О.М.Алифанов

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

Москва
·МАШИНОСТРОЕНИЕ·
1988

УДК 629.7 + 536.2

Обратные задачи теплообмена. / О.М. Алифанов. – М.:Машиностроение, 1988. – 280 с.
ISBN 5-217-00134-8

Монография посвящена разработке вопросов прикладной теории и алгоритмизации решения обратных задач теплообмена, которые были затронуты в книге [6]. При этом дальнейшее развитие получили общепостановочные аспекты, расширены классы рассматриваемых задач и примеры практического использования данной методологии для диагностики и идентификации тепловых режимов конструкций, обработки экспериментальной информации при проектировании и испытаниях теплонагруженных технических объектов. Особое внимание уделено итерационной регуляризации как одному из наиболее быстро развивающихся методов в теории решения некорректно поставленных обратных задач теплообмена. По сравнению с [6] дополнительно изложены принципы построения гибридных алгоритмов решения обратных задач для реализации их на аналого-цифровых вычислительных системах. Методы естественной шаговой регуляризации и регуляризации в соответствии с вариационным принципом описаны более кратко, чем в [6]. Даны сравнительный анализ и рекомендации по применению методов обратных задач теплопроводности.

Для научных работников. Будет полезна инженерам, специализирующимся в области теплофизических и теплотехнических исследований объектов ракетостроения, авиастроения и энергетики.

Библиогр.: 119 назв. Ил. 88. Табл. 3

Рецензент чл.-кор. АН СССР *А.П. Ваничев*

$$\text{А}\ \frac{3607000000-124}{038\,(01)-88}\quad 124-88$$

ISBN 5-217-00134-8

©Издательство "Машиностроение", 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

При создании новых образцов техники, функционирование которых сопровождается протеканием интенсивных процессов теплопереноса, все большая роль отводится теплофизическим исследованиям, тепловому проектированию и экспериментальной отработке тепловых режимов технических объектов. Аналогичная ситуация имеет место при разработке и интенсификации теплоэнергетических, энерготехнологических и химико-технологических процессов, связанных с производством материалов, заготовок и деталей, изготовлением и эксплуатацией ответственных конструкций. Особое значение вопросы теплообмена приобретают в таких областях техники, как авиационная и ракетно-космическая, в энергетике, металлургии.

Отмеченная тенденция обусловлена усложнением условий теплового воздействия окружающих сред на материалы и конструкции современных технических объектов, назначением все более жестких допусков на температурные режимы различных агрегатов, систем и технологических процессов, повышением требований к надежности поддержания заданных тепловых режимов, снижению материалоемкости конструкций, экономии топливно-энергетических ресурсов. Эффективность принятых проектно-конструкторских и технологических решений во многом зависит от глубины и достоверности изучения явлений теплообмена, от адекватности модельных представлений теплофизических процессов, протекающих на поверхностях раздела различных фаз, внутри материалов и конструкций. При этом все большее значение придается экспериментальным исследованиям, стендовой и натурной отработке тепловых режимов и, как следствие, созданию эффективных методов диагностики и идентификации теплообменных процессов по результатам экспериментов и испытаний.

Как показали проведенные исследования, в основу этих методов могут быть положены решения обратных задач теплообмена (ОЗТО), причем в ряде случаев обратные задачи являются практически единственным средством получения необходимых результатов.

Методы обратных задач дают возможность исследовать сложные нестационарные нелинейные процессы теплообмена, обладают высокой информативностью, позволяют проводить экспериментальные исследования в условиях, максимально приближенных к натурным, или непосредственно при эксплуатации технических систем и в конечном итоге дают возможность более обоснованно выбирать проектно-конструкторс-

кие и технологические решения. Поэтому в последнее время в теплофизике и теплотехнике активно развивается новое научное направление, базирующееся на методологии обратных задач теплообмена. Соответствующие методы нашли и продолжают находить важные практические приложения в различных областях техники.

Характерной особенностью обратных задач теплообмена является некорректность исходной постановки, связанная с возможной неоднозначностью и неустойчивостью их решения, что требует разработки специальных математических методов и вычислительных алгоритмов, а также оптимального планирования и должной технической организации экспериментальных исследований.

Общим математическим методом решения некорректно поставленных задач является метод регуляризации А.Н. Тихонова. Большой вклад в эту область внесли М.М. Лаврентьев, Г.И. Марчук, В.К. Иванов, В.Я. Арсенин, В.А. Морозов, А.Б. Бакушинский, В.Б. Гласко и другие советские математики. Из принципов построения регуляризирующих алгоритмов наиболее распространен вариационный принцип. Применяются также другие методы и приемы получения устойчивых решений, например, такие как шаговая регуляризация, а также принцип, получивший название итерационной регуляризации. Он предложен и развит в наших исследованиях. Этот подход оказался наиболее удобным и универсальным при решении различных обратных задач, что обусловило его широкое практическое распространение.

Реализация указанных методов связана с численным решением соответствующих задач. При этом широко используется математический аппарат разностных схем, разработанный А.А. Самарским и его школой.

Значительная трудоемкость решения обратных задач, а также необходимость автоматизации обработки данных тепловых экспериментов и испытаний подразумевает использование для этих целей достаточно мощных ЭВМ и специализированных вычислительных комплексов.

Таким образом, развитие теории и методологии обратных задач теплообмена, как актуального направления исследований, вызвано насущными потребностями практики и базируется на математической теории некорректно поставленных задач, оптимальных принципах планирования эксперимента, современных численных методах и вычислительной технике.

В настоящее время список публикаций по прикладным вопросам исследования и решения обратных задач теплообмена весьма обширен. Обзор этой литературы можно найти в книгах [6, 49, 62, 112].

Автор выражает глубокую благодарность академику В.П. Мишину и профессору Б.М. Панкратову за советы и критические замечания, способствовавшие улучшению рукописи, и своим коллегам, принимавшим участие в разработке методов и алгоритмов: С.А. Буднику, В.К. Занцеву, Н.В. Керову, А.С. Охапкину, А.П. Трянину и особенно Е.А. Артюхину, В.В. Михайлову и С.В. Румянцеву.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a = \frac{\lambda}{C}$ – коэффициент температуропроводности;

b – толщина пластины;

C – удельная объемная теплоемкость;

d – координата точки измерения температуры;

l – линейный размер;

Re – число Рейнольдса;

q – плотность теплового потока;

S – мощность внутренних источников теплоты в теле;

T – температура;

T_W – температура поверхности тела;

T^* или f, q^* – известные значения температуры и плотности теплового потока;

x, y, z – декартовы пространственные координаты;

X – координата подвижной границы;

$\Delta\tau$, Δx – расчетные интервалы дискретизации времени и пространственной координаты;

$\Delta\tau_{кр}$ – критический шаг по времени;

δ – погрешность входных данных;

θ – модельная температура (переменная после подстановки Кирхгофа);

λ – коэффициент теплопроводности;

τ – время;

τ_m – наибольшее значение временной переменной;

ν, μ – плотности тепловых потенциалов простого и двойного слоя соответственно;

σ – среднеквадратическая ошибка;

$\mathrm{Fo}_l = \frac{a\tau}{l^2}$ – число Фурье;

$\Delta\mathrm{Fo}_{l\,кр} = \frac{a\Delta\tau_{кр}}{l^2}$ – критический шаг по Fo_l.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A – оператор, действующий в некотором функциональном пространстве;

$\mathbf{A}_\Delta$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – матрицы, действующие в евклидовых пространствах;

A^* – оператор, сопряженный с оператором A;

A' – производная Фреше оператора A;

$\mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}}$ – матрица, транспонированная с $\mathbf{A}_\Delta$;

A^{-1} – оператор, обратный оператору A;

$\mathbf{A}_\Delta^{-1}$ – матрица, обратная матрице $\mathbf{A}_\Delta$;

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ – произведение матриц **A** и **B**;
$C[a, b]$ – множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$;
$C(G)$, C – множество функций, непрерывных и ограниченных в области G пространства E_m;
$C^k(G)$, C^k – множество функций, имеющих в области G непрерывные и ограниченные производные до k-го порядка включительно;
E_m – евклидово пространство m-мерных действительных векторов;
$L_2[a, b]$ – пространство действительных функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$;

$W_2^k[a, b]$ – пространство Соболева – класс функций, имеющих суммируемые с квадратом обобщенные производные до k-го порядка включительно, на отрезке $[a, b]$;
$(\cdot)_H$ – скалярное произведение в некотором пространстве H;
$\|\cdot\|_H$ – норма в некотором пространстве H;
$\|A\|$ – норма оператора;
$\mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_m]^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец (т – знак транспонирования);
$\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = [z_1, z_2, \ldots, z_m]$ – вектор-строка;
$\{z_i\}_1^l$ – последовательность элементов z_i, $i = 1, 2, \ldots, l$;
$\{z:R\}$ – множество всех элементов z, обладающих некоторым свойством R;
$z^{(k)}(x)$ – k-я производная функции z по x;
$\inf_{u \in G} J[u]$, $\min_{u \in G} J[u]$ – запись задачи о минимизации скалярной величины $J[u]$ на множестве G (inf – нижняя грань);
J', J_u' – градиент функционала или функции J (по u);
$\subset$ – знак включения;
$\in$, $\notin$ – знаки принадлежности и непринадлежности соответственно;
$\equiv$ – символ тождества или равенства по определению;
$O(h^k)$ – символ погрешности аппроксимации производной разностным отношением порядка k относительно шага аппроксимации h;
$o(\eta)$ – символ бесконечно малой величины более высокого порядка, чем величина η (при $\eta \to 0$);
$\overline{n, m} \equiv n, n+1, \ldots, m$ – последовательность действительных целых чисел;

Во всех других случаях обозначения поясняются в тексте.

СОКРАЩЕНИЯ

АВМ – аналоговая вычислительная машина;
ГВС – гибридная вычислительная система;
ММ – математическая модель;
ОЗТ – обратная задача теплопроводности;
ОЗТО – обратная задача теплообмена;
РО – регуляризирующий оператор;
ТФХ – теплофизические характеристики;
ЭВМ – электронная вычислительная машина;
ЭЦВМ (ЦВМ) – электронно-цифровая вычислительная машина;
ЧЭ – чувствительный элемент.

ГЛАВА 1

ПОСТАНОВКИ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА И ПРОЕКТИРОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Постановки как прямых, так и обратных задач теплообмена предполагают предварительную схематизацию (моделирование) реального теплообменного процесса в виде некоторой математической формы. Остановимся на этом вопросе более подробно.

В общем случае под *моделированием* понимается замещение исследуемого объекта О (оригинала) моделью М с целью исследования свойств О при помощи М. Моделирование является универсальным методом научного познания, в том числе оно играет исключительно важную роль в теплофизике и теплотехнике.

В дальнейшем под тепловым моделированием будем понимать составление и обоснование математических моделей (ММ) процессов теплообмена. Эти модели используются в различных теплофизических и теплотехнических исследованиях, в том числе при расчете тепловых режимов, проектировании и отработке теплонагруженных технических объектов.

Математическая тепловая модель может быть выражена различными средствами – от языка функционального анализа и дифференциальных уравнений до вычислительного алгоритма и машинной программы. Каждый из этих этапов по-своему важен и ответственен за конечные результаты моделирования, причем несет в себе ошибки и неточности предшествующего этапа математического описания. Имеет место естественная соподчиненность этих моделей и процессов их разработки. Программирование задачи выполняется после составления вычислительного алгоритма. В свою очередь, алгоритмизация становится возможной после того, как полностью определена постановка задачи в дифференциальной форме. Таким образом, программа может рассматриваться как математическая модель алгоритма, а расчетный алгоритм является моделью системы дифференциальных уравнений.

В качестве исходных тепловых ММ наиболее распространены дифференциальные модели. При этом различают *модели с распределенными параметрами*, основу которых составляют уравнения с частными производными, и *модели с сосредоточенными параметрами*, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тепловые модели бывают стационарными и нестационарными (динамическими), линейными и нелинейными, одномерными и многомерными.

На практике встречается ситуация, когда в распоряжении исследователя имеется достаточно полная и вполне точная тепловая модель

некоторого процесса или технической системы. Однако она бывает сложна и трудоемка в использовании, что вызывает необходимость разработки более простой модели и соответственно более простого расчетного метода. В данных условиях роль оригинала выполняет первая, более точная, модель, а состоятельность простой устанавливается по отношению к более сложной.

В этой связи можно различать экспериментальное (физическое) и чисто математическое тепловое моделирование. В первом случае изучение теплообменных процессов или тепловых режимов объектов осуществляется в результате реальных экспериментальных исследований на макетах, физических моделях, образцах. В то же время ситуация, рассмотренная в предыдущем абзаце, относится к чисто математическому моделированию. Расчет тепловых состояний реальной конструкции также можно интерпретировать как математическое моделирование. Заметим, что математическое моделирование обычно входит как составная часть в более широкий класс исследований — экспериментальное моделирование.

В общем случае разработку ММ некоторого теплообменного процесса можно разделить на два этапа, которые называются структурной и параметрической идентификацией.

Структурная идентификация заключается в определении общей структуры математического описания процесса в виде тех или иных уравнений. *Параметрическая идентификация* предполагает наделение выбранной модели необходимой количественной информацией — определение неизвестных характеристик модели.

И тот и другой процессы идентификации связаны с приведением в соответствие модели явления с самим физическим явлением.

1.2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

1.2.1. ДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ

При формулировке общих постановок и выделении основных классов обратных задач предполагаются известными постановки прямых задач, т.е. классических задач теории теплообмена [45, 58, 77, 107]. Каждая прямая задача в рамках принятой математической модели может быть сопоставлена с некоторым множеством обратных задач.

Ниже все постановки задач о теплообмене между твердым телом или некоторой системой и окружающей средой рассматриваются с точки зрения соотношений причина — следствие. При этом к *причинным характеристикам* теплообменного процесса в теле (системе тел) в соответствии с принятой моделью отнесем граничные условия и их параметры, начальные условия, теплофизические свойства, внутренние источники теплоты и проводимости, а также геометрические характеристики тела или системы. Тогда *следствием* будет то или иное тепловое состояние, определяемое температурным полем исследуемого объекта.

Установление причинно-следственных связей составляет цель *прямых задач теплообмена*. Наоборот, если по определенной информации о температурном поле требуется восстановить причинные характеристики, то имеем ту или иную постановку *обратной задачи теплообмена*.

Постановки обратных задач, в отличие от прямых, нельзя воспроизвести в реальном эксперименте, т.е. нарушить причинно-следственную связь не математическим, а физическим путем. И в этом смысле они не соответствуют физически реализуемым событиям. Например, нельзя обратить ход теплообменного процесса и тем более изменить течение времени. Таким образом, можно условно говорить о физической некорректности постановки обратной задачи. Естественно, что при математической формализации она проявляется уже как математическая некорректность (чаще всего неустойчивость решения), и обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач в теории теплообмена.

Нарушение причинно-следственной связи, имеющее место в исходной постановке обратной задачи, предопределяет серьезные трудности их решения. В первую очередь, это трудности разработки методов и алгоритмов, дающих достоверные результаты. Тем не менее, как будет показано в дальнейшем, указанные трудности вполне преодолимы.

Исходя из общего назначения все обратные задачи, вне зависимости от рассматриваемого физического процесса или технической системы, можно разделить на три класса [64] :

обратные задачи, возникающие при диагностике и идентификации физических процессов;

обратные задачи, возникающие при проектировании технических объектов;

обратные задачи, возникающие при управлении процессами и объектами.

Обратные задачи первого класса обычно связаны с экспериментальными исследованиями, когда требуется по некоторым измеренным "выходным" следственным характеристикам восстановить входные причинные. Эти задачи первичны как по отношению к прямым задачам, так и по отношению к другим классам обратных задач, поскольку они связаны с построением математических моделей и наделением их количественной информацией.

Обратные задачи типа проектирования заключаются в определении проектных характеристик (синтезе) технического объекта по заданным показателям качества при соответствующих ограничениях. При этом искомые характеристики являются причинными по отношению к этим показателям и ограничениям.

В случае управления системами роль причинных характеристик выполняют управляющие воздействия, вследствие изменения которых реализуется тот или иной эффект управления, выражающийся через состояние системы — следствие.

Нужно отметить, что между задачами типа диагностики и идентифи-

кации и задачами типа проектирования и управления существует принципиальное различие. Для задач проектирования и управления расширение класса допустимых решений обычно упрощает ситуацию, так как требуется найти любое технически реализуемое решение, обеспечивающее экстремум критерия качества с заданной точностью. В то же время для задач идентификации и диагностики, чем шире класс возможных решений, тем хуже, в частности, больше могут быть погрешности определяемых причинных характеристик, что требует обязательного использования регулярных методов решения этих задач.

Следует отметить, что теория и методология решения обратных задач, возникающих при диагностике и идентификации физических процессов, развита существенно слабее, нежели для других двух классов задач. Поэтому цель настоящей книги — отчасти восполнить этот пробел применительно к обратным задачам теплообмена.

Рассмотрим виды обратных задач в рамках каждого из указанных классов. Соответственно трем основным формам теплообмена введем три группы обратных задач: обратные задачи теплопроводности, обратные задачи конвективного теплообмена и обратные задачи радиационного теплообмена. Если рассматривается комбинированный (сложный) теплообмен, то появляются и соответствующие постановки обратных задач.

Далее по признаку искомой причинной характеристики можно подразделить обратные задачи каждой из групп на те или иные виды. Чаще всего математические модели процессов теплообмена основываются на уравнениях с частными производными. Для этих моделей в общем случае вводятся четыре вида обратных задач – граничные, коэффициентные, ретроспективные и геометрические. *Граничные* задачи заключаются в нахождении функций и параметров, входящих в граничные условия; *коэффициентные* – функций и параметров, входящих в коэффициенты уравнений; *ретроспективные*, т.е. обращенные назад по времени — в нахождении начальных условий; *геометрические* — в реконструировании геометрических характеристик области или каких-либо характерных точек, линий, поверхностей внутри ее (например, в определении координат границы фазового перехода или линии контакта сред с различными физическими свойствами).

Остановимся теперь на более конкретной формулировке задач каждой группы и вида.

1.2.2. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОЗТ)

Задачи данного вида являются наиболее изученными и распространенными на практике.

Рассмотрим в качестве примера одномерную задачу теплопроводности в двухслойной пластине (рис. 1.1), полагая, что материалы слоев имеют разные теплофизические характеристики, и в одном из них происходит фазовый переход, например, плавление материала. Границы слоев

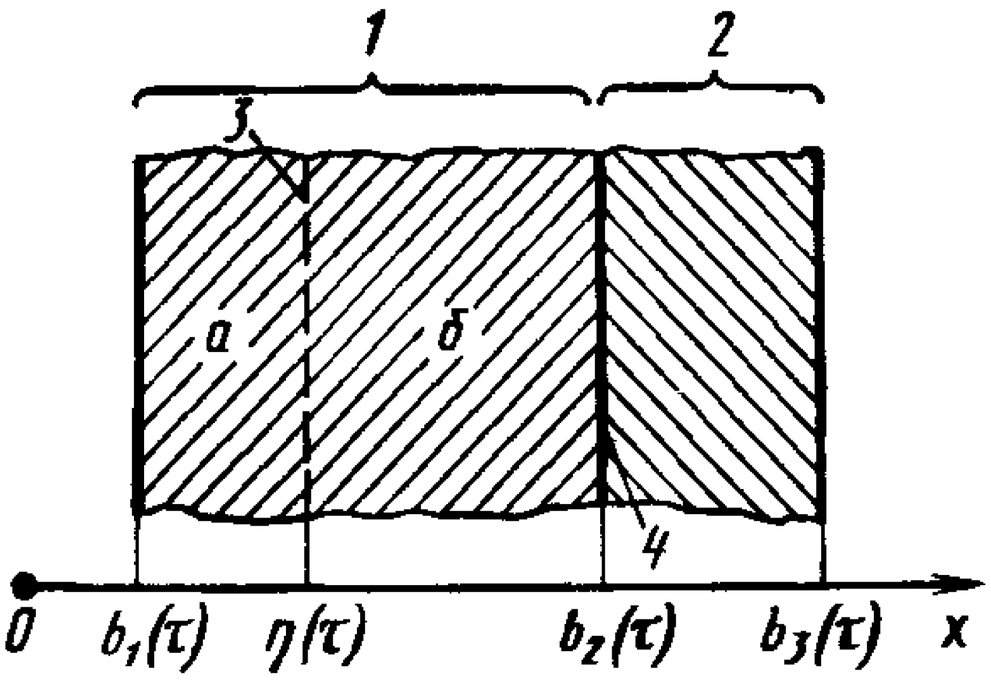


Рис. 1.1. Двухслойная пластина с фазовым переходом:
1, 2 – первый и второй слои; 3 – граница фазового перехода; 4 – линия контакта слоев; *а, б* – два фазовых состояния материала первого слоя

$b_1(\tau)$, $b_2(\tau)$, $b_3(\tau)$ могут перемещаться с течением времени вследствие каких-либо физических процессов (уноса массы, температурного расширения или термической усадки материалов, механических деформаций). Подвижным является также и внутренний фронт фазового превращения $\eta(\tau)$.

Будем считать, что температурное поле $T(x, \tau)$ в пластине на временном интервале $\tau \in (0, \tau_m]$ описывается системой уравнений обобщенной теплопроводности

$$C_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x}\right) + K_j \frac{\partial T_j}{\partial x} + S_j, \quad j = 1, 2, 3 \qquad (1.1)$$

соответственно в областях $b_1(\tau) < x < \eta(\tau)$, $\eta(\tau) < x < b_2(\tau)$, $b_2(\tau) < x < b_3(\tau)$. При этом условиями сопряжения на линиях $\eta(\tau)$ и $b_2(\tau)$ являются

$$T_1(\eta(\tau) - 0, \tau) = T_2(\eta(\tau) + 0, \tau);$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\Big|_{x=\eta(\tau)-0} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=\eta(\tau)+0} = r \frac{\partial \eta}{\partial \tau};$$

$$T_2(b_2(\tau) - 0, \tau) = T_3(b_2(\tau) + 0, \tau) - R\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=b_2(\tau)-0};$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\Big|_{x=b_2(\tau)-0} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}\Big|_{x=b_2(\tau)+0}.$$

Присовокупим к системе (1.1) также начальные распределения температур

$$T_j(x, 0) = \xi_j(x), \quad j = 1, 2, 3$$

соответственно при $b_1(0) \leqslant x \leqslant \eta(0)$, $\eta(0) \leqslant x \leqslant b_2(0)$, $b_2(0) \leqslant x \leqslant b_3(0)$ и условия на границах пластины. В качестве граничных условий могут рассматриваться температуры

$$T_j(b_j(\tau), \tau) = t_j(\tau), \quad j = 1, 3;$$

тепловые потоки

$$-\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x}\Big|_{x=b_j(\tau)} = q_j(\tau), \quad j = 1, 3;$$

ньютоновские условия конвективного теплообмена

$$-\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x}\Big|_{x=b_j(\tau)} = \alpha_j[T_j(b_j(\tau), \tau) - T_j^*(\tau)], \quad j = 1, 3$$

и условия, учитывающие теплообмен тела с окружающей средой путем конвекции и излучения, а также источник (сток) теплоты на поверхности, обусловленный другими процессами (плавлением, сублимацией, рекомбинацией атомов и т.д.),

$$-\lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x}\Big|_{x=b_j(\tau)} = \alpha_j[T_j(b_j(\tau), \tau) - T_j^*(\tau)] + A_j q_{rj} -$$

$$- \epsilon_j \sigma T_j^4(b_j(\tau), \tau) + g_j, \quad j = 1, 3,$$

где q_r — падающий поток излучения; σ — постоянная Стефана—Больцмана. Возможны также различные сочетания перечисленных граничных условий на линиях $b_1(\tau)$ и $b_3(\tau)$.

Коэффициенты C_j, λ_j, K_j и источник S_j в общем случае могут быть функциями координаты x времени τ и температуры T_j или любой комбинацией этих переменных; в простейшем случае они являются константами. Величины r, R, α_j, A_j, ϵ_j, g_j могут рассматриваться функциями времени и соответствующей температуры.

В данной задаче причинными характеристиками будут объемные теплоемкости C_j, коэффициенты теплопроводности λ_j, конвективные коэффициенты K_j, источники S_j, законы движения границ b_1, b_2, b_3 и фронта фазового перехода η, объемная теплота фазового превращения r, контактное тепловое сопротивление R, граничные температуры t_j, тепловые потоки q_j, температуры окружающих сред T_j^*, коэффициенты поглощения A_j, степени черноты ϵ_j и поверхностные источники тепла g_j. Обратная задача (того или иного вида) заключается в определении тех или иных величин из приведенной совокупности причинных характеристик. При этом должны быть заданы некоторые дополнительные условия. В большинстве случаев ими являются температурные измерения $T(d_i, \tau) = f_i(\tau)$, $i = \overline{1, N}$ в N неподвижных или перемещающихся точках d_i тела, реже рассматриваются пространственно непрерывные измерения температур.

В соответствии с введенными выше причинными характеристиками теплообменного процесса можно выделить следующие виды обратных задач:

1) *ретроспективную задачу теплопроводности* или задачу с обратным временем — нахождение распределений температуры в предыдущие моменты времени (установление предыстории данного теплового состояния);

2) *граничную* ОЗТ — восстановление тепловых условий на границе

тела. К этому виду отнесем также задачу, связанную с продолжением решения уравнения теплопроводности от некоторои границы $x = \mathrm{M}(\tau)$, где одновременно заданы температура $T(\mathrm{M}(\tau), \tau)$ и плотность теплового потока $q(\mathrm{M}(\tau), \tau)$;

3) *коэффициентную* ОЗТ – определение коэффициентов уравнения переноса теплоты (задача идентификации оператора теплопроводности).

Наконец, можно ввести еще один вид обратной задачи – *геометрическую* ОЗТ, состоящую в нахождении некоторых геометрических характеристик нагреваемого тела, например, в реконструировании закона движения теплообменной границы тела по результатам измерений температуры внутри тела.

Сделаем некоторые замечания, связанные с постановкой обратных задач теплопроводности.

1. Определение функций и параметров, входящих в граничное условие (коэффициента теплообмена α в граничном условии III рода, контактного сопротивления R в граничных условиях IV рода, интегральных коэффициентов поглощения и излучения A, ϵ) обычно можно свести к граничной ОЗТ. Например, коэффициент $\alpha(\tau)$ рассчитывается по плотности конвективного теплового потока $q_k(\tau)$, температуре поверхности тела $T_W(\tau)$ и характерной температуре газа (жидкости), обтекающего тело $T^*(\tau)$:

$$\alpha(\tau) = \frac{q_k(\tau)}{T^*(\tau) - T_W(\tau)}.$$

Величина $q_k(\tau)$ находится из уравнения теплового баланса на поверхности тела по известной плотности кондуктивного теплового потока. В предположении, что тепловое излучение газа, а также унос массы и вдув в пограничный слой отсутствуют, имеем

$$q_k(\tau) = q(\tau) + \epsilon\sigma T_W^4(\tau).$$

В такой постановке дополнительно должны быть заданы функция $T^*(\tau)$ и коэффициент ϵ. Функции $q(\tau)$ и $T_W(\tau)$ вычисляются из решения граничной ОЗТ.

2. Задача определения некоторой причинной характеристики может быть переопределена, т.е. задано не одно, а несколько дополнительных условий.

3. Возможны *комбинированные* постановки ОЗТ, когда совместно ищутся причинные характеристики разных типов. Например, одновременно могут оцениваться условия и температурное поле в прошедшие моменты времени в задаче без начальных условий – комбинация граничной и ретроспективной ОЗТ. Могут быть вполне естественные комбинации граничной и коэффициентной задач, а также граничной и геометрической ОЗТ.

В общем случае обратные задачи теплопроводности в зависимости от используемой модели процесса и вида области изменения независимых переменных делятся на одномерные и многомерные, линейные и нелинейные, с фиксированными и подвижными границами, односвязные и многосвязные.

1.2.3. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Эти задачи пока находятся на стадии постановок и общеметодологических исследований. Поэтому на их математической формулировке останавливаться не будем, но отметим, что этот вид обратных задач должен получить важные практические приложения. Так, могут быть интересными для практики задачи по восстановлению распределения температуры поперек пограничного слоя, оцениванию вязкости и теплопроводности, определению коэффициентов каталитической активности твердой стенки, обтекаемой неравновесным потоком диссоциированного газа.

1.2.4. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА (ОЗРТО)

Подобные задачи возникают, в частности, при определении требуемого закона распределения интенсивностей излучения инфракрасных источников тепла при моделировании с их помощью заданных тепловых потоков на нагреваемом объекте. Рассматривается система дискретно излучающих модулей (рис. 1.2), которая разбивается на m групп с одинаковой интенсивностью излучателей модулей, входящих в каждую из них. Число модулей в такой группе равно n. Полагая, что число выделенных элементов поверхности d_i испытываемого объекта равно n и, пользуясь зональным методом, составляются уравнения теплового баланса, характеризующие равенство тепловых потоков, воспринимаемых каждым элементом в условиях облученности его в этой нагревательной системе и заданных тепловых потоков q_i. Для тел выпуклой формы эти уравнения имеют вид

$$\pi \sum_{j=1}^{m} J_j \sum_{k=1}^{n} \varphi_{di-jk} A_{i-j} = q_j, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

где φ_{di-jk} — локальный угловой коэффициент i-го тепловоспринимающего элемента и k-го модуля из j-й группы; A_{i-j} — поглощательная способность i-го элемента по отношению к излучению j-й группы.

Требуется найти интенсивности излучения модулей J_j, т.е. причинные характеристики, следствием которых являются тепловые потоки на объекте. Таким образом, данная ОЗРТО в исходной постановке является дискретной и сводится к решению алгебраической системы (1.2).

Второй пример ОЗРТО рассмотрим применительно к математической модели, заданной в *непрерывном* виде с помощью интегрального

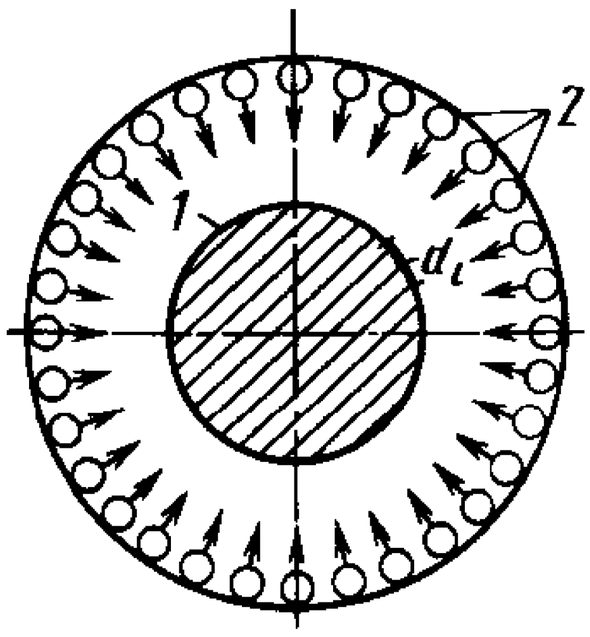


Рис. 1.2. Инфракрасный имитатор:
1 – испытываемый объект; 2 – излучатели

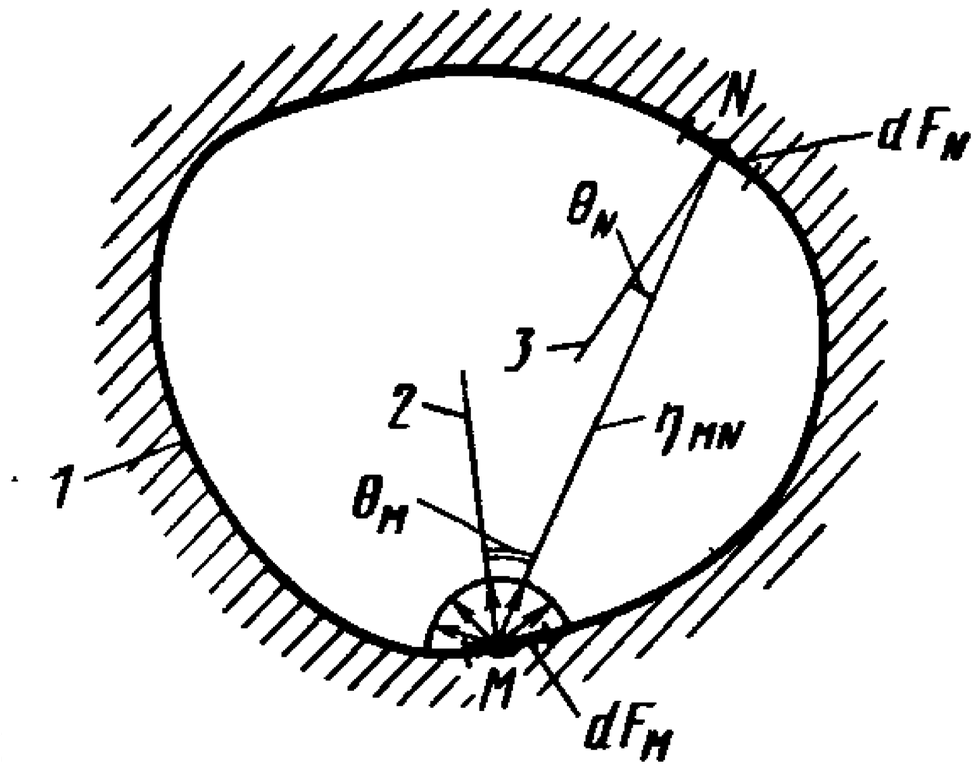


Рис. 1.3. Замкнутая система тел:
1 – диффузно излучающая поверхность F; 2, 3 – нормали к поверхностям в точках M и N соответственно

оператора*. Пусть имеется некоторая произвольная замкнутая система серых диффузно излучающих тел, разделенных прозрачной средой (рис. 1.3). Одна из постановок обратной задачи в этом случае заключается в отыскании температурного распределения на поверхностях тел $T(\mathrm{M})$ по известному полю полусферической плотности падающего излучения $E_{\text{п}}(\mathrm{M})$ на них. На основании закона сохранения энергии эта задача в стационарном случае сводится к решению интегрального уравнения первого рода

$$\int_F E_{\text{эф}}(N)\,\frac{\cos\theta_{\mathrm{M}}\,\cos\theta_N}{\pi r^2_{\mathrm{M}N}}\,dF_N = E_{\text{п}}(\mathrm{M})$$

относительно полусферической плотности эффективного излучения $E_{\text{эф}}$ с последующим расчетом поля температуры $T(M)$ по формуле

$$T(\mathrm{M}) = \left\{\frac{1}{\epsilon\sigma}\,[E_{\text{эф}} - (1-A)\,E_{\text{п}}]\right\}^{1/4}.$$

Здесь под падающим излучением $E_{\text{п}}$ понимается сумма поглощенного и отраженного поверхностью излучений. Эффективное излучение, исходящее с поверхности серого тела, представляет собой сумму собственного и отраженного излучений.

Задачи подобного типа возникают при определении режимов работы радиационных нагревательных устройств в экспериментальных стендах и различных технологических процессах.

Сформулированные обратные задачи радиационного теплообмена это стационарные и линейные задачи, в которых лучеобменивающиеся тела считаются непрозрачными. Могут быть интересные для практики постановки ОЗРТО, учитывающие частичную прозрачность тел, например,

---

*Белоногов Е.К., Зацепин А.Ю. Интегральные уравнения обратных задач радиационного теплообмена // ИФЖ. 1985. Т.49. №6. С.916–920.

восстановление температурного распределения в частично прозрачном слое из решения нелинейной обратной задачи для уравнения переноса излучения, когда в качестве входных данных задаются результаты измерения интенсивности монохроматического излучения от этого слоя по длинам волн и направлениям*.

1.2.5. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОМБИНИРОВАННОГО ТЕПЛООБМЕНА

Это наиболее общая и многообразная группа ОЗТО, к решению которых в последнее время все чаще приходится прибегать в различных технических приложениях. Однако в силу ряда специфических трудностей методология решения этих задач развита еще слабо. Рассмотрим три типичных обратных задачи комбинированного теплообмена.

В первом случае сложный теплообмен рассматривается в некоторой системе тел (рис. 1.4). Тела системы обмениваются тепловой энергией с окружающей средой и между собой. В данном случае основное уравнение теплообмена получается из рассмотрения теплового баланса в предположении, что техническая система может быть расчленена на конечное число L изотермических элементов

$$C_l \frac{dT_l}{d\tau} = \sum_{j=1}^{L+r} \lambda_{lj}(T_j - T_l) + \sum_{j=1}^{L+s} K_{lj}\sigma(T_j^4 - T_l^4)F_l + Q_{sl} + Q_l,$$

$$l = \overline{1, L}; \quad s \geqslant 0; \quad r \geqslant 0, \tag{1.3}$$

где C_l – теплоемкость l-го элемента; λ_{lj} – коэффициенты теплообмена (тепловые проводимости) между элементами с номерами l и j; K_{lj} – угловые коэффициенты; σ – постоянная Стефана–Больцмана; Q_{sl} – количество теплоты, подводимое к элементу l из окружающего пространства; Q_l – количество теплоты, выделяющееся в l-м элементе; r и s – число элементов, взаимодействующих с окружающей средой путем конвекции и излучения соответственно; F_l – площадь поверхности элемента.

Коэффициенты λ_{lj} рассчитываются по различным соотношениям в зависимости от того, какой вид теплопередачи между элементами l и j имеет место: теплопроводность, конвекция или теплопроводность + + конвекция.

Теплообменный процесс, описываемый уравнением (1.3), определяется параметрами граничных условий и уравнений теплового баланса, связями кондуктивного, конвективного и радиационного типов, эффективными теплофизическими характеристиками и источниками теплоты;

---

*Viskanta R., Hommert P.J. and Grominger G.L. Spectral Remote Sensing of Temperature Distribution in Semilransparent Solids Heated by an External Radiation Source. – Applied Optics, 1975, vol.14, N2, p.428–437.

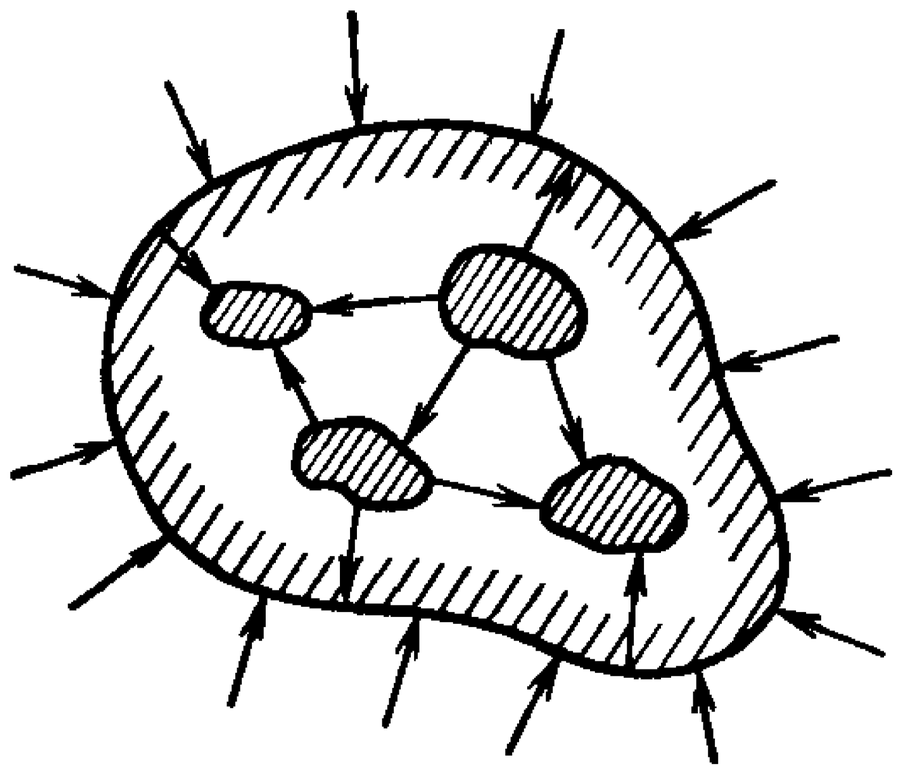


Рис. 1.4. Система тел (стрелками условно показаны тепловые потоки)

геометрией и взаимным расположением тел, а также начальным тепловым состоянием системы.

Если по указанным причинным характеристикам требуется рассчитать текущие тепловые состояния (температурный режим) системы, то такой расчет составляет предмет *прямой задачи теплообмена системы.*

В том же случае, когда отдельные причинные характеристики неизвестны и требуется определить их по известной информации о тепловых состояниях системы (фактических – при моделировании и допустимых – при проектировании), то решаются *обратные задачи теплообмена.* К модели (1.3) часто прибегают для описания и оптимизации процессов переноса тепла в различных технических системах (электротехнических и радиоэлектронных устройствах, отсеках летательных аппаратов, различных теплообменниках, металлургических печах и т.д.). Поэтому обратные задачи для уравнений (1.3) получили название *обратных задач* теплообмена в *технических системах* [6]. Заметим, что одновременное определение всех параметров C_l, λ_{lj}, K_{lj}, Q_{sl}, Q_l возможно лишь с точностью до постоянного множителя.

При проведении тепловых испытаний часто оказывается необходимым знать более подробное температурное поле в отдельных элементах технической системы, чем то, которое может быть получено с помощью составной модели (1.3). Применяя метод членения составной модели на простые, можно перейти к постановкам локальных обратных задач теплообмена – обычно к ОЗТ.

Другая обратная задача комбинированного теплообмена, представляющая большой практический интерес, связана с определением *теплофизических характеристик частично прозрачных рассеивающих материалов.* Она формулируется как задача определения коэффициентов $C(T)$ и $\lambda(T)$ уравнения теплопроводности вида

$$C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) - \operatorname{div} \mathbf{q}_r \qquad (1.4)$$

Вектор потока энергии излучения $\mathbf{q}_r$ в некоторой точке тела P рассчитывается по спектральной интенсивности излучения I_ν, характеризующегося частотой ν:

$$\mathbf{q}_r = \int_0^\infty d\nu \int_{\mathbf{l}} I_\nu d\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ – единичный вектор направления распространения излучения в точке P.

Величина I_ν находится из уравнения переноса излучения в поглощающей, излучающей и рассеивающей средах:

$$\mathrm{l}\,\mathrm{grad}\, I_\nu = (K_\nu + \beta_\nu)[-I_\nu(\mathrm{l}, P) + (1 - S_{c\nu})B_\nu(P) +$$

$$+ \frac{S_{C\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\mathrm{l}', P)\,\theta_\nu(\mathrm{l}, \mathrm{l}')\,d\omega], \qquad (1.5)$$

где K_ν, β_ν — коэффициенты поглощения и рассеяния излучения частоты ν; $S_{C\nu} = \frac{\beta_\nu}{K_\nu + \beta_\nu}$ — критерий Шустера; B_ν — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела; θ_ν —индикатриса рассеяния; ω — телесный угол.

Данная задача решается при соответствующих краевых условиях для уравнений (1.4) и (1.5). Дополнительные данные задаются из результатов температурных измерений в исследуемом теле.

Такие *обратные задачи кондуктивно-радиационного теплообмена* возникают при создании и исследовании теплозащитных, теплоизоляционных и оптических материалов [82].

Еще одна актуальная задача связана с разработкой и испытаниями систем пористого охлаждения различных конструкций, когда необходимы сведения о тепловых потоках на поверхностях со вдувом q, коэффициентах теплопроводности λ_s и внутреннего теплообмена α_V пористого тела, коэффициенте теплоотдачи α_0 на входе охладителя в пористый материал. Определение указанных величин по данным нестационарных измерений температур в пористом каркасе сводится к решению *обратной задачи кондуктивно-конвективного теплообмена.* В одномерном случае для плоского слоя пористого материала при подаче газообразного охладителя (рис. 1.5) математическая модель тепломассопереноса имеет вид [8]

$$C_s \frac{\partial T_s}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x}\right) - \frac{\alpha_V}{1 - \Pi}(T_s - T_g), \qquad (1.6)$$

$$x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m];$$

$$(\rho c_p)_g \frac{\partial T_g}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x}\right) - (\rho v c_p)_g \frac{\partial T_g}{\partial x} + \frac{\alpha_V}{\Pi}(T_s - T_g),$$

$$x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \qquad (1.7)$$

$$T_s(x, 0) = \xi_s(x), \quad T_g(x, 0) = \xi_g(x); \qquad (1.8)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T_s(b, \tau)}{\partial x} = \alpha_0[T_s(b, \tau) - T_{g0}]; \qquad (1.9)$$

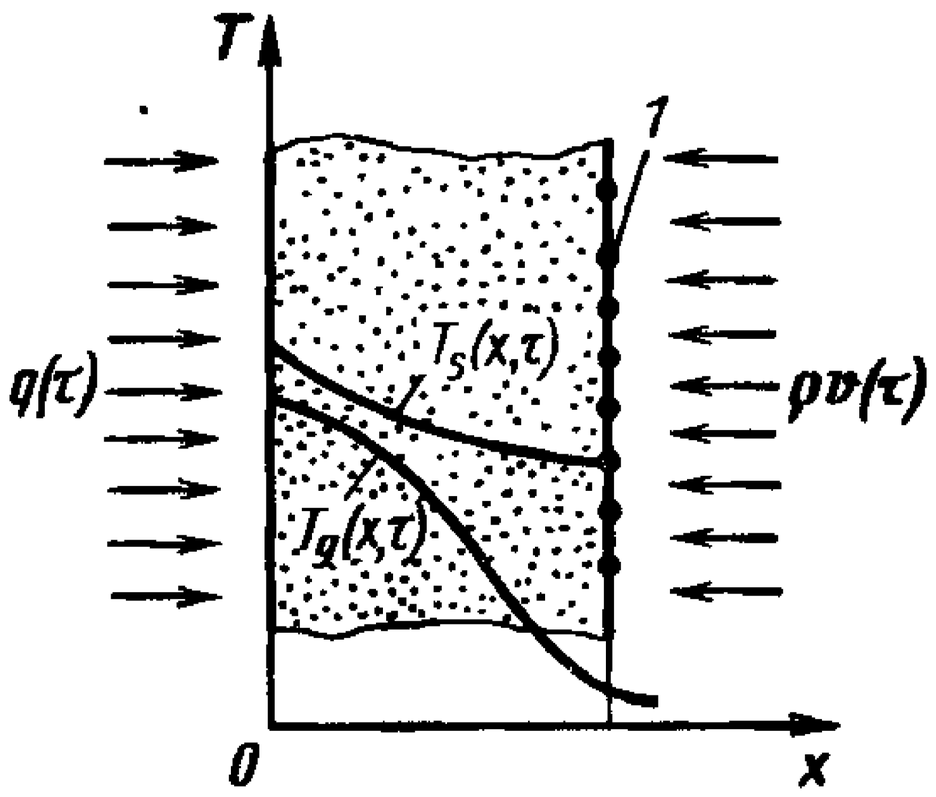


Рис. 1.5. Пористое охлаждение:
1 – температурные датчики

$$(\rho v c_p)_g T_g(b, \tau) = (\rho v c_p)_g T_{g0} +$$

$$+ \alpha_0 [T_s(b, \tau) - T_{g0}]; \qquad (1.10)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T_s(0, \tau)}{\partial x} = q(\tau); \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 T_g(b, \tau)}{\partial x^2} = 0; \qquad (1.12)$$

$$-\frac{dP_g}{dx} = \alpha(\mu v)_g + \beta(\rho v)_g^2; \qquad (1.13)$$

$$\rho_g = \frac{P_g M_g}{8314 T_g}, \qquad (1.14)$$

где индексы s и g относятся к твердой и газовой фазам соответственно; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; ρ – плотность; v – скорость; П –пористость тела; p – давление; μ –вязкость; М – молярная масса: α, β – гидравлические коэффициенты; T_{g0} – начальная температура продуваемого газа.

Она включает в себя уравнения энергии (1.6) и (1.7) для твердой и газообразной фаз с соответствующими начальными и граничными условиями (1.8) – (1.12), модифицированный закон Дарси (1.13) и уравнение состояния газа (1.14). Условие (1.12) – это один из вариантов естественного граничного условия, которое, обеспечивая единственность решения прямой задачи, дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами, соответствующими действительным граничным условиям первого или второго рода.

К числу искомых причинных характеристик относятся величины g, λ_s, α_V, α_0. Данные измерений задаются условиями $T_s(d_i, \tau) = f_i(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_m]$, $i = \overline{1, N}$, $N \geqslant 1$, $0 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_N \leqslant b$.

Перечисленные здесь обратные задачи дают представление о широте областей практического использования соответствующих методов.

1.3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И РОЛЬ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В ТЕПЛОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Необходимость постановки и решения ОЗТО появляется в различных теплофизических исследованиях, при создании и эксплуатации теплонагруженных технических объектов, а также при оптимизации тепловых режимов технологических процессов, связанных с нагревом или охлаждением материалов. Ниже мы остановимся на ряде возможных приложений методов обратных задач, перечень которых можно было бы продолжить дальше.

Нестационарная теплометрия и управление тепловыми нагрузками. В процессе тепловых испытаний различных технических систем, при исследовании процессов теплообмена на различных экспериментальных стендах, при тепловом зондировании горячих газовых струй и в ряде других случаев возникает задача определения температур, плотностей тепловых потоков и коэффициентов теплоотдачи на поверхности исследуемых тел (различных элементов конструкции, теплозащитных и теплоизоляционных покрытий, образцов, датчиков тепловых потоков и т.д.). Поскольку интенсивность передачи теплоты к телу обычно меняется с течением времени вследствие изменения режимов нагрева (охлаждения), нестационарности параметров экспериментальных установок и т.д., то особенно важно уметь определять нестационарные тепловые нагрузки.

Непосредственно измерить изменяющиеся во времени плотности тепловых потоков и коэффициентов теплоотдачи, как правило, не представляется возможным. Довольно часто оказывается недоступной для прямых измерений и температура поверхности исследуемых объектов. В то же время имеется возможность замеров температуры в отдельных точках внутри тела или на части его поверхности. Таким образом, появляется необходимость решать граничные ОЗТ – расчетным путем определять тепловые граничные условия по данным температурных измерений в теле.

Подобные теплометрические задачи распространены при моделировании тепловых режимов на газодинамических стендах, в тепловакуумных камерах, при исследовании теплообмена в трубопроводах и газоводах, при испытании различных двигательных установок, в ходе летного моделирования, натурных испытаний технических объектов, в различных технологических процессах, связанных с нагревом и охлаждением изделий и т.д.

Методы теплометрии, основанные на решении граничных ОЗТ, позволяют производить практически безынерционную тепловую диагностику как медленно развивающихся во времени, так и быстротекущих процессов теплообмена. Проведенные исследования показали, что при этом можно обеспечить точность восстановления плотностей тепловых потоков и коэффициентов теплоотдачи, соизмеримую с точностью температурных измерений в твердом теле [65] .

Основные принципы одномерной теплометрии. Наиболее распрост-

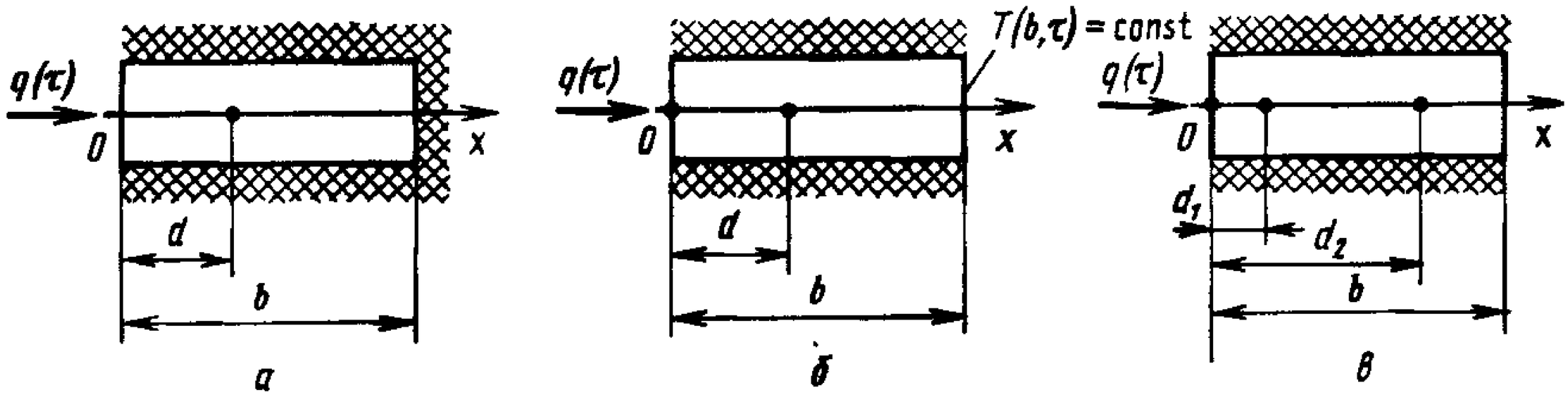


Рис. 1.6. Схемы одномерных датчиков тепловых потоков (штриховкой условно отмечены теплоизолированные границы)

раженными являются датчики тепловых потоков с "одномерными" чувствительными элементами (ЧЭ), выполненными из материалов с хорошо известными ТФХ. Датчики конструируются таким образом, чтобы температурное поле в ЧЭ можно было бы с приемлемой точностью отождествить с одномерным температурным полем в плоскопараллельной неограниченной пластине. В частности, ЧЭ выполняется в виде сплошного цилиндра достаточно малого диаметра с теплоизолированной боковой поверхностью (рис. 1.6). На один из его торцов действует измеряемый тепловой поток с плотностью $q(\tau)$, в то время как на другом обеспечиваются условия теплоизолированности (рис. 1.6, *а*) или постоянства температуры (рис. 1.6, *б*). Последнее условие реализуется за счет интенсивного теплосъема, например путем омывания поверхности охлаждающей жидкостью с достаточно большим расходом. Тогда с точки зрения единственности решения обратной задачи по определению величины $q(\tau)$ нужно осуществить термометрирование в некоторой точке ЧЭ с координатой $d(0 \leqslant d \leqslant b$ для теплоизолированного торца, $0 \leqslant d < b$ для термостатированного торца). Если трудно обеспечить или проконтролировать указанные граничные условия при $x = b$, нужно выполнить измерение температур как минимум в двух точках d_1 и d_2, $0 \leqslant d_1 \leqslant b$, $0 \leqslant d_2 \leqslant b$, $d_1 \neq d_2$ (рис. 1.6, *в*). В этом случае из решения ОЗТ можно найти плотности тепловых потоков как на границе $x = 0$, так и на границе $x = b$.

Метод сравнительных испытаний. Обратные задачи теплопроводности позволяют построить методики расчетно-экспериментального определения функций и параметров, входящих в уравнения теплового баланса на поверхности тела. Эти методики основываются на проведении сравнительных испытаний. Поясним данный подход на следующем примере. Пусть требуется найти локальный коэффициент конвективного теплообмена на поверхности твердого тела как функцию времени $\alpha(\tau)$ и интегральный коэффициент излучения этой поверхности в зависимости от ее температуры $\epsilon(T_w)$ при известной температуре окружающей среды $T^*(\tau)$. Для решения этой задачи воспользуемся двумя вмонтированными в тело чувствительными элементами 1 и 2 (рис. 1.7), изготовленными из материалов с различными теплофизическими характеристиками. На теплообменных торцах этих элементов нанесено исследуемое покрытие,

боковые поверхности ЧЭ теплоизолированы. Полагая, что выполняются условия

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_2(\tau) = \alpha(\tau); \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$\epsilon_1(\tau) = \epsilon_2(\tau) = \epsilon(\tau); \quad \tau \in [0, \tau_m],$$

запишем уравнения теплового баланса на поверхности элементов

$$\begin{aligned} \alpha(T^* - T_{W_1}) &= \epsilon\sigma T_{W_1}^4 + q_1; \\ \alpha(T^* - T_{W_2}) &= \epsilon\sigma T_{W_2}^4 + q_2, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где q – плотность кондуктивного теплового потока, поступающего в ЧЭ.

Эти уравнения выполняются в любой момент времени $\tau \in [0, \tau_m]$. Входящие в них функции $T_{W_1}(\tau)$, $T_{W_2}(\tau)$, $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ находятся из решения ОЗТ для каждого элемента по измеренным температурам в них. Решая далее систему (1.15) в каждый момент времени τ_n на выбранной сетке, получим зависимости $\alpha(\tau)$ и $\epsilon(\tau)$. Путем осреднения для каждого τ_n температур T_{W_1} и T_{W_2} можно перейти от зависимостей $\alpha(\tau)$, $\epsilon(\tau)$ к зависимостям $\alpha(\frac{T_W}{T^*})$, $\epsilon(T_W)$.

Таким же образом, добавляя третий ЧЭ, находится вектор-функция $\{\alpha(\tau), \epsilon(\tau), T^*(\tau)\}$, если температура $T^*(\tau)$ неизвестна.

Диагностика пространственно-временных условий теплообмена. Одномерные датчики дают возможность измерить нестационарные плотности тепловых потоков и локальные коэффициенты теплоотдачи. Для определения дискретных полей этих величин необходимо установить требуемое количество датчиков в разных точках пространства, в частности, в разных точках обтекаемой поверхности твердого тела (рис. 1.8). Однако, если перейти к решению двух- и трехмерных ОЗТ, то можно восстанавливать непрерывные пространственно-временные зависимости $q(S, \tau)$, $\alpha(S, \tau)$, характеризующие теплообмен на поверхности тела (здесь S – текущая точка поверхности). При этом измерения температуры обычно выполняются на части теплоизолированной грани-

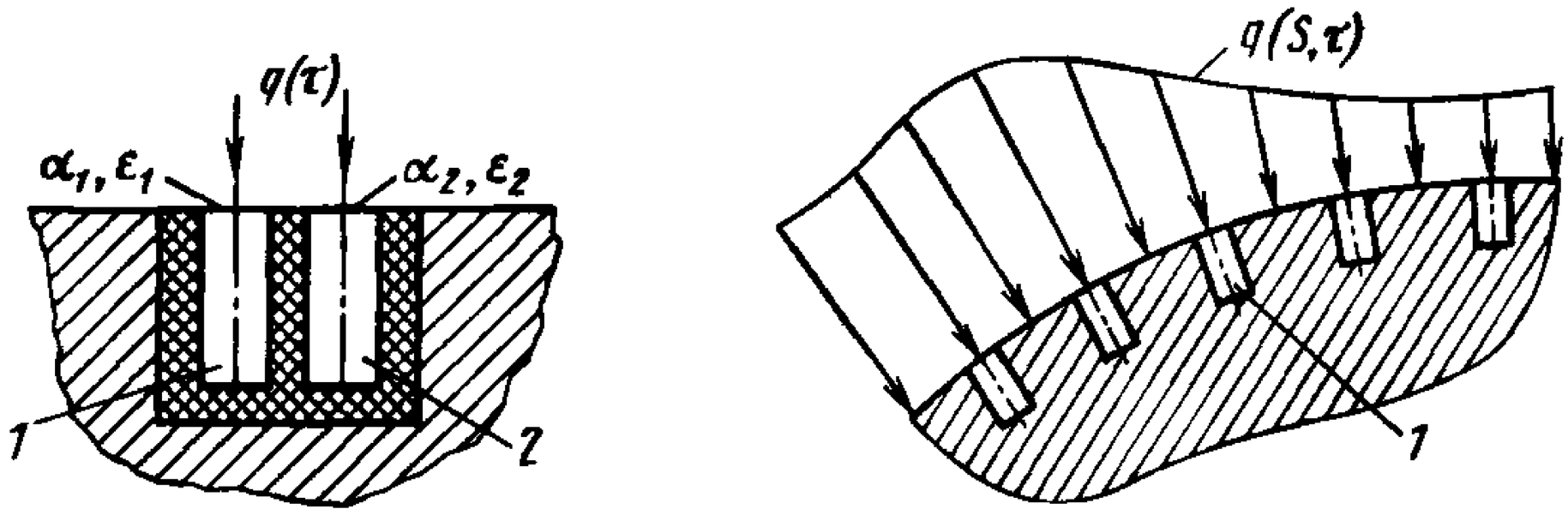


Рис. 1.7. Схема датчика с двумя чувствительными элементами 1 и 2

Рис. 1.8. Дискретные одномерные датчики (1) для восстановления пространственно-временного распределения тепловых потоков

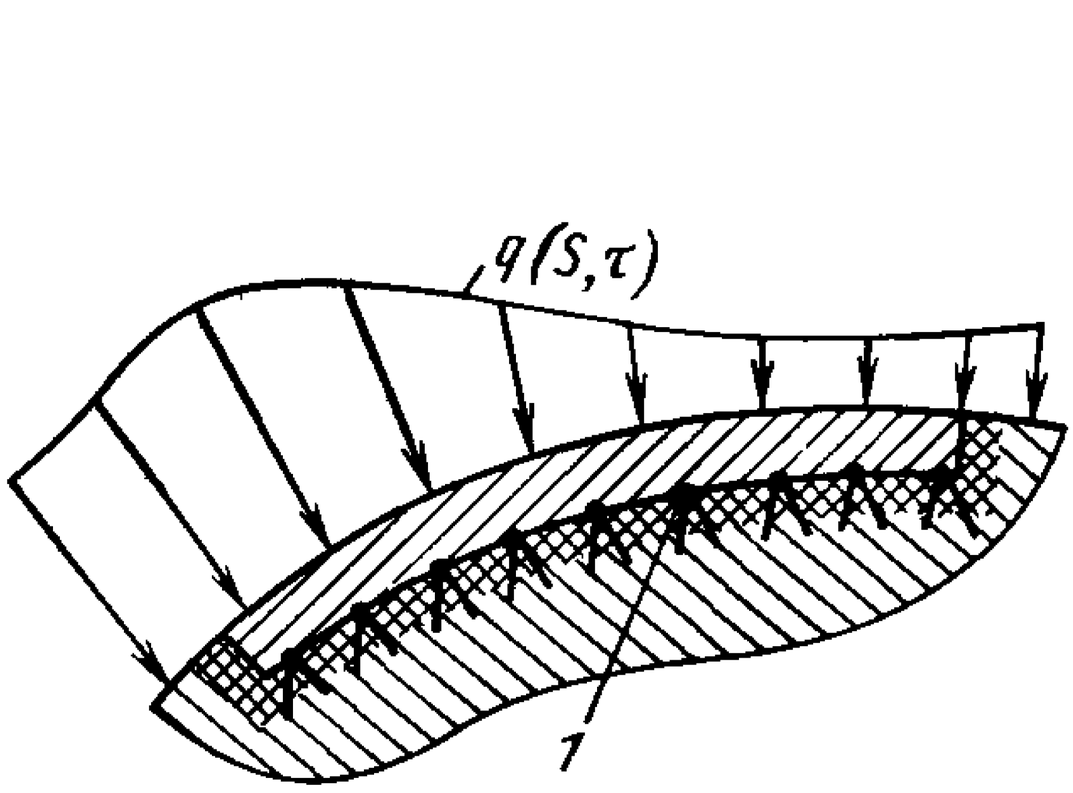


Рис. 1.9. Двумерный датчик тепловых потоков:
1 – термопары

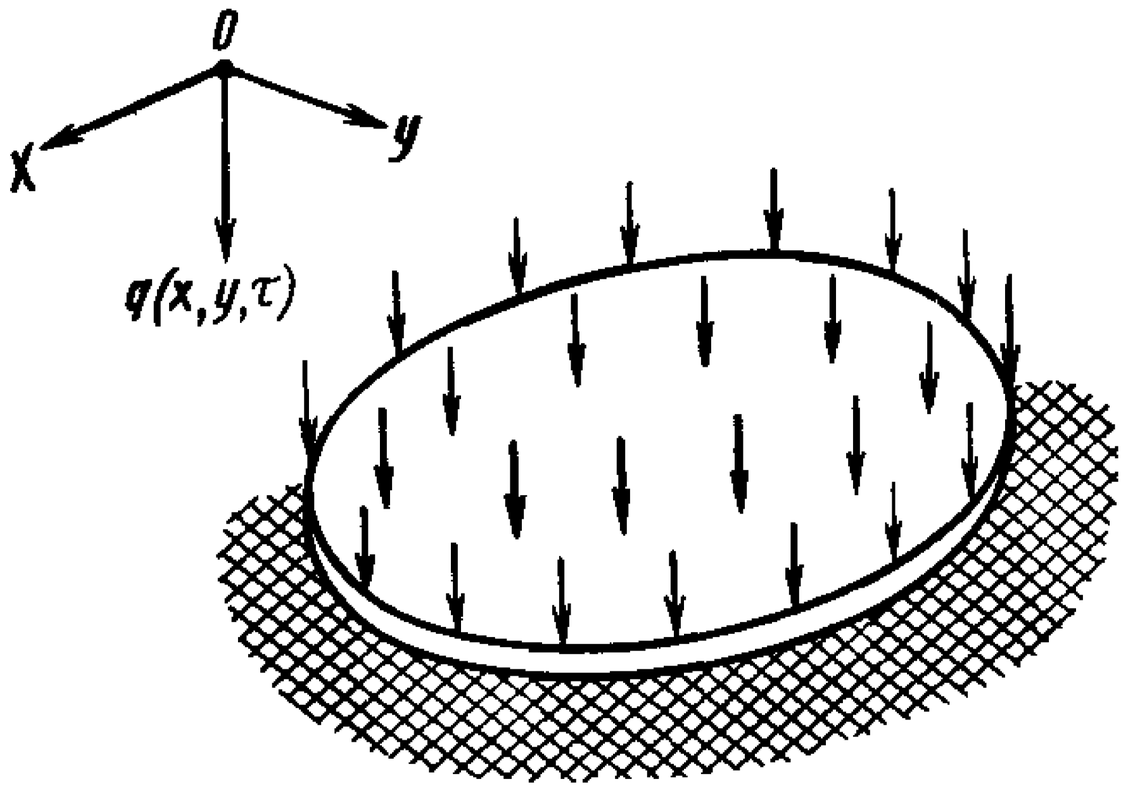


Рис. 1.10. Теплонагруженная тонкая пластина

цы тела (линии для двумерного случая, поверхности — для трехмерного). Датчики с подобными чувствительными элементами могут быть установлены (рис. 1.9) на модели или макете исследуемого объекта, а также на натурном изделии, тепловой режим которого определяется в условиях опытной или штатной эксплуатации. Иногда измерения температуры могут быть выполнены и внутри твердого тела.

Рассмотренная выше методология определения тепловых нагрузок и коэффициентов теплоотдачи базируется на граничных обратных задачах для однородного уравнения теплопроводности. В ряде случаев, в частности, при диагностике теплопередачи к тонкостенным конструкциям, более удобным оказывается другой подход, когда искомая величина тепловой нагрузки определяется как *источник* в уравнении теплопроводности. Пусть на одну из поверхностей изотропной пластины толщиной b действует тепловой поток, имеющий плотность $q(x, y, \tau)$ (рис. 1.10). Полагая для простоты, что противоположная поверхность теплоизолирована, а также, что по толщине пластины градиент температуры практически равен нулю, запишем для этого случая уравнение теплопроводности

$$C\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{q(x, y, \tau)}{b},$$

где $q(x, y, \tau)$ — искомая величина.

По условиям единственности решения этой задачи требуется знать температурное поле пластины $T(x, y, \tau)$, которое может быть измерено с помощью тепловизорной техники.

Большую пользу могут принести ОЗТ в сочетании с другими более традиционными методами (термокрасками, различными способами визуализации течений) для исследования тепловых режимов на поверхности тела сложной геометрической формы. К таким задачам относится изучение теплообмена при наличии отрывных зон, щелевых эффектов, изменении режимов течения в пограничном слое, учете каталитичности поверхности и т.д.

В ходе теплового эксперимента может оказаться необходимым управлять тепловыми нагрузками в соответствии с некоторой временной программой в пределах заданной точности ее воспроизведения. Построение следящей системы регулирования теплонагружения предполагает получение информации от контрольных датчиков нестационарных тепловых потоков. При этом в качестве основного алгоритма обработки этой информации в системе математического обеспечения АСУ может выступать алгоритм решения граничной ОЗТ при условии его работы в реальном масштабе времени. В частности, такое управление требуется для компенсации различных погрешностей (неравномерности поля тепловых потоков от имитаторов Солнца и планет, непараллельности лучей, влияния исследуемого объекта на температурный режим иммитаторов, фоновых источников тепла и т.д.) при проведении тепловакуумных испытаний космических аппаратов Оперативная настройка источников тепла под требуемый режим работы и программное изменение режима в этом случае будут выполняться с помощью ЭВМ по мере обработки первичной информации, поступающей от датчиков тепловых потоков, чувствительные элементы которых снабжены термоприемниками.

Не исключена возможность использования методов ОЗТ для контроля интенсивности теплопередачи и температуры на теплонагруженных участках поверхности космических ЛА в процессе их полета. В этом случае алгоритм решения обратной задачи реализуется в бортовой ЭВМ.

Еще одна важная область практического использования методов граничных ОЗТ – *технологические процессы*, связанные с нагревом и охлаждением обрабатываемых заготовок и деталей, в частности, при закалке изделий и горячей штамповке деталей. Применительно к таким технологическим процессам требуется идентифицировать условия теплообмена на поверхности тела для определения требуемых тепловых режимов обработки.

Исследование пористого охлаждения, прогрева и разрушения материалов. В ходе экспериментальных исследований систем пористого охлаждения требуется определять нестационарные тепловые граничные условия на поверхности пористого тела и идентифицировать тепловой эффект вдува газа в пограничный слой. При этом непосредственное измерение величин, входящих в граничные условия на нагреваемой поверхности, весьма затруднено или вообще невыполнимо, но имеется возможность измерить температуру на противоположной поверхности твердой матрицы. В данном случае приходим к необходимости решения граничной обратной задачи для системы уравнений тепло- и массопереноса (см., например, (1.6) – (1.14)) в пористой структуре при движении через нее газообразного компонента.

Важное практическое значение имеет проблема исследования разрушения и прогрева теплозащитных материалов [3, 76, 79, 110, 113], в том числе изучение снижения конвективного теплового потока при вдуве газообразных продуктов с разрушающейся поверхности. Основ-

ными видами измерений при экспериментальном исследовании теплозащитных материалов являются измерения температур внутри тела (термопарами) и на внешней поверхности (оптическими методами), а также скорости движения фронта разрушения материалов. Обработку и интерпретацию результатов измерений можно проводить с помощью методов, основанных на решении обратных задач теплопроводности.

Восстановление полей температур и тепловых потоков. Задача восстановления (продолжения) поля температур и поля тепловых потоков в твердом теле по результатам внутренних температурных измерений часто сводится к решению ОЗТ.

С этой задачей тесно связано изучение характеристик термопрочности материалов и конструкций, а следовательно, воспроизведение требуемых градиентов температуры на образцах и моделях в условиях испытаний. Оснащение моделей и образцов многочисленными термоприемниками, как правило, невозможно по технологическим, конструктивным и чисто методическим причинам (в силу нарушения целости и прочностных характеристик материала, внесения искажений в температурное поле и поле термонапряжений, трудности обеспечения хороших тепловых контактов термоприемников внутри материала и т.д.). Поэтому исходная информативность таких исследований обычно мала и часто определяется только косвенными температурными измерениями на достаточно большом удалении от внешних нагреваемых поверхностей.

Исследование нестационарного теплообмена. При исследовании различных тепломассообменных процессов в системе твердое тело — газ (жидкость) большое значение имеет проблема нестационарного теплообмена [72, 90, 109]. Во многих практически важных случаях основным способом таких исследований до настоящего времени остается эксперимент. При этом требуется не только правильно поставить и качественно провести экспериментальные исследования, но, что очень важно, найти эффективные способы обработки полученных данных. Как показано во многих работах, методы, основанные на решении обратных задач, представляют эффективное средство получения необходимых результатов в процессе обработки экспериментальной информации.

Идентификация процессов теплообмена в технических устройствах. С помощью обратных задач проводится идентификация и уточнение математических моделей теплообмена в технических системах. Например, если рассматривается некоторый отсек космического аппарата, то его тепловой режим зависит от интегральных коэффициентов поглощения A и излучения ϵ внешней поверхности, коэффициентов теплообмена между выделенными элементами отсека, их объемных теплоемкостей. В процессе теплового моделирования возникает задача определения эффективных (наиболее соответствующих выбранной тепловой модели) значений параметров по данным нестационарных температурных замеров.

Эта задача может решаться с использованием обратной задачи теплообмена в системе N тел, а также с помощью обратных задач теплопроводности при членении составной модели на простые элементы.

Определение теплофизических параметров сред. В последнее время широкое распространение получили методы определения теплофизических свойств материалов, основанные на решении коэффициентных ОЗТ. Это обусловлено рядом преимуществ данного подхода перед традиционными методами измерения ТФХ, особенно в применении к исследованиям свойств для широких интервалов температур, при больших скоростях и градиентах изменения температуры тел и при наличии фазовых превращений в материале.

Например, большое практическое значение имеет задача определения зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, а также температурного поля слитка в процессе охлаждения при закалке стали. Высокие скорости снижения температуры и достаточно широкий диапазон ее изменения часто не позволяют использовать для этой цели обычные методы теплофизических измерений. В то же время коэффициентные обратные задачи оказываются эффективным средством решения данной проблемы.

Другая важная для практики задача – определение теплофизических и кинетических характеристик теплозащитных материалов, разрушающихся при взаимодействии с высокотемпературным потоком газа. Однако теплофизические измерения, базирующиеся на классических подходах, для многих материалов могут быть проведены при температурах, существенно меньших тех, которые реализуются в реальных условиях. Это, в частности, связано с тем, что композиционные материалы содержат компоненты, разлагающиеся при нагреве с выделением газообразных продуктов. Кроме того, исследование ТФХ традиционными методами в специальных печах не соответствует действительным условиям нагрева и разрушения ТЗМ и по ряду других причин (удаление продуктов коксования, масштабные эффекты, временные факторы и темпы нагрева). Исключить указанное несоответствие можно, используя понятие "эффективных теплофизических характеристик" и осуществляя нагрев образцов на специальных стендах, создающих высокоэнтальпийные газовые течения, с последующей обработкой результатов температурных измерений по методам обратных задач теплопроводности. Такие, а также близкие к ним постановки задач рассматривались в [9, 14–17, 35, 48–50, 59, 71, 73, 75, 76, 78, 80, 82, 93, 106, 110].

Найденные таким образом ТФХ соответствуют условиям нагрева, максимально приближенным к натурным, и позволяют более точно рассчитать температурные поля в теплозащитном покрытии и с меньшими запасами (т.е. ближе к оптимальным оценкам) выбирать толщины уносимых слоев в процессе проектирования.

Коэффициентные обратные задачи представляют собой эффективное средство также и для определения теплофизических свойств промерзающих–протаивающих грунтов, что является важным вопросом приме-

нительно к строительству различных инженерных сооружений в районах многолетней мерзлоты.

Исследование контактного теплообмена. Определение контактных сопротивлений, характеризующих теплопередачу между соприкасающимися частями конструкций, а также прогнозирование их изменения с течением времени составляет задачу большой практической важности, в частности, для определения тепловых режимов конструкций, в которых имеется большое число болтовых и заклепочных соединений, разъемов, шарниров и т.д.

В многослойных теплозащитных покрытиях необходимо знать сопротивление клеевых пленок, и эту задачу можно интерпретировать как задачу определения контактных сопротивлений. Метод граничных ОЗТ может быть успешно применен для обработки результатов специально поставленных экспериментов при решении проблемы контактного теплообмена, в том числе в нестационарных условиях.

Оценивание и контроль оптико-радиационных характеристик. При длительных космических полетах важно уметь контролировать и осуществлять прогноз оптических радиационных характеристик внешних поверхностей космических аппаратов, радиаторов систем терморегулирования, панелей солнечных батарей. Изменение этих характеристик происходит в результате сублимации поверхностных слоев материалов и покрытий, а также воздействия космических ионизирующих излучений и метеорного вещества.

При испытаниях в термобарокамерах должен проводиться контроль характеристик отражающих поверхностей нагревателей и криогенных панелей.

Невозможность установки термоприемников на поверхности с искомыми характеристиками приводит к необходимости решения граничных ОЗТ по результатам замеров температуры во внутренних точках тела. Для построения расчетной схемы в этих случаях необходимо задать модель отражения, оценить угловые координаты исследуемого элемента поверхности, проверить нет ли затенения или взаимной облученности.

Определение тепловых нагрузок при трении. Обратные задачи теплопроводности применяются также для определения тепловыделения при трении двух твердых поверхностей.

Такие исследования имеют самостоятельные технические значения и, кроме того, позволяют изучать влияние теплообменных процессов в зоне фрикционного контакта на механизм трения, а также экспериментально находить одну из основных эксплуатационных характеристик подшипников — момент трения, который определяется интенсивностью тепловыделения в контактной области [105].

З а м е ч а н и е. Методы обратных задач теплообмена естественным образом распространяются на ряд других областей научных исследований, где возникает необходимость идентификации процессов, описываемых уравнениями параболического типа. Только для примера укажем здесь задачи определения фильтрационных параметров при исследовании

процессов массопереноса в подземной гидромеханике (нефтегазодинамике, гидротехнике, гидрогеологии, мелиорации)*, задачи определения коэффициентов квазилинейных параболических уравнений, описывающих гидродинамику зеркала жидкости в резервуарах, задачи диагностики плазмы [30]

Оптимизация проектных решений с учетом тепловых ограничений. Важность данного раздела проектирования теплонагруженных конструкций очевидна — именно на этом этапе осуществляется принятие технических решений в рамках выбранной концепции системы обеспечения теплового режима, производится выбор ее проектных параметров, уточняются некоторые характеристики, относящиеся ко всему объекту.

В основе оптимального теплового проектирования лежит математическая тепловая модель (модели) разрабатываемой системы и экстремизируемая целевая функция. Модель связывает искомые проектные (причинные — с точки зрения постановки обратной задачи) характеристики с параметрами, описывающими тепловое состояние объекта (следственные характеристики) и нагружающими воздействиями, например, внешними и внутренними тепловыми потоками. Возможным вариантам проектно—конструкторских решений соответствуют вполне определенные теплообменные и геометрические характеристики технической системы.

Таким образом, если следовать концепции причинных и следственных характеристик, то сама задача оптимального теплового проектирования может рассматриваться как обратная задача теплообмена в экстремальной постановке: по известным условиям, определяющим допустимое тепловое состояние объекта (т.е. заданной области изменения следственной характеристики), найти требуемые причинные характеристики, удовлетворяющие этому состоянию и критерию оптимальности теплового проектирования.

В заключение первой главы заметим, что диагностика и идентификация процессов тепломассообмена могут быть связаны с решением обратных задач различных типов. Однако в дальнейшем при изложении материала основное внимание будет уделено исследованию граничных ОЗТ. Такой выбор не случаен и объясняется следующими причинами.

Во-первых, граничные обратные задачи — это один из наиболее важных и распространенных в тепловом моделировании классов задач. Практически любой тепловой эксперимент, любое испытание сопряжено с необходимостью определения тепловых нагрузок (или определяющих их величин) в характерных точках исследуемых образцов. Во многих

---

*Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Киев: Наукова думка, 1971. 328 с.;

Голубев Г.В., Данилаев П.Г., Тумашев Г.Г. Определение гидропроводности неоднородных нефтяных пластов нелокальными методами. Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1978. 167 с.

случаях единственным средством достижения этой цели является метод граничных ОЗТ.

Другие обратные задачи имеют меньшее распространение, что однако не уменьшает их значимости в целом ряде важных практических приложений. В первую очередь, это относится к коэффициентным обратным задачам, представляющим эффективный метод исследования теплофизических и термокинетических свойств материалов в нестационарных условиях нагрева. Тем не менее, во многих других случаях при исследовании ТФХ конструкционных и теплоизоляционных материалов возможно применение иных методов, основанных на закономерностях стационарных и квазистационарных тепловых процессов.

Во-вторых, граничные ОЗТ с точки зрения получения устойчивых результатов представляют особый методический интерес. Как показывает опыт решения различных обратных задач, граничные ОЗТ по сравнению с коэффициентными и геометрическими задачами имеют большую склонность к искажению результатов, связанному с некорректностью их постановок. К этому следует добавить, что в граничных ОЗТ трудно прогнозировать поведение искомого решения, так как априорная информация о нем бывает довольно ограниченной. С этой точки зрения в коэффициентных и геометрических ОЗТ обычно наблюдается лучшее положение. Таким образом, отработку методов решения неустойчивых обратных задач целесообразно бывает проводить именно на граничных обратных задачах. Многие из методических подходов, разработанных для граничных ОЗТ, обобщаются также и на другие типы обратных задач. В частности, таким универсальным методом является итерационная регуляризация, которая применительно к граничным ОЗТ рассмотрена в гл. 6, обобщение этого подхода на другие обратные задачи дано в гл. 8.

Еще одно замечание связано с размерностью обратных задач теплопроводности. Во многих случаях за счет специальных конструктивных мер при разработке датчиков и моделей, а также при выборе условий постановки и проведения эксперимента, можно исследовать теплообменные процессы в элементах конструкции и теплоизоляционных покрытиях на основе одномерного уравнения теплопроводности. Это условие заметно упрощает обработку данных по методам обратных задач, а при определенных условиях даже делает ее более точной.

Таким образом, можно считать, что одномерная постановка является основной расчетной моделью, для которой должны быть построены эффективные методы и алгоритмы обработки экспериментальных данных. Наиболее распространенной является модель плоской пластины. Реже применяются модели цилиндрической стенки и сферического слоя, причем, если криволинейная стенка имеет отношение толщины к малому радиусу кривизны $b/r \leqslant 0{,}1$, то обычно можно пользоваться моделью плоской пластины. Модель полубесконечного тела (термически толстой стенки) применяется в том случае, когда число Фурье $\mathrm{Fo}_b = \dfrac{a\tau}{b^2} \leqslant$ $\leqslant 0{,}1 \ldots 0{,}2$.

Нужно отметить, что существуют ситуации, когда одномерные модели теплопроводности не могут дать удовлетворительных результатов и требуется переходить к более сложным постановкам задач. В подобных случаях, как правило, удается ограничиться двумерными моделями. Следовательно, возникает необходимость исследования также и двумерных ОЗТ.

Достоверность определения причинных характеристик методами ОЗТО может в значительной степени зависеть от качества исходных данных. Поэтому важно, чтобы первичные тепловые измерения были выполнены с необходимой степенью точности.

Выводы

1. Базируясь на признаке причинно-следственных связей, даны общие постановки обратных задач теплообмена и их классификация. Рассмотрены типичные обратные задачи теплопроводности, радиационного и комбинированного теплообмена.

2. Проведен анализ областей применения методов, основанных на решении обратных задач, для исследования процессов теплопереноса, проектирования и отработки теплонагруженных конструкций. Показано, что эти методы являются эффективным средством диагностики и идентификации теплообменных процессов, позволяющим повысить информативность и достоверность теплофизических исследований.

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ КОРРЕКТНОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА

2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

2.1.1. ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Успешное применение методов обратных задач в тепловом моделировании и обработке результатов тепловых испытаний ЛА в значительной степени определяется глубиной проработки математических вопросов, связанных с постановкой и алгоритмизацией задач, выяснением специфических трудностей их решения. В настоящей главе исследуются вопросы существования, единственности и устойчивости решения обратных задач теплообмена.

В разд. 1.2 была дана общая постановка обратных задач теплообмена, которая допускает следующее формальное математическое представление. Пусть u и f обозначают искомые и наблюдаемые характеристики тепловой модели и трактуются как элементы метрических пространств U и F соответственно (u и f могут являться некоторыми сложными образованиями). Задан оператор A, действующий из U в F и устанавливающий причинные связи между искомыми характеристиками модели

и входными данными. Область определения оператора $D_A \subseteq U$, область значений $Q_A = A(D_A) \subseteq F$. Тогда можно записать следующее операторное уравнение 1-го рода:

$$Au = f. \tag{2.1}$$

Задача (2.1) считается поставленной *корректно*, если ее решение удовлетворяет следующим требованиям (условиям Адамара [54, 100]):

1) существует для любого $f \in Q_A = F$ (*условие разрешимости*);

2) единственно в U (*условие однозначности*);

3) u непрерывно зависит от f (*условие устойчивости*).

По-другому, задача решения уравнения (2.1) корректна, если существует однозначное и непрерывное обратное отображение A^{-1}, область определения которого $D_{A^{-1}} = Q_A = F$.

Если нарушается одно из перечисленных требований, задача (2.1) становится *некорректно* поставленной Именно такая ситуация наблюдается при решении обратных задач теплообмена.

Несмотря на кажущуюся физическую естественность задач определения причинных характеристик теплообменных процессов по следственным проявлениям, легко получить неправильную математическую постановку, если следовать формальному процессу, описанному выше.

Вначале остановимся на исследовании этой особенности для граничных ОЗТ. Чтобы не загромождать изложение техническими деталями, рассмотрим простую задачу, однако имеющую широкое распространение в практике тепловых исследований.

Будем считать, что процесс теплопроводности в пластине описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m], \tag{2.2}$$

где $a = \text{const} > 0$.

Известно начальное распределение температуры

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, b]. \tag{2.3}$$

В точке $x = d$ $(0 < d \leqslant b)$ задано изменение температуры во времени

$$T(d, \tau) = T^*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]. \tag{2.4}$$

На правой границе $x = b$ известно условие II-го рода

$$-\lambda \frac{\partial T(b, \tau)}{\partial x} = q^*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \tag{2.5}$$

где $\lambda = \text{const} > 0$.

Требуется определить плотность теплового потока на левой границе $q(\tau) = -\lambda \partial T(0, \tau)/\partial x$.

В первую очередь, проанализируем третье условие корректности –

устойчивость данной задачи, полагая, что существование и единственность решения имеют место. Предварительно конкретизируем вычислительные постановки граничной ОЗТ Для этого выделим три возможных случая: *краевая постановка, постановка в форме Коши и вариационная постановка задачи* [6] .

2.1.2. КРАЕВАЯ ПОСТАНОВКА

Предположим, что есть алгоритм решения соответствующей прямой задачи $f = Au$ и найден способ его "обращения" с целью установления искомой связи: входные данные → граничные условия $(u = R(f))$.

Решение прямой задачи для уравнения (2 2), согласно принципам суперпозиции и Дюамеля [45, 102] можно представить в виде

$$T(x, \tau) = \int_0^{\tau} q(\xi) \frac{\partial \vartheta(x, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi + \int_0^{\tau} q^*(\xi) \frac{\partial \vartheta(b - x, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi, \tag{2.6}$$

где $\vartheta(x, \tau)$ — температурная реакция тела на единичный тепловой поток на одной из границ $(x = 0)$ при условии теплоизолированности другой $(x = b)$.

Величина $\vartheta(x, \tau)$ может быть рассчитана по формуле [45]

$$\vartheta(x, \tau) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{a\tau}{b} + \frac{3(b - x)^2 - b^2}{6b} + \frac{2b}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-k^2 \pi^2 \frac{a\tau}{b^2}\right] \cos\left(k\pi \frac{b - x}{b}\right) \right\}.$$

Таким образом, обратная задача в данном случае сводится к следующей интегральной форме:

$$Au \equiv \int_0^{\tau} u(\xi) K(\tau - \xi) d\xi = f(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_m], \tag{2.7}$$

где $u(\tau) = q(\tau)$; $K(\tau - \xi) = \partial \vartheta(d, \tau - \xi) / d\tau$;

$$f(\tau) = T^*(\tau) - \int_0^{\tau} q^*(\xi) \frac{\partial \vartheta(b - d, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi.$$

Интегральное уравнение (2.7) имеет переменный верхний предел и по определению является уравнением Вольтерра относительно искомой функции $u(\tau)$. Кроме того, так как $u(\tau)$ содержится только под знаком интеграла, то такое уравнение называется уравнением I-го рода. Наиболее распространенным и простым способом его решения является сведение к уравнению II-го рода (содержащему искомую функцию также и вне интеграла) с помощью операции дифференцирования

$$u(\tau)+\frac{1}{K(0)}\int_0^{\tau}u(\xi)\frac{\partial K(\tau-\xi)}{\partial\tau}\,d\xi=\frac{f'(\tau)}{K(0)}\,.$$

Однако такое представление возможно, если ядро исходного уравнения $K(\tau)$ нигде на сегменте $[0, \tau_m]$ не обращается в нуль. В нашем случае $K(\tau-\xi)\to 0$, $\xi\to\tau$ и применять этот способ нельзя. Кроме того, повторное дифференцирование также не дает желаемого результата, не говоря уже о том, что такой прием крайне нежелателен, поскольку связан с большой потерей точности.

Следовательно, приходится непосредственно решать исходное интегральное уравнение I-го рода. Решение данного уравнения – типичная неустойчивая задача [100].

2.1.3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ПОСТАНОВКЕ КОШИ

При условии, что число пространственных переменных больше одного, будем искать продолжение решения уравнения теплопроводности от границы $\partial\Omega_1$ некоторой малой области, где заданы температура и тепловой поток (условия IV-го рода – данные Коши), до границы $\partial\Omega_2$ (с искомым условием) большой области. Применительно к одномерной задаче (2.2) – (2.5) постановка Коши соответствует продолжению решения уравнения (2.2) до границы $x=0$ по известным условиям в некоторой точке $x=d_1$ $(d\leqslant d_1\leqslant b)$:

$$T(d_1,\tau)=T_1{}^*(\tau),\quad -\lambda\frac{\partial T(d_1,\tau)}{\partial x}=q_1{}^*(\tau). \tag{2.8}$$

В данном случае возникает необходимость предварительного вычисления исходных данных в точке d_1 в результате решения прямой задачи в области $d\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant\tau\leqslant\tau_m$.

Предположим, что функции $T_1{}^*(\tau)$ и $q_1{}^*(\tau)$ дифференцируемы бесконечное число раз $\left(T_1^{*(n)}\equiv\frac{d^nT_1{}^*}{d\tau^n}\,,\ q_1^{*(n)}\equiv\frac{d^nq_1{}^*}{d\tau^n}\,,\ n\to\infty\right)$. Тогда можно записать решение для определения температурного поля, впервые полученное Стефаном*

$$T(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{T_1^{*(n)}(\tau)(x-d_1)^{2n}}{(2n)!\,a^n}-\frac{q_1^{*(n)}(\tau)(x-d_1)^{2n+1}}{(2n+1)!\,a^n\lambda}\right]. \tag{2.9}$$

Дифференцируя (2.9) по x и ограничиваясь первыми N членами,

---

*Stefan J. On the Theory of Ice Formation, Especially on Ice Formation in Polar Seas (Über die Theorie der Lisbildung, insbesondere uber die Eisbildung im Polarmeere). Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie Wiss. Wien., Math. – naturwiss. Kl., 1890, vol 98 (2 a), p. 965–973. (In German).

запишем конечное выражение для плотности теплового потока на границе тела при $x = 0$:

$$q(\tau) = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{q_1^{*(n)}(\tau) d_1^{2n}}{(2n)!\ a^n} + \lambda \sum_{n=1}^{N} \frac{T_1^{*(n)}(\tau)\, d_1^{2n-1}}{(2n-1)!\ a^n}.$$

Для температуры поверхности тела $T_W(\tau) = T(0, \tau)$

$$T_W(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{T_1^{*(n)}(\tau)\, d_1^{2n}}{(2n)!\ a^n} + \frac{q_1^{*(n)}(\tau)\, d_1^{2n+1}}{(2n+1)!\ a^n \lambda} \right].$$

Таким образом, при определении граничных условий в соответствии с данной формой решения ОЗТ необходимо вычислять значения производных до N-го порядка. В то же время оператор дифференцирования $d/d\tau$ – типичный пример неограниченного оператора и его вычисление представляет собой некорректную задачу [100].

Заметим здесь, что применительно к решению ОЗТ такой подход рассмотрен в работах [23, 95].

2.1.4. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим целевой функционал как невязку $\rho_F(Au, f)$, соответствующую уклонению левой части уравнения (2.1) от правой в метрике пространства F. На первый взгляд может показаться, что для получения искомых приближений следует прибегнуть к минимизации ρ_F без каких-либо дополнительных условий. Однако при численной реализации такой подход может вызвать серьезные трудности. Это объясняется, с одной стороны, тем, что из сходимости по функционалу не следует сходимости приближенных решений к истинному, а с другой стороны, тем, что обычно приходится решать задачу с неточными данными. Полученное "решение" может существенно отличаться от действительного.

Такое положение является результатом некорректности задачи $Au = f$. Обусловленность* вариационной задачи во многих случаях оказывается хуже обусловленности исходной задачи. Так, при минимизации квадратичного функционала можно воспользоваться уравнением Эйлера

$$A^* Au - A^* f = 0, \qquad (2.10)$$

которое формально является эквивалентом исходной задачи.

Однако, известно, что уравнение (2.10) обусловлено хуже, нежели $Au - f = 0$, так как оператор A^*A обладает более сильными сглаживающими свойствами, чем оператор A.

---

*Свойство, характеризующее порядок малости влияния ошибок в задании оператора и правой части уравнения на решение задачи.

Для задачи (2.2) – (2.5) и нормировки, соответствующей пространству L_2-функций, интегрируемых с квадратом, функционал невязки имеет вид

$$\rho^2_{L_2} = \int_0^{\tau_m} \left[\int_0^{\tau} u(\xi) K(\tau - \xi)\, d\xi - f(\tau) \right]^2 d\tau.$$

Можно показать (см. [6]), что его минимизация равносильна некорректной задаче решения уравнения Фредгольма 1-го рода (пределы интегрирования неизменные, искомая функция $u(\tau)$ находится только под знаком интеграла):

$$\int_0^{\tau_m} u(\zeta)\ \bar{K}(\xi, \zeta)\, d\zeta = \bar{b}(\xi), \quad \xi \in [0, \tau_m],$$

где

$$\bar{K}(\xi, \zeta) = \begin{cases} \int_{\xi}^{\tau_m} K(\tau - \xi) K(\tau - \zeta)\, d\tau, & \zeta \in [0, \xi), \\ \int_{\zeta}^{\tau_m} K(\tau - \xi) K(\tau - \zeta)\, d\tau, & \zeta \in [\xi, \tau_m]; \end{cases}$$

$$\bar{b}(\xi) = \int_{\xi}^{\tau_m} f(\tau) K(\tau - \xi)\, d\tau.$$

В монографии [6] рассмотрены также другие примеры неустойчивых обратных задач различных типов (коэффициентных, геометрических, ретроспективных, а также граничных в двумерной постановке) и дано физическое объяснение явления неустойчивости ОЗТ.

2.1.5. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Остановимся на обратных задачах теплообмена в технических системах (см. разд. 1.2.5), которые в общем случае также не обладают свойством непрерывной зависимости результатов от входных данных.

Рассмотрим тепловую модель, состоящую из L элементов, и запишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{d\,\mathrm{T}(\tau)}{d\tau} = \boldsymbol{A}[\alpha, \beta, \mathrm{T}(\tau)], \tag{2.11}$$

где $\mathbf{T}(\tau)$ – вектор-функция размерности L, компоненты которой $T_l(\tau)$ представляют временные зависимости температуры в элементах системы; $\boldsymbol{A}$ – оператор, нелинейный по температуре, связывающий вектор

известных причинных характеристик α, вектор искомых характеристик β и вектор-функцию $T(\tau)$.

Компонентами векторов α и β являются параметры тепловой модели $\frac{\lambda_{lj}}{c_l}$, $\frac{K_{lj}}{c_l}$, $\frac{Q_{sl}}{c_l}$, $\frac{Q_l}{c_l}$. В качестве исходной экспериментальной информации используются результаты измерений температуры $T_l^*(\tau)$ в K элементах модели ($K \leqslant L$), известные с некоторой погрешностью.

Для определения неизвестных причинных характеристик естественно перейти к экстремальной постановке задачи, когда решение ищется из условия минимума невязки температур. Если в качестве меры несовместности (невязки) уравнения (2.11) взять среднеквадратичный критерий, то получим следующую задачу:

$$\sum_{l=1}^{K} \int_0^{\tau_m} [T_l(\beta, \tau) - T_l^*(\tau)]^{\mathrm{T}} [T_l(\beta, \tau) - T_l^*(\tau)] \, d\tau - \inf_{\beta \in B \subseteq E_p},$$

где B — область допустимых значений искомых параметров в p-мерном евклидовом пространстве E_p (при отсутствии ограничений на искомые значения параметров $B = E_p$); $T_l^*(\tau)$ — измеренная температура в l-м элементе; τ_m — время эксперимента; т — знак транспонирования.

Рассматриваемая задача будет являться устойчивой, если ее решение β сходится к точному $\beta_{\mathrm{т}}$ при стремлении погрешности измерений к нулю. Однако существуют примеры практических расчетов (см., в частности, [66, 96]), выполненных по методу наименьших квадратов и с использованием рекуррентного линейного оценивания по Калману, когда полученные результаты говорят об обратном, а именно, малые погрешности в измерениях, ошибки аппроксимации и округления могут дать большие отклонения в искомом решении.

2.2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.2.1. ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Будем в дальнейшем считать, что обратная задача разрешима и требуется исследовать вопрос об однозначности ее решения. Из того факта, что решение соответствующей прямой задачи единственно, не следует единственность решения для обратной задачи. Исследование этого вопроса применительно к различным обратным задачам теплопроводности представляет самостоятельную сложную проблему. К настоящему времени в данной области получены достаточно полные результаты (см., в частности, [9, 29, 33, 37, 42, 47, 55, 57, 70, 81, 83, 104, 116]. В качестве примера остановимся на получении условий единст-

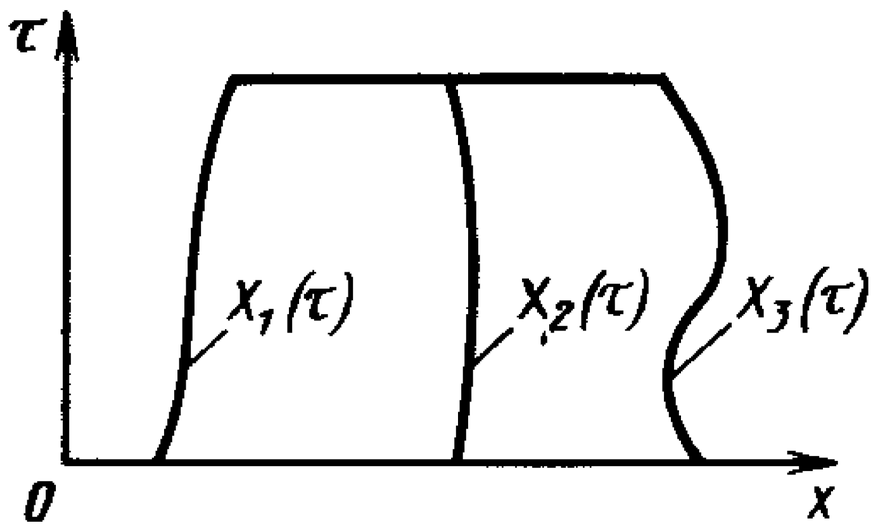


Рис. 2.1. Область с подвижными границами

венности для граничных ОЗТ. При рассмотрении других типов обратных задач этот вопрос в дальнейшем будет оговариваться особо.

Вначале покажем единственность решения граничной ОЗТ на физическом уровне "строгости". Постановку задачи возьмем линейной, но достаточно общей, в частности, учитывающую подвижность границ тела, что довольно часто встречается в практике теплового моделирования.

Будем считать, что процесс теплопроводности описывается уравнением (рис. 2.1)

$$C(x,\tau)\,\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,\tau)\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q(x,\tau), \qquad (2.12)$$

$$x \in (X_1(\tau), X_3(\tau)); \tau \in (0, \tau_m].$$

Краевые условия имеют вид

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [X_1(0), X_3(0)];$$

$$-\lambda\,\frac{\partial T(X_1(\tau),\tau)}{\partial x} = q(\tau); \quad T(X_3(\tau),\tau) = f_3(\tau), \quad \tau \in [0,\tau_m]. \qquad (2.13)$$

Теплофизические свойства $C(x,\tau)$ и $\lambda(x,\tau)$ — положительные, непрерывные и ограниченные функции. Начальные и граничные условия согласованы между собой.

Предположим, что величина $q(\tau)$ является искомой и задано дополнительное условие

$$T(X_2(\tau),\tau) = f_2(\tau), \quad X_1(\tau) < X_2(\tau) < X_3(\tau). \qquad (2.14)$$

Пусть имеются два решения данной задачи $q'(\tau)$ и $q''(\tau)$. Введем функции $\Delta q(\tau) = q'(\tau) - q''(\tau)$; $\Delta T(x,\tau) = T'(x,\tau) - T''(x,\tau)$, где T' и T'' — решения задачи (2.12) — (2.13) для $q = q'$ и $q = q''$ соответственно.

Величина $\Delta T(x,\tau)$ в силу линейности задачи (2.12) — (2.13) должна удовлетворять однородному уравнению теплопроводности с однородным начальным условием

$$C(x,\tau)\,\frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,\tau)\,\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right),$$

$$x \in (X_1(\tau), X_3(\tau)), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \qquad (2.15)$$

$$\Delta T(x,0) = 0, \quad x \in [X_1(0), X_3(0)];$$

$$-\lambda\,\frac{\partial \Delta T(X_1(\tau),\tau)}{\partial x} = \Delta q(\tau), \quad \tau \in [0,\tau_m]; \qquad (2.16)$$

$$\Delta T(X_3(\tau),\tau) = 0, \quad \tau \in [0,\tau_m].$$

Кроме того, на линии $X_2(\tau)$ имеем

$$\Delta T(X_2(\tau),\ \tau) = 0, \quad \tau \in [0,\ \tau_m]. \tag{2.17}$$

Из условий (2.15), (2.16) и (2.17) следует, что функция $\Delta T(x, \tau)$ везде в области $x \in [X_2(\tau), X_3(\tau)]$, $\tau \in [0, \tau_m]$ обращается в нуль, т.е. помимо условия $\Delta T(X_2(\tau), \tau) = 0$ известно дополнительное условие $\partial \Delta T(X_2(\tau), \tau)/\partial x = 0$, $\tau \in [0, \tau_m]$.

Далее, поскольку принятая модель теплопроводности соответствует бесконечной скорости распространения теплоты, то для $\Delta q(\tau) \neq 0$ полученное условие тепловой изоляции границы $X_2(\tau)$ привело бы к изменению $\Delta T(X_2(\tau), \tau)$ относительно нулевого значения при сколь угодно малых временах $\tau > 0$. Следовательно, $\Delta q(\tau) = 0$, и исходное предположение о наличии двух решений будем считать неверным, т.е. задача имеет единственное решение.

Таким же образом на физическом уровне строгости можно показать однозначность решения граничной ОЗТ в двумерной и трехмерной постановках.

2.2.2. ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим более строгое доказательство единственности решения граничной ОЗТ (2.12) – (2.14) при условии неизменности физических параметров $C = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$.

Вначале остановимся на краевой постановке задачи. Разделим область $D = \{(x, \tau) : x \in [X_1(\tau), X_3(\tau)], \tau \in [0, \tau_m]\}$ на две подобласти (рис. 2.2) с общей границей, параллельной временно́й оси: $D_1 = \{x \in \in [X_1(\tau), b), \tau \in [0, \tau_m]\}$ и $D_2 = \{x \in [b, X_3(\tau)], \tau \in [0, \tau_m]\}$. Величину b выберем произвольным образом внутри интервала $X_{2\max} \leqslant b \leqslant X_{3\min}$ ($X_{2\max}$ и $X_{3\min}$ – абсолютные экстремумы функций $X_2(\tau)$ и $X_3(\tau)$; предполагается, что $X_{3\min} > X_{2\max}$).

Затем введем в рассмотрение новую область D_1', расширив D_1 за счет введения фиктивной границы $x = d$, $d = X_{1\min}$: $D_1' = D_1 + S$, где $S = \{(x, \tau): x \in [d, X_1(\tau)], \tau \in [0, \tau_m]\}$ – фиктивная область.

Будем считать, что уравнение теплопроводности (2.12) справедливо в области $D' = D_1' + D_2$ и разделим решение исходной ОЗТ на два этапа:

1) восстановление "фиктивной" граничной функции $q_\Phi(\tau) = -\lambda \dfrac{\partial T(d, \tau)}{\partial x}$ по условиям $T(b, \tau)$ и $-\lambda \dfrac{\partial T(b, \tau)}{\partial x}$ – обратная задача теплопроводности (заметим, что это задача продолжения решения уравнения теплопроводности до фиктивной границы, которое возможно для достаточно гладких функций, заданных на границе $x = b$);

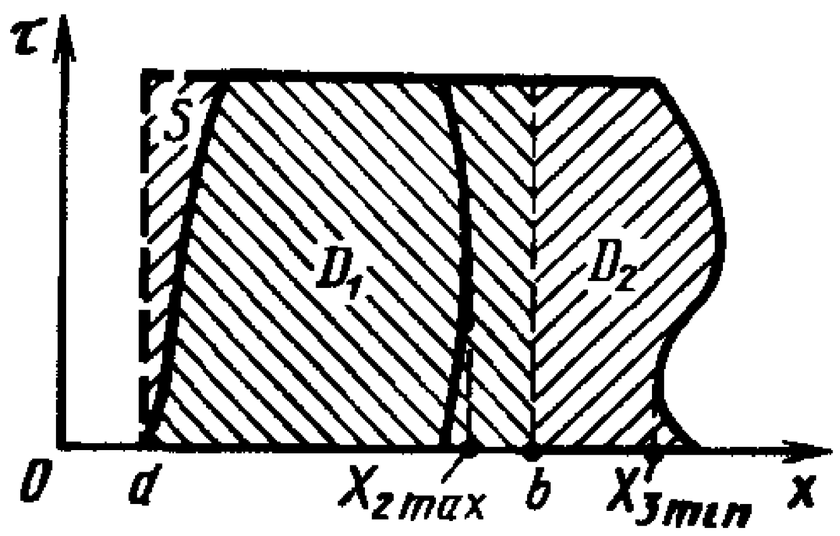


Рис. 2.2. Области, полученные по методу фиктивных границ

2) определение искомой граничной функции $q(\tau)$ на линии $X_1(\tau)$ по условиям $q_\Phi(\tau)$ и $-\lambda \dfrac{\partial T(b, \tau)}{\partial x}$ – прямая задача теплопроводности. Здесь принято, что функции $T(b, \tau)$ и $-\lambda \dfrac{\partial T(b, \tau)}{\partial x}$ однозначно определяются из решения уравнения теплопроводности с условиями, заданными на линиях $X_2(\tau)$ и $X_3(\tau)$

Для прямой задачи при соответствующих ограничениях (например, достаточная гладкость кривых $X_1(\tau)$ и $q_\Phi(\tau)$) единственность решения считается установленным фактом. Тогда единственность решения обратной задачи будет следовать из тождества $\Delta q_\Phi(\tau) = 0$, поскольку в этом случае $\Delta q(\tau) = 0$ – в прямой задаче теплопроводности все краевые условия равны нулю.

Таким методом (в дальнейшем будем его называть методом фиктивных границ) обратная задача в области с подвижными границами сведена к обратной задаче в прямоугольной области без изменения записи уравнения теплопроводности.

Пусть $q'_\Phi(\tau)$ и $q''_\Phi(\tau)$ – два решения обратной задачи. Тогда функция $\Delta T(x, \tau) = T(x, \tau)|_{q'_\Phi} - T(x, \tau)|_{q''_\Phi}$ должна удовлетворять краевой задаче

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2}, \quad x \in (d, b), \ \tau \in (0, \tau_m]; \tag{2.18}$$

$$\Delta T(x, 0) = 0, \quad x \in [d, b]; \tag{2.19}$$

$$-\lambda \frac{\partial \Delta T(d, \tau)}{\partial x} = \Delta q_\Phi(\tau); \quad -\lambda \frac{\partial \Delta T(b, \tau)}{\partial x} = 0, \tag{2.20}$$

$$\tau \in [0, \tau_m].$$

В то же время в точке $x = b$ необходимо выполнение условия

$$\Delta T(b, \tau) = 0; \quad \tau \in [0, \tau_m] \tag{2.21}$$

Из уравнения (2.6) можно получить интегральное представление задачи (2.18) – (2.20) в форме Дюамеля

$$\Delta T(x, \tau) = \int_0^\tau \Delta q_\Phi(\xi) \frac{\partial \vartheta(x, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi.$$

Учет (2.21) приводит к равенству

$$\int_0^\tau \Delta q_\Phi(\xi) \frac{\partial \vartheta(b, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi = 0. \tag{2.22}$$

Согласно теореме о свертке Титчмарша, если функции $\Delta q_\Phi(\tau)$ и

$\frac{\partial \vartheta(b, \tau)}{\partial \tau}$ непрерывны в области $\tau \in [0, \tau_m]$, $\tau_m < \infty$, то из равенства (2.22) следует, что, по крайней мере, одна из этих функций в области $\tau \in [0, \tau_m]$ всюду равна нулю. Из математической теории теплопроводности известно, что

$$\frac{\partial \vartheta(b, \tau - \xi)}{\partial \tau} > 0, \quad \tau \neq \xi.$$

Отсюда следует однозначность решения обратной задачи.

Обобщая результат проведенного доказательства, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема (*о единственности решения граничной ОЗТ*). Пусть функции $f_1(\tau) = T(b, \tau)$, $f_2(\tau) = \frac{\partial T(b, \tau)}{\partial x}$ и функция $f_3(\tau) = \frac{\partial T(X_1(\tau), \tau)}{\partial x}$ однозначно определяются из решения прямой задачи теплопроводности соответственно в областях $S_1 = \{(x, \tau): x \in [X_2(\tau), X_3(\tau)], \tau \in [0, \tau_m]\}$ и $S_2 = \{(x, \tau): x \in [d, b], \tau \in [0, \tau_m]\}$, где $d = X_{1\min}$; $X_{2\max} \leqslant b \leqslant X_{3\min}$; $X_{2\max} < X_{3\min}$. Тогда линейная граничная ОЗТ, состоящая в определении функции $u(\tau) = \begin{cases} T(X_1(\tau), \tau) \\ -\lambda \partial T(X_1(\tau), \tau)/\partial x \end{cases}$ по известным температурам $T(X_2(\tau), \tau)$ и $T(X_3(\tau), \tau)$ на границах $X_2(\tau)$ и $X_3(\tau)$, не может иметь более одного решения в классе функций $T(x, \tau)$, для которых выполняется требование непрерывности пространственной производной на фиктивной границе $\frac{\partial T(d, \tau)}{\partial x} \in C[0, \tau_m]$.

Заметим, что полученный результат о единственности граничной ОЗТ для однослойной пластины можно распространить и на другие одномерные обратные задачи — для полубесконечного тела, сплошного и полого цилиндров, сплошного и полого шаров, а также на случай составных тел.

Выше был проанализирован вопрос о единственности некоторых граничных ОЗТ в линейной постановке. Строгое доказательство данного свойства обратной задачи при более общих условиях относится к области чисто математического исследования.

В заключение заметим, что существование и единственность обратной задачи в постановке Коши для уравнения теплопроводности общего вида с коэффициентами, зависящими от пространственных координат и времени, можно установить из классической теоремы Ковалевской. При этом требуется, чтобы:

1) коэффициенты уравнения были аналитическими функциями своих аргументов;

2) условия Коши задавались на аналитической поверхности;

3) входные данные и решение принадлежали классу аналитических функций.

При существенно менее ограничительных требованиях однозначность решения задачи Коши для линейного параболического уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами доказана в [55]. Для линейного параболического уравнения второго порядка этот результат был ранее установлен в работах [57, 116]. В частности, рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_1(x, \tau)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x, \tau)\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (x, \tau) \in \bar{\Omega} = [0, b] \times [0, \tau_m],$$

где

$$a_1(x, \tau) = \frac{\lambda(x, \tau)}{C(x, \tau)} > 0, \quad a_2(x, \tau) = \frac{1}{C(x, \tau)}\frac{\partial \lambda(x, \tau)}{\partial x}.$$

Единственность решения задачи Коши, состоящей в определении температурного поля $T(x, \tau)$ в области $\bar{\Omega}$ по известным условиям $T(b, \tau) = f(\tau)$, $-\lambda \frac{\partial T(b, \tau)}{\partial x} = q(\tau)$ будет иметь место, если $T(x, \tau) \in \in C^2$; $f(\tau), q(\tau) \in C^1$; $a_1(x, \tau) \in C^2$ и $a_2(x, \tau)$ – ограниченная функция.

2.3. ПРИНЦИПЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОРРЕКТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

2.3.1. ЕСТЕСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

При анализе корректности обратных задач теплообмена было установлено, что их решение может не обладать свойством устойчивости.

С этой особенностью обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. Если не изменить исходную постановку неустойчивой задачи, то методы, разработанные для решения хорошо поставленных задач, далеко не всегда оказываются пригодными применительно к обратной задаче. Стремление получить "точную" или как можно более "точную" причинную характеристику u, отвечающую тонким структурным особенностям ее следственного образа f, заданного с некоторой ошибкой δ, ведет к неустойчивому результату.

Например, при использовании вариационной формы ОЗТ специфика некорректной задачи будет проявляться как практическая неоднозначность решения, т.е. исходная неустойчивая постановка ОЗТ фактически является как бы недоопределенной. Причем нельзя быть уверенным в малости ошибок решения обратной задачи при сколь угодно малых погрешностях входных данных.

Главный вывод анализа состоит в том, что для обратной задачи должна быть сформулирована иная – корректная постановка задачи. Математическая теория предлагает два возможных подхода к разрешению этой ситуации. Первый был предложен в работе [98]. Он основы-

вается на изменении классического понятия корректности и переходе к *условно-корректной* постановке задачи (*корректной по Тихонову* [54]). Второй подход связан с аппроксимацией обратного оператора A^{-1}, который не является непрерывным, семейством непрерывных операторов (см. разд. 2.3.3).

В простейших случаях первый подход реализуется в виде методик, основанных на закономерностях регулярного режима.

Однако с практической точки зрения условно-корректная постановка ОЗТ часто не обладает необходимым свойством универсальности применительно к теплофизическим исследованиям [6].

Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться второй подход к решению обратных задач теплообмена. Материал, изложенный в этом разделе, можно рассматривать как введение в проблему регуляризации некорректно поставленных обратных задач. Основные положения данного анализа, сформулированные в общем виде, будут более подробно изучены в следующих главах.

Рассмотрим возможные принципы получения устойчивых решений обратных задач, не связанные с априорным назначением классов корректности. Условно разделим их на две группы:

1) саморегуляризация обратных задач;

2) регуляризация по методу А.Н. Тихонова.

Понятие саморегуляризации (естественной регуляризации) означает, что обратная задача решается в своей исходной постановке, но с помощью таких приближенных методов, которые допускают управление мерой близости получаемого решения к "точному" в результате изменения параметров вычислительных алгоритмов (шагов по аргументам, числа членов ряда в разложении функций и т.д.). Будем их условно называть *прямыми методами* и остановимся более подробно на вопросе их построения (о другом принципе регуляризации обратных задач см. разд. 2.3.3).

Источники естественной регуляризации решения обратных задач могут быть связаны:

1) с эффектом регуляризации режима нагрева точки тела, в которой установлен датчик температуры;

2) с "вязкостными" свойствами вычислительных алгоритмов, заключающимися в естественной фильтрации высокочастотных составляющих в искомой причинной характеристике.

Первый принцип обычно реализуется в виде *шаговой регуляризации* ОЗТ. Искомая причинная характеристика, представляющая собой непрерывную кривую $u(z)$, заменяется кусочно-однородной аппроксимирующей зависимостью, т.е. полный отрезок изменения аргумента z разбивается на интервалы с шагами $\Delta z_n = z_n - z_{n-1}$, $n = 1, 2, ..., N$, и на каждом интервале кривая описывается зависимостями одного и того же вида. Важно заметить, что в качестве этих зависимостей берутся наиболее регулярные функции, имеющие минимальное количество ненулевых производных. Обычно применяется кусочно-постоянная, реже —

кусочно-линейная аппроксимация. При этом величина шага Δz_n выбирается из условия, что изменение температуры в точке измерения, вызванное действием аппроксимированного причинного фактора на данном интервале, было бы различимо на фоне различных ошибок (помех, погрешностей измерений, регистрации и расшифровки данных, ошибок аппроксимации и округления).

Например, требуется определить изменение теплового потока $q(\tau)$ на границе тела по внутренним температурным измерениям. Кривая $q(\tau)$ заменяется ступенчатой линией, причем продолжительность каждой ступеньки выбирается таким образом, чтобы приращение температуры в заданной точке тела было бы достаточно большим по сравнению с сопутствующими ошибками.

Говоря о регуляризации режима нагрева тела, мы не имеем в виду обязательное выполнение регулярного теплового режима в классическом смысле [58]. Однако в некоторых случаях можно проследить непосредственную связь принципа шаговой регуляризации с выбором интервала времени из условия наступления регулярного режима. Именно такой подход к решению граничной ОЗТ был предложен в работе [108].

В практике тепловых измерений довольно распространенной является ситуация, когда погрешностями аппроксимации и округления при решении задачи теплопроводности можно пренебречь, так как они малы по сравнению с ошибками температурных данных. В этом случае выбор числа интервалов N при равномерной дискретизации z можно осуществить из условия согласования среднеквадратичной невязки температуры с величиной этих ошибок:

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \int_0^{\tau_m} [T_k(N, \tau) - T_k^*(\tau)]^2 \, d\tau \simeq \delta^2,$$

где K — число температурных датчиков в теле; $T_k(N, \tau)$ — изменение температуры от времени в k-й точке тела, полученное расчетным путем для N интервалов; $T_k^*(\tau)$ — заданная температура в k-й точке тела;

$\delta^2 = \int_0^{\tau_m} \sigma^2(\tau) \, d\tau$ — оценка интегральной погрешности входных данных

($\sigma(\tau)$ — среднеквадратичная ошибка измерений).

В результате такого выбора расчетного шага в приближенном решении $u(N, z)$ будут сглажены гармоники, связанные с пульсационным изменением ошибок в регистрируемых кривых $T_k^*(\tau)$, т.е. не будут выделены составляющие, имеющие частоты, выше некоторой граничной частоты.

Второй принцип естественной регуляризации, основанный на вязкостных свойствах вычислительных алгоритмов, также служит для подавления ненужных гармоник в решении обратной задачи с помощью целенаправленного выбора некоторых параметров алгоритмов, управляющих гладкостью приближенных решений. Этот принцип может быть реализован:

1) соответствующим выбором шагов аппроксимации исходной задачи в различных численных методах решения ОЗТ;

2) соответствующим выбором степени аппроксимирующего полинома для искомой величины.

Во всех этих случаях приближенное решение ОЗТ специально "загрубляется" по отношению к точному решению задачи, соответствующему возмущенным исходным данным.

Прямые методы, основывающиеся (явно или неявно) на принципах естественной регуляризации, предложены для решения граничных и коэффициентных ОЗТ в целом ряде работ, библиографию которых можно найти в книгах [6, 49, 62, 73, 88, 107, 109, 112]. Важно подчеркнуть, что при правильном использовании этих методов *критерием выбора управляющих параметров в алгоритме является согласование невязки температуры с погрешностью входной информации.*

2.3.2. ВОЗМОЖНОСТИ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ

Указанные выше способы естественной регуляризации были подвергнуты исследованию применительно к решению граничных обратных задач теплопроводности. Кратко остановимся на основных результатах этого анализа.

1. Шаговая регуляризация, являясь простым средством получения устойчивых приближений, может применяться для решения граничных ОЗТ в линейных и нелинейных краевых постановках и постановках Коши в областях с подвижными и неподвижными границами.

Для достаточно гладкой входной информации оказывается возможным установить предельные значения безразмерных временных шагов в виде приращения числа Фурье $\Delta \mathrm{Fo}_l = \dfrac{a\,\Delta\tau}{l^2}$, определяющие границы применимости шагового принципа естественной регуляризации для решения различных обратных задач. Изложению этих вопросов посвящена гл. 4.

Важно отметить, что шаговая регуляризация может быть также использована для решения других типов обратных задач.

2. Шаговая регуляризация в сочетании с некоторыми разностными схемами численного решения граничных ОЗТ в постановке Коши позволяет расширить границы применимости прямых методов по сравнению с аналитическим подходом (см. гл. 5).

3. Регуляризация решения ОЗТ за счет выбора степени алгебраического полинома, аппроксимирующего искомую функцию на всем интервале изменения аргумента, представляет малопригодный способ определения граничных условий, за исключением простых форм восстанавливаемых кривых, близких к классу полиномов. Этот вывод представляется естественным, поскольку при аппроксимации некоторой кривой $y(x)$ полиномом n-й степени в общем случае трудно получить подходящий результат. С одной стороны, при малых значениях n аппроксими-

рующая зависимость оказывается далекой от истинного решения, в то же время при больших n приближение содержит ненужные колебательные составляющие.

Тем не менее данным способом можно пользоваться при решении других типов обратных задач, в частности коэффициентных, если искомые функции хорошо описываются полиномами степени, не выше третьей

К числу малоэффективных способов решения граничных ОЗТ применительно к условиям высокодинамического изменения искомой величины можно отнести также способ, основанный на разложении искомой функции в ряд, расположенный по производным экспериментальных функций (см разд. 2 1 3 и работы [23, 95]). Это связано с большими ошибками вычисления производных от функций, заданных с ошибками, нарушением вследствие этого сходимости ряда и, в итоге, значительным искажением результатов.

Применяя принцип шаговой регуляризации решения в сочетании с рекуррентным оцениванием параметров аппроксимирующей зависимости по методу наименьших квадратов, можно уменьшить допустимые величины $\Delta\tau$ по сравнению с величинами, выбранными по чисто шаговому принципу [40, 111, 112, 113].

Хорошие результаты при решении различных обратных задач можно получить, используя сплайн-аппроксимацию искомых зависимостей [14, 24, 89] Сплайн-функции обладают рядом вычислительных преимуществ перед другими видами аппроксимирующих конструкций и позволяют построить эффективные алгоритмы восстановления причинных характеристик, основываясь на принципе шаговой регуляризации.

Для определения причинных характеристик и теплового состояния объекта может применяться калмановская теория линейного оценивания [62, 88, 89, 96] . Метод Калмана является рекуррентным и с теоретической точки зрения дает оценки, точность которых повышается при выполнении новых измерений Однако в приложении к некорректно поставленным задачам сам по себе метод Калмана не является регулярным и должен реализоваться в сочетании с принципом согласования результатов с ошибками исходной информации, сглаживанием температурных кривых и естественной (обычно шаговой) регуляризацией решения*.

Таким образом, при правильном использовании естественных регуляризирующих свойств, обусловленных самим процессом распространения теплоты, а также свойств, заложенных в вычислительных схемах, прямые методы могут успешно применяться для решения различных обратных задач.

---

*Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Логинов С.Н., Малоземов В.В. К вопросу решения обратной задачи теплопроводности методом динамической фильтрации // ИФЖ. 1981. Т. 41. № 5. С. 906–911.

2.3.3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ПО МЕТОДУ А. Н. ТИХОНОВА

Несмотря на доводы, приведенные в пользу естественных принципов регуляризации ОЗТ, имеется большое количество ситуаций, когда прямые методы, особенно методы шаговой регуляризации, не могут удовлетворить исследователей.

Во-первых, с их помощью не всегда удается восстанавливать достаточно подробные структуры искомых причинных характеристик. В первую очередь, это замечание относится к нестационарным граничным условиям при динамичном характере изменения. В то же время именно такие задачи довольно часто приходится решать в процессе теплового моделирования и математической обработки результатов тепловых испытаний различных технических объектов

Во-вторых, многие экспериментальные тепловые исследования настолько непродолжительны, что критические значения временных шагов при продолжении температурного поля и восстановлении граничных условий оказываются сравнимы с полным временем эксперимента или даже могут быть больше его.

В этих случаях следует прибегать к общему методу регуляризации, разработанному А Н. Тихоновым для решения неустойчивых задач [99, 100].

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \tag{2.23}$$

где U и F — метрические пространства; A — заданный оператор ($A: U \to F$); u, f — искомый и наблюдаемый элементы соответственно (u и f могут быть векторами, функциями, вектор-функциями).

В дальнейшем не будем касаться условий разрешимости и однозначности, полагая, что в этом смысле задача (2.23) поставлена корректно. В то же время примем, что условие устойчивости для (2.23) может быть нарушено

Общий принцип решения неустойчивых задач, предложенный А.Н. Тихоновым, заключается в построении *регуляризирующих операторов* (РО).

Потребуем, чтобы регуляризирующий оператор для задачи (2.23), под которым будем понимать оператор R_α, зависящий от скалярного параметра α, отвечал следующим условиям:

1) R_α определен на всем пространстве F для любого $\alpha > 0$;
2) R_α непрерывен на F;
3) для любого $u \in U$: $R_\alpha Au \underset{\alpha \to 0}{\to} u$.

Параметр α называется *параметром регуляризации.*

Таким образом, введение РО связано с аппроксимацией обратного оператора A^{-1} (который не обязательно является непрерывным) семейством непрерывных операторов.

Если теперь рассмотреть задачу с погрешностью в правой части и

операторе, то естественно, что такое условие приведет к неустойчивому результату. Поэтому важным дополнением к определению РО является условие о согласовании параметра регуляризации α с погрешностью исходных данных. Остановимся на этом вопросе.

Степень приближения известного элемента f_δ к точной (но неизвестной) правой части будем характеризовать погрешностью δ:

$$\rho_F(f_\delta, f) \leqslant \delta,$$

где ρ_F – метрика (расстояние между элементами) в пространстве F.

Неточность задания оператора A связана с его аппроксимацией некоторым оператором A_h (из семейства аппроксимирующих операторов) и обычно возникает при переходе к вычислительной форме задачи.

В качестве меры уклонения операторов A и A_h, определенных на пространстве U, введем метрику $d_U(A_h, A) = \sup_{u \in U} \rho_F(A_h u, Au)$, и будем считать выполненным условие $d_U(A_h, A) \leqslant h$.

Таким образом, вместо точных исходных данных $\{A, f\}$ задачи (2.23) задаются приближенные данные $\{A_h, f_\delta\}$, а погрешность такой замены характеризуется двухкомпонентным вектором $\sigma = \{\delta, h\}$, где δ и h – неотрицательные числа.

Дадим полное определение РО.

Оператор $R_\alpha = R[f_\delta, A_h, \alpha]$ называется регуляризирующим, если он обладает свойствами:

1) существует такая пара чисел $\sigma_0 = \{\delta_0, h_0\}$, $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$, что оператор R_α определен для всякого $\alpha > 0$ и любых A_h, f_δ, для которых

$$\rho_F(f_\delta, f) \leqslant \delta \leqslant \delta_0, \quad d_U(A_h, A) \leqslant h \leqslant h_0;$$

2) существуют такие функции $\alpha = \alpha(\sigma)$ и $\sigma = \sigma(\epsilon)$, что если для любого $\epsilon > 0$ выполняются условия $\delta \leqslant \delta(\epsilon)$ и $h \leqslant h(\epsilon)$, то получаемое решение $u_{\alpha(\sigma)} = R[f_\delta, A_h, \alpha(\sigma)]$ уклоняется от точного решения $u_т$ (на точных данных A и f) не более, чем на ϵ: $\rho_U(u_{\alpha(\sigma)}, u_т) \leqslant \epsilon$.

Выбор параметра α производится на основе определенной информации о решаемой задаче. При правильно подобранном значении α решение $u_{\alpha(\sigma)}$ мало отклоняется от $u_т$, причем точность приближения определяется точностью задания f и A.

Регуляризирующий оператор совместно со способом выбора параметра α, отвечающим условию 2, называется *регуляризирующим алгоритмом* для задачи (2.23).

Некорректная задача называется *регуляризируемой*, если для нее существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм.

В настоящее время применяются различные методы построения регуляризирующих операторов, из которых наибольшее распространение получил *вариационный метод* [99, 100, 101], основывающийся на минимизации так называемого сглаживающего функционала.

$$\Phi_\alpha[u, A, f] = \rho_F^2 (Au, f) + \alpha\Omega[u], \quad u \in D(\Omega), \tag{2.24}$$

где $\Omega[u]$ – стабилизирующий функционал; $D(\Omega)$ – область определения $\Omega[u]$. Под $\Omega[u]$ понимается такой функционал, что множество M_C, заданное условием $M_C = \{u : \Omega[u] \leqslant C\}$, $C \geqslant 0$ является компактным [100] в пространстве U. В качестве Ω можно брать уклонение $\rho_V(u, u^*)$ искомого решения u от некоторого фиксированного элемента u^* в метрике пространства V Здесь $V \subset U$ представляет собой подпространство с более сильной метрикой, т.е когда для любых элементов $u_1, u_2 \in V$ выполняется неравенство $\rho_U(u_1, u_2) \leqslant \rho_V(u_1, u_2)$.

Доказывается, что если оператор A – непрерывный, однозначный и аддитивный (в общем случае A может быть нелинейным), функционал $\Omega[u]$ – строго выпуклый, то для любого $f \in F$ существует единственный элемент $u_\alpha \in D(\Omega)$, минимизирующий функционал Φ_α, $\alpha > 0$.

При соответствующем выборе параметра α, согласованном с погрешностью исходных данных, решение $u_{\alpha(\sigma)}$ о минимизации сглаживающего функционала будет сходиться (при стремлении к нулю погрешностей δ и h) к u_T, т.е. к точному решению исходной задачи с точными данными.

Проблема построения алгоритмов решения обратных задач теплопроводности, регуляризованных в соответствии с рассмотренным вариационным методом, исследовалась в ряде работ [1, 6, 7, 59, 112 и др.]. Некоторые вопросы построения регуляризованных решений ОЗТ и результаты вычислительных экспериментов представлены в гл 7.

В гл. 6 и 8 излагается другой эффективный метод построения регуляризирующих алгоритмов — *итерационная регуляризация*, который в последнее время получил существенное развитие и широкое практическое распространение.

Выводы

1. Сформулированы общие вычислительные постановки граничных обратных задач теплопроводности, позволяющие выявить основные специфические особенности этих задач и подходы к их решению.

2. Рассмотрен вопрос о корректности исходных постановок обратных задач теплообмена и установлено их общее свойство, заключающееся в нарушении условия устойчивости.

3. Изложены основные подходы к регуляризации обратных задач, дающие возможность получать устойчивые приближенные решения.

ГЛАВА 3
АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ОДНОМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В данной главе рассматриваются постановки задач по определению нестационарных тепловых нагрузок, в основу которых положены *интегральные представления* обратных задач теплопроводности. Для стабилизации решений полученных ниже интегральных форм могут быть применены различные принципы (см. гл. 4, 6, 7).

В разд. 2.1.2 было показано, что для пластины с постоянными ТФХ краевая постановка обратной задачи, состоящей в определении теплового потока на одной из границ пластины, формулируется в виде интегрального уравнения I-го рода. При этом в качестве исходного материала используется известное решение прямой задачи теплопроводности. Обобщая этот подход на одномерные тела различной геометрии (плоские, цилиндрические, сферические), граничные условия I-го и II-го рода (искомые и заданные), можно записать общую интегральную форму граничной обратной задачи для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\int_0^{\tau} u(\xi) K(\tau - \xi)\, d\xi = f(\tau), \quad 0 < \tau \leqslant \tau_m, \tag{3.1}$$

где $u(\xi)$ – искомое решение (например, тепловой поток или температура поверхности тела).

Для однородных постановок задач, когда отсутствует источник тепла в теле, а также равны нулю начальное распределение и второе (известное) граничное условие, функция $f(\tau)$ представляет собой изменение температуры в некоторой точке тела. В других случаях правая часть дополнительно включает интегральные члены, учитывающие неоднородность задачи.

Вообще, функция $f(\tau)$ и вид ядра интегрального уравнения $K(\tau-\xi)$ зависят от постановки соответствующей прямой задачи и определяются с помощью известных методов математической физики и теории теплопроводности: метода функций Грина, принципа суперпозиции решений интеграла Дюамеля, операционного метода и т.д.

Основываясь на аппарате тепловых потенциалов, можно построить интегральные формы ОЗТ для областей с подвижными границами (для одномерного случая эти вопросы изложены в монографии [6]). Показано, что для краевых постановок задач обязательным этапом их решения является нахождение плотностей тепловых потенциалов из решения уравнений Вольтерра I-го рода. Так, в случае полубесконечного тела с подвижной границей определение плотности теплового потенциала $\nu(\tau)$ (простого или двойного слоя – в зависимости от того – ищется

ли тепловой поток или температура на движущейся границе) соответствует решению интегрального уравнения вида

$$\int_0^{\tau} \nu(\xi) K(\tau, \xi)\, d\xi = f(\tau), \quad 0 < \tau \leqslant \tau_m .$$

Для пластины конечной толщины с двумя неизвестными тепловыми потоками и условием, что одна из границ – подвижная, требуется решить систему двух интегральных уравнений типа Вольтерра I-го рода.

При проведении различных теплофизических экспериментов, а также натурных и модельных тепловых испытаний ЛА и его частей встречается ситуация, когда трудно обеспечить термостатирование "холодных" спаев термопар. В результате оказывается невозможным достаточно точное измерение температур в исследуемом объекте. В работе [6] предложена интегральная постановка граничной ОЗТ с входными данными в виде дифференциальных замеров температур (дифференциальными термопарами или термобатареями), которая также сводится к решению уравнения первого рода типа (3.1).

3.2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

3.2.1. ПОСТАНОВКА ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

При моделировании тепловых режимов конструктивных элементов ЛА, других машин и оборудования может появиться необходимость решения ОЗТ в двух- или даже трехмерных постановках. Сформулируем некоторые подходы к решению многомерных граничных ОЗТ.

Пусть задано сплошное тело определенной геометрической формы и размеров с распределенными внутри тепловыми источниками, находящееся в тепловом взаимодействии с окружающей его внешней средой. Введем в рассмотрение безразмерные координаты $\bar{x} = x/d$, $\bar{y} = y/d$, $\bar{z} = z/d$, где d – какой-нибудь характерный размер тела, и поставим в соответствие телу некоторую область Ω трехмерного пространства $E_3(\bar{x}\ 0\ \bar{y}\ \bar{z})$, ограниченную поверхностью $\partial\Omega$ (рис. 3.1). Обозначим через $\bar{\tau}$ безразмерное время $\bar{\tau} = \dfrac{a\tau}{d^2}$.

Полагая постоянным коэффициент температуропроводности a, запишем уравнение, определяющее температурное поле тела во внутренних точках области Ω (для простоты записи черточки над независимыми переменными условно исключены)

$$\frac{\partial T(P, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(P, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(P, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(P, \tau)}{\partial z^2} + Q(P, \tau), \qquad (3.2)$$

где $Q(P, \tau)$ – плотность внутренних источников теплоты (известная функция); $P \in \Omega$.

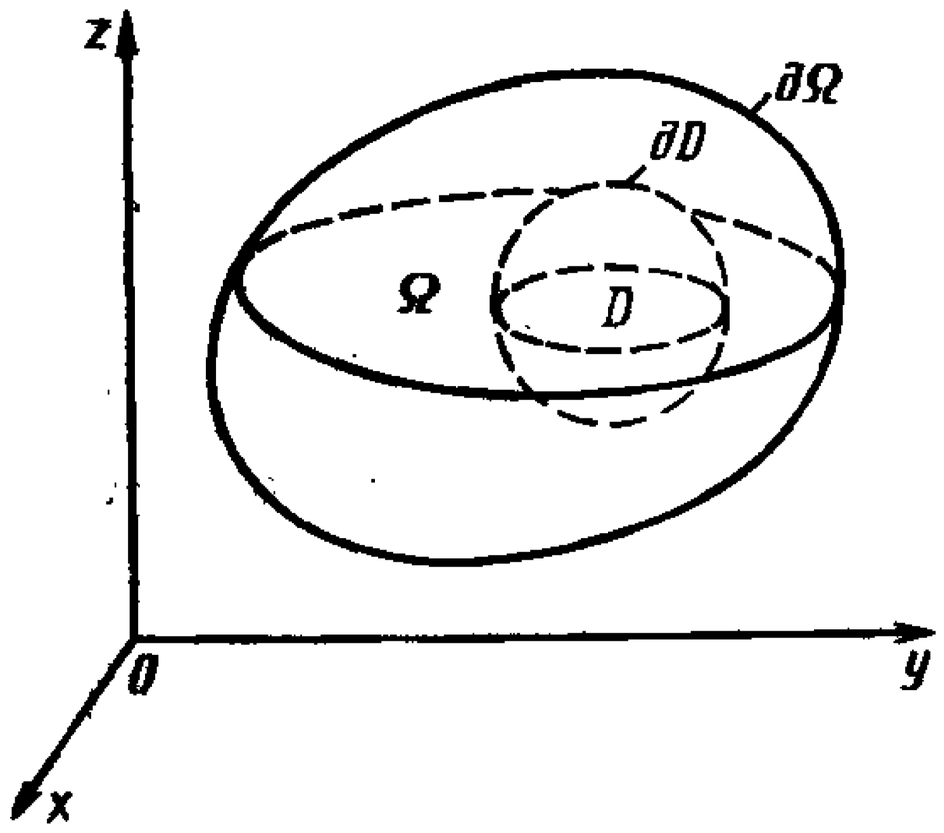


Рис. 3.1. Область в трехмерном пространстве

Решение (3.2) ищется в цилиндрической области $R = \Omega \times (0, \tau_m]$ с боковой поверхностью $\Sigma_\Omega = \partial\Omega \times (0, \tau_m]$, имеющей образующую, параллельную оси τ.

Предположим, что задано распределение температуры в начальный момент времени

$$T(P, 0) = \psi(P); \quad P \in \bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega \tag{3.3}$$

и известно граничное условие II-го рода

$$\frac{\partial T}{\partial n_\omega}\Big|_{\partial\Omega} = -\frac{q(\omega, \tau)}{\lambda} \equiv p(\omega, \tau), \quad \omega \in \partial\Omega, \quad \tau \geqslant 0, \tag{3.4}$$

согласованное с начальным распределением ($\dfrac{\partial \psi(P)}{\partial n_\omega}\Big|_{P \in \partial\Omega} = p(\omega, 0)$).

Здесь n_ω — направление внутренней нормали к поверхности $\partial\Omega$; λ — коэффициент теплопроводности тела.

Прямая задача ставится следующим образом: найти температурное поле $T(P, \tau)$ в области $\bar{\Omega}$, дважды непрерывно дифференцируемое по координатам x, y, z и непрерывно дифференцируемое по времени τ, удовлетворяющее уравнению теплопроводности (3.2), начальному (3.3) и граничному (3.4) условиям.

Пусть теперь внутри $\bar{\Omega}$ расположена область D с границей ∂D, причем поверхность $\partial\Omega$ охватывает поверхность ∂D. На границе ∂D задана температура

$$T|_{\partial D} = f(l, \tau), \quad l \in \partial D, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m, \tag{3.5}$$

согласованная с начальным условием, т.е. при $\tau = 0$

$$\psi(P)|_{P \in \partial D} = f(l, 0).$$

Граничные условия на поверхности $\partial\Omega$ неизвестны. Требуется решить обратную задачу — зная условие (3.5) и начальное распределение (3.3), найти плотность теплового потока $q(\omega, \tau)$ или, что то же самое, нормальную производную $\dfrac{\partial T}{\partial n_\omega}\Big|_{\partial\Omega} = p(\omega, \tau)$ во всех точках $\omega \in \partial\Omega$.

После этого определение температурного поля в области Ω будет соответствовать прямой задаче теплопроводности.

3.2.2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ, ПОСТРОЕННАЯ ПО МЕТОДУ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ

Вначале остановимся на одном из возможных подходов к решению обратной задачи, в основе которого лежит метод функций влияния точечных источников тепла (функций Грина). Если известна функция Грина G_{II} второй краевой задачи теплопроводности, то определение неизвестной функции $p(\omega, \tau)$ сводится к решению следующего интегрального уравнения I-го рода:

$$-\int_0^{\tau}\int_{\partial\Omega} p(\omega,\xi)\,G_{II}(l,\omega;\tau,\xi)\,dS_\omega\,d\xi=\gamma(l,\tau),\quad l\in\partial D,\quad 0<\tau\leqslant\tau_m,$$

где

$$\gamma(l,\tau)=f(l,\tau)-\int_{\Omega}\psi(P')\,G_{II}(l,P';\tau,0)\,dP'-$$

$$-\int_0^{\tau}\int_{\Omega} Q(P',\xi)\,G_{II}(l,P';\tau,\xi)\,dP'\,d\xi;$$

$\int_{\partial\Omega}\ldots dS_\omega$ – двойной интеграл по поверхности $\partial\Omega$; $\int_{\Omega}\ldots dP'$ – тройной интеграл по трехмерной области Ω; dS_ω – элемент поверхности $\partial\Omega$; $dP'=dx'\,dy'\,dz'$.

При достаточно общих предположениях относительно поверхности, ограничивающей область Ω ($\partial\Omega$ – должна быть поверхностью Ляпунова, см. разд. 3.2.3), в работе [97] построена функция Грина G_{II}. Она имеет вид

$$G_{II}(P,\omega^*;\tau,\xi)=U(P,\omega^*;\tau,\xi)+\int_{\xi}^{\tau}d\theta\int_{\partial\Omega}\sum_{k=0}^{\infty}2^k\nu_k(P,\omega;\tau,\theta)\times$$

$$\times\,U(\omega,\omega^*;\theta,\xi)\,dS_\omega, \qquad (3.6)$$

где

$$U(P,\omega^*;\tau,\xi)=\frac{1}{8[\pi(\tau-\xi)]^{3/2}}\exp\left[-\frac{r^2_{P\omega^*}}{4(\tau-\xi)}\right];$$

$r_{P\omega^*}$ – расстояние между некоторыми фиксированными точками;

$P\in\Omega$ и $\omega^*\in\partial\Omega$; $U(P,\omega^*;\tau,\xi)\equiv\nu_0(P,\omega^*;\tau,\xi)$;

$$\nu_k(P,\omega^*;\tau,\xi)=\int_{\xi}^{\tau}d\theta\int_{\partial\Omega}\nu_{k-1}(\omega,\omega^*;\theta,\xi)\frac{\partial U(P,\omega;\tau,\theta)}{\partial n_\omega}\,dS_\omega;$$

n_ω – направление внутренней нормали в точке $\omega\in\partial\Omega$. Ряд в выражении (3.6) сходится абсолютно и равномерно.

Таким образом, получена формальная запись интегрального урав-

нения для решения поставленной граничной ОЗТ, состоящей в определении плотности теплового потока на поверхности тела по измерениям температуры на некоторой внутренней поверхности ∂D. По мере удаления внутренних точек l от граничных ω, т.е. при увеличении расстояния $r_{l\omega}$, а также по мере стягивания поверхности ∂D в точку, обратная задача будет становиться все более трудной для решения.

Для целого ряда практически интересных областей Ω функция влияния может быть получена в виде достаточно простого или даже явного аналитического выражения (полупространство $x > 0$; бесконечная пластина $0 < x < b$; прямоугольный параллелепипед $0 < x < b$, $0 < y < c$, $0 < z < d$; двугранный угол величиной π/m, m – натуральное число; области, ограниченные внешними и внутренними сферическими или цилиндрическими поверхностями; конусы и т.д.). В этих условиях решение ОЗТ данным способом заметно упрощается. В общем же случае такой подход является весьма трудоемким, поскольку необходимо решить трехмерное интегральное уравнение I-го рода, где ядро и правая часть представляют собой функции, расчет которых сопряжен с многократным численным интегрированием и вычислением бесконечных рядов. Поэтому в следующем разделе предлагается другой общий аналитический подход к решению данной обратной задачи в краевой постановке.

3.2.3. ТЕПЛОВЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОЗТ

Введем новую зависимую переменную

$$u(P, \tau) = T(P, \tau) - T_0(P, \tau) - T_Q(P, \tau). \qquad (3.7)$$

Будем считать, что функция $T_0(P, \tau)$ непрерывно дифференцируема по направлению нормали n к $\partial\Omega$ всюду в $\bar{\Omega}$, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности ($Q(P, \tau) = 0$) в R и при $\tau = 0$ становится равной начальному распределению температуры $T_0(P, 0) = \psi(P)$, $P \in \bar{\Omega}$. Функция $T_Q(P, \tau)$ должна иметь непрерывную производную по n всюду в $\bar{\Omega}$, удовлетворять исходному уравнению (3.2) и обращаться в нуль в начальный момент времени $T_Q(P, 0) = 0$, $P \in \bar{\Omega}$. Тогда для определения $u(P, \tau)$ может быть сформулирована более простая краевая задача

$$\frac{\partial u(P, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(P, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(P, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(P, \tau)}{\partial z^2}, \quad (P, \tau) \in R; \qquad (3.8)$$

$$u(P, 0) = 0, \quad P \in \bar{\Omega}; \qquad (3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \bar{p}(\omega, \tau) \equiv p(\omega, \tau) - \frac{\partial T_0}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} - \frac{\partial T_Q}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}, \qquad (3.10)$$

$$(\omega, \tau) \in \Sigma_\Omega.$$

Сведение к однородной постановке (3.8) – (3.10) может быть осуществлено при следующем выборе вспомогательных функций:

$$T_0(P, \tau) = \int\limits_{\Omega} \psi(P')\, G(r_{P'P}, \tau)\, dP'; \tag{3.11}$$

$$T_Q(P, \tau) = \int\limits_0^{\tau} \int\limits_{\Omega} Q(P', \xi)\, G(r_{P'P}, \tau - \xi)\, dP'\, d\xi, \tag{3.12}$$

где $G(r_{P'P}, \tau - \xi)$ – фундаментальное решение трехмерного уравнения теплопроводности:

$$G(r_{P'P}, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{8(\pi t)^{3/2}} \exp\left[- \dfrac{r^2_{P'P}}{4t} \right], & t > 0 \\ 0, \quad t \leqslant 0 \\ (\text{кроме} \quad t = 0, \quad r_{P'P} = 0); \end{cases}$$

$r_{P'P}$ – расстояние между точками $P'(x', y', z')$ и $P(x, y, z) \in \Omega$:

$$r_{P'P} = |P' - P| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Пусть функция $\psi(P)$ является непрерывной в области $\bar{\Omega}$ и непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$. Предположим также, что функция $Q(P, \tau)$ обладает гельдеровской непрерывностью по P в $\bar{\Omega}$ равномерно по τ, т.е. для всех P и $P' \in \bar{\Omega}$ выполняется неравенство

$$|Q(P, \tau) - Q(P', \tau)| \leqslant A r^{\beta}_{PP'}, \tag{3.13}$$

где A и β – постоянные, $0 < \beta \leqslant 1$.

Условие равномерности по τ дополнительно требует, чтобы существовала некоторая наименьшая величина A, при которой условие (3.13) удовлетворяется при всех значениях τ.

Заметим, что для выполнения условия (3.13) недостаточно только непрерывности функции. В то же время, если скалярное поле $Q(P, \tau)$ для любого τ дифференцируемо в области $\bar{\Omega}$, т.е. дифференцируемо в каждой точке этой области, то функция $Q(P, \tau)$ заведомо удовлетворяет условию Гельдера для произвольного показателя $0 < \beta \leqslant 1$.

Указанные требования к функциям $\psi(P)$ и $Q(P, \tau)$, не являясь излишне ограничительными в плане практических приложений, позволяют обосновать справедливость представления (3.8) – (3.10) при использовании выражений (3.11) и (3.12)* В частности, решение $T(P, \tau)$ прямой задачи теплопроводности, отвечающее условиям (3.7), (3.8) – (3.10) при данном выборе функций $T_0(P, \tau)$, $T_Q(P, \tau)$ и непрерывной функции $p(\omega, \tau)$, $(\omega, \tau) \in \Sigma_{\Omega}$, существует и единственно.

---

*Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

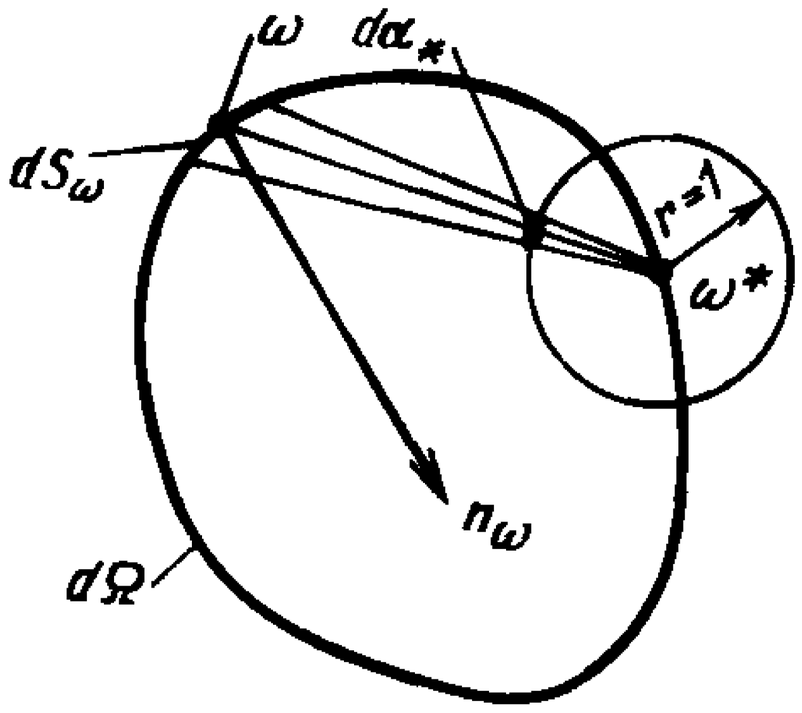


Рис. 3.2. Телесный угол $d\alpha_*$

Рассмотрим теперь задачу, обратную постановке (3.8) – (3.10), а именно, по известной функции

$$u|_{\partial D} = \varphi(l, \tau), \quad l \in \partial D, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m,$$

определить нормальную производную $\dfrac{\partial u}{\partial u_\omega}\Big|_{\partial\Omega}$ в точке ω границы $\partial\Omega$. Решив эту более простую задачу, можно найти искомую функцию $p(\omega, \tau)$ из выражения (3.10).

Для решения этой обратной задачи воспользуемся представлением температурного поля с помощью поверхностных тепловых потенциалов. Введем в рассмотрение тепловой потенциал простого слоя, создаваемый некоторыми простыми источниками, распределенными по граничной поверхности $\partial\Omega$:

$$U(P, \tau) = \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \nu(\omega, \xi)\, G(r_{\omega P}, \tau - \xi)\, dS_\omega\, d\xi, \tag{3.14}$$

$$P(x, y, z) \in \Omega, \quad \omega(\eta, \zeta, \gamma) \in \partial\Omega,$$

где функция $\nu(\omega, \xi)$ характеризует плотность источников.

Будем далее считать, что $\nu(\omega, \xi)$ – непрерывная на Σ_Ω функция и $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{1+\beta}$ (является поверхностью Ляпунова).

Заметим, что если $\partial\Omega$ дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, то она заведомо принадлежит классу $C^{1+\beta}$ с любым показателем β, т.е. более сильное условие $\partial\Omega \in C^2$ будет достаточным для дальнейшего рассмотрения.

При сделанных предположениях тепловой потенциал (3.14) удовлетворяет уравнению теплопроводности всюду в E_3 и при стремлении $\tau \to 0$ сходится к 0. Далее, производная потенциала $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ по направлению нормали к поверхности $\partial\Omega$ терпит разрыв I-го рода при переходе через Σ. Предельное значение нормальной производной в некоторой точке $\omega^* \in \partial\Omega$ (рис. 3.2), полученное изнутри области, т.е. когда $P \to \omega^*$, $P \in \Omega$ определяется формулой скачка*

$$\frac{\partial U(\omega^*, \tau)}{\partial n_{\omega^*}}\Big|_i = -\frac{\nu(\omega^*, \tau)}{2} + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \nu(\omega, \xi) \frac{\partial}{\partial n_{\omega^*}} \times \tag{3.15}$$

$$\times\, G(r_{\omega\omega^*}, \tau - \xi)\, dS_\omega\, d\xi.$$

---

*Мюнтц Г. Интегральные уравнения. М.–Л.:Гостехиздат, 1934. Ч. I. 330 с.

Потребуем теперь, чтобы функция $\nu(\omega, \xi)$ удовлетворяла входным условиям обратной задачи, а именно, для $P = l \in \partial D$ должно выполняться равенство

$$U(l, \tau) \equiv \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \nu(\omega, \xi)\, G(r_{\omega l}, \tau - \xi)\, dS_\omega\, d\xi = \varphi(l, \tau), \qquad (3.16)$$

$$0 < \tau \leqslant \tau_m,$$

где $\varphi(l, \tau) = f(l, \tau) - T_0(l, \tau) - T_Q(l, \tau)$. В этом случае решение вспомогательной краевой задачи (3.8) – (3.10) определится потенциалом $u(P, \tau) = U(P, \tau)$, $(P, \tau) \in R$, а искомая функция $p(\omega^*, \tau)$ будет вычисляться в соответствии с формулами (3.10) и (3.15):

$$p(\omega^*, \tau) = \bar{p}(\omega^*, \tau) + \frac{\partial T_0}{\partial n_{\omega^*}}\Big|_{\partial\Omega} + \frac{\partial T_Q}{\partial n_{\omega^*}}\Big|_{\partial\Omega},$$

где

$$\bar{p}(\omega^*, \tau) = -\frac{\nu(\omega^*, \tau)}{2} + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} \nu(\omega, \xi) \frac{\partial}{\partial n_{\omega^*}} G(r_{\omega\omega^*}, \tau - \xi) \times$$

$$\times\, dS_\omega\, d\xi.$$

Вычислим производную функции $G(r_{\omega\omega^*}, \tau - \xi)$ по направлению нормали

$$\frac{\partial}{\partial n_{\omega^*}} G(r_{\omega\omega^*}, \tau - \xi) = \frac{r_{\omega\omega^*}}{16\pi^{3/2}(\tau - \xi)^{5/2}} \exp\left[-\frac{r^2_{\omega\omega^*}}{4(\tau - \xi)}\right] \times$$

$$\times \cos(r_{\omega\omega^*}, n_{\omega^*}). \qquad (3.17)$$

С учетом (3.17) получим формулу

$$\bar{p}(\omega^*, \tau) = -\frac{\nu(\omega^*, \tau)}{2} + \frac{1}{16\pi^{3/2}} \int_{\partial\Omega} dS_\omega \int_0^\tau \nu(\omega, \xi) \frac{r_{\omega^*\omega}}{(\tau - \xi)^{5/2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{r^2_{\omega^*\omega}}{4(\tau - \xi)}\right] \cos(r_{\omega\omega^*}, n_{\omega^*}).$$

Таким образом, главная часть решения ОЗТ заключается в определении функции $\nu(\omega, \xi)$ из решения интегрального уравнения (3.16), которое является уравнением I-го рода, вольтерровым по τ и фредгольмовым по P. Отсюда следует, что решение (3.16) должно быть каким-то образом регуляризовано.

3.2.4. ТРЕХМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ПОСТАНОВКЕ КОШИ

Рассмотрим теперь другую форму решения граничной обратной задачи в трехмерном пространстве, соответствующую постановке Коши. Предположим, что на внутренней границе ∂D одновременно заданы температура и нормальная производная температуры (условия Коши):

$$T|_{\partial D} = f_1(l, \tau), \frac{\partial T}{\partial n_l}|_{\partial D} = f_2(l, \tau), \quad l \in \partial D, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m,$$

согласованные с начальным температурным распределением, где n_l — направление нормали к поверхности ∂D в точке l; f_1 и f_2 — известные функции.

Требуется определить функцию $p(\omega, \tau) = \frac{\partial T}{\partial n_\omega}|_{\partial \Omega}$ во всех точках $\omega \in \partial\Omega$ В остальном будем считать постановку ОЗТ тождественной рассмотренной выше. Сформулированную задачу можно назвать "внешней" ОЗТ в постановке Коши, поскольку граница с искомой функцией охватывает границу с исходными данными.

Пусть, как и раньше, исходная обратная задача сведена к однородной постановке, заданной условиями

$$\frac{\partial u(P, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(P, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(P, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(P, \tau)}{\partial z^2}, \quad (P, \tau) \in R; \quad (3.18)$$

$$u(P, 0) = 0, \quad P \in \bar{\Omega}; \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_l}|_{\partial D} = \bar{f}_2(l, \tau), \; u|_{\partial D} = \bar{f}_1(l, \tau), \; l \in \partial D, \; 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m, \quad (3.20)$$

где $\bar{f}_1 = f_1(l, \tau) - T_0(l, \tau) - T_Q(l, \tau)$; $\bar{f}_2 = f_2(l, \tau) - \frac{\partial T_0}{\partial n_l}|_{\partial D} - \frac{\partial T_Q}{\partial n_l}|_{\partial D}$.

Продолжим решение уравнения теплопроводности по данным Коши в сторону поверхности $\partial\Omega$, представив $u(P, \tau)$ в виде суммы тепловых потенциалов простого и двойного слоя $u(P, \tau) = U(P, \tau) + W(P, \tau)$, $P \in (\bar{\Omega} - \bar{D})$ Потенциал $U(P, \tau)$ определяется действием простых источников интенсивностью (плотностью) ν, помещенных на поверхности ∂D:

$$U(P, \tau) = \int_0^\tau \int_{\partial D} \nu(l, \xi) G(r_{lP}, \tau - \xi) dS_l d\xi, \quad P \in (\bar{\Omega} - \bar{D}),$$

$$l \in \partial D, \quad 0 < \tau \leqslant \tau_m.$$

Потенциал $W(P, \tau)$ создается дипольными источниками с осью диполя, направленной по внешней нормали к ∂D, когда с одной стороны поверхности ∂D на малом расстоянии $h/2$ от нее распределены положительные тепловые источники интенсивностью $\mu(l, \xi)/h$, а с другой – на том же расстоянии $h/2$ расположены отрицательные источники (стоки) – $\mu(l, \xi)/h$ (рис. 3.3):

$$W(P, \tau) = \int_0^\tau \int_{\partial D} \mu(l, \xi) \frac{\partial}{\partial n_l} G(r_{lP}, \tau - \xi)\, dS_l d\xi =$$

$$= \frac{1}{16\pi^{3/2}} \int_0^\tau \int_{\partial D} \mu(l, \xi) \frac{r_{lP}}{(\tau - \xi)^{5/2}} \exp\left[- \frac{r_{lP}^2}{4(\tau - \xi)} \right] \times$$

$$\times \cos(r_{lP}, n_l)\, dS_l d\xi.$$

От совместного действия простых и двойных источников внутри области $(\bar{\Omega} - \bar{D})$ реализуется некоторое температурное поле $u(P, \tau)$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности (3.18) и начальному условию (3 19), что следует из свойств тепловых потенциалов. При этом функции $u(P, \tau)$ и $\dfrac{\partial u(P, \tau)}{\partial n_l}$ переходят на границе ∂D в некоторые предельные значения u_e и $\dfrac{\partial u_e}{\partial n_l}$ (символ e означает подход по нормали к границе ∂D области D снаружи $P \to l$, $P \in \bar{\Omega} - D$) в соответствии с формулами перехода для потенциалов (полученными Г. Мюнтцем)

$$W_e(l^*, \tau) = - \frac{\mu(l^*, \tau)}{2} + \int_0^\tau \int_{\partial D} \mu(l, \xi) \frac{\partial}{\partial n_l} G(r_{ll^*}, \tau - \xi)\, dS_l d\xi;$$

$$\frac{\partial U(l^*, \tau)}{\partial n_{l^*}}\Big|_e = \frac{\nu(l^*, \tau)}{2} + \int_0^\tau \int_{\partial D} \nu(l, \xi) \frac{\partial}{\partial n_{l^*}} G(r_{ll^*}, \tau - \xi)\, dS_l d\xi.$$

Нормальная производная потенциала W и сам потенциал U непрерывны

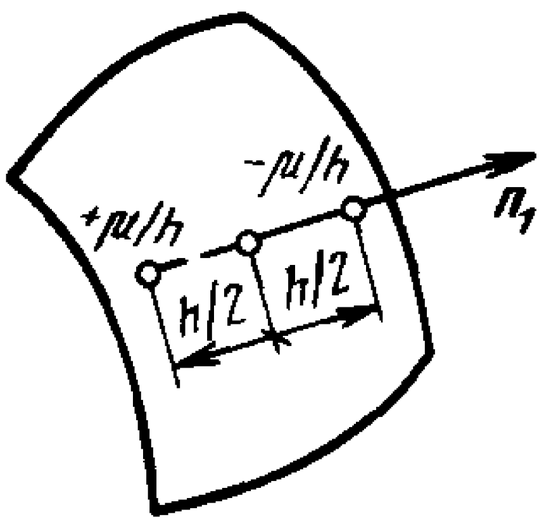


Рис. 3.3. Дипольные источники

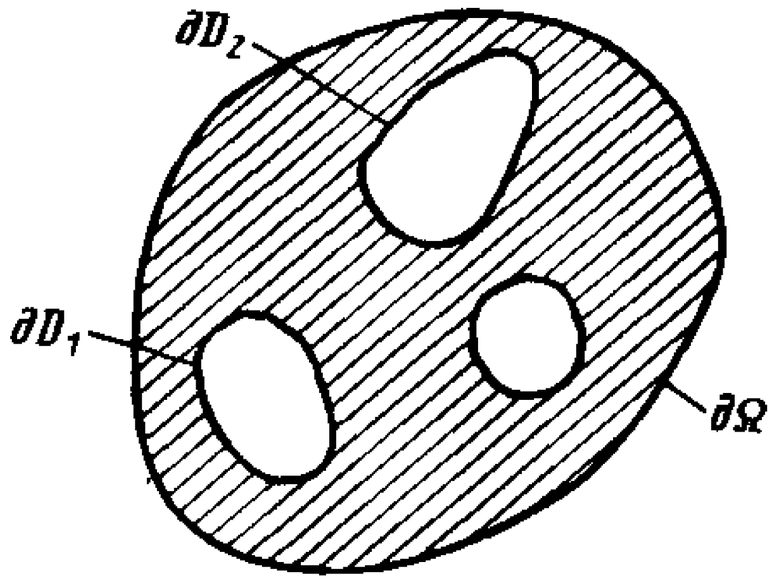


Рис. 3.4. Многосвязная область решения ОЗТ

при переходе через поверхность ∂D, и для этих функций такой переход выполняется чисто формально.

Итак, для определения неизвестных плотностей ν и μ потенциалов простого и двойного слоя служит следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\mu(l^*,\tau)}{2}+\int_0^\tau\int_{\partial D}\mu(l,\xi)\frac{\partial}{\partial n_l}G(r_{ll^*},\tau-\xi)\,dS_l d\xi+\\
&+\int_0^\tau\int_{\partial D}\nu(l,\xi)G(r_{ll^*},\tau-\xi)\,dS_l d\xi=\bar f_1(l^*,\tau);\\
&\int_0^\tau\int_{\partial D}\mu(l,\xi)\frac{\partial^2}{\partial n_l^2}G(r_{ll^*},\tau-\xi)\,dS_l d\xi+\frac{\nu(l^*,\tau)}{2}+\\
&+\int_0^\tau\int_{\partial D}\nu(l,\xi)\frac{\partial}{\partial n_{l^*}}G(r_{ll^*},\tau-\xi)\,dS_l d\xi=\bar f_2(l^*,\tau),
\end{aligned}\right\}\quad(3.21)$$

где

$$(l^*,\tau)\in\Sigma_D=\partial D\times(0,\tau_m].$$

Заметим, что (3.21) является системой линейных интегральных уравнений Вольтерра II-го рода (по τ) и для ее решения можно, в частности, использовать метод последовательных приближений.

После определения искомых функций $\mu(l^*,\tau)$ и $\nu(l^*,\tau)$ рассчитывается продолжение температурного поля $u(P,\tau)$, в области $0<\tau\leqslant\tau_m$, $P\in(\bar\Omega-\bar D)$. Этот процесс при больших удалениях рассматриваемых точек P от граничных l будет сопряжен со значительной потерей точности.

Отметим, что приведенная постановка ОЗТ удовлетворяет случаю, когда в твердом теле имеется внутренняя полость, на которой измеряются (или заданы) температура и плотность теплового потока. Аналогичный подход распространяется на "внутреннюю" задачу в постановке Коши, когда зависимости $f_1(\omega,\tau)$ и $f_2(\omega,\tau)$ известны на внешней границе $\partial\Omega$ области Ω и нужно решить задачу по продолжению температурного поля внутрь области Ω. При этом область Ω может быть многосвязной, ограниченной одной замкнутой поверхностью $\partial\Omega$, обнимающей все внутренние полости с границами ∂D_1, ∂D_2, ..., ∂D_n (рис. 3.4). Интегральная постановка этой задачи приведена в [6].

3.2.5. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше было сформулировано несколько постановок граничных обратных задач для трехмерного уравнения теплопроводности. Возможны и другие постановки, например, когда измерения температуры проводятся на некоторой незамкнутой поверхности внутри сплошного

тела, условно разделяющей его на части, или когда известны температурные данные и тепловой поток на части внешней поверхности тела (переопределенная граница), в то время как на другой ее части граничные условия не заданы (для прямоугольной двумерной области одна из таких задач рассмотрена в разд. 4.4).

Необходимо особо оговориться, что вопрос о свойствах и реализации трехмерных ОЗТ пока является открытым и требует изучения как в чисто математическом аспекте, так и с точки зрения создания расчетных алгоритмов для практического использования. В этом смысле представленные выше интегральные формы ОЗТ следует рассматривать как "заготовки", на основании которых возможно дальнейшее исследование методов и разработка регуляризованных алгоритмов.

Естественно, что переход к двумерным и трехмерным постановкам обратных задач сопряжен с существенным увеличением затрат машинного времени. Одновременно возрастает влияние на решение сглаживающих и запаздывающих факторов процесса теплопроводности, а также ошибок аппроксимации. Может даже оказаться, что ожидаемый выигрыш в точности оценок причинных характеристик теплообменных процессов, связанный с использованием более достоверной модели распространения тепла, в действительности не только не будет иметь место, но и наоборот, получится снижение точности результатов. Поэтому в каждом конкретном случае целесообразность перехода от одномерной постановки обратной задачи к двумерной, а от двумерной к трехмерной должна быть тщательно обоснована. Необходимо всегда стремиться к понижению размерности задачи за счет соответствующих конструктивных решений при разработке моделей, образцов и датчиков, предназначенных для экспериментальных исследований, а также введения ряда допустимых ограничений на программу испытаний.

В практических приложениях довольно часто можно считать, что процесс теплопроводности не зависит от одной пространственной координаты, например z, т.е. процесс протекает практически одинаково во всех плоскостях, параллельных рассматриваемой. Поэтому анализ плоского случая имеет самостоятельное значение, несмотря на то, что общий подход к построению интегральных форм двумерной ОЗТ в целом является тождественным трехмерному случаю. Соответствующие особенности в постановке двумерной ОЗТ рассмотрены в [6].

Выше были приведены интегральные постановки ОЗТ, которые получены при использовании таких известных методов решения прямых задач, какими являются метод функций Грина и метод тепловых потенциалов. Аналогичным образом можно получить и другие аналитические или приближенно-аналитические постановки ОЗТ, а в общем случае и других типов обратных задач, если воспользоваться теми или иными математическими методами, разработанными для прямых задач теплообмена.

3.3.МЕТОД ФИКТИВНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

3.3.1. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Решение граничных ОЗТ для областей сложной формы (двумерные и трехмерные задачи) и для областей с подвижными границами (одномерные и многомерные случаи) сопряжено с большими теоретическими и вычислительными трудностями. Кроме того, не всегда удается сделать процедуру решения достаточно универсальной, поскольку изменение геометрии области может повлечь за собой изменения в алгоритме и программе. Был предложен* способ решения одномерных ОЗТ с подвижными границами, позволяющий упростить алгоритмическую часть задачи. Имеются предпосылки для дальнейших полезных обобщений этого подхода, в том числе на случай многомерной постановки задачи. Рассмотрим основное содержание метода.

Пусть в некотором пространстве изменения координат тела задана область Ω с границей (поверхностью, линией, точками — в зависимости от размерности задачи) $\partial\Omega$. Внутри Ω содержится другая область D и на границе ∂D известна температура $T(P, \tau)$, $P \in \partial D$. При этом отдельные участки $\partial\Omega$ и ∂D могут быть общими. Обозначим через $\bar{\Omega}$ и $\bar{D}$ замыкания этих областей ($\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, $\bar{D} = D + \partial D$). Требуется найти температурное поле во всей области $\bar{\Omega}$.

Для ОЗТ в краевой постановке предлагается получать решение в четыре этапа.

I. Изменить геометрию областей $\bar{\Omega}$ и $\bar{D}$ таким образом, чтобы новые области $\bar{\Omega}'$ и $\bar{D}'$:

отвечали условиям вложения $\bar{\Omega} \subseteq \bar{\Omega}'$, $\bar{D} \supseteq \bar{D}'$, т.е. область $\bar{D}'$ по сравнению с $\bar{D}$ может быть сужена, в то время как $\bar{\Omega}'$ расширена;

позволяли сформулировать удобный и по возможности универсальный алгоритм решения обратной задачи для уравнения теплопроводности в области $\bar{\Omega}' - \bar{D}'$;

имели границы $\partial\Omega'$ и $\partial D'$, расположенные предельно близко к исходным границам $\partial\Omega$ и ∂D; это условие должно максимально уменьшить степень возрастания некорректности задачи за счет удаления $\partial\Omega'$ от границы с исходными данными; обычно границы $\partial\Omega'$ и $\partial\Omega$, а также $\partial D'$ и ∂D, имеют общие участки или точки

II. Пользуясь некоторым алгоритмом решения прямой задачи, найти температурное поле в области $\bar{D}$ и тем самым определить температуру $T^{*\prime}(\tau)$ и плотность теплового потока $q^{*\prime}(\tau)$ на границе $\partial D'$.

III. По данным $T^{*\prime}$ или $q^{*\prime}$ найти температуру T_Φ на границе $\partial\Omega'$ (см. разд. 3.2).

---

*Алифанов О.М. Определение граничного теплового режима из решения обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1974. Т. 26. № 2. С. 349–358.

IV. Используя полученные величины $T_{\Phi}(\tau)$ и $T^{*\prime}(\tau)$, решить прямую задачу в области $\bar{\Omega}' - D'$ и определить искомое граничное условие на $\partial\Omega$.

Для ОЗТ в постановке Коши изменение области решения обратной задачи ($\bar{\Omega} \to \bar{\Omega}'$) не является обязательным. В то же время может оказаться полезным переход $\bar{D} \to \bar{D}'$.

Таким образом, суть *метода фиктивных границ* заключается в преобразовании исходной обратной задачи в новую, более простую постановку без видоизменения исходного дифференциального уравнения. Например, в случае одномерной задачи с подвижными границами тела и перемещающимися точками измерений температуры такой подход состоит в замене исходных областей (x, τ), имеющих криволинейные границы, прямоугольными или трапециевидными областями, для которых разработка соответствующих вычислительных алгоритмов – более простая и более изученная задача. В частности, выбор шага $\Delta\tau$ при естественной регуляризации решения (см. разд. 2.3 и гл. 4), а также построение алгоритма, регуляризирующего решение по методу А.Н. Тихонова, выполняется значительно проще, нежели в исходном случае.

К недостатку такого подхода можно отнести фактическое ухудшение обусловленности ОЗТ за счет увеличения максимального расстояния от границы с искомым условием до границ с известными данными. При этом сглаживание и запаздывание по времени в передаче теплового сигнала может привести к тому, что изменение в искомом граничном условии на $\partial\Omega'$ практически не приведет к изменению температуры на границе $\partial D'$ в течение длительного времени. Очевидно, что если в подобной ситуации допустимые значения временных шагов окажутся слишком большими и точность восстановления граничного условия будет неудовлетворительной, то принцип регуляризации по величине расчетного шага при использовании метода фиктивных границ применить не удастся. Однако можно указать большое число практических задач, когда метод фиктивных границ не входит в противоречие с принципом шаговой регуляризации.

Во всех других случаях применение метода фиктивных границ сопряжено с использованием иных способов регуляризации. При этом полезно воспользоваться **особым приемом**, состоящим в расширении области по временной координате в сторону бóльших времен для компенсации потери информации о регистрируемой температуре в начале процесса*. Как показали специально поставленные исследования, такой прием дает возможность достаточно точно восстановить граничные условия методом регуляризации при значительной начальной потере информации об измеряемой температуре.

Заметим, что применение метода фиктивных границ наиболее полезно в тех случаях, когда уравнение теплопроводности является линейным и переход к новой области решения ОЗТ ($\bar{\Omega}' - D'$) позволяет построить (или использовать уже известную) функцию Грина в явном виде.

*Временной интервал, на котором регистрируется входная температура, берется большим, нежели временной интервал восстановления граничного условия.

3.3.2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ГРАНИЦ

Рассмотрим две практические задачи, ставящие своей целью определить условия на подвижных теплообменных границах тела по измерениям температуры внутри тела, имеющего постоянные ТФХ.

В первой задаче тепловой эксперимент поставлен при соблюдении условий одномерности температурного поля в теле. Требуется определить граничные условия на двух подвижных границах $X_1(\tau)$ и $X_4(\tau)$ (рис. 3 5) по известным временным зависимостям температуры в двух внутренних точках тела. Координаты этих точек могут изменяться с течением времени. Законы их движения $X_2(\tau)$ и $X_3(\tau)$, а также законы $X_1(\tau)$ и $X_4(\tau)$ известны. Следуя изложенному методу, выполним два преобразования для перехода к задаче с неподвижными границами исходных данных и неподвижными границами искомых функций (см. также разд. 2.2.3).

Первое преобразование – переход к новым входным данным $T_2(\tau)$ и $T_3(\tau)$ на некоторых прямых $x_2 = \text{const}$ и $x_3 = \text{const}$, которые получаются из решения прямой задачи теплопроводности в области $D_2 = \{ x \in \in [X_2(\tau), X_3(\tau)], \tau \in [0, \tau_m] \}$ (см. рис. 2.1 и 2.2). Для определенности примем $x_2 = X_{2\max}$ и $x_3 = X_{3\min}$ (предполагается, что $X_{3\min} > X_{2\max}$). Если входные функции заданы в неподвижных точках, то, очевидно, такого преобразования не требуется. Второе преобразование – окончательный переход к прямоугольным областям $D_1' = \{ x \in [0, x_2], \tau \in \in [0, \tau_m] \}$ и $D_3' = \{ x \in [x_3, X_{4\max}], \tau \in [0, \tau_m] \}$, включающим в себя области D_1 и D_3 ($D_1 \subseteq D_1'$, $D_3 \subseteq D_3'$).

Решим теперь обратные задачи по определению фиктивных температур $T_{\Phi 1}(\tau)$ и $T_{\Phi 4}(\tau)$, соответствующих границам $x = 0$ и $x = X_{4\max}$. Это можно сделать через интеграл Дюамеля с использованием принципа суперпозиции решений. Например, для $T_{\Phi 1}$ имеем следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^\tau T_{\Phi 1}(\xi) \frac{\partial \vartheta(x_2, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi = g(\tau), \quad \tau \in (0, \tau_m],$$

где $g(\tau) = T_2(\tau) - \int_0^\tau T_3(\tau) \frac{\partial \vartheta(x_3 - x_2, \tau - \xi)}{\partial \tau} d\xi$; $\vartheta(x, \tau - \xi)$ – решение первой краевой задачи в области $x \in [0, x_3]$ при условии нулевой температуры на границе $x = 0$ и единичной на другой.

Последний шаг определения искомых условий на границах $X_1(\tau)$ и

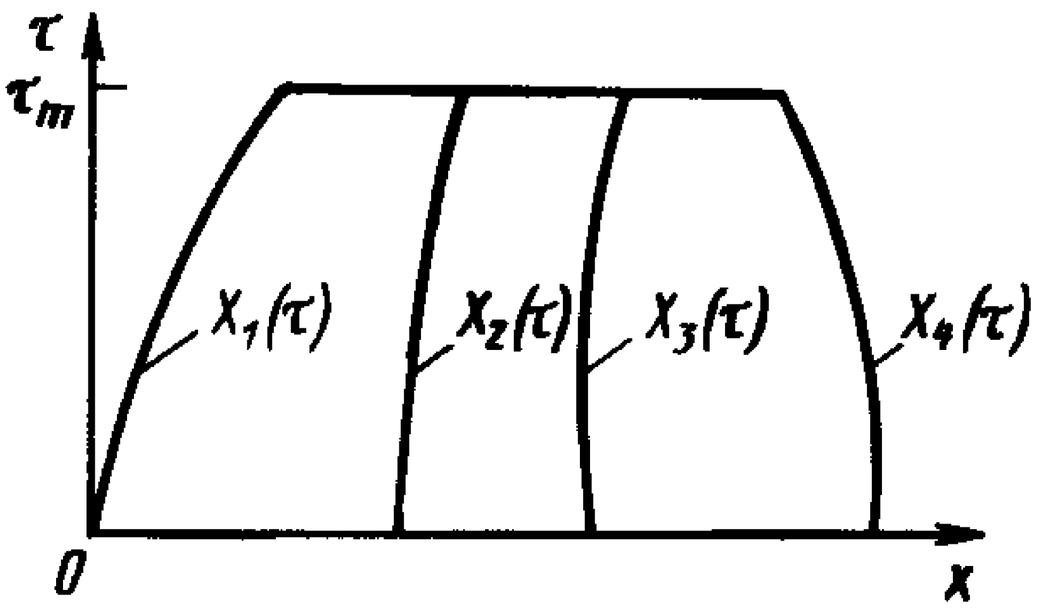


Рис. 3.5. Область с подвижными границами

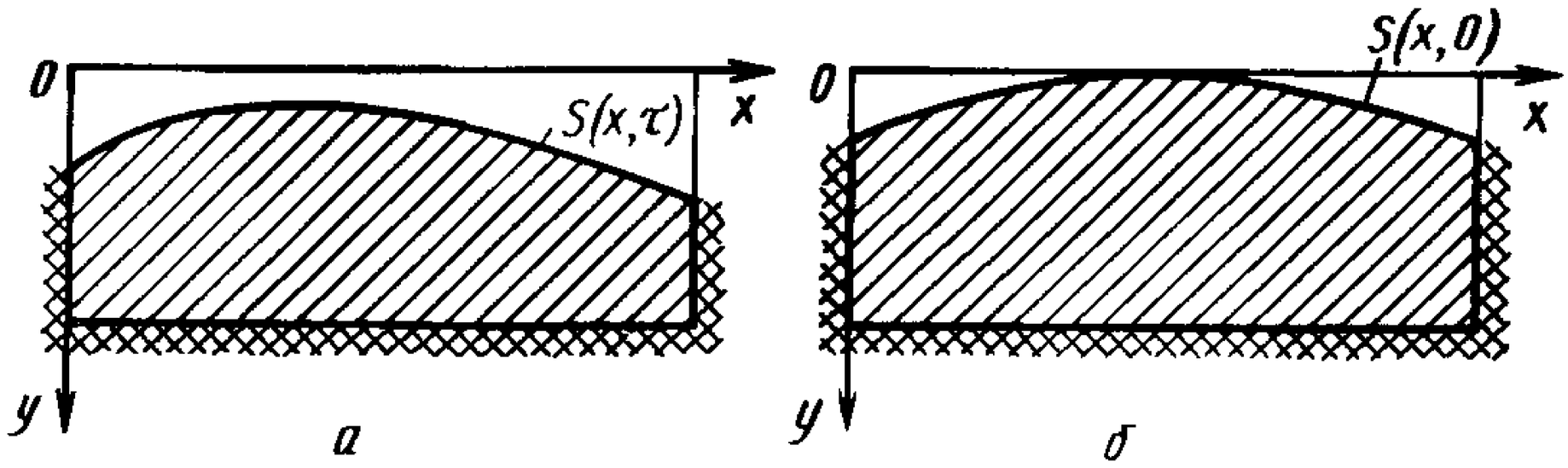


Рис. 3.6. Двумерная область пространственных переменных с подвижной границей: *а* – текущее положение границы; *б* – начальное положение границы

$X_4(\tau)$ заключается в решении прямых задач теплопроводности соответственно в D'_1 и D'_3. Эти задачи не представляют принципиальных трудностей. Методика их решения может основываться на принципе Дюамеля или теории тепловых потенциалов.

Во второй задаче условия эксперимента соответствуют двумерному процессу теплопроводности в области, образованной тремя прямолинейными отрезками, два из которых параллельны, третий – перпендикулярен к ним, и одной криволинейной границей (рис. 3.6). Криволинейная граница тела в тепловом отношении является активной и может перемещаться внутрь тела за счет уноса массы по известному закону $S(x, \tau)$. На стороне области, противоположной подвижной границе, осуществляются температурные замеры. Требуется определить температуру уносимой границы.

Введем прямоугольную систему координат (x, y) таким образом, чтобы ось x в начальный момент времени $\tau = 0$ касалась точки криволинейной границы, отстоящей на наибольшее расстояние от границы с известной температурой, а ось y совпадала с боковой стороной области (рис. 3.6). Формализуем задачу следующим образом:

$$\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a\left[\frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial y^2}\right], \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\tau \in (0, \tau_m];$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega};$$

$$\frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T(b, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T(x, c, \tau)}{\partial y} = 0, \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$T(x, c, \tau) = T^*(x, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$T(S(x, \tau), \tau) = ?, \quad \tau \in (0, \tau_m],$$

где $\Omega = \{x \in (0, b), \quad y \in (S(x, y), c)\}$.

Поскольку исходные данные известны на одной прямолинейной границе, то отпадает необходимость в построении области $\bar{D}'$. В качестве области $\bar{\Omega}'$ целесообразно взять прямоугольник $x \in [0, b]$, $y \in [0, c]$, для которого известен явный вид функции влияния G, соответствующей второй краевой задаче (см. разд. 4.4). Тогда решение ОЗТ в облас-

ти $\bar{\Omega}'$ будет равносильно решению двумерного интегрального уравнения относительно плотности теплового потока $q_\Phi(x', \xi)$ на фиктивной границе $y = 0$:

$$\frac{a}{\lambda} \int_0^\tau \int_0^b q_\Phi(x', \xi)\, G(x, c; x', 0; \tau - \xi)\, dx'\, d\xi = f(x, c, \tau), \quad (3.22)$$

где $f(x, c, \tau) = T^*(x, \tau) - T_0$.

Уравнение (3.22) — это линейное интегральное уравнение I-го рода, имеющее вольтерров характер по времени и фредгольмов по пространственной координате. Его решение должно быть регуляризовано на основе принципов, указанных в разд. 2.3.

После определения $q_\Phi(x', \xi)$ решается прямая задача теплопроводности в области $\bar{\Omega}'$ и находится температура на границе $S(x, \tau)$.

Можно привести много других известных для практики постановок задач, укладывающихся в рамки изложенного подхода. Так, большое значение имеют обратные задачи в осесимметричной постановке. Подобные модели теплопроводности широко распространены при исследовании тепловых режимов различных конструктивных элементов. В этих случаях в качестве расширенных областей $\bar{\Omega}'$ берутся сплошные и полые цилиндры, конусы и шары.

Выводы

1. Основываясь на методах функций Грина и тепловых потенциалов, получены аналитические постановки граничных обратных задач теплопроводности в виде интегральных уравнений первого и второго рода.

2. Изложен метод фиктивных границ, позволяющий упростить алгоритмы расчета тепловых граничных условий при решении обратных задач с подвижными границами и в областях сложной геометрической формы.

ГЛАВА 4
ПРЯМОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК

4.1. ПОСТРОЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА

В практике нестационарных тепловых экспериментов, в том числе экспериментов по исследованию тепловых режимов конструкций ЛА и стартовых комплексов, широкое распространение получили методы определения тепловых нагрузок, основанные на алгебраическом решении интегральных форм ОЗТ в краевой постановке. Начиная с работ [108, 118, 111, 2], предложен ряд схем решения фактически одних и тех же обратных задач. В связи с этим возникает необходимость формулирования некоторых общих критериев для сравнительного анализа

алгоритмов данного типа, тем более, что в своем большинстве они строятся на примерно одинаковых принципах численного решения.

В данной главе исследуется *шаговый способ естественной регуляризации* решений ОЗТ, эвристическая трактовка которого была дана в разд. 2.3. Применительно к линейным постановкам задач, рассматриваемых в областях с фиксированной геометрией, излагаются принципы построения вычислительных алгоритмов и анализируются условия их практического использования. Если следовать методу фиктивных границ, предложенному в разд. 3.3, то полученные ниже результаты непосредственно применимы также и к задаче определения тепловых нагрузок для тел, границы которых перемещаются в процессе нагрева вследствие уноса массы. Общий подход к аппроксимации принципиально не изменится и в случае интегральных форм обратных задач с подвижными границами (см. [1, 3]).

Рассмотрим вычислительный аспект алгебраического метода решения. Выше было показано, что для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами граничные обратные задачи имеют общее интегральное представление (3.1). Заменим уравнение (3.1) приближенным дискретным аналогом. Для этого разделим полный временной отрезок на конечное число интервалов с переменными шагами: $\Delta\tau_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, $n = \overline{1, m}$ и перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u(\xi) K(\tau_n - \xi)\, d\xi = f(\tau_n),\ n = \overline{1, m}.$$

Введем ступенчатую аппроксимацию искомой функции $u(\tau)$, полагая ее равной постоянному значению $\hat{u}_n$ на каждом интервале. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \Delta\vartheta_{in} = f_n, \quad n = \overline{1, m}, \tag{4.1}$$

где

$$f_n = f(\tau_n), \quad \Delta\vartheta_{in} = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} K(\tau_n - \xi)\, d\xi.$$

Для вычисления коэффициентов $\Delta\vartheta_{in}$ можно было бы воспользоваться конечно-разностной аппроксимацией, однако этого не нужно делать по следующей причине. В соответствии с принципом Дюамеля [45, 102] решение линейного уравнения теплопроводности для граничного условия $u(\tau)$, $\tau > 0$, заданного на одной из границ тела ($x = 0$) при нулевом дополнительном условии на другой границе ($x = b$), может быть записано в виде

$$T(x, \tau) = \int_0^{\tau} u(\xi) \frac{\partial\vartheta(x, \tau - \xi)}{\partial\tau}\, d\xi,$$

где $\vartheta(x, \tau)$ – решение данной краевой задачи при $u(\tau) = 1$.

Таким образом, ядро интегрального уравнения (3.1) представляет собой производную по времени от "единичного" решения соответствующей краевой задачи теплопроводности: $K(\tau - \xi) = \dfrac{\partial \vartheta(d, \tau - \xi)}{\partial \tau}$. Поэтому, зная точное решение ϑ, запишем выражение для коэффициентов алгебраической системы $\Delta\vartheta_{in} = \vartheta(d, \tau_n - \tau_{i-1}) - \vartheta(d, \tau_n - \tau_i)$. Такой прием позволяет уменьшить ошибки, связанные с переходом к вычислительной форме задачи.

После аппроксимации получим систему линейных алгебраических уравнений $\mathbf{A}_\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$, $\mathbf{u} = \{\hat{u}_i\}_1^m$, $\mathbf{f} = \{f_n\}_1^m$ с нижней треугольной матрицей

$$\mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_{11} & & & & & \\ \Delta\vartheta_{12} & \Delta\vartheta_{22} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\vartheta_{1m} & \Delta\vartheta_{2m} & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta\vartheta_{mm} \end{bmatrix}.$$

Определитель матрицы $\mathbf{A}_\Delta$ равен произведению ее диагональных элементов: $\det \mathbf{A}_\Delta = \Delta\vartheta_{11}\, \Delta\vartheta_{22} \ldots\ldots \Delta\vartheta_{mm}$. Из физического смысла величины $\vartheta(d, \tau)$ следует, что все $\Delta\vartheta_{in} > 0$. Отсюда $\det \mathbf{A}_\Delta \neq 0$. Следовательно, матрица $\mathbf{A}_\Delta$ теоретически является невырожденной и существует обратная матрица $\mathbf{A}_\Delta^{-1}$. С формальной точки зрения решение системы (4.1) не представляет труда. Легко получить следующую рекуррентную формулу, позволяющую шаг за шагом найти все компоненты m-мерного вектора $\mathbf{u}$:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\Delta\vartheta_{nn}} \left(f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \hat{u}_i \Delta\vartheta_{in}\right), \quad n = \overline{1, m}. \tag{4.2}$$

Чтобы завершить построение данного алгоритма, необходимо указать, каким точкам временного интервала будут соответствовать найденные значения $\hat{u}_n$. Приведенная процедура решения может рассматриваться как многократное применение теоремы о среднем – ищутся такие величины $\hat{u}_n$, которые дают одинаковые площади под истинной и ступенчатой кривыми на каждом интервале. Если бы были известны точки τ'_n, соответствующие каждому среднему значению u'_n, то погрешности аппроксимации сводились бы к минимуму. Однако найти точки усреднения не представляется возможным. Поэтому будем считать, что значения $\hat{u}_n$, рассчитанные по формуле (4.2), относятся к средним точкам каждого временного интервала.

Рассмотрим теперь наиболее интересный для практики случай, когда временные шаги принимаются постоянными и равными $\Delta\tau = \dfrac{\tau_m}{m}$. Учет этого условия позволяет существенно упростить вычислительный алгоритм. Дело в том, что при постоянном $\Delta\tau$ матрица $\mathbf{A}_\Delta$ обладает свойством подиагонального равенства элементов $\Delta\vartheta_{1n} = \Delta\vartheta_{2,\,n+1} = \ldots = \Delta\vartheta_{m-n+1,\,m}$, т.е. равны коэффициенты с одинаковой разностью индексов. В связи с этим введем новое обозначение $\Delta\vartheta_{n-i} \equiv \Delta\vartheta_{in} = \vartheta(d,\ \Delta\tau(n-i+1)) - \vartheta(d,\ \Delta\tau(n-i))$ и перепишем формулу (4.2):

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\Delta\vartheta_0}\left(f_n - \sum_{i=1}^{n-1} \hat{u}_i\,\Delta\vartheta_{n-i}\right), \quad n = \overline{1,\ m}. \tag{4.3}$$

Следовательно, вместо $\dfrac{m(m+1)}{2}$ коэффициентов матрицы необходимо рассчитывать и хранить в памяти ЭВМ всего m коэффициентов.

В работах [6, 40] приведены выражения коэффициентов $\Delta\vartheta_{n-i}$ и правых частей f_n для ряда постановок ОЗТ, имеющих широкое распространение в тепловых исследованиях ЛА.

4.2. О ВОССТАНАВЛИВАЕМОСТИ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Завершив формальную часть вычислительного алгоритма, проанализируем его состоятельность. Исходная задача (3.1) является неустойчивой — малые уклонения правой части могут привести к большой погрешности решения (см. разд. 2.1.2). Естественно предположить, что задача (3.1) становится все более неустойчивой, если степень влияния искомой функции $u(\tau)$ на температуру в точке $x = d$ уменьшается. С этим свойством непосредственно связана принципиальная возможность приближенного восстановления $u(\tau)$ по заданной функции $f(\tau)$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

В выражении (4.3) любой коэффициент $\Delta\vartheta_{n-i} = \vartheta_{n-i+1} - \vartheta_{n-i}$ можно интерпретировать как значение температуры в точке $x = d$ в момент времени $t = \Delta\tau(n-i)$, соответствующее действию импульса граничного условия единичной величины (со стороны теплообменной поверхности с искомым условием) в течение времени $[t = -\Delta\tau,\ t = 0)$ (рис. 4 1, *а*). При этом на другой поверхности тела во все моменты времени поддерживается нулевое граничное условие. Такая интерпретация следует из линейности задачи, позволяющей использовать принцип суперпозиции решений. В данном случае "суммарное" решение $\Delta\vartheta_{n-i}$ представляется разностью температур: $\vartheta_{n-i+1}(\tau)$, которая соответствует граничному условию в форме положительной "ступеньки" единичной величины на всей временной оси от момента $t = -\Delta\tau$, и $\vartheta_{n-i}(\tau)$, соответствующей отрицательной единичной ступеньке с началом

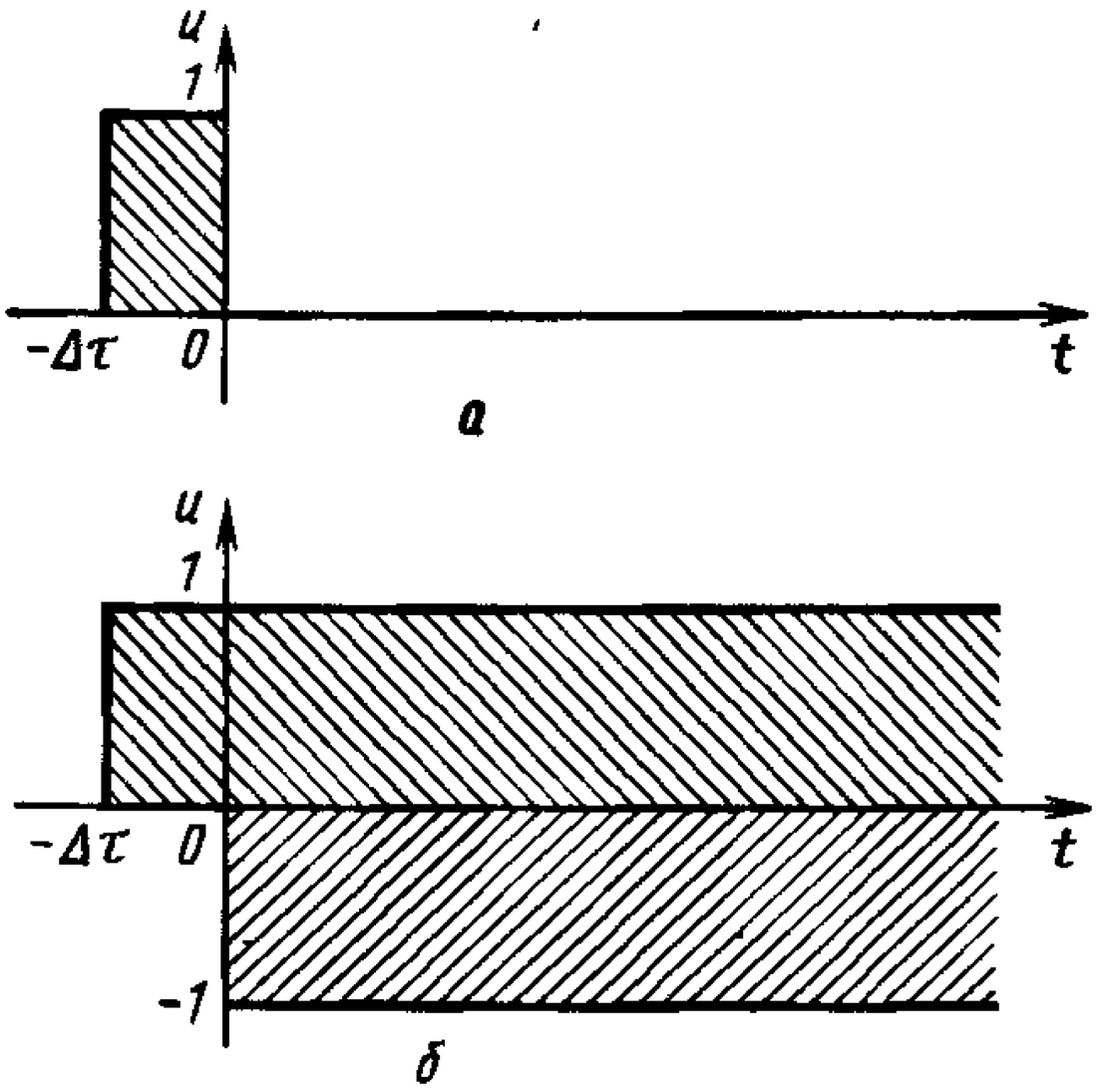


Рис. 4.1. Суперпозиция ступенчатых функций:
а – единичный импульс граничной функции; *б* – положительное и отрицательное граничные воздействия, суперпозицией которых является импульс граничной функции

в момент $t = 0$ (рис. 4.1, *б*). Отсюда, разностным аналогом точечного источника является единичный импульс, действующий на протяжении одного временного шага. Естественно, что по мере уменьшения $\Delta\tau$ температурные отклики $\Delta\vartheta_{n-i}$ уменьшаются по величине, стремясь к нулю. Можно представить ситуацию, когда погрешности, связанные с усечением бесконечных рядов при вычислении коэффициентов матрицы $\mathbf{A}_\Delta$ и правой части $\mathbf{f}$, а также ошибки округления при счете на ЭЦВМ, станут сравнимы с величиной некоторых элементов матрицы $\mathbf{A}_\Delta$. Очевидно, что в этом случае использование прямого метода окажется бесполезным. Для точек, заглубленных в тело, более быстро будут стремиться к нулю при уменьшении $\Delta\tau$ коэффициенты, стоящие на главной диагонали $\Delta\vartheta_0$. Поскольку определитель матрицы $\mathbf{A}_\Delta$ для $\Delta\tau = \text{const}$ равен $\det \mathbf{A}_\Delta = (\Delta\vartheta_0)^m$, то для некоторого шага $\Delta\tau$, большего того значения, при котором мог бы проявиться эффект практического обнуления элементов $\Delta\vartheta_0$, матрица $\mathbf{A}_\Delta$ окажется в окрестности вырожденной матрицы, и изложенный выше способ ее обращения не будет иметь смысла. Это произойдет тем раньше, чем меньше будет коэффициент температуропроводности тела a и больше удаление точки d от теплообменной границы. В этой связи можно ввести понятие *восстанавливаемости* граничного условия по решению $T(d, \tau)$ прямой задачи теплопроводности, понимая под этим свойство исходной постановки ОЗТ, заключающееся в единственности и точности ее приближенного решения на рассматриваемом временном интервале для заданной входной функции. Например, если точка $x = d$ расположена настолько глубоко, что практически не "чувствует" изменений в граничном условии в течение данного промежутка времени, то имеем задачу (3.1) в однородной постановке со следующими условиями: $f(\tau) \sim 0$, $K(\tau - \xi) \sim 0$.

Такая задача при вычислительной реализации имеет бесконечное множество решений, т.е. проявляется так называемая практическая неоднозначность решений, связанная с различного рода погрешностями.

Восстанавливаемость граничного условия будет определяться не только качеством входной информации и тепловой глубиной точки $x = d\,(\delta_T = d/\sqrt{a})$, но также и алгоритмом решения обратной задачи.

Например, описанный выше прямой метод рекуррентного типа (когда значения граничной функции находятся последовательно в каждый момент времени) не может обеспечить необходимое качество восстановления граничного условия, если существует начальный период инвариантности измеренной температуры к граничному условию, и шаг аппроксимации по времени должен браться меньше этого периода. В этом случае элементы матрицы и правая часть задачи исчезающе малы, и неопределенность решения на начальном интервале не позволит продолжить вычисления по рекуррентной формуле.

Естественно, что уклонение приближенного решения от точного для данного метода будет зависеть также от погрешности аппроксимации исходной задачи. В прямых методах, использующих принцип естественной регуляризации по шагу вычисления, можно указать некоторый оптимальный шаг, при котором точность решения является максимальной. При малых шагах $\Delta\tau$ приближенные решения ОЗТ значительно отличаются от искомого вследствие явления неустойчивости, в то же время при больших $\Delta\tau$ существенными становятся ошибки аппроксимации. Поэтому всегда желательно иметь шаг вычислений как можно ближе к минимальному значению, гарантирующему требуемую гладкость результатов.

Таким образом, главный вопрос практического использования прямого алгебраического метода решения ОЗТ заключается в надлежащем выборе величины расчетного шага, т.е. в формулировании *принципа шаговой регуляризации* решения обратной задачи.

4.3. ПРИНЦИП ШАГОВОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА

4.3.1. ДОПУСТИМЫЕ ШАГИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ШАГОВОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

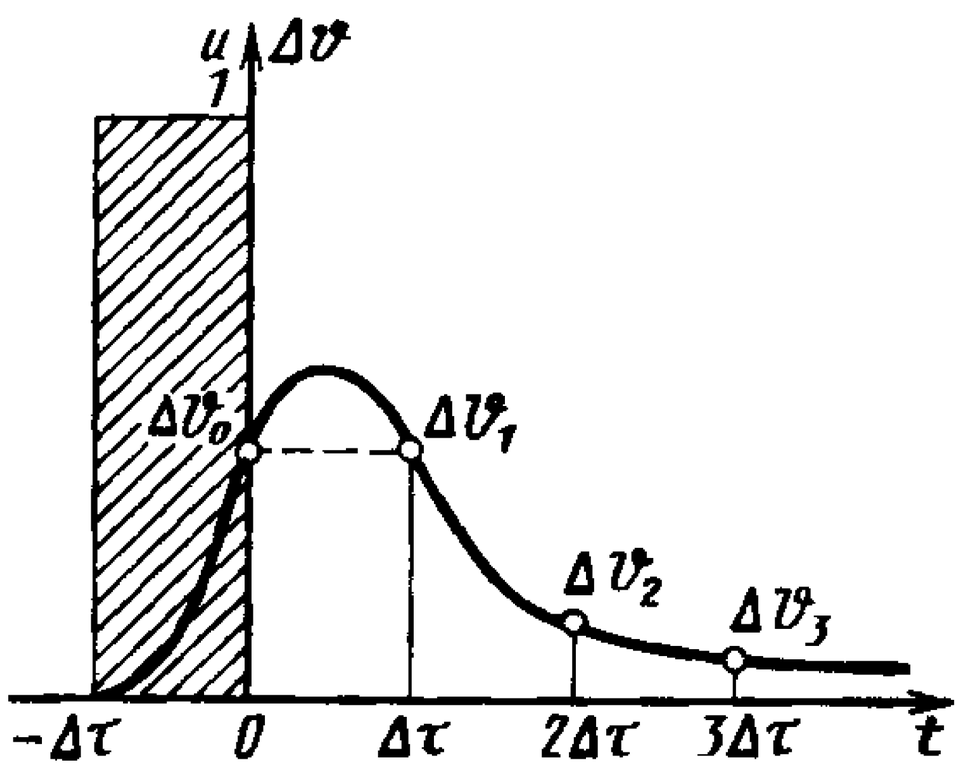
Введем понятие *критического шага* временной аппроксимации граничной обратной задачи $\Delta Fo_{кр}$. Этим значением будем разграничивать область устойчивых результатов, отвечающую условию $\Delta Fo \geqslant \Delta Fo_{кр}$ и неустойчивых ($\Delta Fo < \Delta Fo_{кр}$). Вообще, более правильно говорить о допустимом значении (или диапазоне значений) $\Delta Fo_{доп}$, при котором приближенное решение обладает разумной (физически обоснованной) гладкостью, т.е., если при $\Delta Fo < \Delta Fo_{доп}$ решение содержит нежелательные осцилляции, то при $\Delta Fo > \Delta Fo_{доп}$, наоборот, может происходить нежелательное сглаживание тонкой структуры решения за счет аппроксимационной фильтрации полезной информации, соответствующей физически объяснимым частотам в решении. Кроме того, с ростом ΔFo все сильнее проявляется систематическая погрешность аппроксимации, приводящая к "уходу" восстанавливаемой кривой от истинных значений.

Как показывают расчеты, при использовании изложенного выше прямого метода "срыв" вычислительного процесса в область неустойчивости обычно происходит в сравнительно узком диапазоне чисел ΔFo и поэтому в данном случае можно пользоваться понятием $\Delta F_{кр}$.

Воспользуемся известным из линейной алгебры фактом, что возрастание по абсолютной величине коэффициентов матрицы A_Δ, расположенных на главной диагонали (в сравнении с другими коэффициентами), приводит к улучшению *обусловленности* матрицы. Достигнуть этого можно за счет увеличения шага по времени, так как ядра соответствующих интегральных уравнений $K(\tau - \xi)$ имеют максимумы $K_{max} = K(\tau - \xi^*)$ (при $\xi \to \tau, K(\tau - \xi) \to 0$). Физически это означает, что при воздействии единичного граничного условия на одной поверхности и нулевого на другой скорость увеличения температуры T в рассматриваемой точке после прохождения момента времени $\xi = \xi^*$ начинает уменьшаться. Исключение составляет случай теплоизолированной с одной стороны пластины, когда по известной на ней (или в некоторой ее окрестности) температуре определяется граничное условие на другой стороне. В этом случае ядро интегрального уравнения представляет собой монотонно возрастающую функцию, асимптотически стремящуюся к постоянному значению.

Для других обратных задач существует такое число $\Delta\bar{F}o$, что при $\Delta Fo > \Delta\bar{F}o$ элементы, стоящие на диагонали A_Δ, окажутся наибольшими. В частности, если используется ступенчатая аппроксимация граничного условия II-го рода с равными интервалами, то для полубесконечного тела такая ситуация наступает при значениях $\Delta Fo > \nu$, $\nu \simeq 1$. Можно показать, что достаточным условием устойчивости результатов по отношению к возмущению входных данных $f(\tau)$ в этом случае будет равенство коэффициентов:

$$\Delta\vartheta_0 = \Delta\vartheta_1. \qquad (4.4)$$



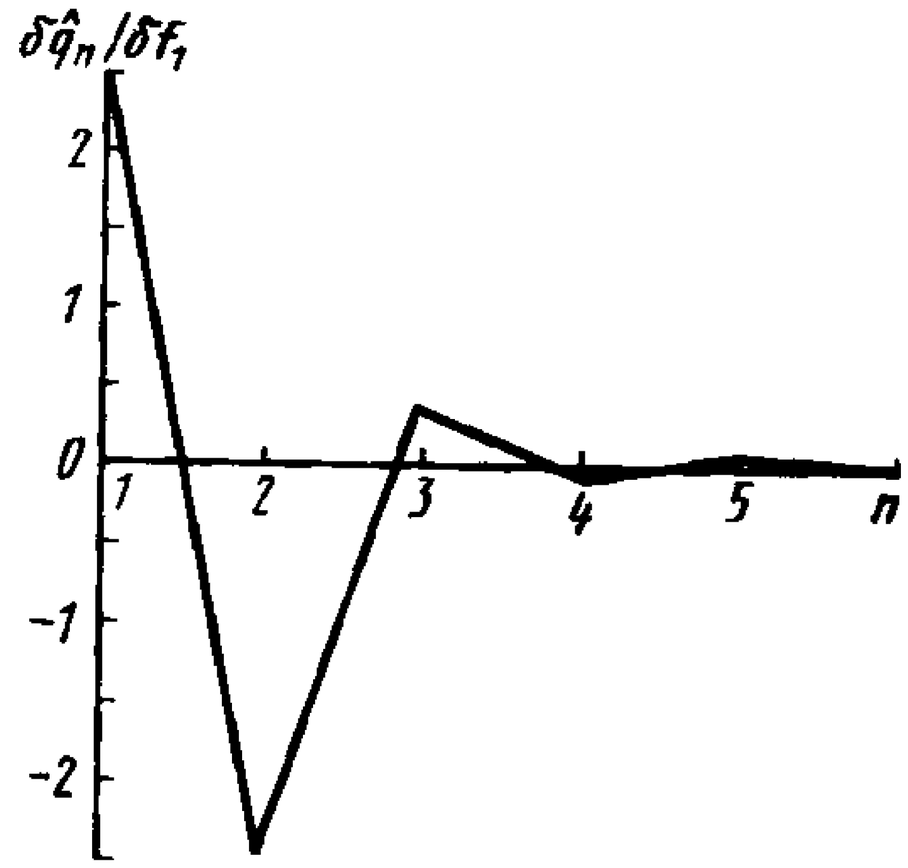


Рис. 4.2. Изменение величины $\Delta\vartheta(t)$ при значении шага $\Delta\tau$, соответствующем условию устойчивости: $\Delta\vartheta_0 = \Delta\vartheta_1$

Рис. 4.3. Изменение относительной ошибки в плотности теплового потока на границе термически толстой стенки при действии локального возмущения во входных данных ($\Delta Fo_d = 1$)

Поскольку функция $\Delta\vartheta(t)$, представляющая собой изменение температуры в точке $x = d$ при действии единичного импульса u, унимодальная и при выполнении условия (4.4) ее максимум располагается между точками $t = 0$ и $t = \Delta\tau$, то остальные коэффициенты при этом будут удовлетворять неравенствам (рис. 4.2)

$$\Delta\vartheta_1 > \Delta\vartheta_2 > \Delta\vartheta_3 > \ldots .$$

Рассмотрим следующий пример, характеризующий способ точечной ошибки. Пусть величина f_1 получила возмущение δf_1. Это возмущение приведет к погрешности вычисления величин $\hat{u}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Будет ли влияние δf_1 на $\hat{u}_n$ с течением времени возрастать или не будет зависит от того, является ли алгоритм неустойчивым или устойчивым к ошибкам во входной информации. Проследим за поведением погрешности в решении для нескольких первых временных шагов. Обозначим эту погрешность $\delta\hat{u}_n = \hat{u}_n - \tilde{u}_n$. Тогда из формулы (4.3) получим

$$\frac{\delta\hat{u}_1}{\delta f_1} = \frac{1}{\Delta\vartheta_0};$$

$$\frac{\delta\hat{u}_2}{\delta f_1} = -\frac{1}{\Delta\vartheta_0}\,\frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta\vartheta_0};$$

$$\frac{\delta\hat{u}_3}{\delta f_1} = -\frac{1}{\Delta\vartheta_0}\left[\frac{\Delta\vartheta_2}{\Delta\vartheta_0} - \left(\frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta\vartheta_0}\right)^2\right]; \qquad (4.5)$$

$$\frac{\delta\hat{u}_4}{\delta f_1} = -\frac{1}{\Delta\vartheta_0}\left[\frac{\Delta\vartheta_3}{\Delta\vartheta_0} - 2\,\frac{\Delta\vartheta_1\,\Delta\vartheta_2}{(\Delta\vartheta_0)^2} + \left(\frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta\vartheta_0}\right)^3\right];$$

$$\frac{\delta\hat{u}_5}{\delta f_1} = -\frac{1}{\Delta\vartheta_0}\left[\frac{\Delta\vartheta_4}{\Delta\vartheta_0} - 2\,\frac{\Delta\vartheta_1\,\Delta\vartheta_3}{(\Delta\vartheta_0)^2} + 3\,\frac{(\Delta\vartheta_1)^2\cdot\Delta\vartheta_2}{(\Delta\vartheta_0)^3} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\Delta\vartheta_2}{\Delta\vartheta_0}\right)^2 - \left(\frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta\vartheta_0}\right)^4\right]$$

и т.д.

Для устойчивости результатов, т.е. когда

$$\Delta\hat{u}_2 \geqslant \Delta\hat{u}_3 \geqslant \Delta\hat{u}_4 \geqslant \ldots,$$

необходимо, чтобы положительные и отрицательные члены в каждом из этих выражений в конечном счете компенсировали друг друга. Можно ожидать, что это условие будет соблюдено при таком значении ΔFo, которое дает равенство (4.4). Результаты расчета для термически толстого тела показаны на рис. 4.3.

4.3.2. О СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ РАСЧЕТНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Изложенный выше принцип выбора шага аппроксимации в прямом алгебраическом методе решения ОЗТ соответствует достаточному условию устойчивости, т.е. рекомендованная величина приращения числа Фурье оказывается больше критического значения $\overline{\Delta Fo} > \Delta Fo_{кр}$.

При динамическом характере изменения граничного теплового режима увеличение временного шага может привести к определенному искажению результатов из-за большой погрешности аппроксимации искомой функции. Как показали вычислительные эксперименты, имеется возможность значительно уменьшить значения ΔFo по сравнению с полученными оценками до появления заметной нерегулярности решения при условии, что входные данные обладают достаточной гладкостью. Предлагаемый ниже способ позволяет находить критическое значение шага $\Delta Fo_{кр}$ без экспериментального "нащупывания" границы неустойчивости с помощью решения многочисленных методических примеров.

Степень близости дискретной формы обратной задачи (4.1) к исходной интегральной постановке (3.1) определяется величиной безразмерного временно́го шага ΔFo, который не может быть сделан асимптотически малым. Для устойчивого решения задачи нужно выбрать такой интервал времени, начиная с момента очередного ступенчатого изменения функции $\hat{u}(\tau)$, при котором в точке $x = d$ температурная реакция тела на это изменение будет хорошо различима. Время "ожидания" нужного отклика (шаг дискретизации ΔFo) будет полностью определяться ядром интегрального уравнения. Если данная функция имеет монотонно убывающий вид, то это означает, что наибольшее изменение температуры, появившееся вследствие возмущения граничного условия в момент $\tau = \tau^*$, также приходится на момент τ^* – временно́е запаздывание отсутствует. Естественно ожидать, что такая ОЗТ будет достаточно "хорошей", поскольку тепловой сигнал передан данной точке тела мгновенно. Именно такой случай соответствует предельной постановке обратной задачи, когда по измерениям температуры на поверхности тела требуется восстановить тепловой поток, поступающий в тело – *псевдообратная задача.*

В том же случае, когда термодатчик установлен внутри тела на расстоянии d от теплообменной поверхности, информация о структурных изменениях в граничном условии дойдет до рассматриваемой точки в менее ярко выраженном виде. Затухание причинного явления для глубоких точек будет значительным, а участок кривой $T(d, \tau)$, соответствующий наибольшему приращению температуры (который интуитивно можно рассматривать как наиболее насыщенный информацией об изменении в граничном условии), начнет проявляться через некоторое время $\Delta\tau_m$ после подачи сигнала на поверхности тела. Можно, поэтому, предположить, что попытка восстановления входного сигнала с использованием только части температурной информации, полученной за время $\tau^* + \Delta\tau$,

где $\Delta\tau$ заметно меньше $\Delta\tau_m$, вряд ли даст пригодные результаты, даже если температурные данные известны с хорошей точностью. Численные эксперименты подтверждают это предположение. Обратные задачи решались алгебраическим методом по результатам счета соответствующих прямых задач. Аппроксимация граничного условия в том и другом случае была использована одна и та же и с одинаковыми шагами по времени. При этом фактически исключались ошибки аппроксимации и оставались лишь ошибки округления при счете на ЭЦВМ, связанные с конечной разрядной сеткой. Вычисления велись с числами, по точности соответствующими десятичным числам с 10—11 знаками. Результаты расчетов показали, что при $\Delta\tau < \Delta\tau_m$ даже столь незначительные ошибки округления могли приводить к осциллирующим решениям ОЗТ. В то же время для всех $\Delta\tau \geqslant \Delta\tau_m$ решения имели устойчивый характер.

Свойство корректности псевдообратной задачи теплопроводности*, а также изложенные физические аспекты и их численное подтверждение позволили высказать следующую гипотезу: при использовании шаговой регуляризации алгебраического решения граничной ОЗТ допустимая с точки зрения устойчивости результатов величина временного интервала $\Delta\tau$ в ступенчатой аппроксимации граничного условия может быть взята приближенно равной, но не должна быть меньше времени между скачкообразным изменением кривой $\hat{u}(\tau)$ и максимальным проявлением этого мгновенного импульса в температуре рассматриваемой точки тела. Иначе, потребуем, чтобы при кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции значения $\Delta\mathrm{Fo}$ удовлетворяли условию $\Delta\mathrm{Fo}_l > \Delta\mathrm{Fo}_{l\,\mathrm{кр}} = \mathrm{Fo}_l^*$, $\Delta\mathrm{Fo}_l \simeq \Delta\mathrm{Fo}_{l\,\mathrm{кр}}$, где $\mathrm{Fo}_l^* = \dfrac{a(\tau-\xi)^*}{l^2}$ — число Фурье, соответствующее точке максимума $K(\tau-\xi)$; $l = d$ или b — в зависимости от решаемой задачи.

Тогда при использовании точной (или близкой к точной) входной информации алгебраическое решение (4.3) должно становиться достаточно гладким. Примеры расчета критических шагов в соответствии с предложенным способом приведены в [6], где представлены соответствующие формулы и графики для ряда постановок ОЗТ, распространенных в практике исследования тепловых режимов. Там же даны результаты численных расчетов, которые подтвердили высказанную гипотезу и показали, что этот способ нахождения $\Delta\mathrm{Fo}_{\mathrm{кр}}$ представляет удобный и универсальный прием в технике прямых методов решения интегральных форм граничных обратных задач теплопроводности. В качестве примера на рис. 4.4, *а* показаны результаты решения методической ОЗТ по восстановлению граничного условия I-го рода для пластины, на внутренней теплоизолированной стенке которой заданы точные значения температуры. При шаге $\Delta\mathrm{Fo}_b$, равном $\Delta\mathrm{Fo}_b^{\mathrm{кр}}$, решение имеет

---

*Алифанов О.М. Обратная задача теплопроводности // ИФЖ. 1973. Т.25. №3. С. 530–537.

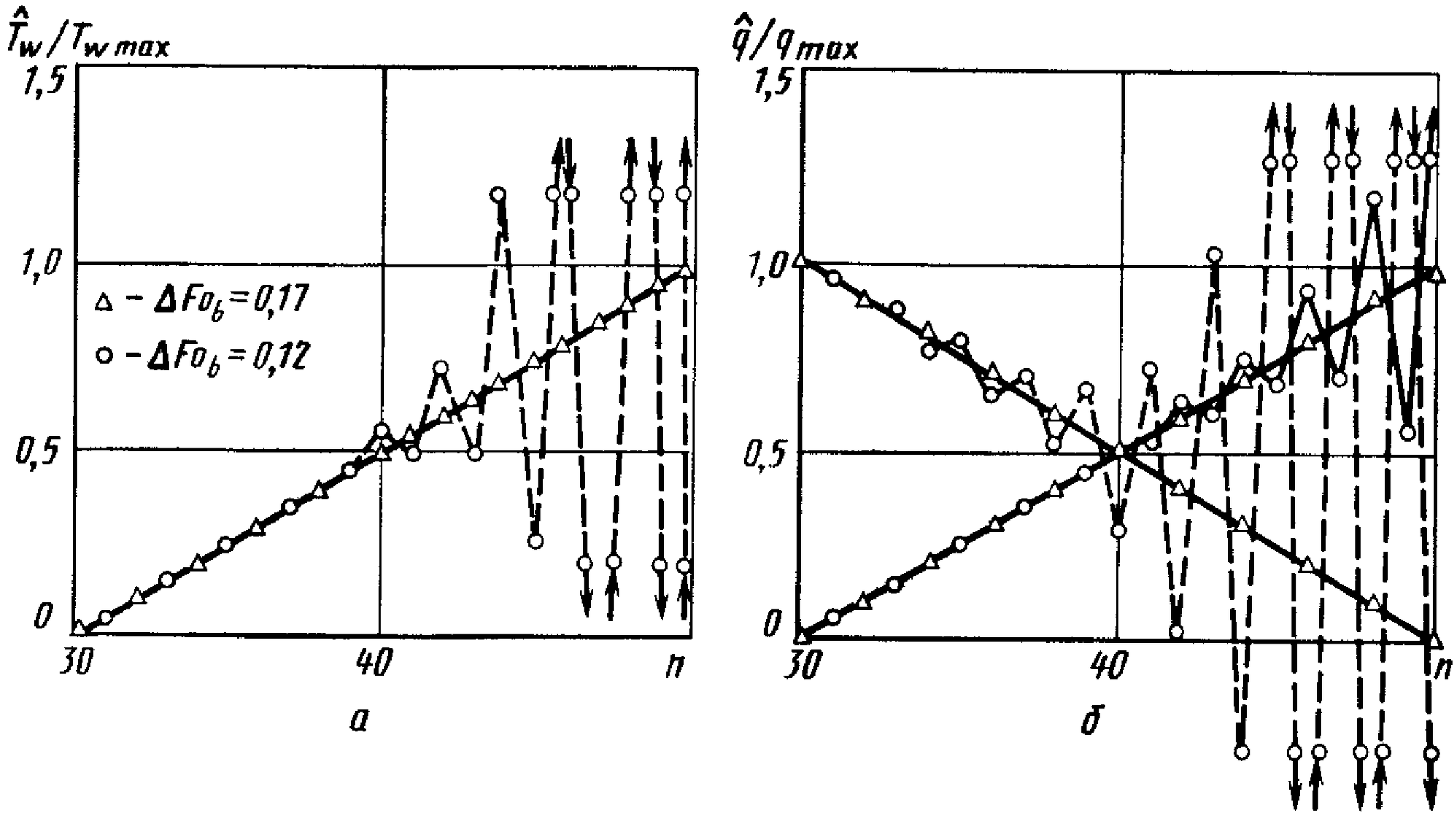


Рис. 4.4. Примеры расчета граничных условий для точных данных (сплошные кривые – искомые решения):
а – пластина, $d = b$, $\Delta \mathrm{Fo}_b^{\mathrm{кр}} \simeq 0{,}17$; *б* – пластина, $d = b$, $\Delta \mathrm{Fo}_b^{\mathrm{кр}} \simeq 0{,}5$

устойчивый характер, в то же время при несколько меньшем значении $\Delta \mathrm{Fo}_b$ оно начинает колебаться с большой амплитудой.

Что касается тех постановок ОЗТ, в которых ядра интегральных уравнений не достигают максимума на конечных временных интервалах, то можно найти потребную величину шага из условия [6] $\Delta\tau_{\mathrm{кр}} = \dfrac{l^2\,\mathrm{Fo}_l^{**}}{a}$, где Fo_l^{**} – число Фурье, при котором кривая $K(\mathrm{Fo}_l)$ с достаточной степенью точности приближается к своей асимптоте. Для плоской пластины при расположении датчика температуры на теплоизолированной стенке, противоположной границе с искомым тепловым потоком, $\Delta \mathrm{Fo}_{b\,\mathrm{кр}} \cong 0{,}5$ (см. рис. 4.4, *б*).

Замечание 1. Анализ свойств устойчивости прямого метода при решении обратных задач в различных краевых постановках [6] показал, что при прочих равных условиях основная характеристика устойчивости $\Delta \mathrm{Fo}_{b\,\mathrm{кр}}$ будет иметь наибольшее значение у обратной задачи во второй краевой постановке, а наименьшее у ОЗТ в постановке, соответствующей первой краевой задаче.

Замечание 2. Можно задаться целью улучшить качество аппроксимации задачи, применив кусочно-линейное или кусочно-квадратичное описание искомой функции. Однако переход к аппроксимации более высокого порядка неизбежно приводит к увеличению минимально допустимого шага $\Delta \mathrm{Fo}_{\mathrm{кр}}$ и поэтому может не дать лучших результатов [6].

Замечание 3. В том случае, когда входные данные обратной задачи

теплопроводности известны с ошибками, могут быть предложены два подхода к ее решению.

Первый предполагает предварительное сглаживание исходной температурной информации. При этом вопрос о выборе алгоритма сглаживания имеет первостепенное значение. Как показали результаты численного моделирования, если для сглаживания экспериментальных функций используется метод регуляризации А.Н. Тихонова с учетом второй производной в регуляризаторе (соответствующий алгоритм представлен в [1]) или метод сглаживающих кубических сплайнов [92, 117], то выбор $\Delta Fo_{кр}$ может осуществляться по предложенному выше способу.

Во втором подходе предварительного сглаживания не делается. Это исключает выбор расчетного шага по указанному способу, поскольку он не фильтрует случайные ошибки в исходных данных. В данном случае критерием выбора шага $\Delta Fo_{доп}$ может служить определенное согласование невязки температуры с величиной ошибки измерений. Если погрешность аппроксимации в некотором диапазоне шагов ΔFo оказывается значительно ниже ошибок задания правой части уравнения (3.1), то выбор числа интервалов $m (m = \tau_m / \Delta\tau)$ при определении граничной функции может производиться, например, из следующего условия для "взвешенной" среднеквадратичной невязки:

$$\sum_{n=1}^{m} \left[\frac{T_n(m) - T_n^*}{\bar{\sigma}_n} \right]^2 \cong m,$$

где $T_n(m)$ – температура в n-й момент времени, рассчитанная для m-мерного вектора $\mathbf{u}$, найденного по формуле (4.3); T_n^* – экспериментальное значение температуры в n-й момент времени.

Веса $\bar{\sigma}_n$ представляют собой оценки среднеквадратичной погрешности экспериментальных данных для n-х моментов времени.

Анализ этих двух подходов с точки зрения точности результатов говорит в пользу первого метода.

4.4. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Сформулируем основные принципы алгебраического решения интегральных форм ОЗТ в двумерной постановке, когда искомая функция $u(x, \tau)$ (температура поверхности тела, плотность теплового потока, плотность теплового потенциала) удовлетворяет интегральному уравнению

$$Au \equiv \int_0^{\tau} d\xi \int_0^{b} u(x', \xi) K(x, x'; \tau - \xi)\, dx' = f^*(x, \tau),$$

$$\tau \in (0, \tau_m], \quad x \in (0, b), \tag{4.6}$$

где $f^*(x, \tau)$ – заданная правая часть.

Пример. Рассмотрим обратную задачу в случае одностороннего нагрева плоской пластины (рис. 4.5). Предположим, что данная задача может быть сформулирована как двумерная, т.е. процесс нагрева одинаков во всех точках по оси z. Тогда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, d), \quad \tau \in (0, \tau_m];$$

$$T(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad x \in [0, b], \quad y \in [0, d];$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial y} = q(x, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$\frac{\partial T(x, d, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T(b, y, \tau)}{\partial x} = 0, \quad \tau \in [0, \tau_m],$$

где функция $q(x, \tau)$ неизвестна и требуется найти ее, используя дополнительное условие: задана температура на некоторой линии $y = y^* = \text{const}$, $0 < y^* \leqslant d$,

$$T(x, y^*, \tau) = f(x, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m].$$

Остановимся на краевой постановке этой обратной задачи, которая получается с помощью функции Грина $G(x, y; x', y'; \tau - \xi)$:

$$\frac{a}{\lambda} \int_0^{\tau} d\xi \int_0^{b} q(x', \xi)\, G(x, y^*; x', 0; \tau - \xi)\, dx' = \bar{f}(x, y^*, \tau), \qquad (4.7)$$

$$\tau \in (0, \tau_m], \quad x \in (0, b),$$

где

$$\bar{f}(x, y^*, \tau) = f(x, \tau) - \int_0^{b} dx' \int_0^{d} \psi(x', y')\, G(x, y^*; x', y'; \tau - \xi)\, dy';$$

$$G(x, y; x', y'; \tau - \xi) = \frac{1}{bd}\left\{1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \cos\frac{r\pi x}{b} \cos\frac{r\pi x'}{b} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{ar^2\pi^2(\tau - \xi)}{b^2}\right]\right\}\left\{1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \cos\frac{r\pi y}{d} \cos\frac{r\pi y'}{d} \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{ar^2\pi^2(\tau - \xi)}{d^2}\right]\right\}.$$

Уравнение (4.7) тождественно по форме уравнению (4.6).

Введем равномерную сетку с узлами $x_l = l\Delta x$, $l = \overline{0, L}$; $\tau_n = n\Delta\tau$, $n = \overline{0, m}$ и заменим функцию $u(x, \tau)$ вектором $\mathbf{u}$ с использованием

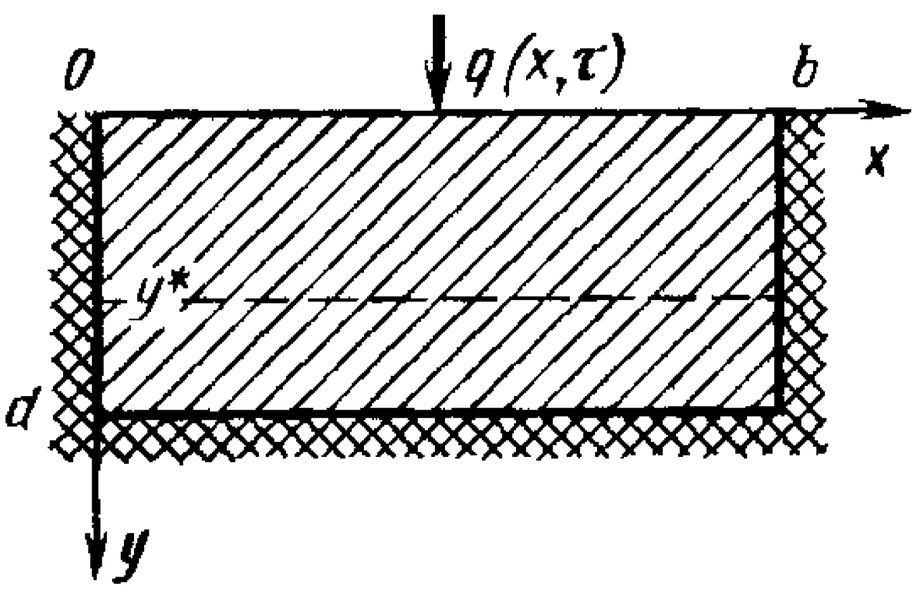


Рис. 4.5. Прямоугольная область пространственных переменных

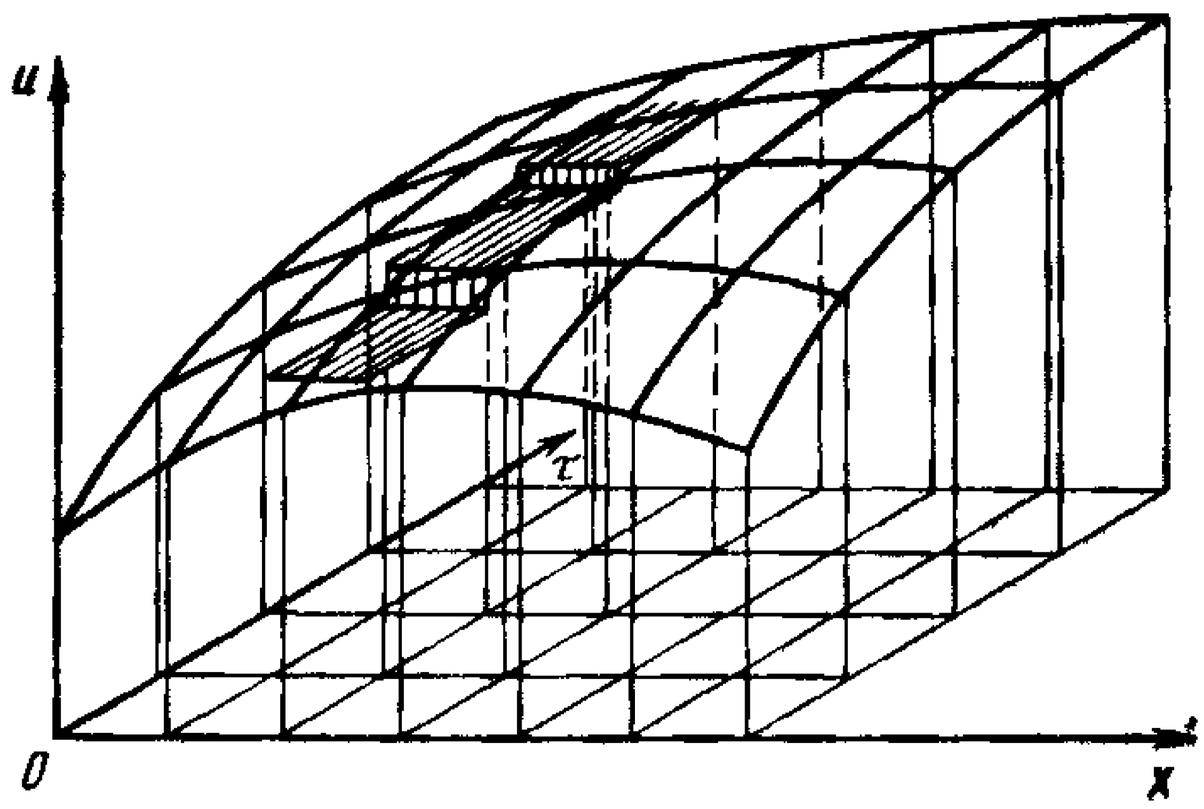


Рис.4.6. Ступенчатая аппроксимация поверхности $u(x, \tau)$

ступенчатой аппроксимации по времени и пространству, например в виде $\mathbf{u} = [u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{L1}; u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{L2}; \ldots; \tilde{u}_{1m}, \tilde{u}_{2m}, \ldots, \tilde{u}_{Lm}]^{\mathrm{T}}$, где $\tilde{u}_{ln} = \dfrac{\hat{u}_{l,n-1} + \hat{u}_{ln}}{2}$; $\hat{u}_{ln} = \dfrac{u_{l-1}(\tau_n) + u_l(\tau_n)}{2}$; $u_l(\tau_n) = u(x_l, \tau_n)$. Такое представление означает осреднение по пространственным и временным интервалам, в результате чего непрерывная поверхность $u(x, \tau)$ аппроксимируется "черепичной" поверхностью (рис. 4.6).

Вместо непрерывной правой части $f^*(x, \tau)$ возьмем соответствующий вектор $\mathbf{f}^*$:

$$\mathbf{f}^* = [f^*_{11}, f^*_{21}, \ldots, f^*_{L1}; f^*_{12}, f^*_{22}, \ldots, f^*_{L2}; \ldots; f^*_{1m}, f^*_{2m}, \ldots, f^*_{Lm}]^{\mathrm{T}}.$$

Используя квадратурные формулы, получим конечномерное (матричное) приближение к интегральному уравнению (4.6)

$$\mathbf{A}_\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}^*. \tag{4.8}$$

Заметим, что если ядро $K(x, x'; \tau - \xi)$ допускает аналитическое интегрирование по x' и ξ (например, уравнение (4.7)), то такой возможностью следует воспользоваться при определении элементов матрицы $\mathbf{A}_\Delta$ с целью повышения точности аппроксимации задачи.

Матрица $\mathbf{A}_\Delta$ имеет треугольно-блочную структуру

$$\mathbf{A}_\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & & & \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & & & & \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Матрицы-блоки $\mathbf{A}_{in}$ обладают свойством подиагонального равенства

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{22} = \ldots = \mathbf{A}_{mm} \equiv \mathbf{A}_0;$$

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{32} = \ldots = \mathbf{A}_{m,\,m-1} \equiv \mathbf{A}_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{A}_{m-1,\,1} = \mathbf{A}_{m2} \equiv \mathbf{A}_{m-2}.$$

Каждая матрица $\mathbf{A}_S$ – это квадратная матрица размерности L:

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1L} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{L1} & a_{L2} & \ldots & a_{LL} \end{bmatrix}_S, \quad S = \overline{0, m-1},$$

имеющая элементы, определяемые видом ядра уравнения (4.6).

Вычисление компонентов вектора $\mathbf{u}$ может базироваться на двух вариантах прямого метода.

Вариант I основан на однократном обращении матрицы $\mathbf{A}_0$ и рекуррентном расчете векторов $\mathbf{u}_n = [\tilde{u}_{1n}, \tilde{u}_{2n}, \ldots, \tilde{u}_{Ln}]^{\mathrm{T}}$ для фиксированных моментов времени (начиная с $n = 1$ до $n = m$) путем умножения $\mathbf{A}_0^{-1}$ на новую правую часть (сравнить с формулой (4.3)):

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A}_0^{-1}\left(\mathbf{f}_n^* - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}_{n-i}\,\mathbf{u}_i\right), \text{ где } \mathbf{f}_n^* = [f_{1n}^*, f_{2n}^*, \ldots, f_{Ln}^*]^{\mathrm{T}}.$$

Отметим, что элементы матриц $\mathbf{A}_S$, $S = \overline{0, m-1}$ и $\mathbf{A}_0^{-1}$ могут быть рассчитаны один раз для заданных значений Δx и $\Delta\tau$ и храниться на машинных носителях информации для последующих расчетов.

Поскольку процедура обращения матрицы может привести к большой потере точности, более целесообразно воспользоваться другим вариантом решения. Вариант II предполагает последовательное решение системы $\mathbf{A}_0\,\mathbf{u}_n = \mathbf{b}_n$, $n = \overline{1, m}$, в которой правая часть для каждого момента времени n дается рекуррентным выражением

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{f}_n^* - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}_{n-i}\,\mathbf{u}_i.$$

Изложенный алгоритм решения двумерной нестационарной обратной задачи нуждается в назначении некоторых регуляризирующих условий, которые определяют допустимую степень приближения к точному (неустойчивому) решению В противном случае могут быть получены неудовлетворительные результаты из-за чувствительности решения ОЗТ к погрешностям аппроксимации и входных данных Это основное свойство обратной задачи проявляется сильнее для двумерной постановки, нежели в одномерном случае

В большей степени сказываются запаздывающие и сглаживающие эффекты процесса теплопроводности в сочетании с дополнительными ошибками аппроксимации по переменной x. По этой причине прямые методы решения, основанные на шаговой регуляризации алгоритма, не будут столь же эффективными, как для одномерных ОЗТ и могут применяться только для сравнительно малодинамичных процессов нагрева с тепловыми потоками, слабоменяющимися вдоль теплообменной поверхности тела. Именно в этом случае ограничения, связанные с устойчивостью результатов и накладываемые на шаги аппроксимации, не будут противоречить требованиям точности, т.е. не приведут к значительному искажению вида искомых функций. Менее ограничительными с этой точки зрения являются другие принципы регуляризации данного алгоритма, изложенные в гл. 6—8

Выводы

1. Развит приближенно-аналитический метод решения граничных ОЗТ. В его основу положены интегральные формы постановок обратных задач и принцип шаговой регуляризации. Сформулированы условия, гарантирующие шаговую регуляризацию решения, и описаны конструктивные способы определения критических значений временных шагов.

2. Представлены алгоритмы решения линейных одномерных и двумерных граничных ОЗТ, даны рекомендации по их практическому использованию.

ГЛАВА 5
РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРЯМЫМИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

5.1. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ АЛГОРИТМОВ НА ОСНОВЕ ЯВНЫХ СХЕМ ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

5.1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОДХОД К РЕШЕНИЮ

При исследовании высокотемпературных процессов в конструкциях особое значение приобретают граничные ОЗТ в нелинейной постановке, когда ТФХ тела зависят от температуры. В частности, для многих металлов учет переменности коэффициентов теплопроводности и теплоемкости становится обязательным при температурах $T \geqslant 600 - 800^{\circ}$С. Общий подход к решению нелинеиных обратных задач состоит в применении численных методов Ниже исследуется возможность построения конечно-разностных алгоритмов восстановления теплового режима на границе одномерного тела, основанная на принципе *шаговой регуляризации процесса вычислений* при использовании внутренних свойств "вязкости" вычислительных алгоритмов.

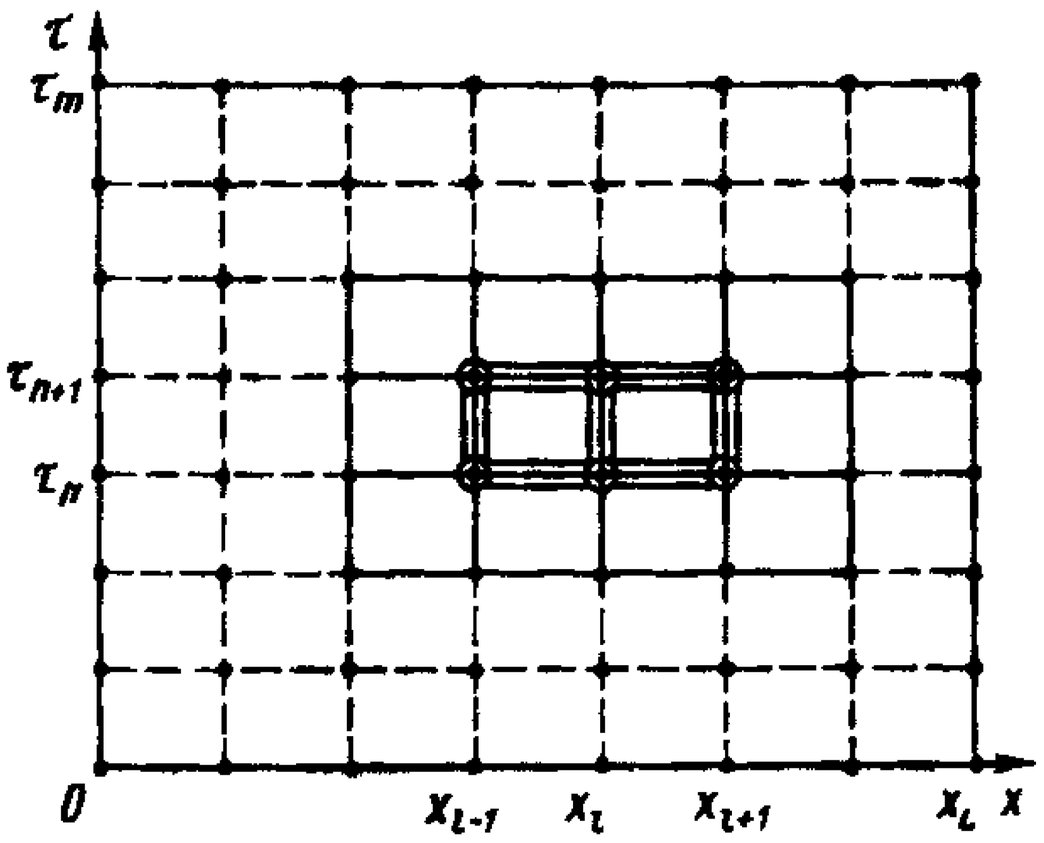


Рис. 5.1. Сеточная область и шаблон (расположение узлов схемы) численного решения уравнения теплопроводности

Рассмотрим нелинейную граничную обратную задачу теплопроводности. Будем считать, что тело имеет границы $[0, b]$ и на одной из них $(x = b)$ известен тепловой поток $q^*(\tau)$. Заданы температурные измерения $f(\tau)$ в некоторой точке $0 < d \leqslant b$ и начальное распределение $\varphi(x)$. Требуется определить температурное поле в теле и условия на границе $x = 0$ из условий

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \tag{5.1}$$

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, b]; \tag{5.2}$$

$$T(d, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]; \tag{5.3}$$

$$-\lambda(T(b, \tau))\frac{\partial T(b, \tau)}{\partial x} = q^*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \tag{5.4}$$

где $C(T)$, $\lambda(T)$, $\varphi(x)$, $f(\tau)$, $q^*(\tau)$ — заданные функции.

При использовании прямых методов решения данной задачи результаты чувствительны к погрешностям в задании ТФХ, причем гладкость результатов зависит от гладкости функций $\lambda(T)$ и $a(T) = \dfrac{\lambda(T)}{C(T)}$. Табличная форма представления коэффициентов в этом отношении не совсем удачна, поскольку приводит к дополнительным ошибкам вследствие операции интерполирования между узловыми точками. Кроме того, значения функций в узлах температурной сетки далеко не всегда задаются с учетом условий необходимой гладкости. Поэтому при решении нелинейной ОЗТ желательно представлять теплофизические свойства материала в виде некоторых аппроксимирующих зависимостей $\lambda(T)$, $a(T)$, удовлетворяющих условию непрерывной дифференцируемости.

В этом случае удобно перейти от уравнения (5.1) к другой, тождественной форме

$$\frac{1}{a(T)}\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\lambda'(T)}{\lambda(T)}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2, \quad x \in (0, b),$$

$$\tau \in (0, \tau_m], \tag{5.5}$$

где $\lambda' \equiv \dfrac{d\lambda}{dT}$.

Введем равномерную прямоугольную сетку $\{ x_l = \Delta x l,\ l = \overline{0, L};$ $\tau_n = \Delta \tau n,\ n = \overline{0, m} \}$ и запишем разностный аналог (5.5), используя неявную шеститочечную схему (рис. 5.1) при аппроксимации производной $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ на верхнем слое:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{ln} = \frac{T_{l+1,\,n+1} - 2T_{l,\,n+1} + T_{l-1,\,n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2);$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{ln} = \frac{T_{l+1,\,n} - T_{l-1,\,n}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2);$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \tau}\right|_{ln} = \frac{T_{l,\,n+1} - T_{ln}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau),$$

где $T_{ln} = T(\Delta x l,\ \Delta \tau n)$.

Откуда, полагая, что ТФХ оцениваются по температуре предыдущего временного слоя, получим

$$-\frac{a_{ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2} T_{l-1,\,n+1} + \left[1 + \frac{2a_{ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\right] T_{l,\,n+1} - \tag{5.6}$$

$$-\frac{a_{ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2} T_{l+1,\,n+1} = T_{ln} + \frac{a_{ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\,\frac{\lambda'_{ln}}{4\lambda_{ln}}\,(T_{l+1,\,n} - T_{l-1,\,n})^2,$$

где $a_{ln} = a(T_{ln}),\ \lambda_{ln} = \lambda(T_{ln}),\ \lambda'_{ln} = \lambda'(T_{ln})$.

Для дискретного представления плотности тепловых потоков $q(\tau)$ и $q^*(\tau)$ запишем разностные соотношения второго порядка точности, учитывающие накопление теплоты в выделенном элементе, толщиной Δx [27, 86, 114]:

$$q_{n+1} = \lambda_{0n}\,\frac{T_{0,\,n+1} - T_{1,\,n+1}}{\Delta x} + C_{0n}\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{0,\,n+1} - T_{0n}}{\Delta \tau};$$

$$q^*_{n+1} = \lambda_{Ln}\,\frac{T_{L,\,n+1} - T_{L-1,\,n+1}}{\Delta x} + C_{Ln}\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{L,\,n+1} - T_{Ln}}{\Delta \tau}, \tag{5.7}$$

где $C_{ln} = C(T_{ln})$.

Дискретная функция начального распределения температуры имеет вид

$$T_{l0} = \varphi(x_l),\ l = \overline{0, L}. \tag{5.8}$$

Соотношения (5.6) — (5.8) позволяют получить систему линейных

алгебраических уравнений для определения неизвестного теплового потока q_{n+1} и неизвестных температур $T_{l,\,n+1}$ ($l = 0, \ldots, \kappa - 1, \kappa + 1, \ldots, L$; T_κ – известная температура в точке $l = \kappa$ внутри тела):

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \tag{5.9}$$

где

$$\mathbf{y} = [z_L;\ T_{0,\,n+1};\ T_{1,\,n+1};\ \ldots;\ T_{\kappa-2,\,n+1};\ T_{\kappa-1,\,n+1};$$

$$T_{\kappa+1,\,n+1};\ T_{\kappa+2,\,n+1};\ \ldots;\ T_{L,\,n+1}]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
-1 & \beta_{0n} & \gamma_{0n} & & & & & & & & \\
 & \alpha_{1n} & \beta_{1n} & \gamma_{1n} & & & & & & & \\
 & & \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} & & & & & 0 & \\
 & & & \cdot & & & & & & & \\
 & & & & \cdot & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & & \\
 & & & & & \alpha_{\kappa-2,n} & \beta_{\kappa-2,n} & \gamma_{\kappa-2,n} & & & \\
 & & & & & & \alpha_{\kappa-1,n} & \beta_{\kappa-1,n} & & & \\
 & & & & & & & \alpha_{\kappa n} & \gamma_{\kappa n} & & \\
 & & & & & & & & \beta_{\kappa+1,n} & \gamma_{\kappa+1,n} & \\
 & 0 & & & & & & \alpha_{\kappa+2,n} & \beta_{\kappa+2,n} & \gamma_{\kappa+2,n} & \\
 & & & & & & & & \cdot & & \\
 & & & & & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & & & \alpha_{L-1,n} & \beta_{L-1,n} & \gamma_{L-1,n} \\
 & & & & & & & & & \alpha_{Ln} & \beta_{Ln}
\end{bmatrix};$$

$$z_L = \frac{2a_{0n}\,\Delta\tau}{\lambda_{0n}\,\Delta x}\,q_{n+1} + T_{0n};\quad \beta_{ln} = 1 + 2\frac{a_{ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2},\quad l = \overline{0, L};$$

$$\alpha_{ln} = \gamma_{ln} = -\frac{a_{ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2},\quad l = \overline{1, L-1};\quad \alpha_{Ln} = -\frac{2a_{Ln}\,\Delta\tau}{\Delta x^2};$$

$$\gamma_{0n} = -2\frac{a_{0n}\,\Delta\tau}{\Delta x^2};\quad \gamma_{Ln} = 0;$$

$$b = [0, b_1, b_2, \ldots, b_L]^{\mathrm{T}};$$

$$b_i\Big|_{\substack{i=\overline{1,\ \kappa-2} \\ i=\overline{\kappa+2,\ L-1}}} = b_{in};\quad b_i\Big|_{i=\kappa-1,\ \kappa+1} = b_{in} + T_{\kappa,\,n+1}\frac{a_{in}\,\Delta\tau}{\Delta x^2};$$

$$b_к = b_{кп} - T_{к,\,n+1}\left(1 + \frac{2a_{кп}\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\right);\quad b_L = T_{Ln} + \frac{2a_{Ln}\,\Delta\tau}{\lambda_{Ln}\,\Delta x}\,q^*_{n+1};$$

$$b_{in} = T_{in} + \frac{a_{in}\,\Delta\tau}{\Delta x^2}\,\frac{\lambda'_{in}}{4\lambda_{in}}\,(T_{i+1,\,n} - T_{i-1,n})^2.$$

В результате получаем $q_{n+1} = \dfrac{\lambda_{0n}\,\Delta x}{2a_{0n}\,\Delta\tau}\,(z_L - T_{0n})$. При необходимости данный способ численного решения ОЗТ уточняется итерациями по ТФХ.

Из системы (5.9) можно выделить самостоятельную замкнутую систему с трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{B}_2\,\mathbf{y}_2 = \mathbf{b}_2, \tag{5.10}$$

где

$$\mathbf{y}_2 = [T_{к+1,\,n+1};\ T_{к+2,\,n+1};\ \ldots;\ T_{L,\,n+1}]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{b}_2 = [b_{к+1,\,n};\ b_{к+2,\,n};\ \ldots;\ b_{Ln}]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \beta_{к+1,\,n} & \gamma_{к+1,\,n} & & & 0 \\ \alpha_{к+2,\,n} & \beta_{к+2,\,n} & \gamma_{к+2,\,n} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \alpha_{Ln} & \beta_{Ln} \end{bmatrix}$$

Матричное уравнение (5.10), по существу, представляет собой алгебраическую форму неявного конечно-разностного решения *прямой задачи* теплопроводности в области $[d,\ b]$. Вследствие этого система (5.10) хорошо обусловлена и эффективно (быстро и точно) решается методом прогонки.

Зная вектор $\mathbf{y}_2$, можно представить разностное решение *обратной задачи* в области $[0,\ d]$ в виде алгебраической системы с верхней треугольной матрицей, имеющей только три ненулевые диагонали

$$\mathbf{B}_1\,\mathbf{y}_1 = \mathbf{b}_1, \tag{5.11}$$

где

$$\mathbf{y}_1 = [z_L;\ T_{0,\,n+1};\ T_{1,\,n+1};\ \ldots;\ T_{к-1,\,n+1}]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{b}_1 = [0;\ b_{1n};\ b_{2n};\ \ldots;\ b_{к-1,\,n};\ \tilde{b}_{кп}]^{\mathrm{T}};$$

$$\tilde{b}_{кп} = b_{кп} - \beta_{кп}\,T_{к+1,\,n+1}.$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & \beta_{0n} & \gamma_{0n} & & & & 0 \\ & \alpha_{1n} & \beta_{1n} & \gamma_{1n} & & & \\ & & \alpha_{2n} & \beta_{2n} & \gamma_{2n} & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ 0 & & & \alpha_{k-2,n} & \beta_{k-2,n} & \gamma_{k-2,n} & \\ & & & & \alpha_{k-1,n} & \beta_{k-1,n} & \\ & & & & & \alpha_{kn} & \end{bmatrix}.$$

Система (5.11) решается явно — компоненты вектора y_1 вычисляются рекуррентным способом, начиная с $T_{k-1,n+1}$. При этом большое количество нулевых коэффициентов приводит к значительному сокращению объема вычислений.

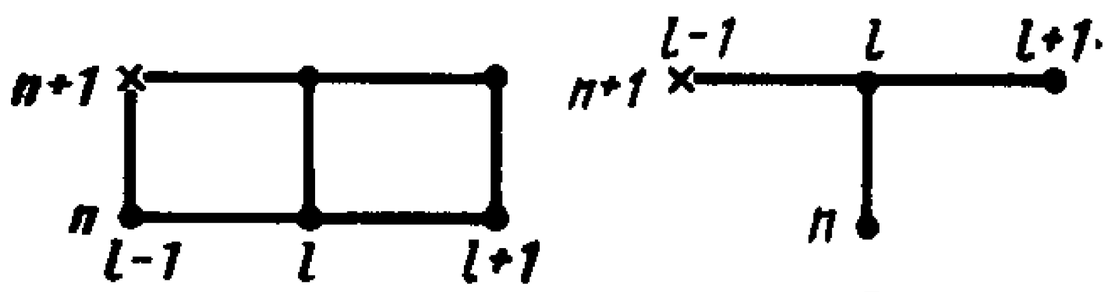


Рис. 5.2. Разностные схемы
● — узлы сетки с известными значениями температуры; × — узел с искомым значением температуры

Заметим, что в случае постоянных ТФХ ($a = \text{const}$, $\lambda' \equiv 0$), шеститочечная разностная схема (рис. 5.2, *а*) вырождается в Т-образную четырехточечную схему (рис. 5.2, *б*). Т-образной схемой можно было воспользоваться и для случая переменных свойств тела, аппроксимируя правую часть уравнения (5.1) следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{l,n+1} \simeq \left[\lambda^n_{l+1/2}\left(\frac{T_{l+1,n+1} - T_{l,n+1}}{\Delta x}\right) - \right.$$

$$\left. - \lambda^n_{l-1/2}\left(\frac{T_{l,n+1} - T_{l-1,n+1}}{\Delta x}\right)\right]\frac{1}{\Delta x} = \frac{\lambda^n_{l+1/2}}{\Delta x^2} T_{l+1,n+1} -$$

$$- \left(\frac{\lambda^n_{l+1/2} + \lambda^n_{l-1/2}}{\Delta x^2}\right) T_{l,n+1} + \frac{\lambda^n_{l-1/2}}{\Delta x^2} T_{l-1,n+1},$$

где

$$\lambda^n_{l\pm 1/2} = \frac{1}{2}\left(\lambda^n_l + \lambda^n_{l\pm 1}\right); \quad \lambda^n_l = \lambda(T_{ln}).$$

5.1.2. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЯВНЫХ СХЕМАХ ЧИСЛЕННОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Алгоритмическое построение, рассмотренное в разд. 5.1.1, можно интерпретировать как численное решение ОЗТ в краевой постановке. Действительно, в качестве исходного "материала" была взята неявная разностная схема, предназначенная для решения прямой задачи, и на каждом временном шаге соответствующий вычислительный алгоритм преобразовывался с целью решения обратной задачи – известная температура $T_к$ "вводилась" в правую часть системы, а искомое значение граничного условия включалось в число неизвестных. Однако, с другой стороны, решение ОЗТ, записанное в форме (5.9), было фактически сведено к постановке Коши, т.е. к *численному продолжению температурного поля.*

Общим моментом в построении численной методики решения обратной задачи в постановке Коши является предварительное разделение исходной задачи на две. Первая состоит в определении сеточной функции плотности теплового потока $q_{кп}^{\cdot}$ в точке измерения температуры (или самой температуры на соседнем слое $T_{к+1,\,n}$). Это прямая задача, решаемая в области $D_1 = \{(x, \tau): x \in [d, b],\ \tau \in [0,\ \tau_m]\}$. Вторая, собственно обратная задача рассматривается в области $D_2 = \{(x,\ \tau): x \in \in [0, d],\ \tau \in [0,\ \tau_m]\}$.

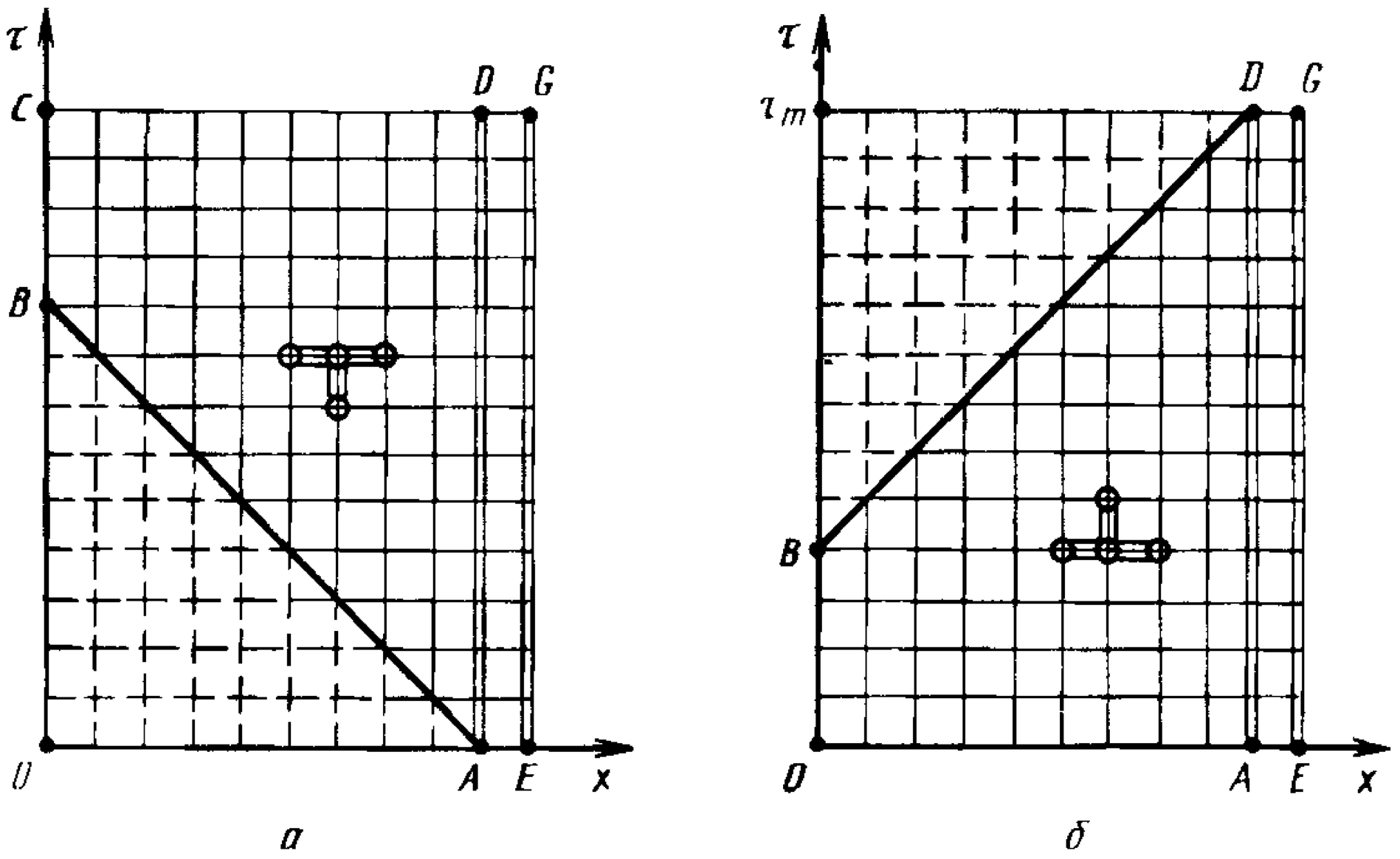
Шеститочечная разностная схема в сочетании со смешанной постановкой Коши, когда кроме условий на границе $x = d$ в расчете участвует также начальное распределение температур, позволяет определить значения температуры во всех узлах прямоугольной области D_2.

В практике тепловых экспериментов может встретиться ситуация, когда начальный температурный режим тела бывает неизвестен.* В этом случае применим Т-образную схему аппроксимации уравнения теплопроводности, жертвуя при продолжении температурного поля частью области D_2 (рис. 5.3, *а*). Область $ABCD$ будет являться областью определенности разностного уравнения. Ее размеры, зависящие от угла $\angle BAD$, изменяются при изменении соотношения шагов Δx и $\Delta\tau$: $\operatorname{tg} \angle BAD = \Delta x/\Delta\tau$. Таким образом, уменьшение Δx и увеличение $\Delta\tau$ приводят к уменьшению области определенности.

Используя схему, шаблон которой показан на рис. 5.3, *б* (явная схема для прямой задачи теплопроводности), можно решить граничную обратную с известным начальным условием в области $AOBD$. Для возможности расчета температурного поля в области BCD необходимо иметь информацию о конечном тепловом состоянии тела $T(x,\ \tau_m)$. Такие сведения обычно неизвестны, и чтобы расширить область восстанавливаемости температурного поля до момента времени $\tau = \tau_m$,

---

*Для ОЗТ в постановке Коши задание начального условия, вообще говоря, не является обязательным требованием (см., например, решение (2.9), но требуется соблюдение дополнительных условий – см. разд. 2.2.3).



а *б*

Рис. 5.3. Сеточные области и шаблоны численного решения ОЗТ (исходные значения температуры заданы на линиях *EG* и *AD*)

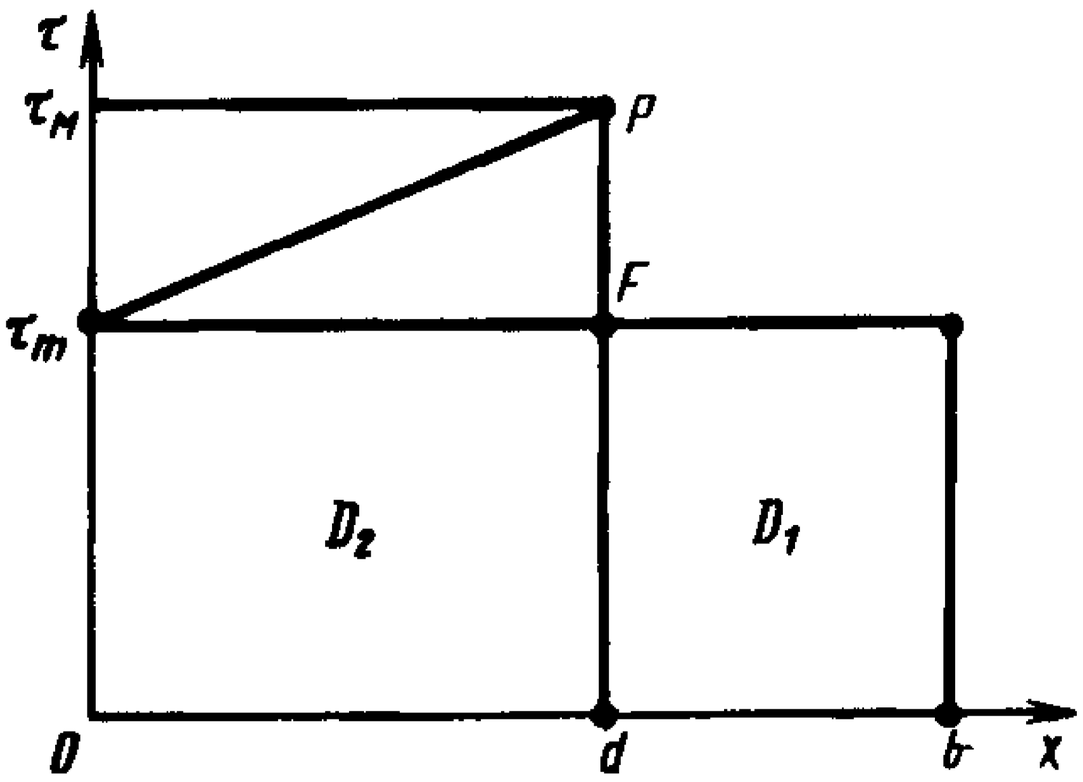


Рис. 5.4. Области решения прямой D_1 и обратной D_2 задач теплопроводности

нужно иметь значения теплового потока и температуры в точке $x = d$ не только на сегменте $[0, \tau_m]$, но и при $\tau > \tau_m$ (рис. 5.4). Дополнительный отрезок *FP* должен включать число временных шагов, равное числу точек разбиения интервала $[0, d]$, $\tau_M - \tau_m = \kappa \Delta\tau$. Аналогичным приемом можно воспользоваться и для ОЗТ без начального условия (схема на рис. 5.2, *б*), если условия Коши могут быть получены при $\tau < 0$.

Формально, с точки зрения техники численного продолжения уравнения теплопроводности имеется также другая возможность расширения области восстанавливаемости температурного поля, если не известно ни начальное, ни конечное распределение температуры в теле. Она заключается в комбинации схем, показанных на рис. 5.3, *а* и 5.3, *б*.

Наконец, можно постулировать некоторое условие на одной из границ $\tau = 0$ и $\tau = \tau_m$, отдавая себе отчет в том, что решение обратной задачи будет этим условием искажено в некоторой временной области $0 < \tau < \tau_1^*$ или $\tau_2^* < \tau < \tau_m$ соответственно.

Заметим в заключение, что можно построить и другие явные схемы численного продолжения решения уравнения теплопроводности, например, схему "крест".

Центральным вопросом выбора подходящей разностной аппроксимации уравнения теплопроводности при решении обратных задач будет вопрос *устойчивости.*

5.2. О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

При практическом использовании описанного выше метода необходимо помнить об исходной некорректности ОЗТ, которая в определенных условиях неминуемо должна проявиться в виде осциллирующих решений.

Поскольку матрица системы (5.11) треугольная, то ее определитель равен произведению диагональных коэффициентов $\det \mathbf{B}_1 = -\prod_{i=1}^{\kappa} \alpha_{in}$, где $\alpha_{in} = -a_{in}\,\Delta\tau/\Delta x^2$.

Следовательно, увеличение числа шагов κ при заданных значениях Δx и $\Delta\tau$ приводит к непрерывному уменьшению величины определителя, причем, если $\kappa \to \infty$, $\det \mathbf{B}_1 \to 0$. В то же время один из элементов — $a_{1\,1} = -1$ — не меняет своей величины при изменении κ. Из этого можно сделать вывод (естественный, учитывая некорректность обратной задачи), что увеличение расстояния d от границы тела с неизвестным условием при сохранении $\Delta\tau$ и Δx постоянными сопряжено с ухудшением обусловленности задачи — снижением точности восстановления температурного поля.

В гл. 4 применительно к прямому алгебраическому методу решения интегральных форм ОЗТ было показано, что влияние возмущений температурных данных на искомые результаты может быть значительно сглажено за счет определенного выбора шага дискретизации восстанавливаемой функции. При этом, с одной стороны, конечные по величине ошибки входных данных будут вызывать конечные возмущения в искомых граничных условиях, а с другой, эти возмущения оказываются затухающими с течением времени, т.е. выполняется условие асимптотической устойчивости решения. Можно ожидать, что подобное поведение результатов будет наблюдаться и при использовании конечно-разностных методов решения.

После аппроксимации дифференциальной задачи следует говорить уже об *устойчивости системы разностных уравнений.* Это условие целиком и полностью определяется свойствами полученной разностной задачи. Под устойчивостью конечно-разностной схемы $A_h u_h = f_h$ понимается выполнение неравенства

$$\| u_h \| \leqslant C \| f_h \|, \tag{5.12}$$

где A_h — линейный разностный оператор, зависящий от параметров

аппроксимации $\Delta\tau$ и Δx; u_h, f_h — сеточные функции u_{kn} и f_{kn}; $\|u_h\|$, $\|f_h\|$ — принятые нормы для разностного решения и правой части; C — положительная постоянная.

Важно отметить, что константа C в неравенстве (5.12) не должна зависеть от шагов Δx и $\Delta\tau$. Кроме того, желательно, чтобы C не была чересчур большой величиной.

Норма сеточной функции может быть задана, например, максимумом модуля значений функции $\|u_h\| = \max\limits_{k,\,n} |u_{k,n}|$.

При численном решении прямых задач теплопроводности, когда исходная дифференциальная постановка является корректной, замена ее некоторым разностным аналогом должна обеспечить счетную устойчивость, т.е. исключить искажение решения в результате усиления погрешности входных данных и ошибок округления.

Естественно, что тип схемы аппроксимации и ее параметры должны оказывать влияние и на характер численного решения ОЗТ, приводя или к катастрофическому искажению результатов за счет быстрого накопления ошибок, или, наоборот, оказывая демпфирующее влияние на осциллирующий характер решения.

Ниже исследуется возможность искусственного сглаживания разностного решения ОЗТ с помощью выбора аппроксимирующих зависимостей и шагов сетки. Поскольку исходная задача поставлена некорректно, то следует отказаться от определения счетной устойчивости, данной выше. Действительно, если при измельчении сетки разностная схема все точнее аппроксимирует уравнение теплопроводности, то решение ОЗТ будет стремиться к точному (неустойчивому) решению, соответствующему возмущенным входным данным. В этом случае при $\Delta\tau, \Delta x \to 0$ будем иметь $C \to \infty$.

Введем понятие *слабой устойчивости* разностной схемы [86], определяемое неравенством

$$\|u_h\| \leqslant C_h \|f_h\|, \tag{5.13}$$

где C_h — положительная постоянная, зависящая от параметров аппроксимации.

Оценка (5.13) говорит о том, что существует некоторая область изменения шагов сетки, в которой имеет место устойчивость разностных уравнений.

Следовательно, наша задача будет состоять в приближенном определении условий слабой устойчивости разностных схем при решении некорректно поставленных обратных задач. Отметим, что речь идет об *устойчивости на конечном интервале* изменения пространственной переменной.

5.3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Выявим основное отличие разностной методики восстановления граничного условия от полуаналитической, рассмотренной в гл. 4. Алгебраическое решение интегральных уравнений I-го рода, соответствующих краевой постановке ОЗТ в области с неподвижными границами, соответствовало минимальному количеству дискретных переходов, а именно, аппроксимировались лишь краевые условия. При этом само уравнение теплопроводности конечно-разностной аппроксимации не подвергалось. В то же время численные алгоритмы решения ОЗТ предполагают дискретизацию не только условий на границе рассматриваемой пространственно-временной области, но и разностное представление уравнения теплопроводности как по координате, так и по времени.

Возникает вопрос: могут ли разностные схемы решения ОЗТ обладать лучшими характеристиками устойчивости по сравнению с полуаналитической методикой? Попытаемся ответить на этот вопрос, проанализировав численное решение ОЗТ в линейной постановке.

5.3.1. СПОСОБ ТОЧЕЧНОЙ ОШИБКИ

Рассмотрим Т-образную схему в случае постоянных ТФХ тела:

$$T_{l+1,\,n+1} = (2+p)\,T_{l,\,n+1} - p\,T_{ln} - T_{l-1,\,n+1},\quad l=\overline{1,L};$$

$$n=\overline{0,m}, \tag{5.14}$$

где $p = \Delta x^2 / a\,\Delta\tau$.

Входные данные известны на двух пространственных слоях $l = 1$ и 2:

$$T_{1n} = f_n,\quad T_{2n} = \varphi_n.$$

Предполагается, что направление численного интегрирования уравнения теплопроводности по пространственной переменной x совпадает с направлением этой координаты.

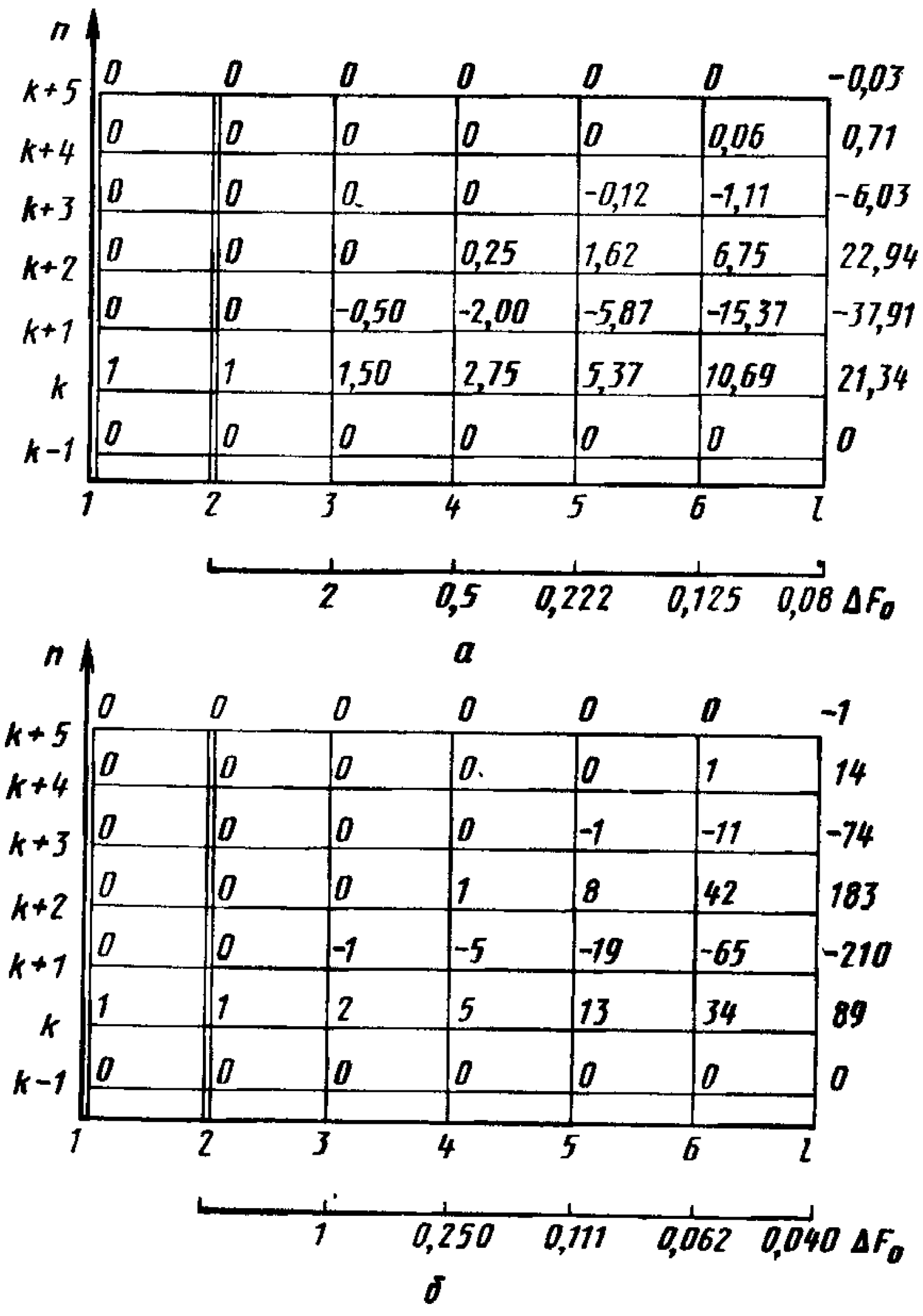
Пусть входная информация задана с ошибками $\tilde{f}_n = f_n + \delta_{fn}$, $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n + \delta_{\varphi n}$. Тогда возмущенные сеточные значения функции $\tilde{T}_{ln}$ примут вид $\tilde{T}_{l+1,n+1} = (2+p)\,\tilde{T}_{l,n+1} - p\tilde{T}_{ln} - \tilde{T}_{l-1,n+1},\ l=\overline{1,L};$ $n=\overline{0,m};\ \tilde{T}_{1n}=\tilde{f}_n,\ \tilde{T}_{2n}=\tilde{\varphi}_n.$

Ошибки в решении $\epsilon_{ln} = T_{ln} - \tilde{T}_{ln}$ определяются формулой

$$\epsilon_{l+1,\,n+1} = (2+p)\,\epsilon_{l,\,n+1} - p\,\epsilon_{ln} - \epsilon_{l-1,\,n+1},\quad l=\overline{1,L};\ \ n=\overline{0,m},$$

где $\epsilon_{1n} = \delta_{fn},\ \epsilon_{2n} = \delta_{\varphi n}$.

Полагая для простоты, что возмущение имеет точечный характер $\delta_{fn} = \delta_{\varphi n} = 1,\ n = k;\ \delta_{fn} = \delta_{\varphi n} = 0,\ n \neq k$, проследим за поведением погрешности ϵ_{ln} по мере удаления от точек возмущения по временной



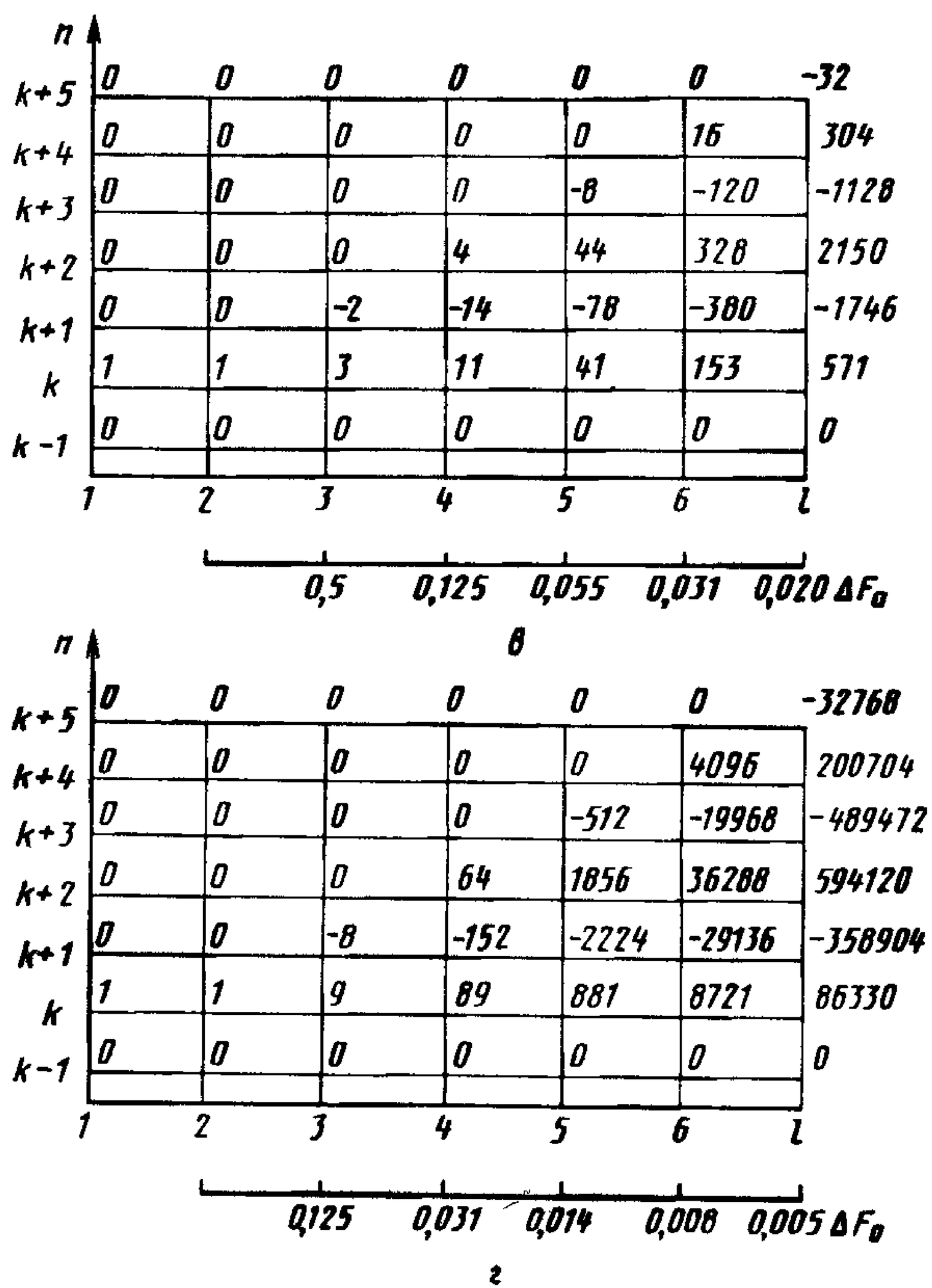


Рис. 5.5. Распределение ошибок в узлах сеточной области:
а – $p = 0{,}5$, *б* – $p = 1$; *в* – $p = 2$; *г* – $p = 8$

и координатной осям. Результаты расчетов для разных значении параметра p показаны на так называемых ϵ-схемах (рис. 5.5, *а–г*) — в каждом узле сетки проставлена соответствующая величина погрешности. На этих же графиках приведены значения $\Delta \mathrm{Fo} = (a\Delta\tau)/d^2$, где расстояние d отсчитывается от слоя $l = 2$ в глубь тела. Обратим внимание на некоторые особенности распределения ошибок по сеточной области.

1. Область влияния начальных ошибок $\delta_{\varphi k} = \delta_{fk} = 1$ на температурное поле для Т-образной схемы представляет собой равносторонний прямоугольный треугольник, составляющий половину сеточной области $\{ l = \overline{2, L};\ n = \overline{k, k + L - 2} \}$.

2. Ошибки интенсивно растут по мере увеличения параметра p, что равносильно рассмотрению диапазона меньших значений числа $\Delta \mathrm{Fo} = 1/p\,(l-2)^2,\ l = \overline{3, L}$.

3. Для одного временно́го слоя ошибка знакопостоянна и представляет собой непрерывно возрастающую функцию параметра $l (l \geqslant 2)$.

4. В каждом временном слое с увеличением n ($n = k, k + 1, \ldots$) ошибка по абсолютной величине может вначале увеличиваться, а затем уменьшаться до нуля.

Если теперь сравнить отмеченные особенности ошибок численного решения с аналогичными ошибками в полуаналитическом методе, можно заметить характерные отличия. Алгебраическое решение интегрального уравнения остается возмущенным в любой момент времени, начиная с появления импульсной ошибки во входной температуре. При этом, если в области устойчивости $\Delta \mathrm{Fo} > \Delta \mathrm{Fo}_{\mathrm{кр}}$, погрешность решения быстро затухает с течением времени, то при $\Delta \mathrm{Fo} \leqslant \Delta \mathrm{Fo}_{\mathrm{кр}}$ происходит интенсивное нарастание ошибок. В то же время численное продолжение температурного поля характеризуется конечной областью влияния исходной ошибки на восстанавливаемое граничное условие. Поэтому можно ожидать, что вследствие дискретизации уравнения теплопроводности по временной переменной практическая устойчивость разностного решения ОЗТ будет наблюдаться при меньших значениях $\Delta \mathrm{Fo}$, нежели в случае интегральной формы задачи. Данный вывод подтверждается результатами решения методических примеров.

5.3.2. СХЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ КАК РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ФАКТОР

Чтобы понять причину *дополнительной естественной регуляризации решения* ОЗТ, связанную с дискретным представлением уравнения теплопроводности, рассмотрим первое дифференциальное приближение исследуемой разностной схемы. С этой целью разложим входящие в уравнение (5.14) сеточные функции в ряд Тейлора по параметрам Δx и $\Delta \tau$:

$$T_{l,\, n+1} = T_{ln} + \frac{\Delta\tau}{1!}\,\frac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_{ln} + \frac{\Delta\tau^2}{2!}\,\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\Big|_{ln} + \ldots;$$

$$T_{l\pm 1,\,n+1} = T_{ln} \pm \frac{\Delta x}{1!}\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{ln} + \frac{\Delta\tau}{1!}\frac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_{ln} + \frac{\Delta x^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_{ln} +$$

$$+ \frac{\Delta\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\Big|_{ln} \pm \Delta x\,\Delta\tau\,\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial \tau}\Big|_{ln} + \ldots$$

и отбросим в конечном выражении слагаемые, имеющие второй и выше порядок малости. В итоге получим

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_{ln} + \frac{\Delta\tau}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}\Big|_{ln} = a\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_{ln}. \qquad (5.15)$$

Таким образом, несмотря на то, что разностная схема (5.14) является аппроксимацией параболического уравнения теплопроводности, первое дифференциальное приближение соответствует гиперболическому уравнению теплопроводности, где коэффициент $\Delta\tau/2$ – некоторое фиктивное время релаксации. Так как задача Коши для гиперболического уравнения поставлена корректно, то можно предположить, что влияние члена $\frac{\Delta\tau}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}$ приведет к улучшению характеристик устойчивости численного решения обратной задачи, причем гладкость результатов будет возрастать с увеличением $\Delta\tau$.

Такая гипотеза основывается на следующих рассуждениях. Уравнение теплопроводности Фурье выведено в предположении бесконечно большой скорости распространения тепла $w \to \infty$. Если положить, что w – конечная величина, то процесс теплопроводности описывается гиперболическим уравнением [58]

$$\frac{w^2}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = w^2\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad (5.16)$$

По мере увеличения w запаздывание (время между началом теплового воздействия и температурной реакцией в некоторой точке внутри тела) уменьшается. Слагаемое $\frac{w^2}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau}$, играющее роль некоторого "температурного трения", усиливает эффект сглаживания возмущений граничных условий. При $w \to \infty$ запаздывание отсутствует, а эффект сглаживания наибольший. Такое положение приводит к тому, что большие возмущения в граничных функциях порождают малые отклонения значений температуры во внутренних точках тела. Наоборот, небольшие отклонения значений температуры в некоторой внутренней точке соответствует большим отклонениям температуры поверхности или плотности граничного теплового потока. С уменьшением скорости распространения теплового импульса увеличивается сдвиг между временем возникновения теплового возмущения и изменением температуры

внутренней точки тела и, что особенно важно, возрастает амплитуда температурной реакции – снижается эффект сглаживания характерных особенностей граничного условия.

5.3.3. ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ДОПУСТИМЫХ ШАГОВ ВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Продолжим анализ устойчивости, воспользовавшись полученным дифференциальным приближением (5.15), которое будем рассматривать не в узлах сетки, а во всех точках пространственно-временной области

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\Delta \tau}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m].$$

Введем новые переменные $\mathrm{Fo} = a\tau/d^2$, $\bar{x} = x/d$ (d – некоторая фиксированная точка тела). Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} + \frac{\Delta \mathrm{Fo}}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2}, \quad \bar{x} \in (0, \bar{b}), \quad \mathrm{Fo} \in (0, \mathrm{Fo}_m], \qquad (5.17)$$

где

$$\Delta \mathrm{Fo} = \frac{a \Delta \tau}{d^2}, \quad \bar{b} = \frac{b}{d}, \quad \mathrm{Fo}_m = \frac{a \tau_m}{d^2}.$$

Рассмотрим для простоты анализа полубесконечное тело ($b \to \infty$). В этом случае решение первой краевой задачи для уравнения (5.17) в точке $\bar{x} = 1$ примет вид [58]

$$T(1, \mathrm{Fo}) = T_W(\mathrm{Fo} - \sqrt{\frac{\Delta \mathrm{Fo}}{2}}) \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{2\Delta \mathrm{Fo}}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\Delta \mathrm{Fo}}} \int_{\sqrt{\Delta \mathrm{Fo}/2}}^{\mathrm{Fo}} T_W(\xi) \exp\left[-\frac{\mathrm{Fo} - \xi}{\Delta \mathrm{Fo}}\right] \times$$

$$\times \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{(\mathrm{Fo} - \xi)^2 - \Delta \mathrm{Fo}/2}}{\Delta \mathrm{Fo}}\right)}{\sqrt{(\mathrm{Fo} - \xi)^2 - \Delta \mathrm{Fo}/2}} d\xi,$$

где $T_W(\mathrm{Fo})$ – температура на границе тела ($T(0, \mathrm{Fo}) = T_W(\mathrm{Fo})$); $I_1(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя I рода.

Теперь поставим обратную задачу – по известной внутренней температуре $T(1, \mathrm{Fo}) = f(\mathrm{Fo})$, найти температуру $T_W(\mathrm{Fo})$ на границе тела. Такая постановка соответствует решению следующего интегрального уравнения с переменным верхним пределом:

$$\alpha(\Delta \mathrm{Fo})\, T_W\left(\mathrm{Fo} - \sqrt{\frac{\Delta \mathrm{Fo}}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\Delta \mathrm{Fo}}} \int_{\sqrt{\Delta \mathrm{Fo}/2}}^{\mathrm{Fo}} T_W(\xi) \times$$

$$\times\, K(\mathrm{Fo} - \xi,\ \Delta \mathrm{Fo})\, d\xi = f(\mathrm{Fo}), \qquad (5.18)$$

где

$$\alpha(\Delta \mathrm{Fo}) = \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{2\Delta \mathrm{Fo}}}\right];$$

$$K(\mathrm{Fo} - \xi,\ \Delta \mathrm{Fo}) = \exp\left[-\frac{\mathrm{Fo} - \xi}{\Delta \mathrm{Fo}}\right] \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{(\mathrm{Fo} - \xi)^2 - \Delta \mathrm{Fo}/2}}{\Delta \mathrm{Fo}}\right)}{\sqrt{(\mathrm{Fo} - \xi)^2 - \Delta \mathrm{Fo}/2}}.$$

В уравнении имеется член, содержащий искомую функцию вне знака интеграла, что формально делает задачу определения $T_W(F_0)$ *корректной.* Однако вклад этого члена в решение в значительной степени зависит от величины параметра ΔFo. При малых ΔFo решение не будет иметь регулярного характера, но будет становиться все более гладким по мере увеличения ΔFo.

Заметим, что сглаживание решения уравнения (5.18) определяется не только влиянием коэффициента $\alpha(\Delta \mathrm{Fo})$, но и формой ядра $K(\mathrm{Fo}, \Delta \mathrm{Fo})$ интегрального уравнения. При достаточно малых ΔFo функция $K(\mathrm{Fo})$, начиная со значения $K(\sqrt{\Delta \mathrm{Fo}/2})$, возрастает, проходит через максимум, а затем убывает. Пользуясь правилом Лопиталя для раскрытия неопределенностей, получим

$$\lim_{\mathrm{Fo} \to \sqrt{\frac{\Delta \mathrm{Fo}}{2}}} K(\mathrm{Fo}) = \frac{1}{2\Delta \mathrm{Fo}}.$$

Рассматривая ядро, как температурный отклик в точке $x = d$ на импульсное изменение граничного температурного режима и следуя описанному в разд. 4.3.2 *принципу наибольшего влияния*, найдем такое минимальное значение параметра ΔFo, при котором $K(\mathrm{Fo})$ для всех $\mathrm{Fo} > \sqrt{\Delta \mathrm{Fo}/2}$ становится невозрастающей функцией. Можно показать, что этому условию отвечает значение $\Delta \mathrm{Fo} \simeq 0{,}04$.

Поскольку дифференциальное уравнение (5.17) с точностью до членов второго порядка малости совпадает с Т-образной разностной схемой (см. рис. 5.3), то можно предположить, что свойства решения уравнения (5.18) будут "в основном" совпадать со свойствами численного решения (5.14). Таким образом, можно прогнозировать устойчивость данного процесса численного продолжения температурного поля до значений $\Delta \mathrm{Fo}_{min} \simeq 0{,}04$, т.е. при шагах, приблизительно в четыре раза меньших, нежели в случае алгебраического решения интегральной формы ОЗТ.

5.3.4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 5.6 показаны ошибки в температурах, восстановленных по численной методике и полуаналитическим методом, для двух значений ΔFo. Расчеты соответствуют действию в k-й момент времени единичного возмущения в температурных данных. Видно, что ошибки численного решения значительно меньше.

Обращает на себя внимание также и тот факт, что для рассмотренных значений ΔFo, при которых ожидается достаточно хорошее поведение численного решения на гладких входных данных, начальная ошибка тем не менее заметно усиливается, несмотря на общую тенденцию к последующему убыванию. Поэтому рассматриваемая разностная схема не может дать удовлетворительных результатов при малых ΔFo, если данные Коши отягощены заметными флуктуационными погрешностями.

Заметим, кроме того, что переход от сеточных значений температуры к значениям плотности теплового потока сопряжен с дополнительной потерей точности за счет операции численного дифференцирования. Если ориентироваться на анализ решений интегральных форм ОЗТ с учетом сглаживающего действия шага ΔFo, то можно ждать достаточно гладкого восстановления плотности теплового потока $q(\tau)$ при значениях ΔFo, приблизительно в 2–3 раза больших найденного выше значения 0,04.

Численное моделирование в целом подтвердило высказанные выше предположения. Приведем результаты решения одного из примеров. Требовалось восстановить плотность теплового потока и температуру на поверхности пластины. ТФХ материала были приняты постоянными и равными $\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ кВт/(м·К) $a = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м^2/с. Толщина пластины $b = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$ м. Температура задавалась в точке $d = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$ м, тепловой поток на границе $x = b$ считался равным нулю.

Номинальные значения входной температуры определялись для принятой зависимости плотности теплового потока $\bar{q} \equiv q \cdot d/\lambda = 48 + 88\,Fo_d + 27\,Fo_d^2$ из решения прямой задачи с точностью $\delta T \leqslant 10^{-3}$ К.

Результаты решения ОЗТ представлены на рис. 5.7. В рассмотренном диапазоне $\Delta Fo = 0{,}06 - 0{,}32$ полученные кривые имеют устойчивый характер и достаточно

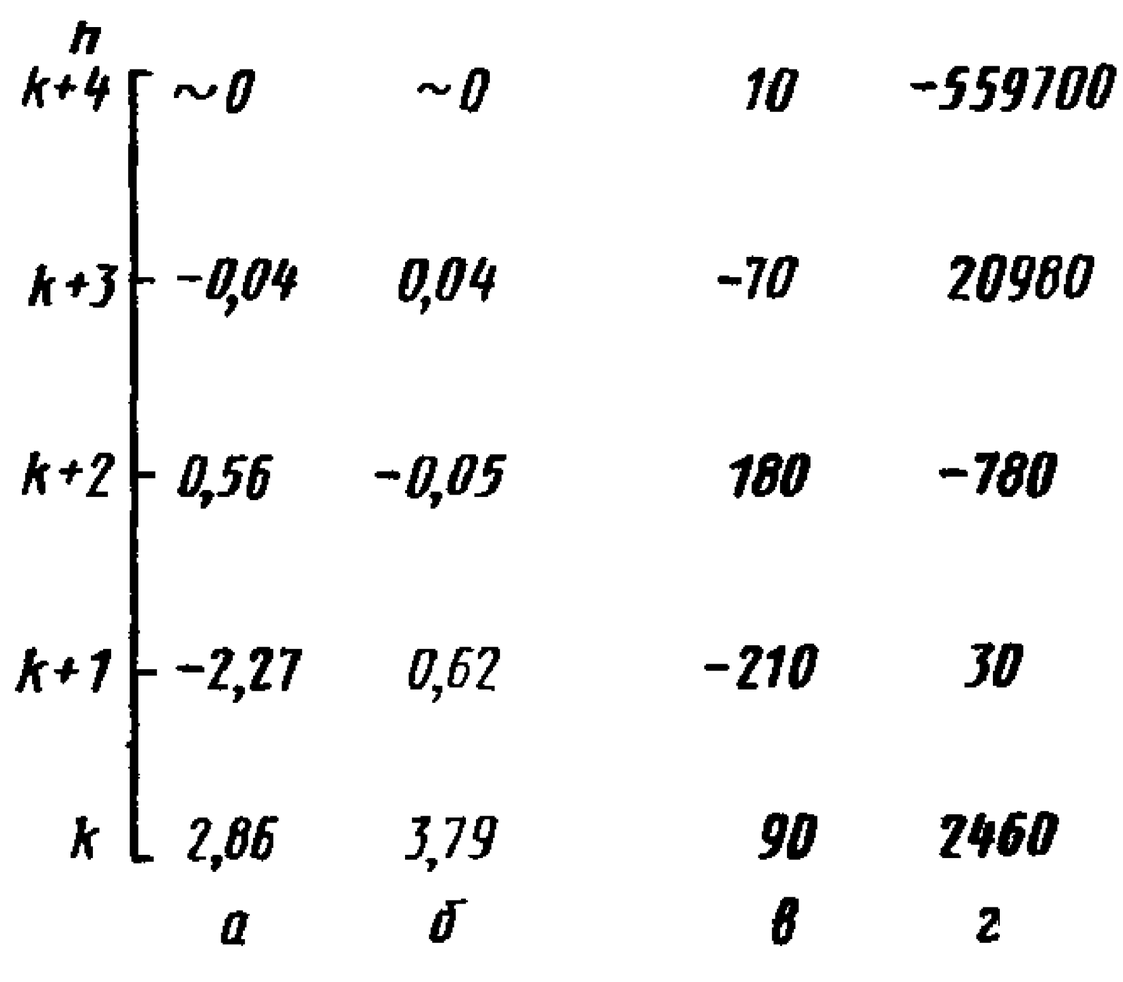
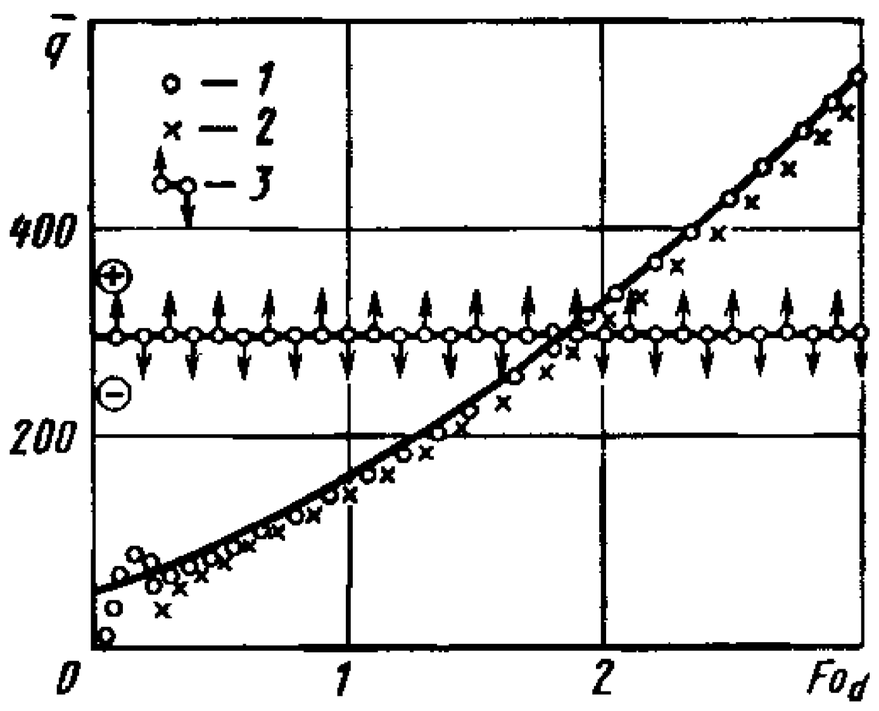


Рис. 5.6. Изменение ошибок с течением времени:
а и *в* – численная схема соответственно при $p = 0{,}1$; $l = 7$; $\Delta Fo = 0{,}4$ и $p = 1{,}0$; $l = 7$; $\Delta Fo = 0{,}04$; *б* и *г* – решение интегрального уравнения соответственно при $\Delta Fo = 0{,}4$ и 0,04



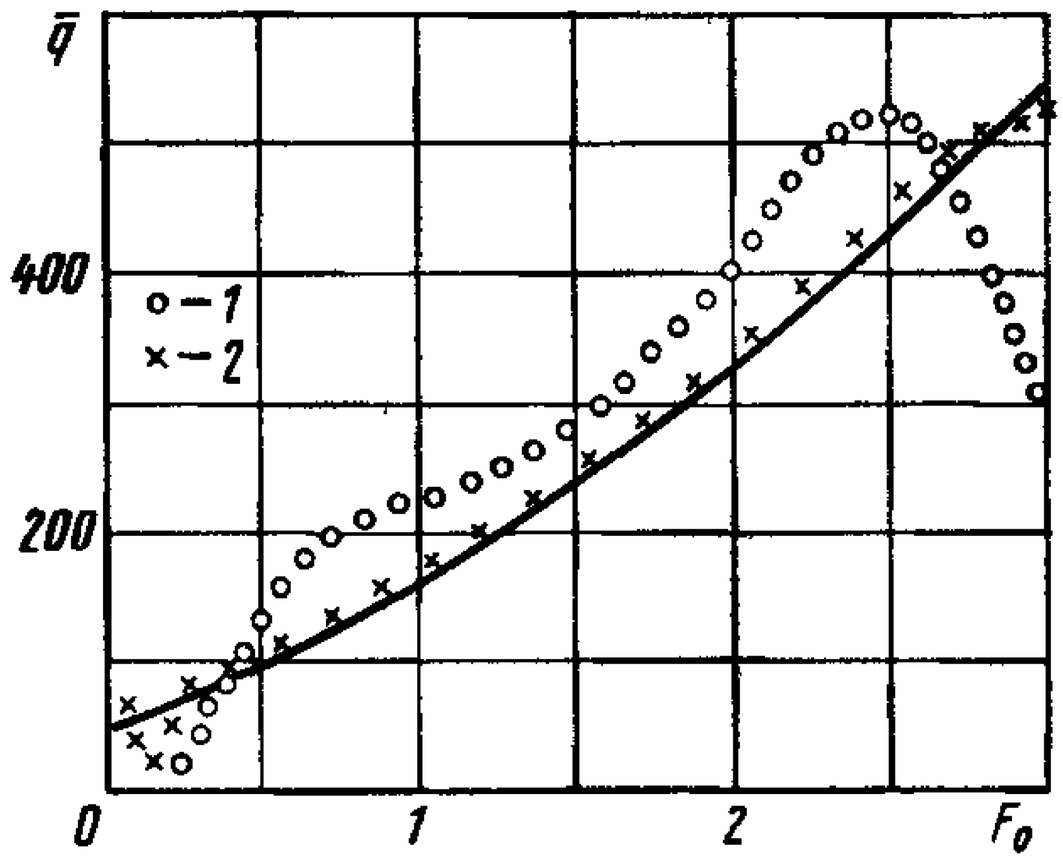


Рис. 5.7. Результаты решения обратной задачи для точных и возмущенных значений входной температуры (сплошная кривая – действительное решение):
$1 - \delta T \sim 0$, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$, $\kappa = 10$, $L = 40$; $2 - \delta T \sim 0$, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}32$, $\kappa = 5$, $L = 20$; 3 – нормальный закон распределения ошибок в температуре с разбросом $3\sigma(\tau) = 0{,}05 T_{\kappa\,\max}$; $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$

Рис. 5.8. Результаты решения обратной задачи для сглаженных значений температуры (исходные данные содержали ошибки, распределенные по нормальному закону с разбросом $3\sigma(\tau) = 0{,}1 T_{\kappa\max}$), $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$, $\kappa = 5$ (сплошная кривая – действительное решение):
1 – для сглаживания $T_\kappa(\tau)$ по пяти точкам, число сглаживаний $N = 10^4$; 2 – для сглаживания $T_\kappa(\tau)$ методом регуляризации второго порядка

близки к эталонным. Однако случайные возмущения исходных значений температур приводят к существенной неустойчивости процесса вычислений при малых значениях $\Delta \mathrm{Fo}$ (рис. 5.7). Предварительное *сглаживание* входной информации $T_\delta(\tau)$ по методу регуляризации (см. алгоритм в работе [1]) или сглаживающих сплайнов [92, 117] позволяет получить достаточно гладкие и точные результаты при решении ОЗТ (рис. 5.8). В то же время, сглаживание по одному из вариантов метода наименьших квадратов – с помощью четвертых разностей ("по пяти точкам")* – может при восстановлении граничной функции привести к существенному искажению вида искомой кривой. На рис. 5.9 приведены результаты численного решения другого методического примера по восстановлению плотности теплового потока на поверхности обратного конуса сегментально-конического тела (спускаемого космического аппарата), которые также подтверждают эти выводы.

Для численного решения обратной задачи в постановке Коши могут быть использованы и другие разностные схемы. В частности, на рис. 5.10 приведены результаты счета по схеме "крест".

Для невозмущенных входных данных они оказались близкими к приведенным ранее результатам, полученным по Т-образной схеме.

---

*Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

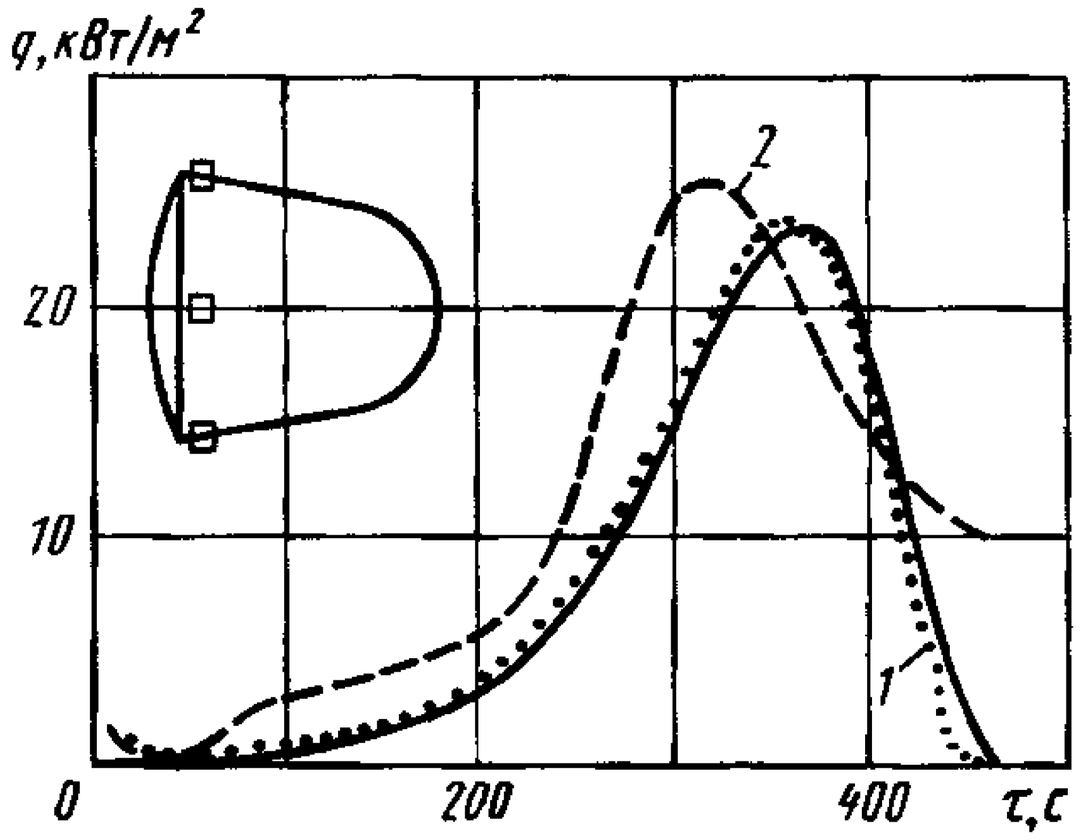


Рис. 5.9. Результаты восстановления плотности теплового потока в указанных точках обратного конуса (сплошная кривая – искомое решение): $3\sigma(\tau) = 0{,}08 T_{\kappa max}$, $\Delta Fo_d = 0{,}05$, $\kappa = 12$; 1 – для сглаживания $T_\kappa(\tau)$ методом регуляризации второго порядка; 2 – для сглаживания $T_\kappa(\tau)$ по пяти точкам, $N = 10^3$

Отметим, что в том и в другом случаях устойчивость решения задачи практически не зависела от шага по пространственной координате в рассмотренных пределах соотношений шагов, отвечающих условию: $\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} = 1{,}6 \cdot 10^0 - 1{,}3 \cdot 10^3$.

Изложенный выше принцип шаговой регуляризации численного решения ОЗТ предполагает "загрубление" результатов за счет сглаживающего влияния вязкостных членов в соответствующем уравнении дифференциального приближения. По мере расширения области продолжения температурного поля по координате x условие слабой устойчивости (5.13) требует все большего *увеличения шага* временной дискретизации. При этом неминуемо страдает точность восстановления причинной характеристики из-за ухудшения аппроксимации уравнения теплопроводности, и полученное численное решение может не соответствовать реальным условиям теплообменного процесса.

Проведенный анализ показал, что при определенных условиях имеется возможность достаточно эффективного использования прямых численных методов для решения ОЗТ. Эта возможность основывается на естественных регуляризирующих свойствах разностных алгоритмов, которые проявляются более заметно, нежели в случае приближенных

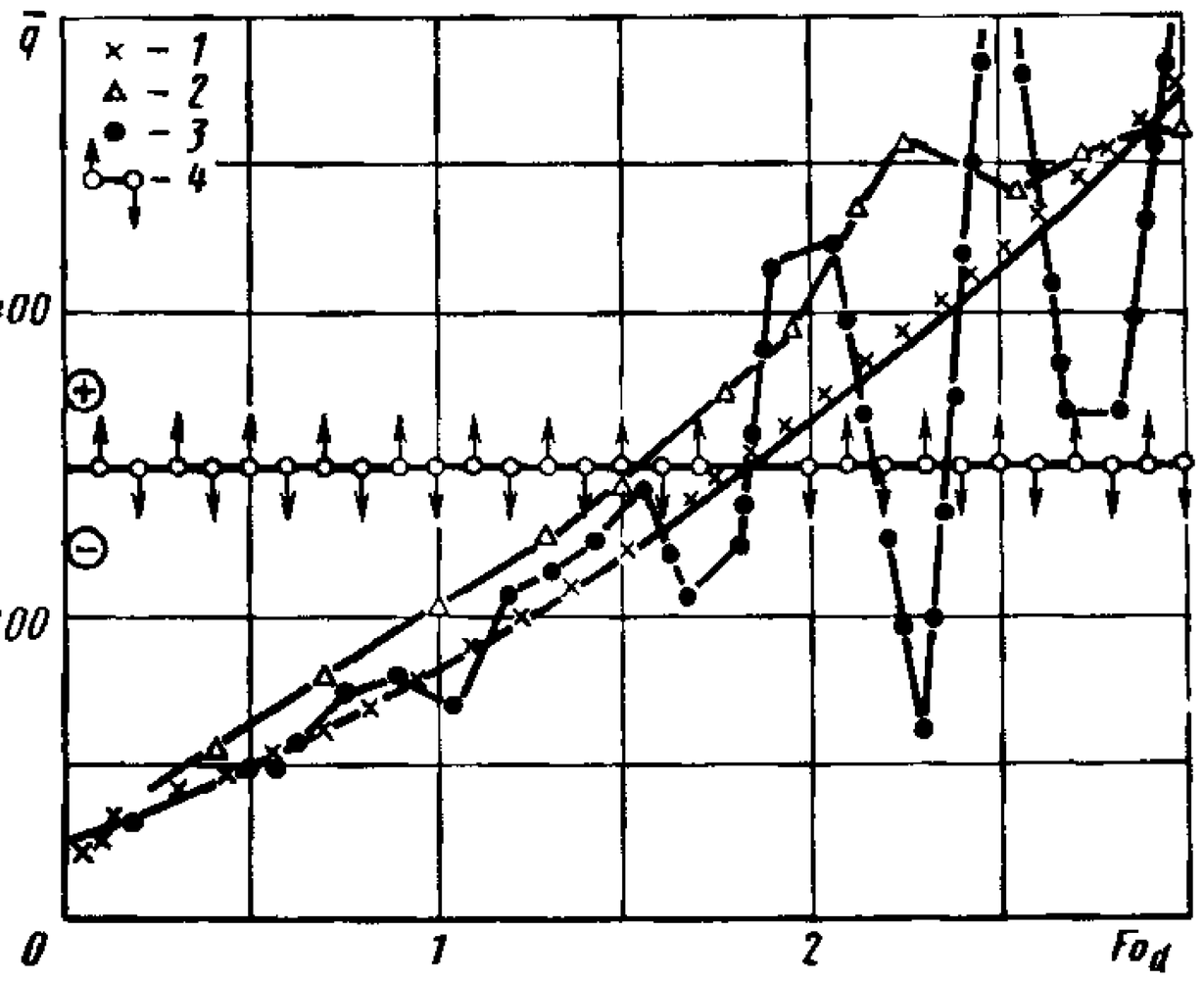


Рис. 5.10. Результаты решения обратной задачи для точных и возмущенных значений температуры (сплошная кривая – действительное решение):
$1 - \delta T \sim 0$; $\Delta Fo_d = 0{,}06$, $\kappa = 8$; 2 – нормальный закон распределения ошибок в температуре с разбросом $3\sigma(\tau) = 0{,}1 T_\kappa(\tau)$, $\Delta Fo_d = 0{,}32$, $\kappa = 6$; 3 – $3\sigma(\tau) = 0{,}1 T_\kappa(\tau)$, $\Delta Fo_d = 0{,}15$, $\kappa = 6$; 4 – $3\sigma(\tau) = 0{,}05 T_{\kappa max}$, $\Delta Fo_d = 0{,}006$

аналитических методов решения интегральных форм ОЗТ. К этому нужно добавить, что алгоритмы численного продолжения температурного поля, использующие явные разностные схемы, просты и удобны в программировании и не требуют больших затрат машинного времени для своей реализации Однако рассмотренные явные схемы имеют также и достаточно жесткие ограничения по минимально допустимым шагам дискретизации временной координаты.

5.4. НЕЯВНАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Желание повысить вязкостные свойства вычислительных алгоритмов и тем самым расширить область применимости прямых численных методов приводит к *неявной схеме* аппроксимации уравнения теплопроводности в задаче продолжения температурного поля по данным Коши. В этом случае значения температуры T_{ln}, $n = \overline{1, m}$ на некотором пространственном слое l находятся одновременно из решения алгебраической системы с входными данными в виде двух временны́х рядов температур $T_{l-1,\,n}$ и $T_{l-2,\,n}$, $n = \overline{1, m}$.

Рассмотрим неявную сеточную аппроксимацию задачи Коши для уравнения (5.5) с условиями (5.2) – (5.4), считая $d = b$. Выбрав прямоугольную сетку, положим, как и ранее, $x_l = l\Delta x$, $l = \overline{0, L}$; $\tau_n = n\Delta\tau$, $n = \overline{0, m}$, где Δx и $\Delta\tau$ – шаги по координате и времени соответственно.

Временной и пространственные дифференциальные операторы заменим разностными соотношениями (рис. 5.11)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_{ln} \simeq \frac{T_{l,\,n+1} - T_{l,\,n-1}}{2\Delta\tau}; \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{ln} \simeq \frac{T_{l+1,\,n} - T_{ln}}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big|_{ln} \simeq \frac{T_{l+2,\,n} - 2T_{l+1,\,n} + T_{ln}}{\Delta x^2}.$$

Чтобы получить возможность расчета сеточной функции температуры во всех узлах прямоугольной области, необходимо задать дополнительное условие на ее верхней границе при $\tau = \tau_m$. Как показали вычислительные эксперименты, можно принять одно из следующих априорных условий:

$$\frac{\partial T(x, \tau_m)}{\partial \tau} \simeq \frac{T_{lm} - T_{l,\,m-1}}{\Delta\tau} = C_1; \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, \tau_m)}{\partial \tau^2} \simeq \frac{T_{l,\,m+1} - 2T_{lm} + T_{l,\,m-1}}{\Delta\tau^2} = C_2; \quad (5.20)$$

$l = L-1,\ L-2, \ldots, 0,$

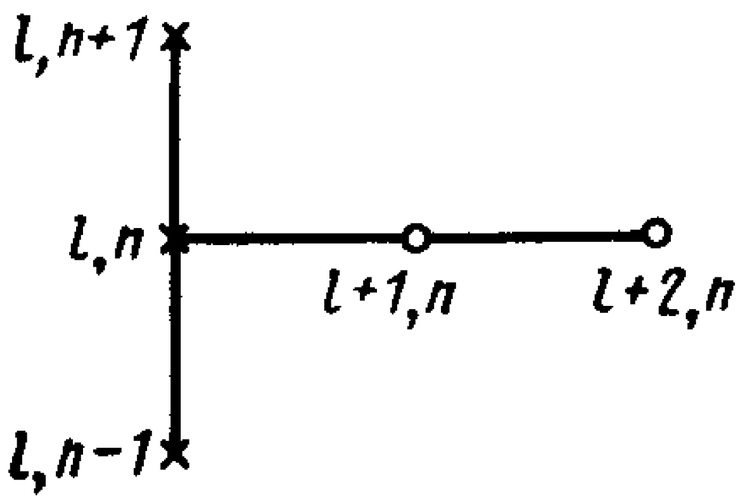


Рис. 5.11. Неявная разностная схема

где

$$C_1 = \frac{df(\tau_m)}{d\tau} = \text{const}, \quad C_2 = \frac{d^2 f(\tau_m)}{d\tau^2} = \text{const}.$$

Уклонение решения от искомого, обусловленное введением ограничений на производные (5.19) и (5.20), наблюдается в некоторой сравнительно небольшой области $\bar{\tau} < \tau < \tau_m$, причем условие (5.20) дает меньшее искажение результатов. Можно избежать указанного ухудшения решения в окрестности $\tau = \tau_m$, если значения температуры $f(\tau)$ известны не только на интервале времени $[0, \tau_m]$, но и при $\tau > \tau_m$. В этом случае, как уже говорилось в разд. 5.1.2, нет необходимости назначать дополнительное условие и область численного решения ОЗТ принимает трапециевидную форму.

Другая возможность состоит в аппроксимации уравнения теплопроводности в граничных узлах сетки ($n = m$) по явной схеме. Для этого воспользуемся следующим соотношением:

$$\frac{\partial T(x, \tau_m)}{\partial \tau} \simeq \frac{T_{lm} - T_{l, m-1}}{\Delta \tau}. \qquad (5.21)$$

Конечно-разностный аналог задачи (5.5), (5.2) – (5.4) для l-го пространственного слоя соответствует системе нелинейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей ($l = L-2, L-3, \ldots, 0$):

$$T_{l0} = \varphi_l; \qquad (5.22)$$

$$A_{ln} T_{l, n+1} + B_{ln} T_{ln} + D_{ln} T_{l, n-1} = F_{ln}; \quad n = \overline{1, m-1}; \qquad (5.23)$$

$$\alpha_{lm} T_{lm} + \gamma_{lm} T_{l, m-1} = \beta_{lm}, \qquad (5.24)$$

где

$$A_{ln} = \frac{1}{2\Delta\tau}; \quad B_{ln} = -\frac{a_{ln}}{\Delta x^2}; \quad D_{ln} = -\frac{1}{2\Delta\tau};$$

$$F_{ln} = a_{ln} \frac{T_{l+2, n} - 2T_{l+1, n}}{\Delta x^2} + \frac{\lambda'_{ln} a_{ln}}{\lambda_{ln}} \left(\frac{T_{l+1, n} - T_{ln}}{\Delta x} \right)^2.$$

Величины α_{lm}, γ_{lm} и β_{lm} определяются видом априорного условия в конце временного интервала. При задании первой производной в виде соотношения (5.19) имеем $\alpha_{lm} = -\gamma_{lm} = 1$, $\beta_{lm} = C_1 \Delta\tau$. Для двух других условий соответствующие выражения получаются с учетом основного разностного уравнения (5.23).

Условие (5.20): $\alpha_{lm} = 1 - \frac{a_{lm} \Delta\tau}{\Delta x^2}$; $\gamma_{lm} = -1$;

$$\beta_{lm} = F_{lm} \Delta\tau - \frac{\Delta\tau^2}{2} C_2.$$

Условие (5.21): $\alpha_{lm} = 1 - \dfrac{a_{lm}\,\Delta\tau}{\Delta x^2}$; $\gamma_{lm} = -1$; $\beta_{lm} = F_{lm}\,\Delta\tau$.

Коэффициенты и правые части системы (5.22) — (5.24) являются функциями неизвестных температур. Поэтому для каждого шага по координате x необходимо повторять процесс итерационного приближения до тех пор, пока в двух последовательных итерационных циклах не исчезнет заметная разница между сеточными функциями T_l:

$$\max_n \mid T_{ln}^{(p)} - T_{ln}^{(p-1)} \mid \leqslant \epsilon,$$

где p — номер итерации; $\epsilon > 0$ — некоторая малая величина.

После выполнения условий сходимости осуществляется переход к следующему пространственному слою. В том случае, когда функция $\lambda(T)$ задана таблично, предпочтительнее пользоваться несколько измененным алгоритмом, в котором производная $\lambda'_{ln} = \dfrac{d\lambda}{dT}\Big|_{ln}$ аппроксимирована разностным соотношением

$$\lambda'_{ln} \simeq \frac{\lambda_{l+1,\,n} - \lambda_{ln}}{T_{l+1,\,n} - T_{ln}}.$$

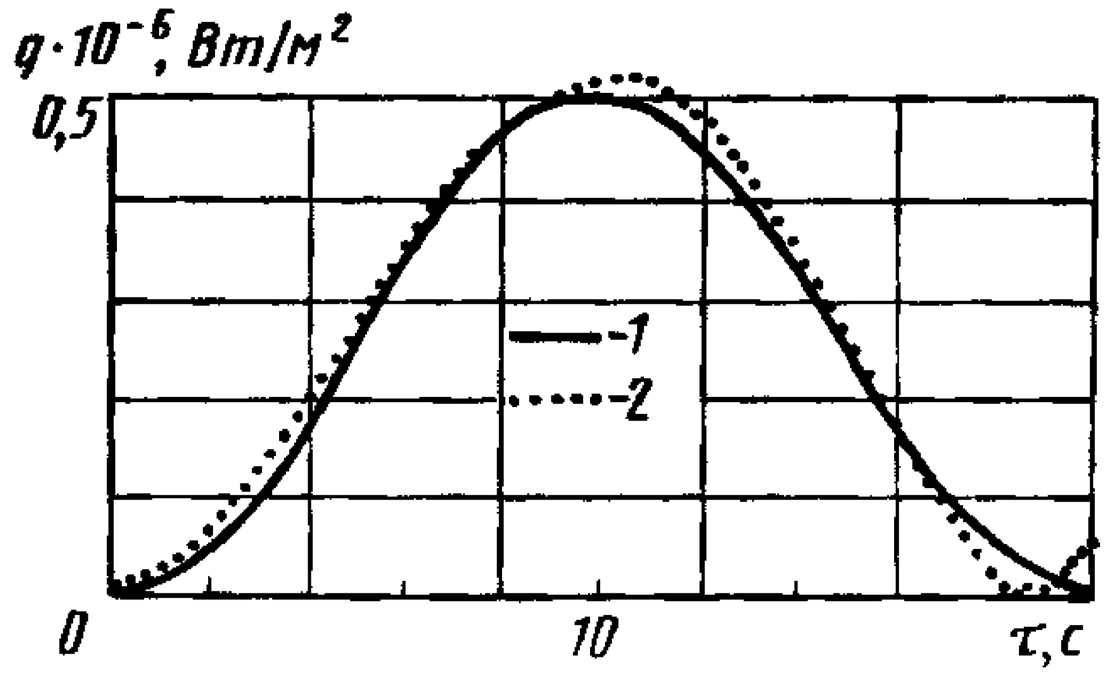
Тогда в системе (5.22) — (5.24) коэффициенты B_{ln} и правые части F_{ln} запишутся следующим образом:

$$B_{ln} = \frac{a_{ln}}{\Delta x^2}\left(\frac{\lambda_{l+1,\,n}}{\lambda_{ln}} - 2\right); \quad F_{ln} = \frac{a_{ln}}{\Delta x^2}\left[T_{l+2,\,n} + T_{l+1,\,n}\left(\frac{\lambda_{l+1,\,n}}{\lambda_{ln}} - 3\right)\right].$$

Для начала счета необходимо знать температуры T_{Ln} и $T_{L-1,n}$. Первый временной ряд $\{T_{1n}\}$ получается соответствующей дискретизацией входной функции $f(\tau)$. Температуры $\{T_{L-1,n}\}$ на фиктивном $L-1$ слое рассчитываются с помощью выражения для разностной аппроксимации граничного условия, например, типа (5.7). Заметим, что если $b > d$, значения $T_{L-1,n}$ находятся из решения прямой задачи теплопроводности.

Описанная схема аппроксимации (5.22) — (5.24) имеет второй порядок по времени и первый по пространству. Можно получить разностные уравнения, имеющие второй порядок также и по пространственной переменной*.

*Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Панкратов Б.М. Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности. // Тепломассообмен-V. Минск: ИТМО АН БССР. 1976. Т. 9. С. 94–103.



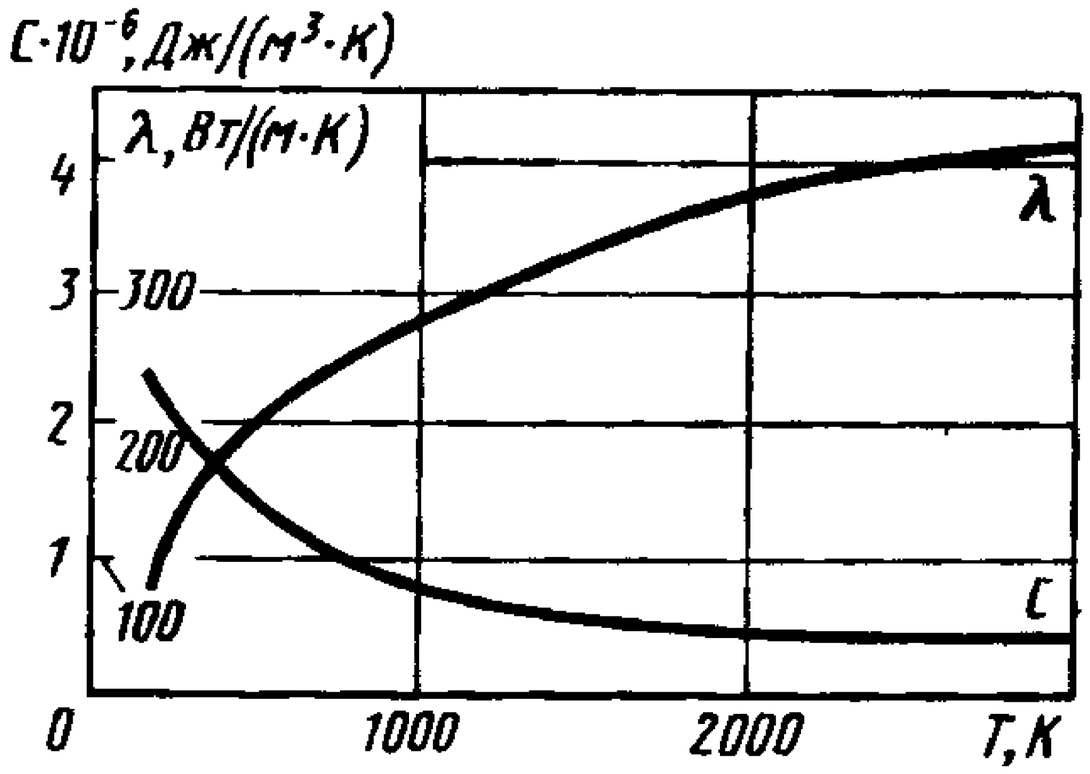


Рис. 5.12. Результаты восстановления плотности теплового потока для невозмущенных входных данных $T^*(\tau) = f(\tau)$, $q^*(\tau) = 0$:
$b = 0{,}002$м; $a = 0{,}4 \cdot 10^{-6} - 0{,}143 \cdot 10^{-9} T + 0{,}408 \cdot 10^{-12} T^2$, м²/с; $\lambda = 0{,}721 + 0{,}288 \cdot 10^{-3} T$, кВт/м·К; 1 – действительное решение; 2 – результаты расчета, $\Delta\tau = 0{,}4$ с

Рис. 5.13. Теплофизические свойства материала

Рассмотренный алгоритм, несмотря на неявную аппроксимацию уравнения теплопроводности, может обладать только *слабой устойчивостью* на конечном числе шагов по координате x (подробнее см. [6]). Условие слабой устойчивости соответствует неравенству

$$\Delta \mathrm{Fo} \geqslant \Delta \mathrm{Fo}_{\text{доп}}. \qquad (5.25)$$

В случае нелинейных задач теплопроводности, условие (5.25) является локальным условием устойчивости и должно выполняться во всех узлах пространственно-временной сетки.

Для описанных выше алгоритмов был проведен практический анализ корректности, основанный на численном решении модельных задач. Как и ожидалось, неявные разностные схемы, в сравнении с явными, обладают бóльшими вязкостными свойствами, оказывающими стабилизирующее действие на проявление признаков неустойчивости в результатах. Нарушение гладкого характера восстанавливаемого решения происходит при значительно меньших шагах по числу Фурье. Для достаточно гладких входных функций $f(\tau)$ устойчивое вычисление плотности теплового потока $q(\tau)$ по неявной схеме возможно при $\Delta \mathrm{Fo} \geqslant 0{,}01$–$0{,}02$. Результаты решения одного из методических примеров приведены на рис. 5.12. На рис. 5.14 показаны результаты восстановления температуры поверхности теплозащитного покрытия, для которого на рис. 5.13 даны ТФХ.

Итак, неявная численная схема решения ОЗТ с точки зрения устойчивости результатов имеет преимущество по сравнению с явной, однако не является рекуррентной. С вычислительных позиций неявная схема приводит к некоторому усложнению алгоритма и бóльшим затратам машинного времени.

Алгоритмы решения нелинейных ОЗТ прямыми методами, аналогичными рассмотренным, но для более сложных тепловых моделей,

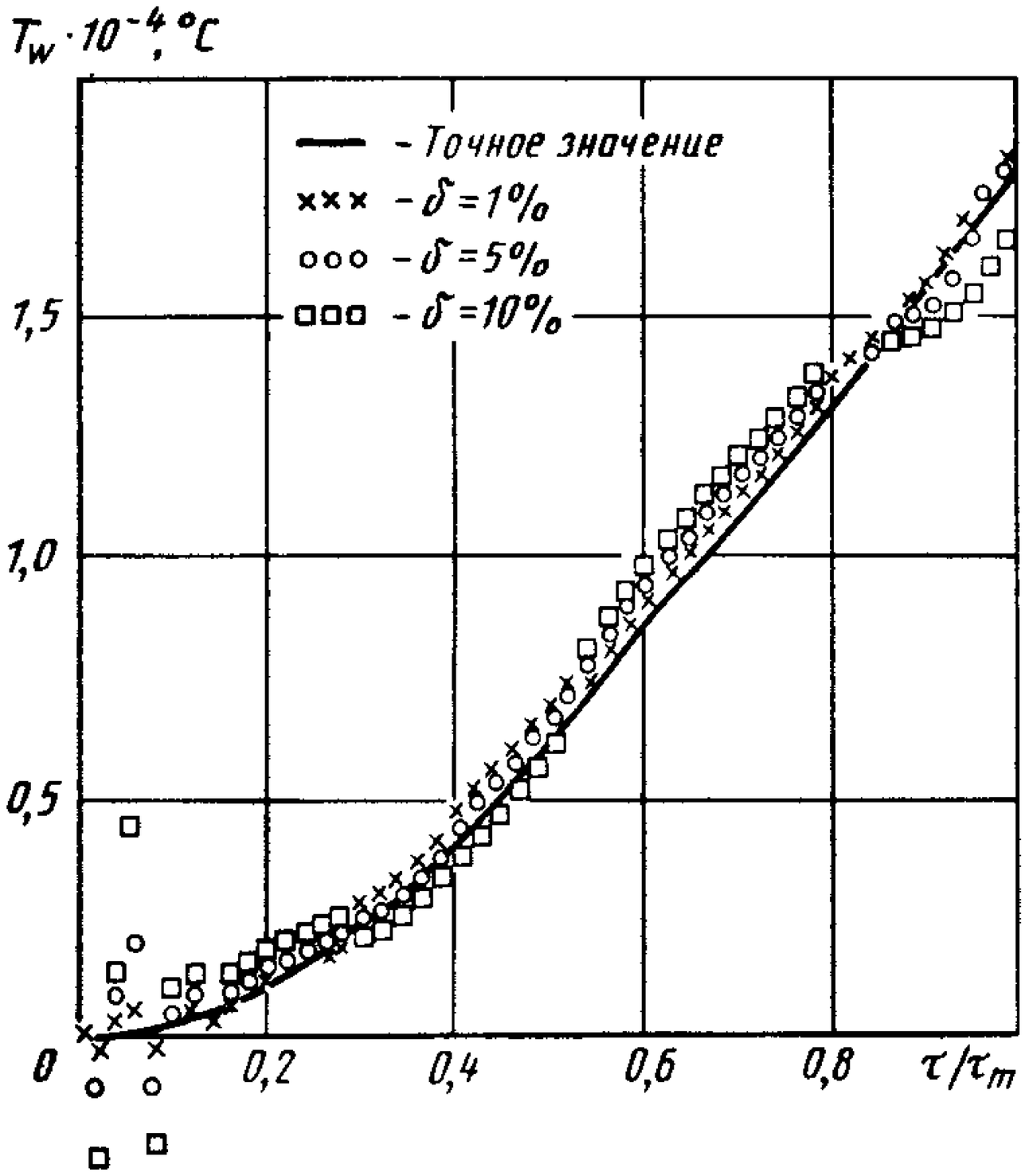


Рис. 5.14. Результаты восстановления температуры поверхности на сглаженных входных данных при нормальном законе распределения ошибок

включающих движение границ тела, конвективный перенос теплоты и распределенные источники, предложены и исследованы в работах [1, 7, 38].

5.5. ОБ ИСКУССТВЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЗАЦИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В разд. 5.3 обсуждался вопрос об увеличении устойчивости численного решения ОЗТ, которое связано с естественной гиперболизацией дифференциального приближения разностной схемы. Развивая эту мысль, можно попытаться специально переформулировать обратную задачу для параболического уравнения в обратную задачу для гиперболического уравнения теплопроводности.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m], \tag{5.26}$$

где параметр α соответствует времени релаксации в уравнении (5.16) $\tau_r = a/w^2$ *. При выборе наилучшего приближения к искомому граничному условию параметр α играет роль некоторого фиктивного времени

*Эта величина для твердых тел весьма невелика (например, для алюминия $\tau_r \sim 10^{-11}$ с) и влияние члена $\tau_r \partial^2 T/\partial \tau^2$ на решение прямой задачи теплопроводности пренебрежимо мало.

релаксации. Для точных входных данных его величина будет близка к действительному времени релаксации. С увеличением погрешности измерения температуры, а также ошибок аппроксимации и округления эффективное значение α должно быть увеличено с целью сглаживания результатов решения ОЗТ. При этом необходимо определенным образом согласовать α с точностью исходных данных.

Рассмотрим следующую обратную задачу, соответствующую смешанной постановке граничной задачи для гиперболического уравнения. Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $T(x, \tau)$, которая в области $D = \{(x, \tau) : x \in (0, b)\, \tau \in (0, \tau_m)\}$ удовлетворяет уравнению (5.26), а на границах $\tau = 0$, $\tau = \tau_m$, $x = b$ и в т. $x = d$, $0 < d < b$ – условиям $T(x, 0) = 0$, $x \in [0, b]$; $\dfrac{\partial T(x, \tau_m)}{\partial \tau} = 0$, $x \in [0, d]$;**

$$T(d, \tau) = T^*(\tau), \quad -\lambda \frac{\partial T(b, \tau)}{\partial x} = q^*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \tag{5.27}$$

где $T^*(\tau), q^*(\tau)$ – известные функции.

По найденному полю $T(x, \tau)$ восстановить плотность теплового потока $q^\alpha(\tau) = -\lambda \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}$ на границе $x = 0$ при заданном значении параметра α.

Разностный аналог уравнения (5.26) построим по явной схеме "крест" на сетке $\{x_l = \Delta x l,\ l = \overline{0, \kappa};\ \tau_n = \Delta \tau n,\ n = \overline{0, m}\}$. В итоге получим

$$T_{l+1, n} = 2T_{ln} - T_{l-1, n} + \frac{\Delta x^2}{2a\,\Delta \tau}(T_{l, n+1} - T_{l, n-1}) +$$

$$+ \frac{\alpha}{a}\left(\frac{\Delta x}{\Delta \tau}\right)^2 (T_{l, n+1} - 2T_{ln} + T_{l, n-1}).$$

Дискретное приближение к условиям Коши в точке $x = d$ при численном решении задачи представим в виде $T_{\kappa n} = T^*_n$, $T_{\kappa+1, n} = f_n$, где сеточная функция f_n следует из решения прямой задачи теплопроводности в области $x \in [d, b]$, $\tau \in [0, \tau_m]$ по известным граничным условиям (5.27).

Приведем результаты решения методического примера, аналогичного разобранному в разделе 5.3.4. В процессе вычислений было установлено, что с увеличением α амплитуды колебаний функции $q^\alpha(\tau)$, рассчитанной по возмущенной температуре $T^*(\tau)$, уменьшаются. Для лучших (в пределах схемы "крест") приближений амплитуды снижаются в 3 – 5 раз по сравнению со случаем $\alpha = 0$. При этом колебания происходят около некоторой "средневзвешенной" кривой $\bar{q}(\tau)$, сравнительно близкой к истинной (рис. 5.15).

**Могут задаваться условия и других типов.

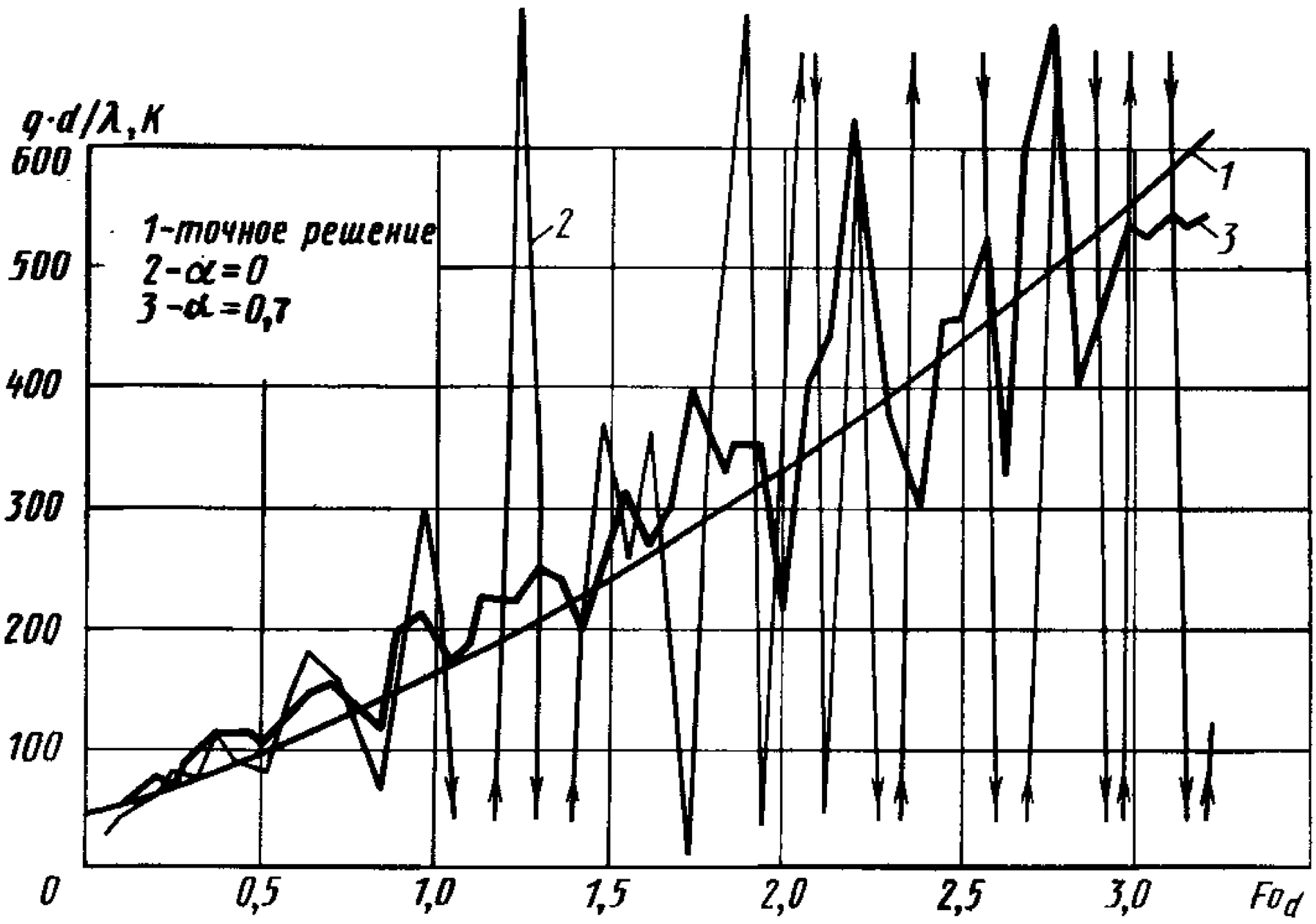


Рис. 5.15. Результаты восстановления теплового потока для нормального закона распределения ошибок в исходных значениях температуры, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}065$, $3\sigma = 0{,}05\, T^*_{\max}$

Если решать указанную задачу с использованием неявной схемы аппроксимации, имеющей шаблон такого же типа, что показан на рис. 5.11, то результаты качественно не изменяются, т.е. эффект сглаживания возрастает по мере увеличения α. Однако, с другой стороны, в результате все большего нарушения уравнений теплового баланса может происходить заметное искажение граничного условия. Обычно кривая, не успев должным образом сгладиться, начинает в среднем "уходить" от искомого решения и это искажение может быть значительным.

Основной вывод данного анализа заключается в том, что изложенный способ стабилизации решения ОЗТ позволяет увеличить устойчивость результатов, причем существует такое значение параметра α, при котором уклонение полученного решения от истинного будет наименьшим. Это значение может быть приближенно найдено, если согласовать рассчитанную функцию температуры $T^{\alpha}_{кп}$ с заданной функцией в соответствии с условием $\left| \sum_{n=1}^{m} (T^{\alpha}_{кп} - T^{*}_{n})^2 - \delta^2 \right| = \min_{\alpha}$, где $T^{\alpha}_{кп}$ — значения температуры, полученные из решения обычного уравнения теплопроводности Фурье в области D с использованием известного граничного условия $q^*(\tau)$ и условия $q^{\alpha}(\tau)$, вычисленного в результате решения ОЗТ для гиперболического уравнения; δ — известная погрешность входной температуры T^*. Здесь предполагается, что величина $q^*(\tau)$ задана точно, а ошибка δ значительно превосходит погрешность аппроксимации при определении $T^{\alpha}_{кп}$.

Близкий к описанному способ решения ОЗТ, основанный на при-

ближенной замене уравнения теплопроводности уравнением гиперболического типа, использовался также в работе [119] .

Заметим, что стабилизирующий эффект при численном решении ОЗТ может быть достигнут и путем регуляризации соответствующих разностных схем, как это сделано применительно к ретроспективной ОЗТ в [25] .

Выводы

1. Представлены разностные алгоритмы решения нелинейных граничных ОЗТ, в основу которых положены явные и неявные схемы численного продолжения температурного поля при выборе шагов аппроксимации из условия устойчивости результатов.

2. Установлено свойство схемной вязкости как дополнительного регуляризирующего фактора при решении обратных задач. Даны оценки минимально допустимых шагов временной аппроксимации уравнения теплопроводности.

3. Показано, что искусственная гиперболизация уравнения теплопроводности позволяет повысить устойчивость численного решения граничных ОЗТ.

ГЛАВА 6
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

6.1. ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Одним из перспективных направлений в решении обратных задач теплообмена является приведение их к *экстремальным постановкам* и использование численных методов теории оптимизации. При этом возможны два случая:

1) решение ищется в пространстве параметров;

2) задача решается в функциональном пространстве.

В первом случае экстремизируется функция конечного числа параметров — *параметрическая оптимизация*, во втором — определяются функции, экстремизирующие функционал от этих функций — *функциональная оптимизация*.

Эти два подхода в данной главе будут исследованы применительно к решению ОЗТ с помощью одного класса итерационных методов, известных под названием *градиентных*. Решение некорректно поставленных ОЗТ с использованием градиентных алгоритмов обладает существенной спецификой, о которой и пойдет речь в этой главе и гл. 8. Будет

рассмотрен метод итерационного решения обратных задач, предложенный в работах [4, 5] *.

Рассмотрим обратную задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Начальное распределение температуры и теплофизические коэффициенты являются известными величинами. Требуется определить температурное поле $T(x, \tau)$ в области $D = \left\{ (x, \tau) : x \in [0, b], \tau \in (0, \tau_m] \right\}$ и плотность теплового потока $q(\tau) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\text{гр}}$ на границе тела.

В качестве дополнительной входной информации могут быть заданы:

1) условия IV рода – плотность теплового потока $q^*(\tau)$ и температура $T^*(\tau)$ в некоторой фиксированной точке тела $x = d$ (постановка Коши);

2) температура $T^*(\tau)$ в точке $x = d$ и какое-либо граничное условие (I, II или III рода) в другой точке $x = l$. Здесь принято, что $0 < d \leqslant b$, $0 < l \leqslant b$, $d < l$.

Эти дополнительные условия порождают две различные постановки ОЗТ, которые будем называть задачами I и II соответственно.

Задача I. Представим данную задачу в математической записи:

$$\left.\begin{aligned} & C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in (0, d), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \\ & T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, d]; \\ & \frac{\partial T(d, \tau)}{\partial x} = - \frac{q^*(\tau)}{\lambda}; \quad T(d, \tau) = T^*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Плотность теплового потока $q(\tau) = -\lambda^{\partial T(0, \tau)/\partial x}$ будем считать искомой величиной. Зная $q(\tau)$, можно найти температурное поле в рассматриваемой области из решения прямой задачи теплопроводности.

Заметим, что аналогичную задачу можно поставить и в области $x \in [d, b]$, $\tau \in (0, \tau_m]$. Совокупностью этих двух задач будет полностью воспроизведена исходная постановка ОЗТ.

Для трактовки задачи (6.1) в форме оптимального управления необходимо сформулировать критерий оптимальности. Будем выбирать управление $q(\tau)$ из условия определенной согласованности известной температуры $T^*(\tau)$ с температурой $\tilde{T}(q, d, \tau)$, соответствующей данному управлению.

В точной экстремальной постановке определение функции $q(\tau)$

---

*Близкие подходы были использованы для решения ОЗТ в работах [20, 91, 110].

соответствует минимизации невязки: $\inf_q \rho_F^2(\tilde{T}(q, d, \tau), T^*)$, характеризующей уклонение температуры $\tilde{T}(q, d, \tau)$, рассчитанной для некоторой плотности $q(\tau)$, от известной температуры $T^*(\tau)$ в метрике пространства входных данных F.

Выберем в качестве меры уклонения среднеквадратичную невязку

$$J_1(q) = \int_0^{\tau_m} [\tilde{T}(q, d, \tau) - T^*(\tau)]^2 d\tau. \tag{6.2}$$

Величина $J_1(q)$ представляет собой функционал в пространстве функций $q(\tau)$ и его числовое значение определяет расстояние в функциональном пространстве L_2 между заданной $T^*(\tau)$ и рассчитанной $\tilde{T}(q, d, \tau)$ температурами.

О степени близости функций $T^*(\tau)$ и $\tilde{T}(q, d, \tau)$ можно судить и по другим критериям, соответствующим расстояниям в других функциональных пространствах. Однако квадратическая мера ошибки в виде функционала (6.2) как с математической, так и с практической точек зрения обладает рядом полезных свойств, позволяющим строить эффективные вычислительные алгоритмы минимизации применительно к решению различных обратных задач.

Задача II. Предположим, что на границе $x = l$ известно условие II рода. Тогда температурное поле $T(x, \tau)$ должно удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &C\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x \in (0, l), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \\ &T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]; \\ &\frac{\partial T(l, \tau)}{\partial x} = -\frac{g^*(\tau)}{\lambda}; \quad T(d, \tau) = T^*(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где $0 < d < l$.

Формально постановка (6.3) может быть сведена к задаче I. Для этого необходимо определить температурное поле в области $x \in [d, l]$, $\tau \in (0, \tau_m]$ из решения задачи

$$\left.\begin{aligned} &C\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad x \in (d, l), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \\ &T(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [d, l]; \\ &T(d, \tau) = T^*(\tau); \quad \frac{\partial T(l, \tau)}{\partial x} = -\frac{g^*(\tau)}{\lambda}, \quad \tau \in [0, \tau_m]. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

По известной функции $T(x, \tau)$ рассчитывается плотность теплового потока в точке $x = d$: $q^*(\tau) = -\lambda \frac{\partial T(d, \tau)}{\partial x}$ и тем самым окончательно формулируются условия IV рода.

Наряду с этой, рассмотрим две другие экстремальные формы обратной задачи (6.3), отличающиеся между собой выбором меры близости измеренных и рассчитанных температур.

В первом случае по аналогии с задачей I введем следующий критерий:

$$J_2(q) = \int_0^{\tau_m} [\tilde{T}(q, d, \tau) - T^*(\tau)]^2 d\tau. \qquad (6.5)$$

Здесь температура $\tilde{T}(q, d, \tau)$ соответствует тепловым потокам плотностью $q(\tau)$ и $g^*(\tau)$, действующим на границах $x = 0$ и $x = l$.

Теперь о другой постановке. Предположим, что задано некоторое приближение к искомой величине $q(\tau) \equiv -\lambda \dfrac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \tilde{q}(\tau)$. Решая прямую задачу в области $D_1 = \{(x, \tau): x \in [0, l], \tau \in (0, \tau_m]\}$, получим соответствующее этому приближению температурное поле $\tilde{T}(x, \tau)$. Функция $\tilde{T}(x, \tau)$ в области $D_2 = \{(x, \tau): x \in [d, l], \tau \in (0, \tau_m]\}$ будет некоторым образом уклоняться от поля $T(x, \tau) = T^*(x, \tau)$, найденного из решения задачи (6.4) по известным условиям $T^*(\tau)$ и $q^*(\tau)$. Для числового выражения этого уклонения используем функционал

$$J_3(q) = \int_0^{\tau_m} \int_d^l [\tilde{T}(q, x, \tau) - T^*(x, \tau)]^2 dx d\tau. \qquad (6.6)$$

Варьируя управляющей функцией $q(\tau)$, будем получать различные значения $J_3(q)$.

Замечание. Задача II с критерием (6.6) допускает обобщение на несколько точек температур в области D_2. Пусть известны температуры $T_1^*(\tau)$, $T_2^*(\tau)$, ..., $T_r^*(\tau)$, соответствующие точкам $x = d_1, d_2, ..., d_r$, где $d_1 < d_2 < ... < d_r = l$. По этим данным восстанавливается температурное поле во всей области D_2. В зависимости от количества точек r и качества измерений, для этой цели можно использовать интерполирование и сглаживание исходной информации, а также решение совокупности прямых задач с граничными условиями I рода – функциями $T_i^*(\tau)$, $i = \overline{1, r}$. В результате формируется функция $T^*(x, \tau)$, рассматриваемая как заданное температурное поле в критерии (6.6).

6.2. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Выше было представлено математическое описание процессов теплопроводности с соответствующими краевыми условиями, выбраны управляющие воздействия и критерии оптимальности. Чтобы завершить любую из указанных постановок экстремальной задачи, необходимо определить допустимое множество функций управления Q и считать, что все управляющие воздействия принадлежат этому множеству ($q \in Q$).

Если предположить, что исходная задача, для которой формулируется экстремальная постановка, корректна, то область допустимых решений можно выделить в основном из чисто физических соображений, которые будут изменяться для каждой конкретной задачи. Например, в некоторых тепловых экспериментах заранее известно, что в течение определенных временных промежутков искомая функция или ее производная знакоопределены. С той или иной степенью точности можно также прогнозировать наибольшее или наименьшее значения $q(\tau)$, примерные времена реализации экстремумов и т.д.

Однако обратные задачи теплопроводности по своей физической сущности являются неустойчивыми и подобного рода ограничений может оказаться недостаточно для формулирования математической корректной задачи оптимального управления. Более того, априорное задание чисто физических ограничений на класс искомых функций подчас невозможно сделать с требуемой точностью. В результате приходится мириться с этой неопределенностью и пытаться решать задачу без ограничений. Вполне естественно, что полученное "оптимальное" решение $q(\tau)$ может не иметь ничего общего с действительным.

Таким образом, если не вводить специальных ограничений на множество допустимых функций $q(\tau)$, то устойчивое решение ОЗТ может быть основано только на использовании естественных регуляризирующих свойств процесса теплопроводности и вычислительных алгоритмов. Раньше, в гл. 4 и 5, с этой целью был выбран один параметр – шаг по времени. Подобным приемом можно также воспользоваться и в случае экстремальной постановки задачи. Однако, как было уже показано, такой способ далеко не всегда употребим, поэтому ниже будет исследована другая возможность регуляризации ОЗТ в экстремальной постановке.

Эту возможность предоставляют некоторые итерационные алгоритмы оптимизации, в которых происходит последовательное уточнение решения в соответствии с формулой

$$q^{k+1}(\tau) = q^k(\tau) + \Delta q^k(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6.7}$$

где $q^0(\tau)$ – начальное приближение. Поправка $\Delta q^k(\tau)$ на каждой итерации вычисляется из условия убывания целевого функционала: $J(q^{k+1}) < J(q^k)$.

Можно предположить, что методы, позволяющие эффективно начинать итерационный процесс от далекой оценки $q^0(\tau)$ и резко замедляющиеся при приближении к минимуму функционала, окажутся полезными для решения обратных задач теплопроводности. Такой способ демпфирования неустойчивости при определении приближенного решения некорректной задачи основывается на "вязкостных" свойствах численных алгоритмов оптимизации.

Необходимо иметь в виду, что по мере увеличения числа итераций решение ОЗТ может ухудшаться, постепенно теряя гладкий характер. Появляющаяся волнообразность в $q^k(\tau)$ будет усиливаться тем быстрее,

чем большими флуктуационными погрешностями отягощены исходные температурные данные и чем больше расстояние между границей с искомым условием $q(\tau)$ и точкой измерения температуры.

В этой связи возникает предложение остановить итерационный процесс на некоторой итерации $k = k$, не допустив появления больших осцилляций в решении. В дальнейшем будем говорить о *допустимом уровне минимизации* интегральной невязки температуры.

Главный вопрос в таком подходе заключается в выборе *критерия останова.* С этой целью введем дополнительное условие, определяющее допустимую степень близости искомого приближения к точной функции $q_{\delta T}(\tau)$, соответствующей возмущенным входным данным. Таким "дисциплинирующим" условием может быть ограничение на уровень невязки, задаваемое как суммарная погрешность δ, включающая ошибку в температурной информации δ_T и ошибку аппроксимации краевой задачи теплопроводности δ_A.

Итак, ограничим итерационную последовательность (6.7) в соответствии с условием

$$J(q) \simeq \delta^2, \tag{6.8}$$

где $\delta^2 = \delta_T^2 + \delta_A^2$.

Наметив общие контуры итерационного решения некорректно поставленной обратной задачи, перейдем в дальнейшем к конкретной реализации данного метода.

6.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Вместо непрерывной функции $q(\tau)$ рассмотрим ее конечно-мерный аналог в виде вектора $\mathbf{q} = [q_1, q_2, ..., q_m]^T$, компоненты которого получены дискретизацией на выбранной временной сетке $q_n = q(\tau_n)$, $n = \overline{1, m}$. Будем считать, что временной ряд $\{ q_n \}_1^m$ используется для кусочно-полиномиальной аппроксимации искомой функции $q(\tau)$: $\hat{q}(\mathbf{q}, \tau) \simeq q(\tau)$. Тогда исходную экстремальную постановку ОЗТ можно переформулировать в задачу параметрической оптимизации.

Для определенности остановимся на второй экстремальной задаче с функционалом (6.5). В данном случае задача I будет следовать из нее как частная постановка.

Отвлекаясь временно от свойства некорректности ОЗТ и условно полагая, поэтому, что можно допустить минимизацию функционала (6.5) без специальных ограничений, получим *параметрический эквивалент* исходной задачи: определить такой набор значений параметров $\{ q_n \}_1^m$ из некоторой области G, который оптимизирует критерий качества $J(\mathbf{q}) \equiv J_2(\mathbf{q})$,

$$J(\mathrm{q}) = \int_0^{\tau_m} [\tilde{T}(\hat{q}(\mathrm{q}, \tau), d, \tau) - T^*(\tau)]^2 d\tau, \qquad (6.9)$$

где $\tilde{T}(\hat{q}(\mathrm{q}, \tau), d, \tau)$ — температура, соответствующая решению прямой задачи теплопроводности с заданным приближением $\hat{q}(\mathrm{q}, \tau)$ к искомой функции.

Во многих практических ситуациях сколь-нибудь конструктивная априорная информация относительно множества G отсутствует, или заранее предполагается, что точка экстремума удовлетворяет всем возможным ограничениям. Тогда задача решается в открытой области (без ограничений).

В практической реализации при счете на ЭЦВМ интегральный критерий качества заменяется конечной суммой. Например, величину (6.9) можно приближенно представить

$$J(\mathrm{q}) \simeq \Delta\tau \sum_{n=1}^{m} [\tilde{T}(\mathrm{q}, d, \tau_n) - T^*(\tau_n)]^2 \equiv \Delta\tau \, \| A[\mathrm{q}] - \mathbf{f} \|^2,$$

где τ_n — точки равномерной дискретизации непрерывных функций $\tilde{T}(\tau)$ и $\tilde{T}^*(\tau)$; $\Delta\tau$ — шаг по времени; $A[\mathrm{q}] \equiv \tilde{\mathbf{T}} = [\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, ..., \tilde{T}_m]^{\mathrm{T}}$ — вектор температуры в точке d, вычисленный по известному $\mathbf{q}$; A — в общем случае нелинейный оператор; $\mathbf{f} = [T_1^*, T_2^*, ..., T_m^*]^{\mathrm{T}}$ — вектор температурных измерений; $\|\mathbf{y}\|$ — евклидова норма некоторого вектора $\mathbf{y}$.

Заметим, что сетки дискретизации искомой величины $q(\tau)$ и температуры $\tilde{T}(\tau)$ не обязательно должны совпадать.

Таким образом, обратную задачу в экстремальной постановке можно свести к минимизации невязки температур в евклидовой метрике

$$\min_{\mathbf{q}} \| A[\mathrm{q}] - \mathbf{f} \|^2. \qquad (6.10)$$

Для решения задачи (6.10) воспользуемся дискретным итерационным процессом, аналогичным (6.7),

$$\mathrm{q}^{k+1} = \mathrm{q}^k + \Delta\mathrm{q}^k, \quad k = 0, 1, ..., \qquad (6.11)$$

где $\mathbf{q}_0$ — начальная оценка искомого вектора.

В качестве приращения $\Delta\mathrm{q}^k$ при переходе к следующему приближению используется вектор

$$\Delta\mathrm{q}^k = -\beta_k \xi^k, \qquad (6.12)$$

где ξ^k — направление от точки q^k; β_k — скалярная величина, определяющая длину шага вдоль этого направления.

Введем в рассмотрение *градиент* целевой функции $\mathrm{J}'(\mathrm{q})$. Его компонентами являются частные производные $J(\mathrm{q})$ по искомым параметрам

$$\mathrm{J}'(\mathrm{q}) = \left[\frac{\partial J}{\partial q_1}, \frac{\partial J}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial J}{\partial q_m} \right]^{\mathrm{T}}.$$

Допустимое направление спуска ξ^k должно задаваться таким образом, чтобы угол между ним и направлением, противоположным градиенту $-\mathbf{J}'(\mathbf{q}^k)$ в точке $\mathbf{q}^k$ был острым, т.е. отвечал условию

$$\cos\gamma_k = \frac{(\mathbf{J}'^k, \xi^k)}{\|\mathbf{J}'^k\| \cdot \|\xi^k\|} > 0,$$

где $(\ ,\ )$ – скалярное произведение в евклидовом пространстве;

$$\mathbf{J}'^k = \mathbf{J}'(\mathbf{q}^k).$$

В оптимальных методах глубина спуска β_k, характеризующая величину шага при переходе к следующему приближению, выбирается как неотрицательное значение β, локально минимизирующее целевую функцию по направлению ξ^k.

Рассмотренный метод спуска позволяет шаг за шагом корректировать управление q, последовательно уменьшая значение функции, т.е. $J(\mathbf{q}^{k+1}) < J(\mathbf{q}^k)$. В предположении единственности решения ОЗТ функция $J(\mathbf{q})$ имеет один минимум, и если исходный функционал является выпуклым (это условие заведомо выполняется для линейных задач), построенная последовательность (6.11) – (6.12) будет сходиться к этой экстремальной точке.

Наглядная геометрическая интерпретация дискретного итерационного процесса решения обратной задачи может быть представлена для случая двумерного вектора $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^{\mathrm{T}}$. На рис. 6.1 показана поверхность отклика и линии уровня. Начальное приближение обозначено точкой P_0. Ему соответствует некоторое значение функции $J(\mathbf{q}^0)$. Траектория движения от P_0 в оптимальную точку представляет собой ломаную линию, каждый отрезок которой соответствует одному итерационному шагу.

В дальнейшем итерационная последовательность для минимизации целевой функции будет строиться в соответствии с двумя методами – скорейшего спуска и сопряженных градиентов. В *методе скорейшего спуска* $\xi^k = \mathbf{J}'^k$ и

$$\beta_k : J(\mathbf{q}^{k+1}) = \min_{\beta > 0} J(\mathbf{q}^k - \beta \mathbf{J}'^k).$$

Если оператор A линейный, то из последнего условия легко получить формулу

$$\beta_k = \|\mathbf{J}'^k\|^2 / 2\|A[\mathbf{J}'^k]\|^2.$$

В *методе сопряженных градиентов*

$$\xi^k = \mathbf{J}'^k + \gamma_k \xi^{k-1}, \quad \gamma_0 = 0.$$

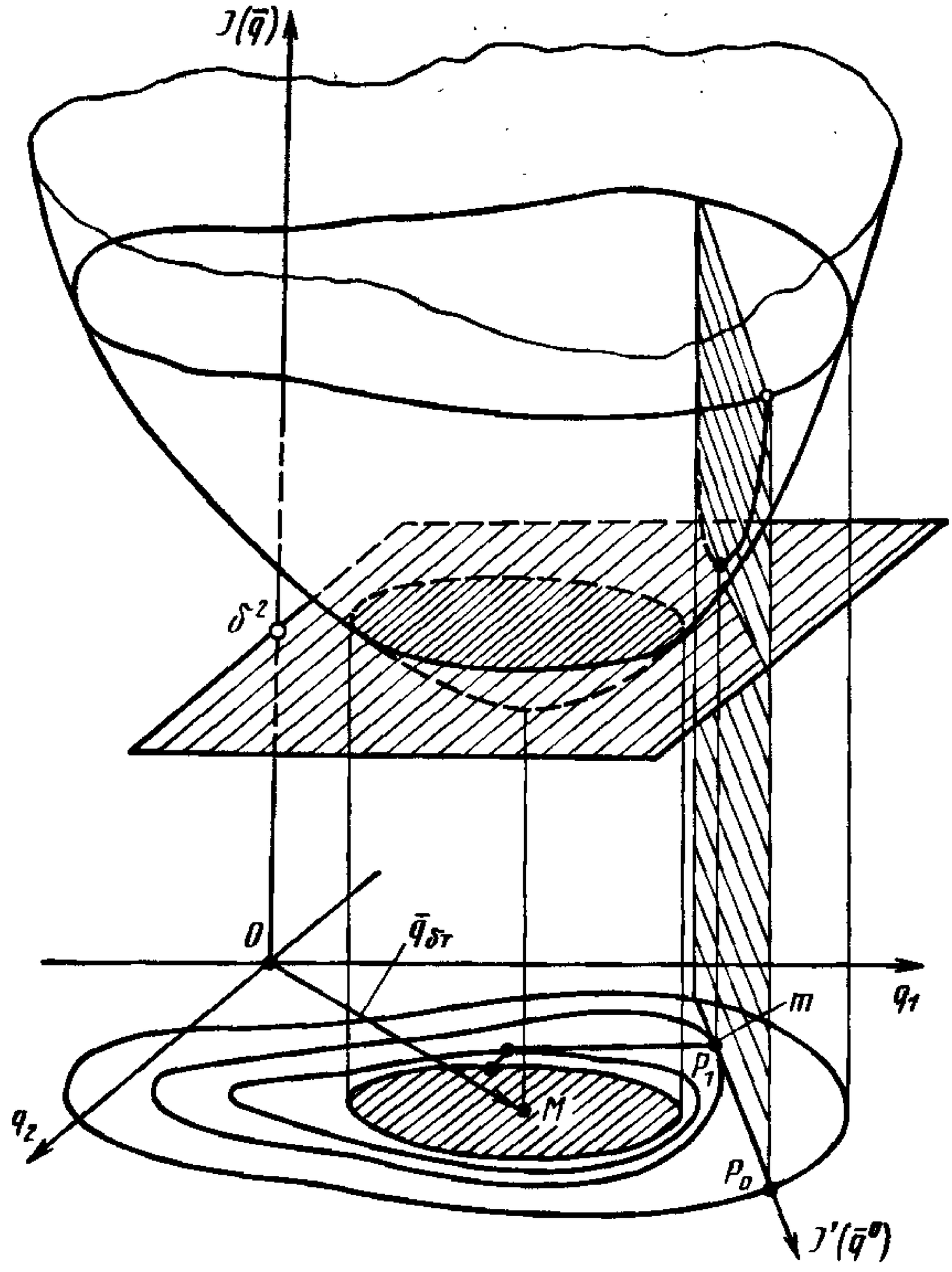


Рис. 6.1. Градиентный метод решения ОЗТ с оптимальным выбором глубины спуска:
M – точка минимума целевой функции, соответствующая точному решению ОЗТ на возмущенных данных (вектор $\bar{q}_{\delta T}$); *m* – точка минимума $J(\bar{q}^1)$ на данном итерационном шаге

Здесь γ_k – числовые параметры, которые в зависимости от выбранного варианта рассчитываются по одной из следующих формул:

$$\gamma_k = \frac{\| J'^k \|^2}{\| J'^{k-1} \|^2}, \quad \gamma_k = - \frac{(J'^k, J'^{k-1} - J'^k)}{\| J'^{k-1} \|^2}.$$

Шаг спуска β_k определяется из условия минимума функции $J(q^{k+1})$. В линейном случае будем иметь формулу

$$\beta_k = \frac{(J'^k, \xi^k)}{2 \| A[\xi^k] \|^2}.$$

Отметим здесь, что одна из разновидностей метода сопряженных градиентов была использована в работе [76] для определения ТФХ разрушающихся материалов.

6.4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

6.4.1. ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В разд. 6.3 неизвестная зависимость плотности теплового потока от времени $q(\tau)$ была заменена конечно-мерным вектором, минимизирующим критериальную функцию. Теперь рассмотрим более сложную задачу поиска функции $q(\tau)$, на которой выбранный функционал принимает минимальное значение. Как и выше, пока не будем касаться вопроса об устойчивости решения ОЗТ в форме оптимального управления, оставив этот анализ до разд. 6.5 и гл. 8.

С учетом последнего замечания постановка задачи будет следующей. Среди функций одной переменной $q = q(\tau)$ класса кусочно-непрерывных функций, заданных на отрезке $[0, \tau_m]$, найти ту, на которой функционал

$$J(q) = \int_0^{\tau_m} [\tilde{T}(q, d, \tau) - T^*(\tau)]^2 d\tau \qquad (6.13)$$

достигает минимального значения при условиях, определяемых соответствующей краевой постановкой задачи теплопроводности.

Градиент этого функционала $J'(\tau)$ в точке q связан с его приращением в этой точке равенством $J(q + \Delta q) - J(q) = \int_0^{\tau_m} J'(\tau)\Delta q(\tau)d\tau +$

$+ o(\|\Delta q\|)$, $q + \Delta q \in Q = L_2$.

В качестве численного метода оптимизации функционала (6.15) примем метод градиентного спуска, в котором итерационная последовательность получается по схеме, аналогичной конечно-мерному случаю:

$$q^{k+1}(\tau) = q^k(\tau) - \beta_k \xi^k(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (6.14)$$

где $q^0(\tau)$ — начальное приближение; $\xi^k(\tau)$ — допустимое направление спуска.

Соответствующие алгоритмы решения ОЗТ для функциональной формы оптимизации также будем строить на базе методов скорейшего спуска и сопряженных градиентов.

В *методе скорейшего спуска* для получения $q^{k+1}(\tau)$ определяется градиент невязки в точке $q^k(\tau)$ и минимизируется $J(q)$ в направлении наиболее быстрого убывания функционала (в направлении антиградиента), исходящего из этой точки:

$$q^{k+1}(\tau) = q^k(\tau) - \beta_k J'^k(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\beta_k : J(q^{k+1}) = \min_{\beta > 0} J(q^k - \beta_k J'^k). \qquad (6.15)$$

Метод сопряженных градиентов соответствует следующему итерационному процессу:

$$q^{k+1}(\tau) = q^k(\tau) - \beta_k S^k(\tau), \quad k = 0, 1, \ldots;$$

$$S_k(\tau) = J'^k(\tau) + \gamma_k S^{k-1}, \quad \gamma_0 = 0;$$

$$\beta_k : J(q^{k+1}) = \min_{\beta \geqslant 0} J(q^k - \beta_k S^k). \tag{6.16}$$

Как и ранее в параметрической оптимизации, различные варианты метода сопряженных градиентов определяются выбором параметра γ:

$$\gamma_k = -\frac{\int_0^{\tau_m} J'^k(\tau)[J'^{k-1}(\tau) - J'^k(\tau)]d\tau}{\int_0^{\tau_m} [J'^{k-1}(\tau)]^2 d\tau};$$

$$\gamma_k = \frac{\int_0^{\tau_m} [J'^k(\tau)]^2 d\tau}{\int_0^{\tau_m} [J'^{k-1}(\tau)]^2 d\tau}.$$

Для глубины спуска β_k в случае линейной постановки обратной задачи справедлива общая для метода скорейшего спуска и сопряженных градиентов формула, которая следует из условий (6.15) и (6.16)

$$\beta_k = \frac{\int_0^{\tau_m} J'^k \xi^k d\tau}{2\int_0^{\tau_m} (A\xi^k)^2 d\tau}.$$

Замечание. Полагая, что искомая функция может быть представлена бесконечным рядом по некоторой системе функций $\{\varphi_k(\tau)\} : q(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\tau)$, где a_k — неизвестные коэффициенты, формально можно свести данную задачу функциональной оптимизации к параметрической. В этом случае число варьируемых параметров будет бесконечным. С другой стороны, всегда можно ограничиться достаточно большим, но конечным числом параметров. Более того, расчеты на ЭЦВМ непремен-

но приводят к дискретному представлению задачи. И тогда возникает резонный вопрос о целесообразности перехода к более сложной задаче в бесконечно-мерном пространстве.

Ответ на этот вопрос, в частности, заключается в том, что при конечно-мерной аппроксимации исходная задача оптимизации не решается точно, и даже если установлена сходимость конечно-мерного приближения к экстремальному решению в исходном бесконечно-мерном пространстве, то эта сходимость может иметь достаточно нерегулярный характер. Кроме того, есть опасность, что процесс аппроксимации будет неустойчивым относительно погрешностей вычисления.

Добавим к этому мнению, что изучение непрерывных экстремальных задач по сравнению с дискретными, более близко специалистам, имеющим дело с решением уравнений с частными производными. Для наших целей такой подход может быть вполне естественен при гибридной (аналого-цифровой) реализации экстремальных методов решения ОЗТ (см. гл. 9).

Таким образом, использование более общей формы — функциональной оптимизации — вполне обосновано.

6.4.2. ФОРМУЛА ДЛЯ ГРАДИЕНТА

Центральный вопрос градиентной минимизации заключается в определении градиента $J'(q)$. Эффективный по скорости вычислений и точности метод расчета J' основывается на использовании решения сопряженной задачи. Этот подход будет подробно описан в гл. 8. Ниже приведем лишь конечные результаты для рассматриваемой ОЗТ.

Пусть ТФХ тела меняются с изменением температуры, т.е. обратная задача, соответствующая условиям (6.1), является нелинейной. Запишем прямую задачу для модельной температуры, заданной преобразованием Кирхгофа $\theta = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^T \lambda(T)\,dT$, где λ_0 — некоторая постоянная. Полагая для простоты $d = b$, получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a(\theta)\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \tag{6.17}$$

$$\theta(x, 0) = \xi(x); \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial \theta(b, \tau)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_0}\, q^*(\tau) \equiv z(\tau); \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_0}\, q(\tau) \equiv p(\tau), \tag{6.20}$$

где $\xi(x) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\varphi(x)} \lambda(T)\,dT.$

Мера погрешности для выбора управляющей функции $p(\tau)$ будет иметь вид

$$J(p) = \int_0^{\tau_m} [\theta(b, \tau) - f(\tau)]^2 d\tau, \tag{6.21}$$

где $f(\tau)$ – известная функция $\left(f(\tau) = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{T^*} \lambda(T) dT\right)$.

В [5, 6] показано, что градиент функционала (6.21) может быть выражен формулой

$$J'(\tau) = -\psi(0, \tau) a(\theta(0, \tau)), \tag{6.22}$$

где $\psi(x, \tau)$ – функция, удовлетворяющая краевой задаче, сопряженной с задачей для приращения θ:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[a(\theta)\psi] + \psi \frac{da}{d\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad x \in (0, b),$$

$$\tau \in (0, \tau_m); \tag{6.23}$$

$$\psi(x, \tau_m) = 0; \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[a(\theta(b, \tau))\psi(b, \tau)] = 2[\theta(b, \tau) - f(\tau)]; \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[a(\theta(0, \tau))\psi(0, \tau)] = 0. \tag{6.26}$$

Таким образом, для определения $J'(\tau)$ необходимо решить задачу (6.23) – (6.26), в которой величина $\theta(b, \tau)$ рассчитывается из (6.17) – (6.20) для заданного приближения к искомой функции $p(\tau)$.

6.5. ВЫБОР ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГРАДИЕНТНЫМИ МЕТОДАМИ

До сих пор при рассмотрении параметрической и функциональной оптимизации условно предполагалось, что искомое решение ОЗТ минимизирует целевой функционал. Однако, если входные данные известны с погрешностью и интервалы дискретизации $q(\tau)$ настолько малы, что шаговая саморегуляризация практически отсутствует, полученное приближение к "точному" решению будет иметь сильно осциллирующий характер.

Поэтому нет необходимости пытаться выявлять оптимальную точку с точностью выше точности задания входных данных. Имеет смысл прервать итерационный процесс по условию (6.8), т.е. как только не-

вязка достигнет значения суммарной погрешности температурных замеров и вычислений

В частности, для параметрической постановки ОЗТ с возмущенными исходными данными за допустимый уровень минимизации примем

$$J(\mathbf{q}) \simeq \delta^2, \tag{6.27}$$

где $\delta^2 = \delta_T^2 + \delta_A^2$.

Величина δ_T^2 оценивается по формуле $\delta_T^2 = \int_0^{\tau_m} \sigma^2(\tau)d\tau$, где $\sigma^2(\tau)$ – дисперсия функции $T^*(\tau)$. Ошибку δ_A определить достаточно сложно, поэтому указанным приемом целесообразно пользоваться, когда выполняется условие $\delta_A \ll \delta_T$. В этом случае можно принять $\delta \simeq \delta_T$.

Для параметрической оптимизации в случае двух переменных линия уровня, соответствующая условию (6 27), ниже которой опускаться не предполагается, показана на рис. 6.1. В данной постановке задачи она ограничивает заштрихованную область недопустимых решений. Сформулированное ограничение является нежестким, однако при больших флуктуационных погрешностях в T^* качество восстанавливаемой функции может быстро ухудшаться по мере движения в сторону оптимальной точки.

Для выбора вектора $\mathbf{q}_\delta$ или функции $q_\delta(\tau)$, удовлетворяющих условию согласования с ошибкой входных данных, используется некоторое предельное количество итераций k, т.е. число итерационных циклов рассматривается как *параметр регуляризации* градиентных методов при решении ОЗТ.

Вычислительный процесс для данного начального приближения завершается при выполнении неравенства $J^k \leqslant \delta^2$.

Дополнительным регуляризирующим параметром в градиентных методах является *величина итерационного шага* β_k. Можно потребовать достаточно точного выхода на заданный уровень невязки за счет варьирования глубиной спуска на последней итерации, т.е. выбрать параметр $\beta_{\bar{k}}$ по условию $\min_{\beta} |J^{\bar{k}} - \delta^2|$. Здесь $\bar{k}$ – это номер итерации, на которой выполняется неравенство (рис. 6.2) $J^{\bar{k}} > \delta > J^{\bar{k}+1}$.

Выбор целевого функционала $J(q)$ в виде среднеквадратичной невязки предполагает получение решений, близких к действительным только в среднем. В частности, градиент $J'(\tau)$ заведомо равен нулю на границе временного интервала при $\tau = \tau_m$. В результате значение

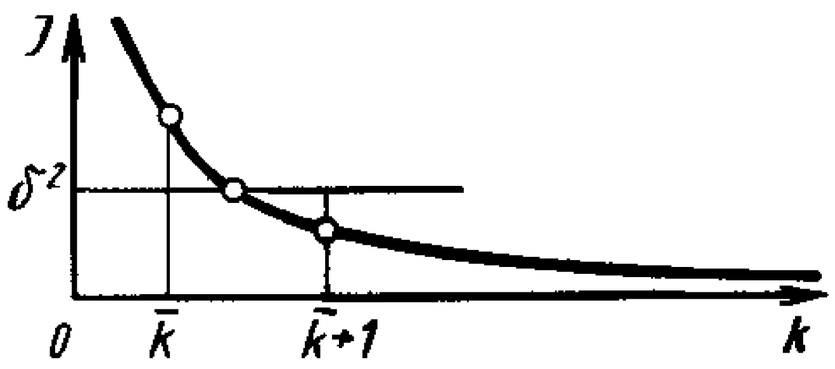


Рис. 6.2. Изменение невязки в процессе итерационной минимизации

$q(\tau_m)$ в процессе итераций меняться не будет. Поэтому, если не удается достаточно точно прогнозировать поведение искомой функции в конце временного интервала и учесть этот момент при задании начального приближения, то в некоторой окрестности $\tau = \tau_m$ кривая $q(\tau)$ будет отклоняться от действительного решения.

6.6. О МЕТОДАХ ГРАДИЕНТНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Остановимся на основных причинах, побудивших привлечь к итерационному решению ОЗТ методы скорейшего спуска и сопряженных градиентов. Это рассмотрение пока носит эвристический характер. О строгих результатах будет сообщено в разд. 8.1.

1. Эти методы в целом удовлетворяют требованиям, постулированным в разд. 6.2. Процесс уточнения искомого решения вначале происходит быстро, слабо зависит от ошибок входных данных и погрешностей вычислений и резко замедляется по мере приближения к оптимальной точке. В результате, с одной стороны, преодолевается одна из основных трудностей оптимизации, связанная с выбором достаточно близкого начального приближения, а с другой — появляется реальная возможность, используя вязкостные свойства алгоритмов, получить гладкие решения ОЗТ. Таким образом оказывается, что свойства медленной сходимости методов вблизи точки минимума, нежелательное при решении корректно поставленных задач, можно использовать как полезное при решении некорректных задач.

2. Методы применимы к решению не только линейных, но и нелинейных задач, обладают наглядностью и универсальностью. Как будет показано в гл. 8, они легко обобщаются на другие типы обратных задач теплообмена, позволяют достаточно просто учитывать априорную информацию об искомом решении.

3. Ниже будет установлено, что реализация соответствующих градиентных алгоритмов приводит к эффективным вычислительным процессам, отличающимся простотой, малыми затратами машинного времени и способностью надежного определения достаточно близких приближений к искомым функциям. Важным моментом является также то, что методы эффективно реализуются не только на ЭЦВМ, но и на гибридных вычислительных системах (см. гл. 9), что дает еще большую экономию затрат машинного времени.

4. Сравнивая возможности выбранных градиентных методов, можно ожидать лучших характеристик вычислительного процесса в случае метода сопряженных градиентов. В первую очередь, данное замечание относится к задачам с гладкими входными данными. Поясним этот момент.

Дело в том, что метод скорейшего спуска представляет собой метод первого порядка, основывающийся на линейной аппроксимации принятого критерия. Качество такой аппроксимации резко ухудшается по ме-

ре приближения к стационарной точке. Метод не обладает "памятью", поскольку на каждом итерационном шаге происходит полное обновление информации. В итоге, плохая сходимость метода начинает проявляться еще на достаточно большом удалении от искомого решения.

Однако можно предположить, что в случае больших флуктуационных ошибок в результатах измерений этот недостаток заметно проявляться не будет, так как предполагается прерывать релаксационный процесс по условию (6.8) с большой величиной допустимого уровня невязки δ^2. В результате, потребное количество итераций окажется небольшим и существенного замедления сходимости еще не произойдет.

Замечание. Методы минимизации второго порядка (ньютоновского типа) непригодны для рассматриваемой итерационной регуляризации. Это объясняется тем, что в линейном случае они сводятся к непосредственному обращению оператора A исходной обратной задачи $Au = f$, а в нелинейном случае требуется обращение производной этого оператора. В то же время оператор A и его производная не являются непрерывными, что исключает такую операцию. Поэтому методы ньютоновского типа могут применяться только при использовании шаговой регуляризации решения или для минимизации сглаживающего функционала при вариационном методе построения регуляризирующего алгоритма.

Метод сопряженных градиентов в некотором смысле объединяет достоинства методов первого и второго порядков. На каждой текущей итерации используется также информация и о предыдущем шаге, поскольку для вычисления нового сопряженного направления требуется знать градиент не только в данной, но и в предшествующей точках. Метод дает возможность ближе и за меньшее число итераций выйти в требуемую окрестность решения, начиная от далекого начального приближения. В то же время, трудности, присущие ньютоновским методам оптимизации, в методе сопряженных градиентов отсутствуют, так как не требуется вычислять и обращать матрицу вторых производных. Ниже будет показано, что метод сопряженных градиентов действительно является эффективной вычислительной процедурой для решения граничных ОЗТ. Данный метод может успешно применяться для решения и других обратных задач, в частности, коэффициентных (см. гл. 8).

6.7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Алгоритмы решения обратных задач теплопроводности, как в линейной, так и в нелинейной постановках, основанные на параметрической и функциональной оптимизации и реализующие методы скорейшего спуска и сопряженных градиентов, достаточно подробно описаны в работах [4, 5, 6]. Ниже излагаются результаты практического анализа корректности и эффективности этих алгоритмов, который заключается в выяснении следующих вопросов:

1. Как влияют вычислительные ошибки и ошибки температурных измерений на сходимость итерационных процессов и качество получаемых приближений?

2. По какому условию следует заканчивать итерации?

3. Насколько велико может быть искажение решения за счет неправильного задания начального приближения в окрестности $\tau = \tau_m$? Соответствующие методические расчеты проводились с шагами по числу Фурье $\Delta Fo = a\Delta\tau/l^2$, значительно меньшими тех предельно допустимых значений, которые соответствуют границе устойчивости прямых алгебраических методов решения интегральных форм ОЗТ (см. гл. 4). Таким образом, шаговая регуляризация решения практически не сказывалась и можно было исследовать регуляризирующие свойства предложенных итерационных методов. Изложим полученные результаты.

6.7.1. УСТОЙЧИВОСТЬ К ОШИБКАМ АППРОКСИМАЦИИ И ОКРУГЛЕНИЯ. ТОЧНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА ГЛАДКИХ ДАННЫХ

Было установлено, что процесс итерационного уточнения теплового потока $q(\tau)$ устойчив к ошибкам, связанным с реализацией вычислительных алгоритмов на ЭЦВМ. Этот вывод относится как к алгоритмам параметрической, так и функциональной оптимизации, построенным на базе методов скорейшего спуска и сопряженных градиентов.

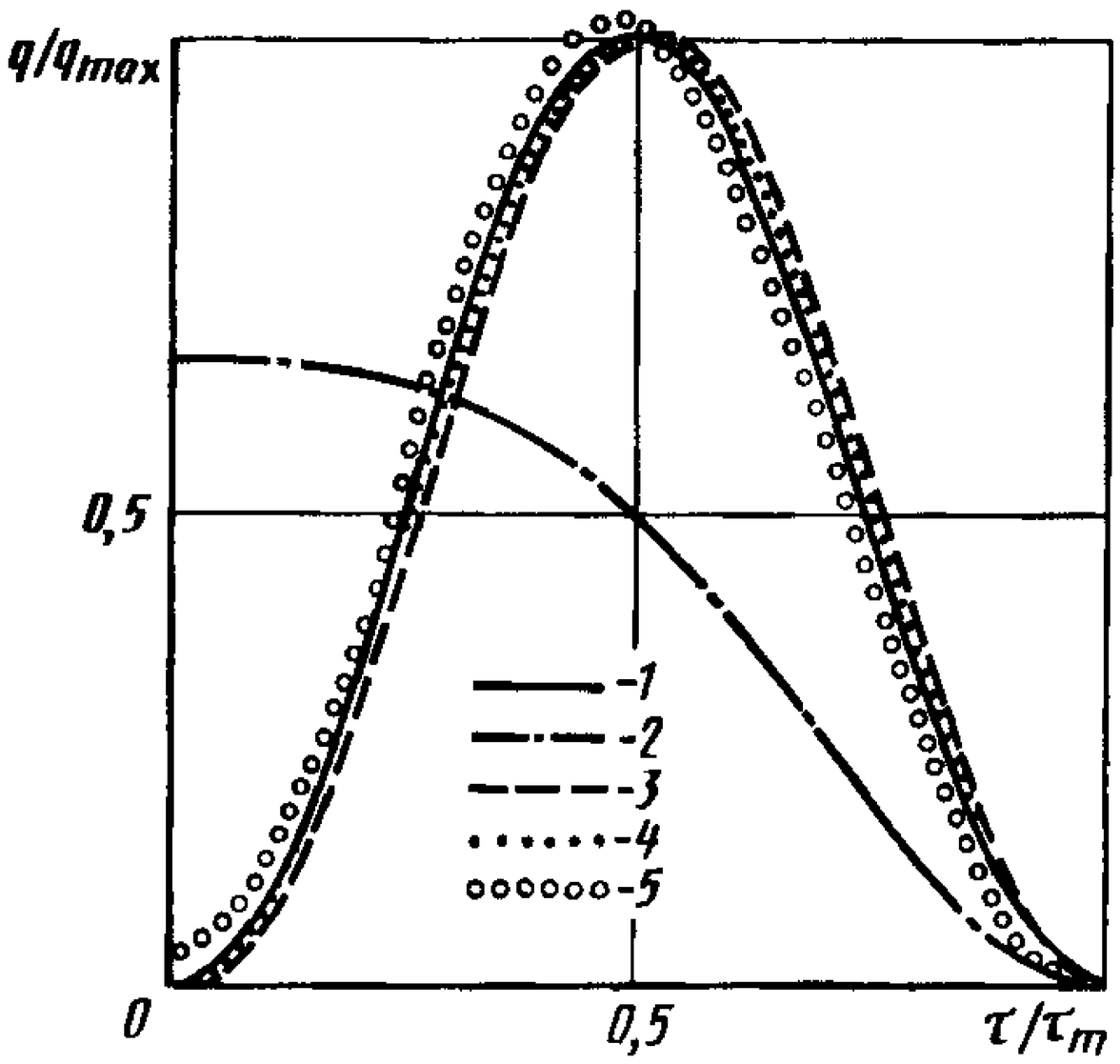
В проведенных методических расчетах в качестве начальных приближений были выбраны далекие оценки $q^0 = 0$ или $q^0(\tau) = 0$. Итерационные процессы вначале сходились быстро и резко замедлялись после трех—шести итераций. При этом в большинстве случаев успевала выявляться форма теплового потока $q(\tau)$.

Вязкостные свойства градиентных методов оказались достаточными, чтобы за любое разумное число итераций не возникло сколь-нибудь существенных колебаний в решении, если в качестве входной информации использовались невозмущенные данные (рис. 6.3 и 6.4, см. также рис. 6.7 и 6.8). В то же время точность восстановления граничного условия достаточно сложной структуры оказывалось вполне приемлемой для большинства практических применений.

Подобное поведение итерационного процесса позволяет избегать введения допустимого уровня минимизации и прекращать поиск обычными способами, например, по "слипанию" двух последовательных приближений к тепловому потоку:

$$\max_{\tau_n} | q^{k+1}(\tau_n) - q^k(\tau_n) | \leqslant \epsilon, \quad n = \overline{1, m}.$$

Отсутствие признаков неустойчивости итерационного решения ОЗТ с точными данными наводит на мысль, что аналогичное поведение решения возможно также и при использовании сглаженной температурной информации. Проведенные расчеты, в которых в качестве алгоритма



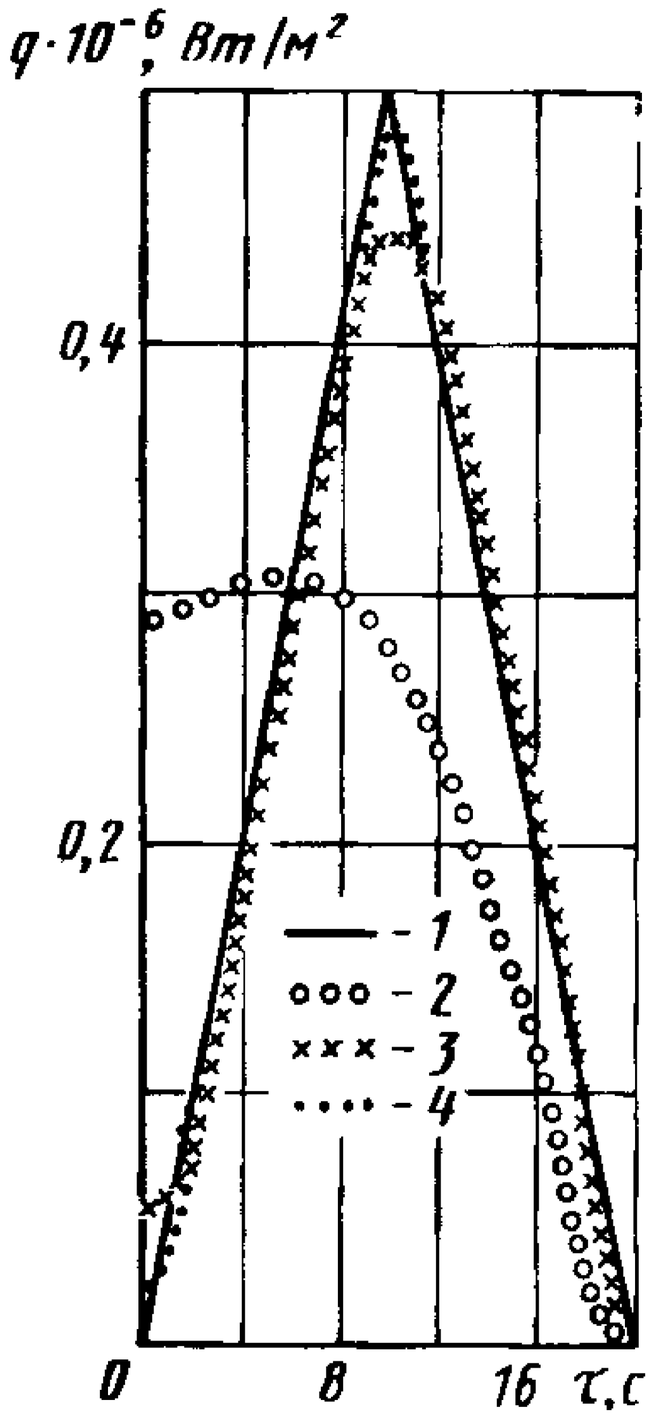


Рис. 6.3. Результаты восстановления плотности теплового потока по методам скорейшего спуска и сопряженных градиентов для невозмущенных данных $b = d$, $\Delta \mathrm{Fo}_b = 0{,}01$
1 – действительное решение; 2, 3, 4 – соответственно 1-е, 9-е и 50-е приближения по методу сопряженных градиентов; 5 – 50-е приближение по методу скорейшего спуска

Рис. 6.4. Результаты восстановления плотности теплового потока по методу сопряженных градиентов для невозмущенных данных $b = 0{,}003$ м, $d = 0{,}002$ м, $a = 0{,}35 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0{,}721$ кВт/(м·К), $\tau = 0{,}4$ с:
1 – действительное решение; 2, 3, 4 – соответственно 1-е, 3-е и 100-е приближения

сглаживания применялся алгоритм, равномерно приближающий функцию и ее производную [1], подтвердили это предположение.

Отсюда следует важный **вывод**: для решения некорректно поставленных обратных задач можно применять традиционную формулу градиентной минимизации, если предварительно *сгладить* результаты температурных измерений. В целом ряде случаев такой подход к обработке данных тепловых испытаний оказывается не только вполне приемлемым, но и наиболее целесообразным.

Наконец, как и ожидалось, последовательность приближенных реше-

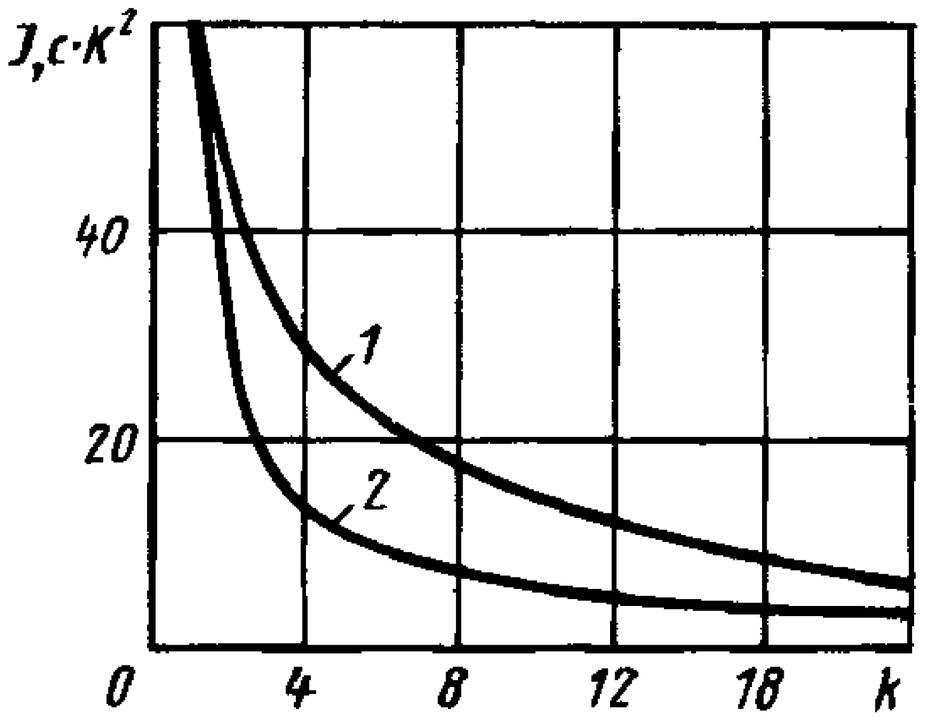


Рис. 6.5. Пример сходимости итерационных последовательностей для невозмущенных данных:
1 – метод скорейшего спуска; 2 – метод сопряженных градиентов

ний, построенная по методу сопряженных градиентов, сходилась быстрее и давала возможность ближе подойти к минимуму функционала-невязки, нежели в случае скорейшего спуска Для одного из примеров подобная ситуация показана на рис. 6.5. Алгоритм решения ОЗТ на основе сопряженных градиентов лишь немногим сложнее алгоритма скорейшего спуска и обладает преимуществом в суммарных затратах вычислительного времени при получении искомого решения с достаточно высокой точностью. Все это позволяет рекомендовать именно этот алгоритм для практического использования при обработке экспериментальных данных.

6.7.2. УСТОЙЧИВОСТЬ К ОШИБКАМ ВХОДНЫХ ДАННЫХ И ВЫБОР ПРИБЛИЖЕНИЯ

Появление флуктуационных ошибок в результатах температурных измерений нарушает описанное выше поведение итерационного процесса. Выявляется также отличие в свойствах алгоритмов параметрической оптимизации от алгоритмов оптимального управления.

Скорость сходимости методов, в которых градиент вычисляется с помощью сопряженной задачи, на первых итерациях оказалась сравнимой со скоростью в случае точного задания входной информации. Весь ход итерационного процесса при наличии ошибок во входных данных можно условно разделить на два этапа: этап выявления и уточнения основных структурных особенностей искомой функции и этап постепенного развития осцилляций в решении. Важно отметить, что первый этап в алгоритмах оптимального управления для кривых $q(\tau)$ разумной сложности успевал в целом закончиться до этапа проявления некорректности задачи. Причем ход уточнения решения на первом этапе сравнительно слабо зависел от уровня и распределения высокочастотной составляющей ошибки в температурных данных.

На рис. 6.6, *а* для достаточно больших флуктуационных возмущений входных данных ($T^*_{\delta n} = T^*_n + \delta_0 \omega_n$, где $\delta_0 = 0{,}1\, T^*_{\max}$; ω_n – случайная величина, распределенная по равномерному закону на сегменте $[-1, 1]$) показаны результаты для трех первых итераций, полученных по методу сопряженных градиентов. Последнее приближение уже достаточно близко к искомой кривой $q(\tau)$. Если продолжать вычислительный процесс дальше, то в течение следующих трех итераций результаты меняются относительно мало. Начиная с 7 – 8 итерации, наблюдается постепенное "раскачивание" решения (на рис. 6.6, *б* приведено 50-е приближение). Примерно такое же поведение наблюдается и в других случаях.

Сходимость алгоритмов параметрической оптимизации оказалась значительно менее регулярной и зависела от характера и величины ошибок в данных измерений. И в том, и в другом случае необходимо ввести допустимый уровень минимизации, т.е. разумно согласовать число итераций с точностью задания исходных данных, с тем, чтобы остановить итерационный процесс где-то на стыке первого и второго этапов.

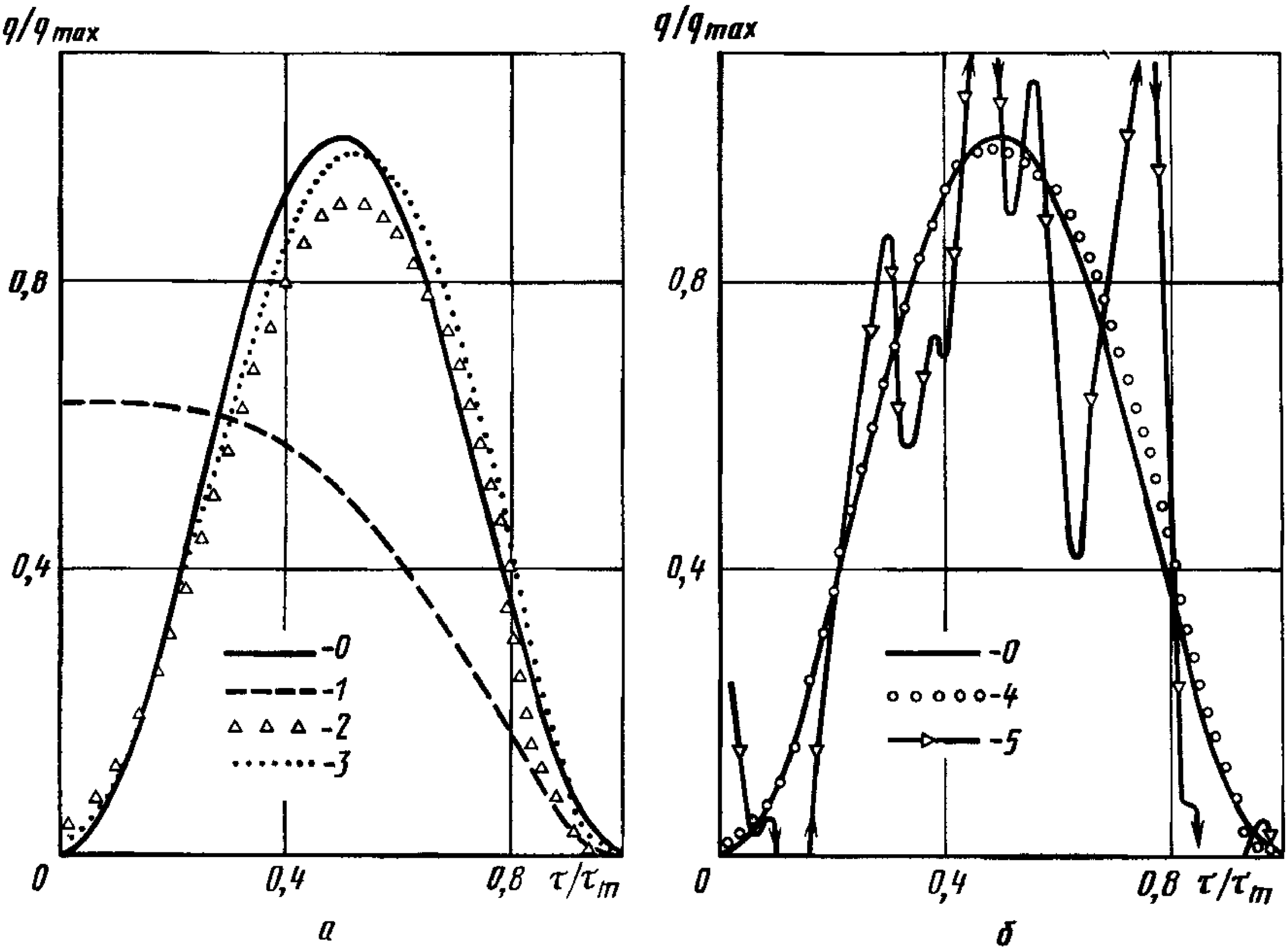


Рис. 6.6. Итерационные решения ОЗТ методом сопряженных градиентов с возмущенными данными, $d = b$, $\Delta \mathrm{Fo}_b = 0{,}01$:
0 – действительное решение; 1, 2, 3 – 1-е, 2-е и 3-е приближения соответственно; 4 – приближение, выбранное по критерию невязки (4-я итерация); 5 – 50-е приближение

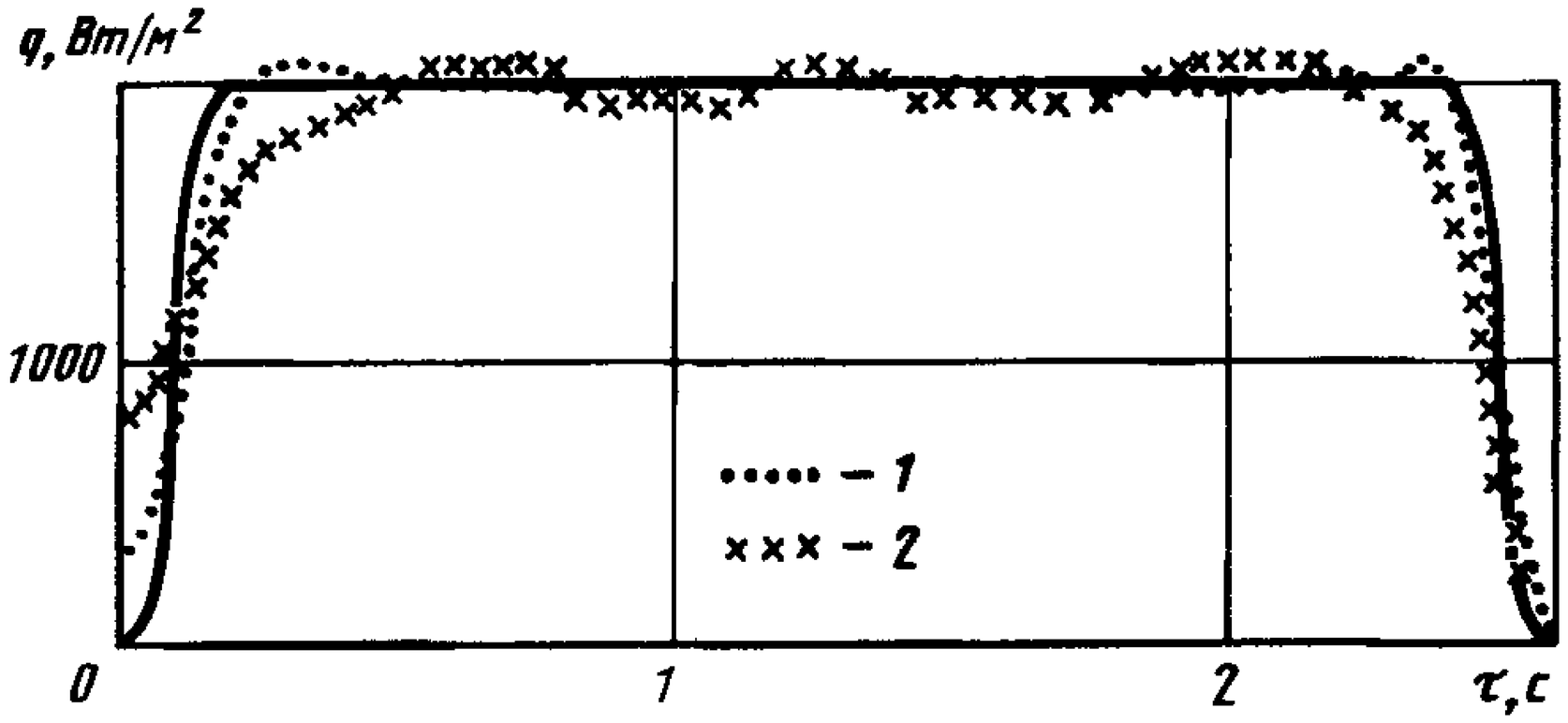


Рис. 6.7. Результаты итерационного решения ОЗТ по методу сопряженных градиентов $d = b = 0{,}15$ м, $a = 10^{-4}$ м²/с, $\lambda = 360$ Вт/(м·К), $\Delta\tau = 0{,}025$ с:
Сплошная кривая – действительное решение: 1 – 100-е приближение для точных данных; 2 – нормальный закон распределения ошибок с разбросом $3\sigma(\tau) = 0{,}02T^*_{\max}$ (останов по критерию невязки)

Как показывают расчеты, осциллирующий характер решений проявляется постепенно, нарастание амплитуды колебаний происходит медленно. Это способствует достаточно точному определению требуемого приближения к искомой функции.

Приближенная аналитическая форма представления решений прямой задачи теплопроводности, рассмотренная в гл. 4, позволяет при соответствующем выборе шага дискретизации процесса по времени $\Delta\tau$ добиться хорошего качества аппроксимации исходной непрерывной задачи. В итоге, при наличии заметных ошибок в температурных измерениях, выполняется неравенство $\delta_T >> \delta_A$, и можно потребовать прекращения поиска по условию

$$J \cong \delta^2, \tag{6.28}$$

где $\delta = \delta_T$.

На рис. 6.6 и 6.7 показаны приближенные решения $q(\tau)$, полученные с помощью описанного выше алгоритма с остановом по условию (6.28). Эти результаты можно расценить как вполне удовлетворительные.

6.7.3. ОБ ОТСУТСТВИИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

В разд. 6.5 отмечался факт отсутствия равномерной сходимости решения изложенным методом. В связи с этим интересно выяснить, как будет влиять "обнуление" градиента при $\tau = \tau_m$ на решение обратной задачи. Заметим, что в параметрической оптимизации за счет разностной аппроксимации целевой функции "последняя" компонента градиента $\partial J/\partial q_m$ не равна нулю, однако ее значение непрерывно уменьшается при все более точной аппроксимации целевой функции. В любом случае восстановленное решение будет уклоняться от точного в некоторой окрестности концевой точки $\tau = \tau_m$, что приводит к искажению решения.

На рис. 6.8, *а* приведены результаты расчета плотности теплового потока по методу сопряженных градиентов при условии, что восстанавливаемая функция не равна нулю при $\tau = \tau_m$ с начальным условием $q^0(\tau) = 0$, $\tau \in [0, \tau_m]$. Для другой начальной оценки результаты представлены на рис. 6.8, *б*. Видно, что более правильный учет поведения искомой функции при задании начального приближения дает лучшие результаты.

При варьировании начальным приближением $q^0(\tau)$ в классе постоянных значений функции $q^0(\tau) = C_1 = \text{const}$, $\tau \in [0, \tau_m]$ или постоянных значений производной $dq^0(\tau)/d\tau = C_2 = \text{const}$, $q^0(0) = 0$, $\tau \in [0, \tau_m]$ в полученном множестве решений $q(\tau)$ имеется представитель, наиболее близкий к действительному решению.

При выборе этого представителя для случая гладких входных данных можно ориентироваться на величину минимизируемой невязки температур спустя 10 – 20 итераций: при более близком задании начального приближения в окрестности концевой точки, величина невязки оказывается меньше. В частности, для задачи, результаты решения которой

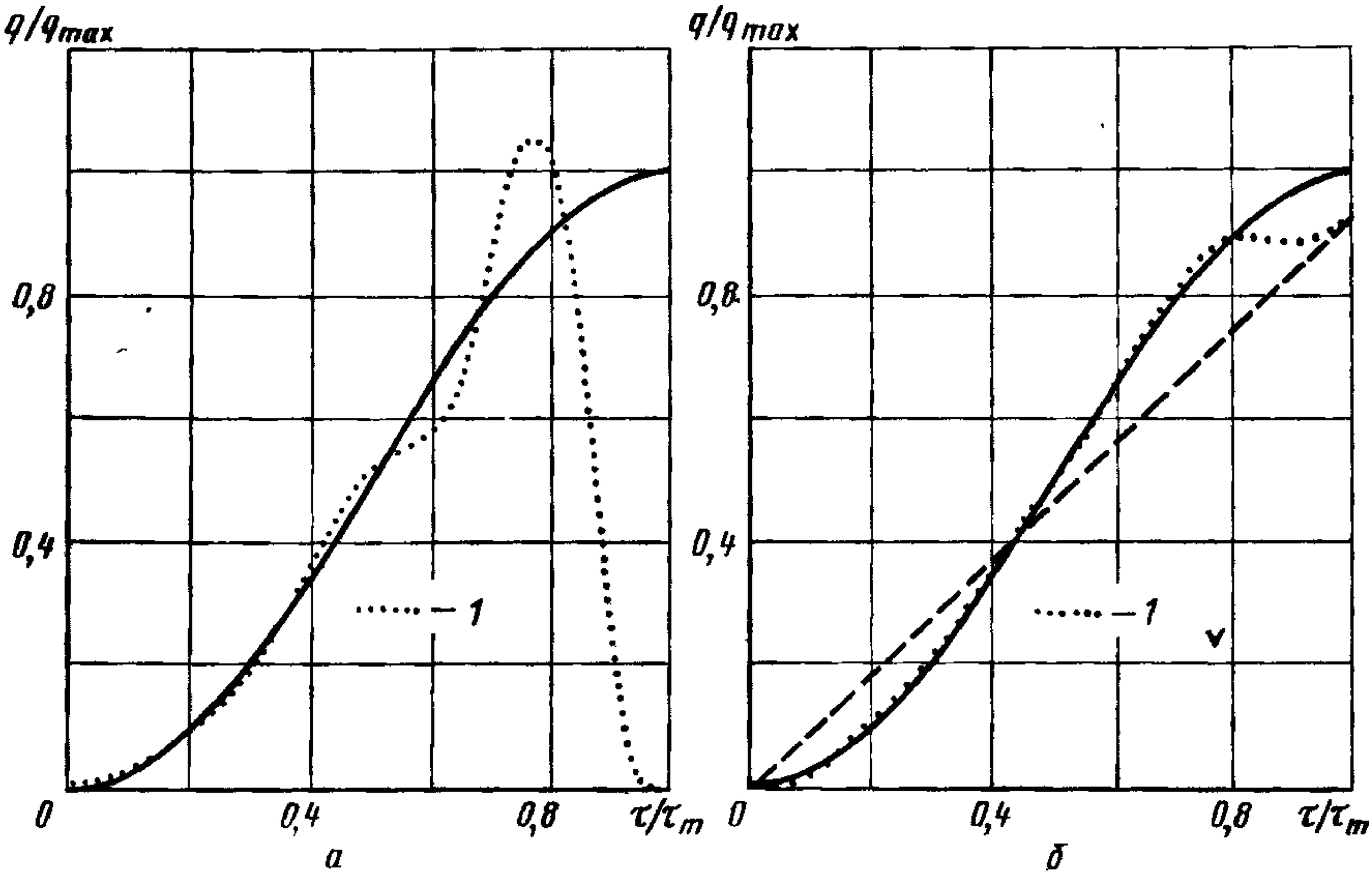


Рис. 6.8. Методический пример, $d = b$, $\Delta Fo_b = 0{,}1$ (входные данные невозмущенные; сплошная кривая – действительное решение):
а **– начальное приближение** $q^0(\tau) = 0$: 1 – 100-е приближение; ***б*** **– начальное приближение (штриховая линия),** 1 – 25-е приближение

приведены на рис. 6.8, *а*, где принято $q^0 = 0$, невязка $J^{10} \simeq 6$ с · К^2, в то время, как более близкая начальная оценка дает меньшую невязку $J^{10} \simeq 2$ с · К^2 (см. рис. 6.8, *б*).

6.8. ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТЕЛА

Существующие методы не дают возможности построить аналитическое решение краевой задачи теплопроводности в общем случае с учетом нелинейности задач по ТФХ. Поэтому для практической реализации градиентного поиска тепловых нагрузок при условии, что свойства тела зависят от температуры, необходимо использовать численные методики расчета температурного поля. Для решения сопряженной краевой задачи и задачи для приращений температуры также будет использоваться численный подход.

Представим задачи (6.17) – (6.20), (6.23) – (6.26) и задачу для приращения температуры $\Delta\theta(x, \tau)$, соответствующего приращению управления $\Delta p(\tau)$, в конечно-разностной форме на равномерной пространственно-временной сетке $\{x_l = l\Delta x, l = \overline{0, L}; x_0 = 0, x_L = b\}$, $\{\tau_n = n\Delta\tau, \quad n = \overline{0, m}; \tau_0 = 0\}$. Имея соответствующие алгоритмы, можно построить процедуру итерационного уточнения начальной оценки $p^0(\tau) =$

$= q^0(\tau)/\lambda_0$ градиентным методом. Аппроксимацию задач выполним на неявном шеститочечном шаблоне, описанном в разд. 5.1.

В итоге для численного определения модельной температуры $\theta(x, \tau)$, сопряженной переменной $\psi(x, \tau)$ и приращения $\Delta\theta(x, \tau)$ в каждом временном слое будем иметь соответствующие трехдиагональные системы алгебраических уравнений – нелинейные для θ и линейные для ψ и $\Delta\theta$. Решение этих систем выполняется по методу прогонки (в сочетании с итерациями по коэффициентам при расчете θ). Заметим, что численное интегрирование сопряженного уравнения (6.23) выполняется в направлении от $\tau = \tau_m$ к $\tau = 0$. Поэтому неявная схема аппроксимации запишется также в "перевернутом" (по отношению к аппроксимации уравнения теплопроводности) виде.

Обратимся теперь к анализу результатов численного моделирования. Рассмотрим следующие два примера, соответствующие различным ТФХ тела (λ[Вт/(м·К)], a[м^2/с]):

1. $\lambda = 0{,}721$, $a = 0{,}4 \cdot 10^{-6} - 0{,}143 \cdot 10^{-9} T + 0{,}408 \cdot 10^{-12} T^2$.
2. $\lambda = 0{,}721 + 0{,}288 \cdot 10^{-3} T$, $a = 0{,}4 \cdot 10^{-6} - 0{,}143 \cdot 10^{-9} T + 0{,}408 \cdot 10^{-12} T^2$.

В качестве параметра β_k, характеризующего глубину спуска, в этих примерах бралась линейная оценка (см. разд. 6.4.1). Численное решение приведенных ниже задач было выполнено на разностных сетках с 50-ю узлами по пространству и 60-ю – по времени. За начальную оценку принималась величина $q^0 = 0$. В целях экономии машинного времени расчеты как для прямых, так и для обратных задач проводились без итераций по теплофизическим коэффициентам.

Начнем со случая невозмущенных входных данных. Эти результаты представлены на рис. 6.9 (пример 1) и рис. 6.10, 6.11 (пример 2).

Кривая 3 (см. рис. 6.9, *а*) была получена из решения ОЗТ при замене действительных ТФХ из примера 2 постоянными значениями $\lambda = 0{,}721$ Вт/(м · К) и $a = 0{,}4 \cdot 10^{-6}$ м^2/с. Видно, что неучет изменения свойств может приводить к существенным искажениям искомого граничного условия.

По итогам расчетов можно сделать выводы, в целом совпадающие с результатами, полученными для полуаналитической методики итерационного определения тепловых нагрузок (см. разд. 6.7).

Во-первых, оба градиентных метода – скорейшего спуска и сопряженных градиентов – могут применяться для обработки данных экспериментальных исследований. Однако метод сопряженных градиентов, лишь немногим более сложный по сравнению с методом скорейшего спуска, давал значительно лучшие результаты как по скорости сходимости, так и по точности восстановления граничного условия.

Во-вторых, для невозмущенных данных не было замечено никаких признаков неустойчивости итерационного решения ОЗТ, что позволяет

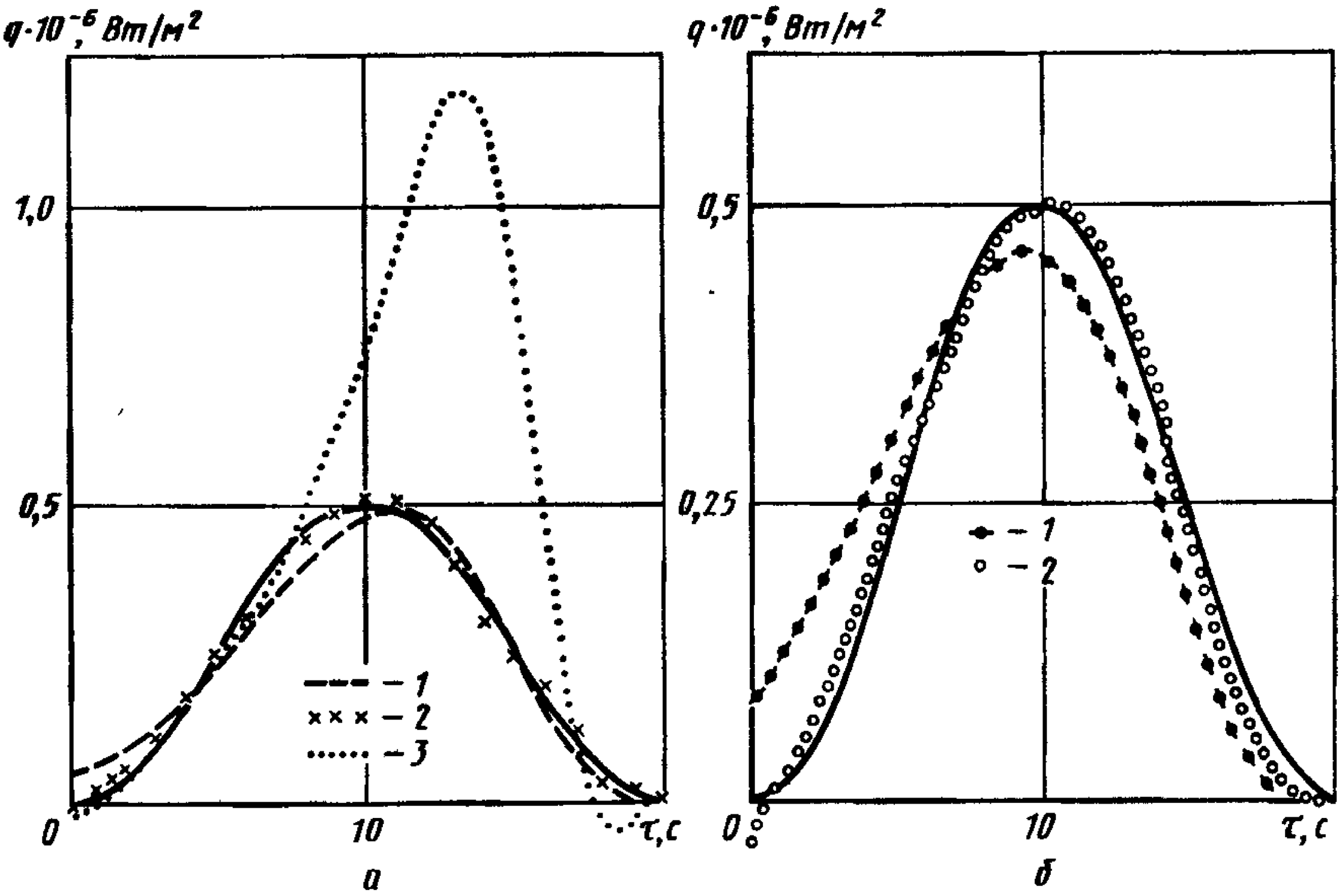


Рис. 6.9. Примеры восстановления плотности тепловых потоков с невозмущенными входными данными $T^*(\tau) = f(\tau)$, $q^*(\tau) = 0$ и начальным приближением $q^0(\tau) = 0$ (для $b = 0{,}002$ м (*а*) и $b = 0{,}004$ м (*б*) (сплошная кривая – действительное решение):

1 – расчет по методу скорейшего спуска при переменных ТФХ (50-я итерация); 2 – расчет по методу сопряженных градиентов (50-я итерация); 3 – расчет по методу сопряженных градиентов при допущении, что $a(T) = \text{const}$ (50-я итерация)

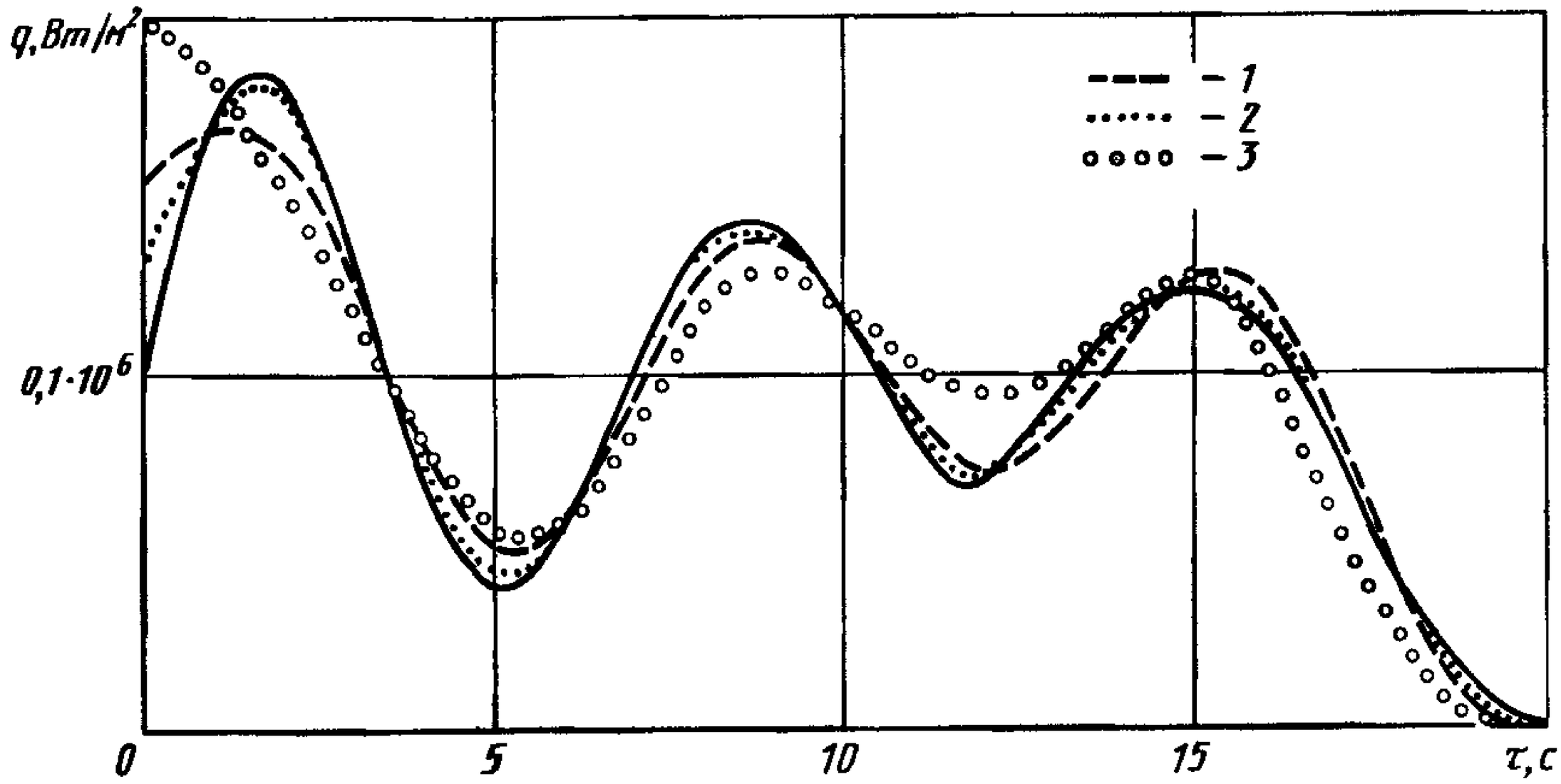


Рис. 6.10. Результаты восстановления плотности теплового потока $b = 0{,}003$ м (сплошная кривая – действительное решение):

1 и 2 соответственно 30-е и 60-е приближения для невозмущенных данных по методу сопряженных градиентов; 3 – 60-е приближение на сглаженных данных (исходные значения температуры включали ошибки, распределенные по нормальному закону с разбросом $3\sigma = 0{,}05\,T^*_{\max}$)

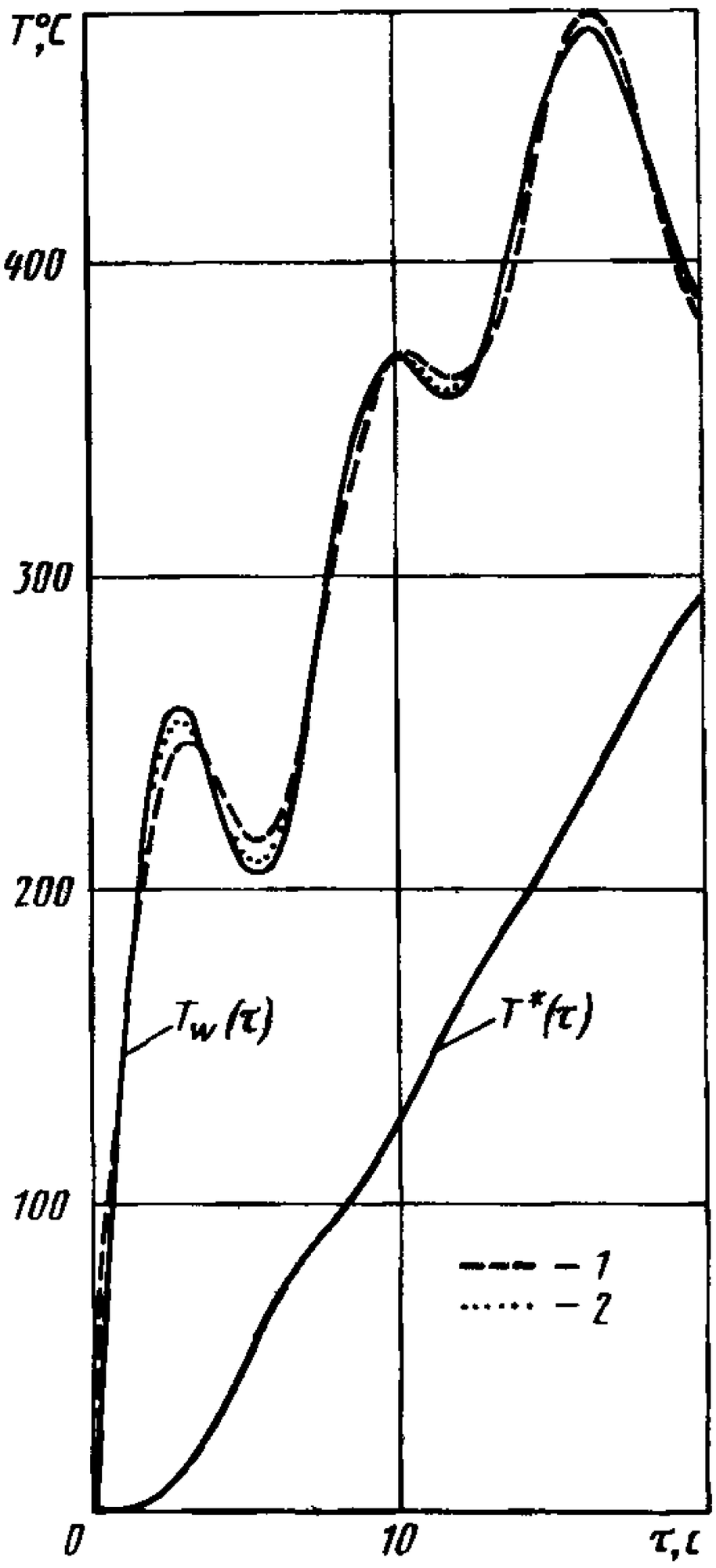


Рис. 6.11. Результаты восстановления температуры поверхности тела, $b = 0{,}003$ м (сплошные кривые – точные функции входной и восстанавливаемой температуры):
1 и 2 – соответственно 30-е и 60-е приближения для невозмущенных данных по методу сопряженных градиентов

использовать стандартные приемы определения требуемого приближения к искомой функции.

На рис. 6.12 (пример 1) приведены результаты восстановления плотности теплового потока, полученные с использованием возмущенных входных данных

$$T^*_\delta(\tau_n) = T^*(\tau_n) + \frac{\delta_0}{3}\,\omega_n,$$

где $\delta_0 = 0{,}1\,T^*_{max}$ – максимально возможная погрешность; ω_n – случайная величина, распределенная по нормальному закону с единичной дисперсией и нулевым средним значением.

Видно, что с увеличением числа итераций вычисленные значения $q(\tau)$ могут значительно отличаться от искомых. В то же время выбор приближения (номера итерации $k = \bar{k}$) по допустимому уровню невязки (6.8) позволяет получить вполне приемлемые по точности решения. Добавим к этому, что учет в (6.8) $\delta_A \neq 0$ (эта ошибка определялась практическим способом), как правило, давал лучшие результаты по сравнению с использованием величины δ_T в качестве суммарной погрешности (см. кривые 2 и 3 на рис. 6.12).

Другая возможность восстановления плавной функции $q(\tau)$ не связана непосредственно с принципом допустимого уровня невязки и заключается в предварительном *сглаживании* температурных данных. Соответствующий результат, полученный с помощью регуляризованной методики сглаживания [1], представлен на рис. 6.10. Заметим, что такой подход к определению тепловых нагрузок в целом ряде случаев оказывается более целесообразным. Как показали расчеты, предварительное сглаживание входной информации исключает появление признаков неустойчивости в решении ОЗТ при увеличении числа итераций. Таким образом, можно остановить итерационный процесс по обычному условию близости предыдущего и данного приближений.

Следуя изложенному выше градиентному методу, можно построить

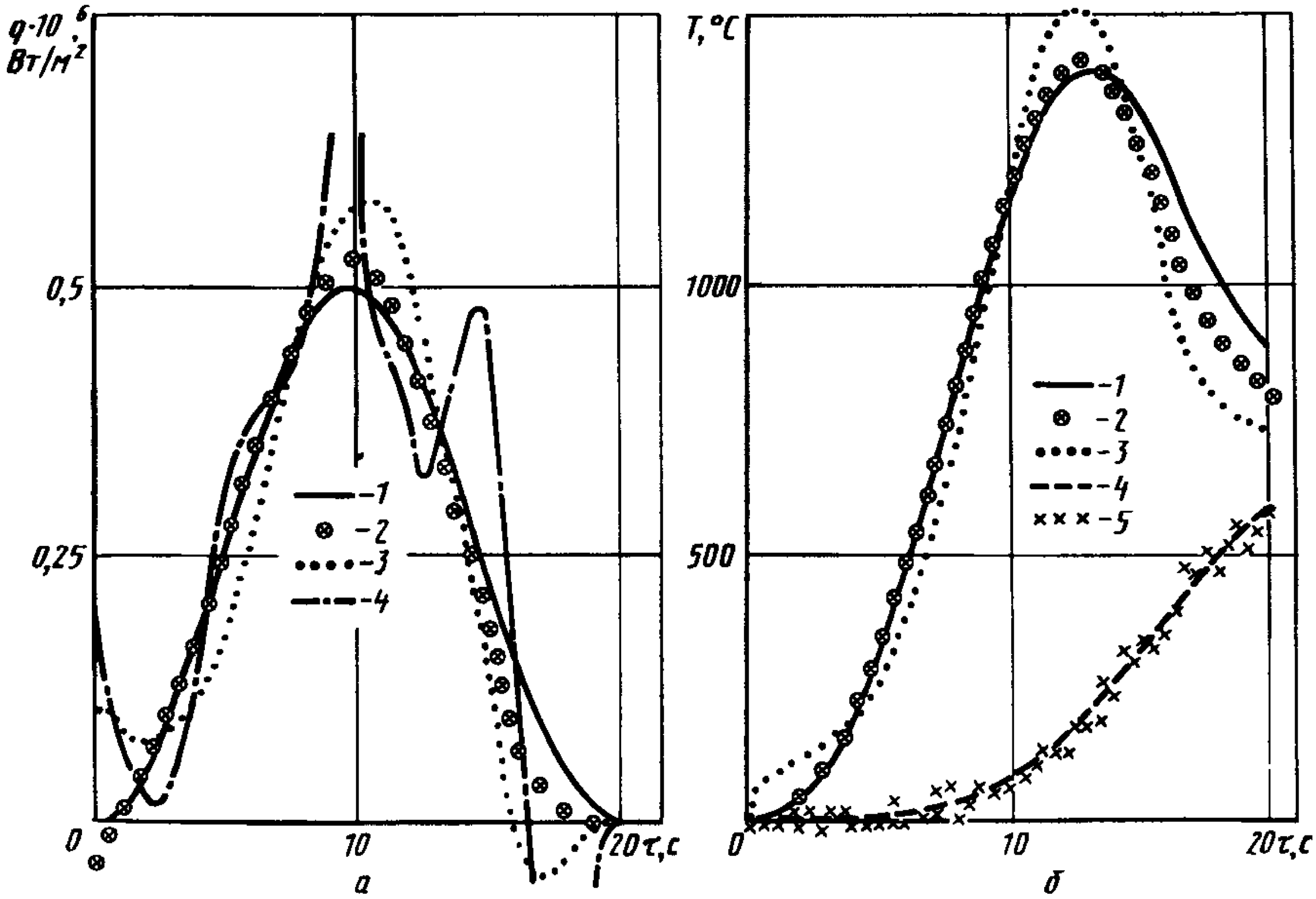


Рис. 6.12. Результаты восстановления граничных условий по методу сопряженных градиентов для возмущенной входной температуры $T^*(\tau) = f_\delta(\tau)$ и $q^*(\tau) = 0$ ($q^0 = 0$, $b = 0{,}004$ м):
1 – искомые функции; 2 – приближение, выбранное по условию (6.8), 9-я итерация; 3 – приближение, соответствующее условию $\delta = \delta_T$, 20-я итерация; 4, а – 30-я итерация; 4, б – точные входные температуры; 5, б – возмущенные входные температуры

соответствующий итерационный алгоритм для решения нелинейной обратной задачи в постановке II. Формула для градиента функционала (6.2), записанная через решение сопряженной задачи, получена для этого случая в [6]. Рассмотренный регуляризованный итерационный метод в работах [10, 11] распространен на решение обратной задачи для обобщенного нелинейного уравнения теплопроводности, включающего распределенный источник и конвективный член, в том числе для случая нескольких точек измерений температуры в теле Был также построен градиентный алгоритм одновременного поиска граничного условия и коэффициента температуропроводности материала тела (комбинированная гранично-коэффициентная ОЗТ). Во всех этих случаях разработанный итерационный метод показал высокую эффективность – хорошую точность результатов, сравнимую с точностью задания входных температур, и малые затраты машинного времени.

6.9. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотренные в настоящей главе градиентные методы решения обратных задач в параметрической и функциональной постановках допускают естественное обобщение на многомерный случай Покажем это на примере функциональной оптимизации для задачи с двумя пространственными координатами x и y, т е. когда вектор теплового потока в каждой точке пространства параллелен плоскости xy и не меняется по z.

Будем считать, что тело имеет прямоугольное сечение и на ограничивающих его плоскостях $x = 0$, $x = b$, $y = 0$ теплообмен отсутствует (рис. 6.13). Требуется найти тепловой поток $q(x, \tau)$ на границе $y = c$ из условия допустимого минимума функционала невязки

$$J(p) = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b [T(x, 0, \tau) - f(x, \tau)]^2 dx, \qquad (6.29)$$

где $f(x, \tau)$ – заданная функция, соответствующая температурным измерениям на границе $y = 0$.

Температура $T(x, 0, \tau)$ определяется из решения прямой задачи теплопроводности с заданным управлением $p(x, \tau) = -\dfrac{q(x, \tau)}{\lambda}$:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c), \quad \tau \in (0, \tau_m];$$

$$T(x, y, 0) = \xi(x, y), \quad x \in [0, b], \quad y \in [0, c];$$

$$\frac{\partial T(b, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0, \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$\frac{\partial T(x, c, \tau)}{\partial y} = p(x, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m].$$

В работе [6] показано, что градиент функционала (6.29) выражается формулой $J_p' = -\psi(x, c, \tau)$, где функция $\psi(x, c, \tau)$ удовлетворяет сопряженной задаче:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -a\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right), \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c), \quad \tau \in [0, \tau_m);$$

$$\psi(x, y, \tau_m) = 0; \qquad (6.30)$$

$$\frac{\partial \psi(x, c, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial \psi(b, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(0, y, \tau)}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \psi(x, 0, \tau)}{\partial y} = 2[T(x, 0, \tau) - f(x, \tau)].$$

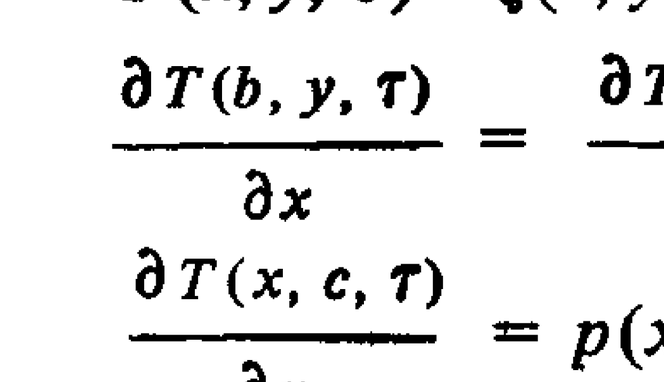


Рис. 6.13. Область пространственных координат

Общая схема решения ОЗТ в двумерной постановке остается такой же, как и в случае одной пространственной переменной Для расчета функций $T(x,\ 0,\ \tau)$, $\psi(x,\ c,\ \tau)$ удобно пользоваться приближенно-аналитической методикой решения двумерной задачи теплопроводности, изложенной в разд 4 4 При этом сопряженная задача приводится к постановке с "обратным" временем заменой переменной $t = \tau_m - \tau$. Выбор итерационного шага (глубины спуска) β в каждом цикле приближения должен проводиться по условию

$$\frac{\partial J(p^{k+1}(x,\ \tau))}{\partial \beta} = 0,$$

где $p^{k+1}(x, \tau) = p^k(x, \tau) - \beta_k \zeta^k(x, \tau)$; $\zeta^k(x, \tau)$ – направление спуска.

Несложно показать, что оптимальное значение β выражается формулой

$$\beta_k = \frac{\int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b [T^k(x, 0, \tau) - f(x, \tau)] \Delta T(\zeta^k(x, \tau), x, \tau) dx}{\int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b \Delta T^2(\zeta^k(x, \tau), x, \tau) dx},$$

где ΔT – приращение температуры

Без каких-либо принципиальных изменений градиентный метод распространяется и на другие постановки задач, рассматриваемые в областях иной геометрии, например, сферической или цилиндрической, а также для подвижных границ тела Методом функциональной оптимизации с использованием сопряженной задачи для вычислений градиента интегральной ошибки могут быть решены также обратные задачи других типов, в частности, коэффициентные ОЗТ и обратные задачи теплообмена в технических системах

Выводы

1 Изложен итерационный метод решения обратных задач теплопроводности, в котором регуляризация осуществляется при помощи согласования числа итераций с величиной погрешности исходных данных Даны экстремальные постановки граничных обратных задач для одномерного и двумерного уравнений теплопроводности, и на основе методов скорейшего спуска и сопряженных градиентов построены регуляризованные алгоритмы их решения

2 Методом вычислительного эксперимента исследованы регуляризирующие и точностные характеристики параметрической и функциональной форм данного метода применительно к решению линейных и нелинейных граничных ОЗТ Показано, что разработанный метод позволяет строить эффективные алгоритмы для решения этих задач

ГЛАВА 7
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВОК ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

7 1 РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В настоящей главе исследуются методы решения обратных задач теплопроводности, базирующиеся на принципе *регуляризации по Тихонову* экстремальной постановки задачи

Общие вопросы решения линейных ОЗТ с помощью метода тихоновской регуляризации изложены в работе [6] Ниже остановимся на вопросах разработки вычислительных алгоритмов и практической реализации этого подхода

Как было показано в гл 3, интегральные формы ОЗТ обязательно включают в себя некорректную операцию решения интегрального уравнения 1-го рода для определения искомого граничного условия (теплового потока, температуры поверхности) или некоторой вспомогательной функции (в частности, плотности теплового потенциала), с помощью которой затем без особых трудностей рассчитывается искомая величина. В случае одномерных задач это уравнение имеет общий вид

$$\int_0^{\tau} u(\xi)K(\tau,\xi)d\xi = f(\tau),\quad \tau\in(0,\tau_m], \tag{7 1}$$

где $u(\tau)$ – неизвестная функция

Ядро интегрального уравнения $K(\tau, \xi)$ и свободный член $f(\tau)$ определяются конкретной постановкой задачи

Перепишем уравнение (7 1) в операторной форме

$$Au = f,\quad u\in U,\quad f\in F, \tag{7 2}$$

где A – линейный непрерывный оператор, определяемый ядром $K(\tau, \xi)$; U и F – гильбертовы пространства.

Предположим, что правая часть (7 2) задана с известной погрешностью δ относительно точных данных $f_т$, а именно

$$f = f_\delta,\quad \|f_т - f_\delta\|_F \leqslant \delta$$

Общий *регуляризирующий алгоритм* для решения уравнения (7 1) заключается в выборе приближения среди экстремалей *сглаживающего функционала* (2 24) при определенном согласовании параметра регуляризации α с δ *Стабилизатор* $\Omega[u]$ на практике выбирается на основе качественной информации о решении – обычно из требований максимальной гладкости В дальнейшем будем считать, что $f\in L_2[0, \tau_m]$ и $u\in W_2^k[0, \tau_m]$. Тогда функционал (2 24) можно представить в виде [6]

$$\Phi_\alpha[u, A, f] = \|Au - f_\delta\|^2_{L_2} + \alpha(L^k u, u)_{L_2}, \tag{7.3}$$

где $L^k u = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^j \dfrac{d^j}{d\tau^j}\left(r_j(\tau)\dfrac{d^j u}{d\tau^j}\right)$; $r_j(\tau)$ – некоторые положительные непрерывные функции.

Уравнение Эйлера для функционала (7.3) имеет вид

$$A^*Au + \alpha L^k u = A^* f_\delta, \tag{7.4}$$

его решение дает некоторую регуляризованную функцию $u^\alpha(\tau)$.

Рассмотренный метод соответствует регуляризованной постановке ОЗТ, записанной в бесконечномерных пространствах решения и входных данных. Переходя к конечно-разностному эквиваленту уравнения (7.4) и решая его при известных граничных условиях, определим сеточную функцию $u^\alpha_{\Delta\tau}(\tau)$. Возможен несколько иной подход. Предварительно оператор A аппроксимируется с помощью оператора A_Δ и уже затем регуляризируется разностный аналог интегрального уравнения (7.1). С вычислительной точки зрения второй вариант предпочтительнее, если приближенное вычисление интеграла в (7.1) построено с учетом возможности аналитического интегрирования ядра $K(\tau, \xi)$ на выбранном интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. В этом случае за счет исключения разностных аналогов интегральных членов в уравнении Эйлера получаются более простые и экономичные алгоритмы. Остановимся на этом вопросе подробнее, поскольку именно такая ситуация имеет место для большинства постановок ОЗТ, рассмотренных в гл. 3 и 4.

Аппроксимируем уравнение (7.1) на равномерной сетке по τ в соответствии со способом, изложенным в гл. 4. В результате получим систему алгебраических уравнений $\sum\limits_{i=1}^{n} \hat{u}_i \varphi_{ni} = f_{\delta n}$, $n = \overline{1, m}$, или в матричной записи $\mathbf{A}_\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_\delta$, где $\mathbf{A}_\Delta$ – нижняя треугольная матрица; $\mathbf{u} = \{\hat{u}_i\}_1^m$; $\mathbf{f}_\delta = \{f_{\delta n}\}_1^m$.

Регуляризованная постановка этой задачи для случая $k = 2$, $u^* = 0$ и весов $r_0 = 0$, $r_1(\tau) = r_1 = \text{const} \geqslant 0$, $r_2(\tau) = r_2 = \text{const} \geqslant 0$ состоит в нахождении параметров $\hat{u}_i$, $i = \overline{1, m}$, дающих минимум функции

$$\hat{\Phi}_\alpha[u] = \sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i \varphi_{ni} - f_{\delta n}\right)^2 + \frac{\alpha r_1}{\Delta\tau^2}\sum_n (\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1})^2 +$$

$$+ \frac{\alpha r_2}{\Delta\tau^4}\sum_n (\hat{u}_{n+1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n-1})^2. \tag{7.5}$$

Минимизируя (7.5) по всем $\hat{u}_n$ с учетом тех или иных граничных

условий, получим систему линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей

$$\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u} = \mathbf{D}(\alpha), \tag{7.6}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_\Delta + \alpha\mathbf{C}$; $\mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица; $\mathbf{D} = \mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{f}_\delta + \mathbf{g}$.

Элементы нормальной матрицы $\mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_\Delta$ даются формулой

$$b_{kl} = \sum_{n=l}^{m} \varphi_{nk}\varphi_{nl}, \quad b_{kl} = b_{lk}, \quad k, l = \overline{1, m}.$$

Матрица $\mathbf{C}$ является конечно-мерным аналогом сглаживающего оператора L^2 при $r_0 = 0$. Вектор $\mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{f}_\delta = \left\{ \sum_{n=k}^{m} f_{\delta n}\varphi_{nk} \right\}$, $k = \overline{1, m}$. Вектор $\mathbf{g}$ определяется граничными условиями.

Довольно часто применяется регуляризация I-го порядка, состоящая в минимизации первых разностей, или разновидность регуляризации II-го порядка, когда минимизируются только вторые разности.

Рассмотрим первый случай, записывая конечно-мерный аналог регуляризирующего функционала в виде

$$\hat{\Phi}_\alpha[\mathbf{u}] = \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i\varphi_{ni} - f_n \right)^2 + \alpha \sum_{n} (\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1})^2$$

и задавая следующим образом граничные условия (например, из аппроксимации первых производных на концах временного интервала): $u_1 - u_0 = C_{1\,0}$, $u_{m+1} - u_m = C_{1m}$. Тогда матрица $\mathbf{C}$ и вектор $\mathbf{g}$ запишутся

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = [\, -\alpha C_{1\,0}, 0, \ldots, 0, \alpha C_{1m} \,]^{\mathrm{T}}.$$

Во втором случае возьмем целевую функцию типа

$$\hat{\Phi}_\alpha[\mathbf{u}] = \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i\varphi_{ni} - f_n \right)^2 + \alpha \sum_{n} (\hat{u}_{n+1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n-1})^2$$

и граничные условия в виде вторых и третьих разностей, что соответствует аппроксимации вторых и третьих производных:

$$u_0 - 2u_1 + u_2 = C_{20}; \quad -u_{-1} + 3u_0 - 3u_1 + u_2 = C_{30};$$

$$u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1} = C_{2m}; \quad -u_{m-1} + 3u_m - 3u_{m+1} + u_{m+2} = C_{3m}$$

В результате получим

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$g = [\alpha(C_{20} + C_{30}), \quad -\alpha C_{20}, 0, \ldots, 0, \alpha C_{2m}, \alpha(C_{3m} - C_{2m})]^{\mathrm{T}}.$$

Решая систему (7.6) при выбранном порядке гладкости искомого решения и заданном значении параметра α, характеризующем степень сглаживания, получим некоторое приближение $\mathbf{u}^{\alpha}$ к истинной функции $u_{\mathrm{T}}(\tau)$.

7.2. О ДОПУСТИМОЙ СТЕПЕНИ СГЛАЖИВАНИЯ И ВЫБОРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Известно, что для самосопряженного линейного оператора, каким является матрица B, существует система линейно независимых, попарно ортогональных и единичных по норме собственных векторов $\{\mathbf{e}_n\}$ – ортонормированный базис евклидова пространства заданной размерности.

Разложим элементы u и D по этому базису: $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{m} \xi_n \mathbf{e}_n$; $\mathbf{D} = \sum_{n=1}^{m} \zeta_n \mathbf{e}_n$, где ξ_n и ζ_n – координаты векторов u и D относительно базиса $\{\mathbf{e}_n\}_1^m$. Подставим указанные разложения в уравнение (7.6)

$$\sum_{n=1}^{m} \xi_n \mathbf{B}\mathbf{e}_n = \sum_{n=1}^{m} \zeta_n \mathbf{e}_n.$$

Из определения собственных векторов $\mathbf{e}_n$ и собственных чисел λ_n матрицы $\mathbf{B}\mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n$ следует, что в данном случае $\xi_n = \zeta_n / \lambda_n$.

Таким образом, имеем $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{m} \frac{\zeta_n}{\lambda_n} \mathbf{e}_n$. Отсюда видно, что чем меньше собственные числа λ_n, тем сильнее растягиваются координаты вектора D при переходе к вектору u и тем значительнее усиливаются ошибки

правой части уравнения (7.6). Кроме того, при малых λ_n имеет место дополнительное искажение соответствующих компонент решения u, обусловленное вычислительными возмущениями элементов матрицы.

Большой разброс собственных чисел матрицы B, в том числе появление очень малых λ_n, наблюдается при малых значениях параметра α, так как в этом случае матрица B близка к нормальной матрице $A_\Delta^T A_\Delta$, соответствующей нерегуляризованной вариационной постановке задачи. Поэтому полученное решение будет иметь совершенно неудовлетворительный, колеблющийся вид.

По мере увеличения α растет вклад стабилизирующей матрицы C, что приводит к лучшей обусловленности матрицы B и постепенному выглаживанию решения, причем в некотором диапазоне изменения параметра регуляризованные приближения окажутся наиболее близкими к истинной функции $u_т(\tau)$. При дальнейшем увеличении α кривые $u^\alpha(\tau)$ будут приобретать все более плавные очертания, но одновременно удаляться от кривой $u_т(\tau)$.

При решении обратных задач теплопроводности для выбора разумных (физически обоснованных) приближений u^α были использованы два различных способа*. Первый способ основывается на *принципе невязки* [41, 69] и требует знания достаточно точной оценки погрешности δ. В этом случае параметр $\alpha > 0$ определяется из условия согласования невязки с погрешностью δ, заданной в метрике евклидова пространства:

$$\sum_{n=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^\alpha \varphi_{ni} - f_{\delta n} \Big)^2 = \delta^2_{Em}. \qquad (7.7)$$

Этот способ можно применять при условии, что погрешность аппроксимации оператора A намного меньше величины δ. Если же такое условие не выполняется, следует воспользоваться обобщенным принципом невязки [34]. Второй, *"квазиоптимальный"*, способ согласования α с δ не предполагает знания величины погрешности и состоит в минимизации по α величины $\| \alpha \frac{du^\alpha}{d\alpha} \|_F$ [101].

Отметим, что второй способ требует качественного обычно визуального анализа результатов: При этом используется некоторая априорная информация об ожидаемом решении и предполагаемом характере точной входной функции, а это существенно затрудняет автоматизацию вычислительного процесса. В то же время выбор α по "невязке" позволяет построить алгоритм автоматического поиска нужного приближения к

---

*О некоторых других подходах к выбору приближений см. работы [30, 51, 67].

действительному решению ОЗТ. Этот вопрос подробно рассмотрен в работах [1, 6]

Принцип невязки, если δ известна точно, дает несколько "перегла-женные" результаты, причем отличие восстановленной кривой от действительной будет тем больше, чем сильнее изменяется среднеквадратичная погрешность σ с течением времени. Поэтому может оказаться более правильным заменить "невзвешенное" условие невязки (7.6) "взвешенным", в котором каждое текущее рассогласование рассчитанной и заданной температур масштабировано – отнесено к текущим оценкам среднеквадратичной ошибки:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sigma_n^2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^{\alpha} \varphi_{ni} - f_{\delta n} \Big)^2 = S.$$

Число $S \geqslant 0$ выбирается из следующего доверительного интервала:

$$N - (2N)^{1/2} \leqslant S \leqslant N + (2N)^{1/2}, \quad N = m + 1.$$

Заметим в заключение, что решение регуляризованной системы (7.6) целесообразно с точки зрения точности результатов и скорости расчетов осуществлять известным методом квадратного корня.

7.3. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ

Регуляризованные алгоритмы решения ОЗТ были подвергнуты детальному практическому исследованию на специально подобранных методических примерах. Некоторые результаты приведены ниже.

Рассмотрим задачу определения плотности теплового потока, поступающего в термически толстую стенку, имеющую достаточно хорошие теплоизоляционные свойства – $\lambda = 1{,}31 \cdot 10^{-4}$ кВт/(м К), $a = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м^2/с. Восстанавливалась заранее известная зависимость вида $q(\tau) = 10{,}2 + 6{,}13\tau + 0{,}613\tau^2$, кВт/м^2 по значениям температуры в некоторой точке внутри тела (рис. 7.1). Для этой цели использовалась алгебраическая система (7.6), соответствующая регуляризации I-го порядка Входная функция $T^*(\tau) = T(d, \tau)$ определялась из решения прямой задачи теплопроводности по заданному тепловому потоку. Значения T_n^*, вычисленные с погрешностью менее $\sim 10^{-3}$ К, или (10^{-3} – 10^{-4} % T^*_{max}), условно принимались за точные данные при решении ОЗТ.

На рис. 7.2 представлен пример расчета для точных данных при $\alpha = 0$. Видно, что, начиная с $\mathrm{Fo}_d \sim 2$, значения q существенно отличаются от истинных величин. Если же внести в T_n^* малые погрешности за счет округления значений входных данных до целых чисел (~0,1 % от T^*_{max}), то это вообще исключает возможность применения прямого

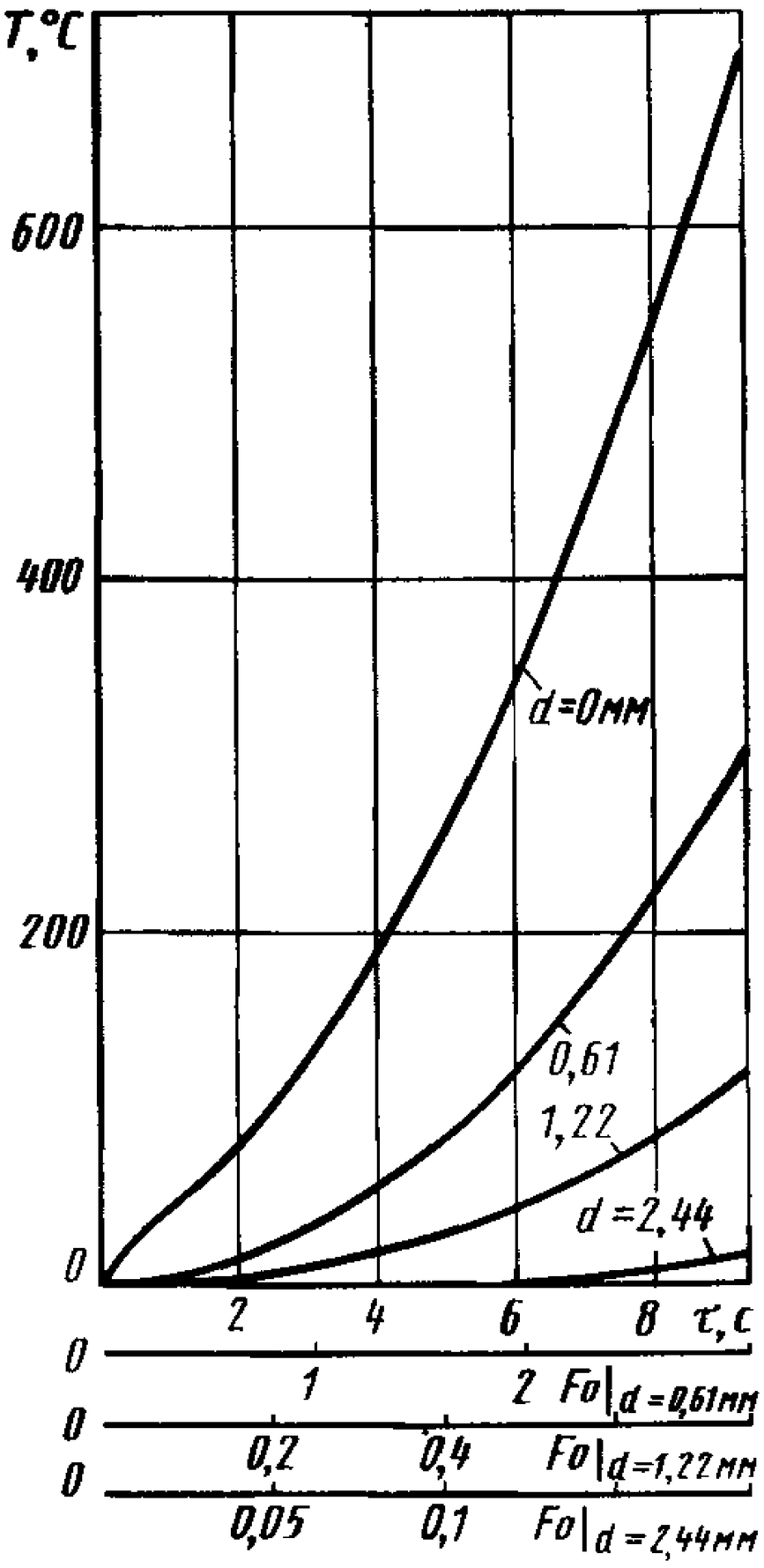


Рис. 7.1. Зависимости температуры от времени

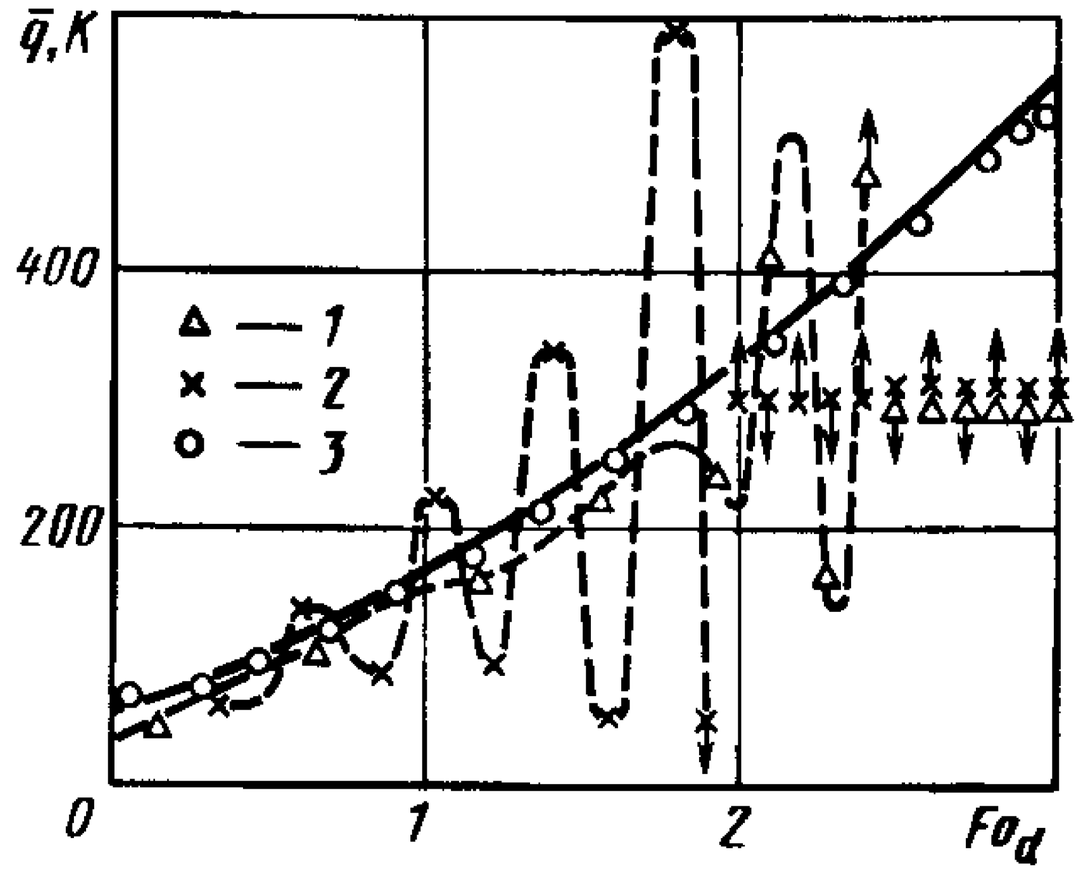


Рис. 7.2. Пример расчета плотности теплового потока с использованием регуляризованного алгоритма (РА) и прямого метода (ПМ), соответствующего условию $\alpha = 0; d = 0{,}61$ мм, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$ (сплошная кривая – искомое решение, $\bar{q} = qd/\lambda$): 1 – ПМ, ошибки в температуре $\delta_0 \sim 1{,}5 \cdot 10^{-3} K$; 2 – ПМ, $\delta_0 \sim 0{,}1 \cdot 10^{-2} T^*_{\max}$; 3 – РА, $\delta_0 \sim 0{,}1 \times \times 10^{-2} T^*_{\max}$

метода при достаточно малых ΔFo. В то же время регуляризованное решение близко к действительному.

Для оценки точности определения $q^{\alpha}(\tau)$ в зависимости от погрешности исходных данных, значения T^*_n "возмущались" с помощью датчиков псевдослучайных чисел следующими способами:

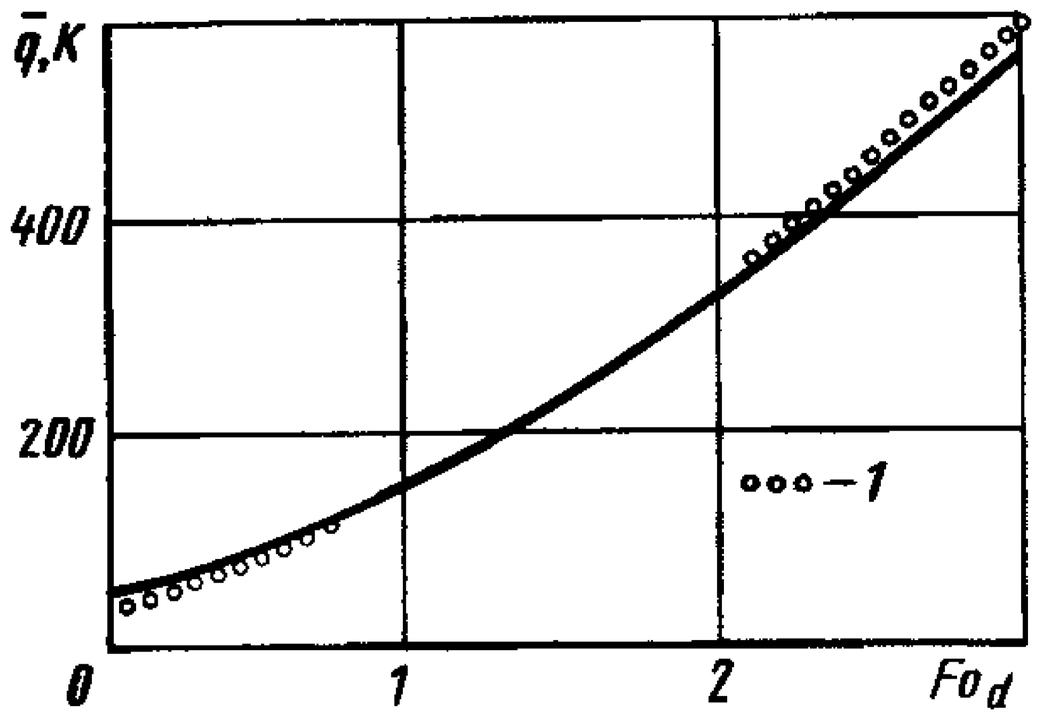
1) $T^*_{\delta n} = T^*_n + (-1)^n \delta_0$ – пилообразное возмущение;

2) $T^*_{\delta n} = T^*_n + \frac{\delta_0}{3} \omega_n$ – возмущение по нормальному закону распределения плотности вероятностей при использовании правила "трех сигм";

3) $T^*_{\delta n} = T^*_n + \delta_0 \xi_n$ – возмущение по равномерному закону распределения плотности вероятностей;

4) $T^*_{\delta n} = T^*_n \pm \delta_0$ – постоянная систематическая погрешность.

Здесь δ_0 – максимальная возможная погрешность; ω_n – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием M = 0 и дисперсией $\sigma^2 = 1$; ξ_n – случайная величина, распределенная по равномерному закону на сегменте $[-1, 1]$.



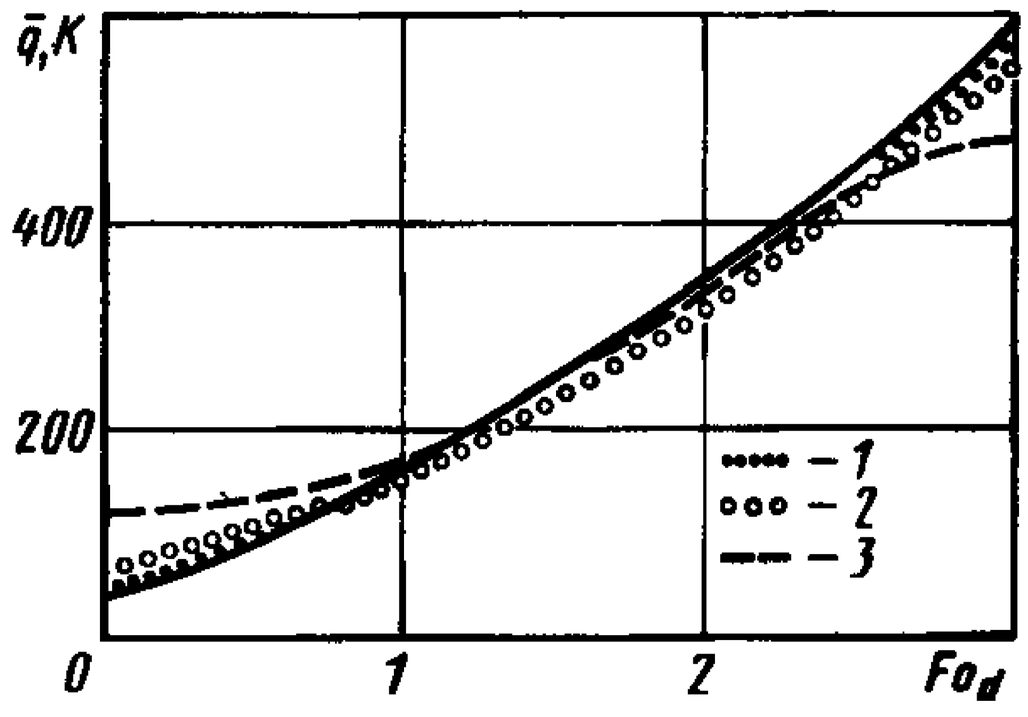


Рис. 7.3. Результаты восстановления плотности теплового потока при нормальном законе распределения ошибок в исходных значениях температуры, $d = 0{,}61$ **мм;** $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$ **(сплошная кривая – точное решение):**
1 – результаты расчета для $3\sigma = 0{,}25\,T^*_{\max}$

Рис. 7.4. Результаты восстановления плотности теплового потока при равномерном законе распределения ошибок в исходных данных $d = 0{,}61$ **мм;** $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$ **(сплошная кривая – точное решение):**
1 и 2 – расчет при точном задании коэффициентов C_{10}, C_{1m} и ошибках $\delta_0 = 0{,}05\,T^*_{\max}$, $0{,}25\,T^*_{\max}$ соответственно; 3 – расчет при задании $C_{10} = C_{1m} = 0$ и ошибке $\delta_0 = 0{,}25\,T^*_{\max}$

На рис. 7.3 и 7.4 показаны регуляризованные приближения $\bar{q}(\tau) = \dfrac{q^{\alpha} d}{\lambda}$, рассчитанные для нормального и равномерного распределений ошибок при известных граничных значениях производной $q'(0)$, $q'(\tau_m)$. На рис. 7.4 также представлены результаты вычисления $q(\tau)$, когда величины $q'(0)$, $q'(\tau_m)$ были приняты равными нулю. Оценка максимальной относительной ошибки в определении теплового потока $\left(\epsilon = \left| \dfrac{q^{\alpha}_{\delta} - q_{\mathrm{T}}}{q_{\mathrm{T}\max}} \right| \cdot 100\ \%\right)$ в зависимости от максимальной абсолютной

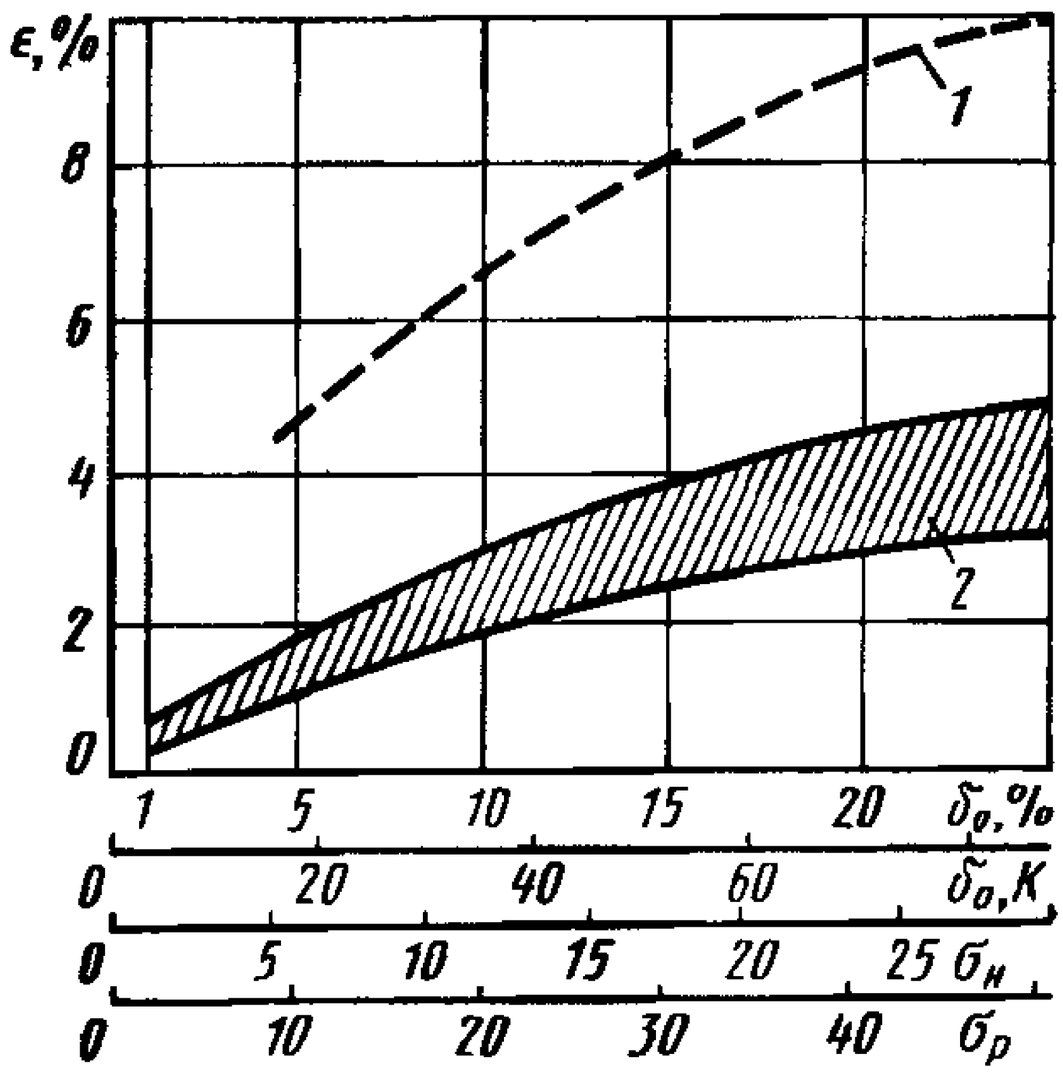


Рис. 7.5. . Зависимость относительной ошибки определения плотности теплового потока от погрешности исходных значений температур, $d = 0{,}61$ **мм,** $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$ **(**σ_{H}, σ_{p} – **среднеквадратичные погрешности температуры для нормального и равномерного законов):**
1 – нормальный закон распределения ошибок, задано условие $C_{10} = 0$; 2 – область, соответствующая точным значениям C_{10}, C_{1m} и всем типам возмущений T^*_n кроме четвертого

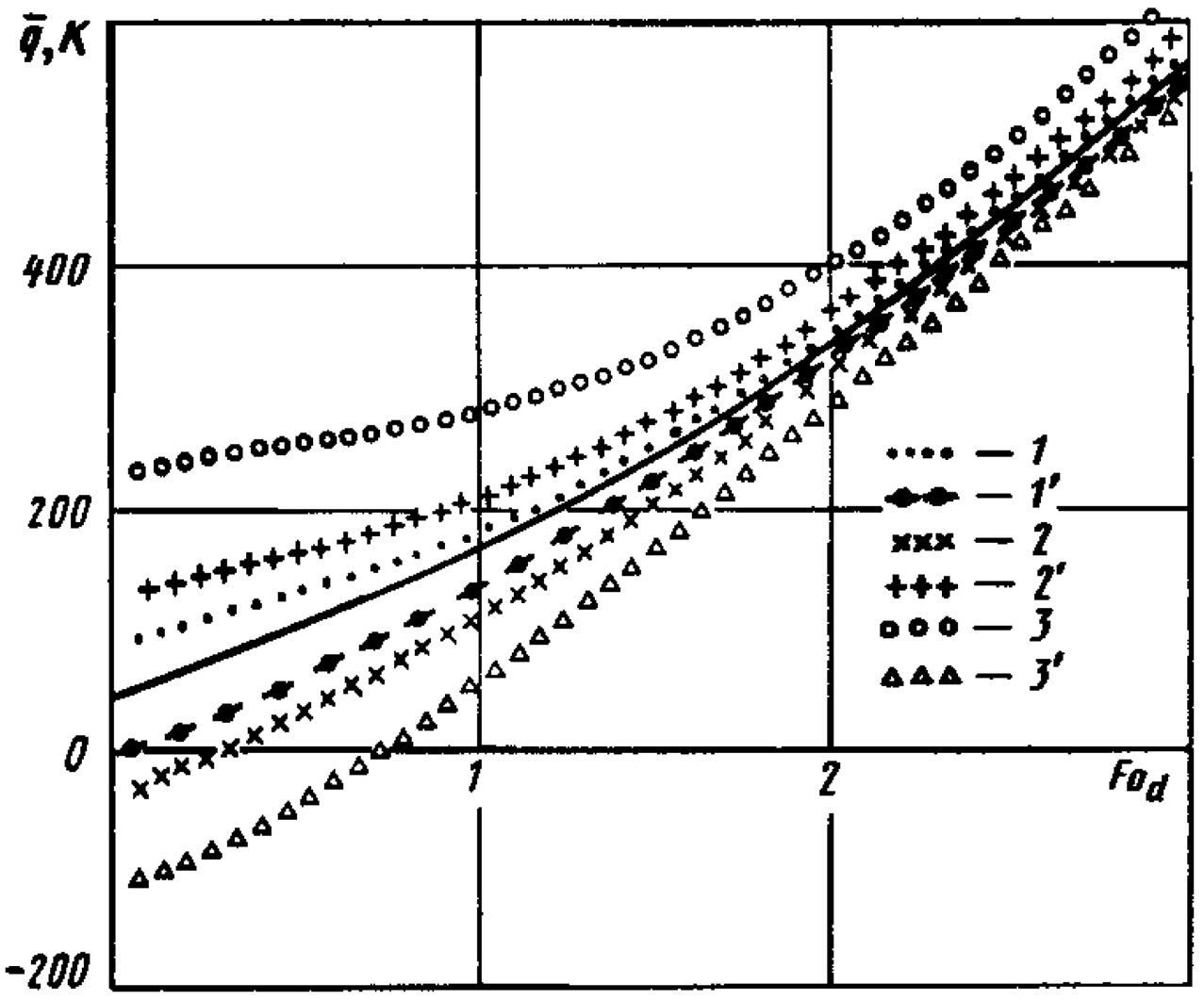


Рис. 7.6. Результаты восстановления плотности теплового потока при наличии в результатах температурных измерений систематической погрешности, $d = 0{,}61$ мм, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}06$ (сплошная кривая – точное решение):
1, 2, 3 – расчет для $T^*_{\delta n} = T^*_n + \delta_0$; 1′, 2′, 3′ – расчет для $T^*_{\delta n} = T^*_n - \delta_0$; 1, 1′ – при $\delta_0 = 0{,}05 T^*_{\max}$; 2, 2′ – при $\delta_0 = 0{,}1 T^*_{\max}$; 3, 3′ – при $\delta_0 = 0{,}25 T^*_{\max}$

δ_0, относительной $(\delta_0 / T^*_{\max}) \cdot 100\ \%$ и среднеквадратической σ ошибок даны на рис. 7.5 для первых трех типов возмущений. На рис. 7.6 приведены результаты для случая, когда в качестве возмущения задано некоторое постоянное смещение значений температуры (четвертый тип возмущения) и точно известны условия C_{10} и C_{1m}. Здесь ошибка определения теплового потока приближенно равна ошибке задания исходной температуры. Входные данные и результаты для $d = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$м в случае нормального распределения δT^* представлены на рис. 7.7 и 7.8. Видно, что при удалении температурного датчика от границы тела точность восстановления $q(\tau)$ ухудшается.

Это совершенно естественно, поскольку появляется и затем непрерывно увеличивается начальный промежуток времени, в течение которого входные температуры настолько малы по величине, что полностью "забиваются" искусственно вводимыми шумами. Однако при правильном задании производных $q'(0)$ и $q'(\tau_m)$ в граничных условиях регуляризованной задачи качество восстановления следует признать вполне удовлетворительным, несмотря на то, что в данном случае начальный период "неопределенности" температуры ($T^* \sim 0$) достигает трети полного времени восстановления.

Условия C_{10} и C_{1m} в ряде практических случаев бывают неизвестны и тогда приходится их заменять нулевыми значениями. В результате, в окрестности концевых точек $\tau = 0$ и τ_m регуляризованное приближение отклоняется от действительного решения (см. рис. 7.4). Это отклонение будет тем больше, чем выше флуктуационные погрешности в исходных данных. Поэтому, если важно уменьшить область влияния априорно заданных краевых условий, можно первоначально сгладить исходные данные. Такой подход оправдан и в тех случаях, когда неизвестна оценка среднеквадратичного отклонения измеренных значении температуры и для выбора α используется условие максимальной близости регуляризованных приближений, которое более "эффективно" работает при малых δ.

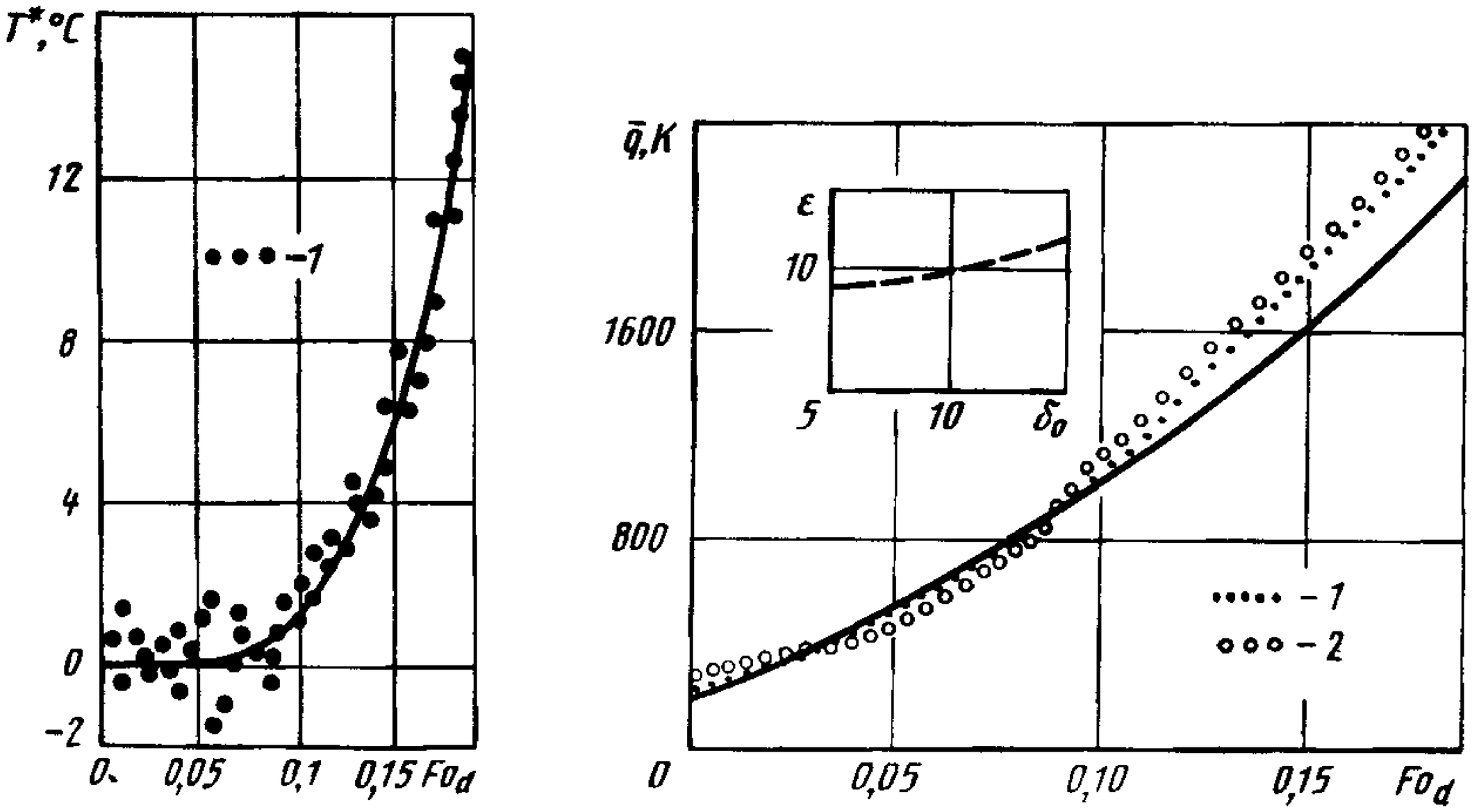


Рис. 7.7. Входные данные для **решения** обратной задачи, $d = 2{,}44$ мм **(сплошная кривая – точная функция):**
1 – возмущенные значения температур (случайные ошибки распределены по нормальному закону с разбросом $3\sigma = 0{,}1T^*_{\max}$)

Рис. 7.8. Результаты восстановления плотности теплового **потока при точном задании коэффициентов** $C_{1\,0}$ **и** $C_{1\,m}$ **в случае** нормального распределения **ошибок в исходных значениях температуры:**
$d = 2{,}44$ мм, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}004$ (сплошная кривая – искомое решение; штриховая кривая – оценка точности восстановления, ϵ, %; δ_0, %).
1 – при $\delta_0 = 0{,}05T^*_{\max}$; 2 – при $\delta_0 = 0{,}15T^*_{\max}$

Другая возможность снижения "краевого эффекта" состоит в использовании априорных граничных условий более высокого порядка, например, в задании разностного аналога не первой, а второй производной искомой функции на концах временного интервала.

Из анализа приведенных кривых $q^{\alpha}(\tau)$ для разных точек расположения датчика температуры можно сделать следующий **вывод**: восстановление тепловых потоков методом регуляризации проводится с достаточной для практики точностью, если удаление датчика температуры от нагреваемой поверхности таково, что он реагирует на изменения температуры в этой точке.

Дополнительно отметим, что можно заметно увеличить точность расчета $q(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_m]$, если расширить область решения задачи до $[0, \tau_m + \Delta\tau_m]$, где $\Delta\tau_m$ зависит от термической глубины $d/\sqrt{a}$ точки измерения температуры. Такой прием позволяет компенсировать начальную неопределенность в температурных данных и неточность в задании C_{1m}.

Рассмотрим еще один пример, когда номинальная кривая $q(\tau)$ имеет вид "треугольника" (рис. 7.9). Этот пример выбран для проверки работоспособности алгоритма в одном из наиболее трудных с методичес-

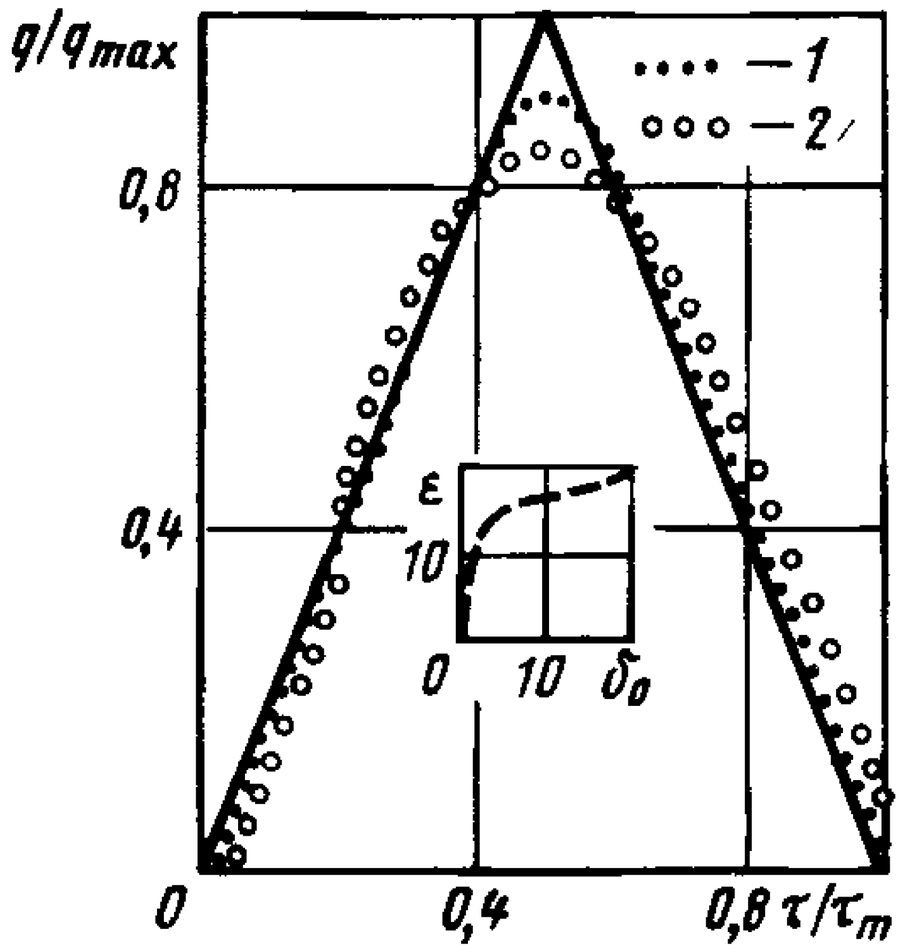
кой точки зрения условий, когда нарушается непрерывность производной восстанавливаемой функции.

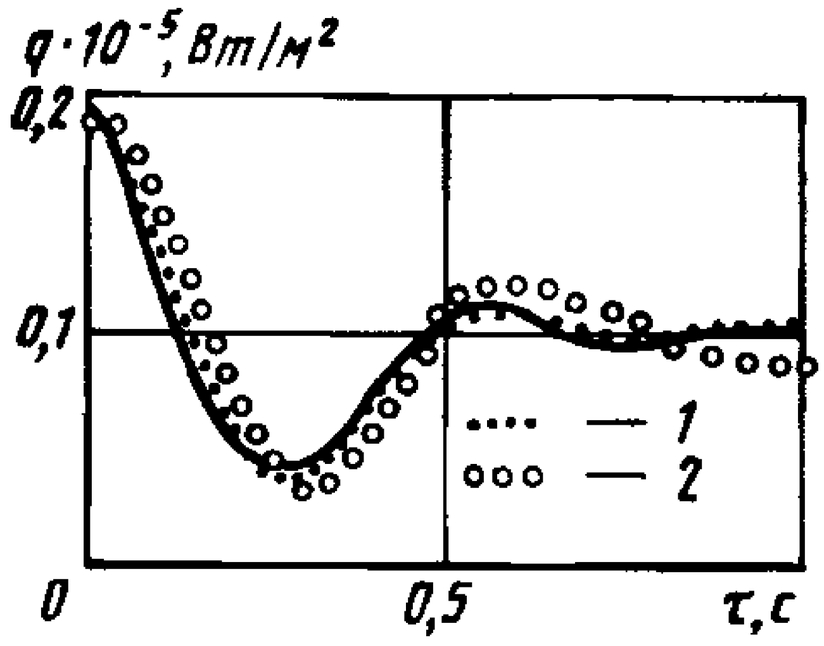
Результаты расчетов $q^{\alpha}(\tau)$ и $\epsilon(\delta_0)$ для разной степени возмущения точных значений температуры, подчиняющегося нормальному распределению, даны на рис. 7.9. Видно, что происходит "заглаживание" особенности функции в точке $\tau = \tau_m/2$, причем этот эффект усиливается при увеличении погрешности входных данных. Тем не менее, можно считать точность определения теплового потока удовлетворительной.

При малых ошибках в исходных данных влияние на решение погрешности аппроксимации интегрального оператора (которая увеличивается с увеличением $\Delta \mathrm{Fo}_d$) становится сравнимым с влиянием погрешности, порожденной ошибками исходных данных. Для приведенных примеров при $m \geqslant 25$ погрешность аппроксимации оператора можно было считать пренебрежимо малой.

Во всех рассмотренных случаях выбор приближений осуществлялся по принципу невязки и в соответствии с квазиоптимальным значением параметра регуляризации. Величина погрешности температурных измерений принималась равной $\delta_{L_2} \simeq \sigma_0 \sqrt{\tau_m}$. Среднеквадратичная ошибка σ_0 для нормального закона распределения определялась по правилу "трех сигм" – $\sigma_0 = \delta_0/3$, для равномерного – по формуле $\sigma_0 = \delta_0/\sqrt{3}$.

Как показали расчеты, в некоторой окрестности значения $\alpha = \alpha_н$





Рич. 7.9. Результаты восстановления граничного условия в случае нормального распределения ошибок во входных температурах при точном задании коэффициентов $C_{1\,0}$ и $C_{1}m$, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}02$ (сплошная кривая – действительное решение; штриховая кривая – оценка точности восстановления, ϵ, %; δ_0, %):
1 и 2 – решения при $\delta = 0{,}01\,T^*_{\max}$ и $0{,}1\,T^*_{\max}$ соответственно

Рис. 7.10. Результаты восстановления плотности теплового потока в случае теплоизолированной пластины при нормальном распределении ошибок в температурных данных:
$d = b$, $\Delta \mathrm{Fo}_b = 0{,}01$ (сплошная кривая – действительное решение); 1 и 2 – решения при $\delta_0 = 0{,}01\,T^*_{\max}$ и $0{,}1\,T^*_{\max}$ соответственно

(по невязке) часто находится квазиоптимальная величина параметра $\alpha_{ко}$ – обычно слева от $\alpha_н$.

Для других интегральных постановок одномерных ОЗТ (обусловленных переходом к модели пластины конечной толщины, учетом подвижности границ тела, а также другими типами восстанавливаемых и заданных граничных условий) численное моделирование дает результаты, качественно аналогичные рассмотренным выше для случая термически толстого тела. Это подтверждает эффективность использования метода регуляризации для обработки и интерпретации данных различных модельных и натурных тепловых экспериментов. В качестве примера на рис. 7.10 показаны результаты восстановления плотности теплового потока для пластины с внутренней теплоизолированной поверхностью, на которой заданы значения температуры $T^*(\tau)$ при условии, что шаги аппроксимации $\Delta \mathrm{Fo}_b$ значительно меньше $\Delta \mathrm{Fo}_b^{кр}$ – критического шага для прямого алгебраического метода решения, а входная информация известна со случайными ошибками.

7.4. РЕГУЛЯРИЗОВАННОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Регуляризация численного продолжения температурного поля по условиям Коши (температуре и тепловому потоку), заданным в некоторой внутренней точке тела, может быть осуществлена введением системы регуляризирующих функционалов, соответствующих пространственным слоям разностной сетки

$$\Phi_\alpha [\mathbf{T}_l] = \| \mathbf{M}_l \mathbf{T}_l - \mathbf{g}_l \|^2_{\mathrm{E}m} + \alpha_l \Omega_l, \qquad (7.8)$$

где l – номер пространственного слоя; $\mathbf{M}_l$ – матрица перехода от одного пространственного слоя к другому; $\mathbf{T}_l = [T_{l1}, T_{l2}, ..., T_{lm}]^{\mathrm{T}}$ – искомый вектор температуры в l-м слое; $\mathbf{g}_l$ – вектор известных параметров; α_l – параметр регуляризации; Ω_l – стабилизирующий функционал.

Можно положить

$$\Omega_l = k_1 \| \Delta \mathbf{T}_l \|^2_{\mathrm{E}m} + k_2 \| \Delta^2 \mathbf{T}_l \|^2_{\mathrm{E}m}, \quad k_1 \geqslant 0, \quad k_2 > 0,$$

что соответствует регуляризации второго порядка (Δ и Δ^2 – соответственно первые и вторые разности на временной сетке).

После выполнения операций, связанных с минимизацией (7.8), имеем в каждом l-м координатном сечении регуляризованную систему алгебраических уравнений, из решения которой при заданном значении параметра α_l найдем $\mathbf{T}_l^{\alpha l}$.

Матрица перехода $\mathbf{M}_l$ и вектор $\mathbf{g}_l$ определяются видом аппроксимации уравнения теплопроводности и могут соответствовать неявным и явным разностным схемам.

Выбор параметров регуляризации α_l осуществляется по принципу невязки или по значениям регуляризованного функционала [67]. С этой целью организуется итерационный поиск корня $\alpha = \alpha_н$ уравнения

$$\rho_l(\alpha) \equiv \sum_{n=1}^{m} (T_{Ln}^{\alpha} - T_n^*)^2 = \delta^2 \qquad (7.9)$$

или корня $\alpha = \alpha_ф$ уравнения

$$\varphi_l(\alpha) \equiv \rho_l(\alpha) + \alpha\Omega_l = \delta^2, \qquad (7.10)$$

где T_{Ln} — рассчитанная температура в точке $x = b$; T_n^* — экспериментальная температура; $\delta^2 \simeq \sum_{n=1}^{m} \sigma_n^2$ — среднеквадратичная погрешность.

В отличие от принципа невязки, который справедлив, строго говоря, для задач с линейным оператором A, модифицированный метод невязки по функционалу обоснован также и для нелинейных задач*.

Вектор $\mathbf{T}_L^{\alpha}$ получается из решения прямой задачи теплопроводности в области $x_l \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m$ при известном условии $-\lambda(T(b, \tau))\partial T(b, \tau)/\partial x = q^*(\tau)$ на правой границе и рассчитанной для данного значения α температуре $\mathbf{T}_l^{\alpha}$ на левой границе.

Решения уравнений (7.9) и (7.10) могут быть получены методом хорд в сочетании с итерациями по коэффициентам.

Таким образом проводится расчет температурного поля во всей области. Плотность искомого теплового потока определяется из разностной аппроксимации выражения $q(\tau) = -\lambda(T(0, \tau))\partial T(0, \tau)/\partial x$.

Отметим один важный момент. Для успешного применения регуляризованного принципа невязки нужно быть уверенным в том, что погрешности аппроксимации меньше ошибок задания исходных данных. С этим условием связана характерная особенность принципа невязки при регуляризации численного решения ОЗТ в постановке Коши. Она заключается в том, что для определения нужного значения α_l, соответствующего данному координатному слою, требуется рассчитать температурное поле в области от этого слоя до точки с условиями Коши. При переходе к следующему слою область решения прямой задачи увеличивается на один шаг Δx_l. Если разностные аналоги, использованные для перехода от одного пространственного слоя к другому при продолжении температурного поля и принятые для решения прямой задачи, не согласованы между собой по точности, то возможно большое накопление вычислительных ошибок. В результате возникает ситуация, когда итерационная процедура определения параметра α_l не сходится. Такой недостаток может проявиться у неявных схем продолжения

*Лисковец О.А. Способ выбора параметра регуляризации при решении нелинейных некорректных задач // ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 2. С. 292–295.

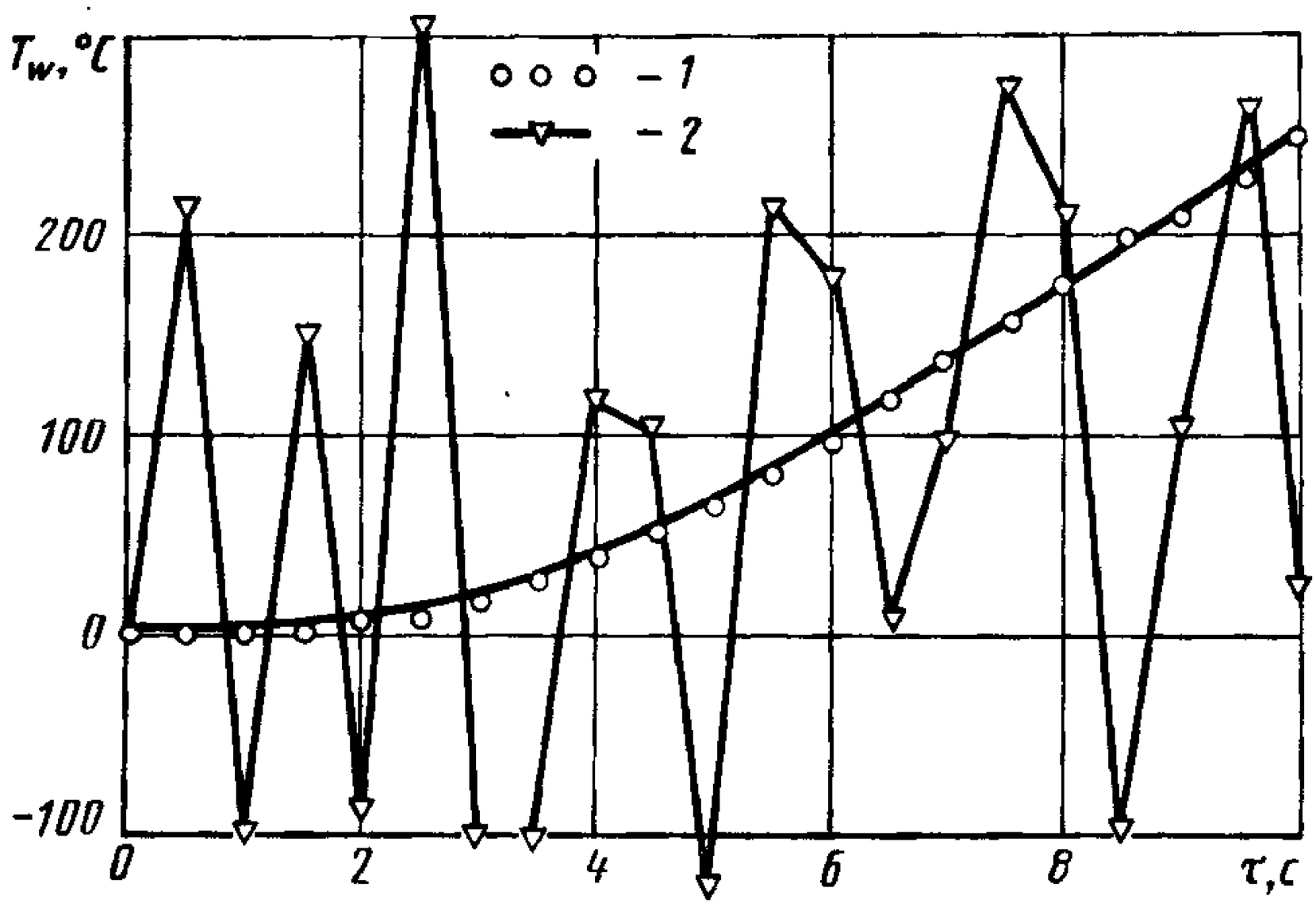


Рис. 7.11. Результаты решения ОЗТ (сплошная кривая – точное решение):
1 – регуляризованный численный метод; 2 – прямой численный метод ($\alpha = 0$)

температуры, поскольку в этом случае расчетные соотношения для прямой и обратной задач строятся по разным аппроксимирующим соотношениям.

Этот недостаток можно устранить, используя для решения как обратной, так и прямой задачи *одно и то же разностное представление.* Такую возможность дает Т-образная схема аппроксимации (см. рис. 5.3), являющаяся явной схемой для продолжения температурного поля и неявной для решения краевой задачи теплопроводности. Соответствующий алгоритм восстановления граничных условий из решения нелинейной ОЗТ в области с подвижными границами построен в работе [7]. Практический анализ корректности этой методики, выполненный в процессе решения модельных задач на большом числе вариантов моделируемых ошибок, показал работоспособность алгоритма в приложении к различным экспериментальным исследованиям.

В качестве иллюстрации на рис. 7.11 показаны результаты решения задачи по восстановлению температуры на нагреваемой поверхности. В этом примере входные температуры были возмущены случайной погрешностью, распределенной в каждый момент времени по нормальному закону с разбросом ошибки $\pm 0{,}05\ T^*_{max}$. Изменение ТФХ в зависимости от температуры соответствовало графитовому образцу и приведено на рис. 5.13. Тепловой поток на правой границе образца $q^*(\tau)$ в данном случае был равен нулю.

7.5. О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим возможную форму регуляризации ОЗТ в двумерной постановке, представленной интегральным уравнением (4.6). Аппроксимация этого уравнения приводит к матричному аналогу вида (4.8):

$$\mathbf{A}_\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}^*.$$

Выберем следующий регуляризирующий функционал:

$$\Phi_\alpha[u] = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b [f(x,\tau) - f^*(x,\tau)]^2 dx + \alpha \int_0^{\tau_m} d\tau \times$$

$$\times \int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial \tau} \right)^2 dx,$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации;

$$f(x,\tau) = \int_0^{\tau} d\xi \int_0^b u(x',\xi) K(x,x';\tau-\xi) dx'.$$

Соответствующий разностный аналог (с точностью до множителей $\Delta\tau$ и Δx) имеет вид

$$\hat{\Phi}_\alpha[\mathbf{u}] = \sum_{n=1}^{m} \sum_{l=1}^{L} (f_{ln} - f_{ln}^*)^2 + \alpha \sum_{n=1}^{m} \sum_{l=1}^{L} (u_{ln} -$$

$$- u_{l,n-1} - u_{l-1,n} + u_{l-1,n-1})^2.$$

Минимизация этой конечно-мерной формы регуляризованной невязки в предположении, что на краю сеточной области выполняются условия*

$$u_{0n} = u_{1n}, \quad u_{L+1,n} = u_{Ln}, \quad \overline{n = 0, m+1};$$

$$u_{l0} = u_{l1}, \quad u_{l,m+1} = u_{lm}, \quad \overline{l = 0, L+1},$$

дает систему линейных алгебраических уравнения для определения искомых величин

$$\mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{A}_\Delta^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^*. \qquad (7.11)$$

---

*Эти равенства следуют из простейших разностных аппроксимаций естественных краевых условий $u_x(0,\tau) = u_x(b,\tau) = u_\tau(x,0) = u_\tau(x,\tau_m) = 0$; при необходимости могут быть заданы другие условия и взяты соответствующие им разностные аналоги.

Матрица C, которая выполняет сглаживающие функции, имеет следующий блочный вид:

$$C = \begin{bmatrix} S & -S & & & & & \\ -S & P & -S & & & & 0 \\ & -S & P & -S & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & -S & P & -S \\ 0 & & & & & -S & S \end{bmatrix}_{j \times j},$$

где $j = L \cdot m$,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{L \times L},$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & & & \\ -2 & 4 & -2 & & & & 0 \\ & -2 & 4 & -2 & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & -2 & 4 & -2 \\ 0 & & & & & -2 & 2 \end{bmatrix}_{L \times L}$$

Система (7.11) решается при различных значениях α и из полученного семейства регуляризованных приближений $\{u^{\alpha}(x, \tau)\}$ выбирается нужный представитель. В целях экономии машинного времени процесс выбора параметра следует автоматизировать в соответствии с процедурой, описанной в работах [1, 6].

Выводы

1. Построены устойчивые алгоритмы решения линейных и нелинейных, одномерных и двумерных граничных ОЗТ, основанные на вариационном принципе регуляризации.

2. Проведенное численное исследование показало работоспособность этих алгоритмов и высокую точность восстановления тепловых граничных условий.

ГЛАВА 8
ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Алгоритмы, построенные в гл. 4—7, предназначены для решения граничных ОЗТ. В последнее время область практических применений методологии, основанной на обратных задачах теплообмена, значительно расширилась, что потребовало решения обратных задач и других типов. Как показали проведенные исследования, одним из наиболее эффективных и универсальных подходов к построению устойчивых алгоритмов решения некорректно поставленных обратных задач является *итерационная регуляризация* (гл. 6),* под которой понимается построение параметрических регуляризирующих операторов с параметром регуляризации в виде номера итерации. С помощью этого метода могут быть получены удобные для практического использования алгоритмы решения обратных задач теплообмена в различных постановках (линейных и нелинейных, одномерных и многомерных, в областях с фиксированными и подвижными границами, с минимально необходимым составом исходных данных и переопределенных). Кроме того, оказалось возможным строго обосновать данный метод применительно к широкому классу задач, а также модернизировать итерационные алгоритмы для учета качественной и количественной априорной информации об искомом решении.

Эти вопросы рассматриваются в данной главе.

8.1. О СТРОГОМ ОБОСНОВАНИИ ИТЕРАЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В гл. 6 правомерность принципа итерационной регуляризации устанавливалась на основе эвристических соображений, связанных с анализом поведения итерационных процессов и возможности их останова по критерию невязки. Остановимся теперь на точных математических результатах по этому вопросу.

Запишем общую постановку некоторой обратной задачи в виде операторного уравнения первого рода

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \tag{8.1}$$

где принято, что U, F – гильбертовы пространства; A – линейный непре-

*В настоящее время известно несколько методов построения итерационных алгоритмов решения некорректных задач и математическим аспектам их исследования посвящено много работ (см., например, [19, 26, 28, 31, 32, 36, 39, 43, 52, 60, 68, 74, 87, 94, 103, 115]).

рывный оператор, определенныи на U; u, f – искомый и наблюдаемый элементы соответственно (u и f могут быть функциями или вектор-функциями).

Будем в дальнейшем предполагать, что уравнение (8.1) разрешимо единственным образом по отношению к любым элементам f из области значений оператора A*. При точно заданных операторе A и правой части f уравнение (8.1) имеет решение $u_т$.

Корректная разрешимость задачи (8.1) предполагает непрерывность оператора A^{-1}, обратного к A. Однако это условие (см. гл. 2) мы будем считать нарушенным, т.е. примем, что A^{-1} не является непрерывным оператором.

Так же как и в гл. 7 введем в рассмотрение приближенные исходные данные:

1) линейный непрерывный оператор A_h, аппроксимирующий оператор A с условием $\| A_h - A \| \leqslant \chi(h)$, $\chi(h) \to 0$, $h \to 0$;

2) правую часть $f_\delta = f + \Delta f$, где $\Delta f \in F$ – помеха с нормой $\| \Delta f \|_F \leqslant \delta$.

Погрешность исходных данных тогда характеризуется вектором $\sigma = \{\delta, h\}$.

Предположим, что имеется некоторый итерационный алгоритм, дающий последовательность приближений

$$u^{k+1} = F_A(u^k, \Delta f, h), \quad k = 0,1, \ldots, \tag{8.2}$$

начиная с заданной начальной оценки u^0.

В работах [12, 13] установлено, что алгоритм (8.2) порождает *регуляризирующее семейство операторов* (см. разд. 2.3.3) с *параметром* k, если выполняются условия:

1) для любого $u^0 \in U$ последовательность (8.2), построенная на точных данных ($\Delta f = 0$, $h = 0$), сходится к точному решению $u_т$;

2) отображение $F_A(u, \Delta f, h)$ непрерывно во всех точках $\{u, 0, 0\}$, кроме, может быть, точки $\{u_т, 0, 0\}$.

То есть, в этом случае возможен выбор устойчивого приближения из соответствующей итерационной последовательности. Другими словами, найдутся такие $\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$, что если $\delta < \delta_0$, $h < h_0$, то существует номер итерации $k = \bar{k}(\sigma)$, для которого $\| u^{\bar{k}(\sigma)} - u_т \|_U \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$.

Оказалось, что указанным требованиям удовлетворяют, в частности, *алгоритм скорейшего спуска*

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k J_u'^k, \quad \beta_k = \frac{\| J_u'^k \|_U^2}{2 \| A_h J_u'^k \|_F^2} \tag{8.3}$$

---

*В общем случае это условие не является обязательным – в работах [12, 13] обоснование метода проведено без допущения о единственности решения задачи.

и *алгоритм сопряженных градиентов*

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k S^k, \quad \beta_k = \frac{(J_u'^k, S^k)_U}{2\|A_h S^k\|_F^2}, \tag{8.4}$$

$$S^k = J_u'^k + \gamma_k S^{k-1}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_k = \frac{\|J_u'^k\|_U^2}{\|J_u'^{k-1}\|_U^2}.$$

Здесь $J_u'^k = 2A_h^*(A_h u^k - f_\delta)$ – градиент функционала $J^k = J[u^k] = \|A_h u^k - f_\delta\|_F^2$

Таким образом, на основе итерационных процессов (8.3) и (8.4) возможно построение *регуляризирующих алгоритмов*. Для этого нужно указать приемлемый способ согласования номера последней итерации $\bar{k}$ с погрешностью исходных данных σ. Такой способ может быть построен на основе критерия невязки

В [12, 13] показано, что алгоритмы скорейшего спуска (8.3) и сопряженных градиентов (8.4) при выборе числа итераций соответственно из условий

$$\bar{k}(\sigma) = \min\left\{ k: \frac{J^k + J^{k+1}}{2\sqrt{J^k}} < \delta + \chi(h)\|u_T\|_U \right\}, \tag{8.5}$$

$$\bar{k}(\sigma) = \min\left\{ k: \frac{(J^k + J^{k+1}) \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\|J_u'^i\|_U^2}}{2 \sum_{i=0}^{k} \frac{\sqrt{J^i}}{\|J_u'^i\|_U^2}} < \delta + \chi(h)\|u_T\|_U \right\} \tag{8.6}$$

являются регуляризирующими алгоритмами, т.е. дают устойчивые приближенные решения, точность которых будет неуклонно возрастать при уменьшении погрешности исходных данных и, теоретически, при $\sigma \to 0$ эти алгоритмы дадут точное решение.

Проанализируем условие (8.5). Для каждого $\bar{k}$ выполняется неравенство $J^{k+1} < J^k$, откуда следует, что $\Phi^{k+1} = \frac{J^k + J^{k+1}}{2\sqrt{J^k}} < J^k$.

С другой стороны, в силу неравенства Коши имеем $\frac{1}{2}(J^k + J^{k+1}) \geqslant \sqrt{J^k J^{k+1}}$. Следовательно $\sqrt{J^{k+1}} \leqslant \Phi^{k+1} < \sqrt{J^k}$.

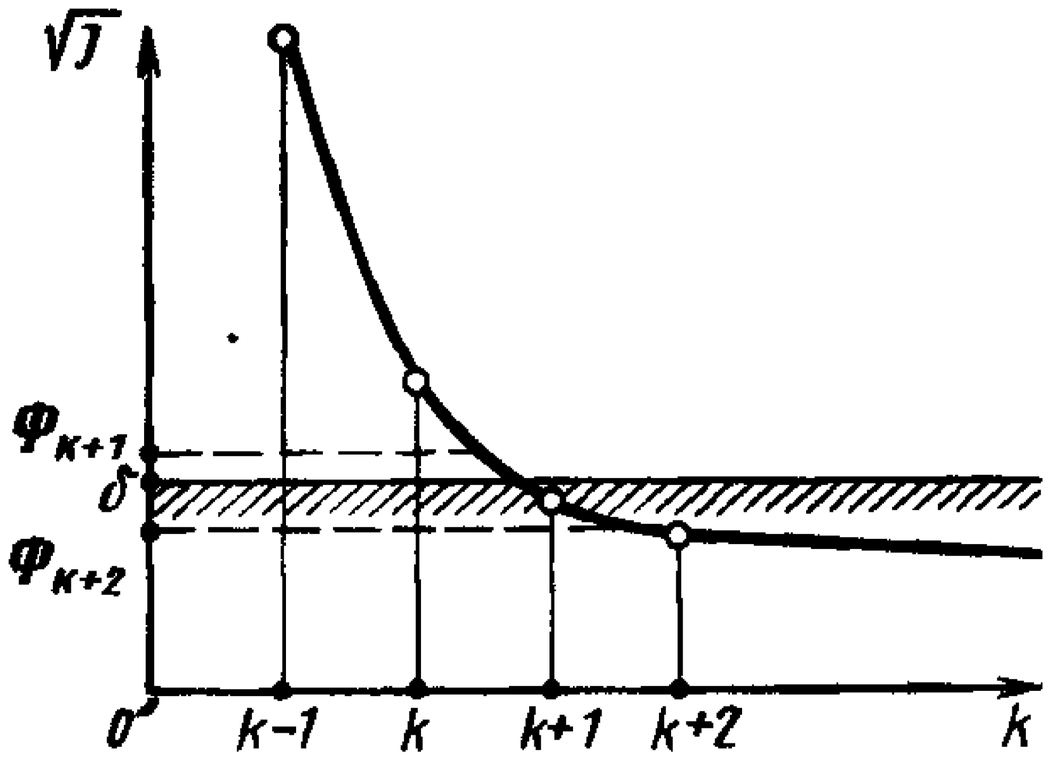


Рис. 8.1. Графическая иллюстрация прекращения итерационного процесса по критерию невязки

Таким образом, если не рассматривать ошибки аппроксимации ($\chi(h) = 0$), то останов итерационного процесса скорейшего спуска по условию (8.5) с точностью до одной итерации равносилен останову по условию

$$k = \bar{k}: \|Au^k - f_\delta\|_F \simeq \delta \qquad (8.7)$$

без перехода через уровень δ (рис. 8.1).

В том случае, когда величина δ расположена между $\sqrt{J^k}$ и $\sqrt{J^{k+1}}$, номера последних итераций, выбранные в соответствии с (8.5) и (8.7), будут совпадать.

Аналогичный анализ с выводом о том, что условие (8.6) практически равносильно останову по критерию невязки, можно сделать и в отношении процедуры сопряженных градиентов. В работе [84] установлены условия, при которых из применимости критерия невязки для заданного итерационного алгоритма F_A следует применимость критерия обобщенной невязки, а также обоснованы критерии невязки и обобщенной невязки для методов простой итерации и установления.

Приведенные результаты по обоснованию итерационной регуляризации относятся к линейным постановкам обратных задач. Применимость такого подхода к решению некорректных задач в нелинейных постановках была многократно показана методом вычислительного эксперимента (см., например, работы [5, 8, 10, 14, 15, 17, 78]).

Замечание. Приближения u^{k+1}, $k = 0, 1, \ldots$, соответствующие номерам итераций $k \leqslant \bar{k}$ будут монотонно стремиться к решению уравнения (8.1). В то же время при $k > \bar{k}$ элементы u^{k+1}, полученные по методу скорейшего спуска уже не обязательно должны быть ближе к искомому решению u_T. Что же касается метода сопряженных градиентов, то условие (8.6) можно использовать не для останова, а для обновления итераций, если $J^{\bar{k}} > \delta^2$ [13] А именно, после выполнения (8.6) продолжить процесс приближений, приняв за начальную оценку $u_1^0 = u^{\bar{k}}$ и $J(u_1^0) = J^{\bar{k}}$, до следующего выполнения (8.6) на некотором номере $\bar{k}_1$. Если при этом $J^{\bar{k}_1} > \delta^2$, то снова осуществляется обновление, полагая, что $u_2^0 = u^{\bar{k}_1}$, $J(u_2^0) = J^{\bar{k}_1}$. И так до тех пор, пока условие (8.6) не выполнится на первой итерации после очередного обновления. В результате повышается точность приближенного решения.

Из приведенных выше теоретических результатов следует, что рассмотренные в гл. 6 алгоритмы дают регуляризованные решения обрат-

ных задач, аппроксимирующие искомые функции в *среднем*. На основе итерационной регуляризации могут быть также получены алгоритмы, обеспечивающие *равномерную сходимость* приближений и их производных (см. разд. 8.5).

8.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОЗТ. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА-НЕВЯЗКИ

Как следует из формул (8.3) и (8.4) для реализации этих итерационных алгоритмов необходимо рассчитать градиент соответствующего целевого функционала. В случае линейных ОЗТ, допускающих построение операторов A в явном виде, для этой цели могут быть получены точные аналитические выражения. Перейдем к анализу этого вопроса, предварительно сформулировав достаточно общую одномерную постановку обратной задачи обобщенной теплопроводности.

Рассмотрим следующую математическую модель переноса тепла с коэффициентами, зависящими от координаты и времени:

$$T_\tau = a_1(x, \tau)T_{xx} + a_2(x, \tau)T_x + a_3(x, \tau)T + S(x, \tau),$$

$$(x, \tau) \in Q = (0, b) \times (0, \tau_m]; \tag{8.8}$$

$$T(x, 0) = \xi(x); \tag{8.9}$$

$$[\alpha_1(\tau)T_x + \beta_1(\tau)T]_{x=0} = p_1(\tau); \tag{8.10}$$

$$[\alpha_2(\tau)T_x + \beta_2(\tau)T]_{x=b} = p_2(\tau). \tag{8.11}$$

Здесь и далее в этом разделе для частных производных используются обозначения $z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $z_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Обобщенная форма записи граничных условий (8.10), (8.11) позволяет получить условия первого, второго и третьего родов за счет задания нулевых или ненулевых коэффициентов $\alpha_l(\tau), \beta_l(\tau)$.

В этой постановке искомыми величинами примем какие-либо из функций $S(x, \tau)$, $\xi(x)$, $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$. С точки зрения единственности решения при нахождении источника $S(x, \tau)$ нужно знать все поле температуры: $f(x, \tau) = T(x, \tau)$, $(x, \tau) \in Q$. Задача поиска начального распределения $\xi(x)$ – ретроспективная ОЗТ – часто решается по информации о температуре в конечный момент времени: $f_m(x) = T(x, \tau_m)$ При определении функций $p_1(\tau)$ и (или) $p_2(\tau)$ (граничные ОЗТ), а также вектор-функций $\{\xi(x), p_1(\tau)\}$ или $\{\xi(x), p_2(\tau)\}$ – гранично-ретроспективные ОЗТ – будем считать известными температурные измерения в N точках отрезка $[0, b]$ как функции времени: $f_i(\tau) = T(d_i, \tau)$, $\tau \in [0, \tau_m]$, $i = 1, N$, где $d_i < d_{i+1}$, $i = 1, N-1$, причем $0 \leqslant d_1$ для $\alpha_1 \neq$

$\neq 0$, $0 < d_1$ для $\alpha_1 = 0, b \geqslant d_N$ для $\alpha_2 \neq 0, b > d_N$ для $\alpha_2 = 0$. Для однозначного решения этих задач необходимо выполнение условий: $N \geqslant 1$ при определении одной из функций $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$; $N \geqslant 2$ – для совокупности искомых функций $\{p_1(\tau), p_2(\tau)\}$; $N \geqslant 1, \beta_2(\tau) \equiv 0, d_N = b$ – при поиске вектор-функции $\{\xi(x), p_1(\tau)\}$; $N \geqslant 1, \beta_1(\tau) \equiv 0, d_1 = 0$ – при поиске $\{\xi(x), p_2(\tau)\}$.

Оператор A, порождаемый краевой постановкой (8.8) – (8.11) при той или иной искомой причинной характеристике, может быть построен с помощью функции Грина. Не останавливаясь на вопросе получения соответствующего интегрального представления решения этой задачи, приведем конечные результаты*: для граничных условий первого рода ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$) –

$$T(x,\tau) = \int_0^\tau d\tau' \int_0^b S(x',\tau') G(x,\tau\ ;\ x',\tau') dx' +$$

$$+ \int_0^b \xi(x') G(x,\tau\ ;\ x',\ 0) dx' +$$

$$+ \int_0^\tau p_1(\tau') \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(0,\tau') G(x,\tau;\ 0,\tau')) d\tau' -$$

$$- \int_0^\tau p_2(\tau') \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(b,\tau') G(x,\tau\ ;\ b,\tau')) d\tau'; \qquad (8.12)$$

для граничных условий второго рода ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0; \beta_1 = \beta_2 = 0$) и третьего рода ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1; \beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$) –

$$T(x,\tau) = \int_0^\tau d\tau' \int_0^b S(x',\tau') G(x,\tau\ ;\ x',\tau') dx' +$$

$$+ \int_0^b \xi(x') G(x,\tau;\ x',0) dx' - \int_0^\tau \frac{\bar{p}_1(\tau')}{\alpha_1(\tau')} G(x,\tau;\ 0,\tau') d\tau' +$$

$$+ \int_0^\tau \frac{p_2(\tau')}{\alpha_2(\tau')} G(x,\tau;\ b,\tau') d\tau'; \qquad (8.13)$$

---

*Соответствующие выкладки даны в работе: Алифанов О.М. О выводе формул для градиента невязки при итерационном решении обратных задач обобщенной теплопроводности. 1. Определение градиента через функцию Грина // ИФЖ. 1987. Т. 52. № 3. С. 476–485.

для смешанных граничных условий $(\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1; \alpha_2 \neq 0)$ –

$$T(x,\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{b} S(x',\tau') G(x,\tau;\, x',\tau')\, dx' +$$

$$+ \int_0^{b} \xi(x') G(x,\tau;\, x',0)\, dx' + \int_0^{\tau} p_1(\tau') \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(0,\tau') \times$$

$$\times G(x,\tau;\, 0,\tau')) d\tau' + \int_0^{\tau} \frac{p_2(\tau')}{\alpha_2(\tau')} G(x,\tau;\, b,\tau')\, d\tau'; \qquad (8.14)$$

для смешанных граничных условий $(\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1)$ –

$$T(x,\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{b} S(x',\tau') G(x,\tau;\, x',\tau')\, dx' +$$

$$+ \int_0^{b} \xi(x') G(x,\tau;\, x',0)\, dx' - \int_0^{\tau} \frac{p_1(\tau')}{\alpha_1(\tau')} G(x,\tau;\, 0,\tau')\, d\tau' -$$

$$- \int_0^{\tau} p_2(\tau') \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(b,\tau') G(x,\tau;\, b,\tau'))\, d\tau'. \qquad (8.15)$$

В этих формулах $G(x, \tau; x', \tau')$ – функция Грина первой краевой задачи в (8.12); функция Грина второй или третьей краевой задачи соответственно в (8.13); функция Грина соответствующей смешанной краевой задачи в (8.14) и (8.15).

Функции Грина вводятся обычным образом. В общем случае $G = G(x, \tau; x', \tau')$ удовлетворяет условиям

$$G_\tau = a_1 G_{xx} + a_2 G_x + a_3 G, \quad x \in (0, b), \quad \tau > \tau';$$

$$[\alpha_1 G_x + \beta_1 G]_{x=0} = [\alpha_2 G_x + \beta_2 G]_{x=b} = 0, \quad x' \in (0, b), \quad \tau > \tau';$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{b} G(x, \tau' + \epsilon; x', \tau') f(x)\, dx = f(x') \quad \text{для} \quad f(x) \in C[0, b], \epsilon > 0.$$

Рассматривая какие-либо из функций $S(x', \tau')$, $\xi(x')$, $p_1(\tau')$, $p_2(\tau')$ как неизвестные, приходим к той или иной постановке обратной задачи с линейным интегральным оператором A.

Известно, что для линейного оператора A градиент невязки $J[u] = \| Au - f \|_F^2$ имеет вид

$$J_u' = 2A^*(Au - f).$$

Действительно, находя приращение функционала с использованием равенства $\| \theta - \varphi \|_F^2 = \| \theta \|_F^2 - 2(\theta, \varphi)_F + \| \varphi \|_F^2$, получим

$$J(u + \Delta u) - J(u) = 2(Au - f,\ A\Delta u)_F + \| A\Delta u \|_F^2 =$$

$$= (2A^*(Au - f),\ \Delta u)_F + o(\| \Delta u \|),$$

где A^* – оператор, сопряженный с оператором A Отсюда следует, что $J_u' = 2A^*(Au - f)$

Таким образом, для вычисления J_u' нужно найти оператор A^* Остановимся на этом вопросе, рассмотрев поочередно постановки ОЗТ с той или иной искомой функцией, полагая, что остальные величины известны В том случае, когда искомой является некоторая вектор-функция, необходимо брать соответствующие компоненты градиента, найденные ниже.

1.Источник теплоты $S(x, \tau)$

В этом случае функционал-невязка имеет вид

$$J[S] = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b (AS - \tilde{f})^2 dx, \qquad (8\ 16)$$

где $AS = \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^b S(x', \tau') G(x, \tau; x', \tau') dx',$

$$\tilde{f} = f(x, \tau) - \int_0^b \xi(x') G(x, \tau; x', 0) dx' - I(x, \tau).$$

Величина $I(x, \tau)$ определяется видом граничных условий и представляет собой соответствующую алгебраическую сумму двух последних членов в выражениях (8.12) – (8.15), например, для условий первого рода:

$$I(x, \tau) = \int_0^{\tau} p_1(\tau') \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(0, \tau') G(x, \tau; 0, \tau')) d\tau' -$$

$$- \int_0^{\tau} p_2(\tau') \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(b, \tau') G(x, \tau; b, \tau')) d\tau'.$$

Рассматривая интегральный оператор A как оператор из пространства $L_2(Q)$ в $L_2(Q)$, запишем соотношение для скалярных произведений, определяющее сопряженный оператор A^*,

$$(AS, e)_{L_2(Q)} = (S, A^*e)_{L_2(Q)} \qquad (8.17)$$

Здесь e может быть любым элементом из $L_2(Q)$, нам для получения

конечного результата удобно под ним понимать величину $e(x, \tau) = AS - f$.

Пользуясь определением скалярного произведения в $L_2(Q)$, запишем (8 17) в виде

$$\int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b e(x,\tau)\,dx \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^b S(x',\tau')\,G(x,\tau;\,x',\tau')\,dx' =$$

$$= \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b S(x,\tau)\,y^*(x,\tau)\,dx. \qquad (8.18)$$

Функция y^* в (8.18) связана с градиентом функционала (8.16) следующим образом:

$$y^* = A^* e = \frac{1}{2} J'_S. \qquad (8.19)$$

После перемены порядков интегрирования в левой части (8.18) и замены переменных $x \to x'$, $\tau \to \tau'$ в правой, имеем

$$\int_0^{\tau_m} d\tau' \int_0^b S(x',\tau')\,dx' \int_{\tau'}^{\tau_m} d\tau \int_0^b e(x,\tau)\,G(x,\tau;x',\tau')\,dx =$$

$$= \int_0^{\tau_m} d\tau' \int_0^b S(x',\tau')\,y^*(x',\tau')\,dx'.$$

Отсюда ввиду произвольности S, а также учитывая (8.19), получаем

$$J'_S = 2 \int_{\tau'}^{\tau_m} d\tau \int_0^b e(x,\tau)\,G(x,\tau;\,x',\tau')\,dx'. \qquad (8.20)$$

Во многих практических задачах источник теплоты $S(x, \tau)$ может быть представлен как одно из следующих произведений:

$$S(x,\tau) = \varphi(x,\tau)\,\mathrm{v}(\tau) \quad \text{или} \quad S(x,\tau) = \varphi(x,\tau)\,w(x),$$

где $\varphi(x, \tau)$ – известная функция.

Соответственно задача определения функции двух переменных $S(x, \tau)$ заменяется задачей определения одномерной функции $\mathrm{v}(\tau)$ или $w(x)$ При этом вместо температурного поля $T(x, \tau)$ могут быть заданы функции времени $f_i(\tau) = T(d_i, \tau)$, $i = 1, N$, $N \geqslant 1$, $0 \leqslant d_i \leqslant b$.

В качестве целевых функционалов возьмем сумму среднеквадратичных невязок температур с весами

$$J[\mathrm{v}] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)(A_{\mathrm{v}i}\mathrm{v} - \tilde{f}_i)^2\,d\tau; \qquad (8.21)$$

$$J[w] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)(A_{wi}w - \tilde{f}_i)^2 \, d\tau \ , \tag{8.22}$$

где $A_{vi}v = \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{b} \varphi(x', \tau')\, v(\tau')\, G(d_i, \tau;\ x', \tau')\, dx';$

$$A_{wi}w = \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{b} \varphi(x', \tau')\, w(x')\, G(d_i, \tau;\ x', \tau')\, dx',$$

$$\tilde{f}_i = f_i(\tau) - \int_0^{b} \xi(x')\, G(d_i, \tau;\ x', 0)\, dx' - I(d_i, \tau),$$

$\rho_i(\tau)$ — весовые коэффициенты.

Величины $\rho_i(\tau)$ учитывают вклад каждой из экспериментальных зависимостей $f_i(\tau)$, причем в общем случае могут регулировать этот вклад по времени В простейшем случае $\rho_i \equiv 1$, $i = \overline{1, N}$, т.е. при решении обратной задачи учитываются все измерения с одинаковой значимостью. Или может быть принято, что только некоторые измерения равнозначны между собой и при всех значениях времени — для них весовые коэффициенты будут равны 1 на отрезке $[0, \tau_m]$. Другие же измерения учитываются равнозначно на каких-то интервалах отрезка $[0, \tau_m]$ и исключаются в остальные временные промежутки — тогда соответствующие веса принимаются равными 1 для этих интервалов и нулю при иных значениях τ. Подобная ситуация может быть связана с тем, что температурная информация известна не на всем временном отрезке или ее качество не везде удовлетворительно и требуется выбраковка на отдельных участках $[0, \tau_m]$

Рассмотрим вначале функционал (8.21), полагая, что линейные операторы A_{vi}, $i = 1, N$ действуют в пространстве $L_2[0, \tau_m]$. Дадим функции $v(\tau)$ приращение $\Delta v(\tau)$, тогда

$$J[v + \Delta v] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)[A_{vi}(v + \Delta v) - \tilde{f}_i]^2 \, d\tau. \tag{8.23}$$

Вычислим соответствующее приращение функционала

$$\Delta J \equiv J[v + \Delta v] - J[v] = \sum_{i=1}^{N} [2 \int_0^{\tau_m} \rho_i e_{vi} \cdot A_{vi}\Delta v d\tau +$$

$$+ \int_0^{\tau_m} \rho_i (A_{vi}\Delta v)^2 \, d\tau = 2 \sum_{i=1}^{N} (A_{vi}\Delta v, \rho_i e_{vi})_{L_2[0, \tau_m]} + o(\|\Delta v\|),$$

где $e_{vi} = A_{vi}v - \tilde{f}_i$.

Вводя сопряженные операторы A^*_{vi}, получим

$$\Delta J = 2 \sum_{i=1}^{N} (\Delta v, A^*_{vi}(\rho_i e_{vi}))_{L_2[0,\tau_m]} + o(\|\Delta v\|) =$$

$$= (\Delta v, 2 \sum_{i=1}^{N} A^*_{vi}(\rho_i e_{vi}))_{L_2[0,\tau_m]} + o(\|\Delta v\|).$$

Откуда следует выражение для градиента

$$J'_v = 2 \sum_{i=1}^{N} A^*_{vi}(\rho_i e_{vi}). \qquad (8.24)$$

Найдем значения сопряженных операторов A^*_{vi} на элементах $z_{vi} = \rho_i e_{vi}$. Для этого запишем скалярное произведение элементов $z_{vi}, A_{vi}v$ и изменим в нем порядки интегрирования

$$(z_{vi}, A_{vi}v)_{L_2[0,\tau_m]} = \int_0^{\tau_m} [z_{vi}(\tau) \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{b} \varphi(x', \tau')\, v(\tau')\, \times$$

$$\times\, G(d_i, \tau; x', \tau')\, dx']\, d\tau = \int_0^{\tau_m} v(\tau')\, d\tau' \int_{\tau'}^{\tau_m} z_{vi}(\tau)\, F(d_i, \tau, \tau')\, d\tau =$$

$$= (v, A^*_{vi} z_{vi})_{L_2[0,\tau_m]},$$

где $F(d_i, \tau, \tau') = \int_0^{b} \varphi(x', \tau')\, G(d_i, \tau; x', \tau')\, dx'$.

Таким образом

$$A^*_{vi} z_{vi} = \int_{\tau'}^{\tau_m} z_{vi}(\tau)\, F(d_i, \tau, \tau')\, d\tau. \qquad (8.25)$$

Следуя тем же рассуждениям, получим градиент функционала (8.22), в котором $A_{wi}: L_2[0, b] \to L_2[0, \tau_m]$,

$$J'_w = 2 \sum_{i=1}^{N} A^*_{wi} z_{wi}, \qquad (8.26)$$

где $z_{wi} = \rho_i e_{wi}$, $e_{wi} = A_{wi} w - \tilde{f}_i$;

$$A^*_{wi} z_{wi} = \int_0^{\tau_m} z_{wi}(\tau) K(d_i, x', \tau)\, d\tau, \quad K(d_i, x', \tau) =$$

$$= \int_0^{\tau} \varphi(x', \tau')\, G(d_i, \tau; x', \tau')\, d\tau'.$$

2.Начальное условие $\xi(x)$

Соответствующий функционал при измерениях в точках d_i имеет вид

$$J[\xi] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)(A_{\xi i}\xi - \hat{f}_i)^2 \, d\tau, \tag{8.27}$$

где

$$A_{\xi i}\xi = \int_0^b \xi(x') G(d_i, \tau; x', 0)\, dx', \quad A_{\xi i}: L_2[0, b] \to L_2[0, \tau_m],$$

$$\hat{f}_i = f_i(\tau) - \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^b S(x', \tau') G(d_i, \tau; x', \tau')\, dx' - I(d_i, \tau).$$

Градиент функционала (8.27) равен

$$J'_\xi = 2 \sum_{i=1}^{N} A^*_{\xi i} z_{\xi i}, \tag{8.28}$$

где $z_{\xi i} = \rho_i e_{\xi i}$, $e_{\xi i} = A_{\xi i}\xi - \hat{f}_i$.

Сопряженные операторы $A^*_{\xi i}$ получаются по приведенной выше схеме и имеют вид

$$A^*_{\xi i} z_{\xi i} = \int_0^{\tau_m} z_{\xi i}(\tau) G(d_i, \tau; x', 0)\, d\tau. \tag{8.29}$$

Если в качестве входных данных при решении ретроспективной ОЗТ используются измерения температуры в момент времени $\tau = \tau_m$, то функционал-невязка запишется так:

$$J_m[\xi] = \int_0^b (A_\xi \xi - \hat{f}_m)^2 \, dx, \tag{8.30}$$

где $A_\xi \xi = \int_0^b \xi(x') G(x, \tau_m; x', 0)\, dx', \quad A_\xi: L_2[0, b] \to L_2[0, b],$

$$\hat{f}_m = f_m(x) - \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^b S(x', \tau') G(x, \tau_m; x', \tau')\, dx' - I(x, \tau_m).$$

Градиент функционала (8.30) вычисляется по формуле

$$J'_{m\xi} = 2 \int_0^b e_\xi(x) G(x, \tau_m; x', 0)\, dx; \tag{8.31}$$

$$e_\xi = A_\xi \xi - \hat{f}_m.$$

3. Граничные условия $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$

В данном случае целевые функционалы берутся в форме

$$J[p_1] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)(A_{1i}p_1 - f_{1i})^2 \, d\tau; \tag{8.32}$$

$$J[p_2] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)(A_{2i}p_2 - f_{2i})^2 \, d\tau. \tag{8.33}$$

Операторы A_{1i} и A_{2i} действуют из $L_2[0, \tau_m]$ в $L_2[0, \tau_m]$ и определяются так же,как и f_{1i}, f_{2i}, типом искомых граничных условий (см. (8.12) – (8.15)). Для условий первого рода:

$$A_{1i}p_1 = \int_0^{\tau} p_1(\tau') \frac{\partial}{\partial x'}(a_1(0, \tau') G(d_i, \tau;\ 0, \tau') \, d\tau';$$

$$A_{2i}p_2 = -\int_0^{\tau} p_2(\tau') \frac{\partial}{\partial x'}(a_1(b, \tau') G(d_i, \tau;\ b, \tau') \, d\tau'.$$

Для условий второго или третьего родов:

$$A_{1i}p_1 = -\int_0^{\tau} \frac{p_1(\tau')}{\alpha_1(\tau')} G(d_i, \tau; 0, \tau') \, d\tau';$$

$$A_{2i}p_2 = \int_0^{\tau} \frac{p_2(\tau')}{\alpha_2(\tau')} G(d_i, \tau;\ b, \tau') \, d\tau'.$$

Функции $f_{1i} = f_{1i}(d_i, \tau)$ и $f_{2i} = f_{2i}(d_i, \tau)$ определяются очевидным образом из соответствующего выражения (8.12) – (8.15), например, если искомой является величина $p_1(\tau)$ и приняты смешанные граничные условия ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$), то

$$f_{1i} = f_i(\tau) - \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{b} S(x', \tau') G(d_i, \tau;\ x', \tau') \, dx' -$$

$$- \int_0^{b} \xi(x') G(d_i, \tau;\ x', 0) \, dx' +$$

$$+ \int_0^{\tau} p_2(\tau') \frac{\partial}{\partial x'}(a_1(b, \tau') G(d_i, \tau;\ b, \tau')) \, d\tau'.$$

Формулы для градиентов:

$$J'_{P_j} = 2 \sum_{i=1}^{N} A^*_{ji} z_{ji}, \quad j = 1, 2, \tag{8.34}$$

где $z_{ji} = \rho_i e_{ji}$, $e_{ji} = A_{ji} p_j - f_{ji}$;

$$A^*_{1i} z_{1i} = - \frac{a_1(0, \tau')}{\alpha_1(\tau')} \int_{\tau'}^{\tau_m} z_{1i}(\tau) G(d_i, \tau; 0, \tau') d\tau, \text{ если } \alpha_1 \neq 0;$$

$$A^*_{2i} z_{2i} = \frac{a_1(b, \tau')}{\alpha_2(\tau')} \int_{\tau'}^{\tau_m} z_{2i}(\tau) G(d_i, \tau; b, \tau') d\tau, \text{ если } \alpha_2 \neq 0;$$

$$A^*_{1i} z_{1i} = \int_{\tau'}^{\tau_m} z_{1i}(\tau) \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(0, \tau') G(d_i, \tau; 0, \tau')) d\tau,$$

если $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$;

$$A^*_{2i} z_{2i} = - \int_{\tau'}^{\tau_m} z_{2i}(\tau) \frac{\partial}{\partial x'} (a_1(b, \tau') G(d_i, \tau; b, \tau')) d\tau,$$

если $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$.

Таким образом, применительно к широкому классу линейных одномерных ОЗТ получены аналитические представления для исходных данных итерационных алгоритмов (8.3) и (8.4): для операторов A, порождаемых соответствующей постановкой обратной задачи, целевых функционалов — невязок, характеризующих степень близости расчетных и экспериментальных температур, и, наконец, градиентов этих функционалов. С использованием этих данных строятся итерационные процессы, дающие приближения в среднем к искомым величинам. Для граничных ОЗТ такие примеры были приведены в гл. 6.

Замечание 1. Изложенная методика может быть обобщена на обратные задачи в области с подвижными границами $Q_\tau = \{(x, \tau): X_1(\tau) < x < X_2(\tau), 0 < \tau < \tau_m\}$, если воспользоваться методом фиктивных границ (см. разд. 3.3), или построить соответствующие операторы A с помощью аппарата тепловых потенциалов.

Замечание 2. Рассмотренная выше схема построения градиента невязки в пространствах L_2 естественным образом обобщается и на многомерные ОЗТ. Например, если рассматривать обратную задачу из разд. 4.4, для которой интегральная запись через функцию Грина имеет вид (4.7), то в этом случае формула для градиента функционала $J[u] = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b (Au - \bar{f})^2 dx$, $u = q(x, \tau)$ запишется следующим образом:

$$J_u' = 2A^* e = \frac{a}{\lambda} \int_{\tau}^{\tau_m} d\xi \int_0^b e(x', \xi)\, G(x', y^*; x, 0; \xi - \tau)\, dx',$$

где $e = Au - \bar{f}$.

Замечание 3. При вычислении интегральных членов в формулах для градиентов может быть, в частности, использована ступенчатая аппроксимация, рассмотренная в разд. 4.1 и 4.4.

Замечание 4. Рассмотренным способом определения градиентов невязок удобно пользоваться в том случае, когда функция Грина задана аналитически. Если же функция Грина неизвестна и может быть построена только численно, целесообразно находить градиент другим, более общим способом — с помощью решения сопряженной краевой задачи (см. разд. 8.4).

Замечание 5. При решении обратных задач часто требуется учесть априорную информацию о гладкости искомых функций. Как будет показано в разд. 8.5, это достаточно просто сделать, осуществляя переход от известного градиента функционала в пространстве L_2 к градиенту этого функционала в пространстве W_2^l -функций, интегрируемых с квадратом вместе с производными до l-го порядка. В этом случае формулы (8.20), (8.25), (8.26), (8.28), (8.31), (8.34), определяющие градиенты в L_2 соответствующих функционалов (8.16), (8.21), (8.22), (8.27), (8.30), (8.32), (8.33), позволяют подготовить исходные данные для аналитического пересчета на градиенты в W_2^l.

8.3. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА НЕЛИНЕЙНЫХ ОЗТ. ЗАДАЧА ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Многие теплофизические процессы могут быть приближенно описаны обобщенным уравнением теплопроводности (1.1). В частности, такая модель используется при исследовании процессов теплопереноса и терморазложения различных материалов — древесины, торфа, угля, полимерных конструкционных и теплозащитных материалов; при анализе тепловых эффектов полимеризации органических смол, изучении теплообмена в пористых структурах. Основной предпосылкой получения уравнения (1.1) является допущение о равенстве температур твердого каркаса материала и заполняющей его поры газообразной или жидкой среды. В этом случае система уравнений энергии и теплопроводности, описывающая теплоперенос в такой двухфазной системе может быть сведена к одному уравнению вида (1.1).

В общем случае коэффициенты этого уравнения являются функциями температуры и времени, а также могут зависеть и от координаты x, например, если при изготовлении материала программируется соответствующее изменение свойств по толщине.

В зависимости от конкретного практического применения общий вид уравнения (1.1) может быть упрощен. Так, если процессы терморазложения при интенсивном нагреве материала происходят в весьма узком приповерхностном слое, можно пренебречь распределенным источником тепла S и фильтрационным членом $K\dfrac{\partial T}{\partial x}$ в уравнении, приняв модель поверхностного разрушения материала. Тогда получаем частный случай для уравнения (1.1) – классическое однородное уравнение теплопроводности. Переход к такой более простой модели переноса тепла может быть вызван и тем обстоятельством, что тепловые эффекты, связанные с внутренним терморазложением материала, могут быть в определенных ситуациях приближенно учтены выбором эффективных значений теплофизических характеристик материала.

В то же время, упрощение расчетных методик может быть сделано за счет исключения тех или иных факторов в рамках более общей обратной задачи для уравнения (1.1), к постановке которой мы и переходим.

В области с подвижными границами $Q_\tau = \{(x, \tau): X_1(\tau) \leqslant x \leqslant X_2(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m\}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$CT_\tau = (\lambda T_x)_x + KT_x + S, \quad (x, \tau) \in Q_\tau; \tag{8.35}$$

$$T(x, 0) = \xi(x); \tag{8.36}$$

$$[\alpha_i \lambda T_x + \beta_i T]_{x = X_i(\tau)} = p_i(\tau), \quad i = 1, 2. \tag{8.37}$$

Здесь числа α_i, β_i определяют тот или иной вид граничных условий. При $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ получим условия первого рода, при $\alpha_i = -1$, $\beta_i = 0$ – второго рода. Если $\alpha_i = 1$, $\beta_i = h_i$, $p_i(\tau) = h_i T^*(\tau)$ (где $h_i = \text{const}$ – коэффициент теплоотдачи, $T^*(\tau)$ – температура окружающей среды), имеем условия третьего рода. Возможна также любая комбинация условий на границах.

Кривые $X_1(\tau)$ и $X_2(\tau)$ будем считать кусочно-гладкими функциями на отрезке $[0, \tau_m]$.

При решении обратных задач для уравнения (8.35) в качестве искомой величины выступает одна или несколько функций из совокупности $u = \{C(T), \lambda(T), K(T), S(T), \xi(x), p_1(\tau), p_2(\tau)\}$, причем, если определяются $\xi(x), p_1(\tau), p_2(\tau)$, т.е. решаются ретроспективная, граничная или гранично-ретроспективная задачи, то коэффициенты и свободный член уравнения теплопроводности будем в общем случае считать известными зависимостями от $\{T(x, \tau), x, \tau: C(T, x, \tau), \lambda(T, x, \tau), K(T, x, \tau), S(T, x, \tau)\}$.

Примем, что в качестве дополнительных условий известны зависимости температуры от времени, соответствующие некоторому числу N несовпадающих между собой и непересекающихся внутренних точек области $\Omega = \{X_1(\tau) \leqslant x \leqslant X_2(\tau)\}$, причем для граничных условий

второго и третьего родов две измерительные точки из числа N могут лежать на границах $X_1(\tau)$ и $X_2(\tau)$ соответственно.

Анализ вопроса единственности решения рассматриваемых ОЗТ выходит за рамки данной книги. В работах [9, 29, 33, 42, 47, 55, 57, 70, 104, 116] получены условия, при которых имеет место единственность решения близких по постановкам обратных задач. Основываясь на этих результатах, а также на данных численного моделирования, можно утверждать следующее. Для однозначного определения любой из функций $C(T)$, $\lambda(T)$, $K(T)$, $S(T)$ необходимо иметь минимальное число измерительных точек $N_{\min} = 1$. При определении любого набора этих функций, когда заданы граничные условия второго или третьего родов, причем хотя бы одно из этих условий ненулевое, $N_{\min}$ должно быть равно числу искомых функций. Что касается необходимых чисел измерения в ретроспективной, граничной и гранично-ретроспективной задачах, то эти данные тождественны данным для линейных ОЗТ (см. разд. 8.2).

Итак, имеем ту или иную постановку обратной задачи

$$Au = f$$

с нелинейным оператором A, порождаемым условиями (8.35) – (8.37). Правая часть f представляет собой вектор-функцию температурных измерений.

Для решения нелинейных ОЗТ, как уже было показано в гл. 6, можно с успехом использовать градиентные методы, регуляризованные по числу итераций. При этом вычисление градиента функционала-невязки

$$J[u] = \|Au - f\|_F^2 \tag{8.38}$$

для граничных ОЗТ в пространстве $F = L_2$ основывалось на решении соответствующих сопряженных задач, постановки которых в гл. 6 были даны без вывода.

Ниже мы остановимся на более строгом рассмотрении вопроса нахождения градиента J_u' применительно к сформулированным обратным задачам с изложением методики получения условий для сопряженных краевых задач.

Для дифференцируемого по Фреше оператора A имеет место формула

$$J_u' = 2(A')^*(Au - f), \quad . \tag{8.39}$$

где A' – производная Фреше оператора A; $(A')^*$ – оператор, сопряженный с A'.

Напомним, что оператор A, действующий из нормированного пространства U в нормированное пространство F, называется дифференцируемым по Фреше в точке u, если существует линейный непрерывный оператор $A'(u)$, действующий из U в F и такой, что

$$A(u + \Delta u) - A(u) = A'(u)\Delta u + \omega(u, \Delta u), \tag{8.40}$$

где $\lim\limits_{\|\Delta u\|\to 0} \dfrac{\|\omega(u, \Delta u)\|}{\|\Delta u\|} = 0.$ (8.41)

Оператор $A'(u)$ называется производной Фреше оператора A в точке u.

Чтобы получить выражение (8.39) поступим следующим образом. Дадим приращение вектор-функции u и получим соответствующее изменение функционала:

$$\Delta J \equiv J(u + \Delta u) - J(u) = \|A(u + \Delta u) - f\|^2 - \|Au - f\|^2.$$

С учетом известных равенств $(\theta + \varphi, z) = (\theta, z) + (\varphi, z)$, $\|\theta \pm \varphi\|^2 = \|\theta\|^2 \pm 2(\theta, \varphi) + \|\varphi\|^2$, где θ, φ, z — некоторые элементы из гильбертова пространства F и, привлекая формулу (8.40), после несложных преобразований имеем

$$\Delta J = 2(Au - f, A'\Delta u) + \eta(u, \Delta u),$$

где $\eta(u, \Delta u) = 2(Au - f, \omega) + \|A'\Delta u + \omega\|^2$.

Используя неравенство Коши—Буняковского $|(Au - f, \omega)| \leqslant \|Au - f\| \cdot \|\omega\|$ и равенство $\|A'\Delta u + \omega\|^2 = \|A'\Delta u\|^2 + 2(A'\Delta u, \omega) + \|\omega\|^2$, а также условие (8.41),

$$\lim_{\|\Delta u\|\to 0} \frac{\eta(u, \Delta u)}{\|\Delta u\|} = 0. \qquad (8.42)$$

Вводя сопряженный оператор $(A')^*$, получим

$$\Delta J = 2((A')^*(Au - f), \Delta u)) + \eta(u, \Delta u). \qquad (8.43)$$

По определению градиента J'_u имеем

$$\Delta J = (J'_u, \Delta u) + \eta(u, \Delta u), \qquad (8.44)$$

где η отвечает условию (8.42).

Сравнивая (8.43) и (8.44) получим формулу (8.39).

Таким образом, задача построения градиента разделяется на задачу построения оператора A' и задачу определения сопряженного оператора $(A')^*$. Для этого нам потребуются две вспомогательные краевые задачи — *задача для приращения поля* $T(x, \tau)$ и *сопряженная с ней задача.*

Задача для приращения поля температуры

Пусть компоненты u получили приращения $C(T) + \Delta C(T)$, $\lambda(T) + \Delta\lambda(T)$, $K(T) + \Delta K(T)$, $S(T) + \Delta S(T)$, $\xi(x) + \Delta\xi(x)$, $p_1(\tau) + \Delta p_1(\tau)$, $p_2(\tau) + \Delta p_2(\tau)$.

Этой новой совокупности данных будет соответствовать функция $T(x, \tau) + v(x, \tau)$ и система (8.35) — (8.37) запишется в виде

$$[C(T + v) + \Delta C(T + v)][T + v]_\tau = \{[\lambda(T + v) + \Delta\lambda(T + v)][T + v]_x\}_x +$$
$$+ [K(T + v) + \Delta K(T + v)][T + v]_x + S(T + v) + \Delta S(T + v),$$
$$(x, \tau) \in Q_\tau; \qquad (8.45)$$

$$T(x, 0) + \mathrm{v}(x, 0) = \xi(x) + \Delta\xi(x); \tag{8.46}$$

$$\left\{\alpha_i[\lambda(T + \mathrm{v}) + \Delta\lambda(T + \mathrm{v})][T + \mathrm{v}]_x + \beta_i[T + \mathrm{v}]\right\}_{x = X_i(\tau)} =$$

$$= p_i(\tau) + \Delta p_i(\tau), \quad i = 1, 2. \tag{8.47}$$

Здесь зависимости величин C, λ, K, S от x и τ, которые могут иметь место при решении ретроспективной и граничной обратных задач, условно не указаны.

Вычтем из условий (8.45) — (8.47) соответствующие условия (8.35) — (8.37) и используем для величин $C(T + \mathrm{v})$, $\lambda(T + \mathrm{v})$, $K(T + \mathrm{v})$, $S(T + \mathrm{v})$ разложение в ряд Тейлора с удержанием первых двух членов, а для величин $\Delta C(T + \mathrm{v})$, $\Delta\lambda(T + \mathrm{v})$, $\Delta K(T + \mathrm{v})$, $\Delta S(T + \mathrm{v})$ разложение в ряд Тейлора с удержанием первого члена. Кроме того, примем во внимание, что коэффициенты C, λ, K, S в прямой задаче (8.35) — (8.37) — это известные функции температуры $T(x, \tau)$, которая при рассмотрении условий для приращения $\mathrm{v}(x, \tau)$ считается заданной. Поэтому ниже эти коэффициенты являются известными функциями только независимых переменных x и τ. В результате после некоторых преобразований получим следующую постановку задачи для определения величины $\mathrm{v}(x, \tau)$:

$$\mathrm{v}_\tau = a_1 \mathrm{v}_{xx} + a_2 \mathrm{v}_x + a_3 \mathrm{v} + q + \omega, \quad (x, \tau) \in Q_\tau; \tag{8.48}$$

$$\mathrm{v}(x, 0) = \Delta\xi; \tag{8.49}$$

$$B_{i\tau}\mathrm{v}(X_i(\tau), \tau) \equiv [\gamma_i \mathrm{v}_x + \sigma_i \mathrm{v}]_{x = X_i(\tau)} = \eta_i + \omega_i, \tag{8.50}$$

$$i = 1, 2,$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda}{C}, \quad a_2 = \frac{1}{C}(2\lambda_x + K), \quad a_3 = \frac{1}{C}(\lambda_{xx} + S_T + K_x - C_\tau);$$

$$q = \frac{1}{C}\left[\Delta\lambda T_{xx} + (\Delta\lambda)_x T_x + \Delta K T_x + \Delta S - \Delta C T_\tau\right];$$

$$\gamma_i = \alpha_i \lambda(X_i(\tau), \tau), \quad \sigma_i = \alpha_i \lambda_x(X_i(\tau), \tau) + \beta_i;$$

$$\eta_i = \Delta p_i(\tau) - \alpha_i \Delta\lambda(X_i(\tau), \tau) T_x(X_i(\tau), \tau);$$

ω, ω_1, ω_2 — остаточные члены (если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то $\omega_1 = \omega_2 = 0$).

С помощью замены $y = \dfrac{x - X_1(\tau)}{X_2(\tau) - X_1(\tau)}$, $t = \tau$ трансформируем область Q_τ в прямоугольную $R = (0,1) \times (0, \tau_m)$. При этом величины $a_i(x, \tau)$ и $q(x, \tau)$ преобразуются соответственно в $\bar{a}_i(y, t)$ и $\bar{q}(y, t)$, а постановка (8.48) — (8.50) примет вид

$$\mathrm{v}_t = b_1 \mathrm{v}_{yy} + b_2 \mathrm{v}_y + b_3 \mathrm{v} + \bar{q} + \bar{\omega}, \quad (y, t) \in R; \tag{8.51}$$

$$\mathrm{v}(y, 0) = \Delta\bar{\xi}(y); \tag{8.52}$$

$$B_{1t}\mathrm{v}(0,t) \equiv [l_1 \mathrm{v}_y + \sigma_1 \mathrm{v}]_{y=0} = \eta_1(t) + \bar{\omega}_1; \tag{8.53}$$

$$B_{2t}\mathrm{v}(1,t) \equiv [l_2 \mathrm{v}_y + \sigma_2 \mathrm{v}]_{y=1} = \eta_2(t) + \bar{\omega}_2, \tag{8.54}$$

где $b_1 = \dfrac{\bar{a}_1(y,t)}{[X_2(t) - X_1(t)]^2}$;

$$b_2 = \frac{1}{X_2(t) - X_1(t)} \left\{ \bar{a}_2(y,t) + X_1'(t) + y[X_2'(t) - X_1'(t)] \right\},$$

$\left(X_i' \equiv \dfrac{dX_i}{dt}\right)$; $b_3 = \bar{a}_3(y,t)$; $l_1 = \dfrac{\gamma_1(t)}{X_2(t) - X_1(t)}$;

$$l_2 = \frac{\gamma_2(t)}{X_2(t) - X_1(t)}.$$

Таким образом, если исключить $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, т.е. перейти к линейному приближению краевой задачи для приращения $\mathrm{v}(y, t)$, система (8.51) – (8.54) будет аналогична постановке (8.8) – (8.11) в разд. 8.2. Более того, с помощью результатов работы [56] можно показать, что задача, получаемая из (8.48) – (8.50) и соответственно (8.51) – (8.54) отбрасыванием нелинейных членов, представляет собой производную Фреше A' оператора A, ставящего в соответствие искомым величинам функцию $T(d(\tau), \tau)$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $C(T)$, $K(T)$, $S(T)$ были дважды, а $\lambda(T)$ – трижды непрерывно дифференцируемыми функциями;

$$p_1, p_2 \in W_2^1[0, \tau_m]; \quad \xi \in W_2^1[X_1(0), X_2(0)]^*$$

и выполнялись условия согласования начального и граничных условий.

В дальнейшем будем считать, что в задачах (8.48) – (8.50) и (8.51) – (8.54) нелинейные члены отброшены.

Методику получения постановки задачи, сопряженной с задачей для приращения температуры, изложим на примере граничных условий второго и третьего родов ($\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$). Соответствующие результаты для условий первого рода могут быть получены по той же схеме и будут приведены без промежуточных выкладок.

Для вывода сопряженной краевой задачи нам потребуется привести постановку (8.51) – (8.54) к нулевым краевым условиям, т.е. к виду

$$\mathrm{v}_t = b_1 \mathrm{v}_{yy} + b_2 \mathrm{v}_y + b_3 \mathrm{v} + \bar{q} + \bar{z}, \quad (y,t) \in R; \tag{8.55}$$

$$\mathrm{v}(y, 0) = 0; \tag{8.56}$$

$$[l_1 \mathrm{v}_y + \sigma_1 \mathrm{v}]_{y=0} = 0; \tag{8.57}$$

$$[l_2 \mathrm{v}_y + \sigma_2 \mathrm{v}]_{y=1} = 0. \tag{8.58}$$

---

*Известно, что $W_2^1 \subset L_2$.

Для определения функции $\bar{z} = \bar{z}(y, t)$ запишем решения задач (8.51) – (8.54) и (8.55) – (8.58) через функцию Грина (см. формулу (8.13)) и приравняем их:

$$\int_0^1 \Delta\bar{\xi}(y')\, G(y, t; y', 0)\, dy' - \int_0^t \frac{b_1(0, t')}{l_1(t')}\, \Delta p_1(t') \cdot G(y, t; 0, t')\, dt' +$$

$$+ \int_0^t \frac{b_1(1, t')}{l_2(t')}\, \Delta p_2(t')\, G(y, t; 1, t')\, dt' =$$

$$= \int_0^t dt' \int_0^1 \bar{z}(y', t')\, G(y, t; y', t')\, dy'.$$

Откуда

$$\bar{z}(y, t) = -\frac{b_1(y, t)}{l_1(t)}\, \eta_1(t)\, \delta(y) + \frac{b_1(y, t)}{l_2(t)}\, \eta_2(t)\, \delta(y - 1) +$$

$$+ \Delta\bar{\xi}(x)\, \delta(t),$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

При такой функции $\bar{z}(y, t)$ задача (8.55) – (8.58) будет тождественна задаче (8.51) – (8.54), а следовательно, и задаче (8.48) – (8.50). Выполняя в (8.55) – (8.58) обратный переход (от y, t к x, τ), получим (с учетом свойства δ-функции: $\delta(a\zeta) = \frac{1}{|a|}\, \delta(\zeta)$, где $a \neq 0$ – действительное число) постановку, равносильную (8.48) – (8.50):

$$\mathrm{v}_\tau = a_1\, \mathrm{v}_{xx} + a_2\, \mathrm{v}_x + a_3\, \mathrm{v} + q + z, \quad (x, \tau) \in Q_\tau; \tag{8.59}$$

$$\mathrm{v}(x, 0) = 0; \tag{8.60}$$

$$B_{i\tau}\, \mathrm{v}(X_i(\tau), \tau) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{8.61}$$

где

$$z(x, \tau) = -\frac{a_1}{\gamma_1}\, \eta_1\, \delta(x - X_1(\tau)) + \frac{a_1}{\gamma_2}\, \eta_2\, \delta(x - X_2(\tau)) + \Delta\xi\, \delta(\tau).$$

8.4. СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА

8.4.1. СЛУЧАЙ ОДНОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Постановка сопряженной краевой задачи зависит от числа измерительных точек N. Пусть $N = 1$. В точке $x = d(\tau)$ (рис. 8.2), перемещающейся с течением времени, известна зависимость $f(\tau) = T(d(\tau), \tau)$. Координата этой точки отвечает условиям: $X_1(\tau) \leqslant d(\tau)$ при $\alpha_1 \neq 0$,

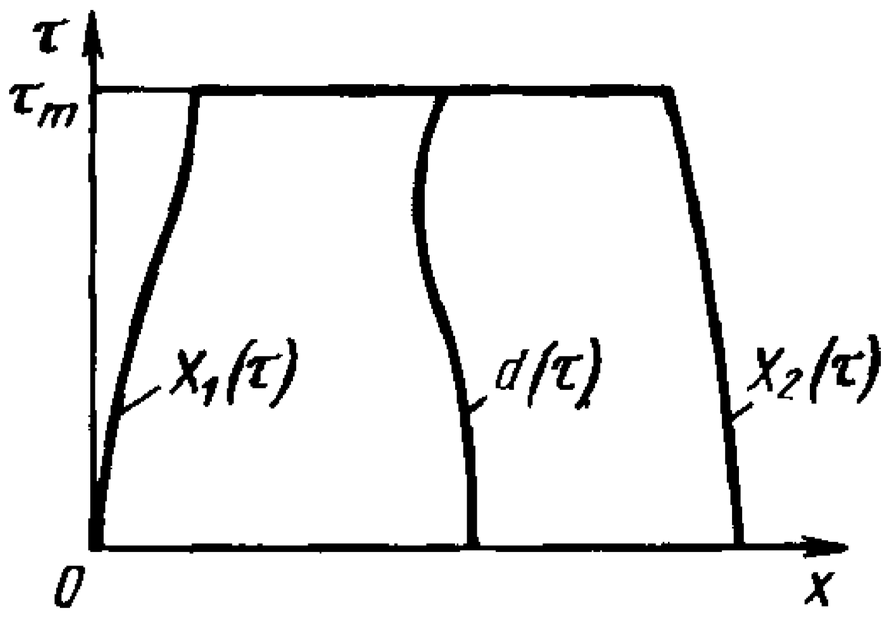


Рис. 8.2. Область с подвижными границами и перемещающейся координатой термодатчика

$X_1(\tau) < d(\tau)$ при $\alpha_1 = 0$, $d(\tau) \leqslant X_2(\tau)$ при $\alpha_2 \neq 0$, $d(\tau) < X_2(\tau)$ при $\alpha_2 = 0$.

Кривая $d(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_m]$, так же как $X_1(\tau)$ или $X_2(\tau)$, будет считаться кусочно-гладкой функцией.

В рассматриваемом случае оператор A ставит в соответствие искомой величине u температуру в точке $d(\tau)$, т.е. $Au = T(u, d(\tau), \tau)$. Введем целевой функционал

$$J(u) = \int_0^{\tau_m} [T(u, d(\tau), \tau) - f(\tau)]^2 \, d\tau. \tag{8.62}$$

Поскольку искомой функцией может быть любая компонента векторной величины $u = \{\lambda(T), C(T), K(T), S(T), \xi(x), p_1(\tau), p_2(\tau)\}$, найдем градиент $J[u]$ по этой вектор-функции. При этом будем полагать, что $\xi \in L_2[X_1(0), X_2(0)]$; $p_1, p_2, f \in L_2[0, \tau_m]$; $\lambda, C, K, S \in L_2[T_0, T_M]$, где T_0, T_M – границы области по температуре, в которой отыскиваются коэффициенты или источник уравнения (8.35).

Полагая, что $L = \dfrac{\partial}{\partial \tau} - D_{x\tau}$, $D_{x\tau} = a_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \dfrac{\partial}{\partial x} + a_3$, $\chi = q - a_1 \dfrac{\eta_1}{\gamma_1} \delta(x - X_1(\tau)) + a_1 \dfrac{\eta_2}{\gamma_2} \delta(x - X_2(\tau)) + \Delta\xi\delta(\tau)$, перепишем линейное приближение к задаче (8.59) – (8.61) в форме

$$L\mathrm{v} = \chi, \quad \mathrm{v} \in D_L. \tag{8.63}$$

Здесь $D_L = \{\mathrm{v} \in G(Q_\tau)\colon B_{i\tau}\mathrm{v}(X_i(\tau), \tau) = 0, \ i = 1, 2; \ \mathrm{v}(x, 0) = 0\}$ – область определения оператора L; $G(Q_\tau)$ – множество функций $\mathrm{v} = \mathrm{v}(x, \tau)$, имеющих в Q_τ непрерывные производные v_τ, v_x, v_{xx}.

Рассматривая L как оператор, отображающий $D_L \subset L_2(Q_\tau)$ в пространство L_2, запишем скалярное произведение элементов $L\mathrm{v}$, $\psi \in L_2$:

$$(L\mathrm{v}, \psi) = \iint_{Q_\tau} \psi L\mathrm{v} \, dx \, d\tau,$$

где $\psi = \psi(x, \tau)$ – некоторая достаточно гладкая в $\bar{Q}_\tau$ функция.

Определим сопряженный оператор L^* в соответствии с тождеством Лагранжа

$$(L\mathrm{v}, \psi) = (\mathrm{v}, L^*\psi) \tag{8.64}$$

и раскроем скалярное произведение слева следующим образом:

$$\iint\limits_{Q_\tau} \psi L v dx d\tau = \iint\limits_{Q_\tau} \psi(v_\tau - a_1 v_{xx} - a_2 v_x - a_3 v) dx d\tau = I_1 - I_2,$$

где

$$I_1 = \iint\limits_{Q_\tau} [-v\psi_\tau + (a_1\psi)_x v_x + (a_2\psi)_x v - a_3 \psi v] dx d\tau;$$

$$I_2 = \iint\limits_{Q_\tau} [(a_1 \psi v_x + a_2 \psi v)_x - (\psi v)_\tau] dx d\tau.$$

Для дальнейшего нам понадобятся формулы интегрирования по частям [56], которые в нашем случае имеют вид

$$\iint\limits_{Q_\tau} \theta_x \varphi dx d\tau = -\iint\limits_{Q_\tau} \theta \varphi_x dx d\tau + \int\limits_{\partial Q_\tau^+} \theta \varphi d\tau; \quad \theta, \varphi \in W_2^{1,0}(Q_\tau);$$

$$\iint\limits_{Q_\tau} \theta_\tau \varphi dx d\tau = -\iint\limits_{Q_\tau} \theta \varphi_\tau dx d\tau - \int\limits_{\partial Q_\tau^+} \theta \varphi dx; \quad \theta, \varphi \in W_2^1(Q_\tau),$$

где ∂Q_τ^+ – граница области Q_τ, ориентированная так, чтобы при ее обходе область оставалась слева; $W_2^{1,0}(Q_\tau)$ – класс функций $\theta(x, \tau)$ пространства $L_2(Q_\tau)$, имеющих квадратично суммируемую по Q_τ обобщенную производную θ_x; $W_2^1(Q_\tau)$ – класс функций $\theta(x, \tau)$ пространства $L_2(Q_\tau)$, имеющих обобщенные производные θ_x, θ_τ.

В нашем случае

$$\int\limits_{\partial Q_\tau^+} \theta \varphi d\tau = \int\limits_0^{\tau_m} \theta \varphi|_{x = X_2(\tau)} d\tau - \int\limits_0^{\tau_m} \theta \varphi|_{x = X_1(\tau)} d\tau,$$

$$\int\limits_{\partial Q_\tau^+} \theta \varphi dx = \int\limits_0^{\tau_m} \theta \varphi|_{x = X_2(\tau)} \cdot X_2'(\tau) d\tau - \int\limits_{X_1(\tau_m)}^{X_2(\tau_m)} \theta \varphi|_{\tau = \tau_m} dx -$$

$$- \int\limits_0^{\tau_m} \theta \varphi|_{x = X_1(\tau)} \cdot X_1'(\tau) d\tau + \int\limits_{X_1(0)}^{X_2(0)} \theta \varphi|_{\tau = 0} dx.$$

Тогда

$$\iint\limits_{Q_\tau} (a_1 \psi)_x v_x dx d\tau = -\iint\limits_{Q_\tau} (a_1 \psi)_{xx} v dx d\tau + \int\limits_0^{\tau_m} (a_1 \psi)_x v|_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} d\tau.$$

Таким образом,

$$I_1 = \iint\limits_{Q_\tau} v[-\psi_\tau - (a_1\psi)_{xx} + (a_2\psi)_x - a_3\psi] dx d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_m} v(a_1\psi)_x|_{x = X_1(\tau)}^{x = X_2(\tau)} d\tau.$$

С помощью тех же формул интегрирования по частям для интеграла I_2 имеем

$$I_2 = \int_0^{\tau_m} (a_1 \psi \mathrm{v}_x + a_2 \psi \mathrm{v}) \Big|_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} d\tau - \int_0^{\tau_m} \psi \mathrm{v}|_{x=X_2(\tau)} X_2'(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\tau_m} \psi \mathrm{v}|_{x=X_1(\tau)} X_1'(\tau) d\tau + \int_{X_1(\tau_m)}^{X_2(\tau_m)} \psi \mathrm{v}|_{\tau=\tau_m} dx - \int_{X_1(0)}^{X_2(0)} \psi \mathrm{v}|_{\tau=0} dx.$$

Последний интеграл равен нулю, так как $\mathrm{v}(x, 0) = 0$.

Привлекая граничные условия (8.61), запишем для I_2 окончательное выражение:

$$I_2 = \int_0^{\tau_m} \left\{ \mathrm{v}\psi [X_2' + a_2 - \frac{\sigma_2}{\gamma_2} a_1]_{x=X_2(\tau)} - \mathrm{v}\psi [X_1' + a_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma_1}{\gamma_1} a_1]_{x=X_1(\tau)} \right\} d\tau + \int_{X_1(\tau_m)}^{X_2(\tau_m)} \psi(x, \tau_m)\, \mathrm{v}(x, \tau_m) dx.$$

Обращаясь к тождеству (8.64), получим, что функция $\psi(x, \tau)$ должна удовлетворять условиям следующей краевой задачи, сопряженной с задачей (8.59) – (8.61):

$$L^* \psi(x, \tau) = \zeta(x, \tau), \quad (x, \tau) \in Q_\tau; \tag{8.65}$$

$$\psi(x, \tau_m) = 0; \tag{8.66}$$

$$B_{i\tau}^* \psi|_{x=X_i(\tau)} \equiv [(a_1 \psi)_x - \psi(X_i' + a_2 - \frac{\sigma_i}{\gamma_i} a_1)]_{x=X_i(\tau)} = 0, \tag{8.67}$$

$$i = 1, 2,$$

где

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial \tau} - D_{x\tau}^*, \quad D_{x\tau}^* \psi = (a_1 \psi)_{xx} - (a_2 \psi)_x + a_3 \psi.$$

Функция $\zeta(x, \tau)$ будет найдена ниже.

8.4.2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ФУНКЦИОНАЛА-НЕВЯЗКИ

Перепишем задачу (8.65) – (8.67) в форме, аналогичной (8.63),

$$L^* \psi = \zeta, \quad \psi \in D_{L^*},$$

где

$$D_{L^*} = \left\{ \psi \in G(Q_\tau): B_{i\tau}^* \psi|_{x=X_i(\tau)} = 0, \ i = 1, 2; \ \psi(x, \tau_m) = 0 \right\}.$$

Пусть L^{-1} и L^{*-1} – операторы, обратные к L и L^* соответственно.

Запишем скалярное произведение для элементов v и ψ

$$(\mathrm{v}, \psi) = (LL^{-1}\,\mathrm{v}, \psi) = (L^{-1}\,\mathrm{v}, L^*\psi) = (\mathrm{v}, L^{-1} * L^*\psi).$$

Отсюда следует, что $L^{-1} * L^* = I$ в D_{L^*} (I – единичный оператор). Таким образом,

$$L^{-1} * = L^{*-1}. \tag{8.68}$$

Приращение функционала (8.62) имеет вид

$$\Delta J \equiv J(u + \Delta u) - J(u) = 2(Au - f,\ A'\Delta u) + o(\|\Delta u\|) =$$

$$= 2\int_0^{\tau_m} [T(u, d(\tau), \tau) - f(\tau)]\,\mathrm{v}(d(\tau), \tau)d\tau + o(\|\Delta u\|).$$

Представим ΔJ через δ-функцию в виде

$$\Delta J = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} \mathrm{v}(x, \tau)\,2e(\tau)\delta(x - d(\tau))dx + o(\|\Delta u\|),$$

где $e(\tau) = T(u, d(\tau), \tau) - f(\tau)$.

Замечая, что $\mathrm{v}(x, \tau) = L^{-1}\chi$ и вводя сопряженный оператор, получим

$$\Delta J = \iint_{Q_\tau} L^{-1}\chi \cdot 2e(\tau)\delta(x - d(\tau))\,dx d\tau + o(\|\Delta u\|) =$$

$$= (\chi, L^{-1} * [2e(\tau)\delta(x - d(\tau))]) + o(\|\Delta u\|). \tag{8.69}$$

Поскольку имеет место равенство (8.68), то

$$L^{-1} * [2e(\tau)\delta(x - d(\tau))] = \psi,$$

где $\psi = \psi(x, \tau)$ – является решением задачи (8.65) – (8.67), в которой $\zeta(x, \tau) = 2e(\tau)\delta(x - d(\tau))$.

Раскрывая в (8.69) функцию χ, получим

$$\Delta J = (\psi, q - \frac{a_1}{\gamma_1}\eta_1\delta(x - X_1) + \frac{a_1}{\gamma_2}\eta_2\delta(x - X_2) + \Delta\xi\delta(\tau)) +$$

$$+ o(\|\Delta u\|). \tag{8 70}$$

Установление связи между прямой и сопряженной задачами, что в конечном итоге приводит к получению формулы (8 70), также нуждается в строгом обосновании, прежде всего, в плане применимости формул интегрирования по частям, которые предъявляют к подынтегральным выражениям требования определенной гладкости Условия на исходные данные прямой задачи, при которых обеспечивается требуемая гладкость решении прямой и сопряженной задач можно получить с помощью результатов работы [44]. Можно показать, что достаточно потребовать выполнения условий, обеспечивающих дифференцируемость оператора прямой задачи.

Перепишем (8.70) в виде

$$\Delta J = (\Phi, \Delta u) + o(\| \Delta u \|).$$

При этом, очевидно $\Phi = J'_u$.

Для получения компоненты градиента J'_{u_n} по отдельной составляющей u_n вектора u нужно в формуле (8.70) обнулить все составляющие вектора u, кроме требуемой. Тогда из (8.70) получаем представление вида

$$\Delta J = (\Phi_{u_n}, \Delta u_n) + o(\| \Delta u_n \|), \text{ т.е. } \Phi_{u_n} = J'_{u_n}.$$

Таким образом, из выражения (8.70) следуют формулы для компонентов градиента по ξ, p_1, p_2:

$$J'_\xi = \psi(x, 0),$$

$$J'_{p_1} = -\psi(X_1(\tau), \tau)\, \frac{a_1(X_1(\tau), \tau)}{\gamma_1(\tau)}, \quad J'_{p_2} = \psi(X_2(\tau), \tau)\, \frac{a_1(X_2(\tau), \tau)}{\gamma_2(\tau)}.$$

Определение компонентов градиента $J'_\lambda, J'_C, J'_K, J'_S$ является значительно более громоздкой задачей. С целью ее упрощения будем искать коэффициенты и свободный член уравнения (8.35) в параметризованной форме

$$\lambda(T) = \sum_{j=1}^{M_1} \lambda_j \varphi_j(T); \quad C(T) = \sum_{j=1}^{M_2} C_j \varphi_j(T);$$

$$K(T) = \sum_{j=1}^{M_3} K_j \varphi_j(T); \quad S(T) = \sum_{j=1}^{M_4} S_j \varphi_j(T),$$

где $\{\varphi_j\}_1^M$ — заданная система базисных функций; λ_j, C_j, K_j, S_j — подлежащие определению числовые коэффициенты.

Аналогичным образом запишутся приращения этих функций

$$\Delta\lambda(T) = \sum_{j=1}^{M_1} \Delta\lambda_j \varphi_j(T), \quad \Delta C(T) = \sum_{j=1}^{M_2} \Delta C_j \varphi_j(T), \tag{8.71}$$

$$\Delta K(T) = \sum_{j=1}^{M_3} \Delta K_j \varphi_j(T), \quad \Delta S(T) = \sum_{j=1}^{M_4} \Delta S_j \varphi_j(T). \tag{8.72}$$

Раскрывая в формуле (8.70) величины q и η_i с учетом аппроксимаций (8.71), (8.72) и, выполняя несложные преобразования, получим формулы для градиентов функционала (8.62) соответственно по векторам $\lambda = \{\lambda_j\}_1^{M_1}$, $\mathbf{C} = \{C_j\}_1^{M_2}$, $\mathbf{K} = \{K_j\}_1^{M_3}$, $\mathbf{S} = \{S_j\}_1^{M_4}$:

$$J'_{\lambda_l} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \quad l = \overline{1, M_1},$$

где

$$\Phi_0 = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} \frac{\psi(x, \tau)}{C(x, \tau)} [T_{xx}(x, \tau)\varphi_l(T(x, \tau)) +$$

$$+ T_x^2(x, \tau)\varphi'_l(T(x, \tau))]\, dx;$$

$$\Phi_i = \int_0^{\tau_m} \frac{\psi(x, \tau)}{C(x, \tau)} T_x(x, \tau)\varphi_l(T(x, \tau))|_{x=X_i(\tau)}\, d\tau, \quad i = 1, 2;$$

$$J'_{C_l} = -\int_0^{\tau_m} d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} \frac{\psi(x, \tau)}{C(x, \tau)} T_\tau(x, \tau)\varphi_l(T(x, \tau))\, dx, \quad l = \overline{1, M_2};$$

$$J'_{k_l} = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} \frac{\psi(x, \tau)}{C(x, \tau)} T_x(x, \tau)\varphi_l(T(x, \tau))\, dx, \quad l = \overline{1, M_3};$$

$$J'_{S_l} = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{X_1(\tau)}^{X_2(\tau)} \frac{\psi(x, \tau)}{C(x, \tau)} \varphi_l(T(x, \tau))\, dx, \quad l = \overline{1, M_4}.$$

8.4.3. ПРИВЕДЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ К ФОРМЕ, УДОБНОЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для проведения расчетов задачу (8.65) – (8.67), где $\zeta(x, \tau) = 2e(\tau)\delta(x - d(\tau))$, следует привести к форме, в которой отсутствует сингулярный член.

Полагая, вначале, $X_1(\tau) < d(\tau) < X_2(\tau)$, введем функцию

$$\Psi(x, \tau) = \begin{cases} \psi_1(x, \tau), & x \in (X_1(\tau), d(\tau)), \\ \psi_2(x, \tau), & x \in (d(\tau), X_2(\tau)) \end{cases}$$

и покажем, что системе (8.65) – (8.67) эквивалентна следующая задача:

$$-\psi_{1\tau} - D^*_{x\tau}\psi_1 = 0, \quad (x, \tau) \in Q_{1\tau} = \{X_1(\tau) < x < d(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_m\}; \tag{8.73}$$

$$-\psi_{2\tau} - D^*_{x\tau}\psi_2 = 0, \quad (x, \tau) \in Q_{2\tau} = \{d(\tau) < x < X_2(\tau),$$

$$0 < \tau < \tau_m\}; \tag{8.74}$$

$$B^*_{1\tau}\Psi|_{x=X_1(\tau)} = B^*_{2\tau}\Psi|_{x=X_2(\tau)} = 0;$$

$$\psi_1(d(\tau),\tau)-\psi_2(d(\tau),\tau)=0; \tag{8.75}$$

$$[(a_1\psi_1)_x-(a_1\psi_2)_x]_{x=d(\tau)}=2e(\tau); \tag{8.76}$$

$$\Psi(x,\tau_m)=0.$$

Решением задачи (8.65) – (8.67) будет обобщенная функция $\psi(x,\tau)$, $(x,\tau)\in Q_\tau$, удовлетворяющая системе (8.65) – (8.67) в обобщенном смысле, т.е.

$$\psi\in\Gamma:(\varphi,L^*\psi)=(\varphi,2e(\tau)\delta(x-d(\tau))),$$

где Г – множество обобщенных функций, удовлетворяющих начальному и граничным условиям (8.66), (8.67); $\varphi=\varphi(x,\tau)$ – основная функция, под которой в дальнейшем понимается вещественная функция, непрерывная вместе со своими производными φ_τ, φ_x, φ_{xx}, финитная в области Q_τ; (φ, p) – значение обобщенной функции p на основной функции φ.

Условия, обеспечивающие дифференцируемость оператора A прямой задачи (см. разд 8.3), гарантируют непрерывность коэффициентов оператора L^* и их соответствующих производных в области Q_τ. Поэтому дифференцируя $(a_1\Psi)_x$ как обобщенную функцию, имеем в силу (8.76)

$$(a_1\Psi)_{xx}=\{(a_1\Psi)_{xx}\}-2e(\tau)\delta(x-d(\tau)),$$

где

$$\{a_1\Psi_{xx}\}=\begin{cases}(a_1\psi_1)_{xx}, & x\in(X_1(\tau),\ d(\tau))\\ (a_1\psi_2)_{xx}, & x\in(d(\tau),\ X_2(\tau))\end{cases}-$$

– регулярная часть обобщенной производной $(a_1\Psi)_{xx}$.

Остальные производные Ψ_τ и $(a_2\Psi)_x$ сингулярных частей не имеют в силу условия (8.75) и непрерывности a_2.

Поэтому с учетом уравнений (8.73), (8.74) получаем, что $\Psi(x,\tau)$ удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению (8.65), что и требовалось показать.

Наконец, остановимся на постановке обратной задачи, когда точка $x=d(\tau)$, в которой задана функция $f(\tau)$, совпадает с одной из границ области Пусть, например, $d(\tau)=X_2(\tau)$. Поступая аналогичным образом, можно показать, что в этом случае сопряженная задача имеет вид

$$\psi_\tau+D^*_{x\tau}\psi=0,\quad (x,\tau)\in Q_\tau;$$

$$\psi(x,\tau_m)=0;$$

$$B^*_{1\tau}\psi|_{x=X_1(\tau)}=0;\quad B^*_{2\tau}\psi|_{x=X_2(\tau)}=2e(\tau)\ .$$

8.4.4. СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим обратную задачу для уравнения

$$CT_\tau = (\lambda T_x)_x + KT_x + S,$$

$$(x, \tau) \in Q_\tau = \left\{ d_0(\tau) < \tau < d_{N+1}(\tau), \quad 0 < \tau < \tau_m \right\} \tag{8.77}$$

при краевых условиях

$$T(x, 0) = \xi(x); \tag{8.78}$$

$$[\alpha_1 \lambda T_x + \beta_1 T]_{x = d_0(\tau)} = p_1(\tau); \tag{8.79}$$

$$[\alpha_2 \lambda T_x + \beta_2 T]_{x = d_{N+1}(\tau)} = p_2(\tau), \tag{8.80}$$

полагая, что

$$T(d_i(\tau), \tau) = f_i(\tau), \quad i = \overline{1, N}, \quad N \geqslant 1 - \text{известные} \tag{8.81}$$

зависимости, где $d_1 < d_2 < \ldots < d_N$ (рис. 8 3).

Искомой величиной может быть одна или несколько функций из совокупности $u = \{ \xi(x), p_1(\tau), p_2(\tau), \lambda(T), C(T), K(T), S(T) \}$. При определении $\xi(x)$ и (или) $p_n(\tau)$, $n = 1, 2$ считается, что $\lambda = \lambda(T, x, \tau)$, $C = C(T, x, \tau)$, $K = K(T, x, \tau)$, $S = S(T, x, \tau)$.

Условия задачи для приращения поля величины $T(x, \tau)$ будут тождественны условиям (8 48) – (8 50), при замене в них $X_1(\tau)$ и $X_2(\tau)$ соответственно на $d_0(\tau)$ и $d_{N+1}(\tau)$.

Составим функционал

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)[T(u, d_i(\tau), \tau) - f_i(\tau)]^2 \, d\tau, \tag{8.82}$$

где $\rho_i(\tau)$ – весовые коэффициенты (см. разд. 8.2).

Предположим, что $d_i(\tau)$, $i = \overline{0, N+1}$ – кусочно-гладкие функции. Рассмотрим вначале случай, когда $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и $d_0(\tau) < d_1(\tau)$, $d_N(\tau) < d_{N+1}(\tau)$

Следуя изложенной выше методике получения сопряженной краевой задачи и осуществляя преобразование к форме без сингулярного члена. придем к следующей постановке этой задачи:

$$\psi_{i\tau} + D^*_{x\tau} \psi_i = 0, \quad i = \overline{1, N+1}; \qquad (x, \tau) \in Q_\tau, \tag{8 83}$$

$$\psi_i(x, \tau_m) = 0, \quad i = \overline{1, N+1}; \tag{8 84}$$

$$\psi_i(d_i(\tau), \tau) - \psi_{i+1}(d_i(\tau), \tau) = 0, \quad i = \overline{1, N}; \tag{8 85}$$

$$[(a_1 \psi_i)_x - (a_1 \psi_{i+1})_x]_{x = d_i(\tau)} = 2\rho_i(\tau) e_i(\tau), \quad i = \overline{1, N}; \tag{8 86}$$

$$[(a_1 \psi_1)_x - \psi_1 (d_0' + a_2 - \frac{\sigma_1}{\gamma_1} a_1)]_{x = d_0(\tau)} = 0; \tag{8 87}$$

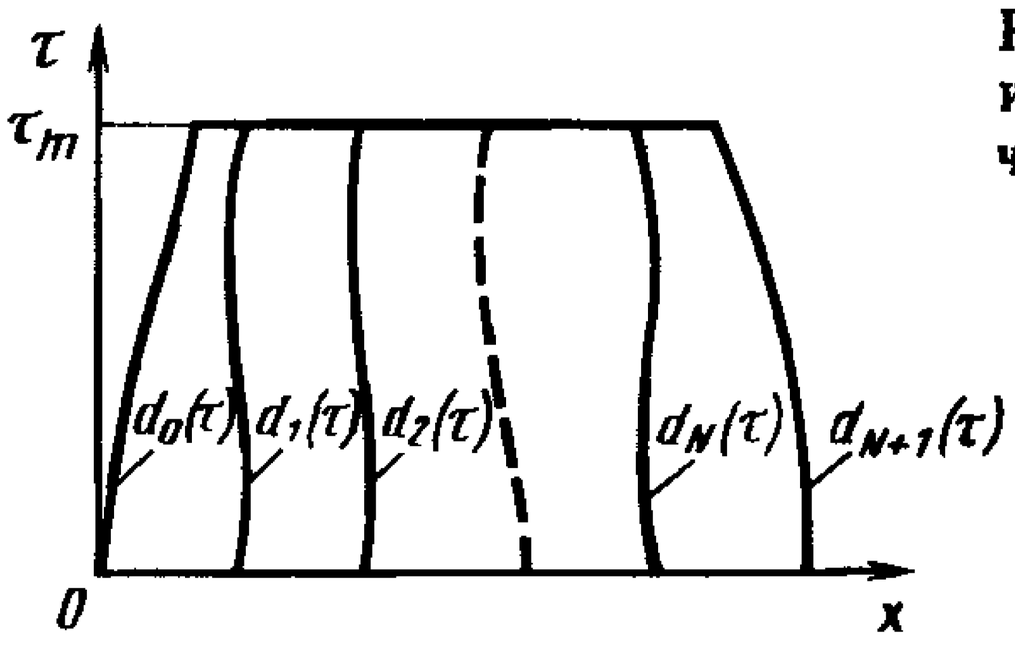


Рис. 8.3. Область с подвижными границами и перемещающимися координатами термодатчиков

$$[(a_1\psi_{N+1})_x - \psi_{N+1}(d'_{N+1} + a_2 - \frac{\sigma_2}{\gamma_2} a_1)]_{x=d_{N+1}(\tau)} = 0, \qquad (8.88)$$

где $e_i(\tau) = T(u, d_i(\tau), \tau) - f_i(\tau)$; $\gamma_1 = \alpha_1 \lambda(d_0(\tau), \tau)$;

$\gamma_2 = \alpha_2 \lambda(d_{N+1}(\tau), \tau)$; $\sigma_1 = \alpha_1 \lambda_x(d_0(\tau), \tau) + \beta_1$;

$\sigma_2 = \alpha_2 \lambda_x(d_{N+1}(\tau), \tau) + \beta_2$.

Формулы для компонентов градиента функционала (8.82) в данном случае имеют вид

$$J'_{\xi} = \Psi(x, 0), \quad i = \overline{1, N+1}, \quad d_0(0) \leqslant x \leqslant d_{N+1}(0); \qquad (8.89)$$

$$J'_{p_1} = -\psi_1(d_0(\tau), \tau) \frac{a_1(d_0(\tau), \tau)}{\gamma_1(\tau)}; \qquad (8.90)$$

$$J'_{p_2} = \psi_{N+1}(d_{N+1}(\tau), \tau) \frac{a_1(d_{N+1}(\tau), \tau)}{\gamma_2(\tau)}; \qquad (8.91)$$

$$J'_{\lambda_l} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_{N+1}, \quad l = \overline{1, M_1}; \qquad (8.92)$$

$$J'_{C_l} = -\sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{d_{i-1}(\tau)}^{d_i(\tau)} \frac{\psi_i(x, \tau)}{C(x, \tau)} T_\tau(x, \tau) \varphi_l(T(x, \tau))\, dx,$$

$$l = \overline{1, M_2}; \qquad (8.93)$$

$$J'_{K_l} = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{d_{i-1}(\tau)}^{d_i(\tau)} \frac{\psi_i(x, \tau)}{C(x, \tau)} T_x(x, \tau) \varphi_l(T(x, \tau))\, dx,$$

$$l = \overline{1, M_3}; \qquad (8.94)$$

$$J'_{S_l} = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{d_{i-1}(\tau)}^{d_i(\tau)} \frac{\psi_i(x, \tau)}{C(x, \tau)} \varphi_l(T(x, \tau))\, dx,$$

$$l = \overline{1, M_4}, \qquad (8.95)$$

где

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{d_{i-1}(\tau)}^{d_i(\tau)} \frac{\psi_i(x, \tau)}{C(x, \tau)} [T_{xx}(x, \tau)\varphi_l(T(x, \tau)) +$$

$$+ T_x^2(x, \tau)\varphi_l'(T(x, \tau))]\, dx;$$

$$\Phi_n = \int_0^{\tau_m} \frac{\psi_n(x, \tau)}{C(x, \tau)} T_x(x, \tau)\varphi_l(T(x, \tau))|_{x=d_n(\tau)}\, d\tau, \quad n = 1, N+1.$$

Если к рассмотренным N зависимостям $f_i(\tau)$ добавить еще функции на границах области $f_0(\tau) = T(d_0(\tau), \tau)$, $f_{N+1}(\tau) = T(d_{N+1}(\tau), \tau)$, то условия (8.87) и (8.88) нужно задать с правыми частями, соответственно равными $2\rho_0(\tau)[T(u, d_0(\tau), \tau) - f_0(\tau)]$ и $2\rho_{N+1}(\tau)[T(u, d_{N+1}(\tau), \tau) - f_{N+1}(\tau)]$, где $\rho_0(\tau)$ и $\rho_{N+1}(\tau)$ – весовые коэффициенты.

8.4.5. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА И В СМЕШАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Повторяя изложенную схему получения градиента функционала (8.82), можно показать, что для постановки обратной задачи, соответствующей условиям (8.77) – (8.81) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1$; $d_0(\tau) < d_1(\tau)$, $d_N(\tau) < d_{N+1}(\tau)$, имеют место следующие результаты.

Задача для приращения поля:

$$v_\tau = a_1 v_{xx} + a_2 v_x + a_3 v + q + \omega; \quad (x, \tau) \in Q_\tau;$$

$$v(x, 0) = \Delta\xi;$$

$$v(d_0(\tau), \tau) = \Delta p_1(\tau); \quad v(d_{N+1}(\tau), \tau) = \Delta p_2(\tau),$$

где

$$q = \frac{1}{C}[\Delta\lambda T_{xx} + (\Delta\lambda)_x T_x + \Delta K T_x + \Delta S - \Delta C T_\tau];$$

ω – остаточный член.

Сопряженная задача:

$$\psi_{i\tau} + D^*_{x\tau}\psi_i = 0, \quad i = \overline{1, N+1}; \quad (x, \tau) \in Q_\tau,$$

$$\psi_i(x, \tau_m) = 0, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$\psi_i(d_i(\tau), \tau) - \psi_{i+1}(d_i(\tau), \tau) = 0, \quad i = \overline{1, N};$$

$$[(a_1\psi_i)_x - (a_1\psi_{i+1})_x]_{x=d_i(\tau)} = 2\rho_i(\tau)e_i(\tau), \quad i = \overline{1, N};$$

$$\psi_1(d_0(\tau), \tau) = \psi_{N+1}(d_{N+1}(\tau), \tau) = 0.$$

Формулы для следующих компонентов градиента: J'_{ξ}, J'_{C_l}, J'_{K_l}, J'_{S_l} – тождественны соответствующим формулам (8.89), (8.93), (8.94), (8.95). Компоненты J'_{p_1}, J'_{p_2}, J'_{λ_l} имеют вид

$$J'_{p_1} = [a_1(d_0(\tau), \tau)\, \psi_1(d_0(\tau), \tau)]_x; \tag{8.96}$$

$$J'_{p_2} = -[a_1(d_{N+1}(\tau), \tau)\, \psi_{N+1}(d_{N+1}(\tau), \tau)]_x \tag{8.97}$$

$$J'_{\lambda_l} = \Phi_0, \quad l = \overline{1, M_1}. \tag{8.98}$$

Рассмотрим, наконец, смешанную краевую постановку обратной задачи, когда $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$; $\alpha_2 \neq 0$ и заданы измерения в точках $d_i(\tau)$, $i = \overline{1, N+1}$, причем $d_0(\tau) < d_1(\tau)$. В этом случае задача для приращения поля определяется условиями

$$v_\tau = a_1 v_{xx} + a_2 v_x + a_3 v + q + \omega, \quad (x, \tau) \in Q_\tau;$$

$$v(x, 0) = \Delta\xi;$$

$$v(d_0(\tau), \tau) = \Delta p_1(\tau); \quad [\gamma_2 v_x + \sigma_2 v]_{x = d_{N+1}(\tau)} = \Delta p_2(\tau) + \omega_2.$$

Сопряженная задача будет иметь вид

$$\psi_{i\tau} + D^*_{x\tau}\, \psi_i = 0, \quad i = \overline{1, N+1}; \quad (x, \tau) \in Q_\tau,$$

$$\psi_i(x, \tau_m) = 0, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$\psi_i(d_i(\tau), \tau) - \psi_{i+1}(d_i(\tau), \tau) = 0, \quad i = \overline{1, N};$$

$$[(a_1 \psi_i)_x - (a_1 \psi_{i+1})_x]_{x = d_i(\tau)} = 2\rho_i(\tau) e_i(\tau), \quad i = \overline{1, N};$$

$$\psi_1(d_0(\tau), \tau) = 0;$$

$$[(a_1 \psi_{N+1})_x - \psi_{N+1}(d'_{N+1} + a_2 - \frac{\sigma_2}{\gamma_2}\, a_1)]_{x = d_{N+1}(\tau)} =$$

$$= 2\rho_{N+1}(\tau) \cdot e_{N+1}(\tau).$$

При этом компоненты градиента определяются формулами (8.89), (8.96), (8 91), (8.93) – (8.95) и формулой

$$J'_{\lambda_l} = \Phi_0 + \Phi_{N+1}, \quad l = \overline{1, M_1}.$$

Замечание 1. Эффективные вычислительные алгоритмы решения сопряженных краевых задач могут быть получены, если предварительно преобразовать исходную область с подвижными границами в прямоугольную область при одновременном выпрямлении линий, на которых

заданы входные данные $f_i(\tau)$. Такое преобразование осуществляется с помощью замены переменных [21].

$$y_i = \frac{x - d_{i-1}(\tau)}{d_i(\tau) - d_{i-1}(\tau)}, \quad i = \overline{1, N}; \quad t = \tau.$$

Замечание 2. Рассмотренный метод вывода условий сопряженной задачи и определения через ее решение градиента функционала может быть распространен также на многомерные, в общем случае нелинейные ОЗТ.

Замечание 3. Полученные формулы для градиента в пространствах L_2 позволяют построить на их основе направления спуска, дающие приближенные решения требуемого порядка гладкости (см. разд. 8.5).

8.4.6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ

Выше применительно к обратным задачам обобщенной теплопроводности была предложена методика получения постановок сопряженных краевых задач и на этой основе выведены формулы для градиента. Существует еще один способ составления сопряженных задач, который базируется на рассмотрении необходимых условий стационарности функционала-невязки [10, 11, 14, 28] Этот способ весьма универсален, он может применяться для обратных задач различных типов, математические модели которых представляют собой системы как с сосредоточенными, так и распределенными параметрами.

Кратко изложим суть этого способа на следующем примере.

Требуется найти градиент функционала

$$J(q, \mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} [T(q, \mathbf{C}, d_i, \tau) - f_i(\tau)]^2 \, d\tau \qquad (8.99)$$

по функции $q(\tau)$ и числовому вектору $\mathbf{C} = \{ C_j \}_1^M$ при выполнении условий

$$C(T)T_\tau = (\lambda(T)T_x)_x, \quad (x, \tau) \in Q = (0, b) \times (0, \tau_m]; \qquad (8.100)$$

$$T(x, 0) = \xi(x); \qquad (8.101)$$

$$-\lambda T_x|_{x=0} = q(\tau); \quad -\lambda T_x|_{x=b} = q^*(\tau), \qquad (8.102)$$

где $C(T) = \sum_{j=1}^{M} C_j \varphi_j(T)$,

$\varphi_j(T)$ – заданные базисные функции; $p(\tau)$, $f_i(\tau) \in L_2 [0, \tau_m]$; $0 < d_1 < \ldots < d_N < b$.

Заменим (8.100) – (8.102) равносильной постановкой

$$C(T)T_{i\tau} = (\lambda(T)T_{ix})_x, \quad (x, \tau) \in Q_i = \left\{ d_{i-1} < x < d_i, \quad 0 < \tau \leqslant \tau_m \right\};$$

$$i = \overline{1, N+1}, \quad 0 = d_0 < d_1 < \ldots < d_{N+1} = b;$$

$$T_i(x, 0) = \xi_i(x), \quad d_{i-1} \leqslant x \leqslant d_i, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$T_i(d_i, \tau) = T_{i+1}(d_i, \tau), \quad i = \overline{1, N};$$

$$T_{ix}(d_i, \tau) = T_{i+1\,x}(d_i, \tau), \quad i = \overline{1, N};$$

$$-\lambda T_{1x}|_{x=0} = q(\tau), \quad -\lambda T_{N+1\,x}|_{x=b} = q^*(\tau),$$

где

$$\xi_i(x) = \xi(x), \quad d_{i-1} \leqslant x \leqslant d_i, \quad i = \overline{1, N+1}.$$

Перейдем к безусловной экстремальной форме данной ОЗТ, вводя расширенный функционал

$$I = J + I_1 + I_2 + I_3,$$

в котором

$$I_1 = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \mu_i(x)[T_i(x, 0) - \xi_i(x)]\,dx + \int_0^{\tau_m} \nu_0(\tau)[\lambda T_{1x}|_{x=0} + q(\tau)]\,d\tau + \int_0^{\tau_m} \nu_b(\tau)[\lambda T_{N+1\,x}|_{x=b} + q^*(\tau)]\,d\tau;$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \pi_i(\tau)[T_i(d_i, \tau) - T_{i+1}(d_i, \tau)]\,d\tau + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \kappa_i(\tau)[T_{ix}(d_i, \tau) - T_{i+1\,x}(d_i, \tau)]\,d\tau,$$

$$I_3 = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \int_0^{\tau_m} \psi_i(x, \tau)[(\lambda(T)T_{ix})_x - C(T)T_{i\tau}]\,d\tau dx.$$

Здесь $\mu_i(x)$, $i = \overline{1, N+1}$; $\nu_0(\tau)$, $\nu_b(\tau)$; $\pi_i(\tau)$, $\kappa_i(\tau)$, $i = \overline{1, N}$; $\psi_i(x, \tau)$, $i = \overline{1, N+1}$ – неопределенные множители Лагранжа.

Если условия (8 100) – (8.102) выполняются, то функционалы I и J совпадают. Поэтому задачу минимизации функционала J можно заменить задачей минимизации I.

Необходимым условием стационарности функционала $J(q, \mathbf{C})$

является равенство нулю полной вариации функционала $I(q, \mathbf{C})$:

$$\Delta J + \Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3 = 0. \tag{8.103}$$

Для вычисления отдельных членов в этом равенстве предположим, что величины $C(T)$ и $q(\tau)$ получили приращения $\Delta C(T)$ и $\Delta q(\tau)$. В результате температура изменится на некоторую величину $\mathrm{v}(x, \tau)$. Применяя тот же прием, как и при выводе задачи (8.48) – (8.50), получим, что в линейном приближении функция $\mathrm{v}(x, \tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\mathrm{v}_{i\tau} = a_1 \mathrm{v}_{ixx} + a_2 \mathrm{v}_{ix} + a_3 \mathrm{v}_i + \frac{\Delta C}{C} T_\tau, \quad (x, \tau) \in Q_i;$$

$$i = \overline{1, N+1}; \tag{8.104}$$

$$\mathrm{v}_i(x, 0) = 0, \quad d_{i-1} \leqslant x \leqslant d_i; \tag{8.105}$$

$$[-\lambda \mathrm{v}_{1x} - \lambda_x \mathrm{v}_1]_{x=0} = \Delta q(\tau); \tag{8.106}$$

$$\mathrm{v}_i(d_i, \tau) = \mathrm{v}_{i+1}(d_i, \tau), \quad i = \overline{1, N}; \tag{8.107}$$

$$\mathrm{v}_{ix}(d_i, \tau) = \mathrm{v}_{i+1\,x}(d_i, \tau), \quad i = \overline{1, N}; \tag{8.108}$$

$$[\lambda \mathrm{v}_{N+1\,x} + \lambda_x \mathrm{v}_{N+1}]_{x=b} = 0, \tag{8.109}$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda}{C}, \quad a_2 = 2\frac{\lambda_x}{C}, \quad a_3 = \frac{1}{C}(\lambda_{xx} - C_\tau).$$

Линейная часть приращения функционала имеет вид

$$\Delta J = 2 \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} e_i(\tau) \cdot \mathrm{v}_i(d_i, \tau)\, d\tau, \tag{8.110}$$

где

$$e_i(\tau) = T_i(q, \mathbf{C}, d_i, \tau) - f_i(\tau).$$

Другие слагаемые левой части (8.103) с учетом условий (8.104) – (8.109) запишутся

$$\Delta I_1 = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \mu_i(x)\, \mathrm{v}_i(x, 0)\, dx + \int_0^{\tau_m} \nu_0(\tau)[\lambda \mathrm{v}_{1x}|_{x=0} +$$

$$+ \lambda_x \mathrm{v}_1|_{x=0} + \Delta q]\, d\tau + \int_0^{\tau_m} \nu_b(\tau)[\lambda \mathrm{v}_{N+1\,x}|_{x=b} +$$

$$+ \lambda_x \mathrm{v}_{N+1}|_{x=b}]\, d\tau; \tag{8.111}$$

$$\Delta I_2 = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \pi_i(\tau)[\mathrm{v}_i(d_i, \tau) - \mathrm{v}_{i+1}(d_i, \tau)]\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \kappa_i(\tau)[\mathrm{v}_{ix}(d_i, \tau) - \mathrm{v}_{i+1\,x}(d_i, \tau)]\, d\tau; \qquad (8.112)$$

$$\Delta I_3 = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \int_0^{\tau_m} \psi_i(x, \tau)\left(a_1 \mathrm{v}_{ixx} + a_2 \mathrm{v}_{ix} + a_3 \mathrm{v}_i + \frac{\Delta C}{C} T_\tau - \right.$$

$$\left. - \mathrm{v}_{i\tau}\right) d\tau dx = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \int_0^{\tau_m} [(a_1 \psi_i)_{xx} - (a_2 \psi_i)_x + a_3 \psi_i +$$

$$+ \psi_{i\tau}]\, \mathrm{v}_i d\tau dx + \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} \left\{ a_1 \psi_i \mathrm{v}_{ix} - \mathrm{v}_i[(a_1 \psi_i)_x - \right.$$

$$\left. - a_2 \psi_i] \right\} \Big|_{x=d_{i-1}}^{x=d_i} d\tau - \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \psi_i \mathrm{v}_i \Big|_{\tau=0}^{\tau=\tau_m} dx. \qquad (8.113)$$

Подставив (8.111), (8.112), (8.113) в равенство (8.103), получим в левой части слагаемые, включающие двукратные интегралы и интегралы по границам областей Q_i. Поскольку вариации v_i являются произвольными, для выполнения условия стационарности I нужно приравнять нулю каждую из групп слагаемых при соответствующих вариациях. В результате получим постановку сопряженной краевой задачи

$$-\psi_{i\tau} = (a_1 \psi_i)_{xx} - (a_2 \psi_i)_x + a_3 \psi_i, \quad (x, \tau) \in Q_i,$$

$$i = \overline{1, N+1}; \qquad (8.114)$$

$$\psi_i(x, \tau_m) = 0, \quad d_{i-1} \leqslant x \leqslant d_i, \quad i = \overline{1, N+1}; \qquad (8.115)$$

$$[(a_1 \psi_1)_x - a_2 \psi_1 + \frac{\lambda_x}{\lambda} a_1 \psi_1]_{x=0} = 0;$$

$$\psi_i(d_i, \tau) = \psi_{i+1}(d_i, \tau), \quad i = \overline{1, N};$$

$$[(a_1 \psi_i)_x - (a_1 \psi_{i+1})_x]_{x=d_i} = 2e_i(\tau), \quad i = \overline{1, N}; \qquad (8.116)$$

$$[(a_1 \psi_{N+1})_x - a_2 \psi_{N+1} + \frac{\lambda_x}{\lambda} a_1 \psi_{N+1}]_{x=b} = 0,$$

которая тождественна постановке (8.83) – (8.88) при выполнении условий рассматриваемой ОЗТ.

Для получения градиента преобразуем выражение (8.110) с учетом (8.116) к виду

$$\Delta J = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} [(a_1 \psi_i)_x - (a_1 \psi_{i+1})_x]_{x=d_i} v_i(d_i, \tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \int_0^{\tau_m} [(a_1 \psi_i)_x v_i]_x \, d\tau dx + \int_0^{\tau_m} (a_1 \psi_1)_x v_1 |_{x=0} \, d\tau -$$

$$- \int_0^{\tau_m} (a_1 \psi_{N+1})_x v_{N+1} |_{x=b} \, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{N+1} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \int_0^{\tau_m} [v_i (a_1 \psi_i)_{xx} + v_{ix} (a_1 \psi_i)_x] \, d\tau dx +$$

$$+ \int_0^{\tau_m} (a_1 \psi_1)_x v_1 |_{x=0} \, d\tau - \int_0^{\tau_m} (a_1 \psi_{N+1})_x v_{N+1} |_{x=b} \, d\tau.$$

Пользуясь теми же приемами, что и при получении формулы для градиента в разд. 6.5.2 работы [6], и принимая во внимание (8.114), (8.115), (8.104), (8.105), придем к следующему выражению для линейной части приращения функционала

$$\Delta J = \int_0^{\tau_m} \frac{\psi_1(0,\tau)}{C(0,\tau)} \Delta q(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \psi_i(x,\tau) \frac{T_{i\tau}(x,\tau)}{C(x,\tau)} \times$$

$$\times \Delta C(T) dx d\tau. \qquad (8.117)$$

Отсюда имеем формулу для составляющей градиента по q

$$J'_q = \frac{\psi_1(0,\tau)}{C(0,\tau)}. \qquad (8.118)$$

Подставляя в (8.117) приращение $\Delta C(T) = \sum_{j=1}^{M} \Delta C_j \varphi_j(T)$, после некоторых преобразований получим составляющие градиента по параметрам C_l

$$J'_{C_l} = - \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{d_{i-1}}^{d_i} \frac{\psi_i(x,\tau)}{C(x,\tau)} T_{i\tau}(x,\tau) \varphi_l(T(x,\tau))\, dx,$$

$$l = \overline{1, M}. \qquad (8.119)$$

Формулы (8.118) и (8.119) совпадают с аналогичными формулами для градиента, полученными в разд 8.4 4 для более общего случая.

Аналогичным образом могут быть получены постановки сопряженных краевых задач и формулы для градиентов невязки применительно к другим экстремальным постановкам обратных задач. Для этого, следуя известной процедуре решения задач на условный экстремум, составляется расширенный функционал, учитывающий невязку и (с помощью неопределенных множителей Лагранжа) условия математической модели в виде дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий, условий сопряжения. Для расширенного функционала вычисляется главная линейная часть приращения, отвечающая вариациям исходных величин и, соответственно, вариациям переменных состояния. Полученная вариация функционала преобразуется с помощью операций интегрирования по частям, а для многомерных областей с использованием формулы Остроградского-Гаусса таким образом, чтобы выражения под знаками интегралов по областям задания уравнений не содержали частных производных от приращений переменных состояния. Затем, согласно необходимому условию стационарности расширенного функционала, его вариация приравнивается нулю. Учитывая произвольный характер приращений переменных состояния, приравниваются нулю коэффициенты при соответствующих приращениях. Получившиеся равенства представляют собой условия для определения множителей Лагранжа, которыми в зависимости от учитываемого условия математической модели могут быть функции и константы. Совокупность этих равенств и дает искомую постановку сопряженной краевой задачи.

В частности, следуя этой методике, можно получить сопряженную задачу применительно к вычислению градиента невязки для решения обратной задачи теплообмена в технической системе (см. разд. 1.3.3), которую представим в следующем виде.

Пусть теплообменный процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$C_l \frac{dT_l}{d\tau} = \sum_{j=1}^{L} \lambda_{lj}(T_j - T_l) + \sum_{j=1}^{L} b_{lj}(T_j^4 - T_l^4) + Q_l, \quad l = \overline{1, L};$$

$$\tau \in (0, \tau_m]; \qquad (8.120)$$

$$T_l(0) = T_{0l}, \quad l = \overline{1, L},$$

где L – число элементов в тепловой модели; C_l – объемная теплоемкость l-го элемента; λ_{lj} – коэффициенты теплообмена, характеризующие конвекцию и (или) теплопроводность между элементами с номерами l и j; b_{lj} – коэффициенты лучистого теплообмена; Q_l – суммарное количество тепла, действующее на l-й элемент.

Предположим, что среди четырех групп физически однородных параметров $\{C_l\}_1^L$, $\{Q_l\}_1^L$, $\{\lambda_{lj}\}_1^{L \times L}$, $\{b_{lj}\}_1^{L \times L}$ некоторые или даже

все параметры одной какой-либо группы неизвестны. Обозначим совокупность этих параметров через вектор $\mathbf{u} = \left\{ u_l \right\}_1^N$. Полагая далее, что известны результаты измерений температуры в элементах тепловой модели, заданные в виде экспериментальных функций $T_l(\tau) = f_l(\tau)$, $l = \overline{1, L}$, будем искать компоненты вектора $\mathbf{u}$ из условия минимума невязки:

$$\min_{\mathbf{u}} J, \quad J = \sum_{l=1}^{L} \int_0^{\tau_m} [T_l(\mathbf{u}, \tau) - f_l(\tau)]^2 \, d\tau,$$

где $T_l(\mathbf{u}, \tau)$ — температура l-го элемента, рассчитанная в соответствии с математической моделью (8.120) при некотором векторе $\mathbf{u}$.

Не останавливаясь на выкладках, приведем результаты вывода условий задачи, сопряженной с задачей для приращений температур. Эти условия имеют вид

$$\frac{d\psi_i}{d\tau} + \sum_{l=1}^{L} \psi_l \frac{\partial F_l}{\partial T_i} = -2e_i(\tau), \quad i = \overline{1, L}, \ \tau \in [0, \tau_m]; \tag{8.121}$$

$$\psi_i(\tau_m) = 0, \quad i = \overline{1, L}, \tag{8.122}$$

где $F_l(\tau) = \frac{1}{C_l} \left[\sum_{j=1}^{L} \lambda_{l_j}(T_j - T_l) + \sum_{j=1}^{L} b_{l_j}(T_j^4 - T_l^4) + Q_l \right]$.

Можно показать, что градиент $J'_{\mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial J}{\partial u_i} \right\}_1^N$ вычисляется через сопряженные переменные по формуле

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \sum_{l=1}^{L} \int_0^{\tau_m} \psi_l(\tau) \frac{\partial F_l}{\partial u_i} \, d\tau, \quad i = \overline{1, N}.$$

Используя сопряженную задачу (8.121) — (8.122), вид которой не меняется в зависимости от рассматриваемого параметра, можно построить эффективную и универсальную процедуру нахождения направления спуска при идентификации причинных характеристик теплообменного процесса в технической системе.

Замечание 4. Обратные задачи теплообмена в технической системе могут иметь неединственное решение, причем независимо от выбора условий проведения эксперимента (начальных температур элементов и внешних тепловых воздействий). Этот вопрос требует специального рассмотрения.

8.5. УЧЕТ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ГРАДИЕНТНЫХ АЛГОРИТМАХ

Качество решения некорректно поставленной обратной задачи существенно зависит от полноты учета всей имеющейся качественной и количественной априорной информации об искомой величине. Такие сведения могут быть заданы исходя из физических особенностей исследуемых процессов и особенностей проведения эксперимента, а также из условий единственности решения задачи. Достаточно широкие возможности для учета априорной информации о некорректной задаче предоставляет итерационная форма регуляризации.

В этом разделе описываются способы учета информации о гладкости решения и о значениях функции и ее производных в ряде точек области определения. Для этого в разд. 8.5.2 и 8.5.3 при построении итерационной последовательности направление спуска выбирается в исходном пространстве L_2, но так, чтобы не выводить приближения из заданного класса гладких функций. В разд. 8.5.4 итерационная последовательность строится непосредственно в пространстве W_2^1. И в том и в другом случаях соответствующие направления спуска рассчитываются по известному градиенту невязки в пространстве L_2.

Наконец, в разд. 8.5.5 описаны эмпирические способы прекращения итераций при решении некорректной обратной задачи, не требующие знания величины погрешности входных данных, что важно для практики.

8.5.1. ТРАДИЦИОННАЯ СХЕМА ПОЛУЧЕНИЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

В гл. 6 были рассмотрены поисковые методы градиентного типа, предназначенные для минимизации функционала-невязки с ограничением на допустимый уровень спуска к оптимальной точке. Такой подход не обеспечивает равномерной сходимости приближений к искомому решению, в частности, требует хорошего прогноза поведения функции в окрестности концевой точки временного интервала восстановления. Поэтому возникает необходимость построения алгоритмов, учитывающих априорную информацию о гладкости искомой функции с целью получения более точных результатов.

Сразу напрашивается решение — минимизировать невязку, регуляризованную добавлением соответствующего поправочного члена. Например, вместо целевого функционала $J(u) = \| Au - f \|^2_{L_2}$ можно рассмотреть регуляризованный функционал $\Phi_\alpha(u) = J(u) + \alpha \| u' \|^2_{L_2}$. При этом степень влияния регуляризатора $\| u' \|^2_{L_2}$ задается весом α, для выбора которого можно пользоваться способами, указанными в разд. 7.2.

Переход к регуляризованной невязке повлечет за собой изменения в алгоритмах расчета градиента функционала и в определении глубины итерационного шага.

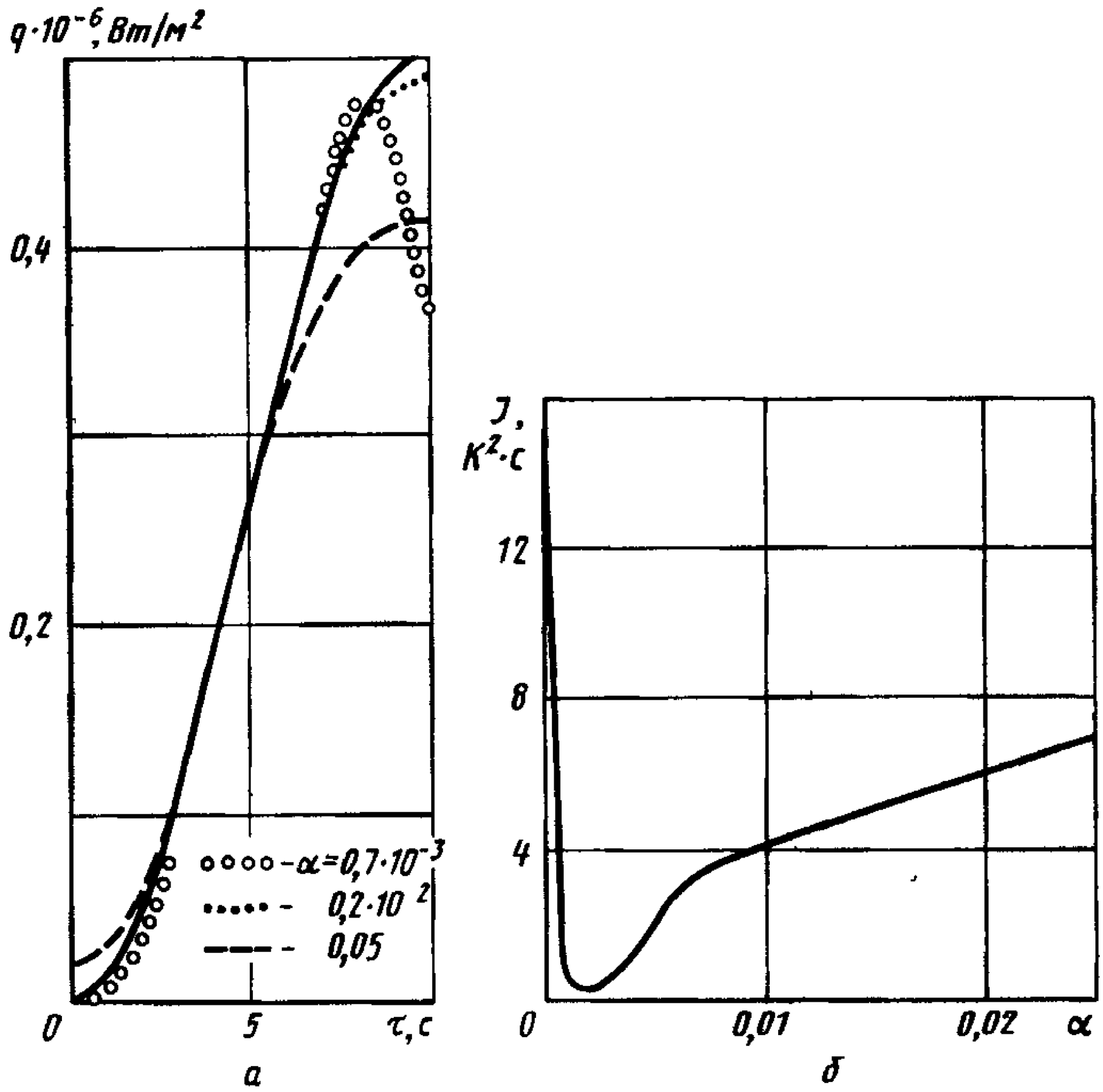


Рис. 8.4. Результаты минимизации регуляризованной невязки методом сопряженных градиентов при точных входных данных:
$a = 0{,}35 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 0{,}721$ Вт/м·К, $b = 0{,}002$ м, $d = 0{,}001$ м, $\Delta \mathrm{Fo}_b = 0{,}017$, число итераций $\overline{k} = 100$ (при этом значении k заведомо сходились процессы приближений для всех рассмотренных величин параметра α):
а – зависимость восстановленной плотности теплового потока от времени при разных значениях параметра регуляризации (сплошная кривая – точное решение);
б – зависимость изменения невязки $J(q^{k=100})$ от параметра регуляризации

Для одного из расчетных примеров этого раздела на рис. 8.4 показаны результаты итерационной минимизации невязки с регуляризатором первого порядка. В данном примере использовались невозмущенные входные данные и оптимальное значение параметра оказалось равным $\alpha \cong 0{,}002$. Описанный способ малоэкономичен.

8.5.2. УЧЕТ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О РЕШЕНИИ.
ПЕРВЫЙ СПОСОБ

Данный способ основан на том, что операция интегрирования дает возможность повысить гладкость результирующей функции. Этот подход был предложен и развит в работах [6, 84, 85] *.

---

*См. также: **Алифанов О.М., Румянцев С.В.** Об одном способе решения некорректно поставленных задач // ИФЖ. 1978. Т.34. № 2. С. 328–331;
Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Градиентный метод нахождения гладких решений граничных обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1980. Т. 39. № 2. С. 259–263.

Пусть из условия допустимого минимума невязки получено кусочно-непрерывное приближение в среднем к производной восстанавливаемой граничной функции. Проинтегрировав этот результат, получим уже кусочно-гладкое решение обратной задачи, причем в конце временного интервала восстановление граничного теплового режима в общем случае будет лучше, нежели при определении среднеквадратичного приближения. Остановимся на этом методе подробнее, полагая в общем случае, что искомой является некоторая одномерная причинная характеристика $u(x)$, где $x \in [a, b]$ – некоторый скалярный аргумент (в зависимости от типа решаемой обратной задачи это может быть время, пространственная координата, температура).

Предположим, что производная $u'(x)$ – кусочно-непрерывная функция. Пусть $u'(x)$ получила приращение $\Delta u'(x)$, что равносильно некоторому приращению искомой функции $\Delta u(x)$. Из определения градиента целевого функционала в пространстве функций, суммируемых с квадратом, следует

$$\Delta J(u') \equiv J(u' + \Delta u') - J(u') = \int_a^b J'_{u'}(x)\,\Delta u'(x)dx + o(\|\Delta u'\|),$$

где принято, что u', $\Delta u' \in L_2$; $J'_{u'}$ – градиент функционала J по производной u'.

С другой стороны, можно записать $\Delta J(u) = \int_a^b J'_u(x)\Delta u(x)dx +$ $+ o(\|\Delta u\|)$, где Δu – приращение искомой функции, соответствующее приращению $\Delta u'$; J'_u – градиент функционала J по u.

Введем новую функцию

$$g(x) = \int_x^b J'_u(\xi)\,d\xi, \tag{8.123}$$

для которой производная имеет вид $g'(x) = -J'_u(x)$.
Тогда

$$\Delta J(u) = -\int_a^b g'(x)\,\Delta u(x)\,dx + o(\|\Delta u\|).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\Delta J(u) = \Delta u(a)\,g(a) + \int_a^b g(x)\Delta u'(x)\,dx + o(\|\Delta u\|). \tag{8.124}$$

Так как в нашем случае $\Delta J(u') = \Delta J(u)$, то из формулы (8.124) следует, что $g(x)$ является градиентом функционала по u' во всех точках отрезка $[a, b]$, кроме крайней левой:

$$J'_{u'}(x) = g(x), \quad x \in (a, b],$$

а параметр $g(a)$ представляет значение градиента функционала по константе $C = u(a)$:

$$J'_C = g(a).$$

Таким образом, градиент J'_u, определяется по известному градиенту J'_u.

Представим далее итерационный процесс согласно методу скорейшего спуска ($u^0{}'(\xi)$ — заданное приближение):

$$u'^{k+1}(\xi) = u'^k(\xi) - \beta_k^0 J'^k_{u'}(\xi), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{8.125}$$

где $\beta_k^0 : J(u'^{k+1}) = \min\limits_{\beta^0} [u'^k - \beta^0 J'^k_{u'}]$.

Интегрируя (8.125) по ξ в пределах от a до x, получим

$$u^{k+1}(x) - u^{k+1}(a) = u^k(x) - u^k(a) - \beta_k^0 \int_a^x J'^k_{u'}(\xi)\, d\xi. \tag{8.126}$$

Для величины $u^{k+1}(a) = C^{k+1}$ запишем формулу, соответствующую алгоритму скорейшего спуска,

$$C^{k+1} = C^k - \beta_k^1 J'^k_C \tag{8.127}$$

и подставим в (8.126). В результате будем иметь

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) - \beta_k^0 P^k(x) - \beta_k^1 J'^k_C, \quad k = 0, 1, \ldots; \tag{8.128}$$

$$u^0(x) = z(x), \quad x \in [a, b],$$

где

$$P^k(x) = \int_a^x d\xi \int_\xi^b J'^k_u(\eta)\, d\eta, \quad J'^k_C = \int_a^b J'^k_u(x)\, dx;$$

$z(x)$ — заданное приближение.

Параметры β_k^0 и β_k^1 выбираются из условия минимума функционала J на данной итерации:

$$\beta_k^0, \beta_k^1 : J(u^{k+1}) = \min_{\beta^0, \beta^1} J[u^k - \beta^0 P^k - \beta^1 J'^k_C].$$

Алгоритм (8.128) с начальным приближением соответствующей гладкости $z \in W_2^l[a, b]$, $l \geqslant 1$ (например, $z = \text{const}$) при останове итерационного процесса по условию невязки дает равномерное приближение к точному решению.

Более быструю сходимость итераций можно получить на основе метода сопряженных градиентов, который для первой производной запишем в следующем виде:

$$u'^{k+1}(\xi)=u'^{k}(\xi)-\beta_k^0 J'_{u'}(\xi)-\gamma_k S^{k-1}(\xi),\quad k=0,1,\ldots;$$

$$S^{k-1}(\xi)=\beta_{k-1}^0 J_{u'}'^{k-1}(\xi)+\gamma_{k-1}S^{k-2}(\xi),\quad k\geqslant 2; \qquad (8.129)$$

$$S^{-1}(\xi)=0;\quad S^0(\xi)=\beta_0^0 J_{u'}'^{0}(\xi),$$

где β_k^0 и γ_k — числовые параметры метода

После интегрирования (8.129) в пределах от a до x имеем

$$u^{k+1}(x)-C^{k+1}=u^k(x)-C^k-\beta_k^0\int_a^x J_{u'}'^{k}(\xi)d\xi-\gamma_k\int_a^x S^{k-1}(\xi)d\xi,$$

$k=0,1,\ldots.$

Используя для константы C соотношение (8.127), получим окончательно

$$u^{k+1}(x)=u^k(x)-\beta_k^0 P^k(x)-\gamma_k P_1^k(x)-\beta_k^1 J_C'^{k},$$

$k=0,1,\ldots,$ (8.130)

$$P^k(x)=\int_a^x d\xi\int_\xi^b J_u'^{k}(\eta)d\eta;\quad P_1^k(x)=\int_a^x S^{k-1}(\xi)d\xi;$$

$$S^{k-1}(\xi)=\beta_{k-1}^0\int_\xi^b J_u'^{k-1}(\eta)d\eta+\gamma_{k-1}S^{k-2}(\xi),\quad k\geqslant 2;$$

$$S^{-1}(\xi)=0;\quad S^0(\xi)=\beta_0^0\int_\xi^b J_u'^{0}(\eta)d\eta;$$

$$J_C'^{k}=\int_a^b J_u'^{k}(x)dx,$$

где $\beta_k^0,\beta_k^1,\gamma_k$ находятся из условия

$$J(u^{k+1})=\min_{\beta^0,\beta^1,\gamma} J[u^k-\beta^0 P^k-\gamma P_1^k-\beta^1 J_C'^{k}].$$

Процесс (8 130) начинается с $u^0\in W_2^l[a,b]$, $l\geqslant 1$ и при использовании регуляризирующего условия останова обеспечивает *равномерную сходимость* приближенных решений к истинному

Важно отметить, что если значение функции при $x=a$ известно, т е константа C задана, то эта априорная информация учитывается естественным образом — путем обнуления в формулах (8 128) и (8 130) последнего члена и задания начального приближения, равного значению этой константы, т е.

$$\beta_k^1=0,\quad J_C'^{k}=0,\quad k=0,1,\ldots$$

В том случае, когда известно значение функции на правом конце отрезка (при $x = b$), а $u(a)$ — неизвестно, нужно вместо функции (8 123) ввести другую величину: $g(x) = \int_a^x J'_u(\xi)d\xi$, $g'(x) = J'_u(x)$. Повторяя выкладки, получим, что при $\Delta u(b) = 0$ $J'_{u'}(x) = -g(x)$ В этом случае интегрирование последовательностей (8.125) и (8.129) проводится в пределах от b до x. В итоге получим $u^{k+1}(x) = u^k(x) - \beta_k^0 \int_x^b d\xi \int_a^\xi \times$

$\times J'^k_u(\eta)d\eta$, $k = 0, 1, \ldots$ — *для модифицированного метода скорейшего спуска*;

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) - \beta_k^0 \int_x^b d\xi \int_a^\xi J'^k_u(\eta)\,d\eta - \gamma_k \int_x^b S^{k-1}(\xi)\,d\xi,$$

$$S^{k-1}(\xi) = \beta_{k-1}^0 \int_a^\xi J'^{k-1}_u(\eta)\,d\eta + \gamma_{k-1} S^{k-2}(\xi), \quad k \geqslant 2;$$

$$S^{-1}(\xi) = 0, \quad S^0(\xi) = \beta_0^0 \int_a^\xi J'^0_u(\eta)\,d\eta -$$

— *для модифицированного метода сопряженных градиентов.*

Рассмотрим теперь общий случай, когда значение функции $u(x_1) = C$ известно в некоторой произвольно взятой точке x_1 сегмента $[a, b]$. Представим приращение функционала в виде

$$\Delta J(u) = \Delta J_1(u) + \Delta J_2(u) + o(\|\Delta u\|),$$

где

$$\Delta J_1(u) = \int_a^{x_1} J'_u(x)\Delta u(x)\,dx; \quad \Delta J_2(u) = \int_{x_1}^b J'_u(x)\Delta u(x)\,dx.$$

Введем функции $g_1(x) = \int_a^x J'_u(\xi)d\xi$, $x \in [a, x_1]$; $g_2(x) = \int_x^b J'_u(\xi)d\xi$, $x \in [x_1, b]$, для которых имеем $g_1'(x) = J'_u(x)$, $g_2'(x) = -J'_u(x)$. Поступая аналогичным образом, получим

$$J'_{u'}(x) = \begin{cases} -g_1(x), & x \in [a, x_1), \\ g_2(x), & x \in (x_1, b]. \end{cases}$$

Проинтегрировав последовательности (8 125) и (8.129) в пределах

от x_1 до x с учетом $u^{k+1}(x_1) = u^k(x_1) = u^0(x_1)$, придем к искомым расчетным выражениям. В частности, для модифицированного метода скорейшего спуска, получим

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) - \beta_k^0 \int_{x_1}^{x} J_{u'}^{\prime k}(\xi)\, d\xi, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $u^0(x) = C$.

Далее, остановимся на случае, когда требуется получить равномерную сходимость к точному решению вместе с первой производной, т.е. повысить гладкость приближенных решений. Для этого можно, например, рассмотреть функцию

$$r(x) = \int_x^b d\xi \int_\xi^b J_u'(\eta)\, d\eta,$$

для которой $r'(x) = -\int_x^b J_u'(\eta)\, d\eta, \quad r''(x) = J_u'(x)$.

Таким образом,

$$\Delta J = \int_a^b r''(x)\, \Delta u(x)\, dx + o(\| \Delta u \|).$$

После интегрирования по частям имеем

$$\Delta J = -\Delta u(a)\, r'(a) + \Delta u'(a)\, r(a) + \int_a^b r(x)\, \Delta u''(x)\, dx + o(\| \Delta u \|).$$

Отсюда следуют формулы для градиента

$$J_{u''}'(x) = r(x), \quad x \in (a, b]; \quad J_{C_1}' = r(a); \quad J_{C_2}' = -r'(a),$$

где $C_1 = u'(a), \quad C_2 = u(a)$.

Соответствующие итерационные формулы строятся с помощью тех же приемов, которые рассматривались выше при учете условия гладкости первого порядка — вначале формулируют последовательность приближений соответствующего градиентного метода для второй производной $u''(\tau)$, затем, используя операцию интегрирования, получают последовательность и условие для выбора числовых параметров алгоритма в терминах исходной задачи. В данном случае возможен учет априорной информации не только о значении функции в некоторой точке отрезка $[a, b]$, но и о значении первой производной в этой или любой другой точке В частности, для введенной функции $r(x)$ и полученных формул градиента, возможен простой учет сведений о значениях $u(a)$ и $u'(a)$, который заключается в том, что на вариацию искомой

функции накладываются ограничения $\Delta u(a) = \Delta u'(a) = 0$. В итоге получается итерационная формула

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) - \beta_k^0 G_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $G_k(x) = \int\limits_a^x d\xi \int\limits_a^\xi r(\eta)\, d\eta$; β_k^0: $\min\limits_{\beta^0} J[u^k - \beta^0 G_k]$.

При этом начальное приближение должно выбираться требуемой гладкости $u^0(x) \in W_2^l$, $l \geqslant 2$, и в точке $x = a$ нужно иметь значения $u^0(a) = C_2$, $u^{0\prime}(a) = C_1$. Этим условиям отвечает, например, функция $u^0(x) = C_2 - C_1 a + C_1 x$

Очевидно, что изложенный подход распространяется и на случай, когда нужно построить регуляризованные приближения еще более высокого порядка гладкости Соответственно, если порядок гладкости восстанавливаемой функции принят равным l, то становится возможным учесть априорные данные о значениях производных до $(l-1)$ порядка в некоторых точках области определения функции. Так, для $l = 3$ можно учесть значения самой функции, а также первой и второй производных — это может быть, например, имеющаяся информация об экстремальных точках и точках перегиба искомой кривой

8.5.3. О ПОСТРОЕНИИ ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть искомая функция u зависит от двух переменных, например, от пространственной координаты x и времени τ. Предположим, что $u(x, \tau)$ имеет смешанную производную $u_{x\tau}(x, \tau) \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial \tau}$, принадлежащую пространству $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = [0, b] \times [0, \tau_m]$ и задан целевой функционал

$$J(u) = \int\limits_0^{\tau_m} d\tau \int\limits_0^b \left\{ A[u(x, \tau)] - f(x, \tau) \right\}^2 dx,$$

где $f(x, \tau)$ — известная функция; A — линейный или нелинейный оператор, ставящий в соответствие элементу u элемент Au

Градиент этого функционала J'_u будем считать известным (он может быть найден через решение сопряженной задачи)

Рассмотрим итерационный процесс для производной $u_{\xi\zeta}(\xi, \zeta)$, соответствующий методу сопряженных градиентов,

$$u_{\xi\zeta}^{k+1} = u_{\xi\zeta}^k - \beta_k^0 J'^k_{u_{\xi\zeta}} - \gamma_k^0 S^{k-1}; \tag{8.131}$$

$$S^{k-1} = \beta_{k-1}^0 J'^{k-1}_{u_{\xi\zeta}} + \gamma_{k-1}^0 S^{k-2}, \quad k \geqslant 2;$$

$$S^{-1} = 0, \quad S^0 = \beta_0^0 J'_{u_{\xi\zeta}},$$

где $J'_{u_{\xi\zeta}} = J'_{u_{\xi\zeta}}(\xi, \zeta)$ – градиент функционала J по производной $u_{\xi\zeta}$ $\beta_k^0 > 0$, $\gamma_k^0 > 0$ – числовые параметры алгоритма.

После интегрирования левой и правой части формулы (8.131) по переменным ξ и ζ соответственно в пределах от x до b и от 0 до τ будем иметь

$$u^{k+1}(x, \tau) = u^k(x, \tau) + \Delta u^k(x, 0) + \Delta u^k(b, \tau) - \Delta u^k(b, 0) -$$

$$-\beta_k^0 \int_0^\tau d\zeta \int_x^b J'^k_{u_{\xi\zeta}} d\xi - \gamma_k^0 \int_0^\tau d\zeta \int_x^b S^{k-1} d\xi,$$

где $\Delta u^k(v, t) = u^{k+1}(v, t) - u^k(v, t)$.

По аналогии, записывая вначале итерационные последовательности метода сопряженных градиентов для производных $u_\xi(\xi, 0)$ и $u_\zeta(b, \zeta)$, а затем в результате интегрирования, переходя к последовательностям для $u(x, 0)$ и $u(b, \tau)$, получим

$$\Delta u^k(x, 0) = \beta_k^1 \int_x^b J'^k_{u_\xi(\xi, 0)} d\xi + \gamma_k^1 \int_x^b S_1^{k-1}(\xi) d\xi + \Delta u^k(b, 0);$$

$$\Delta u^k(b, \tau) = -\beta_k^2 \int_0^\tau J'^k_{u_\zeta(b, \zeta)} d\zeta - \gamma_k^2 \int_0^\tau S_2^{k-1}(\zeta) d\zeta + \Delta u^k(b, 0).$$

В этих выражениях величины $S_1(\xi)$ и $S_2(\zeta)$ определяются по формулам

$$S_1^{k-1} = \beta_{k-1}^1 J'^{k-1}_{u_\xi(\xi, 0)} + \gamma_{k-1}^1 S_1^{k-2}, \quad k \geqslant 2;$$

$$S_1^{-1} = 0, \quad S_1^0 = \beta_0^1 J'^0_{u_\xi(\xi, 0)};$$

$$S_2^{k-1} = \beta_{k-1}^2 J'^{k-1}_{u_\zeta(b, \zeta)} + \gamma_{k-1}^2 S_2^{k-2}, \quad k \geqslant 2;$$

$$S_2^{-1} = 0, \quad S_2^0 = \beta_0^2 J'^0_{u_\zeta(b, \zeta)}.$$

Величину $\Delta u^k(b, 0)$ будем искать по формуле скорейшего спуска

$$\Delta u^k(b, 0) = -\beta_k^3 J'^k_{u(b, 0)}$$

Скалярные величины β_k^i, $i = \overline{1, 3}$ и γ_k^i, $i = 1, 2$ вычисляются из условия минимума функционала $J(u^{k+1})$.

Для определения составляющих градиента $J'_{u_{x\tau}(x, \tau)}$, $J'_{u_x(x, 0)}$,

$J'_{u_\tau(b,\,\tau)}$, $J'_{u(b,\,0)}$ введем функцию $g(x, \tau)$, связанную с $J'_{u(x,\,\tau)}$ следующим образом:

$$g(x, \tau) = \int_{\tau}^{\tau_m} d\zeta \int_{0}^{x} J'_{u(\xi,\,\zeta)}\, d\xi, \quad (x, \tau) \in \Gamma.$$

Тогда

$$g_\tau(x, \tau) = -\int_{0}^{x} J'_{u(\xi,\,\tau)}\, d\xi, \quad g_{x\tau}(x, \tau) = -J'_{u(x,\,\tau)}.$$

В соответствии с определением градиента, имеем для линейной части приращения функционала ΔJ равенство

$$\Delta J = \int_{0}^{\tau_m} d\tau \int_{0}^{b} J'_{u(x,\,\tau)} \Delta u(x, \tau)\, dx = -\int_{0}^{\tau_m} d\tau \int_{0}^{b} g_{x\tau} \Delta u dx.$$

Интегрируя по частям, придем к выражению

$$\Delta J = g(b, 0)\, \Delta u(b, 0) + \int_{0}^{\tau_m} g(b, \tau)\, \frac{\partial \Delta u(b, \tau)}{\partial \tau}\, d\tau -$$

$$-\int_{0}^{b} g(x, 0)\, \frac{\partial \Delta u(x, 0)}{\partial x}\, dx - \int_{0}^{b} d\tau \int_{0}^{\tau_m} g(x, \tau)\, \frac{\partial^2 \Delta u(x, \tau)}{\partial x\, \partial \tau}\, d\tau.$$

Следовательно, составляющие градиента функционала по компонентам вектора $w = \{u_{x\tau}(x, \tau),\ u_x(x, 0),\ u_\tau(b, \tau),\ u(b, 0)\}$ равны

$J'_{u_{x\tau}(x,\,\tau)} = -g(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \Gamma;$

$J'_{u_x(x,\,0)} = -g(x, 0), \quad x \in [0, b];$

$J'_{u_\tau(b,\,\tau)} = g(b, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m];$

$J'_{u(b,\,0)} = g(b, 0).$

8.5.4. УЧЕТ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О РЕШЕНИИ. ВТОРОЙ СПОСОБ*

Построение гладкого решения. Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au = f, \tag{8.132}$$

где $u = u(x)$, $x \in E_1$ – искомая функция, которая по предположению обладает l-й обобщенной производной, т.е. $u \in W_2^l[a, b]$; $f = f(x)$ – заданная функция из $L_2[a, b]$; $A: W_2^l[a, b] \to L_2[a, b]$ – в общем случае нелинейный оператор, который может не иметь непрерывного обратного.

В дальнейшем остановимся на алгоритме решения задачи (8.132), соответствующем методу скорейшего спуска (переход к методу сопряженных градиентов легко осуществим). В этом случае имеем итерационную последовательность

$$u^{k+1} = u^k - \beta_k J'^k_{W_2^l}, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{k}; \tag{8.133}$$

$$J'^k_{W_2^l} = 2(A'_{u^k})^* (Au^k - f),$$

где $J'_{W_2^l}$ – градиент по u функционала-невязки $J(u) = \| Au - f \|^2_{L_2}$ в пространстве W_2^l; A'_u – производная Фреше оператора A в точке u^k; β_k – шаг спуска на k-й итерации (β_k: $\min_\beta J(u^k - \beta J'^k_{W_2^l})$).

Начальное приближение u^0 в (8.133) нужно выбирать из класса функций соответствующей гладкости: $u^0 \in W_2^p[a, b]$, $p \geqslant l$, в частности, можно положить $u^0(x) = 0$.

Как следует из результатов разд. 8.1, при стремлении погрешности правой части f к нулю приближенное решение $u^{\bar{k}}$ при выборе номера последней итерации k по критерию невязки будет сходиться к точному решению уравнения (8.132) в норме пространства W_2^l.

Таким образом, для практического применения данного алгоритма необходимо найти способ определения градиента функционала $J(u)$ в пространстве W_2^l. Будем считать, что в нашем распоряжении есть алгоритм нахождения градиента в пространстве $L_2[a, b]$, который обозначим через J'_{L_2}.

Поскольку искомая функция $u(x)$ принадлежит пространству $W_2^l[a, b]$, то она непрерывно дифференцируема $(l-1)$ раз на сегменте $[a, b]$.

---

*Алифанов О.М. О методах решения некорректных обратных задач // ИФЖ. 1983. Т. 45, № 5. С. 742–752.

Алифанов О.М. Об одном способе учета априорной информации при решении некорректных обратных задач // ИФЖ. 1985. Т. 49, № 6. С. 925–932.

Пусть $u(x)$ получила малое приращение $\Delta u(x) \in W_2^l$. Тогда линейная часть соответствующего приращения функционала J выражается через скалярное произведение в пространстве W_2^l элемента Δu и градиента $J'_{W_2^l}$

$$\Delta J = (\Delta u,\ J'_{W_2^l})_{W_2^l}, \tag{8.134}$$

где

$$(\Delta u,\ J'_{W_2^l})_{W_2^l} = \sum_{n=0}^{l} \int_a^b r_n \frac{d^n J'_{W_2^l}}{dx^n} \frac{d^n \Delta u}{dx^n} dx.$$

Величины $r_n = r_n(x)$ — заданные неотрицательные непрерывные функции, играющие роль весов, причем $r_0,\ r_l > 0$. С их помощью учитывается влияние каждой из производных на искомую функцию $u(x)$ в различных точках сегмента $[a,\ b]$. Обычно принимают, что r_n — числовые множители, например $r_0 = r_1 = \ldots r_l = 1$.

Последовательно применяя операцию интегрирования по частям, скалярное произведение (8.134) можно преобразовать к виду, в котором под знаком интеграла функция $\Delta u(x)$ освобождена от дифференцирования (здесь предполагается, что $J'_{W_2^l}(x)$ и $r_n(x)$ обладают нужными непрерывными производными):

$$(\Delta u, J'_{W_2^l})_{W_2^l} = \int_a^b \Delta u(x) \sum_{n=0}^{l} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(r_n \frac{d^n J'_{W_2^l}}{dx^n}\right) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{l} (-1)^{n+1} \frac{d^{n-1} \Delta u(x)}{dx^{n-1}} \sum_{i=n}^{l} (-1)^{i+1} \times$$

$$\times \frac{d^{i-n}}{dx^{i-n}} \left(r_i \frac{d^i J'_{W_2^l}}{dx^i}\right)\Big|_{x=a}^{x=b}. \tag{8.135}$$

Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор $D^{2l} = \sum_{n=0}^{l} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(r_n \frac{d^n}{dx^n}\right)$ и зададим следующие условия на границах сегмента $[a,\ b]$:

$$\sum_{i=n}^{l} (-1)^{i+1} \frac{d^{i-n}}{dx^{i-n}} \left(r_i \frac{d^i J'_{W_2^l}}{dx^i}\right)\Big|_{x=L} = 0, \tag{8.136}$$

$$n = \overline{1, l}; \quad L = a, b.$$

Тогда из (8.135) получим

$$(\Delta u,\ J'_{W_2^l})_{W_2^l} = (\Delta u,\ D^{2l} J'_{W_2^l})_{L_2}.$$

Принимая во внимание (8.134), придем в результате к дифференциальному уравнению

$$\sum_{n=0}^{l} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(r_n \frac{d^n J'_{W_2^l}}{dx^n}\right) = J'_{L_2}(x), \quad x \in (a, b), \tag{8.137}$$

которое решается с учетом краевых условий (8.136).

Таким образом, получена **удобная форма** перехода от известного градиента функционала в пространстве L_2 к градиенту этого функционала в пространстве W_2^l.

В случае $u \in W_2^1$, который оказывается вполне пригодным для многих практических приложений, краевая задача (8.137), (8.136) принимает наиболее простой вид

$$r_0 J'_{W_2^1} - \frac{d}{dx}\left(r_1 \frac{dJ'_{W_2^1}}{dx}\right) = J'_{L_2}, \quad x \in (a, b); \tag{8.138}$$

$$\frac{dJ'_{W_2^1}}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{dJ'_{W_2^1}}{dx}\Big|_{x=b} = 0. \tag{8.139}$$

Полагая, что r_0 и r_1 являются числами, можно получить решение задачи (8.138), (8.139) через функцию Грина:

$$J'_{W_2^1}(x) = B_1 \exp[\rho x] + B_2 \exp[-\rho x] - \frac{1}{\rho r_1} \int_a^x J'_{L_2}(\xi) \operatorname{sh}[\rho(x-\xi)]\, d\xi,$$

$$x \in [a, b], \tag{8.140}$$

где $\rho = \sqrt{\dfrac{r_0}{r_1}}$, $B_1 = B_2 \exp[-2\rho a]$,

$$B_2 = \frac{\int_a^b J'_{L_2}(\xi) \operatorname{ch}[\rho(b-\xi)]\, d\xi}{\rho r_1 (\exp[\rho b - 2\rho a] - \exp[\rho a - 2\rho b])}.$$

Заметим, что при вычислении интеграла в (8.140) целесообразно учесть возможность аналитического интегрирования функции $\operatorname{sh} z$. В част-

ности, достаточно эффективная процедура расчета $\int_a^x \ldots d\xi$ получается при использовании простейшей ступенчатой аппроксимации функции $J'_{L_2}(x)$, $x \in [a, b]$:

$$\int_a^x J'_{L_2}(\xi)\,\mathrm{sh}[\rho(x-\xi)]\,d\xi \simeq \sum_{i=1}^{n} J'_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{sh}[\rho(x_n-\xi)]\,d\xi =$$

$$= \frac{-1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} J'_i \left\{\mathrm{ch}[\rho(x_n-x_i)] - \mathrm{ch}[\rho(x_n-x_{i-1})]\right\},$$

где $J'_i = J'_{L_2}\left(x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)$.

Аналогичным способом можно вычислить интеграл в выражении для константы B_2.

Учет количественной информации о решении. Вначале рассмотрим ситуацию, когда известны значения функции и (или) ее производных в граничных точках сегмента $[a, b]$. Эти данные можно учесть достаточно просто выбором начального приближения к решению и заданием соответствующих краевых условий для уравнения (8.137). Например, пусть известны значения производных $u'(a) = \alpha_1$ и $u'(b) = \beta_1$ Учтем эту информацию при выборе начального приближения, а именно, потребуем выполнения равенств $u^{0\prime}(a) = \alpha_1$, $u^{0\prime}(b) = \beta_1$. Если теперь воспользоваться решением (8.140) задачи (8 138), (8.139), то указанные условия будут удовлетворены точно в силу равенств (8.139). В том случае, когда известны значения функции $u(a) = \alpha_0$, $u(b) = \beta_0$, их учет при использовании пространства W_2^1 производится заменой краевых условий (8.139) на другие: $J'_{W_2^1}(a) = J'_{W_2^1}(b) = 0$. При этом начальное приближение задается, соблюдая равенства $u^0(a) = \alpha_0$, $u^0(b) = \beta_0$. Одновременный учет значений функции и первой производной на краях отрезка возможен при решении задачи (8.132) в пространстве W_2^2. В этом случае вместо условий (8.136) нужно задать $\frac{d^n J'_{W_2^2}(L)}{dx^n} = 0$, $L = a, b$, $n = 1, 2$ и соответствующим образом выбрать $u^0(x)$. В рамках условий (8.136) для $l = 2$ возможен учет значений второй производной на границах отрезка. Аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи задания априорной информации об искомом решении в точках a и b.

Рассматриваемый метод построения гладкого решения позволяет также учесть некоторую априорную информацию о функции и ее произ-

водных в ряде точек сегмента $[a, b]$. Выясним, что это за информация и способ ее учета.

Функции класса $W_2^l[a, b]$ могут быть представлены в следующей интегральной форме через обобщенную производную $u^{(l)}(x)$ [18]:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{l-1} C_n P_n(x) + \int_{x_1}^{x} d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_{x_l}^{\xi_{l-1}} u^{(l)}(\xi_l)\, d\xi_l, \tag{8.141}$$

где $C_n = u^{(n)}(x_{n+1})$, $n = \overline{0, l-1}$ — значения производных функции $u(x)$ до $(l-1)$ порядка в некоторых фиксированных точках $x_{n+1} \in [a, b]$; $P_n(x)$ — многочлен n-й степени.

Тождество (8.141) получается следующим образом. Если функция $u(x) \in L_2[a, b]$ имеет обобщенную l-ю производную $u^{(l)}(x) \in L_2[a, b]$, то она непрерывно дифференцируема $l-1$ раз на сегменте $[a, b]$ и производная $u^{(l-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. В этом случае для всех производных до $l-1$ порядка имеет место соотношение

$$u^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = \int_{x_n}^{\xi_{n-1}} u^{(n)}(\xi_n)\, d\xi_n + u^{(n-1)}(x_n), \quad n = \overline{1, l}.$$

Выражая $u(x)$ через $u'(\xi_1)$, затем $u'(\xi_1)$ через $u''(\xi_2)$ и т.д., придем к тождеству (8.141). Вид многочленов $P_n(x)$ легко получить для каждой конкретной задачи.

Обозначим $y(x) = \int_{x_1}^{x} d\xi_1 \int_{x_2}^{\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_{x_l}^{\xi_{l-1}} u^{(l)}(\xi_l)\, d\xi_l$ и подставим $u(x)$, записанную в форме (8.141), в итерационную последовательность (8.133). В результате имеем

$$y^{k+1}(x) + \sum_{n=0}^{l-1} C_n^{k+1} P_n(x) = y^k(x) + \sum_{n=0}^{l-1} C_n^k P_n(x) - \beta_k J'^k_{W_2^l}. \tag{8.142}$$

Далее предположим, что известны значения функции и ее производных в точках $\{x_n\}_0^{l-1}$, т.е. заданы числа C_n, $n = \overline{0, l-1}$. В этом случае формула (8.142) примет вид

$$y^{k+1}(x) = y^k(x) - \beta_k J'^k_{W_2^l},$$

причем начальное приближение $y^0(x)$ должно соответствовать условиям $u^{0(n)}(x_{n+1}) = C_n$, $n = \overline{0, l-1}$, в частности можно принять $u^0(x) =$

$= \sum_{n=0}^{l-1} C_n P_n(x)$, тогда $y^0(x) = 0$. Градиент $J'_{W_2^l}$ должен удовлетворять условиям $J'^{(n)}_{W_2^l}(x_{n+1}) = 0$, $n = \overline{0, l-1}$.

Данным способом можно точно удовлетворить l условиям в виде равенства для самой функции $u(x_1)$ и ее производных $u^{(n)}(x_{n+1})$, $n = \overline{1, l-1}$ — каждая из этих величин удовлетворяется в одной из точек сегмента $[a, b]$ (эти точки, конечно, могут и совпадать). Отсюда становится ясно, как выбирать значения x_{n+1}, $n = \overline{0, l-1}$.

Параметризованная форма решения. При решении ряда обратных задач и задач оптимального управления оказывается удобным представлять искомую функцию в следующей аппроксимационной форме:

$$u(x) \simeq \tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{M} a_j \varphi_j(x), \quad x \in [a, b], \tag{8.143}$$

где $\{\varphi_j(x)\}_1^M$ — заданная система базисных функций; $\mathbf{a} = \{a_j\}_1^M$ — подлежащий определению числовой вектор коэффициентов.

В качестве $\varphi_j(x)$ часто берутся кубические В-сплайны. Соответствующие функции (8.143) образуют подпространство в пространстве $W_2^l[a, b]$, $l \leqslant 3$.

Для определения $\mathbf{a} \in E_M$ воспользуемся итерационной формулой градиентного типа с остановом по невязке:

$$\mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^k - \beta_k \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{k}, \tag{8.144}$$

$$\bar{k} : J(\mathbf{a}^{\bar{k}}) = \| A\tilde{u}(x) - f_\delta \|^2_{L_2} \simeq \delta^2.$$

Поставим задачу: найти направление спуска $\mathbf{p}^k = \left\{ p_j^k \right\}_{j=1}^{j=M}$ на каждой итерации таким образом, чтобы обеспечить сходимость приближений $\tilde{u}^k(x)$ по норме пространства W_2^l. Для простоты, как и раньше ограничимся в этом рассмотрении методом скорейшего спуска.

Пусть искомая функция $\tilde{u}(x) \in W_2^l[a, b]$ получила малое приращение $\Delta\tilde{u}(x) \in W_2^l[a, b]$. Тогда линейная часть соответствующего приращения функционала J может быть представлена в виде скалярного произведения в пространстве $W_2^l[a, b]$:

$$\Delta J = (\Delta\tilde{u}, J'_{W_2^l})_{W_2^l} \equiv \sum_{n=0}^{l} \int_a^b r_n \frac{d^n J'_{W_2^l}}{dx^n} \frac{d^n \Delta\tilde{u}}{dx^n} dx. \tag{8.145}$$

Так как $\tilde{u}(x)$ имеет вид (8.143), для приращения $\Delta\tilde{u}(x)$ получим

$$\Delta\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{M} \Delta a_j \varphi_j(x). \tag{8.146}$$

Принимая во внимание, что вектор **p** в итерационной последовательности (8.144) соответствует методу скорейшего спуска, запишем аналогичное представление для градиента функционала в пространстве W_2^l

$$J'_{W_2^l} = \sum_{j=1}^{M} p_j \varphi_j(x). \tag{8.147}$$

После подстановки (8.146), (8.147) в формулу (8.145) и некоторых преобразований придем к следующему выражению:

$$\Delta J = (\Delta \mathbf{a}, \mathrm{v})_{\mathrm{E_M}}, \tag{8.148}$$

где $\Delta\mathbf{a} = \left\{ \Delta a_j \right\}_1^M$; $\mathbf{v} = \left\{ \mathrm{v}_j \right\}_1^M$, $\mathrm{v}_j = \sum_{i=1}^{M} p_i \cdot (\varphi_j, \varphi_i)_{W_2^l}$, $(,)_{\mathrm{E}_M}$ – скалярное произведение в пространстве E_M.

Из формулы (8.148) следует, что вектор **v** есть градиент функционала J в пространстве E_M, откуда получаем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления компонентов p_j, если известны компоненты v_j,

$$\sum_{i=1}^{M} p_i b_{ji} = \mathrm{v}_j, \quad j = \overline{1, M}, \tag{8.149}$$

где $b_{ji} = (\varphi_j, \varphi_i)_{W_2^l}$.

Матрица этой системы симметричная, положительно определенная, и для решения (8.149) могут быть использованы хорошо известные в линейной алгебре методы, учитывающие эти особенности.

Правая часть системы (8.149) – градиент функционала по **a** – может быть найдена через решение сопряженной краевой задачи (см. разд. 8.4).

Изложенный подход к учету качественной и количественной информации позволяет *строить эффективные вычислительные алгоритмы.* Он может быть также распространен на многомерные обратные задачи.

Замечание 1. В этом разделе рассматривались обратные задачи по определению одной из причинных характеристик. На практике может возникнуть необходимость нахождения из решения обратной задачи некоторой вектор-функции, например, двух граничных условий, граничного и начального условий, нескольких теплофизических характеристик и т.д. В этом случае, как показано в [18], шаг спуска β в градиентных

алгоритмах целесообразно рассматривать не как скалярную, а как *векторную величину*, имеющую размерность, равную числу определяемых величин. Это заметно увеличивает быстродействие алгоритмов, а также улучшает качество получаемых приближений. Такие модифицированные градиентные методы будут построены в качестве примера в разд. 8.6.

8.5.5. О СПОСОБАХ ОСТАНОВА ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ, НЕ ТРЕБУЮЩИХ ЗНАНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ПОГРЕШНОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Из теоретических результатов, приведенных в разд. 8.1, и данных вычислительных экспериментов гл. 6 следует, что итерационный процесс решения некорректной обратной задачи включает в себя две стадии, которые условно назовем регулярной и нерегулярной. Регулярная стадия характеризуется монотонным стремлением приближений к искомому решению задачи. При этом выявляются и уточняются основные особенности восстанавливаемых зависимостей. На второй стадии уже нельзя гарантировать получение лучших приближений. Обычно в них постепенно развиваются нежелательные осцилляции, обусловленные ошибками исходных данных.

Таким образом, главный вопрос практического применения регуляризируемого итерационного метода заключается в определении момента останова, т.е. такого номера итерации, который разграничивает указанные стадии.

Математически обоснованным и наиболее распространенным критерием прекращения итераций является останов по условию невязки, когда минимизируемый функционал-невязка достигает значения суммарной погрешности экспериментальных данных (см. разд. 8.1).

Успешное применение критерия невязки сопряжено с необходимостью априорного знания достаточно точной оценки погрешности исходных данных. Однако на практике это требование выполняется далеко не всегда. Поэтому возникает необходимость поиска других способов выбора приближений. Рассмотрим три возможных эмпирических способа прекращения итерационного процесса.

Останов по дополнительному измерению. Этот подход изложим на примере одномерной граничной ОЗТ, отметив при этом, что он может быть использован и для решения других обратных задач. Пусть отыскивается функция $u(\tau)$, характеризующая тепловой режим на одной из границ тела, в предположении, что на другой граничное условие известно. В этом случае минимально необходимым (с точки зрения единственности решения ОЗТ) является задание температурных измерений $T(d, \tau) = f(\tau)$ в одной из точек тела (см. разд. 2.2). Предположим теперь, что в точках d_1 и d_2 тела, которые могут и совпадать, известны две реализации температур

$$f_{\delta_1}(\tau) = f_1(\tau) + \Delta f_1(\tau), \quad f_{\delta_2}(\tau) = f_2(\tau) + \Delta f_2(\tau),$$

когда точные значения $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ аддитивно возмущены независимыми случайными помехами $\Delta f_1(\tau)$ и $\Delta f_2(\tau)$.

Будем строить итерационное решение ОЗТ, используя в качестве входных данных реализацию $f_{\delta_1}(\tau)$ По мере увеличения числа итераций, начиная с некоторых номеров, кривые $u^k(\tau)$ все больше и больше отклоняются от искомого решения, "подгоняясь" под возмущенные значения температуры $f_{\delta_1}(\tau)$. В соответствии с таким ходом процесса приближений невязка $\Delta(u^k(\tau), f_2(\tau)) = \left\{ \int_0^{\tau_m} [T(u_k(\tau), d_2, \tau) - f_2(\tau)]^2 \right\}^{1/2}$, вычисленная в точке d_2 для точной температуры $f_2(\tau)$, в начале итерационного процесса уменьшается с ростом k, а затем, проходя через минимум, будет увеличиваться. Естественно, что величина $u^{\bar{k}}(\tau)$, отвечающая этому минимуму, будет хорошим приближением к $u_т(\tau)$.

Отсюда можно сделать предположение, учитывая условие взаимной некоррелированности помех $\Delta f_1(\tau)$ и $\Delta f_2(\tau)$, что минимум невязки $\Delta(u^k(\tau), f_{\delta_2}(\tau))$, соответствующей возмущенной температуре $f_{\delta_2}(\tau)$, располагается в области номеров итераций, близких к $\bar{k}$. Поэтому первый способ останова будет основываться на определении такого номера итерации $\tilde{k}$, при котором реализуется минимум этой невязки:

$$\tilde{k} : \min_k \Delta(u^k(\tau), f_{\delta_2}(\tau)).$$

Такой способ прекращения итераций* представляет собой распространение на итерационные методы способа выбора параметра регуляризации, указанного в [51].

Замечание 2. С практической точки зрения две случайные реализации температуры $f_{\delta_1}(\tau)$ и $f_{\delta_2}(\tau)$ могут быть получены с помощью двух различных термодатчиков. Если же $d_1 = d_2$ и датчик один, то из экспериментальной кривой $f_\delta(\tau)$ выбираются два временных ряда $\left\{ f^1_{\delta_l} \right\}$ и $\left\{ f^2_{\delta_l} \right\}$ Для этой цели используются разные шаги дискретизации непрерывного процесса измерения, а также "сдвиг" временных сеток регистрации температуры. И в том и в другом случае необходимо, с одной стороны, избежать коррелированности данных (так как полезный сигнал обычно отягощен небелым шумом), а с другой – исключить эффект маскировки частот полезного сигнала.

---

*Алифанов О.М. Некоторые вопросы решения обратных задач теплопроводности и автоматизированной обработки данных в теплофизических исследованиях // ИФЖ. 1980. Т. 39. № 2. С. 211–219.



Рис. 8.5. Изменение невязки по итерациям

Традиционный останов по "слипанию". При решении некорректно поставленных обратных задач в ряде случаев можно использовать способ прекращения итераций по условию близости с точностью ϵ соседних приближений, например, $\bar{k} \;\; \| u^{\bar{k}+1} - u^{\bar{k}} \| \leqslant \epsilon$. Такая ситуация, в частности, возникает при предварительном сглаживании входных данных (см. разд. 6.7, 6.8). К подобному приему можно прибегнуть и при использовании шаговой регуляризации решения. В первую очередь, это относится к алгоритмам, учитывающим гладкость восстанавливаемой функции, поскольку эти алгоритмы обладают заметными фильтрационными свойствами по отношению к высокочастотной погрешности во входных данных. Наконец, этот подход дает неплохие результаты также в случае, когда при решении обратной задачи учитывается несколько некоррелированных между собой измерений в одной или ряде пространственных точек. Здесь механизм "срабатывания" примерно тот же, что при останове по дополнительному измерению.

Останов по приращению функционала. Данный способ основывается на характерном изменении функционала-невязки по итерациям (рис. 8 5) – в начале процесса происходит быстрое уменьшение этой величины, затем скорость ее изменения резко падает. В результате кривая $\sqrt{J(k)}$ может иметь достаточно резкий изгиб, разделяющий две области – быстрого и медленного изменения невязки. Причем, для итерационных алгоритмов, восстанавливающих гладкие приближения, точка "излома" становится особенно заметной – при номерах k, больших номера, примерно соответствующего излому, кривая $\sqrt{J\ (k)}$ имеет четко выраженную "полку" Область значений номеров k, где происходит резкий изгиб этой кривой, обычно дает вполне удовлетворительные приближения к искомому решению некорректной обратной задачи.

Объясним причину такого поведения невязки на примере линейной задачи В этом случае градиент $J'^k = A^*(Au^k - f_\delta) = \bar{J}'^k - \Delta J'^k$ состоит из двух слагаемых: градиента для точных данных $\bar{J}'^k = A^*(Au^k - f)$ и дополнительного члена $A^*\Delta f$, учитывающего наличие помехи. Помеха часто представляет собой реализацию некоторого случайного процесса и по времени Δf имеет ярко выраженный флуктуационный характер. При этом точная зависимость $f(\tau)$ – это, как правило, гладкая функция, которая меняется во времени существенно более медленно по сравнению с высокочастотной помехой $\Delta f(\tau)$. Сопряженный оператор A^*, так же как и оператор прямой задачи A, является сильно сглаживающим, что оказывает демпфирующее влияние на погрешность входных данных. В результате на первых итерациях $\bar{J}'^k \geqslant \Delta J'^k$ и итерационный процесс развивается почти так же, как и при $\Delta f = 0$. По мере приближе-

ния к искомому решению величина $\bar{J}'^k$ резко уменьшается, соответственно уменьшается J'^k и итерационный процесс сильно замедляется.

Замечание 3. Для граничных ОЗТ рассмотренный выше эффект усиливается при удалении точки измерения от границы с восстанавливаемой функцией, так как возрастает сглаживающее свойство оператора A^*.

8.6. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

8.6.1. ГРАНИЧНАЯ ОЗТ В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Рассмотрим задачу восстановления плотностей тепловых потоков на двух границах пластины $q_1(\tau)$ и $q_2(\tau)$, полагая, что теплофизические характеристики материала постоянны и имеются данные о температуре в N точках тела:

$$T_\tau = aT_{xx}, \quad (x, \tau) \in Q \in (0, b) \times (0, \tau_m]; \tag{8.150}$$

$$T(x, 0) = 0, \quad x \in [0, b]; \tag{8.151}$$

$$-\lambda T_x(0, \tau) = q_1(\tau), \; -\lambda T_x(b, \tau) = q_2(\tau), \; \tau \in [0, \tau_m]; \tag{8.152}$$

$$T(d_i, \tau) = f_i(\tau), \; \tau \in [0, \tau_m], \quad i = \overline{1, N}, \quad N \geqslant 2,$$

$$0 \leqslant d_1 < \ldots < d_N \leqslant b,$$

где a, $\lambda = \text{const} > 0$ и $f_i(\tau)$ — известные величины.

Для заданных приближений к искомой вектор-функции $q(\tau) = \{q_1(\tau), \; q_2(\tau)\}$ запишем решение прямой задачи (8.150) – (8.152) через функцию Грина $G(x, x', \tau - \tau')$:

$$A_i q = A_{1i} q_1 + A_{2i} q_2,$$

где $A_i q = T(q, d_i, \tau)$;

$$A_{1i} q_1 = a \int_0^\tau q_1(\tau') G(d_i, 0, \tau - \tau')\, d\tau';$$

$$A_{2i} q_2 = -a \int_0^\tau q_2(\tau')\, G(d_i, b, \tau - \tau')\, d\tau'.$$

Составим функционал-невязку с весовыми коэффициентами $\rho_i(\tau)$:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau) [(A_i q)(\tau) - f_i(\tau)]^2\, d\tau$$

и вычислим его градиент в пространстве $L_2[0, \tau_m]$ (см. разд. 8.2)

$$J'_q = \left\{ J'_{q_1},\ J'_{q_2} \right\}.$$

Компонентами J'_q являются величины

$$J'_{q_j} = \sum_{i=1}^{N} A^*_{ji} z_i, \quad j = 1, 2,$$

где $z_i = \rho_i(\tau)[(A_i q)(\tau) - f_i(\tau)]$,

$$A^*_{1i} z_i = a \int_{\tau}^{\tau_m} z_i(\tau') G(d_i, 0, \tau - \tau')\, d\tau',$$

$$A^*_{2i} z_i = -a \int_{\tau}^{\tau_m} z_i(\tau') G(d_i, b, \tau - \tau')\, d\tau'.$$

Будем искать равномерное приближение к точному решению, воспользовавшись первым способом учета гладкости (см. разд. 8.5.2). В этом случае *модифицированный алгоритм скорейшего спуска* имеет вид (см. формулу (8.128))

$$q_j^{k+1}(\tau) = q_j^k(\tau) - \beta^0_{jk} P^k_j(\tau) - \beta^1_{jk} J'^k_{C_j}, \quad j = 1, 2; \tag{8.153}$$

$$k = 0, 1, \ldots, \bar{k},$$

$$q_j^0(\tau) = g_j(\tau), \tag{8.154}$$

где $P^k_j(\tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int_{\tau'}^{\tau_m} J'^k_{q_j}(\eta)\, d\eta$, $J'^k_{C_j} = \int_0^{\tau_m} J'^k_{q_j}(\tau)\, d\tau$; (8.155)

$g_j(\tau) \in W_2^l[0, \tau_m]$, $l \geqslant 1$ — заданная функция.

Числовые коэффициенты β^0_{jk}, β^1_{jk} находятся из условия

$$\beta^r_{jk} : \min_{\beta^r_j} J[q^{k+1}], \quad j = 1, 2; \quad r = 0, 1,$$

$$J(q^{k+1}) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)[A_{1i}(q_1^k - \beta^0_1 P^k_1 - \beta^1_1 J'^k_{C_1}) +$$

$$+ A_{2i}(q_2^k - \beta^0_2 P^k_2 - \beta^1_2 J'^k_{C_2}) - f_i]^2\, d\tau.$$

Вычисляя производные $\partial J[q^{k+1}]/\partial \beta^r_{jk}$, $j = 1, 2$; $r = 0,1$ и прирав-

нивая их нулю, после несложных преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения β_{jk}^{r}:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}^{k}\beta_{1k}^{0}+a_{12}^{k}\beta_{1k}^{1}+a_{13}^{k}\beta_{2k}^{0}+a_{14}^{k}\beta_{2k}^{1}=b_{1}^{k};\\
&a_{21}^{k}\beta_{1k}^{0}+a_{22}^{k}\beta_{1k}^{1}+a_{23}^{k}\beta_{2k}^{0}+a_{24}^{k}\beta_{2k}^{1}=b_{2}^{k};\\
&a_{31}^{k}\beta_{1k}^{0}+a_{32}^{k}\beta_{1k}^{1}+a_{33}^{k}\beta_{2k}^{0}+a_{34}^{k}\beta_{2k}^{1}=b_{3}^{k};\\
&a_{41}^{k}\beta_{1k}^{0}+a_{42}^{k}\beta_{1k}^{1}+a_{43}^{k}\beta_{2k}^{0}+a_{44}^{k}\beta_{2k}^{1}=b_{4}^{k}
\end{aligned}\right\} \qquad (8.156)$$

Коэффициенты и правые части этой системы находятся по формулам

$$a_{nl}^{k}=\sum_{i=1}^{N}(\rho_i \mathrm{v}_{ni}^{k}, \mathrm{v}_{li}^{k})_{L_2[0,\tau_m]},\quad b_{n}^{k}=\sum_{i=1}^{N}(z_i^{k}, \mathrm{v}_{nl}^{k})_{L_2[0,\tau_m]}, \qquad (8.157)$$

где $\mathrm{v}_{1i}^{k}=A_{1i}P_1^{k}$, $\mathrm{v}_{2i}^{k}=A_{1i}J_{C_1}^{\prime k}$, $\mathrm{v}_{3i}^{k}=A_{2i}P_2^{k}$,

$\mathrm{v}_{4i}^{k}=A_{2i}J_{C_2}^{\prime k}$, $z_i^{k}=\rho_i(A_i q^{k}-f_i)$.

Построенный алгоритм естественным образом упрощается, если одна из функций $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ является известной или заданы значения $q_1(0)$ и (или) $q_2(0)$.

Аналогичным образом строится модифицированный алгоритм сопряженных градиентов.

8.6.2. ГРАНИЧНАЯ ОЗТ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Пусть требуется восстановить вектор-функцию $q(\tau)=\{q_1(\tau), q_2(\tau)\}$ плотностей тепловых потоков из решения следующей обратной задачи:

$$C(T)T_\tau=(\lambda(T)T_x)_x,\quad (x,\tau)\in Q_\tau=\{d_0(\tau)<x<d_{N+1}(\tau),$$
$$0<\tau\leqslant\tau_m\}; \qquad (8.158)$$

$$T(x,0)=\xi(x),\quad d_0(0)\leqslant x\leqslant d_{N+1}(0); \qquad (8.159)$$

$$-\lambda(T)T_x|_{x=d_0(\tau)}=q_1(\tau);\quad -\lambda(T)T_x|_{x=d_{N+1}(\tau)}=q_2(\tau);$$

$$\tau\in[0,\tau_m]. \qquad (8.160)$$

Целевой функционал возьмем в виде

$$J(q)=\sum_{i=1}^{N+1}\int_0^{\tau_m}\rho_i(\tau)e_i^2(\tau)\,d\tau, \qquad (8.161)$$

где $\rho_i(\tau)$ – весовые множители; $e_i(\tau)=T(q(\tau), d_i(\tau), \tau)-f_i(\tau)$.

Данная постановка ОЗТ является частным случаем более общей задачи, рассмотренной в разд. 8.4.4. Поэтому градиент невязки (8.161) задается формулами (8.90) и (8.91), а постановки задачи для приращения температуры и сопряженной задачи соответственно следуют из условий (8.48) – (8.50) и (8.83) – (8.88), причем в правой части условия (8.88) вместо нуля нужно поставить величину $2\rho_{N+1}(\tau)\, e_{N+1}(\tau)$, так как на границе $d_{N+1}(\tau)$ задано температурное измерение. В итоге получим следующие результаты.

Задача для приращения температуры:

$$\mathrm{v}_\tau = a_1 \mathrm{v}_{xx} + a_2 \mathrm{v}_x + a_3 \mathrm{v}, \quad (x, \tau) \in Q_\tau; \tag{8.162}$$

$$\mathrm{v}(x, 0) = 0; \tag{8.163}$$

$$-\lambda(d_0(\tau), \tau)\mathrm{v}_x(d_0(\tau), \tau) = \Delta q_1(\tau); \tag{8.164}$$

$$-\lambda(d_{N+1}(\tau), \tau)\mathrm{v}_x(d_{N+1}(\tau), \tau) = \Delta q_2(\tau),$$

где $a_1 = \dfrac{\lambda(x, \tau)}{C(x, \tau)}$, $a_2 = \dfrac{2\lambda_x(x, \tau)}{C(x, \tau)}$,

$$a_3 = \frac{1}{C(x, \tau)}[\lambda_{xx}(x, \tau) - C_\tau(x, \tau)].$$

Сопряженная задача:

$$-\psi_{i\tau} = (a_1 \psi_i)_{xx} - (a_2 \psi_i)_x + a_3 \psi_i, \quad i = \overline{1, N+1}; \tag{8.165}$$

$$(x, \tau) \in Q_\tau,$$

$$\psi_i(x, \tau_m) = 0, \quad i = \overline{1, N+1}; \tag{8.166}$$

$$\psi_i(d_i(\tau), \tau) - \psi_{i+1}(d_i(\tau), \tau) = 0, \quad i = \overline{1, N}; \tag{8.167}$$

$$[(a_1 \psi_i)_x - (a_1 \psi_{i+1})_x]_{x = d_i(\tau)} = 2\rho_i(\tau) e_i(\tau), \quad i = \overline{1, N}; \tag{8.168}$$

$$[(a_1 \psi_1)_x - \psi_1 (d_0' + \frac{a_2}{2})]_{x = d_0(\tau)} = 0; \tag{8.169}$$

$$[(a_1 \psi_{N+1})_x - \psi_{N+1}(d_{N+1}' + \frac{a_2}{2})]_{x = d_{N+1}(\tau)} =$$

$$= 2\rho_{N+1}(\tau) e_{N+1}(\tau). \tag{8.170}$$

Градиент функционала: $J_q' = \left\{ J_{q_1}', J_{q_2}' \right\}$,

$$J_{q_1}' = \frac{\psi_1(d_0(\tau), \tau)}{C(d_0(\tau), \tau)}; \quad J_{q_2}' = -\frac{\psi_{N+1}(d_{N+1}(\tau), \tau)}{C(d_{N+1}(\tau), \tau)}.$$

Для решения поставленной ОЗТ используем градиентный метод,

дающий решение первого порядка гладкости. В частности, остановимся на алгоритме (8.153) – (8.155), в котором шаги спуска β^0_{jk}, β^1_{jk} в общем случае находятся из решения задачи минимизации функционала-невязки на данной итерации. Для этого могут применяться известные методы безусловной оптимизации.

Основной недостаток такого подхода заключается в больших затратах машинного времени, поскольку требуется многократно вычислять значения функционала, и следовательно, многократно решать задачу теплопроводности, варьируя значениями искомых параметров.

Как показали вычислительные эксперименты по решению различных нелинейных ОЗТ, задачу определения шагов спуска обычно можно упростить, используя прием линеаризации. Остановимся на этом вопросе.

Запишем выражение для целевого функционала на $k+1$ итераций в виде

$$J(q^{k+1}) = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)[T(q^k(\tau), d_i(\tau), \tau) + \\ + \mathrm{v}(\Delta q_1^k(\tau), \Delta q_2^k(\tau), d_i(\tau), \tau) - f_i(\tau)]^2 \, d\tau, \qquad (8.171)$$

где $\mathrm{v}(\Delta q_1^k(\tau), \Delta q_2^k(\tau), d_i(\tau), \tau)$ – приращение температуры в точке $x = d_i(\tau)$ при изменении искомых функций на величины $\Delta q_1^k(\tau)$ и $\Delta q_2^k(\tau)$.

В линейном приближении функция $\mathrm{v}(\Delta q_1^k, \Delta q_2^k, x, \tau)$ находится из решения краевой задачи для приращения температуры (8.162) – (8.164). Поскольку эта задача является линейной, можно воспользоваться принципом суперпозиции, записав ее решение как сумму решений, соответствующих тем или иным воздействиям:

$$\mathrm{v}(\Delta q_1^k, \Delta q_2^k, x, \tau) = \mathrm{v}(\Delta q_1^k, 0, x, \tau) + \mathrm{v}(0, \Delta q_2^k, x, \tau) = \\ = -\beta^0_{1k}\mathrm{v}(P_1^k, 0, x, \tau) - \beta^1_{1k}(J'^k_{C_1}, 0, x, \tau) - \\ - \beta^0_{2k}\mathrm{v}(0, P_2^k, x, \tau) - \beta^1_{2k}\mathrm{v}(0, J'^k_{C_2}, x, \tau). \qquad (8.172)$$

Подставляя (8.172) в формулу (8.171) и используя необходимые условия экстремума $\partial J(q^{k+1})/\partial\beta^r_{jk} = 0$, $j = 1, 2$, $r = 0,1$, получим систему алгебраических уравнений вида (8.156) для вычисления шагов спуска. В этой системе коэффициенты и правые части задаются выражениями вида (8.157) с пределами суммирования $N+1$, в которых величины v^k_{ni} и z^k_i определяются соответствующими приращениями температуры

$$\mathrm{v}^k_{1i} = \mathrm{v}(P_1^k, 0, d_i, \tau), \quad \mathrm{v}^k_{2i} = \mathrm{v}(J'^k_{C_1}, 0, d_i, \tau),$$

$$\mathrm{v}^k_{3i} = \mathrm{v}(0, P_2^k, d_i, \tau), \quad \mathrm{v}^k_{4i} = \mathrm{v}(0, J'^k_{C_2}, d_i, \tau),$$

$$z^k_i = \rho_i(\tau)[T(q^k(\tau), d_i, \tau) - f_i(\tau)].$$

Таким образом, для получения линейной оценки вектора шагов спуска необходимо четыре раза решить краевую задачу (8.162) – (8.164) при задании соответственно граничных условий

$$\left\{\Delta q_1,\ \Delta q_2\right\} = \left\{P_1^k(\tau), 0\right\}, \quad \left\{J_{C_1}'^k, 0\right\}, \quad \left\{0, P_2^k(\tau)\right\},$$

$$\left\{0, J_{C_2}'^k\right\}.$$

Естественно, что если какие-то из величин $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$, $q_1(0)$, $q_2(0)$ известны, то размерность алгебраической системы соответствующим образом уменьшается.

Замечание 1. Изложенная схема приближенного определения вектора шагов спуска может быть использована и для других нелинейных многопараметрических обратных задач.

Для численного решения рассматриваемой обратной задачи удобно перейти к пространственным координатам y_i, связанным с перемещающимися границами. Введем новые переменные [21]

$$y_i = \frac{x - d_{i-1}(\tau)}{d_i(\tau) - d_{i-1}(\tau)}, \quad i = \overline{1, N+1}; \quad t = \tau.$$

При этом подобласти $\bar{Q}_{i\tau} = \left\{(x, \tau): d_{i-1}(\tau) \leqslant x \leqslant d_i(\tau),\ 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m\right\}$, $i = \overline{1, N+1}$ преобразуются в подобласти $\bar{Q}_i = \left\{(y_i, t): 0 \leqslant y_i \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \tau_m\right\}$, $i = \overline{1, N+1}$, т.е. происходит выпрямление границ соответствующих слоев. В новых переменных любая функция $w(x, \tau)$ имеет вид

$$w(x, \tau) = w(d_{i-1}(\tau) + y_i\,[d_i(\tau) - d_{i-1}(\tau)], \tau) = \bar{w}(y_i, t). \qquad (8.173)$$

Производные по x и τ связаны с производными по y_i и t следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y_i}\ \frac{\partial y_i}{\partial x} = \frac{1}{h_i(\tau)}\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y_i}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{h_i^2(\tau)}\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y_i^2};\\
&\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y_i}\ \frac{\partial y_i}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} - \frac{1}{h_i(\tau)}\,[d_{i-1}'(\tau) +\\
&+ y_i h_i'(\tau)]\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial y_i},
\end{aligned}\right\} \qquad (8.174)$$

где $h_i(\tau) = d_i(\tau) - d_{i-1}(\tau)$.

Краевые задачи (8.158) – (8.160), (8.162) – (8.164) и (8.165) – (8.170), записанные в новых переменных с учетом (8.173) и (8.174),

примут следующий вид (черточки над соответствующими величинами опущены):

Прямая задача:

$$C(T)T_{it} = \frac{1}{h_i^2(t)}(\lambda(T)T_{iy_i})_{y_i} + \frac{C(T)}{h_i(t)}[d'_{i-1}(t) + y_i h'_i(t)]T_{iy_i},$$

$$0 < y_i < 1, \quad i = \overline{1, N+1}, \quad 0 < t \leqslant \tau_m;$$

$$T_i(y_i, 0) = \xi_i(y_i), \quad 0 \leqslant y_i \leqslant 1, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$-\frac{\lambda(T)}{h_1(t)} T_{1y_1}\Big|_{y_1=0} = q_1(t); \quad -\frac{\lambda(T)}{h_{N+1}(t)} T_{N+1\,y_{N+1}}\Big|_{y_{N+1}=1} =$$

$$= q_2(t);$$

$$T_i(1, t) = T_{i+1}(0, t), \quad i = \overline{1, N};$$

$$h_{i+1}(t)T_{iy_i}\Big|_{y_i=1} = h_i(t)T_{i+1\,y_{i+1}}\Big|_{y_{i+1}=0}, \quad i = \overline{1, N};$$

$$T_i(1, t) = f_i(t), \quad i = \overline{1, N+1},$$

где $T_i = T_i(y_i, t)$ – температурное поле в слое $0 \leqslant y_i \leqslant 1$.

Задача для приращения температуры:

$$v_{it} = a_1^i(y_i, t)v_{iy_iy_i} + a_2^i(y_i, t)v_{iy_i} + a_3^i(y_i, t)v_i,$$

$$0 < y_i < 1, \quad 0 < t \leqslant \tau_m, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$v_i(y_i, 0) = 0, \quad 0 \leqslant y_i \leqslant 1, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$-\frac{1}{h_1(t)}[\lambda_{1\,y_1} v_1 + \lambda_1 v_{1\,y_1}]_{y_1=0} = \Delta q_1(t);$$

$$-\frac{1}{h_{N+1}(t)}[\lambda_{N+1\,y_{N+1}} v_{N+1} + \lambda_{N+1} v_{N+1\,y_{N+1}}]_{y_{N+1}=1} =$$

$$= \Delta q_2(t);$$

$$v_i(1, t) = v_{i+1}(0, t), \quad i = \overline{1, N};$$

$$h_i(t)v_{i\,y_i}\Big|_{y_i=1} = h_{i+1}(t)v_{i+1\,y_{i+1}}\Big|_{y_{i+1}=0}, \quad i = \overline{1, N},$$

где

$$a_1^i(y_i, t) = \frac{1}{h_i^2(t)} \frac{\lambda_i(y_i, t)}{C_i(y_i, t)};$$

$$a^i_2(y_i, t) = \frac{2}{h_i^2(t)\, C_i(y_i, t)}\ \lambda_{i\, y_i}(y_i, t) +$$

$$+ \frac{1}{h_i(t)}\ [\, d'_{i-1}(t) + y_i h'_i(t)];$$

$$a^i_3(y_i, t) = \frac{1}{h_i^2(t)\, C_i(y_i, t)}\ \lambda_{i\, y_i y_i}(y_i, t) +$$

$$+ \frac{1}{h_i(t)\, C_i(y_i, t)}\ C_{i\, y_i}(y_i, t)\, [\, d'_{i-1}(t) + y_i h'_i(t)] -$$

$$- \frac{1}{C_i(y_i, t)}\ C_{it}(y_i, t).$$

Сопряженная задача:

$$-\psi_{it} = (a^i_1\, \psi_i)_{y_i y_i} - (a^i_2\, \psi_i)_{y_i} + a^i_3\, \psi_i, \quad 0 < y_i < 1, \quad i = \overline{1, N+1},$$

$$0 \leqslant t < \tau_m;$$

$$\psi_i(y_i, \tau_m) = 0, \quad 0 \leqslant y_i \leqslant 1, \quad i = \overline{1, N+1};$$

$$\psi_i(1, t) = \psi_{i+1}(0, t), \quad i = \overline{1, N};$$

$$\frac{1}{h_i(t)}\, (a^i_1\, \psi_i)_{y_i}\Big|_{y_i = 1} - \frac{1}{h_{i+1}(t)}\, (a^{i+1}_1\, \psi_{i+1})_{y_{i+1}}\Big|_{y_{i+1} = 0} =$$

$$= 2\rho_i(t)[T_i(1, t) - f_i(t)], \quad i = \overline{1, N};$$

$$[(a^1_1\, \frac{\lambda_1 y_1}{\lambda_1} - a^1_2)\, \psi_1 + (a^1_1\, \psi_1)_{y_1}]_{y_1 = 0} = 0;$$

$$[(a^{N+1}_1\, \frac{\lambda_{N+1}\, y_{N+1}}{\lambda_{N+1}} - a^{N+1}_2)\, \psi_{N+1} +$$

$$+ (a^{N+1}_1\, \psi_{N+1})_{y_{N+1}}]_{y_{N+1} = 1} = 2\rho_{N+1}(t)[T_{N+1}(1, t) - f_{N+1}(t)].$$

Выполненные преобразования краевых задач позволяют упростить их аппроксимацию, поскольку подобласти $\bar{Q}_i$ являются прямоугольными, в них вводятся прямоугольные разностные сетки и нет специфических трудностей аппроксимации уравнений в окрестности криволинейных границ. Правда, это удобство сопряжено с усложнением аппроксимируемых уравнений по сравнению с исходными.

8.6.3. КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОЗТ

В качестве искомой функции будем рассматривать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры $\lambda(T)$ при следующих условиях:

$$C(T)T_\tau = (\lambda(T)T_x)_x, \quad (x, \tau) \in Q = (0, b) \times (0, \tau_m]; \tag{8.175}$$

$$T(x, 0) = \xi_0, \quad x \in [0, b]; \tag{8.176}$$

$$T(0, \tau) = T_1(\tau), \quad T(b, \tau) = T_2(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]; \tag{8.177}$$

$$T(d_i, \tau) = f_i(\tau), \quad i = \overline{1, N}, \quad \tau \in [0, \tau_m], \tag{8.178}$$

$$0 < d_1 < \ldots < d_N < b$$

где $C(T)$; $T_1(\tau)$; $T_2(\tau)$; $f_i(\tau)$, $i = \overline{1, N}$ – известные функции; ξ_0; b; τ_m; d_i, $i = \overline{1, N}$ – заданные числа.

Областью определения функции $\lambda(T)$ будет отрезок $[T_0, T_M]$, где T_0, T_M – соответственно наименьшее и наибольшее значения температуры в области Q. Так как уравнение (8.175) однородное, то согласно принципу максимума температуры T_0 и T_M реализуются на границах отрезка $[0, b]$. Следовательно, T_0 и T_M известны до решения ОЗТ (определяются наименьшим и наибольшим значениями функций $T_1(\tau)$ и $T_2(\tau)$).

Следуя методу итерационной регуляризации и полагая, что граничные функции $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ известны достаточно точно, рассмотрим экстремальную задачу по определению величины $\lambda(T)$ в рамках модели (8.175) – (8.178) из условия

$$\lambda(T): \min_{\lambda(T)} |J(\lambda) - \delta_J^2|,$$

где

$$J(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)[T(\lambda, d_i, \tau) - f_i(\tau)]^2 \, d\tau -$$

–функционал-невязка; δ_J^2 – минимально допустимый уровень невязки, определяющийся погрешностью задания функций $f_i(\tau)$.

Параметризуем искомую величину $\lambda(T)$, взяв в качестве базисных функций *кубические* B-*сплайны* [92]. Для этого построим на отрезке $[T_0, T_M]$ равномерную сетку $\{T_j = T_0 + jH\}$, $j = \overline{0, M}$ с шагом $H = \dfrac{T_M - T_0}{M}$ и дополним ее узлами $T_{-3} = T_0 - 3H$, $T_{-2} = T_0 - 2H$, $T_{-1} = T_0 - H$; $T_{M+1} = T_0 + (M + 1)H$, $T_{M+2} = T_0 + (M + 2)H$; $T_{M+3} = T_0 + (M + 3)H$. Введем на этой расширенной сетке последовательность кубических B-сплайнов $\{B_j\}_{-1}^{M+1}$ по формулам

$$B_j(\bar{T}) = B_0(\bar{T} - jH), \quad j = -1, 0, 1, \ldots, M+1;$$

$$B_0(\bar{T}) = \frac{1}{6H^3}\left[(\bar{T}-2H)_+^3 - 4(\bar{T}-H)_+^3 + 6(\bar{T})_+^3 - 4(\bar{T}+H)_+^3 + (\bar{T}+2H)_+^3\right],$$

где $\bar{T} = T - T_0$; $(\bar{T}-g)_+^3 = \begin{cases} (\bar{T}-g)^3 & \text{при } \bar{T} \geqslant g \\ 0 & \text{при } \bar{T} < g. \end{cases}$

Данная последовательность представляет собой базис пространства $\tilde{S}$ таких функций $s = W_2^2[T_0, T_M]$, что 1) $s(T)$ — кубический полином на каждом из интервалов $[T_0, T_1)$, (T_1, T_2), . . ., $(T_{M-1}, T_M]$; 2) производные $s^{(\nu)}(T)$, $\nu = 0, 1, 2$ непрерывны в точках $T = T_j$, $j = 1, \ldots, M-1$:

$$s^{(\nu)}(T_j - 0) = s^{(\nu)}(T_j + 0).$$

Аппроксимация решения $\lambda(T)$ элементами пространства $\tilde{S}$ позволяет получить приближение $\tilde{\lambda}(T)$ второго порядка гладкости. Для этого представим $\tilde{\lambda}(T)$ в виде линейной комбинации

$$\tilde{\lambda}(T) = \sum_{j=-2}^{M+1} \lambda_j B_j(\bar{T}),$$

где λ_j — искомые числовые коэффициенты.

Тогда экстремальная постановка ОЗТ будет связана с определением вектора $\lambda = [\lambda_{-1}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{M+1}]^T$ из условия

$$\min_{\lambda} |\hat{J}[\lambda] - \delta_J^2|,$$

где

$$\hat{J}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \rho_i(\tau)[T(\tilde{\lambda}, d_i, \tau) - f_i(\tau)]^2 \, d\tau.$$

Итерационное определение λ производится по алгоритму

$$\lambda^{k+1} = \lambda^{\bar{k}} - \beta_k \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{k},$$

где $\bar{k}: \hat{J}(\lambda^k) \simeq \delta_J^2$; $\beta_k: \min_{\beta} \hat{J}(\lambda^k - \beta \mathbf{p}^k)$.

Направление спуска $\mathbf{p} = [p_{-1}, p_0, \ldots, p_{M+1}]^T$, соответствующее тому или иному градиентному методу, может быть выбрано таким образом, чтобы обеспечить равномерную сходимость приближений (см. разд. 8.5.4). В том случае, когда ищется среднеквадратичное приближение, для метода сопряженных градиентов имеем

$$\mathbf{p}^k = \vec{\mathbf{J}}'(\lambda^k) + \gamma_k \mathbf{p}^{k-1},$$

$$\gamma_0 = 0; \quad \gamma_k = \frac{\sum\limits_{j=-1}^{M+1} J'^k_{\lambda_j} (J'^k_{\lambda_j} - J'^{k-1}_{\lambda_j})}{\sum\limits_{j=-1}^{M+1} (J'^k_{\lambda_j})^2}, \quad k > 0.$$

Компоненты градиента $\mathbf{J}'(\lambda)$ определяются по формуле (8.98), которая примет вид

$$J'_{\lambda_j} = \sum_{i=1}^{N+1} \int_0^{\tau_m} d\tau \int_{d_{i-1}}^{d_i} \frac{\psi_i(x, \tau)}{C(x, \tau)} [\, T_{xx}(x, \tau) B_j(\bar{T}) +$$

$$+ \; T_x^2(x, \tau) B_j'(\bar{T})\,]\, dx$$

$$j = -1, 0, \ldots, M+1.$$

При этом расчет переменных ψ_i, $i = \overline{1, N+1}$ из решения соответствующей сопряженной задачи (см. разд. 8.4.5) ведется с учетом условий $Q_\tau = Q$, $u = \lambda$:

$$D_{x\tau} \psi_i = (a_1 \psi_i)_{xx} - (a_2 \psi_i)_x + a_3 \psi_i;$$

$$a_1 = \frac{1}{C} \sum_{j=-1}^{M+1} \lambda_j B_j(\bar{T}); \quad a_2 = \frac{2}{C} T_x \sum_{j=-1}^{M+1} \lambda_j B_j'(\bar{T});$$

$$a_3 = \frac{1}{C} [\, T_{xx} \sum_{j=-1}^{M+1} \lambda_j B_j'(\bar{T}) + T_x^2 \sum_{j=-1}^{M+1} \lambda_j B_j''(\bar{T}) = C_T T_\tau \,].$$

Линейное приближение к глубине спуска β_k получается по схеме, рассмотренной в разд. 8.6.2, и имеет вид

$$\beta_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\tau_m} [\, T(\lambda^k, d_i, \tau) - f_i(\tau)\,]\, v(\Delta\tilde{\lambda}^k, d_i, \tau)\, d\tau}{\sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\tau_m} v^2(\Delta\tilde{\lambda}^k, d_i, \tau)\, d\tau},$$

где $v(\Delta\tilde{\lambda}^k, d_i, \tau)$ – приращение температуры, определяемое из решения задачи (см. разд. 8.4.5);

$$v_\tau = a_1 v_{xx} + a_2 v_x + a_3 v + \frac{1}{C}(\Delta\tilde{\lambda}^k T_{xx} + \Delta\tilde{\lambda}^k_T T_x^2),$$

$$(x, \tau) \in Q; \tag{8.179}$$

$$v(x, 0) = 0; \tag{8.180}$$

$$v(0, \tau) = v(b, \tau) = 0; \tag{8.181}$$

$$\Delta\tilde{\lambda}^k = \sum_{j=-1}^{M+1} P_j^k B_j(\bar{T}).$$

Замечание 2. Выше при построении сплайн-аппроксимации искомой функции $\lambda(T)$ не использовались краевые условия В ряде случаев целесообразно "закрепить" функцию $\tilde{\lambda}(T)$ или какую-то из ее производных $\tilde{\lambda}^{(l)}(T)$ некоторыми значениями на одном или двух концах отрезка $[T_0, T_M]$. Такая ситуация вполне естественна, если имеется соответствующая априорная информация о поведении функции $\lambda(T)$ в окрестности точек T_0 и T_M Кроме того, учет краевых условий уменьшает размерность вектора λ и улучшает обусловленность решаемой задачи. Например, могут быть заданы так называемые естественные краевые условия

$$\tilde{\lambda}''(T_0) = \tilde{\lambda}''(T_M) = 0. \tag{8.182}$$

Вычисляя $\tilde{\lambda}''(T)$ и используя условия (8.182) с учетом, что $B_j''(\bar{T}) = 0$ при $j \geqslant 2$ и $j \leqslant m-2$, получим

$$\tilde{\lambda}(T) = \sum_{j=0}^{M} \lambda_j \varphi_j(\bar{T}),$$

где

$$\varphi_0(\bar{T}) = B_0(\bar{T}) + 2B_{-1}(\bar{T}); \quad \varphi_1(\bar{T}) = B_1(\bar{T}) - B_{-1}(\bar{T});$$

$$\varphi_i(\bar{T}) = B_j(\bar{T}), \quad j = \overline{2, M-2};$$

$$\varphi_{M-1}(\bar{T}) = B_{M-1}(\bar{T}) - B_{M+1}(\bar{T});$$

$$\varphi_M(\bar{T}) = B_M(\bar{T}) + 2B_{M+1}(\bar{T});$$

$\{\lambda_j\}_0^M$ — искомые параметры.

Замечание 3. Количество участков сплайн-аппроксимации может значительно влиять на качество восстанавливаемого решения При недостаточном числе базисных функций приближение $\tilde{\lambda}(T)$ имеет "переглаженный" характер и минимальное значение невязки J_{min} больше погрешности входных данных δ^2. С другой стороны, когда в базис

введено излишне большое число функций, то ухудшается обусловленность задачи и растут затраты машинного времени. В этом случае, если погрешность δ^2 известна неточно и взята заниженной, то шумы в измерениях температуры могут привести к нефизическим осцилляциям приближенного решения. Поэтому число M нужно выбирать согласованно с гладкостью восстанавливаемой функции. Если M нельзя указать априори, целесообразно вначале задать небольшое число участков сплайн-аппроксимации и затем последовательно увеличивать M на единицу, каждый раз минимизируя функционал (без останова по критерию невязки). И так до тех пор, пока не будет достигнут уровень δ^2 Соответствующий результат $\tilde{\lambda}(T)$ принимается за приближенное решение.

Замечание 4. Качество восстановления $\lambda(T)$ можно улучшить, если учесть (очевидное из физических соображений) ограничение $\lambda(T) > 0$. Для решения такой задачи можно, в частности, использовать метод сопряженных градиентов в сочетании со штрафными функциями.

Аналогичным образом могут быть решены и другие коэффициентные ОЗТ.

8.6.4. ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА

Восстановление распределенного источника в уравнении теплопроводности может быть связано с различными практическими приложениями Остановимся на одном из возможных приложений в нестационарной теплометрии — диагностике теплопередачи к тонкостенным конструкциям. Рассмотрим следующий пример. Требуется найти пространственно-временное распределение плотности теплового потока $q(x, y, \tau)$ на пластине толщиной b (рис. 8.6). Величина $q(x, y, \tau)$ является результатом суммарного теплового воздействия

$$q_1(x, y, \tau) = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} \quad \text{и} \quad q_2(x, y, \tau) = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=b}$$

– с одной и другой сторон пластины.

Если одна из сторон пластины теплоизолирована, например $q_2 = 0$, то задача заключается в нахождении распределения плотности теплового потока на другой стороне.

Полагая, что теплофизические характеристики постоянны, запишем уравнение теплопроводности в данном теле

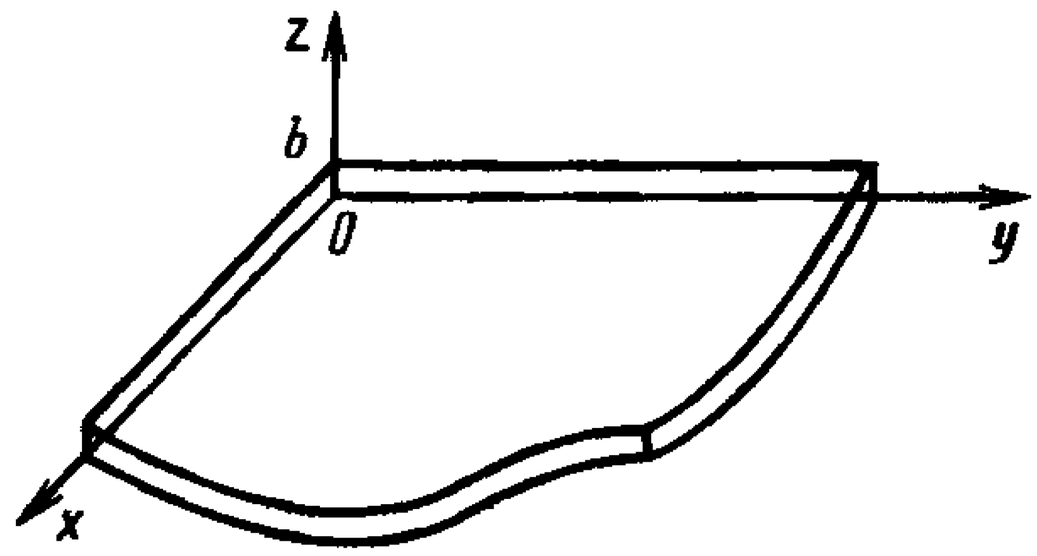
$$CT_\tau = \lambda(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}).$$

Проинтегрируем левую и правую части этого равенства по z в пределах от 0 до b в предположении, что температура T не зависит от z в силу малости толщины b. В результате получим

$$a_1 T_\tau = a_2 (T_{xx} + T_{yy}) + q(x, y, \tau), \tag{8.183}$$

где $q = q_1 - q_2$; $a_1 = Cb$; $a_2 = \lambda b$.

Рис. 8.6. Плоская пластина



$q(x, y, \tau)$ может быть определено однозначным образом только при задании всего температурного поля. Поэтому будем считать известной функцию

$$f(x, y, \tau) = T(x, y, \tau). \tag{8.184}$$

Завершим постановку ОЗТ, полагая, что пластина занимает в плане некоторую область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и заданы краевые условия

$$T(x, y, 0) = \xi(x, y); \tag{8.185}$$

$$T|_{\partial\Omega} = g(\omega, \tau), \quad \omega \in \partial\Omega. \tag{8.186}$$

Введем функционал квадратичной невязки

$$J(q) = \int_0^{\tau_m} d\tau \iint_{\Omega} [T(q, x, y, \tau) - f(x, y, \tau)]^2 \, dxdy, \tag{8.187}$$

и будем искать функцию $q(x, y, \tau)$ из условия минимума (8.187) при ограничении $J(q) \geqslant \delta_J^2$. Если используется критерий невязки, то в качестве δ_J^2 берется величина

$$\delta_J^2 = \int_0^{\tau_m} d\tau \iint_{\Omega} \sigma^2(x, y, \tau) \, dxdy,$$

где σ^2 – дисперсия функции f.

Итерационный процесс построим в пространстве $L_2(Q)$, $Q = \Omega \times [0, \tau_m]$ по методу сопряженных градиентов

$$q^{k+1} = q^k - \beta_k S^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{k}, \tag{8.188}$$

где $S^k = J_q'^k + \gamma_k S^{k-1}$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_k = \| J_q'^k \|^2 / \| J_q'^{k-1} \|^2$,

$$\beta_k = \frac{(T^k - f, \mathrm{v}^k)}{\| \mathrm{v}^k \|^2}.$$

В этих формулах $T^k = T(q^k, x, y, \tau)$ – температурное поле на k-й итерации; $\mathrm{v}^k = \mathrm{v}(\Delta q^k, x, y, \tau)$ – поле приращения температуры на k-й итерации при вариации источника на величину Δq^k; $(u, w) = \iiint_Q u(x, y, \tau) w(x, y, \tau) \, dxdyd\tau$, $\| u \| = \sqrt{(u, u)}$ – соответственно скалярное произведение элементов u, w и норма элемента u в пространстве $L_2(Q)$.

Приращение температуры v^k получается из решения краевой задачи (ниже индекс k для простоты записи опущен)

$$a_1 v_\tau = a_2 (v_{xx} + v_{yy}) + \Delta q(x, y, \tau), \quad (x, y, \tau) \in Q; \tag{8.189}$$

$$v(x, y, 0) = 0; \tag{8.190}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8.191}$$

Градиент целевого функционала получим с помощью сопряженной переменной $\psi(x, y, \tau)$.

Введем оператор $Lv = a_1 v_\tau - a_2 (v_{xx} + v_{yy})$ и перепишем задачу (8.189) – (8.191) в форме

$$Lv = \Delta q, \quad v \in H_L. \tag{8.192}$$

Здесь H_L – область определения оператора L, состоящая из функций $v = v(x, y, \tau)$, которые имеют в Q непрерывные производные v_τ, v_x, v_y, v_{xx}, v_{yy} и удовлетворяют условиям (8.190), (8.191).

Вычислим приращение функционала

$$\Delta J \equiv J(q + \Delta q) - J(q) = (v, 2e) + o(\| \Delta u \|),$$

где $e = T(x, y, \tau) - f(x, y, \tau)$.

Поскольку из (8.192) следует $v = L^{-1} \Delta q$, то

$$\Delta J = (L^{-1} \Delta q, 2e) + o(\| \Delta u \|).$$

С помощью оператора $L^{-1}*$, сопряженного с L^{-1}, получим

$$\Delta J = (\Delta q, L^{-1}*(2e)) + o(\| \Delta u \|).$$

Таким образом, градиент функционала в $L_2(Q)$ имеет вид

$$J'_q = L^{-1}*(2e). \tag{8.193}$$

Найдем оператор $L^{-1}*$. Для этого рассмотрим скалярное произведение элементов v и ψ и выполним следующие преобразования, полагая, что ψ – достаточно гладкая функция:

$$(v, \psi) = (LL^{-1} v, \psi) = (L^{-1} v, L^* \psi) = (v, L^{-1}*L^* \psi).$$

Следовательно, оператор $L^{-1}*L^*$ является единичным, откуда получаем

$$L^{-1}* = L^{*-1}.$$

Это позволяет переписать формулу (8.193) в виде

$$J'_q = L^{*-1}(2e). \tag{8.194}$$

Обратимся далее к формуле интегрирования по частям

$$\iiint\limits_{Q} \frac{\partial u}{\partial \eta_i} w\,dx\,dy\,d\tau = -\iiint\limits_{Q} u\,\frac{\partial w}{\partial \eta_i}\,dx\,dy\,d\tau +$$

$$+ \iint\limits_{\partial Q} uw\cos(\hat{n_Q}, \eta_i)\,ds, \qquad (8.195)$$

где $\eta_1 = \tau$; $\eta_2 = x$; $\eta_3 = y$; ∂Q – граница области Q; ds – элемент площади поверхности ∂Q; n_Q – внешняя нормаль к ∂Q; u, w – некоторые достаточно гладкие функции.

С помощью формулы (8.195) скалярное произведение

$$(L\mathrm{v}, \psi) = \iiint\limits_{Q} \psi \cdot (a_1 \mathrm{v}_\tau - a_2 \mathrm{v}_{xx} - a_2 \mathrm{v}_{yy})\,dx\,dy\,d\tau$$

приведем к форме

$$(L\mathrm{v}, \psi) = -(\mathrm{v}, a_1 \psi_\tau + a_2 \psi_{xx} + a_2 \psi_{yy}) + a_1 \iint\limits_{\Omega} \psi \mathrm{v} \Big|_{\tau=0}^{\tau=\tau_m} dx\,dy +$$

$$+ a_2 \int\limits_0^{\tau_m} d\tau \int\limits_{\partial\Omega} \Big\{ \mathrm{v}[\psi_x \cos(\hat{n_\omega}, x) + \psi_y \cos(\hat{n_\omega}, y)] -$$

$$- \psi[\mathrm{v}_x \cos(\hat{n_\omega}, x) + \mathrm{v}_y \cos(\hat{n_\omega}, y)] \Big\}\,d\omega, \qquad (8.196)$$

где $d\omega$ – элемент $\partial\Omega$, n_ω – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Воспользовавшись представлением производной некоторой функции $\theta(x, y)$ по направлению n через производные по x и y

$$\theta_n = \theta_x \cos(\hat{n, x}) + \theta_y \cos(\hat{n, y}),$$

запишем

$$(L\mathrm{v}, \psi) = -(\mathrm{v}, a_1 \psi_\tau + a_2 \psi_{xx} + a_2 \psi_{yy}) + a_1 \iint\limits_{\Omega} \psi \mathrm{v} \Big|_{\tau=0}^{\tau=\tau_m} dx\,dy +$$

$$+ a_2 \int\limits_0^{\tau_m} d\tau \int\limits_{\partial\Omega} (\mathrm{v}\psi_{n_\omega} - \psi \mathrm{v}_{n_\omega})\,d\omega.$$

Привлекая условия (8.190) и (8.191), получим окончательно

$$(L\mathrm{v}, \psi) = -(\mathrm{v}, a_1 \psi_\tau + a_2 \psi_{xx} + a_2 \psi_{yy}) + a_1 \iint\limits_{\Omega} \psi \mathrm{v} \Big|_{\tau=\tau_m} dx\,dy -$$

$$- a_2 \int\limits_0^{\tau_m} d\tau \int\limits_{\partial\Omega} \psi \mathrm{v}_{n_\omega}\,d\omega. \qquad (8.197)$$

Выражение (8.197) и тождество $(L\mathbf{v}, \psi) = (\mathbf{v}, L^*\psi)$ позволяет записать условия сопряженной задачи:

$$L^*\psi = \zeta, \quad (x, \tau) \in Q; \tag{8.198}$$

$$\psi(x, \tau_m) = 0; \tag{8.199}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8.200}$$

где $L^*\psi = a_1\psi_\tau + a_2\psi_{xx} + a_2\psi_{yy}$; $\zeta = \zeta(x, y, \tau)$ – некоторая функция.

Перепишем задачу (8.198) – (8.200) в виде

$$L^*\psi = \zeta, \quad \psi \in H_{L^*},$$

где $H_{L^*} = \left\{ \psi \in G(Q): \psi(x, \tau_m) = 0, \psi|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$ – область определения оператора L^*; $G(Q)$ – множество функций $\psi(x, y, \tau)$, имеющих в Q непрерывные производные ψ_τ, ψ_x, ψ_y, ψ_{xx}, ψ_{yy}.

Так как $L^{*-1}\zeta = \psi$, то формулу для градиента (8.194) можно записать в окончательном виде

$$J'_q = \psi, \quad (x, y, \tau) \in Q,$$

где $\psi = \psi(x, y, \tau)$ является решением сопряженной задачи (8.198) – (8.200), в которой $\zeta = 2e$.

Учет гладкости решения может быть осуществлен по аналогии со схемой, предложенной в разд. 8.5.3.

Для простоты ограничимся рассмотрением прямоугольной области $\Omega = \left\{ (x, y): 0 \leqslant x \leqslant b_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant b_2 \right\}$.

В данном случае введем вспомогательную функцию

$$g(x, y, \tau) = \int_\tau^{\tau_m} d\tau' \int_0^y dy' \int_0^x J'_q(x', y', \tau')\, dx',$$

$$0 \leqslant x \leqslant b_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant b_2, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_m.$$

С помощью интегрирования по частям выражения для приращения функционала нетрудно получить соответствующие составляющие градиента

$$J'_{p_1} = -g(x, y, \tau), \quad (x, y, \tau) \in \bar{Q};$$

$$J'_{p_2} = -g(x, y, 0), \quad (x, y) \in \bar{\Omega};$$

$$J'_{p_3} = g(x, b_2, \tau), \quad x \in [0, b_1], \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$J'_{p_4} = g(b_1, y, \tau), \quad y \in [0, b_2], \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$J'_{p_5} = g(x, b_2, 0), \quad x \in [0, b_1];$$

$$J'_{p_6} = g(b_1, y, 0), \quad y \in [0, b_2];$$

$$J'_{p_7} = -g(b_1, b_2, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m];$$

$$J'_{p_8} = -g(b_1, b_2, 0),$$

где

$$p_1 = q_{xy\tau}(x, y, \tau); \; p_2 = q_{xy}(x, y, 0); \; p_3 = q_{x\tau}(x, b_2, \tau);$$

$$p_4 = q_{y\tau}(b_1, y, \tau); \; p_5 = q_x(x, b_2, 0); \; p_6 = q_y(b_1, y, 0);$$

$$p_7 = q_\tau(b_1, b_2, \tau); \; p_8 = q(b_1, b_2, 0).$$

8.7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

8.7.1. ГРАНИЧНЫЕ ОЗТ

Одномерная постановка. В разд. 6.7 и 6.8, где рассматривались особенности итерационного решения граничных ОЗТ в пространстве L_2, было установлено, что имеются общие закономерности решения линейных и нелинейных задач. Как показали результаты вычислительных экспериментов, общие характерные особенности наблюдаются и в случае использования для решения линейных и нелинейных ОЗТ градиентных алгоритмов, учитывающих гладкость восстанавливаемых функций. В дальнейшем остановимся на результатах решения модельных обратных задач с помощью алгоритмов, в которых направление спуска строится через сопряженную переменную (см. разд. 8.6.2). Соответствующие расчеты проводились модифицированным методом сопряженных градиентов. При этом задачи (8.158) – (8.160), (8.162) – (8.164) и (8 165) – (8.170) решались численно. Для этого была введена разностная сетка. Каждый из отрезков $0 \leqslant y_i \leqslant 1$, $i = \overline{1, N+1}$ был разбит на l_i частичных отрезков длиной $\Delta y_i = \dfrac{1}{l_i}$. По временной координате разбиение сегмента $[0, \tau_m]$ осуществлялось с постоянным шагом $\Delta\tau = \dfrac{\tau_m}{m}$, где m – число шагов. В результате в каждой подобласти $\bar{Q}_i$ будем иметь сетку узлов (y_{ik}, τ_m), $k = \overline{0, l_i}$; $n = \overline{0, m}$ Для аппроксимации краевых задач применялась неявная разностная схема с вычислением коэффициентов на том временном слое, на котором рассчитываются искомые величины, т.е. на слое $\tau = \tau_n$, полагая, что при $\tau = \tau_{n-1}$ значения T, v и ψ уже найдены. Следовательно, разностная система уравнений, записанная для нелинейной прямой задачи теплопровод-

ности, также будет нелинейной. Поэтому, чтобы рассчитать значения температур на n-м слое, использовался метод прогонки в сочетании с итерациями по коэффициентам уравнения. При численном решении задачи для приращения температуры и сопряженной задачи разностные схемы будут безытерационными, так как эти задачи линейные. Шаги Δy_i и $\Delta\tau$ выбирались таким образом, чтобы обеспечить пренебрежимо малые погрешности вычислений функций $T(x, \tau)$, $\psi(x, \tau)$ и $v(x, \tau)$. Это позволяло не учитывать при решении ОЗТ ошибок аппроксимации.

Ниже представлены результаты решения задачи по нахождению плотности теплового потока на одной из границ пластины [11, 63] *. Учет гладкости решения производился по первому способу (см. разд. 8.5.2) в предположении, что $q \in W_2^1 [0, \tau_m]$ и известна плотность теплового потока $q(0)$ в начальный момент времени. Точные данные о температурах на разных удалениях от теплообменной поверхности получались из решения прямой задачи теплопроводности с заданными граничными условиями. Рассчитанные зависимости температуры от времени в одной или нескольких внутренних точках использовались затем в качестве входных данных при решении обратной задачи – определении плотности теплового потока $q(\tau) = q_1(\tau)$ и температуры $T(\tau)$ на одной стороне пластины. При этом на другой стороне тепловой поток $q_2(\tau)$ принимался равным нулю (теплоизолированная стенка). Начальное приближение было принято равным $q^0(\tau) = 0$. Оценка точности решения задачи проводилась по величине интегральной погрешности расчета граничной функции $u(\tau)$, под которой понимается $q(\tau)$ или $T(\tau)$:

$$\epsilon_u = \left[\int_0^{\tau_m} [u_т(\tau) - u(\tau)]^2 \, d\tau \Big/ \int_0^{\tau_m} u_т^2(\tau) \, d\tau \right]^{1/2},$$

где $u_т(\tau)$ – точная величина; $u(\tau)$ – величина, полученная из решения обратной задачи.

В табл. 8.1 для одного измерения ($N = 1$), постоянных теплофизических коэффициентов, неподвижных границ тела и фиксированных точек температурных измерений приведены полученные значения ϵ_q и ϵ_T в зависимости от расположения измерительной точки относительно теплообменной поверхности.

Табл. 8.2 содержит аналогичные данные в зависимости от числа термодатчиков, учитываемых при решении ОЗТ. Эти расчеты проводились при останове итерационного процесса по условию достижения числа итераций, равного размерности m вектора искомых параметров.

---

*См. также: **Алифанов О.М., Балашова И.Е.** Выбор приближенного решения обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 5. С. 851–860.

Алифанов О.М., Михайлов В.В. О решении переопределенной обратной задачи теплопроводности с неточными данными // ТВТ. 1985. Т. 23. № 1. С. 120–125.

Таблица 8.1

Номер точки измерения	$\bar{d}_i = \dfrac{d_i}{\sqrt{a\tau_m}}$	$\Delta Fo = \dfrac{a\Delta\tau}{d_i^2}$	ϵ_q	ϵ_T
1	0,058	5,93	0,14	0,045
2	0.116	1,48	0,17	0,05
3	0,232	0,37	0,20	0,07
4	0,348	0,16	0,25	0,09
5	0,464	0,09	0,29	0,12
6	0,580	0,06	0,53	0,25

Таблица 8.2

Число точек измерений	Координаты точек измерений, $\bar{d}_i = d_i/\sqrt{a\tau_m}$						ϵ_q	ϵ_T
	1	2	3	4	5	6		
1	0,058	–	–	–	–	–	0,140	0,045
2	0,058	0,116	–	–	–	–	0,056	0,011
3	0,058	0,116	0,232	–	–	–	0,039	0,009
4	0,058	0,116	0,232	0,348	–	–	0,025	0,006
5	0,058	0,116	0,232	0,348	0,464	–	0,015	0,003
6	0,058	0,116	0,232	0,348	0,464	0,58	0,016	0,004

В данном случае $\bar{k} = m = 50$. Это условие было принято в связи с тем, что при решении корректно поставленных задач количество итераций, необходимое для получения минимума квадратичной функции методом сопряженных градиентов, теоретически равно m. Поскольку шаг по времени $\Delta\tau$ оставался неизменным для различных удалений d_i, то каждому удалению соответствовал свой шаг по числу Фурье. Результаты, представленные в табл. 8.1 и 8.2, можно трактовать как косвенную оценку скорости сходимости итерационного процесса в зависимости от расположения точек измерения температур и от числа термодатчиков.

Полученные результаты показывают, что по мере удаления измерительной точки от теплообменной поверхности, скорость сходимости итерационного процесса уменьшается, что связано с ухудшением обусловленности экстремальной задачи. С другой стороны, увеличение числа точек измерений температуры по толщине, учитываемых при поиске граничных условий, приводит к возрастанию скорости сходимости. Это обстоятельство дает возможность обеспечить требуемую точность определения тепловых граничных условий при меньшем числе итераций по сравнению со случаем $N = 1$.

Учет измерений температуры в точках, удаленных на расстояние $\Delta_d = [\, d_i(\tau) - d_1(\tau)] \,/\, (a\tau_m)^{1/2} > 0{,}5$ (a – коэффициент температуропроводности) от передней точки измерения, практически не оказывает

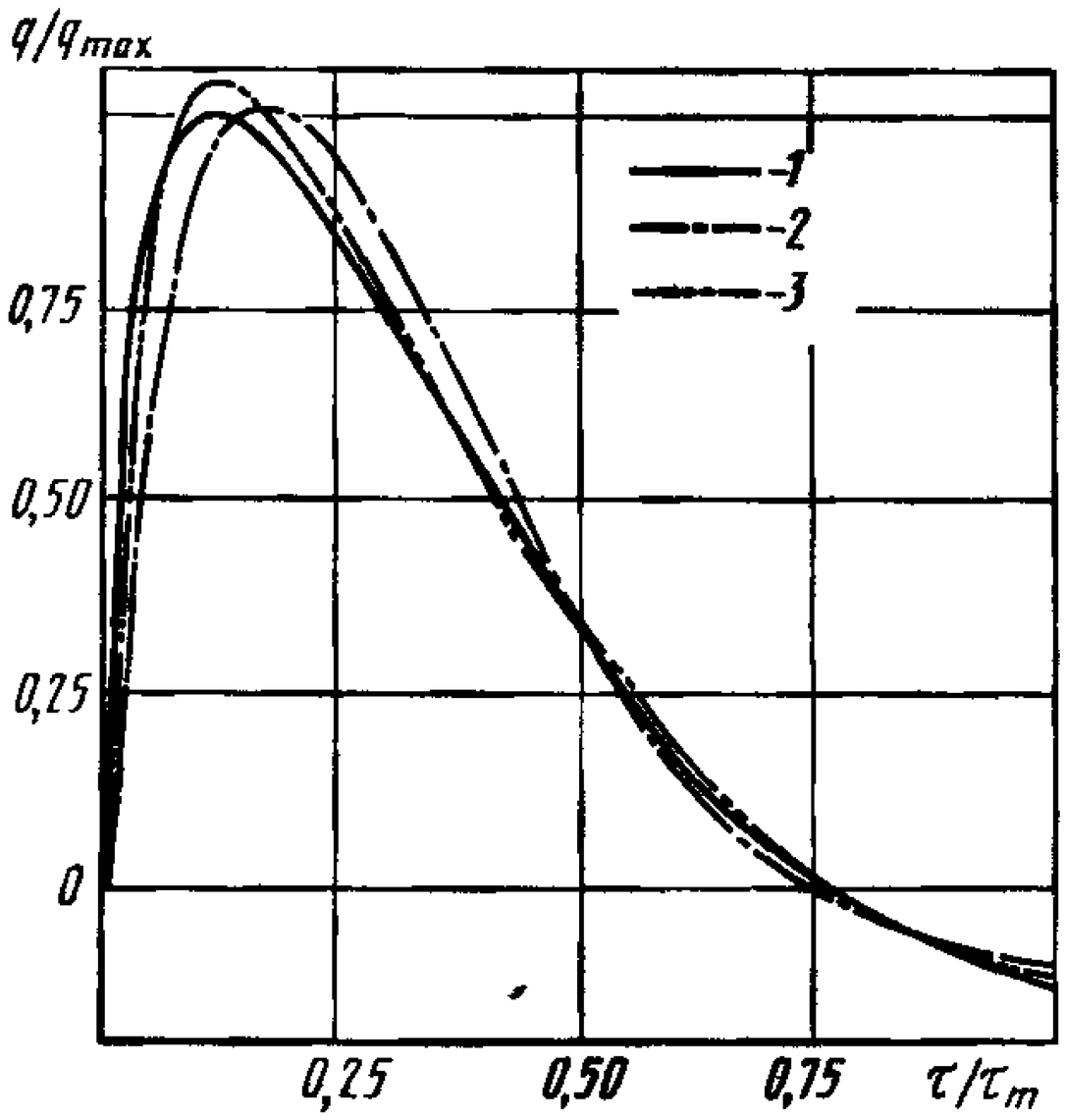


Рис. 8.7. Результаты восстановления плотности теплового потока при невозмущенных входных данных ($\bar{k} = 50$):
1 – искомое решение; 2 – решение ОЗТ, полученное с учетом измерений в одной точке ($\bar{d}_1 = 0{,}058$); 3 – решение ОЗТ, полученное с учетом измерений в двух точках ($\bar{d}_1 = 0{,}058$; $\bar{d}_2 = 0{,}116$)

влияния на обусловленность экстремальной задачи и на скорость сходимости. Это связано, по-видимому, с тем, что обусловленность граничной ОЗТ при заданном времени τ_m в основном определяется информацией о поле температур только до определенной глубины (см. разд. 4.2).

Для иллюстрации на рис. 8.7 представлены результаты решения обратной задачи для точных данных при учете результатов измерения температуры в одной и двух точках.

При наличии в измеренных температурах $f_i(\tau)$, $i = \overline{1, N}$ случайных ошибок, обусловленных ограниченной точностью измерений и регистрации данных эксперимента, принципиальным вопросом, как уже отмечалось ранее, является определение условий прекращения итераций. Основная трудность применения принципа останова по критерию невязки связана с достоверной оценкой погрешности входных данных δ.

В связи с этим было проведено исследование по оценке влияния числа измерений на точность и устойчивость приближений в условиях, когда входные температуры $f_i(\tau)$ заданы с погрешностями. Уровни максимально возможных погрешностей изменялись в диапазоне 5 – 10 % от $f_i^{\max}$ $(i = \overline{1, N})$, а распределение по равномерному и нормальному законам моделировалось датчиками случайных чисел.

На рис. 8 8 и 8.9 показаны изменения по итерациям погрешностей определения плотности теплового потока ϵ_q и температуры поверхности ϵ_T при различном числе точек измерений и законах распределения случайных погрешностей

Приведенные результаты показывают, что с увеличением числа точек измерения устойчивость итерационного процесса к случайным погрешностям во входных температурах повышается. Это проявляется в том, что после резкого снижения на начальной стадии поиска погрешность приближений устанавливается на некотором, практически постоянном уровне. На рис. 8.10 для иллюстрации показаны искомая зависимость $q(\tau)$, зависимость, полученная по критерию невязки, и зависимость, соответствующая 100-й итерации, в случае трех измерений при

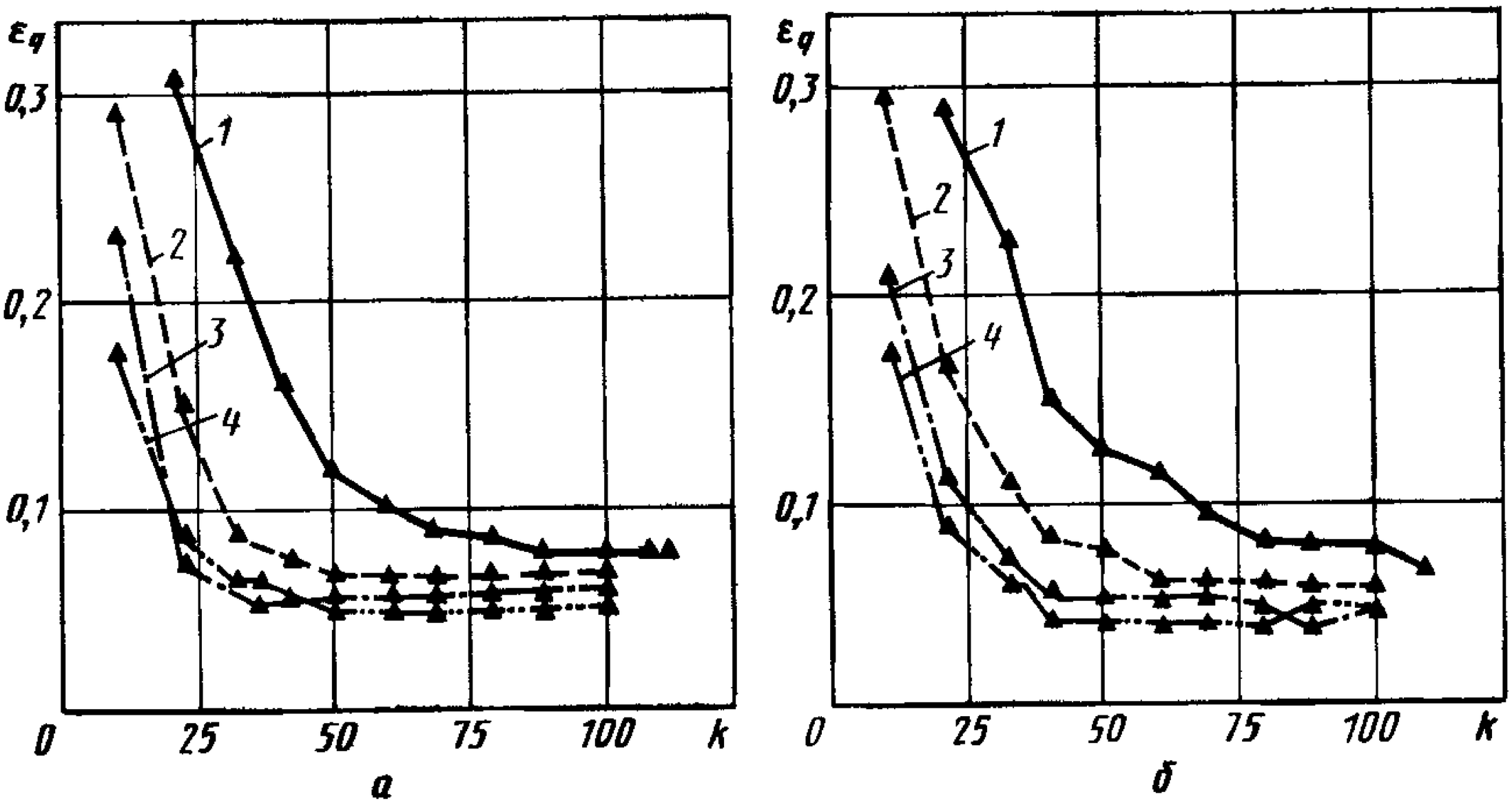


Рис. 8.8. Изменение погрешности восстановления плотности теплового потока по итерациям при максимальных разбросах ошибок во входных данных $\delta_{0i}^{max} = 0{,}05\, f_i^{max}$:

а **– равномерный закон распределения;** ***б*** **– нормальный закон распределения; 1 –** $N = 1$; 2 – $N = 2$; 3 – $N = 3$; 4 – $N = 4$

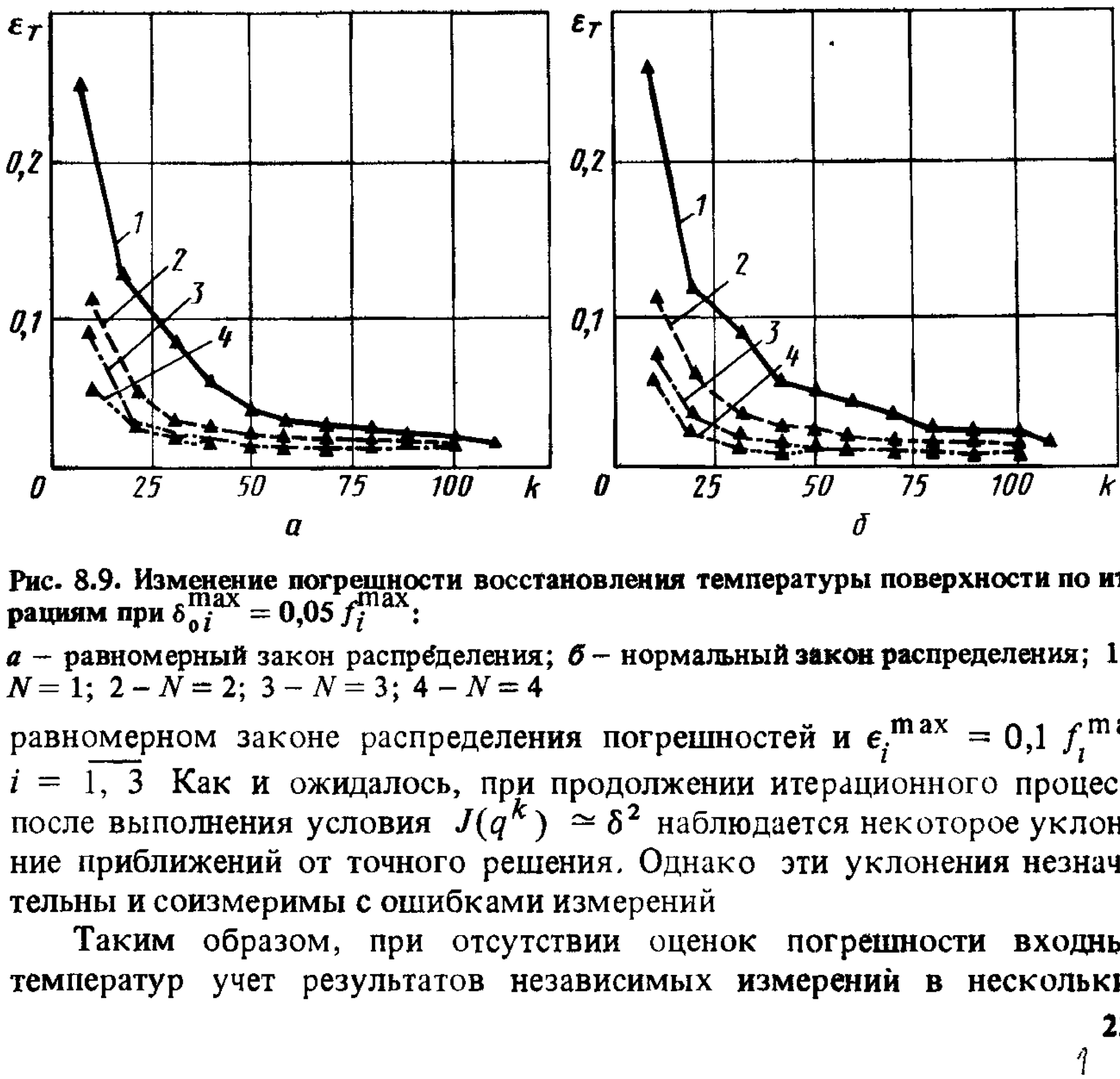


Рис. 8.9. Изменение погрешности восстановления температуры поверхности по итерациям при $\delta_{0i}^{max} = 0{,}05\, f_i^{max}$:

а **– равномерный закон распределения;** ***б*** **– нормальный закон распределения; 1 –** $N = 1$; 2 – $N = 2$; 3 – $N = 3$; 4 – $N = 4$

равномерном законе распределения погрешностей и $\epsilon_i^{max} = 0{,}1\, f_i^{max}$, $i = \overline{1, 3}$ Как и ожидалось, при продолжении итерационного процесса после выполнения условия $J(q^k) \simeq \delta^2$ наблюдается некоторое уклонение приближений от точного решения. Однако эти уклонения незначительны и соизмеримы с ошибками измерений

Таким образом, при отсутствии оценок погрешности входных температур учет результатов независимых измерений в нескольких

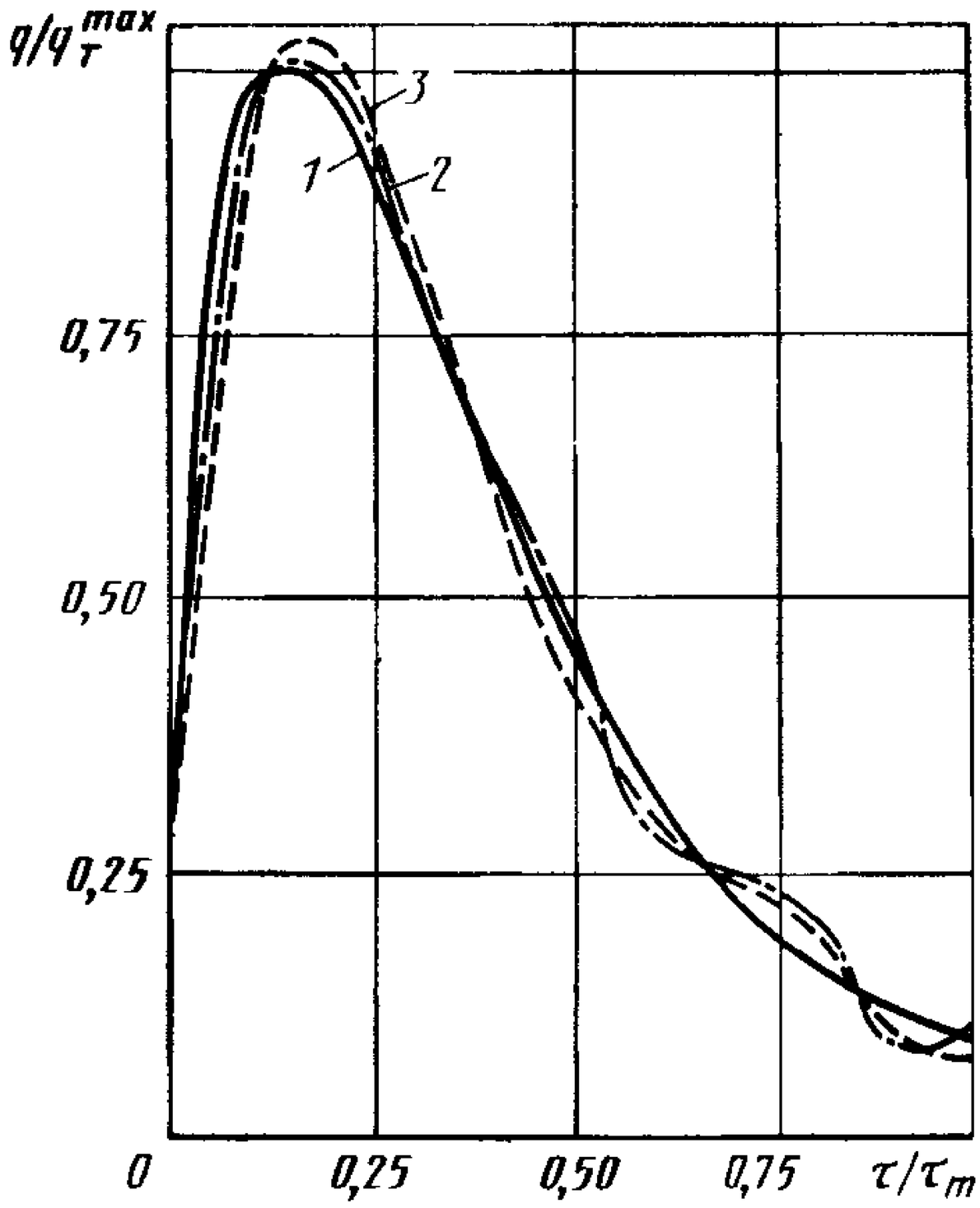


Рис. 8.10. Сравнение приближенных решений с точным:
1 – искомая функция; 2 – приближение, выбранное по критерию невязки; 3 – приближение, соответствующее $\bar{k} = 100$

точках при решении ОЗТ повышает устойчивость итерационного метода к возмущениям во входных температурах. При этом появляется возможность достоверного определения тепловых граничных условий с использованием традиционных условий и прекращения итерационного процесса, в частности, по оценке изменения величины минимизируемого функционала на соседних итерациях.

Кроме того, установка дополнительных датчиков температуры позволяет уменьшить ошибки определения тепловых нагрузок Но здесь следует заметить, что увеличение количества термодатчиков более некоторого числа N^* не приводит к дальнейшему улучшению качества восстановления. Это число зависит от теплофизических свойств тела и расположения измерительных точек по его толщине, причем, как правило, $N^* \leqslant 4 - 5$.

Замечание 1. Поскольку обусловленность граничной ОЗТ будет наилучшей в том случае, когда измерения осуществляются на границе тела, где восстанавливается искомая функция, то целесообразно ставить эксперимент таким образом, чтобы точки d_i были как можно ближе к этой границе, а еще лучше на ней самой (при условии, что одномерность температурного поля выполняется с хорошей точностью, а случайные помехи в измеренных функциях $f_i(\tau)$ не коррелированы между собой)

Были также проведены обширные вычислительные эксперименты по исследованию останова итерационного процесса по дополнительному измерению (см разд. 8.5.5). Полученные результаты позволили сделать вывод о том, что такой способ дает решения, близкие к решениям, полученным по критерию невязки. Для двух видов восстанавливаемых функций этот вывод проиллюстрирован на рис. 8.11, где представлены расчетные данные для входных температур, возмущенных по нормальному закону с разбросом ошибок $3\sigma = 0{,}05\, f^{max}$ $(N = 1)$.

Наконец, использование алгоритма, построенного на втором способе учета гладкости (см. разд. 8.5.4), при восстановлении $q \in W_2^1\,[0, \tau_m\,]$ да-

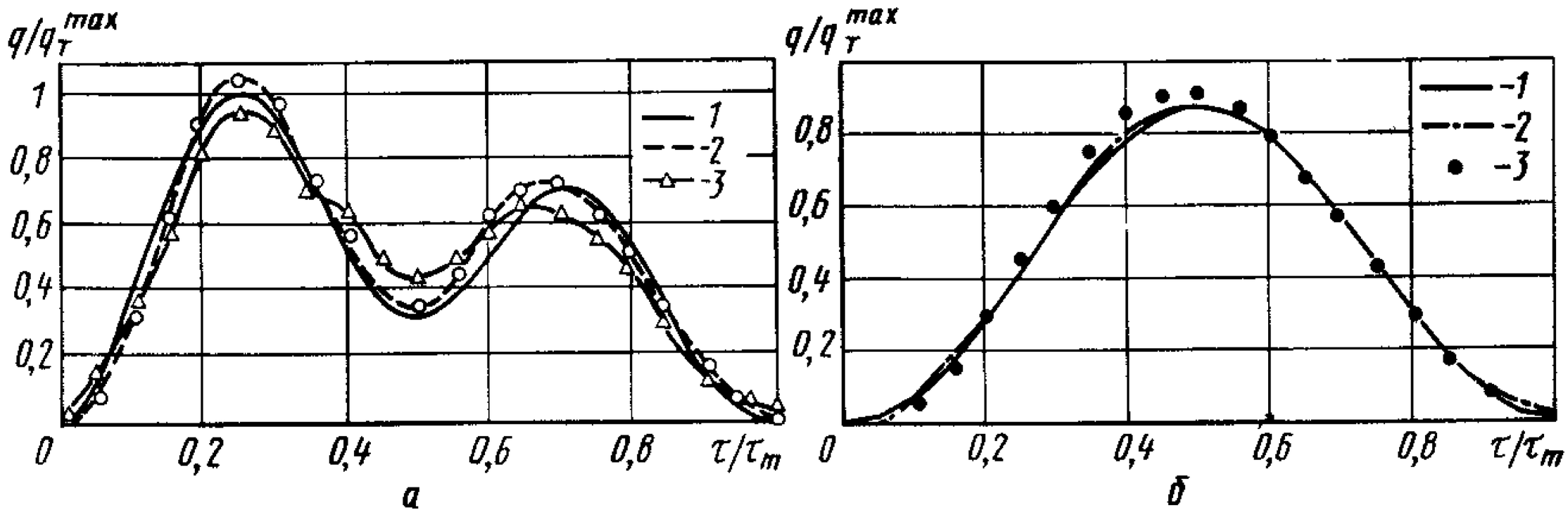


Рис. 8.11. Результаты решения нелинейной обратной задачи методом сопряженных градиентов в пространстве L_2:
а – $d_1 = 0{,}42\,b$; $0{,}06 \leqslant \Delta \mathrm{Fo}_{d_1} \leqslant 0{,}1$; 1 – искомая функция; 2 – останов по дополнительному измерению в точке $d_2 = 0{,}08\,b$ ($\bar{k} = 10$); 3 – останов по критерию невязки ($\bar{k} = 7$); *б* – $d_1 = b$, $0{,}01 \leqslant \Delta \mathrm{Fo}_{d_1} \leqslant 0{,}018$; 1 – искомая функция; 2 – итерационное решение для точных входных данных ($\bar{k} = 18$); 3 – итерационное решение для возмущенных входных данных при останове по дополнительному измерению в точке $d_2 = 0{,}08\,b$ ($\bar{k} = 5$)

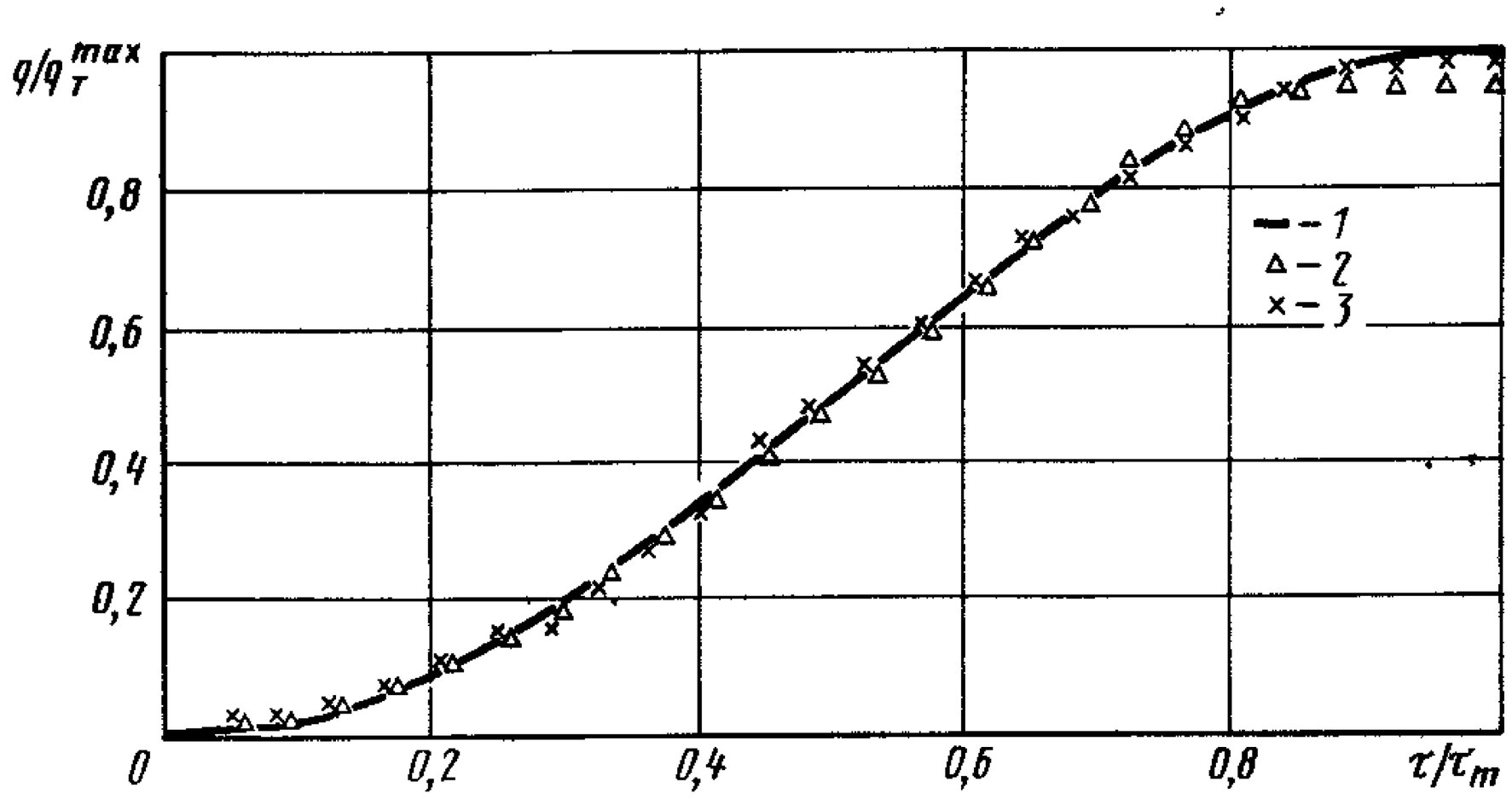


Рис. 8.12. Результаты восстановления плотности теплового потока с учетом гладкости искомой функции, $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}1$, $u^0(\tau) = 0$:
1 – действительное решение; 2 – приближение для возмущенных входных данных при нормальном законе распределения ошибок с разбросом $3\sigma = 0{,}05\,f^{\max}$ (останов по критерию невязки $\bar{k} = 7$); 3 – приближение для точных входных данных ($\bar{k} = 50$)

вало результаты, близкие к результатам решения ОЗТ с помощью первого способа учета гладкости. На рис. 8.12 для примера показан график решения граничной ОЗТ с постоянными коэффициентами при $N = 1$ и $\Delta \mathrm{Fo}_d = 0{,}2$. В качестве информации о гладкости была задана принадлежность искомой функции $q(\tau)$ пространству $W_2^1[0, \tau_m]$ и были известны значения производных $q'(0) = q'(\tau_m) = 0$ на границах временного отрезка. За начальное приближение была принята величина $q^0(\tau) = 0$. Градиент невязки рассчитывался по формуле (8.140). Возмущенная температура $f_\delta(\tau)$ соответствовала нормальному закону распределения

погрешностей с $3\sigma = 0{,}05\, f^{max}$. Как видно из графиков, восстановленные кривые близки к точному решению.

Замечание 2. Как показали методические расчеты, демпфирующие свойства алгоритмов, учитывающих гладкость восстанавливаемой функции, выше, чем у алгоритмов, дающих приближения в среднем. Данная особенность, вообще говоря, заметно снижает требования к точности определения погрешности входных данных при использовании для останова итераций критерия невязки.

Двумерная постановка. Близкие результаты были получены и при решении двумерных ОЗТ*. В частности, приведем расчетные данные для обратной задачи в постановке разд. 6.9. Учет гладкости осуществлялся в соответствии со способом, описанным в разд. 8.5.3. При этом градиент функционала в пространстве L_2 рассчитывался через сопряженную задачу (6.30).

Решения прямой задачи $T(x, 0, \tau)$, сопряженной задачи $\psi(x, c, \tau)$ и задачи для приращения $\Delta T(x, 0, \tau)$, необходимые для организации итерационного процесса, находились с помощью функции Грина и приближенно-аналитической методики расчета, изложенной в разд. 4.4. При этом вместо исходного интегрального оператора A прямой задачи будем иметь матрицу $\mathbf{A}_\Delta$. При соответствующем выборе параметров разностной сетки $x_l = l\Delta x,\ l = \overline{0, L};\ \tau_j = j\Delta\tau,\ j = \overline{0, m}$ получается достаточно точная аппроксимация оператора A, что позволяет не учитывать соответствующие погрешности при построении алгоритма решения обратной задачи.

Вычисление элементов матрицы $\mathbf{A}_\Delta$ сопряжено с определением значений сумм бесконечных рядов (см., например, уравнение (4.7)). Усечение рядов приводит к появлению дополнительных погрешностей, в результате чего вместо матрицы $\mathbf{A}_\Delta$ будет вычисляться матрица $\mathbf{A}_{\Delta H} = \mathbf{A}_\Delta + \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ – матрица погрешностей. Из соображений экономии машинного времени нужно суммировать только такое количество членов ряда, которое необходимо для решения задачи с точностью, не хуже наперед заданной.

Результаты решения одной из модельных задач с помощью модифицированного алгоритма сопряженных градиентов, учитывающего гладкость $q(x, \tau)$ (см. разд. 8.5.3), представлены на рис. 8.13,*а* для трех точек по координате: $x_1 = 0{,}17 \cdot 10^{-2}$ м, $x_3 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ м, $x_5 = 0{,}83 \cdot 10^{-2}$ м. В этих расчетах было принято $\Delta x = 0{,}17 \cdot 10^{-2}$ м, $\Delta\tau =$

---

*Алифанов О.М., Егоров Ю.В. Алгоритмы и результаты решения граничной обратной задачи теплопроводности в двумерной постановке // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 4. С. 658–666.

Алифанов О.М., Керов Н.В. Определение параметров внешнего теплового нагружения из решения двумерной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1981. Т. 41. № 4. С. 581–586.

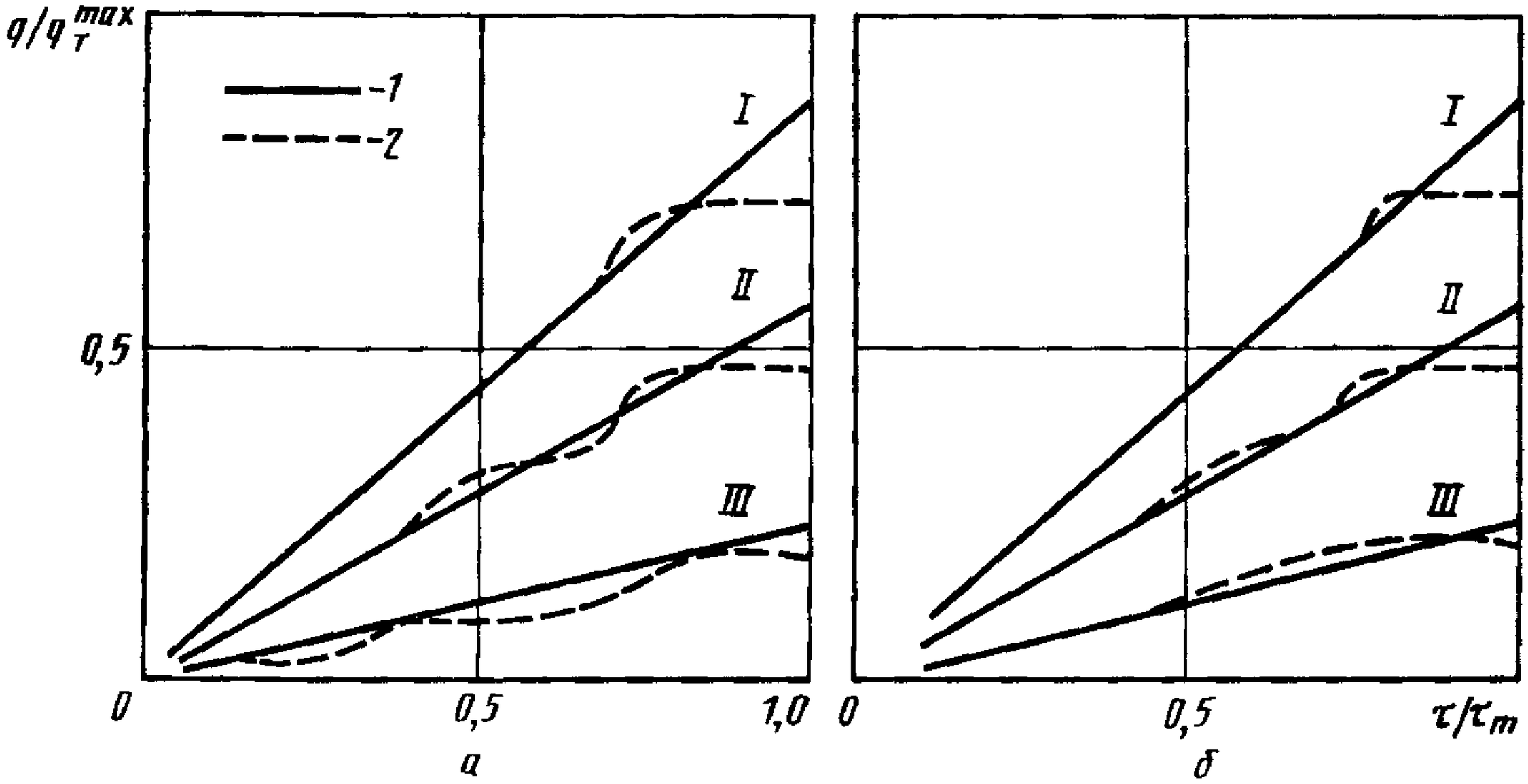


Рис. 8.13. Результаты решения двумерной ОЗТ модифицированным методом сопряженных градиентов с учетом гладкости искомой функции для случая, когда определяются все вариации (*а*) и когда вариации $\Delta q_k(x, 0)$, $\Delta q_k(b, \tau)$ и $\Delta q_k(b, 0)$ не определяются (*б*) ($c = 0{,}02$ м, $b = 0{,}01$ м):
1 – действительное решение; 2 – 30-я (*а*) и 20-я (*б*) итерации; I – $q(x_1, \tau)$; II – $q(x_3, \tau)$; III – $q(x_5, \tau)$

$= 0{,}05$ с, $a = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ м^2/с, $\lambda = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$. Входные температуры являлись невозмущенными. Останов итерационного процесса осуществлялся по условию

$$k = \bar{k} : |\bar{J}(q^{\bar{k}+1}) - \bar{J}(q^{\bar{k}})| \leqslant 10^{-8},$$

где $\bar{J}(q) = J(q) / \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b f^2(x, \tau)\, dx.$

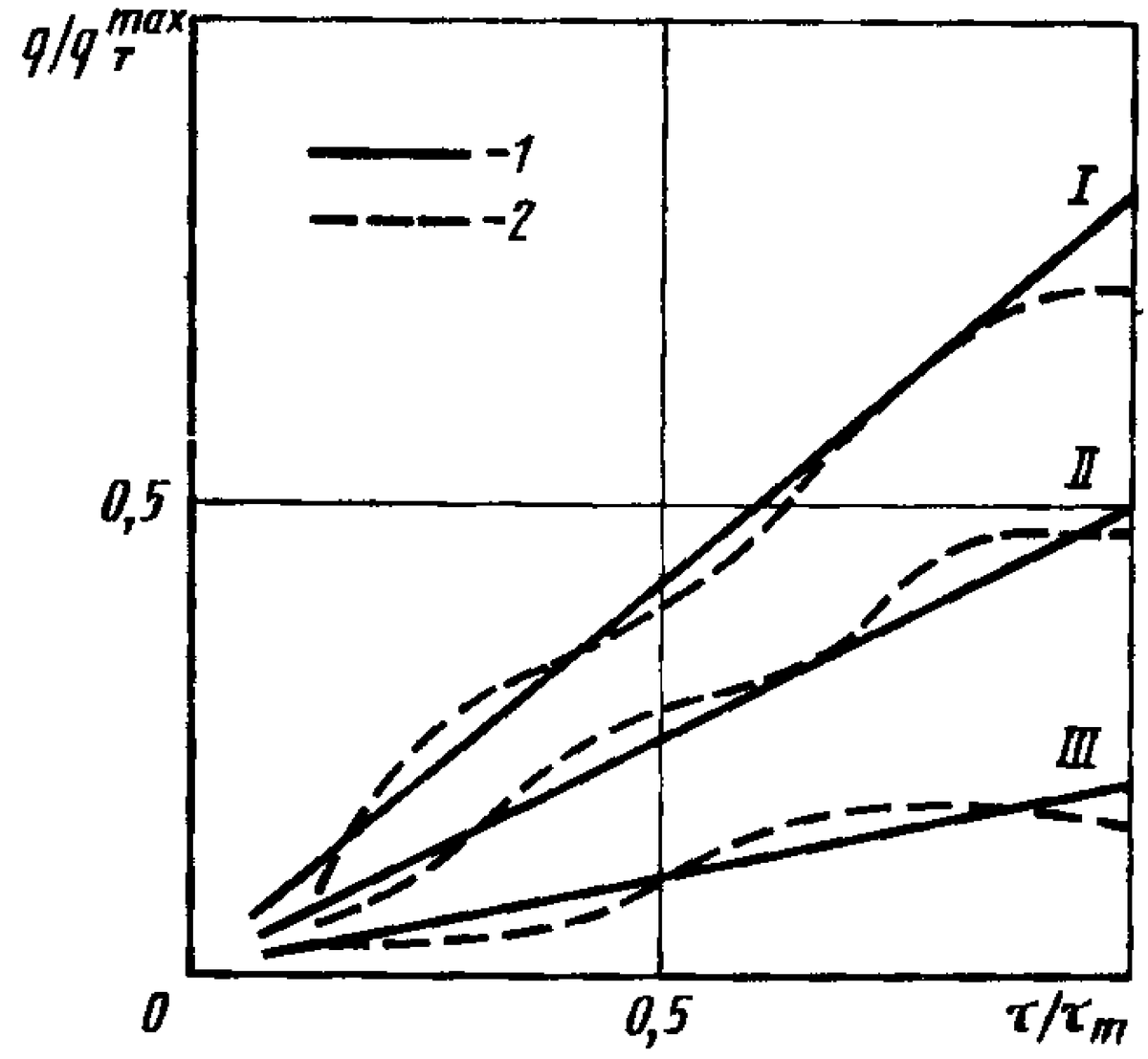


Рис. 8.14. Восстановление плотности теплового потока модифицированным методом сопряженных градиентов с учетом гладкости решения для возмущенных данных:
1 – действительное решение; 2 – результаты расчета по значениям температуры со случайными ошибками, распределенными по нормальному закону с разбросом $3\sigma = 0{,}01\, f^{\max}$; I – $q(x_1, \tau)$; II – $q(x_3, \tau)$; III – $q(x_5, \tau)$

Если известны значения функции на краях области при $\tau = 0$ и $x = b$, т.е $q(x, 0)$, $q(b, \tau)$ и $q(b, 0)$, то нет необходимости определять соответствующие приращения и точность восстановления функции несколько повышается На рис 8 13,*б* показаны соответствующие результаты в предположении, что $q(x, 0) = q(b, \tau) = 0$

Было проанализировано также влияние возмущения входных данных на решение ОЗТ. При этом на функцию $f(x, \tau)$ накладывалась помеха, которая моделировалась с помощью датчика случайных чисел и соответствовала нормальному закону распределения погрешностей с разбросом $3\sigma = 0{,}01 f^{\max}$. Останов итераций производился по критерию невязки $\bar{k}$: $J(q^{\bar{k}}) \simeq \delta^2$, где $\delta^2 = \int_0^{\tau_m} d\tau \int_0^b \sigma^2(x, \tau) dx$, σ^2 – дисперсия функции $f(x, \tau)$. Результаты расчета для одного из примеров показаны на рис 8 14 и свидетельствуют об удовлетворительном качестве восстановления $q(x, \tau)$.

Достаточно подробный вычислительный эксперимент по итерационному решению двумерной ОЗТ при использовании разностной аппроксимации краевых задач проведен в работе [46]

8.7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПЛАНИРОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

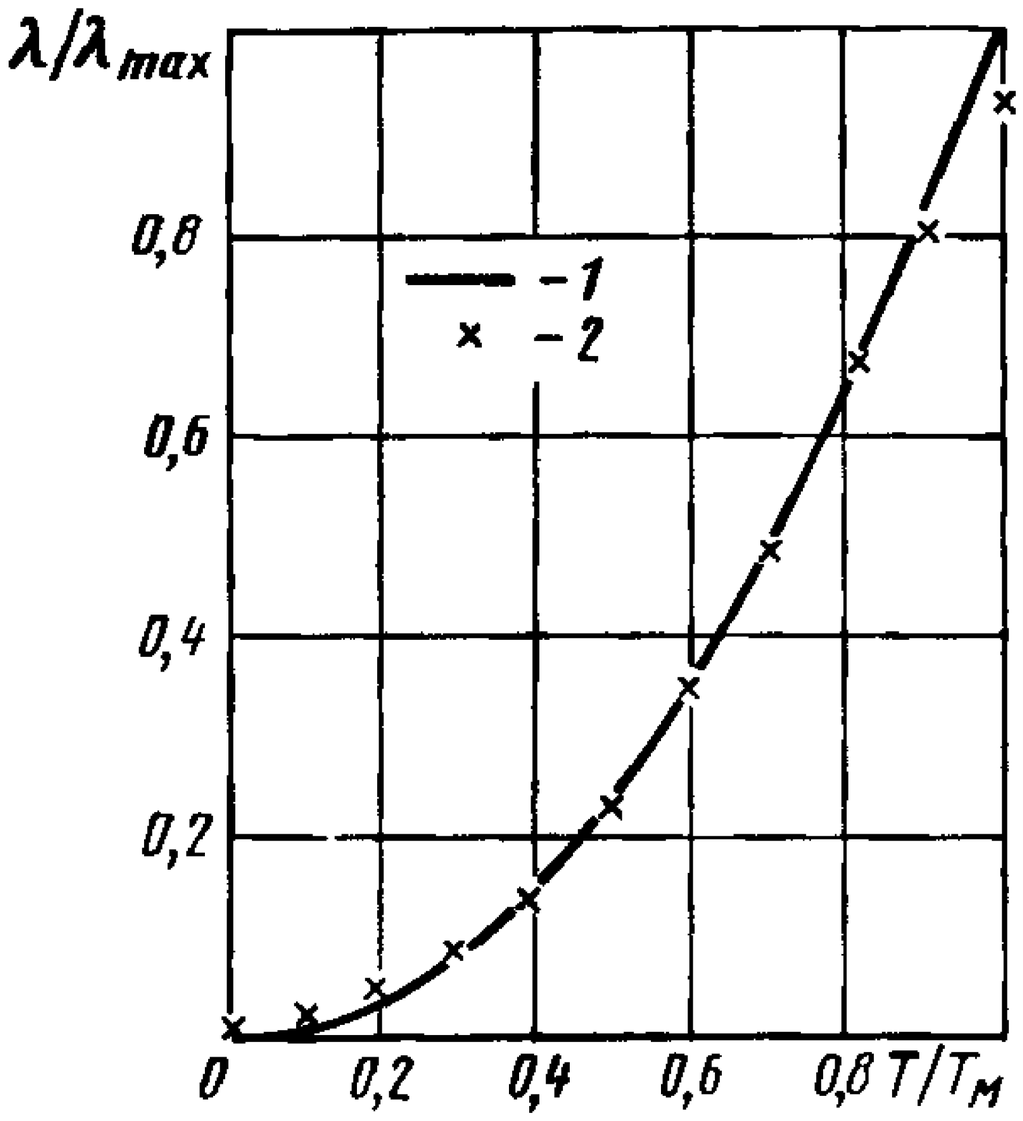
Опираясь на результаты работ [14, 17], приведем здесь данные решения модельных ОЗТ с помощью алгоритма, изложенного в разд. 8.6.3. При этом дифференциальные операторы и функции в краевых задачах для температуры $T(x, \tau)$, приращения $v(x, \tau)$ и сопряженной переменной $\psi_i(x, \tau)$, $i = 1, N + 1$ заменялись соответствующими конечно-разностными аналогами с использованием неявной схемы аппроксимации. Параметры разностных сеток выбирались таким образом, чтобы погрешностями аппроксимации можно было пренебречь.

В начале остановимся на решении задач с минимально необходимым составом измерений ($N = 1$)

На рис 8 15 представлены результаты восстановления температурной зависимости коэффициента теплопроводности вида $\lambda(T) = 0{,}5 + 2T^2$ при следующих условиях: $C(T) = 1$, $b = 1$, $d_1 = 0{,}5$, $\tau_m = 1$ и невозмущенных входных данных Температуры $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ и $f_1(\tau)$ определялись из решения прямой задачи при граничных условиях второго рода $q_1(\tau) = 1$, $q_2(\tau) = 0$.

Для сплайн-аппроксимации искомой функции $\lambda(T)$ использовалось три участка разбиения отрезка $[T_0, T_M]$. Было взято начальное приближение $\lambda^0 = 0{,}75$ Останов итерационного процесса осуществлялся при $\bar{k} = 25$, когда практически полностью останавливался процесс уточнения решения

Вычислительные эксперименты показали, что точность восстановления $\lambda(T)$ существенно зависит от координаты установки термодатчика.



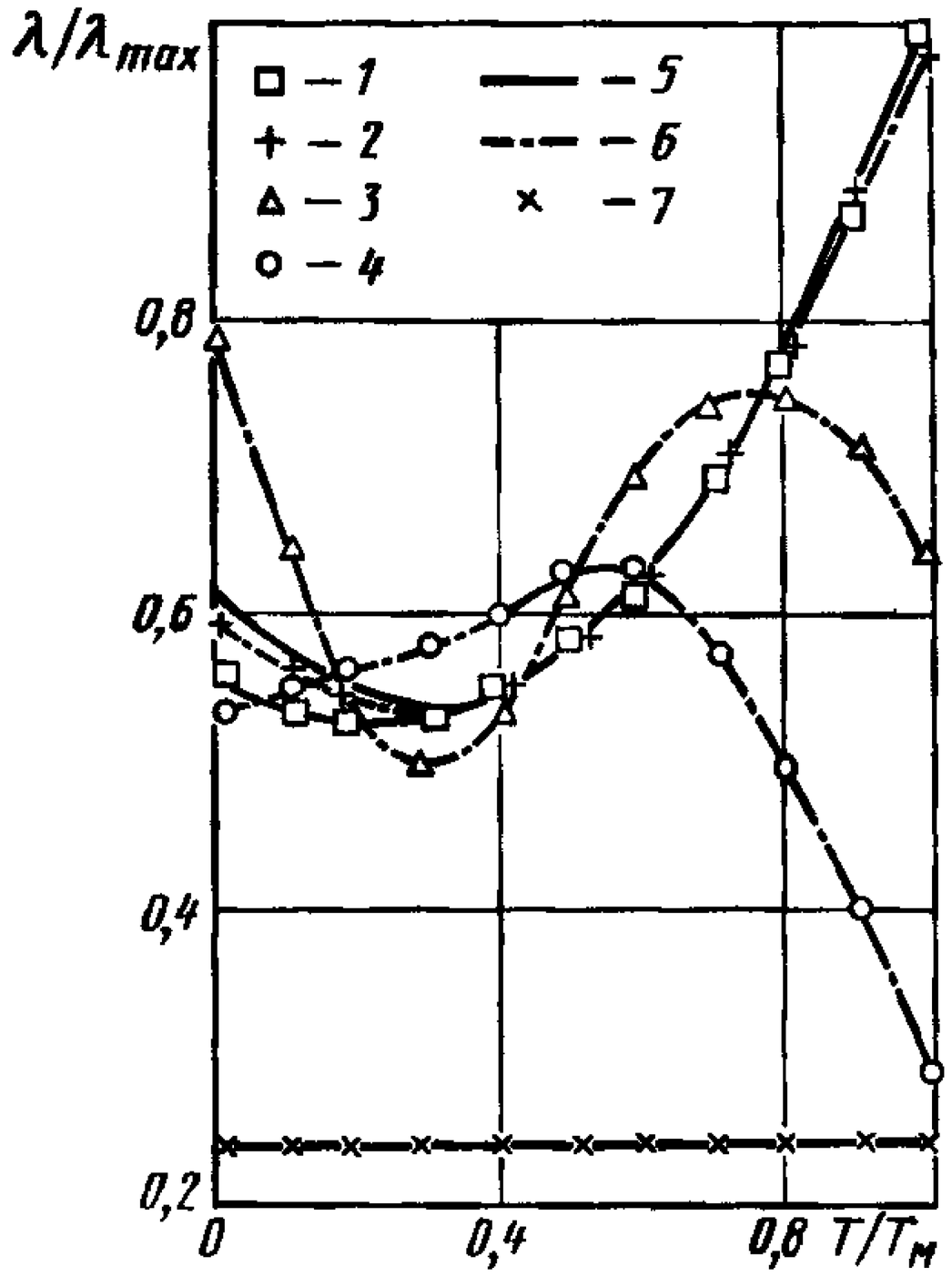


Рис. 8.15. Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности при точных входных данных:
1 – искомая функция; 2 – решение ОЗТ

Рис. 8.16. Результаты решения ОЗТ с использованием точных входных данных при различных значениях координаты установки термодатчика:
$d \cdot 10^3$ м, $b = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ м, $\bar{k} = 25$; 1 – $d = 0{,}7$; 2 – $d = 1{,}4$; 3 – $d = 2{,}1$; 4 – $d = 4{,}2$; 5 – искомая функция; 6 – расчетные зависимости; 7 – начальное приближение

Для одного из расчетных примеров это видно на рис 8.16, где в безразмерном виде представлены результаты решения ОЗТ для невозмущенных входных данных при различном размещении точки измерения температуры. В этом случае искомая зависимость имела вид

$$\lambda(T) = 0{,}217 - 6{,}08 \cdot 10^4 T + 6{,}7 \cdot 10^{-7} T^2, \ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}. \qquad (8.201)$$

Число участков сплайн-аппроксимации было принято равным $M = 3$.

Поэтому при решении коэффициентных ОЗТ важное значение имеет *планирование измерений*, т е. определение количества термодатчиков N и координат их размещения в теле $\mathbf{d} = \{ d_i \}_1^N$ [16, 22] Как показано в [16], для этой цели может успешно применяться D – оптимальное планирование В этом случае план измерений $\epsilon = \{ N, \mathbf{d} \}$ находится из условия максимума детерминанта Ψ нормированной информационной матрицы Фишера $F(\epsilon)$

$$\epsilon = \epsilon^*: \max_{\epsilon} \Psi [F(\epsilon)];$$

$$F(\epsilon) = \frac{1}{N} \Phi_{jn}, \quad j, n = \overline{1, M},$$

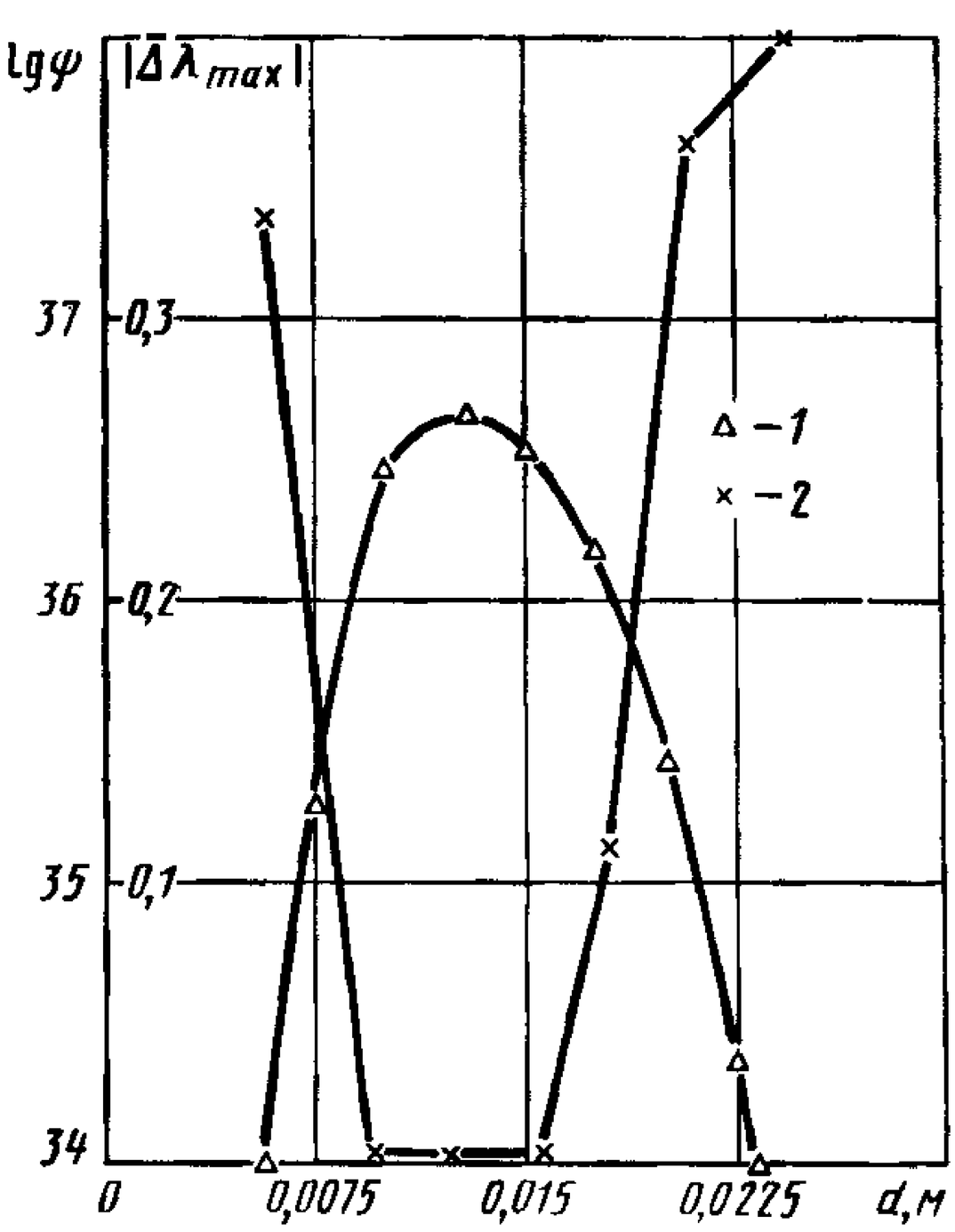
где $\Phi_{jn} = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \theta_j(d_i, \tau) \theta_n(d_i, \tau) d\tau$, $\theta_j(d_i, \tau)$ – функции чувстви-

тельности, вычисленные в точках установки термодатчиков: $\theta_j(d_i, \tau) = \partial T(d_i, \tau)/\partial \lambda_j$, $j = \overline{-1, M+1}$.

Поскольку величины Φ_{jn} зависят от вектора искомых параметров λ, то оптимальный план может быть построен методом последовательных приближений, начиная от некоторой начальной оценки вектора λ, при проведении серии экспериментов.

В качестве примера на рис. 8.17 представлены результаты планирования применительно к одной из задач определения коэффициента $\lambda(T)$ в случае одного термодатчика. Там же для сравнения приведена зависимость погрешности восстановления $\lambda(T)$ от положения измерительной точки d. Результаты планирования хорошо согласуются с результатами, полученными путем многократного решения обратной задачи для различных значений d. Видно, что существует достаточно узкая область, в которой нужно размещать термодатчик. Как отмечено в [16], эта область с увеличением числа участков сплайн-аппроксимации M сужается. В то же время, при увеличении числа учитываемых точек температурных измерений происходит расширение указанной области.

В том случае, когда входные температуры задавались с погрешностями, останов производился по критерию невязки



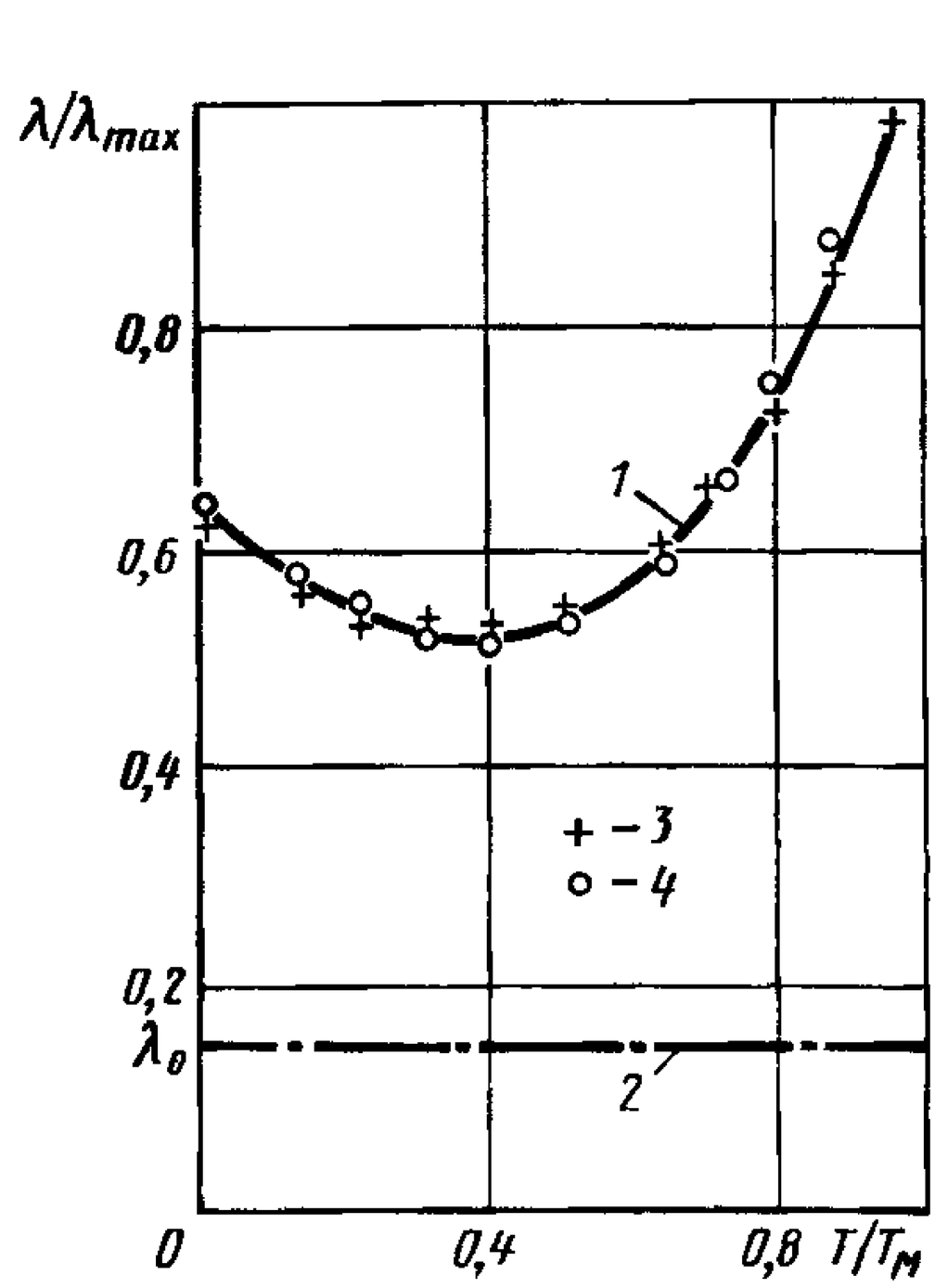


Рис. 8.17. Зависимости величины критерия планирования и максимальной относительной погрешности восстановления коэффициента теплопроводности ($\lambda(T) = 0{,}39\ 10^{-1} + 0{,}17 \cdot 10^{-3} T$) от положения термодатчика:
$1 - \lg\Psi$, $2 - |\Delta\bar{\lambda}_{max}|$

Рис. 8.18. Восстановление коэффициента теплопроводности:
1 – точное решение; 2 – начальное приближение; **3, 4 – решение обратной задачи для точных и возмущенных данных соответственно**

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} [T_i(\lambda, d_i, \tau) - f_i(\tau)]^2 \, d\tau \simeq \delta^2,$$

где $\delta^2 = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau_m} \sigma_i^2 \, d\tau$ – оценка обобщенной погрешности входных данных; $\sigma_i(\tau)$ – среднеквадратичное отклонение температуры в точке d_i в момент времени τ

Для зависимости (8.201) на рис. 8.18 показаны результаты восстановления $\lambda(T)$ при $N = 1$. В этих расчетах входные температуры были возмущены ошибками, распределенными по равномерному закону с разбросом до 3 % от максимальных значений температур. В данном примере учет показаний двух термодатчиков несколько улучшал результаты.

Общий итог вычислительных экспериментов заключается в том, что доказана возможность достаточно точного определения коэффициента теплопроводности из решения ОЗТ при нестационарных условиях теплового нагружения образца.

8.7.3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Остановимся на результатах решения обратной задачи, рассмотренной в разд. 8.6.4, применительно к тонкой пластине прямоугольной формы $\bar{\Omega} = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant b_1, \ 0 \leqslant y \leqslant b_2\}$.

Для организации итерационного процесса (8.188) необходимо на каждой итерации рассчитывать температуру $T(x, y, \tau)$, приращение температуры $v(x, y, \tau)$ и сопряженную переменную $\psi(x, y, \tau)$. Поскольку сопряженная задача приводится к обычной форме краевой задачи теплопроводности заменой переменной $t = \tau_m - \tau$, то все три задачи (8.183), (8.185), (8.186); (8.189) – (8.191) и (8.198) – (8.200) имеют один и тот же вид и могут быть рещены с помощью одного алгоритма. Для построения этого алгоритма воспользуемся численным методом переменных направлений.

Аппроксимируем уравнение (8.183) в области $Q = \Omega \times (0, \tau_m]$ на сетке $\{x_l = \Delta x \cdot l, \ l = \overline{0, L}; \ y_j = \Delta y \cdot j, \ j = \overline{0, K}; \ \tau_n = \Delta\tau \cdot n, \ n = \overline{0, m}\}$ с помощью шаблона, содержащего полуцелый временной слой $\bar{\tau} = \tau + \frac{\Delta\tau}{2}$ (рис. 8.19). Для этого составим разностную схему переменных направлений, согласно которой переход от слоя n к слою $n + 1$ совершается в два этапа с шагами $0{,}5 \cdot \Delta\tau$:

$$\frac{a_1}{0{,}5\ \Delta\tau} (T_{lj}^{n+1/2} - T_{lj}^{n}) = \Lambda_1 T_{lj}^{n+1/2} + \Lambda_2 T_{lj}^{n} + q_{lj}^{n+1/2}; \tag{8.202}$$

$$\frac{a_1}{0{,}5\,\Delta\tau}\,(T_{lj}^{n+1}-T_{lj}^{n+1/2})=\Lambda_1 T_{lj}^{n+1/2}+\Lambda_2 T_{lj}^{n+1}+q_{lj}^{n+1/2}\,, \tag{8.203}$$

где $T_{lj}^{\kappa}=T(x_l, y_j, \tau_\kappa)$; $q_{lj}^{n+1/2}=q(x_l, y_j, \tau_{n+1/2})$.

Разностные операторы Λ_1 и Λ_2 имеют вид

$$\Lambda_1 T_{lj}=\frac{a_2}{\Delta x^2}\,(T_{l+1,\,j}-2T_{lj}+T_{l-1,\,j});$$

$$\Lambda_2 T_{lj}=\frac{a_2}{\Delta y^2}\,(T_{l,\,j+1}-2T_{lj}+T_{l,\,j-1}).$$

К уравнениям (8.202), (8.203) присоединим начальное условие

$$T_{lj}^0=\xi\,(x_l, y_l),\quad l=\overline{0, L},\quad j=\overline{0, K}$$

и условия на границах в виде

$$T_{l0}^{n+1}=g_1(x_l, \tau_{n+1}),\quad T_{lK}^{n+1}=g_2(x_l, \tau_{n+1}),\quad l=\overline{1, L-1};$$

$$T_{0j}^{n+1/2}=\bar{g}_{3j},\quad T_{Lj}^{n+1/2}=\bar{g}_{4j},\quad j=\overline{1, K},$$

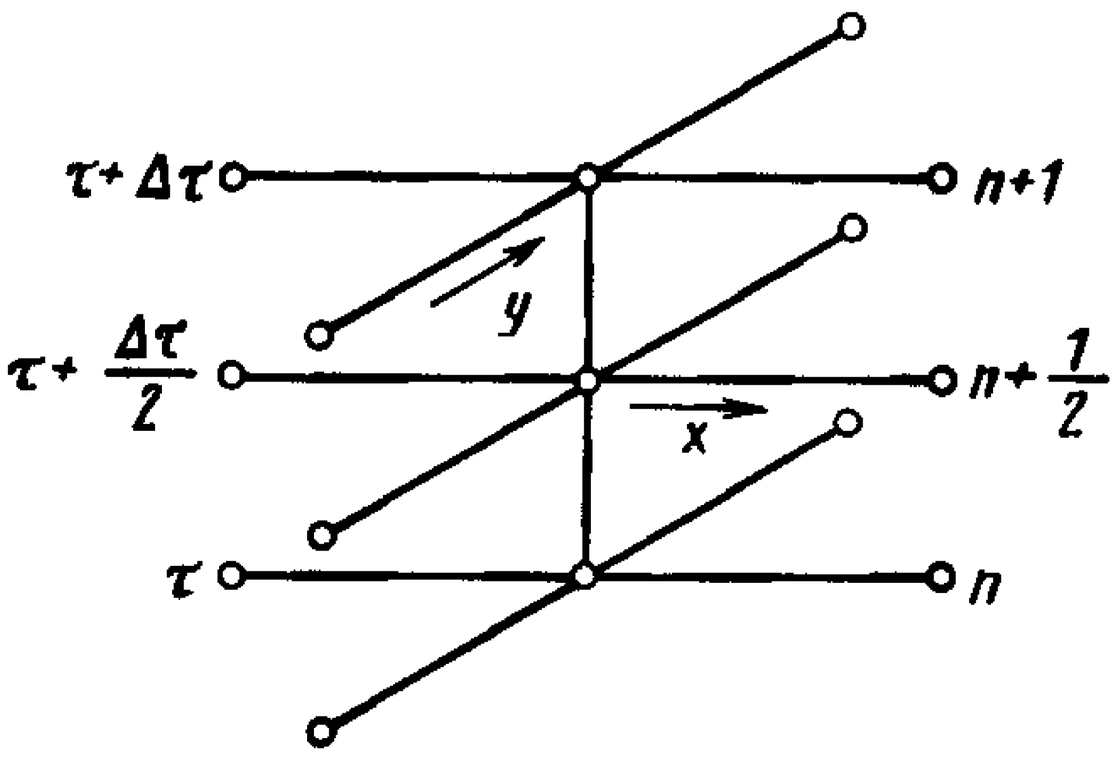


Рис. 8.19. Шаблон схемы переменных направлений

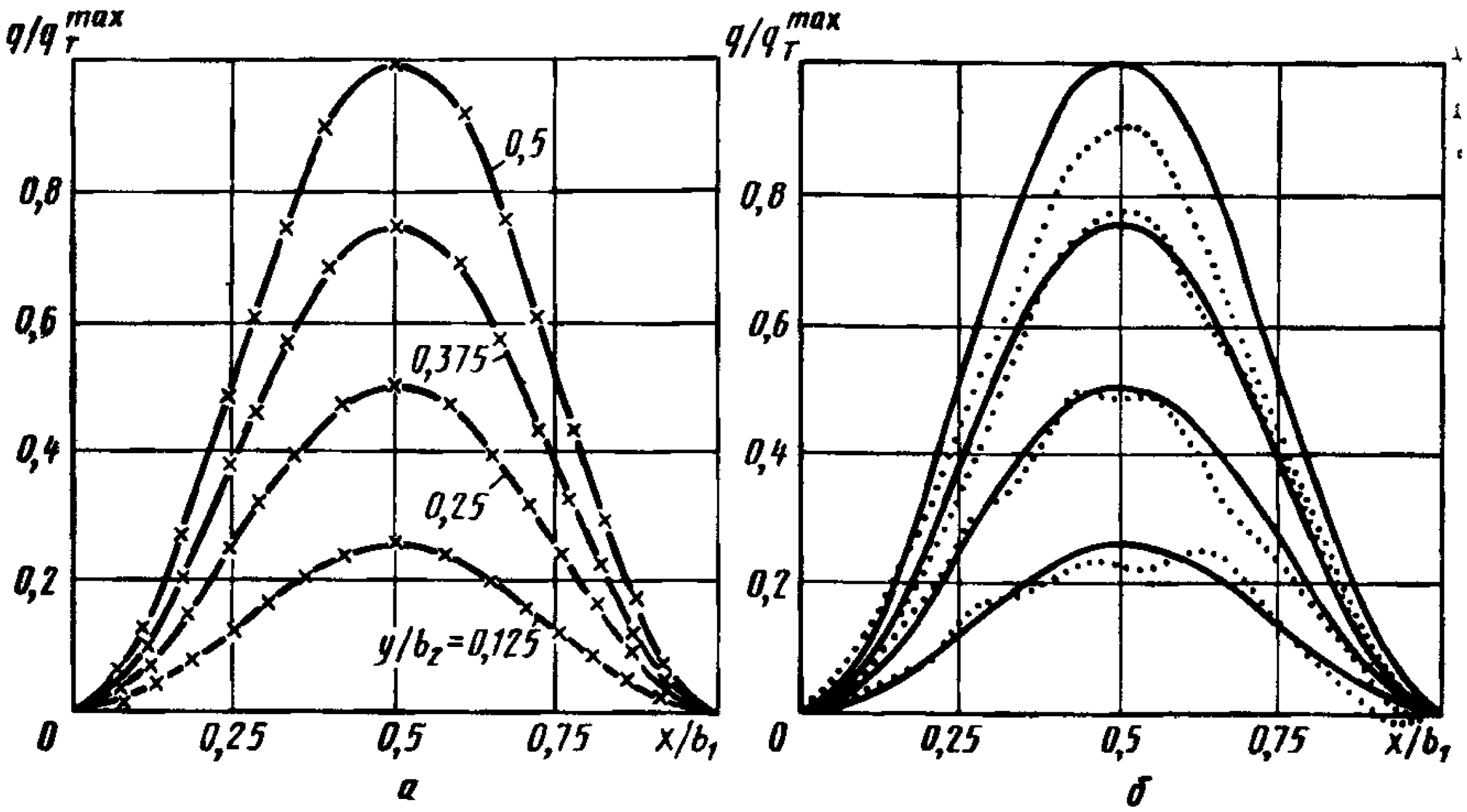


Рис. 8.20. Восстановление функции источника для точных (а) и возмущенных (б) входных данных

где

$$\bar{g}_{\gamma j} = \frac{1}{2}\left[g_\gamma(y_j, \tau_{n+1}) + g_\gamma(y_j, \tau_n)\right] -$$

$$- \frac{\Delta\tau}{4}\Lambda_2\left[g_\gamma(y_j, \tau_{n+1}) - g_\gamma(y_j, \tau_n)\right],$$

$\gamma = 3,4.$

Величины $\bar{g}_{\gamma j}$ — это промежуточные значения функций $g_\gamma(y, \tau)$, $\gamma = 3, 4$ на слое $n + \frac{1}{2}$, соответствующие промежуточным значениям $T_{lj}^{n+1/2}$, $l = 0, L$, которые получаются при вычитании уравнения (8.203) из уравнения (8.202).

Первая разностная задача (8.202) решается при любом фиксированном номере j одномерной прогонкой в направлении x. В результате находятся промежуточные значения функции $T_{lj}^{n+1/2}$, $l = \overline{1, L-1}$. Затем одномерной прогонкой по координате y решается задача (8.203) и в результате рассчитываются значения T_{lj}^{n+1}, $j = \overline{1, K}$.

Таким образом, переход с n-го временного слоя на $(n+1)$-й совершается с помощью одномерного метода прогонки сначала в продольном, а затем в поперечном направлении.

Рассмотренная разностная схема переменных направлений, как известно, является устойчивой и имеет точность $O(\Delta\tau^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$.

Для одного из примеров на рис. 8.20 построены результаты расчета среднеквадратичного приближения к искомой зависимости источника от переменной x в четырех сечениях по координате y и в одной временной точке $\tau = \frac{\tau_m}{2}$. В данном случае были приняты невозмущенные данные в виде сеточной функции $f(x_l, y_j, \tau_n)$, полученной из численного решения прямой задачи. Нужно отметить хорошую точность полученного решения. Однако уже сравнительно небольшие случайные погрешности заметно ухудшают качество восстановленной зависимости, что видно на рис. 8.20,б. Здесь приведены результаты решения ОЗТ с использованием функции $f_\delta(x_l, y_j, \tau_n)$, на которую были наложены погрешности, распределенные по равномерному закону с разбросом до 1 % от f^{max}. Такое ухудшение результатов связано с большой степенью неустойчивости рассматриваемой ОЗТ, которая при использовании алгоритма, дающего сходимость только в среднем, приводит к появлению волнообразных отклонений в восстановленной зависимости.

Поэтому при решении подобных обратных задач следует особо заботиться о точности измерения температуры и использовать алгоритмы гладкой регуляризации.

Выводы

1. Изложены математические результаты, строго обосновывающие метод итерационной регуляризации для решения различных типов линейных обратных задач.

2. Применительно к обратным задачам обобщенной теплопроводности развиты два эффективных подхода к построению градиента функционала — невязки, основанные на использовании функции Грина и сопряженной задачи соответственно.

3. Описаны два новых способа учета в градиентных алгоритмах качественной и количественной априорной информации об искомом решении.

4. Представлены примеры итерационных алгоритмов решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопроводности. Результаты вычислительных экспериментов иллюстрируют их высокую эффективность и широкие возможности для решения различных линейных и нелинейных обратных задач.

ГЛАВА 9
ПРИНЦИПЫ ГИБРИДНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО МЕТОДАМ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Одна из основных проблем в автоматизации процессов теплового моделирования заключается в поиске рациональных путей повышения эффективности обработки экспериментальной информации. Это связано с тем, что обработка результатов теплофизических измерений в большинстве случаев является сложной процедурой, требующей большого объема вычислительных работ. Довольно часто оказывается, что потребные затраты машинного времени чрезмерно велики и из-за этого приходится идти на нежелательные упрощения математических моделей и расчетных алгоритмов, а также на излишние упрощающие изменения в программах экспериментальных исследований. Все это отрицательно сказывается на полноте и достоверности получаемых результатов.

Значительное снижение затрат времени на обработку информации можно получить за счет гибридизации вычислительных операций, синтезируя функции цифровой и аналоговой техники.

Переход к *гибридным вычислительным системам* (ГВС) влечет за собой переосмысливание расчетных методов и построение специальных алгоритмов решения прямых и обратных задач. Предварительный анализ показывает, что наиболее целесообразна гибридизация расчетов для решения обратных задач в экстремальных постановках, рассмотренных в гл. 6 — 8.

В настоящей главе дается краткий анализ возможностей аналоговых и цифровых вычислительных машин применительно к обработке данных

тепловых экспериментов, рассматриваются вопросы построения гибридных систем для автоматизации теплофизических исследований и принципы разработки гибридных методов решения обратных задач теплообмена.

9.1. О ПОСТРОЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

9.1.1. СРАВНЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ АНАЛОГОВЫХ И ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ ТЕПЛОВЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В гл. 3 – 6 были рассмотрены различные методы решения обратных задач теплопроводности в линейных и нелинейных постановках. Соответствующие алгоритмы разрабатывались применительно к универсальной цифровой вычислительной машине (ЦВМ). Альтернативным вариантом может быть использование аналоговых вычислительных машин (АВМ). Например в работах [48, 53, 61] развиваются аналоговые методы решения ОЗТ.

Анализ возможностей АВМ и ЦВМ с точки зрения их применения к решению задач теплового моделирования позволяет отметить некоторые преимущества аналоговой техники. В первую очередь это относится к быстродействию АВМ.

Два момента могут определить большую скорость получения решения на АВМ – параллельность выполнения различных математических операций и возможность проведения вычислений как в реальном, так и в ускоренном масштабах времени. В противовес ЦВМ сам принцип работы аналоговой машины не требует детального программирования различных вычислительных операций. Решающие элементы АВМ сконструированы таким образом, что являются как бы стандартными физическими подпрограммами, заменяющими математическую систему. Все они функционируют одновременно. В итоге решение задачи происходит в короткий промежуток времени, причем быстродействие АВМ можно значительно повысить при переводе ее в режим периодизации решения. В этом случае реализуются скорости интегрирования до десятков микросекунд, т.е. время решения соизмеряется со временем выполнения одной элементарной операции современной ЦВМ. Важно подчеркнуть, что время вычислений при достаточном количестве аналогового оборудования слабо зависит от размерности задачи и даже при решении сложных задач потребное время редко превышает несколько десятков миллисекунд.

Напротив, в ЦВМ, где все переменные дискретны, информация обрабатывается последовательно – в каждый момент времени выполняется только одна операция или ограниченное их число. Поэтому суммарное время решения сложной задачи с большим числом необходимых

арифметических операций может быть очень большим, а процесс решения существенно замедленным по сравнению с реальным физическим явлением. Именно такая ситуация довольно часто встречается при математическом моделировании теплообменных процессов, описываемых уравнениями в частных производных. Требования точности определения температурных полей в конструкциях, теплозащитных покрытиях и т.д. ведут к измельчению расчетных сеток, что, в свою очередь, вызывает заметное увеличение затрат машинного времени, особенно при переходе к многомерным постановкам задач.

К числу достоинств АВМ можно отнести достаточно удобную форму графического представления решения, причем отображение выходных данных осуществляется просто и наглядно.

При использовании ЦВМ наглядное графическое представление информации и активное общение оператора с машиной организовать сложнее и в техническом отношении, и с точки зрения соответствующего математического обеспечения. Использование для этих целей графопостроителей и дисплейных терминалов сопряжено с большими затратами и сложным оборудованием.

Однако аналоговые машины обладают также целым рядом серьезных недостатков. В частности, это замечание относится к точности получения результатов, которая сильно зависит от качества используемого оборудования, температурных условий и т.д. Если точность работы ЦВМ определяется количеством двоичных разрядов в машинном слове и может быть сделана весьма высокой, то на точность выполнения операций на АВМ наложены достаточно жесткие и, самое главное, неустранимые ограничения. В лучшем случае она не превышает 0,1 – 0,01 %, т.е. соответствует точности ЦВМ, когда величины представляются тремя-четырьмя десятичными разрядами.

С проблемой точности АВМ тесно связана проблема динамического диапазона машины. Влияние шумов не позволяет получить решение задачи с доверительным интервалом менее 0,1 – 0,01 % от полного диапазона изменения зависимой переменной. Отсюда, динамический диапазон переменных в лучшем случае равен 10^4:1. Аналогичное положение существует и для временной координаты. Реальный диапазон частот соответствует приблизительно трем разрядам.

К примеру, максимальная погрешность интегрирования отечественных прецизионных АВМ типа АВК-2 составляет ±0,1 %. Обычно получить решение задачи точнее 0,5 % весьма трудно.

Тем не менее, при решении многих инженерных и исследовательских задач точности АВМ вполне достаточно. В целом ряде случаев этот вывод можно отнести как к прямым, так и обратным задачам теплопроводности. Заметим, что действительная точность решения задачи определяется не только точностью выполнения отдельных математических действий, но также и ошибками в принятой модели, погрешностями линеаризации и аппроксимации, а также ошибками входных данных и обусловленностью решаемой задачи. Так, теплофизические характерис-

тики материалов редко бывают известны с точностью, лучшей 5—20%, а результаты температурных измерений имеют погрешности, как правило, значительно превосходящие суммарные погрешности аналогового моделирования. С этой точки зрения, сравнительно низкая точность АВМ может не являться препятствием к реализации на ней регулярных методов теплового моделирования. Однако нужно иметь в виду, что в замкнутых аналоговых схемах, включающих в себя активные элементы (усилители), влияние собственных динамических операторов отдельных элементов схемы может приводить при воспроизведении решения к неустойчивости. Причем, в отличие от ЦВМ, сходимость процесса в таких схемах будет целиком определяться собственными операторами решающих элементов. И даже если задача по своей природе является устойчивой, в зависимости от типа АВМ, можно иногда получить расходящийся процесс из-за накопления погрешностей операционных блоков. В случае ОЗТ, которые по своему смыслу всегда потенциально неустойчивы, эта особенность активных АВМ должна серьезно учитываться при разработке и реализации методов их решения. Если параметрический алгоритм расчета причинной характеристики теплового объекта при некоторых значениях регуляризирующего параметра находится вблизи границы устойчивости, то его реализация на АВМ может существенно исказить решение. Отметим также, что для малых уровней ошибок δ во входных данных может оказаться трудноприменимым принцип невязки при отыскании нужного приближения к решению некорректной задачи, так как вычислительные ошибки окажутся сравнимыми с величиной δ.

Другой недостаток АВМ состоит в необходимости априорного определения возможного диапазона изменения зависимых переменных. Масштабирование зависимых математических переменных считается одним из наиболее ответственных и сложных этапов программирования, так как динамический диапазон АВМ невелик. Неправильное масштабирование может привести или к выходу электрических напряжений из линейного рабочего диапазона (обычно ±100 В) или, наоборот, к настолько малым значениям машинной переменной, когда она оказывается соизмеримой с погрешностями операционных блоков АВМ. И в том, и в другом случае решение задачи будет сопряжено с большой потерей точности. Для ОЗТ трудности масштабирования зависимых переменных становятся значительными, поскольку необходимо еще до моделирования задачи априори оценить максимальные значения масштабных переменных. Если при решении прямых задач теплопроводности такая оценка сравнительно легко осуществима на базе принципа максимума (наибольшие значения величин температурного поля не могут превышать по абсолютной величине известные краевые функции), то в случае обратных задач прогнозирование наибольших величин переменных до решения задачи весьма затруднительно. Поэтому может потребоваться длительный экспериментальный подбор масштабов, обеспечивающих приемлемую точность воспроизведения результатов.

К сказанному следует добавить низкий уровень автоматизации АВМ и малую скорость ввода исходной информации. Кроме того, аналоговые машины не обладают нужной степенью универсальности по отношению к задачам обработки данных тепловых экспериментов. На АВМ трудно реализовать решение ОЗТ в интегральной форме, поскольку необходимо последовательно выполнять разнотипные по характеру операции. Значительно затруднена работа с машиной при решении ОЗТ с изменяющимися ТФХ, в случае варьирования шагов по независимой переменной, при организации способов задания границ криволинейных областей. Утомительна также процедура итераций по коэффициентам и реализация градиентных схем решения ОЗТ, если эти процессы выполняются на АВМ "вручную". Наконец, в АВМ отсутствуют возможности длительного и надежного запоминания информации и обеспечения продолжительных задержек во времени, а также выполнения логических операций.

Все эти дополнительные недостатки, наоборот, не имеют отношения к ЦВМ. Проблема масштабирования в ЦВМ практически отсутствует при работе с плавающей запятой, логические возможности ее весьма велики, равно как и способность длительного запоминания любых объемов числовой информации. ЦВМ универсальны по отношению к любой задаче, имеют высокий уровень автоматизации.

Таким образом, объективное сравнение возможностей и условий работы аналоговых и цифровых вычислительных средств приводит к выводу, что ЦВМ все же в большей степени приспособлены к решению некорректно поставленных задач, особенно, если используются достаточно сложные регуляризованные методы. Однако имеются такие постановки ОЗТ, которые в настоящее время не решаются достаточно эффективно ни с помощью ЦВМ, ни с помощью АВМ.

В частности, этот вывод представляется справедливым по отношению к регулярным методам решения нелинейных многомерных ОЗТ, а также, когда решение задачи необходимо получить в реальном или убыстренном масштабе времени. В значительной мере эта неспособность современных ЦВМ и АВМ к быстрому решению сложных задач обработки данных теплофизических экспериментов проявляется при автоматизации экспериментальных исследований.

9.1.2. ГИБРИДНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Стремление использовать лучшие стороны цифровой и аналоговой техники для эффективного решения сложных задач привело к созданию *гибридных вычислительных систем*, синтезирующих в своем составе АВМ и ЦВМ при помощи устройств управления, сопряжения и обмена информационными потоками (рис. 9.1). Основные особенности ГВС связаны с целым рядом достоинств объединения АВМ и ЦВМ. В частности, вследствие высокого быстродействия АВМ затраты вычислительного времени при решении задач могут быть существенно (в 10 — 100 раз) уменьшены путем использования аналоговых подпрограмм. В то же

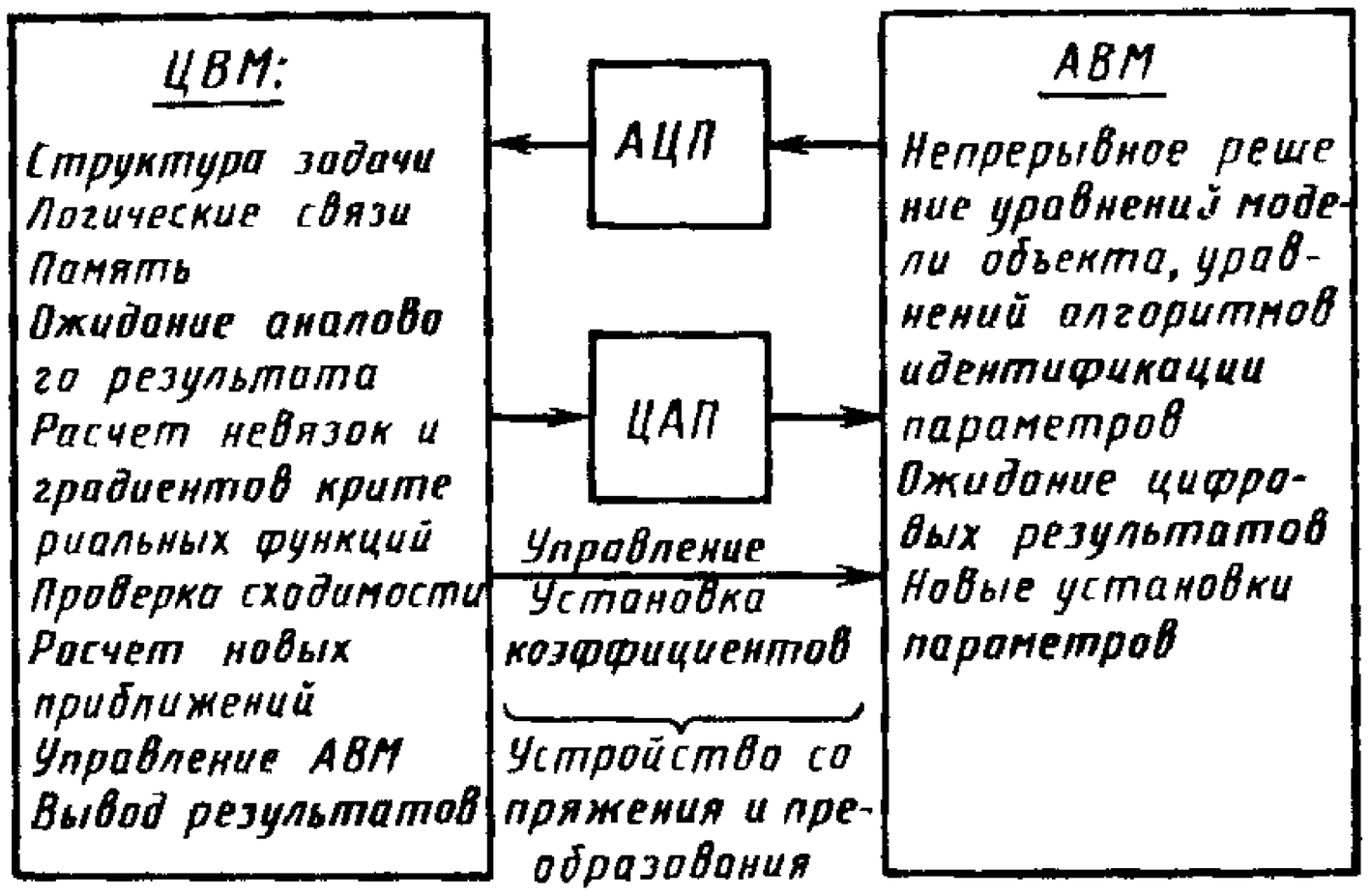


Рис. 9.1. Схема взаимодействия и разделения функций цифровой и аналоговой машин в гибридной вычислительной системе

время точность получения результатов на ГВС может быть сделана выше, чем на АВМ, а возможность автоматического управления работой АВМ и использование памяти ЦВМ приводят к тому, что аналоговое моделирование в гибридной системе становится значительно более гибким и менее трудоемким.

Гибридная и цифровая части системы объединяются через устройство сопряжения и преобразования (интерфейс). В его состав входят аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи (АЦП и ЦАП), необходимые для согласования уровня напряжения и формы импульсов при совместной работе ЦВМ и АВМ. АЦП преобразует непрерывные величины в дискретные, ЦАП – дискретные в непрерывные. Эффективность работы ГВС в значительной степени определяется качеством устройств сопряжения и, в первую очередь, преобразователями информации. Поскольку наивысшая точность работы АВМ составляет ~0,01 %, то преобразователи также должны иметь точность не хуже 0,01 %. Скорость вычислений будет зависеть от быстродействия АЦП и ЦАП, а также от скорости переключения коммутаторов. Современные преобразователи при точности работы 0,01 % и числе разрядов, равном 14, имеют время преобразования 5 – 10 мкс (АЦП) и 2 мкс (ЦАП).

Управление аналоговыми вычислениями с помощью ЦВМ связано с автоматизацией процессов управления интеграторами, изменения параметров и режима работы АВМ. С помощью ЦВМ выполняется расчет масштабов, коэффициентов, начальных условий и данных контроля, а также осуществляется автоматизация набора задачи. До настоящего времени применяется полуавтоматический набор задачи, когда автоматизирована установка коэффициентов (при помощи многооборотных потенциометров с электромеханической следящей системой или кодоуправляемых проводимостей и сопротивлений). В то же время соединение решающих блоков выполняется вручную на наборном поле. В математическое обеспечение ЦВМ также можно включить программы, синтезирующие электрические схемы моделирования.

При проведении итерационных вычислений и многопараметрических расчетов, свойственных тепловому проектированию и моделирова-

нию технических систем ЦВМ управляет аналоговыми циклами вычислений, осуществляет перебор параметров, распределяет результаты в памяти, выполняет логический анализ и выводит результаты на печать, графопостроитель и дисплей.

При разделении алгоритмов решения задачи на цифровую и аналоговую части обычно придерживаются следующего естественного подхода. АВМ поручают те расчеты, где требуется высокая скорость вычислений, но не обязательна высокая точность результатов. ЦВМ выполняет высокоточные операции.

Гибридное взаимодействие АВМ и ЦВМ связано с необходимостью согласования режимов работы этих видов вычислительных устройств. Аналоговая машина позволяет непрерывно проводить параллельные расчеты. Таким образом, для того, чтобы "вмешаться" в аналоговый процесс вычислений с целью передачи значений переменных коэффициентов и других величин, рассчитанных на ЦВМ, цифровая машина должна иметь время реакции (время выполнения всех необходимых вычислительных операций и операций передачи информации), равное и меньшее одной десятой периода наибыстрейшего изменения переменной, полученной на АВМ. Причем время реакции цифровой машины должно укладываться в интервал дискретизации аналоговой информации, передаваемой в ЦВМ. При использовании "быстрой" АВМ такая синхронизация двух машин может стать невозможной из-за недостаточного быстродействия цифровой части. Избежать эту трудность можно, построив временное взаимодействие АВМ и ЦВМ в процессе решения задачи таким образом, чтобы при работе аналоговой машины никаких передач данных или управлений не было. Например, работа АВМ задерживается до того момента, пока не закончится считывание необходимой информации из памяти ЦВМ, а следующая передача будет сделана после фиксации работы элементов аналоговой техники. Если в состав ГВС входят так называемые медленные аналоговые машины (без периодизации решений), согласование режимов работы АВМ и ЦВМ не представляет особых трудностей, и можно организовать совместное параллельное действие цифровой и аналоговой частей системы.

Следует заметить, что создание достаточно мощной гибридной вычислительной системы — сложная техническая задача и необходимость ее решения в каждом конкретном случае должна быть тщательно обоснована. Во многих случаях чисто цифровые расчеты, хотя и проигрывают по эффективности гибридному способу, но в целом вполне удовлетворяют исследователей и проектантов. В области теплофизических исследований это относится, в первую очередь, к одномерным задачам теплопроводности, широко распространенным в практике приближенного проектного анализа. Фактор сокращения абсолютного времени счета на 1—2 порядка будет, конечно, заметен и в этих случаях, но при использовании таких ЭЦВМ, как БЭСМ-6, мощных машин типа ЕС и т.п., он один не является достаточно весомым критерием для разработки сложной гибридной техники.

Однако положение существенно меняется при решении многомерных задач теплообмена, нелинейных обратных задач и, особенно, в случае автоматизации теплового проектирования, построения систем обработки результатов тепловых экспериментов. Необходимость многократных итерационных обращений к долгосчитающим алгоритмам при выборе проектных параметров технических систем, идентификации процессов теплообмена, обработке экспериментальных данных приводит к резкому, подчас недопустимому возрастанию общих затрат машинного времени или даже к невозможности реализации требуемых схем обработки информации. Во многих подобных ситуациях гибридная техника становится необходимым вычислительным оборудованием и требуется разработка гибридных методов решения задач.

9.1.3. ГИБРИДНЫЕ СИСТЕМЫ С СЕТОЧНЫМИ ПРОЦЕССОРАМИ*

Наиболее мощные из современных ГВС построены по принципу ориентации на аналоговые вычисления. В таких "аналого-ориентированных системах" основные расчеты, включающие в себя интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, выполняет активная АВМ, а ЦВМ используется во вспомогательной роли для управления, вычисления функций, хранения информации. В связи с этим к АВМ предъявляются жесткие требования по количеству усилителей, времени настройки управляемых элементов, точности работы, характеристикам управляемости и контроля. Поэтому в подобных ГВС используются большие, сложные и дорогостоящие аналоговые машины.

В настоящее время существует также и другая концепция построения ГВС, базирующаяся на использовании аналоговых подпрограмм. В этом случае универсальная ЦВМ сопрягается с узкоспециальным аналоговым устройством, позволяющим выполнять требуемые вычислительные операции существенно быстрее, чем на ЦВМ. Такие системы известны как "цифроориентированные ГВС" и обладают некоторыми преимуществами перед аналого-ориентированными с точки зрения затрат на создание и эксплуатацию, а также определенного удобства в программировании задач. Однако они проигрывают в универсальности аналоговых расчетов. В таких цифроаналоговых системах, предназначенных для решения задач теории поля, в качестве аналогового процессора целесообразно использовать специальные сетки пассивных резисторов (R-сетки). При этом можно обеспечить:

1) достаточно высокую точность аналоговых вычислений;

2) повышение производительности системы;

3) достаточно простую вычислительную реализацию решения алгебраических задач большой размерности;

4) полную автоматизацию управления аналоговыми процессорами

---

*Спалвинь А. Гибридные вычислительные машины для решения краевых задач. – Рига: Рижск. политехн. ин-т, 1975. – 176 с.

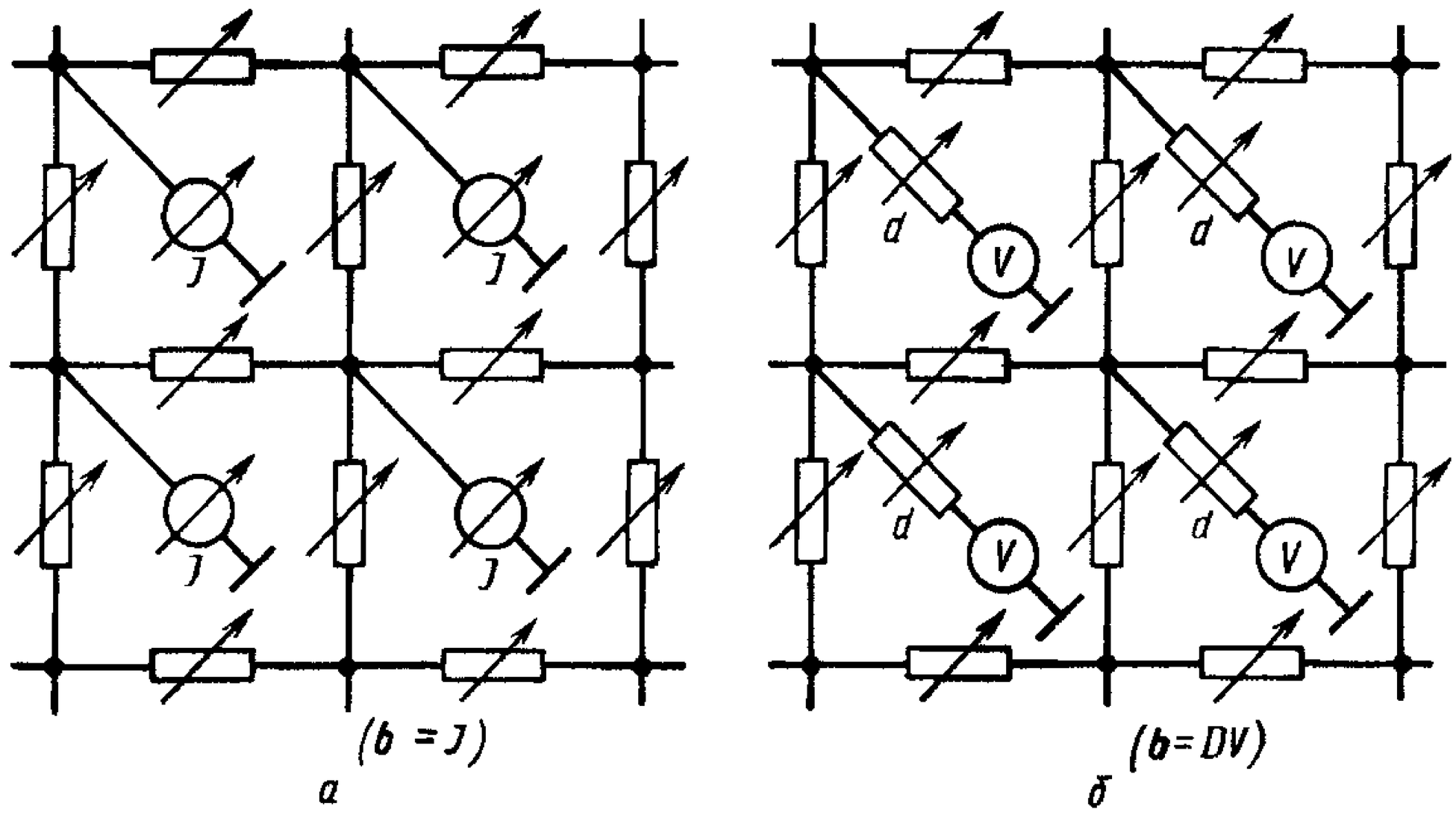


Рис. 9.2. Принципиальные схемы *R*-сеток (общее уравнение сетки Lv = b, где L – матрица проводимостей, v – вектор напряжений в узлах сетки)

при использовании съемных наборных полей и управляемых резисторов;

5) сохранение основных принципов цифрового программирования алгоритмов решения задач.

Принципиальные схемы сеточных процессоров показаны на рис. 9.2,*а* и *б* соответственно с источниками тока и напряжения.

9.2. ГИБРИДНЫЙ СПОСОБ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В разд. 7.1 было показано, что регуляризованная конечномерная постановка граничной обратной задачи с постоянными ТФХ сводится к алгебраической системе

$$\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u} = \mathbf{D}(\alpha), \qquad (9.1)$$

где параметр регуляризации α выбирается по определенному правилу, согласующему точность исходных данных с невязкой температуры.

В цифровой реализации данного алгоритма значительные затраты машинного времени приходятся на многократное решение системы (9.1) при варьировании значениями параметра α. Эти затраты тем больше, чем выше порядок системы – размерность восстанавливаемого вектора **u**. Возникает вопрос – нельзя ли для решения алгебраической системы использовать аналоговую часть ГВС и тем самым не только сократить время счета задачи, но и при достаточном количестве аналоговых решающих устройств сделать его практически независимым от размерности вектора **u**?

Поскольку матрица **B** симметричная и положительно определенная, то такой подход вполне возможен, если воспользоваться известным ме-

тодом установления. Следуя этому методу, перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}(\alpha), \quad t \to \infty, \tag{9.2}$$

где t – новая независимая переменная (машинное время). Начальное условие $\mathbf{u}(0)$ выбирается достаточно произвольно.

В пределе при $t \to \infty$ векторная функция $\mathbf{u}(t)$ будет сходиться к некоторому приближенному регуляризованному решению обратной задачи в зависимости от заданного значения α, т.е. задача (9.2) эквивалентна постановке (9.1).

Положительная определенность матрицы $\mathbf{B}$ гарантирует устойчивость решения уравнения (9.2). Время установления определяется принятой величиной точности выхода решения $\mathbf{u}(t)$ на стационарный режим, т.е. такой величиной ϵ, в пределах которой $\mathbf{u}(t)$ перестает меняться.

Интегрирование ОДУ – типичная операция для активной АВМ, и аналоговое решение системы (9.2) может быть выполнено весьма быстро. При этом функции хранения информации и подготовки ее для следующего цикла моделирования на АВМ, соответствующего другому значению α, возлагаются на ЦВМ. Отметим, что при переходе к другому α схема аналогового набора не меняется, не меняются также и ее параметры, за исключением тех коэффициентов, которые соответствуют трем или пяти диагоналям матрицы $\mathbf{B}$ – в зависимости от порядка регуляризации задачи.

Таким же образом могут быть решены обратные задачи в двумерной постановке (см. разд. 7.5), а также регуляризованные алгебраические системы для каждого пространственного слоя разностной сетки в численном алгоритме решения нелинейной ОЗТ, рассмотренном в разд. 7.4.

9.3. ГИБРИДНЫЙ РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Изложенный выше гибридный подход к определению приближенного решения линейной обратной задачи предполагает использование АВМ только для моделирования системы ОДУ (9.2), в то время как исходные данные для каждого аналогового цикла расчета находятся чисто цифровым способом. Можно построить гибридный алгоритм решения данной ОЗТ, в котором вычисление коэффициентов и правых частей (9.2) осуществляется с широким применением аналоговой части ГВС.

Покажем это на примере следующей задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in (0, b), \quad \tau \in (0, \tau_m]; \tag{9.3}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&T(x,\ 0)\ = 0;\\
&T(0,\ \tau)\ = f(\tau)\ ;\quad -\lambda\,\frac{\partial T(0,\ \tau)}{\partial x} = Q(\tau);\\
&T(b,\ \tau) = u(\tau),
\end{aligned}
\right\} \qquad (9.4)
$$

где $f(\tau)$ и $Q(\tau)$ — известные функции; $u(\tau)$ — искомая зависимость температуры поверхности тела

Воспользуемся одним из вариантов *метода прямых*, когда пространственная координата считается непрерывной, в то время как временная переменная заменяется совокупностью дискретных точек τ_i, $i = 1, m$ с равным шагом $\Delta\tau$. Аппроксимируя временную производную соотношением $\dfrac{\partial T}{\partial \tau}\Big|_i \simeq [T_i(x) - T_{i-1}(x)]/\Delta\tau$, где $T_i(x) = T(x, \tau_i)$, придем к следующей дифференциально-разностной задаче — аппроксимации задачи (9.3) — (9.4):

$$
\frac{d^2 T_i(x)}{dx^2} - \frac{1}{a\,\Delta\tau}\,T_i(x) = -\frac{1}{a\,\Delta\tau}\,T_{i-1}(x), \qquad (9.5)
$$

$$
x \in (0, b), \quad i = \overline{1, m};
$$

$$
T_0(x) = 0;
$$

$$
T_i(0) = f_i; \quad \frac{dT_i(0)}{dx} = \varphi_i \equiv -\frac{Q_i}{\lambda}\ .
$$

Требуется определить величины u_n, $n = \overline{1, m}$ из условия минимума регуляризованной невязки

$$
\Phi[\mathrm{u}] = \sum_{i=1}^{m} [T_i(0) - f_i]^2 + \alpha \sum_{i=1}^{m} (u_i - u_{i-1})^2,
$$

где температуры $T_i(0)$ получаются из решения системы (9.5) при заданных векторах краевых условиях — известном $\varphi = [\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m]^{\mathrm{T}}$ и варьируемом $\mathrm{u} = [u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m]^{\mathrm{T}}$.

Приравнивая нулю производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_n}$, запишем необходимые условия экстремума в виде

$$
\sum_{i=n}^{m} [T_i(0) - f_i]\,\frac{\partial T_i(0)}{\partial u_n} + \alpha(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}) = 0, \qquad (9.6)
$$

$$
n = \overline{1, m}.
$$

Чтобы найти частные производные $\dfrac{\partial T_i(0)}{\partial u_n}$ (коэффициенты чувствительности), поступим следующим образом. Продифференцируем правую и левую части уравнения (9.5) по u_n и поменяем порядок дифференцирования по x и u_n. Вводя обозначение $\psi_{in}(x) = \dfrac{\partial T_i(x)}{\partial u_n}$, получим

$$\frac{d^2\psi_{in}(x)}{dx^2} - \frac{1}{a\Delta\tau}\psi_{in}(x) = -\frac{1}{a\Delta\tau}\psi_{i-1,n}(x). \tag{9.7}$$

Решение (9.7) должно удовлетворять краевым условиям

$$\frac{d\psi_{in}(0)}{dx} = 0, \quad \psi_{in}(b) = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n, \end{cases} \tag{9.8}$$

$$n = \overline{1, m}, \quad i = \overline{n, m}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\psi_{11} = \psi_{22} = \ldots = \psi_{mm},$$

$$\psi_{21} = \psi_{32} = \ldots = \psi_{m, m-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_{i1} = \psi_{i+1,2} = \ldots = \psi_{i+j, j+1} = \ldots = \psi_{m, m-i+1}.$$

Таким образом, для определения всех производных $\psi_{in}(0) = \dfrac{\partial T_i(0)}{\partial u_n}$ требуется решить двухточечную краевую задачу (9.7) – (9.8) только m раз – для $n = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Естественно для этой цели использовать аналоговую часть гибридной вычислительной системы. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Задача (9.7) – (9.8) представляет собой линейную краевую постановку, в которой ищется решение системы дифференциальных уравнений на некотором отрезке по условиям, определяющим связь между значениями решения и его производных в конщевых точках отрезка. Одним из эффективных методов нахождения этого решения, который позволяет преодолеть трудности, связанные с появлением режима неустойчивого интегрирования на АВМ при малых $\Delta\tau$, является сведение данной задачи к задаче с начальным условием по методу прогонки.

Введем обозначения $y(x) = \psi_{in}(x)$, $g = 1/a\Delta\tau$, $h(x) = -(1/a\Delta\tau) \times \psi_{i-1,n}(x)$ и перепишем краевую задачу (9.7) – (9.8) в виде

$$L(y) \equiv y'' - gy = h(x), \quad x \in (0, b); \tag{9.9}$$

$$y'(0) = 0; \tag{9.10}$$

$$y(b) = c, \tag{9.11}$$

где $c = 0$ или 1 в зависимости от соотношения номеров i и n.

Для решения задачи (9.9) – (9.11) воспользуемся одним из известных методов прогонки*. Построим последовательности функций u_k и ϑ_k, $k = 1, 2, \ldots$, полагая $\vartheta_0 = 0$ и используя дифференциальные уравнения

$$\frac{d\vartheta_k}{dx} + \sqrt{g}\,\vartheta_k = \frac{h}{2\sqrt{g}}\;; \tag{9.12}$$

$$\frac{dw_k}{dx} - \sqrt{g}\,w_k = \frac{h}{2\sqrt{g}} \tag{9.13}$$

с начальными условиями

$$\frac{d\vartheta_k(0)}{dx} = \frac{dw_{k-1}(0)}{dx}, \quad w_k(b) = c + \vartheta_k(b).$$

Функция $y_k = w_k - \vartheta_k$, как нетрудно проверить, удовлетворяет уравнению (9.9) и условию (9.11). Кроме того, при $k \to \infty$ последовательность y_k быстро сходится к решению краевой задачи (9.9) – (9.11).

Если ввести новую независимую переменную $x' = b - x$, то уравнение (9.13) преобразуется в уравнение

$$\frac{dw_k(x')}{dx'} - \sqrt{g}\,w_k(x') = \frac{h(x')}{2\sqrt{g}} \tag{9.14}$$

с начальным условием

$$w_k|_{x'=0} = c + \vartheta_k|_{x'=0}.$$

В результате уравнение (9.14) интегрируется в том же направлении, что и уравнение (9.12) – слева направо. Эти операции при разработке гибридного алгоритма поручаются АВМ.

Для решения системы (9.6) относительно u_n, $n = \overline{1, m}$ необходимо помимо коэффициентов чувствительности $\psi_{in}(0)$ найти связь величин $T_i|_{x=0}$ с искомыми значениями u_n. Нетрудно показать, что в итоге имеем следующую запись регуляризованной алгебраической системы:

$$\sum_{l=1}^{m} u_l P_{ln} + \alpha(-u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1}) = b_n, \quad n = \overline{1, m}, \tag{9.15}$$

где

$$P_{ln} = \sum_{k=l}^{m} \psi_{kl}(0)\,\psi_{kn}(0), \quad b_n = \sum_{i=n}^{m} \psi_{in}(0)\,f_i.$$

*Vichnevetsky R. Hybrid Methods for Partial Differential Equations. – Simulation, 1971, vol.16, N 4, p. 169–180.

К уравнениям (9.15) необходимо добавить два условия, определяющих значения u_0 и u_{m+1}, например, из аппроксимации производной du/dx в точках $\tau = 0$, $\tau = \tau_m$.

Расчет сумм при определении коэффициентов P_{ln} и b_n, а также "запоминание" полученных значений осуществляется с помощью цифровой машины. Решение регуляризованной алгебраической системы при различных значениях параметра α может быть выполнено гибридным способом, как описано в разд. 9.2.

Замечание I. Выше в качестве искомой функции рассматривалась граничная температура, однако данный алгоритм практически полностью переносится на случай восстановления плотности теплового потока

$$q(\tau_n) = -\lambda \frac{dT_n(b)}{dx}.$$

Замечание II. Без трудностей принципиального характера предложенный гибридный способ решения ОЗТ распространяется на уравнение теплопроводности с конвективным членом и распределенным источником тепла, в том числе, когда коэффициенты и источник являются функциями координаты x. В этих случаях число коэффициентов чувствительности также можно уменьшить с $m(m+1)/2$ до m значений. Решение получающихся m краевых задач для определения коэффициентов чувствительности выполняется на ГВС в соответствии с изложенной схемой.

В случае, когда коэффициенты и источники зависят не только от x, но и от τ, приходится рассчитывать уже $m(m+1)/2$ коэффициентов чувствительности.

9.4. О ГИБРИДНОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Представляется рациональным применение гибридных вычислительных методов для восстановления причинных характеристик процессов теплообмена с помощью итерационных процедур решения экстремальных форм ОЗТ. Как видно из гл. 6 и 8, в случае функциональной формы оптимизации наиболее трудоемкими частями вычислительных алгоритмов являются процедуры решения краевых задач для уравнения теплопроводности, с помощью которых определяют температуру в теле и ее приращение, а также процедура нахождения градиента невязки, основанная на решении сопряженной краевой задачи. Таким образом, быстродействие итерационных алгоритмов можно значительно повысить, передав функции интегрирования этих краевых задач аналоговой части гибридной системы.

Если ввести обратное время $t = \tau_m - \tau$, то решение сопряженной задачи укладывается в общую схему интегрирования краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Гибридное решение получающихся прямых задач теплопроводности может быть выполнено различными способами В частности, для одномерного случая хорошие результаты дает параллельный метод прямых.

Заметим, что вывод о более эффективном решении обратных задач теплопроводности на ГВС по сравнению с ЦВМ полностью распространяется также и на решение обратных задач теплообмена в технических системах, поскольку в этом случае основные затраты времени ЦВМ приходятся на многократное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих тепловой режим системы (см. разд. 8.4.6).

9.4.1. ПРИМЕР ГИБРИДНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим в качестве примера методику гибридного решения граничной ОЗТ с помощью метода скорейшего спуска, реализованного на аналого-цифровой системе. Задача соответствует постановке, изложенной в разд. 9.3.

Функции ЦВМ (Минск-32) и АВМ (АВК-2) согласно результатам анализа, проведенного в разд. 9.4, были разделены следующим образом: АВМ (на каждой итерации) — 1) решение прямой задачи теплопроводности для определения температуры твердого тела в точке измерения, 2) решение прямой задачи теплопроводности для расчета приращения температуры, 3) решение сопряженной краевой задачи; ЦВМ — все остальные арифметические операции, корректировку масштабов, логические операции, хранение исходных данных и промежуточных результатов, управление работой АВМ, вывод информации.

Сопряженная задача была преобразована к постановке с обратным временем, в результате все три задачи, моделируемые на АВМ, получили одну и ту же краевую постановку для уравнения теплопроводности Эти задачи были аппроксимированы системой обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствии с *параллельным методом прямых* — время было принято в качестве независимой переменной

В итоге для одномерного уравнения теплопроводности получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dT_i}{d\tau} = \frac{a}{\Delta x^2}(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}), \quad i = \overline{1, I-1}, \quad \tau > 0, \qquad (9.16)$$

где I — число пространственных слоев, $\Delta x = b/I$.

Начальное условие для (9.16) определяется начальным распределением температуры $T(x, 0)$: $T_i(0) = T_0(x_i)$ Функции $T_0(\tau)$ и $T_I(\tau)$ следуют из аппроксимации граничных условий, в частности, аппроксимации простейшего вида

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x}\Big|_{x_0} \simeq \frac{T_1(\tau) - T_0(\tau)}{\Delta x}.$$

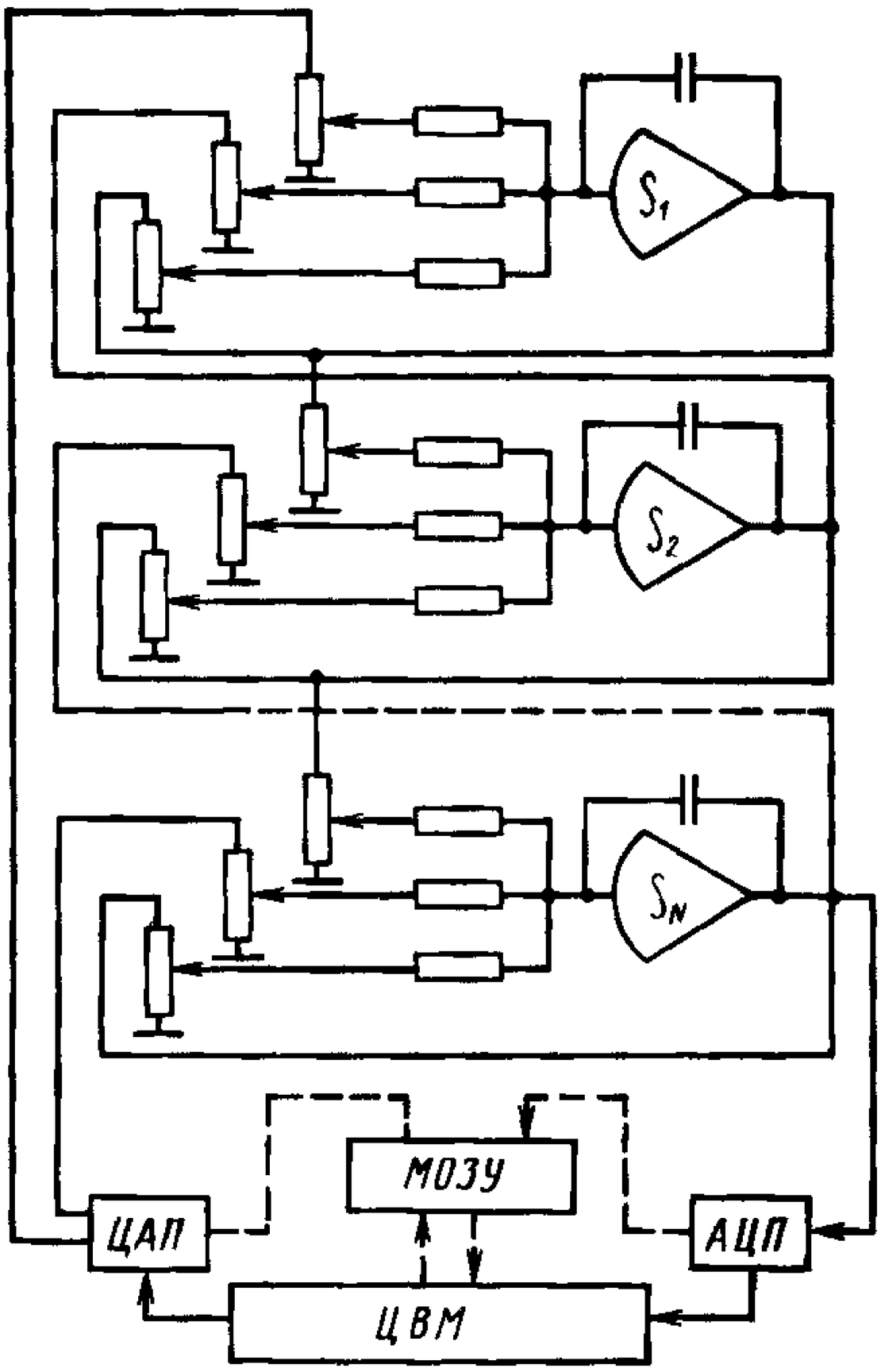


Рис. 9.3. Блок-схема гибридного решения задачи

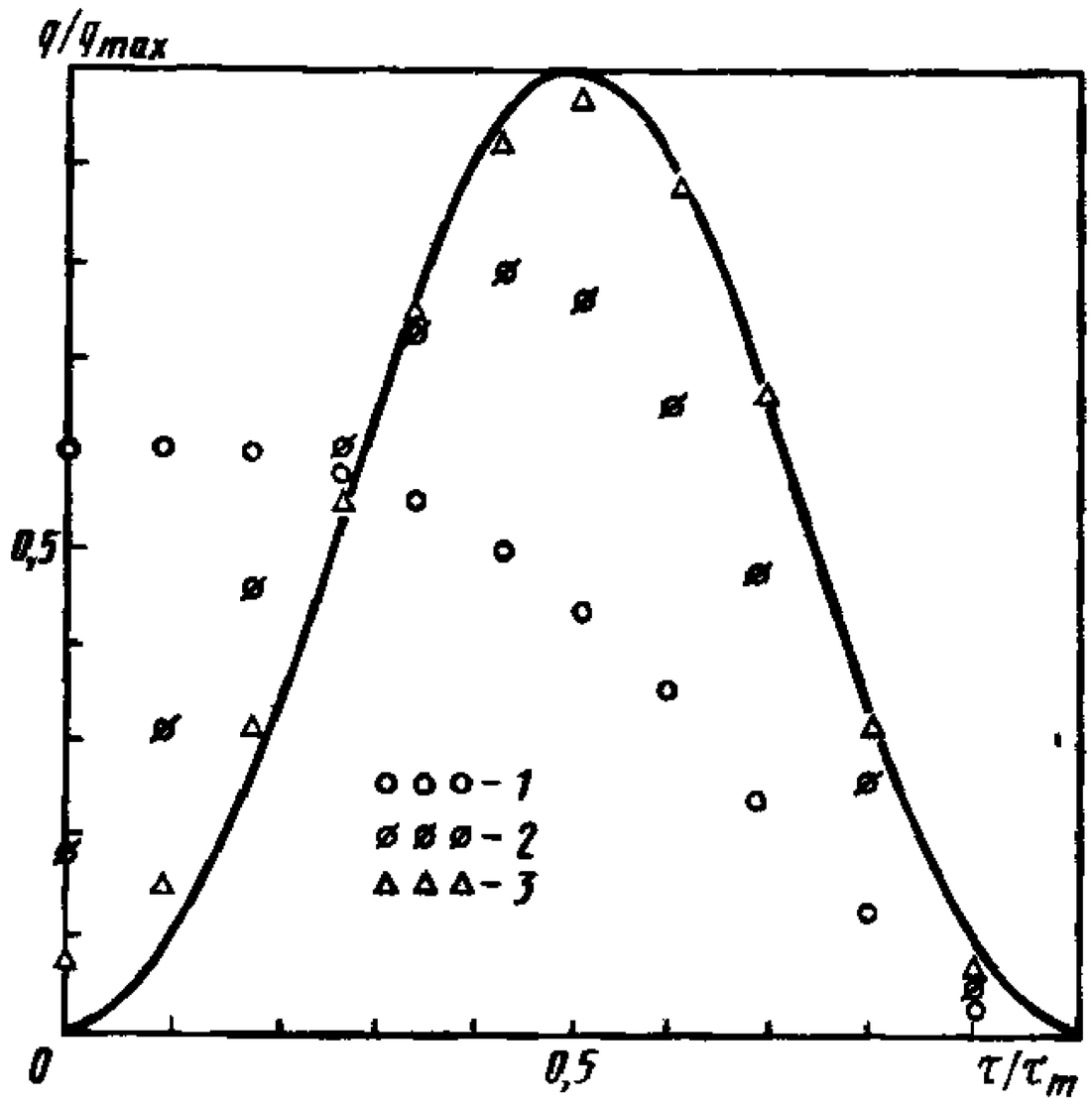


Рис. 9.4. Итерационное решение ОЗТ методом скорейшего спуска на ГВС, $d = b$, $J = 20$ (сплошная кривая – искомая функция):
1, 2, 3 – соответственно 1-я, 2-я и 15-я итерации (результаты сняты с экрана дисплея)

Полученные дифференциальные уравнения набираются на АВМ и процесс моделирования для всех x_i оказывается параллельным. Основное достоинство параллельного метода прямых заключается в простоте, удобстве и наглядности процесса аналогового решения, а также в том, что метод является устойчивым для любых значений шагов Δx, поскольку временной шаг фактически равен нулю. Заметим здесь, что последнее условие позволяет исключить из рассмотрения общей устойчивости решения ОЗТ устойчивость дифференциально-разностной схемы решения прямой задачи, что в ряде случаев является важным моментом

Блок-схема аналогового набора и взаимодействия с ЦВМ показана на рис. 9.3*.

Анализ результатов гибридного решения методических примеров регуляризованным методом скорейшего спуска, в том числе сравнение их с чисто цифровыми результатами, показал следующее:

1. Гибридное решение мало отличается от цифрового, т.е. точность гибридной реализации алгоритма является вполне приемлемой для практических целей.

2 Общий характер итерационных приближений оказался близким к

---

*Гибридная реализация данного алгоритма и вычисления были выполнены И.М. Уколовым.

цифровому способу итерационного решения ОЗТ. В частности, для точных или сглаженных входных температур не было замечено признаков расходимости процесса при увеличении числа итераций. В то же время для возмущенных входных данных требовался останов по критерию невязки (см. разд. 6.5).

3. Время аналого-цифрового решения оказалось на порядок меньше, чем в случае решения тех же примеров чисто цифровым способом на ЭВМ "Минск-32", причем есть еще дополнительные резервы по сокращению гибридного машинного времени. Кроме того, для более трудоемких задач этот выигрыш должен быть еще больше.

На рис. 9.4 приведены результаты гибридного решения ОЗТ для одного из рассмотренных примеров.

Гибридные системы позволяют решать обратные задачи и в других, значительно более сложных постановках, что, в свою очередь, дает возможность проводить более сложные экспериментальные исследования и повысить достоверность получаемых результатов. Заметим, что во всех этих случаях, как показано выше, одним из основных вопросов будет построение эффективных гибридных алгоритмов решения прямых задач теплопроводности, необходимых для организации итерационных процессов приближений к искомым решениям обратных задач. Особое значение это имеет для многомерных задач. Ниже приведен один из таких алгоритмов.

9.4.2. ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пусть процесс теплопередачи рассматривается в прямоугольной области (x, y) и описывается нелинейным уравнением теплопроводности вида

$$C\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + Q(T), \qquad (9.17)$$

$$\tau \in (0, \tau_m], \quad x \in (0, b), \quad y \in (0, c).$$

На границах области заданы тепловые потоки

$$-\lambda_y \frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial y} = q_1(y, \tau); \quad -\lambda_y \frac{\partial T(b, y, \tau)}{\partial y} = q_2(y, \tau);$$

$$-\lambda_x \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial x} = q_3(x, \tau); \quad -\lambda_x \frac{\partial T(x, c, \tau)}{\partial x} = q_4(x, \tau).$$

Начальное условие имеет вид: $T(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

Введем разностные сетки с постоянными шагами $\Delta x = b/L$, $\Delta y = c/K$, $\Delta \tau = \tau_m / M$, где L, K, M – количество шагов по x, y, τ соответственно.

Для аппроксимации дифференциальных членов в правой части урав-

нения (9.17) воспользуемся следующим разностным аналогом (для производных по y аналогично):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\lambda^{n+1/2}_{x_{l+1/2,k}}\left(T^{n+1/2}_{l+1,k} - T^{n+1/2}_{l;k}\right) - \right.$$

$$\left. -\lambda^{n+1/2}_{x_{l-1/2,k}}\left(T^{n+1/2}_{l,k} - T^{n+1/2}_{l-1,k}\right)\right] \equiv \delta_l(\lambda_x \delta T)^{n+1/2}_k \frac{1}{\Delta x^2}.$$

Тогда для дискретного определения температурного поля на $n+1$ временном слое получим по методу переменных направлений следующие разностные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} C^{n+1/2}_{lk}\frac{T^{n+1/2}_{lk} - T^{n}_{lk}}{\Delta\tau/2} &= \frac{1}{\Delta x^2}\delta_l(\lambda_x \delta T)^{n+1/2}_k + \\ &+ \frac{1}{\Delta y^2}\delta_k(\lambda_y \delta T)^{n}_l + Q^{n+1/2}_{lk}; \\ C^{n+1/2}_{lk}\frac{T^{n+1}_{lk} - T^{n+1/2}_{lk}}{\Delta\tau/2} &= \frac{1}{\Delta x^2}\delta_l(\lambda_x \delta T)^{n+1/2}_k + \\ &+ \frac{1}{\Delta y^2}\delta_k(\lambda_y \delta T)^{n+1}_l + Q^{n+1/2}_{lk}. \end{aligned}\right\} \quad (9.18)$$

Обозначим

$$\tilde{T}^{n}_{lk} = \left[T^{n}_{lk} + \frac{\Delta\tau}{2C^{n+1/2}_{lk}\,\Delta y^2}\delta_k(\lambda_y \delta T)^{n}_l\right], \quad (9.19)$$

$$\tilde{T}^{n+1/2}_{lk} = \left[T^{n+1/2}_{lk} + \frac{\Delta\tau}{2C^{n+1/2}_{lk}\,\Delta x^2}\delta_l(\lambda_x \delta T)^{n+1/2}_k\right]$$

и введем новые зависимые переменные*

$$\Delta T^{n+1/2}_{lk} = T^{n+1/2}_{lk} - \tilde{T}^{n}_{lk}; \quad \Delta T^{n+1}_{lk} = T^{n+1}_{lk} - \tilde{T}^{n+1/2}_{lk}. \quad (9.20)$$

---

*Bishop K.A. An Application of the Hybrid Alternating Direction Implicit Procedure to the Simulation of an Unconfined Aquifer. – Annales de l'Association Internationale Pour le Calcul Analogique, 1974, N 3, p. 9–14.

Тогда уравнения (9.18) перепишутся

$$\left.\begin{aligned} 2\,\frac{\Delta x^2}{\Delta\tau}\,C_{lk}^{n+1/2}\,\Delta T_{lk}^{n+1/2} &= \delta_l(\lambda_x\delta T)_k^{n+1/2} + Q_{lk}^{n+1/2}\,\Delta x^2, \\ 2\,\frac{\Delta y^2}{\Delta\tau}\,C_{lk}^{n+1/2}\,\Delta T_{lk}^{n+1} &= \delta_k(\lambda_y\delta T)_l^{n+1} + Q_{lk}^{n+1/2}\,\Delta y^2. \end{aligned}\right\}$$

В матричной записи окончательно получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{C}_k^{n+1/2}\,\Delta\mathbf{T}_k^{n+1/2} &= \mathbf{b}_k^{n+1/2}, \\ \mathbf{C}_l^{n+1/2}\,\Delta\mathbf{T}_l^{n+1} &= \mathbf{b}_l^{n+1}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.21)$$

где $\mathbf{C}_k^{n+1/2}$, $\mathbf{C}_l^{n+1/2}$ — диагональные матрицы, например,

$$\mathbf{C}_k^{n+1/2} = 2\,\frac{\Delta x^2}{\Delta\tau}\cdot\begin{bmatrix} C_1 & & & & 0 \\ & C_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_l & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & C_{L-1} \end{bmatrix}_k^{n+1/2};$$

$\Delta\mathbf{T}_k^{n+1/2}$, $\Delta\mathbf{T}_l^{n+1}$ — искомые вектора размерности $L-1$ и $K-1$ соответственно

Правые части определяются выражениями, полученными с учетом аппроксимации нормальных производных в граничных условиях. В данном случае использованы разности, смещенные в глубь области и условно принято, что $\lambda|_\Gamma = \lambda_{\Gamma\pm1/2}$, в зависимости от того берется ли разность "вперед" или "назад" (отметим, что более точная аппроксимация граничных условий не приводит к появлению принципиальных трудностей в гибридном решении):

$$\mathbf{b}_k^{n+1/2} = \mathbf{F}_k^{n+1/2}\,\mathbf{u}^{n+1/2} + \mathbf{f}_k^{n+1/2};$$

$$\mathbf{b}_l^{n+1} = \mathbf{F}_l^{n+1}\,\mathbf{u}_l^{n+1} + \mathbf{f}_l^{n+1/2},$$

где $\mathbf{F}_k^{n+1/2}$, $\mathbf{F}_l^{n+1}$ — симметричные трехдиагональные матрицы:

$$\mathbf{F}_k^{n+1/2} = \begin{bmatrix} -c_{x_1} & c_{x_1} & & & & \\ a_{x_2} & b_{x_2} & c_{x_2} & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & a_{xl} & b_{xl} & c_{xl} \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & a_{x_{L-1}} & & -a_{x_{L-1}} \end{bmatrix}_k^{n+1/2},$$

$$\mathbf{F}_l^{n+1} = \begin{bmatrix} b_{y_1} & c_{y_1} & & & & \\ a_{y_2} & b_{y_2} & c_{y_2} & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & a_{yk} & b_{yk} & c_{yk} \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & a_{yk-1} & & b_{yk-2} \end{bmatrix}_l^{n+1};$$

$$a_{xl} = \lambda_{xl-1/2};\quad b_{xl} = -(\lambda_{xl-1/2} + \lambda_{xl+1/2});\quad c_{xl} = \lambda_{xl+1/2};$$

$$a_{yk} = \lambda_{yk-1/2};\quad b_{yk} = -(\lambda_{yk-1/2} + \lambda_{yk+1/2});\quad c_{yk} = \lambda_{yk+1/2};$$

$\mathbf{u}_k^{n+1/2}$, $\mathbf{u}_l^{n+1}$ — векторы размерности $L-1$, $K-1$ соответственно, равные сумме векторов:

$$\mathbf{u}_k^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{T}}_k^{n+1/2} + \Delta\mathbf{T}_k^{n+1/2},\quad \mathbf{u}_l^{n+1} = \tilde{\mathbf{T}}_l^{n+1} + \Delta\mathbf{T}_l^{n+1};$$

$$\mathbf{f}_k^{n+1/2} = [\,\Delta x q_1 + Q_1\Delta x^2,\ \Delta x^2 Q_2,\ \Delta x^2 Q_3,\ \ldots,\ \Delta x^2 Q_{L-2},$$

$$\Delta x^2 Q_{L-1} - \Delta x q_2\,]_k^{\mathrm{T}\,n+1/2}$$

(аналогично для $\mathbf{f}_l^{n+1/2}$).

Уравнения (9.21) отвечают необходимым условиям для применения к их решению метода установления, т.е. возможен адекватный переход к следующей устойчивой задаче:

$$\frac{d\,\Delta \mathbf{T}}{dt} + \mathbf{C}\Delta\mathbf{T} - \mathbf{b} = 0, \quad t \to \infty . \tag{9.22}$$

Структурная схема для аналогового моделирования уравнения (9.22) приведена на рис. 9.5, где обозначено ЦУР – цифроуправляемые резисторы (см. сноску на с. 259).

Совместная работа АВМ и ЦВМ при реализации данного гибридного метода решения нелинейной краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности будет заключаться в следующем.

1. По известному начальному распределению температур для $k = \overline{1, K-1}$ рассчитываются вектора $\tilde{\mathbf{T}}_k^0 = [\tilde{T}_1^0, \tilde{T}_2^0, \ldots, \tilde{T}_{L-1}^0]_k^{\mathrm{T}}$. Вычисления

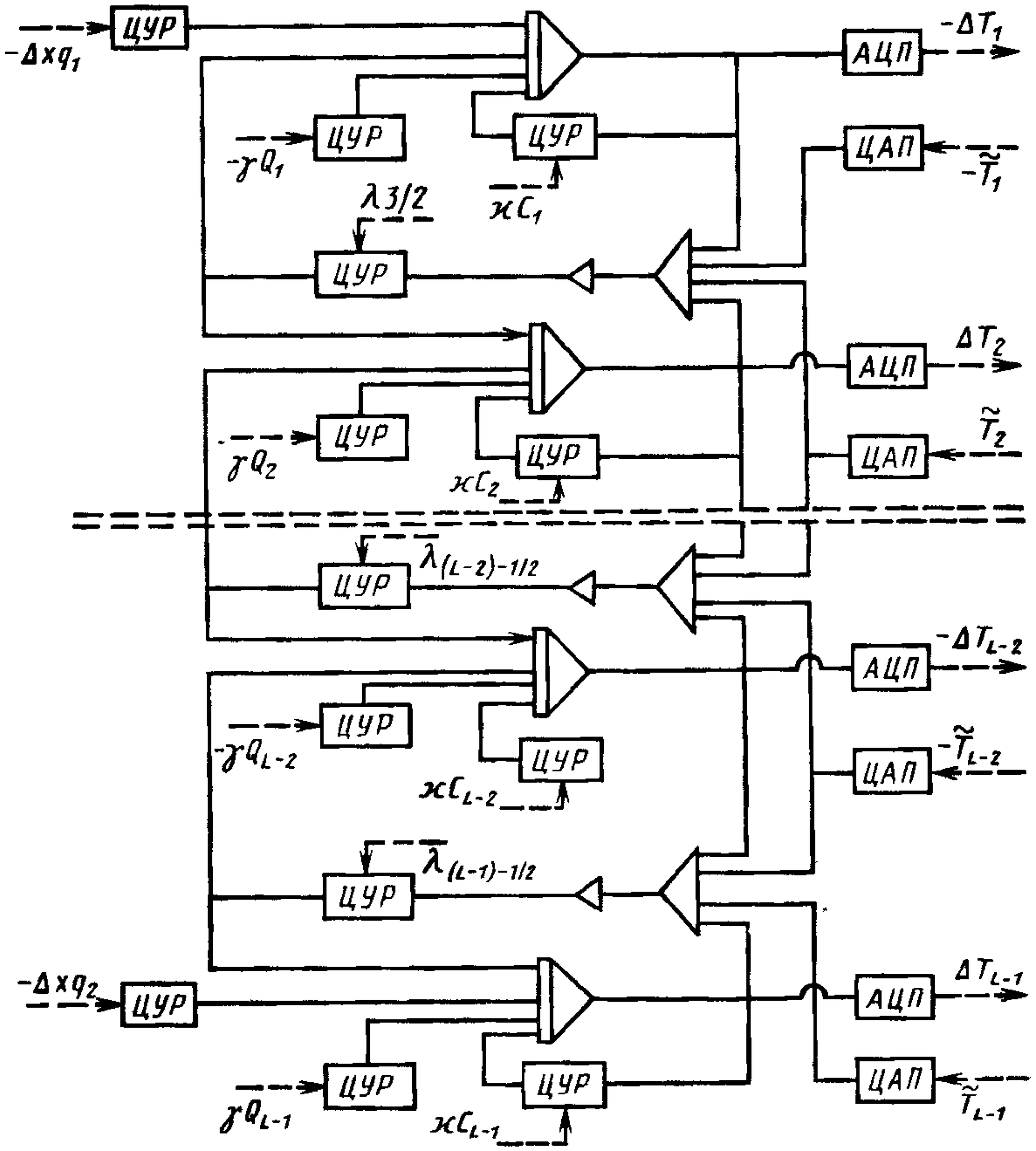


Рис. 9.5. Блок-схема гибридного решения ($\gamma = \Delta x^2$; $\kappa = 2\Delta x^2/\Delta\tau$)

производятся на ЦВМ по формуле (9.19); значения $C_{l1}^{1/2}$ и $\lambda_{l1}^{1/2}$ принимаются равными C_{l1}^{0} и λ_{l1}^{0} соответственно.

2. На АВМ интегрируется система обыкновенных дифференциальных уравнений (9.22). Входными данными при этом являются известные тепловые потоки $q_1^{1/2}$, $q_2^{1/2}$, коэффициенты теплопроводности и вектор $\tilde{\mathbf{T}}_1^0$. Данная процедура равносильна обращению трехдиагональной матрицы.

3. По найденным значениям приращений $\Delta T_l^{1/2}$ рассчитываются температуры $T_l^{1/2}$ и оцениваются теплофизические свойства $C_{l1}^{1/2}$, $\lambda_{l1}^{1/2}$.

4. При использовании метода Пикара для учета нелинейности по коэффициентам шаги 2 и 3 повторяются до получения температур $\bar{\mathbf{T}}_1^{1/2}$ с требуемой точностью. Отметим, что учет переменности ТФХ может быть осуществлен также по методу предиктор-корректор. В этом случае до получения температур $\mathbf{T}^{1/2}$ делается дополнительный переход со слоя $\tau = 0$ на слой $\tau = \Delta\tau/2$ по методу переменных направлений с промежуточным шагом $\tau = \Delta\tau/4$ и с оценкой ТФХ по уровню $\tau = 0$. Затем по найденному для $\tau = \Delta\tau/2$ температурному полю определяются теплофизические коэффициенты, которые и принимаются в расчет при переходе от $\tau = 0$ к $\tau = \Delta\tau$.

5. Шаги 2 – 4 повторяются последовательно для $k = 2, 3, \ldots, K-1$, затем, учитывая граничные условия на линиях $k = 0$ и K, определяется температурное поле во всех узловых точках пространственной сетки в момент времени $\Delta\tau/2$.

При выполнении этих операций ЦВМ вычисляет значения ТФХ, хранит в памяти краевые условия и промежуточные результаты, "загружает" необходимой информацией АВМ для интегрирования систем уравнений (9.22), а также рассчитывает вектора $\mathbf{T}_k^{1/2}$, $k = 1, K-1$, необходимые для вычисления $\Delta\mathbf{T}_l^1$.

6. Далее рассчитываются температурные распределения для $\tau = \Delta\tau$ с использованием второго уравнения системы (9.21). Соответствующие операции в целом аналогичны рассмотренным.

7. Данный процесс повторяется для последующих временных интервалов до достижения момента $\tau = \tau_m$.

Изложенный гибридный алгоритм по своей сущности близок к чисто дискретному методу переменных направлений, для которого основные вопросы сходимости и устойчивости тщательно изучены [86], а многочисленные практические применения доказали его высокую эффективность. При наличии в ГВС современной АВМ и быстродействующих интерфейсных устройств можно ожидать, что использование аналоговой программы для обращения матрицы по методу установления вместо цифрового метода прогонки даст экономию вычислительного времени.

Гибридный алгоритм построен таким образом, что АВМ рассчиты-

вает не искомое решение $T(x, \tau)$, а приращения ΔT (формулы (9.20)). Такой прием повышает точность решения задачи, поскольку дает возможность использовать максимальный динамический диапазон при каждом переходе по временной оси.

9.5. ДИСКРЕТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ЦИФРОАНАЛОГОВЫХ СИСТЕМАХ

Вычислительные цифроаналоговые системы типа ЦВМ–сетка резисторов (см. разд. 9.1.3) могут успешно применяться для решения различных типов обратных задач теплопроводности. Этот вывод относится к экстремальным алгоритмам решения ОЗТ и к методикам численного продолжения температурного поля (см. гл. 5 – 8). Соответствующие алгоритмы предполагают многократное решение систем алгебраических уравнений – систем, зависящих от параметра регуляризации α, систем, относящихся к каждому временному или пространственному слоям при численном интегрировании уравнения теплопроводности.

Важной особенностью всех этих алгебраических задач является симметричность и положительная определенность матриц. Математическая модель, описывающая электрические процессы в R-сетках, также представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с симметричной и положительно определенной матрицей **L**

$$\mathbf{Lv} = \mathbf{b}, \tag{9.23}$$

где **L** – матрица проводимостей сетки; **v** – вектор напряжений в узловых точках сетки.

Правая часть (9.23) определяется в зависимости от источников электрической энергии, запитывающих сетку сопротивлений (см. рис. 9.2). Если используются источники тока, то **b** представляет собой вектор тока в узлах сетки $\mathbf{b} = \mathbf{J}$. Для сеток с источниками напряжений $\mathbf{b} = \mathbf{DV}$, где **D** – диагональная матрица проводимостей d.

Таким образом, общность отмеченных свойств матриц решаемых алгебраических систем и матрицы **L**, позволяет электрически смоделировать решение этих систем на сетке при определенной настройке ее аналоговых элементов (сопротивлений и источников энергии).

Скорость расчетов и размерность задачи. Цифровая реализация решений алгебраических уравнений связана с заметным возрастанием затрат машинного времени при увеличении размерности системы. В частности, для метода исключения Гаусса зависимость числа операций от порядка системы n имеет вид полинома, в котором старший член равен $(1/3)\,n^3$. Ограниченные возможности цифровых машин (по быстродействию и объемам оперативной памяти), вынуждают в ряде случаев специально "загрублять" решение ОЗТ, уменьшая размерность восстанавливаемых векторов. В частности, это замечание относится к регуля-

ризованным алгоритмам для нелинейных обратных задач, которые требуют многократных обращений к подпрограмме решения системы линейных алгебраических уравнений, связанных с переходом от одного пространственного слоя к другому, а также с варьированием значений параметра регуляризации α для каждого слоя и итерациями по коэффициентам.

Однако положение существенно меняется, если в качестве подпрограммы решения соответствующих алгебраических систем использовать аналоговый сеточный процессор. Такой вывод следует из анализа его вычислительных возможностей, согласно которому, время решения на R-сетке:

определяется временем установления электрических параметров сетки после ее "запитки" от источников энергии и имеет порядок микросекунды,

практически не зависит от размерности задачи, так как все элементы сетки действуют параллельно.

Следовательно, можно считать, что искомый вектор получается практически мгновенно в виде напряжений в узлах сетки.

Таким образом, аналоговые процессоры при использовании их в качестве подпрограмм для решения алгебраических задач в алгоритмах ОЗТ обладают преимуществами перед ЦВМ с точки зрения быстродействия.

Преимущества гибридного метода становятся особенно ощутимыми при решении задач больших размерностей (например, в случае двумерных ОЗТ), когда потребное число узлов пространственной сетки достигает многих сотен или нескольких тысяч. При очень больших порядках матриц могут оказаться необходимыми итерационные методы решения алгебраических систем, основанные на принципе деления исходной матрицы на отдельные блоки. Такие методы эффективно реализуются на ГВС*.

Отметим, что существующие в настоящее время сеточные процессоры позволяют осуществлять безытерационное решение алгебраических уравнений с квадратными матрицами $n \times n$, имеющими размерность $n = 500 - 1000$.

Точность результатов. Вполне естественно, что точность моделирования на R-сетках ниже, чем точность работы ЦВМ и, кроме того, она сильно зависит от качества аналогового оборудования. В настоящее время созданы ГВС с R-сетками, имеющие погрешности аналоговых расчетов не выше 0,1 %, что достаточно для многих практических задач. Однако при решении обратных задач этот фактор может вызвать дополнительные трудности, связанные с необходимостью учета погрешностей вычислений при выборе нужного приближения к искомому решению

---

*Cheu W., McNamee L.P. Iterative Solution of Large–Scale Systems by Hybrid Techniques. – IEEE Transactions on Computers, 1970, vol., C–19, N 10, p. 879–889.

по принципу невязки. Тем не менее, можно предположить, что и в этом случае точностное ограничение R-сеток не является принципиальным. Объединение сеточного процессора с ЦВМ позволяет не только значительно увеличить скорость решения задач, но и существенно повысить точность результатов с помощью итерационных процессов, уточняющих решения алгебраических систем.

Подводя общий итог этому рассмотрению, можно утверждать, что дискретные методы решения двумерных и нелинейных обратных задач теплопроводности в целом ряде случаев более эффективно реализуются на цифроаналоговой системе в сравнении с ЦВМ.

Выводы

Описаны гибридные алгоритмы решения обратных задач теплопроводности, предназначенные для реализации их на аналого-цифровых вычислительных комплексах. Показано, что в настоящее время обработка экспериментальной информации по методам обратных задач теплообмена в целом ряде случаев может быть выполнена более эффективно с помощью гибридных вычислительных систем по сравнению с цифровыми машинами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы обратных задач теплообмена дают возможность разрабатывать достаточно общие и универсальные методики идентификации процессов теплопередачи в различных конструкциях и технологических процессах, повышать достоверность и информативность теплофизических исследований при проектировании и экспериментальной отработке технических объектов, осуществлять эффективную тепловую диагностику машин и оборудования в условиях их эксплуатации.

Среди рассмотренных в данной книге методов решения обратных задач наиболее универсальным является итерационная регуляризация. Этот метод в настоящее время нашел широкое практическое использование для решения обратных задач различных типов и постановок, что конечно не исключает успешного применения других подходов, которые в ряде случаев могут оказаться более рациональными. В частности, прямые методы (алгебраический и численные) решения граничных ОЗТ оказываются особенно полезными и удобными для экспресс-обработки экспериментальных данных и в тех случаях, когда требуется проводить обработку результатов измерений в реальном масштабе времени.

Для граничных ОЗТ области и условия рационального практического использования разработанных методов можно представить в виде табл. 3.1 (+ — применение метода возможно; — — применение метода невозможно или нецелесообразно).

Таблица 3.1

Особенности применения методов	Прямой приближенно-аналитический метод (гл. 4)	Прямые численные методы (гл. 5)	Метод итерационной регуляризации (гл. 6 и 8)	Регуляризованный алгебраический метод (гл. 7)	Регуляризованный численный метод (гл. 7)
Постановка ОЗТ					
Линейная с постоянными ТФХ	+	+	+	+	+
Нелинейная или линейная с переменными ТФХ	–	+	+	–	+
Однородное уравнение теплопроводности	+	+	+	+	+
Обобщенное уравнение теплопроводности	–	+	+	–	+
Неподвижные границы тела	+	+	+	+	+
Подвижные границы тела	в одномерном случае	+	+	в одномерном случае	+
Неподвижные термодатчики	+	+	+	+	+
Подвижные термодатчики	–	+	+	–	+
Одномерная	+	+	+	+	+
Двумерная	для областей простой формы	+	+	для областей простой формы	–
Переопределенная	–	–	+	–	–
Исследование:					
Тепловых нагрузок	+	+	+	+	+
Температурных полей	–	+	+	–	+
Медленноменяющихся во времени теплообменных процессов (ТП)	+	+	+	+	+
Быстроменяющихся и кратковременных ТП	–	–	+	+	+
Низкотемпературных ТП	+	+	+	+	+

Продолжение таблицы 3.1

Особенности применения методов	Прямой приближенно-аналитический метод (гл. 4)	Прямые численные методы (гл. 5)	Метод итерационной регуляризации (гл. 6 и 8)	Регуляризованный алгебраический метод (гл. 7)	Регуляризованный численный метод (гл. 7)
Высокотемпературных ТП существенно переменной интенсивности	–	+	+	–	+
В условиях малой тепловой глубины установки термодатчиков	+	+	+	+	+
В условиях большой тепловой глубины установки термодатчиков	–	–	+	+	+
Теплового режима конструктивных металлических элементов	+	+	+	+	+
Теплового режима теплозащиты и теплоизоляции	–	для материалов с высокой теплопроводностью	+	+	+
Алгоритмические особенности					
Сложность алгоритмов	простые	средней сложности	повышенной сложности		сложные
Ограничения устойчивости на величину расчетных шагов	весьма жесткие	жесткие	отсутствуют		
Предварительное сглаживание входных данных при больших уровнях погрешностей	необходимо		не обязательно		

Получение требуемой степени гладкости результатов	–	–	+	+	
Учет количественной априорной информации о решении	–	–	+	трудноосуществимо	
Машинная реализация					
ЭЦВМ	+	+	+	+	+
ГВС	–	для неявной разностной схемы	+	+	+
Затраты машинного времени	малые	малые, средние	средние		большие
Вычисления в реальном масштабе времени	+	+	+		–

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алгоритмы** диагностики тепловых нагрузок летательных аппаратов / Под ред. акад. В.П. Мишина. М.. Машиностроение. 1983. 168 с.

2. **Алдошин Г.Т., Голосов А.С., Жук В.И.** Решение обратной задачи нестационарной теплопроводности для пластины // Тепло- и массоперенос. Минск: Наука и техника. 1968. Т. 8. С. 186–199.

3. **Алифанов О.М.** Решение задачи нестационарной теплопроводности и ее применение для исследования теплозащитных материалов // Исследования нестационарного конвективного тепло- и массообмена. Минск: Наука и техника. 1971. С. 322–333.

4. **Алифанов О.М.** Решение обратной задачи теплопроводности итерационными методами // ИФЖ. 1974. Т. 26. № 4. С. 682–689.

5. **Алифанов О.М.** Определение тепловых нагрузок из решения нелинейной обратной задачи // ТВТ. 1977. Т. 15. № 3. С. 598–605.

6. **Алифанов О.М.** Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1979. 216 с.

7. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А.** Определение граничных условий в процессе тепловых газодинамических испытаний // ТВТ. 1978. Т.16. № 4. С. 819–825.

8. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Трянин А.П.** Определение плотности теплового потока на границе пористого тела из решения обратной задачи // ТВТ. 1983. Т. 21. № 6. С. 1160–1168.

9. **Алифанов О.М., Клибанов М.В.** Об условиях единственности и методе решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 6. С. 998–1003.

10. **Алифанов О.М., Михайлов В.В.** Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности итерационным методом // ИФЖ. 1978. Т. 35. С.1124–1129.

11. **Алифанов О.М., Михайлов В.В.** Определение тепловых нагрузок по данным измерений температуры в твердом теле // ТВТ. 1983. Т. 21. № 5. С. 944–951.

12. **Алифанов О.М., Румянцев С.В.** Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 6. С. 1289–1291.

13. **Алифанов О.М., Румянцев С.В.** Регуляризирующие итерационные алгоритмы для решения обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1980. Т. 39. № 2. С. 253–258.

14. **Артюхин Е.А.** Восстановление коэффициента теплопроводности из решения нелинейной обратной задачи // ИФЖ. 1981. Т. 41. № 4. С. 587–592.

15. **Артюхин Е.А.** Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности из решения обратной задачи // ТВТ. 1981. Т. 19. № 5. С. 963–967.

16. **Артюхин Е.А.** Планирование измерений для решения коэффициентных обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 3. С. 490–495.

17. **Артюхин Е.А., Охапкин А.С.** Параметрический анализ точности решения нелинейной обратной задачи по восстановлению коэффициента теплопроводности композиционного материала // ИФЖ. 1983. Т. 45. № 5. С. 781–783.

18. **Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Об оптимальном выборе шагов спуска в градиентных методах решения обратных задач теплопроводности // ИФЖ. 1980. Т. 39. № 2. С. 264–269.

19. **Бакушинский А.Б.** К распространению принципа невязки // ЖВМ и МФ. 1970. Т. 10. № 1. С. 210–214.

20. **Беркович Е.М., Будак Б.М., Голубева А.А.** О применении градиентных методов минимизации к решению некоторых некорректных обратных задач для уравнения теплопроводности. // Приближенные методы решения задач оптимального уравнения и некоторых некорректных обратных задач. М.: Изд. МГУ. 1972. С. 112–124.

21. **Будак Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б.** Разностные схемы с выпрям-

лением фронтов для решения многофронтовых задач типа Стефана. // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд. МГУ. 1967. Вып. VI. С. 206–216.

22. Будник С.А. О задаче планирования тепловых измерений // ИФЖ. 1980. Т. 39. № 2. С. 225–230.

23. Бургграф. Точное решение обратной задачи в теории теплопроводности и ее приложениях. Пер. с англ. // Теплопередача, 1964, № 3. С. 94–106.

24. Бут Е.Н. Сплайн-идентификация как метод решения некорректно поставленных обратных задач теплопроводности общего вида // Тепломассообмен. Минск: Наука и техника, 1980. Т. IX. С. 128–131.

25. Вабищевич П.Н. Численное решение обратной задачи теплопроводности с использованием регуляризованных разностных схем // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 963–965.

26. Вайникко Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: Изд. Тартусского ун-та. 1982. 111 с.

27. Ваничев А.П. Приближенный метод решения задач теплопроводности в твердых телах. // Изв. АН СССР, ОТН. 1946. № 12. С. 1767–1774.

28. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1981. 400 с.

29. Волков В.М. Обратная задача для уравнения теплопроводности с двумя коэффициентами // Вопросы корректности обратных задач математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1982. С. 50–61.

30. Воскобойников Ю.Е., Преображенский Н.Г., Седельников А.И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука. 1984. 240 с.

31. Гилязов С.Ф. Об итерационных методах решения линейных несовместных уравнений с несамосопряженными операторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. выч. мат. и киберн. 1977. Т. 1. № 4. С. 12–19.

32. Гилязов С.Ф. Нелинейный регуляризирующий алгоритм, основанный на методе сопряженных градиентов // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд. МГУ. 1984. С. 176–182.

33. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: Изд. МГУ. 1984. 112 с.

34. Гончарский А.В., Ягола А.Г., Леонов А.Г. Обобщенный принцип невязки // ЖВМ и МФ. 1973. Т.13. № 2. С. 294–302.

35. Горячев А.А., Юдин В.М. Решение обратной коэффициентной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1982. Т. 43. № 4. С. 641–648.

36. Гутенмахер Л.И., Тимошенко Ю.А., Тихончук С.Т. О динамическом методе решения некорректных задач // ДАН СССР. 1977. Т. 237. № 4. С. 776–778.

37. Денисов А.М. Единственность решения некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22. № 4. С. 858–864.

38. Дормодихина Н.Ф., Косарев А.А., Косарева Л.И., Миловская Л.С. О решении обратной контактной задачи теплообмена в прямоугольной пластине // ИФЖ. 1983. Т. 45. С. 756–760.

39. Емелин И.В., Красносельский М.А. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач // Автоматика и телемеханика. 1978. № 2. С. 59–63.

40. Жук В.И., Голосов А.С. Инженерные методы определения тепловых граничных условий по данным температурных измерений // ИФЖ. 1975. Т. 29. № 1. С. 45–50.

41. Иванов В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 6. С. 1089–1093.

42. Искендеров А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 5. С. 890–898.

43. Ишамназаров Б. Релаксационный метод решения нелинейной некорректной задачи // ЖВМ и МФ. 1978. Т. 18. № 1. С. 3–9.

44. **Камынин Л.И.** О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. – Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28. С. 721–744.

45. **Карслоу У., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964. 487 с.

46. **Керов Н.В.** Решение двумерной ОЗТ в цилиндрической системе координат// ИФЖ. 1983. Т. 45. № 5. С. 752–756.

47. **Клибанов М.В.** Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // ДАН СССР, 1985. Т. 280. № 3. С. 533–536.

48. **Коздоба Л.А.** Решение нелинейных задач теплопроводности. Киев: Наукова думка, 1976. 136 с.

49. **Коздоба Л.А., Круковский П.Г.** Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наукова думка. 1982. 359 с.

50. **Колесников П.М., Протодьяконова Т.Г.** Нелинейная обратная задача восстановления коэффициентов переноса // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 909–915.

51. **Кочетов И.И.** О новом способе выбора параметра регуляризации // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 499–503.

52. **Крянев А.В.** Итерационный метод решения некорректных задач // ЖВМ и МФ. 1974. Т.14. № 1. С. 25–35.

53. **Кузьмин М.П., Лагун И.М., Лагун С.В.** Решение обратных задач теплопроводности на специализированных АВМ // ИФЖ. 1977. Т. 33. № 6. С. 1125–1130.

54. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. АН СССР. 1962. 92 с.

55. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука. 1980. 288 с.

56. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. 736 с.

57. **Ландис Е.М.** Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. № 1. С. 21–85.

58. **Лыков А.В.** Тепломассообмен. Справочник. М.: Энергия. 1972. 560 с.

59. **Макаров А.М., Романовский М.Р.** Решение обратных коэффициентных задач методом регуляризации с использованием сплайн-функций // ИФЖ. 1978. Т. 34. № 2. С. 332–337.

60. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.

61. **Мацевитый Ю.М.** Электрическое моделирование нелинейных задач технической теплофизики. Киев: Наукова думка. 1977. 254 с.

62. **Мацевитый Ю.М., Мултановский А.В.** Идентификация в задачах теплопроводности. Киев: Наукова думка. 1982. 240 с.

63. **Михайлов В.В.** К вопросу сходимости итерационных методов решения обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1983. Т. 45. № 5. С. 770–773.

64. **Мишин В.П., Алифанов О.М.** Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. Ч. I. Общие вопросы теории // Машиноведение. 1986. № 5. С. 19–29.

65. **Мишин В.П., Алифанов О.М.** Повышение качества отработки теплонагруженных конструкций и обратные задачи теплообмена. Ч. II. Практические приложения // Машиноведение. 1986. № 6. С. 11–21.

66. **Моделирование** тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды // Л.В. Козлов, М.Д. Нусинов, А.И. Акишин и др.; Под ред. акад. Г.И. Петрова. М.: Машиностроение. 1971. 382 с.

67. **Морозов В.А.** О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 1. С. 170–175.

68. **Морозов В.А.** О регуляризирующих семействах операторов // Вычислительные методы и программирование. 1967. вып. 8. М.: Изд. МГУ. С. 63–93.

69. **Морозов В.А.** О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 2. С. 295–309.

70. **Музылев Н.В.** О единственности одновременного определения коэффи-

циентов теплопроводности и объемной теплоемкости // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 23. № 1. С. 102–108.

71. Нарожный Ю.Г., Полежаев Ю.В., Кириллов В.Н. Некоторые результаты исследования теплопроводности стеклопластиков // ИФЖ. 1975. Т. 29. № 1. С. 77–80.

72. Нестационарный теплообмен / В.К. Кошкин, Э.К. Калинин, Г.А. Дрейцер и др. – М.: Машиностроение, 1973. 328 с.

73. Никитенко Н.И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. Киев: Наукова думка. 1978. 212 с.

74. Оганесян С.М., Старостенко В.И. О корректности постановок задач геофизики, представленных в виде систем уравнений, и интегральных методах их решения // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1978. № 8. С. 54–64.

75. Омельченко К.Г., Пчелкина В.Г. Решение обратной задачи нелинейной теплопроводности по определению теплофизических характеристик // ИФЖ. 1975. Т. 29. № 1. С. 95–98.

76. Омельченко К.Г., Савелов М.В., Тимошенко В.П. К исследованию процессов тепломассообмена в разлагающихся пористых материалах // ТВТ. 1974. Т. 12. № 4. С. 761–768.

77. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдуевский, Б.М. Галицейский, Г.А. Глебов и др.; Под ред. проф. В.К. Кошкина. М.: Машиностроение. 1975. 623 с.

78. Охапкин А.С. Исследование характеристик теплопереноса композиционного теплозащитного материала // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 989–994.

79. Панкратов Б.М., Полежаев Ю.В., Рудько А.К. Взаимодействие материалов с газовыми потоками. М.: Машиностроение. 1975. 224 с.

80. Полежаев Ю.В., Нарожный Ю.Г., Сафонов В.Е. Метод определения коэффициента теплопроводности высокотемпературных материалов при их нестационарном нагреве // ТВТ. 1973. Т. 11. № 3. С. 609–615.

81. Прилепко А.И., Иванков А.Л., Соловьев В.В. Обратные задачи для уравнения переноса и уравнений параболического типа // Единственность, устойчивость и методы решения некорректных задач математической физики и анализа. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1984. С. 137–142.

82. Просунцов П.В., Резник С.В. Определение теплофизических свойств полупрозрачных материалов // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 977–982.

83. Романовский М.Р. О единственности решения обратной коэффициентной задачи для линейного уравнения теплопроводности // ИФЖ. 1982. Т. 42. № 3. С. 476–483.

84. Румянцев С.В. Регуляризирующие градиентные алгоритмы и их приложения к задачам обработки и интерпретации данных физических экспериментов. – Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ. 1981. 18 с.

85. Румянцев С.В. Способы учета априорной информации в регуляризирующих градиентных алгоритмах // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 932–936.

86. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1977. 656 с.

87. Сарв Л. Одно семейство нелинейных итерационных методов для решения некорректных задач // Изв. АН Эст. ССР. Сер. Физика, математика. 1982. Т. 31. № 3. С. 261–269.

88. Симбирский Д.Ф. Температурная диагностика двигателей. Киев: Техника. 1976. 208 с.

89. Симбирский Д.Ф., Бут Е.Н. Измерение тепловых потоков одномерными термоприемниками с применением фильтра Кальмана и сплайн-аппроксимации // Экспериментальные методы газотурбинных двигателей. Харьков. 1975. Вып. 2. С. 33–43.

90. Смольский Б.М., Сергеева Л.А., Сергеев В.Л. Нестационарный теплообмен. Минск: Наука и техника. 1974. 157 с.

91. Смышляева С.В., Юдин В.М. Экспериментальное исследование термического сопротивления в конструктивных соединениях. – Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 2. С. 66–72.

92. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука. 1976. 248 с.

93. Страхов В.Л., Леонова С.И., Гаращенко А.И. Некоторые результаты определения температурных зависимостей теплофизических характеристик композиционных полимерных материалов // ИФЖ. 1977. Т. 33. № 6. С. 1047–1051.

94. Страхов В.Н. О методе последовательных приближений для линейных уравнений в гильбертовом пространстве // ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13. № 4. С. 1041–1044.

95. Темкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия. 1973. 464 с.

96. Теплообмен и тепловой режим космических аппаратов / Пер. с англ., Под ред. д-ра техн. наук Н.А. Анфимова. М.: Мир. 1974. 543 с.

97. Тихонов А.Н. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. МГУ. Секция А. 1938. Т. 1. Вып. 9. С. 1–49.

98. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.

99. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.

100. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 288 с.

101. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 463–473.

102. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 735 с.

103. Трушников В.Н. О регуляризирующих свойствах нелинейных итеративных методов и их применении в некоторых обратных задачах // ИФЖ. 1985. Т. 49. № 6. С. 954–958.

104. Фролов В.В. Теоремы единственности решения обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. 1975. Т. 29. № 1. С. 145–150.

105. Черский И.Н., Богатин О.Б., Старостин Н.П. Идентификация тепловой нагрузки подшипника скольжения в нестационарный период трения // ИФЖ. 1984. Т. 47. № 6. С. 1000–1006.

106. Шаталов Ю.С., Пучков Н.П., Провоторов А.В., Трофимов А.В. О восстановлении переменных параметров переноса // Тепломассообмен VI. Минск: ИТМО АН БССР. 1980. Т. 9. С. 142–145.

107. Шашков А.Г. Системно-структурный анализ процесса теплообмена и его применение. М.: Энергоатомиздат. 1983. 280 с.

108. Шумаков Н.В. Метод экспериментального изучения процесса нагрева твердого тела // ЖТФ. 1957. Т. 27. № 4. С. 844–855.

109. Шумаков Н.В. Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов. М.: Атомиздат. 1979. 216 с.

110. Юдин В.М. Распространение тепла в стеклопластиках // Труды ЦАГИ. Вып. 1267. М.: Изд. ЦАГИ. 1970. 41 с.

111. Beck J.V. Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History. ASME Paper 62–HT–46, 1962, 11 p.

112. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R., Jr. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. A Wiley-Interscience Publication, New York, 1985, 308 p.

113. Beck J.V., Wolf H. The Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem. ASME Paper 65-HT-40, 1965, 11 p.

114. Lotkin M. The Numerical Integration of Heat Conduction Equations. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, No 2. P. 178–187.

115. Nashed M.Z. Steepest Descent for Singular Linear Operator Equations. SIAM J. Numer. Anal., 1970, vol. 7, No 3. P. 358–362.

116. Protter M.H. Properties of Solutions of Parabolic Equations and Inequalities. Canad. J. Math., 1961, vol. 13. P. 331–345.

117. Reinsch C.H. Smoothing by Spline Functions. Numerische Mathematik, Bd, 10, 1967, p. 177–183

118. Stolz G. Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes. J. Heat Transfer, 1960, vol. 82, No 1, p. 20–26.
119. Weber C.F. Analysis and Solution of the I11-Posed Inverse Heat Conduction Problem. Int. J. Heat Mass Transfer, 1981, vol. 24 (11), p. 1783–1792.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аппроксимационная (схемная) вязкость 93
Аппроксимация граничных функций
– – – ступенчатая (кусочно-постоянная) 44, 67, 79, 112
– уравнения теплопроводности разностной схемой 83, 85 – 88, 91, 100 – 103, 227, 228, 239 – 241, 258 – 261

В

Вольтерра уравнение 33, 50, 51, 60
Вольтерра–Фредгольма уравнение 57, 66
Восстановление источника в уравнении теплопроводности 24, 222, 239
– тепловых нагрузок (граничных условий) 13
Восстанавливаемость граничного условия 70

Г

Градиент 113, 116, 192
– невязки 153, 157, 167, 200, 206
– – , определение из решения сопряженной задачи 119, 133, 176, 177, 180, 182, 187, 189, 213, 222, 226 – 227
– – , – через функцию Грина 158 – 165, 211
Грина функция (функция влияния) 53, 65, 78, 157

Д

Датчик тепловых потоков 22 – 24
– – – , чувствительный элемент 22 – 24
Дифференциальное приближение разностного уравнения 94, 95
Дюамеля принцип (интеграл) 33, 40, 64, 67

Е

Единственность решения ОЗТ 37 – 42, 155, 156, 167
– – –, способ доказательства 39
– – –, физическая интерпретация 38, 39

З

Задача теплообмена обратная 10, 15 – 20, 36, 40, 169, 170, 181, 182, 185, 213, 216, 221, 224
– теплопроводности в приращениях 38 – 39
– – прямая 10
– – псевдообратная 74, 75
– – сопряженная 119, 133, 174, 179 – 182, 186, 213, 217, 226
– – –, методика построения 171 – 182, 183 – 189

И

Идентификация 9, 14, 26
Интегральная форма ОЗТ двумерная 66, 77 – 78
– – –, использующая метод тепловых потенциалов 56 – 58, 60
– – –, – – фиктивных границ 64, 66
– – –, – – функций влияния 53, 66, 78, 156, 157
– – –, – принцип Дюамеля 34, 64
– – –, некорректность 34, 36
– – – одномерная 33, 50, 64
– – –, регуляризация 135 – 138, 149, 150
– – – трехмерная 53 – 60
Информация априорная 111, 190, 221
– –, учет гладкости искомой функции 190 – 199, 200 – 203, 205, 206, 211, 212
– –, – значений функции и производных 194 – 197, 203 – 205
Итерационный процесс (алгоритм) решения ОЗТ 111, 113 – 117, 152, 153

К

Кирхгофа постановка (модельная температура) 118
Ковалевской теорема 41
Корректность постановки задачи 32
Коэффициент теплоотдачи, определение 14
Коэффициенты алгебраического решения ОЗТ 67 – 69
– – – –, физическая интерпретация 69

Л

Ляпунова поверхность 56

М

Математическая тепловая модель 8
– – –, идентификация 9
Матричное уравнение алгебраической формы ОЗТ, прямой метод 68, 79, 80
– – – – – –, регуляризованный метод 137, 149
– – конечно-разностной формы ОЗТ 84, 85
Метод решения алгебраический (приближенно-аналитический) 67 – 69, 78 – 80
– – – – регуляризованный 136 – 138, 149, 150
Метод решения ОЗТ итерационный 111, 112
– – – – скорейшего спуска 114, 116, 152, 200
– – – – – – модифицированный 195, 211
– – – – сопряженных градиентов 114, 117, 153, 219, 223
– – – – – – модицифированный 195, 198
– – – разностный 83 – 86, 100 – 102
– – – –, неявная схема 10
– – – –, регуляризация 146 – 148
– – – –, явные схемы 87, 88
– – – фиктивных границ 40, 62 – 66
Метод сравнительных испытаний 22
Методы решения обратных задач прямые 43, 45
– – – –, регуляризованные по методу Тихонова 47 – 49
Моделирование 8
– тепловое 8, 9

Н

Направление итерационного спуска допустимое 114, 116
– – –, глубина (длина, шаг) 113 – 117, 120, 134, 152, 153, 214
Невязка 36, 37, 109, 110, 113 – 133
–, регуляризованный принцип 139, 147
–, с "весами" 77, 140, 159
Некорректно поставленная задача 10, 32
Неустойчивая постановка граничной ОЗТ вариационная (экстремальная) 35 – 36, 111
– – – – в форме рядов 35
– – – – интегральная 33, 34, 53, 56 – 60, 64, 66, 77 – 78
– – – – конечно-разностная 90, 103
– – – – физическая интерпретация 69 – 71
– – обратной задачи теплообмена в технической системе 36 – 37
Норма 90; 113

О

Обновление итераций 154
Обратные задачи теплообмена 10, 11
– – – в технической системе (системе тел) 18, 27, 36, 188
– – комбинированного теплообмена 17
– – конвективного теплообмена 15
– – кондуктивно-конвективного теплообмена 19
– – кондуктивно-радиационного теплообмена 19
– – радиационного теплообмена 15
– – теплопроводности 11
– – –, геометрическая постановка 14
– – – граничные 35, 37, 108 – 110, 133
– – – –, вариационная (экстремальная) постановка 35, 37, 108 – 110, 133
Обратные задачи теплопроводности граничные двумерные 65, 77, 133, 149, 197, 234, 258
– – – – для тел (областей) с подвижными границами 38 – 41, 50, 64, 65, 164, 166, 179, 181, 212
– – – –, классификация постановок 33
– – – –, краевая постановка 33, 54, 62, 66, 87
– – – – нелинейные 82, 103, 118, 128, 146, 165, 212
– – – –, постановка Коши (продолжение температурного поля) 34, 58, 63, 87, 100, 196
– – – – трехмерные 51, 54, 58, 60 – 61
– – –, классификация 13 – 14
– – –, комбинированные постановки 14
– – – коэффициентные 14, 30, 218
– – – переопределенные 14
– – –, ретроспективная постановка 13, 155, 166
Обусловленность задачи 35, 72, 89, 139, 229
– –, связь с собственными числами (значениями) 138 – 139

Операторная форма обратной задачи 32, 135, 151, 156 – 164, 167
Оптимизация в решении ОЗТ параметрическая 107, 112, 175, 205, 218 – 219
– – – – –, геометрическая интерпретация 114
– – – – функциональная (оптимальное управление) 107, 116
Останов итерационного процесса 112, 207
– – – по дополнительному измерению 207, 232
– – – по невязке 112, 119 – 120, 127, 207, 236, 238
– – – по приращению функционала 209
– – – по слипанию 123, 209
Охлаждение пористое 19, 25

П

Параметризация искомой функции 176, 205, 218
Планирование эксперимента 4, 237
Плотность теплового потенциала 56, 58, 60
– – потока 14, 21 – 24, 32
Погрешность (ошибка) аппроксимации 48, 68, 112, 139, 145, 152
– входных данных 44, 48, 112, 120, 125, 135, 147, 152
Приведение краевой задачи теплопроводности к однородной постановке (нулевому начальному условию, нулевому источнику) 54 – 55
Проектирование тепловое 29

Р

Регуляризация градиентных методов 119 – 120, 151 – 154
– некорректно поставленных задач по методу Тихонова 47, 135
Регуляризация решений ОЗТ 42
– – – естественная (саморегуляризация) 43 – 46
– – – итерационная 49, 110 – 112, 119 – 120, 151
– – – –, правило (критерий) останова 112, 120, 123, 127, 129 – 131, 153 – 154, 207
– – – шаговая 43, 45 – 46, 67, 71, 81
– – – –, выбор шага 44, 71 – 77, 95 – 99, 103
– – – – за счет схемной вязкости 93
– – – по методу Тихонова 135 – 138
Регуляризирующий алгоритм 48 – 135
– – градиентный 152 – 155
– оператор 47 – 48, 152
Регуляризованная постановка ОЗТ бесконечномерная 136
– – – приближенно-аналитическая 136 – 138
– – – разностная 146 – 148
Рекуррентные формулы решения ОЗТ 68, 69, 80, 86
Релаксация, фиктивное время

С

Сглаживание входных данных 77, 98, 124, 131, 209
Способ точечной ошибки в анализе устойчивости алгоритма 73, 91
Суперпозиции принцип 33, 64, 69

Т

Тепловой потенциал 56, 58
– –, условие скачка (формулы перехода) 56, 59
Теплообменный процесс, причинно-следственная связь 9 – 10
– –, причинные характеристики 9
– –, следственные характеристики 9
Теплопроводности уравнение гиперболическое 94, 104
– –, искусственная гиперболизация 104
– – обобщенное 12, 155, 165
– –, продолжение решения (*см.* Обратные задачи теплопроводности граничные, постановка Коши)

У

Устойчивость алгебраической формы ОЗТ, достаточное условие 72, 74
– – – –, критический шаг аппроксимации 71, 74 – 76
– итерационного решения ОЗТ к погрешностям аппроксимации и округления 123, 129
– – – – к погрешностям входных данных 125, 131
– разностных схем 89
– – – слабая 90, 103
– численного решения ОЗТ 91, 99, 103
– – – – допустимый шаг 95, 103

Ф

Фредгольма уравнение 36
Фреше производная 167, 200
Функционал-невязка 36, 37, 109, 110, 133, 158, 159, 160, 162, 163, 167, 172, 179, 183, 189, 197, 200, 210, 212, 218, 223
– –, допустимый уровень минимизации 112, 120, 123

Э

Эйлера уравнение 35, 136

Я

Ядро интегрального уравнения 34, 68, 135
– – –, связь с явлением неустойчивости 72, 74 – 76, 96

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Основные условные обозначения 5

Глава 1. Постановки и области применения обратных задач при исследовании процессов теплообмена и проектировании технических объектов 8
1.1. Моделирование теплообменных процессов 8
1.2. Обратные задачи теплообмена 9
1.3. Практические приложения и роль обратных задач в тепловых исследованиях 21

Глава 2. Анализ корректности обратных задач теплообмена 31
2.1. Устойчивость решения обратных задач 31
2.2. Единственность решения обратных задач теплопроводности 37
2.3. Принципы регуляризации решений некорректных обратных задач 42

Глава 3. Аналитические формы граничных обратных задач теплопроводности 50
3.1. Определение нестационарных граничных условий в одномерной постановке 50
3.2. Аналитические формы решения многомерных обратных задач 51
3.3. Метод фиктивных границ для решения граничных обратных задач 62

Глава 4. Прямой алгебраический метод расчета нестационарных тепловых нагрузок 66
4.1. Построение рекуррентного алгоритма 66
4.2. О восстанавливаемости граничного условия 69
4.3. Принцип шаговой регуляризации и определение границ применимости метода 71
4.4. Алгоритмизация двумерной обратной задачи теплопроводности 77

Глава 5. Решение граничных обратных задач теплопроводности прямыми численными методами 81
5.1. Построение разностных алгоритмов на основе явных схем продолжения температурного поля 81
5.2. О критерии устойчивости разностного метода решения граничной обратной задачи 89
5.3. Исследование устойчивости численного решения обратных задач 91
5.4. Неявная схема численного решения обратной задачи 100
5.5. Об искусственной гиперболизации уравнения теплопроводности при решении граничной обратной задачи 104

Глава 6. Экстремальные постановки обратных задач теплообмена и методы их решения 107
6.1. Граничная обратная задача в экстремальной постановке 107
6.2. Итерационный принцип регуляризации 110
6.3. Параметрическая оптимизация при решении обратной задачи теплопроводности 112
6.4. Функциональная оптимизация в обратных задачах 116
6.5. Выбор приближения при решении обратных задач теплопроводности градиентными методами 119
6.6. О методах градиентной минимизации 121

6.7. Экспериментальное исследование алгоритмов 122
6.8. Численное определение тепловых нагрузок при переменных теплофизических характеристиках тела 128
6.9. Итерационный подход к определению нестационарных тепловых нагрузок в двумерном случае 133

Глава 7. Регуляризация вариационных постановок обратных задач теплопроводности 135
7.1. Регуляризованный алгоритм решения обратной задачи 135
7.2. О допустимой степени сглаживания и выборе приближения 138
7.3. Анализ точности восстановления граничных тепловых режимов 140
7.4. Регуляризованное продолжение решения нелинейного уравнения теплопроводности 146
7.5. О регуляризации двумерной обратной задачи 149

Глава 8. Итерационная регуляризация обратных задач 151
8.1. О строгом обосновании итерационной регуляризации 151
8.2. Общая постановка и интегральные формы линейных ОЗТ. Градиент функционала-невязки 155
8.3. Общая постановка нелинейных ОЗТ. Задача для приращения температуры 165
8.4. Сопряженные задачи и градиент функционала 171
8.5. Учет априорной информации в градиентных алгоритмах 190
8.6. Примеры построения алгоритмов решения обратных задач 210
8.7. Вычислительные эксперименты 227

Глава 9. Принципы гибридных вычислений при обработке результатов теплофизических исследований по методам обратных задач 242
9.1. О построении вычислительных систем для обработки результатов теплофизических исследований с использованием методов обратных задач 243
9.2. Гибридный способ восстановления граничных условий 250
9.3. Гибридный расчет коэффициентов регуляризованной системы 251
9.4. О гибридном решении обратных задач теплопроводности итерационными методами 255
9.5. Дискретные методы решения обратных задач теплопроводности на цифроаналоговых системах 264
Заключение 266
Список литературы 270
Предметный указатель 275

Научное издание

АЛИФАНОВ ОЛЕГ МИХАЙЛОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА

Редактор *Г.П. Филипповская*
Художественный редактор *В.В. Лебедев*
Переплет художника *Е.В. Бекетова*
Технический редактор *О.В. Чеботарева*
Корректоры *О.Е. Мишина, Л.А. Ягупьева*

ИБ № 5807

Сдано в набор 24.05.87. Подписано в печать 10.02.88. Т – 05145.
Формат бумаги 60X88 1/16. Бумага офсетная № 2. Гарнитура Пресс Роман.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,15. Усл. кр.-отт. 17,39. Уч.-изд. л. 18,07.
Тираж 2300 экз. Заказ 99 Цена 4 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение", 107076, Москва, Стромынский пер., 4.

Отпечатано в Московской типографии № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 101898, Москва, Хохловский пер., 7, с оригинала-макета, изготовленного в издательстве "Машиностроение" на наборно-пишущих машинах