регуляризации нулевого порядка

Метод регуляризации нулевого порядка можно получить из уравнения (4.6.8), задавая

$$\tilde{\mathbf{q}}^f = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (4.6.9)$$

Когда регуляризация рассматривается во всей области, уравнение (4.6.8) используется в сочетании с выражением (4.6.6) [см. также уравнение (4.5.20)]. Уравнение (4.6.8) можно также использовать и для последовательной регуляризации. Если имеется $J$ датчиков температуры, то $\mathbf{Y}$ можно разделить на две составляющие:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_M \\ \mathbf{Y}_{M+1} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{M+r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{M+i} = \begin{bmatrix} Y_{1,M+i} \\ Y_{2,M+i} \\ \vdots \\ Y_{J,M+i} \end{bmatrix}, \quad (4.6.10)$$

где под $Y_{j,M+i}$ понимается элемент вектора $\mathbf{Y}$, а не часть двумерного массива, т. е. вектор $Y$ имеет размеры $rJ \times 1$. Примером результирующих уравнений при $r = 2$ служат (4.5.30) и (4.5.31), при этом в уравнении (4.6.8) $\alpha$ заменяется на $\alpha\sigma^2$ и $W_0 = 1$, $W_1 = 0$.

### 4.6.4. Обобщенный метод последовательной функциональной аппроксимации

Метод пробной функции можно использовать для обобщения метода последовательной функциональной аппроксимации. При временном предположении $q = \text{const}$ имеем соотношения

$$\tilde{\mathbf{q}}^f = \mathbf{0}, \quad (4.6.11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \quad (4.6.12)$$

В результате в методе пробной функции $\tilde{\mathbf{q}}$ представляет собой постоянный вектор, равный [см. выражение (4.6.4)]

$$\tilde{\mathbf{q}} = q_M\mathbf{1}. \quad (4.6.13)$$

При $r = 2$ и одиночном датчике уравнение (4.6.8) в эквивалентной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma^{-2}[(\Delta\phi_0)^2+(\Delta\phi_1)^2]+\alpha & \sigma^{-2}\Delta\phi_0\Delta\phi_1-\alpha \\ \sigma^{-2}\Delta\phi_0\Delta\phi_1-\alpha & \sigma^{-2}(\Delta\phi_0)^2+\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{q}_M \\ \hat{q}_{M+1} \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} \sigma^{-2}(Y_M - T_M|)\Delta\phi_0+\sigma^{-2}(Y_{M+1}-\hat{T}_{M+1}|)\Delta\phi_1 \\ \sigma^{-2}(Y_{M+1}-\hat{T}_{M+1}|)\Delta\phi_0 \end{bmatrix}. \qquad (4.6.14)$$

Из этого уравнения требуется получить только $\hat{q}_M$, так как при последовательной аппроксимации $\hat{q}_{M+1}$ не используется. Разрешая это уравнение относительно $\hat{q}_M$ и представляя полученное выражение в форме, содержащей коэффициенты усиления, в результате придем к уравнению (4.5.33) при условии, что $W_0 = 0$, $W_1 = 1$ и $\alpha \to \alpha\sigma^2$. Удивительно, что при $r = 2$ метод пробной функции дает тот же результат, что и метод регуляризации первого порядка. Следует заметить, что на рис. 4.9b кривые, полученные при значениях $W_0 = 0$ и $W_1 = 1$ (что эквивалентно использованию метода пробной функции при $r = 2$), достигают в случае $\alpha\sigma^2 > 10^{-7}$ тех же значений, что и в методе функциональной аппроксимации при $q = \text{const}$, и это действительно соответствует большому диапазону значений $\alpha\sigma^2$. Рассмотренный пример показывает, что если матрицу **B** выбрать в виде (4.6.12), то метод пробной функции является обобщением метода функциональной аппроксимации при $q = \text{const}$. Данный вывод справедлив и при значениях $r$, больших двух.

## 4.7. Алгоритмы фильтрации для линейных обратных задач теплопроводности

### 4.7.1. Введение

Рассмотренные в предыдущих разделах этой главы алгоритмы решения обратной задачи теплопроводности можно представить в форме цифровых фильтров, но при этом должно удовлетворяться условие линейности анализируемой задачи. В таком случае можно рассматривать как последовательные алгоритмы, так и алгоритмы для всей области, включая один и несколько датчиков. Более того, процедура построения цифрового фильтра не зависит от метода приближенного решения задачи теплопроводности (с помощью теоремы Дюамеля, конечных разностей и др).

Метод цифрового фильтра имеет важное значение, так как можно показать, что по сравнению с другими методами в вычислительном отношении он является более эффективным. Благодаря этой эффективности его можно применять в онлайновых (on-line) методах анализа. Цифровые фильтры могут быть включены в состав устройств для измерения плотности теплового потока с целью непосредственной визуализации результатов в цифровом виде. (Под онлайновым понимается режим измерений в реальном масштабе времени, хотя применение алгоритмов решения обратных задач теплопроводности может приводить к задержке на несколько шагов по времени.)

### 4.7.2. Последовательный алгоритм фильтрации

Все последовательные алгоритмы, полученные в данной главе для линейной ОЗТ, можно представить в форме, содержащей коэффициенты усиления. Например, уравнение (4.4.25) для одиночного датчика можно записать в виде

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{r} K_i (Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}|_{q_M = \cdots = 0}) . \tag{4.7.1}$$

Вид формул, определяющих коэффициенты усиления $K_i$, зависит от конкретного алгоритма и различен в алгоритмах функциональной аппроксимации, регуляризации или пробной функции. Для целей данного раздела будем считать $K_i$ известными величинами.

Представление уравнения (4.7.1) в форме цифрового фильтра основано на том, что каждая оцениваемая компонента $q_M$ линейно зависит от значений $Y_i$. В предыдущих разделах эта линейность была продемонстрирована несколько раз в связи с уравнениями (4.3.6)—(4.3.9). Линейность означает, что влияния различных составляющих $Y_i$ можно определить отдельно, а общий результат получить с помощью суперпозиции.

Чтобы проиллюстрировать линейность, рассмотрим плоскую пластину конечной толщины, нагреваемую при $x = 0$ и теплоизолированную при $x = L$. Датчик расположен в точке $x = L$, безразмерный шаг по времени равен $\Delta t^+ = 0{,}05$, применяется метод функциональной аппроксимации при $r = 3$ последующих шагах по времени в предположении, что $q$ временно остается постоянной величиной. Используется уравнение (4.4.25), и взятые из табл. 4.1 коэффициенты усиления равны $K_1 = 0{,}292$, $K_2 = 8{,}56$ и $K_3 = 31{,}8$ (в расчетах учитывается большее количество значащих цифр). Начальная температура $T_0$ принимается равной нулю и решается ряд отдельных задач. В первой из этих задач $Y_1 = 1$, а последующие значения $Y_i$ равны нулю. Во второй задаче $Y_i = 0$, кроме $Y_2 = 1$, и в $j$-й задаче $Y_j = 1$ и $Y_i = 0$ при $i \neq j$. Значения плотности теплового потока для этих задач приведены в соответствующих колонках табл. 4.4.

Представленные в табл. 4.4 результаты имеют несколько важных особенно-

*Таблица 4.4.* Компоненты плотности теплового потока для $Y_j = 1$ и $Y_i = 0$ при $i \neq j$. Значения даны по столбцам для $j = 1; 2 \ldots, 6$ ($r = 3$, $\Delta t^+ = 0{,}05$)

| | Все $Y_i$ равны нулю кроме | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | $Y_1 = 1$ | $Y_2 = 1$ | $Y_3 = 1$ | $Y_4 = 1$ | $Y_5 = 1$ | $Y_6 = 1$ |
| 1 | 0,29 | 8,6 | 31,8 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | −0,35 | −10,1 | −29,9 | 31,8 | 0 | 0 |
| 3 | −0,02 | −0,9 | −12,1 | −29,9 | 31,8 | 0 |
| 4 | 0,06 | 1,7 | 5,4 | −12,1 | −29,9 | 31,8 |
| 5 | 0,03 | 0,9 | 4,7 | 5,4 | −12,1 | −29,9 |
| 6 | 0,0008 | 0,05 | 0,97 | 4,7 | 5,4 | −12,1 |
| 7 | | −0,15 | −0,51 | 0,97 | 4,7 | 5,4 |
| 8 | | −0,08 | −0,41 | −0,51 | 0,97 | 4,7 |
| 9 | | −0,003 | 0,006 | −0,41 | −0,51 | 0,97 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ∞ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

стей. За исключением первых двух колонок, вычисленные компоненты плотности теплового потока одинаковы в каждой колонке, но каждая последующая колонка сдвигается вниз на одну строку. Для описания этих результатов введем следующее обозначение. Пусть

$$\frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_j}$$

обозначает $j$-ю колонку табл. 4.4. Это обозначение показывает изменение значений $\hat{q}_M$ при $Y_j = 1$. Используя введенное обозначение, заметим, что в случае $r = 3$

$$\frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_j} = 0 \text{ при } M < j - r + 1 ,$$

$$\frac{\delta \hat{q}_1}{\delta Y_3} = \frac{\delta \hat{q}_2}{\delta Y_4} = \cdots = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M+r-1}} = 31{,}8 ,$$

$$\frac{\delta \hat{q}_2}{\delta Y_3} = \frac{\delta \hat{q}_3}{\delta Y_4} = \cdots = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M+r-2}} = -29{,}9 .$$

Таким образом, при $j \geqslant r$ одни и те же элементы данной колонки табл. 4.4 появляются и в других колонках. Следовательно, если рассчитана одна колонка (при $j \geqslant r$), то элементы последующих колонок можно получить по рассчитанной первой.

Две первые колонки табл. 4.4 отличаются от остальных. В общем случае такое отличие имеет место для колонок с номерами 1,2, ..., $r - 1$. Чтобы получить одинаковые элементы во всех колонках, вычисления для последовательных алгоритмов решения ОЗТ необходимо начинать по крайней мере на $r - 1$ временны́х шагов *до* начала нагрева. При выполнении этого условия несколько первых аномальных шагов будут оказывать ничтожно малое влияние на последующие результаты расчетов.

Элементы колонок 3, 4... в табл. 4.4 можно представить как коэффициенты фильтра $f_{-2}$, $f_{-1}$, $f_0$, $f_1$, $f_2$, ..., (табл. 4.5.) Значения $f$ связаны с $\delta \hat{q}_M / \delta Y_r$ по формулам

$$f_{1-r} = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M+r-1}} = \frac{\delta \hat{q}_1}{\delta Y_r} ,$$

$$f_{2-r} = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M+r-2}} = \frac{\delta \hat{q}_2}{\delta Y_r} ,$$

$$\vdots$$

$$f_{-1} = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M+1}} = \frac{\delta \hat{q}_{r-1}}{\delta Y_r} ,$$

$$f_0 = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_M} = \frac{\delta \hat{q}_r}{\delta Y_r} ,$$

$$f_1 = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M-1}} = \frac{\delta \hat{q}_{r+1}}{\delta Y_r} ,$$

$$\vdots$$

$$f_{1-r+i} = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_{M+r-i-1}} = \frac{\delta \hat{q}_{i+1}}{\delta Y_r} . \qquad (4.7.2)$$

Заметим, что $f_{1-r}$ не зависит от $M$, но зависит от разности подстрочных индексов $\delta\hat{q}_M$ и $\delta Y_{M+r-1}$. Заметим также, что выражение после первого знака равенства в каждом уравнении (4.7.2) соответствует строке в табл. 4.5, т. е. фиксированному $M$, а выражение после второго знака равенства соответствует колонке, т. е. фиксированному $r$.

Используя принятые обозначения и принцип суперпозиции, для $\hat{q}_M$ можно записать линейное выражение

$$\hat{q}_M = \frac{\delta\hat{q}_M}{\delta Y_1}(Y_1 - T_0) + \frac{\delta\hat{q}_M}{\delta Y_2}(Y_2 - T_0) + \cdots + \frac{\delta\hat{q}_M}{\delta Y_{M+r-1}}(Y_{M+r-1} - T_0). \qquad (4.7.3a)$$

Оно имеет вид, подобный разложению в ряд Тейлора, в котором членами высокого порядка пренебрегается. Однако соотношение (4.7.3a) для линейных задач является точным. Подставив уравнения (4.7.2) в соотношение (4.7.3a), получим

$$\hat{q}_M = \frac{\delta\hat{q}_{M+r-1}}{\delta Y_r}(Y_1 - T_0) + \frac{\delta\hat{q}_{M+r-2}}{\delta Y_r}(Y_2 - T_0) + \cdots + \frac{\delta\hat{q}_1}{\delta Y_r}(Y_{M+r-1} - T_0) = \qquad (4.7.3b)$$

$$= f_{M-1}(Y_1 - T_0) + f_{M-2}(Y_2 - T_0) + \cdots + f_1(Y_{M-1} - T_0) + f_0(Y_M - T_0) + f_{-1}(Y_{M+1} - T_0) + \cdots + f_{2-r}(Y_{M+r-2} - T_0) + f_{1-r}(Y_{M+r-1} - T_0). \qquad (4.7.4)$$

Заметим, что сумма подстрочных индексов при $f$ и $Y$ в выражении (4.7.4) всегда равна $M$.

При условии, что вычисления $q_M$ начинаются по крайней мере на $r-1$ шагов раньше начала нагрева, алгоритм решения ОЗТ, записанный в форме (4.7.1), содержащей коэффициенты усиления, можно представить в эквивалентной форме цифрового фильтра:

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{M+r-1} \frac{\delta\hat{q}_{M+r-i}}{\delta Y_r}(Y_i - T_0), \qquad (4.7.5)$$

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{M+r-1} f_{M-i}(Y_i - T_0). \qquad (4.7.6)$$

Эти уравнения показывают, что $\hat{q}_M$ зависит от $M-1$ предыдущих и $r$ последующих измерений температуры. Однако на практике нижний предел суммирования

*Таблица 4.5.* Система коэффициентов цифрового фильтра для табл. 4.4.

| $M$ | $Y_1=1$ | $Y_2=1$ | $Y_3=1$ | $Y_4=1$ | $Y_5=1$ | $Y_6=1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | $f_{-2}$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | | $f_{-1}$ | $f_{-2}$ | 0 | 0 |
| 3 | | | $f_0$ | $f_{-1}$ | $f_{-2}$ | 0 |
| 4 | | | $f_1$ | $f_0$ | $f_{-1}$ | $f_{-2}$ |
| 5 | | | $f_2$ | $f_1$ | $f_0$ | $f_{-1}$ |
| 6 | | | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ | $f_0$ |
| 7 | | | $f_4$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_1$ |

не обязательно начинается с 1, поскольку соответствующие коэффициенты фильтра становятся пренебрежимо малыми, что демонстрируется в табл. 4.4.

Коэффициенты цифрового фильтра в виде $f$ или $\delta q/\delta Y$ можно вычислить с использованием алгоритма решения ОЗТ, например уравнения (4.7.1), при условиях

$$Y_r - T_0 = 1,$$
$$Y_i - T_0 = 0 \text{ при } i \neq r. \tag{4.7.7}$$

Результирующие значения $\hat{q}_M$ равны

$$\hat{q}_M \Big|_{\substack{Y_r - T_0 = 1 \\ Y_i - T_0 = 0 \text{ при } i \neq r}} = \frac{\delta \hat{q}_M}{\delta Y_r} = f_{M-r}. \tag{4.7.8}$$

Это уравнение можно проверить, используя колонки для $Y_3 = 1$ в табл. 4.4 и 4.5.

Описанный выше цифровой фильтр относится к методу последовательного оценивания. В гл. 5 показано, что если целое число $r$ выбрать достаточно большим, то алгоритмы оценивания во всей области можно представить точно в такой же форме, как и уравнения (4.7.5).

*Пример 4.5.* Для случая плоской пластины, теплоизолированной при $x = L$ и нагреваемой при $x = 0$, измеренные температуры при $x = L$ в моменты времени 0,05; 0,1 и 0,15 с составляют 30,269; 37,885; 59,306 °С. Соответствующие исходные величины равны $L = 1$ м, $\alpha = 1$ м$^2$/с, $k = 1$ Вт/(м · °С), $T_0 = 30$°С. Используется метод функциональной аппроксимации при $r = 3$. Примените алгоритм фильтрации для вычисления первых трех значений плотности теплового потока.

*Решение.* Воспользуемся уравнением (4.7.5), при этом время начала вычислений должно быть сдвинуто по крайней мере на 2 шага по времени назад. Используя данные измерений, сформируем таблицу

| Время, с | $i$ | $Y_i$ |
|---|---|---|
| −0,05 | 1 | 30 |
| 0 | 2 | 30 |
| 0,05 | 3 | 30,269 |
| 0,1 | 4 | 37,885 |
| 0,15 | 5 | 59,306 |

и вычисления начнем в момент времени $t = -0{,}05$ с, а не $t = 0{,}05$ с.

На первом шаге по времени при $M = 1$ из уравнения (4.7.5) получим (используя колонку 3 в табл. 4.4)

$$\hat{q}_1 = \frac{\delta \hat{q}_3}{\delta Y_3}(Y_1 - T_0) + \frac{\delta \hat{q}_2}{\delta Y_3}(Y_2 - T_0) + \frac{\delta \hat{q}_1}{\delta Y_3}(Y_3 - T_0) =$$
$$= -12{,}1(30 - 30) - 29{,}9(30 - 30) + 31{,}8(30{,}269 - 30) = 8{,}55 \text{ Вт/м}^2$$

Это значение соответствует моменту времени $t = -0{,}025$ с. Последующие вычисления по формуле (4.7.5) дают

$$\hat{q}_2 = \frac{\delta \hat{q}_4}{\delta Y_3}(Y_1 - T_0) + \frac{\delta \hat{q}_3}{\delta Y_3}(Y_2 - T_0) + \frac{\delta \hat{q}_2}{\delta Y_3}(Y_3 - T_0) + \frac{\delta \hat{q}_1}{\delta Y_3}(Y_4 - T_0) =$$
$$= 5{,}4(30 - 30) - 12{,}1(30 - 30) - 29{,}9(30{,}269 - 30) + 31{,}8(37{,}885 - 30) = 243 \text{ Вт/м}^2,$$
$$\hat{q}_3 = 693 \text{ Вт/м}^2.$$

Это те же значения, которые получаются с применением исходного алгоритма решения ОЗТ с использованием коэффициента усиления [уравнение (4.7.1)].

### 4.7.3. Предварительная фильтрация результатов измерения температуры

енение цифровых фильтров [37] играет важную роль в области обработки ов. Некоторые из алгоритмов цифровых фильтров можно применить к из-иям температуры *до* применения алгоритмов решения ОЗТ. Существует таких фильтров, но их рассмотрение выходит за рамки данной книги. Ес-вестны статистические характеристики погрешностей измерения температу-го можно сконструировать фильтры, пропускающие сигналы только ой» частоты. Подробное рассмотрение цифровых фильтров приведено в ра-[37].

дин из возможных вариантов предварительной фильтрации имеет вид [37]

$$y_i = \frac{Y_{i-1} + 2Y_i + Y_{i+1}}{4}. \tag{4.7.9}$$

образом, до применения алгоритма решения ОЗТ каждое значение $Y_i$ заме-я на $y_i$. Точнее говоря, вместо значений $Y_i$ в уравнении (4.7.5) или (4.7.6) ьзуются значения $y_i$. Заметим, что сумма коэффициентов при $Y_{i-1}$, $Y_i$ и $Y_{i+1}$ единице (см. задачу 4.15).

## 4.8. Две взаимоисключающие цели

### 4.8.1. Минимальное детерминированное смещение

й из характеристик хороших оценок является минимальное смещение. Фак-ки в задачах оценивания параметров ищется несмещенная оценка. Матема-ки это означает, что требуемая оценка $\hat{\beta}$ параметра $\beta$ должна быть равна матическому ожиданию

$$E(\hat{\beta}) = \beta. \tag{4.8.1}$$

ими словами, математическое ожидание оценки равно истинному значению. условие (4.8.1) выполняется, то оценка $\hat{\beta}$ является несмещенной и «в сред-значение $\hat{\beta}$ будет близко к $\beta$. Если бы $\hat{\beta}$ было смещенной оценкой $\beta$, то среднем стремилось бы либо к более высокому, либо к более низкому по нению с истинной величиной $\beta$ значению.

ри решении некорректных задач желательно, чтобы оценки компонент плот-и теплового потока $\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n$ имели малое смещение. При этом, однако, *не* уется, чтобы смещение было нулевым. В некорректных задачах смещение менение (дисперсия) оценок неизвестных параметров связаны между собой. овательно, смещение представляет собой только одну из характеристик оце-которые необходимо учитывать.

мещение оценки можно исследовать, задав случайные погрешности измере-равными нулю. Это смещение или погрешность оценки можно назвать *де-минированным смещением*. Его желательно сделать как можно меньшим, не я в то же время дисперсию слишком большой.

### 4.8.2. Минимальная чувствительность к случайным погрешностям

ме минимального смещения хорошая оценка характеризуется также мини-ьной дисперсией. Если $\hat{\beta}$ представляет собой оценку параметра $\beta$, то это зна-что дисперсия

$$V(\hat{\beta}) = E\{[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]^2\} \tag{4.8.2}$$

должна быть минимальной. Для линейных задач оценивания параметров, в которых удовлетворяются первое, второе, седьмое и восьмое стандартные предположения, оценка, которая является линейной несмещенной функцией измерений и имеет минимальную дисперсию, называется оценкой Гаусса — Маркова [6]. В некорректных задачах оценки получаются лучше, если не накладывается требование об их несмещенности. В последнем случае необходимо выделить одну из альтернативных целей, и этот подход рассматривается ниже.

### 4.8.3. Среднеквадратичная погрешность

В некорректных задачах общие требования о нулевом смещении и минимальной дисперсии не приводят к удовлетворительным оценкам. При нулевом смещении оценки очень чувствительны к погрешностям измерений, т. е. дисперсия $\hat{\beta}$ велика. Для обратных задач теплопроводности существуют способы уменьшения дисперсии, в частности, можно требовать, чтобы *все* составляющие $\mathbf{q}$ были одинаковыми или

$$\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \cdots = \hat{q}_n = \text{const}\,. \tag{4.8.3}$$

Если ввести требование в виде соотношений (4.8.3), то дисперсия $\hat{q}_i$ будет относительно малой, однако обычно она имеет большое смещение. Следовательно, детерминированное смещение и дисперсия оценки связаны между собой, и при оптимальной стратегии необходимо учитывать оба этих аспекта.

Функцией, учитывающей как смещение, так и изменение оценок, является среднеквадратичная погрешность. Пусть $\hat{q}_M$ представляет собой некоторую компоненту оцененного вектора $\mathbf{q}$ и пусть $q_M$ будет истинным значением этой компоненты. Среднеквадратичная погрешность $\hat{q}_M$ равна

$$\mathscr{S}_M^2 = E[(\hat{q}_M - q_M)^2]\,. \tag{4.8.4}$$

В общем случае отыскиваются оценки, которые минимизируют $\mathscr{S}_M^2$ для всех значений $M$, $M = 1,2, \ldots, n$.

Важно заметить, что выражение (4.8.4) не определяет дисперсии $\hat{q}_M$, т. е. $\mathscr{S}_M^2 \neq V(\hat{q}_M)$, кроме особого случая, когда математическое ожидание $\hat{q}_M$ равно истинному значению $q_M$. Последнее имеет место только тогда, когда $\hat{q}_M$ является несмещенной оценкой $q_M$. Поскольку в некорректных задачах оценка обычно смещена, то выражение (4.8.4) в общем случае не определяет дисперсию $\hat{q}_M$.

Можно показать, что соотношение (4.8.4) содержит две части: детерминированную и стохастическую. Складывая и вычитая математическое ожидание $\hat{q}_M$ внутри правой части соотношения (4.8.4), получим

$$\mathscr{S}_M^2 = E(\{[\hat{q}_M - E(\hat{q}_M)] - [q_M - E(\hat{q}_M)\}^2) = \tag{4.8.5a}$$

$$= E\{[\hat{q}_M - E(\hat{q}_M)]^2\} -$$

$$- 2E\{[\hat{q}_M - E(\hat{q}_M)][q_M - E(\hat{q}_M)]\} +$$

$$+ E\{[q_M - E(\hat{q}_M)]^2\}\,. \tag{4.8.5b}$$

Первый член правой части равенства (4.8.5b) представляет собой дисперсию оценки $\hat{q}_M$:

$$V(\hat{q}_M)=E\{[\hat{q}_M-E(\hat{q}_M)]^2\}. \qquad (4.8.$$

Можно показать, что второй член правой части соотношения (4.8.5b) равен ну лю, так как $q_M - E(\hat{q}_M)$ не является случайной величиной и

$$E[\hat{q}_M-E(\hat{q}_M)]=E(\hat{q}_M)-E(\hat{q}_M)=0. \qquad (4.8.$$

Последний член в соотношении (4.8.5b) равен квадрату смещения, и внешни символ математического ожидания можно опустить. Полученное в результат выражение обозначим $\mathscr{D}_M^2$:

$$\mathscr{D}_M^2=[q_M-E(\hat{q}_M)]^2. \qquad (4.8.$$

Таким образом, среднеквадратичная погрешность $\hat{q}_M$ состоит из двух частей, ди персии и квадрата детерминированной погрешности, а соотношение между ним имеет вид

$$\mathscr{S}_M^2=V(\hat{q}_M)+\mathscr{D}_M^2. \qquad (4.8.9$$

Выражение для $V(\hat{q}_M)$ выводится в разд. 4.8.4, а детерминированная погреш ность рассматривается в разд. 4.8.5.

Важность составляющих среднеквадратичной погрешности (4.8.9) можно про иллюстрировать, используя рис. 4.10. Сплошной жирной линией показана «ис тинная» плотность теплового потока, которая в нулевой момент времени равн нулю, а в момент времени $t_0$ скачкообразно возрастает и принимает некоторое постоянное значение. На рис. 4.10 истинное значение плотности теплового поток в момент времени $t_M$ показано квадратиком и обозначено $q_M$. Точками показан оцененные значения плотности теплового потока при точных измерениях, что эк вивалентно математическому ожиданию (т. е. теоретическому среднему) оценен ных значений плотности теплового потока $E(\hat{q}_i)$. Заметим, что значения $E(\hat{q}$ имеют смещение, поскольку для большинства моментов времени полученные зна чения либо бóльше, либо меньше истинных значений. Например, в момент време ни $t_M$ среднее оцененное значение ниже истинного. Разность между $q_M$ и $E(\hat{q}_M$ определяет детерминированное смещение $\mathscr{D}_M$. Крестиками на рис. 4.10 показан моделируемые и вычисленные значения плотности теплового потока при наличи погрешностей измерений. При этом оцененное в момент времени $t_M$ значени обозначено $\hat{q}_M$. Для других наборов значений измеренной температуры в момен времени $t_M$ получается некоторый набор значений плотности теплового потока которые будут концентрироваться около $E(\hat{q}_M)$, а не около истинного значени

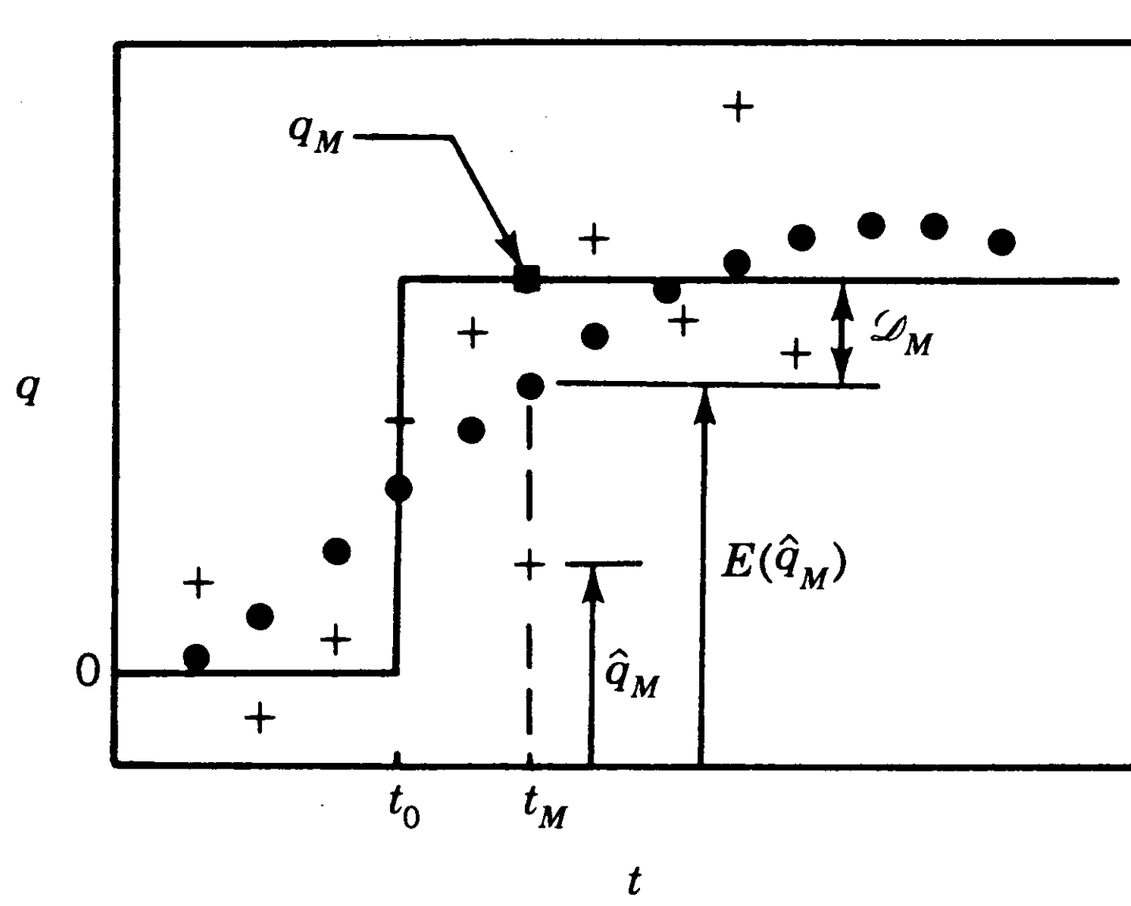



Рис. 4.10. Истинное значение плотности теплового потока $q_M$ в момент времени $t_M$, оценка величины $\hat{q}_M$ и ее среднее оцененное значение $E(\hat{q}_M)$.

$q_M$. Мера изменения значений $\hat{q}_M$ относительно $E(\hat{q}_M)$ называется стандартным или среднеквадратичным отклонением $\hat{q}_M$, а квадрат среднеквадратичного отклонения есть дисперсия $\hat{q}_M$ и обозначается $V(\hat{q}_M)$. Среднеквадратичная погрешность, определенная соотношением (4.8.9), содержит в себе как погрешности измерений, учитываемые дисперсией $V(\hat{q}_M)$, так и детерминированное смещение $\mathscr{D}_M$, которое возникает из-за смещенности алгоритмов решения ОЗТ. В обратных задачах теплопроводности допускается некоторое смещение с целью снижения чрезвычайно высокой чувствительности к погрешностям измерений, в особенности при малых шагах по времени.

### 4.8.4. Дисперсия вычисленной компоненты плотности теплового потока

В разд. 4.3—4.6 получены два типа оценок: последовательная и во всей области. Для обоих вычислительные алгоритмы можно представить в форме цифрового фильтра. Примером служит уравнение (4.7.5), с помощью которого можно легко получить выражение для дисперсии $\hat{q}_M$, так как составляющие $Y_i$ здесь присутствуют в явном виде в отличие от неявной зависимости в уравнении, содержащем коэффициент усиления (4.7.1).

Чтобы получить выражение для дисперсии $\hat{q}_M$, необходимо сделать некоторые статистические предположения. Предположим, что справедливы первые четыре стандартных статистических предположения, т. е. случайные погрешности $\varepsilon_i$ в $Y_i$ являются аддитивными, имеют нулевое среднее, имеют постоянную дисперсию $\sigma^2$ и являются некоррелированными:

$$Y_i = T_i + \varepsilon_i \quad , \tag{4.8.10a}$$

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad , \tag{4.8.10b}$$

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2 \quad , \tag{4.8.10c}$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ при } i \neq j \, . \tag{4.8.10d}$$

При этих допущениях дисперсия оценки $\hat{q}_M$, вычисляемой по уравнению (4.7.5), определяется следующим образом:

$$V(\hat{q}_M) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{M+r-1} \left( \frac{\delta \hat{q}_{M+r-i}}{\delta Y_r} \right)^2 = \tag{4.8.11a}$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{M+r-1} \left( \frac{\delta \hat{q}_i}{\delta Y_r} \right)^2 . \tag{4.8.11b}$$

Заметим, что равенство выражений (4.8.11a) и (4.8.11b) не означает, что $\delta \hat{q}_{M+r-1}/\delta Y_r$ равно $\delta \hat{q}_i/\delta Y_r$.

*Пример 4.6.* Рассчитайте дисперсию $\hat{q}_M$ для плоской пластины, теплоизолированной при $x =$ и нагреваемой при $x = 0$. Датчик находится в точке $x = L$. Используйте следующие значения $\Delta t = 0{,}05$ с при $L = 1$ м, $\alpha = 1$ м$^2$/с, $k = 1$ Вт/(м · °С), $r = 3$.

*Решение.* Значения $\delta \hat{q}/\delta Y_r$ даны в колонке $Y_3 = 1$ табл. 4.4. Для $M = 1$ из соотношения (4.8.1 получим

$$V(\hat{q}_1)=\sigma^2\left[\left(\frac{\delta\hat{q}_1}{\delta Y_3}\right)^2+\left(\frac{\delta\hat{q}_2}{\delta Y_3}\right)^2+\left(\frac{\delta\hat{q}_3}{\delta Y_3}\right)^2\right]=$$

$$=\sigma^2[(31{,}8)^2+(-29{,}9)^2+(-12{,}1)^2]=2052\sigma^2\ \text{Вт}^2/\text{м}^4$$

и при $M=2$

$$V(\hat{q}_2)=\sigma^2[(31{,}8)^2+(-29{,}9)^2+(-12{,}1)^2+(5{,}4)^2]=2080\sigma^2\ \text{Вт}^2/\text{м}^4\,.$$

Для $\hat{q}_3$, $\hat{q}_4$, $\hat{q}_5$, $\hat{q}_6$ и $\hat{q}_7$ дисперсии равны $2103\sigma^2$, $2104\sigma^2$, $2104\sigma^2$ и $2104\sigma^2$ соответственно. Заметим, что по мере увеличения $M$ дисперсии приближаются к постоянному значению.

Квадратный корень из дисперсии представляет собой среднеквадратичное отклонение, которое можно сравнить с оцененными значениями $\hat{q}_M$. Для $\sigma^2 = 2(C)^2$ среднеквадратичное отклонение $\hat{q}_3$ равно 65 Вт/м$^2$. Это значение можно сравнить со значением $\hat{q}_3$ = 693 Вт/м$^2$, которое было вычислено в примере 4.5.

### 4.8.5. Оценка детерминированной погрешности определения плотности теплового потока

Существует несколько способов оценивания детерминированной погрешности определения плотности теплового потока на поверхности. В данном разделе рассматриваются два из них. Предположим, что истинные значения плотности теплового потока имеют значения

$$q_i=0 \text{ при } i\neq r\ , \tag{4.8.12a}$$

$$q_i=\delta q_r \text{ при } i=r\,. \tag{4.8.12b}$$

Соответствующее изменение температуры во внутренней точке $x_1$ в моменты времени $t_1$, $t_2$,... вычисляется с использованием уравнения (3.2.12) при $T_0$, равном нулю. В развернутой форме уравнение (3.2.12) имеет вид

$$T_1=\Delta\phi_0 q_1\ , \tag{4.8.13a}$$

$$T_2=\Delta\phi_1 q_1+\Delta\phi_0 q_2\ , \tag{4.8.13b}$$

$$T_3=\Delta\phi_2 q_1+\Delta\phi_1 q_2+\Delta\phi_0 q_3\ , \tag{4.8.13c}$$

$$\vdots$$

$$T_M=\sum_{i=1}^{M}\Delta\phi_{M-i}q_i\,. \tag{4.8.13d}$$

Для простоты рассмотрим случай $r = 2$. Чтобы получить моделируемые значения измеренной температуры, в соотношения (4.8.13) подставим величины из (4.8.12). Тогда получим

$$Y_1=0\ , \tag{4.8.14a}$$

$$Y_2=\Delta\phi_0\delta q_r\ , \tag{4.8.14b}$$

$$Y_3=\Delta\phi_1\delta q_r\ , \tag{4.8.14c}$$

$$\vdots$$

$$Y_M=\Delta\phi_{M-2}\delta q_r\,. \tag{4.8.14d}$$

Эти значения $Y$ затем вводятся в алгоритмы решения ОЗТ, например используются в уравнении (4.4.25), чтобы рассчитать оценки плотности теплового потока

$\delta q_M$. Отношение $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ не зависит от $\delta q_r$. Обозначение $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ показывает, что в результате расчета определяются изменения плотности теплового потока на поверхности при температурах, связанных с изменением плотности теплового потока в момент времени $t_r$. Так как $\delta\hat{q}_M$ представляет собой изменение в $\hat{q}_M$, полученное с помощью алгоритма решения обратной задачи теплопроводности, а $\delta q_r$ — изменение в исходной плотности теплового потока, то $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ при $M = r$ не равно единице (кроме алгоритма Штольца). Максимальное отклонение от исходных значений $q_i$, которые определены соотношениями (4.8.12), является одной из возможных оценок детерминированной погрешности $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D} = \max_i \left| \frac{\delta\hat{q}_i}{\delta q_r} - \frac{q_i}{\delta q_r} \right| \delta q_r \,. \tag{4.8.15}$$

В большинстве случаев значение $i$ в формуле (4.8.15), при котором достигается максимальное значение $\mathscr{D}$, соответствует $i = r$. Другая оценка детерминированной погрешности $\mathscr{D}$ получается как квадратный корень из суммы квадратов разностей между $\delta\hat{q}_M$ и исходными значениями (4.8.12). Эта оценка детерминированной погрешности вычисляется по формуле

$$\mathscr{D} = \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{\infty} \left( \frac{\delta\hat{q}_i}{\delta q_r} \right)^2 + \left( \frac{\delta\hat{q}_r}{\delta q_r} - 1 \right)^2 \right]^{1/2} \delta q_r \,. \tag{4.8.16}$$

Удивительно, но такое определение $\mathscr{D}$ часто дает значения, лишь на 20—30% превышающие значения этой погрешности, определенной с помощью выражения (4.8.15). Следовательно, детерминированная погрешность $\mathscr{D}$ обычно почти одинакова для обоих выражений, (4.8.15) и (4.8.16). Это важно, поскольку эти две меры погрешности имеют разные основы. Первая [выражение (4.8.15)] формируется при $i = r$ или в окрестности $r$, в то время как вторая [выражение (4.8.16)] формируется в широком диапазоне изменения $i$. Даже при таком различии результаты получаются близкими. В последующих главах в большей степени используется выражение (4.8.16), а не (4.8.15).

*Пример 4.7.* Для плоской пластины, теплоизолированной при $x = L$ и нагреваемой при $x = 0$, с расположением датчика в точке $x = L$ рассчитайте детерминированную погрешность для алгоритма функциональной аппроксимации при $r = 3$. Используйте следующие значения: $\Delta t = 0{,}05$ с при $L = 1$ м, $\alpha = 1$ м$^2$/с, $k = 1$ Вт/(м · °С).

*Решение.* Детерминированную погрешность можно найти из выражений (4.8.15) или (4.8.16). В обоих случаях необходимо знать значения $\delta\hat{q}_i/\delta q_r$, которые вычисляются с помощью алгоритма

*Таблица 4.6.* Результаты решения примера 4.7

| $M$ | $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ | Сумма | $\mathscr{D}$ | $M$ | $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ | | $\mathscr{D}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00856 | 0,00856 | 0,00856 | 8 | −0,00513 | 0,99544 | 0,66913 |
| 2 | 0,23427 | 0,24283 | 0,23443 | 9 | 0,00246 | 0,99790 | 0,66914 |
| 3 | 0,45060 | 0,69343 | 0,59733 | 10 | 0,00209 | 0,99998 | 0,66914 |
| 4 | 0,29232 | 0,98575 | 0,66502 | 11 | 0,00042 | 1,00040 | 0,66914 |
| 5 | 0,06487 | 1,05062 | 0,66818 | 12 | −0,00020 | 1,00020 | 0,66914 |
| 6 | −0,02623 | 1,02439 | 0,66869 | 13 | −0,00021 | 0,99999 | 0,66914 |
| 7 | −0,02382 | 1,00056 | 0,66912 | | | | |

функциональной аппроксимации при входных температурах $Y_1 = Y_2 = 0$, $Y_3 = \Delta\phi_0 = 0{,}000269$, $Y_4 = \Delta\phi_1 = 0{,}007099$, ... (см. табл. 1.1). В алгоритме используются соотношения (4.4.25) при $r = 3$. Коэффициенты усиления равны $K_1 = 0{,}292046$, $K_2 = 8{,}56054$, $K_3 = 31{,}8168$ (см. табл. 4.1). Значение $\delta\hat{q}_1/\delta q_3$ вычисляется по формуле (4.4.25) и равно

$$\frac{\delta\hat{q}_1}{\delta q_3} = K_3\Delta\phi_0 = 0{,}00856,$$

а $\delta\hat{q}_2/\delta q_3$ равно

$$\frac{\delta\hat{q}_2}{\delta q_3} = K_1(0 - 0{,}00865\,\Delta\phi_1) + K_2(\Delta\phi_0 - 0{,}00856\,\Delta\phi_2) + K_3(\Delta\phi_1 - 0{,}00856\,\Delta\phi_3) = 0{,}23427.$$

Последующие значения приведены во второй колонке табл. 4.6. Текущая сумма значений $\delta\hat{q}_M/\delta q_3$, приведенная в третьей колонке, приближается к единице, как и должно быть в соответствии с законом сохранения энергии.

Четвертая колонка содержит детерминированную погрешность, вычисленную по формуле (4.8.16). Заметим, что с увеличением $M$ значения $\mathscr{D}$ быстро сходятся к 0,66914. Это значение можно сравнить с полученным по формуле (4.8.15), которое равно

$$\mathscr{D} = 1 - 0{,}45060 = 0{,}54940$$

Значение, вычисленное по формуле (4.8.16), только на 20% больше этой величины. Так как приближенные меры детерминированной погрешности соответствуют друг другу, то можно использовать обе формулы. В оставшейся части книги будет использовано выражение (4.8.16).

# Литература


1. Hadamard, J., *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.
2. Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., *Solutions of Ill-Posed Problems*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1977.
3. Widder, D. V., *The Heat Equation*, Academic Press, New York, 1975.
4. Weber, C. F., Analysis and Solution of the Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 1783–1792 (1981).
5. Olmsted, J. M. H., *Advanced Calculus*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961.
6. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, NY, 1977.
7. Beck, J. V., Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problem, *Nucl. Eng. Des.* **53**, 11–22 (1979).
8. deBoor, Carl, *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978.
9. Stolz, G., Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes, *J. Heat Transfer* **82**, 20–26 (1960).
10. Frank, I., An Application of Least Square Methods to the Solution of the Inverse Problem of Heat Conduction, *J. Heat Transfer* **85**, 378–379 (1963).
11. Davies, J. M., Input Power Determined From Temperatures in Simulated Skin Protected Against Thermal Radiation, *J. Heat Transfer* **88**, 154–160 (1966).
12. Beck, J. V., Correction of Transient Thermocouple Temperature Measurements in Heat-Conducting Solids, Part II, The Calculation of Transient Heat Fluxes Using the Inverse Convolution, AVCO Corp., Res. and Adv. Dev. Div., Wilmington, MA, Tech. Report RAD-TR-7-60-38 (Part II), March 30, 1961.
13. Beck, J. V., Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History, ASME Paper 62-HT-46 (1962).
14. Beck, J. V., Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method, *Nucl. Eng. Des.* **7**, 170–178 (1968).
15. Beck, J. V., Nonlinear Estimation Applied to the Nonlinear Heat Conduction Problem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 703–716 (1970).

16. Blackwell, B. F., An Efficient Technique for the Numerical Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction, *Numer. Heat Transfer* **4**, 229–239 (1981).
17. Alifanov, O. M., Inverse Boundary Value Problems of Heat Conduction, *J. Eng. Phys.* **29** (1975).
18. Alifanov, O. M. and Artyukhin F. A. "Regularized Numerical Solution of Nonlinear Inverse Heat-Conduction Problem," *J. Eng. Phy.* **29**, 934–938, 1975.
19. Alifanov, O. M., *Identification of Processes of Heat Container Apparatus. An Introduction to the Theory of Inverse Problem of Heat Transfer*, Machinery Publisher, Moscow 1979 (in Russian).
20. Cozdoba, L. A. and Crykowsky, P. G., *Methods of Solution to the Inverse Problem*, Scientific Publisher, Kiev, 1982 (in Russian).
21. Bell, J. B. and Wardlaw, A. B., Numerical Solution of an Ill-Posed Problem Arising in Wind Tunnel Heat Transfer Data Reduction, Naval Surface Weapons Center, NSWC TR 82-32, Dec. 1981.
22. Bell, J. B., The Noncharacteristic Cauchy Problem for Class of Equations with Time Dependence. I. Problems in One Space Dimensions, *SIAM J. Math. Anal.* **12**, 759–777 (1981).
23. Beck, J. V. and Murio, D., Combined Function Specification–Regularization Procedure for Solution of Inverse Heat Conduction Problem, AIAA Paper No. AIAA-84-0491, January 1984.
24. Hoerl, A. E. and Kennard, R. W., Ridge Regression Biased Estimation for Nonorthogonal Problems, *Technometrics* **12**, 55–67 (1970).
25. Draper, N. R. and Van Nostrand, R. C., Ridge Regression—Is It Worthwhile, Univ. of Wisconsin Department of Statistics Technical Report 501, March 1978.
26. Levenberg, K., A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares, *Q. Appl. Math.* **2**, 164–168 (1944).
27. Marquardt, D. W., An Algorithm for Least Squares Estimation for Nonlinear Parameters, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **11**, 431–441 (1963).
28. Marquardt, D. W., Generalized Inverses, Ridge Regression, Biased Linear Estimation, and Nonlinear Estimation, *Technometrics* **12**, 591–612 (1970).
29. Lawson, C. L. and Hanson, R. J., *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
30. The IMSL Library, International Mathematical and Statistical Libraries, Inc., Houston, TX.
31. Graham, N. Y., Smoothing with Periodic Cubic Splines, *Bell System Tech. J.* **62**, 101–110 (1983).
32. Reinsch, C. H. J., Smoothing by Spline Function, *Numerische Mathematik* **10**, 177–183 (1967).
33. Twomey, S., On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature, *J. Assoc. Comp. Mach.* **10**, 97–101 (1963).
34. Twomey, S., The Application of Numerical Filtering to the Solution of Integral Equations Encountered in Indirect Sensing Measurements, *J. Franklin Inst.* **279**, 95–109 (1965).
35. Blackwell, B. F., Some Comments on Beck's Solution of the Inverse Problem of Heat Conduction Through the Use of Duhamel's Theorem, *Int. J. Heat Mass Transfer* **26**, 302–305 (1983).
36. Alliney, S. and Sgallari, F., An "Ill-Conditioned" Volterra Integral Equation Related to the Reconstruction of Images from Projections, *SIAM J. Appl. Math.* **44**, 627–645 (1984).
37. Hamming, R. W., *Digital Filters*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

## Имеются на русском языке

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.
8. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ.— М.: Радио и связь, 1985.
10. Фрэнк. Применение метода наименьших квадратов для решения обратной задачи теплопроводности.— Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1963, №4, с. 107.
11. Дэвис. Определение поглощения энергии на основе измерений температуры имитации кожи, защищенной от теплового излучения.— Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1966, №2. с. 9.

17. Алифанов О.М. Граничные обратные задачи теплопроводности.— Инженерно-физический журнал, 1975, т. 29, №1, с. 13—25.
18. Алифанов О.М., Артюхин Е.А. Регуляризованное численное решение нелинейной обратной задачи теплопроводности.— Инженерно-физический журнал, 1975, т. 29, №1, с. 159—164.
19. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов.— М.: Машиностроение, 1979.
20. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса.— Киев: Наукова думка, 1982.
29. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов: Пер. с англ.— М.: Наука, 1986.

## Задачи

4.1. Используя точную подгонку к температурам, приведенным ниже, для стальной пластины при $x = 0{,}25L$, вычислите компоненты плотности теплового потока $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_3$ (в Вт/м$^2$).

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $t_i$, с | 1 | 2 | 3 |
| $Y_i$, °C | 26,6 | 28 | 29 |

Начальная температура равна 25°C. Пластина имеет толщину 1 см, теплоизолирована при $x = L$ и нагревается при $x = 0$. Теплофизические свойства следующие: $k = 40$ Вт/(м · K) и $\alpha = 10^{-5}$ м$^2$/с.

4.2. Используя точную подгонку, необходимо оценить температуру поверхности тела $T_{1M}$ по значениям измеренной температуры $Y_{2M}$ в некоторой внутренней точке тела. Выведите выражение

$$\hat{T}_{1M} = \hat{T}_{1M}|_{q_M=0} + (Y_{2M} - \hat{T}_{2M}|_{q_M=0}) \left(\frac{\phi_{11}}{\phi_{21}}\right)$$

и используйте его для нахождения температуры нагреваемой поверхности пластины из задачи 4.1 при $t = 1$, 2 и 3 с.

4.3. Для алгоритма решения обратной задачи теплопроводности Штольца при $Y_1 \neq T_0$ и $Y_i = T_0$, $i = 2, 3, 4, \ldots$, выведите соотношения

$$\hat{q}_1 = \frac{Y_1 - T_0}{\phi_1},$$

$$\hat{q}_2 = -(Y_1 - T_0)\frac{\Delta\phi_1}{\phi_1^2},$$

$$\hat{q}_3 = -(Y_1 - T_0)\frac{\left[\frac{\Delta\phi_2}{\phi_1} - \left(\frac{\Delta\phi_1}{\phi_1}\right)^2\right]}{\phi_1},$$

$$\hat{q}_4 = -(Y_1 - T_0)\frac{\left[\frac{\Delta\phi_3}{\phi_1} - 2\frac{\Delta\phi_1}{\phi_1}\frac{\Delta\phi_2}{\phi_1} + \left(\frac{\Delta\phi_1}{\phi_1}\right)^3\right]}{\phi_1},$$

$$\hat{q}_5 = -(Y_1 - T_0)\frac{\left[\dfrac{\Delta\phi_4}{\phi_1} - 2\dfrac{\Delta\phi_1}{\phi_1}\dfrac{\Delta\phi_3}{\phi_1} - \left(\dfrac{\Delta\phi_2}{\phi_1}\right)^2 + 3\left(\dfrac{\Delta\phi_1}{\phi_1}\right)^2\dfrac{\Delta\phi_2}{\phi_1} - \left(\dfrac{\Delta\phi_1}{\phi_1}\right)^4\right]}{\phi_1}.$$

.4. Пусть в задаче 4.3 коэффициенты при $(Y_1 - T_0)$ обозначены $f_0$, $f_1$, $f_2$, $f_3$ и $f_4$, так что

$$f_0 = \frac{1}{\phi_1}, \quad f_1 = \frac{-\Delta\phi_1}{\phi_1^2}, \ldots .$$

a. Покажите, что для измерений в полубесконечном теле при $x = 0$ коэффициенты $f_0$, $f_1$, ..., $f_4$ пропорциональны величине $(\Delta t)^{-1/2}$. Вычислите значения $\phi_1 f_i$ для $i = 0$, 1, 2, 3 и 4 и постройте график.

b. Проанализируйте величины $f_i$ для бесконечно тонкого тела, для которого $\phi_i = i\Delta t/\rho cL$.

c. Сравните результаты пп. a и b и сделайте выводы.

.5. Для уравнения (4.3.5) напишите программу для ЭВМ или программируемого калькулятора и проверьте полученные в примере 4.1 значения.

.6. Для линейной задачи, в которой изменение плотности теплового потока по времени при $t > 0$ аппроксимируется выражением

$$q(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \cdots + \beta_r t^{r-1},$$

постройте алгоритм оценивания по всей области для получения оценок $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ..., $\hat{\beta}_r$. Используйте метод наименьших квадратов в матричной форме для одиночного датчика температуры и измерений температуры в $n$ дискретных моментов времени, $n > r$. Получите формулы для определения элементов матрицы, обозначая через $\phi_i^{(j)}$ изменение температуры при $q(t) = t^j$.

7. Используя метод наименьших квадратов, получите алгебраические формулы для оценивания $\beta_1$ и $\beta_2$ в уравнении (4.4.18).

8. Другая форма записи интеграла, соответствующего теореме Дюамеля, получается с использованием функций Грина и имеет вид

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\alpha}{k}\int_0^t q(\lambda)G(x, t-\lambda)d\lambda,$$

где $G(x, t)$ — функция Грина, $\alpha$ — коэффициент температуропроводности, $k$ — коэффициент теплопроводности. Используя приведенную в задаче 3.8 численную аппроксимацию этого выражения, выведите следующий алгоритм функциональной аппроксимации при временном допущении о постоянстве $q$.

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^{r}\left(Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}\big|_{q_M = \cdots = 0}\right)\sum_{j=1}^{i} G'_j}{\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{i} G'_j\right)^2},$$

$$G'_j = \frac{\alpha G_j \Delta t}{k}, \quad G_j = G\left(x, \frac{t_j - \Delta t}{2}\right)$$

Какое здесь используется выражение для $\hat{T}_{M+i-1}\big|_{q_M = \ldots = 0}$?

4.9. Используя алгоритм из задачи 4.8, вычислите коэффициенты усиления при $\Delta t^+ = 0{,}05$; 0,2 и 0,5. В случае плоской пластины, нагреваемой пр $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$, функция Грина имеет вид

$$G(L, t) = \frac{1}{L}\left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2\alpha t/L^2}(-1)^m\right].$$

Примите $\alpha$ и $k$ равными единице.

Сравните полученные величины с приведенными в табл. 4.1.

a. Проведите расчеты для $r = 1$, 2 и 3.
b. Проведите расчеты для $r = 4$.
c. Проведите расчеты для $r = 5$.

4.10. Выведите алгоритм функциональной аппроксимации для оценивания $g($ с использованием измеренных зависимостей температуры от времени двух внутренних точках. Здесь $g(t)$ — зависящая от времени интенсивност выделения энергии в сплошном цилиндре. Дифференциальное уравнени имеет вид

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + g(t) = \rho c\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Используйте временное предположение о постоянстве $g(t)$ на протяжени $r$ последующих шагов по времени. Решение уравнения (а) записывает следующим образом:

$$T(r, t) = T_0 + \int_0^t g(\lambda)\frac{\partial\theta(r, t-\lambda)}{\partial t}\,d\lambda,$$

где $\theta(r, t)$ — изменение температуры при единичном ступенчатом увелич нии $g(t)$ при $t = 0$.

4.11. Получите формулы для вычисления элементов матрицы в уравнени (4.5.18), применяемом в методе регуляризации всей области в случ $W_0 = W_1 = W_2 = 1$.

4.12. Обратная во времени задача теплопроводности состоит в оценивании н чального распределения температуры в теле по известным граничным у ловиям и заданным законам изменения температуры по времени в одн или нескольких внутренних точках. В случае плоской пластины, для кот рой $T = T_0$ при $x = 0$ и $x = L$, а начальное распределение температур равно $T(x, 0) = F(x)$, выведите алгоритм регуляризации нулевого поряд во всей области для оценивания $n$ компонент функции $F(x)$:

$$F_i \equiv F\left(i\Delta x - \frac{\Delta x}{2}\right), \quad \Delta x = \frac{L}{n}.$$

Рассмотрите случай с тремя внутренними датчиками и $m$ равными меж собой шагами по времени. Определяющее интегральное уравнение име вид

$$T(x, t) = T_0 + \int_0^L F(x')G(x, t, x')dx',$$

где $G(x, t, x')$ — функция Грина. Модифицируйте запись решения из зад чи 4.8 с учетом нескольких датчиков.

4.13. Модифицируйте соотношения (4.6.14) для $r = 3$ и вычислите коэффициенты усиления при $\Delta t^+ = 0{,}05$ для теплоизолированной поверхности плоской нагретой пластины. Проварьируйте величиной $\alpha\sigma^2$ в большом диапазоне значений и по результатам постройте графики. Сделайте соответствующие выводы.

4.14. Разработайте процедуру цифрового фильтра для нескольких датчиков. Представьте полученные соотношения в форме (4.7.6)—(4.7.8).

4.15. Для предварительного цифрового фильтра

$$y_i = aY_{i-1} + bY_i + aY_{i+1}$$

покажите, что уравнение (4.7.6) можно представить в виде

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{M+r-1} F_{M-i}(Y_i - T_0) + a[f_{1-r}(Y_{M+r} - T_0) - f_M(Y_1 - T_0) - f_{-r}(Y_{M+r-1} - T_0],$$

где

$$F_{M-i} \equiv af_{M-i-1} + bf_{M-i} + af_{M-i+1}.$$

4.16. a. Покажите, что при $\alpha \to 0$ соотношения (4.5.33) преобразуются в алгоритм Штольца.

b. Покажите, что при $\alpha \to \infty$ соотношения (4.5.33) имеют вид соотношений (4.4.25c), (4.4.25d).

# Глава 5
# Алгоритмы обращения свертки для одной зависимости плотности теплового потока от времени

## 5.1. Введение

В предыдущих главах рассматривались общие процедуры решения обратной задачи теплопроводности (ОЗТ) и математического моделирования процесса теплопроводности. ОЗТ формулируется как задача оценивания плотности теплового потока на поверхности по данным измерений нестационарной температуры внутри теплопроводного твердого тела. Это некорректная задача, для которой характерна крайне высокая чувствительность значения плотности теплового потока на поверхности к малым изменениям внутренних температур. Методы уменьшения этой чувствительности были рассмотрены в гл. 4. Некоторые из этих методов используются в данной главе. Из различных методов моделирования процессов нестационарной теплопроводности в твердых телах в этой главе используется один метод, основанный на представлении теоремы Дюамеля в виде интегрального уравнения типа свертки. Данный метод предполагает линейность задачи, т. е. теплофизические свойства ($k$, $\rho$, $c$) не должны зависеть от температуры, но могут быть функциями координаты. Численные методы решения уравнений свертки рассмотрены в гл. 3.

Преимущества теоремы Дюамеля заключаются в том, что твердое тело может иметь произвольную форму и теплофизические свойства могут зависеть от координаты (рис. 5.1). Распределение температуры может быть одно-, двух-, или трехмерным. Единственное требование состоит в том, чтобы была известна функция влияния $\phi(\mathbf{x}, t)$. Эта функция представляет собой изменение температуры в точке $\mathbf{x}$, вызванное единичным ступенчатым увеличением в нулевой момент времени плотности теплового потока на поверхности. В телах, показанных на рис. 5.1, *a*, *b*, распределение температуры зависит только от одной пространственной независимой переменной. На рис. 5.1, *a* роль $\mathbf{x}$ играет $x$, а на рис. 5.1, *b* — радиальная координата для цилиндра или сферы $r$.

На поверхностях раздела между разнородными материалами может иметь место идеальный или неидеальный контакт, что характеризуется величиной $h_c$ [см. уравнение (1.2.7)].

Возможные типы граничных условий включают в себя теплоизолированность, постоянную температуру поверхности, равную начальной температуре $T_0$, или условие конвективного теплообмена при температуре окружающей среды $T_\infty$, равной начальной температуре тела $T_0$ (рис. 5.1). При условии, что на тело, имеющее равномерное начальное распределение температуры, действует один тепловой поток с заданной и зависящей только от времени плотностью, в определяющем теорему Дюамеля уравнении содержится только один интеграл свертки. Единственной причиной, которая вызывает изменение температуры, является тепловой поток плотностью $q(t)$.

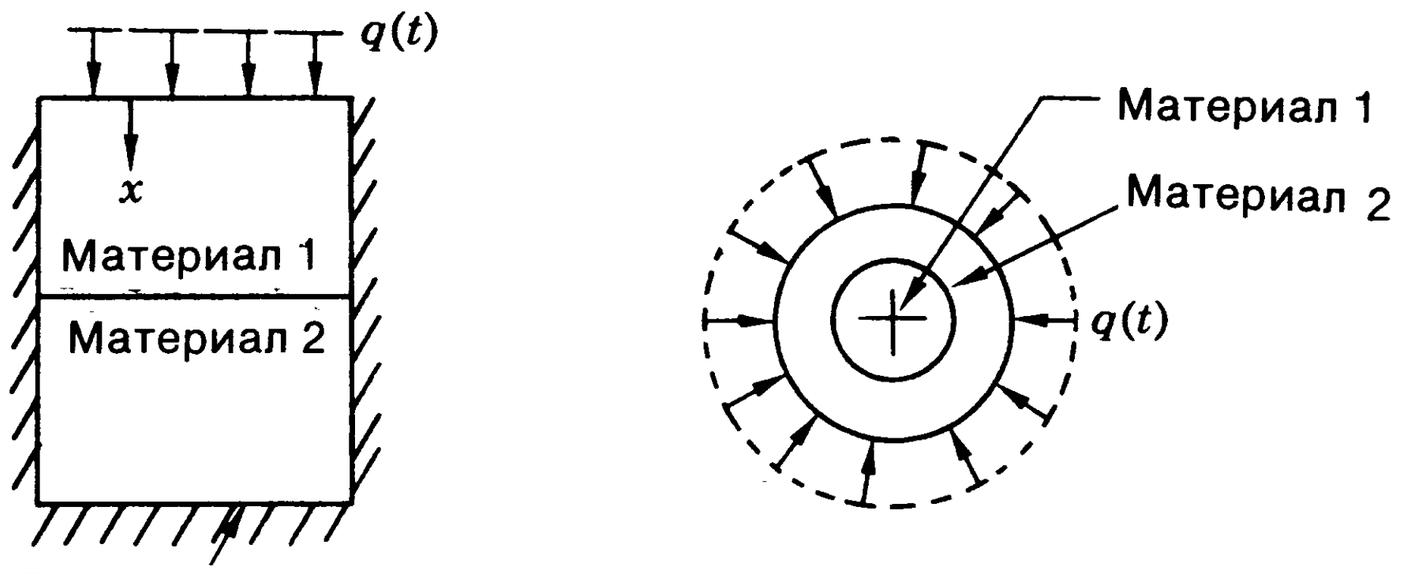



Рис. 5.1. Различные геометрические формы, граничные условия и условия на поверхности раздела можно анализировать с помощью теоремы Дюамеля. Теплофизические свойства не зависят от температуры. *a* — составная пластина; *b* — составной цилиндр или сфера; *c* — составное тело неправильной формы, $T_0$ — постоянная начальная температура; *d* — осесимметричное полубесконечное тело с цилиндрической полостью и частично нагреваемой поверхностью.

Предполагается, что плотность теплового потока $q(t)$ равномерно распределена по всей нагреваемой поверхности. При этом тепловой поток может действовать более чем на одну поверхность (рис. 5.1, *c*) или только на часть поверхности тела (рис. 5.1, *d*). Последние два случая представляют собой примеры двумерного распространения тепла. Даже если распределения температуры неодномерные, можно использовать теорему Дюамеля, поскольку она справедлива и для многомерных линейных задач.

Выше было отмечено, что функция влияния $\phi(\mathbf{x}, t)$ должна быть известна. Функция $\phi(\mathbf{x}, t)$ зависит от формы тела, поверхности раздела и граничных условий. Она представляет собой изменение температуры при условии, что на нагреваемую поверхность воздействует тепловой поток с плотностью, равной единице. Существуют различные способы определения этой функции. Например, ее можно определить с помощью такого точного метода, как разделение переменных, или найти численно с применением метода конечных разностей или конечных элементов. Можно использовать и метод поверхностных элементов [1—3]. Отметим, что требуется знать только закон изменения $\phi(\mathbf{x}, t)$ по времени в точках расположения датчика.

Существует много способов приближенного вычисления интеграла свертки, и

некоторые из них рассмотрены в гл. 3. Для иллюстрации основных концепций используется только один из них, в частности, применяются постоянные элементы плотности теплового потока, показанные на рис. 3.1. Несмотря на то что линейные (или параболические, или кубические и т. д.) элементы обеспечивают более высокую точность аппроксимации интеграла свертки, использование постоянных элементов проще. Кроме того, постоянные элементы больше соответствуют аппроксимациям в методах конечных разностей и конечных элементов. Это важно, поскольку, применяя интеграл свертки, легче разработать улучшенные модификации алгоритмов. В действительности интеграл свертки обеспечивает анализ алгоритмов при значительно меньших затратах и сложности по сравнению с непосредственным использованием методов конечных разностей и конечных элементов.

Для решения обратной задачи теплопроводности можно использовать многие алгоритмы даже при указанных ограничениях. (В гл. 4 рассматривается больше методов, чем анализируется в данной главе.) В этой главе используются некоторые алгоритмы функциональной аппроксимации и регуляризации. При этом основное внимание уделяется методу последовательного оценивания, а не методу оценивания во всей области по времени.

Следует отметить еще одно важное обстоятельство, касающееся численной аппроксимации интеграла Дюамеля. Числовые значения плотности теплового потока, полученные с помощью алгоритма решения ОЗТ при использовании в интеграле Дюамеля аппроксимации $g = C$, очень близки к величинам, найденным с применением методов конечных разностей или конечных элементов. Единственные ограничения заключаются в требовании линейности задачи и использовании в методах конечных разностей и конечных элементов достаточно подробных пространственных сеток. (Если функция $\phi_i$ известна точно, то интеграл Дюамеля является точным относительно пространственной переменной.) Следовательно, для конкретного алгоритма решения ОЗТ и контрольного примера числовые значения, полученные в данной главе с помощью интеграла Дюамеля, можно рассматривать, как если бы они были найдены с использованием методов конечных разностей или конечных элементов. Любое достигнутое в этой главе понимание алгоритма решения ОЗТ (например, функциональной аппроксимации или регуляризации) также относится к тому же самому алгоритму, но при вычислении температуры методами конечных разностей или конечных элементов. При этом следует иметь в виду, что должна использоваться весьма подробная пространственная сетка.

## 5.2. Контроольные примеры

### 5.2.1. Введение

В данном разделе рассматривается несколько контрольных примеров, причем некоторые из них использовались ранее в гл. 4. В первом примере плотность теплового потока на поверхности изменяется ступенчатым образом. Используются точные значения моделируемой температуры в зависимости от времени. Во втором примере изменение плотности теплового потока по времени имеет треугольный вид. В этом примере используются как точные значения температуры, так и с учетом случайных погрешностей. Третий пример связан с единичным импуль-

сом плотности теплового потока $\delta q_r$, который приложен в момент времени $t_r$. Вычисленная плотность теплового потока на поверхности обозначается $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$. В четвертом и последнем примере температура в точке расположения датчика равна нулю, кроме момента времени $t_r$. В этом случае плотность теплового потока обозначается $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$. Во всех этих контрольных примерах рассматривается плоская пластина, нагреваемая при $x = 0$ и теплоизолированная при $x = L$ (рис. 1.7). Измерения производятся в точке $x = L$, что соответствует максимально возможному расстоянию от нагреваемой поверхности. Поэтому по сравнению с другим расположением датчика данная задача является наиболее трудной с точки зрения ее решения. Безразмерное время определяется по формуле $t^+ \equiv \alpha t/L^2$.

В случае расположения датчика в сечении $x = E$, где $0 < E < L$, алгоритм оценивания $q_M$ при решении ОЗТ дает практически те же результаты, что и в случае расположения датчика в сечении $x = L$, если безразмерный шаг по времени $\Delta t_E^+ \equiv \alpha\Delta t/E^2$, вычисленный относительно $x = E$, равен безразмерному шагу $\Delta t_L^+ = \alpha\Delta t/L^2$, вычисленному относительно $x = L$. Другими словами, контрольные примеры этой главы, рассматриваемые при расположении датчика в точке $x = L$, дают представление и о задачах с другим расположением датчика при условии, что безразмерный шаг по времени вычисляется относительно глубины установки датчика от нагреваемой поверхности.

### 5.2.2. Ступенчатое изменение плотности теплового потока

В этом базовом контрольном примере рассматривается ступенчатое изменение в момент времени $t = 0$ плотности теплового потока на поверхности (рис. 5.2). Такое изменение иногда называется «постоянной» плотностью теплового потока, так как при $t > 0$ плотность имеет постоянное значение $q_c$. Однако использование словосочетания «ступенчатое изменение» поясняет, что при $t < 0$ плотность теплового потока равна нулю. Для линейных задач ни знак (положительный или отрицательный), ни величина $q_c$ не играют роли, поскольку оцениваемые значения плотности теплового потока прямо пропорциональны $q_c$. По этой причине, а также для большей общности большинство примеров в данной главе анализируется в безразмерных переменных. Значения безразмерной температуры для различных точек в теле и значений безразмерного времени представлены в табл. 1.1, а их график показан на рис. 1.7. Температура нагреваемой поверхности мгновенно начинает увеличиваться, в то время как рост температуры теплоизолированной поверхности при $x^+ \equiv x/L = 1$ слабее и запаздывает. Датчик расположен в сечении $x^+ = 1$, а безразмерный шаг по времени выбран

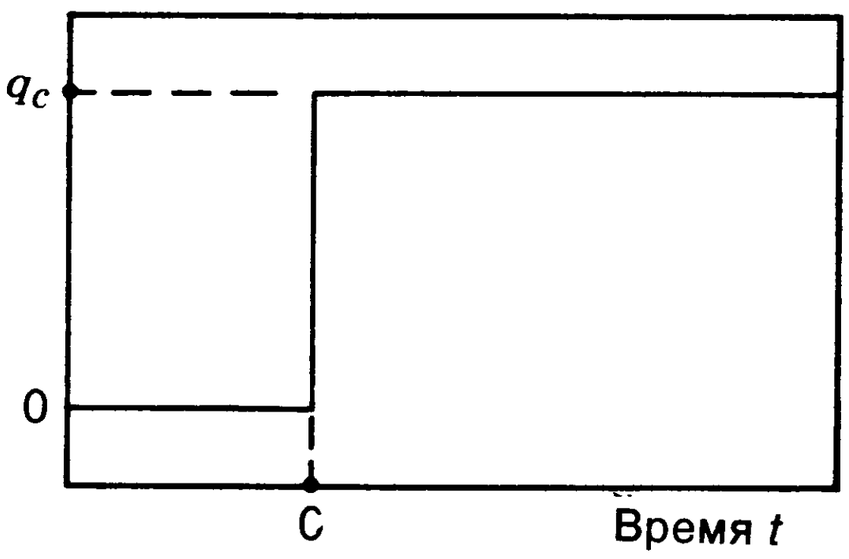



Рис. 5.2. Контрольный пример со ступенчатым изменением плотности теплового потока на поверхности.

равным $\Delta t^+ = 0{,}05$ и 0,5. Этот случай может соответствовать реальным значениям времени и рассматривается в разд. 5.2.7.

### 5.2.3. Изменение плотности теплового потока треугольного вида

Во втором контрольном примере изменение плотности теплового потока по времени имеет треугольный вид (рис. 5.3). До момента $t^+ = 0$ плотность теплового потока равна нулю. В интервале значений $t^+$ между нулем и 0,6 плотность $q$ линейно увеличивается по времени, при $t^+ > 0{,}6$ она линейно уменьшается до нуля, а при $t^+ = 1{,}2$ и далее остается равной нулю.

Линейный участок плотности теплового потока при $0 < t^+ < 0{,}6$ записывается в виде

$$q^+ = t^+, \tag{5.2.1}$$

где

$$q^+ = \frac{q}{q_N}, \quad t^+ = \frac{\alpha t}{L^2}, \tag{5.2.2a, b}$$

$q_N$ — номинальное значение плотности теплового потока, а именно величина $q$ при $t^+$, равном единице. Безразмерная температура определяется следующим образом:

$$T^+ \equiv \frac{T - T_0}{(q_N L/k)}. \tag{5.2.3}$$

Температура при $x^+ = 0$ и 1 для линейного закона изменения плотности теплового потока (5.2.1) вычисляется из соотношений

$$T^+(0, t^+) = \phi^+(0, t^+), \quad T^+(1, t) = \phi^+(1, t^+), \tag{5.2.4}$$

$$\phi^+(0, t^+) = \frac{1}{2}(t^+)^2 + \frac{1}{3}t^+ - \frac{1}{45} + \frac{2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\exp(-\pi^2 n^2 t^+), \tag{5.2.5}$$

$$\phi^+(1, t^+) = \frac{1}{2}(t^+)^2 - \frac{1}{6}t^+ + \frac{7}{360} + \frac{2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\exp(-\pi^2 n^2 t^+). \tag{5.2.6}$$

Эти соотношения можно использовать при значениях $t^+$ между нулем и 0,6. Если $t^+$ имеет значения между 0,6 и 1,2, то температура определяется выражением

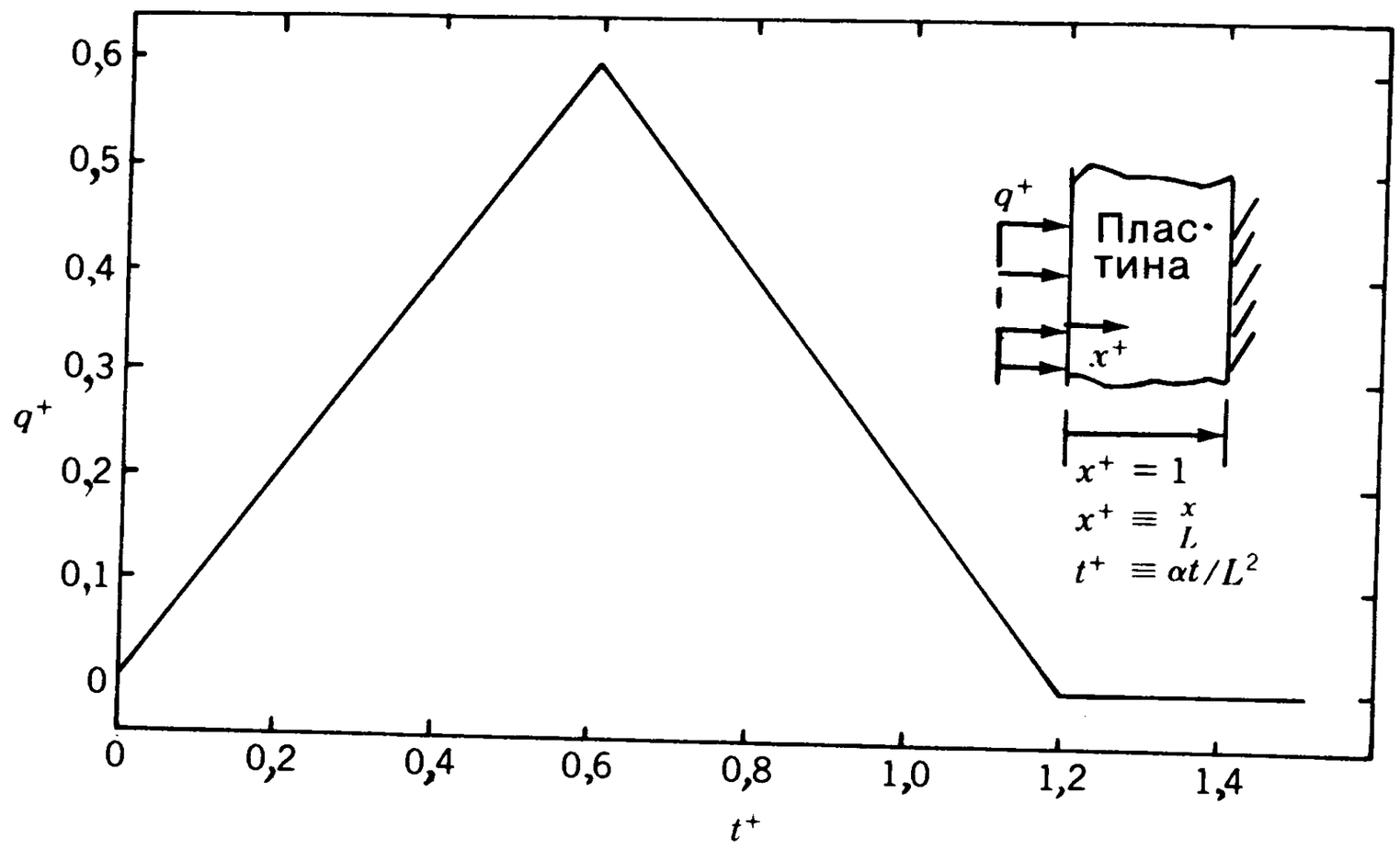



Рис. 5.3. Контрольный пример с изменением плотности теплового потока треугольного вида. Теплоизолированная пластина конечной толщины.

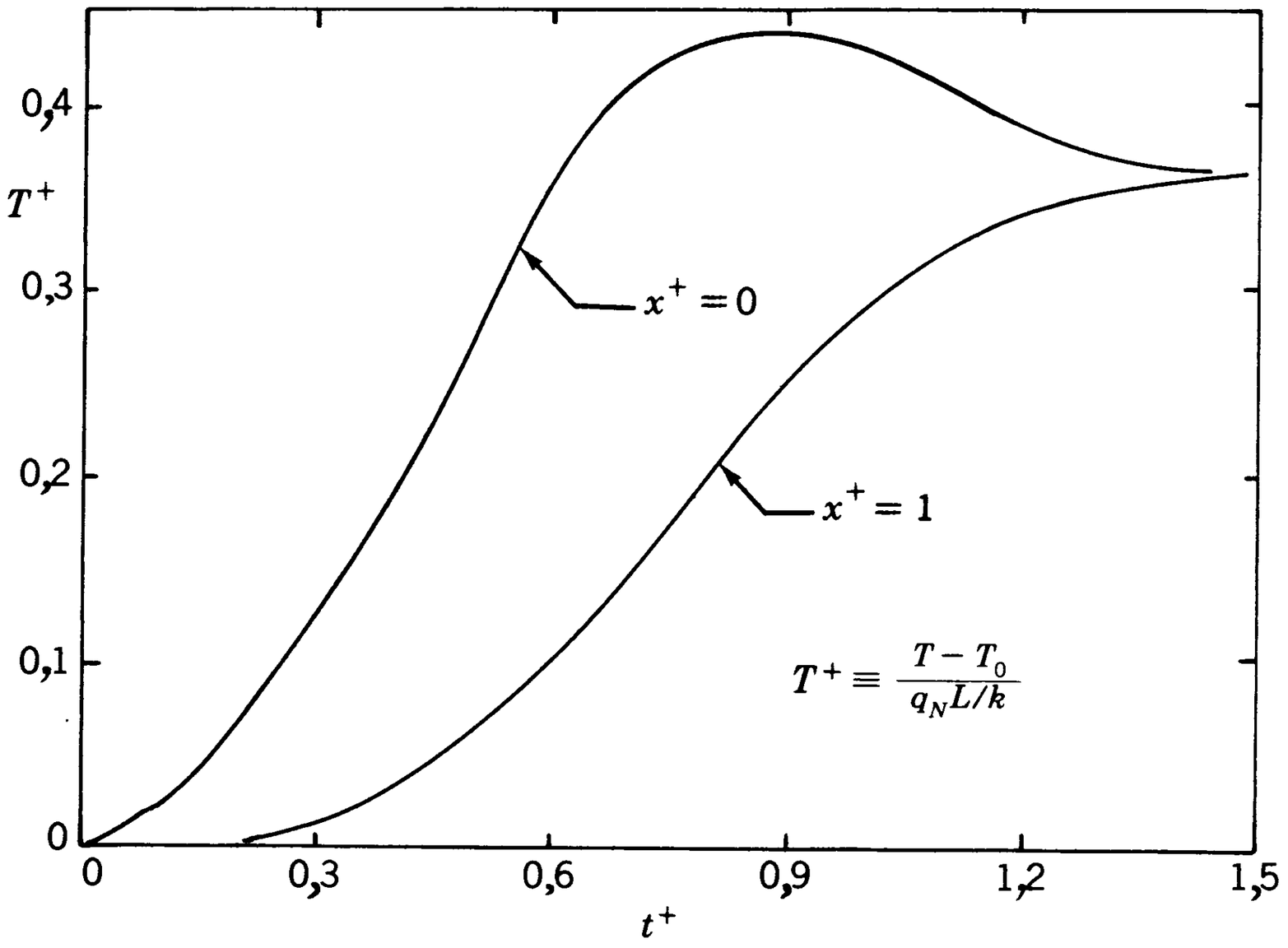



Рис. 5.4. Температура нагреваемой и теплоизолированной поверхностей в контрольном примере с изменением функции плотности теплового потока треугольного вида.

$$T^+(x^+, t^+) = \phi^+(x^+, t^+) - 2\phi^+(x^+, t^+ - 0{,}6) \qquad (5.2.7)$$

и при $t^+ > 1{,}2$

$$T^+(x^+, t^+) = \phi^+(x^+, t^+) - 2\phi^+(x^+, t^+ - 0{,}6) + \phi^+(x^+, t^+ - 1{,}2). \qquad (5.2.8)$$

Эти выражения можно вывести, используя принцип суперпозиции. Изменение по времени температуры нагреваемой и теплоизолированной поверхностей показано на рис. 5.4.

Представленный на рис. 5.4 закон изменения температуры нагреваемой поверхности существенно отличается от закона изменения температуры теплоизолированной поверхности. Температура нагреваемой поверхности мгновенно реагирует как на начало нагрева, так и на изменение скорости нагрева. Наклон кривой $T^+$ $(0, t^+)$ изменяется при $t^+ = 0{,}6$ и 1,2. Кривая $x^+ = 0$ имеет максимум

*Таблица 5.1.* Температура на теплоизолированной поверхности плоской пластины конечной толщины, нагреваемой тепловым потоком, изменение плотности которого имеет треугольную форму (рис. 5.3)

$\Delta t^+ = 0{,}06$

| $t^+$ | $T^+(1, t^+)$ | $t^+$ | $T^+(1, t^+)$ | $t^+$ | $T^+(1, t^+)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,06 | 0,000007 | 0,66 | 0,127200 | 1,26 | 0,348823 |
| 0,12 | 0,000374 | 0,72 | 0,157880 | 1,32 | 0,353762 |
| 0,18 | 0,002171 | 0,78 | 0,189293 | 1,38 | 0,356545 |
| 0,24 | 0,006323 | 0,84 | 0,219593 | 1,44 | 0,358089 |
| 0,3 | 0,013381 | 0,9 | 0,247680 | 1,50 | 0,358941 |
| 0,36 | 0,023656 | 0,96 | 0,272931 | 1,56 | 0,359415 |
| 0,42 | 0,037319 | 1,02 | 0,295006 | | |
| 0,48 | 0,054465 | 1,08 | 0,313714 | | |
| 0,54 | 0,075145 | 1,14 | 0,328954 | | |
| 0,6 | 0,099389 | 1,2 | 0,340666 | | |

в промежуточный момент времени приблизительно при $t^+ = 0{,}9$. Температура теплоизолированной поверхности до $t^+ = 0{,}18$ пренебрежимо мала по величине и запаздывает, а при $t^+ = 0{,}6$ и 1,2 не имеет резких изменений. Обе температуры продолжают изменяться после прекращения нагрева. Значения $T^+(1, t^+)$ для треугольной формы изменения плотности теплового потока при $t^+ = 0{,}06$ представлены в табл. 5.1.

### 5.2.4. Случайные погрешности

Чтобы приблизить описанные выше контрольные примеры к реальным условиям, к точным значениям температуры могут быть добавлены погрешности. Некоторые случайные погрешности с нормальным (называемым также гауссовым) распределением, нулевым средним и единичным среднеквадратичным отклонением представлены в табл. 5.2. Моделируемые температуры вычисляются при аддитивных погрешностях.

$$Y_i = T_i + \varepsilon_i \ , \tag{5.2.9a}$$

$$\varepsilon_i = C u_i \ , \tag{5.2.9b}$$

где $u_i$ — случайное число, взятое из табл. 5.2 или из аналогичной таблицы либо полученное с помощью генератора случайных чисел. (Большинство современных вычислительных машин имеет такие генераторы). Постоянная $C$ выбирается таким образом, чтобы обеспечить желаемую величину среднеквадратичного отклонения $\varepsilon_i$.

Для большинства задач теплообмена достаточно моделировать погрешность, которая не зависит от времени. Это означает, что погрешность имеет одинаковые значения и при низких, и при высоких температурах. Обычно такое моделирование значительно проще, чем предположение о мультипликативности погрешностей, например

$$Y_i = (T_i - T_0)(1 + \varepsilon_i) + T_0 \ , \tag{5.2.10}$$

где отклонение $\varepsilon_i$ также не зависит от времени. В соотношении (5.2.10) предполагается постоянство *относительных* погрешностей. Например, выражение (5.2.10) означает, что погрешность 0,001 °C при $T_i - T_0 = 0{,}1$ °C столь же вероятна, что и погрешность 1 °C при $T_i - T_0 = 100$ °C. Однако такое предположение при измерении температуры в диапазоне $T_i - T_0$ от 0 до 100 °C одним и тем же датчиком в процессе нестационарного эксперимента не отражает действительности.

*Таблица 5.2.* Случайные числа для нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием и единичным среднеквадратичным отклонением [5]

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,464 | 0,137 | 2,455 | −0,323 | −0,068 | 0,296 | −0,288 | 1,298 | 0,241 | −0,957 |
| 0,060 | −2,526 | −0,531 | −0,194 | 0,543 | −1,588 | 0,187 | −1,190 | 0,022 | 0,525 |
| 1,486 | −0,354 | −0,634 | 0,697 | 0,926 | 1,375 | 0,785 | −0,963 | −0,853 | −1,865 |
| 1,022 | −0,472 | 1,279 | 3,521 | 0,571 | −1,851 | 0,194 | 1,192 | −0,501 | −0,273 |
| 1,394 | −0,555 | 0,046 | 0,321 | 2,945 | 1,974 | −0,258 | 0,412 | 0,439 | −0,035 |

*Таблица 5.3.* Результаты моделирования измеряемой температуры для случая изменения плотности теплового потока треугольного вида (пример 5.1)

| $t^+$ | $Y^+$ | $t^+$ | $Y^+$ | $t^+$ | $Y^+$ |
|---|---|---|---|---|---|
| −0,24 | 0,000789 | 0,36 | 0,023758 | 0,96 | 0,275457 |
| −0,18 | 0,000233 | 0,42 | 0,033025 | 1,02 | 0,294404 |
| −0,12 | 0,004174 | 0,48 | 0,053562 | 1,08 | 0,312636 |
| −0,06 | −0,000549 | 0,54 | 0,074815 | 1,14 | 0,330139 |
| 0 | −0,000116 | 0,6 | 0,100312 | 1,20 | 0,342240 |
| 0,06 | 0,000510 | 0,66 | 0,124500 | 1,26 | 0,351161 |
| 0,12 | −0,000116 | 0,72 | 0,158198 | 1,32 | 0,355097 |
| 0,18 | 0,004378 | 0,78 | 0,187270 | 1,38 | 0,354908 |
| 0,24 | 0,006733 | 0,84 | 0,219630 | 1,44 | 0,356639 |
| 0,3 | 0,011754 | 0,9 | 0,248573 | 1,50 | 0,355771 |

*Пример 5.1.* В случае теплового потока, изменение плотности которого по времени имеет треугольный вид, получите последовательность безразмерных значений моделируемой измеряемой температуры с учетом аддитивных, нормально распределенных, некоррелированных погрешностей при постоянном среднеквадратичном отклонении, равном 0,0017. Начните вычисления с момента времени $t^+ = -0{,}24$.

*Решение.* При $t^+ \geqslant 0{,}06$ значения «истинной» температуры представлены в табл. 5.1, а при $t^+ < 0$ значения $T$ равны нулю. Моделируемые температуры вычисляются с использованием формул (5.2.9), для которых значения $u_i$ приведены в табл. 5.2, и $C = 0{,}0017$. Для первого значения моделируемой температуры имеем

$$Y(1, -0{,}24) = T(1, -0{,}24) + 0{,}0017u_1 = 0 + 0{,}0017(0{,}464) = 0{,}000789\,.$$

При $t^+ = 0{,}3$, что соответствует десятому шагу по времени, моделируемая измеряемая температура равна

$$Y(1, 0{,}3) = T(1, 0{,}3) + 0{,}0017u_{10} = 0{,}013381 + 0{,}0017(-0{,}957) = 0{,}011754\,.$$

Температуры в другие моменты времени вычисляются аналогичным образом и представлены в табл. 5.3. При этом использовались первые 30 случайных чисел, приведенных в табл. 5.2. Последующие значения моделируемых измеряемых температур для рассматриваемого случая можно получить с использованием других 30 случайных чисел, взяв их из работы [5].

Полезно проанализировать приведенные в табл. 5.3 результаты моделирования измеряемой температуры. Заметим, что для самых ранних моментов времени при $t^+$ от −0,24 до 0,18 значения $Y^+$ колеблются и даже изменяют знак. При $t^+ = 1{,}32$—$1{,}5$ значения $Y^+$ также колеблются относительно уровня 0,355. Понятно, что при таких вариациях алгоритмы решения ОЗТ обусловливают колебательный характер плотности теплового потока на поверхности. (Напомним, что в точном решении Бургграфа требуется дифференцировать измеренную температуру, см. разд. 2.5.2.) Замечательно, что алгоритмы все же позволяют получить результаты с требуемой точностью.

### 5.2.5. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$)

Одной из наиболее сложных проверок алгоритма решения обратной задачи теплопроводности является случай теплового импульса, при котором плотность теплового потока равна постоянной величине только на протяжении одного шага по времени и равна нулю в остальное время. Благодаря принципу суперпозиции этот случай можно рассматривать как базовый. Любое изменение по времени плотности теплового потока на поверхности приближенно можно представить

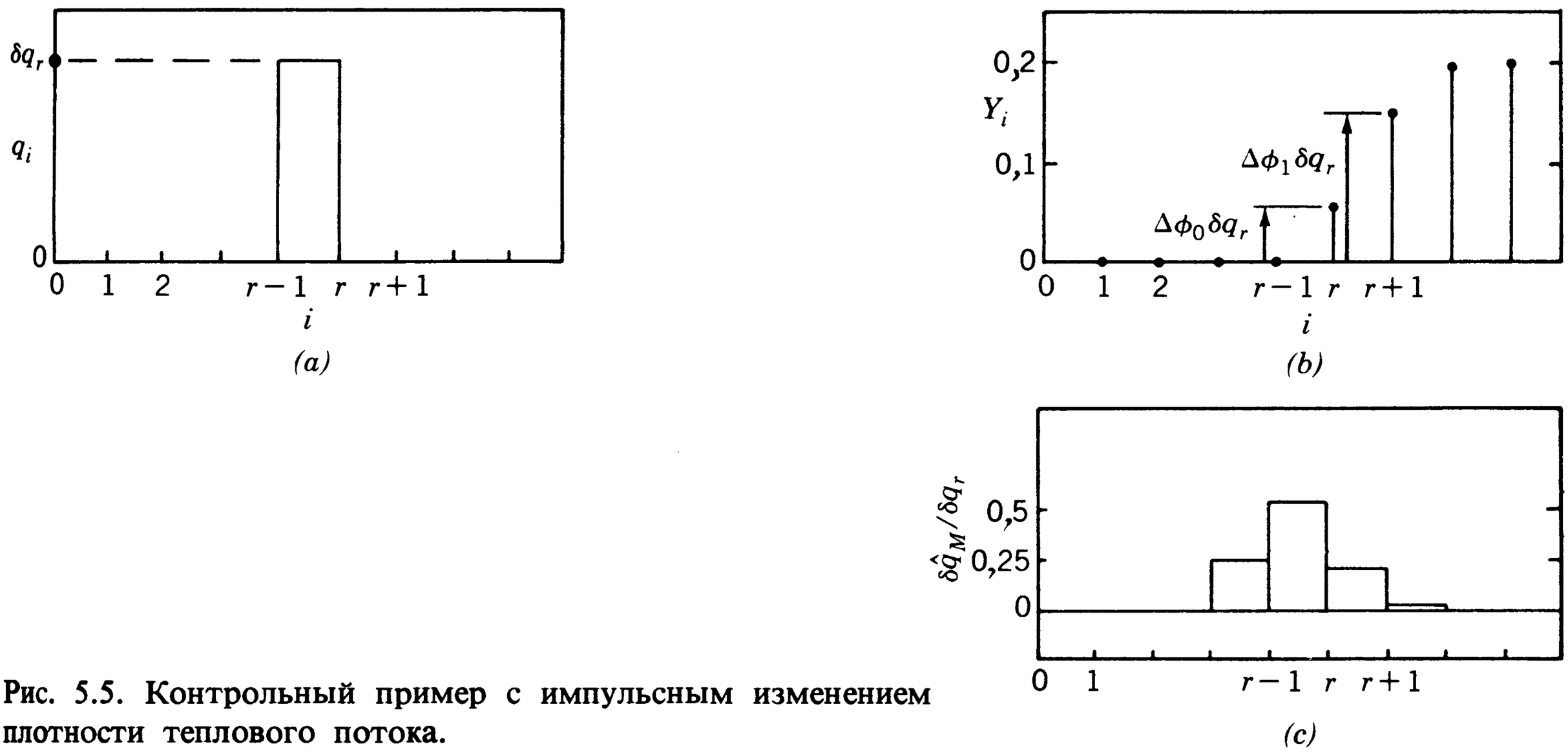



Рис. 5.5. Контрольный пример с импульсным изменением плотности теплового потока.

как суперпозицию таких базовых элементов. Если плотность теплового потока на поверхности изменяется ступенчатым образом, как показано на рис. 4.7, то для линейных задач суперпозиция дает точные результаты.

Данный случай важен не только с точки зрения контрольного примера, но и для анализа детерминированной погрешности, которая рассматривалась в разд. 4.8.5.

Импульс плотности теплового потока $\delta q_r$ имеет вид

$$q_i = \begin{cases} \delta q_r & \text{при } i = r \\ 0 & \text{при } i \neq r \end{cases}, \tag{5.2.11}$$

и иллюстрируется на рис. 5.5, *a*. Соответствующие температуры равны

$$\begin{aligned} Y_i &= 0 \quad \text{при } i \leqslant r-1 , \\ Y_r &= (\phi_1)\delta q_r = \Delta\phi_0 \delta q_r , \\ Y_{r+1} &= (\phi_2 - \phi_1)\delta q_r = (\Delta\phi_1)\delta q_r, \\ &\vdots \\ Y_{r+j} &= (\phi_{j+1} - \phi_j)\delta q_r = \Delta\phi_j \delta q_r. \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

и связаны с коэффициентами чувствительности в матрице **X** [см. (3.2.18а)]. Некоторые значения $Y_i$ для случая теплоизолированной пластины показаны на рис. 5.5, *b*. При «больших» значениях $i$ компоненты $Y_i$ стремятся к постоянной величине, так как $\Delta\phi_j$ достигает постоянного значения, что отражено на рис. 1.10 и 1.14.

С использованием температур, определяемых выражениями (5.2.12), вычисляются составляющие плотности теплового потока, которые обозначаются $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$, $M = 1, 2, \ldots$ Вследствие линейности задачи $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ не зависят от $\delta q_r$. Результаты, полученные с помощью алгоритма функциональной аппроксимации [уравнение (4.4.25)] при $r = 2$, показаны на рис. 5.5, *c*.

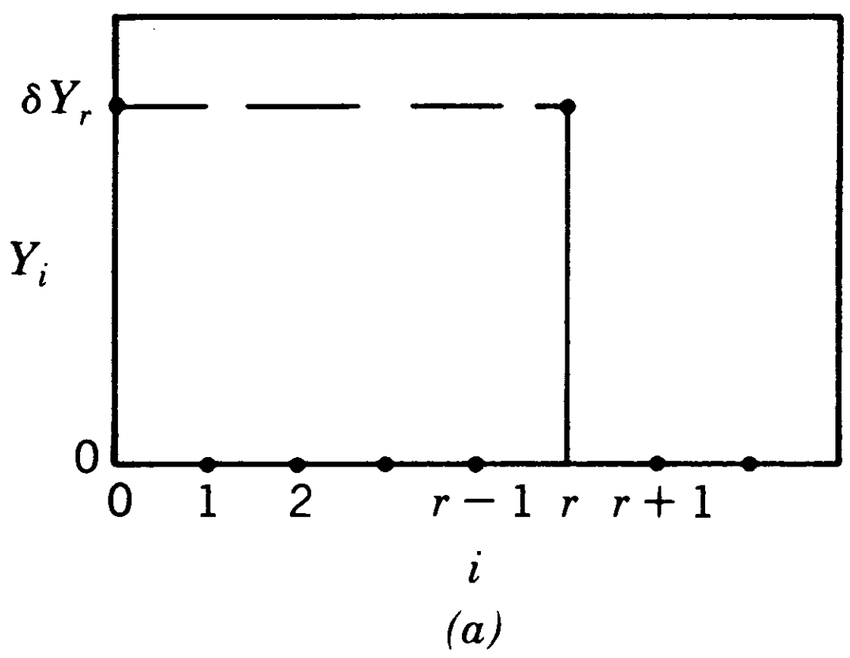
Этот пример можно использовать для оценки детерминированной погрешности в плотности теплового потока. Можно также проанализировать выполнение закона сохранения энергии. Эти вопросы рассматриваются в последующих разделах.

### 5.2.6. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$)

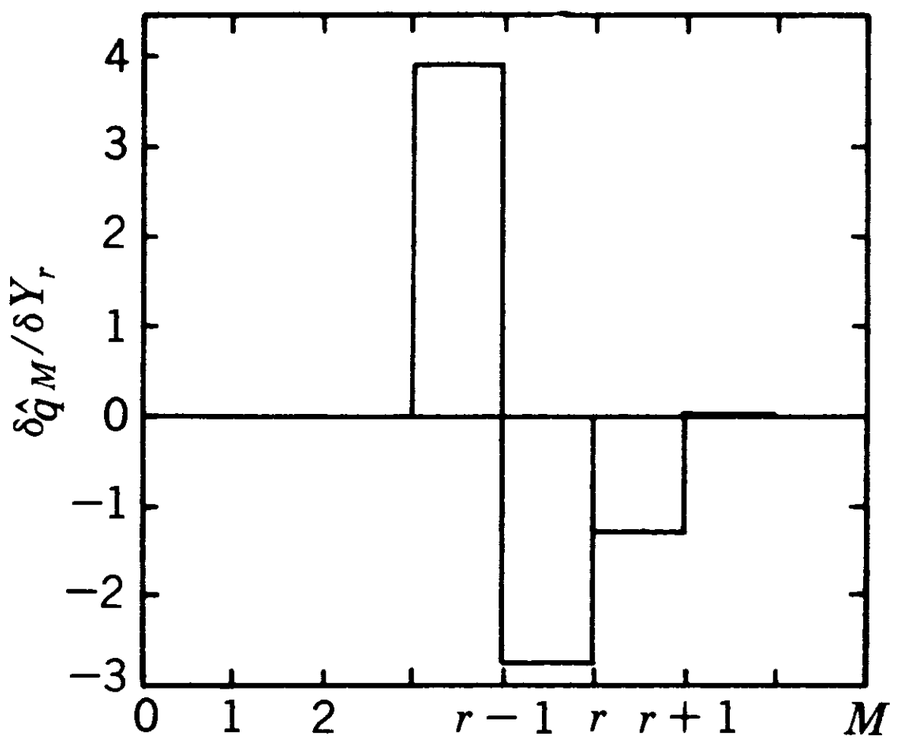
Еще один базовый, или фундаментальный, контрольный пример с импульсом температуры состоит в том, что входные температуры задаются в виде

$$Y_i=\begin{cases}\delta Y_r & \text{при } i=r\,,\\ 0 & \text{при } i\neq r\,.\end{cases} \tag{5.2.13}$$

Этот пример уже рассматривался в разд. 4.7.2 в связи с последовательными алгоритмами фильтрации. Помимо применения в цифровых фильтрах его можно использовать для анализа устойчивости алгоритмов решения обратных задач теплопроводности.




(a)




(b)

Рис. 5.6. Контрольный пример с импульсным изменением температуры; $\Delta t^+ = 0{,}2$, $r = 2$.

Температуры $Y_i$ показаны на рис. 5.6, *a*. Некоторые значения $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$, полученные с помощью алгоритма функциональной аппроксимации при $\Delta t^+ = 0{,}2$ и $r = 2$, представлены на рис. 5.6, *b*. Размерность $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$ — Вт/(м$^2\cdot$°C) и для используемого на рис. 5.6, *b* масштаба значения $k$ и $L$ равны единице или же график следует рассматривать для величины $\delta\hat{q}_M L/k\delta Y_r$.

### 5.2.7. Контрольные примеры с размерными величинами

Ранее контрольные примеры рассматривались в безразмерной форме. Это было сделано для большей общности, так как каждый пример соответствует большому количеству возможных материалов и толщин пластины, а также плотностей тепловых потоков на поверхности. Тем не менее полезно проанализировать результаты, связанные с конкретным физическим процессом.

Чтобы охватить широкий диапазон теплофизических характеристик, были выбраны три материала с сильно отличающимися свойствами, а именно кирпич, сталь и медь. В табл. 5.4 приведены значения коэффициентов температуропроводности и теплопроводности этих материалов.

Один из путей установления связи безразмерных величин

$$\Delta t^+=\frac{\alpha\Delta t}{L^2}\,,\quad t^+=\frac{\alpha t}{L^2} \tag{5.2.14a, b}$$

с размерными значениями шага по времени и моментов времени (в секундах) состоит в использовании соотношений

$$\Delta t^+=\Delta t,\text{ с}\qquad\text{и}\qquad t^+=t,\text{с}\,.$$

*Таблица 5.4.* Таблица материалов, а также значений $L$ и $q_0$ для преобразования результатов решения контрольных примеров к размерному виду

| Материал | $\alpha \times 10^5$, м$^2$/с | $k$, Вт/(м · с) | $L$, см для $\Delta t = \Delta t^+$ | $q_0$, Вт/м$^2$ для $T(°C) = T^+$ |
|---|---|---|---|---|
| Кирпич | 0,04 | 1 | 0,0632 | 1580 |
| Сталь | 1,1 | 40 | 0,332 | 12100 |
| Медь | 11 | 380 | 1,05 | 36200 |

Эти соотношения выполняются в том случае, если $L$ удовлетворяет условию

$$L = \alpha^{1/2}. \tag{5.2.15}$$

Значения $L$ (в сантиметрах) для трех перечисленных выше материалов приведены в табл. 5.4. Следовательно, во всех рассмотренных для плоской пластины контрольных примерах безразмерные шаги по времени (и моменты времени) для перечисленных в табл. 5.4 случаев можно рассматривать как шаги по времени (и моменты времени), измеряемые в секундах.

В контрольном примере со ступенчатым увеличением плотности теплового потока на поверхности изменение температуры в градусах Цельсия равно безразмерной температуре, если значения $k$, $L$ и $q_0$ соответствуют приведенным в табл. 5.4. Если изменение температуры в этом примере (табл. 1.1) кажется слишком малым, то определенные из соотношений (5.2.3) значения $T^+$ можно умножить, например, на 100 и на эту же величину умножить $q_0$. Предположим, что вычисленные значения безразмерной плотности теплового потока, показанные на рис. 5.7, соответствуют медной пластине толщиной 1,05 см и шагу по времени 0,05 с. Тогда для нахождения значений $\hat{q}$, вычисляемых по температу-

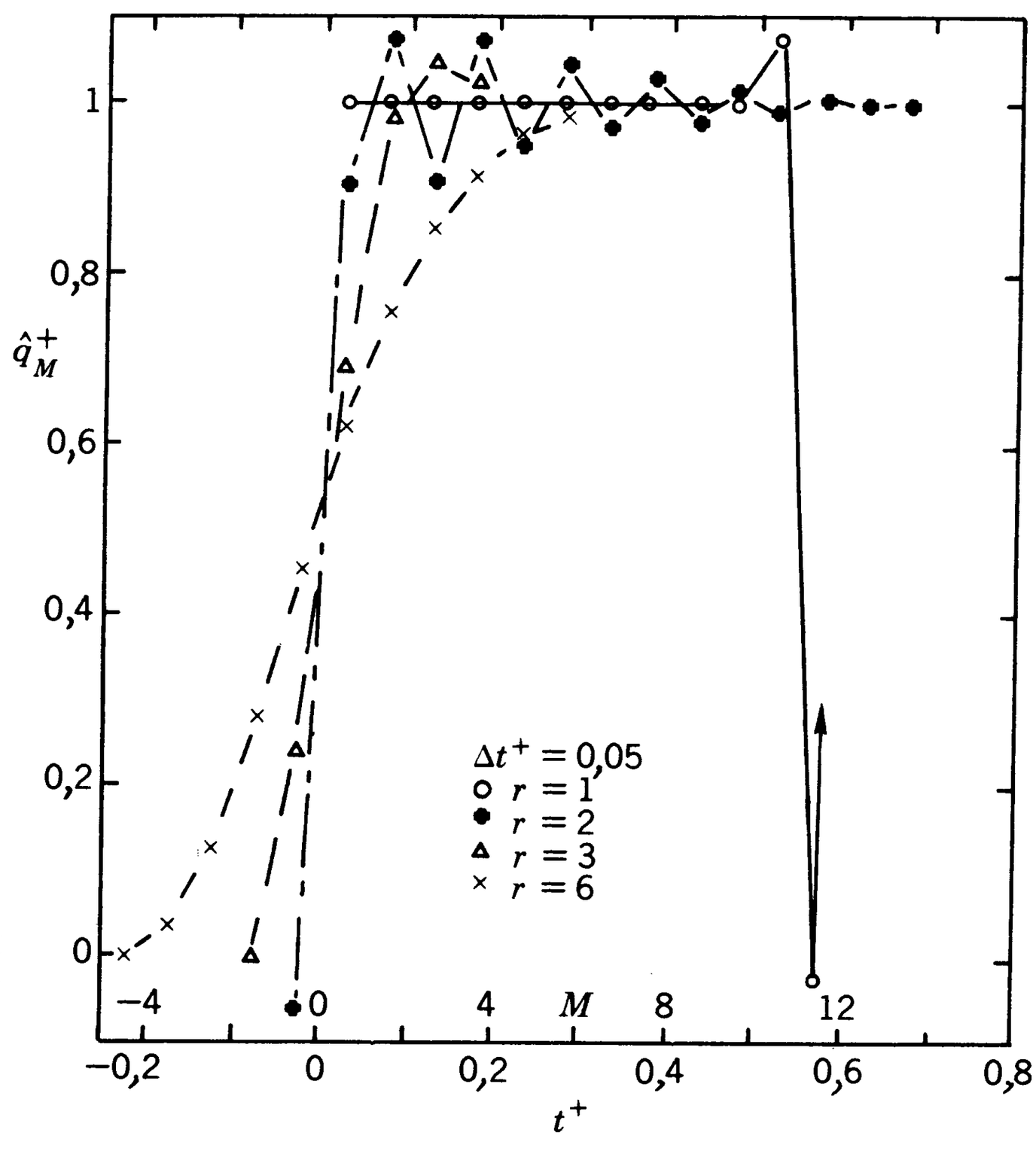



Рис. 5.7. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности пластины при постоянной первоначальной величине $q$. Метод функциональной аппроксимации; $\Delta t^+ = 0{,}5$. Точные значения температуры.

рам $Y_i$ из табл. 1.1, величины $\hat{q}^+$ умножаются на 36 200 Вт/м$^2$. Если значения из табл. 1.1 умножаются на 100, чтобы приблизить моделируемые температуры к реальным величинам, то показанные на рис. 5.7 значения $\hat{q}^+$ нужно умножить на 3 620 000 Вт/м$^2$, и тогда размерность $\hat{q}$ получается Вт/м$^2$.

Для случая изменения плотности теплового потока по времени треугольного вида номинальная плотность теплового потока $q_N$ в соотношении (5.2.3) рассматривается таким же образом, как и $q_0$ в случае ступенчатого увеличения плотности теплового потока на поверхности.

## 5.3. Алгоритмы функциональной аппроксимации

### 5.3.1. Введение

В данном разделе рассматривается применение некоторых последовательных алгоритмов функциональной аппроксимации, предложенных в разд. 4.4. Используется численный аналог теоремы Дюамеля для модели теплопроводности. Одна из целей этого раздела состоит в том, чтобы обеспечить лучшее понимание указанных алгоритмов решения обратной задачи теплопроводности. Это достигается путем анализа решений контрольных примеров, приведенных в разд. 5.2.

В начале раздела исследуется алгоритм с одним значением температуры в последующий момент времени. Затем рассматривается случай с несколькими значениями температуры в последующие моменты времени.

### 5.3.2. Алгоритм с использованием одного значения температуры в последующий момент времени (метод Штольца)

Этот алгоритм имеет вид уравнения (4.3.5), с помощью которого осуществляется точная подгонка вычисленных температур к измеренным значениям, и называется алгоритмом Штольца [4]. Для удобства уравнение (4.3.5) запишем в виде

$$\hat{q}_M = \left( Y_M - \sum_{j=1}^{M-1} \hat{q}_j \Delta\phi_{M-j} - T_0 \right) K_1, \tag{5.3.1}$$

где коэффициент усиления $K_1$ вычисляется по формуле

$$K_1 = \frac{1}{\phi_1}. \tag{5.3.2}$$

ачения коэффициентов усиления для $\Delta t^+ = 0{,}05$; 0,2 и 0,5 приведены в табл. 4.1. Численный пример применения уравнения (5.3.1) рассмотрен в примере 4.1.

#### 5.3.2.1. Ступенчатое изменение плотности теплового потока

Результаты решения контрольного примера со ступенчатым изменением плотности теплового потока показаны на рис. 5.7 и 5.8 кривыми, обозначенными = 1. Вычисленные значения безразмерной плотности теплового потока обозначены $\hat{q}_M^+$ и определяются как $\hat{q}_M^+ \equiv \hat{q}_M / q_c$, где $q_c$ — постоянная плотность действительно действующего теплового потока. Приведенные на рис. 5.7 результаты соответствуют значению безразмерного шага по времени $\Delta t^+ = 0{,}05$. Отмечается отличное совпадение с точным решением вплоть до одиннадцатого

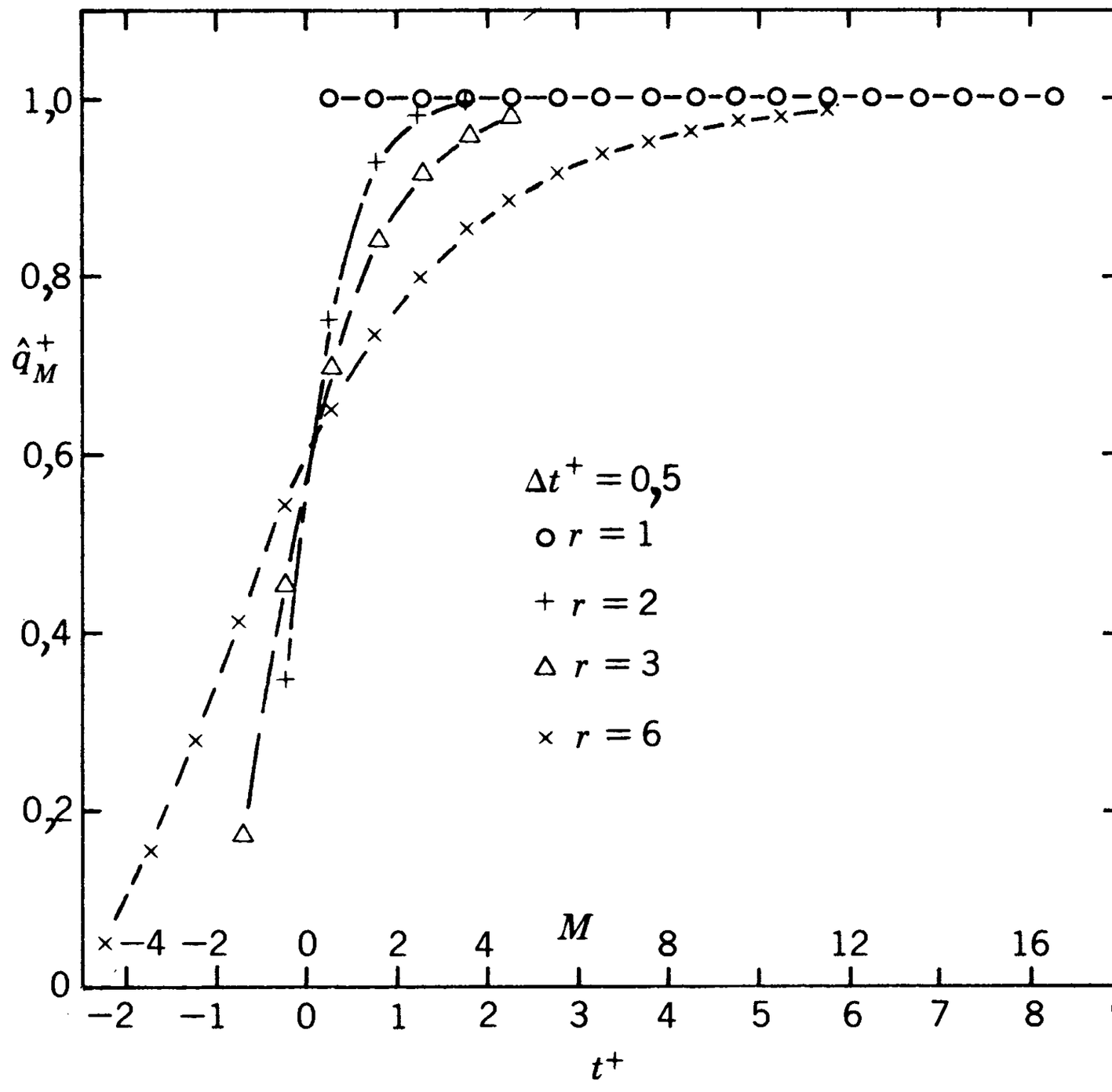



Рис. 5.8. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности пластины при постоянной первоначальной величине $q$. Метод функциональной аппроксимации; $\Delta t^+ = 0{,}5$. Точные значения температуры.

шага по времени, а затем наблюдаются быстро увеличивающиеся по амплитуде колебания. В этом примере решение неустойчиво в смысле соотношения погрешностей в исходных данных и результатах, поскольку по мере увеличения $M$ компоненты $\hat{q}_M$ продолжают неограниченно возрастать. Вычисления были проведены на ЭВМ CDC с использованием 15 значащих цифр. Влияние погрешностей округления при использовании пятнадцати значащих цифр имеет место и при наименьших значениях $M$, однако в данном примере оно неразличимо приблизительно до $M = 10$. Дальнейший анализ неустойчивости проводится в разд. 5.3.2.4.

Полученные методом Штольца результаты для $\Delta t^+ = 0{,}5$ показаны на рис. 5.8 в виде кривой, обозначенной $r = 1$. Так как колебания не наблюдаются, то эти результаты устойчивы, что обусловлено значительно большей величиной $\Delta t^+$.

#### 5.3.2.2. Изменение плотности теплового потока треугольного вида

Результаты расчетов для этого случая представлены на рис. 5.9. Погрешности измерений пренебрежимо малы, поскольку величины $Y_i$ брались из табл. 5.1. Шаги по времени принимались равными $\Delta t^+ = 0{,}05$; 03; 0,5 и 1. При наименьшем шаге $\Delta t^+ = 0{,}05$ решение получается неустойчивым и, следовательно, несет в себе мало полезной информации относительно плотности теплового потока на поверхности. Наименьшим шагом по времени, обеспечивающим устойчивые результаты, является $\Delta t^+ = 0{,}3$; при этом обеспечивается наибольшая информация о плотности действующего теплового потока. Недостаток метода Штольца состоит в том, что иногда для того, чтобы удовлетворить условию устойчивости, необходимо назначать слишком большие шаги по времени, и это не дает возможности получать информацию о быстрых изменениях плотности теплового потока.

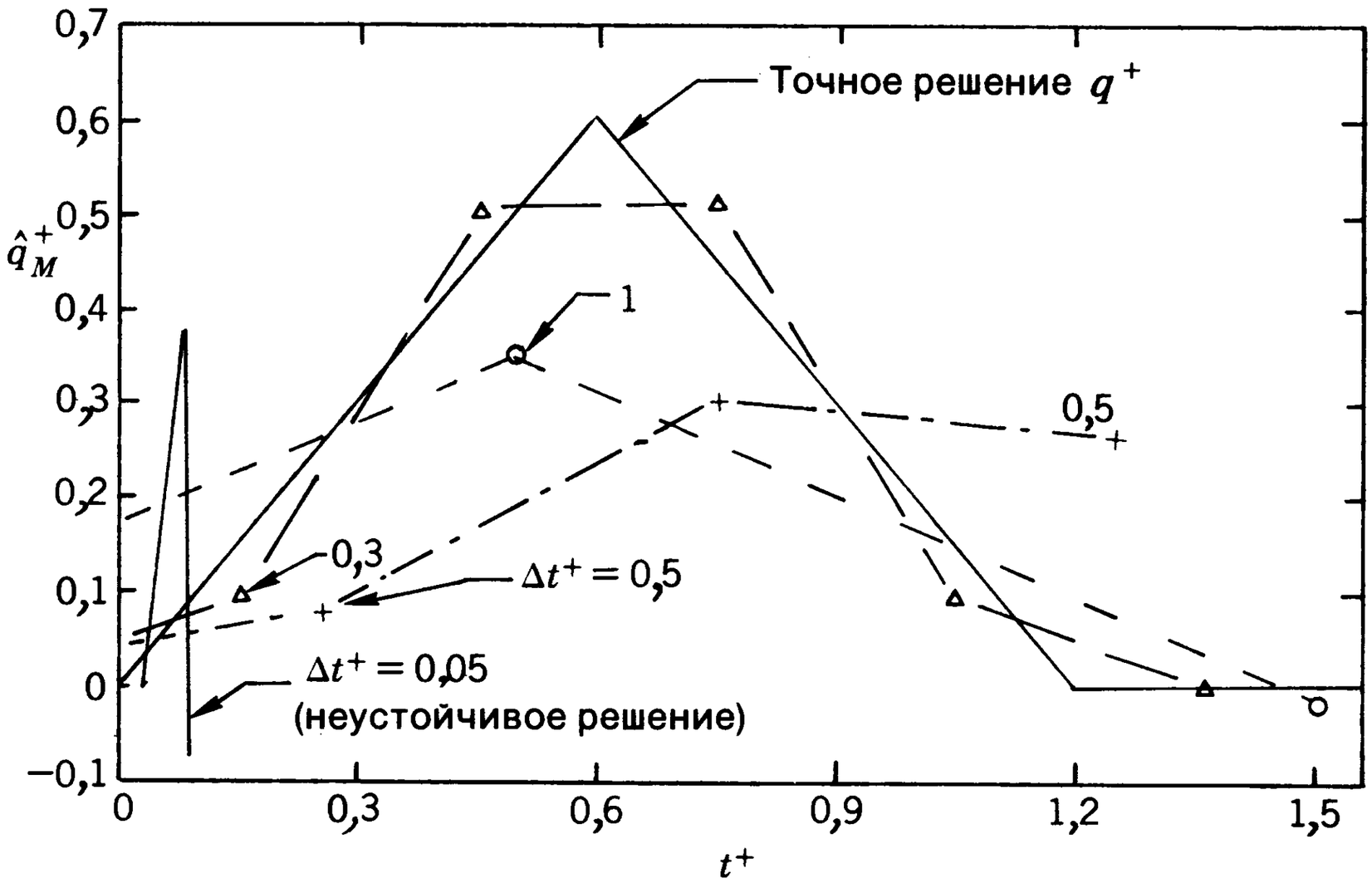



Рис. 5.9. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности для контрольного примера с треугольной формой изменения $q$. Используются точные данные ($r = 1$, метод Штольца).

### 5.3.2.3. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$)

Метод Штольца ($r = 1$) точно воспроизводит импульс теплового потока $\delta q_r$ в том случае, когда этот метод является устойчивым. На рис. 5.10 представлены «точные» значения $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ при $r = 1$ для шага $\Delta t^+ = 0{,}05$. [Значения $\hat{q}_M$ для момента времени $t_M$ на графике соответствуют моменту времени $t_{M-1/2} = \left(M - \frac{1}{2}\right)\Delta t$.] Результаты, отражающие на рис. 5.10 применение метода Штольца, до некоторой степени вводят в заблуждение, поскольку в других случаях при больших значениях $M$ неустойчивость становится очевидной. При безразмерных шагах по времени, больших чем 0,3, результаты устойчивы. Этот вопрос анализируется при рассмотрении следующего контрольного примера.

### 5.3.2.4. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$)

Контрольный пример с импульсом температуры характерен тем, что $Y_i - T_0 = 0$ при всех значениях $i$, кроме $i = r$, когда $Y_r - T_0 = \delta Y_r$. Одно из назначений этого примера заключается в исследовании устойчивости алгоритма Штольца, т. е. случая $r = 1$. Некоторые значения $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$, нормированные относительно начального значения, представлены на рис. 5.11. Если $r = 1$, то величины $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$ численно равны коэффициенту усиления $K_1$, значения которого составляют 9,94; 6,95, и 2,99 при $\Delta t^+ = 0{,}25$; 0,3 и 0,5 соответственно. При $\Delta t^+ = 0{,}25$ результат неустойчив, так как с ростом $M$ наблюдается увеличение амплитуды колебаний. При $M \geqslant 4$ коэффициент усиления амплитуды

$$\text{Коэффициент усиления амплитуды} = \frac{|\delta\hat{q}_{M+1}|}{|\delta\hat{q}_M|} \tag{5.3.3}$$

равен 1,221, т. е. больше единицы. Коэффициенты усиления амплитуды при $\Delta t^+ = 0{,}3$ и 0,5 соответственно равны 0,951 и 0,481, а так как эти значения меньше единицы, то алгоритм Штольца при $\Delta t^+ > 0{,}3$ устойчив (случай плоской пла-

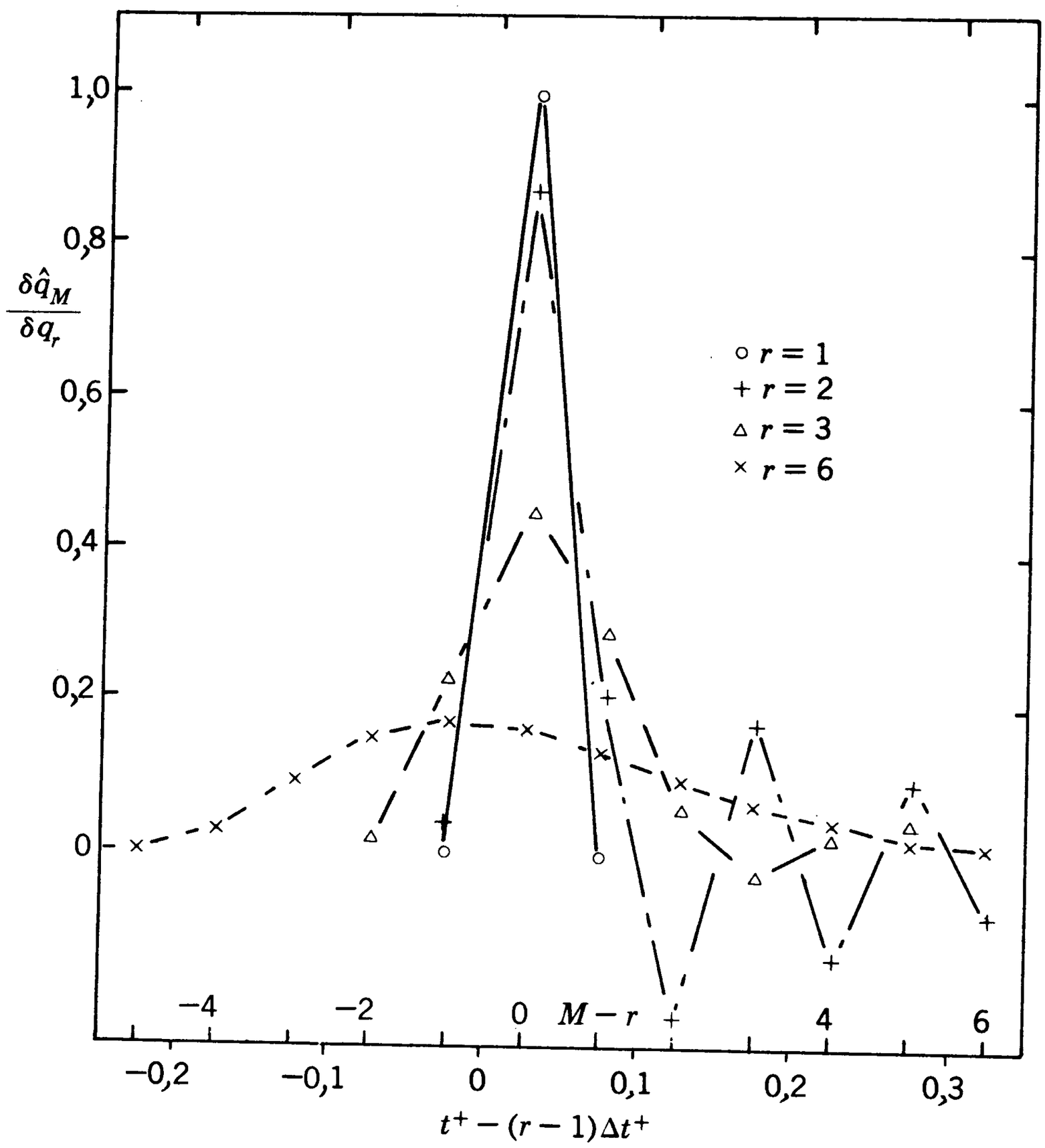



Рис. 5.10. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности пластины для случая импульсного изменения первоначальной величины $q$; $\Delta t^+ = 0{,}05$.

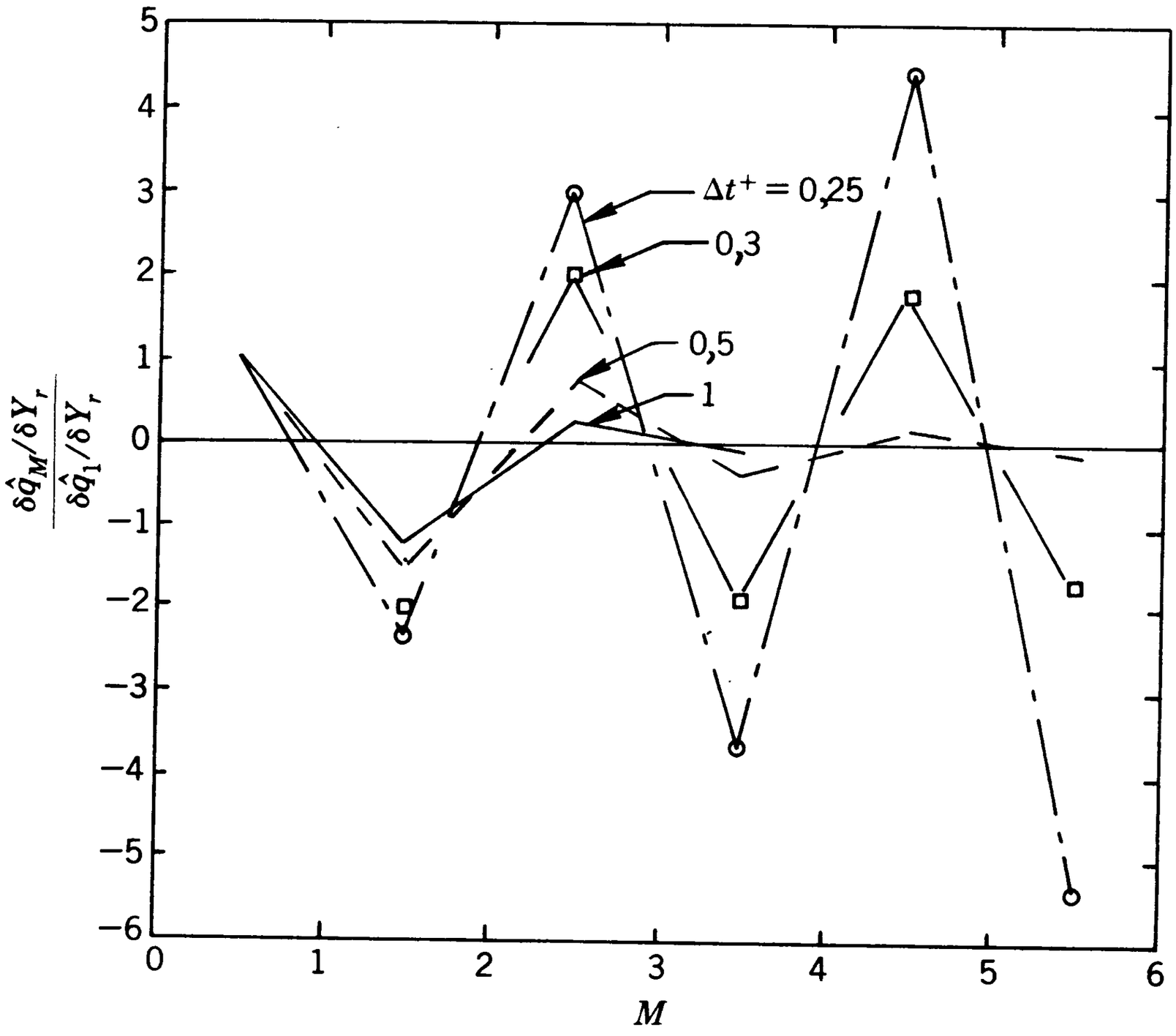



Рис. 5.11. Анализ устойчивости метода Штольца. Плоская пластина; датчик расположен на теплоизолированной поверхности.

стины, нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$, и расположения датчика в точке $x = L$). (В задачах 5.7 и 5.8 анализируется устойчивость метода Штольца.)

Хотя алгоритм Штольца устойчив вплоть до $\Delta t^+ = 0{,}3$, по ряду причин рекомендуется использовать несколько бóльшие значения $\Delta t^+$. Во-первых, влияние погрешности, которая возникает в некоторый момент времени, сохраняется на протяжении многих последующих шагов по времени, как это видно из рис. 5.11. Во-вторых, вызванное одиночной погрешностью измерения $\delta Y_r$ возмущение плотности теплового потока при $\Delta t^+ = 0{,}3$ значительно больше по величине, чем при большем шаге по времени, например, $\Delta t^+ = 0{,}5$. Так, на втором шаге по времени ($M = 2$) после воздействия возмущения величина $\delta\hat{q}_M L/k\delta Y_r$ равна $-4{,}4$ при $\Delta t^+ = 0{,}5$ и $-14{,}4$ при $\Delta t^+ = 0{,}3$, т. е. амплитуда при $\Delta t^+ = 0{,}3$ больше почти в три раза.

Для лучшего понимания влияния погрешностей измерений температуры рассмотрим в качестве примера стальную пластину толщиной 1 см. Коэффициент теплопроводности равен 40 Вт/(м · °С), а коэффициент температуропроводности $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ м$^2$/с. Значение $\Delta t^+ = 0{,}3$ соответствует следующей величине шага по времени:

$$\Delta t = \frac{\Delta t^+ L^2}{\alpha} = \frac{0{,}3(0{,}01)^2}{1{,}1 \times 10^{-5}} = 2{,}7 \text{ с}.$$

Если погрешность измерения температуры составляет 1 °С, то наибольшее возмущение вычисленной плотности теплового потока на поверхности равно

$$\delta\hat{q}_M = \frac{\delta\hat{q}_M L}{k\delta Y_r}\frac{k\delta Y_r}{L} = (-14{,}4)(40 \times 1/0{,}01) = -57\,600 \text{ Вт/м}^2.$$

Чтобы дать представление о значимости этой величины, укажем, что стационарный тепловой поток с такой плотностью, действующий на плоскую пластину при постоянной температуре ее противоположной стороны, вызывает разность температур по толщине пластины 14 °С. Следовательно, имеет место существенное усиление погрешности, составляющей 1 °С. Используя данные табл. 5.4, можно рассмотреть и другие примеры.

### 5.3.3. Алгоритм с использованием нескольких значений температуры в последующие моменты времени

Использование значений температуры в последующие моменты времени приводит к существенно более эффективным алгоритмам по сравнению с точной подгонкой. В этом случае чувствительность к погрешностям измерений снижается, что позволяет выбирать меньшие значения шагов по времени.

Последовательный алгоритм функциональной аппроксимации можно получить из выражения (4.4.24), которое выведено при временном предположении о постоянстве плотности теплового потока. Используя численный аналог интеграла Дюамеля, из уравнения (3.2.29) найдем

$$\hat{q}_M = \sum_{i=1}^{r} K_i \left( Y_{M+i-1} - \sum_{j=1}^{M-1} \hat{q}_j \Delta\phi_{M-j+i-1} - T_0 \right), \tag{5.3.4a}$$

где коэффициент усиления $K_i$ вычисляется по формуле

$$K_i = \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^{r} \phi_j^2}, \qquad (5.3.4b)$$

а $r$ — число последующих температур. При $r = 1$ соотношение (5.3.4) сводится к алгоритму Штольца [см. соотношение (5.3.1)]. Некоторые значения $K_i$ для различных шагов по времени и $r = 1, 2, \ldots, 5$ приведены в табл. 4.1. С увеличением $r$ и $\Delta t^+$ значения $K_i$ уменьшаются. Два численных решения с использованием соотношений (5.3.4) рассматриваются в примерах 4.2 и 4.3.

#### 5.3.3.1. Ступенчатое изменение плотности теплового потока

Результаты решения контрольного примера при ступенчатом изменении плотности теплового потока для $\Delta t^+ = 0{,}05$ и 0,5 представлены на рис. 5.7 и 5.8 соответственно. В каждом случае при $r > 1$ рост $q$ начинается раньше нулевого момента времени с наибольшим эффектом опережения при наибольших значениях $r$. Можно заметить, что наибольший эффект от увеличения $r$ достигается при наибольших значениях $r$. Кроме того, с увеличением $r$ получаются все более заниженные значения $q$ сразу же после ступенчатого изменения плотности теплового потока. Подобные эффекты не наблюдаются, если процесс вычислений начинается в момент времени $t = 0$, однако, поскольку время начала нагрева обычно неизвестно, подобные расчеты не могут служить серьезной проверкой алгоритмов решения обратных задач теплопроводности.

При безразмерном шаге по времени $\Delta t^+ = 0{,}05$ и $r = 2$, 3 и 6 результаты устойчивы, за исключением случая $r = 1$ (метод Штольца). При $r = 2$ наблюдаются достаточно малые колебания относительно точных значений, в случае $r = 3$ имеется небольшой заброс, а при $r = 6$ решение подходит к точному снизу. Представленные на рис. 5.7 результаты показывают, что при $r > 1$ получаются неплохие приближения к ступенчатой зависимости плотности теплового потока.

Результаты расчетов для $\Delta t^+ = 0{,}5$ показаны на рис. 5.8. Наилучшее приближение достигается в случае $r = 1$. Решение при $r = 2$ также достаточно точное и значительно меньше чувствительно к погрешностям измерений, чем при $r = 1$.

#### 5.3.3.2. Изменение плотности теплового потока треугольного вида

Вычисленные значения плотности теплового потока для контрольного примера с треугольной формой ее изменения приведены на рис. 5.12 и 5.13. На рис. 5.12 показаны результаты для случая $r = 4$ и отсутствия случайных погрешностей измерения температуры. Наблюдается очень хорошее соответствие с точными значениями плотности теплового потока. Отклонения достигают заметных значений только на участках резкого ее изменения.

На рис. 5.12 было бы логично привести результаты, полученные для $r = 2$ и $r = 3$, однако представлены данные при $r = 4$. Это объясняется тем, что при $r = 2$ и 3 соответствие с точными значениями $q$ еще лучше, и поэтому такой график не является столь наглядным. Имеющиеся различия демонстрируются в табл. 5.5. Затабулирована только область по времени в зоне максимальных значений плотности теплового потока, поскольку наибольшие погрешности наблю-

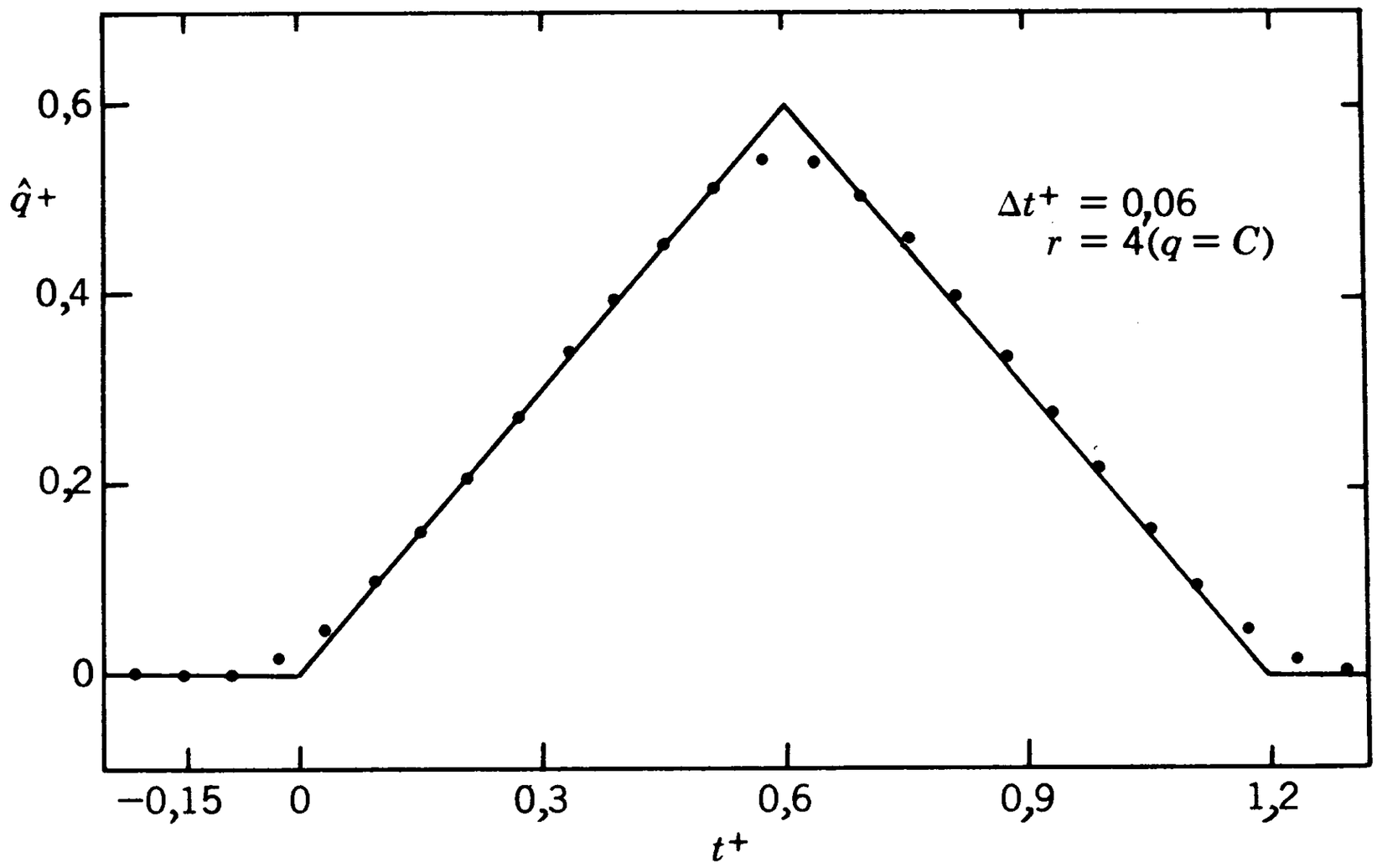



Рис. 5.12. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности для контрольного примера с треугольной формой изменения $q$ без учета случайных погрешностей измерения температуры. Метод функциональной аппроксимации.

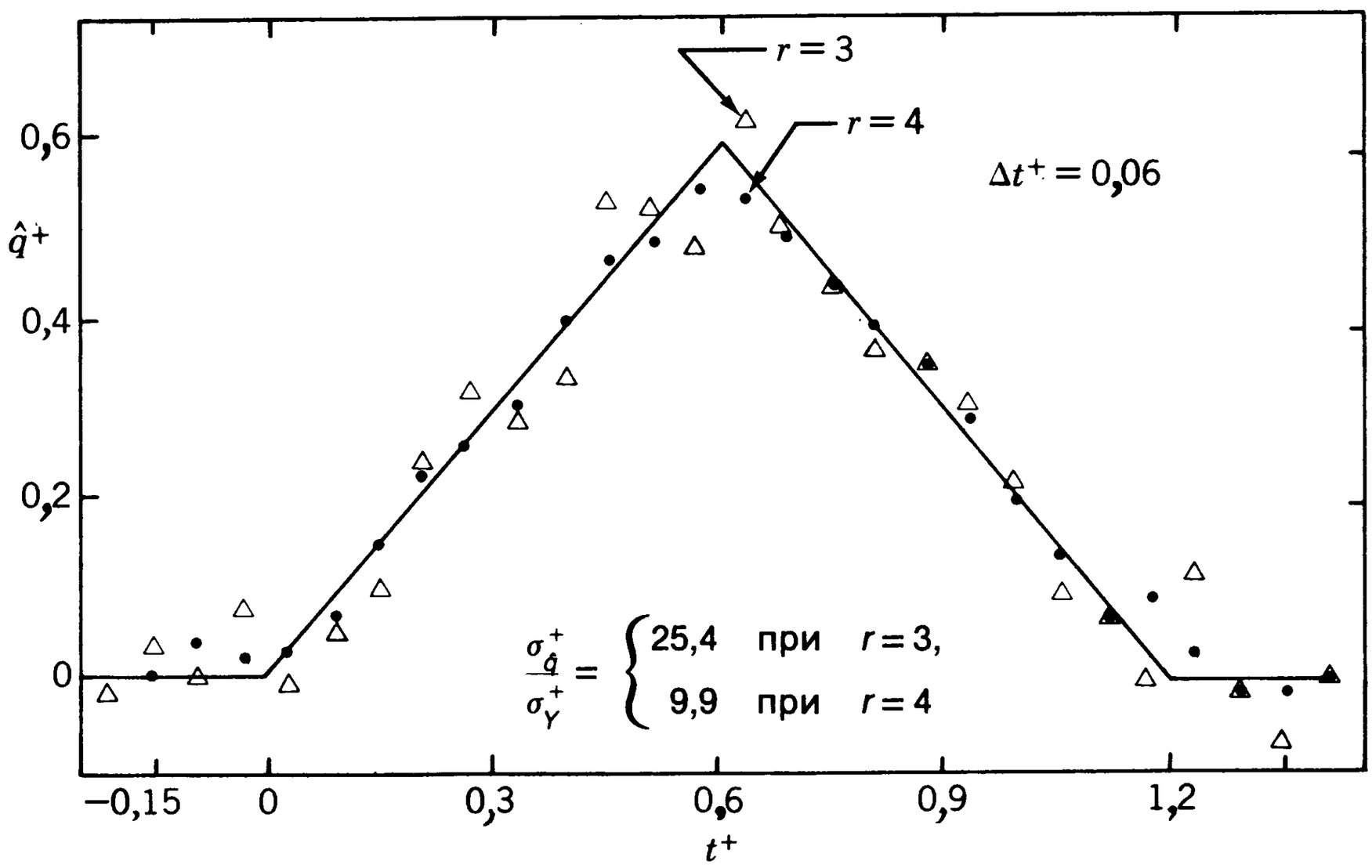



Рис. 5.13. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности для контрольного примера с треугольной формой изменения $q$. Использованы данные с некоррелированными, распределенными по нормальному закону случайными погрешностями при $\delta_Y^+ = 0{,}0017$. Метод функциональной аппроксимации.

*Таблица 5.5.* Вычисленные в отдельные моменты времени значения плотности теплового потока для примера с треугольной формой изменения $q$. Метод функциональной аппроксимации при отсутствии погрешностей измерения температуры

| $t^+$ | $\hat{q}^+$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Точное значение | $r=2$ | $r=3$ | $r=4$ |
| 0,51 | 0,51 | 0,5100 | 0,5097 | 0,5038 |
| 0,57 | 0,57 | 0,5691 | 0,5559 | 0,5347 |
| 0,63 | 0,57 | 0,5818 | 0,5577 | 0,5327 |

даются именно в этой области. В табл. 5.5 максимальные погрешности составляют 2; 2,5 и 6,5% для $r = 2$, 3 и 4 соответственно. Эти погрешности связаны со смещением, обусловленным погрешностями аппроксимации.

Показанные на рис. 5.12 оцененные значения плотности теплового потока хорошо передают треугольную форму кривой плотности теплового потока и заметно расходятся с результатами, полученными для всех значений шагов по времени при $r = 1$ и представленными на рис. 5.9. Отсюда следует, что для рассматриваемого контрольного примера метод функциональной аппроксимации с использованием последующих температур гораздо более эффективен, чем точная подгонка температур.

Влияние ряда случайных погрешностей иллюстрируется на рис. 5.13. Предполагается, что погрешности аддитивны, с нулевым математическим ожиданием, имеют среднеквадратичное отклонение $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$, некоррелированны и распределены по нормальному закону (см. табл. 5.3). Для решения ОЗТ используется алгоритм функциональной аппроксимации с тремя и четырьмя последующими температурами. Даже если в случае $r = 4$ при отсутствии случайных погрешностей имеет место большая погрешность аппроксимации вблизи максимума плотности теплового потока (как это видно из табл. 5.5), значения $\hat{q}$ на рис. 5.13 при наличии случайных погрешностей в температурах в случае $r = 4$ значительно лучше соответствуют точному решению, чем в случае $r = 3$.

Введем безразмерное среднеквадратичное отклонение оценки плотности теплового потока:

$$\sigma_{\hat{\mathbf{q}}}^+ \equiv \frac{\sigma_{\hat{\mathbf{q}}}}{q_N}, \tag{5.3.5}$$

$\sigma_{\hat{q}}$ приближенно вычисляется по формуле

$$\sigma_{\hat{\mathbf{q}}} \approx \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{q}_i - \hat{q}_i|_{\sigma_Y=0})^2\right]^{1/2}, \tag{5.3.6}$$

где $q_N$ — номинальное значение плотности теплового потока для контрольного примера с треугольной формой изменения $q$ [соотношения (5.2.2)], $n$ — число измерений, которое приблизительно равно 30, $\hat{q}_i$ — оценки значений плотности теплового потока, показанные на рис. 5.13. (Для более точного вычисления $\sigma_{\hat{q}}$ можно использовать $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$ (разд. 4.8.4).)

Введем также безразмерную величину $\sigma_Y^+$:

$$\sigma_Y^+ \equiv \frac{\sigma_Y k}{q_N L}, \tag{5.3.7}$$

где $\sigma_Y$ — среднеквадратичное отклонение случайных погрешностей температуры (°C). Отношение

$$\frac{\sigma_{\hat{\mathbf{q}}}^+}{\sigma_Y^+}$$

при $r = 3$ и 4 соответственно равно 25,4 и 9,9. Следовательно, в данном примере чувствительность к случайным погрешностям при $r = 3$ приблизительно в три раза выше, чем при $r = 4$. Это подтверждается и визуальным рассмотрением показанных на рис. 5.13 отклонений $\hat{q}^+$. При значении $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$ влияние случайных погрешностей значительно выше, чем влияние погрешностей

аппроксимации. Следовательно, в данном примере алгоритм при $r = 4$ эффективнее, чем при $r = 3$. Если $r = 2$, то влияние случайных погрешностей проявляется гораздо заметнее. При $r = 1$ получается неустойчивое решение.

Вследствие линейности анализируемой обратной задачи теплопроводности отношение $\sigma_{\hat{q}}^+/\sigma_Y^+$ в данном примере сохраняет постоянное значение. Полученное при $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$, оно остается постоянным для любого значения $\sigma_Y^+$. Увеличение вдвое величины $\sigma_Y^+$ приведет к удвоению показанных на рис. 5.13 случайных погрешностей.

#### 5.3.3.3. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$)

Результаты расчетов плотности теплового потока при $\Delta t^+ = 0{,}05$ для контрольного примера с импульсом плотности теплового потока представлены на рис. 5.10. Действительная величина соответствует случаю $r = 1$. При увеличении $r$ происходит расширение оцененного импульса на большее число шагов по времени при одновременном уменьшении его амплитуды. При $r = 2$ форма импульса сохраняется, однако наблюдается несколько колебаний. В случае $r = 6$ импульс оценивается в виде гладкой гауссовой кривой, причем эта кривая несимметрична и ее максимум смещен на один шаг по времени влево.

Важной характеристикой любого алгоритма решения ОЗТ является выполнение закона сохранения энергии. Даже если форма импульса не сохраняется, суммарная энергия, определяемая площадью под каждой кривой при $r = 2, 3, \ldots,$ должна быть равна подведенной энергии. Если в анализируемом примере допускается отвод тепла от тела, закон сохранения энергии не выполняется (см. задачу 5.16).

С увеличением шага по времени, например при $\Delta t^+ = 0{,}5$, результаты аналогичны приведенным на рис. 5.10, но кривые ниже и более пологие.

#### 5.3.3.4. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$)

В любом реальном эксперименте имеют место погрешности измерений. Некоторое представление о влиянии ряда погрешностей можно получить, анализируя влияние одиночной погрешности $\delta Y_r$. Расчетная относительная плотность теплового потока при такой одиночной погрешности обозначается $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$ и имеет размерность Вт/(м$^2 \cdot$ °C). Безразмерная форма этого комплекса имеет вид

$$\frac{\delta\hat{q}_M^+}{\delta Y_r^+} \equiv \frac{\delta\hat{q}_M L}{k\delta Y_r}. \qquad (5.3.8)$$

Значения комплекса для $\Delta t^+ = 0{,}05$ и $r = 1, 2, 3$ и 6 приведены в табл. 5.6, а для $\Delta t^+ = 0{,}5$ и $r = 2, 3$ и 6 показаны на рис. 5.14. Видно, что чувствительность к погрешностям измерения температуры быстро уменьшается при возрастании значений $r$ и $\Delta t$. Приведенные в табл. 5.6 результаты показывают, что при $\Delta t^+ = 0{,}05$ и $r = 2$ колебания относительно нулевого значения происходят почти на каждом шаге по времени, в то время как при $r = 6$ колебания имеют бóльший период и меньшую амплитуду.

Если алгоритм устойчив, то сумма значений $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$ равна нулю. Это можно проверить, например складывая значения, приведенные в табл. 5.6, при $r = 3$. Поскольку в рассматриваемом примере начальное и конечное значения энергии

*Таблица 5.6.* Вычисленные значения плотности теплового потока $\delta\hat{q}_M^+/\delta Y_1^+$ при $Y_1 = 1$ и $Y_i = 0$ $(i \neq 1)$[1]. Плоская пластина, $\Delta t^+ = 0{,}05$

| $M$ | $r=1$ | $r=2$ | $r=3$ | $r=6$ |
|---|---|---|---|---|
| −4 | | | | 4,05 |
| −3 | | | | 1,18 |
| −2 | | | | −0,52 |
| −1 | | | 31,8 | −1,32 |
| 0 | | 126,7 | −29,9 | −1,44 |
| 1 | 3712 | −343,6 | −12,1 | −1,05 |
| 2 | $-1{,}05.10^5$ | 415,8 | 5,4 | −0,59 |
| 3 | неустойчиво | −354,9 | 4,7 | −0,29 |
| 4 | | 273,4 | 0,97 | −0,11 |
| 5 | | −204,7 | −0,51 | −0,027 |
| 6 | | 151,9 | −0,41 | 0,012 |
| 10 | | 45,4 | 0,006 | 0,016 |
| 15 | | −10,0 | 0,0003 | 0,0008 |
| 20 | | 2,2 | 0,0000 | −0,0001 |

[1] Те же самые результаты получаются, если $Y_r = 1$ и $Y_i = 0$ $(i \neq r)$ и если $M$ заменить на $M - r + 1$.

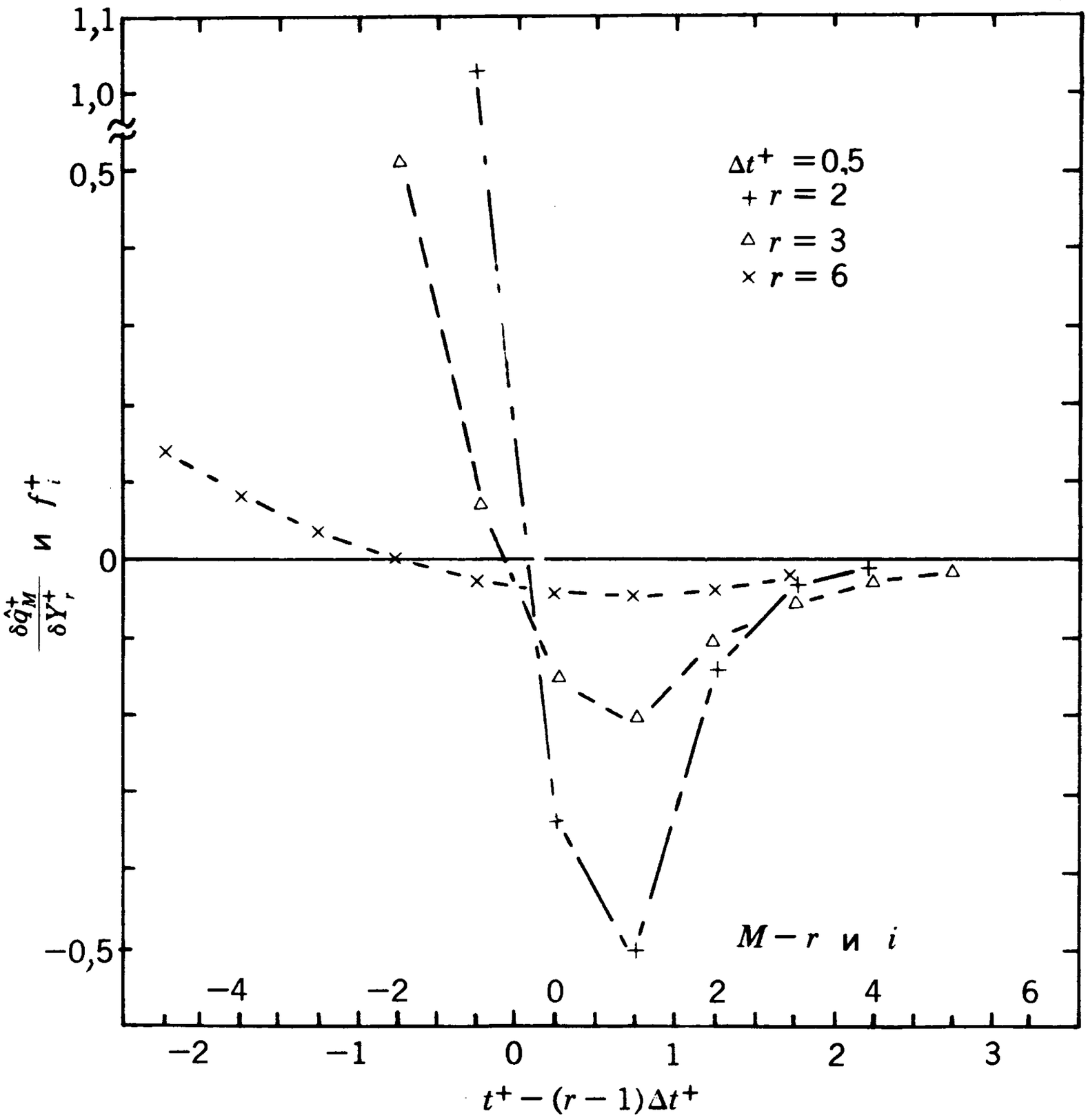



Рис. 5.14. Вычисленные значения плотности теплового потока для $Y_i = \delta Y_r$ при $i = r$ и $Y_i = 0$ при $i \neq r$. Метод функциональной аппроксимации. Плоская геометрическая форма, $\Delta t^+ = 0{,}5$.

равны нулю, то такое сложение в некотором смысле является проверкой выполнения закона сохранения энергии.

*Пример 5.2.* Медный калориметр толщиной 1,05 см нагревается при $x = 0$ тепловым потоком с постоянной плотностью $3{,}62 \cdot 10^6$ Вт/м$^2$ и теплоизолирован при $x = L$. Используя результаты измерений температуры в точке $x = L$ и значение шага по времени $\Delta t^+ = 0{,}05$ с, вычислите максимальную погрешность в плотности теплового потока на нагреваемой поверхности при условии, что погрешность измерений температуры составляет 1% максимального изменения температуры в калориметре в момент времени $t = 0{,}5$ с.

*Решение.* Из табл. 5.4 следует, что безразмерный шаг по времени численно равен шагу, измеряемому в секундах. Кроме того, безразмерная температура составляет 1/100 от изменения температуры в градусах Цельсия. Таким образом, чтобы найти повышение температуры нагреваемой поверхности, можно воспользоваться данными табл. 1.1. Максимальное значение безразмерной температуры при $t^+ = 0{,}5$ равно 0,833. Тогда максимальное повышение температуры нагреваемой поверхности приближенно равно 83,3 °С, поэтому погрешность составляет 0,83 °С. В момент времени $t^+ = 0{,}5$ повышение температуры теплоизолизованной поверхности приближенно равно 33,3 °С.

Погрешность в плотности теплового потока на поверхности можно найти с помощью данных табл. 5.6, поскольку значение $\Delta t^+$ равно 0,05. Для двух последующих температур ($r = 2$) максимальная безразмерная погрешность плотности теплового потока на поверхности равна

$$\frac{\delta \hat{q}_M L}{k \delta Y_r} = 415{,}8 .$$

Таким образом, максимальная погрешность составляет

$$\delta \hat{q}_M = 415{,}8 \frac{k \delta Y_r}{L} = 415{,}8 \frac{(380)(0{,}833)}{0{,}0105} = 12{,}5 \times 10^6 \text{ Вт/м}^2 ,$$

где величина $k$, равная 380 Вт/(м$^2 \cdot$ °С), взята из табл. 5.4. Заметим, что полученная погрешность в плотности теплового потока на поверхности очень велика, так как она достигает 346% плотности действующего теплового потока. Если решение ОЗТ получить при шести последующих шагах по времени, то максимальная погрешность составит только 3,4%.

Данный пример опять указывает на необходимость компромисса между смещением за счет ухудшения аппроксимации и чувствительностью к погрешностям измерений. Погрешность аппроксимации минимальна при малых значениях $r$, а дисперсия минимальна при больших значениях $r$.

При решении обратных задач теплопроводности методом функциональной аппроксимации в большинстве случаев рекомендуются значения $r$, равные 3 или 4. Оптимальное значение $r$ зависит как от безразмерного шага по времени (вычисляемого с использованием координаты установки датчика от нагреваемой поверхности), так и дисперсии погрешностей измерений. Дальнейший анализ этого вопроса см. в разд. 5.6.

## 5.4. Алгоритмы регуляризации

### 5.4.1. Введение

В данном разделе рассматриваются алгоритмы регуляризации во всей области и последовательной регуляризации. Основные алгоритмы предложены в разд. 4.5. Здесь для расчета температур в алгоритмах применяется теорема Дюамеля. Для анализа алгоритмов вновь используются контрольные примеры из разд. 5.2.

План данного раздела следующий. Метод регуляризации во всей области рассматривается в разд. 5.4.2, а метод последовательной регуляризации — в разд. 5.4.3. С целью сокращения объема анализируется регуляризация только первого порядка. Влияние регуляризующих членов первого порядка состоит в

уменьшении флуктуаций и исключении неустойчивости при оценивании плотности теплового потока.

### 5.4.2. Метод регуляризации во всей области

В литературе метод регуляризации обычно рассматривается как метод, при котором используется весь период времени проведения измерений. Все компоненты искомых функций ищутся одновременно.

В данной книге этот метод называется методом регуляризации во всей области. Преимущество такого подхода заключается в том, что можно гарантировать устойчивость. Другое преимущество заключается в возможности применения практически одной и той же процедуры независимо от того, какими уравнениями в частных производных (эллиптическим, параболическим или гиперболическим) описывается исходная задача. Однако методы решения эллиптических или гиперболических уравнений могут и не потребоваться, так как уравнение теплопроводности является параболическим. Главный недостаток рассматриваемого подхода состоит в значительных затратах машинного времени на решение системы линейных совместных алгебраических уравнений большой размерности. Для нелинейной ОЗТ трудности возрастают, поскольку в этом случае приходится использовать методы конечных разностей или конечных элементов и при решении системы из большого числа нелинейных алгебраических уравнений необходимы итерации.

При использовании метода регуляризации первого порядка уравнения для плотности теплового потока можно получить из соотношения (4.5.18). Для простоты предположим, что весовой множитель $W_1$ равен единице. Тогда из соотношения (4.5.18) получим матричное нормальное уравнение

$$[\mathbf{X}^T\mathbf{X}+\alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1]\hat{\mathbf{q}}=\mathbf{X}^T(\mathbf{Y}-T_0\mathbf{1}). \tag{5.4.1}$$

Это система $n$ уравнений для компонент вектора $\hat{q}$, где

$$\hat{\mathbf{q}}^T=[\hat{q}_1 \quad \hat{q}_2 \quad \cdots \quad \hat{q}_n]. \tag{5.4.2}$$

Все $n$ компоненты $\hat{q}$ получаются одновременно. В этом методе необходимо выбрать значение параметра регуляризации $\alpha$.

Уравнение (5.4.1) можно использовать для одного или нескольких датчиков температуры. Для простоты изложения рассматривается один датчик. В этом случае вектор $\mathbf{Y}$ также имеет $n$ компонент

$$\mathbf{Y}^T=[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n]. \tag{5.4.3}$$

Матрица $\mathbf{X}$ определена равенством (3.2.18а), поэтому матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ равна

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1}\Delta\phi_i^2 & \sum_{i=1}^{n-1}\Delta\phi_i\Delta\phi_{i-1} & \sum_{i=2}^{n-1}\Delta\phi_i\Delta\phi_{i-2} & \cdots & \Delta\phi_{n-1}\Delta\phi_0 \\ & \sum_{i=0}^{n-2}\Delta\phi_i^2 & \sum_{i=1}^{n-2}\Delta\phi_i\Delta\phi_{i-1} & \cdots & \Delta\phi_{n-2}\Delta\phi_0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ \text{симметрично} & & & & \Delta\phi_0^2 \end{bmatrix}. \tag{5.4.4}$$

Матрица $\mathbf{H}_1$, которая содержит коэффициенты при первых разностях, определяется равенством (4.5.16b), а матрица $\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$ — равенством (4.5.23), которое, как ни странно, содержит коэффициенты вторых разностей.

Чтобы получить дальнейшее представление о том, какое влияние оказывает прибавление матрицы $\alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$ к $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, рассмотрим некоторые элементы матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ при $\Delta t^+ = 0{,}06$. Значения $\Delta\phi_0 = 0{,}000786$, $\Delta\phi_1 = 0{,}0141$, ..., $\Delta\phi_6 = 0{,}0574$ берутся из табл. 1.1. (Заметим, что характерной особенностью величины $\Delta\phi_0$ для малых шагов по времени является ее существенно меньшее по сравнению с другими $\Delta\phi_i$ значение.) Если оставить только несколько первых значащих цифр, матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ записывается в виде

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = 10^{-3}\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 12 & 10 & 8 & 5 & 3 & 0{,}85 & 0{,}045 \\ & & 9 & 7 & 5 & 3 & 0{,}82 & 0{,}043 \\ & & & 6 & 4 & 2 & 0{,}76 & 0{,}040 \\ & & & & 3 & 2 & 0{,}66 & 0{,}035 \\ & & & & & 1 & 0{,}47 & 0{,}026 \\ \text{симметрично} & & & & & & 0{,}2 & 0{,}011 \\ & & & & & & & 0{,}0006 \end{bmatrix}. \tag{5.4.5}$$

Важно отметить, что нижний элемент правой диагонали значительно меньше остальных элементов диагонали. Причина этого состоит в малости $\Delta\phi_0$ по сравнению с $\Delta\phi_1$, ... . В результате матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ является плохо обусловленной. Заметим, что диагональные элементы непрерывно увеличиваются в направлении от нижнего правого к верхнему левому, при этом наибольшее относительное увеличение имеет нижний правый элемент. В процедуре регуляризации максимальное относительное влияние оказывается на нижний правый элемент матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.

Значение параметра регуляризации $\alpha$ было выбрано равным 0,001. При этом значении $\alpha$ матрица $\alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$ имеет вид [см. равенство (4.5.23)]

$$\alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1 = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4.6}$$

Если к матрице (5.4.5) прибавить матрицу (5.4.6), то нижний правый элемент становится равным $1{,}0006 \times 10^{-3}$ вместо $0{,}0006 \cdot 10^{-3}$, т. е. в 1670 раз больше. Другие диагональные элементы также увеличиваются, но их относительное увеличение значительно меньше. Элементы матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$, расположенные на следующей относительно главной диагонали, уменьшаются на единицу и снова наибольшее относительное влияние проявляется в нижней правой части матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$. Интересно рассмотреть изменения в матрице $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ при использовании процедуры регуляризации нулевого порядка, которая получила наиболее широкое признание среди математиков. В этом случае к $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ добавляется $\alpha\mathbf{I}$ и нижний правый элемент диагонали изменяется точно таким же образом, как и

в методе регуляризации первого порядка. Общий эффект в процедурах регуляризации нулевого и первого порядков не один и тот же, однако важно, что нижний элемент диагонали изменяется точно таким же образом.

#### 5.4.2.1. Изменение плотности теплового потока треугольного вида

Контрольный пример с треугольной функцией решается без учета случайных погрешностей измерения температуры с использованием метода регуляризации первого порядка во всей области. Параметр регуляризации $\alpha$ выбран равным 0,001. В рассматриваемом контрольном примере $\Delta t^+ = 0{,}06$, поэтому $\phi_1^+ = 0{,}000786$. Следовательно, $\alpha$ почти в 1600 раз больше квадрата $\phi_1^+$. В данном случае для выбора $\alpha$ не может быть использован приведенный в разд. 4.5.3.3 критерий Тихонова, поскольку предполагается отсутствие погрешностей измерений. (Выбранное значение $\alpha$, равное 0,001, согласовано с погрешностями измерений, для которых $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$, и это будет обсуждено позднее.)

Результаты расчетов для нескольких значений $n$ представлены на рис. 5.15. Весь период нагрева $t^+ = 0 \div 1{,}2$ разбит на 20 равных шагов по времени величиной 0,06. Для надлежащей проверки метода начало вычислений должно значительно предварять начало нагрева. По этой причине вычисления начинались при $t^+ = -0{,}18$. Расчеты проводились для $n = 20$, 25 и 30. При $n = 30$ полученные значения охватывают весь указанный период времени и очень хорошо отражают треугольную форму изменения плотности теплового потока. Имеется некоторое скругление в области резкого изменения треугольной функции. Существенно также, что при $n = 30$ результаты симметричны относительно момента времени $t^+ = 0{,}6$. Хотя метод функциональной аппроксимации с учетом четырех последующих температур также дает очень хорошие результаты (рис. 5.12), однако для него наблюдается некоторая несимметричность.

Результаты, полученные при $n = 20$ и 25, представлены на рис. 5.15 и отражают слабую сторону процедуры оценивания во всей области. Хотя большинство приведенных на рис. 5.15 значений $\hat{q}$ для всех $n$ практически идентичны,

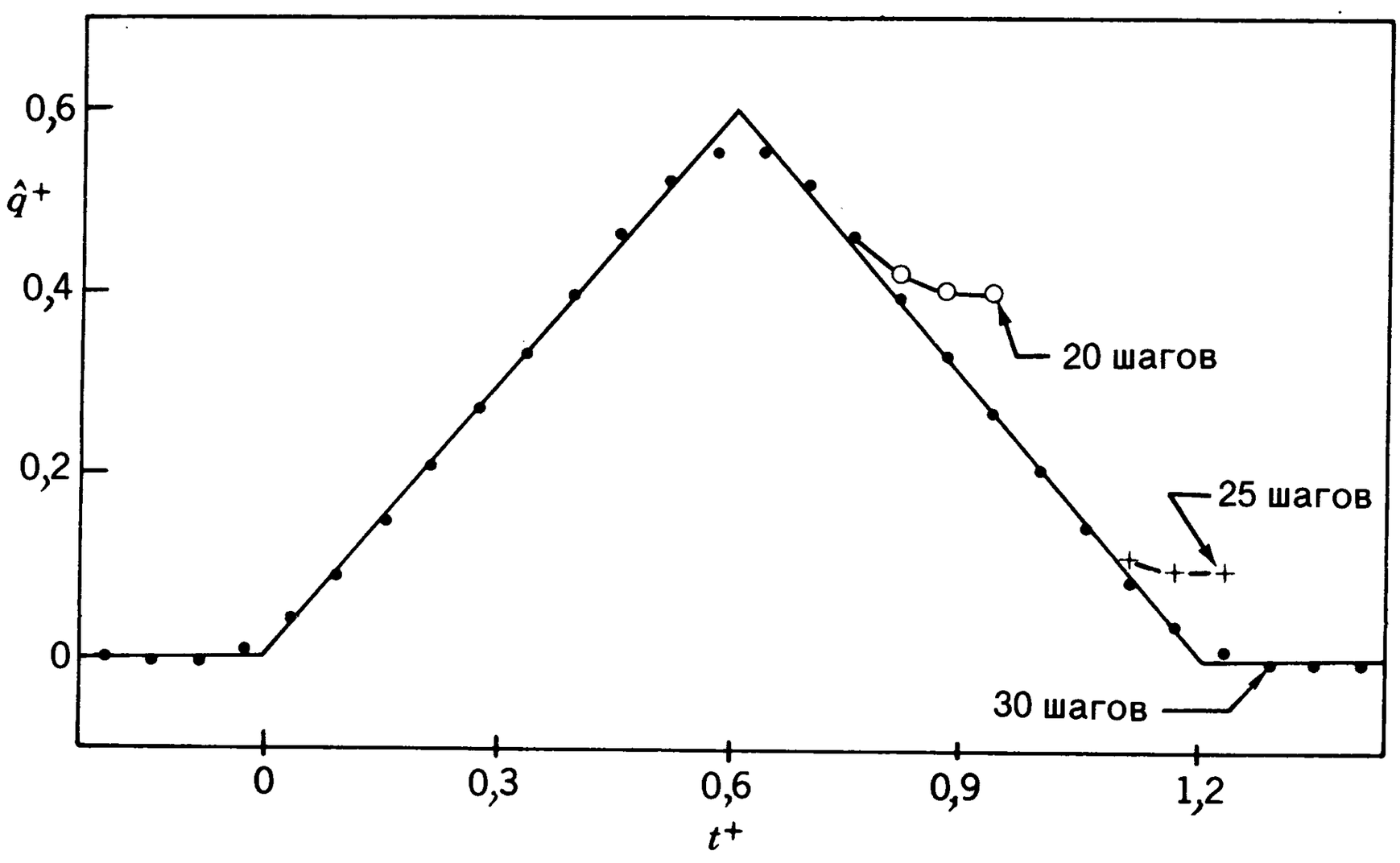



Рис. 5.15. Вычисленные значения плотности теплового потока без учета случайных погрешностей измерений температуры для примера с треугольной формой изменения $q$. Регуляризация первого порядка во всей области, $\alpha = 0{,}001$ и $\Delta t^+ = 0{,}06$.

последние четыре значения для $n = 20$ и 25 существенно отличаются от точного решения. Следовательно, в рассматриваемом алгоритме регуляризации во всей области последние несколько значений могут вычисляться с низкой точностью. Между прочим, число значений $q_i$, которые имеют слишком большую погрешность, приблизительно равно числу последующих шагов по времени, учитываемых в последовательных процедурах.

В гл. 1 при рассмотрении коэффициентов чувствительности отмечалось (например, рис. 1.13), что компонента плотности теплового потока на поверхности оказывает ощутимое влияние на температуру в некоторой внутренней точке с запаздыванием. При использовании процедуры регуляризации во всей области последние несколько элементов $\hat{q}_i$ не успевают получить информацию с противоположной поверхности. Поэтому в данном алгоритме основное влияние оказывает регуляризующий член. Для метода первого порядка это означает, что наклон $\hat{q}$ относительно $t$ близок к нулю, и это иллюстрируется на рис. 5.15[1)].

Влияние погрешностей измерений в рассматриваемом контрольном примере практически такое же, как и при использовании метода последовательной регуляризации. Из этих соображений анализ погрешностей отложим до разд. 5.4.3, в котором рассматривается этот метод.

#### 5.4.2.2. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$)

В контрольном примере с импульсным изменением плотности теплового потока импульс вводится в момент времени $t_r$. (Заметим, что в разд. 5.4.2 обозначение $r$ не определяет число последующих температур, как в методе последовательной регуляризации). В данном примере безразмерный шаг по времени имеет величину 0,06, а не 0,05, которая использовалась в аналогичном контрольном примере в разд. 5.2.5. Для метода регуляризации во всей области длительность воздействия импульса плотности теплового потока относительно общего интервала времени играет существенную роль. Для последовательных методов это не так, если только вычисления начинаются значительно раньше начала действия импульса.

На рис. 5.16 показаны величины $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$, полученные для трех значений $r$ при тридцати измерениях температуры во всей области по времени ($n = 30$). Величина $\alpha$ составляет 0,001[2)]. Одно из значений $r$ равно единице. Результаты для этого случая соответствуют штриховой кривой, помеченной крестиками. Максимальное значение оцененной плотности теплового потока достаточно велико и достигает приблизительно 75% точной величины $\delta q_r$. В другом крайнем случае ($r = n = 30$) значения $\delta\hat{q}_M/\delta q_r$ весьма малы. Видно, что при $r = n$ закон сохранения энергии не выполняется. Наиболее интересным является случай расположения импульса в центральной области $10 \leqslant r \leqslant n - 10$. Заметим, что в этом

---

[1)] Нулевая производная на конце рассматриваемого временно́го интервала в этих примерах объясняется другой причиной. При получении уравнения (4.5.18) и, следовательно, уравнения (5.4.1) были фактически использованы естественные граничные условия в виде равенства нулю разностных аппроксимаций первых производных искомой функции на концах временного интервала, а именно $q_1 - q_0 = q_{n+1} - q_n = 0$, что и отразилось указанным образом на результатах приведенных расчетов. — *Прим. ред.*

[2)] К сожалению, авторы не поясняют, почему для данного примера в расчетах взято именно такое значение $\alpha$, и не варьируют этим параметром, что позволило бы найти более точные приближения к искомому решению. — *Прим. ред.*

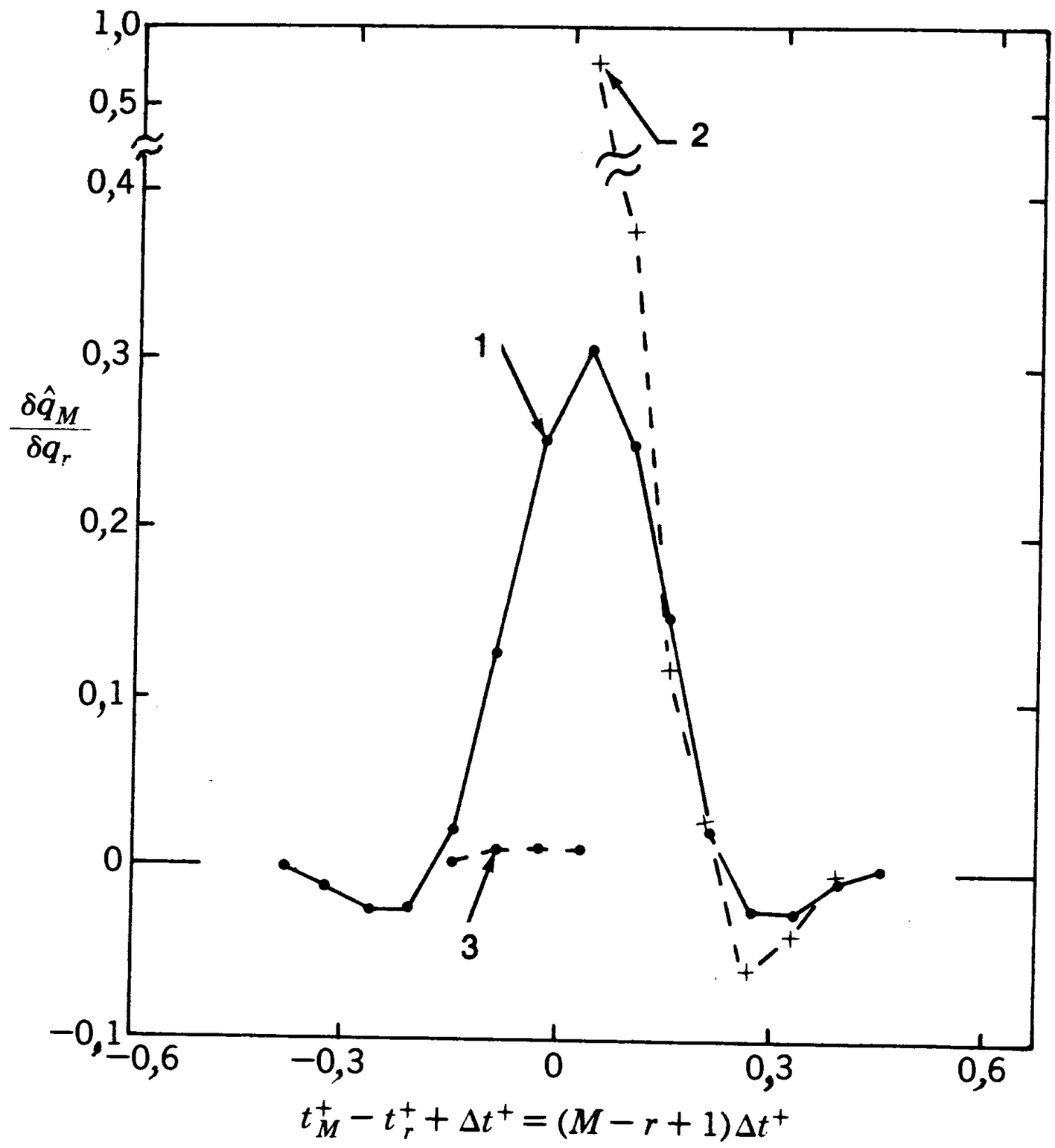



Рис. 5.16. Вычисленные значения плотности теплового потока для примера с импульсным изменением плотности. Метод регуляризации по всей области; $\Delta t^+ = 0{,}06$, $\alpha = 0{,}001$.

$$1 - q_i = \begin{cases} 0, & i \neq r, \\ \delta q_r, & i = r, \end{cases} \quad 10 \leqslant r \leqslant n - 10; \quad 2 - q_i = \begin{cases} \delta q_r, & i = 1, \\ 0, & 2 \leqslant i \leqslant n, \end{cases} \quad r = 1;$$

$$3 - q_i = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant i \leqslant n - 1, \\ \delta q_r, & i = n, \end{cases} \quad r = n = 30.$$

случае результаты не зависят от $r$ и имеют симметричный характер. Такие же результаты получены и для значений $n$, значительно бóльших 30, например 100. При таком расположении импульса для любого $r$ результаты практически одинаковы. Это важное замечение. Оно свидетельствует о том, что если расчет начинается в достаточно ранние моменты времени и продолжается достаточно долго, то при расположении импульса в центральной части области по времени результаты оказываются одинаковыми. Следовательно, результаты, получаемые методом регуляризации во всей области, можно получить и другими методами, например методом последовательной регуляризации.

Следует отметить, что основные закономерности результатов, полученных при расположении импульса в центральной части области по времени (рис. 5.16), присущи только анализируемой задаче. Эти закономерности состоят в независимости значений плотности теплового потока от $r$ в центральной части области и в симметричном характере получаемых результатов. Они свойственны обратной задаче теплопроводности при малых шагах по времени. Если присутствует конвекция, рассматривается стационарная задача (т. е. большие значения $\Delta t$) или используется другое дифференциальное уравнение в частных производных, то указанные закономерности могут и не обнаружиться. Представленные

на рис. 5.16 зависимости являются, в частности, следствием диффузионного характера параболических дифференциальных уравнений в частных производных. При использовании других уравнений, например эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, могут проявиться свои характерные особенности $\delta q_r$ при каждом значении $r = 1, 2, \ldots, n$. В таких случаях будет целесообразным оценивание во всей области.

#### 5.4.2.3. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$)

В примере с импульсом температуры некоторые закономерности и выводы, которые следовали из анализа примера с импульсом теплового потока, проявляются еще сильнее. Это видно из рис. 5.17, где приведены результаты применения метода регуляризации во всей области первого порядка при $\alpha = 0{,}001$ и

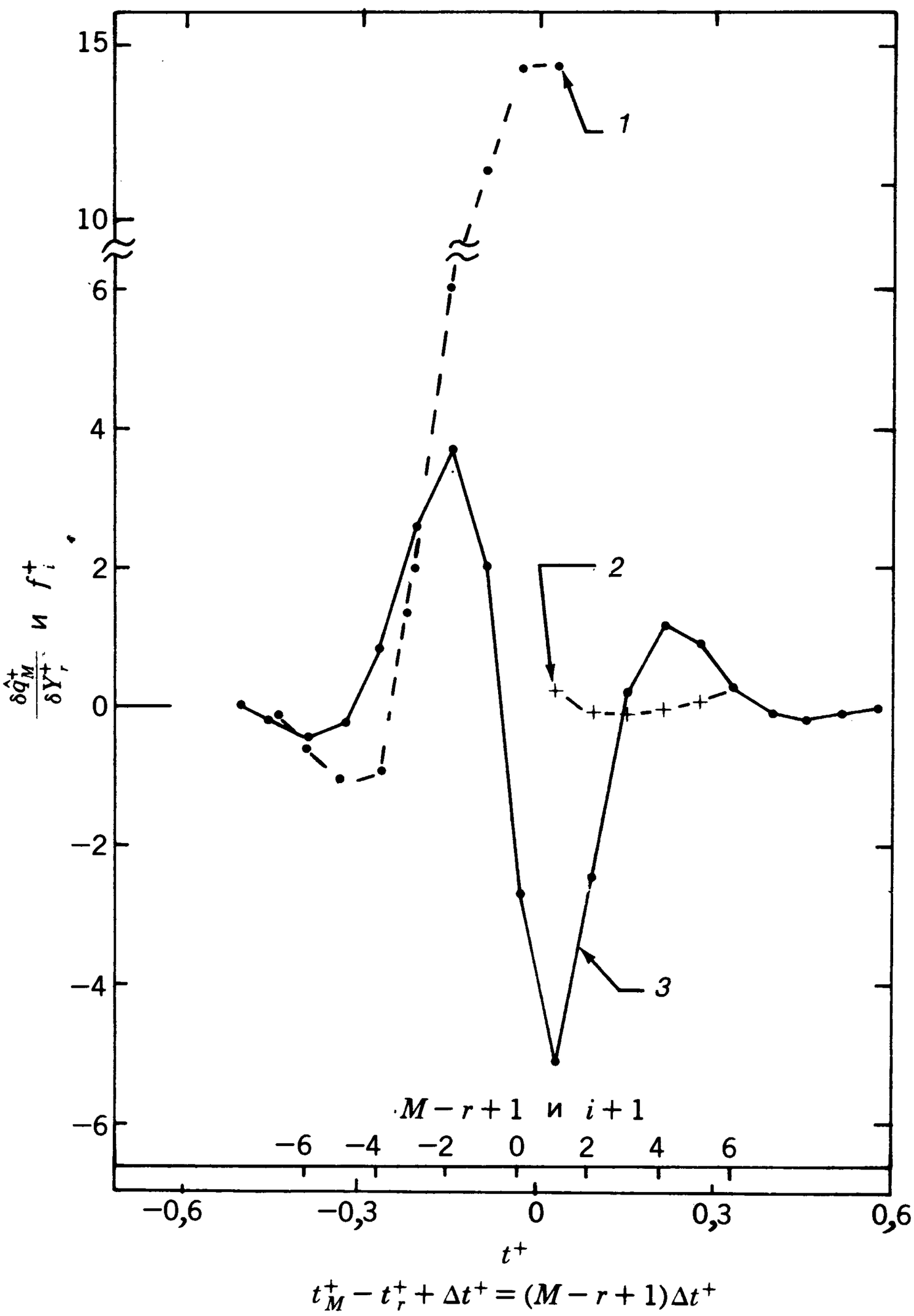



Рис. 5.17. Величины $\delta\hat{q}_M^+/\delta Y_r^+$ для регуляризации по всей области; $\alpha = 0{,}001$ и $\Delta t^+ = 0{,}06$. ——•—— ошибка в первом измерении; — + — ошибка в последнем измерении; —•— ошибка в центральной части области по времени.

$$1 - Y_i = \begin{cases} 1, & i = r = n, \\ 0, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \end{cases} \quad 2 - Y_i = \begin{cases} \delta Y_r, & i = r = 1, \\ 0, & 2 \leqslant i \leqslant n, \end{cases} \quad 3 - Y_i = \begin{cases} \delta Y_r, & i = r, \\ 0, & i \neq r, \end{cases} \quad 10 \leqslant r \leqslant n-10.$$

$\Delta t^+ = 0{,}06$. Случай $Y_i = 0$ при всех $i$, кроме $i = r = 1$, где $Y_1 = \delta Y_1$, показан штриховой линией с крестиками. Значения $\hat{q}$ весьма малы. Величины $\hat{q}$, полученные при расположении одиночного импульса температуры $\delta Y_r$ в средней части временно́й области ($10 \leqslant r \leqslant n - 10$), не зависят от $r$, что проявляется, если построить график в зависимости от $(M - r + 1)\Delta t^+$. Кривая напоминает затухающую синусоиду и имеет некоторую симметрию относительно оси $(M - r + 1)\Delta t^+ = 0$. Сумма значений $\delta\hat{q}_M$ близка к нулю, и это приближенно отражает закон сохранения энергии. Здесь же показаны результаты для предельного случая $r = n$. Реакция на импульс очень сильная, однако сохранение энергии не обеспечивается.

Значения $\delta\hat{q}_M^+/\delta Y_r^+$ можно использовать для вычисления дисперсий компонент $\hat{q}_M$.

### 5.4.3. Метод последовательной регуляризации

Реализация метода регуляризации в последовательной форме применительно к обратной задаче теплопроводности приводит к значительному повышению эффективности вычислений. Уравнение для последовательной регуляризации первого порядка имеет вид

$$[\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1]\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}), \tag{5.4.7}$$

где для $r$ последующих температур

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2} & \cdots & \Delta\phi_0 \end{bmatrix}, \tag{5.4.8}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_M \\ \hat{q}_{M+1} \\ \vdots \\ \hat{q}_{M+r-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_M \\ Y_{M+1} \\ \vdots \\ Y_{M+r-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0} = \begin{bmatrix} \hat{T}_M|_{q_M=0} \\ \hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} \\ \vdots \\ \hat{T}_{M+r-1}|_{q_M=\cdots=0} \end{bmatrix}, \tag{5.4.9a, b, c}$$

$$\hat{T}_{M+i}|_{q_M=\cdots q_{M+i}=0} = \sum_{j=1}^{M-1} \hat{q}_j \Delta\phi_{M-j+i-1}\,. \tag{5.4.10}$$

Уравнение (5.4.7) решается относительно вектора $\hat{\mathbf{q}}$, однако сохраняется только компонента $\hat{q}_M$. В уравнении (5.4.7) требуется выбирать два параметра $\alpha$ и $r$. Параметр регуляризации выбирается таким же образом, как и в процедуре регуляризации во всей области. Число учитываемых последующих температур выбирается достаточно большим, чтобы на значение $\hat{q}_M$ оказывалось незначительное влияние. В действительности, в процедуре регуляризации необходимо задавать и порядок регуляризации. Процедура нулевого порядка получается из уравнения (5.4.7) путем замены $\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$ на единичную матрицу $\mathbf{I}$. В алгебраической форме при $r = 2$ последовательный алгоритм регуляризации, объединяющий в себе и нулевой, и первый порядки, имеет вид (4.5.33). Если параметр регуляризации $\alpha$ положить равным нулю, то метод последовательной регуляризации сводится к методу Штольца.

### 5.4.3.1. Изменение плотности теплового потока треугольного вида

Результаты решения контрольного примера с треугольной формой изменения плотности теплового потока при отсутствии случайных погрешностей измерений температуры представлены на рис. 5.18. Используется метод последовательной регуляризации первого порядка при $\alpha = 0{,}001$. Результаты для значений $r = 4$ и 5 практически совпадают между собой (см. также табл. 5.7). Эти результаты находятся в хорошем соответствии с результатами решений, полученными методом регуляризации во всей области (рис. 5.15), а также методом последовательной функциональной аппроксимации (рис. 5.12, табл. 5.5). Влияние моделируемых погрешностей измерений (удовлетворяющих стандартным статистическим предположениям) при $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$ демонстрируются на рис. 5.19. Результаты весьма близки к полученным методом функциональной аппроксимации (рис. 5.13). При $r = 3$ результаты для обоих случаев практически совпадают и отношение $\sigma_{\hat{q}}^+/\sigma_Y^+$ составляет около 25. При $r = 4$ результаты несколько отличаются, а отношение $\sigma_{\hat{q}}^+/\sigma_Y^+$ для обоих случаев приблизительно равно 10.

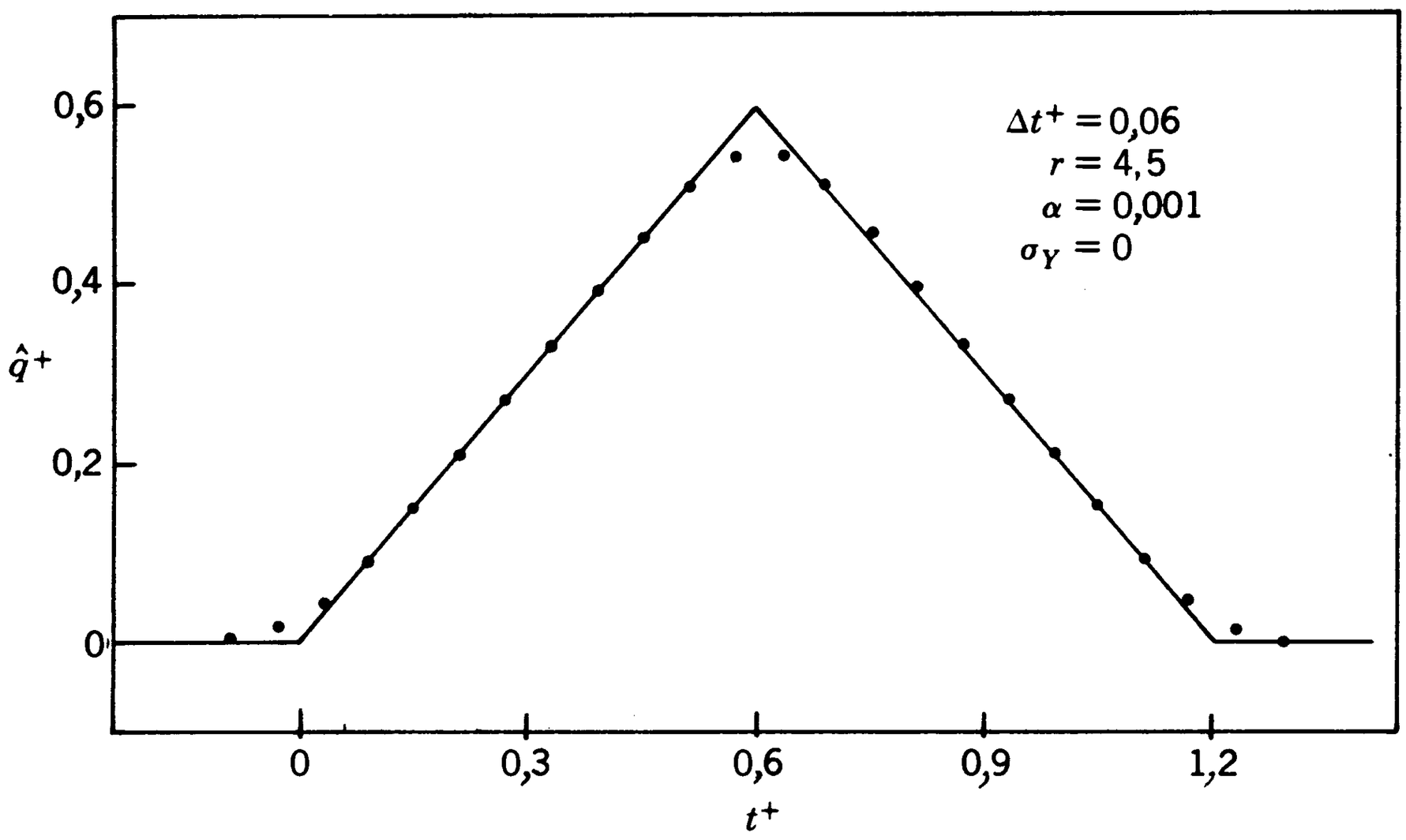



Рис. 5.18. Вычисленные значения плотности теплового потока на поверхности без учета случайных погрешностей измерений температуры для примера с треугольной формой изменения $q$. Метод последовательной регуляризации первого порядка.

*Таблица 5.7.* Вычисленные в отдельные моменты времени значения плотности теплового потока для примера с треугольной формой изменения плотности теплового потока. Метод последовательной регуляризации первого порядка. Точные значения температуры при $\alpha = 0{,}001$

| | $\hat{q}^+$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $t^+$ | Точное значение | $r=3$ | $r=4$ | $r=5$ |
| 0,51 | 0,51 | 0,5097 | 0,5034 | 0,5057 |
| 0,57 | 0,57 | 0,5561 | 0,5412 | 0,5415 |
| 0,63 | 0,57 | 0,5583 | 0,5428 | 0,5430 |
| 0,69 | 0,51 | 0,5168 | 0,5104 | 0,5104 |

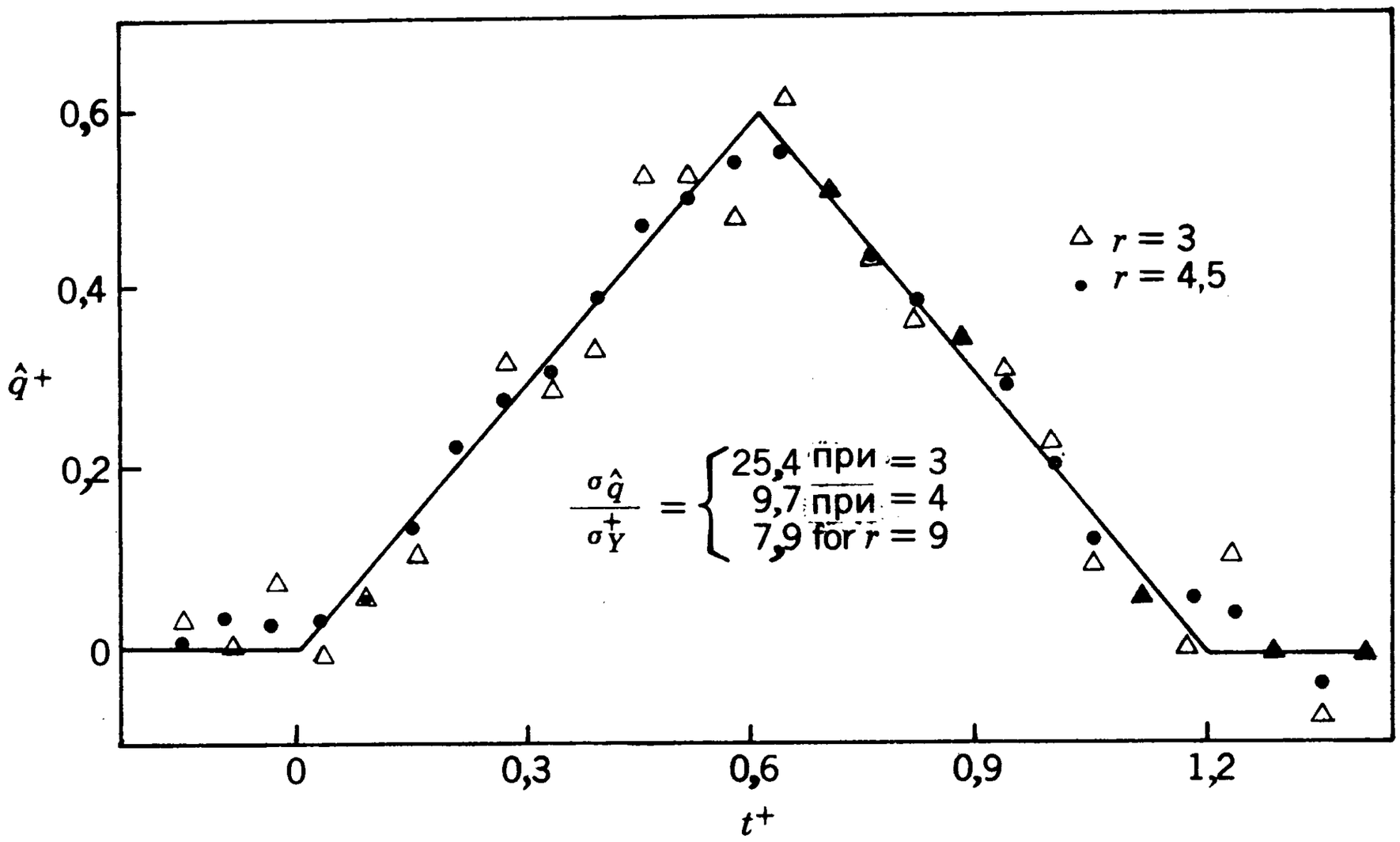



Рис. 5.19. Вычисленные значения плотности теплового потока не поверхности для примера с треугольной формой изменения $q$ при наличии случайных погрешностей с $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$. Метод последовательной регуляризации первого порядка; $\alpha = 0{,}001$ и $\Delta t^+ = 0{,}06$.

#### 5.4.3.2. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$)

Результаты решения контрольного примера при импульсном изменении плотности теплового потока, полученные с помощью метода последовательной регуляризации первого порядка, представлены на рис. 5.20. Использовались значения $r = 4$ и $r = 9$. Различие между этими двумя случаями достаточно малое. Заметим, что результаты для случая $r = 9$ весьма близки к результатам, полученным методом регуляризации во всей области при расположении импульса в средней части области (рис. 5.16). При использовании метода последовательной регуляризации (рис. 5.20) наблюдается некоторое нарушение симметрии.

#### 5.4.3.3. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$)

На рис. 5.21 показаны результаты решения контрольного примера с импульсом температуры при значениях $r = 4$ и $r = 9$. Зависимость при $r = 9$ почти идентична зависимости, полученной методом регуляризации во всей области при расположении импульса в средней части области (рис. 5.17).

#### 5.4.3.4. Сравнение методов регуляризации во всей области и последовательной регуляризации

Одним из важных аспектов сравнения метода последовательной регуляризации с методом регуляризации по всей области является подобие получаемых результатов. Можно сделать вывод, что при заданной начальной плотности теплового потока эти методы дают почти одинаковые результаты. При этом последовательный метод значительно эффективнее. Это объясняется тем, что количество вычислительных операций при решении системы алгебраических уравнений с полностью заполненной квадратной матрицей увеличивается пропорционально $n^3$, где $n$ — число уравнений. Например, если $n = 100$, то для метода регуляризации во всей области $n^3 = 10^6$, а для последовательного метода при учете $r = 6$ после-

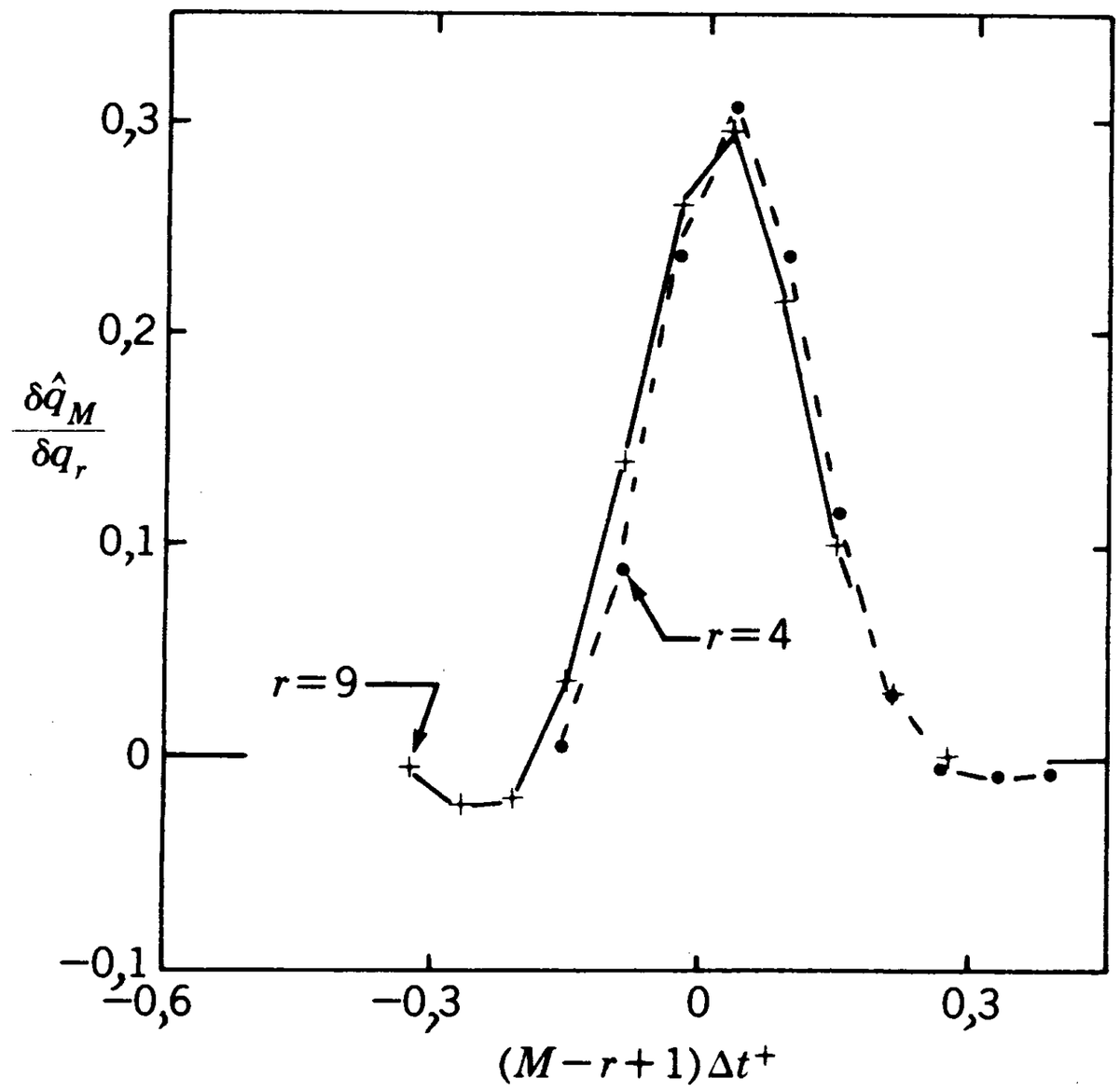



Рис. 5.20. Значения $\delta\hat{q}_M^+/\delta q_r$ при использовании метода последовательной регуляризации; $\alpha = 0{,}001$ и $\Delta t^+ = 0{,}06$.

дующих шагов по времени количество вычислительных операций пропорционально $nr^3 = 100 \cdot 6^3 = 21\,600$, что значительно меньше чем $10^6$. Поскольку последовательный метод гораздо эффективнее и дает лишь немного отличающиеся по сравнению с методом регуляризации во всей области результаты, то последовательный метод является более предпочтительным. В значительно большей степени это относится к нелинейным задачам ОЗТ. В случае линейных задач использование алгоритма цифрового фильтра позволяет еще больше повысить вычислительную эффективность.

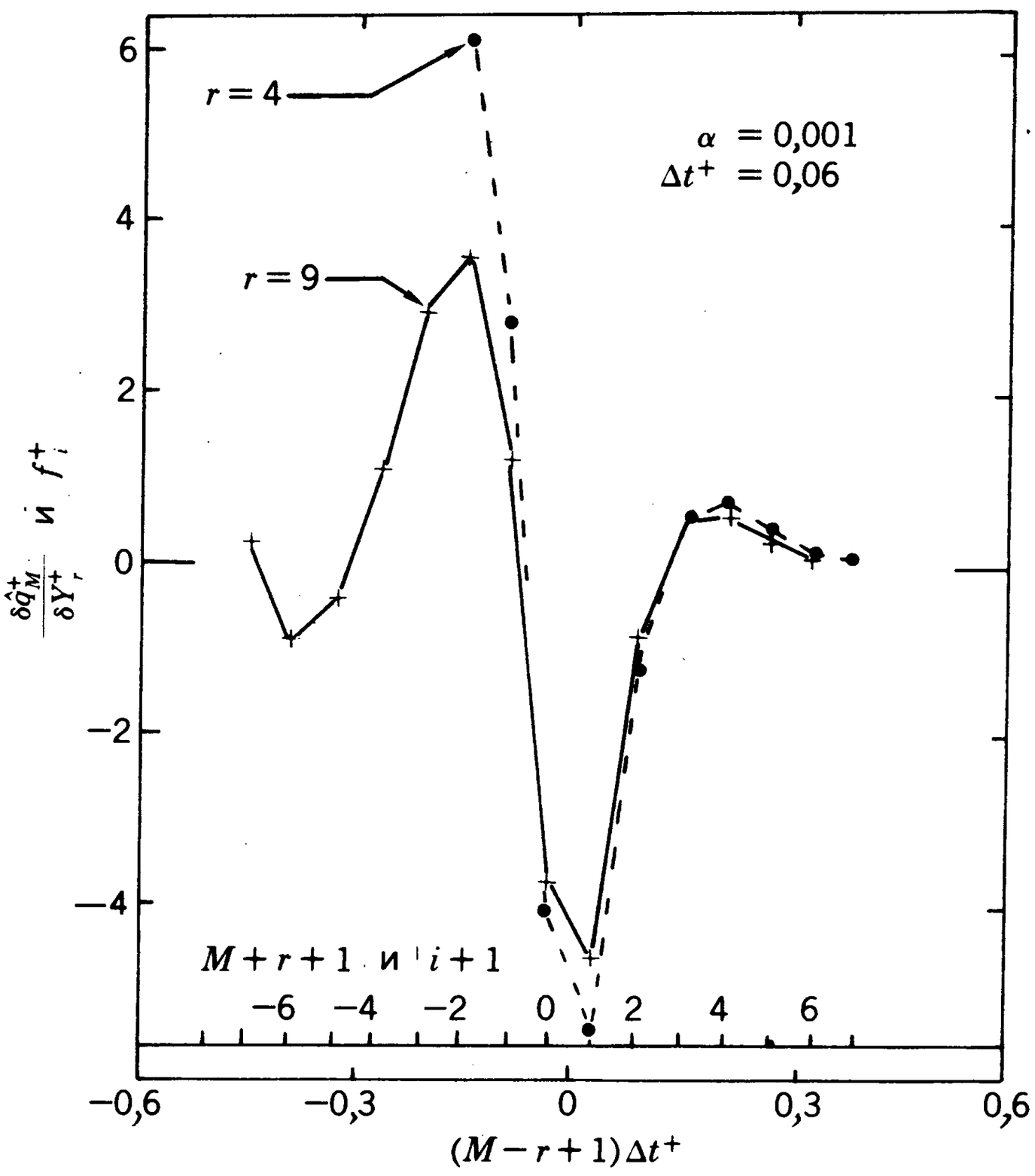



Рис. 5.21. Значения $\delta\hat{q}_M^+/\delta Y_r^+$ и $f_i^+$ при использовании метода последовательной регуляризации; $\alpha = 0{,}001$ и $\Delta t^+ = 0{,}06$. (Определение $f_i^+$ дано в разд. 5.5.2.)

#### 5.4.3.5. Сравнение методов последовательной регуляризации и последовательной функциональной аппроксимации

С помощью этих методов можно получить очень близкие результаты. Примером служит случай с треугольной формой изменения плотности теплового потока без учета погрешностей измерений (рис. 5.12 и 5.18). При наличии случайных погрешностей измерения температуры вычисления по обоим методам также дают очень близкие результаты, причем метод регуляризации точнее. Отличие дисперсий составляет всего около 2%.

В методе последовательной регуляризации необходимо выбирать два параметра: $\alpha$ и $r$. Если значение $r$ выбрать достаточно большим, то оно оказывает слабое влияние на оценки плотности теплового потока. Таким образом, остается возможность выбора только одного параметра, а именно параметра регуляризации. В методе функциональной аппроксимации имеется только один параметр — число последующих температур $r$. Если и $r$, и $\alpha$ выбраны правильно, то результаты мало различаются между собой. При выборе метода можно руководствоваться и другим критерием, например простотой использования или разработки программы для ЭВМ. Метод последовательной функциональной аппроксимации проще как с точки зрения его понимания, так и программирования. По этим причинам он и рекомендуется для решения обратной задачи теплопроводности.

## 5.5. Алгоритм с цифровым фильтром

### 5.5.1. Введение

Использование при решении линейной обратной задачи цифрового фильтра дает значительные преимущества в вычислительном отношении по сравнению с непосредственным применением алгоритмов решения ОЗТ. Алгоритм с цифровым фильтром, который рассматривался в разд. 4.7, может оказаться более эффективным.

При использовании фильтра можно ввести коэффициенты фильтра $f_i$, вычисление которых осуществляется с применением теоремы Дюамеля, конечных разностей или какого-либо другого метода. Как уже отмечалось ранее, в данном разделе используется интеграл Дюамеля, однако практически такие же результаты получаются и методом конечных разностей при условии, что для решения обратной задачи используется тот же самый алгоритм.

Алгоритмы с цифровым фильтром строятся независимо от процедуры вычисления коэффициентов фильтра. Например, если $f_i$ вычисляются методом функциональной аппроксимации, они применяются так же, как если бы были вычислены с помощью метода регуляризации во всей области (если при этом устранены неточности вычислений на границе области, что было рассмотрено в разд. 5.4.2.2).

Алгоритм с цифровым фильтром, записанный в виде уравнения (4.7.6), можно представить в более общем виде:

$$\hat{q}_M = \sum_{i=M-m_1}^{M+m_2} f_{M-i}(Y_i - T_0)\,, \tag{5.5.1}$$

где, если $t_{M-1}$ соответствует текущему моменту времени, учитывается $m_2 + 1$ последующих и $m_1 - 1$ предыдущих моментов времени. Значения параметров $m_1$ и $m_2$ зависят от используемого алгоритма (например, для алгоритма функциональной аппроксимации $m_2 = r - 1$) и геометрической формы тела. Для тела конечной толщины при «больших» безразмерных шагах по времени параметр $m_1$ должен быть малым целым числом, а для малых безразмерных шагов по времени и полубесконечного тела значение $m_1$ может быть большим. Как показано в разд. 4.7.2, коэффициенты фильтра вычисляются с использованием величин $\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$. Размерность $f_i$ — Вт/(м$^2$ · °С).

В данном разделе анализируется задача определения коэффициентов фильтра вначале с применением метода функциональной аппроксимации, а затем метода регуляризации во всей области. Рассматриваются некоторые методы усечения суммы в уравнении (5.5.1).

### 5.5.2. Фильтр на базе метода функциональной аппроксимации

#### 5.5.2.1. Пластина конечной толщины

При использовании алгоритма с цифровым фильтром прежде всего необходимо определить коэффициенты фильтра, а для этого в свою очередь требуется применить алгоритм решения ОЗТ. В данном разделе для вычисления коэффициентов фильтра используется метод функциональной аппроксимации. Эта процедура рассмотрена в разд. 4.7.2, но более подробное описание дается именно здесь.

Алгоритм функциональной аппроксимации с использованием теоремы Дюамеля имеет вид уравнения (5.3.4). При вычислении коэффициентов фильтра задаются условия $Y_r - T_0 = 1$ и $Y_i - T_0 = 0$, $i \neq r$. Из уравнения (4.7.8) имеем

$$f_{M-r} = \hat{q}_M \Big|_{\substack{Y_r - T_0 = 1 \\ Y_i - T_0 = 0,\ i \neq r}} . \tag{5.5.2}$$

Следовательно, при $M = 1$ использование (5.3.4а) дает

$$f_{1-r} = \hat{q}_1 \Big|_{\substack{Y_r - T_0 = 1 \\ Y_i - T_0 = 0,\ i \neq r}} = K_r , \tag{5.5.3}$$

а при $M = 2$

$$f_{2-r} = \hat{q}_2 \Big|_{\substack{Y_r - T_0 = 1 \\ Y_i - T_0 = 0,\ i \neq r}} = K_{r-1} - K_r \sum_{i=1}^{r} K_i \Delta\phi_i . \tag{5.5.4}$$

Буквой $K$ обозначены коэффициенты усиления, которые рассматривались в гл. 4.

Поскольку алгебраические выражения становятся достаточно сложными, для вычисления значений $\hat{q}_M$ при $Y_r - T_0 = 1$ и $Y_i - T_0 = 0$, $i \neq r$, проще использовать программу для ЭВМ. При рассмотрении типовой задачи о плоской пластине, нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$, некоторые значения $\phi_i^+$ из табл. 1.1 при $\Delta t^+ = 0{,}06$ и $x/L = 1$ равны: $\phi_1^+ = 0{,}000786$, $\phi_2^+ = 0{,}014887$ и $\phi_3^+ = 0{,}47584$. Используя эти и остальные значения $\phi_i$, из соотношений (5.3.4) при $r = 3$ получим $K_1 = 0{,}315$, $K_2 = 5{,}987$ и $K_3 = 19{,}137$, а после этого найдем $\hat{q}_1^+ = 19{,}137$, $\hat{q}_2^+ = -14{,}220$, $\hat{q}_3^+ = -8{,}86$ и $\hat{q}_4^+ = 0{,}901$. Заметим, что при $r = 3$ выполняется равенство $\hat{q}_1^+ = K_3$, как это видно из соотношения (5.5.3).

*Таблица 5.8.* Коэффициенты цифрового фильтра при использовании алгоритма функциональной аппроксимации, $\Delta t^+ = 0{,}06$

| $i$ | $f_i^+$ $r=3$ | $f_i^+$ $r=4$ | $f_i^+$ $r=5$ | $i$ | $f_i^+$ $r=3$ | $f_i^+$ $r=4$ | $f_i^+$ $r=5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −4 | | | 4,538 | 4 | 0,0849 | 0,220 | 0,0127 |
| −3 | | 8,387 | 0,716 | 5 | −0,1333 | 0,126 | 0,0363 |
| −2 | 19,137 | −1,301 | −1,209 | 6 | −0,0830 | 0,053 | 0,0347 |
| −1 | −14,220 | −4,060 | −1,775 | 7 | −0,0182 | 0,0143 | 0,0254 |
| 0 | −8,861 | −2,885 | −1,383 | 8 | 0,0059 | −0,0014 | 0,0160 |
| 1 | 0,901 | −0,849 | −0,685 | 9 | 0,0063 | −0,0050 | 0,0089 |
| 2 | 2,217 | 0,045 | −0,273 | 10 | 0,0021 | −0,0041 | 0,0044 |
| 3 | 0,961 | 0,263 | −0,070 | 11 | −0,00005 | −0,0023 | 0,0018 |

Безразмерные значения коэффициентов фильтра для $r = 3$, 4 и 5, а также $\Delta t^+ = 0{,}06$ и $x/L = 1$ приведены в табл. 5.8. После того как получены значения $\hat{q}_M^+$, рассчитываются значения $f_i^+$ с помощью соотношения (5.5.2). Значения $f_i^+$ в табл. 5.8 показывают, что индекс $i$ при $f_i^+$соответствует значению $M = i - r$ при $\hat{q}_M^+$, т. е. увеличение $M$ соответствует увеличению $i$. В предыдущем разделе значения $\hat{q}_i^+$при $r = 3$ представлены как $f_{-2}^+$, $f_{-1}^+$, $f_0^+$ и $f_1^+$.

Размерные значения $f_i$ можно получить, используя размерные величины $\phi_i$ либо безразмерные величины $f_i^+$

$$f_i = k\frac{f_i^+}{L}, \tag{5.5.5}$$

где $k$ — коэффициент теплопроводности и $L$ — толщина пластины.

Анализ данных табл. 5.8 показывает, что $f_i^+$ имеют как положительные, так и отрицательные значения, причем с увеличением $i$ амплитуда их колебаний уменьшается. С увеличением значений $r$ уменьшается частота колебаний. Коэффициенты фильтра при $\Delta t^+ = 0{,}5$ приведены на рис. 5.14. При заданном значении $r$ сумма коэффициентов $f_i^+$ стремится к нулю; следовательно, в этом случае в уравнении (5.5.1) можно исключить из рассмотрения $T_0$.

*Пример 5.3.* Используйте алгоритм с цифровым фильтром для получения оценок плотности теплового потока в примере с треугольной формой изменения плотности теплового потока и точными значениями температуры (табл. 5.1) для нескольких значений шага по времени. Рассмотрите случаи $r = 3$ и 4.

*Решение.* Вначале рассмотрим случай $r = 3$. Значения температуры приведены в табл. 5.1, а коэффициенты фильтра — в табл. 5.8. Так как начальная температура равна нулю, $r = 3$ и $m_1$ в табл. 5.8 равно 11, то уравнение (5.5.1) можно записать в виде

$$\hat{q}_M^+ = \sum_{i=M-11}^{M+2} f_{M-i}^+ Y_i^+, \tag{5.5.6}$$

где для метода функциональной аппроксимации при $r = 3$ имеем $m_2 = r - 1 = 2$.

Первое отличное от нуля значение $\hat{q}_M^+$ соответствует $M = -1$, и таким образом

$$\hat{q}_{-1}^+ = \sum_{i=1}^{1} f_{-1-i}^+ Y_i^+ = f_{-2}^+ Y_1^+ = (19{,}137)(0{,}000007) = 0{,}0001,$$

поскольку $Y_i^+ = 0$ при $i \leqslant 0$. Аналогично для $M = 0$

$$\hat{q}_0^+ = \sum_{i=1}^{2} f_{-1}^+ Y_i^+ = f_{-1}^+ Y_1^+ + f_{-2}^+ Y_2^+ =$$

$$= (14{,}220)(0{,}000007) + (19{,}137)(0{,}000374) = 0{,}0071 .$$

При $M = 1$ получим

$$\hat{q}_1^+ = f_0^+ Y_1^+ + f_{-1}^+ Y_2^+ + f_{-2}^+ Y_3^+ = 0{,}0362.$$

Последующие значения суть $\hat{q}_2^+ = 0{,}0868$ и $\hat{q}_3^+ = 0{,}1473$.

Полученные величины $\hat{q}_i^+$ можно сравнить с точными значениями, которые в моменты времени $t^+ = -0{,}09; -0{,}03;$ 0,03; 0,09 и 0,15 равны 0; 0; 0,03; 0,09 и 0,15 соответственно. Эти величины достаточно хорошо согласуются между собой.

При $r = 4$ используется аналогичная вычислительная процедура, при этом верхний предел суммирования в уравнении (5.5.6) заменяется на $M + 3$. Некоторые значения $\hat{q}_M^+$ для $M = -2, -1,$ 0, 1, 2 и 3 равны 0,0001; 0,0031; 0,0177; 0,0487; 0,0941 и 0,1487 соответственно.

По поводу данного примера сделаем несколько замечаний. Во-первых, вычисленные значения плотности теплового потока точно такие же, как и полученные методом функциональной аппроксимации. Кроме того, хотя была использована теорема Дюамеля, применение для решения задачи нестационарной теплопроводности метода конечных разностей дает практически такие же результаты. Во-вторых, при наличии погрешностей измерений температуры можно использовать ту же самую процедуру. В-третьих, объем вычислений на один шаг по времени не увеличивается в отличие от алгоритма с использованием теоремы Дюамеля [см. уравнение (5.3.4)], в котором число членов под знаком второй суммы увеличивается с ростом $M$. Это объясняется тем, что коэффициенты фильтра в табл. 5.8 при больших положительных значениях $i$ стремятся к нулю. Для малых безразмерных шагов по времени при увеличении $i$ уменьшение значений $f_i^+$ замедляется. В-четвертых, хотя коэффициенты фильтра в табл. 5.8 при $r = 3$ и 4 совершенно различны, оцениваемые значения $q$ относительно близки. Наконец, в алгоритме с числовым фильтром [уравнение (5.5.1)] не происходит накопления погрешностей, так как вычисление $\hat{q}_M$ не зависит от $\hat{q}_i$, $i \neq M$.

#### 5.5.2.2. Полубесконечное тело

Ту же процедуру, которая использовалась для рассмотренного выше случая плоской пластины, можно применить для полубесконечного тела, имеющего, к сожалению, «долгую» память. Под «долгой» памятью понимается очень медленное уменьшение коэффициентов фильтра $f_i$ с ростом $i$. Ниже предлагается способ повышения эффективности алгоритма числового фильтра.

Для простоты рассмотрим расположение датчика на нагреваемой поверхности и при вычислении коэффициентов фильтра используем метод Штольца (т. е. $r = 1$). Формула для вычисления функции $\phi$ имеет вид [см. (1.6.20)]

$$\phi = 2\left(\frac{t}{\pi k \rho c}\right)^{1/2}. \tag{5.5.7}$$

Также для упрощения выберем шаги по времени величиной 1с, а $k\rho c$ — равным единице с соответствующей размерностью. Начальная температура $T_0$ равна нулю, и все значения $Y_i$ равны нулю, кроме $Y_1 = 1$. Используя уравнение (5.3.1), получим значения $\hat{q}_M$; первые три из них при $M = 1$, 2 и 3 равны 0,886227; $-0{,}367087$ и $-0{,}129623$. Значения $\hat{q}_M$ медленно уменьшаются по величине и при $M = 20$, 40 и 60 равны $-0{,}0035$; $-0{,}0012$ и 0,0006 соответственно. Сумма $\hat{q}_M$ по всем $M$ стремится к нулю, но сходимость медленная; так, при $M = 10$ и 20 сумма равна 0,187 и 0,129 соответственно.

Один из путей ускорения сходимости состоит в использовании в алгоритме

*Таблица 5.9.* Коэффициенты цифрового фильтра в случае полубесконечного тела при $r = 1$, $\Delta t = 1$ с, $k\rho c = 1$, $x = 0$

| $j$ | $f_j$ | $f_j - f_{j-1}$ | $j$ | $f_j$ | $f_j - f_{j-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,886227 | | 6 | −0,02166 | 0,00743 |
| 1 | −0,367087 | −1,253314 | 10 | −0,00961 | 0,00174 |
| 2 | −0,129623 | 0,237464 | 15 | −0,00510 | 0,00058 |
| 3 | −0,06710 | 0,062525 | 20 | −0,00327 | 0,00027 |
| 4 | −0,04186 | 0,02524 | 40 | −0,00114 | 0,00004 |
| 5 | −0,02909 | 0,01277 | 80 | −0,00040 | 0,00001 |

цифрового фильтра меньшего числа членов, возможном благодаря малости значений разностей между соседними коэффициентами $f_i$ при больших $i$. Записывая уравнение (5.5.1) для $M - 1$ и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\hat{q}_M - \hat{q}_{M-1} = \sum_{i=M-m_1}^{M+m_2} f_{M-i}(Y_i - T_0) - \sum_{i=M-1-m_1}^{M-1+m_2} f_{M-i-1}(Y_i - T_0)\,. \qquad (5.5.8)$$

Это уравнение можно записать в рекуррентной форме:

$$\hat{q}_M = \hat{q}_{M-1} + \sum_{i=M-m_1-1}^{M-1+m_2} (f_{M-i} - f_{M-i-1})(Y_i - T_0) + \\ + f_{-m_2}(Y_{M+m_2} - T_0) - f_{m_1}(Y_{M-1-m_1} - T_0)\,. \qquad (5.5.9)$$

Вследствие рекуррентного характера уравнения (5.5.9) информация о $Y_i$ при малых значениях $i$ содержится в $\hat{q}_{M-1}$. [В данном случае, поскольку уравнение (5.5.9) рекуррентно, необходимы более точные вычисления, иначе в результате применения уравнения (5.5.1) погрешности будут накапливаться.] Разности $f_{M-i} - f_{M-i-1}$ уменьшаются по величине гораздо быстрее, чем $f_i$, при больших положительных значениях $i$. Это видно из табл. 5.9. Следовательно, в случае долгой памяти в рекуррентной форме уравнения (5.5.9) требуется учитывать меньшее число членов, чем в уравнении (5.5.1), и таким образом она становится более эффективной.

### 5.5.3. Фильтр на базе метода регуляризации во всей области

В этом случае также используется уравнение (5.5.1), однако параметр $m_2$ в верхнем пределе суммы не равен $r - 1$, как это было в методе функциональной аппроксимации. Рассмотрим в качестве примера типичный случай плоской пластины при $\alpha = 0{,}001$, $\Delta t^+ = 0{,}06$ и $n = 30$, а также $Y_{15} - T_0 = 1$ и $Y_i - T_0 = 0$. Коэффициенты $f_i^+$ приведены в табл. 5.10, а их график в виде сплошной линии — на рис. 5.17. В уравнении (5.5.1) для коэффициентов $f_i^+$, приведенных в табл. 5.10, $m_1 = 14$ и $m_2 = 15$.

Если коэффициенты $f_i^+$ при большом числе шагов по времени, например $n = 40$, вычисляются одновременно, то для малых по абсолютной величине $i$ значения $f_i^+$ близки к приведенным в табл. 5.10 значениям. Для больших $i$ разности малы, однако соседние $f_i^+$ малы по величине и слабо влияют на оценки $\hat{q}_M$.

Сравнение коэффициентов $f_i^+$ при использовании метода функциональной аппроксимации (табл. 5.8) и метода регуляризации (табл. 5.10) показывает, что они

*Таблица 5.10.* Коэффициенты фильтра при использовании метода регуляризации во всей области. Плоская пластина; $\alpha = 0{,}001$ и $\Delta t^+ = 0{,}06$; $f_i^+ \equiv \delta q_{i+r}^+ / \delta Y_r^+$

| $i$ | $f_i^+$ | $i$ | $f_i^+$ | $i$ | $f_i^+$ | $i$ | $f_i^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −14 | −0,0191 | 1 | −2,4851 | −6 | −0,2379 | 9 | −0,0222 |
| −13 | −0,0021 | 2 | 0,1889 | −5 | 0,8328 | 10 | 0,0210 |
| −12 | 0,0335 | 3 | 1,1485 | −4 | 2,5795 | 11 | 0,0249 |
| −11 | 0,0713 | 4 | 0,8765 | −3 | 3,6912 | 12 | 0,0131 |
| −10 | 0,0623 | 5 | 0,2898 | −2 | 2,0263 | 13 | 0,0032 |
| −9 | −0,0574 | 6 | −0,0854 | −1 | −2,7314 | 14 | −0,0002 |
| −8 | −0,2938 | 7 | −0,1729 | 0 | −5,1572 | 15 | −0,0004 |
| −7 | −0,4815 | 8 | −0,1066 | | | | |

имеют близкий порядок величин и изменяются по периодическому закону. Однако при любом заданном $i$ значения $f_i^+$ совершенно различны.

В случае нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L$ плоской пластины сумма коэффициентов фильтра должна быть равна нулю. Последовательные суммы коэффициентов приведены в табл. 5.11; при этом сумма всех $f_i^+$ равна 0,0096 и отличается от нуля. Это число достаточно мало и оказывает слабое влияние, поэтому, уменьшая значения $f_{-14}^+$ и $f_{15}^+$ на 0,0048, можно приравнять тем самым сумму нулю и выполнить таким образом закон сохранения энергии. Для примера с треугольной формой изменения плотности теплового потока при использовании точных данных отличие будет только в третьем десятичном знаке.

*Таблица 5.11.* Последовательные суммы коэффициентов фильтра, приведенных в табл. 5.10

| Пределы суммирования | Сумма |
|---|---|
| 0 | −5,1572 |
| −1 ÷ 1 | −10,3737 |
| −2 ÷ 2 | −8,1585 |
| −3 ÷ 3 | −3,3188 |
| −4 ÷ 4 | 0,1372 |
| −5 ÷ 5 | 1,2598 |
| −6 ÷ 6 | 0,9365 |
| −7 ÷ 7 | 0,2821 |
| −8 ÷ 8 | −0,1183 |
| −9 ÷ 9 | −0,1979 |
| −10 ÷ 10 | −0,1146 |
| −11 ÷ 11 | −0,0184 |
| −12 ÷ 12 | 0,0282 |
| −13 ÷ 13 | 0,0293 |
| −14 ÷ 14 | 0,0100 |
| −14 ÷ 15 | 0,0096 |

*Таблица 5.12.* Значения плотности теплового потока для контрольного примера с треугольной формой изменения плотности теплового потока. Алгоритм цифрового фильтра для регуляризации во всей области; $n = 30$, $\Delta t^+ = 0{,}06$, $\alpha = 0{,}001$

| $M$ | Время | Точные значения $q_M$ | Некорректированные $\hat{q}_M$ | Корректированные $\hat{q}_M$ |
|---|---|---|---|---|
| −3 | −0,15 | 0,0 | −0,0054 | −0,0062 |
| −2 | −0,09 | 0,0 | −0,0043 | −0,0052 |
| −1 | −0,03 | 0,0 | 0,0083 | 0,0072 |
| 1 | 0,03 | 0,03 | 0,0383 | 0,0372 |
| 2 | 0,09 | 0,09 | 0,0857 | 0,0844 |
| 3 | 0,15 | 0,15 | 0,1440 | 0,1426 |
| 9 | 0,51 | 0,51 | 0,5187 | 0,5170 |
| 10 | 0,57 | 0,57 | 0,5538 | 0,5521 |
| 11 | 0,63 | 0,63 | 0,5540 | 0,5523 |
| 12 | 0,69 | 0,51 | 0,5191 | 0,5174 |
| 20 | 1,17 | 0,03 | 0,0460 | 0,0442 |
| 21 | 1,23 | 0,0 | −0,0017 | −0,0035 |

Некоторые значения $\hat{q}_M$ наряду с точными значениями $q_M$ приведены в табл. 5.12. В столбце с некорректированными значениями использовались коэффициенты $f_i^+$ из табл. 5.10, а с корректированными — с учетом поправки на 0,0048 в значениях $f_{-14}^+$ и $f_{15}^+$. Корректированные и некорректированные значения весьма близки друг к другу. Они также близки к значениям, приведенным на рис. 5.15 и полученным при использовании обычной процедуры регуляризации во всей области.

Поскольку сумма коэффициентов фильтра при больших по абсолютной величине значениях $i$ колеблется относительно нуля (что можно видеть из табл. 5.11), то можно ограничиться суммированием числа членов, меньшего 30. Было замечено, что вполне достаточно суммировать 17 членов, в частности если для выполнения закона сохранения энергии корректируются крайние $f_i^+$ . При суммировании 17 членов алгоритм требует значительно меньших затрат машинного времени, чем метод регуляризации во всей области и даже чем последовательный метод. При решении линейных задач цифровой фильтр рекомендуется применять в случае повторно используемых датчиков тепловых потоков (когда стоимость вычислений является определяющим фактором).

## 5.6. Условия оптимальности алгоритмов

В методе последовательной функциональной аппроксимации необходимо выбирать такие параметры, как шаг по времени и число последующих температур $r$. В методе последовательной регуляризации необходимо также выбирать параметр регуляризации $\alpha$. В методе регуляризации во всей области требуется выбирать только шаг по времени и $\alpha$. (Метод выбора $\alpha$ рассмотрен в разд. 4.5.3.3.) Одна из задач данного раздела заключается в формулировке критериев оптимального выбора этих параметров.

Еще одна цель состоит в том, чтобы наметить основные положения для сравнения алгоритмов оценивания. Если идти дальше, то необходимо понять условия оптимального выбора алгоритмов решения ОЗТ.

В начале данного раздела анализируются условия оптимальности алгоритма функциональной аппроксимации и алгоритма регуляризации во всей области.

Рассмотреть все геометрические формы и все модификации алгоритмов не представляется возможным. Существует слишком много геометрических форм, например тела конечных и полубесконечных размеров в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Кроме того, тела могут быть однородными или составными. Всегда можно предложить новые алгоритмы. Поэтому целесообразно рассмотреть только основные понятия применительно к наиболее общим алгоритмам.

### 5.6.1. Оптимальный алгоритм функциональной аппроксимации

Основная рассматриваемая геометрическая форма тела — плоская пластина, нагреваемая при $x = 0$ и теплоизолированная при $x = L$. Датчик располагается на теплоизолированной поверхности. Этот случай анализируется в этом и в следующем разделах.

В данном разделе рассматривается метод функциональной аппроксимации с использованием постоянных элементов плотности теплового потока.

Критерием оптимальности является минимизация среднеквадратичной погрешности $\mathscr{S}^2$. Эта погрешность рассматривается в разд. 4.8 и в других разделах данной книги. Используя соотношение (4.8.9), выражение для среднеквадратичной погрешности запишем в виде

$$\mathscr{S}^2 = V(\hat{q}) + \mathscr{D}^2, \tag{5.6.1}$$

где $V(\hat{q})$ — дисперсия оценки компоненты $q$ и $\mathscr{D}$ — мера детерминированной погрешности. Так как требуется определить асимптотическое значение $\mathscr{S}^2$, то в отличие от соотношения (4.8.9) это выражение не содержит индекса $M$. Предполагается, что расчеты производятся для достаточно большого числа шагов по времени, и поэтому $\mathscr{S}^2$ достигает своего асимптотического значения (см. пример 4.6).

Дисперсия оценки $\hat{q}_M$ зависит от статистических характеристик погрешностей измерений. Для простоты предполагаются выполненными первые четыре стандартных предположения, т. е. погрешности температуры аддитивны, имеют нулевое среднее, постоянную дисперсию и некоррелированны. Считается, что погрешности имеют только температуры, а, например, местоположение датчика известно точно. При расчетах с использованием ЭВМ измеряемые значения температур могут быть коррелированными. Это, в частности, имеет место, если шаг по времени между измеряемыми значениями становится малым. Методы моделирования для такого случая рассматриваются в работах [6 (разд. 6.9), 10]. В некоторых случаях может оказаться, что лучше использовать допущения о коррелированности погрешностей и непостоянстве дисперсии, однако основные принципы оптимальности остаются теми же самыми. Стандартные предположения используются для иллюстрации особенностей процедур, а также для получения характерных результатов.

При стандартных статистических предположениях дисперсия $\hat{q}_M$ вычисляется по формуле [см. уравнение (4.8.11)]

$$V(\hat{q}_M) = \sigma_Y^2 \sum_{j=1}^{M+r-1} \left( \frac{\delta \hat{q}_j}{\delta Y_r} \right)^2 . \tag{5.6.2}$$

Величины $\delta\hat{q}_j/\delta Y_r$ представляют собой компоненты плотности теплового потока, вычисленные при всех значениях $Y_i$, равных нулю, кроме $Y_r$, которое равно единице. Из уравнения (5.6.2) видно, что дисперсия имеет размерность $(\text{Вт/м}^2)^2$, $\sigma_Y$ выражена в кельвинах, а $\delta\hat{q}_j/\delta Y_r$ имеет размерность $\text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. Для представления результатов в более общей форме запишем уравнение (5.6.2) в безразмерном виде. Для этого разделим уравнение на $q_0^2$, где $q_0$ — номинальная плотность теплового потока на поверхности. В качестве $q_0$ можно выбирать любую удобную постоянную величину, например, для контрольного примера со ступенчатым изменением плотности теплового потока это может быть постоянное значение $q$, а в примере с треугольной формой изменения плотности теплового потока — максимальное значение $q$. Тогда уравнение (5.6.2) можно представить в виде

$$\frac{V(\hat{q}_M)}{q_0^2} = \left( \frac{\sigma_Y}{q_0 L/k} \right)^2 \sum_{j=1}^{M+r-1} \left[ \frac{\delta \hat{q}_j / q_0}{\delta Y_r / (q_0 L/k)} \right]^2 , \tag{5.6.3}$$

Бургграфа были получены с использованием соотношения (2.5.32) при условии что дисперсия равна сумме квадратов $\mathscr{D}$.) Приведенные на рис. 5.22 результаты соответствуют асимптотическим значениям, которые, как было отмечено выше достигаются при больших значениях $M$.

Необходимо также определить величину детерминированной погрешности $\mathscr{D}$. Одна из мер этой погрешности определена выражением (4.8.16), которое запишем в виде

$$\mathscr{D}^+ = \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{\infty} \left( \frac{\delta \hat{q}_i}{\delta q_r} \right)^2 + \left( \frac{\delta \hat{q}_r}{\delta q_r} - 1 \right)^2 \right]^{1/2}, \qquad (5.6.7$$

где $\mathscr{D}^+$ — безразмерная детерминированная погрешность

$$\mathscr{D}^+ \equiv \frac{\mathscr{D}}{\delta q_r} . \qquad (5.6.8$$

Для линейных алгоритмов решения ОЗТ (все рассматриваемые в гл. 4 и 5 задач линейны) величина $\mathscr{D}^+$ не зависит от значения $q_r$. Поэтому значения $\delta \hat{q}_i / \delta q$ можно вычислить с использованием входных температур, заданных в виде

$$Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_{r-1} = 0, \quad Y_r = \Delta\phi_0, \quad Y_{r+1} = \Delta\phi_1, \ldots, Y_{r+i} = \Delta\phi_i , \qquad (5.6.9$$

так как эти величины соответствуют условию

$$q_i = \begin{cases} 1 & i = r , \\ 0 & i \neq r . \end{cases} \qquad (5.6.10$$

Графики зависимости $\mathscr{D}^+$ от $\Delta t^+$ при различных значениях $r$ представлены на рис. 5.23. Приведенные здесь кривые несколько отличаются от кривых $\sigma_{\hat{q}}$ на рис. 5.22. На рис. 5.23 наименьшие детерминированные погрешности соответ

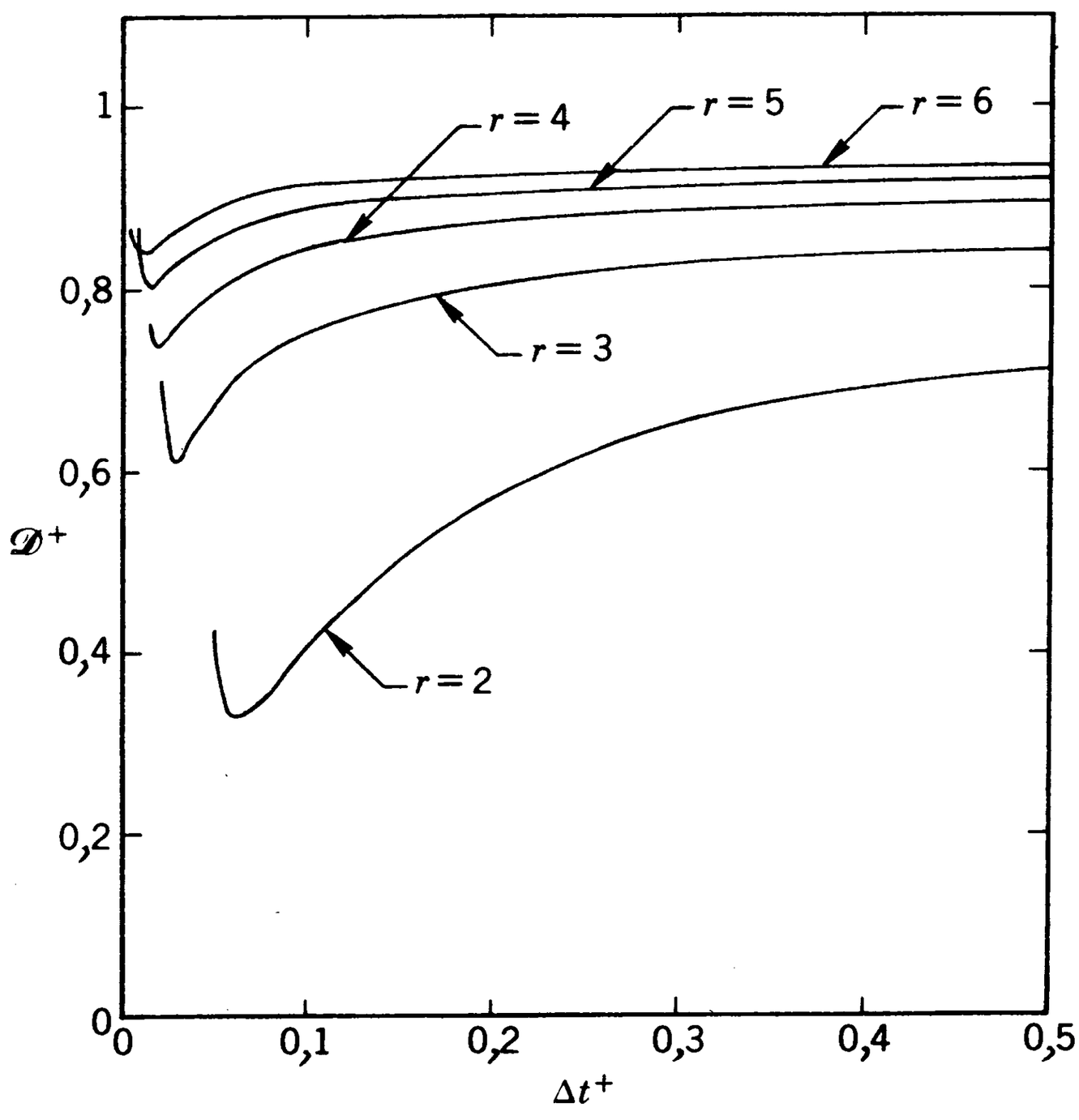



Рис. 5.23. Детерминированная погрешность величины $\hat{q}$. Метод последовательной функционально аппроксимации при $q = C$.

ствуют наименьшим значениям $r$ (при достаточно больших $\Delta t^+$), однако результаты, представленные на рис. 5.22, свидетельствуют о том, что при малых значениях $r$ проявляется наибольшая чувствительность к погрешностям измерений (т. е. наибольшие значения $\sigma_{\hat{q}}$ максимальны). Видно также, что увеличение шага по времени приводит на рис. 5.22 к уменьшению $\sigma_{\hat{q}}$, а на рис. 5.23 (за исключением малых $\Delta t$) — к увеличению $\mathscr{D}$. Кроме того, имеется еще одно расхождение, заключающееся в наличии на рис. 5.23 минимума $\mathscr{D}$ при фиксированном значении $r$.

Необходим дальнейший анализ минимума по $\Delta t^+$ для каждого значения $r$. При данном числе последующих шагов по времени $r$ и отсутствии случайных погрешностей минимум определяет оптимальное значение шага по времени. (При отсутствии погрешностей измерений в формуле (5.6.1) остается только член $\mathscr{D}^2$.) Если шаги по времени меньше оптимального значения, то с уменьшением $\Delta t^+$ величина $\mathscr{D}^+$ быстро увеличивается. Следовательно, при выборе $\Delta t^+$ лучше ошибиться в бóльшую сторону.

Как отмечалось выше, оба слагаемых в правой части соотношения (5.6.1) можно представить в безразмерном виде. В этом случае получим

$$\mathscr{S}^+ = [(\sigma_{\hat{q}}^+)^2 + (\mathscr{D}^+)^2]^{1/2}\,, \tag{5.6.11}$$

$$\mathscr{S}^+ \equiv \frac{\mathscr{S}}{\delta q_r}\,. \tag{5.6.12}$$

В качестве номинальной величины $q_0$ в соотношениях (5.6.3) и (5.6.4) можно выбрать величину $\delta q_r$, которая используется в формуле (5.6.8). Значение $\delta q_r$ является мерой изменения плотности теплового потока на поверхности при переходе от одного момента времени к другому, что иллюстрируется ниже. Величина $\sigma_{\hat{q}}^+$ в уравнении (5.6.11) определяется соотношением (5.6.4а) и пропорциональна $\sigma_Y^+$. Для краткости записи введем обозначение

$$R^2 = \left(\frac{\sigma_Y k}{\delta q_r L}\right)^2 = (\sigma_Y^+)^2\,. \tag{5.6.13}$$

Изменение $\mathscr{S}^+$ в зависимости от $\Delta t^+$ при $r = 3$ и нескольких значениях $R^2$ показано на рис. 5.24. Минимальные значения соответствуют оптимальным условиям. При увеличении $R^2$ оптимальные значения $\Delta t^+$ и $\mathscr{S}^+$ также увеличиваются.

Минимальные значения зависимостей, аналогичных приведенным на рис. 5.24, были использованы для построения оптимальных кривых, показанных на рис. 5.25. Например, кривая для $r = 3$ была построена с использованием минимальных значений на рис. 5.24. Для удобства пользования полученными результатами приводится также табл. 5.13. В этой таблице указаны данные, взятые с рис. 5.25 для значений $R = 0$; 0,01 и 0,031. Значение $R = 0$ соответствует предельному случаю отсутствия погрешностей измерений и для реальных условий не рекомендуется. Более реальным является значение $R = 0{,}01$, которое и рекомендуется в том случае, когда отсутствует оценка $R$ или не выполняются стандартные статистические предположения.

При отсутствии информации о погрешностях измерений рекомендуется выбрать значение $R = 0{,}01$. При таком подходе алгоритм вначале используется при

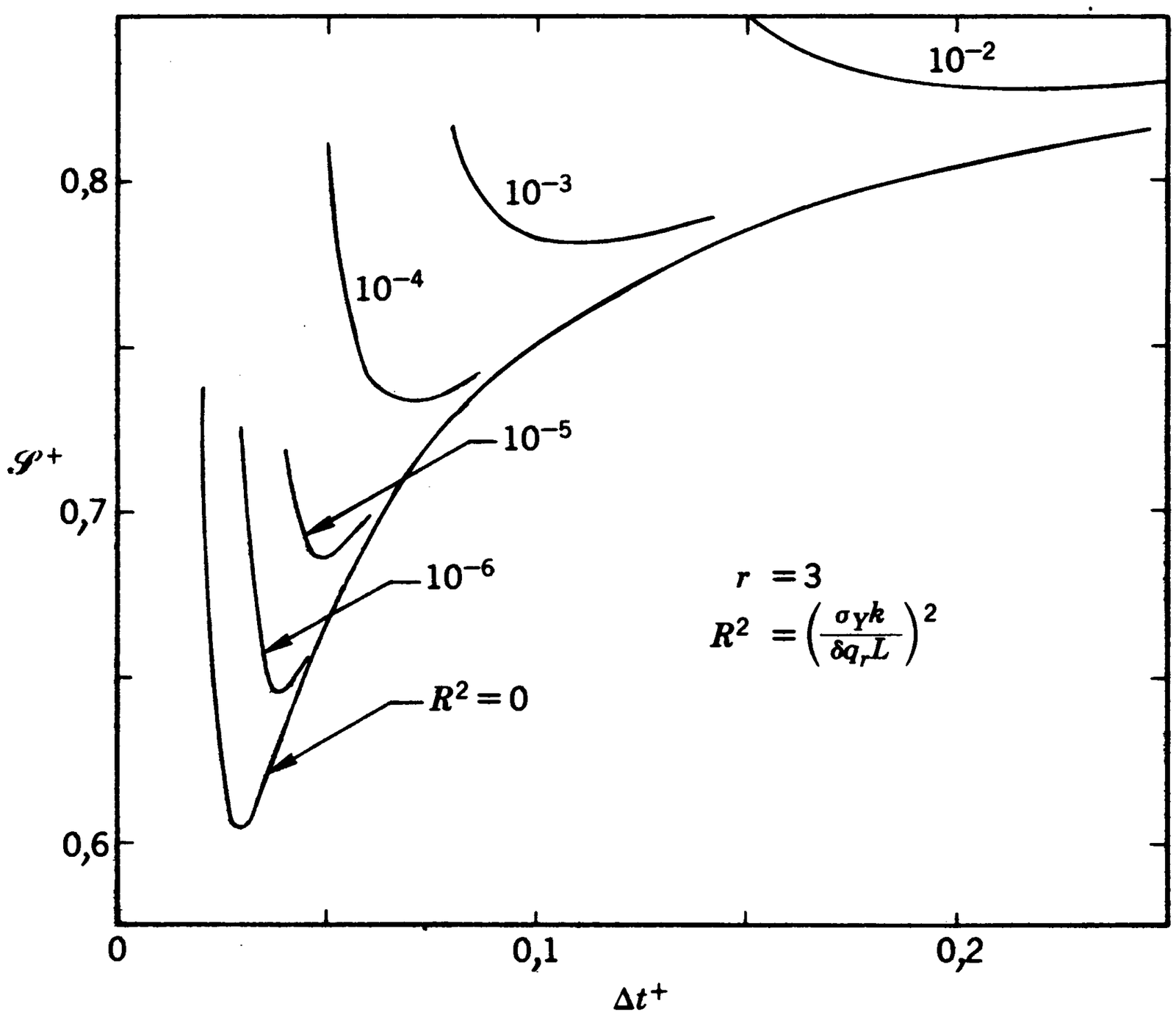



Рис. 5.24. Оптимальные значения $\mathscr{P}^+$ и $\Delta t^+$ при $r = 3$. Метод функциональной аппроксимации.

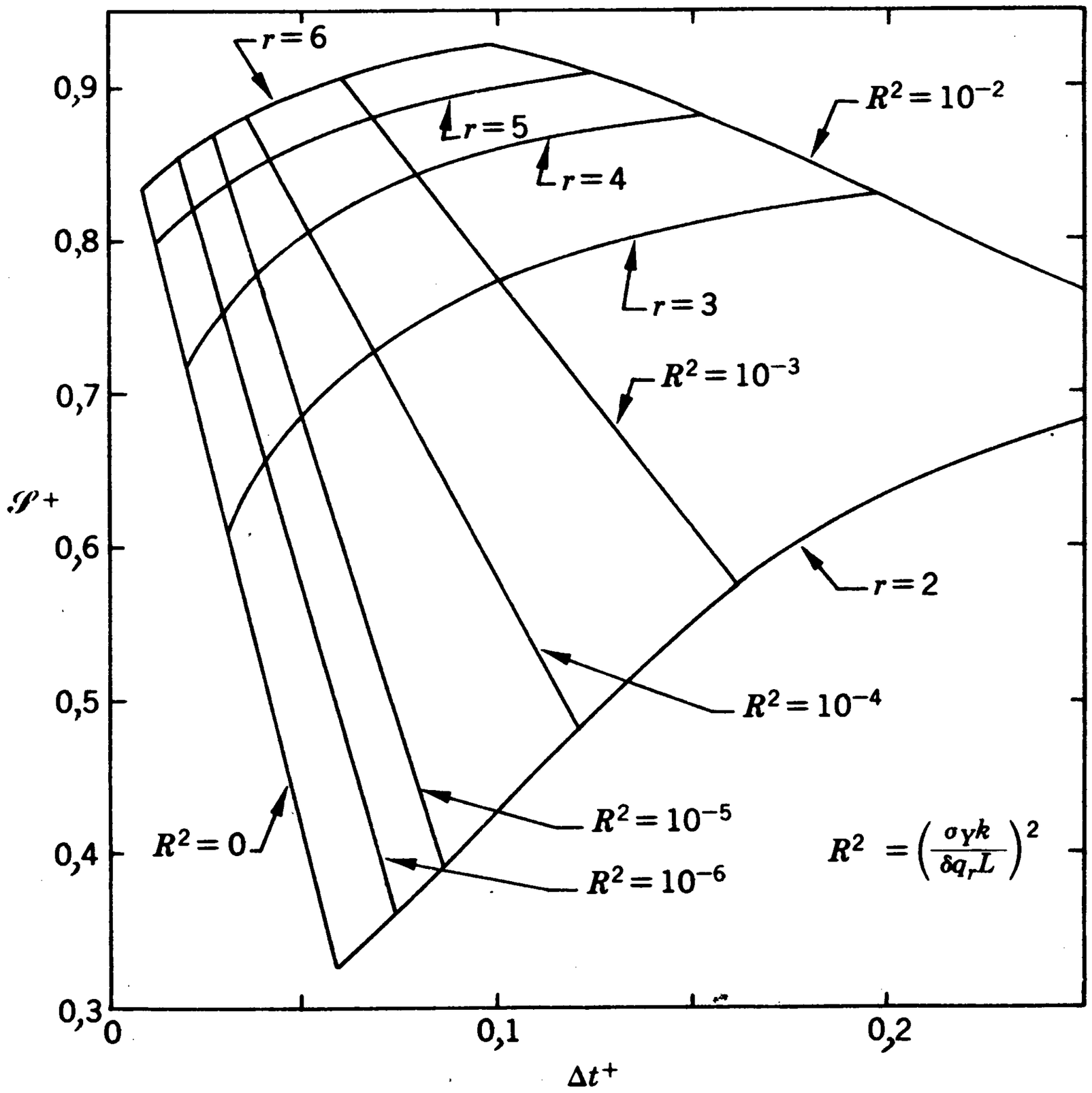



Рис. 5.25. Оптимальные условия для применения метода функциональной аппроксимации в случае пластины с расположением датчика при $x = L$ и аппроксимации $q = C$.

малом значении $r$, например 2 или 3. Если имеются большие колебания в результатах решения, то $r$ постепенно увеличивают до тех пор, пока колебания в плотности теплового потока не станут малыми. Если требуется «большая» величина $r$, например более 10, то следует увеличить шаг по времени вдвое и снова начать поиск $r$. Рекомендация увеличить шаг по времени исходит из того, что большие значения $r$ указывают на недостаточность информации в данных для определения закона изменения плотности теплового потока при выбранном (малом) шаге по времени.

*Пример 5.4.* Найдите оптимальное значение $r$ для контрольного примера с треугольной формой изменения плотности теплового потока при условии, что выполняются стандартные статистические предположения и $\sigma_Y^+ = \sigma_Y k/q_N L = 0{,}0017$ и $\Delta t^+ = \alpha \Delta t/L^2 = 0{,}06$. Максимальные изменения $q^+$ приблизительно составляют $\delta q^+ = \delta q/q_N = 0{,}06$.

*Решение.* Необходимо знать величину $R$ ($R = \sigma_Y k/\delta q_r L$). Значение $\delta q_r$ приближенно равно 0,06 $q_N$, поэтому

$$R = \frac{\sigma_Y k}{0{,}06 q_N L} = \frac{1}{0{,}06}\sigma_Y^+ = \frac{0{,}0017}{0{,}06} = 0{,}0283.$$

Этого значения $R$ нет в табл. 5.13, однако оно только на 10% меньше имеющегося значения $R = 0{,}031$, которое дает оптимальное значение $r = 6$. По-видимому, $r = 5$ будет также близко к оптимальной величине. Вычисленные значения плотности теплового потока для $r = 3$ и 4 приведены на рис. 5.13. При $r = 5$ и 6 результаты становятся лучше.

*Пример 5.5.* В реальном эксперименте [6] термопары расположены на теплоизолированных поверхностях двух образцов из железа армко толщиной 0,0254 м. Коэффициент температуропроводности равен 0,000020 м$^2$/с, а коэффициент теплопроводности — 75 Вт/(м · К). Измерения производятся с шагом по времени 0,3 с. Статистическое предположение о некоррелированности погрешностей измерений не выполняется. Выберите шаг вычислений по времени и значение $r$.

*Решение.* Безразмерный шаг по времени вычисляется с использованием шага измерений 0,3 с следующим образом:

$$\Delta t^+ = \frac{\alpha \Delta t}{L^2} = \frac{(0{,}00002)(0{,}3)}{(0{,}0254)^2} = 0{,}0093.$$

*Таблица 5.13.* Оптимальные условия для метода функциональной аппроксимации

| | $R=0$ | | $R=0{,}01$ | | $R=0{,}031$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta t^+$ | $r$ | $\mathscr{S}^+$ | $r$ | $\mathscr{S}^+$ | $r$ | $\mathscr{S}^+$ |
| 0,01 | 6 | 0,83 | | | | |
| 0,012 | 5 | 0,8 | | | | |
| 0,02 | 4 | 0,72 | | | | |
| 0,03 | 3 | 0,61 | 6 | 0,83 | | |
| 0,04 | | | 5 | 0,85 | | |
| 0,05 | | | 4 | 0,81 | | |
| 0,06 | 2 | 0,325 | | | 6 | 0,9 |
| 0,07 | | | 3 | 0,72 | 5 | 0,875 |
| 0,08 | | | | | 4 | 0,84 |
| 0,1 | | | | | 3 | 0,775 |
| 0,14 | | | 2 | 0,48 | | |
| 0,16 | | | | | 2 | 0,575 |
| 1,5 | | | 1 | | | |

*Таблица 5.14.* Оптимальные условия для метода регуляризации во всей области

| | $R=0{,}01$ | | $R=0{,}031$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta t^+$ | $\alpha^+$ | $\mathscr{S}^+$ | $\alpha^+$ | $\mathscr{S}^+$ |
| 0,01 | $10^{-4}$ | 0,86 | 0,001 | 0,98 |
| 0,03 | $10^{-4}$ | 0,83 | 0,001 | 0,92 |
| 0,04 | $10^{-4}$ | 0,8 | 0,001 | 0,88 |
| 0,05 | $10^{-4}$ | 0,77 | 0,001 | 0,86 |
| 0,06 | $7 \times 10^{-5}$ | 0,69 | 0,001 | 0,84 |
| 0,08 | $3 \times 10^{-5}$ | 0,6 | 0,001 | 0,78 |
| 0,1 | $2 \times 10^{-5}$ | 0,49 | 0,001 | 0,73 |
| 0,12 | $10^{-5}$ | 0,4 | 0,001 | 0,67 |
| 0,14 | $10^{-5}$ | 0,3 | 0,001 | 0,64 |

Поскольку стандартные статистические предположения не выполняются, то используется столбец $R = 0{,}01$ (табл. 5.13), но в нем отсутствуют значения безразмерных шагов по времени, меньшие 0,03. Если выбрать шаг по времени, равный 0,9 с, то $\Delta t^+ = 0{,}028$, что близко к 0,03. При $\Delta t^+ = 0{,}03$ и $R = 0{,}01$ из табл. 5.13 выбираем $r = 6$. Таким образом, в данном случае для оценивания $q$ рекомендуется шаг по времени 0,9 с и значение $r$, равное 6.

### 5.6.2. Оптимальный алгоритм регуляризации во всей области

Для той же самой базовой геометрической формы в виде плоской пластины, рассматриваемой в разд. 5.6.1, проанализируем теперь метод регуляризации во всей области. В данном разделе рассматривается только средняя область (рис. 5.16 и 5.17). Результаты, полученные для метода регуляризации во всей области, типичны и для метода последовательной регуляризации.

В методах регуляризации необходимо выбирать параметр регуляризации $\alpha$. Как и в предыдущих примерах этой главы, рассмотрим метод регуляризации первого порядка. Его математическая запись имеет вид уравнения (5.4.1).

Тем же способом, как и табл. 5.13, для метода регуляризации первого порядка во всей области была сформирована табл. 5.14. Следует отметить, что шаги по времени слабо зависят от величины $\alpha^+$, которая определяется по формуле

$$\alpha^+ \equiv \frac{\alpha k^2}{L^2} \,. \tag{5.6.14}$$

Приближенное соотношение для безразмерного параметра регуляризации имеет вид

$$\alpha^+ = R^2 = \left(\frac{\sigma_Y k}{\delta q_r L^2}\right)^2 \,, \tag{5.6.15}$$

или в размерном виде

$$\alpha = \left(\frac{\sigma_Y}{\delta q_r}\right)^2 . \tag{5.6.16}$$

Как и в методе функциональной аппроксимации, если величина $R$ неизвестна или не выполняются стандартные предположения, то разумно назначить $R = 0{,}01$. (Это продиктовано опытом.)

Из сравнения табл. 5.13 и 5.14 следует, что при одних и тех же значениях $\Delta t^+$ и $R$ метод регуляризации во всей области дает немного меньшие значения $\mathscr{S}^+$ по сравнению с методом функциональной аппроксимации. В большинстве случаев различие составляет менее 10%. Следовательно, метод регуляризации во всей области обеспечивает лучшие оценки плотности теплового потока, чем метод функциональной аппроксимации, однако различия малы. В вычислительном отношении метод регуляризации во всей области менее эффективен (если только он не реализован в форме цифрового фильтра). Если требуется получить как можно лучшие оценки плотности теплового потока, то целесообразно использовать метод регуляризации во всей области. Однако метод последовательной регуляризации дает весьма близкие результаты. Простая процедура функциональной аппроксимации, лишь несколько уступающая в эффективности, может быть предпочтительнее методов регуляризации.

*Пример 5.6.* Повторите пример 5.4 для метода регуляризации во всей области. Найдите оптимальное значение $\alpha^+$.

*Решение.* Используя в уравнении (5.6.15) значение $R$, равное 0,0283, получим $\alpha^+ = 0{,}0008$. Это значение весьма близко к значению $\alpha$, равному 0,001, которое использовалось в примерах с треугольной формой изменения плотности теплового потока.

*Пример 5.7.* Повторите пример 5.5 для метода регуляризации во всей области.

*Решение.* Значение $\Delta t^+$ равно 0,028, а из уравнения (5.6.15) имеем

$$\alpha^+ = R^2.$$

Так как стандартные статистические предположения не выполняются, то используется $R = 0{,}01$. Из соотношений (5.6.14) и (5.6.15) получим

$$\alpha = 0{,}0001 \frac{L^2}{k^2} = 0{,}0001 \left(\frac{0{,}0254}{75}\right)^2 = 1{,}15 \times 10^{-12} \text{ (м}^4\cdot\text{К}^2)/\text{Вт}^2.$$

Заметим, что температура выражена в кельвинах, а плотность теплового потока Вт/м$^2$.

При выборе $\alpha$ использовался шаг по времени. Предположим, что шагу $\Delta t = 0{,}9$ с соответствует значение $R = 0{,}01$. Интересно проследить, что изменится при выборе шага по времени равным 0,3 с. Если шаг по времени уменьшился в 3 раза, то значение $\delta q_r$ также уменьшается в 3 раза. Из соотношения (5.6.16) следует, что $\alpha$ в этом случае увеличивается в 9 раз.

## Литература


1. Keltner, N. R. and Beck, J. V., Unsteady Surface Element Method, *J. Heat Transfer* **103**, 759–764 (1981).
2. Beck, J. V. and Keltner, N. R., Transient Thermal Contact of Two Semi-Infinite Bodies Over a Circular Area, *Spacecraft Radiative Transfer and Temperature Control*, T. E. Horton, Ed. Vol. 83 of Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, New York, 1982, pp. 61–82.
3. Litkouhi, B. and Beck, J. V., Intrinsic Thermocouple Analysis Using Multinode Unsteady Surface Element Method, AIAA Paper No. 83-1437, 1983.
4. Stolz, G., Jr., Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes, *J. Heat Transfer* **82**, 20–26 (1960).
5. Beyer, W. H., Ed., *Handbook of Tables for Probability and Statistics*, 2nd ed., The Chemical Rubber Co., Cleveland, OH, 1968, p. 484.
6. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1977.
7. Farnia, K., Computer-Assisted Experimental and Analytical Study of Time/Temperature-Dependent Thermal Properties of the Aluminum Alloy 2024-T351, Ph.D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, Michigan State University, 1976.
8. Twomey, S., On the Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind by the Inversion of the Linear System Produced by Quadrature, *J. Assoc. Comp. Mach.* **10**, 97–101 (1963).
9. Twomey, S., The Application of Numerical Filtering to the Solution of Integral Equations Encountered in Indirect Sensing Measurements, *J. Franklin Inst.* **279**, 95–109 (1965).
10. Beck, J. V., Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problem, *Nucl. Eng. Des.* **53**, 11–22 (1979).


### Имеется на русском языке


1. Келтнер, Бек. Нестационарный метод элементов поверхности. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1981, №4, с. 171.


## Задачи

1. а. Вычислите функцию $\phi(r, t)$ для сплошного цилиндра при $r = 0$. Расчеты проведите для стального цилиндра диаметром 0,664 см. Безразмерный шаг по времени равен $\Delta t_a^+ = \alpha \Delta t / a^2 = 0{,}05$, где $a$ — радиус цилиндра.

Значения $\phi$ получите в системе единиц СИ для 6 шагов по времени. При этом используйте данные из табл. 1.3 и теплофизические свойства, приведенные в табл. 5.4.

b. Повторите решение задачи для цилиндра диаметром 4 см.

c. Повторите п. a для кирпича.

5.2. a. Сплошная стальная сфера имеет диаметр 4 см. Вычислите температуру в центре сферы для десяти шагов по времени при $\Delta t = 1{,}818$ с и плотности теплового потока, заданного соотношениями

$$t<0, \quad q=0 \ ,$$

$$0<t<4\Delta t, \quad q=100\,000 \text{ Вт/м}^2 \ ,$$

$$0<t<8\Delta t, \quad q=200\,000 \text{ Вт/м}^2 \ ,$$

$$t>8\Delta t, \quad q=0 \text{ Вт/м}^2 .$$

Начальная температура равна 50 °C.

b. Добавьте к значениям температуры случайные погрешности, которые имеют нулевое, среднее, среднеквадратичное отклонение 2 °C, некоррелированы и нормально распределены.

5.3. Покажите, что выражения

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^{M} \nabla q_n \phi_{M-n+1}, \quad \nabla q_n \equiv q_n - q_{n-1} \ ,$$

$$T_M = T_0 + \sum_{n=1}^{M} q_n \Delta\phi_{M-n}$$

эквивалентны, где $M$ — произвольное целое положительное число.

5.4. Пластина толщиной $2L$, первоначально имеющая температуру $T_0$, помещена в жидкость при температуре $T_\infty$. Граничные условия для половины пластины имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ при } x=0, \quad -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_L = h[T(L,t)-T_\infty],$$

где $h$ — коэффициент теплоотдачи.

a. Используя решение задачи при ступенчатом изменении плотности теплового потока на поверхности $x = L$ при условии теплоизолированности поверхности $x = 0$ и обозначая это решение через $\Phi(x, t)$, выведите соотношение

$$T(L,t) = T_0 + \int_0^t h[T_\infty - T(L,\lambda)]\frac{\partial\Phi(L,t-\lambda)}{\partial t}\,d\lambda \ , \tag{a}$$

где предполагается, что $h$ имеет постоянное значение (Как $\phi(x, t)$ связано с $\Phi(x, t)$ ?).

b. Уравнение (a) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно неизвестной фукнции $T(L, t)$. Используя точную подгонку, выведите выражение

$$T_M = \left(1+\frac{h\Delta\Phi_0}{2}\right)^{-1}\left[T_0 + h\left(T_\infty - \frac{T_{M-1}}{2}\right)\Delta\Phi_0 +\right.$$

$$+ h\sum_{n=1}^{M-1}\left(T_\infty - \frac{T_{n-1}+T_n}{2}\right)\Delta\Phi_{M-n}\Bigg], \quad M = 1, 2, \ldots,$$

где $T_M = T(L, t_M)$.

с. Проведенный выше анализ применим не только для плоской пластины. Опишите другие геометрические формы, для которых применимы приведенные соотношения. Данная задача связана с методом поверхностных элементов [1—3].

5.5. Проведите анализ задачи 5.4 для случая $T_\infty = T_\infty(t)$.

5.6. Начиная с уравнения (а) в задаче 5.4, выведите алгоритм последовательной функциональной аппроксимации для оценивания $T_\infty(t)$ по известной зависимости $T(L, t)$. Используйте значение $r = 2$ и временное предположение о постоянстве $T_\infty(t)$.

5.7. Исследуйте метод Штольца, рассматривая одиночную погрешность температуры $\delta Y_r$ и специальную матрицу чувствительности. Алгоритм Штольца можно представить в виде системы $n$ алгебраических уравнений вида

$$\begin{bmatrix} a & & & & & \\ b & a & & & & \\ b & b & a & & & \\ b & b & b & a & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \delta q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta Y_r \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\delta Y_r$ — $r$-ая компонента вектора правой части. Покажите, что

$$\delta q_r = \frac{\delta Y_r}{a}, \quad \delta q_{r+1} = -\frac{b}{a^2}\delta Y_r,$$

$$\delta q_j = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\delta q_{j-1}, \quad j = r+2, r+3, \ldots$$

Используя эти соотношения, покажите, что

$$\delta q_j = -\frac{b}{a^2}\delta Y_r\left(1 - \frac{b}{a}\right)^{j-1-r}, \quad j = r+1, r+2, \ldots$$

5.8. В данной задаче используются результаты задачи 5.7. Для случая, когда правая часть матричного уравнения равна $\mathbf{Y}$, где

$$\mathbf{Y} = [Y_1 \; Y_2 \; \cdots \; Y_r + \delta Y_r \; Y_{r+1} \; \cdots \; Y_n],$$

покажите, что

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \delta\mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}_0$ — решение $\delta Y_r = 0$, а $\delta\mathbf{q}$ — решение из задачи 5.7. При каких условиях ограниченная величина $\delta Y_r$ приводит к неограниченным значениям $q_j$? Покажите, что ответ на этот вопрос эквивалентен условию

$$\phi_2 > 3\phi_1,$$

где $\phi_{i+1} - \phi_i \approx \text{const}$ при $i = 1, 2 \ldots$ . Используйте этот критерий при определении предела устойчивости для метода Штольца при измерениях на по-

верхности $x = L$ в случае плоской пластины (табл. 1.1) и во внутренних точках полубесконечного тела (табл. 1.2).

5.9. a. Используя критерий устойчивости для метода Штольца $\phi_2 > 3\phi_1$, приведенный в задаче 5.8, определите предел устойчивости для случая сплошного цилиндра при расположении датчика в центре. Используйте при этом данные из табл. 1.3.
*Ответ:* $\Delta t^+ \approx 0{,}23$.
b. Определите предел устойчивости для метода Штольца применительно к тому же телу, что и в п. а в случае контрольного примера с импульсным изменением температуры.
c. Сделайте выводы по полученным результатам в пп. а и b.

5.10. Повторите задачу 5.9 для центральной точки сферы, используя данные из табл. 1.4.
*Ответ* для п. а: $\Delta t^+ \approx 0{,}19$.

5.11. Напишите машинную программу для уравнения (5.3.4) . Пусть $r$ изменяется от 1 до 5, а максимальное значение $M$ равно 40. Входными данными являются величины $Y_i$ и $\phi_i$.

5.12. a. Используя разработанную в задаче 5.11 программу, проверьте результаты, показанные на рис. 5.7.
b. Используя разработанную в задаче 5.11 программу, проверьте результаты, показанные на рис. 5.10.
c. Используя разработанную в задаче 5.11 программу, проверьте результаты, показанные на рис. 5.12.

5.13. a. Примените разработанную в задаче 5.11 программу для исследования устойчивости при использовании метода функциональной аппроксимации в случае плоской пластины с расположением датчика на теплоизолированной поверхности при $r = 2$.
b. Повторите п. а для $r = 3$.
c. Повторите п. а для $r = 4$.

5.14. Решите задачу 5.13 для сплошного цилиндра при расположении датчика в центре.

5.15. Решите задачу 5.13 для сплошной сферы при расположении датчика в центре.

5.16. Напишите машинную программу для уравнения (5.3.4а), используя в качестве входных данных величины $K_i$. Напишите программу для случая $r = 3$ и решите задачу для нагреваемой при $x = 0$ плоской пластины с расположенным при $x = L$ датчиком. Шаг по времени равен $\Delta t^+ = 0{,}05$ и постоянен. Проанализируйте влияние величин $K_i$, изменяя для этой цели значения, полученные в методе функциональной аппроксимации и равные $K_1 = 0{,}292$, $K_2 = 8{,}56$, $K_3 = 31{,}8$. Используйте, например, величины:

a. $K_1 = 0{,}292$, $K_2 = 8{,}56$ и $K_3 = 15{,}9$;
b. $K_1 = 0{,}292$, $K_2 = 8{,}56$ и $K_3 = 47{,}4$;
c. $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ и $K_3 = 31{,}8$.

Для проверки выполнения закона сохранения энергии рассмотрите контрольный пример с импульсным изменением плотности теплового потока.

5.17. Повторите задачу 5.16 для контрольного примера с импульсным изменением температуры.

5.18. Напишите машинную программу для решения обратной задачи теплопроводности методом функциональной аппроксимации при двух известных зависимостях температуры от времени во внутренних точках и временном предположении о постоянстве $q$ для $r = 3$.

5.19. a. Вычислите безразмерные компоненты матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ при $n = 10$ и $\Delta t^+ = 0{,}05$ в случае нагреваемой в сечении $x = 0$ плоской пластины с расположенным при $x = L$ датчиком. Получите также компоненты матрицы $\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$ при $\alpha = 0{,}001$. Представьте графически несколько строк матриц $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha\mathbf{H}_1^T\mathbf{H}_1$, включая последние строки и располагая на графике элементы в зависимости от номера столбца. Какие выводы можно сделать из полученных результатов?

b. Повторите п. а для сплошной сферы при расположении датчика в центре. Используйте величину $\Delta t_a^+ = 0{,}05$.

5.20. a. Напишите машинную программу для решения обратной задачи теплопроводности методом регуляризации первого порядка во всей области.

b. Используйте программу для воспроизведения результатов, показанных на рис. 5.15.

c. Используйте программу для воспроизведения результатов, показанных на рис. 5.16.

d. Используйте программу для воспроизведения результатов, показанных на рис. 5.17.

5.21. Модифицируйте разработанную в задаче 5.20 программу для решения методом регуляризации нулевого порядка и повторите задачу 5.20.

5.22. Напишите машинную программу, реализующую метод последовательной регуляризации нулевого порядка при $r = 5$. Сравните коэффициенты усиления с полученными методом функциональной аппроксимации значениями при $\Delta t^+ = 0{,}05$ в случае нагреваемой при $x = 0$ плоской пластины и расположения датчика при $x = L$. Используйте данные табл. 4.1. Проварьируйте величиной $\alpha$ в широком диапазоне значений.

5.23. Эксперимент для плоской пластины, нагреваемой при $x = 0$ и теплоизолированной при $x = L = 25{,}4$ мм, описан в книге [6]. Пластина из железа армко имеет следующие теплофизические свойства: $k = 74{,}9$ Вт/(м · К) и $\rho c = 3730{,}76$ кДж/(м$^3$ · К). Начальная температура равна 300,4 К. Вычислите плотность теплового потока на нагреваемой поверхности, используя метод функциональной аппроксимации и следующие экспериментальные данные:

a. Используйте $r = 3$.
b. Используйте $r = 4$.
c. Используйте $r = 5$.

| Время | Температура, К | Время | Температура, К |
|---|---|---|---|
| 0 | 300,42 | 16,2 | 302,92 |
| 1,8 | 300,51 | 18,0 | 303,51 |
| 3,6 | 300,42 | 19,8 | 304,14 |
| 5,4 | 300,42 | 21,6 | 304,55 |
| 7,2 | 300,69 | 23,4 | 305,05 |
| 9,0 | 301,01 | 25,2 | 305,09 |
| 10,8 | 301,60 | 27,0 | 305,18 |
| 12,6 | 302,16 | 28,8 | 305,27 |
| 14,4 | 302,60 | | |

5.24. Повторите задачу 5.23 с использованием метода регуляризации первого порядка во всей области. Проведите расчеты для нескольких значений $\alpha$.

5.25. Повторите задачу 5.23 с использованием метода последовательной регуляризации первого порядка для $r = 5$ и нескольких значений $\alpha$.

5.26. a. Определите коэффициенты цифрового фильтра в задаче 5.23 для метода функциональной аппроксимации при $r = 4$.

b. Определите коэффициенты цифрового фильтра в задаче 5.23 для метода регуляризации по всей области. Выберите оптимальное значение $\alpha$. Для получения коэффициентов фильтра следует использовать значения времени в середине рассматриваемого интервала.

5.27. Используя программу для ЭВМ, реализующую метод последовательной регуляризации, исследуйте влияние порядка регуляризации. Рассмотрите нулевой, первый и второй порядки. Проварьируйте $\alpha$ в широком диапазоне значений. Исследуйте влияние как систематических, так и случайных погрешностей.

5.28. С помощью регуляризации во всей области получите данные и постройте графики, аналогичные представленным на рис. 5.22. Рассмотрите значения $\alpha = 10^{-6}$, 0,001 и 1.

5.29. С помощью метода регуляризации во всей области получите данные и постройте графики, аналогичные представленным на рис. 5.23. Рассмотрите значения $\alpha = 10^{-6}$, 0,001 и 1.

# Глава 6
# Разностные методы решения одномерной обратной задачи теплопроводности

## 6.1. Введение

гл. 3 было отмечено, что разностные методы обладают большими возможно-
тями для решения широкого круга нелинейных прямых задач теплопроводности.
то утверждение справедливо и для обратных задач теплопроводности. В част-
ости, с помощью разностных методов можно легко учесть нелинейность, свя-
анную с зависимостью теплофизических характеристик от температуры. Обыч-
о используемая процедура состоит в локальной линеаризации задачи путем вы-
исления теплофизических свойств при температурах, соответствующих пре-
ыдущему шагу по времени. Теплофизические свойства редко известны с доста-
очной точностью, и проведение итераций себя не оправдывает. Такой подход
олучил название квазилинеаризации.

Гл. 6 посвящена применению разностных методов для решения обратной за-
ачи теплопроводности. Представленные здесь алгоритмы могут в одинаковой
тепени использоваться применительно к методу сосредоточенной теплоемкости,
также к методам конечных разностей или конечных элементов. В разд. 6.2 про-
олжается анализ коэффициентов чувствительности и способов их эффективного
ычисления разностными методами. В разд. 6.3 дается описание процедуры точ-
ой подгонки вычисляемых температур к измеренным их значениям на каждом
аге по времени в случае одиночного датчика. Несколько датчиков рассматрива-
тся в разд. 6.4. В разд. 6.5 представлены алгоритмы одновременного оценива-
ия нескольких составляющих плотности теплового потока. Разд. 6.6—6.8 посвя-
ены применению разностных методов в алгоритмах метода функциональной
ппроксимации. В разд. 6.9 анализируется метод последовательной регуляриза-
ии. Маршевые методы представлены в разд. 6.10. В разд. 6.11 приведено не-
олько примеров и в разд. 6.12 дается перечень нескольких программ для ЭВМ.

## 6.2. Коэффициенты чувствительности и их вычисление разностными методами

онятие коэффициентов чувствительности было введено в гл. 1 и широко ис-
ользовалось в данной книге. Поскольку понимание материала этой главы непо-
редственно связано с пониманием коэффициентов чувствительности, некоторые
асающиеся их понятия получат дальнейшее развитие. В данной главе неодно-
ратно встречаются два коэффициента чувствительности, связанные 1) со ступен-
атым изменением плотности теплового потока на величину $q_M$ и последующей
есконечной продолжительностью его действия по времени и 2) с импульсным
зменением плотности теплового потока на величину $q_M$ и продолжительностью
ействия в течение времени $t_M - t_{M-1}$ . Изменение по времени плотностей теп-

ловых потоков этих двух типов и соответствующих коэффициентов чувствительности схематично показано на рис. 6.1. Для теплоизолированной с одной стороны плоской пластины и полубесконечного тела фактическое изменение коэффициентов чувствительности представлено на рис. 1.7 и 1.11 соответственно. Так как продолжительность воздействия ступенчатой функции бесконечна, то коэффициент чувствительности неограниченно возрастает. На рис. 6.1 кривая $A$ соответствует ступенчатому изменению плотности теплового потока в момент времени $t_{M-1}$, кривая $C$ — такому же ее изменению в момент $t_M$. Символ $Z$ используется для обозначения коэффициента чувствительности при ступенчатом изменении плотности теплового потока. Если теплофизические свойства постоянны, то $Z$ имеет тот же смысл, что и $\phi$ в гл. 3—5. При расположении датчика на глубине $x_k$ изменение температуры при ступенчатом изменении плотности теплового потока можно записать в виде $T(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M)$, где $t_{M-1}$ указывает момент времени, в который происходит ступенчатое или импульсное изменение плотности теплового потока. Компоненты $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots, \hat{q}_{M-1}$ вектора $\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$ содержат полную информацию об изменении плотности теплового потока по времени вплоть до момента $t_{M-1}$ и, следовательно, содержат всю (начальную) информацию о температуре, необходимую для ее расчета в моменты времени $t_M, t_{M+1}, \ldots$. Коэффициент чувствительности при ступенчатом изменении плотности теплового потока определяется выражением

$$\frac{\partial T(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} = Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M), \tag{6.2.1}$$

где $x_k$ — координата датчика; $t$ — рассматриваемый момент времени; $t_{M-1}$ — момент времени, в который происходит ступенчатое изменение плотности теплового потока; $\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$ — предшествующее изменение плотности теплового потока по времени; $q_M$ — величина ступени плотности теплового потока. В линейной задаче $Z$ не зависит от $q_M$, т. е. $T$ линейна относительно $q_M$. Возможны ситуации, в которых теплофизические характеристики в течение нескольких (обычно 1—10) последующих шагов по времени остаются постоянными, в то время как в течение всего рассматриваемого в задаче интервала времени какая-либо характеристика может изменяться. В этом случае $Z$ не зависит от $q_M$, но через профиль температуры в момент времени $t_{M-1}$ зависит от $t_{M-1}$ и $\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$. Если теплофизические свойства не зависят от температуры в течение всего интервала времени, рассматриваемого в задаче, то $Z$ не зависит от $q_M$ и $\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$ и важной, определяющей вре-

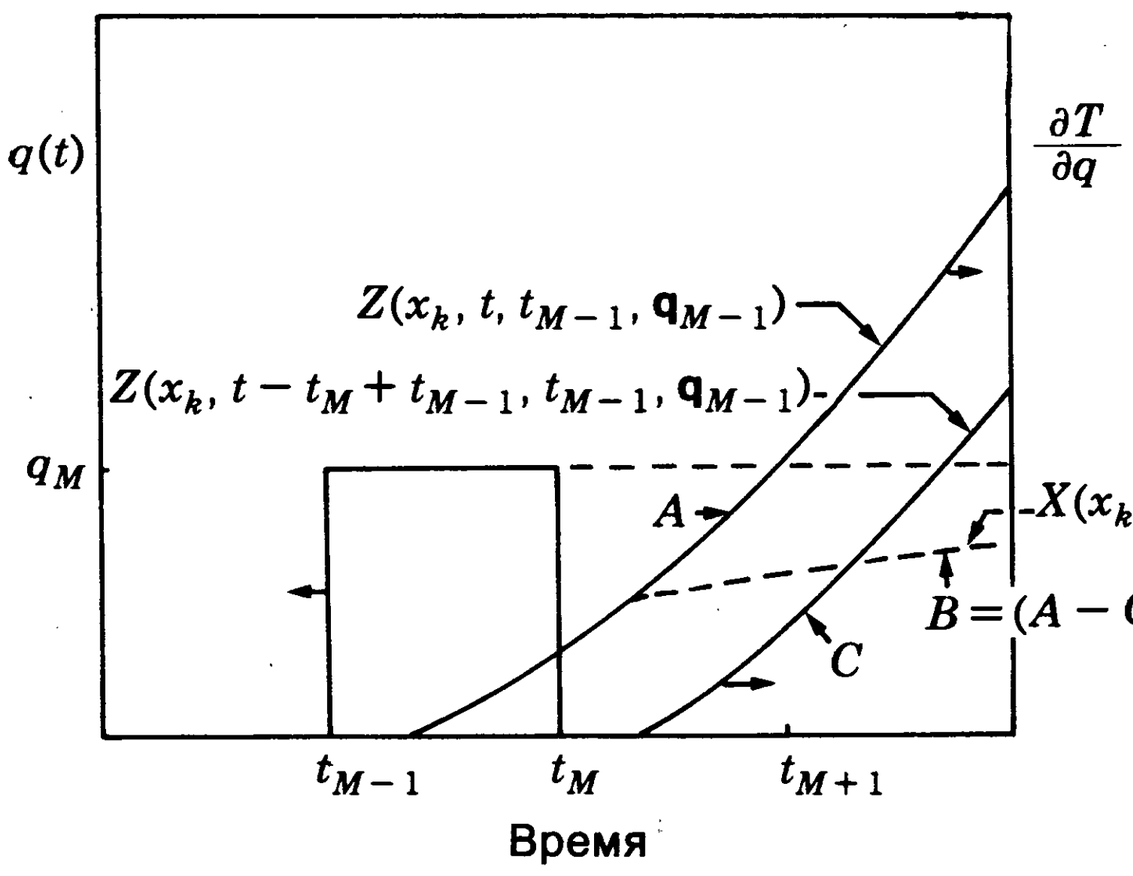



Рис. 6.1. Коэффициент чувствительности при ступенчатом и импульсном изменении плотности теплового потока $q_M$. $A$ — ступенчатое изменение $q_M$ в момент времени $t_{M-1}$, $B$ — импульсное изменение $q_M$, начинающееся в момент времени $t_{M-1}$, $C$ — ступенчатое изменение $q_M$ в момент времени $t_M$.

мя переменной является $t - t_{M-1}$, т. е. время от начала ступени. Коэффициенты чувствительности для указанных трех случаев представлены в табл. 6.1. До начала ступенчатого или импульсного изменения плотности теплового потока коэффициент чувствительности по определению равен нулю.

Коэффициент чувствительности при импульсном изменении плотности теплового потока будем обозначать через $X$ с теми же аргументами, что и у коэффициента чувствительности при ступенчатом изменении плотности. В квазилинейном случае и при постоянных теплофизических свойствах для вычисления $X$ через $Z$ можно использовать суперпозицию

$$X(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) - \\ - Z[x_k, t-(t_M - t_{M-1}), t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}]. \qquad (6.2.2)$$

Оба члена правой части соотношения (6.2.2) показаны на рис. 6.1 в виде кривых $A$ и $C$. Кривая $C$ для постоянных теплофизических свойств идентична кривой $A$, но смещена по времени на интервал $t_M - t_{M-1}$. Кривая $B$ соответствует разности $(A - C)$ и представляет собой коэффициент чувствительности $X$ при импульсном изменении плотности, который аналогичен величине $\Delta\phi$ в гл. 3—5.

При использовании разностных методов важно иметь значения $X$ и $Z$ в дискретные моменты времени. В момент $t = t_M$

$$X(x_k, t_M, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = Z(x_k, t_M, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}), \qquad (6.2.3)$$

поскольку $Z(x_k, t_M, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = 0$. В случае постоянных свойств можно использовать удобную индексацию

$$Z_{k, j-M+1} = Z(x_k, t_j - t_{M-1}). \qquad (6.2.4)$$

То же самое обозначение будем использовать и в квазилинейном случае, в котором неявно подразумевается, что все свойства вычисляются при значениях температуры в момент времени $t_{M-1}$. Используя соотношение (6.2.2) и обозначения (6.2.4), можно показать, что в случае постоянных теплофизических свойств выполняется условие

$$Z_{k,r} = \sum_{j=1}^{r} X_{k,j},$$

которое просто отражает тот факт, что в линейной задаче изменение температуры в ответ на ступенчатое изменение плотности теплового потока равно сумме изменений в ответ на последовательность импульсов, имеющих постоянную величину и распределенных на том же интервале времени.

Для нелинейных задач коэффициенты чувствительности можно вычислить с

*Таблица 6.1.* Обозначения коэффициентов чувствительности при ступенчатом изменении плотности теплового потока

| Случай | Ограничения | Обозначение |
|---|---|---|
| I | Нет, общий случай | $Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M)$ |
| II | Квазилинейные теплофизические свойства | $Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1})$ |
| III | Постоянные теплофизические свойства | $Z(x_k, t - t_{M-1}) = \phi(x_k, t - t_{M-1})$ |

использованием разностей температур, полученных при одних и тех же значениях времени и пространственной координаты и двух значениях плотности теплового потока. Пусть, например, распределение температуры вычисляется при двух различных значениях плотности теплового потока $q^*$ и $(1+\varepsilon)q^*$, где $\varepsilon$ — малый параметр порядка 0,001. Тогда коэффициент чувствительности определяется по формуле

$$X(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = \frac{T[x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q^*(1+\varepsilon)] - T(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q^*)}{\varepsilon q^*}. \tag{6.2.5}$$

При вычислении коэффициентов чувствительности $X$ и $Z$ единственное отличие заключается в граничных условиях:

| Коэффициент чувствительности | Граничное условие |
|---|---|
| $X$ (импульс) | $q(t) = \begin{cases} q^*, & t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M, \\ 0 \text{ при всех остальных значениях } t \end{cases}$ |
| $Z$ (ступень) | $q(t) = q^*, \quad t > t_{M-1}$ |

(6.2.6)

Для использования соотношения (6.2.5) необходимо дважды вычислять значение температуры (или решать прямую задачу). В вычислительном отношении более эффективным является определение $X$ из решения краевой задачи, включающей его собственное уравнение в частных производных, которое можно получить из нестационарного уравнения теплопроводности. Например, рассмотрим анализируемую в разд. 3.3 квазилинейную [1] задачу при $t > t_{M-1}$:

| Температура $T$ | Коэффициент чувствительности $Z$ |
|---|---|
| $-k\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right\|_{x=0} = q(t),$ | $-k\left.\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right\|_{x=0} = 1,$ |
| $\rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial T}{\partial x}\right),$ | $\rho c \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial Z}{\partial x}\right),$ |
| $-k\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right\|_{x=L} = q_L(t),$ | $-k\left.\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right\|_{x=L} = 0,$ |
| $T(x, t_{M-1}) = F(x).$ | $Z(x, t_{M-1}) = 0.$ |

(6.2.7)

Сопоставление двух приведенных выше систем уравнений относительно $T$ и $Z$ показывает, что обе эти переменные удовлетворяют одному и тому же уравнению в частных производных. Граничные и начальные условия различны, и для $Z$ они существенно проще. Если вместо $Z$ вычисляется $X$, то записанное выше граничное условие при $x = 0$ имеет вид

$$-k\left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} 1 & \text{для продолжительности импульса,} \\ 0 & \text{в остальной области.} \end{cases} \tag{6.2.8}$$

Дифференциальное уравнение, второе граничное, а также начальное условие для $X$ и $Z$, одни и те же. Учитывая подобие дифференциальных уравнений относи-

---

[1] Под квазилинейной подразумевается задача, в которой $k$, $\rho$ и $c$ вычисляются при значениях температуры в момент времени $t_{M-1}$.

тельно $T$ и $Z$, можно обеспечить существенную экономию машинного времени. Этот вопрос подробно анализируется в следующем разделе.

## 6.3. Одиночный датчик температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), один последующий шаг по времени (точная подгонка)

Рассмотрим одиночный датчик температуры, расположенный на глубине $x_k$ от нагреваемой поверхности. Если плотность теплового потока $q_M$ постоянна в интервале времени $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$, то величину $q_M$ можно вычислить из условия точного соответствия вычисленной в точке $x_k$ температуры измеренному значению. При использовании реальных данных, содержащих погрешности измерений температуры в случае малых безразмерных шагов по времени, данный подход приводит к большим колебаниям вычисляемых значений плотности теплового потока, и его, по-видимому, не стоит применять на практике. Здесь этот метод анализируется в связи с тем, что он способствует лучшему пониманию обратных задач, а также потому, что точная подгонка вычисляемых и измеренных температур может использоваться как «внутренний блок» при разработке других вычислительных алгоритмов.

### 6.3.1. Модификация разностных уравнений прямой задачи теплопроводности для решения обратной задачи теплопроводности

Разностные методы решения прямых задач теплопроводности были рассмотрены в разд. 3.3. По аналогии с уравнением (3.3.45) разностные уравнения прямой одномерной задачи теплопроводности в случае неравномерной разностной сетки можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & & & & \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -c_{N-1} & b_{N-1} & -a_{N-1} & \\ & & & -c_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ \vdots \\ T_{N-1}^M \\ T_N^M \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b'_1 & a'_1 & & & & \\ c'_2 & b'_2 & a'_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & c'_{N-1} & b'_{N-1} & a'_{N-1} & \\ & & & c'_N & b'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{M-1} \\ T_2^{M-1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{M-1} \\ T_N^{M-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta t}{(\rho c \Delta x)_1} q_M \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta t}{(\rho c \Delta x)_N} q_{N,M} \end{bmatrix}. \qquad (6.3.1)$$

Коэффициенты $a_j$, $b_j$, $c_j$, $a'_j$, $b'_j$ и $c'_j$ зависят от шага сетки и значений теплофизических характеристик, а в линейном и квазилинейном случаях не зависят от постоянной величины плотности теплового потока $q_M$. С целью упрощения задачи в дальнейшем будем рассматривать только пять узлов. В более компактной форме уравнение (6.3.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & b_3 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & b_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ T_3^M \\ T_4^M \\ T_5^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1' + g_1 q_M \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}. \tag{6.3.2}$$

Коэффициенты $d$ учитывают всю правую часть уравнения (6.3.1), за исключением величины $q_M$. В прямой задаче значения $T_j^M$, $j = 1, \ldots, 5$, определяются в результате решения системы уравнений (6.3.2). Заметим, что имеет место явная зависимость температуры от плотности теплового потока $q_M$.

Вместо решения прямой задачи, имеющей вид системы уравнений (6.3.2), предположим, что величина $q_M$ неизвестна, а датчик температуры расположен в узле с номером 3 ($x_k/L = 0{,}5$). В этом случае вместо искомой в прямой задаче $T_3^M$ известно измеренное значение температуры $Y_M$. Тогда для обратной задачи система уравнений (6.3.2) принимает вид

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & g_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ \hat{q}_M \\ T_4^M \\ T_5^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2 + a_2 Y_M \\ d_3 - b_3 Y_M \\ d_4 + c_4 Y_M \\ d_5 \end{bmatrix}. \tag{6.3.3}$$

Система уравнений состоит из пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными ($T_1^M$, $T_2^M$, $\hat{q}_M$, $T_4^M$, $T_5^M$). Эта система может быть решена с помощью любого из существующих методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Как отмечалось в предыдущих главах, в такой формулировке задача является линейной относительно искомой плотности теплового потока и проведения итераций не требуется. В работе Бека и Вулфа [1] было показано, что в случае $\theta = 1/2$ и сосредоточенной теплоемкости изложенный подход приводит к неустойчивым результатам. Следовательно, при использовании точной подгонки к данным одиночного датчика температуры необходимо избегать значения $\theta = 1/2$. Такой же алгоритм при $\theta = 1$ использовал Алифанов [16]. (Определение $\theta$, см. разд. 3.3.3.)

### 6.3.2. Применение коэффициентов чувствительности для точного согласования с данными одиночного датчика

В разд. 6.3.1 было показано, что при точном согласовании с данными одиночного датчика температуры получается система линейных алгебраических уравнений. Однако матрица этой системы уравнений, представленной в виде (6.3.3), не остается трехдиагональной. Поэтому непосредственное решение системы уравнений (6.3.3) не является в вычислительном отношении наиболее эффективным способом. Для одномерной линейной обратной задачи теплопроводности можно получить систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей и разработать очень эффективный алгоритм.

Распределение температур $T(x, t)$ непрерывно зависит от неизвестной плот-

ности теплового потока $q_M$ (постоянной в интервале $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$). Эта зависимость записывается в виде $T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)$, где $\mathbf{q}_{M-1}$ — вектор значений плотности теплового потока во все предыдущие моменты времени, а $t_{M-1}$ указывает момент времени, в который плотность изменилась ступенчатым образом. Так как функция $T(x, t)$ непрерывна по $q_M$, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности произвольного, но известного значения плотности теплового потока $q^*$:

$$T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) = T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*) + (q_M - q^*) \left.\frac{\partial T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M}\right|_{q_M = q^*} + \frac{(q_M - q^*)^2}{2!} \left.\frac{\partial^2 T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M^2}\right|_{q_M = q^*} + \cdots \quad (6.3.4)$$

Для линейных задач в уравнении (6.3.4) не равна нулю только первая производная, поэтому для некоторой координаты $x$ и момента времени $t_M$ имеем следующее точное соотношение:

$$T(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) = T(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*) + (q_M - q^*) X(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}), \quad (6.3.5)$$

где коэффициент чувствительности определяется выражением

$$X(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \left.\frac{\partial T(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M}\right|_{q_M = q^*}. \quad (6.3.6)$$

Заметим, что в линейной задаче $X$ не зависит от $q_M$.

При условии что для некоторого значения $q^*$ поле температур известно и имеется способ вычисления коэффициента чувствительности $X$, с помощью соотношения (6.3.5) можно найти распределение температур, соответствующее значению плотности $q_M$. Если задача допускает аналитическое решение, то $X$ можно рассчитать с применением способов, изложенных в разд. 1.6. Разностные методы вычисления $X$ рассмотрены в разд. 6.2, и в них используется соотношение (6.2.5).

В алгоритме решения обратной задачи, в котором осуществляется точная подгонка к показаниям датчика, левая часть соотношения (6.3.5) заменяется экспериментально измеренным значением температуры, после чего соотношение (6.3.5) принимает вид

$$Y_M = \overset{*}{T}{}_k^M + (\hat{q}_M - q^*) X_{k,1}. \quad (6.3.7)$$

Решение уравнения (6.3.7) дает оценку неизвестной плотности теплового потока $\hat{q}_M$

$$\hat{q}_M = q^* + \frac{Y_M - \overset{*}{T}{}_k^M}{X_{k,1}}, \quad (6.3.8)$$

где $\overset{*}{T}{}_k^M$ — температура в момент времени $t_M$ в узле расположения датчика $k$ при $q = q^*$ в интервале $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$. Вычислительная процедура состоит в следующем. Задается произвольное значение плотности теплового потока $q^*$ и вычисляется распределение температуры $T(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*)$. По известному коэффициенту чувствительности $X(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1})$ из уравнения (6.3.8) вычисляет-

ся плотность теплового потока $q_M$, при этом обеспечивается точное соответствие с измеренной температурой $Y_M$. По известному теперь значению $q_M$ с использованием соотношения (6.3.5) можно рассчитать распределение температуры в целом. Если $q^* = 0$, то уравнение (6.3.8) эквивалентно уравнению (5.3.1) в методе Штольца.

Эффективный способ вычисления коэффициентов чувствительности заключается в решении дифференциального уравнения, записанного относительно $X$ и имеющего вид (6.2.7). Поскольку $T$ и $X$ вычисляются аналогично, то можно обеспечить существенную экономию машинного времени. Для разработки эффективной процедуры численного решения необходимо тщательно разобраться в следующем алгоритме ТрехДиагональной МАтрицы (ТДМА) [1].

Для системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} & b_1 u_1 - a_1 u_2 = d_1 , \\ & -c_j u_{j-1} + b_j u_j - a_j u_{j+1} = d_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N-1 , \\ & -c_N u_{N-1} + b_N u_N = d_N . \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Прямое исключение (начинающееся в узле $N$) дает

$$\begin{aligned} & \omega_N = \frac{1}{b_N}, \quad e_N = \omega_N c_N, \quad f_N = \omega_N d_N , \\ & \omega_j = \frac{1}{b_j - a_j e_{j+1}}, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1 , \\ & f_j = \omega_j (d_j + a_j f_{j+1}), \quad e_j = \omega_j c_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 2 , \\ & f_1 = \omega_1 (d_1 + a_1 f_2). \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

Обратной подстановкой получаем

$$\begin{aligned} & u_1 = f_1 , \\ & u_j = e_j u_{j-1} + f_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Сравнивая обе задачи для $T$ и $X$, можно сделать следующие выводы:

| $T$ | | $X$ |
|---|---|---|
| $a_j, b_j, c_j$ | ← одинаковые → | $a_j, b_j, c_j$ |
| $\omega_j, e_j$ | ← одинаковые, но зависят только от $a_j, b_j, c_j$ → | $\omega_j, e_j$ |
| $d_1 = d'_1 + g_1 q_M$ | | $d_1 = g_1$ |
| $d_j \neq 0, j = 2, 3, \ldots, N$ | | $d_j = 0, j = 2, 3, \ldots, N$ |

Заметим, что разностные уравнения относительно $X$ можно получить дифференцированием по $q_M$ разностных уравнений относительно $T$. Рассматривая часть алгоритма для $T$, связанную с прямым исключением, можно показать, что все значения $f_n$ тождественно равны нулю, кроме $f_1$, и

$$f_1 = g_1 \omega_1 . \tag{6.3.12}$$

---

[1] В отечественной научно-технической литературе этот метод называется методом прогонки. — *Прим. пер.*

Следовательно, коэффициенты чувствительности вычисляются по формулам

$$X_{1,1} = f_1 = g_1 \omega_1, \tag{6.3.13}$$

$$X_{j,1} = e_j X_{j-1,1}, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \tag{6.3.14}$$

В результате алгоритм точной подгонки к значениям температуры, измеренным одиночным датчиком, можно сформулировать следующим образом:

1. Задается некоторое произвольное значение $q^*$ и вычисляется соответствующее распределение температуры $\overset{*}{T} = T(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*)$. Обычно выбирается $q^* = q_{M-1}$, однако для линейной задачи лучше использовать $q^* \equiv 0$, что позволяет уменьшить общий объем вычислений.

2. С использованием коэффициентов матрицы $a_n$, $b_n$, $c_n$, $\omega_n$ и $e_n$, которые применялись при вычислении $T$ на шаге 1, с помощью соотношений (6.3.13) и (6.3.14) рассчитываются коэффициенты чувствительности

$$X_{1,1} = f_1 = g_1 \omega_1 \ , \tag{6.3.13}$$

$$X_{j,1} = e_j X_{j-1,1}, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \tag{6.3.14}$$

3. С использованием разложения в ряд Тейлора

$$\hat{q}_M = q^* + \frac{Y_M - \overset{*}{T}{}_k^M}{X_{k,1}} \tag{6.3.8}$$

вычисляется значение плотности теплового потока, при котором обеспечивается точная подгонка к экспериментально измеренной температуре.

4. С использованием разложения в ряд Тейлора

$$\hat{T}_j^M = \overset{*}{T}{}_j^M + (\hat{q}_M - q^*) X_{j,1} \tag{6.3.15}$$

окончательно рассчитывается распределение температур.

В табл. 6.2 приведены результаты подсчета арифметических операций с целью определения относительного увеличения объема вычислений при решении обратной задачи по сравнению с прямой. Такие данные можно использовать при оценке вычислительной эффективности конкретных алгоритмов. В табл. 6.3 представлено число машинных циклов ЭВМ СДС 7600, которое требуется для выполнения каждой из четырех арифметических операций. Один цикл составляет 27 нс. Пусть

*Таблица 6.2.* Количество вычислительных операций для одного шага по времени в алгоритме решения обратной задачи, в котором производится точная подгонка к данным одиночного датчика температуры ($N$ — общее число узлов)

| Шаг | Уравнение | + или − | × | : | Примечания |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (6.3.10)<br>(6.3.11) | $3(N-1)$ | $5(N-1)$ | $N$ | Вычисления в прямой задаче |
| 2 | (6.3.13)<br>(6.3.14) | | $N$ | | |
| 3 | (6.3.8) | 2 | | 1 | Вычисления только в обратной задаче |
| 4 | (6.3.15) | $2N$ | $N$ | | |
| Сумма (2 + 3 + 4) | | $2(N+1)$ | $2N$ | 1 | |

$\tau_a$, $\tau_m$ и $\tau_d$ определяют время, необходимое для выполнения одиночной операции сложения, умножения и деления соответственно. С использованием данных табл. 6.2 и 6.3 можно вычислить относительное увеличение времени счета при решении обратной задачи по сравнению с прямой задачей по формуле

$$\frac{\Delta\tau}{\tau}=\frac{2(N+1)+2N(\tau_m/\tau_a)+(\tau_d/\tau_a)}{3(N-1)+5(N-1)(\tau_m/\tau_a)+N(\tau_d/\tau_a)} \ . \qquad (6.3.16)$$

По-видимому, наиболее приемлемым термином для величины $\Delta\tau/\tau$ является «показатель объема вычислений», при этом в формуле (6.3.16) не учитывается тот факт, что требуется некоторое дополнительное время на завершение одной операции и начало последующей. Для конкретной ЭВМ $\Delta\tau/\tau$ зависит только от полного числа узлов $N$. Полученные с использованием данных табл. 6.3 величины $\Delta\tau/\tau$ для различных значений $N$ приведены в табл. 6.4. При решении обратной задачи увеличение затрат машинного времени по сравнению с прямой задачей составляет менее 40%.

Заметим, что выражение (6.3.16) не зависит от номера узла, в котором расположен датчик температуры. При размещении датчика в узле под номером 1 требуется такой же объем вычислений, как и при размещении датчика на противоположной стороне в узле под номером $N$. Некоторое улучшение вычислительной эффективности можно обеспечить,изменяя структуру алгоритма. Это изменение возможно на том основании, что нет необходимости знать коэффициенты чувствительности $X_{j,1}$ и $\overset{*}{T}{}_j^M$ при $x > x_k$, где $x_k$ — глубина расположения датчика. Если датчик располагается недалеко от узла 1, т. е. недалеко от активной поверхности, то изменение структуры алгоритма может дать значительную экономию. Вычислительный алгоритм модифицируется следующим образом:

1. Задается некоторое значение $q^*$ и выполняется часть алгоритма трехдиагональной матрицы, связанная с прямым исключением (заметим, что на данном шаге от значения плотности теплового потока зависит только величина $f_1$).

2. Выполняется часть алгоритма трехдиагональной матрицы, связанная с обратной подстановкой, и вычисляются $\overset{*}{T}{}_j^M$

$$\begin{aligned} &\overset{*}{T}{}^M = f_1 \ , \\ &\overset{*}{T}{}_j^M = e_j \overset{*}{T}{}_{j-1}^M + f_j, \quad j=2, 3, \ldots, K \ , \\ &\overset{*}{T}(x_K, t_M) = \overset{*}{T}{}_K^M \ . \end{aligned} \qquad (6.3.17)$$

*Таблица 6.3.* Относительные скорости выполнения различных арифметических операций на ЭВМ СДС 7600 [2]

| Операция | Число машинных циклов | Относительное время ($\tau/\tau_a$) |
|---|---|---|
| + или − | 4 | 1,0 |
| × | 5 | 1,25 |
| : | 20 | 5,0 |

*Таблица 6.4.* Показатель объема вычислений при точной подгонке к данным одиночного термодатчика (ЭВМ СДС 7600, табл. 6.3). Число элементов $N-1$

| $N$ | $\Delta\tau/\tau=\dfrac{4{,}5N+7}{14{,}25N-9{,}25}$ |
|---|---|
| 11 | 0,383 |
| 21 | 0,350 |
| 31 | 0,339 |
| 41 | 0,333 |
| 81 | 0,324 |

3. Таким же образом, как и в предыдущем варианте алгоритма, вычисляется коэффициент чувствительности $X_{j,1}$:

$$X_{1,1}=g_1\omega_1\ , \tag{6.3.13}$$

$$X_{j,1}=e_jX_{j-1,1},\quad j=2,3,\ldots,K\,. \tag{6.3.14}$$

4. С использованием разложения в ряд Тейлора

$$q_M=q^*+\frac{Y_M-\overset{*}{T}{}_K^M}{X_{K,1}} \tag{6.3.8}$$

вычисляется значение плотности теплового потока, при котором обеспечивается точная подгонка к экспериментально измеренной температуре.

5. Для значения плотности теплового потока $q_M$, вычисленного на шаге 4, заново вычисляется $f_1=\omega_1(d_1+a_1f_2)$ и снова выполняется часть алгоритма, связанная с обратной подстановкой

$$\begin{aligned} &T_1^M=f_1\ ,\\ &T_j^M=e_jT_{j-1}^M+f_j,\quad j=2,3,\ldots,N. \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

Заметим, что использовать разложение в ряд Тейлора (6.3.15) для вычисления распределения температуры не представляется возможным, так как коэффициенты чувствительности для глубин, больших чем глубина расположения датчика температуры, на шаге 2 не вычисляются.

Подсчет вычислительных операций показывает, что по сравнению с первым вариантом модифицированный алгоритм более эффективен. Количество необходимых вычислительных операций для модифицированного алгоритма указано в табл. 6.5. Следует заметить, что если объединить шаги 1 и 5, то вместе они эквивалентны решению одной прямой задачи с дополнительным вычислением $f_1=\omega_1(d_1+a_1f_2)$.

Показатель объема вычислений модифицированного алгоритма определяется

*Таблица 6.5.* Количество вычислительных операций для модифицированного алгоритма, в котором производится точная подгонка к данным одиночного датчика температуры ($K$ — номер узла расположения датчика, $N$ — число узлов, $K\leqslant N$)

| Шаг | Уравнение | + или − | × | : | Примечания |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (6.3.11) | | | | Эквивалентно решению прямой задачи |
| 5 | (6.3.10) | | | | |
| 1 + 5 | | $3(N-1)$ | $5(N-1)$ | | |
| 2 | (6.3.17) | $K-1$ | $K-1$ | | Вычисления $\overset{*}{T}{}_n^M$ |
| 3 | (6.3.13) (6.3.14) | | $K$ | | Вычисления $X_{n,1}$ |
| 4 | (6.3.8) | 2 | | 1 | |
| 5 | — | 1 | 2 | | $f_1=\omega_1(d_1+a_1f_2)$ |
| Сумма (для обратной задачи) | | $K+2$ | $2K+1$ | 1 | Дополнительно к вычислениям в обратной задаче |

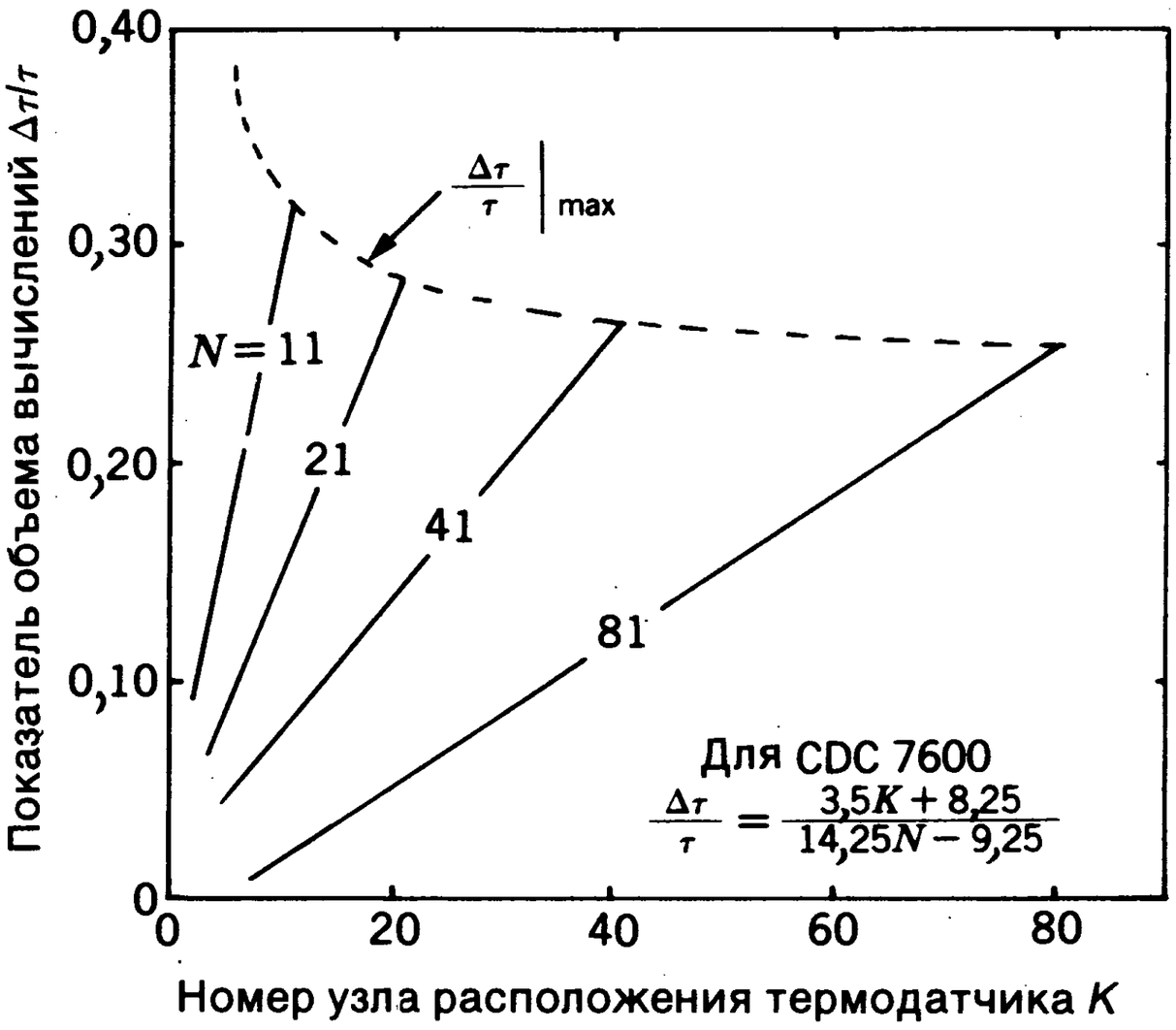



Рис. 6.2. Показатель объема вычислений для алгоритма, в котором осуществляется точная подгонка к показаниям одиночного датчика ($K$ — номер узла расположения датчика, $N$ — число узлов, $K \leqslant N$).

следующим образом:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{K + 2 + (2K+1)(\tau_m/\tau_a) + (\tau_d/\tau_a)}{3(N-1) + 5(N-1)(\tau_m/\tau_a) + N(\tau_d/\tau_a)}. \tag{6.3.19}$$

Результаты расчетов по формуле (6.3.19) для ЭВМ СДС 7600 представлены на рис. 6.2. Если датчик температуры расположен вблизи нагреваемой поверхности (что соответствует малым значениям К), то модифицированный алгоритм гораздо эффективнее, чем первоначально предложенный алгоритм.

Рассмотренный способ минимизации объема вычислений при решении ОЗТ впервые был предложен Блакуэллом [3]. Однако в первоначальном виде этот подход не раскрывал в явной форме концепцию применения коэффициентов чувствительности.

В реальных практических ситуациях результаты измерений температуры содержат погрешности. Если производится точная подгонка к измеренным значениям температуры, то погрешности измерений температуры вызывают большие погрешности в плотности теплового потока. Поэтому точная подгонка по температуре не рекомендуется, если только не используются предварительно выполненные до начала вычисления плотности теплового потока сглаживание экспериментальных данных и (или) большие шаги по времени ($\alpha\Delta t/x_k^2 > 1$). Метод функциональной аппроксимации, в котором учитываются последующие температуры (гл. 4), можно использовать в сочетании с разностными методами и при меньших шагах вычислений по времени, не сталкиваясь при этом с проблемой устойчивости. Этот метод анализируется в разд. 6.6 и 6.7.

## 6.4. Несколько датчиков температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), один последующий шаг по времени

Чтобы получить как можно больше экспериментальной информации, рекомендуется использовать несколько датчиков температуры. Датчики могут быть установлены либо на различных расстояниях от нагреваемой поверхности, либо на одном и том же расстоянии. В случае нескольких датчиков точную подгонку

можно обеспечить только для одного из них. Выход из положения заключается в определении такого постоянного на интервале $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$ значения $q_M$, при котором минимизируется сумма квадратов отклонений для всех рассматриваемых датчиков. Если имеется всего $J$ датчиков, то погрешность по методу наименьших квадратов определяется по формуле

$$S = \sum_{k=1}^{J} [Y_{k,M} - T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)]^2. \tag{6.4.1}$$

где $k$ — номер датчика, а $M$ — номер шага по времени в $Y_{k,M}$ [1]. Важно помнить, что $k$ представляет собой номер датчика, а не номер узла конечно-разностной сетки. Дифференцируя выражение (6.4.1) по $q_M$, получим

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 0 = 2 \sum_{k=1}^{J} [Y_{k,M} - T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)][-X(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1})], \tag{6.4.2}$$

где $X$ определяется по формуле

$$X(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \frac{\partial T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} = X_{k,1}. \tag{6.4.3}$$

Как и в разд. 6.3, задается произвольное значение плотности теплового потока $q^*$ и применяется разложение в ряд Тейлора (6.3.5), которое в данном случае имеет вид

$$T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) = \overset{*}{T}{}_k^M + (q_M - q^*) X_{k,1}. \tag{6.4.4}$$

Подставляя (6.4.4) в (6.4.2), заменяя $q_M$ на $\hat{q}_M$ и разрешая результат относительно $q_M$, получим

$$\hat{q}_M = q^* + \frac{\sum_{k=1}^{J} X_{k,1}(Y_{k,M} - \overset{*}{T}{}_k^M)}{\sum_{k=1}^{J} X_{k,1}^2}. \tag{6.4.5}$$

Если $J = 1$, то уравнение (6.4.5) преобразуется в уравнение (6.3.8). Опять заметим, что хорошим приближением является $q^* \equiv 0$.

Приведенный на рис. 6.2 показатель объема вычислений очень хорошо соответствует случаю нескольких датчиков. При этом К обозначает номер узла, в котором располагается наиболее удаленный от нагреваемой поверхности датчик. Дополнительные вычисления в задаче с несколькими датчиками по сравнению с задачей, в которой используется один датчик (расположенный в узле $K$), связаны с использованием уравнения (6.4.5) вместо (6.3.8). Эти дополнительные вычисления составляют незначительную часть общего объема вычислений. Поэтому для приближенных оценок в случае с несколькими датчиками можно использовать данные рис. 6.2.

Вместо использования уравнений (6.4.5) при решении задачи с несколькими датчиками только при одном последующем шаге по времени можно поступить следующим образом. Вначале можно вычислить значения плотности теплового потока $\tilde{q}_{k,M}$, каждое из которых обеспечивает точную подгонку к отдельной ($k$-й) измеренной температуре $Y_{k,M}$, а затем рассчитать взвешенное среднее по всем

---

[1] Обозначение с двойной индексацией $Y(x_k, t_M) = Y_{k,M}$ соответствует классическому обозначению $(x, t)$.

$\tilde{q}_{k,M}$. Выражение для этого среднего можно получить с использованием разложения в ряд Тейлора, но несколько в другой форме, чем соотношение (6.4.4). Разлагая распределение температур при значении $q_M$ в ряд по $\tilde{q}_{k,M}$, получим

$$T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) = T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \tilde{q}_{k,M}) + \left. + (q_M - \tilde{q}_{k,M}) \frac{\partial T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} \right|_{q_M = \tilde{q}_{k,M}} \tag{6.4.6}$$

При точной подгонке к показаниям $k$-го датчика имеем

$$T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \tilde{q}_{k,M}) = Y_{k,M} \ , \tag{6.4.7}$$

$$\left. \frac{\partial T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} \right|_{q_M = \tilde{q}_{k,M}} = X(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = X_{k,1} . \tag{6.4.8}$$

Условие минимума суммы квадратов отклонений принимает вид

$$\sum_{k=1}^{J} X_{k,1}(\hat{q}_M - \tilde{q}_{k,M}) X_{k,1} = 0 \ . \tag{6.4.9}$$

Отсюда получим выражение для $\hat{q}_M$

$$\hat{q}_M = \sum_{k=1}^{J} w_k \tilde{q}_{k,M} \ , \tag{6.4.10}$$

где весовые множители для плотностей теплового потока связаны с коэффициентами чувствительности соотношениями

$$w_k = \frac{X_{k,1}^2}{\sum_{k=1}^{J} X_{k,1}^2}, \quad \sum_{k=1}^{J} w_k = 1 \ . \tag{6.4.11}$$

Уравнение (6.4.10) позволяет предложить другую интерпретацию решения обратной задачи для нескольких датчиков при одном последующем шаге по времени. Процедура состоит в независимом рассмотрении каждого датчика (на одном шаге по времени) и определении плотности темплового потока $\tilde{q}_{k,M}$, которая обеспечивает точную подгонку к измеренному этим датчиком значению температуры $Y_{k,M}$. Полученная плотность связана с произвольно заданной ранее плотностью теплового потока $q^*$ формулой разложения в ряд Тейлора

$$\tilde{q}_{k,M} = q^* + \frac{Y_{k,M} - \overset{*}{T}{}_k^M}{X_{k,1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, J \ . \tag{6.4.12}$$

Оцененные по формуле (6.4.12) значения $\tilde{q}_{k,M}$ взвешиваются (осредняются) с использованием соотношения (6.4.10). При анализе коэффициентов чувствительности в разд. 1.6 было показано, что ближайший к нагреваемой поверхности датчик будет иметь наибольшие коэффициенты чувствительности, и поэтому ему будет соответствовать наибольший весовой множитель. В задачах с постоянными теплофизическими свойствами коэффициенты чувствительности $X_{k,1}$, а следовательно, и весовые коэффициенты $w_k$ можно вычислить только один раз. Если для теплофизических свойств принимается квазилинейная зависимость от температуры, то и $X_{k,M}$, и $w_k$ должны вычисляться на каждом шаге по времени.

*Пример 6.1.* Используя приведенные в табл. 1.1 значения температуры для теплоизолированной с одной стороны плоской пластины при ступенчатом изменении плотности теплового потока, вычислите весовые коэффициенты плотности теплового потока (6.4.11) для двух датчиков, расположенных на (безразмерных) глубинах $x_1/L = 0$ и $x_2/L = 0{,}5$ при значениях (безразмерного) шага по времени $\Delta t^+ = \alpha\Delta t/L^2 = 0{,}05$ и 0,5. Заметим, что данные табл. 1.1 в графической форме представлены на рис. 1.7.

*Решение.* Хотя в табл. 1.1 приведены безразмерные значения температуры, безразмерные коэффициенты чувствительности $\partial T/\partial(qL/k)$ полностью совпадают с $T^+$:

$$\Delta t^+ = \frac{\alpha\Delta t}{L^2} = 0{,}05\ , \qquad \frac{\alpha\Delta t}{L^2} = 0{,}5$$

$$X^+_{1,1} = 0{,}252313\ , \qquad X^+_{1,1} = 0{,}831876\ ,$$
$$X^+_{2,1} = 0{,}0153659, \qquad X^+_{2,1} = 0{,}458333\ ,$$
$$w_1 = 0{,}9963\ (x/L = 0), \qquad w_1 = 0{,}7671\ ,$$
$$w_2 = 0{,}0037\ (x/L = 0{,}5). \qquad w_2 = 0{,}2329\ .$$

Из сравнения коэффициентов $w_k$ в рассмотренном выше примере можно сделать несколько важных выводов. При $\Delta t^+ = 0{,}05$ расположенный на глубине $x^+ = 0{,}5$ датчик дает очень мало информации, так как его коэффициент чувствительности мал по сравнению с коэффициентом чувствительности датчика, расположенного на поверхности. При $\Delta t^+ = 0{,}5$ шаг по времени достаточно большой и датчик 2 успевает измерить температуру. Однако датчик 1 все-таки имеет больший весовой множитель из-за его пропорциональности квадрату коэффициента чувствительности.

Так как измерения температуры неизбежно содержат погрешности, компоненты плотности теплового потока, определяемые из условия точной подгонки к показаниям одиночного датчика, имеют еще бóльшие погрешности. Даже в случае нескольких датчиков, рассмотренных в примере 6.1, расположенные на большем удалении от нагреваемой поверхности датчики оказывают очень слабое сглаживающее влияние на плотность теплового потока. Следовательно, необходимо использовать другой подход. Сглаживание результатов измерения температуры до решения ОЗТ определенно уменьшает колебания в плотности теплового потока, однако такой подход не учитывает того обстоятельства, что импульс $q_M$ на интервале $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$ влияет на сигнал датчика при $t > t_M$. Подходом, в котором одновременно используется вся информация о температуре, является процедура оценивания во всей области по времени, и эта процедура рассматривается в следующем разделе.

## 6.5. Оценивание во всей области разностными методами

Процедура оценивания во всей области анализировалась в разд. 4.4.2. Применение этой процедуры наиболее рационально в том случае, когда из физических соображений можно предположить, что изменение плотности теплового потока по времени имеет определенную аналитическую форму, например (4.4.1) — (4.4.5). Уравнениями (4.4.1) — (4.4.5) ни в коей мере не ограничивается набор возможных аналитических зависимостей. Определенное преимущество процедуры оценивания во всей области состоит в том, что проблема устойчивости не стоит очень остро. Однако требуется больший объем вычислений.

Процедуру оценивания во всей области сначала рассмотрим на конкретном мере, а затем проанализируем ее обобщение. Предположим, что изменение ности теплового потока по времени достаточно точно описывается па-лой

$$q(t)=\beta_1+\beta_2 t+\beta_3 t^2. \tag{6.5.1}$$

аметры $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ необходимо оценить таким образом, чтобы рассчитанные ературы согласовывались (в определенных пределах) с экспериментально из-нными температурами. Мера соответствия или согласованности определяет-бычным критерием наименьших квадратов. Если $Y_i$ — экспериментально из-нная температура, а $T_i$ — вычисленная температура и обе получены в мо-времени $t_i$ и в одной и той же точке, то сумма квадратов отклонений деляется выражением

$$S=\sum_{i=1}^{r}(Y_i-T_i)^2. \tag{6.5.2}$$

исленная температура неявно зависит от параметров ($\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$)

$$T_i=T_i(\beta_1,\beta_2,\beta_3). \tag{6.5.3}$$

ходимо так выбрать параметры ($\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$), чтобы сумма $S$ была минималь-Это условие определяется соотношением

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_j}=-2\sum_{i=1}^{r}(Y_i-\hat{T}_i)\frac{\partial T_i}{\partial \beta_j}=0, \quad j=1,2,3. \tag{6.5.4}$$

полагая, что вычисленная температура непрерывна по параметрам ($\beta_1$, $\beta_2$, е можно разложить в ряд Тейлора в окрестности некоторых пробных значе-параметров. Если ($\beta_1^{\nu}$, $\beta_2^{\nu}$, $\beta_3^{\nu}$) представляют собой пробные значения, а $\beta_2^{\nu+1}$, $\beta_3^{\nu+1}$) — новые или улучшенные оценки параметров, то

$$\hat{T}_i^{\nu+1}=\hat{T}_i^{\nu}+(\beta_1^{\nu+1}-\beta_1^{\nu})\left.\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1}\right|_{\beta=\beta^{\nu}}+(\beta_2^{\nu+1}-\beta_2^{\nu})\left.\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2}\right|_{\beta=\beta^{\nu}}+(\left.\beta_3^{\nu+1}-\beta_3^{\nu})\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3}\right|_{\beta=\beta^{\nu}}. \tag{6.5.5}$$

тим, что при разложении в ряд Тейлора членами высокого порядка малости ебрегается, однако для линейных задач это разложение является точным. тавляя выражение (6.5.5) в каждое из трех уравнений (6.5.4), после преобра-ний получим

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1} & \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1} & \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1}\\ \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2} & \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2} & \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2}\\ \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3} & \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3} & \sum\limits_{i=1}^{r}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3}\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3}\end{bmatrix}^{\nu}\begin{bmatrix}\beta_1^{\nu+1}-\beta_1^{\nu}\\ \beta_2^{\nu+1}-\beta_2^{\nu}\\ \beta_3^{\nu+1}-\beta_3^{\nu}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{r}(Y_i-\hat{T}_i)\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1}\\ \sum\limits_{i=1}^{r}(Y_i-\hat{T}_i)\frac{\partial T_i}{\partial \beta_2}\\ \sum\limits_{i=1}^{r}(Y_i-\hat{T}_i)\frac{\partial T_i}{\partial \beta_3}\end{bmatrix}. \tag{6.5.6}$$

ний индекс $\nu$ у матрицы коэффициентов и вектора правой части показывает, все элементы должны вычисляться при $\beta=\beta^{\nu}$. Уравнение (6.5.6) является йной системой трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Вели-

чина $\beta_j^{\nu+1} - \beta_j^{\nu}$ рассматривается как неизвестный поправочный коэффициент. В линейной задаче коэффициенты чувствительности не зависят от параметров, матрица коэффициентов также не зависит от параметров, и поэтому требуется только один шаг (итерация). Хотя плотность теплового потока в данном примере линейна относительно параметров ($\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$), в случае зависимости теплофизических свойств от температуры задача становится нелинейной и требуются итерации. Для нелинейных задач один из подходов к вычислению коэффициентов чувствительности состоит в применении конечных разностей, например

$$\frac{\partial T_i}{\partial \beta_1} \approx \frac{T_i[(1+\varepsilon)\beta_1, \beta_2, \beta_3] - T_i(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}{\varepsilon \beta_1}, \tag{6.5.7}$$

где $\varepsilon$ — малое число, скажем 0,001. Для вычисления каждого коэффициента чувствительности необходимо решить две прямые задачи, но одна из них является общей для всех коэффициентов. В рассматриваемом примере с тремя параметрами в итоге на каждой итерации требуется решить четыре прямые задачи. Кроме того, необходимо решить систему из трех линейных алгебраических уравнений (6.5.6) [см. комментарии после уравнения (4.5.19)].

На первый взгляд может показаться, что возможно некоторое сокращение объема вычислений, если коэффициенты чувствительности вычислять непосредственно, решая дифференциальное уравнение, аналогичное (6.2.7). Однако в случае нелинейной зависимости теплофизических характеристик от температуры это не так. При решении задачи для всей области может оказаться невозможной локальная линеаризация, осуществляемая путем оценивания теплофизических свойств на предыдущем шаге по времени, как в последовательной процедуре (разд. 6.3). При рассмотрении уравнения (6.2.7) в качестве исходной модели для поля температур краевая задача для коэффициента чувствительности ($T_{\beta j}$) имеет вид

$$-T_{\beta_j} \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} - k \frac{\partial T_{\beta_j}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = t^{j-1}, \quad j=1, 2, 3, \tag{6.5.8}$$

$$\rho c \frac{\partial T_{\beta_j}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T_{\beta_j}}{\partial x}\right) = -T_{\beta_j} \frac{\partial}{\partial T}(\rho c) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{\beta_j} \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad j=1, 2, 3, \tag{6.5.9}$$

$$-T_{\beta_j} \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=L} - k \frac{\partial T_{\beta_j}}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0 \quad j=1, 2, 3, \tag{6.5.10}$$

$$T_{\beta_j}(x, 0) = 0. \tag{6.5.11}$$

Эта задача линейна относительно $T_{\beta j}$ в том случае, когда известно поле температур, так как величины $k$, $\rho c$, $\partial k/\partial T$ и $\partial(\rho c)/\partial T$ можно рассматривать как известные функции координаты. Однако дифференциальное уравнение для $T_{\beta j}$ стало отличаться от уравнения для $T$. Хотя в уравнениях (6.5.8) — (6.5.11) параметры ($\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$) в явном виде не появляются, от них неявно зависит поле температуры $T(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Если описывающая плотность теплового потока функция нелинейна по параметрам, то в задаче для коэффициента чувствительности параметры присутствуют в явном виде в граничных условиях. Например, при использовании в качестве модели плотности теплового потока выражения (4.4.4)

$$q(t) = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 t}), \tag{4.4.4}$$

граничное условие для $T_{\beta_2}$ имеет вид

$$-\left(T_{\beta_2}\frac{\partial k}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}-\left(k\frac{\partial T_{\beta_2}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}=\beta_1 te^{-\beta_2 t} \tag{6.5.12}$$

и нелинейно по параметрам.

Изложенную выше процедуру легко можно распространить на модели плотности тепловых потоков с большим числом параметров. В таком случае удобнее использовать матричную запись. Дополнительные подробности о матричных вычислениях можно найти в книге Бека и Арнольда [4, гл. 6]. Пусть **Y** представляет собой вектор дискретно измеренных температур и **T** — вектор соответствующих вычисленных температур в точке расположения датчика:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\\vdots\\T_r\end{bmatrix},\quad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_r\end{bmatrix}. \tag{6.5.13}$$

Индексы у $T$ и $Y$ обозначают время, и всего рассматривается $r$ дискретных моментов времени. Матричная форма функции наименьших квадратов (6.5.2) имеет вид

$$S=(\mathbf{Y}-\mathbf{T})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{T}). \tag{6.5.14}$$

Вектор из $p$ параметров $\boldsymbol{\beta}$ $(p<r)$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_p\end{bmatrix} \tag{6.5.15}$$

необходимо определить из условия минимума $S$. В данной процедуре используется матричная производная от выражения (6.5.14). Эту производную обозначим следующим образом:

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}}\equiv\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\beta_1}\\\dfrac{\partial}{\partial\beta_2}\\\vdots\\\dfrac{\partial}{\partial\beta_p}\end{bmatrix}. \tag{6.5.16}$$

Дифференцируя (6.5.14) по $\beta$, получим

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}}S=-2(\nabla_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{T}^T)(\mathbf{Y}-\mathbf{T})=\mathbf{0}. \tag{6.5.17}$$

Матрица коэффициентов чувствительности записывается в форме

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta})=(\nabla_{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{T}^T)^T, \tag{6.5.18}$$

или

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial T_1}{\partial\beta_1} & \dfrac{\partial T_1}{\partial\beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial T_1}{\partial\beta_p}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\dfrac{\partial T_r}{\partial\beta_1} & \dfrac{\partial T_r}{\partial\beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial T_r}{\partial\beta_p}\end{bmatrix}. \tag{6.5.19}$$

Подставляя выражение (6.5.18) в уравнение (6.5.17), получим

$$\mathbf{X}^T(\mathbf{Y}-\mathbf{T})=\mathbf{0}. \tag{6.5.20}$$

Матричная форма записи разложения в ряд Тейлора выражения для температуры по параметрам имеет вид

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\beta}^{\nu+1})=\mathbf{T}^{\nu+1}=\mathbf{T}^{\nu}+(\nabla_{\beta}\mathbf{T}^T)^T|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\nu}}(\boldsymbol{\beta}^{\nu+1}-\boldsymbol{\beta}^{\nu})+\cdots . \tag{6.5.21}$$

Соотношение (6.5.21) является матричной формой соотношения (6.5.5). Оставляя в соотношении (6.5.21) только линейные члены и подставляя его в уравнение (6.5.20), получим нормальное уравнение

$$\mathbf{X}^T(\boldsymbol{\beta}^{\nu})\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}^{\nu})(\boldsymbol{\beta}^{\nu+1}-\boldsymbol{\beta}^{\nu})=\mathbf{X}^T(\boldsymbol{\beta}^{\nu})(\mathbf{Y}-\mathbf{T}^{\nu}), \tag{6.5.22}$$

которое является матричным аналогом системы (6.5.6). Решение можно записать в виде

$$\boldsymbol{\beta}^{\nu+1}-\boldsymbol{\beta}^{\nu}=\mathbf{P}(\boldsymbol{\beta}^{\nu})\mathbf{X}^T(\boldsymbol{\beta}^{\nu})(\mathbf{Y}-\mathbf{T}^{\nu}), \tag{6.5.23}$$

где

$$\mathbf{P}^{-1}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{X}^T(\boldsymbol{\beta})\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}). \tag{6.5.24}$$

В линейной задаче $\mathbf{X}(\beta)$ не зависит от $\beta$, и для решения уравнения (6.5.22) требуется только одна итерация. При вычислении коэффициентов чувствительности с использованием разностного соотношения (6.5.7) задача с $p$ параметрами требует решения $p+1$ прямых задач на каждой итерации. Если величина $p$ велика и приближается к $r$, как в рассматриваемом в разд. 6.3 последовательном методе, то объем вычислений, требуемый для оценивания во всей области, становится непомерно большим даже для линейной задачи. Следовательно, использовать процедуру оценивания во всей области не рекомендуется, за исключением тех случаев, когда функциональная форма модели плотности теплового потока строго соответствует физическому смыслу задачи и содержит достаточно малое число параметров.

## 6.6. Одиночный датчик температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), $r$ последующих шагов по времени

В разд. 1.6 было отмечено, что коэффициент чувствительности относительно импульса теплового потока конечной продолжительности после прекращения действия теплового потока может отличаться от нуля. Следовательно, тепловой поток $q(t)$ плотностью, равной $q_M$ в интервале $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$ и равной нулю при остальных значениях $t$, будет влиять на измерения $Y_M$, $Y_{M+1}$, . . . . Поэтому мощная процедура оценивания $q_M$ должна использовать последующие измерения температуры. Бек [5] первым понял важность последующей информации о температуре и использовал ее при решении ОЗТ с помощью теоремы Дюамеля. Сочетание разностных методов и значений последующих температур для решения ОЗТ впервые применили Бек и Вулф [1]. Бек и др. [6] использовали понятие коэффициента чувствительности и значительно уменьшили объем вычислений, требуемый для решения обратной задачи разностными методами с учетом последующих температур. В данном разделе применительно к одиночному датчику температуры анализируется метод функциональной аппроксимации, в котором используется предположение о постоянстве плотности теплового потока и учитывается произвольное число последующих шагов по времени.

Предположим, что до момента времени $t_{M-1}$ решение обратной задачи уже получено, т. е. оценка плотности теплового потока $\hat{q}_{M-1}$ и распределение температур $\hat{T}_i^{M-1}$ известны. Затем время увеличивается на один шаг по времени и становится равным $t_M$. Требуется найти оценку $q_M$. Одиночный датчик температуры расположен на глубине $x_k$ от нагреваемой поверхности. *Временно* предполагается, что на протяжении $r$ последующих шагов плотность теплового потока постоянна. Условия ОЗТ схематично показаны на рис. 6.3. Ищется оценка постоянной на протяжении $r$ последующих шагов величины $q_M$, которая минимизирует сумму квадратов отклонений между вычисленными и измеренными температурами. Эта сумма имеет вид

$$S=\sum_{i=1}^{r}\left[Y(x_k, t_{M+i-1})-T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)\right]^2. \tag{6.6.1}$$

Дифференцируя $S$ по $q_M$, заменяя $q_M$ на $\hat{q}_M$ и приравнивая $\partial S/\partial q_M$ нулю, получим

$$0=\frac{\partial S}{\partial q_M}=-2\sum_{i=1}^{r}\left[Y(x_k, t_{M+i-1})-\right.$$

$$\left.-T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}_M)\right]Z(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}), \tag{6.6.2}$$

где коэффициент чувствительности вычисляется по формуле

$$Z_{k,i}=Z(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1})=\frac{\partial T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M}. \tag{6.6.3}$$

Так как предполагается, что на протяжении $r$ последующих шагов по времени плотность $q_M$ постоянна, то вместо $X$ используется коэффициент чувствительности $Z$. Сравнение двух коэффициентов чувствительности показано на рис. 6.1. Используя по аналогии с (6.3.4) разложение в ряд Тейлора, получим

$$T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)=T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*)+$$

$$+(q_M-q^*)Z(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}). \tag{6.6.4}$$

Схематично разложение в ряд Тейлора показано на рис. 6.4. В индексных обозначениях соотношение (6.6.4) принимает вид

$$T_k^{M+i-1}=\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}+(\hat{q}_M-q^*)Z_{k,i}, \quad i=1, 2, \ldots, r. \tag{6.6.5}$$

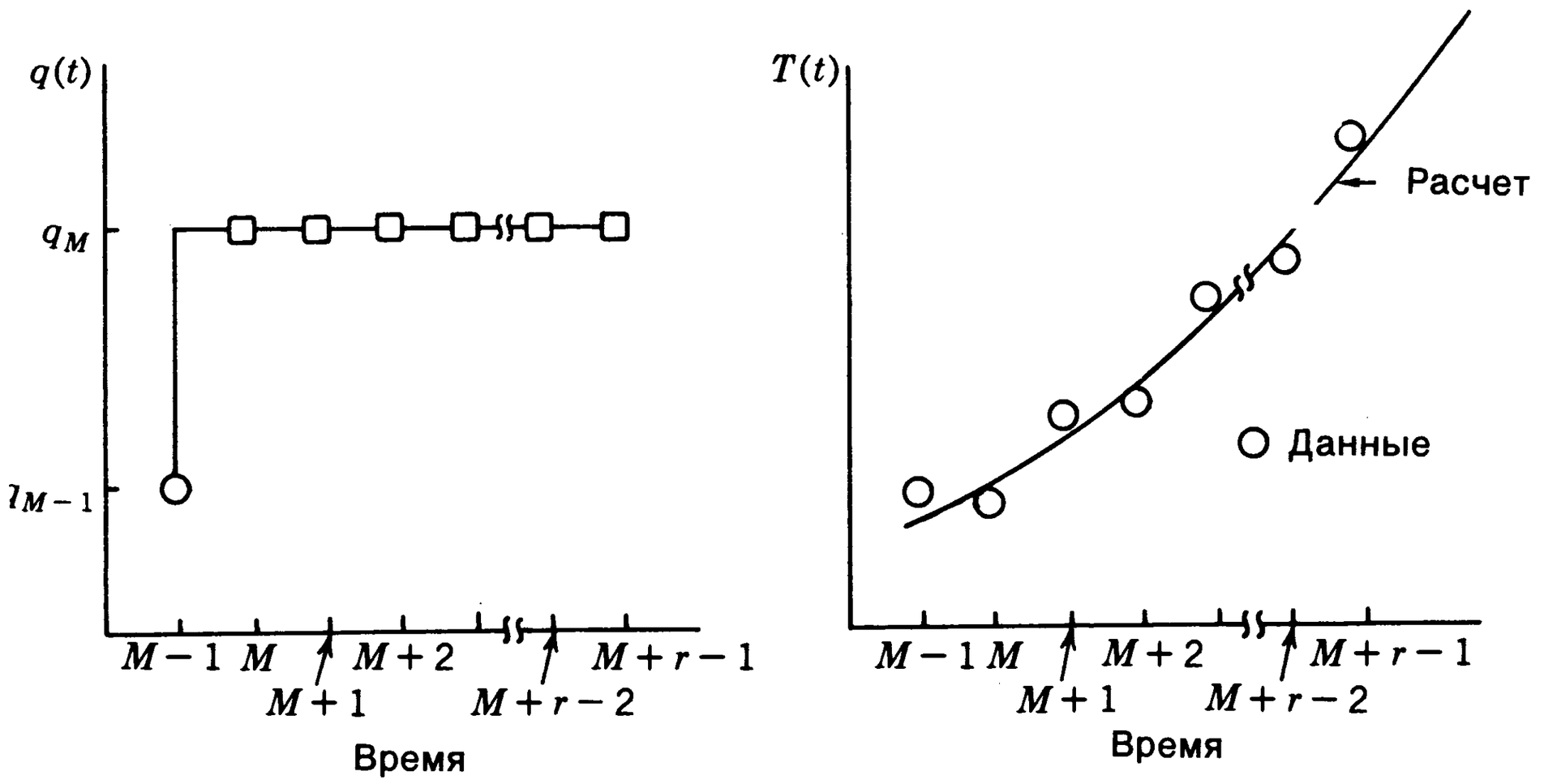



Рис. 6.3. Иллюстрация к решению обратной задачи теплопроводности с использованием $r$ последующих температур.

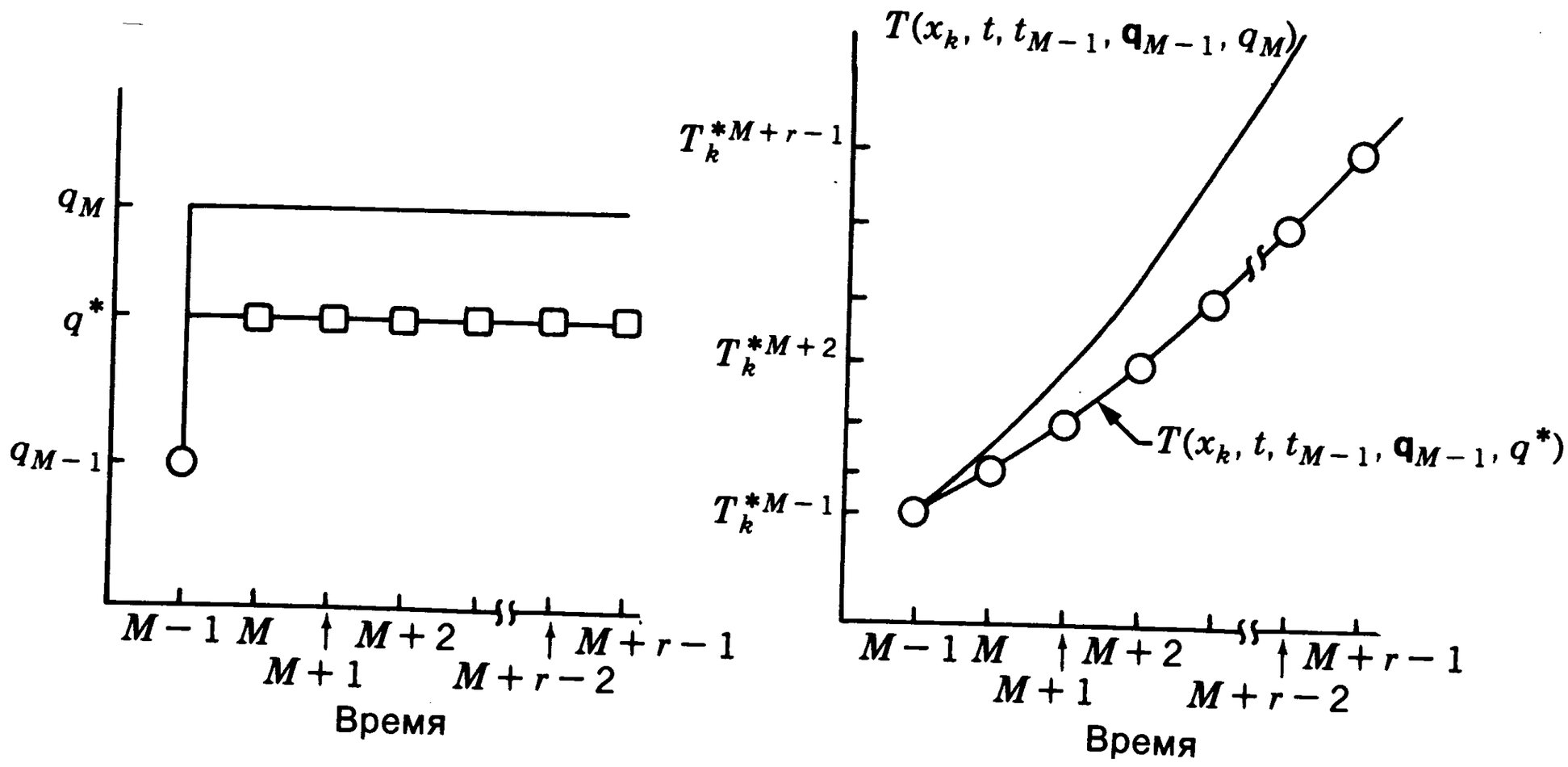



Рис. 6.4. Опорное условие при вычислении $q_M$ методом конечных разностей.

Подставляя (6.6.5) в (6.6.2) и разрешая результат относительно $\tilde{q}_M$, получим

$$\hat{q}_M = q_M^* + \frac{\sum_{i=1}^{r} (Y_{k,M+i-1} - \overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}) Z_{k,i}}{\sum_{j=1}^{r} (Z_{k,j})^2} . \tag{6.6.6}$$

Уравнение (6.6.6), как и уравнение (5.3.4а), можно записать с использованием коэффициентов усиления

$$\hat{q}_M = q_M^* + \sum_{i=1}^{r} (Y_{k,M+i-1} - \overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}) K_{k,i} , \tag{6.6.7a}$$

где

$$K_{k,i} = \frac{Z_{k,i}}{\sum_{j=1}^{r} Z_{k,j}^2} . \tag{6.6.7b}$$

Если теплофизические свойства не зависят от температуры, то решение $\phi$ при единичном ступенчатом изменении плотности теплового потока, которое использовалось в гл. 5, совпадает с решением для коэффициента чувствительности, используемого в этой главе, и в конкретной задаче значения $Z$ нужно вычислить только один раз. Если зависимость теплофизических свойств от температуры имеет квазилинейный характер, то $Z \neq \phi$ и для каждого значения $q_M$ коэффициент $Z$ необходимо вычислять заново. Индекс $k$ в соотношении (6.6.4) сохранен для напоминания о том, что коэффициенты чувствительности зависят от глубины расположения датчика от нагреваемой поверхности. В следующем разделе, в котором анализ обобщен на несколько датчиков, индекс $k$ еще более важен. Необходимо помнить, что предположение о постоянстве плотности теплового потока (рис. 6.3 и рис. 6.4) является лишь временным. Вычисленное значение плотности теплового потока $q_M$ сохраняется только для интервала времени $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_M$. Для каждого последующего шага по времени вычисляется новое значение плотности.

Детальная формулировка вычислительного алгоритма, построенного в соответствии с уравнением (6.6.7), в предположении постоянства плотности теплово-

го потока для одного датчика и $r$ последующих шагов по времени приводится ниже.

1. Предполагается, что на интервале $t_{M-1} \leqslant t \leqslant t_{M+r-1}$ плотность $q(t) = q^*$ и выполняется часть алгоритма ТДМА, связанная с прямым исключением. Начиная с последнего узла $N$, расчет осуществляется по формулам

$$\omega_N = \frac{1}{b_N}, \quad e_N = \omega_N c_N, \quad f_N = \omega_N d_N \ ,$$

$$\omega_j = \frac{1}{b_j - a_j e_{j+1}}, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 1 \ ,$$

$$f_j = \omega_j (d_j + a_j f_{j+1}), \quad e_j = \omega_j c_j, \quad j = N-1, N-2, \ldots, 2 \ ,$$

$$f_1 = \omega_1 (d_1 + a_1 f_2), \quad d_1 = d_1(q^*) \ .$$

Заметим, что при вычислении $\overset{*}{T}{}_j^{M+i-1}$ и $Z_{j,M+i-1}$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$ все $a_j$, $b_j$, $c_j$, $e_j$ и $\omega_i$ одни и те же, так как теплофизические характеристики определены при $\overset{*}{T}{}_j^{M}$.

2. С использованием части ТДМА, связанной с обратной подстановкой, вычисляются $\overset{*}{T}{}_j^{M}$, $\overset{*}{T}{}_j^{M+1}$, $\ldots$, $\overset{*}{T}{}_j^{M+r-1}$:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{*}{T}{}_1^{M+i-1} = f_{1,i} \ , \\ &\overset{*}{T}{}_j^{M+i-1} = e_j \overset{*}{T}{}_{j-1}^{M+i-1} + f_{j,i}, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned}\right\} \text{ Повторяется для } i = 0, 1, \ldots, r-1 \ .$$

Индекс $i$ у $f_{j,i}$ служит напоминанием, что эта величина для каждого последующего шага по времени ($i$) должна вычисляться заново. Коэффициенты $e_j$, рассчитанные на шаге 1, для $i = 1, 2, \ldots, r$ остаются неизменными.

3. С использованием полученных для задачи (6.2.7) разностных уравнений вычисляются коэффициенты чувствительности ($Z$). Коэффициенты $a_j$, $b_j$, $c_j$, $e_j$ и $\omega_j$ для алгоритма ТДМА уже были вычислены на шаге 1. Поэтому необходимо вычислить заново только $d_j$ и $f_j$ и произвести обратную подстановку.

$$\left.\begin{aligned} &Z_{1,M+i-1} = f_{1,i} \ , \\ &Z_{j,M+i-1} = e_j Z_{j-1,M+i-1} + f_{j,i}, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \end{aligned}\right\} \text{ Повторяется для } i = 0, 1, \ldots, r-1 \ .$$

Заметим, что коэффициенты $d_j$ и $f_{j,i}$ при вычислении $Z_{j,M+i-1}$ отличаются от аналогичных коэффициентов для $\overset{*}{T}{}_j^{M+i-1}$. Кроме того, граничные условия для $Z$ и $\overset{*}{T}$ также различны.

4. По формуле (6.6.7а) вычисляется $\hat{q}_M$

$$\hat{q}_M = q_M^* + \sum_{j=1}^{r} (Y_{k,M+i-1} - \overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}) K_{k,i} \ .$$

5. Зная $\hat{q}_M$ и пересчитав $d_1$ и $f_1$, можно выполнить обратную подстановку ТДМА для $\hat{T}(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}_M)$:

$$\hat{T}_1^M = f_1 \ ,$$

$$\hat{T}_j^M = e_j T_{j-1}^M + f_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N \ .$$

*Пример 6.2.* Используя данные из табл. 1.1, вычислите коэффициенты $K$ в уравнении (6.6.7) при $r = 2$, $\Delta t^+ = \alpha \Delta t / L^2 = 0{,}05$ и расположении датчика температуры при $x^+ = x/L = 0{,}5$. Повторите вычисления для $x^+ = x/L = 1$.

*Решение.*

$$\Delta t^+ = 0{,}05, \quad x^+ = 0{,}5,$$
$$Z_1 = 0{,}0153659,$$
$$Z_2 = 0{,}0593109,$$
$$K_1 = \frac{0{,}0153659}{(0{,}0153659)^2 + (0{,}0593109)^2} = 4{,}0933$$
$$K_2 = \frac{0{,}0593109}{(0{,}0153659)^2 + (0{,}0593109)^2} = 15{,}80.$$

$$\Delta t^+ = 0{,}05, \quad x^+ = 1{,}0,$$
$$Z_1 = 0{,}0002693,$$
$$Z_2 = 0{,}0078853,$$
$$K_1 = \frac{0{,}0002693}{(0{,}0002693)^2 + (0{,}0078853)^2} = 4{,}3261$$
$$K_2 = \frac{0{,}0078853}{(0{,}0002693)^2 + (0{,}007853)^2} = 126{,}7.$$

Результаты для случая $x^+ = 1{,}0$ и $\Delta t^+ = 0{,}05$ представлены также в табл. 4.1.

## 6.7. Несколько датчиков температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), $r$ последующих шагов по времени

В разд. 6.4 задача с несколькими датчиками температуры рассматривалась при одном последующем шаге по времени. В данном разделе анализ обобщен на случай числа последующих шагов по времени при предположении о постоянстве плотности теплового потока. Необходимо модифицировать функцию наименьших квадратов, включив в нее суммирование по числу датчиков. Для $J$ датчиков и $r$ последующих шагов сумма квадратов отклонений имеет вид

$$S = \sum_{k=1}^{J} \sum_{j=1}^{r} [Y_{k,M+j-1} - T(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)]^2. \tag{6.7.1}$$

Постоянная на протяжении $r$ последующих шагов величина $q_M$, которая минимизирует $S$, находится из условия

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 0 = 2 \sum_{k=1}^{J} \sum_{j=1}^{r} [T(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) - Y_{k,M+j-1}] Z_{k,j}, \tag{6.7.2}$$

где коэффициент чувствительности при ступенчатом изменении плотности теплового потока определяется соотношением

$$Z_{k,j} = Z(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \frac{\partial T(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M}. \tag{6.7.3}$$

Разлагая температуру в ряд Тейлора в окрестности произвольно заданной плотности теплового потока $q^*$, имеем

$$T_k^{M+j-1} = \overset{*}{T}{}_k^{M+j-1} + (q_M - q^*) Z_{k,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, r-1. \tag{6.7.4}$$

Подставляя выражение (6.7.4) в уравнение (6.7.2) и разрешая результат относительно искомой плотности теплового потока, получим

$$\hat{q}_M = q^* + \frac{\sum_{k=1}^{J} \sum_{j=1}^{r} (Y_{k,M+j-1} - \overset{*}{T}{}_k^{M+j-1}) Z_{k,j}}{\sum_{k=1}^{J} \sum_{j=1}^{r} Z_{k,j}^2}. \tag{6.7.5}$$

В более компактной форме уравнение (6.7.5) можно записать в виде

$$\hat{q}_M = q^* + \sum_{k=1}^{J} \sum_{j=1}^{r} K_{k,j}(Y_{k,M+j-1} - \overset{*}{T}{}_k^{M+j-1}) \text{ ,} \tag{6.7.6a}$$

где

$$K_{k,j} = \frac{Z_{k,j}}{\sum_{k=1}^{J} \sum_{j=1}^{r} Z_{k,j}^2} \text{ .} \tag{6.7.6b}$$

*Пример 6.3.* Повторите пример 6.2 для двух датчиков, расположенных при $x^+ = 0{,}5$ и $x^+ = 1{,}0$, используя полученную из соотношения (6.7.6b) формулу

$$K_{k,j} = \frac{Z_{k,j}}{Z_{1,1}^2 + Z_{2,1}^2 + Z_{1,2}^2 + Z_{2,2}^2} = bZ_{k,j} \text{ .}$$

*Решение.* Из примера 6.2 имеем

$$Z_{1,1} = 0{,}01537, \quad Z_{2,1} = 0{,}0002693,$$
$$Z_{1,2} = 0{,}05931, \quad Z_{2,2} = 0{,}007885,$$
$$b = 262{,}0 \text{ ,}$$
$$K_{1,1} = 4{,}027, \quad K_{2,1} = 0{,}07057,$$
$$K_{1,2} = 15{,}54, \quad K_{2,2} = 2{,}066 \text{ .}$$

Наличие второго датчика при $x^+ = 1$ не дает ощутимого увеличения информации, о чем свидетельствует тот факт, что значения $K_{1,1}$ и $K_{1,2}$ в данном примере весьма близки к значениям $K_1$ и $K_2$ из примера 6.2 (для $x^+ = 0{,}5$). Это является следствием различия значений коэффициентов чувствительности для $x^+ = 0{,}5$ и 1,0.

*Пример 6.4.* Повторите пример 6.3 при расположении двух одинаковых датчиков в одной и той же точке $x^+ = 0{,}5$.

*Решение*

$$b = 133{,}2 \text{ ,}$$
$$K_{1,1} = K_{2,1} = 2{,}047 \text{ ,}$$
$$K_{1,2} = K_{2,2} = 7{,}900 \text{ .}$$

## 6.8. Одиночный датчик температуры, функциональная аппроксимация, линейное изменение плотности теплового потока (связанные между собой сегменты)

До сих пор во всех анализируемых в гл. 6 методах функциональной аппроксимации использовалось (временное) предположение о постоянстве плотности теплового потока. Другие возможные функциональные формы рассматривались в гл. 4 и 5. Все формы, характеризующие изменение плотности теплового потока и используемые в гл. 5 для методов, основанных на применении интеграла свертки, могут также использоваться для анализируемых в данной главе разностных методов. Примером может служить изменение плотности теплового потока в виде связанных между собой линейных сегментов (рис. 4.8). В этом случае используется прямолинейная экстраполяция по времени для двух точек, $\hat{q}_{M-1}$ и $q_M$. Для равномерной разностной сетки по времени изменение плотности теплового потока можно представить в виде

$$q_{M+i-1} = (1-i)\hat{q}_{M-1} + iq_M, \quad i = 0, 1, \ldots, r \text{ .} \tag{6.8.1}$$

Заметим, что уравнение (6.8.1) содержит только одну неизвестную $q_M$. Дополнительные пояснения можно найти в разд. 4.4.3.2. Минимизируется следующая сумма квадратов отклонений:

$$S=\sum_{i=1}^{r}[Y(x_k, t_{M+i-1})-T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M, \ldots, q_{M+r-1})]^2. \quad (6.8.2)$$

Сравнение уравнений (6.8.2) и (6.6.1) показывает, что в случае линейного изменения плотности теплового потока распределение температуры зависит от $r$ значений плотности $q_M$, $q_{M+1}$, ..., $q_{M+r-1}$, однако независимым является только одно значение ($q_M$), поскольку все они связаны уравнением (6.8.1). Используя стандартный прием разложения в ряд Тейлора, распределение температуры можно записать в виде

$$T_k^{M+i-1}=\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}+\sum_{j=1}^{i}\Delta Z_{k,i-j+1}(q_{M+j-1}-q^*). \quad (6.8.3)$$

Заметим, что здесь необходимо использовать коэффициент чувствительности относительно импульса плотности $X_{k,i-j+1}=\Delta Z_{k,i-j+1}$, так как учитывается изменение плотности теплового потока на протяжении $r$ последующих шагов по времени. Подставляя выражение (6.8.1) в разложение (6.8.3), получим

$$T_k^{M+j-1}=\overset{*}{T}{}_k^{M+j-1}+q_M\psi_{k,j}-q_{M-1}\psi_{k,j-1}-q^*Z_{k,j}, \quad (6.8.4)$$

где использованы следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{i}\Delta Z_{k,i-j+1}=Z_{k,i}, \quad \sum_{j=1}^{i}j\Delta Z_{k,i-j+1}=\sum_{j=1}^{i}Z_{k,j}=\psi_{k,j}. \quad (6.8.5)$$

Подставляя выражение (6.8.4) в соотношение (6.8.2), получим

$$S=\sum_{i=1}^{r}(\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}-Y_{k,M+i-1}+q_M\psi_{k,i}-q_{M-1}\psi_{k,i-1}-q^*Z_{k,i})^2. \quad (6.8.6)$$

Компонента плотности теплового потока $\hat{q}_{M-1}$ является известной с предыдущего шага по времени величиной. Значение $q_M$, при котором сумма $S$ минимальна, вычисляется по формуле

$$\hat{q}_M=\frac{\sum_{i=1}^{r}\psi_{k,i}(Y_{k,M+i-1}-\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1})}{\sum_{j=1}^{r}\psi_{k,j}^2}+\hat{q}_{M-1}\frac{\sum_{i=1}^{r}\psi_{k,i-1}\psi_{k,i}}{\sum_{j=1}^{r}\psi_{k,j}^2}+q^*\frac{\sum_{i=1}^{r}Z_{k,i}\psi_{k,i}}{\sum_{j=1}^{r}\psi_{k,j}^2}. \quad (6.8.7)$$

Следует провести сравнение уравнения (6.6.7) для постоянной плотности теплового потока с уравнением (6.8.7), в котором учитывается линейное изменение плотности теплового потока. Оба уравнения имеют одну и ту же форму, но отличаются коэффициентами, причем в уравнении (6.8.7) значение $\hat{q}_M$ явно зависит от $q_{M-1}$. По сравнению со случаем постоянной плотности при линейном изменении плотности получается более сложное уравнение. Практика показала, что с точки зрения устойчивости для алгоритма с линейным изменением плотности необходимо использовать бóльшие шаги по времени, чем это требуется при том же значении $r$ для алгоритма с постоянной плотностью.

## 6.9. Методы последовательной регуляризации второго порядка

Общие принципы методов регуляризации были рассмотрены в разд. 4.5, а в разд. 5.4.3 в алгоритме последовательной регуляризации первого порядка использовался интеграл свертки. В данном разделе выводятся уравнения последовательной регуляризации второго порядка для случая $r = 3$, а затем с помощью матричного подхода делается обобщение на случай произвольного значения $r$. Полученные в результате матричные соотношения применимы и к другим порядкам регуляризации.

В непрерывной форме второй порядок регуляризации определяется выражением

$$\int_{t_{M-1}}^{t_{M+r-1}} \left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)^2 dt\,. \tag{6.9.1}$$

Этот интеграл используется при построении кубического интерполяционного сплайна [7], и его минимизация обусловливает так называемое свойство минимальной кривизны.

Следуя подходу, использованному в разд. 4.5, стандартный критерий метода наименьших квадратов в случае $r \geqslant 3$ модифицируется следующим образом:

$$S = \sum_{i=1}^{r} (Y_{M+i-1} - T_k^{M+i-1})^2 + \alpha \sum_{i=1}^{r-2} (q_{M+i-1} - 2q_{M+i} + q_{M+i+1})^2. \tag{6.9.2}$$

Заметим, что $\alpha$ является размерной величиной и имеет размерность $T/q^2$. Для упрощения выкладок предполагается, что $r = 3$. В этом случае второе слагаемое в соотношении (6.9.2) состоит только из одного члена. Дифференцируя соотношение (6.9.2) по трем неизвестным компонентам плотности теплового потока $q_M$, $q_{M+1}$ и $q_{M+2}$ и приравнивая полученные выражения нулю, получим

$$\sum_{i=1}^{3} (T_k^{M+i-1} - Y_{M+i-1}) \frac{\partial T_k^{M+i-1}}{\partial q_M} + \alpha(q_M - 2q_{M+1} + q_{M+2}) = 0\,, \tag{6.9.3a}$$

$$\sum_{i=2}^{3} (T_k^{M+i-1} - Y_{M+i-1}) \frac{\partial T_k^{M+i-1}}{\partial q_{M+1}} - 2\alpha(q_M - 2q_{M+1} + q_{M+2}) = 0\,, \tag{6.9.3b}$$

$$\sum_{i=3}^{3} (T_k^{M+i-1} - Y_{M+i-1}) \frac{\partial T_k^{M+i-1}}{\partial q_{M+2}} + \alpha(q_M - 2q_{M+1} + q_{M+2}) = 0\,. \tag{6.9.3c}$$

Нижний предел суммирования не всегда начинается с единицы, так как коэффициенты чувствительности равны нулю во все моменты времени, предшествующие начальному для конкретной компоненты значению времени. Коэффициенты чувствительности определяются соотношениями

$$\frac{\partial T_k^{M+i-1}}{\partial q_{M+j-1}} = X_{k,i-j+1}\,. \tag{6.9.4}$$

Обычное разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$T_k^{M+i-1} = \overset{*}{T}{}_k^{M+i-1} + \sum_{j=1}^{i} X_{k,i-j+1}(q_{M+j-1} - q^*)\,. \tag{6.9.5}$$

Подставляя выражения (6.9.4) и (6.9.5) в уравнения (6.9.3), получим

$$\sum_{i=1}^{3}\Big[\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}-Y_{M+i-1}+\sum_{j=1}^{i}X_{k,i-j+1}(q_{M+j-1}-q^*)\Big]X_{k,i}+\alpha(q_M-2q_{M+1}+q_{M+2})=0\ , \quad (6.9.6a)$$

$$\sum_{i=2}^{3}\Big[\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}-Y_{M+i-1}+\sum_{j=1}^{i}X_{k,i-j+1}(q_{M+j-1}-q^*)\Big]X_{k,i-1}-2\alpha(q_M-2q_{M+1}+q_{M+2})=0, \quad (6.9.6b)$$

$$\sum_{i=3}^{3}\Big[\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1}-Y_{M+i-1}+\sum_{j=1}^{i}X_{k,i-j+1}(q_{M+j-1}-q^*)\Big]X_{k,i-2}+\alpha(q_M-2q_{M+1}+q_{M+2})=0\ . \quad (6.9.6c)$$

После несложных, но громоздких преобразований уравнения (6.9.6) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^{3}X_{k,i}X_{k,i}+\alpha\right) & \left(\sum_{i=1}^{2}X_{k,i+1}X_{k,i}-2\alpha\right) & \left(\sum_{i=1}^{1}X_{k,i+2}X_{k,i}+\alpha\right)\\ \left(\sum_{i=1}^{2}X_{k,i}X_{k,i+1}-2\alpha\right) & \left(\sum_{i=1}^{2}X_{k,i}X_{k,i}+4\alpha\right) & \left(\sum_{i=1}^{1}X_{k,i+1}X_{k,i}-2\alpha\right)\\ \left(\sum_{i=1}^{1}X_{k,i}X_{k,i+2}+\alpha\right) & \left(\sum_{i=1}^{1}X_{k,i}X_{k,i+1}-2\alpha\right) & \left(\sum_{i=1}^{1}X_{k,i}X_{k,i}+\alpha\right)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\hat{q}_M-q^*\\ \hat{q}_{M+1}-q^*\\ \hat{q}_{M+2}-q^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{3}X_{k,i}(Y_{M+i-1}-\overset{*}{T}{}_k^{M+i-1})\\ \sum_{i=1}^{2}X_{k,i}(Y_{M+i}-\overset{*}{T}{}_k^{M+i})\\ \sum_{i=1}^{1}X_{k,i}(Y_{M+i+1}-\overset{*}{T}{}_k^{M+i+1})\end{bmatrix}. \quad (6.9.7)$$

Симметричность матрицы коэффициентов позволяет несколько сэкономить вычислительные ресурсы. За счет влияния параметра регуляризации $\alpha$ усиливается доминирующая роль главной диагонали матрицы коэффициентов и уменьшается чувствительность к погрешностям измерений. Поскольку уравнения линейны относительно $(\hat{q}_j - q^*)$, значение $q^*$ можно выбирать произвольным. Если $q^* = 0$, то вместо $\overset{*}{T}$ фигурирует $T|_{q=0}$. В последовательной процедуре сохраняется только величина $\hat{q}_M$, найденная из решения системы (6.9.7). Затем процедура повторяется для следующего шага по времени.

Для регуляризации второго порядка минимальное допустимое число последу-

ших шагов по времени равно 3. Даже в этом простейшем случае алгебраические образования достаточно громоздки. При обобщении процедуры на произвольное число $r$ будем использовать матричный подход. Матричный аналог соотношения (6.9.2) имеет вид

$$S=(\mathbf{Y}-\mathbf{T})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{T})+\alpha(\mathbf{H}_2\mathbf{q})^T(\mathbf{H}_2\mathbf{q})\,. \tag{6.9.8}$$

атрицы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{T}$ уже были определены в уравнении (6.5.13). Так как рассматривается последовательная процедура, то вектор плотности теплового потока содержит только $r$ компонент:

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-2} \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix}. \tag{6.9.9}$$

По аналогии с соотношением (4.5.16c) матрица $\mathbf{H}_2$ записывается следующим образом:

$$\mathbf{H}_2=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \uparrow \\ r-2 \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix}. \tag{6.9.10}$$

Если $r = 3$ только первая строка матрицы $\mathbf{H}_2$ является ненулевой. Матричная запись разложения в ряд Тейлора (6.8.3) имеет вид

$$\mathbf{T}=\overset{*}{\mathbf{T}}+\mathbf{X}(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*), \tag{6.9.11}$$

где элементы $\overset{*}{\mathbf{T}}$ определяются таким же образом, как и для $\mathbf{T}$, $\mathbf{q}^*$ — вектор, имеющий $r$ компонентов, которые равны $q^*$, и $\mathbf{X}$ — матрица коэффициентов чувствительности

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_{k,1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ X_{k,2} & X_{k,1} & 0 & 0 & & & 0 \\ X_{k,3} & X_{k,2} & X_{k,1} & 0 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ X_{k,r} & X_{k,r-1} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{k,2} & X_{k,1} \end{bmatrix}. \tag{6.9.12}$$

Заметим, что $\mathbf{X}$ является нижней треугольной матрицей, все элементы которой определяются по формуле (6.9.4). Матричная производная по вектору плотности теплового потока $\mathbf{q}$ равна

$$\nabla_{\mathbf{q}}S=2[\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{Y}-\mathbf{T})^T](\mathbf{Y}-\mathbf{T})+2\alpha\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{H}_2\mathbf{q})^T(\mathbf{H}_2\mathbf{q})=0\,. \tag{6.9.13}$$

Из уравнения (6.9.11) получим

$$\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{Y}-\mathbf{T})^T=-\nabla_{\mathbf{q}}\mathbf{T}^T=-\mathbf{X}^T. \tag{6.9.14}$$

Кроме того, имеем

$$\nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{H}_2\mathbf{q})^T = \nabla_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}^T\mathbf{H}_2^T) = \mathbf{H}_2^T. \tag{6.9.15}$$

Подставляя соотношения (6.9.11), (6.9.14) и (6.9.15) в уравнение (6.9.13), после преобразований получим

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^*) + \alpha\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \overset{*}{\mathbf{T}}). \tag{6.9.16}$$

Замечая, что

$$\alpha\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2\mathbf{q}^* = \mathbf{0}, \tag{6.9.17}$$

уравнение (6.9.16) можно представить в другой форме. Если $\mathbf{1}$ является единичным вектором, то для $q^* = q^*\mathbf{1}$ имеем соотношение

$$\mathbf{H}_2\mathbf{q}^* = q^*\mathbf{H}_2\mathbf{1} = \mathbf{0}. \tag{6.9.18}$$

Матричное произведение $\mathbf{H}_2\mathbf{1}$ представляет собой вектор, компоненты которого равны сумме элементов соответствующей строки матрицы $\mathbf{H}_2$. Некоторые компоненты $\mathbf{H}_2\mathbf{1}$ равны нулю. Уравнение (6.9.16) можно записать в виде матричного нормального уравнения

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2)(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^*) = \mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \overset{*}{\mathbf{T}}). \tag{6.9.19}$$

Уравнение (6.9.16) является матричным аналогом уравнения (6.9.7) и имеет аналогичную структуру. Если $q^* = 0$, то $\overset{*}{T}$ заменяется на $\hat{T}|_{q=0}$. Поскольку для реализации матричных операций имеются соответствующие подпрограммы, то при рассмотрении произвольного $r$ применение уравнения (6.9.19) дает значительные преимущества по сравнению с развернутой формой (6.9.7). Решение уравнения (6.9.19) можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^* + (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \alpha\mathbf{H}_2^T\mathbf{H}_2)^{-1}\mathbf{X}^T(\mathbf{Y} - \overset{*}{\mathbf{T}}). \tag{6.9.20}$$

В последовательной процедуре обычно сохраняется только компонента $q_M$ вектора $\hat{\mathbf{q}}$, и процесс вычислений повторяется для каждого последующего шага по времени. В линейном варианте последовательного алгоритма регуляризации теплофизические характеристики вычисляются при значениях температуры в момент времени $t_{M-1}$ и остаются неизменными. Если теплофизические свойства в рассматриваемой области не зависят от температуры, то уравнения для регуляризации во всей области также имеют вид (6.9.20) при условии, что $r$ обозначает суммарное число оцениваемых компонент плотности теплового потока. Так как в методе последовательной регуляризации для получения каждого значения $q_M$ необходимо решать систему $r$ алгебраических уравнений, то по сравнению с другими представленными в этой главе последовательными методами затраты машинного времени увеличиваются, однако при малых значениях $r$, например $r \leqslant 5$, увеличение времени вычислений может быть незначительным.

Для вычисления элементов матрицы $\mathbf{X}$ используются такие же, как и рассмотренные в разд. 6.2 и 6.3, способы, а именно: $X_{k,j-i+1}$ определяется из решения разностным методом прямой задачи, в которой начальное распределение нулевое, плотность теплового потока равна единице на интервале $t_{M+i-2} \leqslant t \leqslant t_{M+i-1}$ и равна нулю в остальные моменты времени, а неактивная поверхность теплоизолированна.

Выбор параметра регуляризации $\alpha$ рассмотрен в гл. 5.

Хотя уравнение (6.9.19) выведено для алгоритма регуляризации второго порядка, оно остается в силе и для других порядков. Например, в алгоритме регу-

яризации нулевого порядка матрицу $\mathbf{H}_2$ следует заменить на матрицу $\mathbf{H}_0$, кото-ая получена в разд. 4.5.

## 6.10. Маршевые методы продвижения по пространственной координате для одномерных задач

Представленные в предыдущих разделах разностные методы можно охарактери-овать как маршевые методы, поскольку с использованием начального распреде-ения температуры рассчитывается профиль температуры на следующем шаге о времени, т. е. осуществляется продвижение вперед по времени. В обратной адаче в точке расположения датчика известны два граничных условия, а именно емпература и плотность теплового потока. Поскольку известны два условия в дной и той же пространственной точке, обратная задача теплопроводности от-осится к начальной, а не краевой задаче. В данном разделе анализируется не-колько маршевых методов продвижения по пространственной координате, кото-ые соответствуют начальной задаче [1)]. В последующем анализе рассматривают-я плоская геометрическая форма тела и постоянные теплофизические харак-еристики. Эти ограничения вводятся только для простоты изложения.

В обратной задаче теплопроводности геометрическую форму тела можно редставить в виде суммы областей прямой и обратной задач, как это показано а рис. 1.4. Первая область соответствует решению классической краевой задачи, которой экспериментально измеренная температура на границе раздела между бластями используется как граничное условие. На остальной граничной поверх-ости граничное условие известно. Внутри первой области можно решить пря-ую корректно поставленную задачу. Если в этой области известно поле темпе-атур, то, дифференцируя распределение температуры, можно определить плот-ость теплового потока в точке расположения датчика. В дальнейшем пред-олагается, что в области прямой задачи температуры и плотности тепловых отоков определены и, следовательно, в обратной задаче на одной границе из-естны температура и плотность теплового потока.

### 6.10.1. Аналитическое решение

ассмотрим уравнение теплопроводности для плоской геометрии при постоянных еплофизических характеристиках:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} . \qquad (6.10.1)$$

сли производную по времени аппроксимировать с помощью левой разности, то ифференциальное уравнение (6.10.1) в частных производных становится обыкно-

---

[1)] Различные разностные алгоритмы продолжения поля вдоль пространственной координаты рас-отрены в книге: Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппара-ов. — М.: Машиностроение, 1979. Одновременно заметим, что алгоритмы, основанные на неявных азностных схемах и обладающие в силу этого значительно лучшими характеристиками устойчивос-и, были впервые предложены и экспериментально исследованы в работе: Алифанов О. М., Артю-ин Е. А., Панкратов Б. М. Решение нелинейной обратной задачи для обобщенного уравнения тепло-роводности в области с подвижными границами. — Инженерно-физический журнал, 1975, т. 29, № 1. — *Прим. ред.*

венным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2T^i(x)}{dx^2} - \frac{1}{\alpha\Delta t}T^i(x) = -\frac{1}{\alpha\Delta t}T^{i-1}(x), \qquad (6.10.2)$$

где индекс $i$ указывает номер шага по времени. Граничные условия для уравнения (6.10.2) имеют вид

$$T^i(x=E) = Y_i \quad ,$$

$$q_{E,i} = -k\left.\frac{dT^i(x)}{dx}\right|_{x=E} .$$

Поскольку и неизвестная функция, и ее первая производная заданы при $x = E$, то тем самым для уравнения (6.10.2) сформулирована начальная задача, или задача Коши. Если начальное распределение температуры в теле ($T_0$) равномерно, то при $i = 1$ ($t = \Delta t$) существует очень простое решение уравнения (6.10.2)

$$T^1(z) - T_0 = (Y_1 - Y_0)\ \operatorname{ch}\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\right) + q_{E,1}\sqrt{\alpha\Delta t}\ \operatorname{sh}\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\right),$$

где $z = E - x$. Соотношение для искомой плотности теплового потока при $x = 0$ ($z = E$) получается в результате дифференцирования этого выражения по $x$ и имеет вид

$$Q_1 = \frac{q_{0,1}E}{k} = \frac{q_{E,1}E}{k}\ \operatorname{ch}\left(\frac{E}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\right) + (Y_1 - Y_0)\frac{E}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\ \operatorname{sh}\left(\frac{E}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\right). \qquad (6.10.3)$$

Из формулы (6.10.3) видно, какое важное значение в обратных задачах имеет безразмерный шаг по времени: $\Delta\tau_E \equiv \alpha\Delta t/E^2$.

Если в измеренном значении $Y_1$ содержится погрешность, то $q_{E,1}$ и $q_{0,1}$ также будут определены с погрешностями. *Нижнюю границу* погрешности можно оценить, заменяя $Y_1$ на $Y_1 + \delta Y_1$ и пренебрегая погрешностью в $q_{E,1}$. В результате для погрешности в $q_{0,1}$ получим выражение

$$\frac{\delta Q_1}{\delta Y_1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta\tau_E}}\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta\tau_E}}\right).$$

Числовые значения этой погрешности приведены в табл. 6.6. Приведенные данные согласуются с полученными ранее результатами и подтверждают, что малым значениям безразмерного шага по времени $\Delta\tau_E$ могут соответствовать большие погрешности плотности теплового потока на поверхности.

Изложенную выше процедуру можно продолжить для $t = 2\Delta t$, решая уравнение

$$\frac{d^2T^2(z)}{dz^2} - \frac{1}{\alpha\Delta t}T^2(z) = -\frac{1}{\alpha\Delta t}\left[T_0 + (Y_1 - Y_0)\ \operatorname{ch}\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{q_{E,1}}{K}\sqrt{\alpha\Delta t}\ \operatorname{sh}\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha\Delta t}}\right)\right].$$

Это уравнение можно решить аналитически, однако из-за громоздких неоднородных членов алгебраические выкладки становятся весьма сложными, а для последующих моментов времени они еще более усложняются. Поэтому такой подход в дальнейшем не используется. Из проведенного анализа важно помнить, что

*Таблица 6.6.* Безразмерная погрешность определения плотности теплового потока при одиночной погрешности $\delta Y_1$ в измеренной температуре

| $\Delta\tau_E$ | $\delta Q_1/\delta Y_1$ | $\Delta\tau_E$ | $\delta Q_1/\delta Y_1$ |
|---|---|---|---|
| 10 | 0,1017 | 0,125 | 23,843 |
| 1 | 1,175 | 0,0625 | 109,160 |
| 0,5 | 2,737 | 0,03125 | 809,618 |
| 0,25 | 7,254 | | |

возможно продвижение вдоль пространственной координаты и что важным характерным размером при определении безразмерного шага по времени $\Delta\tau_E$ является расстояние $E$ от нагреваемой поверхности до точки расположения датчика.

### 6.10.2. Метод Де Суза

Де Суза [8, 9] использовал чисто неявную разностную аппроксимацию уравнения (6.10.1). Производная по времени заменялась левой разностью, а производная по пространственной координате — центральной разностью:

$$\frac{T^i_{j-1}-2T^i_j+T^i_{j+1}}{\Delta x^2}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{T^i_j-T^{i-1}_j}{\Delta t}\right) . \qquad (6.10.4)$$

Разрешая уравнение (6.10.4) относительно $T^i_{j-1}$, получаем

$$T^i_{j-1}=\left(2+\frac{1}{p}\right)T^i_j-T^i_{j+1}-\frac{1}{p}T^{i-1}_j \begin{cases} j=K, K-1, \ldots, 2 , \\ i=1, 2, \ldots, n , \end{cases} \qquad (6.10.5)$$

где $p=\alpha\Delta t/\Delta x^2$. При использовании показанной на рис. 6.5 пространственно-временной разностной сетки вычислительная процедура начинается в узле $j=K$ и расчет производится последовательно для $i=1, 2, \ldots, n$. Так как значения температуры известны на двух линиях разностной сетки, которые соответствуют

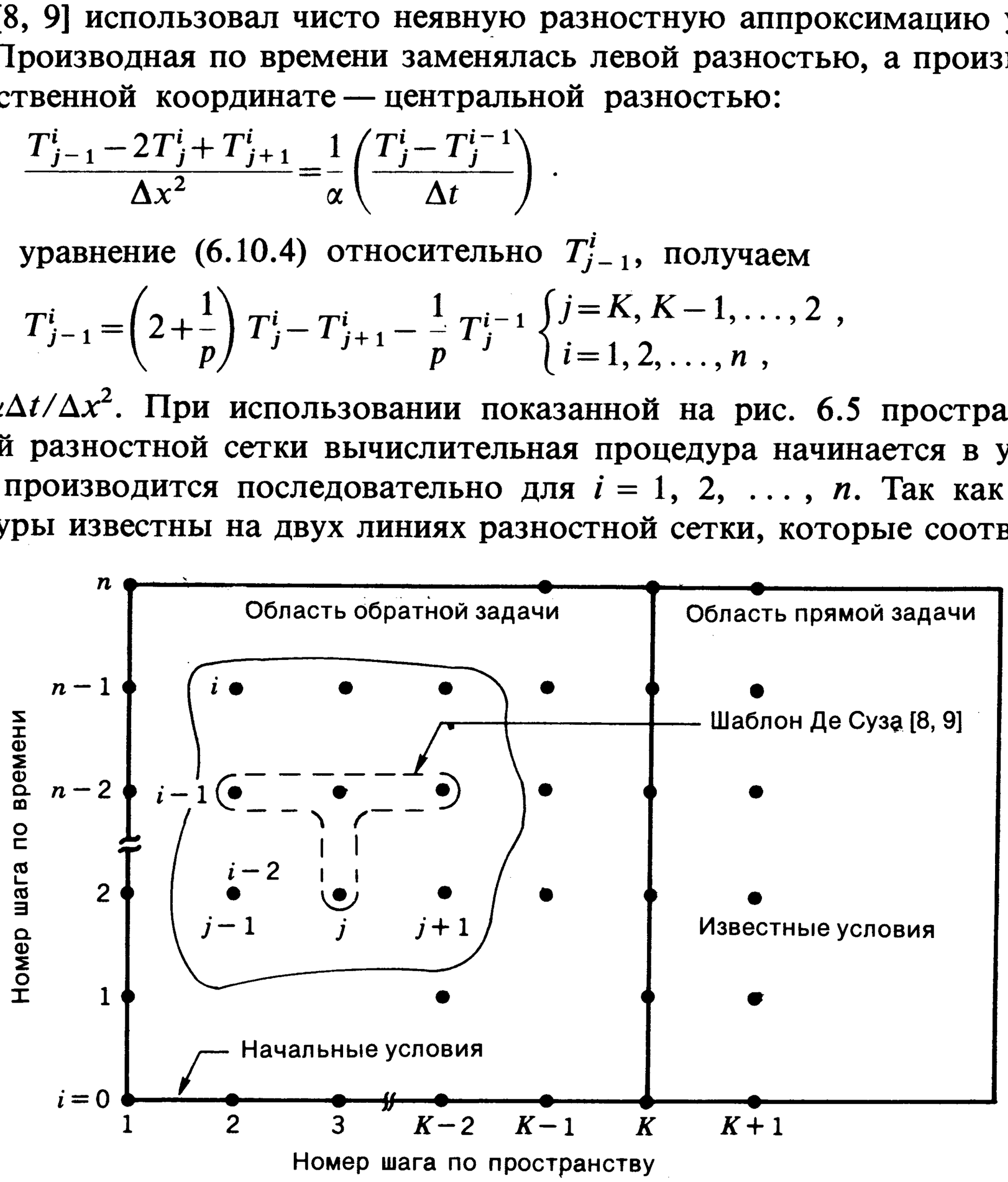



Рис. 6.5. Пространственно-временная сетка для маршевых методов продвижения по пространственной координате.

пространственным узлам $K$ и $K+1$, то уравнение (6.10.5) представляет собой явное соотношение, несмотря на то что оно было получено из полностью неявного для прямой задачи уравнения. После вычисления температуры на всей линии $K-1$ процедура повторяется для $K-2, \ldots, 1$. Уравнение для вычисления плотности теплового потока на поверхности получается из конечно-разностного уравнения для узла $j=1$.

Из приведенного краткого описания ясно, что процедура Де Суза предназначена для реализации на ЭВМ. Однако алгоритм можно детально понять, выписывая несколько алгебраических соотношений для малого числа узлов $K$ от нагреваемой поверхности до датчика. Используя чисто неявную схему, запишем уравнения для каждого узла. Для узла 1, расположенного на нагреваемой поверхности, уравнение в момент времени $t_i$ имеет вид

$$q_0^i + k\frac{T_2^i - T_1^i}{\Delta x} = \rho c \frac{\Delta x}{2}\frac{T_1^i - T_1^{i-1}}{\Delta t}\,. \tag{6.10.6a}$$

Уравнение для внутреннего узла $j$ записывается в форме (6.10.4), а для узла $K$ — в виде

$$k\frac{T_{K-1}^i - Y_i}{\Delta x} - q_E^i = \rho c \frac{\Delta x}{2}\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta t}\,. \tag{6.10.6b}$$

Плотность теплового потока $q_0^i$ неизвестна, и ее необходимо оценить. Величина $q_E^i$ представляет собой плотность теплового потока, который выходит из области обратной задачи на рис. 1.4. Она равна плотности теплового потока, входящего в область прямой задачи, и определяется из решения прямой задачи в этой области. В уравнении (6.10.6b) температуры $T_K^{i-1}$ и $T_K^i$ заменены на $Y_{i-1}$ и $Y_i$ соответственно.

Разрешая уравнение (6.10.6b) относительно $T_{K-1}^i$ для $i=1, 2, \ldots, n$, получим

$$T_{K-1}^i = \frac{q_E^i \Delta x}{k} + Y_i + \frac{(\Delta x)^2}{2\alpha\Delta t}(Y_i - Y_{i-1})\,. \tag{6.10.7}$$

При $K>2$ выражение (6.10.7) подставим в уравнение (6.10.4), которое запишем для $j=K-1$. В результате получим выражение для $T_{K-2}^i$ ($i=1, 2, \ldots$). При $K=2$ из соотношения (6.10.7) имеем выражения для $T_1^i$ и (заменяя $i$ на $i-1$) $T_1^{i-1}$, при подстановке которых в уравнение (6.10.6b) получим

$$Q_0^i \equiv \frac{q_0^i E}{k} = \frac{\nabla Y_i}{\Delta\tau_E} + \frac{1}{4}\frac{\nabla^2 Y_i}{(\Delta\tau_E)^2} + Q_E^i + \frac{\nabla Q_K^i}{2\Delta\tau_E}\,, \tag{6.10.8a}$$

$$Q_E^i \equiv \frac{q_E^i E}{k}\,, \tag{6.10.8b}$$

так как в данном случае $\Delta x = E$. Символом $\nabla$ обозначен оператор левой разности

$$\nabla Y_i = Y_i - Y_{i-1}, \quad \nabla^2 Y_i = Y_i - 2Y_{i-1} + Y_{i-2}\,, \tag{6.10.8c, d}$$

$$\nabla Q_E^i = Q_E^i - Q_E^{i-1}\,. \tag{6.10.8e}$$

Если изложенную выше процедуру использовать при $K=3$, т. е. когда $\Delta x = E/2$, то выражение для плотности теплового потока имеет вид

$$Q_0^i = \frac{\nabla Y_i}{\Delta\tau_E} + \frac{3}{16}\frac{\nabla^2 Y_i}{(\Delta\tau_E)^2} + \frac{1}{128}\frac{\nabla^3 Y_i}{(\Delta\tau_E)^3} + Q_E^i + \frac{1}{2}\frac{\nabla Q_E^i}{\Delta\tau_E} + \frac{1}{32}\frac{\nabla^2 Q_E^i}{(\nabla\tau_E)^2}\,. \tag{6.10.9}$$

Сделаем несколько замечаний относительно уравнений (6.10.8а) и (6.10.9). Во-первых, эти уравнения соответствуют процедуре, в которой осуществляется точная подгонка вычисленной температуры к измеренному значению и, следовательно, чувствительной к погрешностям измерений. Во-вторых, эти уравнения являются численными аналогами точного решения, которое определяется уравнением Бургграфа (2.5.20). При увеличении числа узлов коэффициенты уравнений (6.10.8а) и (6.10.9) приближаются по величине к коэффициентам уравнения (2.5.20). Коэффициенты при первой разности в уравнениях (6.10.8а) и (6.10.9), а также (2.5.20) одни и те же, в то время как при $\nabla^2 Y_i$ в одном случае коэффициент равен 0,25 [уравнение (6.10.8а)], в уравнении (6.10.9) уменьшается до 0,1875, и при увеличении числа узлов этот коэффициент стремится к точному значению 0,1667. В-третьих, при получении оценок плотности теплового потока в текущий момент времени используются только предшествующие температуры. Как уже неоднократно отмечалось, при малых шагах по времени для получения точных оценок необходимо использовать последующие температуры. В-четвертых, если построить аналогичную процедуру, начиная с явного уравнения [т. е. в уравнении (6.10.4) левая часть вычисляется при $i-1$], то в уравнениях (6.10.8а) и (6.10.9) операторы левой разности заменятся операторами правой разности и будут использоваться только последующие температуры. В-пятых, по мере увеличения числа используемых узлов, требуется учитывать разности более высоких порядков, а это приводит к повышению чувствительности к погрешностям измерений.

### 6.10.3. Метод Вебера [1)]

Вебер [10] анализировал гиперболическую форму уравнения теплопроводности при постоянных свойствах

$$\gamma^{-2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \tag{6.10.10}$$

где $\gamma$ — нормированная скорость тепловой волны. Как по времени, так и по пространству использовались центральные разности, что приводит к уравнению

$$\frac{\gamma^{-2}}{\Delta t^2}\left(T_j^{i-1}-2T_j^{i+1}+T_j^{i+1}\right)+\frac{1}{2\Delta t}\left(T_j^{i+1}-T_j^{i-1}\right)=\frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(T_{j+1}^{i}-2T_j^{i}+T_{j-1}^{i}\right). \tag{6.10.11a}$$

Разрешая уравнение (6.10.11а) относительно $T_{j-1}^{i}$, получим

$$T_{j-1}^{i}=-\left(\frac{1}{2p}-\sigma\right)T_j^{i-1}+2(1-\sigma)T_j^{i}+\left(\frac{1}{2p}+\sigma\right)T_j^{i+1}-T_{j+1}^{i}\,, \tag{6.10.11b}$$

$$p\equiv\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2},\quad \sigma\equiv\frac{\gamma^{-2}}{\alpha}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2. \tag{6.10.11c,d}$$

---

[1)] Данный метод решения ОЗТ, основанный на искусственной гиперболизации уравнения теплопроводности и разностном алгоритме, использующем схему «крест», был впервые описан в книге: Алифанов О. М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1979. — *Прим. ред.*

Этот алгоритм имеет явную форму. Он может начинаться в узле $j = K$ и в момент времени $i = 2, 3, \ldots, n - 1$. Так как величина $T_K^{n+1}$ не определена, то значение $i = n$ использовать нельзя. Следовательно, для пространственного узла $j$ максимальный номер шага по времени на единицу меньше, чем для пространственного узла $j + 1$. Такая пространственно-временная сетка показана на рис. 6.6. Если температуру поверхности требуется знать в момент времени $M$, то измерения температуры следует проводить вплоть до момента $i = M + K$. Алгоритм (6.10.11b) характеризуется использованием $K$ последующих шагов по времени, где $K$ — число узлов пространственной сетки. Если применяется более подробная сетка, то число используемых последующих шагов по времени возрастает. В методах, представленных в разд. 6.3 и 6.4, число последующих шагов зависит от физического содержания задачи и должно быть относительно независимым от числа узлов пространственной сетки.

Вебер указывал, что параметр $\sigma$ необходимо выбирать малым, но не оговаривал, в какой степени малым. Фактически вычисления производятся при $\sigma = 0$.

Для алгоритма Вебера можно получить такие же алгебраические соотношения, как и для процедуры Де Суза. Следуя тому же подходу, что и в разд. 6.10.2, для двух узлов, т. е. при $K = 2$ и $\sigma = 0$, можно получить

$$Q_0^i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2\Delta\tau_E} + \frac{1}{4}\,\frac{Y_{i+2} - 2Y_i + Y_{i-2}}{(2\Delta\tau_E)^2} \tag{6.10.12a}$$

и для трех узлов ($K = 3$):

$$Q_0^i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2\Delta\tau_E} + \frac{3}{16}\,\frac{Y_{i+2} - 2Y_i + Y_{i-2}}{(2\Delta\tau_E)^2} + \frac{1}{128}\,\frac{Y_{i+3} - 3Y_{i+1} + 3Y_{i-1} - Y_{i-2}}{(2\Delta\tau_E)^3}, \tag{6.10.12b}$$

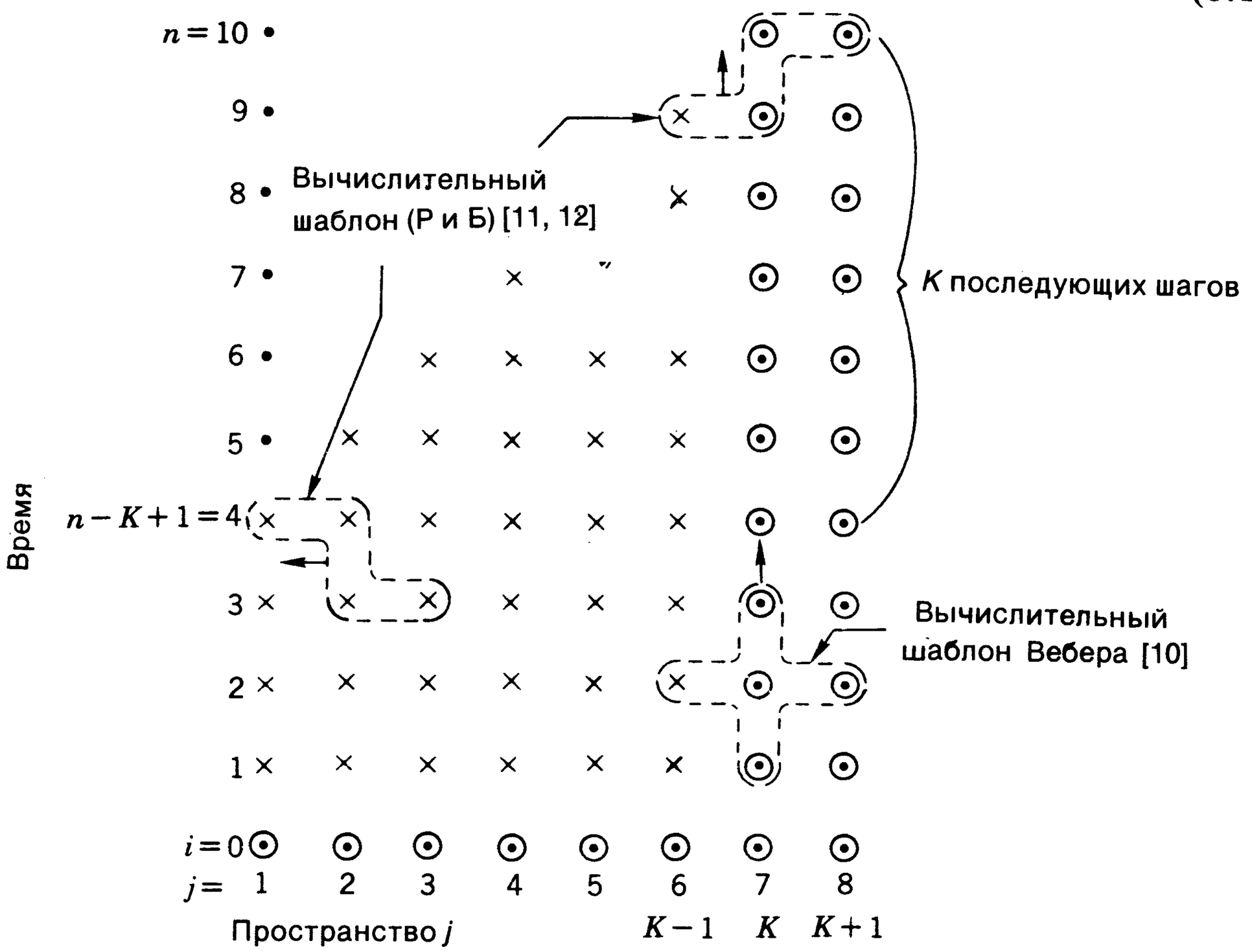



Рис. 6.6. Пространственно-временная сетка для методов Вебера [10], Рейно и Бранзье [11, 12]. $K = 7$ (число узлов), $n = 10$ (число измерений температуры), ⊙ известные значения, × вычисленные значения.

где $Q_E^i$ предполагается равным нулю. Эти уравнения аналогичны уравнениям (6.10.8а) и (6.10.9), полученным для метода Де Суза, поэтому первое, второе и пятое замечания, сделанные по поводу уравнений (6.10.8а) и (6.10.9), остаются справедливыми и для уравнения (6.10.12). Однако уравнение (6.10.12) имеет два преимущества по сравнению с уравнениями (6.10.8а) и (6.10.9): 1) используются как предшествующие, так и последующие температуры, 2) применяются центральные разности, которые обеспечивают значительно меньшую чувствительность к погрешностям измерений.

### 6.10.4. Метод Рейно и Бранзье

Метод Рейно и Бранзье [11, 12] включает в себя процедуру с двухшаговым продвижением. На первом шаге осуществляется пространственное продвижение, а затем следует шаг продвижения по времени. Окончательный результат получается усреднением данных двух шагов. Для продвижения по пространству разностная аппроксимация уравнения теплопроводности записывается в виде

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}(\tilde{T}_j^{i+1} - \tilde{T}_j^i) = \underbrace{-\frac{k}{\Delta x}(\tilde{T}_j^i - \tilde{T}_{j-1}^i)}_{\text{(явная)}} + \underbrace{\frac{k}{\Delta x}(\tilde{T}_{j+1}^{i+1} - \tilde{T}_j^{i+1})}_{\text{(неявная)}} . \tag{6.10.13}$$

Заметим, что используется смешанная явная/неявная аппроксимация. Разрешая уравнение (6.10.13) относительно $\tilde{T}_{j-1}^i$, получим

$$\tilde{T}_{j-1}^i = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\tilde{T}_j^i + \left(1 + \frac{1}{p}\right)\tilde{T}_j^{i+1} - \tilde{T}_{j+1}^{i+1} . \tag{6.10.14}$$

Явный относительно $\tilde{T}_{j-1}^i$ алгоритм начинается с узла $j = K$, для которого вычисления производятся при $i = 2, 3, \ldots, n-1$. В общем случае максимальное значение $i$ так же, как и в алгоритме Вебера, равно $n + j - K$ (подробности представлены на рис. 6.6).

Для второй части алгоритма уравнение теплопроводности аппроксимируется в виде

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}(\tilde{\tilde{T}}_j^{i+1} - \tilde{\tilde{T}}_j^i) = \underbrace{\frac{-k}{\Delta x}(\tilde{\tilde{T}}_j^{i+1} - \tilde{\tilde{T}}_{j-1}^{i+1})}_{\text{(неявная)}} + \underbrace{\frac{k}{\Delta x}(\tilde{\tilde{T}}_{j+1}^i - \tilde{\tilde{T}}_j^i)}_{\text{(явная)}} . \tag{6.10.15}$$

Здесь также используется смешанная явная/неявная аппроксимация. Разрешая уравнение (6.10.15) относительно $\tilde{\tilde{T}}_{j-1}^{i+1}$, получим

$$\tilde{\tilde{T}}_{j-1}^{i+1} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\tilde{\tilde{T}}_j^{i+1} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\tilde{\tilde{T}}_j^i - \tilde{\tilde{T}}_j^i \tag{6.10.16}$$

Алгоритм продвижения по времени является явным относительно $\tilde{\tilde{T}}_{j-1}^{i+1}$. Начиная с $i = 1$, индекс $j$, определяющий число шагов по пространству, принимает значения $K-1, K-2, \ldots, 1$. Последний шаг алгоритма состоит в осреднении результатов предыдущих двух шагов:

$$T_j^i = \tfrac{1}{2}(\tilde{T}_j^i + \tilde{\tilde{T}}_j^i) . \tag{6.10.17}$$

Несмотря на то что в алгоритме Рейно и Бранзье происходит продвижение по времени, общий эффект от двух шагов проявляется так же, как и в алгоритме Вебера, шаблон для которого показан на рис. 6.6, но по сравнению с методом

Вебера данный алгоритм даже менее чувствителен к погрешностям измерений. Общее число последующих шагов по времени равно числу узлов пространственной сетки ($K$).

Рейно и Бранзье учитывали также зависимость теплофизических свойств от температуры.

### 6.10.5. Метод Хиллза и Хензела

Хензел и Хиллз [13] записали уравнение теплопроводности в виде пары уравнений первого порядка:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x} \quad , \tag{6.10.18a}$$

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \tag{6.10.18b}$$

а затем отдельно каждое из них представили в конечно-разностной форме и рассматривали две неизвестные функции, $T(x, t)$ и $q(x, t)$. Анализ возможных преимуществ такого подхода можно найти в работах [13, 14]. Некоторые основные особенности данного метода можно понять, анализируя комбинированную форму уравнений (6.10.18). Использовалась так называемая перекрестная разностная схема:

$$\frac{\Delta x}{2\Delta t}(T_j^{i+1} - T_j^{i-1}) = \frac{\alpha}{\Delta x}(T_{j+1}^i - 2T_j^i + T_{j-1}^i) . \tag{6.10.19}$$

Хотя Рихтмайер и Мортон [15] указывают, что приведенная выше разностная схема для прямых задач всегда неустойчива, для обратных задач она может быть полезна. Если уравнение (6.10.19) разрешить относительно $T_{j-1}^i$, то получим

$$T_{j-1}^i = -\frac{1}{2p} T_j^{i-1} + 2T_j^i + \frac{1}{2p} T_j^{i+1} - T_{j+1}^i . \tag{6.10.20}$$

Вычислительный шаблон для уравнения (6.10.20) показан на рис. 6.7. [Вычислительный шаблон — это схематичное представление разностного уравнения, например (6.10.20).] Описанный алгоритм является явным и аналогичен алгоритму Вебера [уравнение (6.10.11b)] при $\sigma = 0$. Хотя уравнение (6.10.20) справедливо и при $i = 1$, Хензел и Хиллз [13] предпочли заменить в уравнении (6.10.19) центральную разность по времени на правую разность:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}(T_j^2 - T_j^1) = \frac{\alpha}{\Delta x}(T_{j+1}^1 - 2T_j^1 + T_{j-1}^1) . \tag{6.10.21}$$

Решение для $T_{j-1}^i$ имеет вид

$$T_{j-1}^1 = \left(2 - \frac{1}{p}\right) T_j^1 - T_{j+1}^1 + \frac{1}{p} T_j^2 \quad . \tag{6.10.22}$$

Вычислительный шаблон для уравнения (6.10.22) показан на рис. 6.7.

Уравнение (6.10.22) при $i = n$ неприменимо. Вместо использования подхода Вебера и построения решения вплоть до показанной на рис. 6.6 диагональной линии Хензел и Хиллз [13] аппроксимировали производную по времени левой разностью

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta t}(T_j^n - T_j^{n-1}) = \frac{k}{\Delta x}(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) . \tag{6.10.23}$$

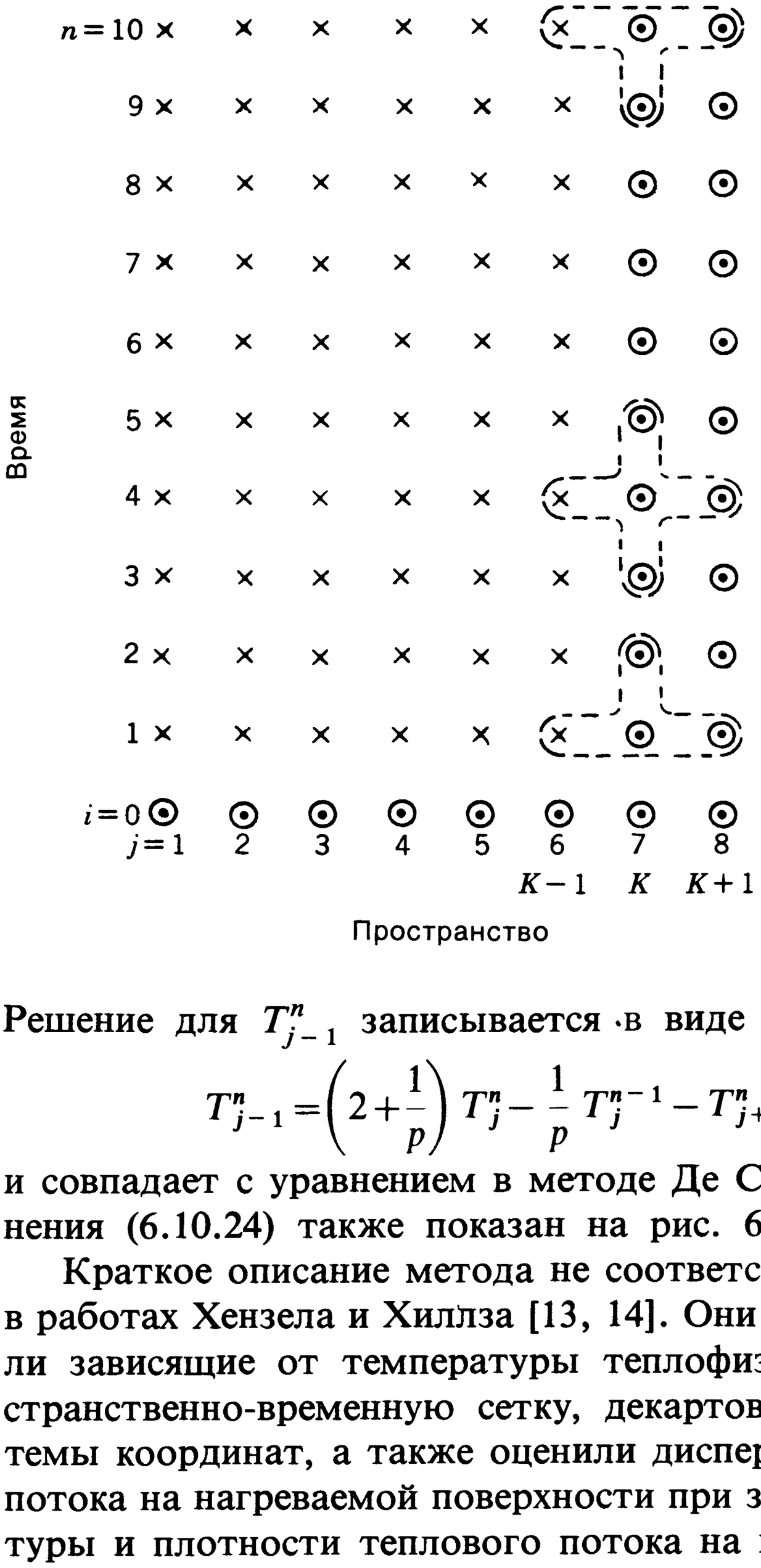



Рис. 6.7. Пространственно-временная сетка для метода Хиллза и Хензела [13, 14]. $K = 7$ (число узлов), $n = 10$ (число измерений температуры), ⊙ известные значения, × вычисленные значения.

Решение для $T_{j-1}^n$ записывается в виде

$$T_{j-1}^n = \left(2 + \frac{1}{p}\right) T_j^n - \frac{1}{p} T_j^{n-1} - T_{j+1}^n \tag{6.10.24}$$

и совпадает с уравнением в методе Де Суза. Вычислительный шаблон для уравнения (6.10.24) также показан на рис. 6.7.

Краткое описание метода не соответствует глубине анализа, представленного в работах Хензела и Хиллза [13, 14]. Они провели детальный анализ и рассмотрели зависящие от температуры теплофизические свойства, неравномерную пространственно-временную сетку, декартову, цилиндрическую и сферическую системы координат, а также оценили дисперсию вычисляемой плотности теплового потока на нагреваемой поверхности при заданных дисперсиях измерений температуры и плотности теплового потока на противоположной границе. Кроме того, в их алгоритме предусмотрена возможность цифровой фильтрации измеренных температур.

### 6.10.6. Сравнение с другими методами

Основной недостаток большинства представленных в разд. 6.10 методов заключается в отсутствии их статистического обоснования. Другой недостаток состоит в том, что в этих методах непросто учесть наличие нескольких внутренних датчиков и перейти к двумерным и трехмерным задачам. Методы функциональной аппроксимации и регуляризации могут быть статистически обоснованы, и подходы, приемлемые в них для одномерных задач, непосредственно распространяются на двух- и трехмерные задачи. Более того, с помощью этих методов можно анализировать совершенно различные задачи, в которых, например, используют-

ся интегральные уравнения или учитывается абляция, тогда как маршевые методы продвижения по пространственной координате в одних случаях могут, а в других — не могут быть использованы.

## 6.11. Числовые примеры

В этом разделе представлены результаты расчетов, в которых проявляются характерные особенности рассмотренных в данной главе методов. Для большинства методов этой главы требуется вычислять различные коэффициенты чувствительности относительно плотности теплового потока ($\partial T/\partial q$). В наиболее эффективных алгоритмах используются разностные методы. Возникает вопрос о том, какой разностный метод обеспечивает наибольшую точность при вычислении коэффициентов чувствительности. Хотя подробного анализа не проводилось, рис. 6.8 в какой-то степени позволяет ответить на поставленный вопрос. На этом рисунке приведены результаты для плоской пластины при расположении датчика в среднем сечении. Коэффициент чувствительности вычисляется в безразмерный момент времени, который равен безразмерному шагу по времени при разностной аппроксимации, т. е. $t^+ = \Delta t^+$. Метод с левой разностью ($\theta = 1$) дает наилучшие результаты для шагов $\Delta t^+$, близких к единице и больше, в то время как для $\Delta t^+ < 0{,}1$ лучшим является метод с центральной разностью.

Как было отмечено ранее, при расчете коэффициентов чувствительности шаг

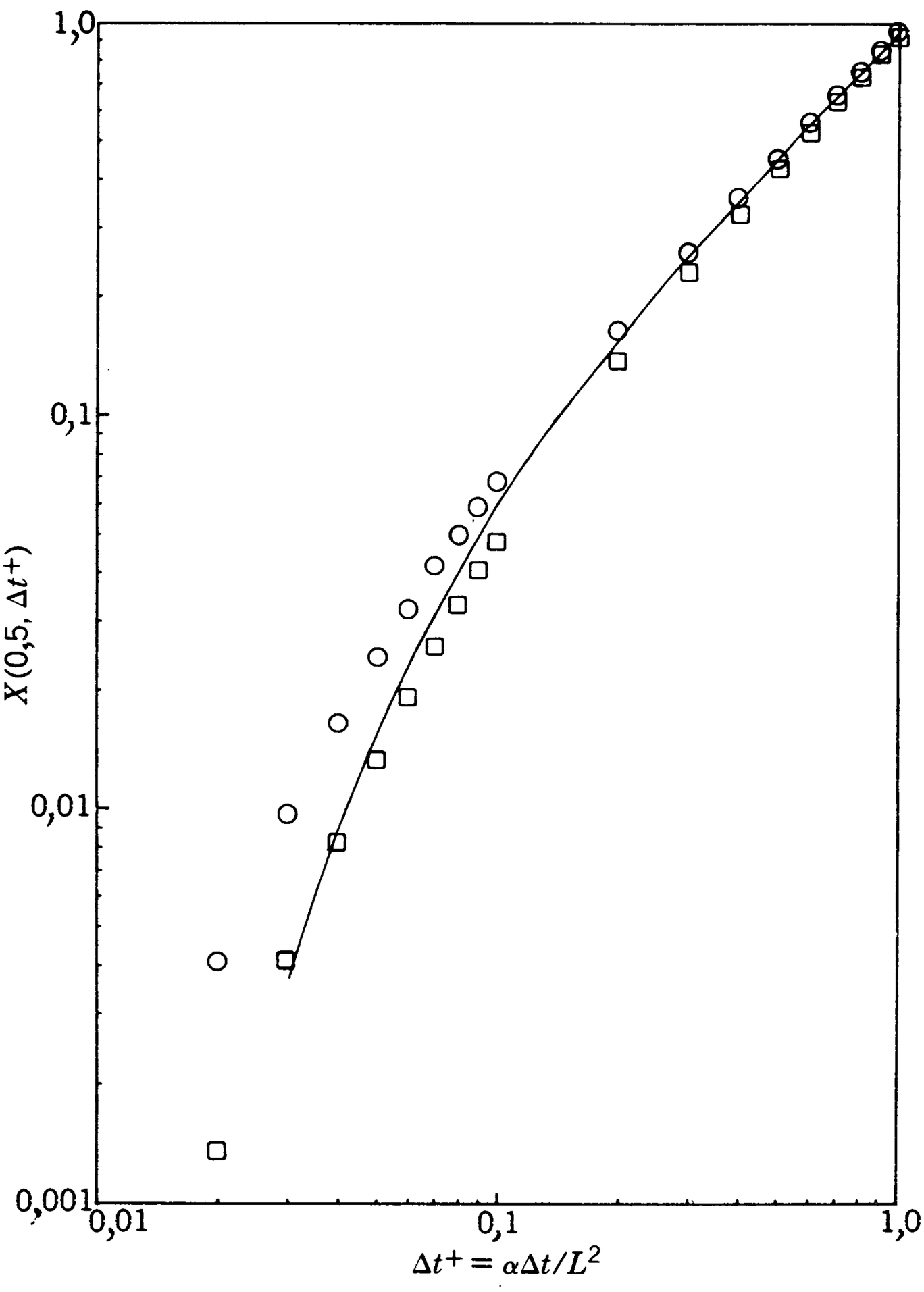



Рис. 6.8. Коэффициенты чувствительности для плоской пластины, вычисленные разностным методом при $x_k/L = 0{,}5$; —— аналитическое решение; ◯ $\theta = 1$, сосредоточенная теплоемкость; □ $\theta = 1/2$, сосредоточенная теплоемкость; $\Delta t/\Delta t_x = 1$.

*Таблица 6.7.* Изменения температуры при воздействии импульса теплового потока треугольной формы. Случайные погрешности некоррелированы, имеют нормальный закон распределения и среднеквадратичное отклонение 0,0017

| $t^+$ | $T^+ = \dfrac{T - T_0}{q_N L/K}$ | $t^+$ | $T^+ = \dfrac{T - T_0}{q_N L/K}$ |
|---|---|---|---|
| −0,24 | 0,00034 | 0,6600 | 0,127722 |
| −0,18 | 0,00281 | 0,7200 | 0,155529 |
| −0,12 | 0,00135 | 0,7800 | 0,193275 |
| −0,06 | −0,00090 | 0,8400 | 0,223066 |
| 0,0 | −0,00020 | 0,9000 | 0,248541 |
| 0,0600 | −0,004241 | 0,9600 | 0,275499 |
| 0,1200 | −0,000639 | 1,0200 | 0,293646 |
| 0,1800 | 0,001307 | 1,0800 | 0,311805 |
| 0,2400 | 0,007161 | 1,1400 | 0,330811 |
| 0,3000 | 0,012874 | 1,2000 | 0,342215 |
| 0,3600 | 0,021764 | 1,2600 | 0,348997 |
| 0,4200 | 0,038954 | 1,3200 | 0,350227 |
| 0,4800 | 0,054821 | 1,3800 | 0,355722 |
| 0,5400 | 0,072952 | 1,4400 | 0,359318 |
| 0,6000 | 0,098381 | 1,5000 | 0,361609 |

по времени $\Delta t_x$ может быть меньше используемого для решения обратной задачи шага $\Delta t$. Это должно приводить к большей точности вычисления коэффициентов чувствительности.

В гл. 5 были представлены результаты численного решения нескольких примеров с треугольной формой изменения плотности теплового потока. Здесь для анализа результатов расчетов будем использовать те же примеры. Треугольный импульс плотности теплового потока имеет максимум при $t^+ = 0{,}6$, затем он уменьшается по линейному закону и $q^+ = 0$ при $t^+ = 1{,}2$. Аналитическое решение этой задачи приведено в гл. 5 [см. уравнения (5.2.4) — (5.2.6)]. Точные значения безразмерной температуры для расположенного на теплоизолированной поверхности датчика представлены в табл. 5.1 (с шестью значащими цифрами). Погрешности измерений температуры, моделируемые с помощью генератора случайных чисел при нормальном законе распределения и значения среднеквадратичного отклонения $\sigma_Y^+$, равном 0,0017, приведены в табл. 6.7. Это среднеквадратичное отклонение составляет около 5% от максимального изменения безразмерной температуры для треугольного импульса плотности теплового потока. Все последующие расчеты проводились разностным методом при $\theta = 1$ и сосредоточенной теплоемкости. Аналогичные результаты получаются при $\theta = 1/2$ и (или) других схемах распределения теплоемкости.

Сравнение результатов, полученных методом функциональной аппроксимации $q = C$ при $r = 3$ и использовании точных и неточных данных, показано на рис. 6.9. Для точных ($\sigma_Y^+ < 10^{-6}$) данных имеется хорошее соответствие. Однако учет погрешностей измерения температуры приводит к разбросу вычисленных значений плотности теплового потока. При $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$ результаты аналогичны

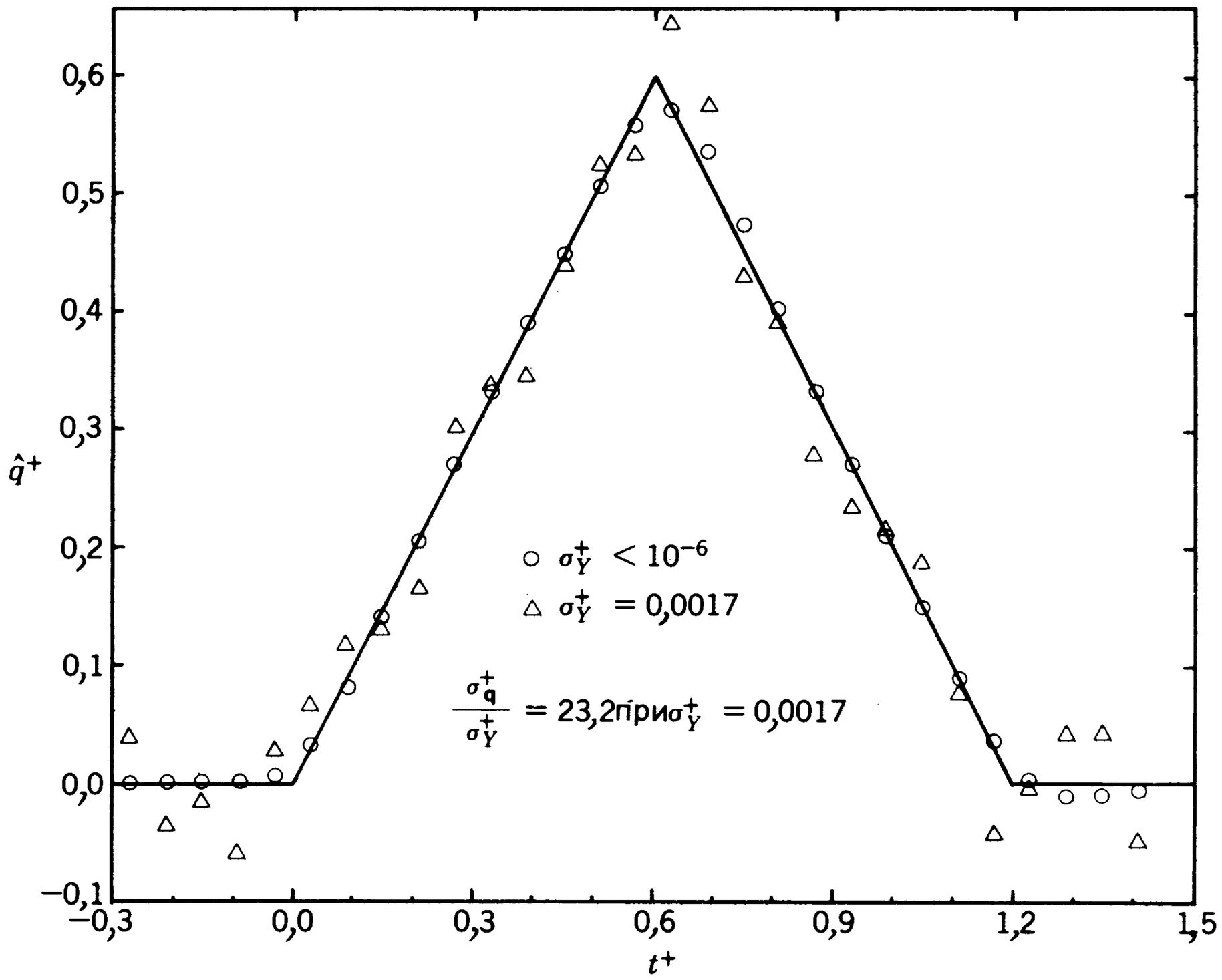



Рис. 6.9. Сравнение результатов решения методом функциональной аппроксимации, полученных при пользовании точных ($\sigma_Y^+ < 10^{-6}$) и неточных ($\sigma_Y^+ = 0{,}0017$) данных; $q = C$, 20 элементов, $r$ $\Delta t/\Delta t_x = 2$, $\Delta t^+ = 0{,}06$, $\theta = 1$, сосредоточенная теплоемкость, $x/L = 1{,}0$.

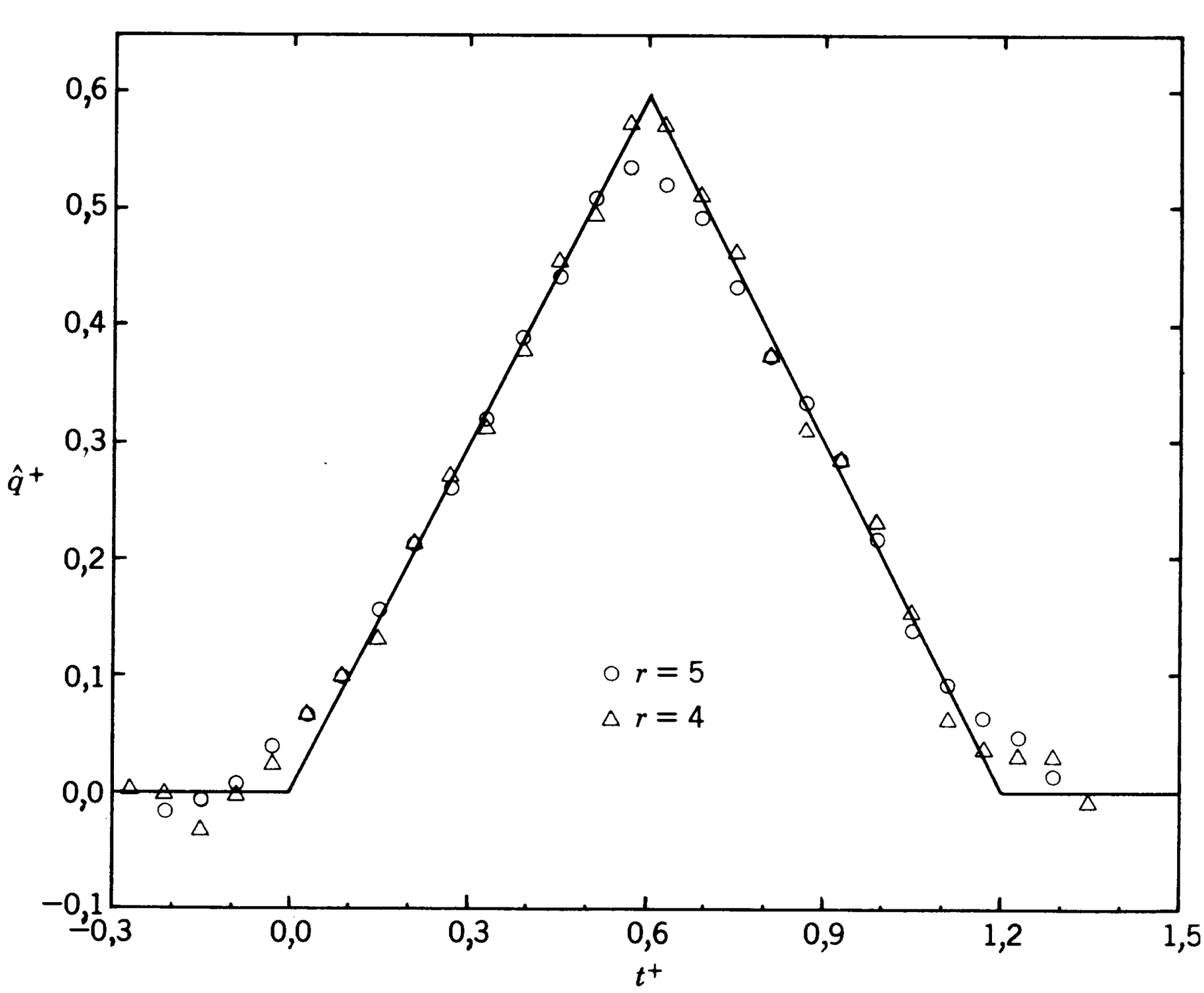
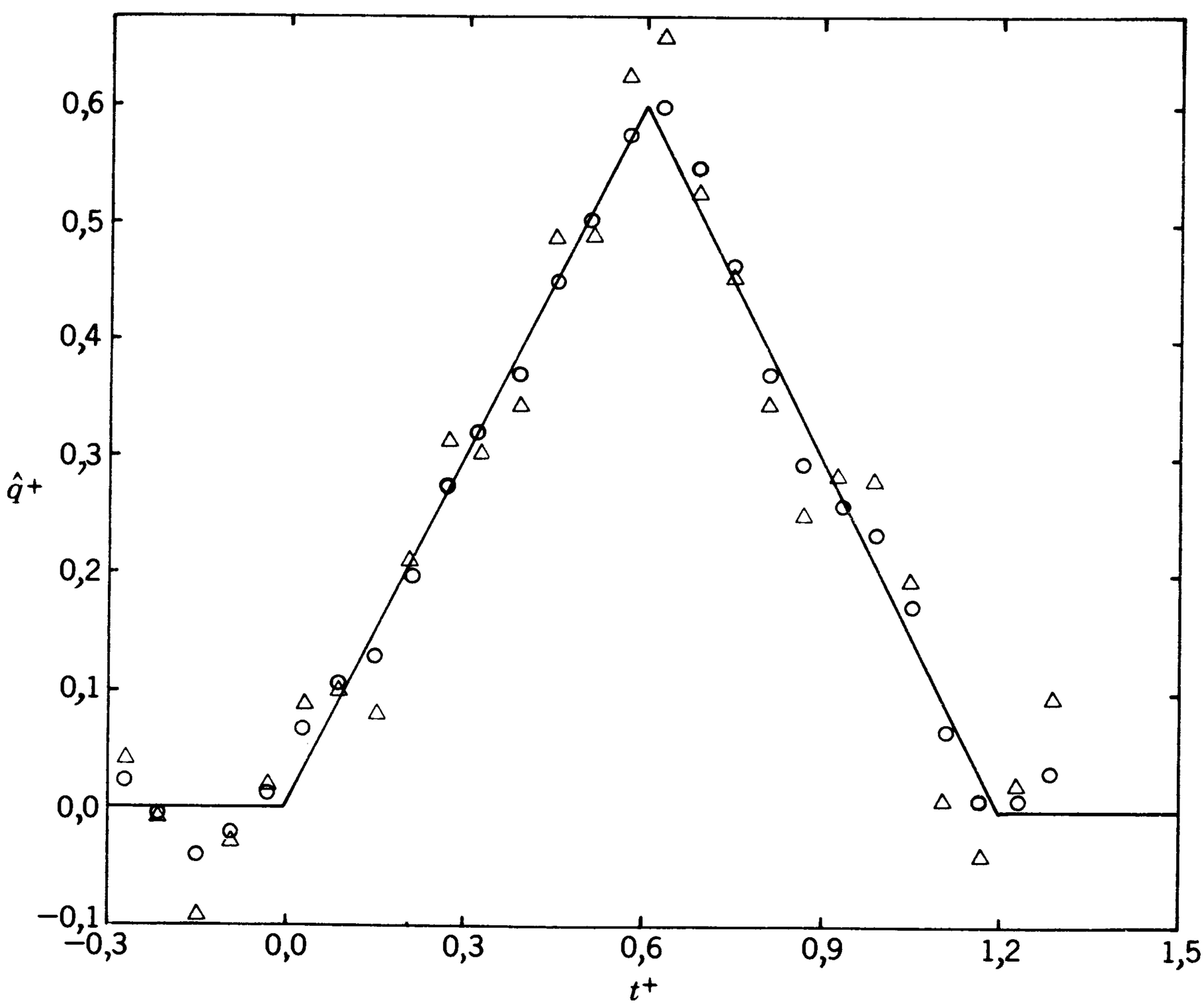
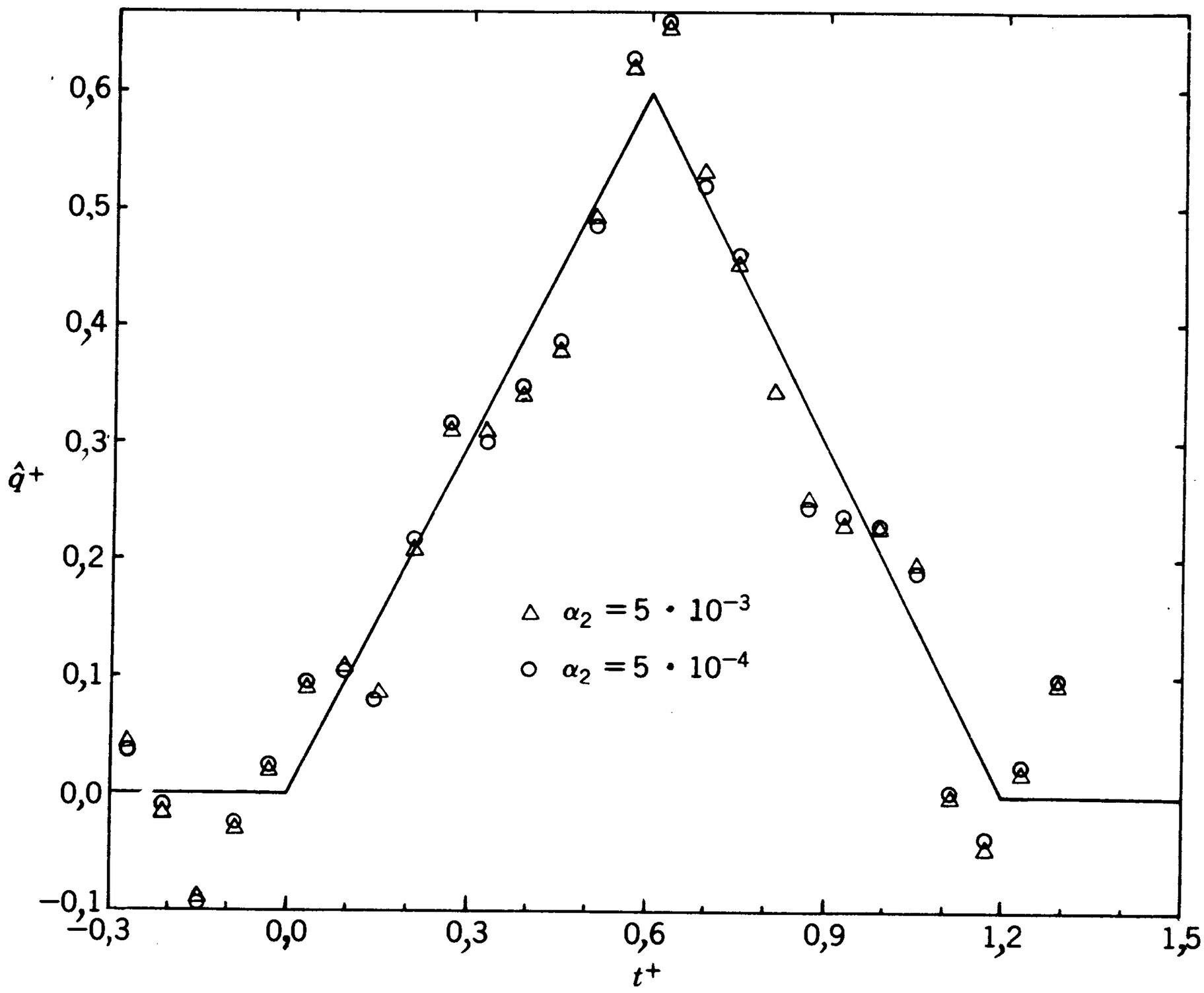



Рис. 6.10. Метод функциональной аппроксимации; $q = C$, 20 элементов, $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$, $\Delta t/\Delta t_x = 2$, $\Delta t^+ = 0{,}06$, $\theta = 1$, сосредоточенная теплоемкость, $x/L = 1{,}0$.




. 6.11. Сравнение результатов, полученных при использовании последовательной регуляризации вого и второго порядков; $\alpha = 0{,}001$, 20 элементов, $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$, $\Delta t/\Delta t_x = 2$, $\Delta t^+ = 0{,}06$, $r = 5$, 1, сосредоточенная теплоемкость, $x/L = 1{,}0$; ○ первый порядок, $\alpha_1 = 0{,}001$; △ второй порядок, = 0,001.




6.12. Влияние $\alpha_2$ на результаты, полученные при использовании последовательной регуляризации ого порядка; 20 элементов, $\sigma_Y^+ = 0{,}0017$, $\Delta t/\Delta t_x = 2$, $\Delta t^+ = 0{,}06$, $r = 5$, $\theta = 1$, сосредоточенная оемкость, $x/L = 1{,}0$.

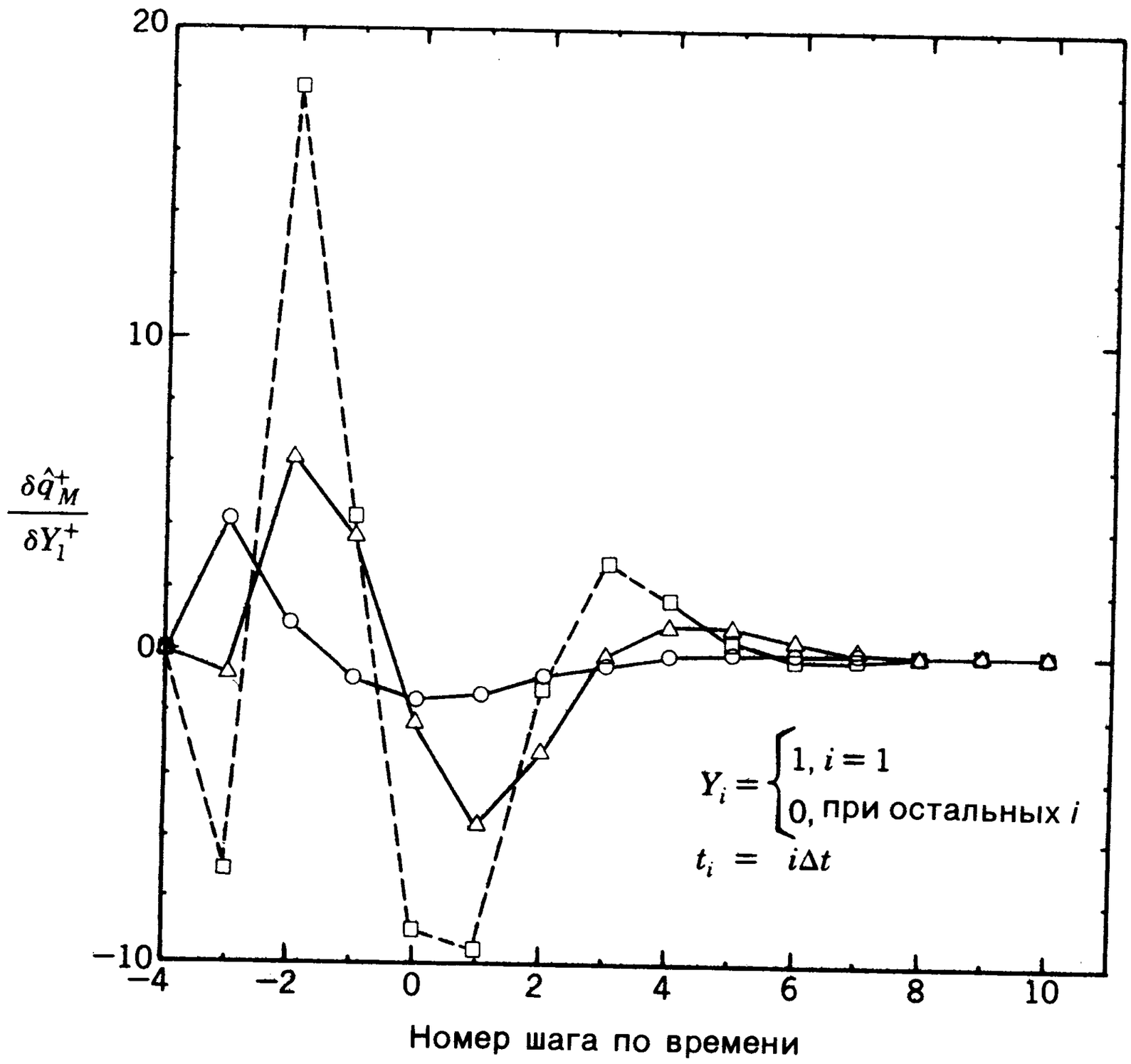



Рис. 6.13. Безразмерная погрешность определения плотности теплового потока, обусловленная погрешностью одиночного измерения, $t^+ = \Delta t^+ = 0{,}06$, $r = 5$, 20 элементов, $\Delta t/\Delta t_x = 2$, $\theta = 1$, сосредоточенная теплоемкость, $x/L = 1{,}0$; ○ $q = C$, Δ первый порядок последовательной регуляризации; □ второй порядок последовательной регуляризации.

полученным с использованием теоремы Дюамеля (рис. 5.13). Отношение $\sigma_{\hat{q}}^+/\sigma_Y^+$ равно 23,2 (рис. 6.9) и достаточно близко к значению 25,4 (рис. 5.13).

На рис. 6.10 сравниваются результаты, полученные для содержащих погрешности данных методом функциональной аппроксимации ($q = C$) при $r = 4$ и 5. С учетом погрешностей измерений оба значения $r$ приводят к удовлетворительным значениям плотности теплового потока. По мере увеличения $r$ способность отслеживать резкие изменения $q$ ухудшается, и это проявляется в окрестности значений $t^+$, равных 0, 0,6 и 1,2. Оптимальный выбор $r$ и $\Delta t^+$ анализируется в разд. 5.6.1.

Представленные на рис. 6.9 и 6.10 результаты весьма близки к полученным с использованием интеграла свертки и приведенным на рис. 5.12 и 5.13. Это и ожидалось, поскольку применялись одни и те же алгоритмы решения ОЗТ, при этом методы решения задачи теплопроводности и вычисления коэффициентов чувствительности были различными. Также отличались и случайные погрешности.

Та же задача была решена с использованием метода последовательной регуляризации как первого, так и второго порядка при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}001$. Полученные результаты демонстрируются на рис. 6.11. Регуляризация первого порядка, оказывается значительно эффективнее, чем регуляризация второго порядка. Выбор $\alpha$ базировался на использовании данных гл. 5, которые были получены с применением интеграла свертки. Анализ оптимального выбора $\alpha_2$ не проводился, однако

сравнение представленных на рис. 6.12 результатов для $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\alpha_2 = 5 \times 10^{-4}$ показывает весьма малое их различие.

В гл. 5 были приведены числовые примеры, иллюстрирующие влияние одиночной погрешности измерения температуры на результаты вычисления плотности теплового потока как в предшествующие, так и в последующие моменты времени по отношению к этой погрешности. Аналогичные результаты представлены на рис. 6.13 и были получены для случая, когда $Y_1 = 1$, а все остальные измеренные температуры приравнивались нулю. Для последовательной регуляризации второго порядка наблюдаются намного бóльшие колебания по сравнению с методом функциональной аппроксимации ($q = C$) и последовательной регуляризацией первого порядка. Этим, в частности, можно объяснить, почему регуляризация второго порядка на рис. 6.11 выглядит слабее. Наименьшие колебания дает метод функциональной аппроксимации.

Приведенные результаты служат наглядным доказательством того, что метод функциональной аппроксимации ($q = C$) и метод последовательной регуляризации первого порядка приводят к близким результатам. Каждый раз при использовании метода регуляризации для решения нового класса задач наличие параметра регуляризации $\alpha$ вызывает необходимость проведения пробных расчетов. Как метод функциональной аппроксимации, так и метод регуляризации первого порядка обеспечивают приемлемую точность получаемых результатов.

## 6.12. Программы для ЭВМ

Для решения обратной задачи теплопроводности разработано очень много программ для ЭВМ. Расскажем о некоторых из них. Обзор нескольких машинных программ имеется в работе Бека [17].

Перечень ряда программ представлен в табл. 6.8. Во всех них, кроме последней в списке, для решения задачи нестационарной теплопроводности используется та или иная разностная процедура, и поэтому можно учитывать зависимость теплофизических характеристик от температуры. Каждая программа имеет свои специфические особенности и возможности. Краткое описание перечисленных в табл. 6.8 программ дается ниже.

Программа CONTA была разработана Беком [18] при поддержке Мичиганского государственного университета и национальных лабораторий Сандиа. В этой программе используется процедура функциональной аппроксимации при временном предположении о постоянстве $q$. Для вычисления коэффициентов чувствительности применяется очень эффективный способ [6]. Программа позволяет анализировать несколько датчиков, размещенных в составных пластинах.

Программа HCODE разработана фирмой «Дженерал электрик» [19] для анализа безопасности ядерных реакторов. Она позволяет рассматривать составные цилиндрические стержни. В программе используется модификация метода функциональной аппроксимации.

Программа HEATINV [20] разработана в Центре вооружений ВМС, и среди остальных использующих разностные методы и перечисленных в табл. 6.8 про-

*Таблица 6.8.* Перечень программ для решения обратной задачи теплопроводности

| Программа | Разработчик/ организация | Алгоритм решения | Разностный метод | Интегральный метод |
|---|---|---|---|---|
| CONTA | Бек (Мичиганский университет, «Сандиа», Альбукерке) | Последовательная функциональная аппроксимация | Кранка — Никольсона | Нет |
| HCODE | Маззи, Авила, Рут («Дженерал электрик», Сан-Жозе) | Модифицированная последовательная функциональная аппроксимация | Кранка — Никольсона | —″— |
| HEATINV | Белл, Уордлоу (Центр вооружений ВМС) | Регуляризация нулевого и первого порядков во всей области | Кранка — Никольсона | —″— |
| INVERT 1.0 | Снайдер (EG&G, шт. Айдахо) | Последовательная функцио нальная аппроксимация | Обобщенный метод Кранка — Никольсона | —″— |
| ORMDIM | Басс, Дрейк, Отт (Нац. лаб. в Ок-Ридже) | Последовательная функциональная аппроксимация | Конечных элементов | —″— |
| ORINC | Отт, Хедрик (Нац. лаб. в Ок-Ридже) | Использует температуры только в момент времени $t_M$ | Левые разности | —″— |
| SODDIT | Блакуэлл («Сандиа», Альбукерке) | Последовательная функциональная аппроксимация | Конечного контрольного объема, левые разности | —″— |
| SMICC | Хиллз, Хензел (шт. Нью-Мексико) | Продвижение по пространству | Да | —″— |
| ARIES | Дрейк (Нац. лаб. в Ок-Ридже) | Регуляризация нулевого, первого и второго порядков во всей области | | Да |

граммм только в ней применен метод регуляризации во всей области. Используется сочетание нулевого и первого порядков регуляризации. Вместо метода регуляризации во всей области в вычислительном отношении более эффективно было бы использовать в этой программе метод последовательной регуляризации.

Программа INVERT 1.0 разработана Снайдером [21] из Национальной лаборатории EG&G, и в ней используется метод функциональной аппроксимации. Программа позволяет исследовать составные цилиндрические стержни.

Программа ORMDIM разработана в Национальной лаборатории в Ок-Ридже Бассом и др. [22]. Это двумерная, основанная на применении метода конечных элементов, программа.

Программа ORINC [23] также разработана в Национальной лаборатории в Ок-Ридже. Она предназначена для составных цилиндров. Используется полностью неявный метод решения разностных уравнений. Для вычисления плотности теплового потока в момент времени $t$ используются температуры только до момента $t$.

Программа SODDIT разработана в Национальных лабораториях «Сандиа» в Альбукерке Блакуэллом [24]. Разностные уравнения получены с применением метода конечного контрольного объема. Используется метод последовательной

функциональной аппроксимации, возможен анализ произвольных одномерных геометрических форм.

Программа SMICC разработана Хиллзом и Хензелом [14]. Здесь используется маршевый метод продвижения вдоль пространственной координаты, описанный в разд. 6.10.5. Она также предусматривает получение оценок компонент плотности теплового потока с высокой разрешающей способностью и точностью. Хиллз и Хензел работают в Государственном университете шт. Нью-Мексико, и их изыскания частично поддерживались Национальными лабораториями «Сандиа».

Программа ARIES [25] — единственная среди перечисленных в табл. 6.8 программ, которая основана на модели в интегральной форме, и поэтому ее применение ограничено линейными задачами. Однако интегральная модель обеспечивает большую гибкость и позволяет анализировать широкий круг обратных задач. Пользователь может выбрать нулевой, первый или второй (или их некоторое сочетание) порядок регуляризации во всей области.

## Литература


1. Beck, J. V. and Wolf, H., The Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem, ASME Paper 65-HT-40, presented at the ASME/AIChE Heat Transfer Conference and Exhibit, Los Angeles, CA, August 8–11, 1965.
2. CDC 7600/CYBER 70 Model 76, Computer Systems Hardward Reference Manual, Control Data Corp., Publication no. 60367200, Minneapolis, 1972.
3. Blackwell, B. F., Efficient Technique for the Numerical Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction, *Numer. Heat Transfer* **4**, 229–238 (1981).
4. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1977.
5. Beck, J. V., Surface Heat Flux Determination Using an Integral Method, *Nucl. Eng. Des.* **7**, 170–178 (1968).
6. Beck, J. V., Litkouhi, B., and St. Clair, C. R., Effective Sequential Solution of the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem, *Numer. Heat Transfer* **5**, 275–286 (1982).
7. deBoor, C., *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag, New York, 1978.
8. D'Souza, N., Inverse Heat Conduction Problem for Prediction of Surface Temperatures and Heat Transfer from Interior Temperature Measurements, Report No. SRC-R-74, Space Research Corporation, Montreal, December 1973.
9. D'Souza, N., Numerical Solution of One-Dimensional Inverse Transient Heat Conduction by Finite Difference Method, ASME Paper No. 75-WA/HT-81, presented at Winter Annual Meeting, Houston, TX, Nov. 30–Dec. 4, 1975.
10. Weber, C. F., Analysis and Solution of the Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **24**(11), 1783–1792 (1981).
11. Raynaud, M., Determination du Flux Surfacique Traversant Une Paroi Soumise a Un Incendie au Moyen D'Une Methods D'Inversion, Laboratoire D'Aerothermique Groupe 'Echanges Thermiques' Universite Pierre et Marie Curie, Paris, France, August 1983.
12. Raynaud, M., and Bransier, J., A New Finite Difference Method for Non Linear Inverse Heat Conduction Problem, to be published in *Numerical Heat Trdnsfer.*
13. Hensel, E. C. and Hills, R. G., A Space Marching Finite Difference Algorithm for the One Dimensional Inverse Conduction Heat Transfer Problem, ASME Paper No. 84-HT-48, presented at 22nd National Heat Transfer Conference, Niagara Falls, NY, August 6–8, 1984.
14. Hills, R. G. and Hensel, E. C., SMICC, the Space Marching Inverse Conduction Code, SAND 84-1563, Sandia National Laboratory, Albuquerque, NM, 1985.
15. Richtmyer, R. D. and Morton, K.W., *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2nd ed., Interscience Publishers, New York, 1967.
16. Alifanov, O. M., Inverse Boundary Value Problems of Heat Conduction, *J. Eng. Phys.* **29**(1), 821–830 (1975).

17. Beck, J. V., Review of Six Inverse Heat Conduction Computer Codes, ANL/RAS/LWR 81-1, Argonne National Laboratory, Argonne, Illinios, February 1981.
18. Beck, J. V., User's Manual for CONTA—Program for Calculating Surface Heat Fluxes From Transient Temperatures Inside Solids, Sandia National Laboratory, Contractor Report, SAND83-7134, December, 1983.
19. Muzzy, R. J., Avila, J. H., and Root, R. E., Topical Report: Determination of Transient Heat Transfer Coefficients and the Resultant Surface Heat Flux from Internal Temperature Measurements, General Electric, GEAP-20731, 1975.
20. Bell, J. B. and Wardlaw, A. B., Numerical Solution of an Ill-Posed Problem Arising in Wind Tunnel Heat Transfer Data Reduction, NSWC TR 82-32, Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia 22448, December 1981.
21. Snider, D. M., Invert 1.0—A Program for Solving the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem for One-Dimensional Solids, EGG-2068, EG&G Idaho, Inc., Idaho Falls, Idaho 83415, February 1981.
22. Bass, B. R., Drake, J. B., Ott, L. J., ORMDIN: A Finite Element Program for Two-Dimensional Nonlinear Inverse Heat Conduction Analysis, NUREG/CR-1709, ORNL/NUREG/CSD/TM-17, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, D.C., December 1980.
23. Ott, L. J. and Hedrick, R. A., ORINC: A One Dimensional Implicit Approach to the Inverse Heat Conduction Problem, NTIS Report ORNL/NUREG-23, Oak Ridge National Laboratories, Oak Ridge, TN., 1977.
24. Blackwell, B. F., User's Manual for the Sandia One-Dimensional Direct and Inverse Thermal (SODDIT) Code, Sandia National Laboratories internal report of Div. 7537, 1983.
25. Drake, J. B., ARIES: A Computer Program for the Solution of First Kind Integral Equations with Noisy Data, K/CSD/TM-43, Computer Sciences at Oak Ridge Gaseous Diffusion Plant, Post Office Box P, Oak Ridge, Tennessee 37830, October 1983.

Имеются на русском языке

7. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1985.
15. Рихтмайер Р. Д., Мортон К. У. Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.
16. Алифанов О. М. Граничные обратные задачи теплопроводности. — Инженерно-физический журнал, 1975, т. 29, № 1, с. 13—25.

## Задачи

6.1. Докажите, что выражение (6.2.5) справедливо для постоянных теплофизических характеристик.

6.2. Для одномерного плоского тела с постоянными свойствами напишите уравнения разностной аппроксимации задачи (6.2.7) для коэффициента чувствительности $Z$ (ступенчатое изменение плотности теплового потока). Используйте формулу интегрирования по времени по своему усмотрению. Покажите, что те же самые разностные уравнения получаются дифференцированием уравнения (3.3.45) по $q_M$.

6.3. Можно ли в алгоритме точной подгонки к результатам измерения температуры одиночным датчиком коэффициент чувствительности $X$ в уравнении (6.3.8) заменить на $Z$? Почему?

6.4. Напишите эффективную машинную подпрограмму для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей [см. уравнения (6.3.10) и (6.3.11)].

5. Проверьте алгабраические преобразования в соотношениях (6.3.12)—(6.3.14) алгоритма вычисления коэффициентов чувствительности.

6. Для плоского тела с одной теплоизолированной поверхностью вычислите коэффициенты чувствительности $Z_{k,1}$ и $Z_{k,2}$ при $x_k/L = 0{,}5$ и 1 и $\Delta t^+ = 0{,}05$ и 0,1 соответственно. Используйте полностью неявный метод. Сравните полученные результаты с величинами, приведенными в табл. 1.1.

7. Докажите, что в уравнении (6.4.11) $\sum_{k=1}^{N} w_k = 1$.

8. Повторите пример 6.1 для $x_k/L = 1$ и $\Delta t^+ = 0{,}05$ и 0,5.

9. В разд. 6.6 в уравнении (6.4.4) при разложении в ряд Тейлора использовался коэффициент чувствительности $Z$ (ступенчатое изменение плотности теплового потока). Почему $Z$, а не $X$?

10. Повторите пример 6.2 для $\Delta t^+ = 0{,}1$.

11. Продолжите анализ разд. 6.9 и рассмотрите несколько датчиков температуры.

12. Сравните вычислительные шаблоны во всех рассмотренных в разд. 6.10 маршевых методах продвижения вдоль пространственной координаты.

13. Вас, как консультанта по вопросам теплообмена, попросили высказать мнение о качестве данных в следующей обратной задаче: в толстой медной пластине толщиной 5 мм установлена термопара на расстоянии 1 мм от нагреваемой поверхности. На тыльной стороне поверхности плотность теплового потока равна 50 кВт/м$^2$. Лицо, объясняющее вам условия эксперимента, предполагает, что плотность теплового потока, которую необходимо оценить, имеет величину порядка 1 кВт/м$^2$. Обеспечивает ли данный эксперимент необходимую информацию?

14. a. Применяя метод Де Суза, выведите выражение для плотности теплового потока на поверхности по двум узлам для сплошного цилиндра с расположенным в центре датчиком. Разностные уравнения выводите из баланса энергии.
    b. Повторите п. a для трех узлов.
    c. Сравните полученные выражения с точным решением Бургграфа.

15. Решите задачи 6.14 для сплошной сферы.

16. Применяя метод Вебера, выведите выражение для плотности теплового потока на поверхности по двум узлам для сплошного цилиндра с расположенным в центре датчиком. Скорость распространения волны бесконечна. Разностные уравнения выводите из баланса энергии. Сравните полученное выражение с точным решением Бургграфа.

17. Решите задачу 6.16 для сплошной сферы.

# Глава 7
# Многомерные обратные задачи теплопроводности

## 7.1. Введение

В предыдущих главах рассматривалась одна неизвестная зависимость от времени плотности теплового потока на поверхности. В данной главе исследуется обратная задача теплопроводности при нескольких неизвестных тепловых потоках.

Задача определения нескольких тепловых потоков возникает, в частности, когда на обеих поверхностях одномерного тела действуют тепловые потоки, законы изменения плотности которых от времени неизвестны. На рис. 7.1, *a* показана нагреваемая с двух сторон пластина. Неизвестными являются зависимости от времени плотностей тепловых потоков $q_1(t)$ и $q_2(t)$. На рис. 7.1, *b* изображены полый цилиндр или сфера. Здесь также неизвестны две зависимости плотностей тепловых потоков от времени. В обоих случаях (рис. 7.1, *a, b*) должны быть установлены по меньшей мере два датчика температуры на различной глубине. Предполагается, что процесс теплопереноса одномерен и плотности тепловых потоков $q_1(t)$ и $q_2(t)$ независимы. Следовательно, любое изменение по времени $q_1(t)$ не влияет на $q_2(t)$. Эта задача несколько отличается от рассмотренной в предыдущих главах.

Случай двух тепловых потоков возникает не только при одномерном теплопереносе. Например, пластина на рис. 7.1, *a* может и не иметь параллельных поверхностей, так же как радиусы на рис. 7.1, *b* могут не выходить из одной точки. Другим примером может служить квадрат, на соседние стороны которого воздействуют тепловые потоки с неодинаково изменяющимися по времени плотностями.

Более типичная многомерная обратная задача теплопроводности возникает при воздействии на тело теплового потока, плотность которого изменяется как по пространственной координате, так и по времени (рис. 7.2). Поэтому распределение температуры становится двумерным. Может рассматриваться любая сис-

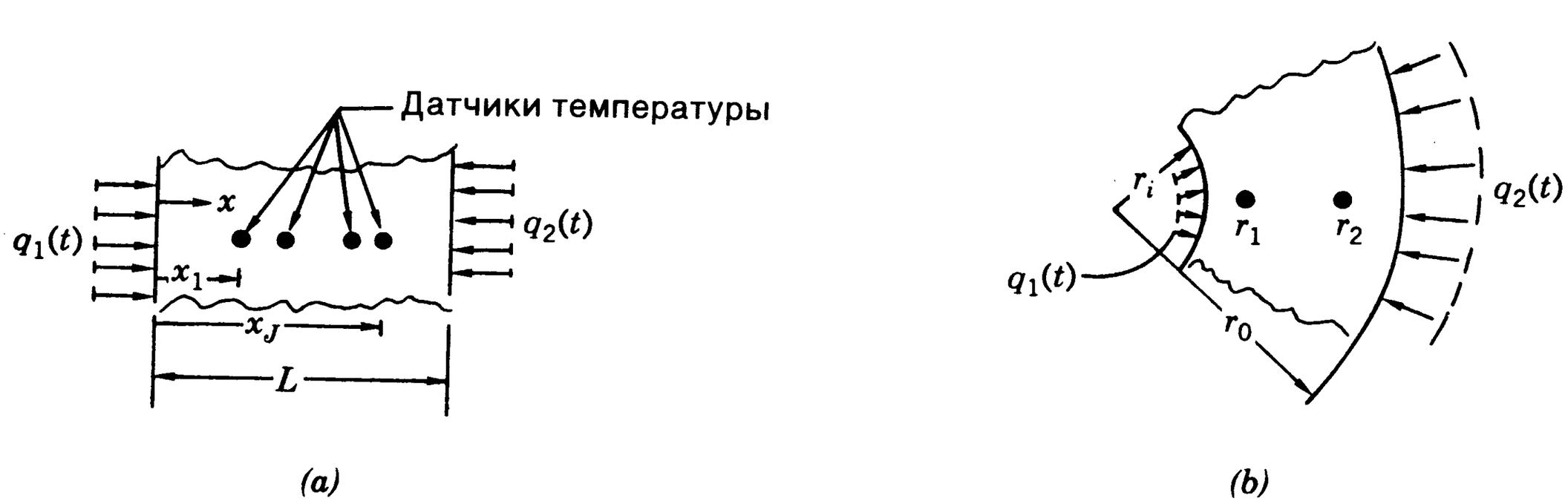



Рис. 7.1. Некоторые примеры одномерных тел, подвергающихся воздействию двух неизвестных изменяющихся по времени тепловых потоков плотностями $q_1(t)$ и $q_2(t)$; *a* — пластина, *b* — полые цилиндр или сфера.

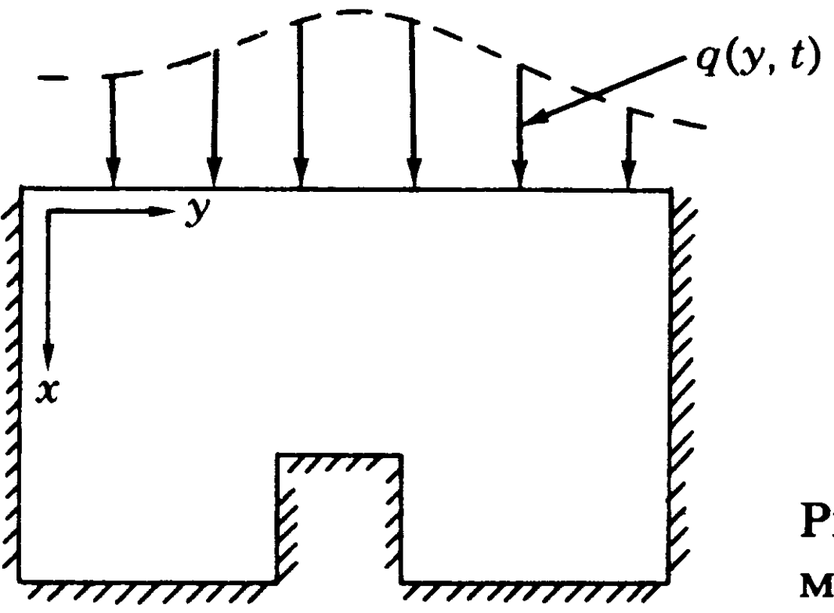



Рис. 7.2. Двумерное тело, на поверхность которого воздействует изменяющийся во времени и пространстве тепловой поток.

тема координат и анализ не ограничивается двумерными случаями. Тело может состоять из нескольких материалов и иметь неправильную форму. Необходимо только иметь метод решения прямой задачи (при *известном* изменении поверхностной плотности теплового потока от пространства и времени).

В данной главе метод решения прямой задачи не анализируется. Вернее, предполагается использование таких методов, как метод конечных разностей, конечных элементов или теорема Дюамеля. Для простоты рассматриваются линейные задачи, однако с использованием предложенных в гл. 6 модификаций можно анализировать и нелинейные случаи.

По двумерным обратным задачам теплопроводности уже написано несколько статей [1)]. В работе Басса и др. [1] приведено описание машинной программы для сплошного цилиндра с учетом зависимости плотности теплового потока от радиальной и угловой координат. В этой программе использовался метод конечных элементов. Аналитическое решение было получено Имбером [2]. Некоторые двумерные обратные задачи, в которых искомыми были геометрические параметры (и которые, следовательно, не являются ОЗТ), исследовались Се и Су [3, 4].

В этой главе рассматривается случай двух тепловых потоков (рис. 7.1) и анализируется задача для тепловых потоков, зависящих от нескольких переменных. Используются методы последовательной функциональной аппроксимации и последовательной регуляризации. При этом по сравнению с предыдущими главами числовые результаты демонстрируются в меньшей степени.

## 7.2. Два независимых тепловых потока

Температуру в одно-, двух- или трехмерном теле с независящими от температуры теплофизическими свойствами можно представить в следующей стандартной форме:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}|_{\mathbf{q}=0} + \mathbf{X}\mathbf{q} \tag{7.2.1}$$

Символ $\mathbf{T}|_{\mathbf{q}=0}$ означает вычисленный вектор температур $\mathbf{T}$ при нулевом векторе $\mathbf{q}$, который определяется выражением (7.2.3а) [см. соотношение (3.2.22)]. Для случая двух компонент $q$ в каждый момент времени, $J$ датчиков температуры и $r$ последующих шагов по времени составляющие в выражении для $\mathbf{T}$ имеют вид

---

[1)] В отечественной литературе вопросы решения двумерных ОЗТ рассматривались в ряде работ, например: Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов.— М.: Машиностроение, 1979, Керов Н.В. Решение двумерной ОЗТ в цилиндрической системе координат.— ИФЖ, 1983, т. 45, №5, с. 752—756.— *Прим. ред.*

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}(M)\\ \mathbf{T}(M+1)\\ \vdots\\ \mathbf{T}(M+r-1)\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}(i)=\begin{bmatrix}T_1(i)\\ T_2(i)\\ \vdots\\ T_J(i)\end{bmatrix}, \tag{7.2.2a, b}$$

где $\mathbf{T}$ — матрица размером $Jr \times 1$, т. е. вектор размером $Jr$,

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}(M)\\ \mathbf{q}(M+1)\\ \vdots\\ \mathbf{q}(M+r-1)\end{bmatrix},\quad \mathbf{q}(i)=\begin{bmatrix}q_1(i)\\ q_2(i)\end{bmatrix}, \tag{7.2.3a, b}$$

где $\mathbf{q}$ — матрица размером $rp \times 1$, и в данном случае $p = 2$;

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}(1) & & & \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) & & \\ \mathbf{a}(3) & \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{a}(r) & \mathbf{a}(r-1) & \cdots & \mathbf{a}(1)\end{bmatrix}, \tag{7.2.4}$$

где $\mathbf{X}$ — матрица размером $Jr \times pr$ и

$$\mathbf{a}(i)=\begin{bmatrix}a_{11}(i) & a_{12}(i)\\ a_{21}(i) & a_{22}(i)\\ \vdots & \vdots\\ a_{J1}(i) & a_{J2}(i)\end{bmatrix},\quad a_{jk}(i)=\frac{\partial T(\mathbf{x}_j, t_i)}{\partial[q_k(1)]}, \tag{7.2.5a, b}$$

где $\mathbf{a}(i)$ — матрица размером $J \times p$ при $p = 2$. Если $\mathbf{q}$ в каждый момент времени имеет $p$ компонент, то вектор $\mathbf{q}(i)$, определяемый равенством (7.2.3b), содержит $p$ элементов и матрица $\mathbf{a}(i)$ в соотношении (7.2.5a) имеет $p$ столбцов. В частном случае, когда имеется один датчик ($J = 1$) и имеется одна зависимость плотности теплового потока от времени ($p = 1$), величина $a_{11}(i)$ становится равной величине $\Delta\phi_{i-1}$, которая используется в гл. 3—5.

В общем случае компоненты $\mathbf{X}$ можно рассматривать как коэффициенты чувствительности [см. соотношения (6.5.18) и (6.5.19)]. Эти компоненты могут быть получены с использованием конечных разностей, теоремы Дюамеля и других методов.

Для первых двух моментов времени (связанных с $t_M$ и $t_{M+1}$) уравнение 7.2.1 в частично раскрытой форме записывается следующим образом:

$$\mathbf{T}(M)=\mathbf{T}(M)|_{\mathbf{q}(M)=0}+\mathbf{a}(1)\mathbf{q}(M), \tag{7.2.6a}$$

$$\mathbf{T}(M+1)=\mathbf{T}(M+1)_{\mathbf{q}(M)=\mathbf{q}(M+1,=0}+\mathbf{a}(1)\mathbf{q}(M+1)+\mathbf{a}(2)\mathbf{q}(M). \tag{7.2.6b}$$

Оба этих матричных уравнения дают $J$ скалярных уравнений; некоторые из них имеют вид

$$\begin{aligned}T_1(M)&=T_1(M)|_{q_1(M)=\cdots=q_J(M)=0}+a_{11}(1)q_1(M)+a_{12}(1)q_2(M),\\ &\vdots\\ T_J(M)&=T_J(M)|_{q_1(M)=\cdots=q_J(M)=0}+a_{J1}(1)q_1(M)+a_{J2}(1)q_2(M),\end{aligned} \tag{7.2.7}$$

$$T_1(M+1)=T_1(M+1)|_{q_1(M)=\cdots=q_J(M)=q_1(M+1)=\cdots=q_J(M+1)=0}+a_{11}(1)q_1(M+1)+$$
$$+a_{12}(1)q_2(M+1)+a_{11}(2)q_1(M)+a_{12}(2)q_2(M)\ ,$$
$$\vdots$$
$$T_J(M+1)=T_J(M+1)|_{q_1(M)=\cdots=q_J(M+1)=0}+a_{J1}(1)q_1(M+1)+a_{J2}(1)q_2(M+1)+$$
$$+a_{J1}(2)q_1(M)+a_{J2}(2)q_2(M)\ . \qquad (7.2.8)$$

Заметим, что в обратной задаче теплопроводности в начальный момент времени $M$ присутствуют две неизвестные компоненты $q$, а именно $\dot{q}_1(M)$ и $q_2(M)$. В этот момент времени имеется $J$ результатов измерений и $J$ должно быть либо равным, либо бóльшим числу компонент $q$ (в данном случае 2). При $J=2$ уравнения (7.2.7) можно решить совместно относительно $q_1(M)$ и $q_2(M)$, принимая при этом $T_1(M)$ равным $Y_1(M)$ и $T_2(M)$ равным $Y_2(M)$. Зная $q_1(M)$ и $q_2(M)$, из уравнений (7.2.8) можно найти $q_1(M+1)$ и $q_2(M+1)$. Такая процедура аналогична процедуре, принятой в методе Штольца, который рассматривался в разд. 4.3 и 5.3.2. Вследствие большой чувствительности к погрешностям измерений эта процедура обычно неприемлема. В данной главе вместо нее используются методы функциональной аппроксимации и регуляризации.

Метод пробных функций (разд. 4.6) включает в себя как метод функциональной аппроксимации, так и метод регуляризации. Он обеспечивает также гладкий переход между этими двумя методами. С целью унификации методов здесь используется критерий пробной функции, однако оба метода, и функциональной аппроксимации, и регуляризации, представляют два предельных случая. Критерий пробной функции определяется соотношением (4.6.1) и записывается в виде

$$S=(\mathbf{Y}-\mathbf{T})^T\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{T})+\alpha[\mathbf{H}(\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}})]^T\mathbf{W}[\mathbf{H}(\mathbf{q}-\tilde{\mathbf{q}})]\ , \qquad (7.2.9)$$

где $\psi$ — ковариационная матрица случайных погрешностей измерений $\mathbf{Y}$, $\alpha$ — параметр регуляризации, являющийся скалярной величиной, $\mathbf{H}$ — матрица для регуляризации нулевого, первого или какого-либо другого порядка, $\tilde{\mathbf{q}}$ — пробная функция.

Для метода функциональной аппроксимации величина $\alpha$ задается настолько большой, что

$$\mathbf{q}=\tilde{\mathbf{q}} \qquad (7.2.10)$$

Для метода регуляризации

$$\tilde{\mathbf{q}}=\mathbf{0} \qquad (7.2.11)$$

и $\alpha$ выбирается из условия (см. разд. 4.5.3.3)

$$(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{T}})^T\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{T}})\cong \text{математическое ожидание}\ . \qquad (7.2.12)$$

В уравнении (7.2.12) вектор $\hat{\mathbf{T}}$ представляет собой оценку $\mathbf{T}$ и определяется в результате минимизации $S$. При выполнении первых четырех, шестого и седьмого стандартных статистических предположений (разд. 1.4.2) математическое ожидание в соотношении (7.2.12) равно числу измерений минус число компонент $\mathbf{q}$ [5].

### 7.2.1. Метод последовательной функциональной аппроксимации

Как следует из соотношения (7.2.10), в методе функциональной аппроксимации функция $\mathbf{q}$ временно считается равной $\tilde{\mathbf{q}}$. В простейшем случае функция $\tilde{q}$ не зависит от времени. В этом и состоит *временное* предположение, которое использует-

ся при получении $\mathbf{q}(M)$ (разд. 4.4.3). В рамках такого предположения справедливо соотношение, аналогичное (4.4.20),

$$\mathbf{q}(M)=\mathbf{q}(M+1)=\cdots=\mathbf{q}(M+r-1). \tag{7.2.13}$$

Если $\mathbf{q}(M)$ имеет две компоненты, то явная форма уравнения (7.2.13) имеет вид (рис. 7.3)

$$q_1(M)=q_1(M+1)=\cdots=q_1(M+r-1)\,, \tag{7.2.14a}$$

$$q_2(M)=q_2(M+1)=\cdots=q_2(M+r-1). \tag{7.2.14b}$$

Требуется оценить величины $q_1(M)$ и $q_2(M)$, соответствующие $M$-му шагу по времени. Для большой общности $\mathbf{q}$ представим следующим образом:

$$\mathbf{q}=\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}(1)\\ \\ \vdots\\ \mathbf{A}(r)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}q_1(M)\\ q_2(M)\end{bmatrix}. \tag{7.2.15}$$

В предположении постоянства $\mathbf{q}$, что отражено в соотношениях (7.2.14a, b), матрица $\mathbf{A}(i)$ записывается в форме

$$\mathbf{A}(i)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{7.2.16}$$

При использовании соотношения

$$\mathbf{Z}=\mathbf{X}\mathbf{A} \tag{7.2.17}$$

функция, которую необходимо минимизировать относительно $\beta$, имеет вид

$$S=(\mathbf{Y}-\mathbf{T}|_{\boldsymbol{\beta}=0}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta})^T\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{T}|_{\boldsymbol{\beta}=0}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}). \tag{7.2.18}$$

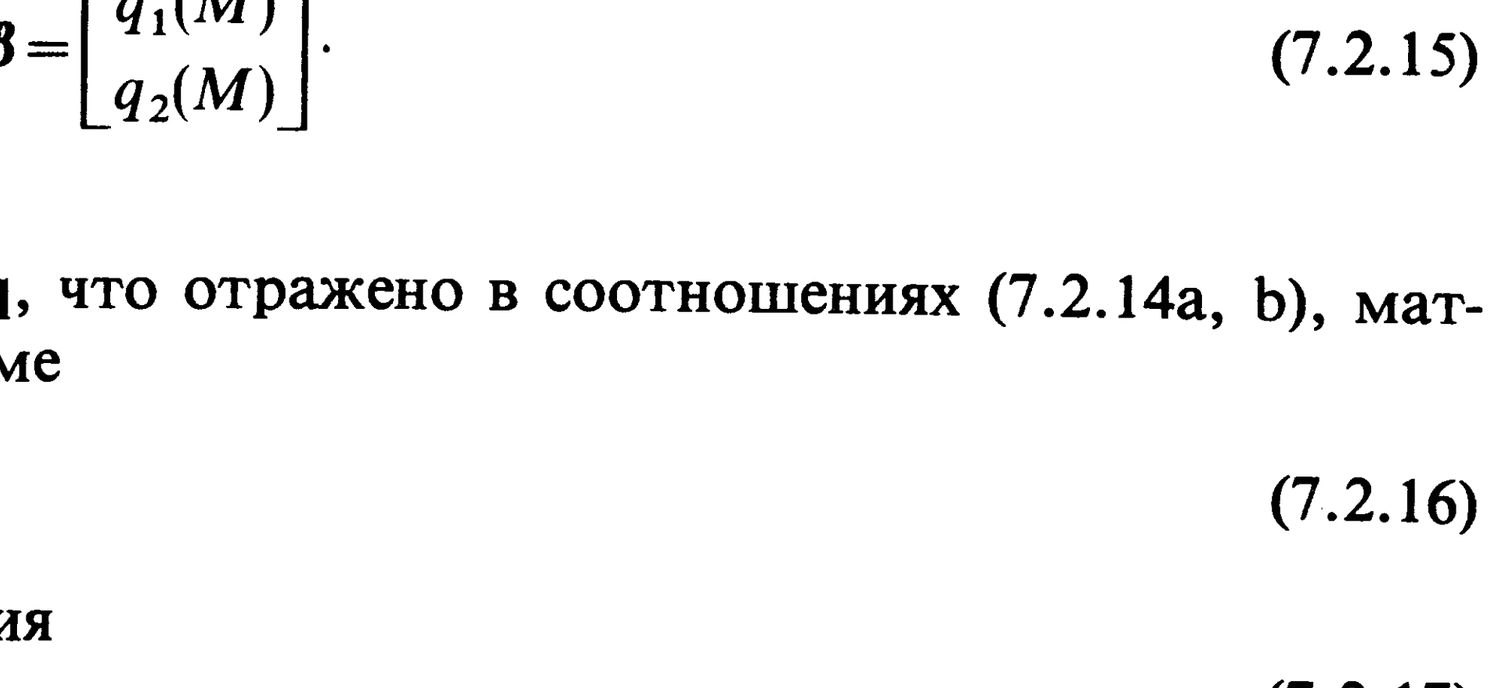



Рис. 7.3. Два независимых закона изменения плотности теплового потока при временном предположении о их постоянстве.

После дифференцирования матричного выражения (7.2.18) по $\beta$ получим енку

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\psi}^{-1} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\psi}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\boldsymbol{\beta}=0}), \tag{7.2.19}$$

торая и дает вектор $\hat{\mathbf{q}}(M)$ в соответствии с соотношениями (7.2.15). После о вычисления число $M$ увеличивается на единицу и снова используется выраже- е (7.2.19).

Если выполняются первые четыре стандартных предположения, то матрица упрощается и имеют место равенства

$$\boldsymbol{\psi} = \sigma^2 I, \quad \boldsymbol{\psi}^{-1} = \sigma^{-2} \mathbf{I}. \tag{7.2.20}$$

результате в выражении (7.2.19) $\psi^{-1}$ исчезает.

*Пример. 7.1.* Для случая двух независимых законов изменения по времени плотностей тепловых потоков $q_1(t)$ и $q_2(t)$ используйте последовательную процедуру оценивания функции при аппроксимации постоянной плотностью и получите явные формулы для оценок. Предполагается, что применимы все стандартные статистические допущения. Пусть производятся три измерения по времени. Используйте два измеренных значения температуры в последущие моменты времени.

*Решение.* Необходимо использовать формулу (7.2.19), в которой отсутствует $\psi^{-1}$, $J = 3$ и $r = 2$. Для матрицы $\mathbf{Z}$ имеем

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1) \\ \mathbf{A}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1)\mathbf{A}(1) \\ \mathbf{a}(2)\mathbf{A}(1) + \mathbf{a}(1)\mathbf{A}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{12}(1) \\ a_{21}(1) & a_{22}(1) \\ a_{31}(1) & a_{32}(1) \\ a_{11}(1)+a_{11}(2) & a_{12}(1)+a_{12}(2) \\ a_{21}(1)+a_{21}(2) & a_{22}(1)+a_{22}(2) \\ a_{31}(1)+a_{31}(2) & a_{32}(1)+a_{32}(2) \end{bmatrix}. \tag{7.2.21}$$

Матрица $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$ записывается в виде

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}, \tag{7.2.22}$$

где

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{3} a_{mi}(1) a_{mj}(1) + \sum_{m=1}^{3} [a_{mi}(1) + a_{mi}(2)][a_{mj}(1) + a_{mj}(2)]. \tag{7.2.23}$$

Матрица $\mathbf{Z}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\beta=0})$ выражается следующим образом:

$$\mathbf{Z}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\beta=0}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(1)[\mathbf{Y}(M) - \mathbf{T}(M)|_{\boldsymbol{\beta}=0}] + \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)a(1) \\ (\mathbf{Y}(M+1) - \mathbf{T}(M+1)|_{\boldsymbol{\beta}=0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \tag{7.2.24}$$

где

$$D_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}(1)[Y_i(M) - T_i(M)|_{q_1(M)=q_2(M)=0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} [a_{ij}(1) + a_{ij}(2)][Y_i(M+1) - T_i(M+1)|_{q_1(M)=\cdots=q_2(M+1)=0}]. \tag{7.2.25}$$

Наконец, алгебраические формулы для $\hat{q}_1(M)$ и $\hat{q}_2(M)$ имеют вид

$$\hat{q}_1(M) = \frac{C_{22}D_1 - C_{12}D_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \tag{7.2.26a}$$

$$\hat{q}_2(M) = \frac{C_{12}D_1 - C_{22}D_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \tag{7.2.26b}$$

### 7.2.2. Метод последовательной регуляризации

Рассмотрение метода последовательной регуляризации можно начать с критерия (7.2.9) при $\tilde{\mathbf{q}} = 0$. Используя для $\mathbf{T}$ модель (7.2.1), дифференцируя матричное выражение по $\mathbf{q}$ и приравнивая результат нулю, получим нормальное матричное уравнение

$$[\mathbf{X}^T\boldsymbol{\psi}^{-1}\mathbf{X}+\alpha\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}]\hat{\mathbf{q}}=\mathbf{X}^T\boldsymbol{\psi}^{-1}(\mathbf{Y}-\mathbf{T}|_{\mathbf{q}=0}). \tag{7.2.27}$$

Оно дает систему $pr$ совместных алгебраических уравнений. В случае двух неизвестных зависимостей плотности тепловых потоков $p = 2$ и число неизвестных равно $2r$.

Если в уравнении (4.6.7) и $\mathbf{B}$, и $\tilde{\mathbf{q}}^f$ являются нулевыми матрицами, то оно сводится к уравнению (7.2.27), поскольку в (4.6.7) несколько членов или все члены $\mathbf{H}_i^T\mathbf{W}_i\mathbf{H}_i$ можно представить в форме $\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}$. Различие состоит в интерпретации отдельных членов при учете в каждый момент времени нескольких измерений и нескольких компонент плотности теплового потока. В рассматриваемом случае в каждый момент времени ($t_M$, $t_{M+1}$, ..., $t_{M+r-1}$) имеется $J(\geqslant 2)$ измерений и $p = 2$ компонент плотности теплового потока. Матрица $\mathbf{X}$ определяется соотношениями (7.2.4), (7.2.5), а $q$ определяется соотношениями (7.2.3) при $p = 2$.

Основная величина в уравнении (7.2.27), которая еще не рассмотрена нами, — это матрица $\mathbf{H}$. Как отмечалось ранее, она может принимать несколько форм. Для регуляризации нулевого порядка простейшей формой $\mathbf{H}$ является $\mathbf{I}$ [см. (4.5.16а)]. При таком выборе $\mathbf{H}$ нет различия между независимыми (или несвязанными) изменениями плотностей тепловых потоков, такими как $q_1(t)$ и $q_2(t)$ (рис. 7.3), и непрерывным изменением (рис. 7.4).

Для регуляризации первого порядка матрица $\mathbf{H}$ имеет другой вид. Обычно она содержит первые разности по времени и в ней отсутствуют разности по пространству, т. е. разности между $q_1(t)$ и $q_2(t)$ не используются. $\mathbf{H}$ может содержать первые разности в виде

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{7.2.28}$$

Матрица $\mathbf{H}$ записана для $r = 4$, а матрица $\mathbf{I}$ имеет размерность $p \times p$ и в рассматриваемом случае равна $2 \times 2$. Если

$$\mathbf{W}=\mathbf{I}, \tag{7.2.29}$$

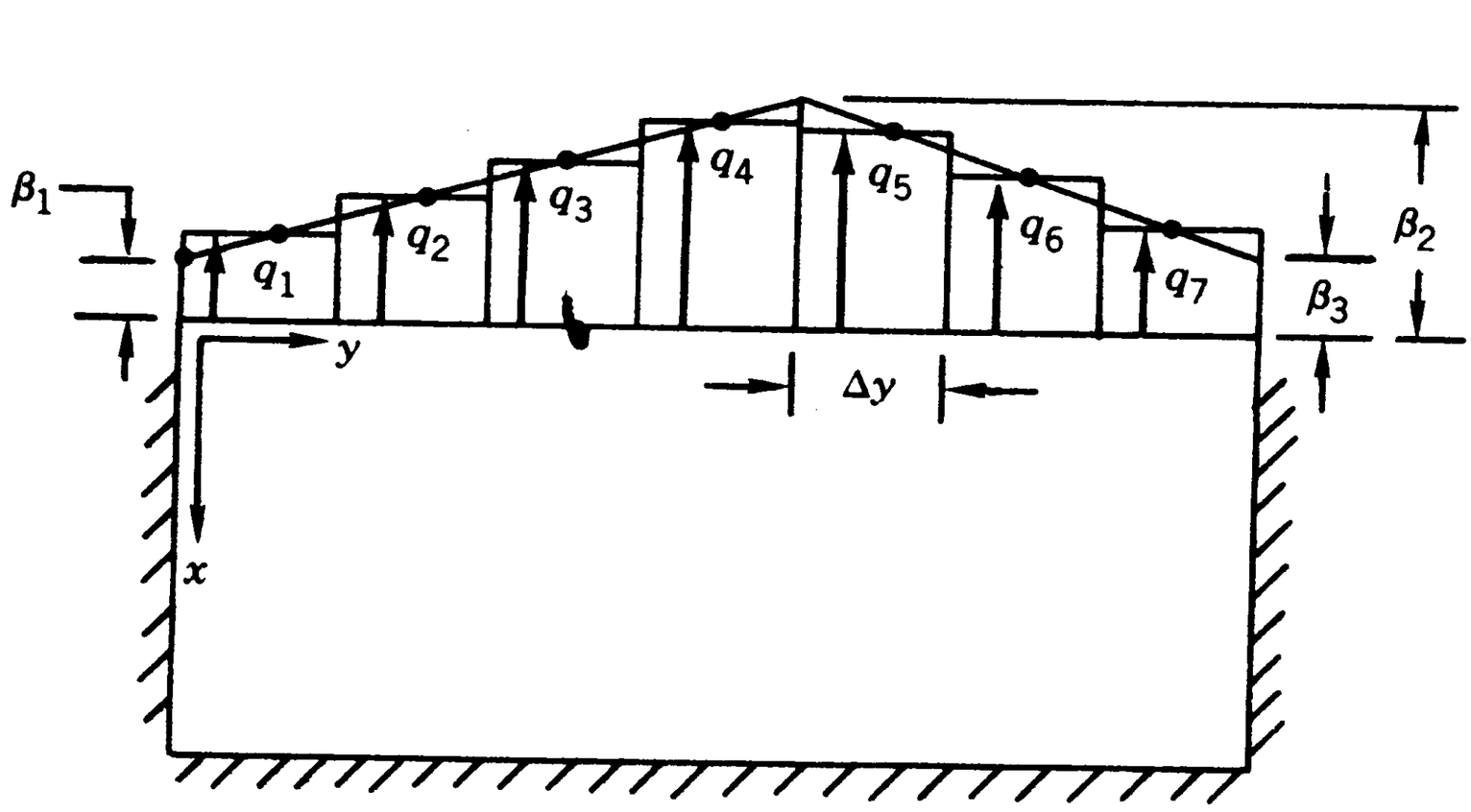



Рис. 7.4. Пример функциональной аппроксимации в случае нескольких тепловых потоков.

то $\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}$ при $r = 4$ принимает вид

$$\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}=\mathbf{H}^T\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{7.2.30}$$

где при $p = 2$ [т. е. при $q_1(t)$ и $q_2(t)$] $\mathbf{I}$ имеет вид

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.2.31}$$

В рассматриваемом случае для двух зависимостей плотностей тепловых потоков ($p = 2$) используются четыре последующих шага по времени ($r = 4$) и имеется $pr = 8$ неизвестных компонент плотности теплового потока. В последовательной процедуре определяются только первые компоненты $q_1(t)$ и $q_2(t)$, а именно $q_1(M)$ и $q_2(M)$. Затем $M$ увеличивается на единицу и начинается следующий шаг по времени.

*Пример 7.2.* Получите отдельные матрицы в матричном выражении, заключенном в скобки в левой части уравнения (7.2.27), для $\mathbf{X}$ при $r = 2$ и $p = 2$, $\psi = \sigma^2\mathbf{I}$ и $\mathbf{W} = \mathbf{I}$. Используйте разности по времени первого порядка.

*Решение.* С учетом (7.2.4) матрица $\mathbf{X}$ при $r = 2$ имеет вид

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}(1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) \end{bmatrix},$$

тогда

$$\mathbf{X}^T\psi^{-1}\mathbf{X}=\mathbf{X}^T\mathbf{X}\sigma^{-2}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^T(1)\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}^T(2)\mathbf{a}(2) & \mathbf{a}^T(2)\mathbf{a}(1) \\ \mathbf{a}^T(1)\mathbf{a}(2) & \mathbf{a}_1^T(1)\mathbf{a}(1) \end{bmatrix}\sigma^{-2}.$$

Матрица $\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}$ записывается следующим образом:

$$\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}=\mathbf{H}^T\mathbf{H}=\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

и тогда

$$\mathbf{X}^T\psi^{-1}\mathbf{X}+\alpha\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}=\begin{bmatrix} [\mathbf{a}^T(1)\mathbf{a}(1)+\mathbf{a}^T(2)\mathbf{a}(2)]\sigma^{-2}+\alpha\mathbf{I} & \mathbf{a}^T(2)\mathbf{a}(1)\sigma^{-2}-\alpha\mathbf{I} \\ \mathbf{a}^T(1)\mathbf{a}(2)\sigma^{-2}-\alpha\mathbf{I} & \mathbf{a}^T(1)\mathbf{a}(1)\sigma^{-2}+\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что следствием применения процедуры регуляризации является увеличение диагональных и уменьшение внедиагональных членов. Это приводит к улучшению обусловленности системы уравнений — она становится менее чувствительной к погрешностям измерений.

## 7.3. Тепловой поток, зависящий от нескольких переменных

В случае когда плотность теплового потока зависит и от времени, и от пространства (рис. 7.2), ее изменение над поверхностью контролируется таким же образом, что и изменение по времени. Для этой цели существует много способов. В данном разделе рассматриваются примеры использования методов последовательной функциональной аппроксимации и последовательной регуляризации.

В гл. 1 были приведены графики для коэффициентов чувствительности как в одномерном, так и в двумерном случаях. Было показано, что в одномерном случае для определения плотности теплового потока $q_M$ необходимо использо-

вать несколько последующих шагов по времени. Проводить измерения во всей области по времени не требуется. Этот вопрос также анализировался в гл. 5 применительно к методу регуляризации по всей области (разд. 5.4). Необходимость использования лишь некоторого ограниченного числа последующих шагов по времени следует из характера уравнения теплопроводности, которое в прямоугольной системе координат при постоянных теплофизических свойствах имеет вид

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}\ . \tag{7.3.1}$$

Имеется первая производная по времени и нет никакого влияния в обратном направлении времени. Какие-либо изменения в условиях нагрева на поверхности в моменты времени $t$, большие, чем $t_M$, не оказывают влияния на температуру в моменты $t$, меньшие чем $t_M$. Это иллюстрировалось на рис. 1.10.—1.14 с помощью коэффициентов чувствительности для различных одномерных случаев. Коэффициент чувствительности для компоненты плотности теплового потока $q_M$ (которая постоянна в интервале от $t_{M-1}$ до $t_M$ и равна нулю в остальной области) в моменты времени $t$, меньшие чем $t_M$, равен нулю.

Уравнение (7.3.1) при изменении плотности теплового потока по поверхности в направлении $y$ (рис. 7.2) имеет иной вид, чем в случае изменения плотности теплового потока по времени. Заметим, что в уравнении (7.3.1) имеется *вторая* производная по $y$. Температура в некоторой точке $y > 0$ зависит от условий нагрева как при меньших, так и при бóльших значениях $y$. Это иллюстрируется с помощью коэффициентов чувствительности на рис. 1.17 и означает, что в данный момент времени все компоненты плотности теплового потока должны определяться одновременно. По этой причине в процедурах оценивания для случая зависимости плотности теплового потока от нескольких переменных требуется решение системы уравнений с плотной матрицей (система алгебраических уравнений с плотной матрицей $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ имеет полностью заполненную квадратную матрицу $\mathbf{A}$, в то время как система уравнений может иметь и разреженную матрицу $\mathbf{A}$, которая в основном нулевая, и лишь относительно малое число элементов отлично от нуля. Примером является система уравнений с трехдиагональной матрицей).

Вследствие необходимости рассмотрения изменения $q(\mathbf{r}, t)$ во всем пространстве размерность задачи по сравнению с ОЗТ для зависящего от одной переменной теплового потока существенно увеличивается. При этом становится очевидной важность последовательных по времени алгоритмов. Предположим, что плотность теплового потока на поверхности имеет 10 пространственных компонент. Дискретизация по времени может дать 100 компонент. В методе оценивания во всей области одновременно определяются все 1000 ($= 10 \times 100$) компонент. В вычислительном отношении это гораздо дороже, чем применение последовательных методов, в которых одновременно определяется всего 10 компонент. Это означает, что одновременно необходимо решать всего 10, а не 1000 уравнений. Поскольку объем вычислений при решении системы совместных уравнений с плотной матрицей пропорционален третьей степени числа уравнений, то экономия машинного времени при использовании последовательных методов весьма значительна.

### 7.3.1. Метод последовательной функциональной аппроксимации

ия определения связанных компонент плотности многомерного непрерывного плового потока, зависящего от нескольких переменных, можно использовать т же подход, что и в разд. 7.2.1, где рассматривался метод функциональной проксимации применительно к двум независимым плотностям теплового пото-. Данный подход описывается ниже на примере.

Пространственное изменение плотности теплового потока на поверхности жно описать различными выражениями, например постоянными сегментами, нейными и параболическими по пространству сегментами, а также сплайнами. учай двух линейных сегментов иллюстрируется на рис. 7.4. Для описания этих ух сегментов используются три параметра, $\beta_1$, $\beta_2$ и $\beta_3$, которые могут изме-ться по времени. Показанные на рис. 7.4 линейные сегменты соответствуют спределению плотности теплового потока в момент времени $t_M$. Оба линейных гмента разбиты на семь элементов с одинаковым шагом $\Delta y$. Искомые компо-нты плотности теплового потока

$$q_1(M), q_2(M), \ldots, q_7(M)$$

жно представить в виде вектора $\mathbf{q}(M)$. Далее используем временное предполо-ние о независимости $\mathbf{q}$ от времени, которое определено соотношением (7.2.13). учетом этого предположения, а также указанных на рис. 7.4 обозначений соот-шения (7.2.15) и (7.2.16) принимают вид

$$\mathbf{q}=\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}(1)\\ \vdots \\ \mathbf{A}(r)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1(M)\\ \beta_2(M)\\ \beta_2(M)\end{bmatrix}, \tag{7.3.2}$$

$$\mathbf{A}(i)=\begin{bmatrix}7/8 & 1/8 & 0\\ 5/8 & 3/8 & 0\\ 3/8 & 5/8 & 0\\ 1/8 & 7/8 & 0\\ 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1/6 & 5/6\end{bmatrix}. \tag{7.3.3}$$

В силу связанности компонент $\mathbf{q}(M)$ матрица $\mathbf{A}(i)$ не является диагональной. о отличает ее от матрицы (7.2.16), которая соответствует случаю двух несвя-ных тепловых потоков.

Решение получается таким же образом, как описано в разд. 7.2.1. При этом ользуется последовательная процедура с применением соотношения (7.2.19).

### 7.3.2. Метод последовательной регуляризации

обы яснее изложить метод последовательной регуляризации для зависящей от ольких переменных плотности теплового потока, вначале рассмотрим крите-й минимизации в непрерывной, а не в дискретной форме. Непрерывная форма еет вид

$$= \int_{t=t_M}^{t_{M+r-1}} \int_{y=0}^{L} [Y(x,y,t)-T(x,y,t)]^2 dydt+\alpha' \int_{t_M}^{t_{M+r-1}} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 q}{\partial y \partial t}\right)^2 dydt. \tag{7.3.4}$$

Заметим, что в этом выражении присутствует первая производная плотности теплового потока на поверхности $q$ по $t$ и по $y$. Это критерий регуляризации первого порядка по $t$ и $y$. Флуктуации в оцениваемых значениях плотности теплового потока по $t$ и $y$ уменьшаются за счет регуляризующего члена. В выражении (7.3.4) интеграл, содержащий измеренные температуры $Y(x, y, t)$, берется от 0 до $L$. (При этом экспериментальные температуры могут быть неравномерно распределены по $y$.)

Аналогичная выражению (7.3.4) формула с использованием операции суммирования записывается следующим образом:

$$S=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{J}[Y_j(M+i-1)-T_j(M+i-1)]^2+$$
$$+\alpha\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{J-1}[q_{j+1}(M+i)-q_{j+1}(M+i-1)-q_j(M+i)+q_j(M+i-1)]^2. \qquad (7.3.5)$$

В выражении (7.3.5) второе слагаемое с двойным суммированием соответствует интегралу от смешанной производной в соотношении (7.3.4). Выражение (7.3.5) можно представить в матричной форме, имеющей вид уравнения (7.2.9) при $\tilde{\mathbf{q}}$, равном нулю. При этом уравнение (7.2.9) является более общим, так как оно содержит матрицу $\psi^{-1}$ и $\mathbf{W}$. Алгоритм последовательной регуляризации для зависящей от нескольких переменных плотности теплового потока получается из уравнения (7.2.9) при $\tilde{\mathbf{q}} = 0$. Первые разности по пространству и времени учитываются с помощью матрицы $\mathbf{H}$, которая имеет размер $pr \times pr$ и равна

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_t\mathbf{H}_y\ , \qquad (7.3.6)$$

$$\mathbf{H}_t=\begin{bmatrix}-\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & & \mathbf{I}\\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\end{bmatrix}, \qquad (7.3.7)$$

$$\mathbf{H}_y=\operatorname{diag}[\mathbf{h}\quad \mathbf{h}\quad \cdots\quad \mathbf{h}], \qquad (7.3.8)$$

где матрицы $\mathbf{H}_t$ и $\mathbf{H}_y$ также имеют размер $pr \times pr$. Единичные матрицы в $\mathbf{H}_t$ имеют размер $p \times p$, и матрица $\mathbf{H}_t$ учитывает первые разности по времени. Так же как и в соотношении (7.2.8), матрицы $-\mathbf{I}$ располагаются на главной диагонали (кроме последнего элемента, который равен нулю), а матрицы $\mathbf{I}$ — над этой диагональю. Ненулевые элементы блочной матрицы $\mathbf{H}_y$ расположены только на главной диагонали и равны матрице $\mathbf{h}$, которая имеет размер $p \times p$ и учитывает первые разности по пространству

$$\mathbf{h}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & & 0\\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1\\ 0 & \cdots & & 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (7.3.9)$$

С использованием выражений (7.3.7) и (7.3.8) матрица **H** имеет вид

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} -\mathbf{h} & \mathbf{h} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{h} & \mathbf{h} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \cdots & & -\mathbf{h} & \mathbf{h} \\ \mathbf{0} & \cdots & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{7.3.10}$$

При $\mathbf{W}=\mathbf{I}$ матричный член $\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}$ уравнения (7.2.27) равен

$$\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}=\mathbf{H}^T\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{P} & & & \mathbf{0} \\ -\mathbf{P} & 2\mathbf{P} & -\mathbf{P} & & \\ & -\mathbf{P} & 2\mathbf{P} & -\mathbf{P} & \\ & & & \ddots & \\ & & -\mathbf{P} & 2\mathbf{P} & -\mathbf{P} \\ \mathbf{0} & & & -\mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix}, \tag{7.3.11}$$

где **P** имеет вид

$$\mathbf{P}=\mathbf{h}^T\mathbf{h}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.3.12}$$

Матрицы $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ и **P** имеют аналогичную структуру [см. также (4.5.23)]. Они являются трехдиагональными с положительными и равными между собой элементами, кроме первого и последнего, которые имеют половинную величину. Наддиагональные и поддиагональные элементы отрицательны и также равны между собой. Элементы строк, кроме первой и последней, представляют собой коэффициенты при вторых разностях.

## Литература


1. Bass, B. R., Drake, J. B., and Ott, L., ORMDIM: A Finite Element Formulation for Two-Dimensional Nonlinear Inverse Heat Conduction Analysis, NUREG/CR-1709, ORNL/NUREG/CSD/TM-17, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, D.C., December 1980.
2. Imber, M., Two-Dimensional Inverse Conduction Problem—Further Observations, *AIAA J.* **13**, 114–115 (1975).
3. Hsieh, C. K. and Su, K. C., A Methodology of Predicting Cavity Geometry Based on the Scanned Surface Temperature Data—Prescribed Surface Temperature at the Cavity Side, *J. Heat Transfer* **102**, 324–329 (1980).
4. Hsieh, C. K. and Su, K. C. A Methodology of Predicting Cavity Geometry Based on the Scanned Surface Temperature Data—Prescribed Heat Flux at the Cavity side, *J. Heat Transfer* **103**, 42–46 (1981).
5. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1977.


## Имеются на русском языке


2. Имбер М. Некоторые замечания по поводу двумерной обратной задачи теплопроводности. — Ракетная техника и космонавтика, 1975, №1. с. 149—150.

3. Се, Су. Методика определения геометрии полости на основе данных сканирования температуры поверхности. Заданная температура поверхности со стороны полости. —Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1980, №2, с. 162.
4. Се, Су. Метод расчета геометрии полости на основе данных сканирования температуры поверхности при заданном тепловом потоке на стороне полости. — Труды амер. о-ва инж.-мех., сер. С, Теплопередача, 1981, №1, с. 49.

## Задачи

7.1. Используйте метод последовательной функциональной аппроксимации для двух тепловых потоков и $r = 3$ и выведите соотношения для $q_1(M)$ и $\hat{q}_2(M)$ в форме функции усиления. Выразите коэффициенты усиления $K_{1j}$ и $K_{2j}$ (для $j = 1, 2, 3$) через функции влияния $\phi_{ji}$, где $j = 1, 2$ относится к датчикам, а $i = 1, 2, \ldots, M + r - 1$ означает номер шага по времени.

7.2. Напишите машинную программу для задачи 7.1.

7.3. a. По точным данным из табл. 1.1 при $x/L = 0$ и 1 и безразмерном шаге по времени $\Delta t^+ = 0{,}01$ найдите оценки плотностей тепловых потоков при $x/L = 0$ и 1, используя при этом вычислительную программу для задачи 7.1.
b. Повторите п.а для координат расположения датчиков $x/L = 0{,}25$ и 0,75. Затем решите обе задачи при $\Delta t^+ = 1$.

7.4. a. Для условий задачи 7.1 выведите алгоритм на основе цифрового фильтра для получения оценок $q_1(M)$ и $q_2(M)$. Коэффициенты фильтра обозначьте $f_{ji}$, $j = 1, 2$; $i = -2, -1, 0, 1, \ldots$.
b. Получите числовые значения коэффициентов фильтра $f_{ji}$ для плоской пластины, используя данные табл. 1.1. Пусть $\Delta t^+ = 0{,}05$, а датчики расположены в точках $x = 0$ и $x = L$.

7.5. Используйте метод последовательной регуляризации нулевого порядка при $r = 3$ и выведите алгоритмы оценивания двух зависимостей плотностей тепловых потоков от времени $\hat{q}_1(M)$ и $\hat{q}_2(M)$. Задайте величину $\alpha\sigma^2$ в качестве исходных данных.

7.6. Напишите машинную программу для алгоритма из задачи 7.5.

7.7. a. По точным данным из табл. 4.1 при $x/L = 0$ и 1 и шаге $\Delta t^+ = 0{,}01$ найдите оценки плотностей тепловых потоков при $x/L = 0$ и 1. Используйте для этой цели программу из задачи 7.6.
b. Повторите п.а при значении координат датчиков $x/L = 0{,}25$ и 0,75.

# Глава 8
# Оценивание коэффициента теплоотдачи

## 8.1. Введение

Оценивание коэффициента теплоотдачи $h$ по данным нестационарных измерений температуры имеет характерные особенности как обратной задачи теплопроводности, так и задачи оценивания параметров.

В качестве примера рассмотрения этой задачи как ОЗТ можно указать на одномерный нестационарный процесс при известной температуре окружающей среды $T_\infty(t)$, в котором определяются коэффициенты теплоотдачи при кипении с помощью сплошного медного шара, предварительно разогретого и быстро погружаемого в воду, имеющую температуру насыщения. Измеряя в нестационарных условиях температуры внутри или на поверхности медного тела, можно использовать методы решения ОЗТ для оценивания плотности теплового потока на поверхности $\hat{q}_M$ и температуры поверхности $\hat{T}_{0M}$. Для получения оценки коэффициента теплоотдачи $h$ используется известное выражение

$$\hat{h}_M = \frac{q_M}{T_{\infty M} - 0{,}5(\hat{T}_{0M} + \hat{T}_{0,M-1})}. \tag{8.1.1}$$

В этом выражении $\hat{T}_{0M}$ — оценка температуры поверхности в момент времени $t_M$. Обычно наиболее точная оценка величин $\hat{q}_M$, $\hat{T}_{\infty M}$ и $\hat{h}_M$ соответствует моменту времени $t_{M-1/2}$.

Примером задачи, которую можно трактовать как задачу оценивания параметров, может служить случай обтекания плоской пластины жидкостью с постоянной температурой $T_\infty$ (рис. 8.1). Если пластина внезапно нагревается каким-либо расположенным внутри ее электрическим нагревателем, то температура пластины начинает возрастать, а коэффициент теплоотдачи зависит от расстояния от передней кромки пластины. В некоторых случаях изменение коэффициента теплоотдачи по времени мало́ и основной формой представления $h$ является его зависимость от $x$. Эта функция, например, может иметь вид

$$h = \beta x^{-1/2}. \tag{8.1.2}$$

Определение $\beta$ с использованием различных зависящих от времени и пространства результатов измерений температуры $T$ в твердом теле и $T_\infty$ в жидкости представляет собой задачу оценивания параметров.

Для случаев, подобных двум приведенным выше, основные методы решения известны. Данные примеры иллюстрируют большое многообразие задач, связанных с определением коэффициента теплоотдачи. Рассмотрим различные типы этих задач.

Коэффициент теплоотдачи может иметь одну из следующих форм:

1)постоянное значение (независящее от $x$ и $t$).

2)функция только $t$, т. е. $h(t)$;

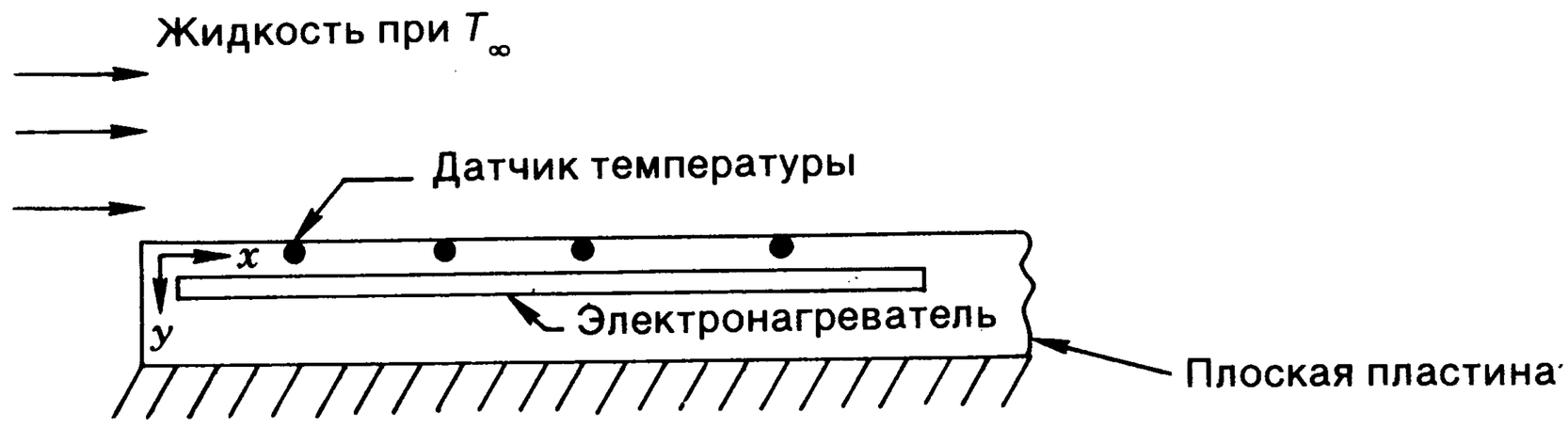



Рис. 8.1. Плоская пластина с электрическим нагревателем.

3)функция только $x$, т. е. $h(x)$;
4)функция $x$ и $t$, т. е. $h(x, t)$.

В этом перечне $x$ — параллельная нагреваемой поверхности координата. Могут быть также учтены две координаты по поверхности, т. е. $h = h(x, z)$, где и $x$, и $z$ параллельны нагреваемой поверхности. В этих задачах температура окружающей среды $T_\infty$ предполагается известной, причем она также может быть функцией $x$ и $t$.

Весьма сходной задачей является определение температуры окружающей среды $T_\infty$ при известном значении коэффициента теплоотдачи $h$. В этом случае можно перечислить те же четыре варианта: 1) $T_\infty = C$, 2) $T_\infty = T_\infty(t)$, 3) $T_\infty = T_\infty(x)$, 4) $T_\infty = T_\infty(x, t)$. Если уравнение теплопроводности и граничные условия линейны, то эти четыре задачи оценивания также линейны. Примером задачи, в которой требуется определить температуру окружающей тело жидкости, является, например, прессование пластмасс. Расплавленный пластик находится при критической температуре, и необходимо управлять процессом нагрева, однако датчики температуры могут быть установлены только в твердую пресс-форму, а не в расплавленный пластик.

Более сложной задачей является одновременное оценивание коэффициента теплоотдачи и температуры внешней среды.

При решении приведенных выше задач могут быть использованы многие принципы и методы, разработанные для обратных задач теплопроводности и оценивания параметров. Один из принципов состоит в использовании коэффициентов чувствительности для достижения более глубокого понимания особенностей задач оценивания. Другой принцип заключается в использовании последовательной процедуры, которая может иметь преимущества с точки зрения скорости вычислений и понимания задачи. Указанные принципы кратко анализируются в данной главе. Вследствие большого многообразия ситуаций, связанных с определением коэффициента теплоотдачи, рассматриваются лишь некоторые из них. При этом главным образом анализируется случай $h = h(t)$. Основные принципы и примеры служат для иллюстрации вычислительных процедур, которые могут быть модифицированы для различных условий. В разд. 8.2 анализируются некоторые коэффициенты чувствительности. В разд. 8.3 обсуждаются методы для бесконечно тонких тел, в разд. 8.4 кратко рассматриваются методы для тел с внутренними градиентами температуры.

## 8.2. Коэффициенты чувствительности

В данном разделе исследуются коэффициенты чувствительности относительно коэффициента теплоотдачи $h$ для двух случаев. В первом из них рассматривается бесконечно тонкое тело, т. е. тело, температура которого зависит только от вре-

мени. Коэффициенты чувствительности относительно $h$ даются для постоянной во всей анализируемой области по времени величины $h$ и постоянных ее значениях на конечных интервалах времени. Также приводятся коэффициенты чувствительности относительно температуры внешней среды $T_\infty$ как для постоянной по времени величины $T_\infty$, так и при ее аппроксимации некоторым набором постоянных значений.

### 8.2.1. Бесконечно тонкое тело

Дифференциальное уравнение для бесконечно тонкого тела, которое внезапно подвергается воздействию потока жидкости с температурой $T_\infty$, имеет вид

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = hA(T_\infty - T), \tag{8.2.1}$$

где $V$ — объем, а $A$ — площадь нагреваемой поверхности тела. Для удобства записи введем отношение

$$L = \frac{V}{A}. \tag{8.2.2}$$

В случае когда начальная температура равна $T_0$, а $h$ и $T_\infty$ не зависят от времени, решение уравнения (8.2.1) имеет вид

$$T^+ \equiv \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = 1 - \exp\left(\frac{-ht}{\rho c L}\right). \tag{8.2.3}$$

Заметим, что $T^+$ можно представить графически в виде функции только безразмерного времени $t^+$, где

$$t^+ \equiv \frac{ht}{\rho c L}. \tag{8.2.4}$$

При постоянном значении коэффициента теплоотдачи $h$ выражение для коэффициента чувствительности $Z_h$ в случае ступенчатого изменения $h$ имеет вид

$$Z_h \equiv \frac{\partial T}{\partial h} = (T_\infty - T_0)\frac{t}{\rho c L}\exp(-t^+). \tag{8.2.5}$$

Безразмерный коэффициент чувствительности равен

$$Z_h^+ \equiv \frac{h}{T_\infty - T_0}\frac{\partial T}{\partial h} = t^+ \exp(-t^+) \tag{8.2.6}$$

и также является функцией $t^+$. Различие между коэффициентами чувствительности при ступенчатом и импульсном изменении оцениваемой величины рассмотрено в разд. 6.2.

При ступенчатом изменении $T_\infty$ коэффициент чувствительности определяется по формуле

$$Z_{T\infty} = \frac{\partial T}{\partial T_\infty} = 1 - \exp(-t^+). \tag{8.2.7}$$

Это безразмерная величина, и поэтому приведение к безразмерной форме не требуется. Заметим, что

$$T^+ = Z_{T\infty} \tag{8.2.8}$$

и обратим внимание на верхнюю кривую на рис. 8.2. При увеличении $t^+$ с ростом температуры коэффициент чувствительности $Z_{T\infty}$ увеличивается точно таким

же образом. Если коэффициент чувствительности относительно некоторого параметра становится большим по величине, то информация, которую можно получить об этом параметре, возрастает. Следовательно, в том случае, когда температура $T_\infty$ постоянна на всем интервале времени, ее относительно легко измерить. Так как коэффициент чувствительности относительно $T_\infty$ достигает наибольшего значения при $t \to \infty$, то наибольшая информация относительно $T_\infty$ получается при измерении температуры в течение большого интервала времени, в частности при $t^+ > 3$.

На рис. 8.2 также показан безразмерный коэффициент чувствительности $Z_h^+$. При малых значениях $t^+$, меньших 0,5, величина $Z_h^+$ возрастает и близка к $T^+$, достигая при этом максимума в диапазоне значений $0{,}5 < t^+ < 1{,}5$. При $t^+ > 1{,}5$ коэффициент $Z_h^+$ начинает уменьшаться и стремится к нулю. Из такого поведения кривой $Z_h^+$ вытекает несколько следствий. Во-первых, для оценивания $h$ оптимальное время измерения температуры приблизительно составляет $t^+ = 1$, причем измерения в более ранние и более поздние моменты времени содержат меньше информации относительно $h$. Во-вторых, среднее значение $Z_h^+$ существенно меньше, чем $T^+$, следовательно, $h$ более чувствителен к погрешностям измерений температуры. В-третьих, так как в среднем $Z_{T_\infty}^+$ намного больше $Z_h^+$, то $T_\infty$ можно оценить с большей точностью, чем $h$. Наконец, могут оцениваться обе величины, $h$ и $T_\infty$, однако в этом случае необходимо рассматривать относительно большой интервал безразмерного времени, например, в диапазоне $t^+$ от 0 до 3. При оценивании двух параметров для получения точных оценок необходимо, чтобы коэффициенты чувствительности не были сильно коррелироваными. Этот вопрос также обсуждается в разд. 1.6 и в работе [1].

Случай бесконечно тонкого тела весьма удобен для анализа, так как при зависящих от времени $h$ и $T_\infty$ коэффициенты чувствительности могут быть получены в алгебраической форме. Случай, когда $h(t)$ и $T_\infty(t)$ аппроксимируются постоянными значениями на интервалах времени

$$0 < t < t_1, \quad t_1 < t < t_2, \quad t_2 < t < t_3, \ldots$$

показан на рис. 8.3. Коэффициент теплоотдачи имеет компоненты $h_1$, $h_2$, ..., а соответствующими компонентами $T_\infty$ являются $T_{\infty 1}$, $T_{\infty 2}$, .... Для трех интервалов времени температура $T$ определяется следующими соотношениями:

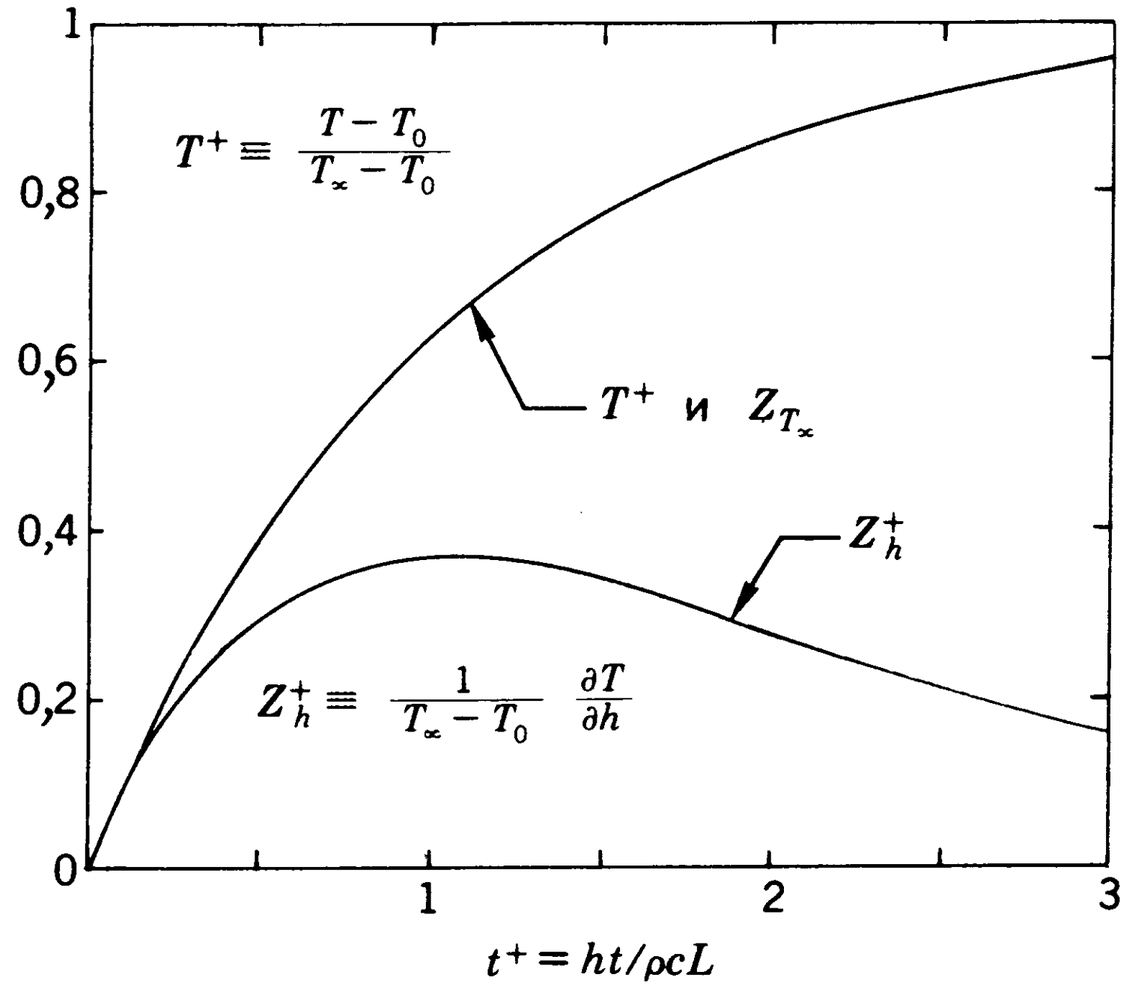



Рис. 8.2. Температура и коэффициенты чувствительности при конвективной теплоотдаче от бесконечно тонкого тела.

для $0 < t < t_1$

$$T = T_{\infty 1} + (T_0 - T_{\infty 1}) \exp\left(\frac{-h_1 t}{\rho c L}\right), \tag{8.2.9a}$$

для $t_1 < t < t_2$

$$T = T_{\infty 2} + (T_1 - T_{\infty 2}) \exp\left[\frac{-h_2 (t - t_1)}{\rho c L}\right], \tag{8.2.9b}$$

для $t_2 < t < t_3$

$$T = T_{\infty 3} + (T_2 - T_{\infty 3}) \exp\left[\frac{-h_3 (t - t_2)}{\rho c L}\right], \tag{8.2.9c}$$

где $T_1$ и $T_2$ вычисляются в моменты времени $t_1$ и $t_2$:

$$T_1 = T_{\infty 1} + (T_0 - T_{\infty 1}) \exp\left(\frac{-h_1 t_1}{\rho c L}\right), \tag{8.2.10a}$$

$$T_2 = T_{\infty 2} + (T_1 - T_{\infty 2}) \exp\left[\frac{-h_2 (t_2 - t_1)}{\rho c L}\right]. \tag{8.2.10b}$$

Как было показано ранее, соотношения для коэффициентов чувствительности при импульсном изменении оцениваемого параметра могут быть получены путем дифференцирования. Для импульса $h_i$ коэффициент чувствительности определяется выражением

$$X_{h_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial h_i}, \tag{8.2.11a}$$

а для $T_{\infty i}$

$$X_{T_{\infty i}} \equiv \frac{\partial T}{\partial T_{\infty i}}. \tag{8.2.11b}$$

С целью уменьшения количества различных безразмерных коэффициентов, появляющихся после дифференцирования, составляющие $h_i$ будем считать равными между собой

$$h_1 = h_2 = h_3 = \cdots = h_0 \tag{8.2.12}$$

и то же самое предположение сделаем для $T_{\infty i}$

$$T_{\infty 1} = T_{\infty 2} = T_{\infty 3} = \cdots = T_{\infty}. \tag{8.2.13}$$

На рис. 8.4 показаны коэффициенты чувствительности относительно составляющих коэффициента теплоотдачи для двух значений безразмерного шага по времени, 0,25 и 0,5. Величины $X_{h_i}^+$ некоррелированы, что видно из сравнения при $t^+ \equiv h_0 A t / \rho c V = 0{,}25$, 0,5, 0,75 и 1 значений $X_{h_1}^+$, которые равны 0,19; 0,15; 0,12

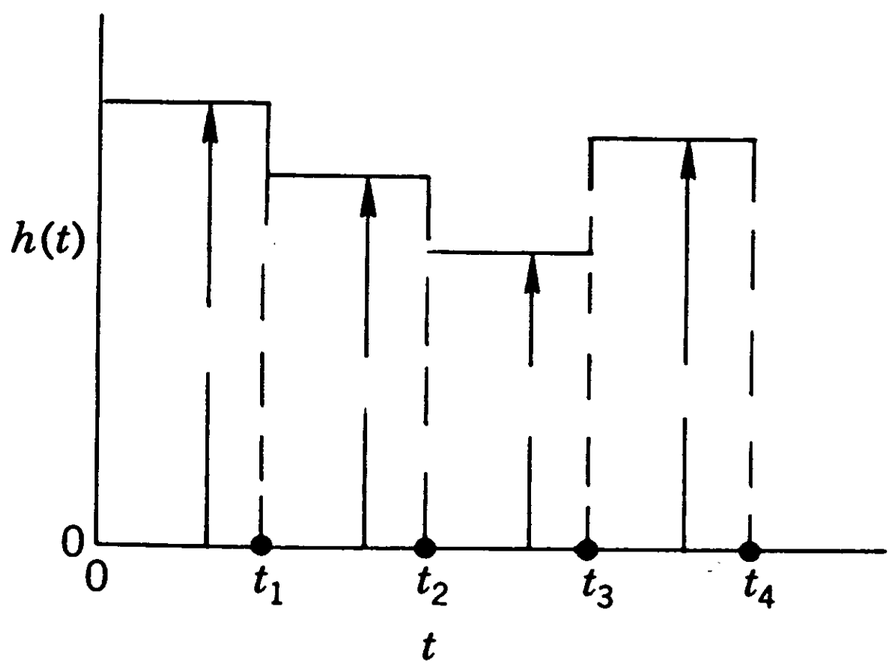
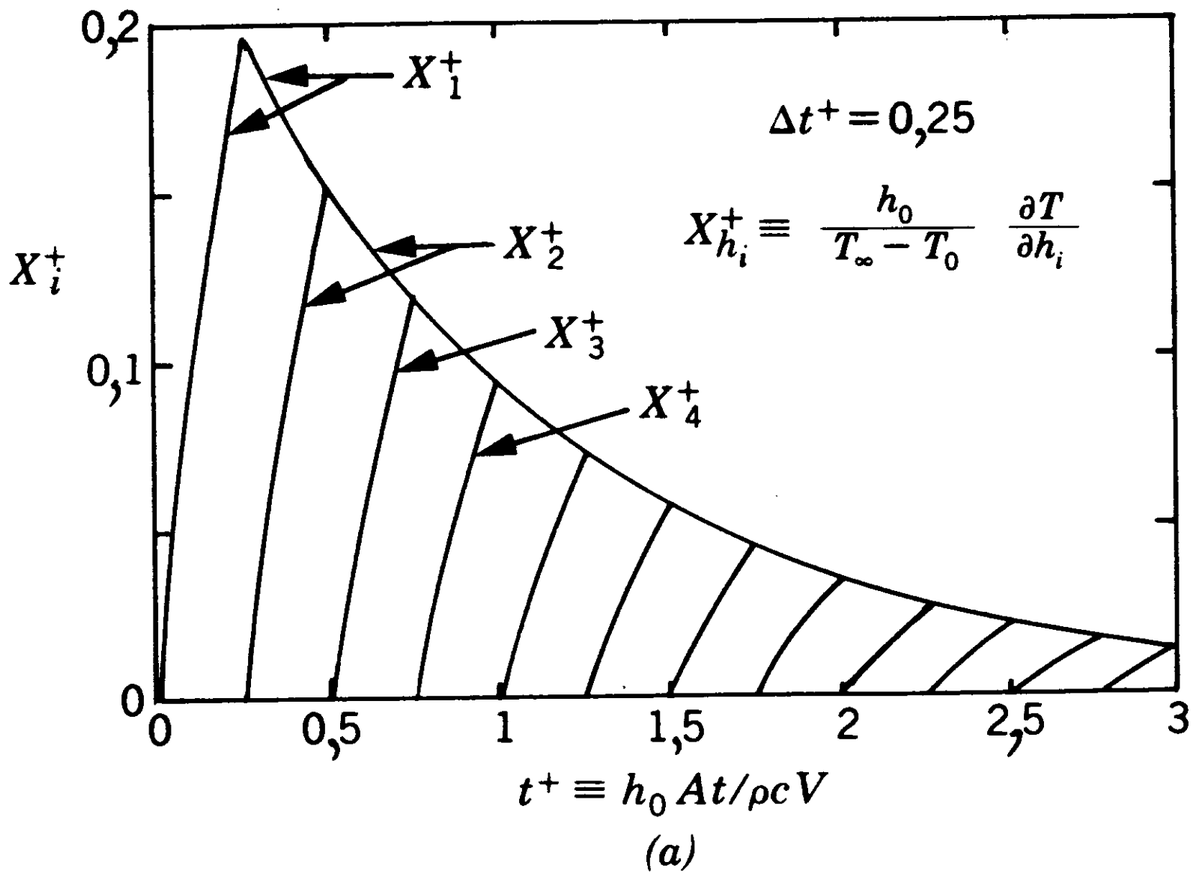



Рис. 8.3. Аппроксимация коэффициента теплоотдачи $h(t)$ постоянными элементами.



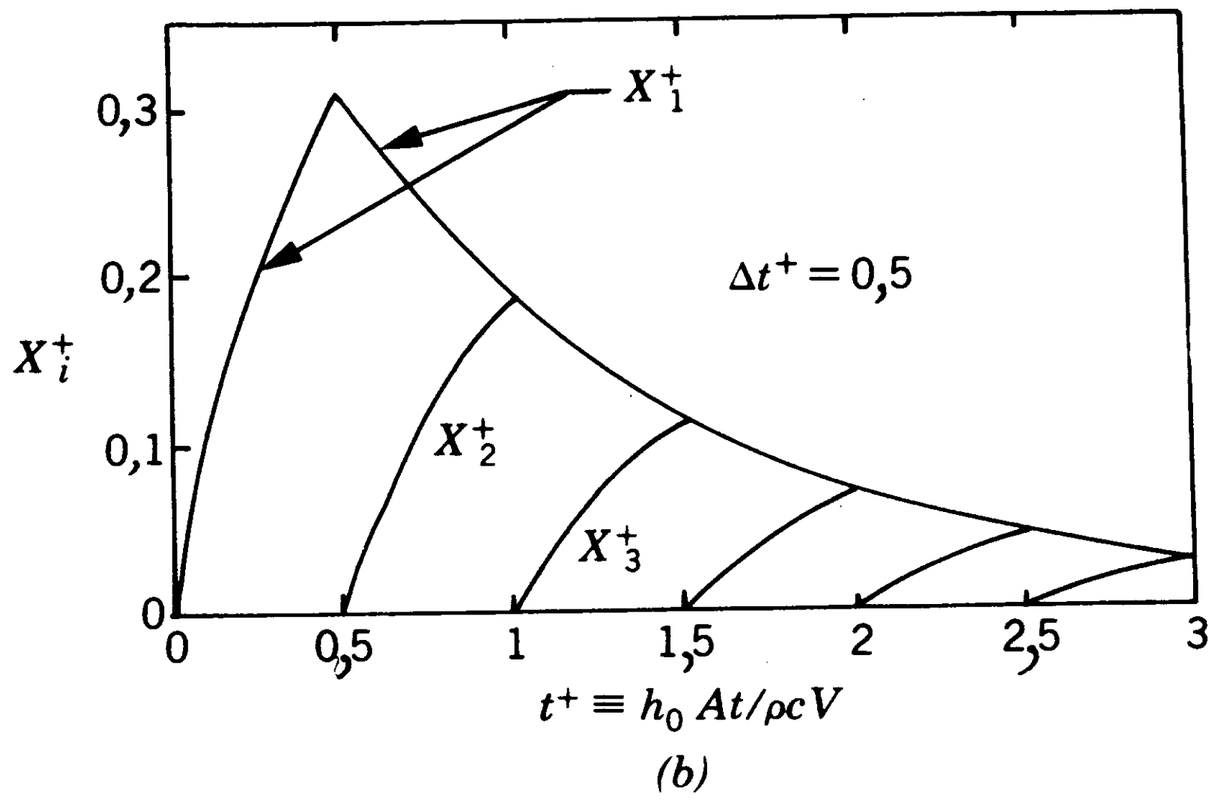




Рис. 8.4. Коэффициенты чувствительности относительно постоянных составляющих коэффициента теплоотдачи $h_i$ при $h_1 = h_2 = \cdots = h_0$ и $T_{\infty 1} = T_{\infty 2} = \cdots = T_\infty$.

и 0,09, а также $X_{h_2}^+$, значения которых 0; 0,15; 0,12 и 0,09. Во все моменты времени эти величины не пропорциональны друг другу и поэтому некоррелированы. Первые значения $X_{h_1}^+$ и $X_{h_2}^+$ отличаются друг от друга, а остальные идентичны. На основании этого можно предположить, что последовательная процедура оценивания $h = h(t)$ (когда определяются «текущие» значения) является более эффективной, чем процедура оценивания во всей области, в которой одновременно используются все данные. Из рис. 8.4 можно также сдалать вывод о том, что с ростом $i$ оценивать компоненты $h_i$ становится все труднее. Это происходит в результате уменьшения $X_{h_i}$ по абсолютной величине при возрастании $i$.

Коэффициенты чувствительности относительно $T_{\infty 1}$ и $T_{\infty 2}$ представлены на рис. 8.5. Существенное различие между этим графиком и представленным на рис. 8.4, *b* заключается в том, что в первом случае коэффициенты $X_{T_{\infty i}}$ имеют одинаковые максимальные значения, в то время как в случае кривых $X_{h_i}^+$ максимальные значения при увеличении $i$ уменьшаются. Данное различие означает, что все компоненты $T_{\infty i}$ оцениваются с одинаковой чувствительностью к погрешностям измерений, тогда как компоненты $h_i$ с ростом $i$ становятся все более чувствительными к погрешностям.

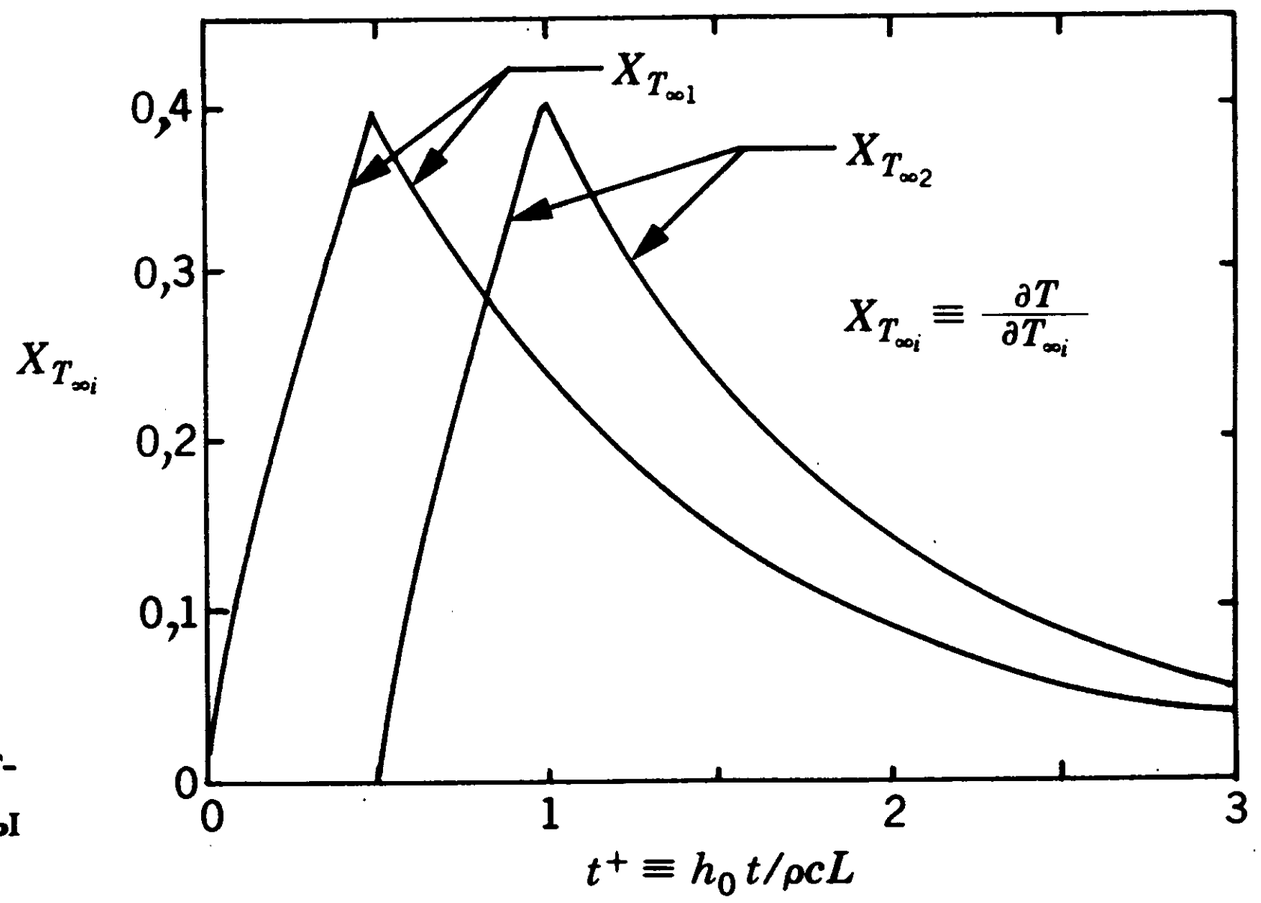



Рис. 8.5. Коэффициенты чувствительности относительно температуры окружающей среды при $\Delta t^+ = 0{,}5$.

### 8.2.2. Полубесконечное тело

Для полубесконечного тела, которое имеет начальную температуру $T_0$ и в момент времени $t = 0$ начинает подвергаться воздействию жидкости с температурой $T_\infty$, температура в точке с координатой $x$, измеряемой от нагреваемой поверхности, в момент времени $t$ равна

$$T^+ \equiv \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2(t_x^+)^{1/2}}\right] - \exp(B_x + B_x^2 t_x^+)\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2(t_x^+)^{1/2}} + B_x (t_x^+)^{1/2}\right], \qquad (8.2.14)$$

где

$$B_x = \frac{hx}{k}, \quad t_x^+ = \frac{\alpha t}{x^2}. \qquad (8.2.15a, b)$$

Заметим, что

$$B_x^2 t_x^+ = \frac{h^2 \alpha t}{k^2}, \qquad (8.2.15c)$$

и это выражение не зависит от $x$. Графики изменения безразмерной температуры в зависимости от $B_x^2 t_x^+$ для нескольких значений $B_x$ показаны на рис. 8.6. При каждом значении $B_x$ безразмерная температура начинается от нуля и монотонно возрастает, приближаясь в конце к единице.

Безразмерные коэффициенты чувствительности при ступенчатом изменении $h$ определяются выражением

$$Z_h^+ \equiv \frac{h}{T_\infty - T_0}\frac{\partial T}{\partial h} = -(B_x + 2B_x^2 t_x^+)\exp(B_x + B_x^2 t_x^+)\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2(t_x^+)^{1/2}} + B_x (t_x^+)^{1/2}\right] +$$
$$+ \frac{2}{\pi^{1/2}} B_x (t_x^+)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{4t_x^+}\right). \qquad (8.2.16)$$

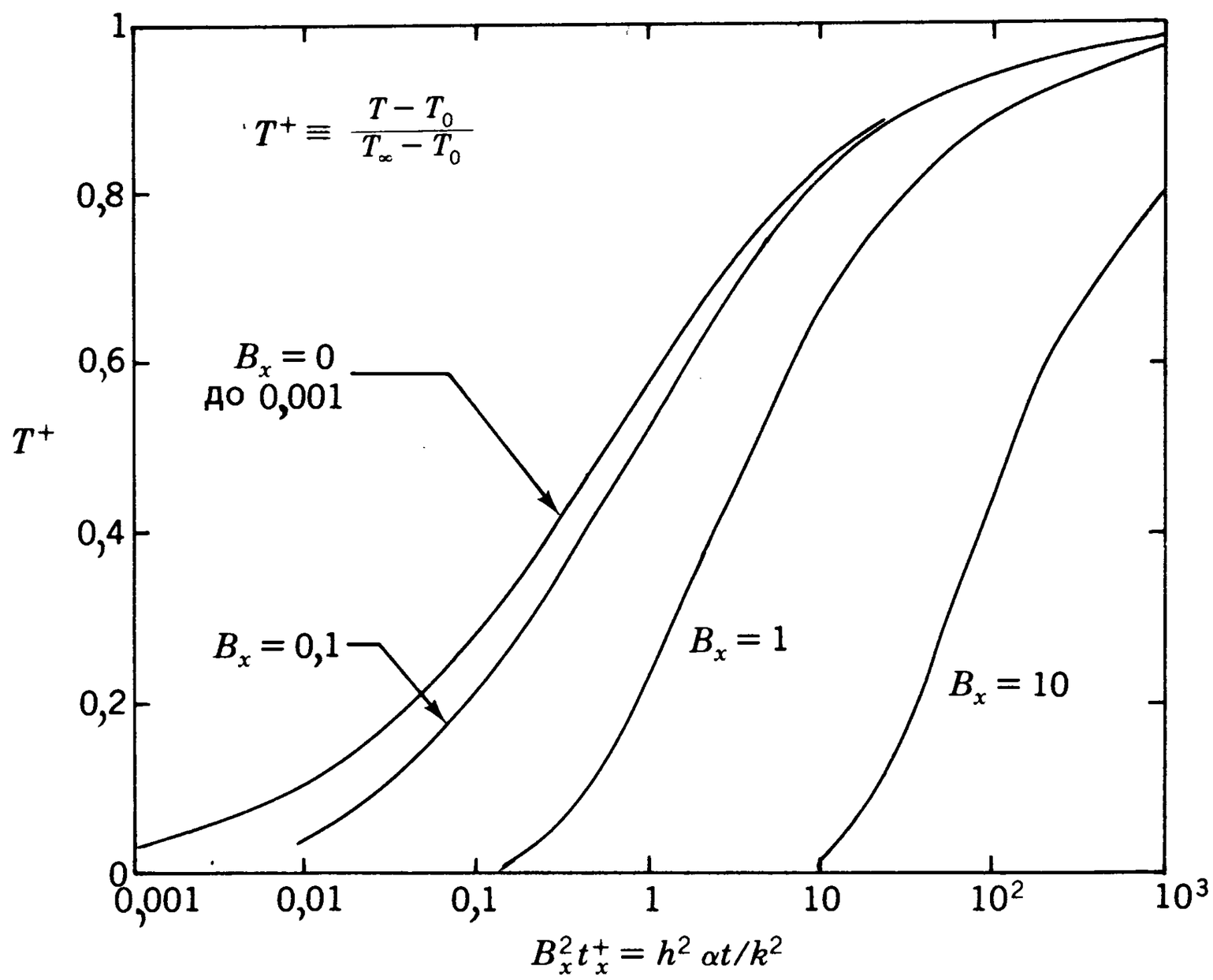



Рис. 8.6. Безразмерные температуры для полубесконечного тела с конвективным теплообменом на границе.

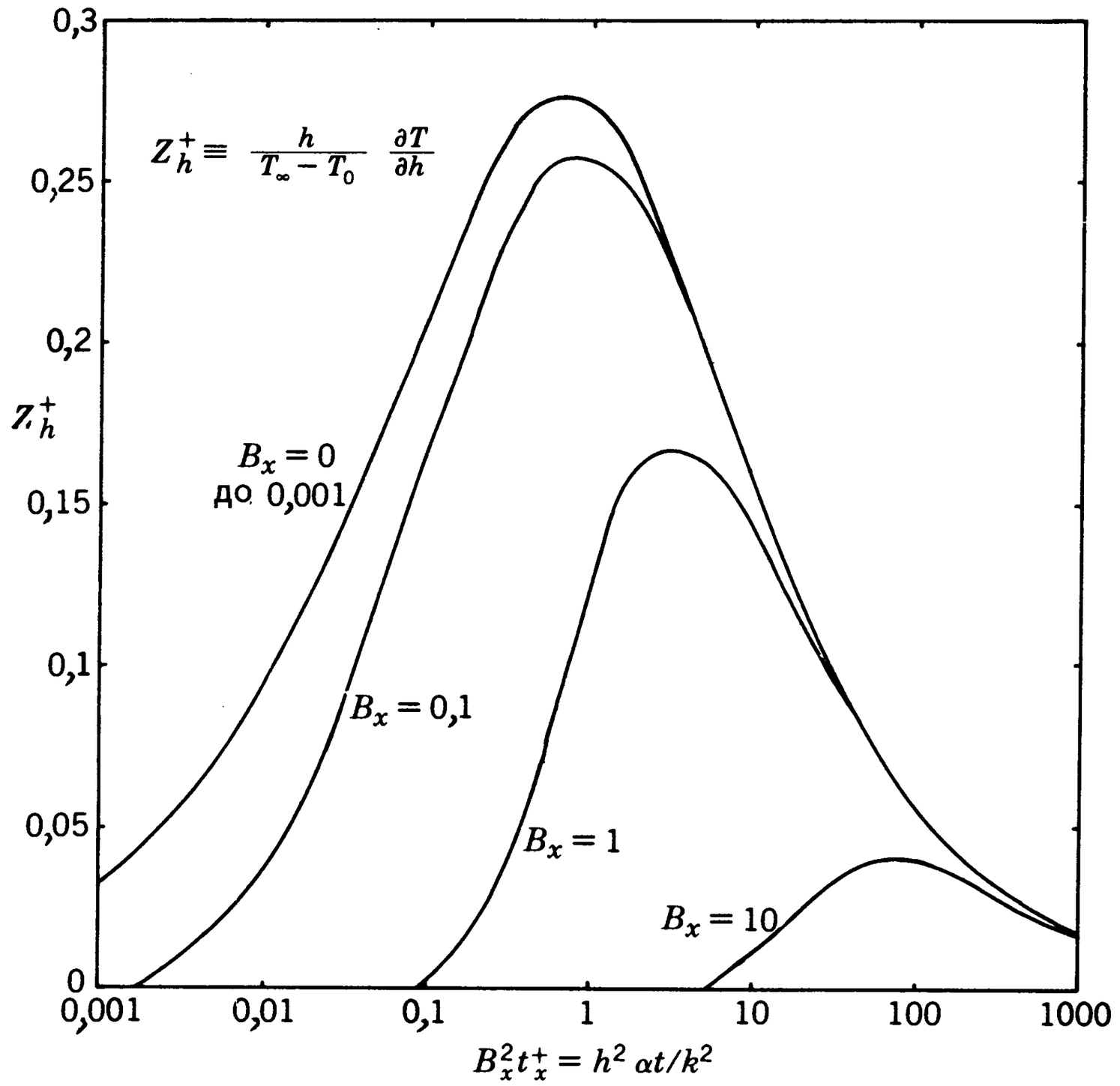



Рис. 8.7. Безразмерные коэффициенты чувствительности относительно $h$ для нагреваемого конвективным тепловым потоком полубесконечного тела.

Эти коэффициенты показаны на рис. 8.7. Обозначение $Z_h^+$ напоминает, что анализируется одна-единственная величина $h$. Хотя коэффициенты чувствительности вначале всегда увеличиваются, имеется максимум, после которого кривые спадают и стремятся к нулю. Следовательно, для проведения температурных измерений наилучшими являются средние моменты времени. Например, для значения $B_x = 0$, которое соответствует измерению температуры на нагреваемой поверхности, коэффициент чувствительности достигает максимальной величины при $B_x^2 t_x^+$ между 0,03 и 10. Измерения как в очень ранние, так и в очень поздние моменты времени при определении коэффициента теплоотдачи менее эффективны. Этот вывод согласуется с результатами для бесконечно тонкого тела, показанными на рис. 8.2.

Из рис. 8.7 следует еще одно важное соображение о том, что при увеличении $B_x$ коэффициенты чувствительности уменьшаются по абсолютной величине. Эти результаты не соответствуют случаю бесконечно тонкого тела. Так как $B_x = hx/k$, то большие значения $B_x$ соответствуют либо большим значениям $h$ или $x$, либо малым значениям $k$.

При определении температуры внешней среды $T_\infty$ необходимо знать коэффициент чувствительности относительно $T_\infty$. Используя выражение (8.2.14), легко показать, что

$$Z_{T_\infty} \equiv \frac{\partial T}{\partial T_\infty} = T^+. \tag{8.2.17}$$

Следовательно, рис. 8.6 иллюстрирует также и изменение коэффициента чувствительности относительно $T_\infty$. Так же как и в случае бесконечно тонкого тела, вели-

чина $T_\infty$ может быть оценена с большей точностью, чем $h$ (если в обоих случаях статистические характеристики погрешностей одинаковы). Кроме того, для оценивания $T_\infty$ оптимальным является проведение измерений температуры при больших значениях времени.

## 8.3. Анализ для бесконечно тонкого тела

В данном разделе рассматривается определение коэффициента теплоотдачи для случая бесконечно тонкого тела, температура которого равномерна, но изменяется во времени. На таком представлении основаны нестационарные калориметры, которые широко применяются для измерения коэффициентов теплоотдачи и плотности тепловых потоков, в том числе при определении кривых кипения [2].

В случае бесконечно тонкого тела используется простая модель в виде уравнения (8.2.1), и поэтому подробности процедуры оценивания достаточно ясны. В этом разделе анализируется несколько процедур. В разд. 8.3.1 используется точная подгонка рассчитанных температур к измеренным. Некоторые результаты, полученные с применением метода регрессии [1], обсуждаются в разд. 8.3.2. В разд. 8.3.3 представлен метод, основанный на использовании процедуры функциональной аппроксимации в предположении $q = C$. И наконец, в разд. 8.3.4 рассматривается функциональная аппроксимация для случая $h = C$.

### 8.3.1. Точное согласование с измеренными температурами

Точная подгонка рассчитанных температур к измеренным значениям аналогична методу Штольца для обратной задачи теплопроводности. В этом методе используется выражение (4.3.3), которое имеет вид

$$\hat{q}_M = \frac{Y_M - \hat{T}_M|_{q_M=0}}{\phi_1} . \tag{8.3.1}$$

В случае бесконечно тонкого тела выражение для коэффициента теплоотдачи (8.1.1) можно записать следующим образом:

$$\hat{h}_M = \frac{\hat{q}_M}{T_{\infty M} - 0{,}5(\hat{T}_{M-1} + \hat{T}_M)} . \tag{8.3.2}$$

При точном согласовании рассчитанных и измеренных температур используются соотношения

$$\hat{T}_{M-1} = Y_{M-1}, \quad \hat{T}_M = Y_M, \quad \hat{T}_M|_{q_M=0} = Y_{M-1} . \tag{8.3.3a, b, c}$$

Выражение (8.3.3 c) отражает равномерность распределения температуры внутри тела, как это и предполагается для бесконечно тонких тел. После этого приведенные выше соотношения позволяют получить выражение

$$\hat{h}_M = \frac{(Y_M - Y_{M-1})}{[T_{\infty M} - 0{,}5(Y_{M-1} + Y_M)]\phi_1} , \tag{8.3.4}$$

которое является искомым алгоритмом.

Далее необходимо получить выражение для $\phi_1$. Оно дает изменение температуры в момент времени $t = \Delta t$ при единичном ступенчатом увеличении плотности теплового потока. В данном случае оно находится из решения уравнения

$$\rho cV\frac{\partial T}{\partial t}=qA, \tag{8.3.5}$$

в котором $T$ заменяется на $\phi$, величина $q$ принимается равной единице, а решение вычисляется при $t=\Delta t$. Результирующее выражение имеет вид

$$\phi_1=\frac{A\Delta t}{\rho cV}=\frac{\Delta t}{\rho cL}. \tag{8.3.6}$$

*Пример 8.1.* Для случая, когда $\rho cL=1$, $T_\infty=1$, $h=\text{const}$ и измеренные температуры равны точным значениям, которые вычисляются по формуле

$$Y_M=1-\exp(-M\Delta t),$$

требуется оценить величину $h$ по формуле (8.3.4) при $\Delta t=0{,}02$; 0,5 и 1.

*Решение.* Подставляя заданные величины в уравнение (8.3.4), получим

$$\hat{h}_M=\frac{-\exp(-M\Delta t)+\exp[-(M-1)\Delta t]}{\{1-1+0{,}5[\exp(-M\Delta t)+\exp[-(M-1)\Delta t]\}\Delta t}=\frac{\exp(\Delta t)-1}{0{,}5\Delta t[1+\exp(\Delta t)]}=\frac{\text{th}\,(\Delta t/2)}{0{,}5\Delta t}.$$

Значение $\hat{h}_M$ не зависит от $M$. Для $\Delta t=0{,}02$, 0,5 и 1 значения $\hat{h}_M$ равны 0,999967; 0,979675 и 0,92423 соответственно. Следовательно, для точных данных меньшие погрешности $\hat{h}_M$ соответствуют меньшим значениям $\Delta t$. Возникновение погрешностей является результатом численной аппроксимации.

*Пример 8.2.* Для того же случая, что и в примере 8.1, вычислить погрешность $\hat{h}_M$, обусловленную погрешностью измерения температуры $\varepsilon=0{,}0001$ при $M=3$.

*Решение.* Вычисленные значения $\hat{h}_M$ равны

| $M$ | $\Delta t=0{,}02$ | $\Delta t=0{,}5$ | $\Delta t=1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,999967 | 0,979675 | 0,92423 |
| 2 | 0,999967 | 0,979675 | 0,92423 |
| 3 | 1,053081 | 0,988114 | 0,94011 |
| 4 | 0,946850 | 0,971226 | 0,90820 |
| 5 | 0,999967 | 0,979675 | 0,92423 |

Погрешности, обусловленные $\varepsilon$ при $M=3$, приблизительно равны 0,0531; 0,00844 и 0,01588 при $\Delta t=0{,}02$; 0,5 и 1 соответственно. Наибольшая погрешность $\hat{h}_M$ получается при наименьшей величине $\Delta t$. Данный результат согласуется с тем, что при уменьшении шагов по времени коэффици-

*Таблица 8.1.* Результаты вычислений, полученные для примера с медной заготовкой методом функциональной аппроксимации при $q=C$ и $r=2$

| $M$ | $t_M$, с | $Y_M$, К | $\hat{q}_M$, Вт/м$^2$ | $\hat{h}_M$, Вт/(м$^2\cdot$К) | $\hat{T}_M$, К |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 410,55 | | | |
| 1 | 96 | 402,37 | − 1398,9 | 13,183 | 402,68 |
| 2 | 192 | 394,96 | − 1306,0 | 13,258 | 395,33 |
| 3 | 288 | 388,17 | − 1203,1 | 13,157 | 388,56 |
| 4 | 384 | 381,99 | − 1132,9 | 13,348 | 382,19 |
| 5 | 480 | 375,91 | − 1039,7 | 13,200 | 376,34 |
| 6 | 576 | 370,70 | − 936,82 | 12,798 | 371,07 |
| 7 | 672 | 365,98 | − 847,10 | 12,424 | 366,30 |
| 8 | 768 | 361,69 | − 775,86 | 12,197 | 361,93 |
| 9 | 864 | 357,69 | − 721,30 | 12,142 | 357,88 |
| 10 | 960 | 353,91 | − 668,86 | 12,053 | 354,11 |

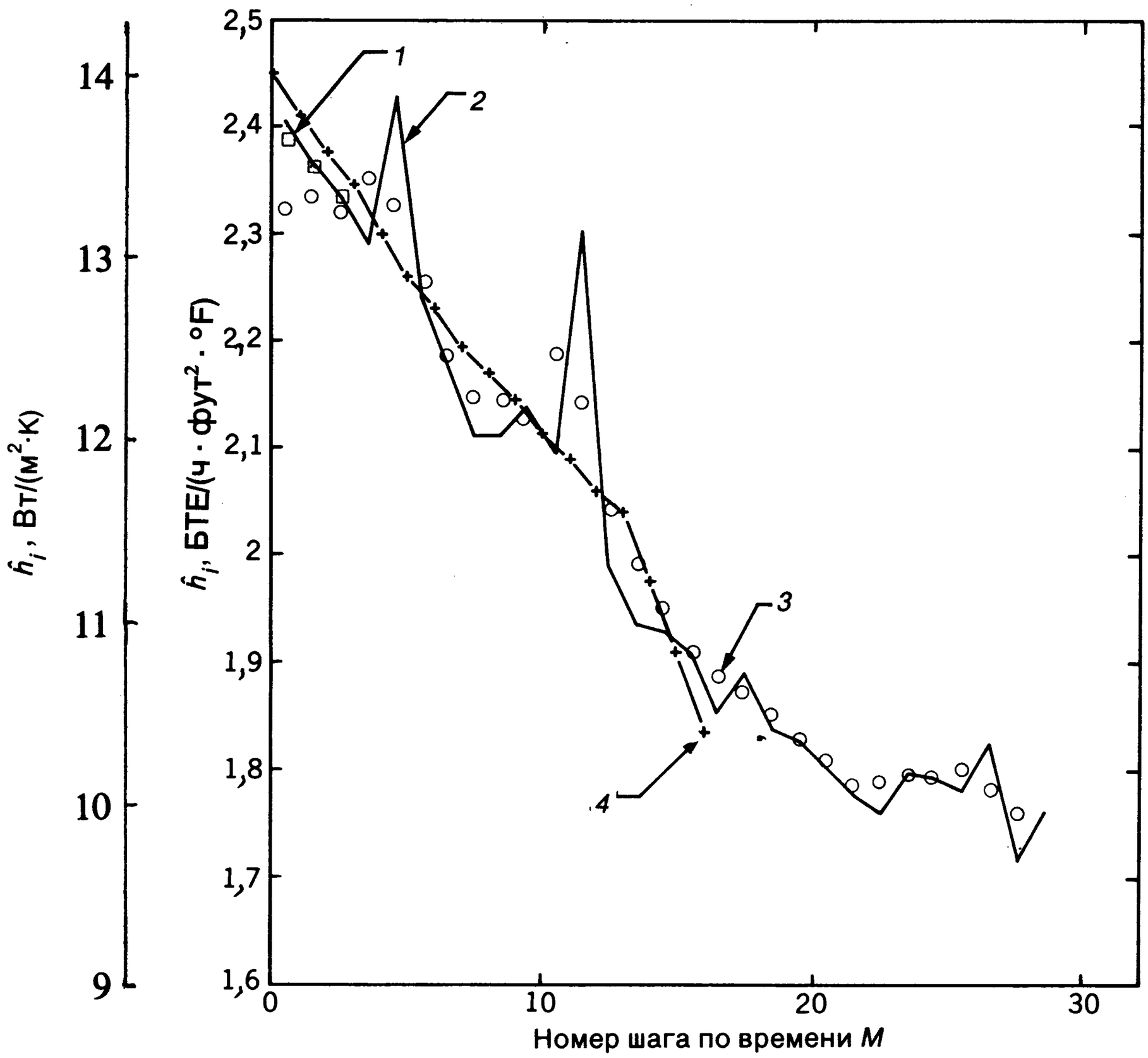



Рис. 8.8. Коэффициент теплоотдачи для медной заготовки из примера 8.3. *1* — метод функциональной аппроксимации ($h = C$, $r = 2$); *2* — точная подгонка, выражение (8.3.4); *3* — метод функциональной аппроксимации ($q = C$, $r = 2$); *4* — метод регрессии, выражение (8.3.8).

енты чувствительности уменьшаются, как это видно из рис. 8.4. Следовательно, при малых $\Delta t$ возникают меньшие погрешности численной аппроксимации, однако увеличивается чувствительность к случайным погрешностям измерений.

*Пример 8.3.* Для той же медной заготовки, что и в примере 2.1, найти коэффициент теплоотдачи при температуре внешней среды 300,5 К. Первые одиннадцать значений измеренных температур приведены в табл. 8.1, а последующие даны в табл. 2.2.

*Решение.* В выражении (8.3.4) для $\hat{h}_M$ значение $T_\infty$ равно 300,5 К а значения $Y_M$ берутся из табл. 8.1 и 2.2. Величина, обратная $\phi_1$, равна 98,72 Вт/м$^2$. Результаты расчетов представлены на рис. 8.8 в виде точек, соединенных сплошными линиями. Полученные значения имеют некоторые колебания, в частности, в окрестности шагов 5 и 12. Как было показано в примере 8.2, данный метод относительно чувствителен к погрешностям измерений.

### 8.3.2. Метод регрессии

Другой путь оценивания $h$ состоит в проведении через измеренные значения температуры линии регрессии. Для этой цели могут использоваться полиномы различной степени. В работе [1] анализировался ряд полиномов вида

$$T = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{t}{\Delta t}\right) + \beta_3 \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2 + \cdots \qquad (8.3.7)$$

и для определения «лучшей» кривой использовался $F$-тест. После оценивания температурной зависимости $\hat{T}$ ее можно продифференцировать и использовать в уравнении (8.2.1), которое может быть записано в следующей форме:

$$\hat{h}=\rho cL\frac{1}{T_\infty-\hat{T}}\frac{d\hat{T}}{dt}. \tag{8.3.8}$$

Полученные таким методом результаты для примера 8.3 показаны крестиками на рис. 8.8. Эти результаты не так чувствительны к погрешностям, как при использовании метода точной подгонки.

Данный метод также может быть реализован в виде последовательной процедуры, если рассматривать ограниченное число измерений, как это было сделано в примере 2.1.

### 8.3.3. Процедура функциональной аппроксимации при $q = C$

Коэффициент теплоотдачи можно оценить, используя метод функциональной аппроксимации. При временном предположении о постоянстве $q$ для этой цели может быть использовано уравнение (4.4.24). В случае бесконечно тонкого тела решение уравнения (8.3.5) относительно $\phi$ (при $T\to\phi$ и т. д.) имеет вид

$$\phi_j=\frac{j\Delta t}{\rho cL},\quad j=1,2,\ldots. \tag{8.3.9a}$$

Величины $\Delta\phi_{j-1}$ постоянны

$$\Delta\phi_{j-1}=\phi_j-\phi_{j-1}=\frac{\Delta t}{\rho cL}=\phi_1,\quad j=1,2,\ldots. \tag{8.3.9b}$$

В результате из уравнения (3.2.29) получим

$$\hat{T}_{M+j-1}|_{q_M=\cdots=0}=T_0+\phi_1\sum_{i=1}^{M-1}\hat{q}_i,\quad j=1,2,\ldots. \tag{8.3.9c}$$

После подстановки соотношений (8.3.9a, b, c) в уравнение (4.4.24) для бесконечно тонких тел получим следующее выражение для $\hat{q}_M$:

$$\hat{q}_M=\frac{\sum_{j=1}^{r}\left(Y_{M+j-1}-\phi_1\sum_{i=1}^{M-1}\hat{q}_i-T_0\right)j}{\sum_{j=1}^{r}j^2}\frac{\rho cL}{\Delta t}. \tag{8.3.10}$$

Формула для $\hat{h}_M$ получается из уравнения (8.3.2) при значении $0{,}5(\hat{T}_{M-1}+\hat{T}_M)$, равном

$$0{,}5(\hat{T}_{M-1}+\hat{T}_M)=\phi_1\left(\sum_{i=1}^{M-1}\hat{q}_i+0{,}5\hat{q}_M\right)+T_0. \tag{8.3.11}$$

Для каждого шага по времени используется выражение (8.3.10), а затем уравнение (8.3.2), в которое подставляется соотношение (8.3.11).

Результаты вычислений для примера 8.3 при $r = 2$ показаны кружочками на рис. 8.8. Результаты менее чувствительны к малым погрешностям измерений, чем процедура точной подгонки, и тем не менее отслеживают данные точной подгонки при регулярном их изменении, как это происходит около 20-го шага по времени на рис. 8.8. За счет использования $r = 3$ и 4 может быть обеспечено

дальнейшее уменьшение чувствительности к случайным погрешностям температуры.

Некоторые числовые значения $\hat{q}_M$, $\hat{h}_M$ и $\hat{T}_M$ приведены в табл. 8.1. Чтобы предоставить читателю возможность проверить эти результаты, они даны для значений $M$ от 1 до 10.

### 8.3.4. Процедура функциональной аппроксимации при $h = C$

При оценивании коэффициента теплоотдачи методом функциональной аппроксимации более естественной процедурой представляется оценивание $h$ без промежуточных вычислений $q(t)$. К сожалению, такой подход приводит к нелинейной задаче. В данном разделе анализируется процедура прямого последовательного оценивания $h$ при временном предположении о постоянстве $h_M$.

Сумма квадратов

$$S=\sum_{i=1}^{r}(Y_{M+i-1}-T_{M+i-1})^2 \tag{8.3.12}$$

минимизируется относительно $\hat{h}_M$, где $r$ — число последующих шагов по времени, на протяжении которых $h_M$ временно считается постоянной величиной. Взяв частную производную от $S$ по $h_M$, заменяя $h_M$ на $\hat{h}_M$ и приравнивая полученное выражение нулю, находим

$$\sum_{i=1}^{r}(Y_{M+i-1}-\hat{T}_{M+i-1})\frac{\partial \hat{T}_{M+i-1}}{\partial h_M}=0\ . \tag{8.3.13}$$

ыражения для вычисления температур $\hat{T}_{M+i-1}$ можно вывести аналогично соотношениям (8.2.9). Однако для упрощения изложения температура внешней среды $T_\infty(t)$ аппроксимируется набором $T_{\infty M}$ для $r$ последующих моментов времени. В этом случае температура при $t > t_{M-1}$ дается выражением

$$\hat{T}_{M+i-1}=T_{\infty M}+(\hat{T}_{M-1}-T_{\infty M})\exp\left[-\frac{h_M(t_{M+i-1}-t_{M-1})}{\rho cL}\right]. \tag{8.3.14}$$

Коэффициент чувствительности $Z_{M+i-1}$

$$Z_{M+i-1}\equiv\frac{\partial T_{M+i-1}}{\partial h_M} \tag{8.3.15}$$

определяется из выражения (8.3.14) в виде

$$Z_{M+i-1}=-(\hat{T}_{M-1}-T_{\infty M})\exp\left[-\frac{h_M(t_{M+i-1}-t_{M-1})}{\rho cL}\right]\frac{t_{M+i-1}-t_{M-1}}{\rho cL}\ . \tag{8.3.16}$$

Это выражение справедливо при $t > t_{M-1}$. $\hat{T}_{M-1}$ представляет собой величину, к которой сходится температура в процессе поиска решения для $\hat{h}_{M-1}$. Так как коэффициент чувствительности зависит от $\hat{h}_M$, то рассматриваемая задача оценивания является нелинейной. Вследствие этой нелинейности для определения $\hat{h}_M$ необходимо построить итерационную процедуру решения уравнения (8.3.13). Одной из таких процедур является метод Гаусса [1].

В методе линеаризации Гаусса сначала предполагается, что оценка $\hat{h}_M$ на $(\nu-1)$-й итерации известна, а затем ищется уточненное значение $\hat{h}_M^{(\nu)}$. Коэффициент чувствительности, в явном виде фигурирующий в уравнении (8.3.13), вычис-

ляется при значении $\hat{h}_M$, равном $h_M^{(\nu-1)}$, и обозначается через $Z_{M+i-1}^{(\nu-1)}$. Кроме того, входящая в уравнение (8.3.13) температура аппроксимируется двучленным рядом Тейлора:

$$\hat{T}_{M+i-1}^{(\nu)} = \hat{T}_{M+i-1}^{(\nu-1)} + Z_{M+i-1}^{(\nu-1)}(h_M^{(\nu)} - h_M^{(\nu-1)}), \tag{8.3.17}$$

а $Z$ вычисляется по формуле (8.3.16), в которой $h_M$ заменяется на $h_M^{(\nu-1)}$. Подставляя эти приближенные соотношения в уравнение (8.3.13) и разрешая его относительно $h_M^{(\nu)}$, получим

$$\hat{h}_M^{(\nu)} = \hat{h}_M^{(\nu-1)} + \frac{\sum_{i=1}^{r}(Y_{M+i-1} - \hat{T}_{M+i-1}^{(\nu-1)})Z_{M+i-1}^{(\nu-1)}}{\sum_{i=1}^{r}(Z_{M+i-1}^{(\nu-1)})^2}. \tag{8.3.18}$$

Итерационное уточнение по этой формуле производится до тех пор, пока изменение $h_M^{(\nu)}$ не станет меньше некоторой малой величины, например,

$$\left|\frac{\hat{h}_M^{(\nu)} - \hat{h}_M^{(\nu-1)}}{\hat{h}_M^{(\nu)}}\right| < 10^{-4}. \tag{8.3.19}$$

После того как найдена величина $h_M^{(\nu)}$, к которой сошелся итерационный процесс, $M$ увеличивается на единицу, вычисляется температура $\hat{T}_M$ и процедура повторяется для нового значения $\hat{h}_M$.

С помощью данного метода ниже анализируется рассмотренная ранее задача о медной заготовке. Некоторые результаты расчетов для первых двух шагов по времени при $h_M = C$ и $r = 2$ представлены в табл. 8.2. Коэффициенты чувствительности даны в зависимости от $M$ и номера итерации $\nu$. В столбце, обозначенном «числитель», приведены значения числителя в дробной части уравнения (8.3.18), а в столбце под названием «знаменатель» — знаменатель этой части. Заметим, что при фиксированном значении $M$ в процессе итераций числитель быстро уменьшается по величине, в то время как знаменатель (сумма квадратов коэффициентов чувствительности $Z$) стремится к некоторой константе. Начальное приближение для $h_1$ было 15,33 Вт/(м$^2$ · К), и итерационный процесс быстро сходится к значению 13,6 Вт/(м$^2$ · К). Это значение $\hat{h}_M$ использовалось в качестве начального приближения для $h_2$. Несколько значений $\hat{h}_M$ квадратиками показаны

*Таблица 8.2.* Результаты вычислений для первых двух шагов по времени, полученные для примера с медной заготовкой методом функциональной аппроксимации при $h_M = C$ и $r = 2$

| $M$ | $\nu$ | $Z_M$ | $Z_{M+1}$ | Числитель | Знаменатель | $\hat{h}_M$, Вт/(м$^2$ · К) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | | | 15,331 |
| 1 | 1 | − 5,806 | − 10,652 | − 45,05 | 147,167 | 13,593 |
| 1 | 2 | − 5,863 | − 10,862 | 0,3926 | 152,360 | 13,607 |
| 1 | 3 | − 5,862 | − 10,860 | $-1{,}8 \cdot 10^{-4}$ | 152,315 | 13,607 |
| 1 | 4 | − 5,862 | − 10,860 | $-1{,}4 \cdot 10^{-5}$ | 152,315 | 13,607 |
| 2 | 0 | | | | | 13,607 |
| 2 | 1 | − 5,430 | − 10,060 | − 3,99 | 171,832 | 13,434 |
| 2 | 2 | − 5,436 | − 10,080 | $3{,}05 \cdot 10^{-3}$ | 133,452 | 13,434 |
| 2 | 3 | − 5,436 | − 10,080 | $-1{,}56 \cdot 10^{-4}$ | 131,153 | 13,434 |

*Таблица 8.3.* Результаты вычислений, полученные для примера с медной заготовкой методом функциональной аппроксимации при $h_M = C$ и $r = 2$

| $M$ | $t_M$, с | $\hat{h}_M$, Вт/(м$^2$ · К) | Число итераций | $M$ | $t_M$, с | $\hat{h}_M$, Вт/(м$^2$ · К) | Число итераций |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 96 | 13,608 | 3 | 6 | 576 | 12,781 | 3 |
| 2 | 192 | 13,434 | 3 | 7 | 672 | 12,397 | 3 |
| 3 | 288 | 13,224 | 3 | 8 | 768 | 12,172 | 3 |
| 4 | 384 | 13,385 | 3 | 9 | 864 | 12,131 | 2 |
| 5 | 480 | 13,218 | 3 | 10 | 960 | 12,047 | 2 |

на рис. 8.8. Несколько первых значений $h$ существенно отличаются от результатов, полученных при $q = C$, $r = 2$ и обозначенных кружочками. Это видно из сравнения оцененных значений $\hat{h}_M$, приведенных в табл. 8.3 для $M$ от 1 до 10, со значениями $\hat{h}_M$, полученными при $q = C$, $r = 2$ и представленными в табл. 8.1. Разность максимальна при $M = 1$ и составляет 3%, при $M = 4$ она равна 0,3% и при $M = 10$ — около 0,05%.

Для этого примера результаты при $h_M = C$ и $q_M = C$ очень близки между собой. В общем случае эти результаты располагаются ближе друг к другу, чем отклонения, обусловленные малыми флуктуациями измеренных температур. При этом вычисления для $h_M = C$ обходятся дороже из-за необходимости проведения итераций. Число итераций в рассматриваемом примере невелико (две-три), но и в этом случае требуется больший объем вычислений, чем без итераций. Вдобавок машинная программа для случая анализа $h_M = C$ более сложна, чем для случая $q = C$. Из этих соображений, по крайней мере для примера с медной заготовкой, алгоритм при $q = C$ более предпочтителен по сравнению с алгоритмом при $h = C$.

## 8.4. Тела с внутренним градиентом температуры

В разд. 8.3 было показано, что метод функциональной аппроксимации при $q_M = C$ дает приблизительно такие же результаты, что и при временном предположении $h_M = C$. Однако один случай бесконечно тонкого тела не является доказательством того, что временные предположения о постоянстве $q$ и $h$ в равной степени применимы и в других случаях. Для выявления относительных достоинств необходимы дальнейшие исследования. Пока же можно лишь рекомендовать метод $q = C$ как более простой в вычислительном отношении и не требующий проведения итераций. К тому же могут быть использованы существующие программы для обратных задач теплопроводности. Из этих соображений в данном разделе используется только метод функциональной аппроксимации при временном предположении о постоянстве плотности теплового потока.

### 8.4.1. Анализ $r$ последующих температур с использованием метода функциональной аппроксимации для $q = C$

Одномерное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{8.4.1}$$

где $n = 0$ соответствует прямоугольным, $n = 1$ — цилиндрическим и $n = 2$ — сферическим координатам. Граничные условия записываются в форме

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} = h(t)[T_\infty(t) - T(r_0, t)] \ , \tag{8.4.2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_1} = 0 \tag{8.4.3}$$

и начальное распределение температуры в форме

$$T(r, t) = T_0 = \text{const} \ . \tag{8.4.4}$$

Для простоты считается, что коэффициент теплопроводности $k$ и объемная теплоемкость $\rho c$ не зависят от температуры, так что нелинейность, связанная с теплофизическими свойствами, в данной задаче не рассматривается. Коэффициент теплоотдачи предполагается зависящим только от времени. На «пассивной» границе при $r = r_1$ анализируется условие теплоизолированности в виде равенства (8.4.3). Могут рассматриваться и гораздо более общие условия, однако они излишне усложнят последующее изложение.

Для единственного внутреннего датчика алгоритм функциональной аппроксимации при временном предположении $q = C$ имеет вид уравнения (4.4.24) (здесь запишем его повторно)

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{j=1}^{r} (Y_{M+j-1} - \hat{T}_{M+j-1}|_{q_M = \cdots = 0})\phi_j}{\sum_{j=1}^{r} \phi_j^2} \ , \tag{8.4.5}$$

где используется $r$ последующих температур. Это уравнение можно использовать для вычисления оценки $\hat{q}_M$ и после этого оценить $\hat{h}_M$. При этом, прежде чем оценивать какие-либо значения $\hat{h}_M$, можно оценить все компоненты $\hat{q}_M$. Коэффициент теплоотдачи определяется по формуле

$$\hat{h}_M = \frac{\hat{q}_M}{T_{\infty M} - 0{,}5(\hat{T}_{0,M} + \hat{T}_{0,M-1})} \ . \tag{8.4.6}$$

Нулевой индекс используется для обозначения омываемой жидкостью поверхности. Если датчик не расположен на нагреваемой поверхности, то температура в уравнении (8.4.5) не совпадает с отмеченной нулевым индексом температурой в уравнении (8.4.6). Это главное отличие данного случая от случая бесконечно тонкого тела.

Уравнения (8.4.5) и (8.4.6) можно использовать для решения задачи (8.4.1)—(8.4.3) как с помощью интеграла Дюамеля, так и каким-либо разностным методом (например, с использованием левых, правых или центральных разностей). В обоих случаях $\phi_j$ в формуле (8.4.5) представляет собой изменение температуры в момент времени $t_j$ в точке расположения датчика при единичном ступенчатом изменении плотности теплового потока на поверхности $r = r_0$. Если при использовании обоих методов получены достаточно точные решения задачи теплопроводности, то результаты для $h_M$ приблизительно одинаковы. Для простоты изложения выбран метод, основанный на применении теоремы Дюамеля.

Вычисленные значения температуры в уравнении (8.4.5) определяются из уравнения (3.2.29) и могут быть записаны в виде

$$\hat{T}_M|_{q_M=0}=\hat{q}_1\Delta\phi_{M-1}+\hat{q}_2\Delta\phi_{M-2}+\cdots+\hat{q}_{M-1}\Delta\phi_1+T_0=\sum_{i=1}^{M-1}\hat{q}_i\Delta\phi_{M-i}+T_0\,, \tag{8.4.7a}$$

$$\hat{T}_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0}=\hat{q}_1\Delta\phi_M+\cdots+\hat{q}_{M-1}\Delta\phi_2+T_0=\sum_{i=1}^{M-1}\hat{q}_i\Delta\phi_{M-i+1}+T_0\,. \tag{8.4.7b}$$

Все величины $\phi_j$ (напомним, что $\Delta\phi_j=\phi_{j+1}-\phi_j$) рассчитываются в точке расположения датчика.

Температура нагреваемой поверхности, обозначенная $\hat{T}_{0M}$, вычисляется таким же образом, как и внутренняя температура:

$$\hat{T}_{0,M}=\sum_{i=1}^{M}\hat{q}_i\Delta\phi_{0,M-i}+T_0\,. \tag{8.4.8}$$

Здесь индекс 0 при $\Delta\phi_{0,M-1}$ обозначает нагреваемую поверхность.

Для случая одной последующей температуры, т. е. при $r=1$, внутренняя вычисленная температура сопоставляется с измеренной. При этом уравнение (8.4.5) упрощается и принимает вид

$$\hat{q}_M=\frac{Y_M-\hat{T}_M|_{q_M=0}}{\phi_1}\,. \tag{8.4.9}$$

Подобных упрощений в уравнениях (8.4.6) и (8.4.8) сделать не удается.

### 8.4.2. Примеры

Рассмотрим полубесконечное тело, которое внезапно подвергается воздействию потока жидкости с температурой $T_\infty$. При постоянной величине $h$ точное решение дается уравнением (8.2.14), а его график приведен на рис. 8.6. Хотя $h$ в действительности является постоянной величиной, она оценивается в виде функции времени.

Некоторые результаты представлены на рис. 8.9 — 8.11 [5]. На рис. 8.9 и 8.10 показаны результаты при точной подгонке моделируемых температур измеренным значениям. Результаты на рис. 8.9 соответствуют безразмерному шагу по времени $\Delta t_x^+=0{,}3$. Для точной подгонки, которая эквивалентна методу Штольца, эта величина относительно мала (т. е. находится около предела устойчивости). При значениях $B_x=h_x/k$, равных 0,05 и 0,1, оцененные значения $h_M$ очень близки к точным во все моменты времени, в то время как при $B_x=1$ наблюдаются некоторые колебания порядка $\pm 20\%$. Очевидно, что при фиксированном шаге по времени как в случае точных данных, так и при использовании точной подгонки к измеренным температурам по мере увеличения $B_x$ возрастают и трудности решения задачи. Результаты точной подгонки при большем значении шага по времени $\Delta t_x^+=0{,}5$ показаны на рис. 8.10. На этом рисунке значению $B_x=1$ соответствуют более точные результаты, чем на рис. 8.9. Следовательно, увеличение шага по времени может привести к уменьшению колебаний, однако увеличение $\Delta t$ может приводить и к потере информации о характере изменения $h$ по времени.

Приведенные на рис. 8.10 данные также подтверждают вытекающий из рис. 8.9 вывод о том, что с увеличением $B_x$ процесс решения становится все более трудным. Как показано на рис. 8.7, это связано с уменьшением коэффициентов чувствительности при увеличении $B_x$. (На этом рисунке показан коэффициент

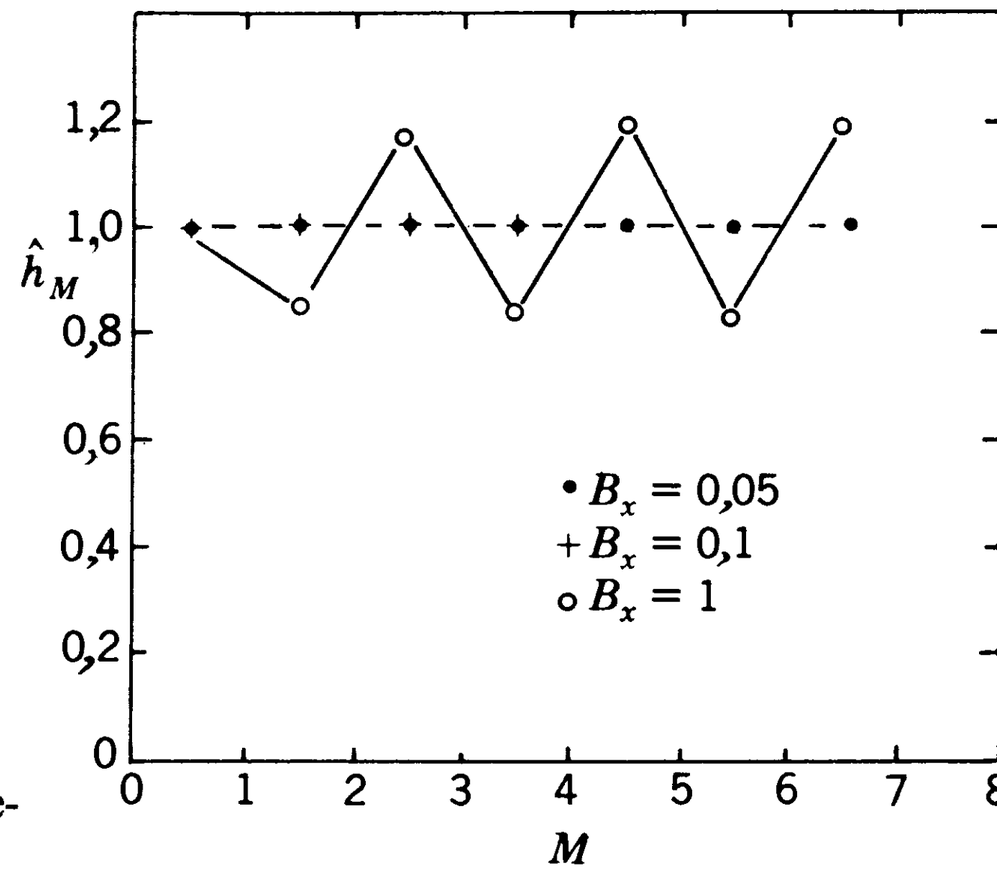



Рис. 8.9. Пример точной подгонки к измеренным температурам для полубесконечного тела ($\Delta t_x^+ = 0{,}3$).

чувствительности $Z$ для постоянной на всем рассматриваемом периоде времени величины $h$.) Необходимые коэффициенты чувствительности обозначаются $X$ и соответствуют отдельным компонентам $h_M$. (Коэффициенты $Z$ при этом всегда равны или больше коэффициентов $X$.)

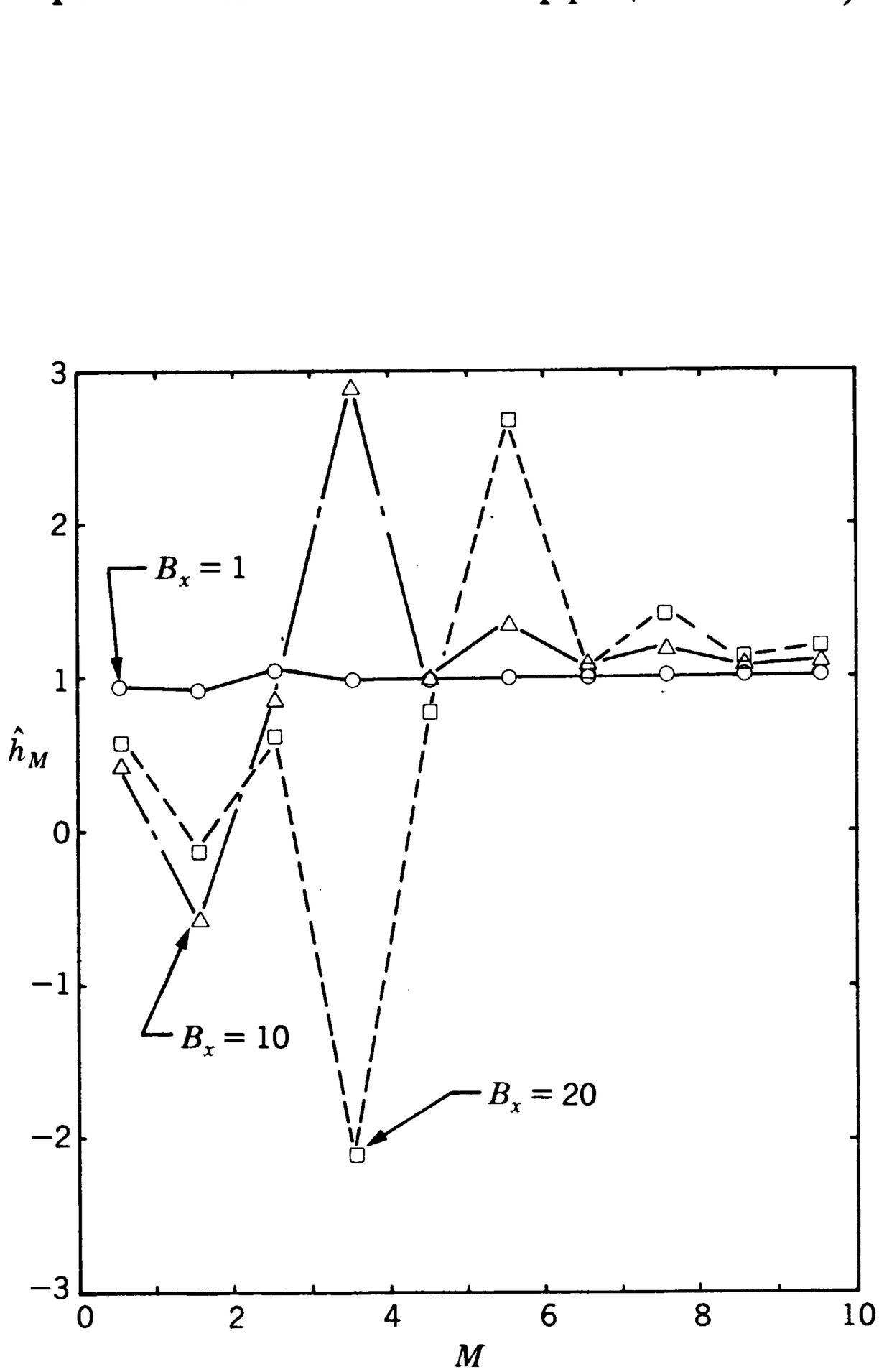



Рис. 8.10. Пример точной подгонки к измеренным температурам для полубесконечного тела ($\Delta t_x^+ = 0{,}5$).

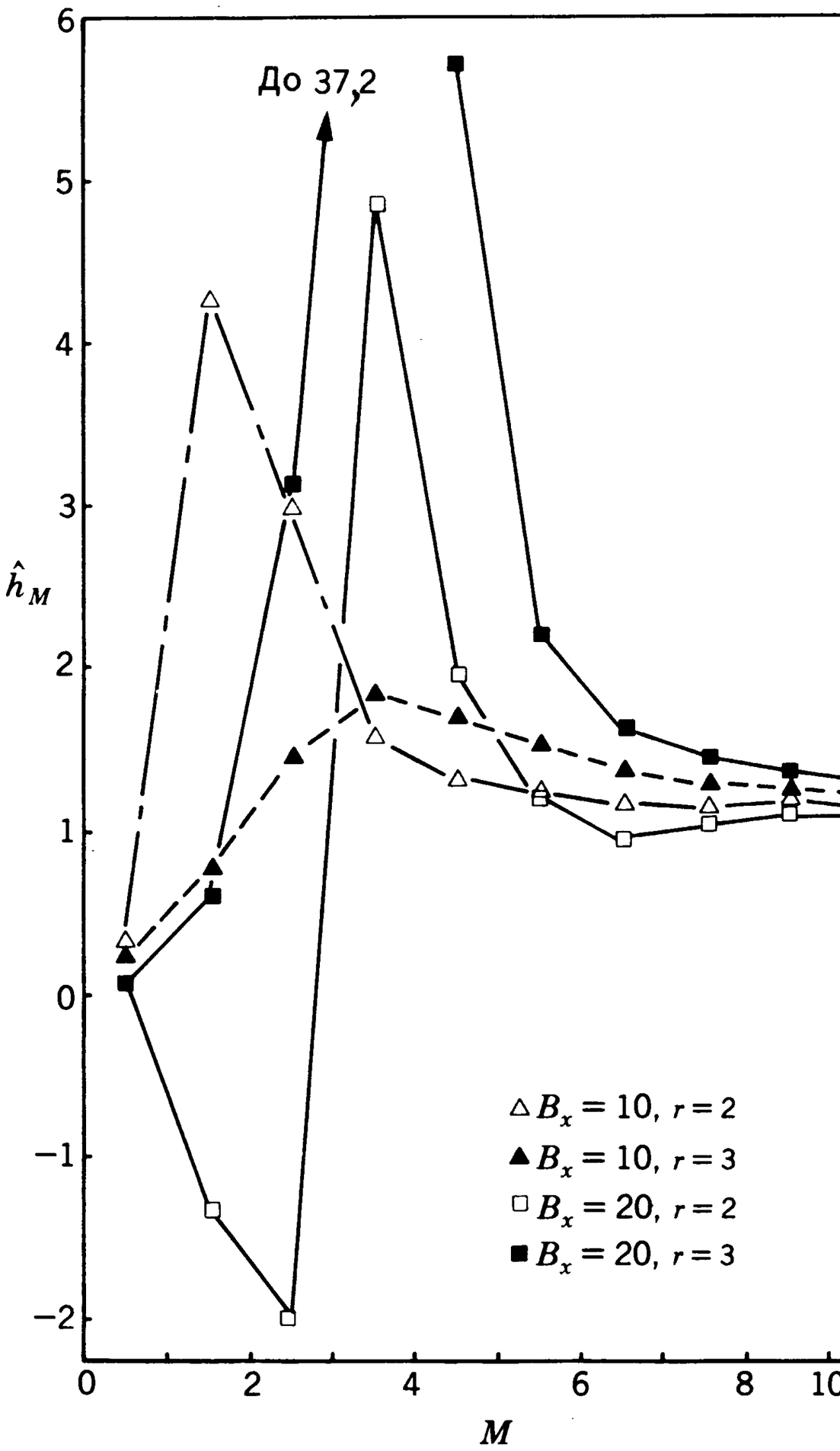



Рис. 8.11. Пример использования алгоритма функциональной аппроксимации для полубесконечного тела при $q = C(\Delta t_x^+ = 0{,}25)$.

Для использования меньших величин шагов по времени в методе функциональной аппроксимации необходимо учитывать последующие температуры. Даже в таком случае при больших значениях $B_x$, например $B_x \geqslant 10$, коэффициенты чувствительности очень малы (рис. 8.7), и, следовательно, получение точных оценок остается трудным делом. Это подтверждается результатами, приведенными на рис. 8.11 и полученными при величине шага $\Delta t_x^+ = 0{,}25$, при котором метод Штольца неустойчив. Учет последующих шагов по времени, $r = 2$ или 3, приводит к уменьшению неустойчивости, однако получаются неточные результаты. Это неудивительно, поскольку коэффициенты чувствительности слишком малы (рис. 8.7). Окончательный вывод состоит в том, что датчик должен располагаться как можно ближе к поверхности, по крайней мере так, чтобы выполнялось условие $h_x/k < 1$, где $x$ — расстояние от нагреваемой поверхности.

## 8.5. Оценивание контактной проводимости

Методы оценивания по данным измерений нестационарной контактной проводимости совершенно аналогичны методам определения коэффициента теплоотдачи. Коэффициенты чувствительности и анализ оптимальных условий приводятся в работах [3, 4].

## Литература

1. Beck, J. V. and Arnold, K. J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1977.
2. Holman, J. P., *Heat Transfer*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
3. Beck, J. V., Transient Sensitivity Coefficients for the Thermal Contact Conductance, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 1615-1616 (1967).
4. Beck, J. V., Determination of Optimum, Transient Experiments for Thermal Contact Conductance, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 621–633 (1969).
5. Osman, A. Personal communication, Aug., 1983.

## Задачи

8.1. Выведите уравнение (8.2.16), начиная при этом с уравнения (8.2.14). Получите также выражение для максимальной величины коэффициента чувствительности $Z_h^+$ через $t_x^+$ и $B_x$ при малых значениях $B_x$.

8.2. Толстая бетонная стена, имеющая начальную температуру 30 К, внезапно подвергается воздействию потока жидкости с температурой 80 К. Вычислите и постройте график четырех зависимостей температуры от времени на глубине 1,2 см от нагреваемой поверхности для значений коэффициента теплоотдачи 9,10, 90 и 100 Вт/(м$^2 \cdot$ К) соответственно. Свяжите различие между графиками с коэффициентами чувствительности. Используйте при этом величины $k = 1{,}2$ Вт/(м $\cdot$ К) и $\alpha = 7{,}5 \cdot 10^{-7}$ м$^2$/с.

# Предметный указатель


Алгоритм трехдиагональной матрицы 230
Аппроксимация, сосредоточенная теплоемкость 65, 99—101, 103, 106

Бесконечная память 35, 40
Бесконечно тонкое тело 33, 64—70
Библиотека IMSL 145, 166
*Бэкуса—Гильберта* метод 15

Граничные условия конвективные 101
— — численные 101
— — — плотность теплового потока 95—101

Двумерный тепловой поток 42
Демпфирование 25
*Дирака* дельта-функция 100
Дисперсия вычисленной компоненты плотности теплового потока 162—163
Дифференциальные уравнения в частных производных эллиптические 193
— — обыкновенные, *Кранка—Николсона* метод, центральная разность 104, 106
— — — левая разность, неявный метод 103, 104
— — — методы решения 102—106
— — — общая формула 104—106
— — — *Эйлера* метод, правая разность 102—104
*Дюамеля* теорема 15, 47, 48, 70, 71, 87—95, 107—110, 116, 122—123, 131, 133, 152, 154, 171—173, 182, 192, 204—206, 265, 299
— — вывод 88—90
— — для температуры 70
— — матричная форма 92
— — численная аппроксимация 90

Единственность решения 118

Задача с одним внутренним датчиком 17
Задачи некорректные 15, 18, 50
— прямые 18
— — *Дюамеля* теорема 88—95
— — нелинейные 88
— — разностные методы 95—106
— — теплопроводности 18, 87—110
Закон нагрева синусоидальный 25
Запаздывание 25
Зонды калориметрические 65

Импульс теплового потока 178
Интегральные уравнения 95—101, 119—120
Информация о решении предварительная 24, 151

Калориметрирование 14
Квазилинеаризация 223
Классификация ОЗТ 47—48
Конечные разности 15, 47
— элементы 15, 47, 99—101, 106, 107—110, 120—121
— — метод *Галеркина* 99
— — весовая функция 99—100
Конечный контрольный объем 47, 95—102, 107—110, 122
Контактная проводимость 19
Контрольные примеры для ОЗТ 173—182
— — — — изменение плотности теплового потока треугольного вида 1
177, 183—184, 187—
195—196, 200—201
— — — — импульс пло
ности теплового пот
178—179, 184, 190,
196—198, 201
— — — — — темпера
180, 184—186, 190—
198—199, 201
— — — — ступенчатое
менение плотности
лового потока 174—
182—183, 187
Корреляция 24
*Коши* задача 20
Коэффициент корреляции
борки 24
— усиления 133
— — амплитуды 184
— чувствительности 31-
64, 223—237, 242—2
248, 250, 261—262,
277—278, 285—292
— — бесконечно тонко
ло 33
— — двумерное тело 4
— — импульсный, мат
93
— — линейная зависим
35
— — линейность 32
— — относительно коэ
циента теплоотдачи
285—292
— — пластина 26—28,
42
— — полубесконечное
36
— — при изменении п
ности теплового по
импульсном 225
— — — — — — — с
чатом 224—227, 28
Коэффициенты фильтра
156—158
*Кранка—Николсона* ме
104, 106, 107—110

Критерии для ОЗТ, минимальная дисперсия 117
— — — несмещенность 117
— — — среднеквадратичная погрешность 160—165
— оценки качества методов решения ОЗТ 48

*Лагранжа* интерполяционный полином 98
*Лапласа* преобразование 12
Линейная зависимость 35, 40
Линейное изменение плотности теплового потока, связанные между собой отрезки 246
Линейность 31—35
— коэффициентов чувствительности 32

Матрица коэффициентов чувствительности 240
— нормальных уравнений 145, 240, 251, 277
— погрешностей ковариационная 151
— полностью заполненная 279
— разреженная 279
Метод коллокации 100
— левой разности 254, 255, 261
— последовательного оценивания 48, 116, 121, 125, 131—140, 147—153, 162, 199—203, 265—266, 274—278
— пробной функции 116, 147, 151—154, 274
— решения ОЗТ, конечные разности и конечные элементы 173
— — — несколько датчиков 124—125, 234—237, 245—246
— — — обобщенный, последовательная функциональная аппроксимация 153—154
— — — один последующий шаг по времени 227—237
— — — оптимальные условия 212—217
— — — пробная функция 116, 152—154, 274
— — — продвижение по пространственной координате 252—261
— — — разностный 223—268
— — — регуляризация. *См. также* Регуляризация
— — — точная подгонка. *См. также* Подгонка точная
— — — функциональная аппроксимация. *См. также* Функциональная аппроксимация, метод
— — — *Штольца. См. также Штольца* метод
— явный 103

Нагрев радиационный 17, 88
Наименьшие квадраты 41, 57, 58, 63, 64, 66, 124—125, 127, 129, 130, 132, 134, 147—148
— — взвешенные 63
— — демпфированные 141
— — нелинейные 141
— — обобщенные 151
Нелинейность 32
Несколько датчиков, последовательная функциональная аппроксимация 133—135
— — температуры 124—125, 147, 245
Нормальные уравнения 145, 241, 251, 277

Обратная задача 13
— — теплопроводности многомерная 271—282
— — — по времени 60, 61
Обращение матрицы 107
ОЗТ в форме фильтра 154
— нелинейная 18, 32, 223, 296—298
— определение 11—12
Операции арифметические 231
Оценивание 14
— во всей области 48, 116, 126—131, 140—146, 151—153, 158, 193—199, 216—217, 237
— интенсивности выделения энергии 20, 169
— контактной проводимости 19
— координаты датчика 22
— параметров 15, 21
— последовательное 36, 48
— температуры окружающей среды 19
— функции 21
Оценки смещенные 159
Ошибки с нулевым средним 22

Память «долгая» 206
Параметр регуляризации 141
— — выбор 146
Плоская пластина, постоянная плотность теплового потока 27, 41
Плоские тела 78—81, 81—84, 95—109, 117—120, 135—136, 137—139
Плотность вероятности 24
— теплового потока на поверхности 17
Погрешности 21, 66, 159—162, 177—178, 187—190, 200—201, 209—217
— аддитивные 22
— измерений 21, 117, 133
— некоррелированные 23
— случайные 177—178, 187—190
— температуры в ОЗТ 66—67, 75—77
Погрешность детерминированная 117, 159—161, 163—165, 210—212
— среднеквадратичная 23, 117, 159—165, 210—217
— — определение 23
Подгонка точная 48, 116, 122—124, 139—140, 142, 144, 145, 292—294
Полиномы ортогональные 57
Полностью неявная схема 104
Полубесконечное тело 36, 300—302
— — измеренная температура поверхности 72
— — постоянная плотность теплового потока 29, 36, 43
— — — температура поверхности 55
— — температура поверхности, переменная по времени, 55
Программа для ЭВМ 266—268
Производная матричная 250

Разностные уравнения, левая разность 102—104
— — правая разность 102—104
— — сосредоточенная теплоемкость 103
— — явный метод 103
Разность левая 65, 66, 104
— правая 65, 102—109, 120—121
— центральная 65, 66, 104
Распределение нормальное 24
Регрессия гребневая 116, 141, 142
Регуляризация 15, 47—48, 116, 140—154, 173, 192—203, 248—252, 264—266, 274, 277—282
— во всей области 116, 143—146, 193—199, 207—209
— второй порядок 142—144, 248—252, 264—266
— многомерная плотность теплового потока 280—282
— нулевой порядок 142—144, 153
— первый порядок 142—144, 193, 264—266
— последовательная 116, 147—150, 199—203, 248—252, 277, 280
Решение для постоянной плотности теплового потока, плоская пластина 27—28
— — — — — — сфера 30
— — — — — — цилиндр 30
— стационарной ОЗТ 62—64
— точное 25, 65, 70, 77
— — ОЗТ, *Бургграфа* метод 78—84
— — — плоская пластина 78—81
— — — полубесконечное тело 70—72
— — — стационарной 62—64
— — — сферические тела 81
— — — тело с сосредоточенной теплоемкостью 65
— — — цилиндрические тела 81
— — прямой задачи, преобразование *Лапласа*, пластина, $q = C$ 27—29, 41—42
— — — — ступенчатое изменение температуры поверхности 70
— — — — полубесконечное тело, $q = C$ 29, 36—41
— — — — — — $q \approx t^n$ 55, 73
— — — — — — синусоидальное изменение 25
— — — — разделение переменных 87
— — сплошная сфера 30
— — сплошной цилиндр, $q = C$ 30

Система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей 105
Смещение 23
— детерминированное *см.* Погрешность детерминированная
Соотношение погрешностей в исходных данных и результатах 183, 219
Составное тело 18
Среднее значение выборки 23
Стандартная форма уравнения относительно температуры 93, 107—110
Стандартные статистические предположения 22—25, 210
Суперпозиция 38, 59—60, 88
— погрешностей 67
Существование решения 117—118
Сферические тела 30, 81
СДС 7600 65, 66, 104

*Тейлора* ряды 157, 229, 242, 247, 248, 250, 297
— — матричная форма 241
Температуры будущие 41, 47—48, 70, 186—192
Теплофизические свойства 73, 180—181
*Томаса* алгоритм 105, 230
Трудности измерений на нагреваемой поверхности II

Условия корректности 115—121
— оптимальности 209—217
— — регуляризация во всей области 216—217
— — функциональная аппроксимация 209—216
Устойчивость 117—119, 184—186, 193
— соотношение погрешностей в исходных данных и результатах 183

Фильтр на базе метода регуляризации во всей области 207
— перемещающийся осредняющий 84
— цифровой. *См. также* Цифровой фильтр
Фильтрация результатов измерений предварительная 159
Функциональная аппроксимация, алгоритм 182
— — метод 47, 48, 50, 116, 121—140, 131—139, 148, 154—155, 158, 173, 182—192, 204—207, 213—216, 227—237, 241—247, 262—266, 274—276, 280—282, 295—302
— — — альтернативная интерпретация 139—140, 235—237
— — — будущие шаги по времени 134—140, 186—192, 241—247
— — — во всей области 125—131, 237—241
— — — последовательная 31, 139, 274—276, 280—282
— — — связанные линейные отрезки 136—139, 246—247
Функция весовая 99
— ошибок дополнительная 91
*Фурье* число 27

Цилиндр 30, 81
Цифровой фильтр 66

Числа случайные 59
Численные методы 87, 88, 90, 92, 95, 102—109

Шаг по времени малый 25
*Штольца* метод 14, 48, 116, 123—124, 133, 138, 148, 150, 164, 182—186, 199, 206, 274

# Оглавление


Предисловие редакторов перевода 5

Предисловие 7

Обозначения 10

1. О постановке обратной задачи теплопроводности 13

1.1. Введение 13
1.2. Примеры обратных задач 15
1.2.1. Обратные задачи теплопроводности 15
1.2.2. Другие обратные задачи, связанные с оцениванием функций 19
1.3. Оценивание функций и оценивание параметров 21
1.4. Измерения 21
1.4.1. Погрешности измерений 21
1.4.2. Статистические характеристики погрешностей 22
1.5. Трудности решения обратных задач 25
1.5.1. Чувствительность к погрешностям 25
1.5.2. Примеры демпфирования и запаздывания. Точные решения 25
1.6. Коэффициенты чувствительности 31
1.6.1. Определение коэффициентов чувствительности и линейность 31
1.6.2. Примеры использования коэффициентов чувствительности в одномерных задачах 33
1.6.2.1. Бесконечно тонкое тело 33
1.6.2.2. Полубесконечное тело 36
1.6.2.3. Теплоизолированная с одной стороны пластина 41
1.6.3. Примеры использования коэффициентов чувствительности в двумерных задачах 42
1.7. Классификация методов 47
1.8. Критерии оценки качества методов решения обратных задач теплопроводности 48
1.9. Содержание книги 50
Литература 51
Задачи 54

2. Точные решения обратной задачи теплопроводности 62

2.1. Введение 62
2.2. Решение стационарной задачи 62
2.3. Решения нестационарных задач для тел с малым внутренним тепловым сопротивлением 64
2.3.1. Точное решение 64
2.3.2. Приближенные решения 65
2.3.3. Погрешности измерения температуры и приближенные решения 66
2.4. Вычисление плотности теплового потока по измеренной зависимости температуры поверхности от времени 70
2.4.1. Точные результаты при непрерывном изменении температуры поверхности по времени 70
2.4.2. Приближенные результаты для полубесконечного тела при дискретных измерениях температуры поверхности по времени 72

2.4.3. Влияние погрешностей измерения температуры на результаты расчета по формулам (2.4.8) 75
2.5. Точные решения обратных задач теплопроводности 77
2.5.1. Обзор литературы 77
2.5.2. Точное решение для тел плоской геометрической формы 78
2.5.3. Решения для цилиндра и сферы 81
2.5.4. Пример расчета для тела плоской геометрической формы 81
Литература 84
Задачи 85

3. Приближенные методы решения прямых задач теплопроводности 87

3.1. Введение 87
3.1.1. Различные численные методы 87
3.1.2. Содержание главы 88
3.2. Теорема Дюамеля 88
3.2.1. Вывод 88
3.2.2. Численная аппроксимация 90
3.2.3. Матричная форма 92
3.3. Разностные методы 93
3.3.1. Метод конечного контрольного объема для тел плоской геометрической формы с постоянными свойствами 95
3.3.2. Другие граничные условия и учет поверхностей раздела материалов 101
3.3.3. Численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка 102
3.3.4. Общая форма разностных уравнений для теплопроводности плоского тела 104
3.3.5. Стандартная форма уравнений относительно температуры для обратной задачи теплопроводности 107
Литература 110
Задачи 111

4. Методы решения обратных задач теплопроводности 115

4.1. Введение 115
4.2. Некорректные задачи 117
4.2.1. Дифференциальное уравнение в частных производных 117
4.2.2. Интегральное уравнение 119
4.2.3. Разностное уравнение 120
4.3. Метод с одним последующим шагом по времени 121
4.3.1. Введение 121
4.3.2. Точная подгонка к измеренным температурам (одиночный датчик) 122
4.3.3. Несколько датчиков температуры 124
4.4. Метод функциональной аппроксимации 125
4.4.1. Введение 125
4.4.2. Метод оценивания во всей области 126
4.4.2.1. Случай плавно изменяющейся плотности теплового потока 126
4.4.2.2. Случай резко изменяющейся плотности теплового потока 128
4.4.3. Метод последовательного оценивания 131
4.4.3.1. Функциональная форма для постоянной плотности теплового потока 131
4.4.3.2. Функциональная форма для плотности теплового потока, изменяющейся по линейному закону 136
4.4.3.3. Альтернативная интерпретация 139
4.5. Метод регуляризации 140
4.5.1. Введение 140
4.5.2. Физический смысл регуляризующих членов 141
4.5.3. Метод регуляризации во всей области 143
4.5.3.1. Алгебраическая формулировка 143
4.5.3.2. Матричная запись 144

4.5.3.3. Выбор параметра регуляризации 146
4.5.4. Метод последовательной регуляризации 147
4.6. Метод пробной функции 151
4.6.1. Введение 151
4.6.2. Матричный анализ 151
4.6.3. Метод регуляризации нулевого порядка 153
4.6.4. Обобщенный метод последовательной функциональной аппроксимации 153
4.7. Алгоритмы фильтрации для линейных обратных задач теплопроводности 154
4.7.1. Введение 154
4.7.2. Последовательный алгоритм фильтрации 155
4.7.3. Предварительная фильтрация результатов измерения температуры 159
4.8. Две взаимоисключающие цели 159
4.8.1. Минимальное детерминированное смещение 159
4.8.2. Минимальная чувствительность к случайным погрешностям 159
4.8.3. Среднеквадратичная погрешность 160
4.8.4. Дисперсия вычисленной компоненты плотности теплового потока 162
4.8.5. Оценка детерминированной погрешности определения плотности теплового потока 163
Литература 165
Задачи 167

5. Алгоритмы обращения свертки для одной зависимости плотности теплового потока от времени 171

5.1. Введение 171
5.2. Контрольные примеры 173
5.2.1. Введение 173
5.2.2. Ступенчатое изменение плотности теплового потока 174
5.2.3. Изменение плотности теплового потока треугольного вида 175
5.2.4. Случайные погрешности 177
5.2.5. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$) 178
5.2.6. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$) 180
5.2.7. Контрольные примеры с размерными величинами 180
5.3. Алгоритмы функциональной аппроксимации 182
5.3.1. Введение 182
5.3.2. Алгоритм с использованием одного значения температуры в последующий момент времени (метод Штольца) 182
5.3.2.1. Ступенчатое изменение плотности теплового потока 182
5.3.2.2. Изменение плотности теплового потока треугольного вида 183
5.3.2.3. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$) 184
5.3.2.4. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$) 184
5.3.3. Алгоритм с использованием нескольких значений температуры в последующие моменты времени 186
5.3.3.1. Ступенчатое изменение плотности теплового потока 187
5.3.3.2. Изменение плотности теплового потока треугольного вида 187
5.3.3.3. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$) 190
5.3.3.4. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$) 190
5.4. Алгоритмы регуляризации 192
5.4.1. Введение 192
5.4.2. Метод регуляризации во всей области 193
5.4.2.1. Изменение плотности теплового потока треугольного вида 195
5.4.2.2. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$) 196
5.4.2.3. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$) 198
5.4.3. Метод последовательной регуляризации 199
5.4.3.1. Изменение плотности теплового потока треугольного вида 200
5.4.3.2. Импульс плотности теплового потока ($\delta\hat{q}_M/\delta q_r$) 201
5.4.3.3. Импульс температуры ($\delta\hat{q}_M/\delta Y_r$) 201

5.4.3.4. Сравнение методов регуляризации во всей области и последовательной регуляризации 201
5.4.3.5. Сравнение методов последовательной регуляризации и последовательной функциональной аппроксимации 203
5.5. Алгорим с цифровым фильтром 203
5.5.1. Введение 203
5.5.2. Фильтр на базе метода функциональной аппроксимации 204
5.5.2.1. Пластина конечной толщины 204
5.5.2.2. Полубесконечное тело 206
5.5.3. Фильтр на базе метода регуляризации во всей области 207
5.6. Условия оптимальности алгоритмов 209
5.6.1. Оптимальный алгоритм функциональной аппроксимации 209
5.6.2. Оптимальный алгоритм регуляризации во всей области 216
Литература 217
Задачи 217

6. Разностные методы решения одномерной обратной задачи теплопроводности 223

6.1. Введение 223
6.2. Коэффициенты чувствительности и их вычисление разностными методами 223
6.3. Одиночный датчик температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), один последующий шаг по времени (точная подгонка) 227
6.3.1. Модификация разностных уравнений прямой задачи теплопроводности для решения обратной задачи теплопроводности 227
6.3.2. Применение коэффициентов чувствительности для точного согласования с данными одиночного датчика 228
6.4. Несколько датчиков температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), один последующий шаг по времени 234
6.5. Оценивание во всей области разностными методами 237
6.6. Одиночный датчик температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), $r$ последующих шагов по времени 241
6.7. Несколько датчиков температуры, функциональная аппроксимация ($q = C$), $r$ последующих шагов по времени 245
6.8. Одиночный датчик температуры, функциональная аппроксимация, линейное изменение плотности теплового потока (связанные между собой сегменты) 246
6.9. Методы последовательной регуляризации второго порядка 248
6.10. Маршевые методы продвижения по пространственной координате для одномерных задач 252
6.10.1. Аналитическое решение 252
6.10.2. Метод Де Суза 254
6.10.3. Метод Вебера [1)] 256
6.10.4. Метод Рейно и Бранзье 258
6.10.5. Метод Хиллза и Хензела 259
6.10.6. Сравнение с другими методами 260
6.11. Числовые примеры 261
6.12. Программы для ЭВМ 266
Литература 268
Задачи 269

7. Многомерные обратные задачи теплопроводности 271

7.1. Введение 271
7.2. Два независимых тепловых потока 272
7.2.1. Метод последовательной функциональной аппроксимации 274
7.2.2. Метод последовательной регуляризации 277
7.3. Тепловой поток, зависящий от нескольких переменных 278

7.3.1. Метод последовательной функциональной аппроксимации 280
7.3.2. Метод последовательной регуляризации 280
Литература 282
Задачи 283

8. Оценивание коэффициента теплоотдачи 284

8.1. Введение 284
8.2. Коэффициенты чувствительности 285
8.2.1. Бесконечно тонкое тело 286
8.2.2. Полубесконечное тело 290
8.3. Анализ для бесконечно тонкого тела 292
8.3.1. Точное согласование с измеренными температурами 292
8.3.2. Метод регрессии 294
8.3.3. Процедура функциональной аппроксимации при $q = C$ 295
8.3.4. Процедура функциональной аппроксимации при $h = C$ 296
8.4. Тела с внутренним градиентом температуры 298
8.4.1. Анализ $r$ последующих температур с использованием метода функциональной аппроксимации для $q = C$ 298
8.4.2. Примеры 300
8.5. Оценивание контактной проводимости 302
Литература 302
Задачи 302

Предметный указатель 303

Научное издание

Джеймс Вер Бек, Бен Блакуэлл, Чарльз Р. Сент-Клэр, мл.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Заведующий редакцией В.И. Пропой
Ст. научный редактор О.Н. Вишнякова
Художник А. В. Захаров
Художественный редактор А. Я. Мусин
Технический редактор А. В. Лыткина
Корректоры Е. Д. Валуева, К. С. Селякова

ИБ №6651

Подписано к печати 19.05.89.
Формат 70 × 100 1/16.
Бумага офсетная №1.
Гарнитура таймс. Печать офсетная (фотоофсет).
Объем 9,75 бум.л. Усл. печ. л. 25,35.
Усл. кр.-отт. 50,70. Уч.-изд.л. 22,96.
Изд.№ 7/5821. Тираж 3700 экз. Зак.748.
Цена 4 руб.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
129 820, ГСП, Москва И—110, 1-й Рижский пер., 2.
Набрано в Межиздательском фотонаборном центре издательства «Мир».

Можайский полиграфкомбинат В/О «Совэкспорткнига»
Государственного комитета СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
143200, Можайск, ул. Мира, 93.